ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Математичний факультет

Кафедра прикладної математики і механіки

Методичні матеріали

для забезпечення самостійної роботи студентів з курсу

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИРОДНИЧИХ ПРОЦЕСІВ

Запоріжжя

<u>РОЗДІЛ 1. МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ</u>

Тема 1. Економіка як об'єкт моделювання

Економічні колізії та моделювання економіки

Спробуємо описати математичною мовою колізії, що виникають у ситуації, коли ринкові механізми зіштовхуються з монополією.

Приймемо гіпотезу, згідно з якою економічна система прагне до максимізації сумарного економічного ефекту (Π_Σ), тобто сумарного прибутку:

$$\max_Q \Pi_\Sigma = \max_Q \left[\int_0^Q \frac{du}{dQ} dQ - \int_0^Q \frac{ds}{dQ} dQ \right], \tag{1.1}$$

де Q — випуск продукту; $u(Q)$ — функція валового економічного ефекту (корисності); $\frac{du}{dQ}$ — приріст валового економічного ефекту (корисності) від кожної додаткової одиниці продукції; $s(Q)$ — витрати на виробництво; $\frac{ds}{dQ}$ — приріст витрат на виробництво додаткової одиниці продукції.

Перший елемент правої частини цього виразу характеризує валовий економічний ефект, другий — витрати на виробництво всього обсягу продукції, а вираз у цілому — сумарний економічний ефект (продукт).

Легко показати, що *розширення* виробництва буде доцільним лише *доти, доки додаткові витрати не зрівняються з додатковим валовим економічним ефектом від споживання*. Математично це положення можна довести, знайшовши максимум наведеного вище виразу (1.1). Якщо продиференціювати Π_Σ по Q і похідну прирівняти до нуля, то точкою екстремуму функції Π_Σ буде точка Q^*, в якій $\frac{du}{dQ} = \frac{ds}{dQ}$. Точка Q^* буде точкою максимуму функції Π_Σ, оскільки для функцій $u(Q)$, $s(Q)$ повинні виконуватись умови:

$$\frac{d^2u}{dQ^2} < 0; \ \frac{d^2s}{dQ^2} > 0. \tag{1.2}$$

Тому обсяг виробництва, котрий забезпечує максимум сумарного ефекту, відповідатиме точці Q^*, у якій додатковий валовий ефект споживання дорівнює додатковим витратам на виробництво одиниці продукції.

Але в умовах ринкової економіки сумарний економічний ефект розподіляється між виробником продукції, її споживачем і бюджетом. Характер цього розподілу значною мірою визначає зацікавленість економічних суб'єктів у досягненні суспільної ефективності, тобто у досягненні точки оптимуму виробництва.

У чому ж полягають економічні інтереси виробника (l) і споживача (c)? *Очевидно, що виробник зацікавлений у максимізації різниці* між обсягом реалізації за ціною p та витратами:

$$\max_{Q} \Pi_l = \max_{Q} \left[Q \cdot p - \int_0^Q \frac{ds}{dQ} dQ \right],$$

де Π_l — прибуток виробника.

Споживачеві важливо максимізувати різницю між економічним ефектом від використання продукції та ціною за неї:

$$\max_{Q} \Pi_c = \max_{Q} \left[\int_0^Q \frac{du}{dQ} dQ - Q \cdot p \right],$$

де Π_c — прибуток споживача.

Якщо виробник не є монополістом, тобто не в змозі вплинути на рівень цін (вільна конкуренція), тобто ціна p не залежить від Q, то максимум ефекту виробника (враховуючи умови (1.2)) буде досягнутий у точці, де похідна Π_l по Q дорівнюватиме нулеві:

$$p = \frac{ds}{dQ},$$

тобто, коли граничні витрати дорівнюють ціні продукції, а максимум ефекту споживача — в точці, де:

$$p = \frac{du}{dQ}.$$

Максимум сумарного ефекту досягається за обсягу виробництва (Q^*), котрий характеризується співвідношенням:

$$\frac{du}{dQ} = \frac{ds}{dQ}.$$

Звідси можна зробити висновок, що виробник буде зацікавлений виробити *оптимальний, з погляду народного господарства* обсяг продукції (Q^*), а споживач — повністю використати цю продукцію за умови встановлення цін на рівні:

$$p^* = \frac{du}{dQ} = \frac{ds}{dQ}.$$

Але якщо виробник контролює значну частку ринку (випуску продукції, галузі) і має право впливати на визначення обсягів випуску продукції, то його інтереси розходяться з народногосподарськими інтересами. Формально цю суперечність можна показати таким чином. Якщо $p = f(Q)$, то

$$\frac{d\Pi_l}{dQ} = p + Q\frac{dp}{dQ} - \frac{ds}{dQ}.$$

Споживачі не можуть впливати на обсяги та ціну. Тобто максимум ефекту виробника буде досягнутим за умови:

$$p = \frac{ds}{dQ} - Q\frac{dp}{dQ}.$$

Отже, цей результат свідчить, що, за можливості контролювати значну масу продукції з боку виробника, точка *його оптимуму* не збігається з точкою народногосподарського оптимуму.

Раціональною є гіпотеза щодо від'ємної еластичності цін і обсягу виробництва (зі зростанням обсягів виробництва ціни на продукцію знижуються), тобто

$$\frac{dp}{dQ} < 0.$$

Виробник, прагнучи до максимізації свого локального критерію, буде здебільшого зацікавлений у заморожуванні виробництва на рівні нижчому, ніж оптимальний з погляду народного господарства:

$$Q_l < Q^*,$$

і, відповідно, у завищенні цін:

$$p_l > p^*,$$

оскільки

$$-Q \cdot \frac{dp}{dQ} > 0.$$

За подібних умов державне регулювання економіки повинно забезпечити таку організаційну систему функціонування об'єктів господарювання, яка використовувала б ефективні методи вилучення певного обсягу отриманих доходів у великих виробничих об'єднань (монополій), або недопущення монопольно високих доходів. Тобто державне регулювання економіки в даному разі є необхідним.

Проблеми методології макроекономічного аналізу

Наведемо як приклад модель розвитку економіки країни, запропоновану англійським економістом Р. Харродом. У моделі враховується один керований чинник — капітальні вкладення, а стан економіки оцінюється обсягом національного доходу.

Для математичної постановки задачі введемо такі позначення:

Y_t — національний дохід за рік *t*; K_t — виробничі фонди за рік *t*; C_t — обсяг споживання за рік *t*; S_t — обсяг накопичення (заощаджень) за рік *t*; V_t — капітальні вкладення за рік *t*.

Припустимо, що функціонування економіки відбувається за таких умов:

- балансу доходів і витрат за кожний рік

$$Y_t = C_t + S_t;$$

- виключення невикористання капіталу

$$S_t = V_t;$$

- пропорційного розподілу національного річного доходу

$$S_t = aY_t.$$

Внутрішні економічні процеси характеризуються, такими умовами: зв'язок капітальних вкладень і загальної суми виробничих фондів; зв'язок річного національного доходу і виробничих фондів.

Капітальні вкладення за рік *t* можна розглядати як приріст виробничих фондів або, інакше кажучи, похідна від функції виробничих фондів приймається за капітальні річні вкладення:

$$V_t = \frac{dK_t}{dt}.$$

Національний дохід за кожний рік приймається рівним віддачі виробничих фондів:

$$Y_t = \frac{K_t}{b}.$$

З наведених вище рівнянь можна отримати таке співвідношення:

$$Y_t = \frac{V_t}{a} = \frac{1}{a}\frac{dK_t}{dt} = \frac{b}{a}\frac{dY_t}{dt}.$$

Звідси отримуємо рівняння Харрода:

$$b\frac{dY_t}{dt} = aY_t.$$

Його розв'язком є експоненційна зміна національного доходу за річними інтервалами:

$$Y_t = Y_0 e^{at/b}.$$

Попри спрощений вид математичної моделі її результат може використовуватися для загального аналізу національної економіки. Параметри *a* і *b* можуть стати керуючими параметрами щодо вибору певної стратегії розвитку економіки: максимального наближення до бажаної (раціональної) траєкторії зміни національного доходу; вибору мінімального інтервалу часу досягнення заданого рівня національного доходу.

Нелінійність математичних моделей

Розглянемо найпростішу модель популяцій — модель Мальтуса, яка ґрунтується на простому твердженні: швидкість зміни чисельності населення у часі пропорційна його поточній чисельності $N(t)$ із коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює різниці коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t) \geq 0$ та смертності $\beta(t) \geq 0$. У результаті маємо рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t). \tag{1.3}$$

Інтегрування рівняння (1.3) дає:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} [a(t) - \beta(t)]\, dt \right),$$

де $N(0) = N(t = t_0)$ — початкова чисельність.

Якщо $\alpha = \beta$, то чисельність залишається постійною, тобто в цьому разі розв’язком є рівноважна величина чисельності $N(t) = N(0)$. За умови $\alpha < \beta$ чисельність населення знижується й прямує до нуля, коли $t \to \infty$, а за $\alpha > \beta$ — зростає за певним експоненційним законом і прямує до нескінченності, якщо $t \to \infty$. Остання обставина й слугувала підставою для побоювань Мальтуса щодо, можливого пов’язаного з перенаселенням землі у майбутньому.

Звичайно ж, як у даному прикладі, так і в низці інших випадків існує чимало очевидних обмежень щодо застосування побудованої моделі. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реаліям повною мірою, хоча б зважаючи на обмежені ресурси, необхідні для її існування.

Моделі популяцій відразу ж стають нелінійними, якщо зважувати на те, що обов’язково слід враховувати обмеженість доступних популяції ресурсів. Будуючи такі моделі, вважають, що:

1) існує «рівноважна» чисельність популяції N_p, котру може забезпечити навколишнє середовище (з погляду сьогодення);

2) швидкість зміни чисельності популяції пропорційна (на відміну від моделі Мальтуса) добутку чисельності популяції на величину відхилення її від рівноважного значення чисельності, тобто:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)N,\ \alpha > 0. \tag{1.4}$$

Співмножник $\left(1-\dfrac{N}{N_p}\right)$ у цьому рівнянні забезпечує механізм «насичення» чисельності: за $N < N_p$ ($N > N_p$) швидкість зростання додатна (від'ємна) і прямує до нуля, якщо $N \to N_p$.

Розв'язок рівняння (1.4) за умови $N(t = 0) = N(0)$ матиме вигляд:

$$N(t) = N_p \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} - N(t) \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t}$$

або

$$N(t) = \frac{N_p N(0) e^{\alpha t}}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})}.$$

Поведінка функції $N(t)$ описується так званою логістичною кривою (рис. 1.1).

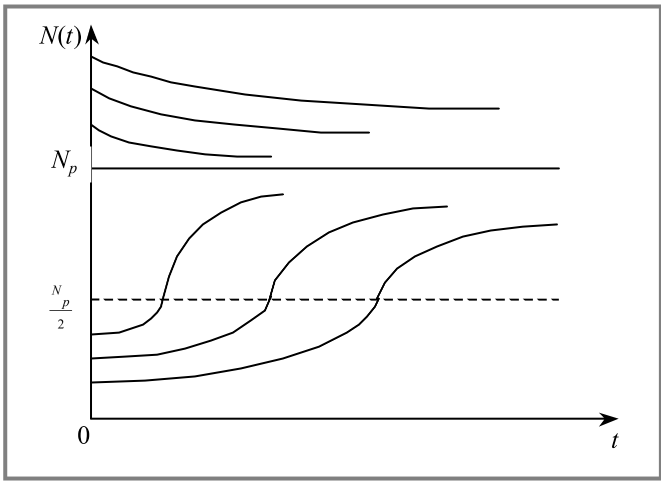

Рис. 1.1. Логістичні криві, що відповідають різним значенням початкової чисельності $N(0)$

За будь-якого значення початкової чисельності $N(0)$ чисельність популяції $N(t)$ прямує до рівноважного значення N_p, коли $t \to \infty$, причому тим повільніше, чим ближче $N(t)$ до N_p. Отже, рівновага у даному разі є стійкою на відміну від моделі (1.3). Модель (1.4) реалістичніше відображає динаміку популяції порівняно з моделлю Мальтуса, але вона є нелінійною й тому складнішою.

Зауважимо, що припущення щодо механізмів насичення досить часто використовуються у формуванні моделей різних економічних об'єктів і процесів як на мікро-, так і на макроекономічному рівнях.

Тема 2. Концептуальні засади математичного моделювання економіки

«Павутиноподібна» модель ринку

Як приклад економічної моделі розглянемо спрощений (ідеалізований) варіант так званої «павутиноподібної» моделі, яка описує процес формування попиту і пропозиції певного товару чи виду послуг на конкурентному ринку (за умов досконалої конукренції).

Йдеться про формалізацію економічного закону попиту та пропозиції, який проголошує:

- кількість товару, який можна продати на ринку (тобто попит), змінюється у напрямі, протилежному до зміни ціни товару;
- кількість товару, яку продавці виробляють і доставляють на ринок (тобто пропозиція), змінюється у тому ж напрямі, що й ціна;
- реальна ринкова ціна формується на рівні, за якого попит і пропозиція наближено дорівнюють одне одному (приблизно збігаються, із деякою заданою точністю), тобто перебувають у рівновазі; ціна, за якої досягається рівновага між попитом і пропозицією, називається рівноважною.

Розглядаючи «павутиноподібну» модель, приймають гіпотезу, що функції пропозиції і попиту залежать лише від ціни товару:

$$Q_S = S(X),\ Q_D = D(X),$$

де Q_S — кількість товару, яку товаровиробники доставляють на ринок, тобто пропозиція; $S(X)$ — деяка монотонно зростаюча функція; Q_D — кількість товару, який можна продати на ринку, тобто попит; $D(X)$ — деяка монотонно спадна функція.

Графіки попиту і пропозиції перетинаються у точці рівноваги, а ціна, що відповідає цій точці $X = X_e$, і є рівноважною ціною. Враховуючи властивості кривих попиту і пропозиції, рівноважний розв'язок є стійким у тому сенсі, що якщо ціна строго фіксована і рівна рівноважній ціні, то товаровиробник, максимізуючи прибуток, доставляє на ринок товар у кількості $Q_e = S(X_e)$; одночасно споживач, що намагається максимізувати свою функцію корисності, формує попит $Q_e = D(X_e)$. При встановленні рівноважної ціни на ринку досконалої конкуренції кількість товару, що пропонується товаровиробником за цією ціною, дорівнює попиту споживача:

$$S(X_e) = D(X_e).$$

Динамічні нерівноважні моделі ринку використовуються, коли у початковий момент часу ціна на ринку відрізняється від рівноважної. При цьому процес встановлення рівноважної ціни може бути описаний різними моделями за одних і тих самих функцій попиту й пропозиції. Розрізняють два підходи:

1) неперервний, коли динаміка цін описується диференційним рівнянням;

2) дискретний, коли значення змінних на проміжку часу [t; t+1) вважаються сталими. В цьому разі послідовним інтервалам часу [t; t+1) відповідають значення ціни X_t, попиту D_t і пропозиції S_t.

Розглянемо «павутиноподібну» модель із дискретним часом. Нехай X_t — ціна товару в момент часу *t*, D_t і S_t — кількість товару, купленого і пропонованого відповідно на ринку в той самий момент часу *t*.

У моделі приймаються дві гіпотези: 1) виробники-продавці, формуючи пропозицію, орієнтуються на ціну попереднього періоду; 2) ринок завжди перебуває у стані локальної рівноваги.

Подамо математичну формалізацію цих положень:

1) обсяг пропозиції на ринку в момент часу *t* визначається значенням ціни попереднього періоду: $S_t = f(X_{t-1})$, де $f(X)$ — деяка монотонно зростаюча функція від аргумента *X* (тобто від ціни);

2) на ринку в кожний момент часу *t* встановлюється рівноважна ціна X_t, причому ця ціна є розв'язком рівняння $D_t = S_t$. Якщо $D_t = g(X_t)$, де $g(X)$ — монотонно спадна функція від аргумента *X* (тобто від ціни), то рівняння для визначення ціни X_t матиме вигляд: $g(X_t) = f(X_{t-1})$.

Рівноважний стан «павутиноподібної» моделі буде стійким, якщо існують границі:

$$\lim_{t\to\infty} f(X_{t-1}) = \lim_{t\to\infty} g(X_t); \quad \lim_{t\to\infty} X_t = X_e,$$

де X_e — рівноважна ціна.

Математичні співвідношення, що відображають закон попиту — пропозиції, можуть бути проілюстровані рис. 1.2.

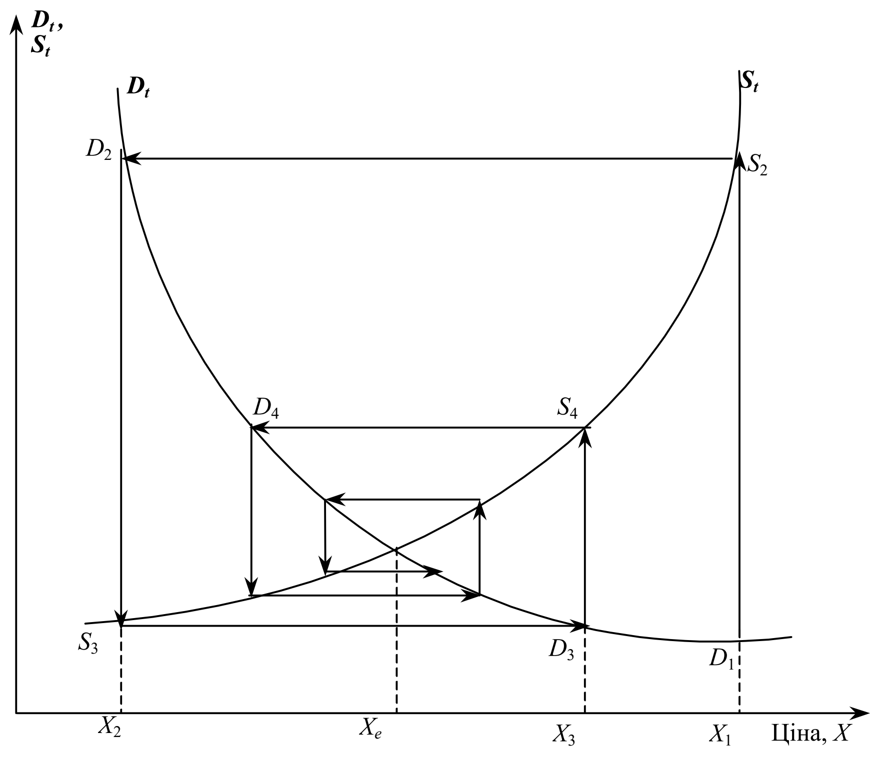

Рис. 1.2. Графік формування попиту — пропозиції

Як бачимо, процес формування рівноважної ціни почався з призначення в 1-й (початковий) момент часу ціни на рівні X_1. Продовження цього процесу (індексовано стрілками) «павутиноподібно» прямує до точки перетину кривих $g(X)$ і $f(X)$.

Щоб описана модель з економічної перетворилась в економетричну, необхідно говорити не взагалі про закон попиту і пропозиції, а про конкретну його дію в даному секторі економіки, в певний час і стосовно конкретного товару (чи виду послуг). Відповідно, конкретизація вигляду функцій $g(X)$ і $f(X)$ повинна проводитись на підставі статистичних даних величин X_t, D_t, S_t, де $t \in \{1,\ldots,T\}$, Т — кількість періодів, протягом яких здійснювався моніторинг і отримані дані.

Приклад «Павутиноподібної» моделі фірми

Підприємець збирається вкласти кошти у створення фірми, котра випускатиме товар і реалізовуватиме його на ринку. Його цікавить, як поводитиме себе ціна товару за зміни обсягів виробництва, чи буде вона стабільною за певних умов.

Аналіз і розв’язання

Розглянемо стохастичну модель з навчанням.

Припустимо, що попит на *t*-му проміжку часу залежить лінійно від поточної ціни. Вважатимемо, що попит на ринку має випадковий характер (є випадковою величиною). Для формалізованого опису необхідно, визначити на основі доступної інформації оцінки коефіцієнтів лінійного рівняння у моделі:

$$D_t = a - bX_t + u_t,$$

де D_t — попит на *t*-му проміжку часу; *a, b* — коефіцієнти лінійної регресії ($b > 0$); X_t — ціна одиниці продукції на *t*-му проміжку часу; u_t — випадкова величина, що має нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням σ_u.

У результаті відповідних обчислень можна отримати оцінки значень коефіцієнтів лінійної регресії, й рівняння лінійної регресії матиме вигляд:

$$\check{D}_t = A - BX_t, \tag{1.5}$$

де $\check{D}_t$ — розрахункове значення попиту на *t*-му проміжку часу: *A, B* — оцінки значень коефіцієнтів лінійної регресії ($B > 0$).

Припустимо, що пропозиція впродовж поточного проміжку часу також лінійно (в середньому) залежить від ціни, але не поточної, а такої, що являє собою комбінацію цін у двох попередніх періодах часу. У найпростішому випадку це може бути середнє значення цін протягом двох попередніх періодів. Крім того, вважатимемо, що пропозиція на ринку має випадковий характер (є випадковою величиною). Отже, для моделювання пропозиції можна використовувати таку залежність:

$$S_t = c + kX(\rho) + v_t,$$

де S_t — пропозиція впродовж t - го проміжку часу; c, k — коефіцієнти лінійної регресії ($k > 0$); $X(\rho)$ — середньозважене значення цін на двох попередніх проміжках часу; v_t — випадкова величина, що має нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням σ_v.

Після відповідних обчислень можна отримати оцінки значень коефіцієнтів лінійної регресії, і рівняння лінійної регресії матиме такий вигляд:

$$\check{S}_t = C — KX(\rho), \tag{1.6}$$

де $\check{S}_t$ — розрахункове значення пропозиції впродовж t-го проміжку часу, C, K — оцінки значень коефіцієнтів лінійної регресії ($K > 0$).

Ціна $X(\rho)$ може визначатись за формулою

$$X(\rho) = X_{t1} — \rho(X_{t1} — X_{t2}), \tag{1.7}$$

де X_{t1} — ціна на $(t1)$-му проміжку часу; X_{t2} — ціна на $(t\text{-}2)$-му проміжку часу; ρ — ваговий коефіцієнт, значення котрого задається в діапазоні: $0 \le \rho \le 1$.

До моделі необхідно ще долучити рівняння локальної рівноваги ринку:

$$S_t = D_t + w_t,$$

де S_t — пропозиція на t - му проміжку часу; D_t — попит на t - му проміжку часу; w_t — випадкова величина, котра має заданий закон розподілу. Можна прийняти гіпотезу, що w_t має нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням та середньоквадратичним відхиленням σ_w. З урахуванням (1.5) та (1.6) рівняння локальної рівноваги матиме вигляд:

$$\check{S}_t = \check{D}_t \tag{1.8}$$

Система рівнянь (1.5) — (1.8), після відповідних простих перетворень зводиться до такого виразу:

$$X_t = F(X_{t1}, X_{t2}), \tag{1.9}$$

де $F(X_{t-1}, X_{t-2})$ — оцінка функції кореляційно-регресійного зв’язку між змінними X_t, X_{t1}, X_{t2}.

Спочатку певним наближеним способом визначають ціну для перших двох проміжків часу. Після цього можна проводити обчислення згідно з виразом (1.9) необхідну кількість разів (ітерацій).

Задача аналізу полягає у дослідженні впливу параметрів системи на характер залежності ціни як функції часу, а також у визначенні рівноважної ціни.

