## ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

*Дослідити на стійкість розв'язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y'=f(x,y)$*, що задовольняє початковій умові* $\varphi(x_0)=y_0$*, використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

**1.1.** $y'=\dfrac{1-2x}{y^2}$, $\varphi(0)=1$.

**1.2.** $y'=(1+y)\operatorname{ctg}x$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

**1.3.** $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1)=e^2$.

**1.4.** $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y}{x}}$, $\varphi(1)=0$.

**1.5.** $y'=xe^{-x^2}-2xy$, $\varphi(0)=3$.

**1.6.** $y'=\dfrac{2xy}{1+x^2}+x^2+1$, $\varphi(-1)=2$.

**1.7.** $y'=1+\dfrac{2x-1}{x^2}y$, $\varphi(1)=1+e$.

**1.8.** $y'=y^2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1)=1$.

**1.9.** $y'=\dfrac{2y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}$, $\varphi(2)=1$.

**1.10.** $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1)=1$.

*Дослідити на стійкість частинний розв'язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y''=f(x,y,y')$*, що задовольняє початковим умовам* $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=y_0'$*, використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

**2.1.** $y''=\dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x}$, $\varphi(1)=-2$, $\varphi'(1)=1$.

**2.2.** $y''=y'+x$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$.

**2.3.** $y''=\dfrac{2y'^2}{y-1}$, $\varphi(-1)=0$, $\varphi'(-1)=-0{,}5$.

**2.4.** $y''=\dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x}$, $\varphi(-1)=-2$, $\varphi'(-1)=-1$.

**2.5.** $y''=\dfrac{y'^2}{y}$, $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=-1$.

**2.6.** $y''=\dfrac{\ln y+1}{\ln y-1}\cdot\dfrac{y'^2}{y}$, $\varphi(0)=e^{-1}$, $\varphi'(0)=\dfrac{2}{e}$.

**2.7.** $y'' = \dfrac{y'^2}{y}$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1$.

**2.8.** $y'' = \dfrac{y' - xy'^2}{x+1}$, $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi'(1) = 2$.

**2.9.** $y'' = \dfrac{1 - y'^2}{y}$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi'(2) = 0$.

**2.10.** $y'' = \dfrac{-y'^2}{2y}$, $\varphi(5) = 3$, $\varphi'(5) = 2$.

*Дано однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку й частинний розв'язок однорідного рівняння* $y_1 = \varphi(x)$. *Дослідити на стійкість розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам* $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, *використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

**3.1.** $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$, $\varphi(0) = -2$, $\varphi'(0) = 4$.

**3.2.** $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$, $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$, $\varphi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

**3.3.** $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$, $y_1 = e^x$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = 1$.

**3.4.** $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, $y_1 = 4x^3 - 3x$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi'(0) = 2$.

**3.5.** $y'' - y'\,\mathrm{tg}x + 2y = 0$, $y_1 = \sin x$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 2$.

*При будь-яких початкових умовах* $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$ *дослідити на стійкість розв'язок даного диференціального рівняння, використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

**3.6.** $2y'' + 5y' = \cos^2 x$.

**3.7.** $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$.

**3.8.** $2y'' + y' - y = 12e^{-x}$.

**3.9.** $4y'' + 16y' + 15y = e^{\frac{5}{2}x}$.

**3.10.** $y'' + y + \mathrm{ctg}^2 x = 0$.

*Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь, використовуючи відповідні теореми Ляпунова про стійкість і нестійкість, характеристичні числа й умови Рауса-Гурвіца.*

**4.1.** $y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

**4.2.** $5y''' - 15y'' + y' - 2y = 0$.

**4.3.** $3y''' + 2y'' + 6y' + 3y = 0$.

**4.4.** $y''' - 2y'' + y' - y = 0$.

**4.5.** $3y^{(4)} + 10y'' - 8y = 0$.

**4.6.** $3y^{(4)} + 11y''' + 27y'' + 29y' + 10y = 0$.

**4.7.** $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \dfrac{y_2}{3}, \\ y_2' = \dfrac{y_1}{3} - y_2 + \dfrac{y_3}{3}, \\ y_3' = \dfrac{y_2}{3} - y_3. \end{cases}$

**4.8.** $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$

**4.9.** $\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_3' = -2y_2 - y_3. \end{cases}$

**4.10.** $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \\ y_2' = -y_2 - 2y_3, \\ y_3' = -2y_3. \end{cases}$

*Дослідити нульовий розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь на стійкість: за першим наближенням; за допомогою функції Ляпунова* $v$.

