В.Д. Ламзюк, В.І. Сорокін

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

«МОДЕЛЮВАННЯ ПРИРОДНИЧИХ ПРОЦЕСІВ». ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

2016

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара

В.Д. Ламзюк, В.І. Сорокін

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

«МОДЕЛЮВАННЯ ПРИРОДНИЧИХ ПРОЦЕСІВ». ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2016

УДК 531.01
Л 21

Рецензенти: д.-р. фіз.-мат. наук, проф. А.М.Пасічник
канд. фіз.-мат. наук, доц. Л.Л.Гарт

Л21 Ламзюк, В.Д. Посібник до вивчення дисципліни «Моделювання природничих процесів». Теоретична механіка [Текст]/ В.Д. Ламзюк, В.І. Сорокін. – Д.: РВВ ДНУ, 2016. – 52 с.

Викладено базові поняття розділу «Ряди Фур'є» математичного аналізу, розділів «Статика», «Кінематика», «Динаміка» теоретичної механіки.

Для студентів ДНУ, які навчаються за напрямом «Прикладна математика» факультету прикладної математики.

ВСТУП

Теоретична механіка – розділ фізики, в якому викладено відомості про звичайні природні явища, оскільки механічна форма руху – найпростіша у порівнянні з іншими формами руху згідно з філософськими теоріями.

Запропонований посібник укладено з метою допомогти студентам напряму "Прикладна математика" оволодіти інформацією про найпростіші природничі процеси.

Посібник складається з чотирьох розділів.

У першому розділі наведено основні відомості про ряди Фур'є, що є складовою частиною математичного аналізу, основні розрахункові формули, умови розвинення функцій у ряди та ін. Запропоновано приклади. Цей розділ забезпечує подальше вивчення курсу "Рівняння математичної фізики".

Другий розділ – "статика" – присвячений основним аксіомам, поняттям сили, в'язів, необхідним та достатнім умовам рівноваги для різних систем сил.

У третьому розділі – "кінематика" – розглянуто способи задання руху точки, поняття швидкості, прискорення, рух твердого тіла (поступальний, обертальний, плоскопаралельний, складений). Наведено приклади.

У четвертому розділі – "динаміка" – проаналізовано основні закони динаміки матеріальної точки та тіла, диференціальні рівняння руху матеріальної точки, теореми динаміки матеріальної точки та твердого тіла. Наведено приклади.

Задачі про ряди Фур'є потребують певних знань в студентів про обчислення інтегралів, задачі ж кінематики – навичок диференціювання, задачі динаміки – розв'язування диференціальних рівнянь, задачі статики – знання тригонометричних формул.

Студенти напряму "Прикладна математика" в цілому мають достатню математичну підготовку, а отже, запропонований посібник, безумовно, полегшить вивчення курсу "Моделювання природничих процесів. Теоретична механіка"

РОЗДІЛ 1

1.1. Ряди Фур'є

Означення. Функцію $f(x)$, визначену на $E \subset R$, називають періодичною, якщо $\exists \mathrm{T} \neq 0$ $\forall x \in \mathrm{E}: f(x+\mathrm{T}) = f(x)$, найменше додатне число Т називають періодом функції $f(x)$.

Властивості періодичних функцій

1. Якщо $f(x)$ та $g(x)$ – функції періодичні періоду Т, то $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ – періодичні з періодом Т. (Доведення очевидне.)

2. Якщо $f(x)$ – функція періодична з періодом Т, то функція $f(ax)$ – періодична з періодом T/a.

Доведення. $\forall x \in R : f(ax) = f(ax + \mathrm{T}) = f(a(x + \mathrm{T}/a))$.

Приклад: $\sin \dfrac{2\pi x}{\ell}$ має період $\dfrac{2\pi}{2\pi/\ell} = \ell$.

3. Якщо $f(x)$ – періодична з періодом Т, то

$$\forall a,\ в: \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx .$$

Доведення.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx +$$

$$+\begin{cases} f(x) = f(t) \\ x = T + t; t = x - T \quad \begin{matrix} x = a + t;\ t = a \\ x = b + T; t = b \end{matrix}\Bigg\} \\ dx = dt \end{cases} + \int_b^{a} f(t)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx .$$

Ортогональність основної тригонометричної системи

Означення. Систему функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$,... називають ортогональною у проміжку $[a, b]$, якщо $\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n \\ \neq 0,\ m = n \end{cases}$.

Покажемо, що основна тригонометрична система 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, …, $\sin nx$, $\cos nx$, …є ортогональною системою у проміжку $[-\pi,\pi]$.

Дійсно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx)dx = \pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos kx dx = 0;\ \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin kx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+m)x+\cos(k-m)x]dx =$$

$$= \frac{\sin(k+m)x}{2(k+m)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(k-m)x}{2(k-m)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0; \quad k\neq m$$

Аналогічно

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx dx = 0,\ k\neq n;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nx dx = 0,\ k\neq n.$$

Тригонометричний ряд

Означення. Тригонометричним рядом називають функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+... \quad (1.1)$$

або більш коротко $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$

де a_0, a_n, b_n – коефіцієнти тригонометричного ряду.

Відзначимо, що:

1) члени цього ряду – періодичні з періодом 2π;
2) якщо позначити $a_n = A_n\sin\alpha_n;\ b_n = A_n\cos\alpha_n$, то $Un(x) = A_n(\sin\alpha_n\cdot\cos nx+\cos\alpha_n\cdot\sin nx) = A_n\sin(nx+\alpha_n)$,

де A_n – амплітуда; α_n – початкова фаза; n – частота простого гармонічного коливання.

Таким чином, ряд (1.1) під фізичним кутом зору є сума простих гармонічних коливань.

Нехай дана функція $f(x)$ періодична з періодом 2π. Важливим є питання про розвинення функції $f(x)$ у тригонометричний ряд.

Припустимо, що має місце розвинення у ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (1.2)$$

та його можна почленно інтегрувати.

Почленно інтегруючи ряд від –π до π, одержимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n+1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx] = a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

Помножимо обидві частини розвинення на cosmx та почленно проінтегруємо на проміжку [-π,π]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{\pi}^{\pi}\cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx] =$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx = a_m\pi \Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx$$

(бо основна тригонометрична система – ортогональна).

Якщо помножити обидві частини (1.2) на sinmx, а потім почленно проінтегрувати, то аналогічно одержимо $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx$.

Таким чином, якщо функція $f(x)$ періодична з періодом T=2π, то коефіцієнти розвинення функції у тригонометричний ряд обчислюють за формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (1.3)$$

$$(n = 0,1,2,...) \qquad (n = 1,2,3,...)$$

Означення. Коефіцієнти (1.3) називають коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$.

Означення. Ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ з коефіцієнтами Фур'є (1.3) називають рядом Фур'є функції $f(x)$ незалежно від того, збіжний чи розбіжний цей ряд, збіжний він до $f(x)$ або іншої функції.

З наведеного ясно, що кожній інтегровній функції можна поставити у відповідність ряд Фур'є. Запобігаючи застосуванню рівності, зазвичай пишуть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Однак, як і для степеневих рядів, не можна заздалегідь твердити, що ряд Фур'є функції $f(x)$ збіжний до функції $f(x)$. Якщо така збіжність має місце у всіх точках неперервності $f(x)$, то знак ~ ми можемо замінити на знак =. У цьому випадку говорять, що функція $f(x)$ є розвивна в ряд Фур'є.

Зауваження. Враховуючи властивість (3) $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$ періодичних функцій, коефіцієнти Фур'є (1.3) можна обчислювати (T=2π) так:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx.$$

$$(n = 0,1,2,...) \qquad (n = 1,2,3,...)$$

1.2. Ряди Фур'є для парних та непарних функцій з періодом 2π

Зауваження. Якщо $f(x)$ – парна функція, тобто $f(-x)= f(x)$, то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$.

Доведення.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \{x=-t\} = -\int_{\pi}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Аналогічно, якщо $f(x)$ – непарна, тобто $f(-x)= -f(x)$, то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.

Зауваження. Добуток двох парних (непарних) функцій є парна функція. Добуток парної та непарної функцій є непарна функція.

Доведення. Нехай $f(x)$ – парна, $\varphi(x)$ – непарна.

$\varphi(x) = \varphi(x) f(x) : \varphi(-x) = f(-x)\varphi(-x) = -f(x)\cdot\varphi(x) = -\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)$ – непарна.

Нехай $f(x)$ – парна функція, тоді коефіцієнти Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0.$$

Ряд Фур'є такої функції має вигляд $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Аналогічно, якщо $f(x)$ – непарна функція, то

$$a_0 = 0;\ a_n = 0;\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Ряд Фур'є непарної функції має вигляд $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

Ряди Фур'є функції з довільним періодом

Нехай функція $f(x)$ – періодична з періодом $T=2\ell$, тобто $f(x+2\ell)= f(x)$.

Нехай $t = \frac{\pi x}{\ell}$, $x = \frac{\ell t}{\pi}$, коли $\frac{-\ell \le x \le \ell}{x \in [-\ell, \ell]}$, маємо $\frac{-\pi \le t \le \pi}{t \in [-\pi, \pi]}$. За властивістю (2) періодичних функцій функція $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)=\varphi(t)$ аргументу t є періодична з періодом $\frac{2\ell}{\ell/\pi}=2\pi$.

Тоді функції $\varphi(t)$ ставлять у відповідність ряд Фур'є

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

де $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dx;\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt;\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt.$

Замінюючи $x=\frac{\ell t}{\pi},\ t=\frac{\pi x}{\ell},\ dt=\frac{\pi}{\ell}dx$, одержимо для функції з періодом 2ℓ

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx;\ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx.$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}).$$

Зауваження: а) якщо $f(x)$ – періодична (Т=2ℓ) та парна на $[-\ell,\ell]$, то

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell},a_n=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\ \ (n=0,1,2,...);$$

б) якщо f(x) – непарна на $[-\ell,\ell]$, то

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell};\ b_n=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\ \ (n=1,2,...).$$

Достатня умова розвинення функції у ряд Фур'є

Означення. Функцію $f(x)$ називають кусково-монотонною на $[a,b]$, якщо:

1) вона неперервна на $[a,b]$ або ж має скінченну кількість точок розриву першого роду (тобто кусково-неперервна);

2) сегмент $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість часткових сегментів так, що всередині кожного з них $f(x)$ монотонна.

Теорема Діріхле. Якщо функція $f(x)$ має період 2ℓ і кусково-монотонна на $[-\ell,\ell]$, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається $\forall x$ в області визначення, причому:

– у точках неперервності $f(x)$ сума ряду Фур'є цієї функції дорівнює $f(x)$;

– у точках розриву $f(x)$ сума ряду Фур'є дорівнює $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, тобто середньому арифметичному граничних значень справа та зліва;

– ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому сегменті, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Зауважимо, що до функції ставлять менш жорсткі вимоги, ніж до степеневих рядів.

Розвинення у ряд Фур'є неперіодичної функції

Нехай функція $f(x)$

1) задана на $[a,a+2\ell]$;
2) кусково-монотонна на $[a,a+2\ell]$;
3) $f(a)=f(a+2\ell)$.

Періодично продовжимо цю функцію на всю числову вісь, тобто підпорядкуємо її умові $f(x+2\ell)=f(x)\ \forall x$. Тоді одержану періодичну функцію $\tilde{f}(x)$ згідно з теоремою Діріхле можна розвинути в ряд Фур'є, який буде збігатися до $f(x)$ на $[a, a+2\ell]$ у кожній точці неперервності.

Нехай функція $f(x)$:

1) задана на інтервалі $(a,a+2\ell)$;
2) на $[a,a+2\ell]$ $\exists\ \overline{f}(x)$ – кусково-монотонна функція така, що $\overline{f}(x)=f(x)\ \forall x\in(a,a+2\ell)$ та $\overline{f}(a)=\overline{f}(a+2\ell)$.

Продовжимо $\overline{f}(x)$ періодично на всю числову вісь, підпорядкувавши її умові $\overline{f}(x)=\overline{f}(x+2\ell)\forall x$.

Функція $\tilde{f}(x)$, яка є періодичним продовженням $\overline{f}(x)$ з $(a,a+2\ell)$ на всю числову вісь, задовольняє достатні умови розвинення і тому може бути розвинена у ряд Фур'є, збіжний до функції $f(x)$ $\forall x\in(a,a+2\pi)$ у кожній точці неперервності.

Зауваження. Ряд Фур'є неперіодичної функції $f(x)$ збігається у $(a,a+2\ell)$ до функції $f(x)$ у кожній точці неперервності. Але поза проміжком $(a,a+2\ell)$ сума ряду Фур'є вже не збігається до функції $f(x)$.

Приклад. Розвинути у ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0\\ x,\quad 0\le x\le\pi\end{cases}$.

Розв'язання

1) Визначимо функцію

$$\overline{f}(x)=\begin{cases}f(x), -\pi<x\le 0\\ \overline{f}(\pi)=\pi,\quad x=-\pi,\quad (\text{важливо, що } \overline{f}(-\pi)=\overline{f}(\pi)).\end{cases}$$

2) Періодично продовжимо $\overline{f}(x)$ на всю вісь, одержимо $\tilde{f}(x)$.

Отримана таким чином періодична функція $\tilde{f}(x)$ має період 2π та задовольняє умови розвинення функції у ряд Фур'є.

Визначимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{2}\pi;$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi\right]=\frac{1}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}=\begin{cases}0, & n-\text{парне},\\ -\dfrac{2}{\pi n^2}, & n-\text{непарне},\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi\cos xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{\sin 2x}{2}+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x+\frac{\sin 3x}{3}\right)-\frac{\sin 4x}{4}+\left(-\frac{2}{\pi-5^2}\cos 5x+\frac{\sin 5x}{5}\right)-\ldots\quad(-\pi\le x\le\pi).$$

Приклад. Розвинути у ряд Фур'є функцію $f(x)=x,\ x\in[0,\pi]$.

Розв'язання

1) Якщо продовжити цю функцію на $(-\pi,\pi]$, взявши $f(x)=0,\ x\in(-\pi,0)$, то одержимо розвинення попереднього прикладу.

2) Продовжимо $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ так, щоб одтримати парну функцію. Для цього будемо вважати $f^*(x)=\begin{cases}f(x), & 0\le x\le\pi\\ -x, & -\pi<x<0\end{cases}\Rightarrow\overline{f}(x)=\begin{cases}f^*(x), & -\pi<x\le\pi\\ \pi, & x=-\pi\end{cases}$.

Продовжимо одержану парну функцію періодично на всю числову вісь.

Одержана функція $\tilde{f}(x)$ задовольняє умови теореми про розвинення. На підставі парності

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi=\pi;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right);\ b_n=0\quad 0\le x\le\pi$$

$$x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx;$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)^x}{(2n-1)^2}\right).$$

Зокрема, якщо $x=\pi$,

$$\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots\right);\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots\right).$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$$

3) Продовжимо функцію $f(x)$ на $(-\pi,0)$ непарним чином.

Одержимо функцію $f^*(x)=\{x, \quad \pi < x \le \pi$

$$\overline{f^*}(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x \le \pi \\ \pi, & x=-\pi \end{cases}.$$

Продовжимо функцію $\overline{f}^*(x)$ на всю числову вісь. Одержимо періодичну функцію $\tilde{f}(x)$, розвивну в ряд Фур'є.

Запишемо розвинення в ряд Фур'є функції $f(x)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Якщо $-\pi < x \le \pi$, то $x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...\right).$

Приклад. Розвинути у ряд Фур'є функцію $f(x)=x$, $-1<x<1$.

1) Доозначимо функцію на [-1,1], взявши

$$\overline{f}(x)=\begin{cases} 1, & x=-1 \\ x, & -1<x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$ (кусково-монотонна функція на [-1,1]).

2) Продовжимо функцію $\overline{f}(x)$ періодично на всю числову вісь із періодом 2.

Одержали періодичну з періодом T=2 функцію, кусково-монотонну на [-1,1]. Розвинемо цю функцію в ряд Фур'є, враховуючи її непарність на (–1, 1):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{1};$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx=\left\{\begin{matrix}\ell=1\\ f(x)=x\end{matrix}\right\}=\frac{2}{1}\int_0^{1}x\sin\frac{\pi nx}{1}dx=2\left[-\frac{x\cos n\pi x}{\pi n}\Bigg|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi xdx\right]=$$

$$-\frac{2}{\pi n}(-1)^n-\frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n}=\frac{2}{\pi}\left[\sin\pi x-\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 3\pi x}{3}-\underset{(-1<x<1)}{\ldots}+(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n}\right].$$

РОЗДІЛ 2

2.1. Статика

Основні положення та аксіоми статики. В'язі та реакції. Система збіжних сил

Статикою називають розділ механіки, у якому вивчають сили та умови рівноваги матеріальних тіл, які перебувають під впливом сил.

Під рівновагою будемо розуміти стан спокою тіла щодо інших тіл, наприклад щодо Землі. У зв’язку з тим що для інженерних споруд та конструкцій в основному використовують досить тверді матеріали, деформації яких під впливом зовнішніх сил досить малі, у теоретичній механіці прийнята гіпотеза про абсолютно тверде тіло.