Тема 3. Алгоритмічні (імітаційні) моделі в економіці та підприємництві

Моделювання випадкових подій

Приклад. Нехай при випробуванні мають місце залежні й сумісні події A та B, при цьому відомо, що $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,5$; $P(AB) = 0,3$.

Потрібно змоделювати появу подій A та B у двох випробуваннях.

Розв'язання. У кожному випробуванні можливе настання однієї з чотирьох попарно несумісних подій:

1. $C_1 = AB$, $P(C_1) = P(AB) = 0,3$.
2. $C_2 = A\overline{B}$, $P(C_2) = P(A\overline{B}) = P(A) — P(BA) = 0,7 — 0,3 = 0,4$.
3. $C_3 = \overline{A}B$, $P(C_3) = P(\overline{A}B) = P(B) — P(AB) = 0,5 — 0,3 = 0,2$.
4. $C_4 = \overline{A}\overline{B}$, $P(C_4)=1-[P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)]=1-(0,3+ 0,4 + 0,2) = 0,1$.

Змоделюємо повну групу подій C_1, C_2, C_3, C_4 у двох випробуваннях (прогонах). Відкладемо послідовно на одиничному відрізку числової осі інтервали (рис. 1.3):

$\Delta_i = P(C_i)$, $i = 1,\ldots, 4$.

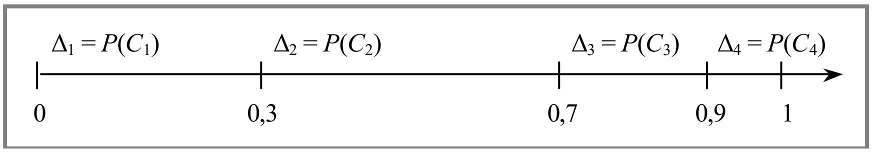

Рис. 1.3. Інтервали $\Delta_i = P(C_i)$

Нехай згенеровано два випадкових числа $\xi_1 = 0,68$ і $\xi_2 = 0,95$. Випадкове число ξ_1 належить до інтервалу Δ_2, тому у першому випробуванні мала місце подія C_2: подія A настала, а подія B не настала. За другого випробування випадкове число ξ_2 належить до інтервалу Δ_4: обидві події A та B не мали місця.

Приклад. Використовуючи умови попереднього прикладу, потрібно змоделювати окремо появу подій A та B в одному випробуванні.

Розв'язання. Події A та B є залежними, тому попередньо знаходимо умовні ймовірності $P(B / A)$ та $P(B/\overline{A})$:

$$P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}; \qquad P(B / \overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,2}{1-0,7} = \frac{2}{3}.$$

Для моделювання події A обрано випадкове число ξ_1. Нехай $\xi_1 = 0,96$. Оскільки $\xi_1 > P(A)$, то подія A у випробуванні не настала.

Тепер розіграємо подію B за умови, що подія A у випробуванні не мала місця. Нехай випадкове число $\xi_2 = 0,22$. Отже, $\xi_2 < P(B/\overline{A})$ (0,22 < 2/3), тобто подія B у випробуванні настала.

Моделювання випадкових величин

Приклад. Змоделювати дві реалізації дискретної випадкової величини X, що має розподіл:

x_i:	-1	0	2	5
p_i:	0,2	0,5	0,2	0,1

Розв'язання. Відкладемо послідовно на одиничному відрізку числової осі інтервали (рис. 1.4): $\Delta_i = p_i$, $i = 1,\ldots, 4$.

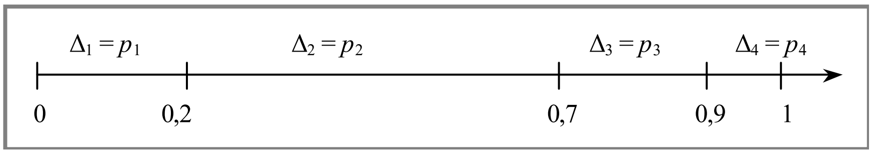

Рис. 1.4. Інтервали $\Delta_i = p_i$

Нехай згенеровано два випадкових числа $\xi_1 = 0{,}57$ і $\xi_2 = 0{,}73$. Випадкове число ξ_1 належить до інтервалу Δ_2, тому у першому випробуванні випадкова величина X набуває значення $x_2 = 0$. За другого випробування випадкове число ξ_2 належить до інтервалу Δ_3, тому випадкова величина X набуває значення x_3=2.

Приклад. Змоделювати дві реалізації випадкової величини X, що має інтервально-постійну функцію щільності розподілу на відрізку [0,5; 7,5]:

$$a_0 = 0{,}5;\ a_1 = 2{,}0;\ a_2 = 4{,}5;\ a_3 = 6{,}5;\ a_4 = 7{,}5,$$

$$p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}4;\ p_3 = 0{,}2;\ p_4 = 0{,}1.$$

Розв'язання. Для заданої випадкової величини X дискретна випадкова величина η, що відповідає номеру інтервалу, матиме розподіл:

η_i:	1	2	3	4
p_i:	0,3	0,4	0,2	0,1

Для однієї реалізації випадкової величини X необхідно згенерувати одне значення (реалізацію) дискретної випадкової величини η (див. попередній приклад) і одне випадкове число ξ, що формується генератором випадкових чисел, які відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі (0; 1).

Нехай згенеровано дві реалізації дискретної випадкової величини η: $\eta_1 = 2$ $\eta_2 = 4$, і два випадкових числа $\xi_1 = 0{,}91$, $\xi_2 = 0{,}43$.

Тоді перше значення (реалізація) випадкової величини X належатиме другому інтервалу: $(2{,}0; 4{,}5)$, і підставивши значення відповідних величин у формулу (1.3), отримаємо: $x_1 = a_1 + \xi_1(a_2 - a_1) = 2{,}0 + 0{,}91(4{,}5 - 2{,}0) = 4{,}275$. Аналогічно, друге значення (реалізація) випадкової величини X належатиме четвертому інтервалу: $(6{,}5;7{,}5)$, і підставивши значення відповідних величин у формулу (1.3), отримаємо: $x_2 = a_3 + \xi_2(a_4 - a_3) = 6{,}5 + 0{,}43(7{,}5 - 6{,}5) = 6{,}93$.

Тема 4. Прикладні математичні моделі фінансово-економічних процесів

Моделі ціноутворення

Розглянемо підхід до побудови моделі ціноутворення, що базується на залежності «витрати — випуск» і дає змогу сформулювати задачу ціноутворення у вигляді двоїстої задачі лінійного програмування[1].

Нехай маємо m технологічних процесів, кожний з яких описується вектором $(a_{ij}, \ldots, a_{nj})$, де a_{ij} — випуск i-го продукту на кожну одиницю інтенсивності j-го технологічного процесу. Нехай j-й процес потребує на кожну одиницю інтенсивності процесу c_j одиниць праці. Задача полягає у тому, щоб знайти інтенсивності $z_1, z_2, \ldots, z_m$ технологічних процесів, які задовольнятимуть систему:

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1m}z_m \ge b_1 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2m}z_m \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{nm}z_m \ge b_n \end{cases}, \qquad (1.10)$$

де b_i — потрібний випуск i-го продукту, $i = 1,2,\ldots,n$.

При цьому загальні витрати праці повинні бути мінімальними:

$$c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_mz_m \to \min. \qquad (1.11)$$

Визначення оптимальних цін продуктів базується на розв’язку задачі, яка є двоїстою до задачі (1.10 - 1.11).

Нехай p_i — ціна одиниці i-го продукту, тоді двоїста задача матиме вигляд:

$$\begin{cases} p_1a_{11} + p_2a_{21} + \ldots + p_na_{n1} \le c_1 \\ p_1a_{12} + p_2a_{22} + \ldots + p_na_{n2} \le c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1a_{1m} + p_2a_{2m} + \ldots + p_{nm}a \le c_m \end{cases}. \qquad (1.12)$$

$$b_1p_1 + b_2p_2 + \ldots + b_np_n \to \max \qquad (1.13)$$

Задача (1.12) - (1.13) має економічне інтерпретування: вартість випуску продуктів у кожному технологічному процесі не повинна перебільшувати витрати праці (умови (1.12)). Загальна вартість випуску продукції максимізується (умова (1.13)).

Розглянемо окремі приклади практичної побудови моделей.

---

[1] Костіна Н. І., Алєксєєв А. А., Василик О. Д. Фінанси: система моделей і прогнозів: Навчальний посібник. — К.: Четверта хвиля, 1998. — 304 с.

Приклад моделі ціноутворення за двоїстою задачею. Нехай $n = 2$, $m = 3$.

Таблиця 1.1

Матриця даних $\|a_{ij}\|$				Потрібний випуск (b_i)
Технологічні процеси	z_1	z_2	z_3	
Продукт 1	1	1	2	21
Продукт 2	2	1	1	12
Витрати праці на одиницю інтенсивності процесу (c_j)	31	11	12	

Пряма задача (забезпечення випуску при мінімізації витрат праці):

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + 2z_3 \geq 21 \\ 2z_1 + z_2 + z_3 \geq 12 \end{cases},$$

$$\mathrm{W} = 31\mathrm{z}_1 + 11\mathrm{z}_2 + 12\mathrm{z}_3 \to \min.$$

Двоїста задача (максимізація вартості випуску продукції за обмежень на витрати праці):

$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 \leq 31 \\ p_1 + p_2 \leq 11 \\ 2p_1 + p_2 \leq 12 \end{cases},$$

$$\mathrm{K} = 21\mathrm{p}_1 + 12\mathrm{p}_2 \to \max.$$

Розв’язок двоїстої задачі: p_1=1, p_2=10. Вартість випуску продукції $K = 141$.

Розв’язок прямої задачі: z_1=0, z_2=3, z_3=9. Витрати праці W=141. Таким чином, як і випливає з теорії, $K = W$.

Наступна модель пов’язана з обґрунтуванням плати за фонди.

Згідно з моделлю Л. Канторовича[2], оптимальний план виробництва заводу формується за схемою:

[2] *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — С.18.

Ресурси	План виробництва товарів					
		x_1	x_2	…	x_n	Технологічна матриця (A): питомі витрати ресурсів на виробництво
Основні фонди	R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	
Праця	R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	
Електро-енергія	R_3	a_{31}	a_{32}	…	a_{3n}	
…			…			
Інші ресурси	R_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	

У математичному записі:

$$\mathrm{Ax} \le \mathrm{R},\ \mathrm{x} \ge 0 \qquad (1.14)$$

за максимального випуску продукції:

$$\mathrm{K} = \max(\mathrm{p}, \mathrm{x}), \qquad (1.15)$$

де K — критерій ефективності, $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_n)$ — вектор цін.

Модифікація задачі (1.14) — (1.15) пов’язується з комплектністю випуску.

Нехай $\mathrm{x}^1 = (\mathrm{x}_1^1, \mathrm{x}_2^1, ..., \mathrm{x}_n^1)$ визначає один комплект випуску, а k — кількість комплектів, що виробляються, тоді задача (1.14) — (1.15) має модифікацію як задача

$$\max k \qquad (1.16)$$

за обмежень

$$\mathrm{Ax} \le \mathrm{R},\ \mathrm{x} \ge \mathrm{kx}^1. \qquad (1.17)$$

Розглянемо процедуру вибору варіанта плати за ресурси (основні фонди) з використанням задачі (1.14) — (1.15) і двоїстої задачі:

$$\begin{cases} \min\limits_{u} (R,u) \\ uA \ge p,\ u \ge 0 \end{cases},$$

де $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ — змінна двоїстої задачі.

Нехай x^*, u^* — розв'язок прямої та двоїстої задачі.

Якщо $u^* > 0$, то $(a_\mathrm{i}, \mathrm{x}^*) = \mathrm{R}_\mathrm{i}$, де $a_\mathrm{i} = (a_{\mathrm{i}1}, a_{\mathrm{i}2}, ..., a_{\mathrm{in}})$, тобто i-й ресурс дефіцитний (використовується повністю).

Якщо $\mathrm{u}_\mathrm{i}^* = 0$, то $(a_\mathrm{i}, \mathrm{x}^*) < \mathrm{R}_\mathrm{i}$, тобто i-й ресурс не дефіцитний.

Згідно з теоремою двоїстості,

$\mathrm{K} = (p, \mathrm{x}^*) = (\mathrm{R}, \mathrm{u}^*).$

Згідно з моделлю Л. Канторовича розглянемо числовий приклад (n = 2, m=3).

		Обсяги виробництва товарів		
		x_1	x_2	
Варіант 1		20	11	
Варіант 2		20	5,5	
Ціни товарів		21	12	
Ресурси				
R_1	31	1	1 (2)	Технологічна матриця (A): питомі витрати ресурсів на виробництво
R_2	20	1	0	
R_3	20	0	1	

Технологічну матрицю A подано у двох варіантах вибору елемента a_{12} : 1) $a_{12} = 1$; 2) $a_{12} = 2$. Варіант 1 більш економний щодо витрат ресурсів.

Відповідні розв'язки:

Варіант 1

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \le 31 \\ 0 \le \mathrm{x}_1 \le 20 \\ 0 \le \mathrm{x}_2 \le 20 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{K}_1 = \max(21\mathrm{x}_1 + 12\mathrm{x}_2) \\ &\mathrm{x}_1^* = 20, \quad \mathrm{x}_2^* = 11 \\ &\mathrm{K}_1 = 552 \end{aligned}$$

Двоїста задача:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 \ge 21 \\ \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_3 \ge 12 \\ \mathrm{u}_1 \ge 0, \mathrm{u}_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{W}_1 = \min(31\mathrm{u}_1 + 20\mathrm{u}_2 + 20\mathrm{u}_3) \\ &\mathrm{u}_1^* = 12, \ \mathrm{u}_2^* = 9, \ \mathrm{u}_3^* = 0 \\ &\mathrm{W}_1 = 552 \end{aligned}$$

Варіант 2

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \le 31 \\ 0 \le \mathrm{x}_1 \le 20 \\ 0 \le \mathrm{x}_2 \le 20 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{K}_2 = \max(21\mathrm{x}_1 + 12\mathrm{x}_2) \\ &\mathrm{x}_1^* = 20, \ \mathrm{x}_2^* = 5{,}5 \\ &\mathrm{K}_2 = 486 \end{aligned}$$

Двоїста задача:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 \ge 21 \\ 2u_1 + u_3 \ge 12 \\ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} W_2 = \min(31u_1 + 20u_2 + 20u_3) \\ u_1^* = 6,\ u_2^* = 15,\ u_3^* = 0 \\ W_1 = 486 \end{matrix}$$

Нехай $q_1, q_2, ..., q_m$ — ціни ресурсів, тоді дохід підприємства за вирахуванням плати за ресурси становитиме:

$$D_r = K_r - \sum_{i=1}^{m} q_i^{(r)} R_i^{(r)},$$

де r — номер варіанта.

Нехай

$$q_1^{(1)} = 4,\ q_2^{(1)} = 10,\quad q_3^{(1)} = 2;$$

$$q_1^{(2)} = 3,\ q_2^{(2)} = 10,\ q_3^{(2)} = 2;$$

тоді

$$D_1 = 552 - 4 \cdot 31 - 10 \cdot 20 - 2 \cdot 11 = 206,$$
$$D_2 = 486 - 3 \cdot 31 - 10 \cdot 20 - 2 \cdot 5{,}5 = 182.$$

Отже, варіант 1, який забезпечує економію ресурсів (при підвищенні плати за них, наприклад, плати за модернізовані основні фонди), порівняно з варіантом 2 дає зростання доходу на величину

$$\left(\frac{D_1}{D_2} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{206}{182} - 1\right) \cdot 100\% = 11{,}3\%.$$

Мікроекономічне моделювання банківської діяльності

Загальні питання щодо моделювання діяльності банків

Одне з означень поняття банк формулюється так: *банк* — це кредитна установа, котра має виняткове право здійснювати в сукупності такі операції: залучення до вкладення грошових засобів (коштів) фізичних і юридичних осіб; розміщення вкладених коштів від свого імені та на свій рахунок на умовах повернення, платності, терміновості; відкриття та ведення банківських рахунків фізичних та юридичних осіб.

Серед основних функцій, що їх виконують банки як суб’єкти економічних відносин, можна виокремити такі:

1. Забезпечення розрахунків і сплат.
2. Трансформація активів.
3. Управління ризиками.
4. Опрацювання інформаційних потоків, моніторинг позичальників.

У фінансовому словнику[1] дається означення комерційного банку (БК) як фінансово-кредитної установи, що створюється для залучення коштів і розміщення їх від свого імені на умовах повернення й платності. БК здійснює розрахункові операції за дорученням клієнтів, їх касове обслуговування, операції з валютою, коштовними металами, цінними паперами та інші операції, дозволені законом. БК класифікуються за такими ознаками: за належністю статутного капіталу та способами його формування — акціонерні товариства й товариства з обмеженою відповідальністю, банки за участі іноземного капіталу, іноземні банки; за видами здійснюваних операцій — універсальні та спеціалізовані; за територією та сферами діяльності — загальнодержавні, регіональні, галузеві.

В останні десятиріччя розробляються моделі діяльності банків, що враховують різні аспекти їх фінансово-економічної діяльності. Серед напрямів розвитку мікроекономічної теорії у цій сфері є, зокрема, такі:

- моделі, що аналізують діяльність банків як фінансових посередників, з урахуванням інформаційної невизначеності та ризику, інформаційної асиметрії;
- моделі, що ґрунтуються на виробничо-організаційному підході;
- моделі банків із позицій сукупності стохастичних фінансових потоків тощо.

Основні концепції стохастичного моделювання фінансових потоків

Як зовнішні умови, що впливають на діяльність комерційного банку (чи фінансової фірми), так і процеси, що розвиваються у самому банку, є результатом складної і неоднозначної взаємодії багатьох чинників, причин, залежностей, багато з яких має випадкову (ймовірнісну) і/чи нечітку (розпливчасту) природу. Наслідком цього є те, що робота банківської установи значною мірою обтяжена невизначеністю та зумовленим нею ризиком.

Поточний стан банку (чи іншої фінансової інституції), можна описати за допомогою вектора характеристик:

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Кількісний та якісний склад компонент вектора x визначається ступенем деталізації.

Фактично ця форма опису стану банку за змістом адекватна банківському балансу: компоненти вектора x можуть бути інтерпретовані як звичайні статті балансу, а кількість їх і структура відповідають рівню його агрегованості (щоденний — який включає рахунки другого порядку, узагальнений — квартальний тощо). Стан окремого j-го ресурсу ототожнюється з деяким елементом множини невід'ємних дійсних чисел $R_+^1 = [0, +\infty)$. Стан банку загалом можна подати деякою точкою n-мірного евклідового простору:

$$x \in R_+^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \middle| x_j \in R_+^1 \right\}.$$

[1] *Загородній А. Г., Вознюк Г. Л., Смовженко Т. С.* Фінансовий словник. — 3-тє вид., випр. та доп. — К.: Т-во «Знання». КОО, 2000.

Множина всіх можливих (допустимих) точок (векторів) x утворює простір станів банку:

$$X = \{x\} \subset R_{+}^{n}.$$

Можуть створюватися також певні похідні (вторинні) характеристики:

$$y = (y_1, ..., y_i, ..., y_m) \in R^m.$$

Вектор похідних характеристик y є функцією від вектора x : $y = f(x)$.

Типовим прикладом похідних (вторинних) характеристик стану банку є система обов’язкових фінансових нормативів (коефіцієнтів), що їх установлюють центральні банки чи інші регулюючі органи.

Для врахування чинника часу потрібно задати деяку множину T, елементи котрої $t \in T$ називають моментами часу. Якщо задана модель неперервного часу, то стан j-ї характеристики можна розглядати як значення функції $x_j(t)$, що визначена на множині T і набуває значення на множині R_{+}^{1}. Графік функції $x_j(t)$ відіграє роль траєкторії зміни в часі j-ї характеристики. Стан банку загалом — це значення векторної функції часу:

$$x(t) = (x_1(t), ..., x_j(t), ..., x_n(t)),$$

а траєкторія системи $\{x(t)\}_{t \in T}$ є деякою кривою (гіперповерхнею) в n-мірному просторі.

Визначається також таке поняття, як потік.

Потік — це економічна величина, котра вимірюється в русі з урахуванням розглядуваного часового інтервалу. Розмірність потоку — це обсяг, поділений на інтервал часу.

Зміст поняття потік пов’язаний із поняттям швидкості зміни стану системи.

Якщо припустити, що функції $x_j(t)$, що задають траєкторії зміни характеристик стану банку, є диференційованими в усіх точках інтервалу $T = (T_-, T_+)$, то відповідні перші похідні

$$x'_j(t) = \dot{x}_j(t) = \frac{dx_j(t)}{dt}, \ \ j = 1, ..., n$$

можна інтерпретувати як швидкості зміни цих характеристик. Розглядаючи конкретний ресурс, отримують відповідні види потоків: фінансовий, грошовий, потік готівки тощо.

Динаміка банку в цілому може бути описана за допомогою векторного ресурсного потоку

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_j(t), ..., \dot{x}_n(t)),$$

який задає вектор швидкості зміни стану досліджуваного об’єкта в просторі.

Значення окремої характеристики об’єкта дослідження для будь-якого моменту часу $t \in (T_-, T_+)$ визначається за формулою

$$x_j(t) = \int_{T_-}^{t} \dot{x}_j(\tau) d\tau .$$

Формується модель, яка ґрунтується на відображенні банку як системи (вектора) первинних ресурсних потоків:

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ ..., \ \dot{x}_j(t), \ ..., \ \dot{x}_n(t)), \ t \in (T_-, T_+) .$$

Аналогічно можна розглядати й похідні (вторинні) ресурсні потоки:

$$\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t), \ ..., \ \dot{y}_i(t), \ ..., \ \dot{y}_m(t)), \ t \in (T_-, T_+) .$$

Обидві з наведених моделей дають уявлення щодо стану банку для кожного моменту часу t. Однак можна навести низку прикладів, коли виникає необхідність у переході від «точкового» подання до «інтегрального» опису поводження j-ї характеристики на певному заданому інтервалі часу

$$\big((t_-, \, t_+) \subseteq \ (T_-, \, T_+)\big).$$

Для цього вводиться поняття середнього значення характеристики (j-ї компоненти вектора стану) на інтервалі (t_-, t_+):

$$\bar{x}_j(t_-, t_+) = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} \dot{x}_j(t) dt,$$

яке вимірюється у відповідних ресурсних одиницях, а також середнього потоку:

$$\bar{\dot{x}}(t_-, t_+) = \frac{\dot{x}_j(t_+) - \dot{x}_j(t_-)}{t_+ - t_-},$$

що вимірюється в ресурсних одиницях на одиницю часу і визначає середню швидкість зміни обсягу j-го ресурсу за інтервал (t_-, t_+).

Моделі динаміки банківських ресурсів, що ґрунтуються на неперервному поданні часових інтервалів, не повною мірою відповідають процесам, які реалізуються на практиці. По-перше, «фізичний час» як такий, що плине рівномірно і неперервно, не відповідає зазвичай внутрішнім ритмам «життєвого циклу» економічних суб’єктів. Класичний приклад невідповідності «фізичного» і «економічного» часу пов’язаний із необхідністю врахування вихідних і святкових днів, упродовж яких банки не виконують свої операції. По-друге, неперервність висуває високі вимоги щодо масивів даних, необхідних для відповідного їх тестування та експлуатації.