**5.1.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2y^3 - 4x^3, \end{cases}$ $\qquad v = x^4 + 2x^2 + \dfrac{1}{2}y^2.$

**5.2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 2y^5 - 4x^3, \end{cases}$ $\qquad v = x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}y^2.$

**5.3.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + xy - x^3 - \dfrac{1}{2}xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y + xy + x^2y - \dfrac{1}{2}xy^2, \end{cases}$ $\qquad v = 3x^2 - 2xy + y^2.$

**5.4.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^3, \end{cases}$ $\qquad v = x^4 + 2y^2.$

**5.5.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $\qquad v = x^2 + y^6.$

**5.6.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - x^2 y, \end{cases}$ $\quad v = 2x^2 + y^4.$

**5.7.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y - x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y^3, \end{cases}$ $\quad v = 3x^2 + 4y^2.$

**5.8.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y - 2x^3 - 4y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $\quad v = \dfrac{1}{2}x^2 + 2y^2 + y^4.$

**5.9.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x\left(x^2 + y^4\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y\left(x^2 + y^4\right), \end{cases}$ $\quad v = x^2 + y^2.$

**5.10.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + xy + xy^3 - \dfrac{1}{2}x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + xy - y^3 - \dfrac{1}{2}x^2 y, \end{cases}$ $\quad v = x^2 - 2xy + 3y^2.$

*Дослідити на стійкість нульовий розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь.*

**6.1.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(3 + \sin y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(1 + \cos 2x). \end{cases}$

**6.2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x(1 + \cos y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(2 + \sin x). \end{cases}$

**6.3.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(e^x - 1\right) - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \sin y. \end{cases}$

**6.4.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y\cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y + y^2 e^y. \end{cases}$

**6.5.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{1-6x} + 2y - 1. \end{cases}$

**6.6.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{4+8x} - 2e^{y}. \end{cases}$

**6.7.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 2\sin y, \\ \dfrac{dy}{dt} = e^{x} - 3y - 1. \end{cases}$

**6.8.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln\left(4x + e^{-3y}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 1 + \sqrt[3]{1-6y}. \end{cases}$

**6.9.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + e^{y} - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\sin x - 5y. \end{cases}$

**6.10.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 1 + \sqrt[3]{1-6y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln\left(4x + e^{-3y}\right). \end{cases}$

*Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова.*

**7.1.** $y^{(4)} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0$.

**7.2.** $y^{(4)} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0$.

**7.3.** $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

**7.4.** $y^{(4)} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0$.

**7.5.** $y^{(4)} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0$.

**7.6.** $y^{(4)} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0$.

**7.7.** $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$.

**7.8.** $y^{(4)} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$.

**7.9.** $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0$.

**7.10.** $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0$.

*Дослідити на стійкість нульовий розв'язок різницевих рівнянь, використовуючи критерій Рауса-Гурвіца.*

**8.1.** $11f(n+4)-8f(n+3)+8f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.
**8.2.** $f(n+4)+f(n+3)+f(n)=0$.
**8.3.** $12f(n+4)-3f(n+3)+2f(n+2)+2f(n+1)-2f(n)=0$.
**8.4.** $7f(n+4)-4f(n+3)+30f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=0$.
**8.5.** $f(n+4)+2f(n+3)+4f(n+2)+2f(n+1)+5f(n)=0$.
**8.6.** $f(n+4)+2f(n+2)+8f(n+1)+5f(n)=0$.
**8.7.** $f(n+5)-f(n+1)+f(n)=0$.
**8.8.** $f(n+5)-f(n+2)-f(n)=0$.
**8.9.** $f(n+5)+f(n+1)-f(n)=0$.
**8.10.** $f(n+5)+4f(n+4)+5f(n+3)+2f(n+1)+4f(n)=0$.

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

1. *Дослідити на стійкість розв'язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y'=f(x,y)$, *що задовольняє початковій умові* $\varphi(x_0)=y_0$, *використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим*:

1) $y'+\dfrac{y}{x}=1+2\ln x$, $\varphi(1)=1$;

2) $y'=\dfrac{e^{2x}y}{1+e^{2x}}$, $\varphi(0)=2$;

3) $y'=y\,\mathrm{ctg}x+\dfrac{y^3}{\sin x}$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

*Розв'язання.*

1) Розв'яжемо дане лінійне рівняння:

$$y'+\frac{y}{x}=1+2\ln x;$$

заміна: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$;