Абсолютно твердим тілом називають таке тіло, відстань між кожними двома точками якого завжди залишається незмінною.

Силою називають векторну величину, яка є основною мірою механічної взаємодії матеріальних тіл.

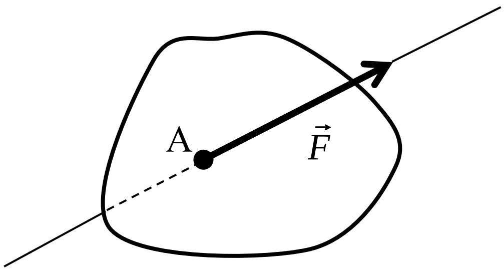


Рис. 2.1

Дію сили на тіло визначають трьома основними характеристиками:

1) модулем сили, тобто її величиною;
2) напрямком сили;
3) точкою прикладання сили.

Позначати силу будемо латинською літерою зі знаком вектора над нею (наприклад, $\vec{F}$), а модуль сили символом $\left|\vec{F}\right|$ або просто F. Пряму, вздовж якої діє сила, називають лінією дії сили (рис. 2.1).

Далі наведемо основні визначення, необхідні для подальшого викладення матеріалу.

Системою сил будемо називати сукупність сил, що діють на тіло, яке розглядатимемо за умов, що лінії дії всіх сил лежать в одній площині. Систему сил називають плоскою, в протилежному випадку – просторовою. Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, будемо називати збіжними, а сили, лінії дії яких паралельні одна одній, – паралельними.

Тіло, якому з певного положення можна надати довільне переміщення в просторі, називають вільним.

Якщо одну систему сил, що діє на вільне тверде тіло, можна замінити на іншу систему, не порушуючи при цьому стану рівноваги або руху, у якому знаходиться тіло, такі дві системи сил називають еквівалентними.

Система сил, під дією якої довільне тверде тіло перебуває в спокої, називають врівноваженою або еквівалентною нулю.

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то цю силу називають рівнодійною системі сил.

Крім наведених визначень необхідно прийняти вихідні положення (аксіоми) статики.

1) Якщо на довільне тверде тіло діють дві сили, то тіло може бути в рівновазі тоді і тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем (F_1=F_2), мають спільну лінію дії і направлені в протилежні сторони (рис. 2.2).

2) Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або відняти врівноважену систему сил (рис 2.3).

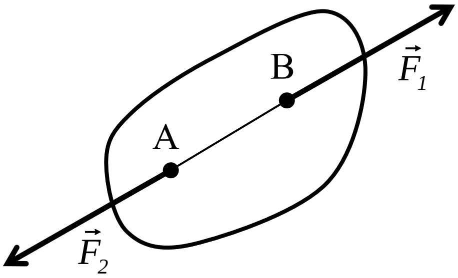


Рис 2.2

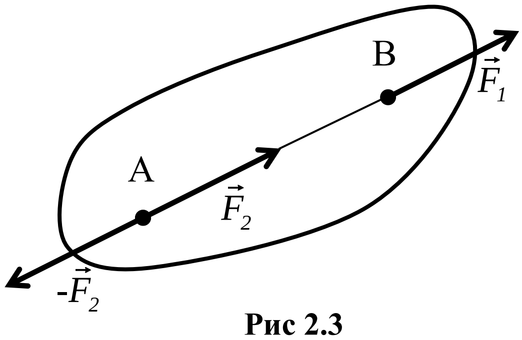


Рис 2.3

Наслідок: дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладання сили вздовж її лінії дії в довільну іншу точку тіла.

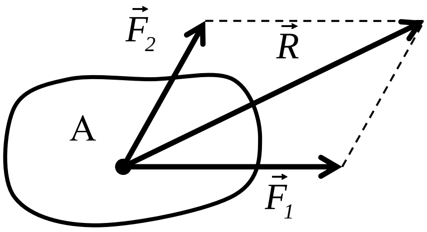


Рис. 2.4

3) Закон паралелограма сил (правило додавання сил): дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодійну, прикладену в тій самій точці та зображену діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, як на сторонах (рис 2.4).

Вектор $\vec{R}$, що дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, називають геометричною сумою векторів $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Відзначимо, що поняття суми сил та рівнодійної потрібно відрізняти, оскільки система сил, як буде показано нижче, не завжди може мати рівнодійну.

4) Закон рівності дії та протидії. За довільної дії одного твердого тіла на інше має місце така сама за модулем та протилежна за напрямом протидія (рис. 2.5). Тіло A діє на тіло B із силою $\vec{F}$, а тіло B на тіло A із силою $\vec{F}'$, причому $\vec{F}$=-$\vec{F}'$. Оскільки ці сили діють на різні тіла, вони не утворюють врівноважену систему сил.

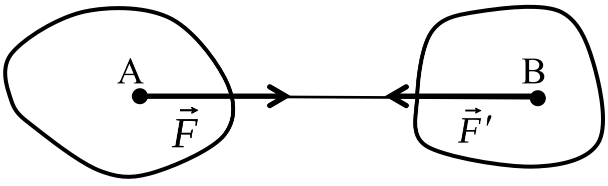


Рис. 2.5

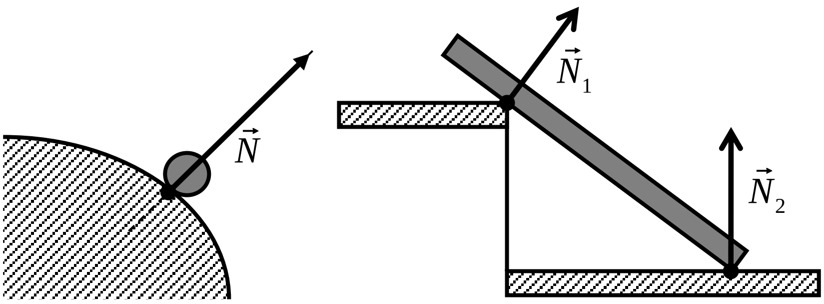
5) Принцип ствердіння. Рівновага тіла, що може змінювати свою форму (деформівного тіла), не зміниться, якщо тіло вважати твердим.

Розглянемо тепер в'язі, що можуть бути накладені на тіло, а також реакції, які вони викликають. Усе, що перешкоджає переміщенню тіла в просторі, являє собою в'язь, накладену на тіло. Наприклад, площина столу, на якому лежить олівець, це в’язь, що заважає олівцю впасти на підлогу, або трос, на якому підіймають вантаж, також є в’язь для вантажу. Силу, з якою в’язь діє на тіло, заважаючи йому пересуватися в тому чи іншому напрямку, називають силою реакції в’язі або реакцією в’язі. Значення реакції в'язі (реактивної сили) залежить від діючих зовні активних сил, дія яких від інших сил не залежить. Реакція в'язі спрямована в бік, протилежний тому, в напрямку якого в’язь заважає рухатися тілу.

Розглянемо детальніше деякі основні реакції в’язей.

1) Реакція гладкої поверхні або опори $\vec{N}$ направлена вздовж спільної нормалі до поверхонь тіл, що контактують, у точці їх дотику і прикладена в цій точці (рис. 2.6,*а*). Коли одна з поверхонь являє собою точку, тобто тіло спирається на кут, реакція направлена перпендикулярно іншій поверхні (рис. 2.6,*б*).

2) В'язь, зроблена з гнучкої нитки, що не розтягується, не дає тілу віддалятися від точки підвісу, тому реакція $\vec{T}$ нитки направлена вздовж нитки від тіла до точки підвісу (рис. 2.7).



а б

Рис. 2.6

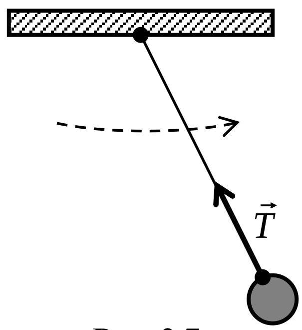


Рис. 2.7

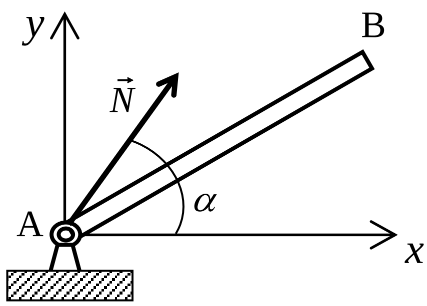


Рис. 2.8

3) Циліндричний шарнір забезпечує таке з'єднання двох тіл, за якого одне тіло може обертатися відносно іншого навколо осі, яку називають віссю шарніра. У цьому випадку тіло не може пересуватися в жодному з перпендикулярних осі шарніра напрямків, тому реакція шарніра $\vec{R}$, може мати довільний напрям у площині, перпендикулярній осі шарніра (рис. 2.8).

4) Сферичний шарнір і підп’ятник. Тіла, з’єднані циліндричним шарніром, можуть як завгодно обертатися одне відносно одного навколо осі шарніра. При цьому точка А, яка збігається з центром шарніра, не може рухатися в просторі (рис. 2.9,*а*). Як наслідок, реакція шарніра $\vec{R}$, може мати довільний напрям у просторі, тобто заздалегідь невідомі і величина реакції, і її кути з осями координат. Реакція $\vec{R}$ підп’ятника також довільно направлена в просторі (рис. 2.9,*б*).

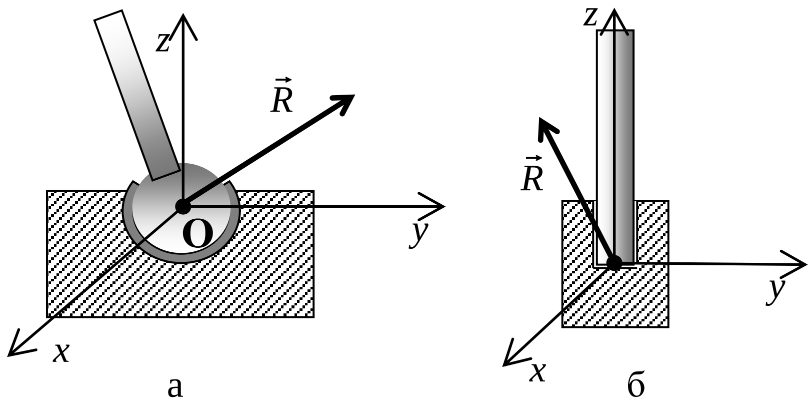


Рис. 2.9

5) Невагомий стрижень. Невагомим називають стрижень, вагою якого (порівняно з його навантаженням) можна знехтувати. Нехай для деякого тіла, що перебуває в рівновазі, такий стрижень, прикріплений у точках А і В, являє собою в'язь. Тоді на стрижень будуть діяти тільки дві сили в точках А і В, направлені вздовж однієї прямої, тобто вздовж АВ (рис. 2.10).

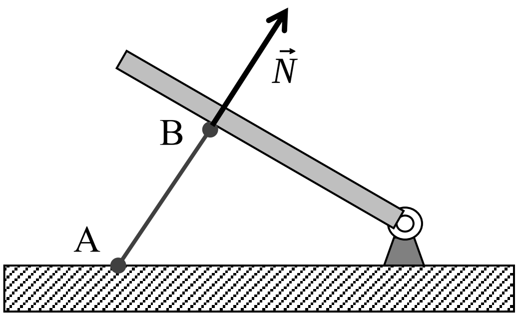


Рис. 2.10

У задачах реакції в'язей, як правило, являють собою невідомі, які потрібно визначити в результаті розв'язання рішення. Знаходження реакцій в'язей має суттєвий практичний інтерес: завдяки їм отримують початкові дані для розрахунку конструкцій на міцність.

Наведемо основні можливі геометричні перетворення і аналітичні дії над силами.

1) Додавання двох сил. Як було наведено вище, два вектори сил потрібно додавати за правилом паралелограма (див. рис. 2.4). Якщо при цьому кут між векторами дорівнює α, то модуль сумарного вектора $\vec{R}$ визначимо за теоремою косинусів таким чином:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,.$$

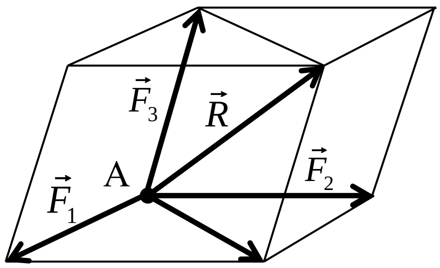


Рис. 2.11

2) Додавання трьох сил, що лежать в одній площині. Геометричну суму $\vec{R}$ трьох сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$), які не лежать в одній площині, будемо зображати діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах (рис. 2.11). Правдивість даного правила легко довести, якщо послідовно застосувати правило паралелограма.

3) Рівнодійна збіжної системи сил. Розглянемо дію системи сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,…., $\vec{F}_n$, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Таку систему сил називають системою збіжних сил. Зважаючи на те, що силу можна переносити вздовж її лінії дії, перенесемо всі сили до точки їх перетину.

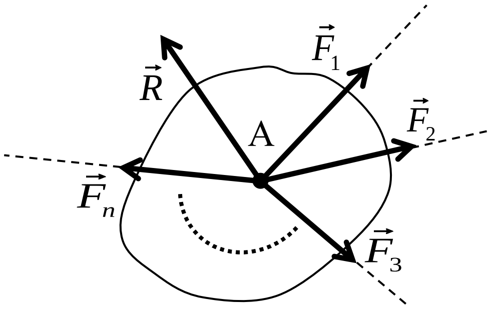


Рис. 2.12

Тоді, якщо послідовно застосовувати правило паралелограма, суму цих сил можна визначити за формулою

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n .$$

Очевидно, рівнодійна $\vec{R}$ буде прикладена в точці перетину сил $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,…., $\vec{F}_n$.

4) Проекції сили на вісь і на площину. Для аналітичного розв'язання задач статики необхідно ввести поняття проекції сили на вісь. Проекція сили (як і довільного іншого вектора) на вісь є алгебрична величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою та додатним напрямом осі. Якщо кут гострий, проекція додатна, якщо тупий – від'ємна, а у випадку перпендикулярної до осі сили проекція сили на вісь дорівнює нулю. Наприклад, для сил, зображених на рис. 2.13, отримаємо

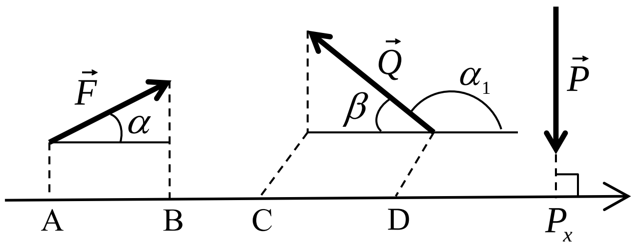


Рис. 2.13

$$F_x = F\cos\alpha = AB,\ Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\beta = -CD,\ P_x = 0.$$

У деяких випадках для знаходження проекції сили на вісь буде доцільно спочатку знайти її проекцію на площину, в якій лежить вісь, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на дану вісь. Наприклад (рис. 2.14):

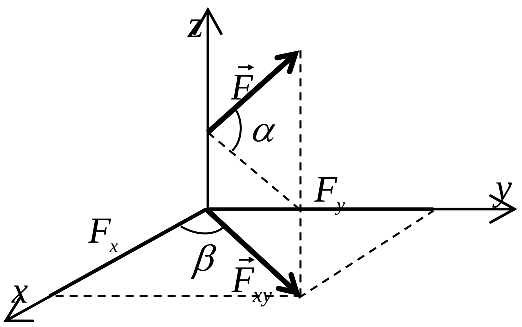


Рис. 2.14

$$F_x = F_{xy}\cos\beta = F\cos\alpha\cos\beta,$$

$$F_x = F_{xy}\sin\beta = F\cos\alpha\sin\beta,\ F_z = F\sin\alpha .$$

Знаючи проекції сили на координатні осі, можна легко обчислити модуль сили:

$$F = \sqrt{F_x + F_y + F_z} .$$

Для рівноваги збіжної системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цих сил дорівнювала нулю:

$$R = 0.$$

Очевидно, що нульовий вектор матиме нульові проекції на осі системи координат:

$$R_x = \sum F_{kx} = 0,\ \ R_y = \sum F_{ky} = 0,\ R_z = \sum F_{kz} = 0.$$

Останні вирази дозволяють сформулювати такі умови рівноваги: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій цих сил на кожну з координатних осей дорівнювали нулю.

Якщо всі сили, що діють на тіло, лежать в одній площині, вони утворюють плоску збіжну систему сил. У цьому випадку маємо тільки дві умови рівноваги:

$$R_x = \sum F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum F_{ky} = 0. \qquad (2.1)$$

Теорема про три сили: якщо тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Доведення. Розглянемо довільне тверде тіло, що перебуває в рівновазі під дією трьох сил: F_1, F_2, F_3 (рис. 2.15). Якщо сили F_1 і F_2 не паралельні, то їх лінії дії перетинаються, припустимо, що це точка А. Замінимо, не порушуючи умов рівноваги, дію цих сил рівнодійною R. Тоді тіло буде перебуває в рівновазі під дією двох сил F_3 і R, які повинні мати згідно з першою аксіомою спільну лінію дії. Тобто лінія дії сили F_3 також проходить через точку А, що й потрібно було довести.

