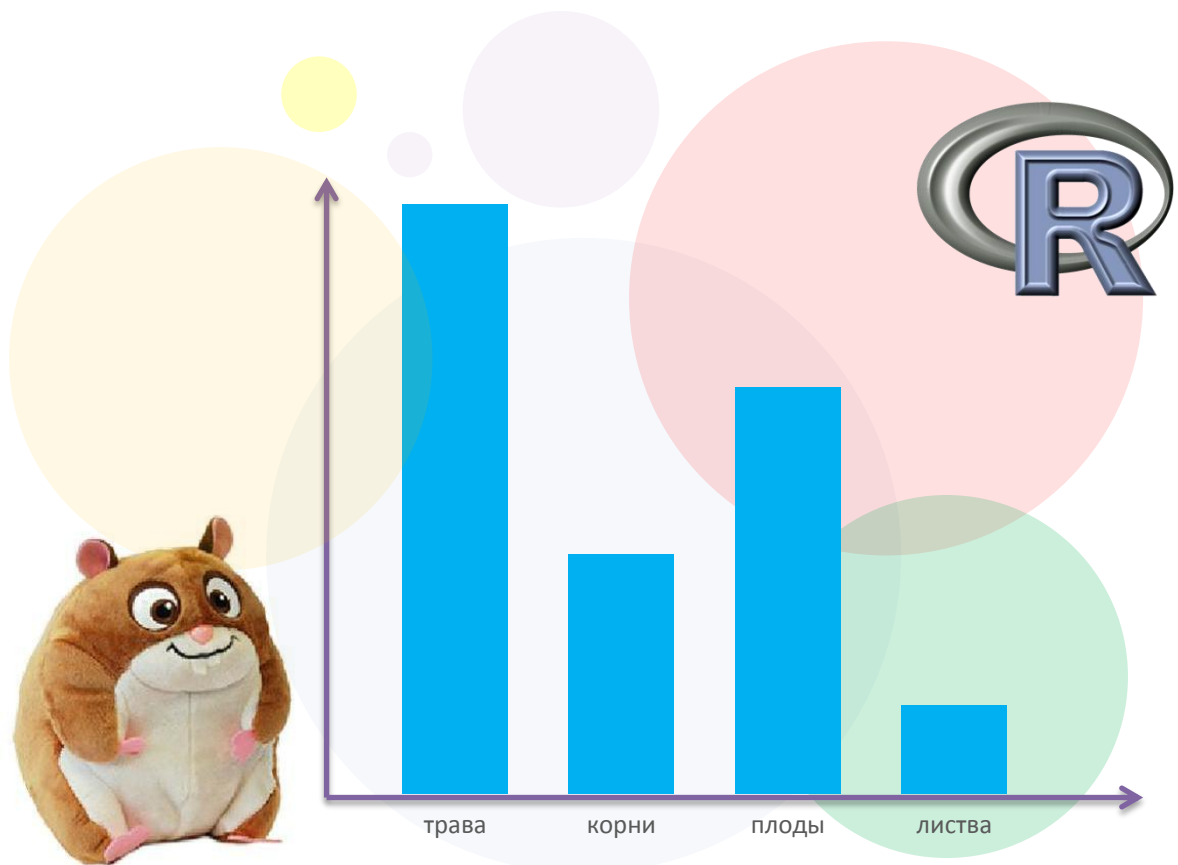


С.Э. Мастицкий, В.К. Шитиков

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ R



© 2014, Сергей Эдуардович Мاستицкий, Владимир Кириллович Шитиков

Веб-сайт: <http://r-analytics.blogspot.com>



**Данная работа распространяется в рамках лицензии Creative Commons «Атрибуция – Некоммерческое использование – На тех же условиях 4.0 Всемирная». Согласно этой лицензии, Вы можете свободно копировать, распространять и видоизменять данное произведение при условии точного указания его авторов и источника. При изменении этого произведения или использовании его в своих работах, Вы можете распространять результат только по такой же или подобной лицензии. Запрещается использовать эту работу в коммерческих целях без согласования с авторами. Более подробная информация о лицензии представлена на сайте [www.creativecommons.com](http://www.creativecommons.com)**

*Пожалуйста, ссылайтесь на эту книгу следующим образом:*

Мастицкий С.Э., Шитиков В.К. (2014) Статистический анализ и визуализация данных с помощью R. – Электронная книга, адрес доступа:

<http://r-analytics.blogspot.com>

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
<b>1. ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ R</b>	<b>8</b>
1.1. История возникновения и основные принципы организации среды R	8
1.2. Работа с командной консолью интерфейса R	11
1.3. Работа с меню пакета R Commander	13
1.4. Объекты, пакеты, функции, устройства	17
<b>2. ОПИСАНИЕ ЯЗЫКА R</b>	<b>23</b>
2.1. Типы данных языка R	23
2.2. Векторы и матрицы	24
2.3. Факторы	29
2.4. Списки и таблицы	31
2.5. Импортирование данных в R	37
2.6. Представление даты и времени; временные ряды	40
2.7. Организация вычислений: функции, ветвления, циклы	46
2.8. Векторизованные вычисления в R с использованием apply-функций	50
<b>3. БАЗОВЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ R</b>	<b>58</b>
3.1. Диаграммы рассеяния <code>plot()</code> и параметры графических функций	58
3.2. Гистограммы, функции ядерной плотности и функция <code>sdplot()</code>	66
3.3. Диаграммы размахов	74
3.4. Круговые и столбиковые диаграммы	77
3.5. Диаграммы Кливленда и одномерные диаграммы рассеяния	84
3.6. Категоризованные графики	92
<b>4. ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА И ПОДГОНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ</b>	<b>97</b>
4.1. Оценка выборочных параметров с использованием специальных функций	97
4.2. Использование функций <code>summary()</code> и дополнительных пакетов	100
4.3. Анализ выбросов	103
4.4. Заполнение пропущенных значений в таблицах данных	106
4.5. Воспроизводимость результатов при использовании генератора случайных чисел	111
4.6. Законы распределения вероятностей, реализованные в R	113
4.7. Подбор закона и параметров распределения в R	115
4.8. Проверка на нормальность распределения	123
<b>5. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И КРИТЕРИИ СТАТИСТИКИ</b>	<b>128</b>
5.1. Гипотеза о равенстве средних двух генеральных совокупностей	128
5.2. Использование ранговых критериев Уилкоксона-Манна-Уитни	133
5.3. Рандомизация, бутстреп и оценка статистической мощности (на примере двухвыборочного t-критерия)	136
5.4. Гипотеза об однородности дисперсий	143
5.5. Введение в дисперсионный анализ	145
5.6. Оценка корреляции двух случайных величин	153
5.7. Критерий хи-квадрат	156

5.8.	Точный тест Фишера; критерии Мак-Немара и Кохрана-Мантеля-Хензеля	159
5.9.	Оценка статистической мощности при сравнении долей	167
6.	<b>ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В ДИСПЕРСИОННОМ АНАЛИЗЕ</b>	172
6.1.	Протокол разведочного анализа данных	172
6.2.	Линейные модели дисперсионного анализа	184
6.3.	Структура модельных объектов дисперсионного анализа	191
6.4.	Оценка адекватности модели дисперсионного анализа	194
6.5.	Дисперсионный анализ по Краскелу-Уоллису	202
6.6.	Модели двух- и многофакторного дисперсионного анализа	203
6.7.	Контрасты в линейных моделях, содержащих категориальные предикторы	210
6.8.	Проблема множественных проверок статистических гипотез	218
6.9.	Методы сравнения групповых средних в дисперсионном анализе	225
7.	<b>РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ КОЛИЧЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ</b>	235
7.1.	О понятии "статистическая модель"	235
7.2.	Простая линейная регрессия: каков возраст Вселенной?	244
7.3.	Модели регрессии при различных видах функции потерь	255
7.4.	Критерии выбора моделей оптимальной сложности	261
7.5.	Полиномиальные и нелинейные модели регрессии	264
7.6.	Модель множественной регрессии и выбор ее спецификации	271
7.7.	Процедуры диагностики моделей множественной регрессии	278
7.8.	Гребневая и лассо-регрессия; использование главных компонент	285
7.9.	Сравнение эффективности различных моделей при прогнозировании	293
8.	<b>ОБОБЩЕННЫЕ, СТРУКТУРНЫЕ И ИНЫЕ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ</b>	303
8.1.	Модели сглаживания	303
8.2.	Обобщенные модели регрессии	311
8.3.	Модели пробит- и логит-регрессии	315
8.4.	Обобщенные модели для оценки показателей экологической толерантности	325
8.5.	Ковариационный анализ	332
8.6.	Модели со смешанными эффектами для иерархически организованных данных	337
8.7.	Индуктивные модели (метод группового учета аргументов)	345
8.8.	Моделирование структурными уравнениями	351
9.	<b>ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И СОЗДАНИЕ КАРТОГРАММ</b>	360
9.1.	Простая карта: использование растрового рисунка и подсчет расстояний	360
9.2.	Анализ пространственного размещения точек	367
9.3.	Использование сервисов картографической системы Google Maps	371
9.4.	Создание картограмм при помощи R	375
	<b>БИБЛИОГРАФИЯ И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ</b>	
	Основные литературные ссылки по тексту книги	388
	Библиографический указатель литературы по использованию R	390
	Основные Интернет-ресурсы	400



В целях природы обуздания,  
Чтобы рассеять незнания тьму,  
Берем картину мироздания  
И тупо смотрим, что к чему....

*А. и Б. Стругацкие «Понедельник  
начинается в субботу»*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из основных инструментов познания мира является обработка данных, получаемых человеком из различных источников. Суть современного статистического анализа состоит в интерактивном процессе, состоящем из исследования, визуализации и интерпретации потоков поступающей информации.

История последних 50 лет – это и история развития технологии анализа данных. Один из авторов с умилением вспоминает конец 60-х годов и свою первую программу расчета парной корреляции, которая набиралась металлическими штырёчками на "операционном поле" из 150 ячеек персональной ЭВМ "Промінь-2" весом более 200 кг. В наше время высокопроизводительные компьютеры и доступное программное обеспечение позволяют реализовать полный цикл информационно-технологического процесса, состоящего, в общем случае, из следующих шагов:

- доступ к обрабатываемым данным (их загрузка из разных источников и комплектация совокупности взаимосвязанных исходных таблиц);
- редактирование загруженных показателей (замена или удаление пропущенных значений, преобразование признаков в более удобный вид);
- аннотирование данных (чтобы помнить, что представляет собой каждый их фрагмент);
- получение общих сведений о структуре данных (вычисление описательных статистик для того, чтобы охарактеризовать анализируемые показатели);
- графическое представление данных и результатов вычислений в понятной информативной форме (одна картинка на самом деле иногда стоит тысячи слов);
- моделирование данных (нахождение зависимостей и тестирование статистических гипотез);
- оформление результатов (подготовка таблиц и диаграмм приемлемого публикационного качества).