Для переходу від неперервного часу до дискретного, що адекватніше враховує умови діяльності фінансово-економічних інститутів, може використовуватися модель Хікса[2]. Згідно з цією концепцією скінченний відрізок часу $[t_-, t_+]$, впродовж якого спостерігається функціонування досліджуваної системи, поділяється на K рівних частин (відрізків та напівінтервалів) довжиною δ:

[2] *Хікс Дж.* Стоимость и капитал. — М., 1993.

$$[t_-,\ t_- + \delta),\ [t_- + \delta,\ t_- + 2\delta), ..., [t_- + (K-1)\delta,\ t_+], \quad \text{де } t_- + K\delta = t_+.$$

В основі такого поділу — гіпотеза, за якою усі параметри $x_j(t)$, що характеризують стан банку та умови його функціонування, залишаються (наближено) постійними всередині інтервалів $[t_-, (k-1)\delta,\ t_- + k\delta)]$ і змінюються лише на межах часових інтервалів.

Отже, отримуємо дискретний «банківський» час τ, що набуває значення 0,1, …, k, …, K. Легко зробити узагальнення, враховуючи, що моменти «банківського» часу τ відділені проміжками часу різної довжини. Це дає змогу більш точно враховувати вимогу постійності процесів усередині цих періодів та чинник вихідних і святкових днів.

За впровадження дискретного часу відбувається фіксація відносно його моментів векторів стану:

$$x(\tau) = (x_1(\tau), ..., x_j(\tau), ..., x_n(\tau))$$

та векторів ресурсних потоків:

$$\dot{x}(\tau) = (\dot{x}_1(\tau), ..., \dot{x}_j(\tau), ..., \dot{x}_n(\tau)).$$

Можна також перейти від «щоденного» часу до «щотижневого», «щомісячного» тощо.

Наступний крок у процесі вдосконалення розглядуваного класу моделей — урахування в них чинників невизначеності та зумовленого ними ризику. Для цього зручно скористатися термінологією теорії випадкових процесів. Під випадковим (стохастичним) процесом (випадковою функцією часу) розуміють функцію $x(t)$, котра може мати ту чи іншу конкретну реалізацію (траєкторію) з деякої фіксованої множини можливих траєкторій:

$$X = \{x(t, \theta) | \theta \in \Theta\}.$$

Отже, в умовах невизначеності моделлю динаміки стану банку може слугувати векторний випадковий процес:

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), ..., \tilde{x}_j(t), ..., \tilde{x}_n(t)),$$

кожна компонента $\tilde{x}_j(t)$ якого описує стохастичну динаміку j-ї характеристики (ресурсу) банку. Аналогічно чинник невизначеності, наявний у системі ресурсних потоків банку, можна описати у формалізованому вигляді за допомогою векторного випадкового процесу:

$$\tilde{\dot{x}}(\tau) = (\tilde{\dot{x}}_1(\tau), ..., \tilde{\dot{x}}_j(\tau), ..., \tilde{\dot{x}}_n(\tau)),\quad i \in (T_-, T_+).$$

Дослідження, спрямовані на змістовний аналіз закономірностей функціонування банків, мають спиратися на дані та гіпотези, що конкретизують тип і параметри використовуваних випадкових величин і функцій[3].

[3] *Хованов Н. В.* Математические модели риска и неопределенности. — СПб., 1998.

Тема 5. Виробничі функції

Виробничі множини і їх властивості

Раніше нами було змодельовано поведінку індивідів-споживачів. Тепер розглянемо іншого найважливішого учасника економічних процесів – окремого виробника.

Третій найважливіший учасник реальної економіки – торговець – є посередником між споживачем і виробником. Саме через нього виробник реалізує свою продукцію і отримує із споживача гроші. Задовільної математичної формалізації торгівлі, можна сказати, не існує, і тому торговець у нас зливається з виробником.

З цього витікає підлегла роль виробника в системі споживання-виробництво – він реалізує свої цілі тільки через споживача і тому повинен вгадати, зрозуміти, що той хоче, і задовольнити його потреби. У цьому принципова відмінність класичної і неокласичної економічної теорії від марксизму, в якому виробництво відіграє самодовлеющую роль.

Нагадаємо, що наша економіка працює в просторі товарів $C = \{X = (x_1,...,x_n) : x_1,...,x_n \geq 0\}$. Раніше розглядався простір товарів, що складається з від'ємних *n-мірних* векторів. Розглянемо тепер вектор *T* розмірності *n*, перші *m* компонентів якого непозитивні: $x_1,...,x_m \leq 0$ а останні $(n-m)$ компонентів ненегативні: $x_{m+1},...,x_n \geq 0$. Вектор $X = (x_1,..,x_m)$ назвемо ***вектором витрат***, а вектор $Y = (x_{m+1},...,x_n)$ – ***вектором випуску***. Сам же вектор $T = (X, Y)$ назвемо ***вектором витрат-випуску***, або ***технологією***.

За своїм смислом ***технологія*** (*X*, *Y*) є способом переробки ресурсів у готову продукцію: "змішавши" ресурси в кількості *X*, отримаємо продукцію у розмірі *Y*.

Кожен конкретний виробник характеризується деякою множиною τ технологій, яка називається ***виробничою множиною***. Типова виробнича множина заштрихована на рис. 1. Даний виробник витрачає один товар для випуску іншого.

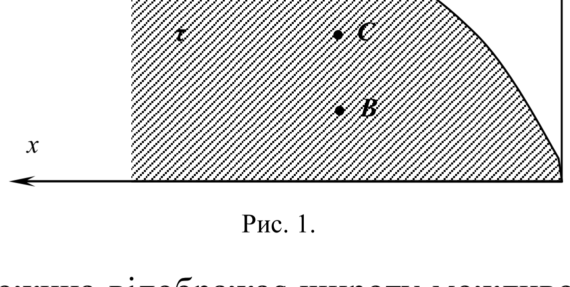

Рис. 1.

Виробнича множина відображає широту можливостей виробника: чим воно більше, тим ширше ці можливості.

Вважається, що **<u>виробнича множина повинна задовольняти наступним умовам</u>**:

а) множина замкнута – це означає, що якщо вектор T витрат-випуску скільки завгодно точно наближається векторами з τ, то і T належить τ;

б) $\tau \cap \Omega = \{0\}$де $\Omega = \{T : T \geq 0\}$; це формальна умова зрозуміла із змістовної і економічної точок зору: якби в τ був вектор $T \geq 0, T \neq 0$, то це означало б, що щось можна виробляти, нічого не витрачаючи;

в) $\tau \cap (-\tau) = \{0\}$тобто якщо $T \in \tau, T \neq 0$то $-T \notin \tau$-Т – не можна поміняти місцями витрати і випуск, тобто виробництво – необоротний процес;

г) множина опукла – це припущення веде, крім усього іншого, до зменшення віддачі від ресурсів, що переробляються, із зростанням об'ємів виробництва (до збільшення норм витрати затрат на готову продукцію). Так, з рис. 1 ясно, що $|y/x|$ убуває при $x \to \infty$. Зокрема, припущення про опуклість веде до зменшення продуктивності праці із зростанням об'єму виробництва. Часто опуклості просто буває недостатньо і тоді вимагають строгої опуклості виробничої множини (або деякій його частини).

"Крива" виробничих можливостей і вмінені витрати

Дане поняття виробничої множини відрізняється високим ступенем абстрактності і через надзвичайну спільність є малопридатним для економічної теорії. Розглянемо, наприклад, рис.1.

Погляньте на точки *B*, *C*. Витрати за цими технологіями однакові, а випуск різний. Виробник, якщо він не позбавлений здорового глузду, ніколи не вибере технологію *B*, якщо є більш краща технологія *C*.

У даному випадку (див. рис. 1), знайдемо для кожного $x \leq 0$ найвищу точку (x, y) у виробничій множині. Видно, що при витратах x технологія (x, y) найкраща. Ніяка технологія (x, b) з $b < y$ не повинна вибиратися виробником за очевидними причинами. Отже, в даному випадку (з двома товарами) легко отримано функцію $y = f(x)$ для $x \leq 0$; вона називається ***виробничою функцією***. Точне визначення виробничої функції таке: $y = f(x) \leftrightarrow (x, y) \in \tau$ і якщо $(x,b) \in \tau$ (x, b) і $b \geq y$, то $b = y$.

З рис. 1 видно, що для будь-якого $x \leq 0$ така точка $y = f(x)$ єдина, що, власне, і дозволяє говорити про виробничу функцію.

Але все так просто, тільки якщо випускається один товар.

У загальному випадку для вектора витрат X позначимо множину $M_X = \{Y : (X,Y) \in \tau\}$. Множина M_X – це множина всіх можливих випусків при витратах X. У цій множині розглянемо "***криву" виробничих можливостей*** $K_X = \{Y \in M_X : \text{если } Z \in M_X \text{ и } Z \geq Y, \text{ то } Z = Y\}$, тобто K_X – це безліч кращих випусків при даних витратах X, тобто таких випусків, краще за яких немає. Якщо випускаються два товари, то це крива, якщо ж випускаються більше двох товарів, то це поверхня, тіло або множина ще більшої розмірності.

Отже, для будь-якого вектора витрат X всі якнайкращі випуски лежать на кривій (поверхні) виробничих можливостей. Тому з економічних міркувань звідти і повинен виробник обирати технологію.

Для випадку випуску двох товарів y_1, y_2 картина показана на рис. 2.

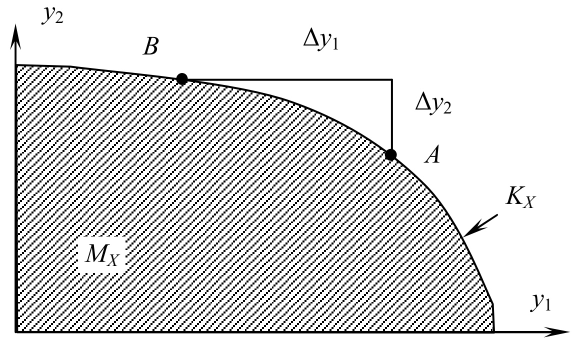

Рис. 2.

Якщо оперувати тільки натуральними показниками (тоннами, метрами і так далі), то для даного вектора витрат X ми лише повинні вибрати вектор випуску Y на кривій виробничих можливостей, але який конкретно випуск треба вибрати, вирішити ще не можна.

Якщо сама виробнича множина τ є опуклою, то і M_X є опуклою для будь-якого вектора витрат X. Доведемо це.

Нехай $Y, Z \in M_X$. Треба довести, що $\alpha Y + (1-\alpha)Z \in M_X$ для будь-якого $\alpha \in [0,1]$. Оскільки $(X,Y), (X,Z) \in \tau$ і τ є опуклим, то $\alpha(X,Y) + (1-\alpha)(X,Z) \in \tau$, тобто $(\alpha X, \alpha Y) + ((1-\alpha)X, (1-\alpha)Z) = (X, \alpha Y + (1-\alpha)Z) \in \tau$. Отже $(\alpha Y + (1-\alpha)Z) \in M_X$.

Надалі нам знадобиться навіть строга опуклість множини M_X. У разі випуску двох товарів це означає, що дотична до кривій виробничих можливостей K_X має з цією кривою тільки одну загальну крапку.

Розглянемо тепер питання про так звані вмінені витрати. Припустимо, що випуск фіксований в крапці *A,* див. рис. 2. Тепер виникла необхідність збільшити випуск 2-го товару на Δy_2, використовуючи, звичайно, колишній набір ресурсів витрат. Зробити це можна, як видно з рис. 2, перенісши технологію в крапку B, для чого із збільшенням випуску 2-го товару на Δy_2 доведеться зменшити випуск 1-го товару на Δy_1.

Вміненими витратами 1-го товару по відношенню до 2-го в крапці А називається $\lim\limits_{\Delta y_2 \to 0} |\Delta y_1 / \Delta y_2|$ – позначення $\delta_2^1(A)$. Якщо крива виробничих можливостей задана неявним рівнянням $F(y_1, y_2) = 0$, то $\delta_2^1(A) = (\partial F / \partial y_2)/(\partial F / \partial y_1)$, де частинні похідні узяті в крапці A.

Якщо уважно вглядітися в даний малюнок, то можна виявити цікаву закономірність: при русі зліва-вниз по кривій виробничих можливостей вмінені витрати зменшуються від дуже великих величин до дуже малих.

При деяких природних припущеннях на побудову виробничої множини цей факт вдається довести строго математично.

Виробничі функції і їх властивості

Отже, тільки за допомогою натуральних показників визначити для даних витрат X єдиний випуск Y задовільно не вдається: наш вибір звузився лише до кривої виробничих можливостей K_X. Через ці причини розроблена лише теорія виробничих функцій виробників, випуск яких можна охарактеризувати однією величиною – або об'ємом випуску, якщо випускається один товар, або сумарною вартістю всього випуску.

Стисло повторимо основне в цьому важливому випадку.

Отже, простір витрат є *m-мірним.* Кожній точці простору витрат $X = (x_1, ..., x_m)$ відповідає єдиний максимальний випуск (рис. 1), вироблений при використанні цих витрат. Цей зв'язок і називається виробничою функцією. Проте зазвичай виробничу функцію розуміють не так обмежувально і всякий функціональний зв'язок між витратами і випуском вважають ***виробничою функцією***. Надалі вважатимемо, що виробнича функція має необхідні похідні.

Передбачається, що **виробнича функція f задовольняє двом аксіомам**:

- Перша аксіома стверджує, що існує підмножина простору витрат, називана ***економічною областю*** E, в якій збільшення будь-якого виду витрат не призводить до зменшення випуску. Таким чином, якщо X_1, X_2 – дві точки цієї області, то з нерівності $X_1 \geq X_2$ випливає $f(X_1) \geq f(X_2)$.

  У диференціальній формі це виражається в тому, що в цій області всі перші частинні похідні функції f невід'ємні: $\partial f / \partial x_i \geq 0$. Ці похідні називаються ***граничними продуктами***, а вектор $\partial f / \partial X = (\partial f / \partial x_1, ..., \partial f / \partial x_m)$ – ***вектором граничних продуктів***.

- Друга аксіома стверджує, що існує опукла підмножина S економічної області, для якої підмножини $\{X \in S : f(X) \geq a\}$ опуклі для всіх $a \geq 0$. У цій підмножині S матриця Гессе, складена з двох похідних функції f від'ємно визначена, отже $\partial^2 f / \partial x_i^2 < 0$ для будь-якого $i = 1, ..., m$.

Зупинимося на **економічному змісті цих аксіом**. Перша аксіома стверджує, що виробнича функція не якась абсолютно абстрактна функція, придумана теоретиком-математиком. Вона, хай і не на всій своїй області визначення, а тільки на її частині, відображає економічно важливе, безперечне і в той же час тривіальне твердження: у хоч трохи розумній економіці збільшення витрат не може призвести до зменшення випуску.

З другої аксіоми пояснимо тільки економічний смисл вимоги, щоб похідна $\partial^2 f / \partial x_i^2$ була менше нуля для кожного виду витрат. Ця властивість називається в економіці ***законом убуваючої віддачі*** або ***убуваючої прибутковості***: у міру збільшення витрат, починаючи з деякого моменту (при вході в область *S*), починає зменшуватися граничний продукт. Класичним прикладом цього закону є додавання всі більшої і більшої кількості праці у виробництво зерна на фіксованій ділянці землі.

Надалі мається на увазі, що виробнича функція розглядається на області *S*, в якій обидві аксіоми справедливі.

Скласти виробничу функцію даного підприємства можна, навіть нічого не знаючи про підприємство. Треба тільки поставити біля воріт підприємства Лічильник (людину або якийсь автоматичний пристрій), який фіксуватиме X – ресурси, що ввозяться, і Y – кількість продукції, яку підприємство виробило. Якщо накопичити достатньо багато такої статистичної інформації, врахувати роботу підприємства в різних режимах, то потім можна прогнозувати випуск продукції, знаючи тільки об'єм ввезених ресурсів, а це і є знання виробничої функції.

Виробнича функція Кобба-Дугласа

Як приклад, розглянемо одну з найбільш поширених виробничих функцій – ***функцію Кобба-Дугласа***:

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta},$$

де $A, \alpha, \beta > 0$ – константи $\alpha + \beta < 1$;

K – об'єм фондів або у вартісному виразі, або в натуральній кількості, скажімо, число верстатів;

L – об'єм трудових ресурсів, також або у вартісному виразі, або в натуральній кількості – число робочих, число людино-дня і тому подібне і, нарешті,

Y – випуск продукції у вартісному або натуральному виразі.

Перевіримо, чи виконуються основні вимоги до виробничих функцій:

- позитивність граничних продуктів $\partial Y / \partial K = A\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} > 0$, $\partial Y / \partial L = A\beta K^{\alpha} L^{\beta-1} > 0$;
- від'ємність інших частинних похідних, тобто убування граничних продуктів $\partial^2 Y / \partial K^2 = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2} L^{\beta} < 0$, $\partial^2 Y / \partial L^2 = A\beta(\beta-1)K^{\alpha} L^{\beta-2} < 0$.

Перейдемо до основних економіко-математичних характеристик виробничої функції Кобба-Дугласа.

Середня продуктивність праці визначається як $y = Y/L$ – відношення об'єму виробленого продукту до кількості витраченої праці.

Середня фондовіддача $k = Y/K$ – це відношення об'єму виробленого продукту до величини фондів.

Для функції Кобба-Дугласа середня продуктивність праці $y = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ і через умову $\beta < 1$ є убуваючою функцією *L*, тобто із збільшенням витрат праці середня продуктивність праці падає. Цей висновок допускає природне пояснення – оскільки величина другого чинника *K* залишається незмінною, то, отже, робоча сила, що знов привертається, не забезпечується додатковими засобами виробництва, що і призводить до зниження продуктивності праці.

Гранична продуктивність праці $\partial Y/\partial L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$, звідки видно, що для функції Кобба-Дугласа гранична продуктивність праці пропорційна середній продуктивності і менше її. Аналогічно визначаються середня і гранична фондовіддачі. Для них також справедливо вказане співвідношення – гранична фондовіддача пропорційна середньою фондовіддачі і менше її.

Важливе значення має така характеристика, як ***фондоозброєнність*** $f = K/L$, яка показує об'єм фондів, що доводиться на одного працівника (на одну одиницю праці).

Знайдемо тепер еластичність продукції за працею:

$$(\partial Y/\partial L):(Y/L) = \; = (\partial Y/\partial L) \cdot L/Y = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}L/(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \beta .$$

Отже, смисл параметра β в тому, що це еластичність продукції за працею. Аналогічний смисл має параметр α – це еластичність продукції за фондами.

І ще одне зауваження представляється цікавим. Най $\alpha + \beta = 1$. Легко перевірити, що $Y = (\partial Y/\partial K)K + (\partial Y/\partial L)L$ (підставляючи вже обчислені раніше $\partial Y/\partial K$, $\partial Y/\partial L$ в цу формулу). Будемо вважати, що суспільство складається тільки з робітників і підприємців. Тоді дохід *Y* розпадається на дві частини – дохід робітників і дохід підприємців. Оскільки при оптимальному розмірі фірми величина $\partial Y/\partial L$ – граничний продукт за працею – співпадає із заробітною платою (цей висновок буде підкріплений пізніше), то $(\partial Y/\partial L)L$ є доходом робітників. Аналогічно величина $\partial Y/\partial K$ є гранична фондовіддача, економічний смисл якої є норма прибутку, отже $(\partial Y/\partial K)K$ являє дохід підприємців.

На закінчення відзначимо, що функція Кобба-Дугласа – найбільш відома серед всіх виробничих функцій. Були спроби побудови функції Кобба-Дугласа для економіки всієї країни. На практиці при побудові функції Кобба-Дугласа іноді відмовляються від деяких вимог (наприклад, сума $\alpha + \beta$ може бути більше одиниці і тому подібне).

Двофакторні виробничі функції

Наведені нижче функції розташовуються в порядку зростання складності у їх запису. Усі функції допускають можливість їх модифікації.

1. *Функція з фіксованими пропорціями чинників* (*функція Леонтьєва*)*:*

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right),$$

де a_1, a_2 — параметри.

Відомо кілька альтернативних систем (гіпотез), що виокремлюють функції цього виду:

а) гранична продуктивність першого чинника є дворівневою кусково-постійною незростаючою функцією від співвідношення x_1/x_2 з нульовим нижнім рівнем; гранична продуктивність другого чинника — неспадна кусково-постійна функція від x_2/x_1 з нульовим нижнім рівнем;

б) функція є розв’язком такої задачі математичного програмування:

$$y \to \max,$$
$$a_1 y \le x_1,$$
$$a_2 y \le x_2,$$

де y — змінна, яку оптимізують;

в) функція є однорідною першого степеня, а еластичність заміни чинників дорівнює нулю;

г) функція може бути отримана з функції із постійною еластичністю вигляду

$$y = \left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_3} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_3}\right)^{\frac{1}{a_3}}$$

шляхом граничного переходу: $a_3 \to -\infty$.

Функція Леонтьєва призначена в основному для моделювання строго детермінованих технологій, які не допускають відхилення від технологічних норм і нормативів щодо використання ресурсів на одиницю продукції. Як правило, вона використовується для формалізованого опису дрібномасштабних або цілком автоматизованих об’єктів.

2. *Функція Кобба — Дугласа:*

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}.$$

Тут також використовується кілька систем гіпотез, що виокремлюють клас функцій Кобба — Дугласа серед двічі диференційованих функцій від двох змінних:

а) еластичності випуску за чинниками є постійними:

$$\begin{matrix} \chi_{21}^{1}(x_1, x_2) = a_1 \\ \chi_{22}^{1}(x_1, x_2) = a_2 \end{matrix};$$

Розв'язок цієї системи диференційних рівнянь у частинних похідних першого порядку належить до класу функцій Кобба — Дугласа;

б) еластичність функції за одним із чинників є постійною, і функція є однорідною:

$$\begin{matrix} \chi_{21}^{1}(x_1, x_2) = a_1 \\ \chi_{21}^{1}(x_1, x_2) + \chi_{22}^{1}(x_1, x_2) = a_1 + a_2 \end{matrix};$$

в) функція є однорідна, а еластичність заміщення чинників дорівнює одиниці:

$$\chi_{12}^{2} = 1;$$

г) гранична продуктивність кожного чинника є пропорційною його середній продуктивності:

$$\begin{matrix} \chi_{11}^{1}(x_1, x_2) = a_1 \chi_1^{0}(x_1, x_2) \\ \chi_{12}^{1}(x_1, x_2) = a_2 \chi_2^{0}(x_1, x_2) \end{matrix};$$

д) функція є однорідною як функція від двох змінних x_1, x_2 і як функція від x_1 за будь-якого фіксованого x_2;

є) функція може бути отримана із функції з постійною еластичністю шляхом здійснення заміни вигляду

$$y = a_0 (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{\frac{1}{a_3}}$$

та граничного переходу $a_3 \to 0$. Функція Кобба — Дугласа найчастіше використовується для формалізованого опису середньомасштабних господарських об'єктів та економіки країни.

3. *Лінійна функція*

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 .$$

Передумови та гіпотези:

а) граничні продуктивності чинників є постійними:

$$\begin{matrix} \chi_{11}^{1}(x_1, x_2) = a_1 \\ \chi_{12}^{1}(x_1, x_2) = a_2 \end{matrix},$$

а в нулі функція набуває нульового значення;

б) гранична продуктивність одного з чинників є постійною, і функція однорідна першого степеня:

$$\begin{aligned}&\chi_{11}^{1}(x_1,x_2)=a_1\\&\chi_{21}^{1}(x_1,x_2)+\chi_{22}^{1}(x_1,x_2)=1\end{aligned};$$

в) функція однорідна першого степеня, й еластичність заміщення чинників є нескінченною

$$\chi_{12}^{2}=\infty;$$

г) еластичність випуску за чинниками обернено пропорційна їхній середній продуктивності:

$$\begin{aligned}&\chi_{21}^{1}(x_1,x_2)=a_1\big/\chi_1^0(x_1,x_2)\\&\chi_{22}^{1}(x_1,x_2)=a_2\big/\chi_2^0(x_1,x_2)\end{aligned}. \qquad (1.18)$$

Лінійна функція застосовується для моделювання великомасштабних систем (велика галузь, народне господарство в цілому), у яких випуск продукції є результатом одночасного функціонування великої кількості різноманітних технологій. Особливу роль відіграє гіпотеза постійності граничних продуктивностей виробничих чинників чи їх необмеженого заміщення.