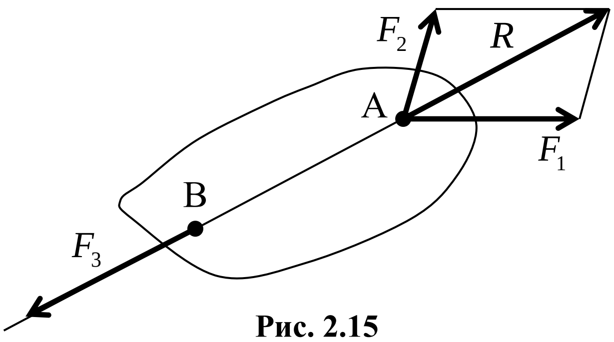


Рис. 2.15

Приклад розв'язання задачі. На жорстке колесо вагою P діє горизонтальна сила Q, що притискає його до виступу В (рис. 2.16). Визначити реакції в точках А і В, якщо $BD = h = R/2$.

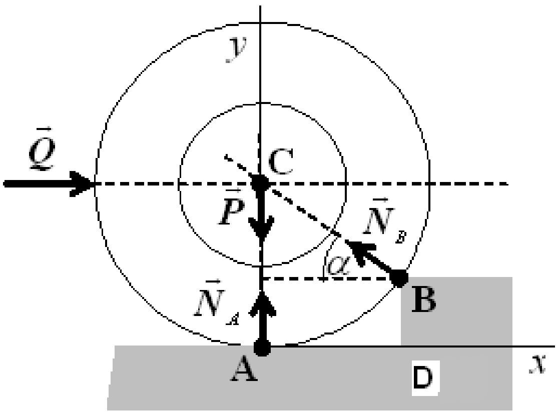


Рис. 2.16

Розв'язання

Розглянемо рівновагу колеса, на яке діють активні сили P та Q і реакції в'язей $\vec{N}_A$ та $\vec{N}_B$. Реакції будуть направлені вздовж нормалей до поверхні колеса, тобто вздовж відповідних радіусів. Усі сили лежать в одній площині й збігаються в точці С. Оскільки сил чотири, то слід застосовувати умови рівноваги (2.1). Вибравши систему координат (рис. 2.16), отримаємо

$$Q - N_B \cos\alpha = 0; \; N_A - P + N_B \sin\alpha = 0.$$

За умови, що $h = 0{,}5R$, отримаємо $\sin\alpha = (R-h)/R = 0{,}5$ і $\alpha = 30^{\circ}$. Тоді з першого рівняння знайдемо

$$N_B = Q/\cos\alpha = 2Q\sqrt{3}/3.$$

Підставляючи N_B у друге рівняння, одержимо

$$N_A = P - Q\,\mathrm{tg}\,\alpha = P - Q\sqrt{3}/3.$$

Момент сили та момент пари сил. Зведення системи сил до заданого центра. Рівновага довільної системи сил. Випадок плоскої системи сил

Розглянемо силу $\vec{F}$, прикладену в точці A (рис. 2.17). З деякого центра *O* опустимо перпендикуляр до лінії дії сили $\vec{F}$. Довжину h цього перпендикуляра називають плечем сили $\vec{F}$ відносно центра *O*. Момент сили є векторна величина відносно центра *O,* яку визначають:

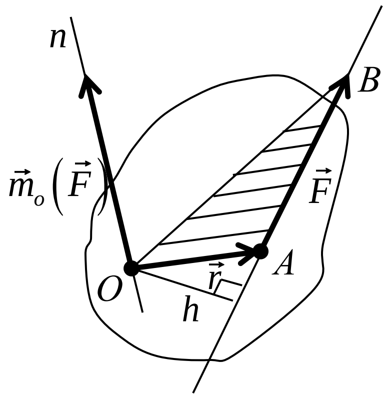


Рис. 2.17

– модуль моменту, що дорівнює $F\,h$;

– положення у просторі площини *OAB*, що проходить через центр *O* та силу $\vec{F}$;

– напрям повороту, у якому обертає сила $\vec{F}$ навколо центра *O*.

Введемо означення моменту сили відносно центра. Моментом сили $\vec{F}$ відносно центра *O* називають прикладений у центрі *O* вектор $\vec{m}_o\left(\vec{F}\right)$, модуль якого дорівнює добутку модуля сили $\vec{F}$ на її плече h і який направлений перпендикулярно площині, що проходить через центр *O* та силу, в той бік, звідки обертання тіла, яке намагається здійснити сила $\vec{F}$ відносно центра *O*, видно проти ходу годинникової стрілки. Згідно з цим означенням легко довести, що модуль моменту $\vec{m}_o\left(\vec{F}\right)$ дорівнює подвійній площі трикутника *OAB*:

$$\left|\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)\right| = 2S_{\Delta OAB},$$

оскільки $S_{\Delta OAB} = ABh|2 = Fh|2$.

Одиниця виміру моменту сили є ньютон-метр (Н·м). Знайдемо формулу, яка виражає вектор $\vec{m}_o\left(\vec{F}\right)$. Для цього розглянемо векторний добуток $\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$. За визначенням модуля векторного добутку отримаємо

$$\left|\overrightarrow{OA}\times\vec{F}\right| = 2S_{\Delta OAB} = \left|\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)\right|.$$

Направлений вектор $\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$ перпендикулярно до площини *OAB* у той бік, з якого поворот від вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\vec{F}$ видно проти ходу годинникової стрілки, тобто як і вектор $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)$. Таким чином, вектори $\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$ та $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)$ збігаються, тобто

$$\overrightarrow{OA}\times\vec{F} = \vec{m}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r}\times\vec{F}.$$

Отже, момент сили $\vec{F}$ відносно центра *O* дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, який визначає положення точки прикладання сили відносно центра *O*, на саму силу.

Назвемо властивості моменту сили.

1. Момент сили відносно центра не змінюється в разі перенесення сили вздовж її лінії дії.

2. Момент сили відносно центра дорівнює нулю, коли сама сила дорівнює нулю або коли лінія дії сили проходить через центр.

Момент сили є величина векторна, тому він має проекції на осі обраної декартової системи координат, центр якої збігається з центром, відносно якого обчислюють момент. $m_x\left(\vec{F}\right), m_y\left(\vec{F}\right), m_z\left(\vec{F}\right)$ будуть вже скалярними величинами. У ході розв'язання задач найчастіше застосовують саме моменти сил відносно осей, і не завжди зручно шукати спочатку момент відносно центра, а потім проектувати його на вісь. Тому розглянемо більш зручний алгоритм. Припустимо, що необхідно знайти момент сили $\vec{F}$ відносно осі z (рис. 2.18). Спроектуємо вектор сили на площину xy і знайдемо момент відносно центра O проекції сили $\vec{F}_{xy}$. Отриманий вектор буде за модулем дорівнювати добутку модуля проекції $\vec{F}_{xy}$ на відповідне плече: $h_{xy} F_{xy}$. Отриманий вектор буде направлений вздовж осі z, тому проекція на вісь z дорівнює його довжині з відповідним знаком. Проекції на осі x та y будуть нульові. Це підтверджує, що величина $h_{xy} F_{xy}$ є проекцією моменту сили $\vec{F}$ відносно центра O на вісь z. Відзначимо, що момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли сила та вісь лежать в одній площині.

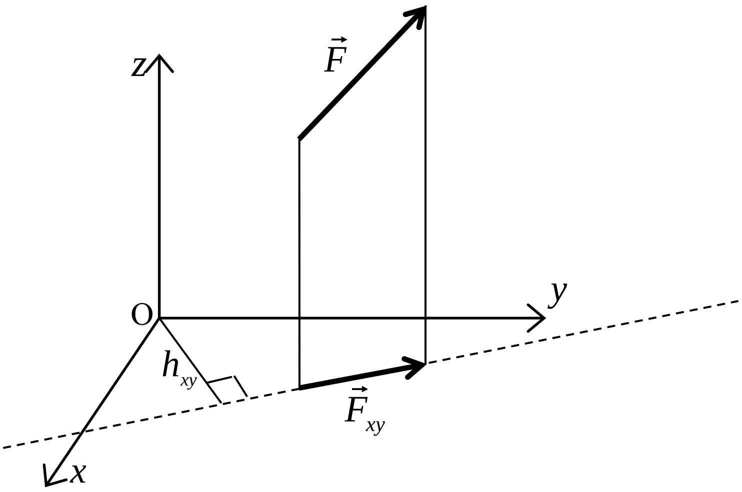


Рис. 2.18

Розглянемо тепер систему двох сил, прикладених до одного тіла, рівних за модулем, паралельних і протилежно направлених. Таку систему називають парою сил (рис. 2.19). Система сил $\vec{F}$ та $\vec{F}'$, що утворюють пару сил, не знаходиться в рівновазі, оскільки сили діють вздовж різних прямих, і має нульову рівнодійну. Тому пара сил являє собою особливу міру механічної взаємодії. Її властивості розглянемо окремо. Площину, яка проходить через лінії дії сил, що утворюють пару, називають площиною пари. Відстань d між лініями дії сил – плече пари. Інтуїтивно зрозуміло, що дія пари на тіло буде приводити до обертання останнього, що механічно характеризує такий силовий фактор, як момент пари. Момент пари, як і момент сили, визначають три характеристики:

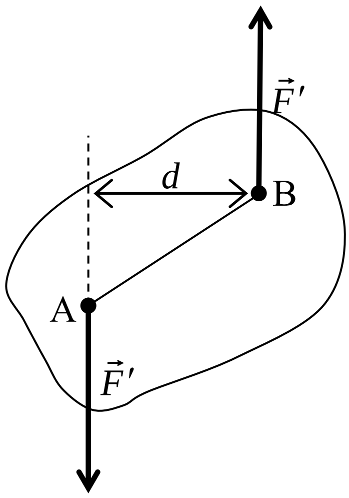


Рис. 2.19

– модуль, що дорівнює добутку модуля діючих сил на плече пари Fd;
– положення у просторі площини пари;
– напрям повороту пари в цій площині.

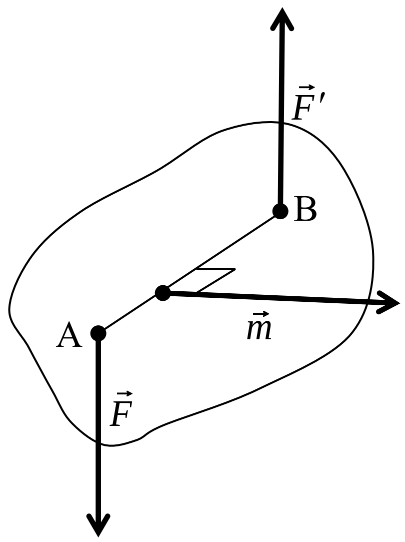


Рис. 2.20

Як і момент сили, момент пари є величина векторна. Застосовуючи наведене, дамо таке означення: моментом пари сил називають вектор $\vec{m}$, модуль якого дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на її плече і який направлений перпендикулярно площині дії пари в той бік, звідки поворот, який здійснює пара, видно проти годинникової стрілки (рис. 2.20). На відміну від моменту сили момент пари вектора вільний, тобто його можна прикласти в довільній точці. Вимірюють момент пари, як і момент сили, у ньютон-метрах (Н·м). Виходячи з того що дія пари на тіло характеризується тільки моментом $\vec{m}$, підтверджується такий висновок: дві пари сил, які мають однакові моменти, еквівалентні, тобто їх механічна дія на тіло однакова.

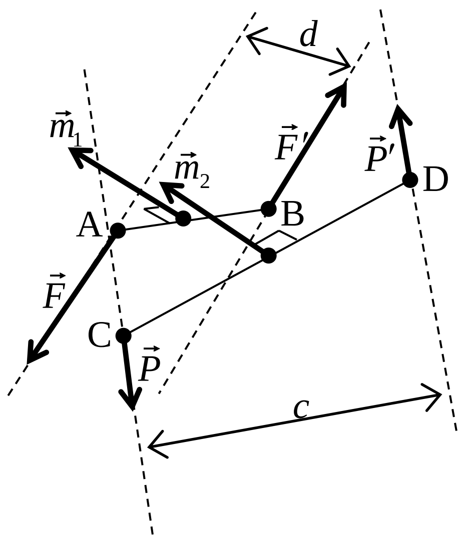


Рис. 2.21

Розглянемо властивості пари сил. Нехай пара сил $\vec{F}$ і $\vec{F}'$ з плечем d, яка діє в деякій площині (рис. 2.21). Оскільки вектор моменту пари вільний, маємо **першу** властивість: пару, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна переносити куди завгодно в площині дії пари.

Розглянемо іншу пару сил $\vec{P}$ і $\vec{P}'$, яка діє в тій самій площині, що і пара $\vec{F}$ і $\vec{F}'$, і повертає в тому самому напрямку. Моменти пар $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$ мають однаковий напрям у просторі, перпендикулярний до площини дії пар. Таким чином, якщо вимагати рівності моментів $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$, достатньо отримати рівність їх модулів Fd та Pc відповідно. Коли відомий модуль сили P, плече c знаходимо як $c = Fd/P$, коли відоме плече c, можемо знайти модуль сили $P = Fd/c$. Це дає змогу сформулювати **другу** властивість: не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, можна довільним чином змінювати модулі сил або довжину плеча, залишаючи незмінним її момент.

Третя властивість пари сил очевидна і не потребує доведення: пару сил, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна перенести з площини її дії в довільну площину, паралельну площині її дії.

Теорема про додавання пар: система пар, що діють на тверде тіло, еквівалентна одній парі з моментом, який дорівнює геометричній сумі моментів пар, що додаються.

Доведення теореми ґрунтується на властивостях пари сил та вектора пари і тут ми наводити його не будемо.

Для розв'язання задач часто потрібно звести діючі на тверде тіло сили до одного центра, тобто перенести всі сили в одну точку. Метод, який дозволяє зробити відповідні перетворення, ілюструє наступна теорема.

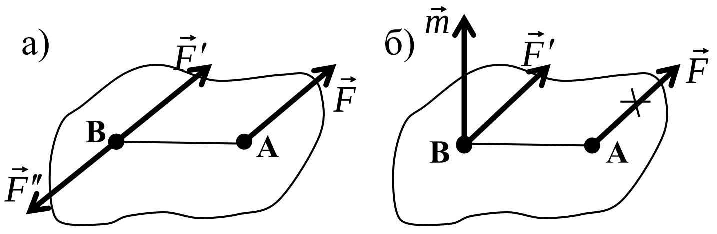


Рис. 2.22

Теорема (про паралельне перенесення сили): силу прикладену до абсолютно твердого тіла, можна, не змінюючи її дії на тіло, переносити з однієї точки в довільну іншу точку тіла, додаючи при цьому пару з моментом, що дорівнює моменту сили відносно точки, у яку сила переноситься.

Нехай на тверде тіло в точці А діє сила $\vec{F}$ (рис. 2.22,*а*). Дія цієї сили не зміниться, якщо в довільній точці В тіла прикласти дві врівноважені сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$ такі, що $\vec{F}'=\vec{F}$, $\vec{F}''=-\vec{F}$. Отримана система сил являє собою систему, що складається із сили $\vec{F}'=\vec{F}$ та пари сил $\vec{F}',\vec{F}$ з моментом, який дорівнює

$$\vec{m}=\vec{m}_B\left(\vec{F}\right).$$

Результат теореми про паралельне перенесення сили відображено на рисунку 2.22,*б*. (Силу $\vec{F}$ вважаємо відкинутою.) Повернемося до розв'язання задачі про зведення системи сил до одного центра. Нехай на тіло діє довільна система сил $\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n$ (рис. 2.23,*а*). Оберемо яку-небудь точку *O* за центр і, застосовуючи теорему про паралельне перенесення сили, перенесемо всі сили в обраний центр, додаючи при цьому відповідні пари (рис. 2.23,*б*).