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=1+2\ln x,$$

$$v\left(u'+\frac{u}{x}\right)+uv'=1+2\ln x,$$

$$u'+\frac{u}{x}=0,\ u'=-\frac{u}{x},\ \ln u=-\ln x,\ u=\frac{1}{x};$$

$$\frac{v'}{x}=1+2\ln x,\ v'=x(1+2\ln x),\ v=x^2\ln x+c;$$

$$y=f(x)=uv=\frac{1}{x}\left(x^2\ln x+c\right)=x\ln x+\frac{c}{x}.$$

Використовуючи початкову умову, обчислюємо значення довільної постійної:

$$1 = 1 \cdot \ln 1 + \frac{c}{1},\ c = 1.$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд $y = \varphi(x) = x \ln x + \frac{1}{x}$. Для того, щоб дослідити його на стійкість, виберемо будь-який інший розв'язок $y = f(x)$ даного диференціального рівняння при початкових даних $(x_0, y_0)$, що досить мало відрізняються від початкових даних $(1, 1)$. Тоді $c$ буде досить мало відрізнятися від 1 і $f(x) = x \ln x + \frac{1}{x}$. Далі

$$| f(x) - \varphi(x)| = \left| \frac{c}{x} - \frac{1}{x} \right| \to 0 \text{ при } x \to +\infty,$$

тобто модуль зазначеної різниці можна зробити меншим кожного наперед заданого $\varepsilon > 0$, що й означає, згідно з визначенням, стійкість даного частинного розв'язку. Більше того, тому що модуль цієї різниці прагне до нуля при кожному *c*, то даний частинний розв'язок стійкий асимптотично в цілому.

2) Знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння зі змінними, що розділяються:

$$y' = \frac{e^{2x} y}{1 + e^{2x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} y}{1 + e^{2x}},\ \frac{dy}{y} = \frac{e^{2x} dx}{1 + e^{2x}},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(1 + e^{2x}\right)}{1 + e^{2x}},$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln\left(1 + e^{2x}\right) + \ln c,$$

$$y = f(x) = c\sqrt{1 + e^{2x}}.$$

При даній початковій умові

$$2 = c\sqrt{1 + e^{2 \cdot 0}},\ c = \sqrt{2}$$

і $\varphi(x) = \sqrt{2}\sqrt{1 + e^{2x}}$, тому

$$| f(x) - \varphi(x)| = \left| c - \sqrt{2} \right| \sqrt{1 + e^{2x}}.$$

Якщо $x \to +\infty$, то модуль зазначеної різниці прямує до нескінченності й перевершує кожне наперед задане $\varepsilon > 0$, яке б не було $\delta > 0$. Це означає, що даний розв'язок нестійкий.

3) Загальний розв'язок даного рівняння Бернуллі буде:

$$y' = y \,\mathrm{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x},$$

$$\text{заміна: } y = uv,\ y' = u'v + uv';$$

$$u'v+uv'-uv\,\mathrm{ctg}x=\frac{u^3v^3}{\sin x},$$

$$v(u'-u\mathrm{ctg}x)+uv'=\frac{u^3v^3}{\sin x},$$

$$u'-u\mathrm{ctg}x=0,\ u'=\frac{u\cos x}{\sin x},\ \ln u=\ln\sin x,\ u=\sin x;$$

$$\sin x\,v'=v^3\sin^2 x,\ v'=v^3\sin x,\ v=\frac{1}{\sqrt{2\cos x+c}};$$

$$y=f(x)=uv=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+c}}.$$

При початковій умові

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{2}+c}},\ c=4$$

і частинний розв’язок $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+4}}$, тому

$$|f(x)-\varphi(x)|=|\sin x|\left|\sqrt{2\cos x+4}-\sqrt{2\cos x+c}\right|\cdot\left|\sqrt{2\cos x+c}\sqrt{2\cos x+4}\right|^{-1}.$$

При значеннях *c*, досить близьких до 4 (досить малих $\delta>0$), цей вираз можна зробити меншим кожного наперед заданого $\varepsilon>0$ при будь-яких $x\ge\frac{\pi}{2}$, тобто даний частинний розв’язок стійкий (неасимптотично).

2. *Дослідити на стійкість частинний розв’язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y''=f(x,y,y')$, *що задовольняє початковим умовам* $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=y'_0$, *використовуючи визначення стійкості та нестійкості за Ляпуновим.*

1) $y''=\dfrac{y-xy'}{x^2}$, $\varphi(2)=1$, $\varphi'(2)=-1$;

2) $y''=\dfrac{2y'^2}{y-1}$, $\varphi(0)=2$, $\varphi'(0)=-2$.