4. *Функція Аллена*:

$$y=a_0x_1x_2-a_1x_1^2-a_2x_2^2 \qquad (1.19)$$

визначається такими умовами: швидкості зростання граничних продуктивностей є постійними

$$\frac{\partial\chi_{11}^{2}}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=const,\ \frac{\partial\chi_{12}^{2}}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=const, \qquad (1.20)$$

і функція є однорідною

$$\chi_{21}^{1}(x_1,x_2)+\chi_{22}^{1}(x_1,x_2)=const. \qquad (1.21)$$

Функція Аллена за a_1, $a_2 > 0$ призначається для формалізованого опису виробничих процесів, у яких надмірне зростання будь-якого з чинників негативно впливає на обсяг випуску продукції. Зазвичай така функція використовується для формалізованого опису дрібномасштабних виробничих систем з обмеженими можливостями переробки ресурсів.

5. *Функція постійної еластичності заміщення чинників* (*функція* CES):

$$y=\left(a_1x_1^{a_3}+a_2x_2^{a_3}\right)^{a_4}. \qquad (1.22)$$

Передумови та гіпотези: функція є однорідною

$$\chi_{21}^{1}(x_1,x_2)+\chi_{22}^{1}(x_1,x_2)=const \qquad (1.23)$$

й еластичність заміщення чинників є постійною

$$\chi_{12}^{2}(x_1,x_2)=const. \qquad (1.24)$$

Функція CES застосовується у разі відсутності точної інформації щодо рівня взаємозаміни виробничих чинників, і разом з тим є підстави вважати, що цей рівень суттєво не зміниться за зміни обсягів залучених ресурсів, тобто коли економічна технологія має властивість певної стійкості щодо певних пропорцій чинників. Функція CES (за наявності засобів оцінки її параметрів) може використовуватись для моделювання систем будь-якого рівня.

Приклад. Виробнича функція підприємства має вигляд:

$$X = 3K^{1/3}L^{2/3}.$$

1). Записати рівняння ізокванти, що проходить через точку з координатами $K_0 = 1,\ L_0 = \sqrt{2}$.

2). Записати рівняння ізокліналі, що проходить через точку з координатами

а) $K_0 = 1,\ L_0 = \sqrt{2}$;

б) $K_1 = 0,\ L_1 = 1$.

3). Знайти граничну норму заміщення праці фондами у точці $K_2 = 1,\ L_2 = 1$.

Розв'язання

1). Обчислимо обсяг випуску, що відповідає витратам ресурсів $K_0 = 1,\ L_0 = \sqrt{2}$:

$$X_0 = 3 \cdot 1^{1/3}\left(\sqrt{2}\right)^{2/3} = 3 \cdot 2^{1/3}.$$

Запишемо рівняння ізокванти

$$3K^{1/3}L^{2/3} = 3 \cdot 2^{1/3}$$

або

$$K = \frac{2}{L^2},$$

тобто це є степенева гіпербола, асимптотами якої є осі координат.

2). Рівняння ізокліналі, що проходить через точку з координатами K_0, L_0, має вигляд:

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}L^2 + a}, \quad a = \text{const},$$

$$a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\ L_0^2.$$

а) запишемо рівняння ізокліналі, що проходить через точку з координатами $K_0 = 1,\ L_0 = \sqrt{2}$:

$$a = 1^2 - \frac{1/3}{2/3}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 0,$$

$$K = \sqrt{\frac{1/3}{2/3}L^2},$$

або, враховуючи область визначення виробничої функції, остаточно рівняння ізокліналі, що проходить через точку з координатами $K_0 = 1,\ L_0 = \sqrt{2}$, матиме вигляд

$$K = \sqrt{\frac{1}{2}}L.$$

Це рівняння прямої, що проходить через початок координат і ортогональної ізокванті $K = \dfrac{2}{L^2}$.

б) Запишемо рівняння ізокліналі, що проходить через точку з координатами $K_1 = 0,\ L_1 = 1$;

$$a = 0 - \frac{1/3}{2/3}1^2 = -\frac{1}{2},$$

$$K = \sqrt{\frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{2}}.$$

Приклад. Розглянемо знайдену за даними 1960—1995 рр. виробничу функцію валового внутрішнього продукту США:

$$X = 2{,}248K^{0{,}404}L^{0{,}803}.$$

Валовий внутрішній продукт США, що вимірюється в млрд дол., зріс з 1960 до 1995 р. у 2,82 раза, тобто $\widetilde{X} = 2{,}82$; основні виробничі фонди за цей самий період збільшились у 2,88 раза ($\widetilde{K} = 2{,}88$), а чисельність зайнятих — у 1,93 раза ($\widetilde{L} = 1{,}93$).

Обчислити масштаб та ефективність виробництва.

Розв'язання.

Обчислимо відносні еластичності за фондами і працею:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}404}{0{,}404 + 0{,}803} = 0{,}3347, \qquad 1 - \alpha = 0{,}6653.$$

Визначимо тепер часткові ефективності ресурсів:

$$E_K = \frac{\widetilde{X}}{\widetilde{K}} = \frac{2{,}82}{2{,}88} = 0{,}98, \qquad E_L = \frac{\widetilde{X}}{\widetilde{L}} = \frac{2{,}82}{1{,}93} = 1{,}46,$$

а також знайдемо узагальнений показник ефективності як зважене середньогеометричне часткових показників:

$$E = E_K^{\alpha} E_L^{1-\alpha} = 0{,}98^{0{,}3347} \cdot 1{,}46^{0{,}6653} \approx 1{,}278.$$

Масштаб обчислюємо як зважене середньогеометричне темпів зростання ресурсів:

$$M = \widetilde{K}^{\alpha} \widetilde{L}^{1-\alpha} = 2{,}88^{0{,}3347} \cdot 1{,}93^{0{,}6653} \approx 2{,}207.$$

Отже, загальне зростання ВВП з 1960 до 1995 р. у 2,82 раза стало можливим завдяки зростанню масштабу виробництва у 2,207 раза і підвищенню ефективності виробництва у 1,278 раза (2,82 = 1,278 · 2,207).

Тема 6. Моделі поведінки споживачів,виробників та моделі їхньої взаємодії

Моделі поведінки споживачів

Задача оптимального (раціонального) вибору споживача.

У теорії споживання вважається, що споживач керується принципом раціональності: він завжди прагне максимізувати свою корисність, і єдине, що його стримує, — це обмежений дохід:

$$\max_{px=M} u(x), \tag{1.25}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ — вектор-стовпчик обсягів споживчих товарів, що придбав споживач за заданих цін, n — число різноманітних товарів; u(x) — функція корисності споживача; $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор-рядок цін товарів, M — обсяг товарів споживача.

Це задача на умовний екстремум і її розв'язок зводиться до знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = u(x) — \lambda\ (px — M).$$

Необхідними умовами локального екстремуму є :

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = M\ ; \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i^*) - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ n\,. \tag{1.27}$$

Точка екстремуму справді визначає точку максимуму, оскільки матриця Гессе $U(x) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right\|$ є від'ємно визначеною[4]. З виразу (1.27) бачимо, що споживач за фіксованого доходу так обирає набір x^*, що в цій точці відношення граничної корисності дорівнює відношенню цін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_1 / p_2\,,\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} : \frac{\partial u}{\partial x_n}\ =\ p_{n-1} / p_n\,.$$

Якщо розв'язати (1.26), (1.27) відносно x^*, отримаємо *функцію попиту споживача*:

$$x^* = x^*(p, M).$$

[4] Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 408 с.

Рівняння Слуцького

Розглянемо, як зміниться попит споживача, що визначається моделлю (1.25), якщо зміниться ціна одного з товарів. Нехай ціна n-го товару зросла на dp_n. Це приводить до такої зміни попиту на товари:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} dp_n = \mu U^{-1} p' x_n^* dp_n + \lambda^* (\mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1})_n dp_n \ , \qquad (1.28)$$

де p — вектор-рядок цін; U — матриця Гессе; x^* — вектор-стовпчик попиту на товари; λ^* — множник Лагранжа; μ = — $(pU^{-1} p')^{-1} > 0$, індекс n за дужками біля матриці означає, що взято її n-й стовпчик.

Проаналізуємо зміст складових, що входять у рівняння (1.28).

Зміна попиту за збільшення ціни з компенсацією доходу. Нехай дохід споживача збільшився на таку величину dM, яка компенсує споживачеві збільшення ціни на n-й товар (благо) на dp_n.

Збільшення ціни з компенсацією доходу приводить до такої зміни попиту:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} dp_n = \lambda^* (\mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1})_n dp_n \, . \qquad (1.29)$$

Тобто друга складова у правій частині рівняння (1.28) — це зміна попиту, якщо зростання ціни n-го товару на dp_n компенсується збільшенням доходу на $dM = x_n^* dp_n$.

Зміна попиту за зміни доходу. Якщо дохід

$$dx^* = \frac{\partial x^*}{\partial M} dM \ ,$$

де

$$\frac{\partial x^*}{\partial M} = -\mu U^{-1} p'. \qquad (1.30)$$

Об’єднуючи вирази (1.28), (1.29), (1.30), отримаємо рівняння Слуцького, яке є серцевиною теорії корисності:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} - \frac{\partial x^*}{\partial M} x_n^* \, . \qquad (1.31)$$

Оскільки вивчається зміна попиту за зростання ціни на n-й товар, що не компенсується підвищенням доходу, то друга складова в (1.31) (з від’ємним знаком) знімає штучний приріст попиту, що викликаний компенсуючим зростанням доходу.

Ефект доходу полягає у зміні споживання внаслідок зміни реального доходу, яка виникла через зміну цін.

Ефект заміщення полягає у зміні споживання внаслідок зміни відносних цін.

Моделі поведінки виробників

Моделі оптимального (раціонального) вибору виробника (фірми). Нехай виробнича фірма випускає один продукт (чи багато продуктів, але з постійною структурою). Позначимо річний випуск у натурально-речовій формі через X — *кількість одиниць продукту одного виду*, вектор-стовпчик можливих обсягів витрат різних видів ресурсів через $x = (x_1, \ldots, x_n)'$. Тоді технологія фірми визначатиметься її виробничою функцією, яка виражає зв'язок між випуском і витратами ресурсів:

$$X = F(x).$$

Припускається, що $F(x)$ двічі неперервно диференційована, неокласична і матриця її других похідних є від'ємно визначеною.

Якщо $w = (w_1, \ldots, w_n)$ — вектор-рядок цін ресурсів, а p — ціна продукції, то кожному вектору витрат x відповідає прибуток:

$$\Pi(x) = pF(x) — wx. \tag{1.32}$$

У (1.32) $R = pX = pF(x)$ — вартість річного випуску фірми або її річний дохід, $C = wx$ — витрати виробництва чи вартість витрат ресурсів за рік.

Якщо не вводити інших обмежень, крім невід'ємних обсягів витрат ресурсів, то задача знаходження максимуму прибутку набере вигляду:

$$\max_{x \geq 0} [pF(x) - wx]. \tag{1.33}$$

Це задача нелінійного програмування з n умовами невід'ємності: $x_i \geq 0$, i $=1,\ldots, n$. Необхідними умовами існування екстремуму є умови Куна—Таккера:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_j} = p\frac{\partial F}{\partial x_j} - w_j \leq 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x_j} x_j = \left(p\frac{\partial F}{\partial x_j} - w_j \right) x_j = 0, \;\; x_j \geq 0, \;\; j = 1,\ldots,n. \tag{1.34}$$

Якщо в оптимальному розв'язку використовуються всі види ресурсів, тобто $x_i^* > 0,\ i = 1,\ldots,n$, то умови (1.34) матимуть вигляд:

$$p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_j} = w_j, \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{1.35}$$

тобто в оптимальній точці вартість граничного продукту даного ресурсу повинна дорівнювати його ціні.

Розглянемо задачу знаходження максимуму випуску за заданого обсягу витрат

$$\max F(x), \quad wx \leq C, \quad x \geq 0. \tag{1.36}$$

Це задача нелінійного програмування з одним лінійним обмеженням і умовою невід'ємності змінних. Побудуємо функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda\,(C — wx),$$

і знайдемо її максимум за умови невід'ємності змінних. Для цього необхідно, щоб виконувались умови Куна — Таккера:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \lambda w_j \le 0, \ \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} - \lambda w_j\right) x_j = 0, \ x_j \ge 0, \ j = 1,...,n \ . \tag{1.37}$$

Як бачимо, якщо покласти $\lambda = \frac{1}{p}$, умови (1.37) збігаються з умовами (1.34).

Аналіз реакції виробника на зміну цін випуску і ресурсів. Розглянемо систему з n рівнянь (1.35):

$$p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_j} - w_j = 0, \quad j = 1, ..., n$$

Ця система має розв'язок:

$$x^* = x^*(p, w) \text{ або } x_j^* = x_j^*(p, w), \ \ j = 1, ..., n. \tag{1.38}$$

Співвідношення (1.38) задають *функцію попиту* на ресурси, що визначається моделлю поведінки фірми (1.33). Відповідно функція пропозиції (виробництво) товарів (послуг) —

$$X^*(p, w) = F[x^*(p, w)].$$

Подібно до рівняння Слуцького, аналогічні рівняння описують реакцію виробника на зміну цін випуску і ресурсів.

За умови заданих цін p, w поведінка виробника визначається такими співвідношеннями (усього $(n + 1)$ співвідношень):

$$\begin{cases} X^*(p, w) = F[x^*(p, w)], \\ p\dfrac{\partial F}{\partial x}[x^*(p, w)] = w. \end{cases}$$

Реакція виробника на зміну ціни випуску. Позначимо

$$H = \left\| \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right\|,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \text{ — вектор-рядок,}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p}, ..., \frac{\partial x_n^*}{\partial p}\right)' \text{ — вектор-стовпчик.}$$

Тоді рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ 0 & pH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)' \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

описує реакцію виробника (зміну випуску і зміну попиту на ресурси) на зміну ціни випуску p.

Реакція виробника на зміну цін ресурсів. Нехай змінилися ціни ресурсів w_k, $k = 1, ..., n$. Позначимо:

$$\frac{\partial X^*}{\partial w} = \left(\frac{\partial X^*}{\partial w_1},\ \frac{\partial X^*}{\partial w_2}, ...,\ \frac{\partial X^*}{\partial w_n}\right),\ \frac{\partial x^*}{\partial w} = \left\| \frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} \right\|,$$

тоді рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ 0 & pH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial w} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'_n \\ I_n \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

являє собою реакцію виробника на зміну цін ресурсів ($0'_n$ — вектор-рядок, що складається з n нулів, I_n — одинична матриця).

Реакція виробника на одночасну зміну ціни випуску та цін ресурсів. Поєднання рівнянь (1.39) та (1.40) дає основне матричне рівняння теорії фірми:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ 0 & pH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} & \dfrac{\partial X^*}{\partial w} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0'_n \\ -\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)' & I_n \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

яке показує реакцію виробника на одночасну зміну ціни випуску і цін ресурсів.

Розв'язуючи (1.41) відносно зміни випуску $\dfrac{\partial X^*}{\partial p}$, $\dfrac{\partial X^*}{\partial w}$ і зміни попиту на ресурси $\dfrac{\partial x^*}{\partial p}$, $\dfrac{\partial x^*}{\partial w}$, отримуємо систему рівнянь фірми відносно змін випуску і попиту на ресурси:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} = -\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial F}{\partial x} H^{-1}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)', \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} = -\dfrac{1}{p} H^{-1}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)', \\ \dfrac{\partial X^*}{\partial w} = \dfrac{1}{p}\dfrac{\partial F}{\partial x} H^{-1}, \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial w} = \dfrac{1}{p} H^{-1}. \end{cases} .$$

Моделі взаємодії споживачів і виробників

Існує низка моделей встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару. Розглянемо, зокрема, модель Еванса з неперервним часом та модель Вальраса.

Модель Еванса. Розглянемо ринок одного товару. Час t вважатимемо неперервним. Позначимо через $d = d(t) = \Phi[p(t)]$, $s = s(t) = \psi[p(t)]$ інтегрований попит і пропозицію в момент t, а через $p(t)$ — ціну товару в цей момент.

У моделі постулюється, що попит і пропозиція є лінійними функціями ціни:

$\Phi(p) = a - bp$, $a > 0$, $b > 0$ (попит зі зростанням ціни спадає);

$\psi(p) = \alpha + \beta p$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (пропозиція зі зростанням ціни зростає).

Крім цього, слушно вважати, що $a > \alpha$ (за нульової ціни попит перевищує пропозицію).

Основна гіпотеза моделі полягає в тому, що зміна ціни пропорційна різниці попиту і пропозиції:

$$\Delta p = \gamma\,(d - s)\Delta t, \gamma > 0.$$

Використовуючи зроблені припущення, можна прийти до такого диференційного рівняння щодо ціни:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\big(-(b+\beta)p + a - \alpha\big),\ p(0) = p_0. \qquad (1.42)$$

Це рівняння має стаціонарну (рівноважну) точку p^0 (коли $\dfrac{dp}{dt} = 0$):

$$p^0 = \frac{a-\alpha}{b+\beta} > 0.$$

Розв'язок рівняння (1.42) має вигляд:

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}[1 - e^{-\gamma(b+\beta)t}].$$

З виразу (1.42) бачимо, що за $p_0 < p^0$ похідна $\frac{dp}{dt} > 0,$ а за $p_0 > p^0$ похідна $\frac{dp}{dt} < 0,$ крім того, $\lim_{t\to\infty} p(t) = p^0$. Отже, у першому випадку ціна досягає рівноважного значення, зростаючи, а в другому — спадаючи, при цьому рівноважна ціна p^0 не залежить від початкової p_0. Рівноважна ціна є абсцисою точки перетину прямих попиту і пропозиції, тобто за такої ціни попит дорівнює пропозиції.

Дискретний аналог моделі Еванса подано на рис. 1.14, де зображені прямі інтегрованого попиту $d = \Phi(p)$ і пропозиції $s = \psi(p)$ та показано механізм побудови послідовності p_n, що монотонно зростаючи від початкової нерівноважної ціни p_0 (за якої попит не дорівнює пропозиції) прямує до рівноважної ціни p^0. Час поділено на рівні інтервали Δt, і ціна в момент $t_n = n\Delta t$ дорівнює:

$$p_n = p_{n-1} + \gamma\Delta t\delta_{n-1},\ \ \delta_{n-1} = (a-\alpha) - (b+\beta)p_{n-1}.$$

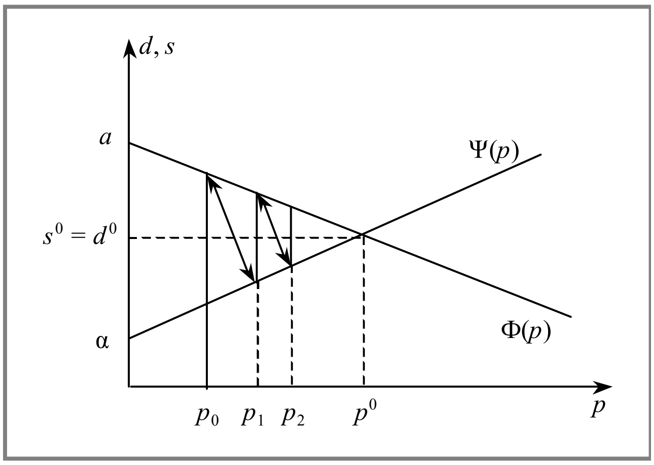

Рис. 1.14. Дискретний аналог моделі Еванса

Модель Вальраса. Сучасна розвинута економіка складається з численних господарських одиниць та споживачів. Кожний з учасників ринку досконалої конкуренції має свої цілі, внаслідок чого виникають конфліктні ситуації. У моделі Вальраса, що включає скінченну кількість споживачів і виробників, таке вирішення конфлікту досягається через конкретний ринковий механізм, що ґрунтується на регулюючій дії системи цін.

У моделі Вальраса розглядається економіка з l споживачами ($i = 1, \ldots, l$), m виробниками ($k = 1, \ldots, m$) і n типами товарів ($j = 1, \ldots, n$). Через $p = (p_1, \ldots, p_n)$ позначатимемо вектор-рядок цін на товари, а через $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ — вектор-стовпчик обсягів товарів. У даній моделі під товаром маються на увазі і продукти праці, засоби праці та первинні ресурси.

Кожен споживач володіє доходом $K(p)$ і має своє поле переваг щодо товарів, яке може бути задане у вигляді функції корисності $u(x)$. Якщо позначити через $X(p) = \{x : x \in X,\ px \le K(p)\}$ множину допустимих наборів товарів, що є доступними споживачеві за цін p, X — область визначення $u(x)$, то функція попиту споживача може бути задана таким чином:

$$\Phi(p) = \left\{ x^* : u(x^*) = \max_{x \in X(p)} u(x) \right\},$$

тобто функція попиту — це такий набір (набори) товарів з множини допустимих наборів товарів, який максимізує корисність споживача за заданого рівня цін p. Отже, кожний споживач характеризується функцією попиту $\Phi_i(p)$ і доходом $K_i(p)$. Припускається, що дохід кожного споживача складається з двох частин: з доходу pb_i від продажу початкового запасу товарів b_i та доходу $l_i(p)$ в результаті участі споживача у виробництві, тобто

$$K_i(p) = pb_i + l_i(p).$$

Кожен виробник (фірма) формалізується своїми технологічними можливостями. Позначимо через $y_k = (y_{k1}, ..., y_{kn})'$ вектор-стовпчик витрат — випуску k-го виробника: додатні компоненти цього вектора задають випуск фірми, від'ємні компоненти — витрати. Тому скалярний добуток py_k є прибутком фірми. Технологічні можливості фірми визначаються як множина всіх допустимих векторів витрат — випуску: Y_k. Цю множину називають *множиною виробничих можливостей.*

Під функцією пропозиції фірми розуміють один чи кілька векторів витрат — випуску, котрі за заданих цін p максимізують прибуток:

$$\psi_k(p) = \left\{ y_k^* : py_k^* = \max_{y_k \in Y_k} py_k \right\}.$$

Вважається, що Y_k для будь-якого k є замкнутою множиною і $0 \in Y_k$, тобто фірма може не випускати продукцію та не робити витрат.

Вектор витрат — випуску для всієї економіки визначається як сума векторів витрат — випуску для всіх виробників:

$$y = \sum_{k=1}^{m} y_k.$$

У результаті у вектор y увійдуть з додатним знаком лише кінцеві продукти (кінцевий випуск), а з від'ємним знаком — первинні ресурси.

Вектор y набуває певних значень із сукупної технологічної множини (загальноекономічної множини виробничих можливостей):

$$Y = \left\{ y : y = \sum_{k=1}^{m} y_k, \;\; y_k \in Y_k, \;\; k = 1, \; ..., \; m \right\}.$$

Сума по всіх споживачах початкових запасів товарів $b=\sum_{i=1}^{l} b_i$ становить *сукупну початкову власність.* У поняття початкової власності можуть входити не лише споживчі товари, а й проміжні продукти. Множина $\{b\}\,+\,Y$ являє собою *множину сукупної пропозиції.*

Основна функція економіки незалежно від того, є вона централізованою чи децентралізованою, полягає в розподілі сукупного виробництва між виробниками і вироблених продуктів — серед споживачів.