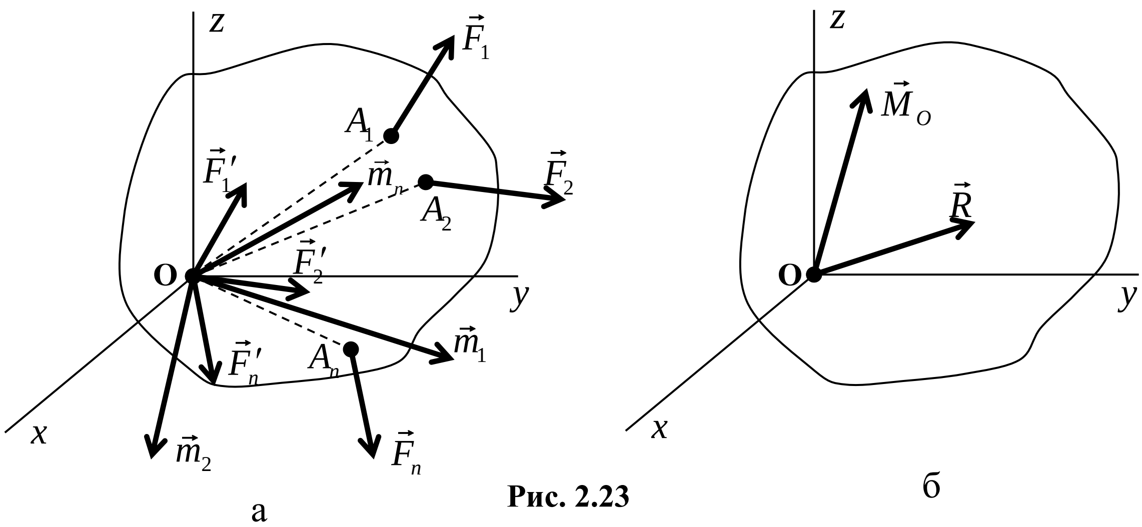


Рис. 2.23

Тоді на тіло буде діяти система сил $\vec{F}_i' = \vec{F}_i, i = \overline{1,n}$ та система пар, моменти яких відповідно до формули (2.14) дорівнюють $\vec{m}_i = \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right), i = \overline{1,n}$. Система збіжних сил $\vec{F}_i' = \vec{F}_i, i = \overline{1,n}$, як доведено вище, може бути замінена рівнодійною

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Дію моментів $\vec{m}_i = \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right), i = \overline{1,n}$ також можемо замінити дією сумарного моменту

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right),$$

який називають головним моментом системи сил відносно центра *O*.

Таким чином, доведено теорему про зведення системи сил: довільну систему сил, що діє на абсолютно тверде тіло, у ході зведення до обраного центра *O*, замінює одна сила $\vec{R}$, що дорівнює головному вектору сил і прикладена в центрі зведення *O*, і один момент $\vec{M}_O$, що дорівнює головному моменту системи діючих сил відносно центра *O* (рис. 2.23,*б*).

Зазначимо, що сила $\vec{R}$ у даному випадку не є рівнодійна, оскільки замінює дію системи сил не одна, а з моментом $\vec{M}_O$.

Із теореми випливає умова еквівалентності систем сил: дві системи сил, що мають однакові головні вектори і головні моменти відносно того самого центра, є еквівалентні.

Відзначимо, що вектор $\vec{R}$ не залежить від вибору центра зведення, натомість момент $\vec{M}_O$ у загальному випадку може змінюватись зі зміною *O*, тому необхідно вказувати, відносно якого центра вирахований головний момент.

Остання теорема дає змогу сформулювати умову рівноваги довільної просторової системи сил: для рівноваги довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулю:

$$\vec{R} = 0, \ \vec{M}_O = 0.$$

Останні дві рівності є векторні, тому у відповідність їм можна поставити шість таких скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_{Ox}\left(\vec{F}_i\right) = 0; \\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oy}\left(\vec{F}_i\right) = 0; \\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oz}\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Використовуючи отримані результати, доведемо теорему Варіньона про момент рівнодійної: коли певна система сил має рівнодійну, тобто $\vec{M}_O = 0$, момент рівнодійної відносно довільного центра O дорівнює сумі моментів сил системи відносно того самого центра.

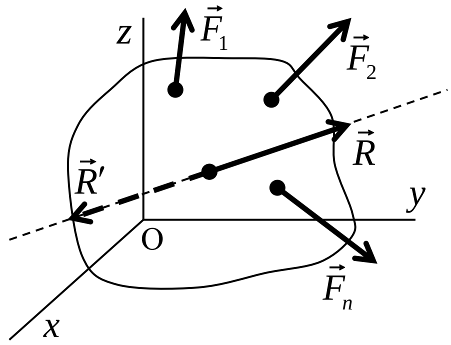


Рис. 2.24

Нехай довільна система сил $\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n$ має рівнодійну $\vec{R}$ (рис. 2.24). У точці з рівнодійною, прикладемо силу $\vec{R}' = -\vec{R}$. Тоді система сил $\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n$, $\vec{R}'$ буде перебувати в рівновазі і для неї повинна виконуватися умова $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right) + \vec{m}_O\left(\vec{R}'\right) = 0$, але враховуючи, що $\vec{R}' = -\vec{R}$ і обидві сили направлені вздовж однієї прямої, тобто $\vec{m}_O\left(\vec{R}'\right) = -\vec{m}_O\left(\vec{R}\right)$, отримаємо

$$\vec{m}_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right), \tag{2.3}$$

що й потрібно було довести.

Якщо рівність (2.3) спроектувати на яку-небудь вісь z, що проходить через центр O, отримаємо теорему Варіньона в проекції на вісь:

$$m_z\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_i\right).$$

Перейдемо до розгляду плоскої системи сил. Коли всі сили лежать в одній площині, їх моменти відносно довільного центра O, розташованого в тій самій площині, перпендикулярні до цієї площини, тобто всі направлені вздовж однієї прямої. Тоді можна обійтися без векторів, враховуючи тільки знак моменту, і розглядати момент сили $\vec{F}$ відносно центра O як алгебричну величину. Будемо цей момент називати алгебричним і позначати $m_O\left(\vec{F}\right)$.

Алгебричний момент сили $\vec{F}$ відносно центра O дорівнює взятому з відповідним знаком добутку модуля сили на її плече, тобто

$$m_O\left(\vec{F}\right) = \pm F\,h.$$

При цьому плюс відповідає повороту проти годинникової стрілки, мінус – за годинниковою стрілкою. Для пар сил будемо визначати алгебричний момент аналогічно:

$$m = \pm F\,h,$$

де F модуль однієї з сил, що утворюють пару; h – плече пари. Правило знаків зберігається.

Рівновагу довільної системи сил визначають рівності (2.2). Відповідно до плоскої системи сил, якщо осі в площині вибирати x та y, її можна переписати так:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,\; M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \qquad (2.4)$$

Формули (2.4) виражають аналітичні умови рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб суми проекцій всіх діючих сил на кожну з двох осей і сума їх алгебричних моментів дорівнювали нулю.

Сили тертя

У процесі руху одного тіла по поверхні іншого в площині зіткнення тіл виникає сила опору їх відносному ковзанню, яку називають силою тертя (ковзання).

Тертя обумовлене насамперед шорсткістю поверхонь, що створює опір переміщенню, і наявністю зчеплення притиснутих одне до одного тіл. Вивчення всіх особливостей явища тертя являє собою досить складну фізико-механічну проблему, розгляд якої виходить за рамки курсу теоретичної механіки. В інженерних розрахунках звичайно виходять із ряду встановлених дослідним шляхом закономірностей, які з достатньою для практики точністю відбивають основні особливості явища тертя. Ці закономірності, які називають законами тертя (ковзання) за умов спокою, можна сформулювати в такий спосіб.

1. У ході руху одного тіла по поверхні іншого в площині зіткнення тіл виникає сила тертя (або сила зчеплення), що може набувати будь-яких значень від нуля до граничної сили тертя.

Прикладена до тіла сила тертя напрямлена в бік, протилежний тому, куди діючі на тіло сили намагаються його зрушити.

2. Гранична сила тертя E_{TP} чисельно дорівнює добутку статичного коефіцієнта тертя f на нормальний тиск або нормальну реакцію N: $E_{TP} = f \cdot N$.

РОЗДІЛ 3

3.1. Кінематика

Кінематика точки

Кінематикою називають розділ механіки, у якому вивчають геометричні властивості руху тіл без урахування їх інертності (маси) та сил, що на них діють.

Механічний рух точки – це зміна положення точки в просторі з часом. Розглядатимемо класичну, ньютонівську кінематику, яка ґрунтується на абсолютному просторі і абсолютному часі.

Вважаємо, що простір є тривимірним і евклідовим, тобто кожна точка простору однозначно задана трьома числами-координатами (x_1,x_2,x_3) чи (x,y,z) точки. Евклідовість простору означає, що відстань між двома точками з координатами (x,y,z) і (x_2,y_2,z_2) задана числом

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Простір є однорідним та ізотропним і його властивості не залежать від тіл, що знаходяться в просторі, тому простір називають абсолютним.

Поняття часу пов’язане з характеризацією послідовності подій. Час у механіці вважають універсальним, тобто таким, що має місце однаково у всіх точках простору. Час – неперервнозмінна величина.

Систему координат, відносно якої вивчають рух, називають системою відліку.

Кінематично задати рух або закон руху тіла (точки) означає задати положення цього тіла (точки) відносно даної системи відліку в будь-який момент часу.

Основна мета кінематики: за законом руху даного тіла (точки), визначити всі кінематичні характеристики (наприклад, траєкторію точок, швидкість, прискорення та ін).

Способи задання руху точки

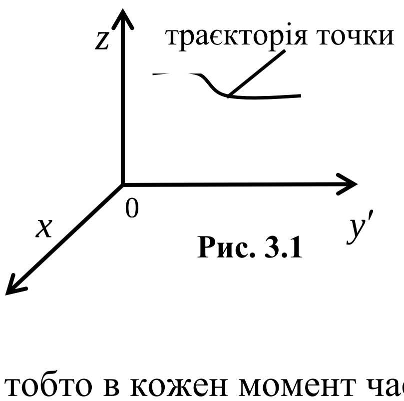


Рис. 3.1

Координатний спосіб

Найпростіший спосіб описати рух точки – це вказати, у якому положенні знаходиться точка в кожен момент часу. Положення точки визначають три координати. Візьмемо за систему відліку декартову систему координат *Oxyz*. Тоді рух точки вважається заданим, якщо задано функції

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t), \qquad (3.1)$$

тобто в кожен момент часу є відомі координати точки (рис. 3.1).

Рівняння (3.1) називають рівняннями руху точки в декартових прямокутних координатах. Рівняння (3.1) одночасно є рівняннями траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметра відіграє час t.

Векторний спосіб

Координатний спосіб задання руху пов'язаний з вибором певної системи координат; в іншій системі координат закон руху матиме інший вигляд. Тому для опису руху доцільно взяти математичний об'єкт, який не залежить від вибору системи координат. Такі об'єкти називають інваріантними. Зокрема, інваріантним об'єктом є вектор. У різних системах координат вектор має різні координати, але сам від вибору координат не залежить.

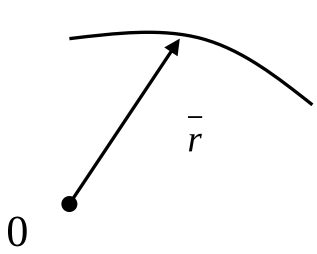


Рис. 3.2

Оберемо деяку точку 0 простору і побудуємо вектор $\bar{r}$, який починається у точці 0 і закінчується в тому місці, де перебуває точка в даний момент часу t (рис. 3.2).

Під час руху точки вектор $\bar{r}$ змінюється, тобто фактично $\bar{r}$ є вектор-функція $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Очевидно, радіус-вектор $\bar{r}(t)$ однозначно описує рух точки. Якщо ввести певну систему координат, отримуємо координати $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вектора $\bar{r}(t)$, від векторного способу легко перейти до координатного і навпаки.

Векторний спосіб більш зручний для встановлення загальних залежностей, бо дозволяє описати рух точки одним векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(t)$ замість трьох скалярних (3.1).

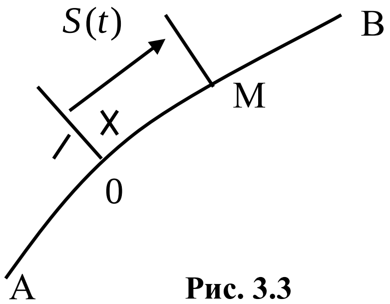


Рис. 3.3

Природний, або натуральний, спосіб

Нехай задано 1) траєкторію руху точки AB; 2) початок відліку 0 на траєкторії та вказано додатний ї від'ємний напрями відліку; 3) закон руху точки вздовж траєкторії у вигляді S=$f(t)$, де S – криволінійна координата точки на кривій (як довжина дуги). Підкреслимо, S – не пройдений шлях, а координата (рис. 3.3).

Вектор швидкості точки

Важливою характеристикою руху є темп, з яким змінюється положення точки в процесі руху. Введемо таку характеристику, як швидкість руху. Нехай положення точки в момент часу t визначає радіус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$, а в момент часу $t_1>t$ – радіус-вектор $\bar{r}(t_1)=\bar{r}_1$. Тоді вектор $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$ – вектор переміщення за проміжок часу $\Delta t=t_1-t$.

Середня швидкість за час Δt $\overline{V}_{сер} = \dfrac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$. $\overline{V}_{сер}$ напрямлений вздовж хорди $\overline{MM}_1$.

Миттєва швидкість точки в даний момент часу t – це $\overline{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \overline{r}}{\Delta t} = \left(\lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{сер} \right) = \dfrac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}}$.

Отже, швидкість – похідна від радіуса-вектора точки за часом.

У декартових координатах швидкість має такі компоненти:

$$\overline{V} = \left(\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t) \right) = (V_x, V_y, V_z).$$

Зауважимо, що вектор швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії.

Прискорення

Однією з вважливих кінематичних характеристик є прискорення, що описує зміну швидкість точки в часі.

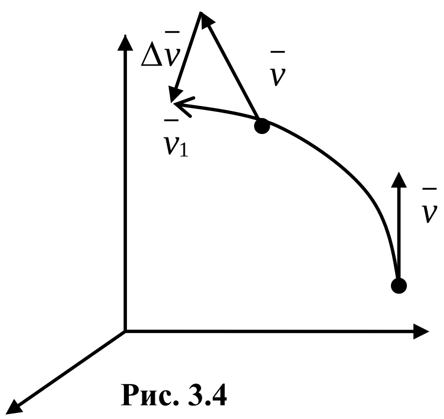


Рис. 3.4

Нехай $\overline{V}, \overline{V}_1$ – швидкість точок у моменти часу t і t_1 (рис. 3.4).

Середнє прискорення $\overline{a}_{сер} = \dfrac{\overline{V}_1 - \overline{V}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \overline{V}}{\Delta t}$.

Миттєве прискорення $\overline{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \dfrac{d\overline{V}}{dt} = \dfrac{d^2 \overline{r}}{dt^2} = \ddot{\overline{r}}$.

З рис. 3.4 видно, прискорення не напрямлено по дотичній до траєкторії на відміну від швидкості. У декартових координатах

$$\overline{a} = \left(\frac{dV_x}{dt}, \frac{dV_y}{dt}, \frac{dV_z}{dt} \right) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)),$$

$$V = \left| \overline{V} \right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \left| \overline{a} \right| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Натуральний триедр (тригранник) кривої

Застосування фіксованої системи координат, не пов'язаної з характером руху (траєкторією), не дає можливості осмислити структуру понять швидкості й особливо прискорення. Тому доцільно виводити характеристики руху у зв'язку з траєкторією руху.

Розглянемо деякі поняття диференціальної геометрії. Нехай $\overline{r} = \overline{r}(t)$ – рівняння деякої кривої в просторі (не обов'язково плоскої). Пов'яжемо з цією кривою три взаємноперпендикулярні одиничні вектори, які утворюють натуральний триедр кривої (тригранник Френе).

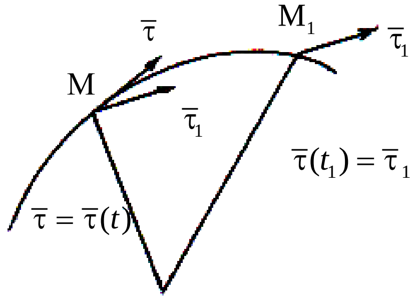


Рис. 3.5

Нехай $\bar\tau, \bar\tau_1$ – одиничні вектори дотичної до траєкторії в точках М і M_1 (рис. 3.5). Проведемо площину П, що проходить через вектор $\bar\tau$, паралельно вектору $\bar\tau_1$, для цього треба паралельно перенести вектор $\bar\tau_1$ у точку М і побудувати площину за двома векторами (у разі прямої таких площин буде безліч). Граничне положення цієї площини, якщо $M_1 \to M$, називають стичною площиною до кривої в точці М. У разі плоскої кривої стична площина збігається з площиною кривої, у якій лежить ця крива.

Площину, що проходить через точку М перпендикулярно до вектора дотичної $\bar\tau$, називають нормальною площиною кривої в точці М. Будь-який вектор, що лежить у нормальній площині, буде перпендикулярний $\bar\tau$ і називатиметься вектором нормалі. Одиничний вектор нормалі, що лежить у стичній площині, тобто вздовж лінії перетину стичної і нормальної площини, називають вектором головної нормалі або головною нормаллю кривої і позначають як $\bar n$.