*Розв’язання.*

1) Введемо заміну: $y'=yt$, $y''=y't+yt'=yt^2+yt'$. Будемо мати

$$yt^2+yt'=\frac{y-xyt}{x^2},$$

$$t^2+t'=\frac{1}{x^2}-\frac{t}{x},\ t'+\frac{t}{x}=\frac{1}{x^2}-t^2,$$

$$t=uv,\ t'=u'v+uv',$$

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^2}-u^2v^2,$$

$$v\left(u'+\frac{u}{x}\right)+uv'=\frac{1}{x^2}-u^2v^2,$$

$$u'+\frac{u}{x}=0,\ u'=-\frac{u}{x},\ \ln u=-\ln x,\ u=\frac{1}{x};$$

$$\frac{v'}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{v^2}{x^2},\ v'=\frac{1-v^2}{x},\ v=\frac{c_1+x^2}{x^2-c_1},$$

$$t=uv=\frac{1}{x}\cdot\frac{c_1+x^2}{x^2-c_1};$$

$$y'=y\frac{1}{x}\cdot\frac{c_1+x^2}{x^2-c_1},\ \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{c_1+x^2}{x^2-c_1},$$

$$y=f(x)=c_1x+\frac{c_2}{x}.$$

Знайдемо довільні постійні, використовуючи початкові умови: $c_1=-\frac{1}{4}$, $c_2=3$. Шуканий частинний розв'язок

$$\varphi(x)=-\frac{x}{4}+\frac{3}{x}.$$

Тоді

$$|f(x)-\varphi(x)|=\left|\left(c_1+\frac{1}{4}\right)x-\frac{c_2-3}{x}\right|\to\left|\left(c_1+\frac{1}{4}\right)\right||x|\ \text{при}\ x\to+\infty,$$

тобто модуль зазначеної різниці не можна зробити меншим кожного наперед заданого $\varepsilon>0$, отже, знайдений частинний розв'язок нестійкий.

2) Введемо заміну: $y'=yt(y)$, $y''=t+yt'$. Будемо мати

$$t+yt'=\frac{2yt}{y-1},$$

$$yt'=\frac{t(y+1)}{y-1},\ \frac{t'}{t}=\frac{y+1}{y(y-1)},$$

$$t=\frac{c_1(y-1)^2}{y},$$

$$y'=y\frac{c_1(y-1)^2}{y},\ y'=c_1(y-1)^2,$$

$$y=f(x)=1+\frac{1}{c_1x+c_2}.$$

Частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам, має вигляд

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{2x+1}.$$

Тоді

$$|f(x)-\varphi(x)|=\left|1+\frac{1}{c_1x+c_2}-\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)\right|\to\left|\frac{1}{c_1x+c_2}-\frac{1}{2x+1}\right|.$$

Якщо $c_1\neq 0$ и $c_2\neq 0$, то модуль зазначеної різниці прагне до нуля при $x\to\infty$. Звідси випливає, що знайдений частинний розв'язок стійкий асимптотично в цілому.

3. *Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь, використовуючи відповідні теореми Ляпунова про стійкість та нестійкість, характеристичні числа й умови Рауса-Гурвіца*.

1) $6y^{(4)}+19y'''+46y''+39y'+10y=0$;

2) $\begin{cases} y_1'=-y_1+2y_2, \\ y_2'=5y_1-y_2+2y_3, \\ y_3'=5y_2-y_3. \end{cases}$

*Розв'язання.*

1) Запишемо характеристичне рівняння:

$$6\lambda^4+19\lambda^3+46\lambda^2+39\lambda+10=0 \text{ або } \lambda^4+\frac{19}{6}\lambda^3+\frac{23}{3}\lambda^2+\frac{13}{2}\lambda+\frac{5}{3}=0.$$

Складемо матрицю й перевіримо виконання умов Рауса-Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{6} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{13}{2} & \frac{23}{3} & \frac{19}{6} & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{13}{2} & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1=\frac{19}{6}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{19}{6} & 1 \\ \frac{13}{2} & \frac{23}{3} \end{vmatrix}=\frac{437}{18}-\frac{13}{2}=\frac{160}{9}>0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} \frac{19}{6} & 1 & 0 \\ \frac{13}{2} & \frac{23}{3} & \frac{19}{6} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{13}{2} \end{vmatrix}=\frac{10675}{108}>0,\ \Delta_4=\frac{5}{3}\cdot\Delta_3=\frac{53375}{324}>0.$$

Умови Рауса-Гурвіца виконані. Отже, дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння мають від'ємні значення й, згідно з відповідною теоремою Ляпунова, нульовий розв'язок даного рівняння стійкий асимптотично.