В условиях, когда к услугам пользователя имеются десятки пакетов прикладных программ, актуальна проблема выбора (иногда трагичная, если вспомнить "буриданова осла"): какое программное обеспечение анализа данных следует предпочесть для своей практической работы? Здесь обычно принимается во внимание специфика решаемой задачи, эффективность настройки алгоритмов обработки, издержки на покупку программ, а также вкусы и личные предпочтения аналитика. При этом, например, шаблонная Statistica с ее механическим комплексом кнопок меню, далеко не всегда может удовлетворить творческого исследователя, предпочитающего самостоятельно контролировать ход вычислительного процесса. Комбинировать различные типы анализа, иметь доступ к промежуточным результатам, управлять стилем отображения данных, добавлять собственные расширения программных модулей и оформлять итоговые отчеты в необходимом виде позволяют коммерческие вычислительные системы, включающие высокоуровневые средства командного языка, такие как Matlab, SPSS и др. Прекрасной альтернативой им является бесплатная программная среда R, являющаяся современной и постоянно развивающейся статистической платформой общего назначения.

Сегодня R является безусловным лидером среди свободно распространяемых систем статистического анализа, о чем говорит, например, тот факт, что в 2010 году система R стала победителем ежегодного конкурса открытых программных продуктов

[Bossie Awards](#) в нескольких номинациях. Ведущие университеты мира, аналитики крупнейших компаний и исследовательских центров постоянно используют R при проведении научно-технических расчетов и создании крупных информационных проектов. Широкое преподавание статистики на базе пакетов этой среды и всемерная поддержка научным сообществом обусловили то, что приведение скриптов R постепенно становится общепризнанным "стандартом" как в журнальных публикациях, так и при неформальном общении ученых всего мира.

Главным препятствием для русскоязычных пользователей при освоении R, безусловно, является то, что почти вся документация по этой среде существует на английском языке. Лишь с 2008 г. усилиями А.В. Шипунова, Е.М. Балдина, С.В. Петрова, И.С. Зарядова, А.Г. Буховца и других энтузиастов появились методические пособия и книги на русском языке (ссылки на них можно найти в списке литературы в конце этой книги; там же представлены и ссылки на образовательные ресурсы, авторами которых делается посильный вклад в продвижение R среди русскоязычных пользователей).

Настоящее пособие обобщает совокупность методических сообщений, опубликованных одним из авторов с 2011 г. в блоге «R: Анализ и визуализация данных» (<http://r-analytics.blogspot.com>). Нам показалась целесообразной идея представить для удобства читателей весь этот несколько разобщенный материал в концентрированной форме, а также расширить некоторые разделы для полноты изложения.

В первых трех главах содержатся подробные указания по работе с интерактивными компонентами R, детальное описание языка и базовых графических возможностей среды. Эта часть книги вполне доступна новичкам в области программирования, хотя читатель, уже знакомый с языком R, может найти там интересные фрагменты кода или использовать приведенные описания графических параметров как справочное пособие.

В последующих главах (4-8) приведено описание распространенных процедур обработки данных и построения статистических моделей, которое иллюстрировано несколькими десятками примеров. Они включают краткое описание алгоритмов анализа, основные полученные результаты и их возможную интерпретацию. Мы старались, по возможности, обойтись без злоупотребления "ритуальными" словооборотами, характерными для многочисленных руководств по прикладной статистике, цитирования общеизвестных теорем и приведения многэтажных расчетных формул. Акцент делался, в первую очередь, на практическое применение – на то, чтобы читатель, руководствуясь прочитанным, мог проанализировать свои данные и изложить результаты коллегам.

Разделы этой части выстроены по мере усложнения представленного материала. Главы 4 и 5 ориентированы на читателя, интересующегося статистикой лишь в рамках начального университетского курса. В главах 6 и 7 в рамках единой теории общих линейных моделей представлены дисперсионный и регрессионный анализы и приведены различные алгоритмы исследования и структурной идентификации моделей. Глава 8 посвящена некоторым современным методам построения и анализа обобщенных регрессионных моделей.

Поскольку неизменный интерес у исследователя вызывает пространственный анализ и отображение результатов на географических картах и схемах, в главе 9 приведены некоторые примеры таких приемов визуализации.

Мы адресуем наше методическое пособие студентам, аспирантам, а также молодым и состоявшимся ученым, желающим освоить анализ и визуализацию данных с использованием среды R. Мы надеемся, что по окончании чтения этого руководства вы получите некоторое представление о том, как работает R, где можно получить дальнейшую информацию, а также как справиться с простыми и достаточно сложными задачами анализа данных.

Файлы со скриптами кодов R по всем главам книги, а также необходимые таблицы исходных данных для их выполнения, свободно доступны для скачивания с GitHub-

репозитория <https://github.com/ranalytics/r-tutorials>, а также с сайта Института экологии Волжского бассейна РАН по ссылке <http://www.ievbras.ru/ecostat/Kiril/R/Scripts.zip>.

Следует отметить, что текст в этом пособии представлен в авторской редакции и потому, несмотря на все наши усилия, имеется вероятность наличия в нем опечаток, грамматических неточностей и неудачных оборотов. Мы будем благодарны Вам, Читатель, за сообщение об этих, а также других обнаруженных недочетах по электронной почте [rtutorialsbook@gmail.com](mailto:rtutorialsbook@gmail.com). Мы также будем благодарны за любые другие Ваши замечания и пожелания касательно этой работы.

*Сергей Мاستицкий, Лондон  
Владимир Шитиков, Тольятти  
14 декабря 2014 г.*

# 1. ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ R



## 1.1. История возникновения и основные принципы организации среды R

Система статистического анализа и визуализации данных R состоит из следующих основных частей:

- языка программирования высокого уровня R, позволяющего одной строкой реализовать различные операции с объектами, векторами, матрицами, списками и т.д.;
- большого набора функций обработки данных, собранных в отдельные пакеты (package);
- развитой системой поддержки, включающей обновление компонентов среды, интерактивную помощь и различные образовательные ресурсы, предназначенные как для начального изучения R, так и последующих консультаций по возникающим затруднениям.

Начало пути относится к 1993 г., когда двое молодых новозеландских учёных Росс Ихака (Ross Ihaka) и Роберт Джентльмен (Robert Gentleman), анонсировали свою новую разработку, которую назвали R. Они взяли за основу язык программирования развитой коммерческой системы статистической обработки данных S-PLUS и создали его бесплатную свободную реализацию, отличающуюся от своего прародителя легко расширяемой модульной архитектурой. В скором времени возникла распределенная система хранения и распространения пакетов к R, известная под аббревиатурой "CRAN" (Comprehensive R Archive Network – <http://cran.r-project.org>), основная идея организации которой – постоянное расширение, коллективное тестирование и оперативное распространение прикладных средств обработки данных.

Оказалось, что такой продукт непрерывных и хорошо скоординированных усилий мощного "коллективного разума" тысяч бескорыстных разработчиков-интеллектуалов оказался значительно эффективнее коммерческих статистических программ, стоимость лицензии на которые может составлять несколько тысяч долларов. Поскольку R является любимым языком профессиональных статистиков, все последние достижения статистической науки очень быстро становятся доступными для пользователей R во всем мире в виде дополнительных библиотек. Ни одна коммерческая система статистического анализа так быстро сегодня не развивается. У R есть многочисленная армия пользователей, которые сообщают авторам дополнительных библиотек и самой системы R об обнаруженных ошибках, которые оперативно исправляются.

Язык вычислений R, хотя и требует определенных усилий для своего освоения, недюжинных поисковых навыков и энциклопедической памяти, позволяет оперативно выполнить расчеты, по своему разнообразию практически «столь же неисчерпаемые, как атом». Энтузиастами со всего мира по состоянию на июль 2014 г. написано 6739 дополнительных библиотек для R, включающих 137 506 функций (см. <http://www.rdocumentation.org>), которые существенно расширяют базовые возможности системы. Очень сложно представить какой-либо класс статистических методов, который еще не реализован сегодня в виде пакетов R, включая, разумеется, весь "джентльменский набор": линейные и обобщенные линейные модели, нелинейные регрессионные модели, планирование эксперимента, анализ временных рядов, классические параметрические и непараметрические тесты, байесовская статистика, кластерный анализ и методы сглаживания. При помощи мощных средств визуализации, результаты анализа можно обобщать в виде всевозможных графиков и диаграмм. Кроме традиционной статистики, разработанный функционал включает большой набор алгоритмов численной математики, методов оптимизации, решения дифференциальных уравнений, распознавания образов и др. Свои специфические методы обработки данных могут обнаружить в составе пакетов R

генетики и социологи, лингвисты и психологи, химики и медики, специалисты по ГИС- и Web-технологиям.

"Фирменная" документация по R весьма объемна и далеко не всегда толково написана (по странной традиции англоязычной литературы слишком много слов расходуется на описание тривиальных истин, тогда как важные моменты пробегаются скороговоркой). Однако, в дополнение к этому, ведущими мировыми издательствами (Springer, Cambridge University Press и Chapman & Hall / CRC) или просто отдельными коллективами энтузиастов выпущено огромное число книг, описывающих различные аспекты анализа данных в R (см., например, список литературы на сайте «Энциклопедия психодиагностики», <http://psylab.info/R:Литература>). Кроме того, существует несколько активно действующих международных и российских форумов пользователей R, где любой может попросить о помощи в возникшей проблеме. В списке литературы мы приводим пару сотен книг и Интернет-ссылок, на которые советуем обратить особое внимание в ходе изучения R.

Непосредственное обучение практической работе в R состоит из *а)* освоения конструкций языка R и знакомства с особенностями вызова функций, выполняющих анализ данных, и *б)* приобретения навыков работы с программами, реализующими специфические методы анализа и визуализации данных.