Під спільним розподілом виробництва й споживання мають на увазі такий набір векторів споживання і векторів витрат — випуску

$$(x_1, ..., x_i, ..., x_l, \quad y_1, ..., y_k, ..., y_m), \quad x_i \in X_i, \quad y_k \in Y_k,$$

для якого сукупний попит збігається із сукупною пропозицією, тобто

$$x=\sum_{i=1}^{l} x_i = b + \sum_{k=1}^{m} y_k = b + y.$$

Набір $(x_1^*, ..., x_l^*, \ y_1^*, ..., y_m^*, \ p^*)$ задає конкурентну рівновагу в моделі Вальраса, якщо:

$$\begin{aligned} &x_i^* \in \Phi_i(p^*), \ \ i=1, ..., l, \\ &y_k^* \in \psi_k(p^*), \ \ k=1, ..., m, \end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* + b \geq \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \tag{1.44}$$

$$p^*\left(\sum_{k=1}^{m} y_k^* + b\right) = p^* \sum_{i=1}^{l} x_i^*. \tag{1.45}$$

Тут p^* називають *вектором конкурентних цін*.

Співвідношення (1.44), (1.45) іменують *законом Вальраса у широкому розумінні*, якщо ж у (1.44) має місце рівність, — це *закон Вальраса у вузькому розумінні.*

отже, конкурентна рівновага являє собою сумісний розподіл виробництва та споживання, а сукупний попит у цьому разі не перевищує сукупної пропозиції (1.44). Вартість сукупного попиту в конкурентних цінах дорівнює вартості сукупної пропозиції в тих самих цінах (1.45), де кожний із споживачів максимізує свою корисність у цінах p^*, а кожний із виробників — свій прибуток у тих самих цінах (1.43). Отже, існування конкурентної рівноваги означає існування такої системи рівноважних (конкурентних) цін p^*, за якої узгоджуються конфліктні інтереси споживачів і виробників.

Тема 7. Модель міжгалузевого балансу

Принципова схема міжгалузевого балансу (МГБ) виробництва та розподілу продукції

Міжгалузевий балансовий метод забезпечує складання збалансованих, внутрішньо узгоджених планів. На базі міжгалузевого методу розробляються матричні економіко-математичні моделі.

Принципова схема міжгалузевого балансу (МГБ) наведена в табл. 1.2, де розглянуто звітний баланс за один рік у вартісному вираженні. Сутність моделі МГБ полягає у тому, що кожна галузь бере участь, з одного боку, як споживач певного виду продукції, з іншого — як виробник.

Виокремлюють чотири частини МГБ, які мають різний економічний зміст і називаються *квадрантами балансу* (на схемі квадранти позначені римськими цифрами).

Таблиця 1.2

ПРИНЦИПОВА СХЕМА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ (МГБ)

Галузі-виробники	Галузі-споживачі					Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
. . .	. . .	. . .	. . .	. I .	. . .	II	. . .
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизація	C_1	C_2	C_3	…	C_n	IV	
Оплата праці	v_1	v_2	v_3	III	v_n		
Чистий дохід	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовий продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Перший квадрант МГБ — це таблиця міжгалузевих потоків. Показники x_{ij} є обсягами міжгалузевих потоків продукції, i та j — відповідно номери галузей виробників і споживачів.

У другому квадранті подано кінцеву продукцію всіх галузей матеріального виробництва, тобто продукцію, що виходить зі сфери виробництва в кінцеве використання.

Третій квадрант МГБ характеризує національний дохід з боку його вартісного складу — як суму чистої продукції й амортизації; чисту продукцію тлумачать як суму оплати праці та чистого доходу галузей. Обсяг амортизації (C_j) та чистої продукції ($v_j + m_j$) деякої галузі називають умовно чистою продукцією й позначають через Z_j.

Четвертий квадрант відображає кінцевий розподіл і використання національного доходу. В результаті перерозподілу створеного національного доходу утворюються кінцеві доходи населення, підприємств, держави.

Величини x_{ij} відображають вартість засобів виробництва, що вироблені i-тою галуззю та спожиті j-ю галуззю, а величини X_j (X_i) — валовий продукт j-ї (i-ї) галузі.

Запишемо два співвідношення, що відображають сутність МГБ та є підґрунтям його економіко-математичної моделі. *По-перше*, валова продукція будь-якої галузі-споживача дорівнює сумі матеріальних витрат цієї галузі та її умовно чистого продукту:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \quad j = 1, ..., n. \tag{1.46}$$

По-друге, валова продукція будь-якої галузі дорівнює сумі матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, і кінцевої продукції даної галузі:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \quad i = 1, ..., n. \tag{1.47}$$

Підсумувавши за j систему рівнянь (1.46) та за i систему рівнянь (1.47), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Це рівняння показує, що в міжгалузевому балансі виконується принцип еквівалентності матеріально-речового та вартісного складу національного доходу.

Економіко-математична модель міжгалузевого балансу

Балансова модель В. В. Леонтьєва базується на таких припущеннях:

1) галузі, на які розбито виробничий сектор країни, вважаються *чистими*. Термін «чиста галузь» означає, що продукція кожної галузі є однорідною, тобто галузь випускає продукцію тільки одного типу і різні галузі випускають різну продукцію;

2) розглядається *статична*, тобто така, що не змінюється протягом певного проміжку часу, технологія виробництва. Цей проміжок часу може дорівнювати одному календарному періоду (наприклад року);

3) має місце *прямо пропорційна*, тобто лінійна залежність між потоками продукції з однієї галузі в іншу x_{ij} та обсягами продукції X_j:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \; i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.48}$$

де a_{ij} — коефіцієнти пропорційності, які називають коефіцієнтами прямих матеріальних витрат ($a_{ij} \geq 0$).

З припущень В. В. Леонтьєва випливає, що коефіцієнти a_{ij}, які характеризують структуру витрат, постійні:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} = \text{const}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Коефіцієнти прямих матеріальних витрат показують, яку кількість продукції i-ї галузі необхідно витратити, для виробництва одиниці валової продукції j-ї галузі, якщо враховувати лише прямі витрати. Коефіцієнти прямих матеріальних витрат утворюють квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку називають ***матрицею коефіцієнтів прямих матеріальних витрат***, або технологічною матрицею.

З урахуванням формули (1.48) систему рівнянь балансу (1.47) можна записати у вигляді:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \; i = 1, \ldots, n. \tag{1.49}$$

Позначимо через X вектор-стовпчик валової продукції та через Y вектор-стовпчик кінцевої продукції:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

тоді у матричній формі система рівнянь (1.49) матиме вигляд:

$$X = AX + Y. \tag{1.50}$$

Систему рівнянь (1.49), чи у матричній формі (1.50), називають *економіко-математичною моделлю міжгалузевого балансу (моделлю Леонтьєва, моделлю «витрати — випуск»)*.

Система рівнянь (1.49) є початковим пунктом розрахунків у розроблені балансів на плановий період. Якщо в моделі задані обсяги кінцевої продукції всіх галузей (Y_i) та існує матриця, обернена до матриці (E — A) (матриця (E — A) невироджена), можна визначити обсяги валової продукції кожної галузі (X_i):

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{1.51}$$

Позначивши через B: $B = (E - A)^{-1}$, систему рівнянь (1.51) у матричній формі можна записати:

$$X = BY, \tag{1.52}$$

або

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де через b_{ij} позначено елементи матриці B, котрі показують, скільки необхідно виробити валової продукції i-ї галузі для випуску у сферу кінцевого використання одиниці продукції j-ї галузі. На відміну від коефіцієнтів прямих витрат a_{ij}, коефіцієнти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат*, оскільки вони включають у себе прямі таопосередковані витрати всіх порядків.

Продуктивність матриці прямих матеріальних витрат

Матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A має такі основні властивості:

- коефіцієнти прямих матеріальних витрат за визначенням є невід'ємними, отже, матриця A в цілому є невід'ємною: $A \geq 0$;
- процес відтворення не можна було б здійснити, якщо б для власного відтворення в галузі витрачався більший обсяг продукту, ніж створювався. Звідси очевидно, що діагональні елементи матриці A менші за одиницю: $a_{ii} < 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Означення. Невід'ємну матрицю A називатимемо продуктивною, якщо існує такий невід'ємний вектор X, що

$$X \geq AX. \tag{1.53}$$

Очевидно, що умова (1.53) означає існування невід'ємного вектора кінцевої продукції ($Y \geq 0$) для моделі міжгалузевого балансу (1.50).

Щоб матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A була продуктивною, необхідно і достатньо, аби виконувалася одна з перелічених нижче умов:

1) матриця (E — A) має бути невід'ємно оберненою, тобто повинна існувати обернена матриця $(E - A)^{-1} \geq 0$;

2) матричний ряд $E + A + A^2 + A^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ має збігатися, причому

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E - A)^{-1};$$

3) найбільший за модулем розв'язок (власне значення λ) характеристичного рівняння $|\lambda E - A| = 0$ має бути строго меншим від одиниці;

4) усі головні мінори матриці (E — A) порядку від 1 до n мають бути додатними.

Модифікації основної схеми міжгалузевого балансу

Важливими аналітичними можливостями міжгалузевого методу є, зокрема, визначення *прямих і повних витрат праці* та розроблення на підставі цього балансових продуктово-трудових моделей. Вихідною моделлю тут виступає звітний міжпродуктовий баланс у натуральному вираженні.

Позначимо витрати живої праці для виробництва j-го продукту через L_j, а обсяг виробництва цього продукту (валовий випуск), як і раніше, через X_j. Тоді прямі витрати праці на одиницю j-го виду продукції, які називають *коефіцієнтами прямої трудомісткості*, можна подати формулою:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}, \quad j = 1, ..., n. \tag{1.54}$$

Уведемо таке поняття, як *повні витрати праці* — сума прямих витрат (живої праці) та витрат уречевленої праці, які переносяться на продукт через використані засоби виробництва. Якщо позначити величину повних витрат праці на одиницю продукції j-го виду через T_j (*коефіцієнти повної трудомісткості*), то добутки $a_{ij} T_j$ відображають витрати уречевленої праці, перенесеної на j-й продукт через i-й засіб виробництва. Припускається, що коефіцієнти прямих матеріальних витрат a_{ij} виражені в натуральних одиницях. Тоді повні трудові витрати на одиницю j-го виду продукції дорівнюватимуть:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j, \quad j = 1, ..., n. \tag{1.55}$$

Уведемо до розгляду вектор-рядок коефіцієнтів прямої трудомісткості

$$t = (t_1,\ t_2, ..., t_n)$$

і вектор-рядок коефіцієнтів повної трудомісткості

$$T = (T_1,\ T_2, ..., T_n)\ .$$

Використовуючи матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A (у натуральному вираженні), яку розглянуто вище, систему рівнянь (1.55) можна подати в матричному вигляді:

$$T = TA + t.$$

Зробивши відповідні математичні перетворення, отримаємо співвідношення

$$T(E - A) = t,$$

або використавши раніше введене позначення для матриці повних матеріальних витрат $(E - A)^{-1} = B$:

$$T = t(E - A)^{-1} = tB. \qquad (1.56)$$

Якщо позначити через L величину сукупних витрат живої праці за всіма видами продукції, то з урахуванням (1.54), (1.52), (1.56) матимемо:

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j = tX = TY. \qquad (1.57)$$

Рівняння (1.57) є основним балансовим рівнянням у теорії міжгалузевого балансу праці. Його економічний сенс полягає в тому, що вартість кінцевої продукції, яка оцінена за повними витратами праці, дорівнює сукупним витратам живої праці.

Основна (базова) модель міжгалузевого балансу отримала розвиток також завдяки включенню в неї показників фондомісткості продукції. В найпростішому випадку модель доповнюється окремим рядком, який подає у вартісному вираженні обсяги виробничих фондів $Ф_j$, задіяних у кожній j-й галузі (j = 1, …, n). На підставі цих даних та обсягів валової продукції всіх галузей визначаються коефіцієнти прямої *фондомісткості* продукції j-ї галузі:

$$f_j = \frac{Ф_j}{X_j}, \quad j = 1, ..., n.$$

Коефіцієнт прямої фондомісткості відображає обсяг виробничих фондів, безпосередньо задіяних у виробництві даної галузі у розрахунку на одиницю її валової продукції. На відміну від цього показника коефіцієнт повної фондомісткості F_j характеризує обсяг фондів, необхідних у всіх галузях для випуску одиниці кінцевої продукції j-ї галузі (j = 1, …, n). Для коефіцієнтів повної фондомісткості справедливою буде рівність, аналогічна рівності (1.55):

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j, \quad j = 1, ..., n. \qquad (1.58)$$

Якщо ввести до розгляду вектор-рядок коефіцієнтів прямої фондомісткості $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ і вектор-рядок коефіцієнтів повної фондомісткості $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$, то систему рівнянь (1.58) можна подати в матричній формі:

$$F = FA + f.$$

Звідси аналогічно тому, як отримано співвідношення (1.56), можна отримати матричне співвідношення

$$F = f\ B,$$

де $B = (E - A)^{-1}$ — матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат.

Тема 8. Традиційні макроекономічні моделі

Класична модель ринкової економіки

Класичну модель ринкової економіки можна розглядати як систему взаємопов'язаних моделей, кожна з яких відображає поведінку одного з трьох ринків: робочої сили, грошей, товарів.

Модель найбільше підходить для опису економіки з досконалою конкуренцією. В умовах функціонування монополій вона не працює.

Ринок робочої сили. Цей ринок, як і інші, описується за допомогою трьох залежностей: функції попиту, функції пропозиції та умови рівноваги. У класичній моделі функція попиту на робочу силу виводиться з таких двох гіпотез:

1) підприємства (фірми) повністю є конкурентними за наявності пропозиції товарів і найму робочої сили;

2) за решти рівних умов граничний продукт праці знижується зі зростанням обсягів робочої сили.

Пропозиція робочої сили також є функцією від реальної заробітної плати. Приймається постулат: чим більшою буде реальна заробітна плата, тим більшою буде й пропозиція робочої сили.

Ринок грошей. Теорія попиту на гроші (не враховуючи інші види фінансових активів) у класичній моделі ґрунтується на гіпотезі, за якою сукупний попит на гроші M^D є функцією грошового доходу, причому ця функція — лінійна і прямо пропорційна грошовому доходу:

$$M^D = k\,Y p,$$

де Y — валовий внутрішній продукт у натуральному вираженні; p — ціна. Пропозиція грошей M^S розглядається як фіксована величина, екзогенно задана.

Ринок товарів. Попит на товари — це сума попиту на споживчі та інвестиційні товари $E = C + I$.

У класичній моделі пропозиція на товари є функцією рівня зайнятості, що визначається на ринку робочої сили $Y = Y(L^0)$.

Умова рівноваги полягає у тому, що пропозиція товарів $Y(L^0)$ дорівнює попиту на товари $E = C(r) + I(r)$.

Об'єднана (загальна) модель. Об'єднуючи рівняння та умови, що описують ринок робочої сили, грошей і товарів, отримаємо класичну модель у повному обсязі:

Ринок робочої сили:

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right), L^D = L^D\left(\frac{w}{p}\right),$$

$$L^S\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right]=L^D\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right]=L^0.$$

Ринок грошей:

$$M^S = M^S, M^D = kpY,$$

$$M^S = M^D = kp^0Y.$$

Ринок товарів:

$$Y = Y(L^0), E = C(r) + I(r),$$

$$Y(L^0) = C(r^0) + I(r^0) = Y^0.$$

Кожен ринок задається кривими попиту і пропозиції та точкою рівноваги. Зазначимо, що коли один із ринків виходить зі стану рівноваги, то й решта ринків також вийдуть із цього стану і прямуватимуть до якогось нового стану динамічної рівноваги.

Модель Кейнса

Класична модель досліджує рівновагу в економіці за умов повної зайнятості. У моделі Кейнса розглядається рівновага, коли економіка характеризується масовим безробіттям.

Основні новації моделі Кейнса порівняно з класичною моделлю полягають у такому:

1) рівновага на ринку товарів досягається за рівності прогнозованого попиту і фактичної пропозиції;

2) фактичний попит на робочу силу визначається у співвідношенні з фактично запитуваним продуктом, а отже, рівновага на ринку робочої сили може досягатись тоді, коли ринок товарів перебуває у рівновазі.

Позначимо $L_q(r)$ — попит на облігації залежно від ставки відсотка. Тоді *модель Кейнса* записується у вигляді наступних рівнянь.

Ринок робочої сили:

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right),\ L^D = L^D(Y^0).$$

Ринок грошей:

$$M^S = M^S;\ M^D = kpY + L_q(r),\ \ \frac{dL_q}{dr} < 0,$$

$$M^S = M^D. \tag{1.59}$$

Ринок товарів:

$$Y = Y(L),\quad E = C(Y) + I(r),\quad \frac{dC}{dY} > 0,\quad \frac{dI}{dr} < 0,$$

$$Y = E. \tag{1.60}$$

Тема 9. Динамічні нелінійні моделі макроекономіки

Модель Солоу

Малосекторні нелінійні моделі використовуються для вивчення довготермінових тенденцій і чинників розвитку (трансформації) економіки. Невелика кількість секторів дає можливість аналітично подати й проаналізувати на моделі розвиток економіки з адекватним урахуванням нелінійних залежностей обсягів випуску секторів від обсягів ресурсів за різних значень екзогенних параметрів і на підставі цього отримати деяку узагальнену картину економічного зростання.

Модель Солоу є односекторною моделлю економічного розвитку. У ній економічна система розглядається як єдине ціле, виробляючи лише один узагальнений продукт, котрий може і споживатись, й інвестуватись. Модель досить адекватно відбиває найважливіші макроекономічні аспекти процесу відтворення. Експорт — імпорт у явному вигляді не враховуються[5].

Стан економіки в моделі Солоу задається п’ятьма ендогенними змінними: X — валовий суспільний продукт (ВСП), C — фонд невиробничого споживання, I — інвестиції, L — кількість зайнятих, K — виробничі фонди. Крім цього, в моделі фігурують такі екзогенні (що задаються поза системою) показники: v — річний темп приросту чисельності зайнятих, μ — частка вибулих протягом року основних виробничих фондів, a — коефіцієнт прямих витрат (частка проміжного продукту у валовому внутрішньому продуктові), ρ — норма накопичення (частка валових інвестицій у ВВП). Межі екзогенних параметрів:

$$-1 < v < 1,$$
$$0 < \mu < 1,$$
$$0 < a < 1,$$
$$0 < \rho < 1.$$

Робиться припущення, що ендогенні змінні змінюються в часі. Екзогенні змінні вважаються постійними в часі.

Також припускається, що річний випуск у кожен момент часу визначається лінійно-однорідною неокласичною виробничою функцією від двох змінних (ресурсів) K та L.

$$X = F(K, L).$$

Отже, в абсолютних показниках отримаємо таку *модель Солоу*:

[5] *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учеб. для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998.

$$L = L_0 e^{\nu t};\ \frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)X,\ \ K(0) = K_0;$$
$$X = F(K,L);\ \ I = \rho(1-a)X;\ \ C = (1-\rho)\ (1-a)X. \qquad (1.61)$$

На рис. 1.15 наведена схема функціонування економіки згідно з моделлю Солоу.

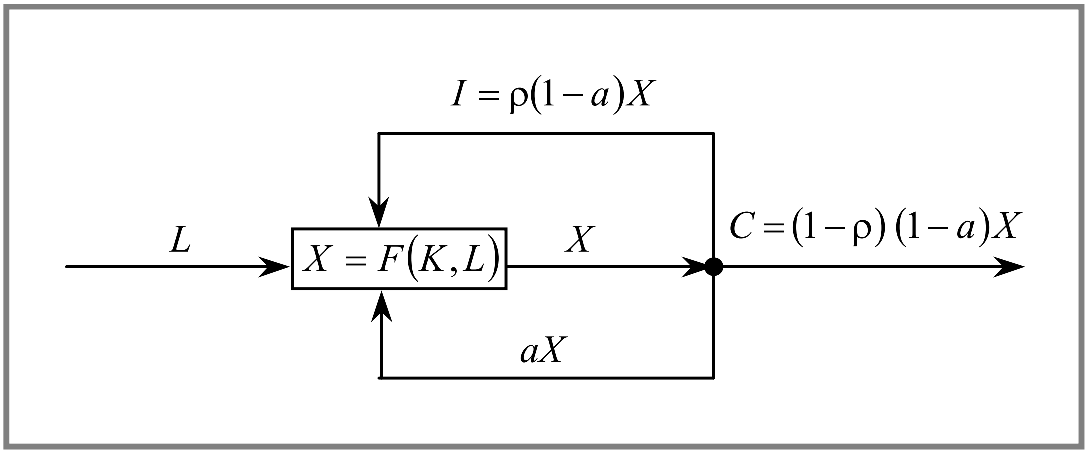

Рис. 1.15. Схема функціонування економіки за Солоу

Якщо ввести відносні показники: $k = K/L$ — фондоозброєність, $x = X/L$ — народногосподарська продуктивність праці, $i = I/L$ — питомі інвестиції (на одного зайнятого), $c = C/L$ — середньодушове споживання (на одного зайнятого), то модель Солоу набуває такої форми в питомих (відносних) показниках:

$$\begin{aligned} &\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k),\ \ \lambda = \mu + \nu,\ \ \ k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}; \\ &x = f(k); \\ &i = \rho(1-a)f(k); \\ &c = (1-\rho)(1-a)f(k). \end{aligned} \qquad (1.62)$$

Наголосимо, що кожен абсолютний чи відносний показник змінюється в часі, тобто можна вести мову про траєкторію системи в абсолютних чи відносних показниках. Траєкторію називають *стаціонарною*, якщо показники не змінюються в часі:

$$k = k^0 = \text{const},\ \ x = x^0 = \text{const},\ \ i = i^0 = \text{const},\ \ c = c^0 = \text{const}.$$

Як неважко помітити з формул (1.62), встановлення фондоозброєності на деякому постійному рівні k^0 приводить до виходу на стаціонарну траєкторію.

Перехідний режим у моделі Солоу

Зазначимо: якщо $k_0 = k^0$, то економіка вже перебуває на стаціонарній траєкторії й може зійти з неї лише за зміни зовнішніх умов.

Якщо $k_0 \neq k^0$, то в економіці відбуватиметься перехідний процес, котрий (гіпотетично) завершиться встановленням стаціонарного режиму. Протягом перехідного режиму фондоозброєність задовольняє рівняння

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k), \quad k(0) = k_0. \tag{1.64}$$

Диференціюючи (1.64) за часом, знайдемо, що

$$\frac{d^2k}{dt^2} = \frac{dk}{dt}\left[\rho(1-a)f'(k) - \lambda\right]. \tag{1.65}$$

Якщо позначимо через $\tilde{k}$ — корінь рівняння $\rho(1-\alpha)f'(\tilde{k}) = \lambda$, то відповідно до (1.65) отримуємо три типи перехідного процесу щодо фондоозброєності:

1) якщо $k_0 < \tilde{k}$ — спочатку має місце прискорене зростання фондоозброєності, яке після досягнення значення $\tilde{k}$ змінюється сповільненим зростанням;

2) якщо $\tilde{k} < k_0 < k^0$ — сповільнене зростання фондоозброєності;

3) якщо $k_0 > k^0$ — сповільнене зниження фондоозброєності («проїдання» фондів).

На рис. 1.16 показані усі три типи переходу фондоозброєності до стаціонарного значення k^0 (криві 1-3 відповідно).