2) Маємо лінійну систему. Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(1+\lambda)^3 + 20(1+\lambda) = 0,\ (1+\lambda)\left(-(1+\lambda)^2 + 20\right) = 0,\ (1+\lambda)\left(-\lambda^2 - 2\lambda + 19\right) = 0.$$

Це рівняння має два від'ємні та один додатний корені. Тому, згідно з теоремою Ляпунова про нестійкість, нульовий розв'язок нестійкий.

4. *Дослідити нульовий розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь на стійкість: за першим наближенням; за допомогою функції Ляпунова* $v$.

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left(x^4 + y^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left(x^4 + y^2\right), \end{cases}$ $\qquad v = x^2 + y^2;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y^5, \end{cases}$ $\qquad v = 4x^2 + 3y^2.$

*Розв'язання.*

1) Запишемо дану систему в першому наближенні та її характеристичне рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + 1 = 0.$$

Характеристичні корені $\lambda_{1,2} = \pm i$, тому загальний розв'язок лінійної системи буде лінійною комбінацією функцій $\sin t$ і $\cos t$. Звідси випливає стійкість (неасимптотична) нульового розв'язку системи за першим наближенням.

Скористаємося функцією Ляпунова. Знайдемо $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt}$ в силу даної системи

$$\dot{v} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x\left(-y + x\left(x^4 + y^2\right)\right) + 2y\left(x + y\left(x^4 + y^2\right)\right) =$$
$$= 2\left(x^6 + x^4y^2 + x^2y^2 + y^4\right) \geq 0,$$

яка, як і функція Ляпунова $v$, є додатно-означеною. Згідно з першою теоремою Ляпунова про нестійкість, нульовий розв'язок даної системи нестійкий.

2) Запишемо дану систему в першому наближенні та її характеристичне рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \; \lambda^2 + 12 = 0.$$

Характеристичні корені $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}i$, тому загальний розв'язок лінійної системи буде лінійною комбінацією функцій $\sin 2\sqrt{3}t$ и $\cos 2\sqrt{3}t$. Звідси випливає стійкість (неасимптотична) нульового розв'язку системи за першим наближенням.

Скористаємося функцією Ляпунова. Для цього знайдемо її повну похідну

$$\dot{v} = 8x\dot{x} + 6y\dot{y} = 8x\left(3y - x^3\right) + 6y\left(-4x - y^5\right) = -2\left(4x^4 + 3y^6\right) \le 0.$$

Вона від'ємно-означена й, згідно з теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість, нульовий розв'язок даної системи асимптотично стійкий.

5. *Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова*:

$$y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

*Розв'язання.*

Складемо характеристичний многочлен:

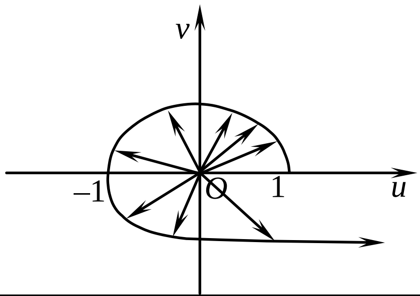
$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Підставимо в нього $\lambda = iw$, одержимо

$$f(iw) = w^4 - 2iw^3 - 3w^2 + 2iw + 1 = w^4 - 3w^2 + 1 + i\left(-2w^3 + 2w\right),$$

$$u(w) = w^4 - 3w^2 + 1,$$

$$v(w) = \left(-2w^3 + 2w\right) = -2w\left(1 - w^2\right) = -2w(1+w)(1-w).$$




Будемо змінювати $w$ від 0 до $+\infty$ й побудуємо криву (див. рис.)

$$\begin{cases} u = u(w), \\ v = v(w), \end{cases}$$

| $w$ | 0 | $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ | 1 | $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | 1 | 0 | –1 | 0 |
| $v$ | 0 | + | 0 | – |

Кут повороту радіус-вектора

$$\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}.$$

Звідси, $n - 2m = 4$, $n = 4$, отже, $m = 0$. Таким чином, всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині, тобто нульовий розв'язок даного рівняння асимптотично стійкий.

6. *Дослідити на стійкість нульовий розв'язок різницевого рівняння* $f(n+2) + f(n+1) + 2f(n) = 0$, *використовуючи критерій Рауса-Гурвіца*.

*Розв'язання.*

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Покладемо $\lambda = \dfrac{w+1}{w-1}$, тоді характеристичне рівняння буде мати вигляд

$$2w^2 - w + 1 = 0.$$

Складемо матрицю й перевіримо виконання умов Рауса-Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = -1 < 0, \ \Delta_2 = 1 \cdot \Delta_1 = -1 < 0.$$

Умови Рауса-Гурвіца не виконані. Отже, нульовий розв'язок даного рівняння нестійкий.