Вопрос выбора средств пользовательского интерфейса R неоднозначен и сильно зависит от вкусов пользователей. Единого мнения нет даже у авторитетных специалистов. Одни считают, что нет ничего лучше стандартного консольного интерфейса R. Другие полагают, что для удобной работы стоит установить какую-либо из имеющихся интегрированных сред разработки (IDE) с богатым набором кнопочных меню. Например, отличным вариантом является бесплатная интегрированная среда разработки [RStudio](#). Ниже мы остановимся на описании консольного варианта и работе с R Commander, но дальнейшим исканиям читателя может помочь обзор различных версий IDE, представленный в приложении к книге Шипунова с соавт. (2014).

Один из R-экспертов, Джозеф Рикерт, считает, что процесс изучения R можно разделить на следующие этапы (подробнее см. его статью на [inside-r.org](http://inside-r.org)):

1. Знакомство с общими принципами культуры R-сообщества и программной среды, в которой разрабатывался и функционирует язык R. Посещение основных и вспомогательных ресурсов и освоение хорошего вводного учебника. Установка R на компьютере пользователя и выполнение первых тестовых скриптов.

2. Считывание данных из стандартных файлов операционной системы и уверенное использование R-функций для выполнения ограниченного набора привычных пользователю процедур статистического анализа.

3. Использование базовых структур языка R для написания простых программ. Написание собственных функций. Ознакомление со структурами данных, с которыми может работать R, и более сложными возможностями языка. Работа с базами данных, веб-страницами и внешними источниками данных.

4. Написание сложных программ на языке R. Самостоятельная разработка и глубокое понимание структуры объектов так называемых S3- и S4-классов.

5. Разработка профессиональных программ на языке R. Самостоятельное создание дополнительных модулей-библиотек для R.

Большинство рядовых пользователей R останавливаются на стадии 3, т.к. полученных к этому времени знаний им вполне достаточно для выполнения статистических задач по профилю их основной профессиональной деятельности. Примерно в этом объеме мы и приводим описание языка R в рамках настоящего руководства.

Установить и настроить базовую комплектацию статистической среды R весьма просто. На июль 2014 г. актуальной является версия R 3.1.1 для 32 и 64-битной Windows (доступны также дистрибутивы для всех других распространенных операционных

систем). Скачать дистрибутив системы вместе с базовым набором из 29 пакетов (54 мегабайта) можно совершенно бесплатно с основного сайта проекта <http://cran.r-project.org> или русского "зеркала" <http://cran.gis-lab.info>. Процесс инсталляции системы из скачанного дистрибутива затруднений не вызывает и не требует никаких особых комментариев.

Для удобства хранения скриптов, исходных данных и результатов расчетов стоит выделить на пользовательском компьютере специальный рабочий каталог. Весьма нежелательно использовать в названии рабочего каталога символы кириллицы.

Путь к рабочему каталогу и некоторые другие опции настроек целесообразно разместить, изменив любым текстовым редактором системный файл C:\Program Files\R\R-3.00.2\etc\Rprofile.site (на Вашем компьютере он может иметь иное место размещения). В представленном ниже примере модифицированные строки отмечены зеленым цветом. Помимо указания рабочего каталога, эти строки определяют ссылку на российский источник загрузки пакетов R и автоматический запуск R Commander.

#### Листинг файла Rprofile.site

```
# Все, что следует на символом комментария «#» средой игнорируется
# options(papersize="a4")
# options(editor="notepad")
# options(pager="internal")

# установить тип отображения справочной информации
# options(help_type="text")
# options(help_type="html")

# установить место расположения локальной библиотеки
# .Library.site <- file.path(chartr("\\", "/", R.home()), "site-library")

# При загрузке среды запустить меню R Commander
# Поставить знаки «#», если запуск Rcmdr не нужен
local({
  old <- getOption("defaultPackages")
  options(defaultPackages = c(old, "Rcmdr"))
})

# Определить зеркало CRAN
local({r <- getOption("repos")
  r["CRAN"] <- "http://cran.gis-lab"
  options(repos=r)})

# Определить путь к рабочему каталогу (любой иной на Вашем компьютере)
setwd("D:/R/Process/Resampling")
```

Что касается «хорошего вводного учебника», то любые наши рекомендации будут носить субъективный оттенок. Тем не менее, следует упомянуть официально признанное введение в R У. Венэблеза и Д. Смита (Venables, Smith, 2014) и книгу Р.Кабакова (Kabacoff, 2011), отчасти еще и потому, что имеется их русский перевод. Отметим также традиционное "наставление для чайников" (Meys, Vries, 2012) и руководство (Lam, 2010), написанное с завидной голландской педантичностью. Из русскоязычных вводных курсов наиболее полными являются книги И.Зарядова (2010а) и А.Шипунова с соавт. (2014).

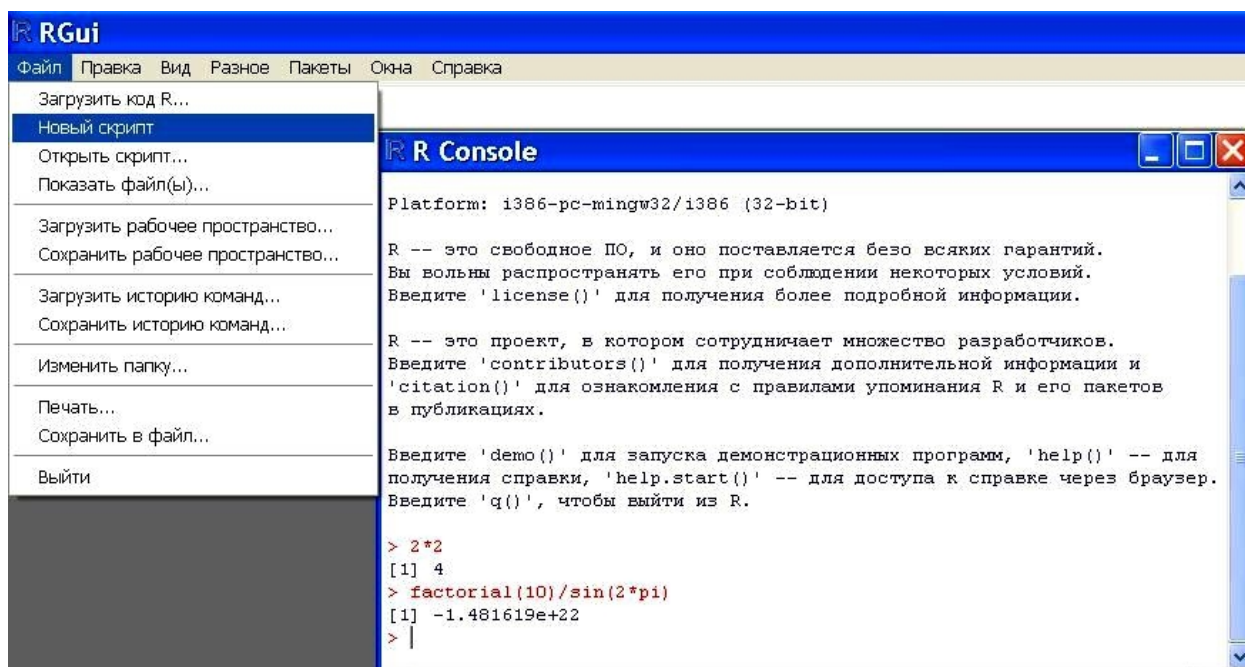


## 1.2. Работа с командной консолью интерфейса R

Статистическая среда R выполняет любой набор осмысленных инструкций языка R, содержащихся в файле скрипта или представленных последовательностью команд, задаваемых с консоли. Работа с консолью может показаться трудной для современных пользователей, привыкших к кнопочным меню, поскольку надо запоминать синтаксис отдельных команд. Однако, после приобретения некоторых навыков, оказывается, что многие процедуры обработки данных можно выполнять быстрее и с меньшим трудом, чем, предположим, в том же пакете Statistica.


Консоль R представляет собой диалоговое окно, в котором пользователь вводит команды и где видит результаты их выполнения. Это окно возникает сразу при запуске среды (например, после клика мышью на ярлыке R на рабочем столе). Кроме того, стандартный графический пользовательский интерфейс R (RGui) включает окно редактирования скриптов и всплывающие окна с графической информацией (рисунками, диаграммами и проч.)

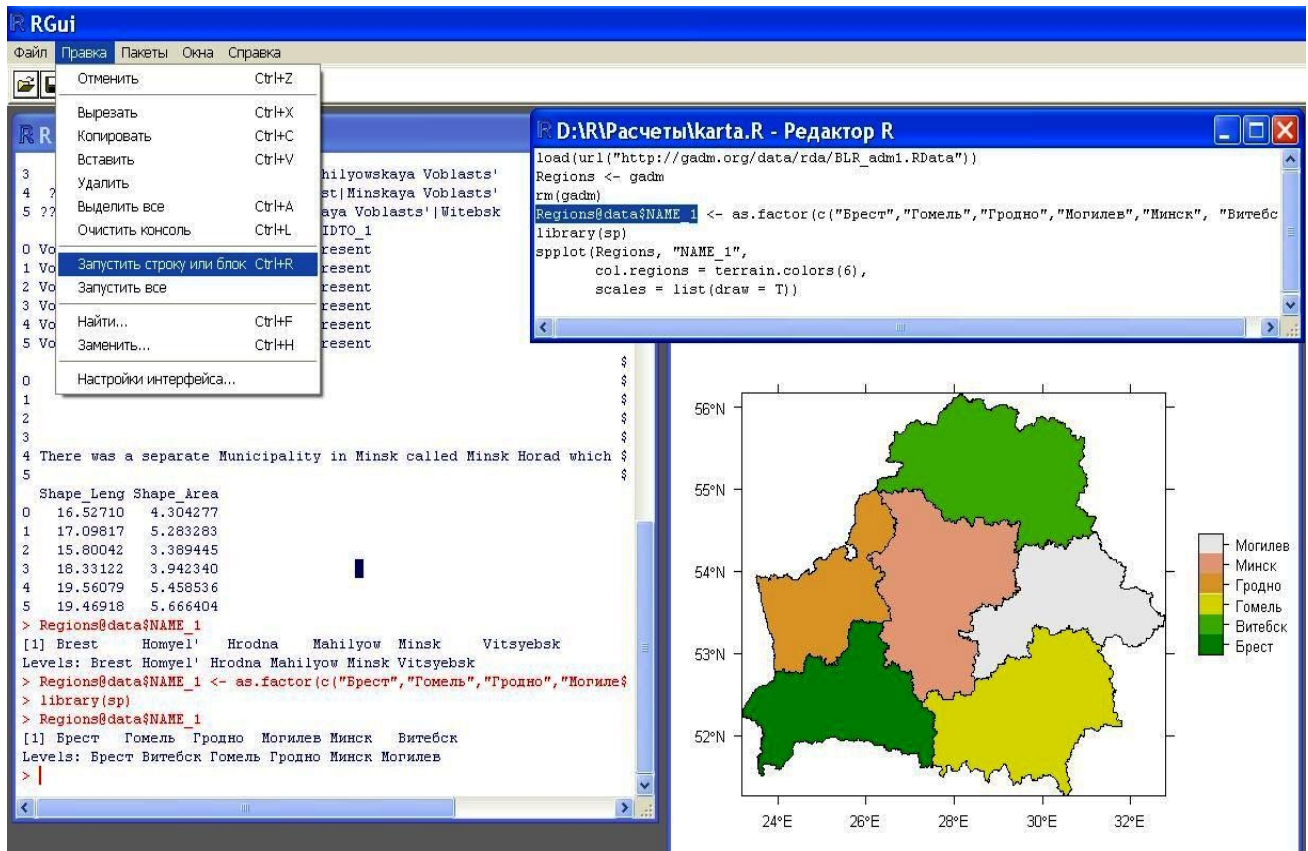
В командном режиме R может работать, например, как обычный калькулятор:



Справа от символа приглашения `>` пользователь может ввести произвольное арифметическое выражение, нажать клавишу `Enter` и тут же получить результат. Например, во второй команде на приведенном выше рисунке мы использовали функции факториала и синуса, а также встроенное число  $\pi$ . Результаты, полученные в текстовой форме можно выделить мышью и скопировать через буфер обмена в любой текстовый файл операционной системы (например, документ Word).

При работе с использованием RGui мы рекомендуем во всех случаях создавать файл со скриптом (т.е. последовательностью команд языка R, выполняющей определенные действия). Как правило, это обычный текстовый файл с любым именем (но, для определенности, лучше с расширением `*.r`), который можно создавать и редактировать обычным редактором типа "Блокнот". Если этот файл существует, его лучше всего поместить в рабочий каталог, и тогда после запуска R и выбора пункта меню "Файл > Открыть скрипт" содержимое этого файла появится в окне "Редактор R". Выполнить последовательность команд скрипта можно из пункта меню "Правка > Запустить все". Можно также выделить мышью осмысленный фрагмент из любого места подготовленного

скрипта (от имени одной переменной до всего содержимого) и осуществить запуск этого блока на выполнение. Это можно сделать четырьмя возможными способами: из основного и контекстного меню, комбинацией клавиш Ctrl+R или кнопкой  на панели инструментов.



- На представленном рисунке были выполнены следующие действия:
- из бесплатного Интернет-источника *Global Administrative Areas (GADM)* был скачан R-объект `gadm` с данными по территориальному делению Республики Беларусь;
  - латинизированные наименования городов заменены на общеупотребительные эквиваленты;
  - с использованием функции `splot()` пакета `sp` в графическое окно выведена административная карта республики, которую можно средствами меню скопировать в буфер обмена или сохранить как стандартный мета- или растровый графический файл.

Подробнее смысл отдельных операторов мы рассмотрим в последующих разделах, а здесь обратим внимание, что выделив в скрипте и запустив на выполнение комбинацию символов `Regions@data`, мы получим в окне консоли весь набор данных `data` по объекту `gadm`, а команда, составленная из выделенных символов `Regions@data$NAME_1`, даст нам список наименований административных центров до и после его модификации.

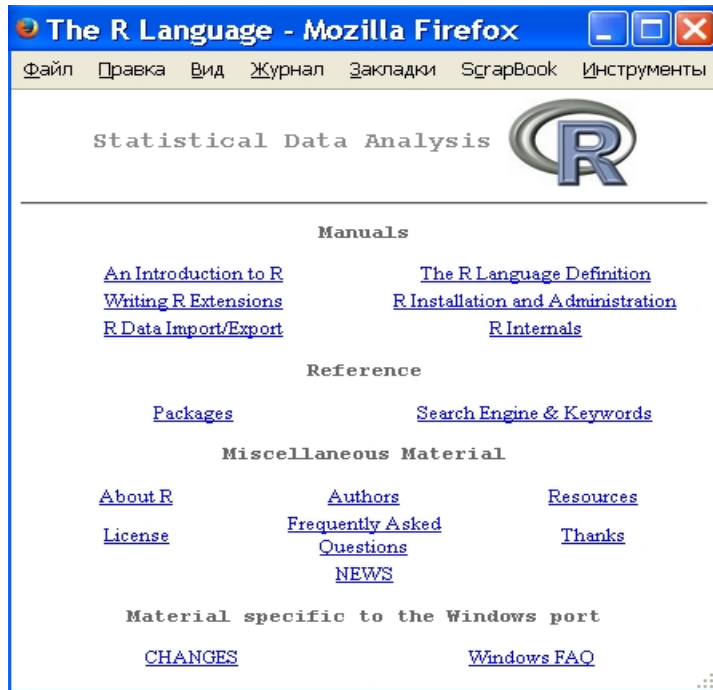
Таким образом, Редактор R позволяет легко выполнить навигацию по скрипту, редактирование и выполнение любой комбинации команд, поиск и замену определенных частей кода. Упомянутая выше надстройка RStudio позволяет дополнительно выполнять подсветку синтаксиса кода, его автоматическое завершение, "упаковку" последовательности команды в функции для их последующего использования, работу с документами Sweave или TeX и другие операции, которые будут полезны продвинутому пользователю.



R обладает встроенными обширными справочными материалами, которые можно получить непосредственно в RGui. Если подать с консоли команду

**help.start()**,

то в вашем интернет-браузере откроется страница, открывающая доступ ко всем справочным ресурсам: основным руководствам, авторским материалам, ответам на вероятные вопросы, спискам изменений, ссылкам на справки по другим объектам R и т.д.:



Справку по отдельным функциям можно получить с использованием следующих команд:

- **help**("foo") или ? foo – справка по функции foo (кавычки необязательны);
- **help.search**("foo") или ?? foo – поиск всех справочных файлов, содержащих foo;
- **example**("foo") – примеры использования функции foo;
- **RSiteSearch**("foo") – поиск ссылок в онлайн-руководствах и архивах рассылок;
- **apropos**("foo", mode="function") – список всех функций с комбинацией foo;
- **vignette**("foo") – список руководств по теме foo.

### 1.3. Работа с меню пакета R Commander

Удобным средством освоения вычислений в R для начинающего пользователя является R Commander – платформи-независимый графический интерфейс в стиле кнопочного меню, реализованный в пакете Rcmdr. Он позволяет осуществить большой комплект процедур статистического анализа, не прибегая к предварительному заучиванию функций на командном языке, однако невольно способствует этому, поскольку отображает все выполняемые инструкции в специальном окне.

Установить Rcmdr, как и любые другие расширения, можно из меню консоли R "Пакеты > Установить пакет", но лучше выполнив команду:

```
install.packages("Rcmdr", dependencies=TRUE)
```

где включение опции `dependencies` вызовет гарантированную установку полного комплекта остальных пакетов, которые могут потребоваться при обработке данных через меню Rcmdr.

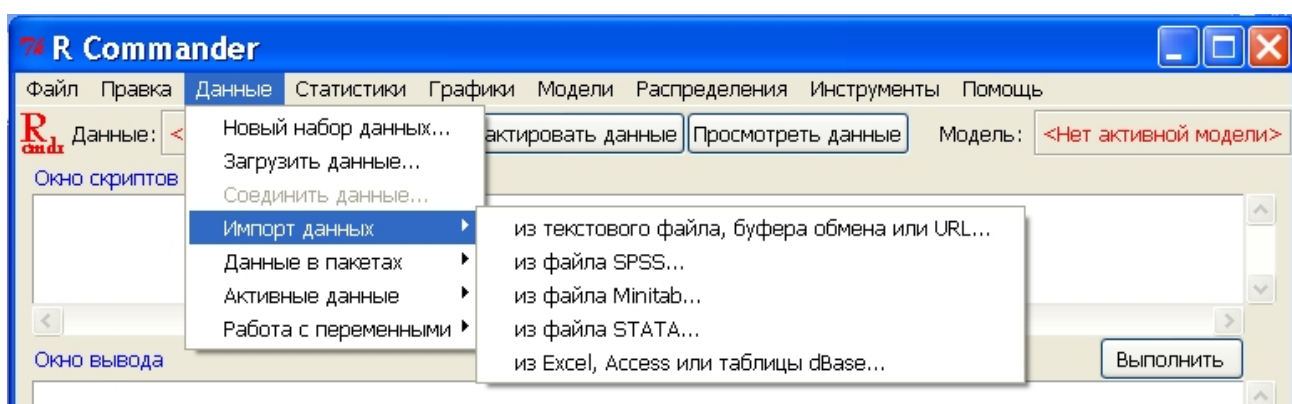
Запуск R Commander происходит при загрузке пакета Rcmdr через меню "Пакеты > Включить пакет" или командой

## library (Rcmdr)

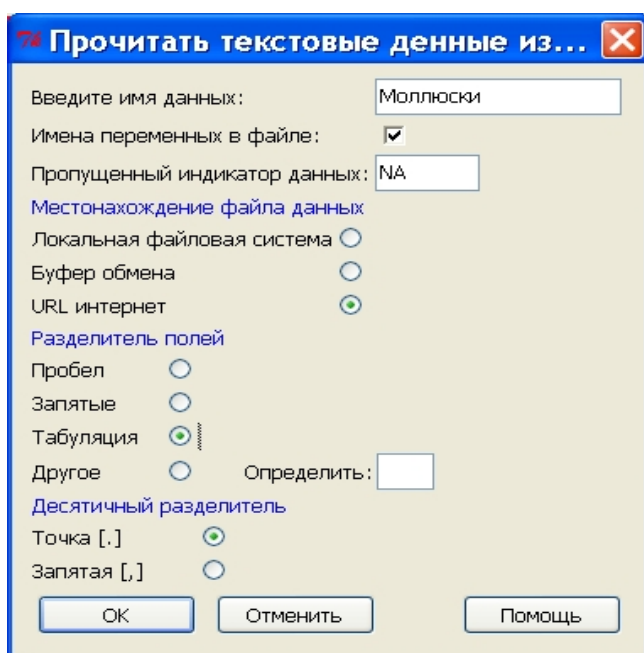
Если по какой-то причине было принято решение анализировать данные исключительно с помощью R Commander, то для автоматической загрузки этой графической оболочки при запуске R необходимо отредактировать файл Rprofile.site как показано в разделе 1.1.