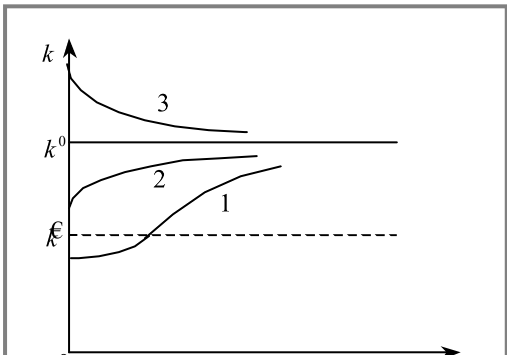

Рис. 1.16. Типи переходу до стаціонарного стану

«Золоте» правило накопичення

Сутність «золотого» правила накопичення полягає в тому, що, обираючи належним чином норму накопичення, можна максимізувати середньодушове споживання в стаціонарному режимі, а отже, і через відносно невеликий проміжок часу після поточного перехідного процесу.

Справді, коли виробнича функція є функцією Кобба — Дугласа:

$$f(k) = Ak^{\alpha}, \quad k^0 = \left[\frac{\rho(1-a)A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

а отже,

$$c^0(\rho) = (1-\rho)(1-a)f(k^0) = (1-\rho)(1-a)A\left[\frac{\rho(1-a)A}{\lambda}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \\ = B\,[g(\rho)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{1.66}$$

де

$$B = \left[\frac{(1-a)A}{\lambda^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad g(\rho) = \rho^{\alpha}(1-\rho)^{1-\alpha}.$$

Неважко помітити, що середньодушове споживання цілковито визначається функцією $g(\rho)$ (оскільки B не залежить від ρ).

Маємо

$$\frac{dg}{d\rho} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\alpha}\frac{\alpha-\rho}{\rho},$$

тому

$$\frac{dc^0}{d\rho} > 0, \text{ якщо } \rho < \alpha,$$

$$\frac{dc^0}{d\rho} < 0, \text{ якщо } \rho > \alpha.$$

Отже, найбільше середньодушове споживання досягатиметься тоді, коли $\rho^* = \alpha$, тобто норма накопичення повинна бути рівною еластичності випуску за фондами. Як свідчать дані, на практиці норма накопичення завжди є меншою за своє оптимальне значення ($\rho < \alpha$), тобто має місце недонакопичення (рис. 1.17).

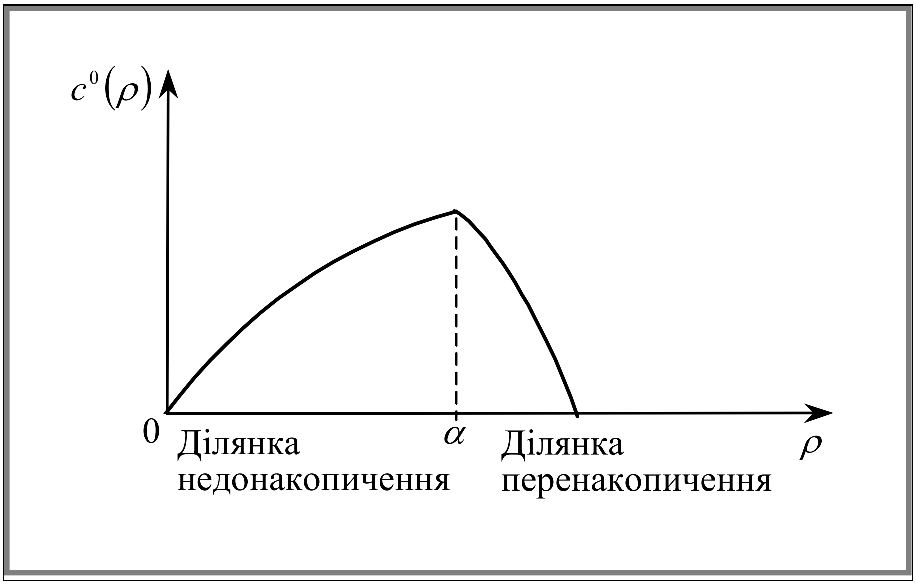

Рис. 1.17. Середньодушове споживання в стаціонарному режимі

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ, БІОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Тема 1. Про моделі екологічних, біологічних та соціальних явищ

Спрощені версії реального явища називаються моделями. Модель, як правило, включає в себе простір і час, в яких вона побудована, і основні компоненти, які вважаються істотними для її загального функціонування. Після того, як правильно визначено екосистему, екологічну ситуацію чи соціальну проблему і встановлено її межі, ми висуваємо доступну для перевірки гіпотезу чи серію гіпотез. Далі аналізуються і вивчаються запропоновані гіпотези.

Перше застосування комп'ютерного моделювання в соціальних науках датується початком 60-х років минулого століття. Це було моделювання дискретних подій або моделювання, що ґрунтується на системній динаміці

Математичні описання екологічних систем можна розділити на дві групи: описання, які робляться для практичних цілей, і описання, які мають чисто теоретичне значення. Описання для практичних цілей називають імітаціями. Цінність імітацій очевидна, але їх можна використовувати головним чином для аналізу окремих випадків. Чим краще якась імітація задовольняє ті конкретні цілі, заради яких вона створена, тим важче узагальнити її висновки на інші види. Тому для виявлення загальних закономірностей доводиться вдаватися до другого роду математичних описань, які часто називають якісними моделями.

Якісні моделі дають відповідь на питання про можливість того чи іншого явища. При зміні якогось параметра (якогось фактора системи) в рівняннях виникне певне явище. Такі питання мають свою цінність. Деякі питання якісного характеру в екології вдається розв'язати без математичних моделей. Але застосування моделей дає більш чітку і змістовну форму; виникають нові ефекти, які не можна було помітити і на які не звертають увагу.

Зауважимо, що екологи і біологи часто застосовують також "екологічні моделі" (в техніці – "натурні"), тобто моделі, які створені в лабораторіях із справжніх організмів.

Оскільки в екологічних моделях тісно переплітаються питання фізики, хімії і біології, то застосування математики вкрай необхідне. Математика виступає як метод кількісних розрахунків і як метод якісного мислення.

Загальна схема моделювання, як методу, схематично може бути подана у вигляді рис. 0.

Створення математичних моделей об'єктів пов'язано з формалізацією їх описань із виділенням суттєвих рис емпіричної ситуації, яка розглядається.

Математичні моделі дають відповідь на зв'язок деяких явищ соціального або біологічного характеру із законами механіки, термодинаміки, теорії коливань, теорії керування (регулювання). Методи дослідження вказаних вище моделей частково запозичені з інших дисциплін, наприклад, із хімічної кінетики, теорії керування, якісної теорії диференціальних рівнянь, термодинаміки, теорії коливань.

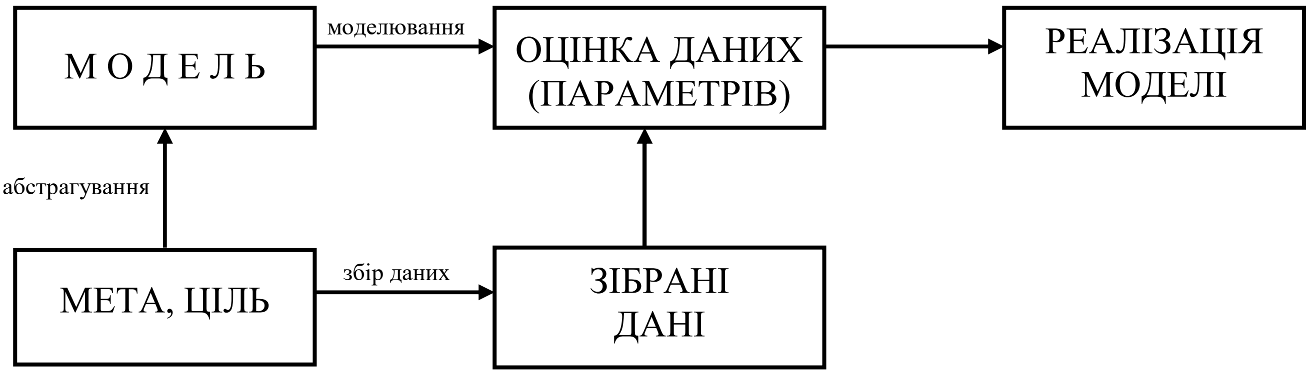

Рис. 0

Фізичні закони залишаються істинними і в екології і в соціології, але діють вони у специфічних умовах, які рідко зустрічаються у неживій природі. Плинність багатьох фізичних процесів в екології виявляється нестійкою. І це явище в екології відіграє важливу роль. У фізиці нестійкість процесу розглядається як паразитне, небажане явище. У живих системах явище нестійкості використовується цілеспрямовано; більш того, нестійкість – одна з найважливіших рушійних сил еволюції. Математичні моделі тільки тоді правильно описують поведінку реального екологічного об'єкта, коли вони "стійкі" відносно малих змін параметрів диференціальних рівнянь, які відображають малі зміни системи. Саме такі системи за термінологією Андронова називають *грубими*.

Зауважимо, що в екології використовуються деякі методи (наприклад, методи керування), що не мають аналогів у техніці. Ця теорія ще не досить розвинена.

Розрахунки, що базуються на моделюванні соціальних процесів з урахуванням комплексу екологічних, економічних, соціальних проблем, показують, що забезпечення екологічної рівноваги можливе лише на шляху переходу виробництва на маловідходні технології при стабілізації чисельності населення і здійснення режиму економії в споживанні ресурсів.

Зауважимо, що всяка екологічна і соціальна система знаходиться у певний час в деякому просторі, тому з точки зору другого закону термодинаміки така система відкрита. У моделях таких систем треба враховувати речовину і енергію на вході і виході. Але у багатьох випадках розглядають так звані ізольовані системи. Моделі таких систем є досить наближеним описом природних явищ. У цьому випадку для складання відповідних рівнянь використовують лише перший закон термодинаміки – закон збереження енергії. Після того, як отримані певні математичні рівняння або залежності, застосовуємо відомий математичний апарат.

Моделі можуть бути макро- або мікрорівневі. Об'єднання мікрорівневих моделей складає макрорівневу модель. Ясно, що для отримання макрорівневої моделі повинні враховуватися певні зв'язки між мікрорівнями.

Час у моделях може бути як неперервним, так і дискретним. Відповідно до цього моделі називаються неперервними або дискретними. Характеристики моделі можуть бути детермінованими або мати випадковий характер. Від того, які функціональні залежності між визначальними величинами моделі, розглядають лінійні та нелінійні моделі. Моделі можуть бути статичними або динамічними. Динамічні моделі діляться на диференціальні та різницеві. Ясно, що різницеві моделі належать до дискретних.

Тема 2.Одновидові моделі ізольованих популяцій

Найпростіша модель росту мікроорганізмів, запропонована Д.Бернуллі (1760), має вигляд

$$\dot{x} = \mu x, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

де x – кількісна характеристика популяції, μ - коефіцієнт пропорційності в розрахунку на одну особину і є різницею між коефіцієнтами народжуваності $\boldsymbol{B}$ і смертності $\boldsymbol{D}$: $\mu = B - D$.

Розв’язок рівняння (1) при μ=const, рівний

$$x(t) = x_0 e^{\mu t}, \tag{2}$$

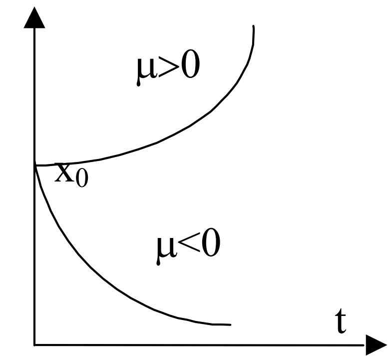

Рис 1

відомий як закон експоненціального росту чисельності популяції (народонаселення) в необмеженому в смислі ресурсу середовищі або закон Мальтуса (1795). [11]. Цей закон пояснює спонтанний ріст вірусів, мікроорганізмів, личинок колорадського жука тощо. Він має місце на обмежених проміжках часу. Поведінка кривої при $\mu \gtrless 0$ показана на рис. 1. При μ>0 маємо так звану *j*-криву. З рисунка видно, що при μ=const популяція або вмирає, або необмежено зростає. В цій моделі не враховані внутрішні лімітуючі фактори. Такими факторами можуть бути харч, світло, простір, інші організми тощо.

Цього недоліку позбавлена модель, запропонована Верхюльстом (1838)

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) = x(r - \gamma x), \tag{3}$$

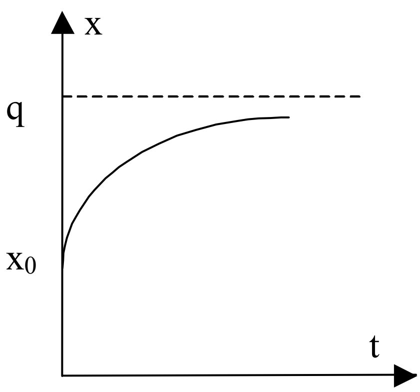

Рис. 2

яка має границю насичення. Модель за пропозицією самого автора називають логістичною моделлю. В ній r – мальтузіанський коефіцієнт, γ – коефіцієнт, що враховує внутрішньовидову конкуренцію (самообмеження) популяції, $q = r/\gamma$ - ємність середовища. Розв’язок рівняння (3) має вигляд

$$x(t) = \frac{r x_0 e^{rt}}{\gamma x_0 (e^{rt} - 1) + r},$$

(4)

причому $x(t)\to q$ при $t\to\infty$. Такий розв'язок дає криву з насиченням, поведінка якої показана на рис. 2. Відповідна крива має назву **s**-кривої.

До кривої з насиченням приводить також лінійна модель виду

$$\dot{x} = -\mu(x-q), \quad x(0) = x_0, \tag{5}$$

з розв'язком

$$x(t) = q + (x_0 - q)e^{-\mu t}, \tag{6}$$

де μ і q – сталі.

Якщо в рівнянні (1) покласти $\mu(x)=r-\gamma x$, отримаємо рівняння (3). При апроксимації величини $\mu(x)$ в (1) s–функцією прийдемо до рівняння типу Оллі.

Інші узагальнення рівняння (1): коефіцієнти r и γ є функціями часу. Тоді таке рівняння (рівняння Бернуллі) матиме розв'язок

$$x(t) = \frac{x_0 \exp\left(\int_0^t r(\eta)d\eta\right)}{1 + x_0\int_0^t \gamma(\xi)\left[\exp\int_0^\xi r(\eta)d\eta\right]d\xi}. \tag{7}$$

У випадку r=const

$$x(t) = \frac{x_0 e^{rt}}{1 + x_0\int_0^t \gamma(\xi)e^{r\xi}d\xi}. \tag{8}$$

Якщо величина $\gamma(t)$ змінюється періодично біля деякого сталого значення q_1 таким чином, що

$$\gamma(t)=q_1+\beta\sin\omega t, \tag{9}$$

де ω – частота зовнішнього збудження, β – амплітуда, тоді величина $x(t)$ при досить великих t має вигляд

$$x(t) = \frac{r}{q_1\left(1 + \beta\dfrac{r\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{r^2+\omega^2}\right)}. \tag{10}$$

У загальному випадку модель одновидової популяції має вигляд

$$\dot{x} = \mu(x)\cdot x, \quad x(0) = x_0, \tag{11}$$

де $\mu(x)$ – мальтузіанська функція. Якщо $\mu(x)$ неоднозначна функція, тоді в такій моделі можливі так звані коливання релаксаційного типу [16].

Якщо швидкість росту популяції залежить від чисельності попередніх поколінь, то найпростіша модель, що побудована на використанні рівняння (1) та запропонована Хатчінсоном (Hutchinson G.E., 1948, [18]), запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = rx(t)\left[1-\gamma_1 x(t-\tau)\right],\ t>0,\\ &x(t) = f(t),\ t\in(-\tau,0), \end{aligned} \tag{12}$$

де τ – час запізнення; ним може бути, наприклад, середня тривалість життя одного покоління. Особини попередніх поколінь негативно впливають на коефіцієнт природного приросту.

Узагальненням рівняння Верхюльста (3) з урахуванням запізнення є рівняння Браддока (Braddoc, 1980)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= rx(t)\left[1-\gamma x(t)-\gamma_1 x(t-\tau)\right];\\ x(t) &= f(t),\ t\in(-\tau,0).\end{aligned} \tag{13}$$

В рівняннях типу (12), (13) можна врахувати кілька запізнень. Запізнення може бути джерелом цікавих математичних явищ, яких не було в моделях без запізнення, наприклад, граничних циклів, монотонних або періодичних розв'язків, нестійкості розв'язків тощо.

Розглянуті вище моделі передбачають, що такі моделі існують ізольовано в необмеженому в смислі харчу просторі. Далі покажемо, як узагальнюються такі моделі на випадок існування двох антагоністичних популяцій.

Тема 3. Конкуруючі популяції з необмеженим ресурсом

Для двох конкуруючих популяцій типу "хижак–жертва" з кількісними характеристиками жертви x і хижака y модель, що базується на використанні рівняння Бернуллі (1), записується у вигляді рівнянь В. Вольтерра (1931)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\mu_1-\gamma_{12}y),\\ \dot{y} &= -y(\mu_2-\gamma_{21}x),\\ x(0) &= x_0,\ y(0)=y_0,\end{aligned} \tag{14}$$

де $\mu_i>0$, $\gamma_{ij}>0$ – деякі сталі величини, доданок xy враховує вплив однієї популяції на іншу або, так звану, міжвидову конкуренцію. Система рівнянь має дві точки рівноваги (0,0) і $\left(q_1=\mu_2/\gamma_{21},\ q_2=\mu_1/\gamma_{12}\right)$.

Лінеаризовані рівняння Вольтера в околі точки **(0; 0)** мають вигляд

$$\dot{x}=\mu_1 x,$$
$$\dot{y}=-\mu_2 y.$$

Характеристичні числа $\lambda_1=\mu_1>0,\ \lambda_2=-\mu_2<0$. Особлива точка – сідло – нестійка особлива точка.

В околі точки (q_1, q_2) лінеаризована система рівнянь має вигляд

$$\dot{u}=-\mu_1\gamma_{12}v,\quad \dot{v}=\mu_2\gamma_{21}u,$$

де u і v – збурення величин x і y в околі точки рівноваги. Характеристичні числа, які визначаються із рівняння

$$\lambda^2+\mu_1\mu_2\gamma_{12}\gamma_{21}=0,$$

будуть комплексними. Особлива точка – центр. Центр – стійка особлива точка, але асимптотично – нестійка (система рівнянь "груба"). Інтегральні криві – замкнуті криві, в першому наближені – еліпси Вольтерра. Сама система рівнянь за термінологією Андронова *груба*. Це означає, що як тільки одну піввісь еліпса змінимо на деяку величину, то зображуючи точка у фазовому просторі перейде на іншу замкнуту траєкторію, яка також буде стійкою, але не асимптотично. Методика дослідження особливих точок буде подана в п.6.

Як видно із (14) при відсутності хижака y жертва зростає до нескінченості. Щоб позбутися такого недоліку, Гаузе підправив модель (14), ввівши у перше рівняння внутрішньовидову конкуренцію жертв x:

$$\dot{x} = x(\mu_1 - \gamma_{12} y - \gamma_{11} x),$$
$$\dot{y} = -y(\mu_2 - \gamma_{21} x).$$

При відсутності хижака перше рівняння рівносильне рівнянню Верхюльста (3): тобто популяція жертв має межу насичення. Запропонована система рівнянь отримала назву Лоткі–Вольтерра. Ця модель має три точки рівноваги (0,0), $\left(\mu_1/\gamma_{11}, 0\right)$, $\left(\dfrac{\mu_2}{\gamma_{21}}, \dfrac{\mu_1\gamma_{12} - \mu_2\gamma_{21}}{\gamma_{12}\gamma_{21}}\right)$. Остання точка є стійкою точкою рівноваги.

Узагальненням логістичної (3) популяції на систему "хижак–жертва" є повна система рівняннь Лоткі-Вольтерра (1925)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\mu_1 - \gamma_{11} x - \gamma_{12} y), \\ \dot{y} &= -y(\mu_2 - \gamma_{21} x - \gamma_{22} y), \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Ця система може мати уже чотири точки рівноваги. Наслідки конкурентної боротьби залежать від співвідношення коефіцієнтів μ_i и γ_{ij} (див. п.6).

Були й інші узагальнення логістичного рівняння для двовидових популяцій. Так, А. Д. Базикін провів дослідження моделі

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\left(\varepsilon_1 - \gamma_{11} x - \frac{\gamma_{12} y}{1 + \beta x}\right), \\ \dot{y} &= -y\left(\varepsilon_2 + \gamma_{22} y + \frac{\gamma_{21} x}{1 + \beta x}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

У цій моделі функція взаємодії популяцій задається у вигляді гіперболи відносно змінної x. Дана система може мати до п'яти точок рівноваги. Все залежить від співвідношень між параметрами системи μ, γ_{ij}, β. Збільшується й різноманітність фазових портретів. Одна із стаціонарних точок може бути нестійким фокусом, який обмежений стійким граничним циклом.

Дослідження задачі про взаємодію двох антагоністичних видів типу хижак–жертваау загальному випадку проведено А. М. Колмогоровим. Ця модель має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_1(x) x - v(x) y, \\ \dot{y} &= \alpha_2(x) y, \qquad , \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{17}$$

де $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(y)$ – коефіцієнти природного приросту жертви і хижака відповідно, $v(x)$ – трофічна функція. Кожна із цих функцій наділена певними властивостями.

Іноді до двовидових популяцій відносять популяцію з обмеженою кількістю ресурсу, який змінюється при вживанні його популяцією. Загальний вигляд математичної моделі популяції може бути поданий у вигляді

$$\dot{R} = Q - V(R,x)x,$$
$$\dot{x} = -\mu x + \gamma V(R,x)x,$$
$$x(0) = x_0, \quad R(0) = R_0.$$

де R – кількість ресурсу, x – кількісна характеристика популяції, $V(r,x)$ – трофічна функція, швидкість споживання ресурсу однією особиною популяції x, γ – частина ресурсу, що йде на відновлення потомства, μ – коефіцієнт смертності, Q – швидкість надходження ресурсу в систему. Трофічна функція в більшості випадків має такі властивості: $V=V(R)$, $V(0)=0$, $V'(R)>0$, функція $V(R)$ має асимптоту. Наявність асимптоти вказує на те, що при великому достатку харчу швидкість реалізації її обмежена. Всі різновидності трофічних функцій можна розбити на два класи : а) опуклі вверх ("дурний хижак") і б) s-подібні ("розумний хижак").

Моделі двовидових популяцій, які борються за спільну їжу і кількість її обмежена, записуються у вигляді

$$\dot{x} = x\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 F(x,y)\right),$$
$$\dot{y} = y\left(\varepsilon_2 - \gamma_2 F(x,y)\right),$$
$$x(0) = x^0, \; y(0) = y^0,$$

де $\varepsilon_i > 0$ – коефіцієнт приросту популяцій, γ_i – характеристика потреби в їжі популяції, $F(x,y)$ – функція, що виражає швидкість споживання їжі, причому $F(0,0) = 0;\; F'_x > 0,\; F'_y > 0$.

Остання система має перший інтеграл

$$\frac{x^{\gamma_2}}{y^{\gamma_1}} = Ce^{\omega t}, \; C = \frac{\left(x^0\right)^{\gamma_2}}{\left(y^0\right)^{\gamma_1}}, \; \omega = \varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1.$$

При $\omega > 0$ і $t \to \infty$ маємо $\dfrac{x^{\gamma_2}}{y^{\gamma_1}} \to \infty$. При обмежених популяціях це можливо лише при $y = 0$. Звідси маємо: із двох біологічних видів, що борються за спільну їжу, вид, у якого відношення ε/γ менше, вимирає.