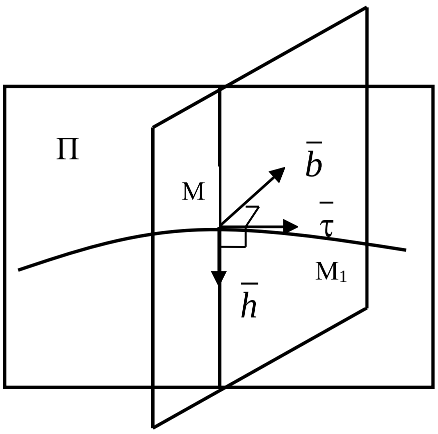


Рис. 3.6

Введемо вектор $\bar b = \bar\tau \times \bar n$. Очевидно вектор $\bar b$ – одиничний вектор, нормальний як до дотичної, так і до головної нормалі, його називають бінормаллю (другою нормаллю). Ці три вектори утворюють трійку взаємноперпендикулярних одиничних векторів (рис. 3.6), яку називають натуральним (природним) триедром або тригранником Френе. Тригранник Френе пов'язаний саме з кривою, переходячи від точки до точки, він змінює свою орієнтацію.

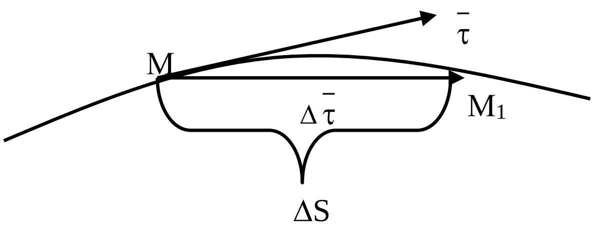


Рис. 3.7

Виразимо тепер одиничний вектор натурального триедра через радіус-вектор $\bar r = \bar r(S)$. Вектор $\Delta\bar r = \bar r_1 - \bar r$, $M_1 \to M$, має напрям дотичної до кривої $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta \bar r}{\Delta S} = \bar\tau$, тобто $\bar\tau = \dfrac{d\bar r}{ds}$ (рис.3.7).

Знайдемо одиничний вектор $\bar n$ головної нормалі.

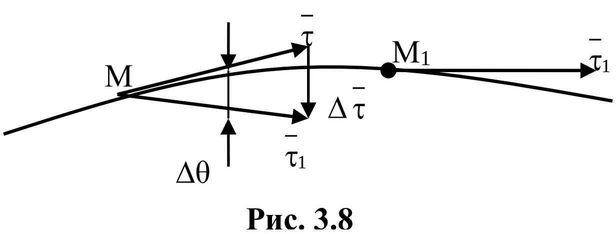


Рис. 3.8

Перенесемо вектор $\bar\tau_1$ у точку М і розглянемо рівнобедрений трикутник з бічними сторонами $|\bar\tau| = 1$ *і* $|\bar\tau_1| = 1$ і основою $\Delta\bar\tau$ (рис. 3.8).

Кут між векторами $\bar{\tau}$ *і* $\bar{\tau}_1$ $\Delta\theta$ називають кутом сумісності.

$$\left|\Delta\bar{\tau}\right| = 2\left|\bar{\tau}\right|\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2} \sim 2\cdot 1\cdot\frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta.$$

За умови, що $M_1 \to M$, маємо $\left|\Delta\bar{\tau}\right| \to \Delta\theta$. Очевидно також, що вектор $\Delta\bar{\tau}$, коли $M_1 \to M$, має напрямок вектора головної нормалі.

Тоді $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\left|\Delta\bar{\tau}\right|}{\Delta\theta} = \left|\bar{n}\right| = 1;\ \bar{n} = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta\theta} = \dfrac{d\bar{\tau}}{d\theta} = \dfrac{d\bar{\tau}}{ds}\cdot\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\bar{r}}{ds}\right)\cdot\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}\cdot\dfrac{1}{\frac{d\theta}{ds}}.$

Розглянемо величину $\dfrac{d\theta}{ds}$, яка вказує, як швидко змінюється кут сумісності зі зміною координати S. (Очевидно, для прямої лінії $\dfrac{d\theta}{ds} = 0$.) Цю величину називають кривиною кривої в точці M і позначають літерою $\bar{\bar{K}}$ (або æ), отже $\bar{n} = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \rho\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}$.

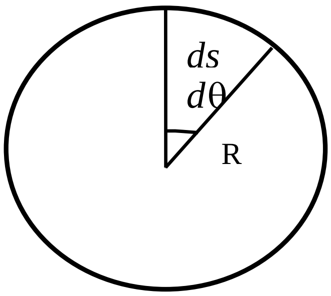


Рис. 3.9

Величину $\rho = \dfrac{1}{K}$ називають радіусом кривини кривої в точці M. Пояснимо сенс цього позначення. Нехай крива є коло радіусом R (рис. 3.9).

$ds = Rd\theta \Rightarrow R = \dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{1}{\frac{d\theta}{ds}} = \dfrac{1}{k} = \rho$, тобто в разі кола радіус кривини збігається з радіусом кола.

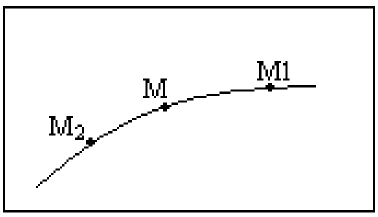


Рис. 3.10

Візьмемо на кривій точку M і дві близькі до неї точки M_1 і M_2 (рис. 3.10).

Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести лише одне коло. Граничне положення цього кола називають колом кривини кривої в даній точці. Очевидно, коло кривини лежить у стичній площині, а його радіус дорівнює радіусу кривини кривої в цій точці. Центр кола кривини називають центром кривини кривої в даній точці.

Отже, $\bar{n} = \rho\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \rho\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ і напрямлений до центра кривини (тобто у бік прогину кривої).

Нарешті, $\bar{b} = \bar{r}\times\bar{n} = \rho\left(\dfrac{d\bar{r}}{ds}\times\dfrac{d^r\bar{r}}{ds^2}\right).$

Розкладання векторів швидкості та прискорення за векторами натурального тригранника

Проекція вектора швидкості на дотичний вектор траєкторії руху точки:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau} = V\bar{\tau}.$$

Скалярну величину V називають величиною швидкості. Очевидно, $\left|\bar{V}\right| = \left|V\right|$.

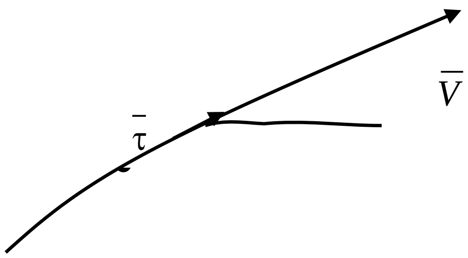


Рис. 3.11

Підкреслимо, що $V \neq \left|\bar{V}\right|$, бо можемо мати як додатний, так і від'ємний знак. Отже, вектор $\bar{\tau}$ визначає напрям швидкості, а V – величину швидкості: V>0, якщо точка рухається в напрямі зростання S, V<0, якщо точка рухається в напрямі спадання S (рис. 3.11).

Виразимо прискорення через вектори натурального тригранника:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\bar{r}) = \frac{dV}{dt}\bar{r} + V\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{r} + V\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left\{\bar{n} = \rho\frac{d\bar{\tau}}{ds} \Rightarrow \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho}; \frac{ds}{dt} = V\right\} =$$

$$= \frac{dV}{dt}\bar{r} + \frac{V^2}{\rho}\bar{n}, \text{ отже } a_\tau = \frac{dV}{dt};\ a_n = \frac{V^2}{\rho};\ a_b = 0.$$

Вектор прискорення лежить у стичній площині, де $\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\bar{\tau}$ – дотичне прискорення; $\bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\bar{n}$ – нормальне прискорення.

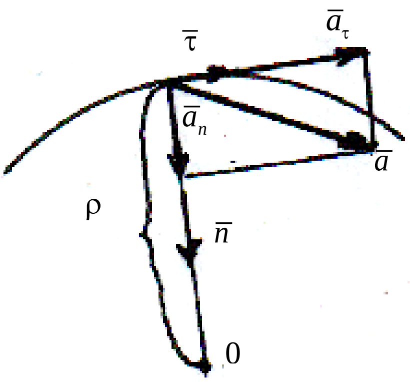


Рис. 3.12

Як і величина швидкості $\frac{dV}{dt}$ може мати знак і "+", і "–" залежно від того, зростає швидкість чи спадає.

$\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\bar{r}$, $\bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\bar{n}$, $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$, 0 – центр кривини, $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{\left|\bar{a}_\tau\right|^2 + \left|\bar{a}_n\right|^2}$ (рис. 3.12).

Величина дотичного прискорення вказує, як швидко змінюється величина швидкості, а значення нормального прискорення – як швидко змінюється напрямок вектора швидкості.

Як бачимо, у разі руху по криволінійній траєкторії прискорення ніколи не дорівнює нулю.

3.2. Кінематика твердого тіла

Поняття твердого тіла. Поступальний рух

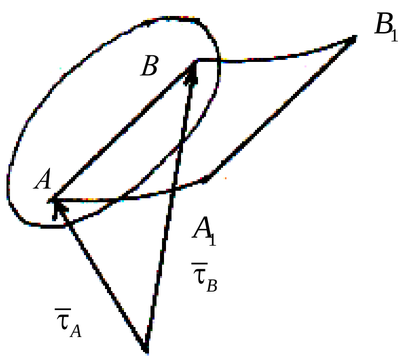


Рис. 3.13

Абсолютно твердим тілом називають тіло, для якого відстань між двома будь-якими точками залишається незмінною під час руху.

Поступальним називають такий рух твердого тіла, для якого будь-яка пряма, проведена в цьому тілі, після переміщення залишається паралельна сама собі, $\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1}$ (рис.3.13).

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB};$$

$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\left(\overline{AB}\right)}{dt};$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A, \text{ бо } \frac{d\left(\overline{AB}\right)}{dt} = 0,$$

оскільки $\overline{AB}$ незмінний за напрямом та величиною. Так само $\bar{a}_B = \bar{a}_A$ у будь-який момент часу.

Отже, у разі поступального руху швидкість і прискорення всіх точок тіла в певний момент часу однакові. Звідси випливає, що всі точки тіла описують однакові траєкторії (що збігаються під час накладання).

Можна говорити про швидкість і прискорення всього тіла у разі поступального руху.

Обертальний рух твердого тіла

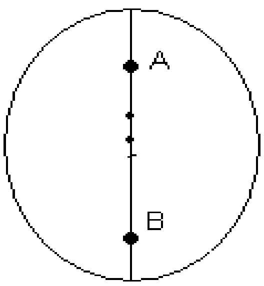


Рис. 3.14

Рух називають обертальним, якщо існують принаймні дві точки тіла або з ним пов'язані, які залишаються під час цього руху нерухомими. Проведемо через ці дві точки A та B пряму, яку називають віссю обертання (рис. 3.14). Очевидно, що всі точки осі обертання також будуть нерухомі.

Очевидно, довільна точка тіла в процесі обертального руху описує траєкторію у вигляді кола, яке лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання. Радіус цього кола дорівнює відстані даної точки до осі обертання h (рис. 3.15).

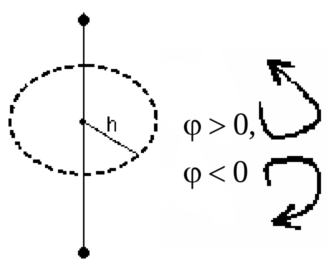


Рис. 3.15

Введемо характеристики обертального руху. Проведемо площину $П_0$, що проходить через вісь обертання. Площина П, яка також проходить через вісь обертання, жорстко пов'язана з тілом, так що в початковий момент площини П і $П_0$ збігаються.

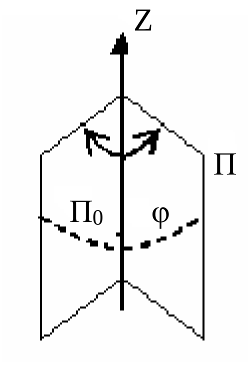


Рис. 3.16

Під час обертального руху площина П рухається разом з твердим тілом, утворюючи з площиною $П_0$ двогранний кут φ, який змінюється з часом: $\varphi=\varphi(t)$. Очевидно, знаючи залежність $\varphi=\varphi(t)$, можемо визначити положення будь-якої точки тіла в довільний момент часу (рис. 3.16).

Рівняння $\varphi=\varphi(t)$ відображає закон обертального руху твердого тіла.

Розглянемо кінематичні характеристики руху.

Кутовою швидкістю обертального руху називають скалярну величину $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$ (за аналогією з рухом точки), а кутове прискорення $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

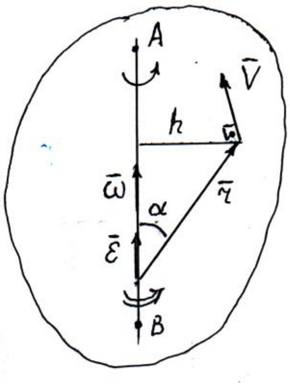


Рис. 3.17

Нехай h – відстань певної точки тіла, яка здійснює обертальний рух відносно осі обертання.

$$V=\frac{ds}{dt}=\left\{ds=hd\varphi\right\}=h\frac{d\omega}{dt}=\omega h;\ \ \overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{r}\ \text{(рис. 3.17)}.$$

Як вже вказано, прискорення точки складається з нормального та дотичного:

$$a_n=\frac{V^2}{\rho};\ a_\tau=\frac{dV}{dt}.$$

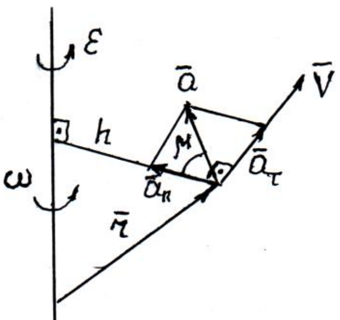


Рис. 3.18

У нашому випадку

$$\rho=h,\ a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega h)=\frac{d\omega}{dt}\cdot h=\varepsilon\cdot h;\ a_n=\frac{(\omega h)^2}{h}=\omega^2 h.$$

Отже, під час обертального руху дотичне прискорення напрямлене вздовж дотичної до кола радіусом h і чисельно дорівнює $a_\tau=\varepsilon h$.

Нормальне прискорення напрямлено до осі обертання і чисельно дорівнює $a_n=\omega^2 h$.

Повне прискорення $a=\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\cdot h;\ tg\mu=\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ (рис. 3.18).

Плоскопаралельний рух

Рух називають плоскопаралельним, якщо існує така нерухома площина, що всі точки тіла рухаються паралельно цій площині.

Розглянемо плоскопаралельний рух як рух однієї площини плоскої фігури (перерізу S) відносно іншої, нерухомої, тобто розглянемо тіло як плоску фігуру(переріз S). Положення рухомої площини S визначає відрізок АВ. А – полюс (рис. 3.19).

Рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла має такий вигляд:

$$\left\{\begin{array}{l} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{array}\right].$$

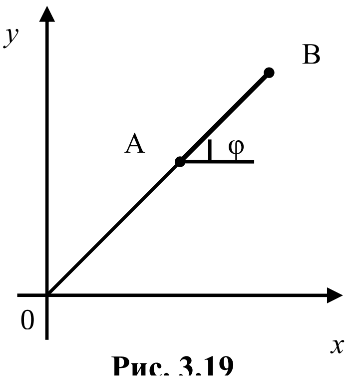


Рис. 3.19

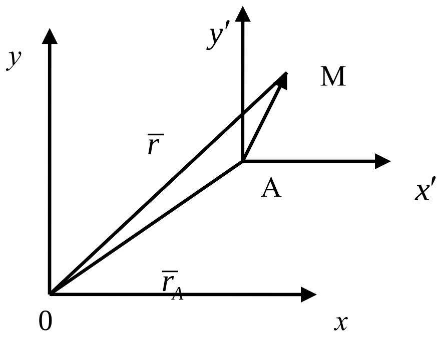


Рис. 3.20

Швидкість точок за плоскопаралельного руху (рис. 3.20) одержимо так:

$$\bar r_M = \bar r_A + \overline{AM};$$

$$\bar V_M = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{d\bar r_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\overline{AM}) = \bar V_A + \bar V_{MA};$$

$$V_{MA} = \omega \cdot AM\,(\bar V_{MA} \perp AM);$$

$$\bar V_{MA} = \overline{AM} \times \bar\omega\,,$$

де $\bar V_A$ – швидкість полюса; $\bar V_{MA}$ – швидкість обертального руху навколо полюса А.