Работу в R Commander рассмотрим на примере корреляционного анализа данных по уровню зараженности двустворчатого моллюска *Dreissena polymorpha* инфузорией *Conchophthirus acuminatus* в трех озерах Беларуси ([Mastitsky S.E. // BioInvasions Records. 2012. V. 1. P 161–169](#)). В таблице с исходными данными, которую скачаем с сайта [figshare](#), нас будут интересовать две переменные: длина раковины моллюска (ZMlength, мм) и число обнаруженных в моллюске инфузорий (CAnumber). Подробно этот пример будет рассмотрен в главах 4 и 5, поэтому здесь мы не будем детально останавливаться на смысле анализа, а сосредоточимся на технике работы с Rcmdr.

Первый этап – загрузка нового набора данных, и мы выбираем из меню "Импорт данных из URL":



Далее – определяем во всплывающих окнах режим загрузки данных и адрес ссылки в Интернете. Нетрудно заметить, что те же данные мы могли легко загрузить из локального текстового файла, книги Excel или таблицы базы данных. Чтобы убедиться в том, что наши данные загружены верно (или при необходимости их отредактировать), нажимаем кнопку "Посмотреть данные".

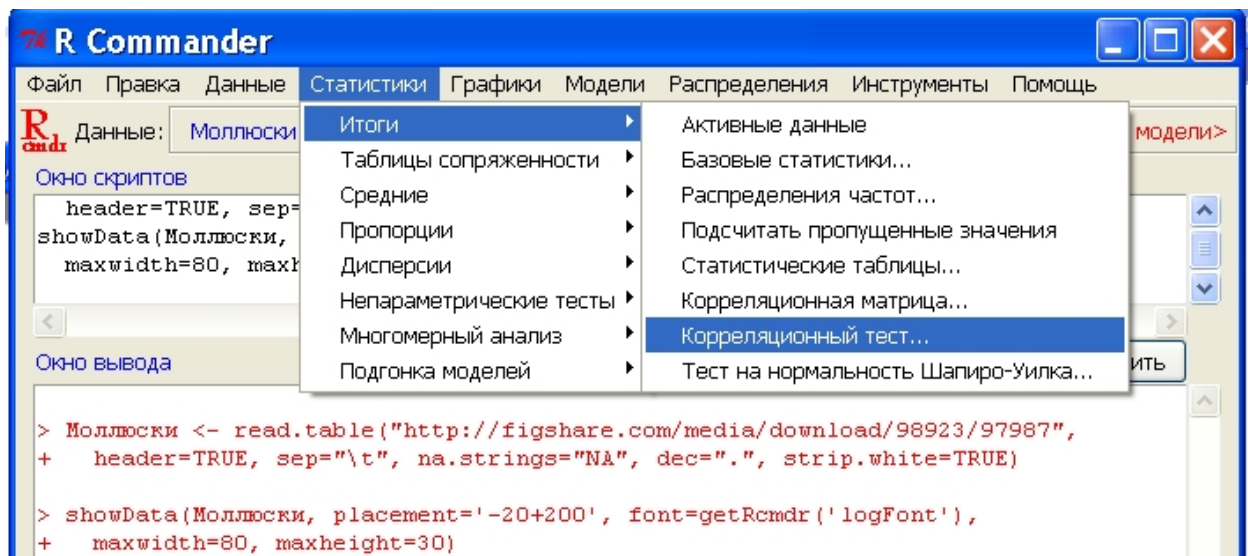


Окно определения организации данных

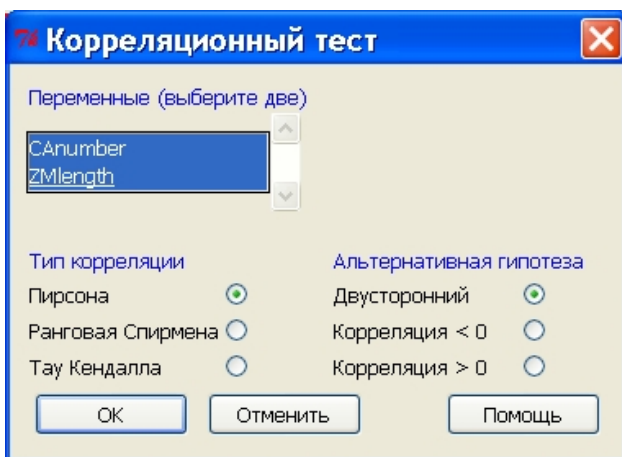
	Month	Lake	Site	ZMlength	CAnumber
1	May	Batorino	S3	14.9	36
2	May	Batorino	S3	14.0	30
3	May	Batorino	S3	13.0	331
4	May	Batorino	S3	14.0	110
5	May	Batorino	S3	12.0	4
6	May	Batorino	S3	14.0	171
7	May	Batorino	S3	12.0	31
8	May	Batorino	S3	19.0	887
9	May	Batorino	S3	16.5	525
10	May	Batorino	S3	18.0	497
11	May	Batorino	S3	19.0	56
12	May	Batorino	S3	19.0	1599
13	May	Batorino	S3	19.0	692
14	May	Batorino	S3	23.0	86
15	May	Batorino	S3	22.0	1768
16	May	Batorino	S3	22.0	183
17	May	Batorino	S3	22.0	1209
18	May	Batorino	S2	11.5	53
19	May	Batorino	S2	13.0	21
20	May	Batorino	S2	11.5	70
21	May	Batorino	S2	11.5	79
22	May	Batorino	S2	18.0	55

Фрагмент загруженной таблицы

На втором этапе в меню "Статистика" выбираем "Корреляционный тест":



Выбираем пару коррелируемых переменных и в Окне вывода получаем коэффициент корреляции Пирсона ( $R = 0.467$ ), уровень достигнутой статистической значимости ( $p\text{-value} < 2.2e-16$ ) и 95%-ные доверительные пределы.



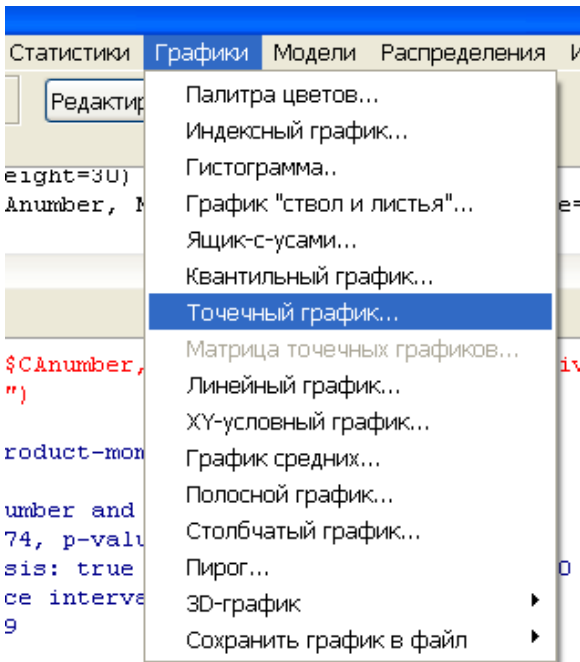
```
Pearson's product-moment
correlation
data: Моллюски$CAnumber and
Моллюски$ZMlength
t = 11.4964, df = 474
p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true
correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.3935877 0.5343949
sample estimates:
      cor
0.466946
```

*Окно определения режима расчетов*

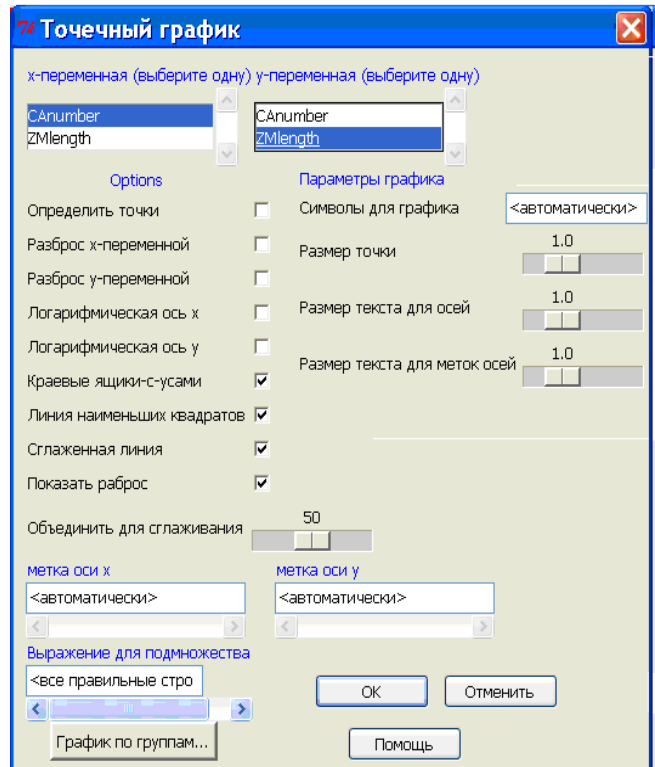
*Полученные результаты*

Полученные результаты легко скопировать из окна вывода через буфер обмена.