Тема 4. Моделі суспільних особин

На основі логістичної моделі можна пояснити стратегію дій суспільних комах. Нехай сім'я мурашок має одне джерело харчу. Поведінку такої сім'ї можна описати рівнянням (3). Відомо, що деяка частина мурашок не приносить їжу, а шукає нові джерела харчу, нові дороги тощо. У рівнянні (1) необхідно врахувати цю частину комах-розвідників у вигляді доданка $-\beta x$. Модель матиме вигляд

$$\dot{x} = rx(1-\gamma x) - \beta x, \quad x(0) = x_0. \tag{18}$$

Це також логістичне рівняння з мальтузіанським коефіцієнтом r-β і з коефіцієнтом конкуренції γ. В цьому випадку границя насичення буде іншою

$$q = \frac{r - \beta}{r\gamma}.$$

Нехай на однаковій відстані від розміщення сім'ї мурашок з N особин знаходяться n джерел харчу. Тоді комахи діляться на групи x_i, які доставляють харч із джерела i. В процесі роботи дії мурашок перерозподіляються. Нехай, γ_{ij} – коефіцієнт швидкості комах групи i, які добувають їжу із джерела j. Математична модель дії особин сім'ї з урахуванням членів $-\beta_i x_i$, які знаходяться у пошуках нових джерел їжі та нових шляхів, має вигляд

$$\dot{x}_i = \left(N - x_1 - x_2 - \ldots - x_n\right)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j - \beta_i x_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \tag{19}$$

Це одна з найпростіших моделей поведінки суспільних комах. В монографії [12] досліджено систему рівнянь (19) при різних кількостях джерел харчу. Обчислено час повного поїдання деякої кількості харчу при різних коефіцієнтах γ_{ij} і різних кількостях джерел харчу.

Тема 5. Задача про альтернативи

Нехай група із N особин має дві альтернативи, причому ступінь привабливості кожної з них дорівнює α_i. Позначимо через x – число особин, що вибрали альтернативу *1*, через y – ті, що вибрали альтернативу *2*. Однак "все тече, все змінюється". Через деякий час число особин альтернативи *1* змінюють свій вибір на альтернативу *2*, пропорційно числу x і відносній привабливості вибору 2, яка дорівнює $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Аналогічно для особин, що змінюють альтернативу 2 на 1.

Рівняння балансу для змінної x має вигляд

$$\dot{x} = r_1 x\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}x - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}y\right). \tag{20}$$

Замінивши в цьому рівнянні y на $N - x$ і ввівши позначення $\gamma_1 = \frac{\alpha_2 N}{\alpha_1}$, приходимо до логістичного рівняння (3), розв'язок якого при $t \to \infty$ прямує до величини $q = r_1 / \gamma_1$. Аналогічно дістаємо результати для величини y.

Запропонована методика узагальнюється на K альтернатив:

$$x_i = r_i x_i (1 - \gamma_i x_i),$$

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{K}\frac{N_j \alpha_{ij}}{\alpha_{1j} + \alpha_{2j} + \ldots + \alpha_{kj}}, \quad N = \sum_{j=1}^{K} N_j \ \ (i = \overline{1, K}), \tag{21}$$

де N_j - субпопуляції популяції N, α_{ij} – коефіцієнти привабливості, x_i характеризує миттєвий стан популяції. Величини N_j задовольняють рівняння типу (21). Поведінка системи рівнянь залежить від характеру співвідношень α_{ij} і x_i.

Тема 6. Порогові явища

Порогові явища зустрічаються в механіці суцільних середовищ, радіотехніці, біології і екології. Дослідимо біологічну модель імунної системи, якій властиве вказане явище.

Розглянемо основні властивості клітин-убивць. Імунна система хребетних тварин поставляє організму засоби протидії чужорідним хвороботворним речовинам. Вони поступають в організм, виробляють в кістковому мозку недиференційовані вихідні зародкові клітини. В результаті подальшої диференціації ці клітини перетворюються в **β**- або **Т**-лімфоцити[6]. Зустрічаючись з чужорідною речовиною (антигеном) **β**-клітини піддаються подальшій диференціації у більші клітини, які проліферують і виділяють хімічні речовини, що здатні нейтралізувати антиген. Їх називають антитілами.

З іншого боку, **Т**-клітини після подальшої диференціації, яка проходить в тимусі[7], регулюють дію **В**-клітин, підсилюючи або подавляючи їх діяльність. Крім того, вони беруть участь в імунних відповідях, які викликані безпосередньо клітинами, особливо раковими або чужорідними, як це буває, наприклад, при пересадці тканин або органів. Інші клітинні різноманітності імунної системи типу макрофагів мають подібну функцію, яку називають цитотоксичною активністю (Цито від грецького – клітина). Макрофаг - це клітини з’єднувальної тканини в організмі, які здатні захоплювати і перетворювати сторонні організму частинки.

Нехай $\boldsymbol{X}$ – густина популяції проліферуючих клітин (наприклад, злоякісної пухлини), $\boldsymbol{Y}_0$ – густина вільних цитотоксичних клітин. Згідно з експериментальними даними клітини $\boldsymbol{Y}_0$ розпізнають клітини $\boldsymbol{X}$, фіксують їх у вигляді комплексу $\boldsymbol{Y}_0$X і надалі здійснюють лізис[8] при дисоціації[9] комплексу $\boldsymbol{Y}$.

Таку послідовність стадій фізико-хімічних перетворень можна записати у вигляді [12]

$$\boldsymbol{X} \xrightarrow{\lambda} 2\boldsymbol{X} \qquad \text{(проліферація)}, \tag{22}$$
$$\boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{X} \xrightarrow{k_1} \boldsymbol{Y} \xrightarrow{k_2} \boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{P} \quad \text{(зв’язування та лізис)}.$$

Приймемо, що під час процесу конкуренції між $\boldsymbol{Y}_0$ і $\boldsymbol{X}$, який розглядається, стан імунної системи можна вважати стаціонарним практично у всіх відношеннях. Це означає, що повна густина $\boldsymbol{Y}_P$ популяції вільних і зв’язаних імунних клітин ($\boldsymbol{Y}_P = \boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{Y}$) залишається сталою за часом. Далі приймемо спрощений опис, згідно якому кінетика обох стадій в другому із рівнянь (22) може вважа-

---

[6] Лімфоцити – одна з форм лейкоцитів, білих кров’яних тілець людини або хребетних тварин; вони виконують в організмі захисну функцію.).

[7] Центральний орган імунної системи хребетних. Приймає участь у формуванні імунітету (виробляє Т-лімфоцити).

[8] Лізис – повільне, поступове послаблення проявів хвороби, зниження температури до нормальної, розчинення клітин під впливом кислот, ферментів, основ, солей.

[9] Дисоціація – (лат. – роз’єдную) – розпад молекул на кілька простих молекул, атомів, радикалів або іонів.

тись некооперативною (тобто без зворотних зв'язків), принаймні в області параметрів, які розглядаються (хоча від цієї умови можна відмовитись).

При перерахованих умовах рівняння балансу мають вигляд [12]

$$\dot{X} = \lambda X(1 - \frac{X}{q}) - k_1 Y_0 X, \tag{23}$$

$$\dot{Y}_0 = -k_1 Y_0 X + k_2 Y,$$

де λ, k_1, k_2 – коефіцієнти системи, q – ємність середовища, в якому проходить конкурентна боротьба. При Y_0 =0 відносно змінної X маємо логістичне рівняння, в якому q – верхня межа значень X. Доданок $k_1 Y_0 X$ показує зменшення швидкості утворення проліферуючих клітин при наявності вільних цитотоксичних клітин. В першому рівнянні враховано внутрішньовидову та міжвидову конкуренцію.

Оскільки лізис повинен протікати значно швидше інших стадій, для рівняння (23) можна скористуватись квазістаціонарним наближенням. Поклавши $\dot{Y}_0 = 0$**,** $Y_P =$ **const**, знаходимо

$$Y_0 = \frac{Y_P}{1 + \frac{k_1}{k_2} X}. \tag{24}$$

Підстановка значення Y_0 в перше рівняння (23) дає відносно змінної X рівняння

$$\dot{X} = \lambda X(1 - \frac{X}{q}) - \frac{k_1 Y_P X}{1 + \frac{k_1}{k_2} X}. \tag{25}$$

Введемо нові величини

$$z = \frac{k_1}{k_2} X, \quad \alpha = \frac{k_2}{k_1 q}, \quad \beta = \frac{k_1 Y_P}{\lambda}, \quad \tau = \lambda t. \tag{26}$$

Рівняння (25) в цих безрозмірних величинах має вигляд

$$\frac{dz}{d\tau} = z(1 - \alpha z) - \frac{\beta z}{1 + z}. \tag{27}$$

Останній доданок в цьому рівнянні є відома формула Міхаеліса-Ментен, при $\beta = 0$ маємо логістичне рівняння.

Дослідимо точки рівноваги рівняння (27). Очевидно, що рівняння має стаціонарний розв'язок $z = 0$. Лінеаризоване рівняння (27) в околі точки $z = 0$

$$\frac{dz}{d\tau} = (1 - \beta) z$$

не залежить від параметра α. Таким чином, при довільних значеннях α розв'язок рівняння стійкий при $1 - \beta < 0$ і нестійкий при $1 - \beta > 0$.

Існування ненульових стаціонарних розв'язків відповідає пухлинному стану тканини (органу). Із рівняння

$$1-\alpha z-\frac{\beta}{1+z}=0 \tag{28}$$

знаходимо ненульові точки рівноваги

$$z_{1,2}=\frac{1}{2\alpha}(1-\alpha\pm\sqrt{D}),$$
$$D=(1+\alpha)^2-4\alpha\beta=4\alpha(\beta_c-\beta),\quad \beta_c=\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}. \tag{29}$$

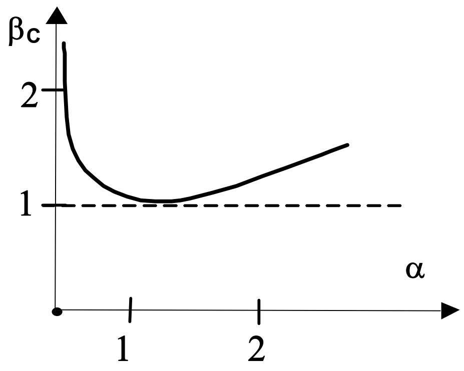

Рис. 3

Значення $z_{1,2}$ мають сенс при $D\geq 0$, тобто при $\beta\leq\beta_c$, де β_c – порогове значення величини β. Залежність величини β_c від параметра α показано на рис. 3. З біологічної точки зору треба розглядати лише значення $z_i\geq 0$. Аналіз коренів (8) показує, що не при всяких значеннях параметрів α і β існують точки рівноваги $z_i\geq 0$. Так, при $0<\alpha<1$ корінь z_1 існує при $\beta_c\geq\beta$, якщо $\alpha>1$, то при $\beta>\mathbf{1}$. При $\alpha\to 0$ величина $z_1\to\infty$. Корінь z_2 має біологічний смисл лише при $\alpha>1$, $\beta>\mathbf{1}$.

Лінеризуємо рівняння (27) в околі ненульових стаціонарних точок z_i. Оскільки

$$\frac{dF}{dz}=\frac{d}{dz}(z-\alpha z^2-\frac{\beta z}{1+z})=1-2\alpha z-\frac{\beta}{(1+z)^2},$$

то лінеаризоване рівняння в околі стаціонарної точки z_i (i=1,2) має вигляд

$$\frac{du}{d\tau}=(1-2\alpha z_i-\frac{\beta}{(1+z_i)^2})u, \tag{30}$$

де $u=z-z_i$, i=1,2.

Стійкість або нестійкість розв'язків рівняння (30) визначається знаком величини $F'(z_i)$: при $F'(z_i)<0$ положення рівноваги z_i стійке, при $F'(z_i)>0$ – нестійке. Умова переходу від стійкого до нестійкого станів визначається з рівності $F'(z_i)=0$.

Так, при $\alpha=\mathbf{0{,}45}$, $\beta=\mathbf{1{,}1}$ маємо два додатні корені $z_1=1$ (стійкий), $z_2=0{,}22$ (нестійкий) і нульовий корінь $z_3=0$ (стійкий).

Існування ненульового стаціонарного розв'язку для z відповідає наявності пухлинного стану тканини. Щоб такий стан ліквідувати, необхідно, щоб стаціонарна точка була нестійкою.

Таким чином, підтверджена реальна можливість існування двох стійких станів тригерної системи. В залежності від значень параметра α можуть виникати дві якісно різні ситуації, які показані на рис. 4.

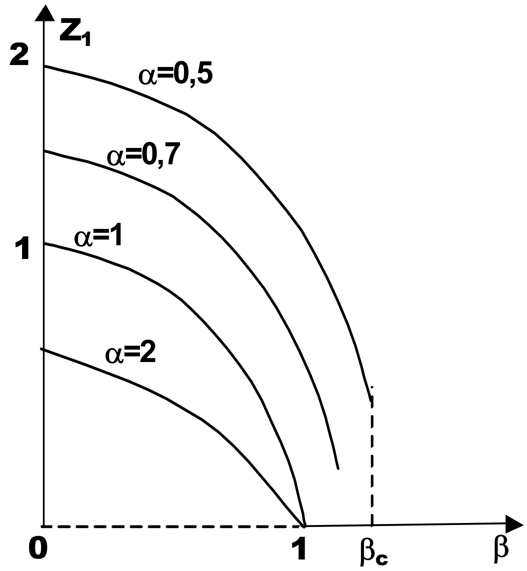

Рис. 4

В точці $z_1 = 1$ залежність між параметрами α і β має вигляд:

$$\beta = \mathbf{2(1-\alpha)}, \qquad (31)$$

причому $\alpha \le 1$. Умова нестійкості в цій точці

$$1 - 2\alpha - \beta/4 > 0, \qquad (32)$$

дає нерівність $\beta < \mathbf{4(1-2\alpha)}$ або $\beta > 4/3$. Наприклад, пара величин $\alpha = 1/4$, $\beta > 3/2$ задовольняє як рівність (31), так і нерівність (32). В цьому випадку також маємо два розв'язки $z_1 = 1$ і $z_3 = 0$. Умова повного знищення (пригнічення) пухлини зводиться до того, що в процесі імунної відповіді величина β повинна перевищувати одиницю. При $\alpha < 1$ перехід між пухлинним і не пухлинним станами зв'язані з явищем бістабільності, яке має місце в тригерних системах. Вище ми показали, що в області $1 < \beta < \beta_c$ існують одночасно два стійких стани ($z = 0$, $z = 1$). Мабуть, перехід між цими станами зв'язаний з процесами нуклеації (nucleus лат. – ядро), тобто з процесами зв'язаними з поділом ядер і обміном речовин. При $\alpha > 1$ пухлина існує лише при $\beta < \mathbf{1}$.

Якщо початковий стан відповідає пухлині, то її пригнічення при зростанні β можливе лише при умові $\beta > \beta_c$. Як видно із співвідношень (26), параметр β по суті описує ефективність імунної системи. Тому для даного етапу в області $\alpha < 1$, $1 < \beta < \beta_c$ в залежності від передісторії тканини можлива як нормальна, так і патологічна ситуація.

Методи дослідження траєкторій диференціальних рівнянь досить повно описані. Чисельні експерименти показують, що величина $z(\tau)$ при різних значеннях $z(0)$ і $\beta = \mathbf{2}$, $\alpha = \mathbf{2}$ прямує до z=0 при $\tau \to \infty$ (рис.5а). Вже при $\beta = \mathbf{1{,}1}$; $\alpha = \mathbf{0{,}45}$ таке явище можливе не при всяких $z(0)$ (рис. 5.б)

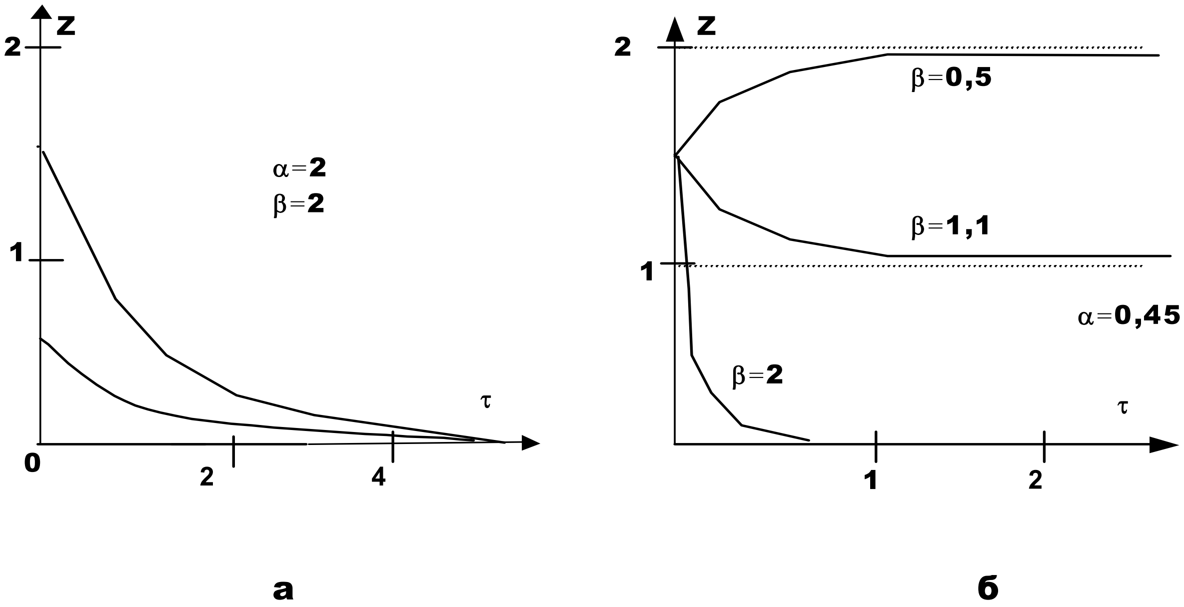

Рис. 5

Тема 7. Дослідження моделі Лоткі-Вольтера

Як вказувалось вище, система диференціальних рівнянь (15) може мати до 4 точок рівноваги в залежності від співвідношення коефіцієнтів μ_i і γ_{ij}.

Для дослідження точок рівноваги рівняння (15) запишемо у вигляді

$$\dot{x} = \mu_1 x(1 - \frac{x}{q_1} - \frac{y}{p_1}), \tag{33}$$

$$\dot{y} = -\mu_2 y(1 - \frac{x}{p_2} - \frac{y}{q_2}),$$

де

$$q_1 = \frac{\mu_1}{\gamma_{11}},\ q_2 = \frac{\mu_2}{\gamma_{22}},\ p_1 = \frac{\mu_1}{\gamma_{12}},\ p_2 = \frac{\mu_2}{\gamma_{21}} \quad . \tag{34}$$

Величину q_i називають ємністю середовища i, ρ_i– відносна ємність середовища. Точки рівноваги (спокою) визначаються із системи рівнянь ($\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0$):

$$x(1 - \frac{x}{q_1} - \frac{y}{p_1}) = 0, \tag{35}$$

$$y(1 - \frac{x}{p_2} - \frac{y}{q_2}) = 0.$$

Звідси отримаємо розв'язки (0, 0), $(0, q_2)$, $(q_1, 0)$, $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$, де

$$\tilde{q}_1 = q_1 p_2 \frac{q_2 - p_1}{q_2 q_1 - p_1 p_2},\ \tilde{q}_2 = q_2 p_1 \frac{p_2 - q_1}{p_1 p_2 - q_1 q_2}. \tag{36}$$

Прямі (у відрізках на осі)

$$\frac{x}{q_1} + \frac{y}{p_1} = 1 \qquad \text{(пряма А)}, \qquad (37)$$

$$\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} = 1 \qquad \text{(пряма В)},$$

які є наслідком системи (33) в першому квадранті площини ***(x, y)*** можуть мати різне взаємне розміщення (рис. 6–10). Якщо точки перетину прямих не існує (прямі паралельні) (рис.6.б) або вона лежить за межами першого квадранта (рис. 6.а, 6.в), то така точка не має біологічного смислу, бо величини $p_i, q_i, \tilde{q}_i$ повинні бути невід'ємними. Таким чином, якщо прямі не перетинаються в першому квадранті, маємо три точки рівноваги $(0,0)$, $(0, q_2)$, $(q_1, 0)$.

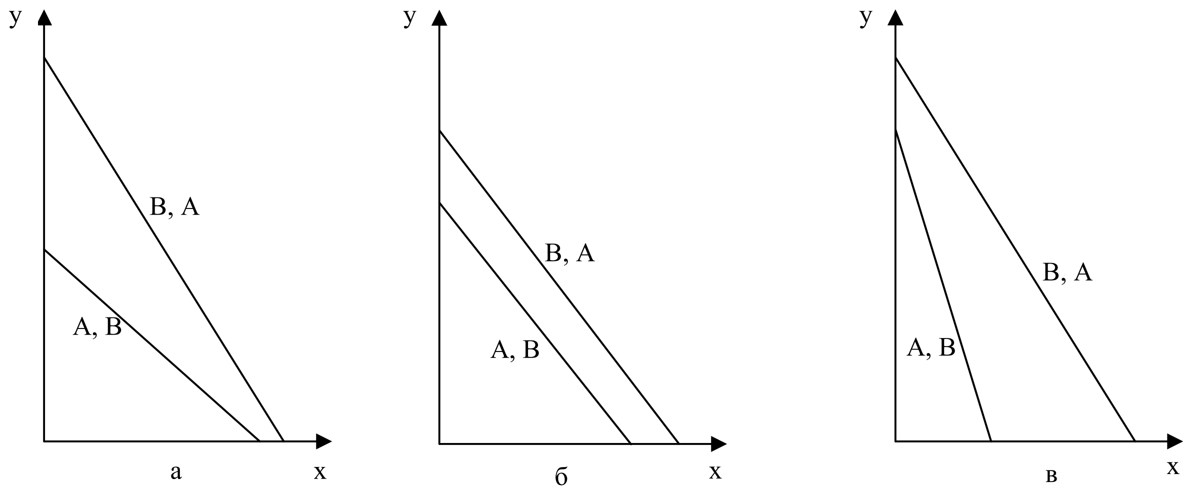

Рис.6

Якщо прямі не перетинаються і пряма ***B*** лежить вище прямої ***A***, то всі траєкторії прямують в точку q_2, тобто точка $(0, q_2)$ – стійка точка, у випадку, коли пряма ***A*** лежить вище прямої ***B***, то стійкою буде точка $(q_1, 0)$. **Тому домінує та популяція, ємність якої більше її відносної ємності середовища.** В першому випадку (пряма ***B*** лежить вище прямої ***A***) $q_2 > p_1$; в другому випадку $q_1 > p_2$. Особливі точки на рис. 7–10 відмічені "кружечками".

Дослідимо точки рівноваги системи Лоткі-Вольтера.

Точка (0, 0). Лінеаризована система рівнянь (33)

$$\dot{x} = \mu_1 x, \ \dot{y} = -\mu_2 y$$

має власні числа ($\lambda_1 = \mu_1 > 0, \lambda_2 = -\mu_2 < 0$) – дійсні і різних знаків. Особлива точка – сідло. Це нестійка особлива точка.