Теорема про проекцію швидкостей точок твердого тіла на пряму:

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta \text{ (рис. 3.21).}$$

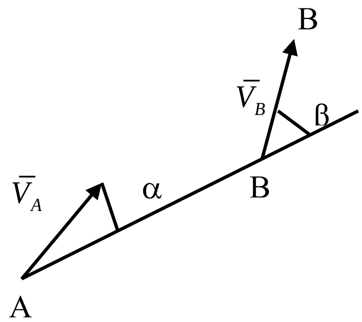


Рис. 3.21

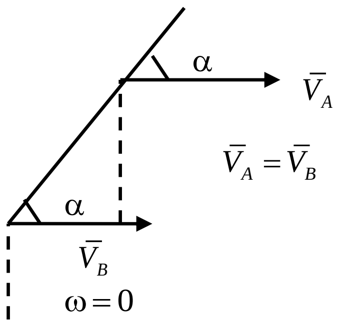


Рис. 3.22

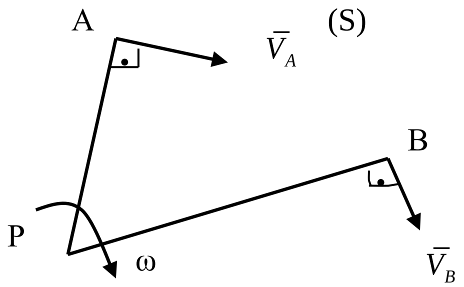


Рис. 3.23

Миттєвий центр швидкостей – точка перетину Р, швидкість якої дорівнює нулю (рис. 3.22).

$$V_A = \omega \cdot PA(\bar V_A \perp \bar PA);$$

$$\bar V_B = \omega \cdot PB(V_B \perp \bar PB);$$

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}.$$

Швидкості точок тіла пропорційні їх відстаням до миттєвого центра швидкості.

Випадок поступального руху проілюстровано на рис. 3.23.

Прискорення точок в умовах плоскопаралельного руху тіла

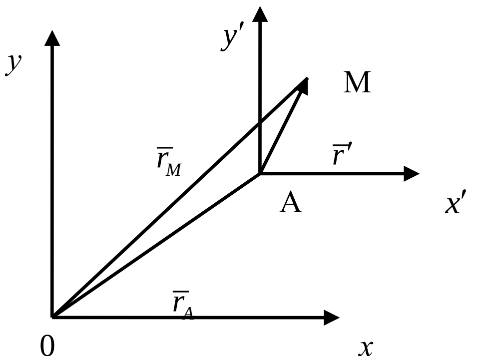


Рис. 3.24

З рис. 3.24 маємо:

$$\bar r_M = \bar r_A + \bar r',$$

$$\bar a_M = \frac{d^2 \bar r}{dt^2} = \frac{d^2 \bar r_A}{dt^2} + \frac{d^2 \bar r'}{dt^2},$$

де $\dfrac{d^2 \bar r_A}{dt^2} = \bar a_A$ – прискорення полюса;

$\dfrac{d^2 \bar r}{dt^2} = \bar a_{MA}$ – прискорення точки М за її обертання разом з тілом навколо полюса А; отже, $\bar a_M = \bar a_A + \bar a_{MA}$.

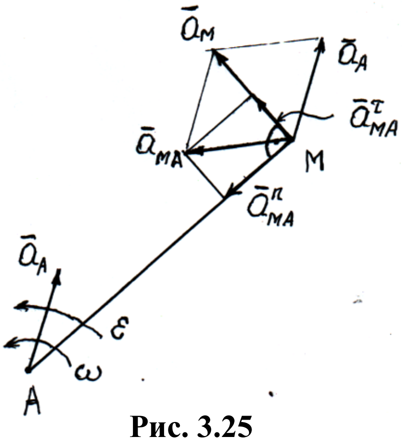


Рис. 3.25

Зручніше $\bar a_{MA}$ замінити його складниками: $\bar a_M^\tau = AM \cdot \varepsilon; \bar a_{MA}^n = AM \cdot \omega^2$ – дотична і нормальна; $\bar a_{MA}^\varepsilon \perp AM$ – у бік обертання, якщо воно прискорене, і проти – якщо уповільнене; $\bar a_{MA}^n$ – завжди від точки М до полюса А.

Отже, $\bar a_M = \bar a_A + \bar a_{MA}^\tau + \bar a_{MA}^n$ (рис. 3.25).

Якщо полюс рухається не прямолінійно, то його прискорення буде також складатися з дотичного та нормального, тоді

$$\bar a_M = \bar a_{A\tau} + \bar a_{An} + \bar a_{MA}^\tau + \bar a_{MA}^n.$$

3.3. Складений рух точки

Відносний, переносний та абсолютний рух

Досі вивчали рух точки або тіла відносно однієї заданої системи відліку. Але в деяких випадках у процесі розв’язання задач механіки більш доцільно (а іноді й необхідно) розглядати рух точки (або тіла) одночасно відносно двох систем відліку, з яких одну вважають умовно нерухомою, а друга відповідним чином рухається відносно першої. Рух, який здійснює при цьому точка (або тіло), називають складеним. Наприклад, куля, що котиться по палубі пароплава, який пливе, здійснює щодо берега складний рух: відносно палуби (рухома система відліку) та разом з палубою відносно берега (нерухома система відліку). Таким чином, складений рух кулі можна розкласти на два більш прості, які легко дослідити.

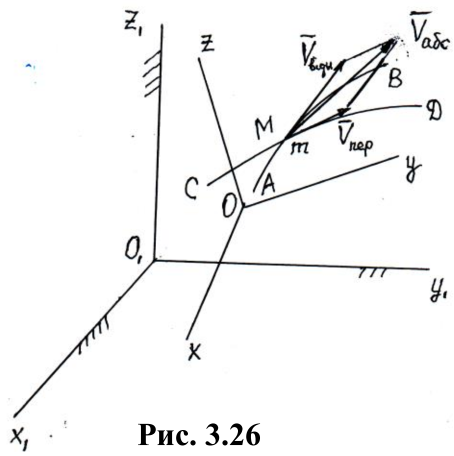


Рис. 3.26

Розглянемо складений рух точки М, що переміщується відносно рухомої системи відліку, яка, у свою чергу, рухається відносно іншої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (умовно назвемо її нерухомою). Кожна з цих систем відліку пов'язана з певним тілом (рис. 3.26).

Введемо деякі означення.

Рух, який здійснює точка М відносно рухомих осей координат, називають відносним (такий рух буде бачити спостерігач, який пов'язаний з рухомими осями $Oxyz$ та переміщається разом з ними). Траєкторію АВ, по якій рухається точка у відносному русі, називають відносною траєкторією. Швидкість руху точки М відносно осей $Oxyz$ (тобто вздовж цієї кривої АВ) називають відносною швидкістю ($\bar V_{відн}$), а прискорення точки в цьому русі – відносним прискоренням ($\bar a_{відн}$). З означення випливає, що під час обчислення $\bar V_{відн}$ та $\bar a_{відн}$ осі $Oxyz$ можна вважати нерухомими.

Рух, який здійснює рухома система відліку $Oxyz$ і всі незмінно пов'язані з нею точки простору відносно нерухомої системи $O_1x_1y_1z_1$, називають для точки М переносним.

Швидкість тієї незмінно пов'язаної з рухомою системою $Oxyz$ точки m, з якою в даний момент збігається М, що рухається, називають переносною швидкістю ($\bar V_{пер}$) точки М у цей момент, а прискорення даної точки – переносним прискоренням ($\bar a_{пер}$). Таким чином, $\bar V_{пер} = \bar V_m$, $\bar a_{пер} = \bar a_m$, де m – нерухома відносно системи відліку $Oxyz$ точка, з якою в даний момент збігається точка М, що рухається.

Рух, відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ називають абсолютним або складеним. Траєкторію СД цього руху називають абсолютною траєкторією, швидкість – абсолютною швидкістю ($\bar V_{абс}$), а прискорення – абсолютним прискоренням ($\bar a_{абс}$).

Додавання швидкостей та прискорень точки за умов складеного руху

$$\bar V_{абс} = \bar V_{відн} + \bar V_{пер}.$$

Вектори $\bar V_{абс}, \bar V_{відн}, \bar V_{пер}$ напрямлені по дотичним до відповідних траєкторій.

Таким чином, за складеного руху абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі відносної та переносної швидкостей.

Якщо кут між напрямами векторів $\bar V_{відн}$ та $\bar V_{пер}$ дорівнює α, то за модулем

$$V_{абс} = \sqrt{V_{відн}^2 + V_{пер}^2 + 2V_{відн} \cdot V_{пер} \cos\alpha}.$$

У ході поступального руху рухомої системи абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного та переносного прискорень:

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{відн} + \bar{a}_{пер}.$$

В умовах непоступального руху рухомої системи $\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{відн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$, де $\bar{a}_{відн}, \bar{a}_{пер}$ – відповідно відносне та переносне прискорення, а $\bar{a}_{кор}$ – коріолісове, або поворотне, прискорення, яке характеризує зміну вектора відносної швидкості $\bar{V}_{відн}$ у переносному русі й вектора $\bar{V}_{пер}$ у відносному русі.

Обчислюючи $\bar{a}_{відн}$, рух рухомих осей враховувати не треба, тому $\bar{a}_{відн}$ визначають звичайними методами кінематики точки. Обчислюючи $\bar{a}_{пер}$, не треба враховувати відносний рух точки, отже, $\bar{a}_{пер}$ визначають як прискорення точки деякого твердого тіла, незмінно пов'язаного з осями *Oxyz* і яке рухається разом з ними, тобто методами кінематики твердого тіла. Коріолісове прискорення обчислюють за формулою $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{відн})$, де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість переносного руху.

Якщо кут між векторами $\bar{V}_{відн}$ та $\bar{\omega}$ позначити α, то за модулем

$$\left|\bar{a}_{кор}\right| = 2\left|\bar{\omega} \times \bar{V}_{відн}\right| \cdot \sin\alpha.$$

Напрямлений вектор $\bar{a}_{кор}$, як вектор $\bar{\omega} \times \bar{V}_{відн}$.

З останньої формули видно, що коріолісове прискорення може обертатися на 0 в таких випадках:

1) коли ω=0, тобто переносний рух є поступальний або кутова швидкість переносного обертання в даний момент обертається на 0;

2) коли $\bar{V}_{відн} = 0$, тобто коли відносна швидкість у даний момент часу обертається на 0;

3) коли α=0 або α=180^0, тобто коли відносний рух відбувається по напряму, паралельному осі переносного обертання, або якщо в даний момент часу вектор $\bar{V}_{відн}$ паралельний цій осі.

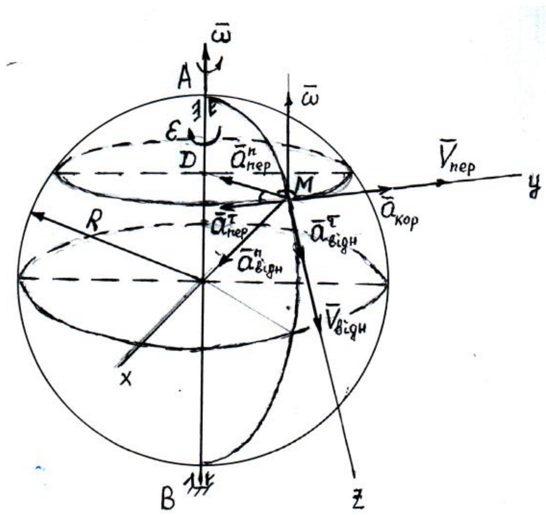


Рис. 3.27

Приклад. Розглянемо в загальному вигляді, як обчислюють $\bar{a}_{абс}$, якщо переносний рух є обертанням навколо деякої нерухомої осі.

Нехай точка M рухається прискорено по деякій кривій AMB вздовж тіла, що уповільнено обертається навколо осі BA (рис. 3.27).

Щоб знайти абсолютне прискорення точки в деякий момент часу t_1, треба знати:

– положення точки, що рухається, на кривій АВ;

– відносну швидкість точки $\overline{V}_{відн}$;

– кутову швидкість ω і кутове прискорення ε тіла (тобто ω та ε переносного руху). Якщо ці величини не задано, їх спочатку треба знайти з умов задачі.

Після цього треба показати положення рухомої точки в момент t_1 та відмітити на рисунку вектори $\overline{V}_{відн}$ і $\overline{\omega}$.

1) Визначаємо $\overline{a}_{відн}$. Подумки зупиняємо обертання тіла і обчислюємо прискорення точки під час її руху вздовж АВ за формулами кінематики точки. Якщо криву задано, то $a_{відн} = \dfrac{dV_{відн}}{dt}$; $a^n_{відн} = \dfrac{V^2_{відн}}{\rho_{відн}}$, де $\rho_{відн}$ – радіус кривини кривої АВ в точці М. (Якщо відносний рух задано координатним методом, то $\overline{V}_{відн}$ і $\overline{a}_{відн}$ – за відповідними формулами). $\rho_{відн}$=R.

2) Визначаємо $a_{пер}$. Обчислюємо прискорення тієї точки тіла, з якою в даний момент збігається точка М; за формулами кінематики твердого тіла $\overline{a}^{\tau}_{пер} = \varepsilon h,\ \overline{a}^{n}_{пер} = \omega^2 h,\ (h = MD)$.

3) $\overline{a}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{V}_{відн})$.

4) Визначаємо $\overline{a}_{абс}$. Зображуємо всі обчислені вектори на рисунку з урахуванням їх напрямів та знаходимо $\overline{a}_{кор} = \overline{a}^{\tau}_{відн} + \overline{a}^{n}_{відн} + \overline{a}^{\tau}_{пер} + \overline{a}^{n}_{пер} + \overline{a}_{кор}$.

Якщо суму векторів справа важко знайти геометрично, то проводячи будь-які осі координат Мxyz, обчислюємо проекції всіх векторів на цій осі:

$$a_{абсx} = \sum a_{ix},\ a_{абсy} = \sum a_{iy},\ a_{абсz} = \sum a_{iz},\ \text{тоді}\ a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсx} + a^2_{абсy} + a^2_{абсz}}\ .$$

Зауваження: під час обчислення $a_{абс}$ не можна визначати $a_{абс} = \sqrt{a^2_{відн} + a^2_{пер} + a^2_{кор}}$, бо в загальному випадку вектори $\overline{a}_{відн}, \overline{a}_{пер}, \overline{a}_{кор}$ – не взаємно перпендикулярні.

РОЗДІЛ 4

4.1. Динаміка точки

Основні поняття та означення

Динаміка – розділ механіки, у якому вивчають закони матеріальних тіл під дією сил.

Рух тіл під суто геометричним кутом зору розглянуто в кінематиці. У динаміці на відміну від кінематики в ході дослідження руху тіл беруть до уваги як діючі сили, так і інертність самих матеріальних тіл.

Разом зі сталими силами (наприклад, сила ваги) на рухоме тіло діють звичайно змінні сили, модулі й напрями яких під час руху змінюються. Причому змінними можуть бути і задані (активні) сили, і реакції в'язів.

Як показує досвід, змінні сили можуть залежати від часу, положення тіла та його швидкості.

Інертність – властивість матеріальних тіл швидше або повільніше змінювати швидкість свого руху, ніж під дією прикладених сил.

Кількісна міра інертності певного тіла є фізична величина, яку називають масою тіла. У механіці масу тіла розглядають як величину скалярну, додатну та постійну для кожного тіла.

Щоб за первісного вивчення динаміки не враховувати вплив форми тіл (розподіл мас), вводяться поняття про матеріальну точку.

Матеріальною точкою називають матеріальне тіло (тіло, що має масу), розмірами якого в ході вивчення його руху можна нехтувати. Практично тіло можна розглядати як матеріальну точку тоді, коли відстані, що проходять точки тіла, дуже великі порівняно з розмірами самого тіла. Наприклад: планети під час руху навколо Сонця; артилерійський снаряд.

Крім того, тіло під час поступального руху завжди можна розглядати як матеріальну точку з масою, що дорівнює масі всього тіла.

Закони динаміки

В основі динаміки лежать закони, встановлені шляхом узагальнення результатів цілого ряду експериментів та спостережень руху тіл, перевірених практикою людства (уперше сформульовані в роботі "Математичні основи натуральної філософії", І.Ньютон, 1687р.).

І закон (закон інерції) (відкрив Г.Галілей у 1638 р.)

Ізольована від зовнішніх дій матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, доки прикладені сили не змусять її змінити цей стан. Рух точки за відсутності сил називають рухом по інерції. Систему відліку, щодо якої виконується закон інерції, називають інерціальною.

За даними експериментів Сонячна система – інерціальна система: центр – Сонце, осі напрямлені на так звані нерухомі зірки. Для технічних задач достатньо: система жорстко пов'язана із Землею.

ІІ закон (основний закон динаміки)

Добуток маси точки та прискорення, якого вона набуває під впливом даної сили, дорівнює за модулем цій силі, а напрям прискорення збігається з напрямом сили.

Математично-векторна рівність

$$m\overline{a} = \overline{F} . \qquad (4.1)$$

Для модулів $\overline{F}$ $ma\overline{a} : ma = F$

$(\overline{F}, \overline{a},$ – у одному напрямі). (4.2)

ІІ закон динаміки, як і І, має місце тільки в інерціальній системі відліку.

Якщо на точку діє одночасно декілька сил, то вони, як відомо, будуть еквівалентні рівнодійний $\overline{R}$, що дорівнює геометричній сумі цих сил. Тоді рівняння (4.1) набуває вигляду

$$m\overline{a} = \overline{R} \text{ або } m\overline{a} = \sum \overline{F}_k . \qquad (4.3)$$

Поблизу земної поверхні, як відомо,

$$\overline{P} = m\overline{g} , \qquad (4.4)$$

де $\overline{P}$ – сила ваги; а $\overline{g}$ – прискорення сили ваги або прискорення вільного падіння, тоді

$$m = \frac{P}{g}, \qquad (4.5)$$

тобто (4.4) та (4.5) пов'язують силу ваги та масу.