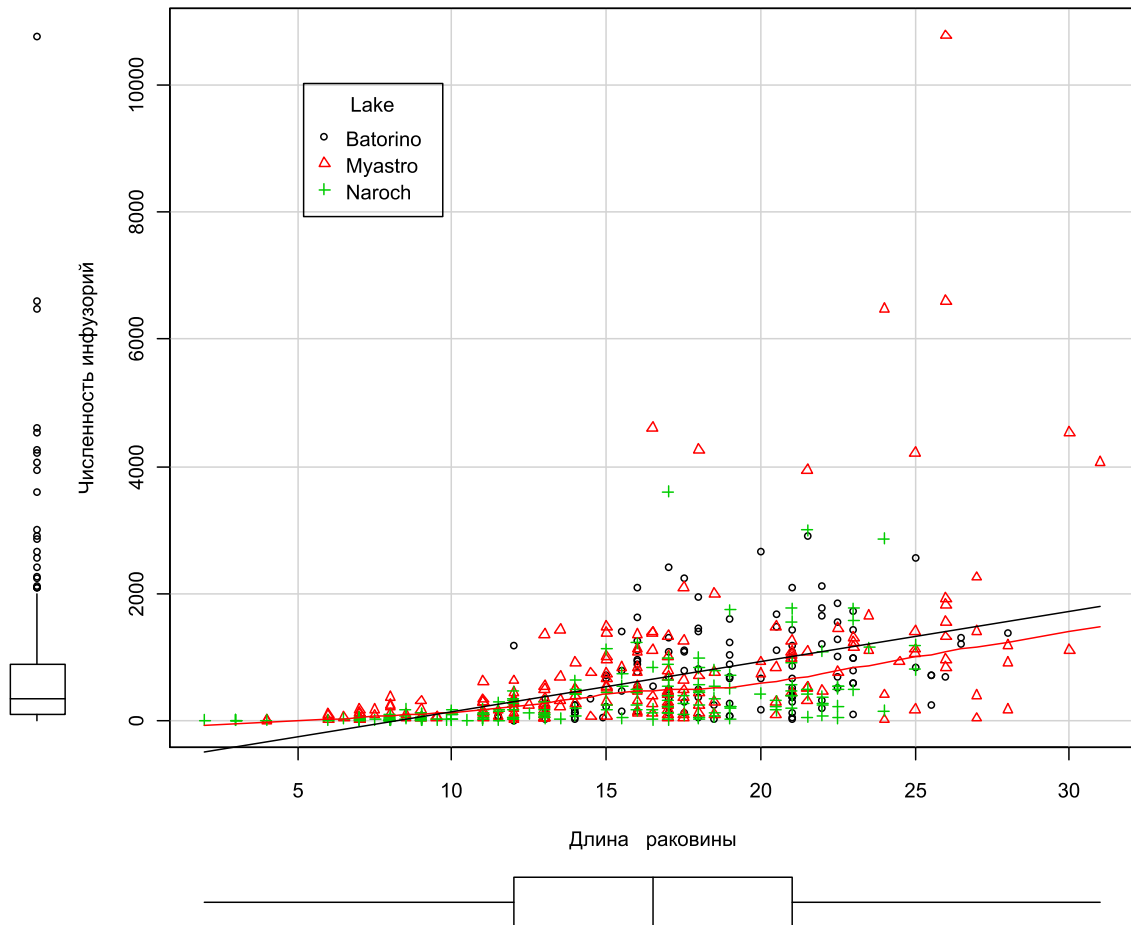
Теперь получим графическое изображение корреляционной зависимости. Выберем точечный график (scatterplot) зависимости CAnumber от ZMlength и снабдим его краевыми диаграммами размахов, линией линейного тренда по методу наименьших квадратов (зеленым цветом), линией, сглаженной по методу локальной регрессии (красным цветом), представленной с доверительной областью (пунктир). Для каждого из трех озер (переменная Lake) экспериментальные точки будут представлены разными символами.



Выбор типа графика



Режимы графических опций



График, скопированный из графического окна R Commander

Как эквивалент всем нажатиям кнопок меню R Commander, в окне скриптов появляются инструкции языка R. В нашем случае они имеют следующий вид:

```
Моллюски <-  
read.table("http://figshare.com/media/download/98923/97987",  
  header=TRUE, sep="\t", na.strings="NA", dec=".", strip.white=TRUE)  
cor.test(Моллюски$CNumber, Моллюски$ZMlength,  
  alternative="two.sided", method="pearson")  
scatterplot(CNumber ~ ZMlength | Lake, reg.line=lm, smooth=TRUE,  
  spread=TRUE, boxplots='xy', span=0.5, ylab="Численность инфузорий",  
  xlab="Длина раковины", by.groups=FALSE, data=Моллюски)
```

Сам скрипт или выводимые результаты (а также и то, и другое вместе) можно сохранить в файлах и в любой момент повторить. Тот же самый результат можно получить без запуска R Commander, загрузив сохраненный файл через консоль R.

По большому счету, не зная конструкций языка R (или просто не желая отягощать свою память их запоминанием), с использованием Rcmdr можно выполнить обработку данных с использованием почти всех базовых статистических методов. Здесь представлены параметрические и непараметрические тесты, методы подгонки различных непрерывных и дискретных распределений, анализ многомерных таблиц сопряженности, одномерный и многомерный дисперсионный анализ, метод главных компонент и кластеризация, различные формы обобщенных регрессионных моделей и др. Достойн тщательного изучения развитый аппарат анализа и тестирования полученных моделей. Детальное описание техники работы с R Commander, а также особенности реализации алгоритмов обработки данных, можно найти в руководствах (Larson-Hall, 2009; Кагр, 2014).

Тем не менее, как язык жестов не может заменить человеческого общения на естественном языке, так и знание языка R существенно расширяет границы возможностей пользователя и делает общение со средой R приятным и захватывающим. И тут автоматическая генерация скриптов в R Commander может оказаться для читателя прекрасным средством для знакомства с операторами языка R и обучения специфике вызова отдельных функций. Последующие главы руководства мы посвятим обсуждению процедур обработки данных только на уровне языковых конструкций.

#### 1.4. Объекты, пакеты, функции, устройства

Язык R принадлежит к семейству так называемых высокоуровневых объектно-ориентированных языков программирования. Для неспециалиста строгое определение понятия "объект" является достаточно абстрактным. Однако для простоты можно называть объектами все, что было создано в процессе работы с R.

Выделяют два основных типа объектов:

1. **Объекты, предназначенные для хранения данных** ("*data objects*") – это отдельные переменные, векторы, матрицы и массивы, списки, факторы, таблицы данных;
2. **Функции** ("*function objects*") – это поименованные программы, предназначенные для создания новых объектов или выполнения определенных действий над ними.

Объекты среды R, предназначенные для коллективного и свободного использования, комплектуются в пакеты, объединяемые сходной тематикой или методами обработки данных. Есть некоторое отличие между терминами *пакет* ("*package*") и *библиотека* ("*library*"). Термин "library" определяет директорию, которая может содержать один или несколько пакетов. Термин "package" обозначает совокупность функций, HTML-страниц руководств и примеров объектов данных, предназначенных для тестирования или обучения.

Пакеты устанавливаются в определенной директории операционной системы или, в неустановленном виде, могут храниться и распространяться в архивных \*.zip файлах Windows (версия пакета должна корреспондироваться с конкретной версией вашей R). Полная информация о пакете (версия, основное тематическое направление, авторы, даты изменений, лицензии, другие функционально связанные пакеты, полный список функций с указанием на их назначение и проч.) может быть получена командой `library(help=<имя_пакета>)`, например:

```
library(help=Matrix)
```

Все пакеты R относятся к одной из трех категорий: базовые ("base"), рекомендуемые ("recommended") и прочие, установленные пользователем. Получить их список на конкретном компьютере можно, подав команду `library()` или:

```
installed.packages(priority = "base")  
installed.packages(priority = "recommended")  
# Получение полного списка пакетов  
packlist <- rownames(installed.packages())  
# Вывод информации в буфер обмена в формате для Excel  
write.table(packlist,"clipboard",sep="\t", col.names=NA)
```

Базовые и рекомендуемые пакеты обычно включаются в инсталляционный файл R. Разумеется, нет необходимости сразу устанавливать "про запас" много разных пакетов. Для установки пакета достаточно в командном окне R Console выбрать пункт меню "Пакеты > Установить пакет(ы)" или ввести, например, команду:

```
install.packages(c("vegan", "xlsReadWrite", "car"))
```

Пакеты можно скачивать, например, с русского "зеркала" <http://cran.gis-lab.info>, для чего удобно воспользоваться редакцией файла Rprofile.site как показано в разделе 1.1.

Другой вариант установки пакетов – зайти на сайт <http://cran.gis-lab.info/web/packages>, выбрать нужный пакет в виде zip-файла и скачать в выбранную папку своего компьютера. В этом случае можно предварительно посмотреть всю информацию по пакету, в частности, описание входящих в него функций, и определиться, насколько он вам необходим. Далее нужно выполнить пункт командного меню "Пакеты > Установить пакеты из локальных zip-файлов".

При запуске консоли RGui загружаются только некоторые базовые пакеты. Для инициализации любого другого пакета перед непосредственным использованием его функций нужно ввести команду `library(<имя_пакета>)`.

Установить, какие пакеты загружены в каждый момент проводимой сессии, можно, подав команду:

```
sessionInfo()  
R version 2.13.2 (2011-09-30)  
Platform: i386-pc-mingw32/i386 (32-bit)  
  
attached base packages:  
[1] stats graphics grDevices utils datasets methods base  
  
other attached packages:  
[1] vegan_2.0-2 permute_0.6-3  
  
loaded via a namespace (and not attached):  
[1] grid_2.13.2 lattice_0.19-33 tools_2.13.2
```



Приведем в следующей таблице список (возможно, не исчерпывающе полный) пакетов, которые использовались в скриптах, представленных настоящей книгой:

<u>Пакеты R</u>	<u>Назначение</u>
<b><i>"Базовые" пакеты</i></b>	
base	Базовые конструкции R
compiler	Компилятор пакетов R
datasets	Набор таблиц с данными для тестирования и демонстрации функций
graphics	Базовые графические функции
grDevices	Драйверы графических устройств, палитры цветов, шрифты
grid	Функции создания графических слоев
methods	Компоненты объектно-ориентированного программирования (классы, методы)
splines	Функции работы с регрессионными сплайнами разного типа
stats	Базовые функции статистического анализа
stats4	Методы статистических функций класса S4
tcltk	Компоненты интерфейса с пользователем (меню, боксы выбора и проч.)
tools	Информационная поддержка, администрирование и документирование
utils	Различные утилиты отладки, ввода-вывода, архивирования и проч.
<b><i>"Рекомендуемые" пакеты</i></b>	
boot	Функции различных процедур бутстрепа и "складного ножа"
class	Различные алгоритмы неиерархической классификации и распознавания
cluster	Алгоритмы разделения и иерархической кластеризации
codetools	Анализ и проверка кодов R
foreign	Чтение и запись файлов в разных форматах (DBF, SPSS, DTA, Stata)
KernSmooth	Функции, обслуживающие оптимизацию ядерного сглаживания
lattice	Графические функции расширенной функциональности (Sarkar, 2008)
MASS	Набор данных и статистических функций (Venables, Ripley, 2002)
Matrix	Операции с матрицами и векторами
mgcv	Обобщенные аддитивные модели и модели со смешанными эффектами
nlme	Линейные и нелинейные модели со смешанными эффектами
nnet	Нейронные сети прямого распространения
rpart	Построение деревьев классификации и регрессии
spatial	Функции кригинга и анализа пространственного распределения точек
survival	Анализ выживаемости (модель Кокса и др.)
<b><i>Пакеты, установленные в процессе работы</i></b>	
adegenet	Алгоритмы анализа генетических расстояний
arm	Анализ моделей регрессии – приложение к книге (Gelman, Hill, 2007)
car	Процедуры, связанные с прикладным регрессионным анализом
corrplot	Отображение корреляционных матриц в графическом виде
fitdistrplus	Подбор параметров статистических распределений
FWDselect, packfor	Селекция набора информативных переменных в регрессионных моделях
gamair	Наборы данных для тестирования аддитивных моделей
geosphere	Оценка географических расстояний
ggplot2	Усовершенствованный графический пакет высокой функциональности
DAAG	Функции анализа данных и графики к книге (Maindonald, Braun, 2010)
Hmisc	Набор функций Харрела (Harrell)
HSAUR2	Приложение к книге (Everitt, Hothorn, 2010)
ISwR	Первичный статистический анализ в R
jpeg	Работа с графическими файлами jpeg
lars	Специальные виды регрессии (LARS, Lasso и др.)
lavaan	Конфирматорный анализ и модели структурных уравнений
lmodel2	Реализация моделей регрессии I и II типов (MA, SMA, RMA)

mapprools	Инструментарий работы с географическими картами
mice	Процедуры анализа и заполнения пропущенных значений
moments	Функции расчета выборочных моментов
nortest	Критерии при проверке гипотезы о нормальном распределении
outliers	Анализ выбросов в данных
pastecs	Анализ пространственных и временных рядов в экологии
pls	Регрессия на главные компоненты
pwr	Оценка статистической мощности гипотез
reshape	Гибкое преобразование таблиц данных
robustbase	Робастные методы построения регрессионных моделей
rootSolve	Нахождение корней функции с несколькими переменными
scales	Подбор цветовых шкал
sem	Модели структурных уравнений
semPlot	Визуализация структурных связей
sm	Оценка плотности распределений и методы сглаживания
sp	Классы и методы доступа к пространственным данным
spatstat	Методы пространственной статистики, подбор моделей
spdep	Пространственные зависимости: геостатистические методы и моделирование
stargazer	Вывод информации о статистических моделях в разных форматах
vcd	Визуализация категориальных данных
vegan	Выполнение расчетов по экологии сообществ (меры сходства, разнообразия и вложенности, ординация и многомерный анализ)

Если мы попробуем загрузить пакет, еще не установленный в R, или попытаемся использовать функции еще незагруженного пакета, то получим сообщения системы:

```
sem(model, data=PoliticalDemocracy)
Ошибка: не могу найти функцию "sem"
library(lavaan)
Ошибка в library(lavaan) : нет пакета под названием 'lavaan'
```

Следующая функция, представленная [K. Cichini](#), принимает в качестве исходного параметра список используемых пользователем пакетов и сама разбирается, какие следует загрузить, а какие нужно предварительно установить. Для понимания работы скрипта необходимо знание конструкций языка R, описываемых в следующем разделе, но интересующийся читатель может вернуться к приведенным командам позднее.

```
instant_pkgs <- function(pkgs) {
  pkgs_miss <- pkgs[which(!pkgs %in% installed.packages()[, 1])]
  # Инсталлируем пакеты, не подготовленные к загрузке:
  if (length(pkgs_miss) > 0) {
    install.packages(pkgs_miss)
  }
  # Загружаем пакеты, которые еще не загружены:
  attached <- search()
  attached_pkgs <- attached[grepl("package", attached)]
  need_to_attach <- pkgs[which(!pkgs %in% gsub("package:", "", attached_pkgs))]
  if (length(need_to_attach) > 0) {
    for (i in 1:length(need_to_attach))
      require(need_to_attach[i], character.only = TRUE)
  }
}
# Пример вызова:
instant_pkgs(c("base", "jpeg", "vegan"))
```



Получить список функций каждого пакета можно, например, подав команду:

```
ls(pos = "package:vegan")
```

*Примечание:* `ls()` является функцией общего назначения для вывода списка объектов в заданной среде (environment). Команда выше устанавливает в качестве такой среды пакет `vegan`. Если подать эту команду без параметров, то получим список объектов, созданных за время текущей сессии.

Получить список аргументов входящих параметров любой функции загруженного пакета можно, подав команду `args()`. Например, при запуске широко используемой нами впоследствии функции получения линейной модели `lm()` задают параметры:

```
args(lm)
function (formula, data, subset, weights, na.action,
         method = "qr", model = TRUE, x = FALSE, y = FALSE, qr = TRUE,
         singular.ok = TRUE, contrasts = NULL, offset, ...)
```

Если ввести команду, состоящую только из аббревиатуры функции (например, вычисляющей межквартильный размах `IQR`), то можно получить исходный текст функции в кодах языка R:

```
IQR
function (x, na.rm = FALSE)
diff(quantile(as.numeric(x), c(0.25, 0.75), na.rm = na.rm,
names = FALSE))
```

Продвинутый пользователь может внести изменения в этот код и "перенаправить" вызов стандартной функции на свою версию.

Однако если мы захотим таким же образом посмотреть код функции `predict()`, которая используется для расчета прогнозируемых значений линейной модели, то получим:

```
predict
function (object, ...)
UseMethod("predict")
```

В данном случае `predict()` представляет собой "универсальную" функцию: в зависимости от того, объект какой модели подается на ее вход (`lm` для линейной регрессии, `glm` для пуассоновской или логистической регрессии, `lme` для модели со смешанными эффектами и т.д.), актуализируется соответствующий метод получения прогнозируемых значений. В частности, эта функция используется для реализации следующих методов:

```
methods("predict")
[1] predict.ar*           predict.Arima*
[3] predict.arima0*       predict.glm
[5] predict.HoltWinters*   predict.lm
[7] predict.loess*         predict.nlm
[9] predict.nls*           predict.poly
[11] predict.ppr*           predict.pprcomp*
[13] predict.princomp*      predict.smooth.spline*
[15] predict.smooth.spline.fit* predict.StructTS*
Non-visible functions are asterisked
```

Этот пример связан с идеями объектно-ориентированного программирования (ООП), лежащими в основе среды R. Для ООП в стиле **S3 метод** – это, собственно говоря, функция, которая вызывается другой *универсальной* (generic) функцией, такой, например, как `print()`, `plot()` или `summary()`, в зависимости от класса объекта, подаваемого на ее вход. При этом за "объектную ориентированность" отвечает атрибут `class`, который обеспечивает корректную диспетчеризацию и вызов необходимого метода для данного объекта. Так "функция-метод" для получения прогнозируемых значений обобщенной линейной модели будет иметь вызов `predict.glm()`, при сглаживании сплайнами – `predict.smooth.spline()` и т.д. Подробную информацию о модели ООП **S3** можно получить в разделе справки `S3Methods`, а по более продвинутой модели **S4** – в разделе `Methods`.

Наконец, рассмотрим некоторые простейшие приемы сохранения результатов работы, полученных во время сессии R:

- `sink(file= <имя файла>)` – выводит результаты выполнения последующих команд в режиме реального времени в файл с заданным именем; для прекращения действия этой команды необходимо выполнить команду `sink()` без параметров;
- `save(file= <имя файла>, <список сохраняемых объектов>)` – сохраняет указанные объекты в двоичном файле XDR-формата, с которым можно работать в любой операционной системе;
- `load(file= <имя файла>)` – восстанавливает сохраненные объекты в текущей среде;
- `save.image(file= <имя файла>)` – сохраняет все объекты, созданные в ходе работы, в виде специфичного для R `rd`-файла.

Пример передачи сформированной таблицы с данными в буфер обмена в формате, совместимом со структурой листа Excel, был приведен выше в настоящем разделе. В главе 6 будет приведен пример передачи данных из объекта линейной модели в файл Word.

Среда R может генерировать пиксельное изображение необходимого качества почти для любого разрешения дисплея или устройства печати, а также сохранить полученные графические окна в файлах разного формата. Для каждого устройства графического вывода существует функция драйвера: для получения полного списка драйверов можно ввести команду `help(Devices)`. Среди графических устройств наиболее употребительными являются:

- `windows()` – графическое окно Windows (экран, принтер или метафайл).
- `png()`, `jpeg()`, `bmp()`, `tiff()` – вывод в растровый файл соответствующего формата;
- `pdf()`, `postscript()` – вывод графической информации в файл PDF или PostScript.

По завершению работы с устройством вывода следует отключить его драйвер командой `dev.off()`. Существует возможность активизации нескольких устройств графического вывода одновременно и переключения между ними: см., например, соответствующий раздел в книге Шипунова с соавт. (2012, с. 278).

# 1. ОПИСАНИЕ ЯЗЫКА R



## 2.1. Типы данных языка R

Все объекты данных (а, следовательно, и переменные) в R можно разделить на следующие классы (т.е. типы объектов):

- **numeric** – объекты, к которым относятся целочисленные (`integer`) и действительные числа (`double`);
- **logical** – логические объекты, которые принимают только два значения: `FALSE` (сокращенно `F`) и `TRUE` (`T`);
- **character** – символьные объекты (значения переменных задаются в двойных, либо одинарных кавычках).

В R можно создавать имена для различных объектов (функций или переменных) как на латинице, так и на кириллице, но следует учесть, что **а** (кириллица) и **a** (латиница) – это два разных объекта. Кроме того, среда R чувствительна к регистру, т.е. строчные и заглавные буквы в ней различаются. Имена переменных (идентификаторы) в R должны начинаться с буквы (или точки `.`) и состоять из букв, цифр, знаков точки и подчеркивания. При помощи команды `? <имя>` можно проверить, существует ли переменная или функция с указанными именем.