Точка (0, q_2). Покладемо

$$x = x, \ y = v + q_2 \qquad (38)$$

і підставимо в рівняння (33). Лінеаризовані рівняння мають вигляд:

$$\dot{x} = \gamma_{12}(p_1 - q_2)x, \qquad (39)$$

$$\dot{y} = \mu_2 p_2 (\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2}).$$

Власні значення цієї системи рівнянь

$$\lambda_1 = \gamma_{12}(p_1 - q_2),$$
$$\lambda_2 = \mu_2 > 0. \quad (40)$$

Якщо $\lambda_1 > 0$, то особлива точка нестійкий вузол, при $\lambda_2 < 0$ маємо сідлову точку, яка також нестійка.

Точка (q_1, 0). Заміна $x = u + q_1$, $y = y$ дає лінеаризовану систему рівнянь:

$$\dot{u} = -\mu_1(u + \frac{q_1}{p_1}v),\ \dot{v} = -\gamma_{21}(1 + \frac{q_1}{p_2})v,$$

характеристичні корені якої

$$\lambda_1 = -\mu_1 < 0,\ \lambda_2 = -\gamma_{21}(1 - \frac{q_1}{p_2}) = -\mu_2(p_2 - q_1). \quad (41)$$

Тому при $\lambda_2 < 0$ ($p_2 > q_1$) маємо стійкий вузол або сідло при $\lambda_2 > 0$.

Особлива точка ($\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$). Покладемо

$$x = q_1 x_1,\ y = q_2 y_1,\ \tau = t\mu_1 \quad (42)$$

Система рівнянь (33) прийме вигляд

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1(1 - x_1 - ay_1), \quad (43)$$
$$\frac{dy_1}{d\tau} = -cy_1(1 - bx_1 - y_1).$$

В рівняння (43) тепер входять три параметри

$$a = \frac{q_2}{p_1},\ b = \frac{q_1}{p_2},\ c = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (44)$$

Останні параметри є відношенням сталих в рівняннях (33). Тому перехід до змінних x_1, y_1, τ змінює лише масштаб, але не змінить якісну характеристику рівнянь. Точка рівноваги системи рівнянь (43):

$$\tilde{p}_1 = \frac{\tilde{q}_1}{q_1} = \frac{1-a}{1-ab},\ \tilde{p}_2 = \frac{\tilde{q}_2}{q_2} = \frac{1-b}{1-ab}. \quad (45)$$

Із останніх співвідношень випливає, що $\tilde{p}_1 > 0, \tilde{p}_2 > 0$, тоді, коли a і b одночасно або більші одиниці, або менші одиниці і $ab \neq 1$. Значення параметрів a і b, при яких можливе існування $\tilde{p}_1$ і $\tilde{p}_2$ показане на рисунку 11. Дослідимо характер точки ($\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$). Для цього покладемо

$$x_1 = u + \tilde{p}_1\ \ y_1 = v + \tilde{p}_2. \quad (46)$$

Зауважимо, що u і v – це збурення відносно положення рівноваги ($\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$). Підставимо (46) в рівняння (43), опустимо нелінійні члени і використаємо рівняння рівноваги (37). Отримаємо систему рівнянь

$$\frac{du}{d\tau}=\frac{a-1}{1-ab}(u+av),\qquad (47)$$
$$\frac{dv}{d\tau}=-c\frac{b-1}{1-ab}(bu+v).$$

Розв’язок системи рівнянь (47) у вигляді

$$x=e^{\lambda t},\ y=e^{\lambda t}\qquad (48)$$

приводить до характеристичного рівняння

$$(1-ab)\lambda^2-[(a-1)-c(b-1)]\lambda-c(a-1)(b-1)=0.\qquad (49)$$

Тоді

$$\lambda_{1,2}=\frac{[(a-1)-c(b-1)\pm\sqrt{[(a-1)+c(b-1)]^2-4abc(a-1)(b-1)]}}{2(1-ab)}\qquad (50)$$

Звідси видно, що знаючи три параметри a, b, c в загальному випадку також важко сказати, якими будуть корені $\lambda_{1,2}$. Але, якщо параметри a, b відомі, тобто відомі прямі А і В (рис. 6) легко дослідити корені $\lambda_{1,2}$ із співвідношення (50).

Повернемося до рисунка 7.

Так для прямих, що показані на рисунку 7, виконуються нерівності

$$\begin{matrix} p_1>q_1; & q_2>p_1; \\ p_2<q_2; & q_1>p_2; \end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix} a>1; & \gamma_{11}/\gamma_{12}>1 \\ b>1; & \gamma_{22}/\gamma_{21}>1 \end{matrix}.$$

Таким умовам задовольняють, наприклад, величини $q_1=2{,}5$, $p_1=3$, $q_2=3{,}5$, $p_2=2$.

Тоді $\tilde{q}_1=0{,}92$, $\tilde{q}_2=1{,}9$, $\tilde{p}_1=0{,}54$, $\tilde{p}_2=0{,}54$, a=1,17, b=1,25 (a>1, b>1),

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2\cdot 0{,}46}[0{,}17-0{,}25c\pm\sqrt{(0{,}17+0{,}25c)^2-0{,}25c}]$$

Для дійсних коренів повинна виконуватись умова

$(0{,}17+0{,}25c)^2-0{,}25c\geq 0\Rightarrow$
$6{,}25c^2-16{,}5c+2{,}89\geq 0\Rightarrow$
$(c-0{,}19)(c-2{,}44)\geq 0.$

Таким чином, корені λ_1,λ_2 дійсні при c<0,19 і c>2,44, якщо 0,19<c<2,44 – корені комплексні. Навіть, якщо корені дійсні, то потрібні ще допоміжні дослідження, щоб відповісти на питання: корені λ_1,λ_2 одного чи різних знаків; якщо одного, то додатні чи від’ємні.

Так, наприклад, при c=0,15 маємо нестійкий вузол ($\lambda_1=0{,}2$, $\lambda_2=0{,}08$); при c=2,0 – стійкий фокус ($\lambda_{1,2}=-0{,}36\pm 0{,}22i$); при c=4,0 – стійкий вузол ($\lambda_1=-0{,}3,\lambda_2=-1{,}5$).

Стійка особлива точка вказує на можливе існування обох популяцій.

Зауваження. При 0,19<c<0,68 маємо нестійкий фокус.

Рисунок 8. При цьому маємо

$$\begin{matrix} q_2 > p_1; & q_2 > p_2; \\ q_1 > p_2; & q_1 < p_1; \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a > 1; & \gamma_{11}/\gamma_{12} < 1 \\ b > 1; & \gamma_{22}/\gamma_{21} < 1 \end{matrix}.$$

Приклад:

$q_2 = 3{,}5$, $q_1 = 3$, $p_1 = 1{,}5$, $p_2 = 1$

$\Rightarrow \tilde{q}_1 = 0{,}68$, $\tilde{q}_2 = 1{,}16$, $\tilde{p}_1 = 0{,}22$, $\tilde{p}_2 = 0{,}33$ a=2,33, b=3,00 (a>1, b>1),

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{-2 \cdot 5{,}99}[-1{,}33 + c \cdot 2 \pm \sqrt{(1{,}33 + 2c)^2 - 74{,}37c}]$ $\Rightarrow$ c^2-18,59c+0,44≥0, (c-0,03)(c-18,57) ≥0.

Корені λ_1, λ_2 дійсні при c<0,03 і c>18,57 і комплексні при 0,03<c<18,57. Тоді при c=10

$$\lambda_{1,2} = -1{,}57 \pm 1{,}42i\,.$$

Корені комплексні з від'ємною дійсною частиною, особлива точка – стійкий фокус. При 0,03<c<18,57 можливе існування обох видів.

$$c=20,\ \lambda_{1,2} = \frac{-38{,}67 \pm 14{,}87}{11{,}98},$$

$$\lambda_1 = -4{,}47 < 0, \lambda_2 = -1{,}99 < 0\,.$$

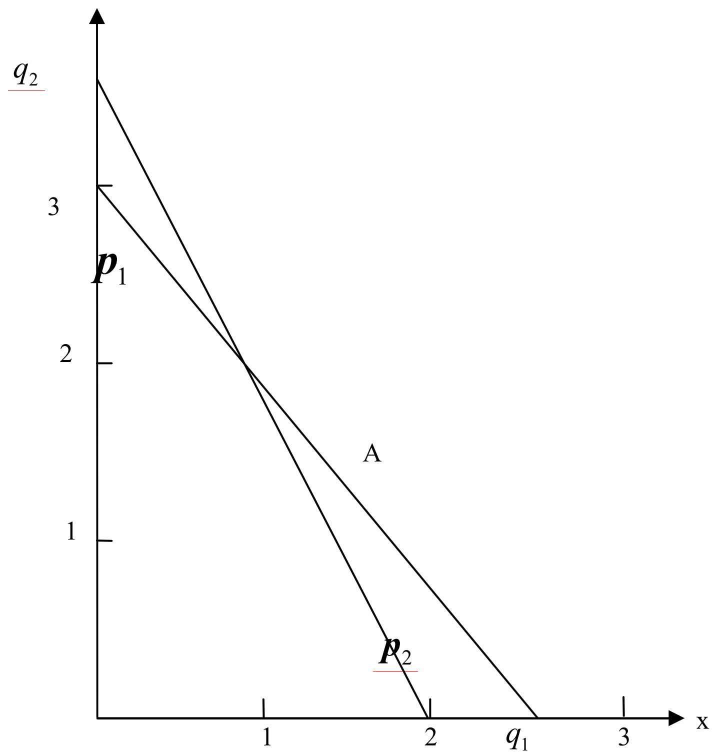

Рис. 7

Маємо стійкий вузол. Також можливе існування обох видів.

Рисунок 9.

$$\begin{matrix} p_1 > q_2; & q_1 > p_1; \\ q_1 > p_2; & q_2 < p_2; \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a < 1; & \gamma_{11}/\gamma_{12} < 1, \\ b < 1; & \gamma_{22}/\gamma_{21} > 1 \end{matrix}.$$

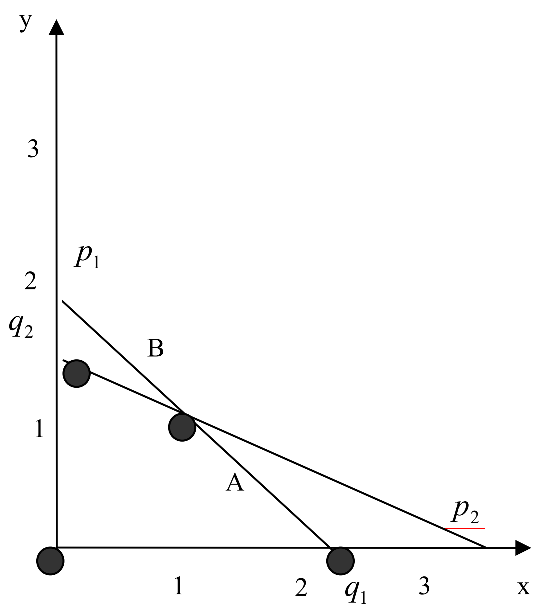

Рис. 9

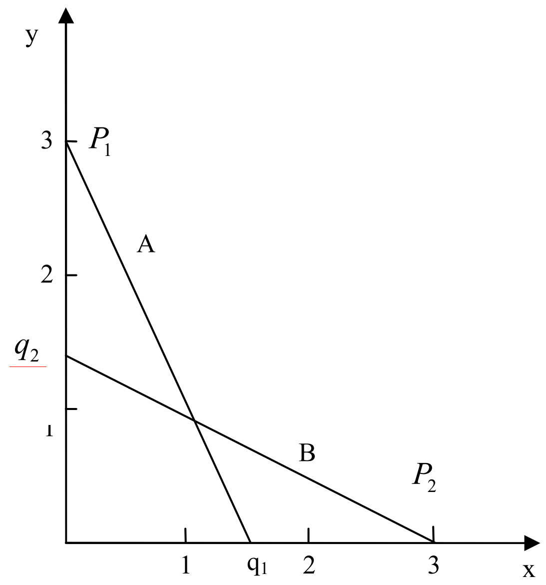

Рис. 10

Приклад:

$q_1 = 2{,}5$, $q_2 = 1{,}5$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3{,}5 \Rightarrow$

a=0,75, **b**=0,71, $\tilde{q}_1 = 1{,}35$, $\tilde{q}_2 = 0{,}95$, $\tilde{p}_1 = 0{,}68$, $\tilde{p}_2 = 0{,}63 \Rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{0{,}94}[-0{,}25 + 0{,}29c \pm \sqrt{(0{,}25 \pm 0{,}29c)^2 - 0{,}15c}] \Rightarrow$$

$$8{,}41c^2 - 0{,}5c + 6{,}25 \geq 0 \Rightarrow c_{1,2} = \frac{0{,}5 + 14{,}49i}{16{,}82} \Rightarrow$$

Підкореневий вираз завжди додатний. Маємо дійсні корені.

При c=0,5 маємо

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{0{,}94}[-0{,}25 + 0{,}145 \pm \sqrt{0{,}16 - 0{,}08} = \frac{1}{0{,}94}(-0{,}16 \pm 0{,}29)$$

Корені різних знаків, особлива точка сідло – нестійка точка.

Якщо c=2, то

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{0{,}94}(-0{,}25 + 5{,}8 \pm \sqrt{36{,}60 - 0{,}3}) = \frac{1}{0{,}94}(5{,}55 \pm 6{,}02)$$

Як і раніше, особлива точка сідло – нестійка точка.

Рисунок 10. Виконуються нерівності

$$\boldsymbol{p}_1 > \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{p}_2 > \boldsymbol{q}_2,\ \boldsymbol{p}_1 > \boldsymbol{q}_2,\ \boldsymbol{p}_2 > \boldsymbol{q}_1 \ \Rightarrow \boldsymbol{a}<1, \boldsymbol{b}<1,\ \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} < 1,\ \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}} > 1$$

Приклад

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 = 1{,}5,\ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = 3 \ \Rightarrow$$
$$\tilde{\boldsymbol{q}}_1 = \tilde{\boldsymbol{q}}_2 = 1,\ \tilde{\boldsymbol{p}}_1 = \tilde{\boldsymbol{p}}_2 = 0{,}67,\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=0{,}5 \ \Rightarrow$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1{,}5}[0{,}5(\boldsymbol{c}-1) \pm 0{,}5\sqrt{(1+\boldsymbol{c})^2 - \boldsymbol{c}}]$$

Підкореневий вираз завжди додатній. Корені λ_1, λ_2 дійсні.

При $\boldsymbol{c}$=0,5 маємо

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1{,}5}(0{,}25 \pm 0{,}66).$$

Корені різних знаків – нестійка точка – сідло.

Якщо $\boldsymbol{c}$=2,0,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1{,}5}(0{,}5 \pm 2{,}65).$$

Корені додатні, точка рівноваги – нестійкий вузол.

Зауваження. Замість випадків, що задаються рисунками 7–10 можна розглядати прямі $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ в координатах $\boldsymbol{x}_1$ і $\boldsymbol{y}_1$. Тоді для значень $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ будемо мати лише два можливих розміщення прямих, що показані на рисунку 12.

Можна сформулювати твердження. Якщо прямі перетинаються (рис.7–10), то точка $((\boldsymbol{q}_1, 0)$ стійка при $\boldsymbol{q}_1 > \boldsymbol{p}_2$, точка $(0, \boldsymbol{q}_2)$ стійка при $\boldsymbol{q}_2 > \boldsymbol{p}_1$, точка $(\tilde{\boldsymbol{q}}_1, \tilde{\boldsymbol{q}}_2)$ асимптотично стійка, якщо нахил прямої $\boldsymbol{A}$ більш крутий, ніж нахил прямої $\boldsymbol{B}$.

Тема 8. Тривидові популяції

У моделях, розглянутих вище, вважалось, що наявність ресурсу мається в достатній кількості. Далі розглянемо модель з урахуванням витрат і оновлення основного ресурсу, наприклад, запасів їжі (харчу, корму) для жертв. Будемо будувати моделі тривидових популяцій, виходячи із моделей Мальтуса і Верхюльста.

А. Система рівнянь, що ґрунтується на моделі Мальтуса, має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{x}(\mu_1 - \gamma_{12}\boldsymbol{y}) - \gamma_{13}\boldsymbol{R}, \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= -\boldsymbol{y}(\mu_2 - \gamma_{21}\boldsymbol{x}), \\ \dot{\boldsymbol{R}} &= \mu_3\boldsymbol{R} - \gamma_{31}\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{51}$$

В рівняннях, як і раніше $\boldsymbol{x}$ – кількісна характеристика жертви, $\boldsymbol{y}$ – хижака, $\boldsymbol{R}$ – ресурсу, μ_i – мальтузіанські коефіцієнти росту виду i, γ_{ij} – коефіцієнт взаємного впливу виду *i* на вид *j*, $i \neq j$.

Так відомо [13], що за кількістю популяцій оленів і вовків, що водяться в лісах Канади, уже більше двохсот років ведуться спостереження (відома також українська притча про перевезення в човні вовка, кози і капусти з одного берега річки на інший так, щоб в човні було не більш двох об'єктів, і ніхто не міг з'їсти іншого). Це вказує на те, що тривидові антагоністичні популяції мають місце і в природі.

Точки рівноваги системи рівнянь (51): $\boldsymbol{A}(0,0,0)$ і $\boldsymbol{B}\left(\frac{\mu_2}{\gamma_2},\ \frac{1}{\mu_3\gamma_{13}}(\gamma_{13}\gamma_{31}-\mu_1\mu_3),\ \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{13}}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_3}\right)$. Один особливий напрямок в околі точки $\boldsymbol{A}$ $\lambda_1 = -\varepsilon_2 < 0$, інші два визначаються з рівняння

$$\lambda^2 - (\mu_1 + \mu_3)\lambda + (\mu_1\mu_3 - \gamma_{31}\gamma_{13}) = 0$$

і відповідно дорівнюють

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left[(\mu_1 + \mu_3) \pm \sqrt{(\mu_1 - \mu_3)^2 + 4\gamma_{31}\gamma_{13}}\right]. \tag{52}$$

Звідси видно, що λ_2, λ_3 дійсні, але можуть мати різні знаки. Так $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ при $\mu_1\mu_3 > \gamma_{13}\gamma_{31}$.

Особлива точка А може бути вузлом (λ_i – одного знака) або сідлом [10].

Дослідження інтегральних кривих в особливій точці $\boldsymbol{B}$ проводиться способом як показано в п.7. Спочатку знаходимо рівняння для збурень. Далі досліджуємо лінеаризовані збурені рівняння. Тобто покладемо

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{53}$$

де $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{r}_0$ – значення величин в точці рівноваги, підставимо в рівняння (1) і, врахувавши умови рівноваги, відкидаємо нелінійні члени. Лінеаризована система матиме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}} &= \mu_1\boldsymbol{u} - \gamma_{12}(\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{u}) - \gamma_{13}\boldsymbol{r}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} &= -\mu_2\boldsymbol{v} - \gamma_{21}(\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{u}), \\ \dot{\boldsymbol{r}} &= \mu_3\boldsymbol{r} - \gamma_{31}\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{54}$$

Для визначення власних чисел системи (3) отримаємо рівняння (застосуємо метод Ейлера з диференціальних рівнянь для лінійної системи)

$$\begin{vmatrix} \mu_1 - \lambda - \boldsymbol{v}_0 & -\gamma_{12}\boldsymbol{u}_0 & -\gamma_{13} \\ -\gamma_{21}\boldsymbol{v}_0 & -\gamma_{21}\boldsymbol{u}_0 - \mu_2 - \lambda & 0 \\ -\gamma_{31} & 0 & \mu_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{55}$$

Маємо кубічне рівняння відносно λ. Далі треба провести дослідження кубічного рівняння при різних параметрах системи. У попередньому параграфі показано, що наявність параметрів (їх кількість в двовидовій моделі дорівнює 6) приводить до великих труднощів. Частково зменшити їхню кількість можна введенням інших масштабів і шляхом задавання деяких параметрів конкретними величинами. Далі встановлюємо тип точок рівноваги при тих або інших параметрах і робимо відповідні висновки про поведінку системи.

В. **Узагальнення моделі (1)**. Замість величин $\gamma_{13}\boldsymbol{R}$, $\gamma_{31}\boldsymbol{R}$ можна ввести доданки $\gamma_{13}\boldsymbol{xR}$, $\gamma_{31}\boldsymbol{xR}$ відповідно, як це зроблено в моделі Вольтерра. Тобто використовується гіпотеза зустрічей та еквівалентів [5]. Модель матиме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{x}(\mu_1 - \gamma_{12}\boldsymbol{y} - \gamma_{13}\boldsymbol{R}), \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= -\boldsymbol{y}(\mu_2 - \gamma_{21}\boldsymbol{x}), \\ \dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{R}(\mu_3 - \gamma_{31}\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{56}$$

Точки рівноваги системи рівнянь $(0{,}0)$, $\left(\dfrac{\mu_3}{\gamma_{31}},\ 0,\ \dfrac{\mu_1}{\gamma_{13}}\right)$, $\left(\dfrac{\mu_2}{\gamma_{21}},\ \dfrac{\mu_1}{\gamma_{12}}, 0,\right)$.

При відсутності популяції $\boldsymbol{x}$, ресурс буде необмежено зростати. Щоб цього не сталося можна третє рівняння (56) подати у вигляді

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}(\mu_3 + \boldsymbol{q} - \gamma_{31}\boldsymbol{x}), \qquad \text{де } q\text{– границя насичення}$$

С. Врахування внутрішньовидової і міжвидової конкуренції (узагальнення моделі Верхюльста). Як вказувалося вище модель Верхюльста враховує крім міжвидової, ще й внутрішньовидову конкуренцію. Така модель має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{x}(\mu_1 - \gamma_{11}\boldsymbol{x} - \gamma_{12}\boldsymbol{y} - \gamma_{13}\boldsymbol{R}), \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= -\boldsymbol{y}(\mu_2 - \gamma_{21}\boldsymbol{x} - \gamma_{22}\boldsymbol{y}), \\ \dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{R}(\mu_3 - \gamma_{31}\boldsymbol{x} - \gamma_{33}\boldsymbol{R}). \end{aligned} \tag{57}$$

Замість третього рівняння можна використати рівняння типу (див.(5) п.1)

$$\dot{\boldsymbol{R}} = -\boldsymbol{R}\mu_3 + \boldsymbol{q} - \gamma_{31}\boldsymbol{Rx} \tag{58}$$

яке при відсутності жертви ($\boldsymbol{x} = 0$) має границю насичення $\boldsymbol{q}$. Початкова умова для ресурсу $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{R}_0$.

Запас ресурсу може бути сталим $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{const}$. Тоді в першому рівнянні системи треба виключити ресурс.

Дослідження точок рівноваги проводиться як у випадку двох рівнянь. Правда, у зв'язку з більшою кількістю параметрів та більшим порядком диференціальних рівнянь, дослідження їх має великі труднощі.

Поведінку розв'язків рівнянь можна дослідити знаходженням чисельних розв'язків диференціальних рівнянь.

Таким чином, двовидові популяціх з ресурсом можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{R})\boldsymbol{x}, \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \gamma_1 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{R})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{R})\boldsymbol{y} - \mu_1\boldsymbol{x}, \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= \gamma_2 \boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{R})\boldsymbol{x} - \mu_2\boldsymbol{y}, \end{aligned} \tag{57}$$

де $\boldsymbol{Q}$ – потік рослин за певний період часу (наприклад, за рік), $\boldsymbol{V_i}$– трофічні функції, μ_i – мальтузіанський коефіцієнт. Під $\boldsymbol{R}$ можна розуміти зростання рослинності (продуцієнтів), $\boldsymbol{x}$– розвиток тварин-фітофагів, $\boldsymbol{y}$ – хижаків. Запис моделі у такому вигляді наглядно показує існування трофічних ланцюгів.