Р та g змінюються залежно від широти та висоти над рівнем моря, m для даного тіла (матеріальної точки) – незмінна величина.

ІІІ закон (рівності дії та протидії)

Дві матеріальні точки діють одна на одну із силами, рівними за модулем і напрямленими вздовж прямої, що сполучає ці точки, в протилежні сторони.

Зауважимо, що сили взаємодії між вільними матеріальними точками (або тілами) як такі, що прикладені до різних об'єктів, не утворюють врівноваженої системи сил.

У міжнародній системі одиниць (SI) основні одиниці вимірювання механічних одиниць є метр (м), кілограм маси (кг) та секунда (с). Одиниця сили 1 ньютон (н): $1н = 1\frac{кг \cdot м}{c^2}$. У системі МкГС – метр (м), кілограм сили (кГ) та секунда (с), одиниця маси – $1\frac{кГ \cdot c^2}{м}$.

Основні задачі динаміки матеріальної точки

Для вільної матеріальної точки

Перша задача динаміки: за законом руху точки визначити діючу на неї силу.

Друга (основна задача): за силою, що діє на точку, визначити закон руху точки.

Ці задачі розв’язують з допомогою рівнянь (4.1) або (4.3), або $\overline{a}\sim\overline{F}$.

Якщо під час руху на точку накладені в’язі, то вона змушена рухатися по заданій нерухомій поверхні або кривій. У цьому випадку застосовують аксіому в’язів, тобто точку розглядають як вільну, відкинувши в’язь та замінивши її дію реакцією цієї в’язі $\overline{N}$. Тому маємо основний закон динаміки у вигляді

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k^a + \overline{N}, \qquad (4.6)$$

де $\overline{F}_k^a$ – діючі на точку активні сили. В цьому випадку:

1) перша задача динаміки: за законом руху і діючими активними силами, визначити реакцію в’язі;

2) друга (основна) задача динаміки розкладається на дві: за діючими на точку активними силами визначити: а) закон руху точки; б) реакцію накладеної в’язі.

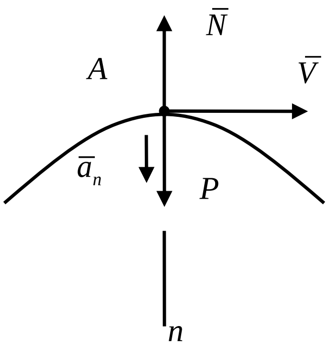


Рис. 4.1

Приклад. Радіус закруглення в точці А моста дорівнює R (рис. 4.1). Знайти, з якою силою на міст тисне в точці А автомобіль масою *m*, що рухається із швидкістю *v*.

Розв’язання.

$a_n = \dfrac{V^2}{R}$, $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$ – реакція.

Рівняння (4.6) у проекції на нормаль $\dfrac{V^2}{R} = mg - N$; $N = m\left(g - \dfrac{V^2}{R}\right)$; тиск на міст за модулем дорівнює *N*, але напрямлений вниз.

Перша задача динаміки розв’язується досить просто, причому, якщо прискорення рухомої точки безпосередньо не задано, то його обчислення зводиться до суто кінематичних розрахунків. Тому важливішим у динаміці є розв’язання другої задачі, яка і є основною.

4.2. Диференціальні рівняння руху точки та їх інтегрування

Прямолінійних рух точки

Із кінематики відомо, що під час прямолінійного руху швидкість та прискорення точки весь час напрямлені вздовж однієї прямої. Оскільки напрям прискорення збігається з напрямом дії сили, вільна матеріальна точка буде рухатися тоді, коли діюча на неї сила матиме постійний напрям, а швидкість точки в початковий момент дорівнюватиме нулю або буде напрямлена вздовж сили.

Розглянемо матеріальну точку, що рухається прямолінійно під дією прикладеної до неї сили $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$.

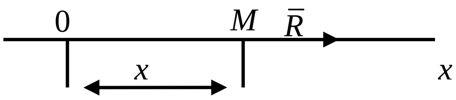


Рис. 4.2

Положення точки на траєкторії визначене її координатою *x* (рис. 4.2).

Основна задача динаміки в цьому випадку: знаючи $\overline{R}$, знайти закон руху точки, тобто $x = f(t)$.

Зв’язок між x та R дає рівняння $m\overline{a} = \overline{R}$.

Проектуючи його на вісь $0x$, одержимо $ma_x = R_x \equiv \sum F_{kx}$ або, враховуючи, що $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}, V_x = \dfrac{dx}{dt}$, маємо

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx};\ m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}\ , \tag{4.7}$$

тобто диференціальне рівняння прямолінійного руху точки.

Коли треба шукати залежність швидкості від координати x, а не від часу t (або коли самі сили залежать від x), останнє рівняння (бо $\dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{dV_x}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dV_x}{dx}\cdot V_x$) набуває вигляду

$$mV_x\frac{dV_x}{dx} = \sum F_{kx}\,. \tag{4.8}$$

Розв’язування основної задачі динаміки зводиться до знаходження закону руху тіла $x=f(t)$ шляхом інтегрування відповідних диференціальних рівнянь. В іншому випадку треба проінтегрувати диференціальні рівняння 2-го порядку типу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{4.9}$$

за заданих початкових умов (задачі Коші).

Загальний розв’язок $x=f(t, C_1, C_2)$; C_i – визначено з початкових умов.

Розв’язування задач динаміки точки

1. Складання диференціального рівняння руху:

а) вибрати початок відліку (як правило, це початкове положення точки або стан рівноваги), провести координатну вісь вздовж лінії руху в бік переміщення;

б) зобразити рухому точку в довільному стані так, щоб $x>0$ і $V_x>0$ (це важливо, коли $F=F(V)$), показати всі діючі на точку сили;

в) підрахувати суму проекцій всіх сил на вісь $0x$, підставити цю суму в праву частину диференціального рівняння руху. При цьому треба обов’язково всі змінні сили виразити через ті величини (t,x або V), від яких ці сили залежать.

2. Інтегрування диференціального рівняння руху. Здійснюють методами, відомими з курсу вищої математики, які залежать від виду одержаного рівняння, тобто від виду правої частини рівняння (4.9). Коли на точку крім постійних сил діє одна змінна сила, що залежить тільки від t або тільки від x, або тільки від V, то рівняння прямолінійного руху можна проінтегрувати методом відокремлення змінних. Якщо при цьому треба визначити тільки V, то часто можна обмежитися інтегруванням одного з рівнянь (4.7) або (4.8).

3. Визначення сталих інтегрування. За даними задачі встановити початкові умови ($t=0$ $x=x_0$, $V_x=V_0$) для прямолінійного руху та знайти сталі інтегрування. При цьому сталі можна визначати безпосередньо після кожного інтегрування.

Якщо диференціальне рівняння руху є рівнянням з відокремлюваними змінними, то замість введення сталих інтегрування можна брати одразу від обох частин рівності визначені інтеграли у відповідних межах (приклад далі).

4. Знаходження шуканих у задачі величин і дослідження одержаних результатів. Щоб мати можливість дослідити розв’язок, а також здійснити посередню перевірку результату підрахунком розмірностей, весь процес розв’язування повинен мати загальний вигляд (у літерах), підставляти числові дані можна тільки остаточні результати.

Наведені загальні вказівки можна застосовувати і до випадку криволінійного руху.

Розглянемо конкретну задачу, у якій сила окремо залежить від *t*.

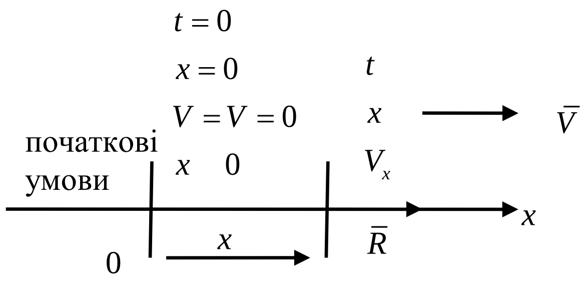


Рис. 4.3

Приклад. Вантаж вагою P починає рухатись із стану спокою вздовж гладкої горизонтальної площини під дією R ($R=rt$ – пропорціонально t). r=const (рис. 4.3).

Знайти закон руху точки.

Розв’язання

У проекції на $0x$ диференціального рівняння руху

$$m\frac{dV_x}{dt}=R_x,\ \frac{P}{g}\cdot\frac{dV_x}{dt}=rt;$$

$$\int\limits_{V_0=0}^{V_x} dV_x=\int\limits_0^t\frac{rg}{P}t\,dt;\ V_x\Big|_0^{V_x}=\frac{rg}{P}\frac{t^2}{2}\Big|_0^t;\ V_x=\frac{rg}{2P}t^2;\ \frac{dx}{dt}=\frac{rg}{2P}t^2;\ \int\limits_0^t\frac{rg}{2P}t^2dt=\int\limits_0^x dx;$$

$$x=\frac{rg}{2P}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^t;\ x=\frac{rgt^3}{6P}-\text{закон руху.}$$

Криволінійний рух точки

Розглянемо вільну матеріальну точку, яка рухається під дією сил $\bar{F}_1,\bar{F}_2,...,\bar{F}_n$. Проведемо нерухомі координатні осі *x,y,z*. Спроектуємо рівняння $m\bar{a}=\sum\bar{F}_k$ на осі, одержимо диференціальні рівняння криволінійного руху точки в проекціях на осі ПДСК:

$$m=\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{kx};\ m=\frac{d^2y}{dt^2}=\sum F_{ky};\ m=\frac{d^2z}{dt^2}=\sum F_{kz}\quad . \tag{4.10}$$

Діючі сили можуть залежати від часу, положення точки та швидкості. Рівняння (4.10) дозволяють розв’язувати як першу, так і другу (основну) задачі динаміки. Для розв’язання другої задачі треба знати ще початкові умови: якщо t=0,

$$x=x_0;\ y=y_0;\ z=z_0;$$

$$V_x=V_{x0};V_y=V_{y0};V_z=V_{z0}.$$

У результаті інтегрування (4.10) маємо 6 сталих інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Загальні теореми динаміки точки

Загальні теореми динаміки точки є наслідком основного закону динаміки. Вони встановлюють залежності між основними динамічними характеристиками та дозволяють запобігати операції інтегрування.

Основні динамічні характеристики руху точки – кількість руху та кінетична енергія.

Кількість руху – векторна величина $m\overline{V}$, що дорівнює добутку маси на швидкість точки (напрямлена, як і $\overline{V}$, по дотичній до траєкторії).

Кінетична енергія точки – скалярна величина $\dfrac{mV^2}{2}$.

Імпульс $\overline{S}$ будь-якої сили $\overline{F}$ за скінченний проміжок часу t_1 – векторна величина, яку обчислюють так: $\overline{S}=\int_0^{t_1}\overline{F}dt;\ S_x=\int_0^{t_1}F_x dt;\ S_y=\int_0^{t_1}F_y dt;\ S_z=\int_0^{t_1}F_z dt$ (для сталих сил і залежних від t).

Теорема про зміну кількості руху точки. m=const, тому основний закон динаміки $\dfrac{d(m\overline{V})}{dt}=\sum\overline{F}_k$ (диференціальна форма), $\overline{R}=\sum\overline{F}_k$. Проінтегруємо рівняння: $\int_{\overline{V}_0}^{\overline{V}}d(m\overline{V})=\sum\int_{t_0}^{t_1}\overline{F}_k dt$ або $m\overline{V}_1-m\overline{V}_0=\sum\overline{S}_k$ (інтегральна, або скінченна форма).

У проекціях на осі $\begin{cases} mV_{1x}-mV_{0x}=\sum S_{kx} \\ mV_{1y}-mV_{0y}=\sum S_{ky} \\ mV_{1z}-mV_{0z}=\sum S_{kz} \end{cases}$.

Для прямолінійного руху вздовж $0x$ – застосовують тільки рівняння $mV_{1x}-mV_{0x}=\sum S_{kx}$.

Із курсу математичного аналізу відомо: робота сили $\overline{F}\left\{F_x,F_y,F_z\right\}$ на скінченному переміщенні M_0M_1 – криволінійний інтеграл:

$A_{M_0M_1}=\int_{M_0}^{M_1}\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right)$ або $A_{M_0M_1}=\int_{M_0}^{M_1}F_\tau ds$ (для сталих сил та залежних від координат), де F_τ – дотична проекція; ds – елементарне переміщення.

Теорема про зміну кінематичної енергії точки. Проектуємо $m\overline{a}=\sum\overline{F}_k$ на дотичну до траєкторії:

$$ma_\tau=\sum\overline{F}_{k\tau};\quad a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}V\Rightarrow mV\frac{dV}{ds}=\sum F_{k\tau};\ m\int_{V_0}^{V_1}VdV=\sum F_{k\tau}ds;$$

$\dfrac{mV_1^2}{2}-\dfrac{mV_0^2}{2}=\sum A_{M_0M_1}$ – інтегральна форма теореми, тобто зміна кінематичної енергії точки за деякого її переміщення дорівнює алгебричній сумі робіт всіх діючих на точку сил на тому ж переміщенні.

Теорема про зміну моменту кількості руху точки (теорема моментів).

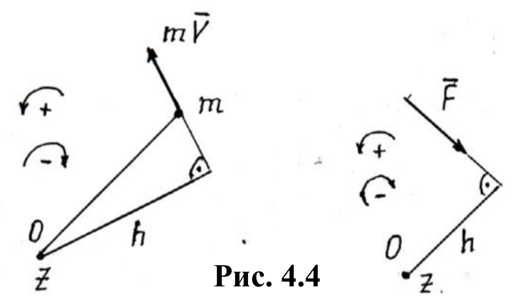


Рис. 4.4

Теорема моментів відносно осі: $\frac{d}{dt}\left[m_z(m\overline{V})\right] = m_z(\overline{F})$.

Теорема моментів відносно центра:

$$(\overline{m}_0(m\overline{V}) = \overline{r} \times m\overline{V}) \qquad \frac{d}{dt}\left[m_0(m\overline{V})\right] = m_0(\overline{F})$$

$(m_0\left|\overline{F}\right| = \overline{r} \times \overline{F})(\overline{r} -$радіус-вектор рухомої точки) або $\frac{d}{dt}(\overline{r} \times m\overline{V}\right| = \overline{r} \times \overline{V}$.

Необхідні величини обчислюють згідно рис. 4.4.

4.3. Динаміка системи і твердого тіла

Механічна система. Сили зовнішні та внутрішні

Механічною системою матеріальних точок або тіл називають таку їх сукупність, у якій положення або рух кожної точки (або тіла) залежить від положення і руху всіх інших. Матеріальне тіло ми також будемо розглядати як систему матеріальних частинок (точок), що утворюють це тіло.

Сукупність тіл, між якими нема жодних сил взаємодії (наприклад, група літаків, що летять у повітрі) механічну систему не утворюють.

Далі будемо розглядати тільки механічні системи тіл та називати їх просто системами.

Сили, що діють на точки або тіла системи, можна поділити на внутрішні та зовнішні.

Зовнішніми називають сили, що діють на точки системи з боку точок або тіл, які не входять до складу даної системи. Внутрішніми називають сили, що діють на точки системи з боку інших точок або тіл цієї ж системи $(\overline{F}^{зовн}, \overline{F}^{вн})$.

У зовнішні, і внутрішні сили можуть бути як активними, так і реакціями в'язів. Розподіл сил на зовнішні та внутрішні є умовний і залежить від того, рух якої системи сил ми розглядаємо. Наприклад, якщо розглядати рух всієї Сонячної системи в цілому, то сила притягання Землі до Сонця – внутрішня; у разі дослідження руху Землі по орбіті навколо Сонця ту ж силу будемо розглядати як зовнішню.

Властивості внутрішніх сил:

– геометрична сума (головний фактор) усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю;

– сума моментів (головний момент) усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центра або осі дорівнює нулю.

Маса системи. Центр мас

Рух системи крім діючих сил залежить також від її сумарної маси та розподілу мас. Маса системи дорівнює арифметичній сумі мас всіх точок або тіл, що утворюють систему $M = \sum m_k$.

Координати центра мас C системи (тіла) в однорідному полі тяжіння (g=const): $x_c = \dfrac{\sum m_k x_k}{M}$; $y_c = \dfrac{\sum m_k y_k}{M}$; $z_c = \dfrac{\sum m_k z_k}{M}$; *або* $\bar{r}_c = \dfrac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}$; $\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_c$ (m_k – маси матеріальних точок (частинок), що утворюють тіло; x_k, y_k, z_k – координати цих точок).

Момент інерції тіла відносно осі

Положення центра мас характеризує розподіл мас системи не повністю. Тому введено ще одну характеристику розподілу мас – момент інерції. Моментом інерції тіла (системи) відносно даної осі 0z (або осьовим моментом інерції) називають скалярну величину, що дорівнює сумі добутків мас всіх точок тіла (системи) на квадрати їх відстаней від цієї осі h_k. $I_z = \sum m_k h_k^2 > 0$.

Осьовий момент інерції під час обертального руху відіграє ту ж роль, що й маса під час поступального, тобто I_z є міра інертності в процесі обертального руху. Якщо координати k-ї точки x_k, y_k, z_k, то

$$I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2);\ I_y = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2);\ I_z = \sum m_k (y_k^2 + y_k^2).$$

Наведені формули правдиві як для системи матеріальних точок, так і для твердого тіла. Розбиваючи суцільне тіло на елементарні частини, знайдемо в граничному випадку в інтегральному вигляді

$$I_z = \int_{(V)} h^2 dm (dm = \rho dV, \rho - \text{густина}, V - об'єм)$$

$$\text{або } I_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV \quad (\rho, h \sim x, y, z) \text{ або } I_z = \int_{(V)} \rho (x^2 + y^2) dV.$$

Аналогічно $I_x = \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2) dV,\ I_y = \int_{(V)} \rho (x^2 + z^2) dV.$

Якщо тіло однорідне, то ρ=const.

Приклад. Моменти інерції деяких однорідних тіл.

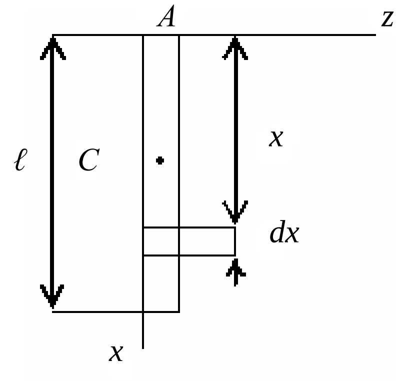


Рис. 4.5

1) Тонкий однорідний стрижень довжиною ℓ і масою M (рис. 4.5).

Для елементів відрізка $dx: h = x,\ dm = \rho_1 dx; \rho_1 \dfrac{M}{\ell}$

$$I_{Az} = \int_0^\ell x^2 dm = \rho_1 \int_0^\ell x^2 dx = \rho_1 \frac{\ell^3}{3}.\ I_{Az} = \frac{1}{3} M \ell^2.$$

2) Тонке кругле однорідне кільце радіусом R і масою M.

$$h_k = R \text{ (рис. 4.6);}$$

$$I_{cz} = \sum m_k R^2 = \left(\sum m_k\right) R^2 = MR^2;\ I_{cz} = MR^2.$$

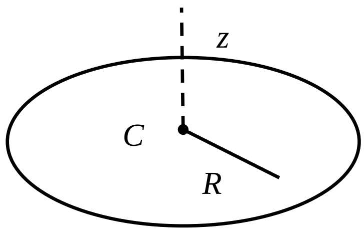


Рис. 4.6

Аналогічно для моменту інерції тонкої циліндричної оболонки масою M і радіуса R відносно її осі.

3) Кругла однорідна пластина або циліндр радіусом R і масою M (рис. 4.7).

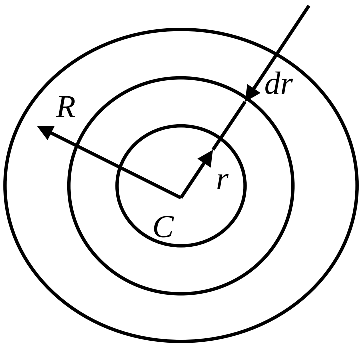


Рис. 4.7

$$ds = 2\pi r dr;\; dm = \rho_2 2\pi r dr;\; \rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}$$ – маса одиниці площі;

$$dI_c = r^2 dm = 2\pi\rho_2 r^3 dr;\; I_c = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho_2 R^4;$$

$$I_c = \frac{1}{2} M R^2.$$

Аналогічно для I_z однорідного круглого циліндра масою M і радіусом R відносно його осі Cz (рис. 4.8).

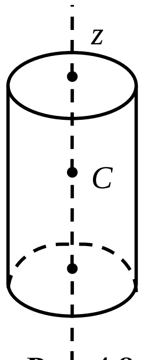


Рис. 4.8

Моменти інерції тіла відносно паралельних осей. Теорема Гюйгенса

Знайти I_z відносно іншої паралельної осі (рис. 4.9).

$$I_{0z} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2);$$

$$I_{cz'} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2);$$

$$x_k = x_k' + d;\; y_k = y_k' + d;\; x_k^2 = x_k'^2 + d^2 + 2x_k' d;$$

$$y \Rightarrow I_{0z} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + \left(\sum m_k\right) d^2 + 2d\left(\sum m_k x_k'\right);$$

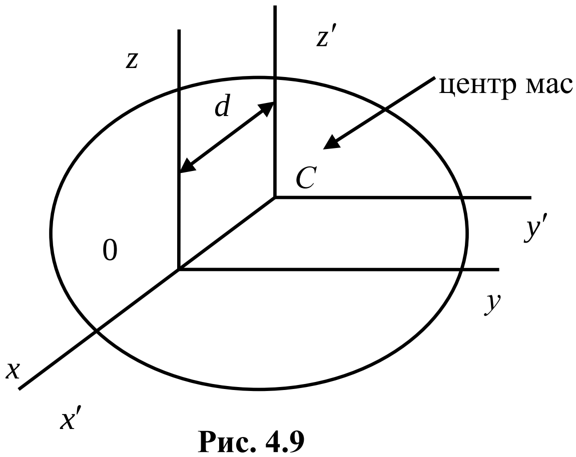


Рис. 4.9

$$I_{cz'} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2); \quad M = \sum m_k;$$

$\sum m_k x_k' = M x_c'$, C – центр мас – початок координат $\Rightarrow x_c' = 0 \Rightarrow \sum m_k x_k' = 0$.

$I_{0z} = I_{cz'} + Md^2$ – **теорема Гюйгенса:** момент інерції тіла відносно даної осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла, доданому до добутка маси всього тіла на квадрат відстані між осями.

Теорема про рух центра мас системи. Диференціальні рівняння руху системи

Для матеріальної точки масою m_k

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^{зовн} + \bar{F}_k^{вн}.$$

Для системи (для всіх точок)

$$\begin{cases} m_1 \bar{a}_1 = \bar{F}_1^{зовн} + \bar{F}_1^{вн} \\ m_2 \bar{a}_2 = \bar{F}_2^{зовн} + \bar{F}_2^{вн} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n \bar{a}_n = \bar{F}_n^{зовн} + \bar{F}_n^{вн} \end{cases} . \tag{4.11}$$

Диференціальні рівняння руху системи у векторній формі – $\bar{a}_k = \dfrac{d\bar{V}_k}{dt} = \dfrac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}$.

Теорема про рух центра мас:

з (4.11) $\Rightarrow \sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^{зовн} + \sum \bar{F}_k^{вн}$;

з $\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_c \Rightarrow$ диференціюємо $\sum m_k \dfrac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = M\dfrac{d^2\bar{r}_c}{dt^2}$, $\sum m_k \bar{a}_k = M\dfrac{d^2\bar{r}_c}{dt^2}$, (4.12)

остаточно $M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{зовн}$.

Добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі всіх діючих на систему зовнішніх сил, або центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.

Значення теореми:

1) обґрунтування методів динаміки точки; всі розв'язки, які розглядаємо щодо тіла як матеріальної точки, підходять для рівняння руху центра мас тіла;

2) дозволяє для визначення закону руху центра мас будь-якої системи виключити з розгляду внутрішні сили.

Закон збереження руху центра мас:

1) якщо в (2) $\sum \bar{F}_k^{зовн} = 0$, то $\bar{a}_c = 0$ або $\bar{V}_c = const$; якщо $\bar{V}_{c0} = 0$, то $\bar{r}_c = const$;

2) якщо $\sum \bar{F}_{kx}^{зовн} = 0$, то $\dfrac{d^2x_c}{dt^2}$ або $\bar{V}_{xc} = const$; якщо $\bar{V}_{c0} = 0$, то $x_c = const$.

Теорема про зміну кількості руху системи

Кількість руху системи – векторна величина – $\bar{Q} = \sum m_k \bar{V}_k$.

Оскільки $\sum m_k \bar{V}_k = M\bar{V}_c$, то $\bar{Q} = M\bar{V}_c$ (зручно для твердих тіл).

Кількість руху системи характеризує тільки поступальний рух системи.

Для системи n матеріальних точок
$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^{зовн} + \sum \bar{F}_k^{вн},$$
$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{V}_k\right) = \frac{d}{dt}\left(M\bar{V}_c\right) = \frac{d\bar{Q}}{dt},$$

остаточно $\dfrac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{зовн}$ – теорема в диференціальній системі.

У проекціях на осі координат $\dfrac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{зовн}$; $\dfrac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^{зовн}$; $\dfrac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^{зовн}$.

$$\int_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}_1} d\bar{Q} = \int_0^{t_1} \sum F_k^{зовн} dt;$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k^{зовн} dt \\ \text{або } \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{зовн} \end{array}\right\} \text{– інтегральна форма.}$$

У проекціях на координатні осі:

$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^{зовн}$; $Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^{зовн}$; $Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^{зовн}$.

Закон збереження кількості руху

Якщо $\sum \bar{F}_k^{зовн} = 0$, то $\bar{Q} = const$. Якщо $\sum F_{kx}^{зовн} = 0$, то $Q_x = const$.

Тобто внутрішні сили не можуть змінити сумарну кількість руху системи.

Теорема про зміну моменту кількостей руху системи

Головним моментом кількості руху (або кінетичним моментом) системи відносно даного центра 0 називають величину $\bar{K}_0$, яка дорівнює геометричній сумі моментів кількості руху всіх точок системи відносно цього центра: $\bar{K}_0 = \sum \bar{m}_0\left(m_k\bar{V}_k\right)$.

Аналогічно моменти кількості руху системи відносно координатних осей: $K_x = \sum m_x\left(m_k\bar{V}_k\right)$, $K_y = \sum m_y\left(m_k\bar{V}_k\right)$, $K_z = \sum m_z\left(m_k\bar{V}_k\right)$ – проекції $\bar{K}_0$ на координатні осі.

Момент кількості руху $\bar{K}_0$ – характеристика обертального руху.

Для K_z (рис. 4.10) $K_z = \sum m_z\left(m_k\bar{V}_k\right) = \left\{V_k = \omega h_k\right\} =$

$$= \sum m_k V_k h_k = \sum m_k \omega h_k^2 = \left(\sum m_k h_k^2\right)\omega,$$

де I_z – момент інерції тіла відносно 0z.

Отже, $K_z = I_z\omega$.

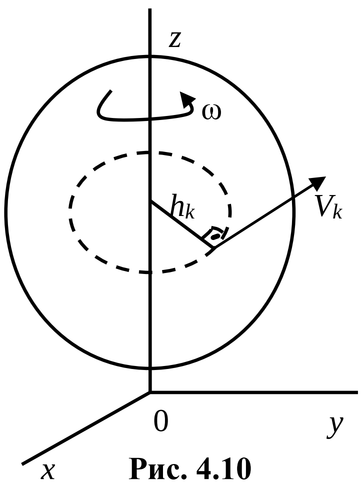


Рис. 4.10

Теорема моментів для системи

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0\left(\bar{F}_k^{зовн}\right).$$

У проекціях на нерухомі осі:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x\left(\bar{F}_k^{зовн}\right), \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y\left(\bar{F}_k^{зовн}\right), \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\bar{F}_k^{зовн}\right).$$

Наприклад, якщо $\sum m_z\left(\bar{F}_k^{зовн}\right) = 0$, то $K_z = const$ – закон збереження головного моменту кількості руху системи.

Для обертального руху системи навколо нерухомої осі 0z $I_z\omega$=const.

Змінюючи I_z, змінюємо ω (наприклад, платформа Жуковського).

Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Кінематична енергія системи – скалярна величина T, що дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій всіх точок системи $T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}$. Вона характеризує як поступальний, так і обертальний рух.

У разі поступального руху тіла

$$T_{пост} = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} = \left\{V_k = V_c\right\} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k\right)V_c^2; \; T_{пост} = \frac{1}{2}MV_c^2.$$

У разі обертального руху навколо осі 0z

$$T_{об} = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} = \left\{V_k = \omega h_k\right\} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k h_k^2\right)\omega^2; \; T_{об} = \frac{1}{2}I_z\omega^2.$$

Кінетична енергія в загальному випадку (у тому числі під час плоско-паралельного руху) дорівнює кінетичній енергії поступального руху із швидкістю центра мас, доданій до кінетичної енергії обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас: $T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$.

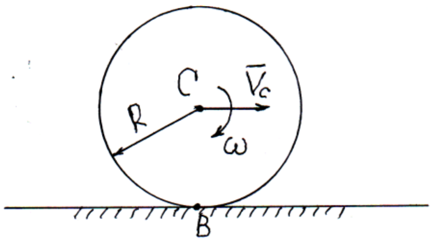


Рис. 4.11

Приклад. Обчислити кінетичну енергію суцільного циліндра (циліндричного колеса) масою M, що котиться без ковзання, якщо швидкість його центра V_c (рис. 4.11).

Розв’язання

Колесо рухається плоскопаралельно. Точка B – миттєвий центр швидкостей:

$$\omega = \frac{V_c}{R}, \quad T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}I_{zc}\omega^2, \quad I_{zc} = \frac{1}{2}MR^2;$$

$$T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{V_c}{R}\right) = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{4}MV_c^2 = \frac{3}{4}MV_c^2.$$

Формулювання теореми в диференціальній формі: $dT = \sum dA_k^{зовн} + \sum dA_k^{вн}$, де $dA_k^{зовн}, dA_k^{вн}$ – елементарні роботи діючих на точку зовнішніх та внутрішніх сил ($dA = \overline{F}\cdot d\overline{r}$ – скалярний добуток вектора сили на вектор елементарного переміщення точки її прикладання).

Зазвичай застосовують інтегральну форму теореми, інтегруючи обидві частини останньої рівності в межах, що відповідають переміщенню системи з деякого початкового положення, де кінетична енергія – T_0, у положення, де кінетична енергія стає рівна T_1, одержуємо $T_1 - T_0 = \sum A_k^{зовн} + \sum A_k^{вн}$.

Отже, зміна кінетичної енергії системи в разі деякого її переміщення дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх прикладених до системи зовнішніх та внутрішніх сил.

Незмінною називають систему, у якій відстані між точками прикладання внутрішніх сил під час руху системи не змінюються (наприклад, абсолютно тверде тіло, нерозтяжна нитка).

У випадку незмінної системи сума робіт всіх внутрішніх сил дорівнює нулю, тоді маємо $T_1 - T_0 = \sum A_k^{зовн}$.

Питання для самоконтролю

1. Ряд Фур'є.
2. Коефіцієнти Фур'є.
3. Достатні умови розвинення функції в ряд Фур'є.
4. Механічних рух.
5. Система відліку.
6. Способи задання руху точки.
7. Швидкість точки, прискорення точки.
8. Натуральний триедр (тригранник) кривої.
9. Дотична та нормальна складові прискорення.
10. Радіус кривизна траєкторії.
11. Поступальних рух тіла.
12. Обертальний рух твердого тіла.
13. Плоскопаралельний рух твердого тіла.
14. Складений рух матеріальної точки (відносний рух, переносний рух, абсолютний рух).
15. Коріолісове прискорення матеріальної точки.
16. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.
17. Теореми динаміки матеріальної точки.
18. Динаміка руху системи матеріальних точок.
19. Сила, внутрішні та зовнішні сили, механічна система.
20. Момент сили.
21. Пара сил.
22. Динаміка руху системи абсолютно твердих тіл.
23. Умови рівноваги системи абсолютно твердих тіл.
24. Головний вектор, головний момент системи сил.
25. Умови рівноваги абсолютно твердих тіл.

Список рекомендованої літератури

Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст] / С.М. Тарг. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики [Текст] / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1972. – 467 с.
Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики [Текст]: в 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – 816 с.
Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике [Текст] / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа [Текст]: в 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1968. – 863 с.
Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст]: в 2 т. / М.И. Бать, Г.Ю. Дзанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1971. – 1136 с.
Ламзюк, В.Д., Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з математичного аналізу. Числові та функціональні ряди [Текст] / В.Д. Ламзюк, В.І. Сорокін, В.О. Катан. – Д.: ДДУ, 1999. – 34 с.

Зміст

Темплан 2016, поз. 5

Навчальне видання

Володимир Дмитрович Ламзюк
Володимир Іванович Сорокін

Посібник до вивчення дисципліни «Моделювання природничих процесів». Теоретична механіка

Редактор А.Я. Пащенко
Техредактор Т.І. Севост'янова
Коректор

Підписано до друку 10.02.2016. Формат 60×84/16. Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк. арк. 3,0. Ум. фарбовідб. 3,0. Обл.-вид. арк. 2,6. Тираж 30 пр. Зам. №

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ,49010.
ПП «Ліра ЛТД», вул. Погребняка, 25, м. Дніпропетровськ,49010.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 188 від 19.09.2000 р. Фактична адреса: вул. Наукова, 5