Проверка на принадлежность переменной к определенному классу проверяется функциями `is.numeric(<имя_объекта>)`, `is.integer(<имя>)`, `is.logical(<имя>)`, `is.character(<имя>)`, а для преобразования объекта в другой тип можно использовать функции `as.numeric(<имя>)`, `as.integer(<имя>)`, `as.logical(<имя>)`, `as.character(<имя>)`.

В R существует ряд специальных объектов:

- `Inf` – положительная или отрицательная бесконечность (обычно результат деления вещественного числа на 0);
- `NA` – "отсутствующее значение" (Not Available);
- `NaN` – "не число" (Not a Number).

Проверить, относится ли переменная к какому-либо из этих специальных типов, можно, соответственно, функциями `is.finite(<имя>)`, `is.na(<имя>)` и `is.nan(<имя>)`.

*Выражение (expression)* языка R представляет собой сочетание таких элементов, как оператор присваивания, арифметические или логические операторы, имена объектов и имена функций. Результат выполнения выражения, как правило, сразу отображается в командном или графическом окне. Однако при выполнении операции присваивания результат сохраняется в соответствующем объекте и на экран не выводится.

В качестве оператора присваивания в R можно использовать либо символ `"="`, либо пару символов `"<-"` (присваивание определенного значения объекту слева) или `"->"` (присваивание значения объекту справа). Хорошим стилем программирования считается использование `"<-"`.

Выражения языка R организуются в скрипте по строкам. В одной строке можно ввести несколько команд, разделяя их символом  `";"`. Одну команду можно также расположить на двух (и более) строках.

Объекты типа **numeric** могут составлять выражения с использованием традиционных арифметических операций `+` (сложение), `-` (вычитание), `*` (умножение), `/` (деление), `^` (возведение в степень), `%/%` (целочисленное деление), `%%` (остаток от деления). Операции имеют обычный приоритет, т.е. сначала выполняется возведение в степень, затем

умножение или деление, потом уже сложение или вычитание. В выражениях могут использоваться круглые скобки и операции в них имеют наибольший приоритет.

Логические выражения могут составляться с использованием следующих логических операторов:

- "Равно" ==
- "Не равно" !=
- "Меньше" <
- "Больше" >
- "Меньше либо равно" <=
- "Больше либо равно" >=
- "Логическое И" &
- "Логическое ИЛИ" |
- "Логическое НЕ" !

## 2.2. Векторы и матрицы

**Вектор** представляет собой поименованный одномерный объект, содержащий набор однотипных элементов (числовые, логические, либо текстовые значения – никакие их сочетания не допускаются). Для создания векторов небольшой длины в R используется функция конкатенации `c()` (от "*concatenate*" – объединять, связывать). В качестве аргументов этой функции через запятую перечисляют объединяемые в вектор значения, например:

```
my.vector <- c(1, 2, 3, 4, 5)
my.vector
[1] 1 2 3 4 5
```

Вектор можно создать также при помощи функции `scan()`, которая "считывает" последовательно вводимые с клавиатуры значения:

```
X <- scan()
1: 2.9 # после каждого нового значения нажать клавишу "Ввод"
2: 3.1
3: 3.4
4: 3.4
5: 3.7
6: 3.7
7: 2.8
8: 2.5
9: # выполнение команды scan завершают введением пустой строки
Read 8 items # программа сообщает о считывании 8 значений
X
[1] 2.9 3.1 3.4 3.4 3.7 3.7 2.8 2.5
```

Один из недостатков создания векторов при помощи функции `scan()` состоит в том, что если при вводе значений с клавиатуры допущена ошибка, то приходится, либо начать ввод заново, либо воспользоваться специальными инструментами коррективы (например, функцией `fix()`; здесь эти способы не рассматриваются).

Для создания векторов, содержащих последовательную совокупность чисел, удобна функция `seq()` (от "*sequence*" – последовательность). Так, вектор с именем `S`, содержащий совокупность целых чисел от 1 до 7, можно создать следующим образом:

```
S <- seq(1,7)
S
[1] 1 2 3 4 5 6 7
```

Идентичный результат будет получен при помощи команды

```
S <- 1:7
S
[1] 1 2 3 4 5 6 7
```

В качестве дополнительного аргумента функции `seq()` можно задать шаг приращения чисел:

```
S <- seq(from = 1, to = 5, by = 0.5)
S
[1] 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0
```

Векторы, содержащие одинаковые значения, создают при помощи функции `rep()` (от "*repeat*" – повторять). Например, для формирования текстового вектора `Text`, содержащего пять значений "test", следует выполнить команду

```
Text <- rep("test", 5)
Text
[1] "test" "test" "test" "test" "test"
```

Система R способна выполнять самые разнообразные операции над векторами. Так, несколько векторов можно объединить в один, используя уже рассмотренную выше функцию конкатенации:

```
v1 <- c(1, 2, 3)
v2 <- c(4, 5, 6)
V <- c(v1, v2)
V
[1] 1 2 3 4 5 6
```

Если попытаться объединить, например, текстовый вектор с числовым, сообщение об ошибке не появится – программа просто преобразует все значения в текстовые:

```
# создаем текстовый вектор text.vect:
text.vect <- c("a", "b", "c")
# объединяем числовой вектор v1 (см. выше)
# с текстовым вектором text.vect:
new.vect <- c(v1, text.vect)
# просмотр содержимого нового вектора new.vect:
new.vect
[1] "1" "2" "3" "a" "b" "c"
# все значения нового вектора взяты в кавычки,
# что указывает на их текстовую природу;
# для подтверждения этого воспользуемся командой mode():
mode(new.vect)
[1] "character" # все верно: "character" значит "текстовый"
```

Для работы с определенным элементом вектора необходимо иметь способ отличать его от других элементов. Для этого при создании вектора всем его компонентам автоматически присваиваются индексные номера, начиная с 1. Чтобы обратиться к конкретному элементу необходимо указать имя вектора и индекс этого элемента в квадратных скобках:

```
# создадим числовой вектор y, содержащий 5 числовых значений:  
y <- c(5, 3, 2, 6, 1)  
# проверим, чему равен третий элемент вектора y:  
y[3]  
[1] 2
```

Используя индексные номера, можно выполнять различные операции с избранными элементами разных векторов:

```
# создадим еще один числовой вектор z, содержащий 3 значения:  
z <- c(0.5, 0.1, 0.6)  
# умножим первый элемент вектора y на третий элемент вектора z  
# (т.е. 5*0.6):  
y[1]*z[3]  
[1] 3
```

Индексирование является мощным инструментом, позволяющим создавать совокупности значений в соответствии с определенными критериями. Например, для вывода на экран 3-го, 4-го и 5-го значений вектора *y* необходимо выполнить команду

```
y[3:5]  
[1] 2 6 1
```

Из этого же вектора мы можем выбрать, например, только первое и четвертое значения, используя уже известную нам функцию конкатенации *c()*:

```
y[c(1, 4)]  
[1] 5 6
```

Похожим образом мы можем удалить первое и четвертое значения из вектора *y*, применив знак "минус" перед функцией конкатенации:

```
y[-c(1, 4)]  
[1] 3 2 1
```

В качестве критерия для выбора значений может служить логическое выражение. Для примера выберем из вектора *y* все значения  $> 2$ :

```
y[y>2]  
[1] 5 3 6
```

Индексирование является также удобным инструментом для внесения исправлений в имеющихся векторах. Например, так можно исправить второе значение созданного нами ранее вектора *z* с 0.1 на 0.3:

```
z[2] <- 0.3
```

```
z
[1] 0.5 0.3 0.6
```

Для упорядочения значений вектора по возрастанию или убыванию используют функцию `sort()` в сочетании с аргументом `decreasing = FALSE` или `decreasing = TRUE` соответственно ("*decreasing*" значит "убывающий"):

```
sort(z) # по умолчанию decreasing = FALSE
[1] 0.3 0.5 0.6
sort(z, decreasing = TRUE)
[1] 0.6 0.5 0.3
```

**Матрица** представляет собой двумерный вектор. В R для создания матриц служит одноименная функция:

```
my.mat <- matrix(seq(1, 16), nrow = 4, ncol = 4)
my.mat
  [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]  1   5   9  13
[2,]  2   6  10  14
[3,]  3   7  11  15
[4,]  4   8  12  16
```

Обратите внимание на то, что по умолчанию заполнение матрицы происходит по столбцам, т.е. первые четыре значения входят в первый столбец, следующие четыре значения – во второй столбец, и т.д. Такой порядок заполнения можно изменить, придав специальному аргументу `byrow` (от "*by row*" – по строкам) значение `TRUE`:

```
my.mat <- matrix(seq(1, 16), nrow = 4, ncol = 4, byrow = TRUE)
my.mat
  [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]  1   2   3   4
[2,]  5   6   7   8
[3,]  9  10  11  12
[4,] 13  14  15  16
```

В качестве заголовков строк и столбцов создаваемой матрицы автоматически выводятся соответствующие индексные номера (строки: `[1,]`, `[2,]`, и т.д.; столбцы: `[,1]`, `[,2]`, и т.д.). Для придания пользовательских заголовков строкам и столбцам матриц используют функции `rownames()` и `colnames()` соответственно. Например, для обозначения строк матрицы `my.mat` буквами A, B, C и D необходимо выполнить следующее:

```
rownames(my.mat) <- c("A", "B", "C", "D")
my.mat
  [,1] [,2] [,3] [,4]
A    1    2    3    4
B    5    6    7    8
C    9   10   11   12
D   13   14   15   16
```

В матрице `my.mat` имеется 16 значений, которые как раз вмещаются в имеющиеся четыре строки и четыре столбца. Но что произойдет, если, например, попытаться вместить вектор из 12 чисел в матрицу того же размера? В подобных случаях R заполняет недостающие значения за счет "зацикливания" (*recycling*) короткого вектора. Вот как это выглядит на примере:

```
my.mat2 <- matrix(seq(1, 12), nrow = 4, ncol = 4, byrow = TRUE)
my.mat2
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    2    3    4
[2,]    5    6    7    8
[3,]    9   10   11   12
[4,]    1    2    3    4
```

Как видим, для заполнения ячеек последней строки матрицы `my.mat2` программа снова использовала числа 1, 2, 3, и 4.

Альтернативный способ создания матриц заключается в применении функции `dim()` (от "*dimension*" – *размерность*). Так, матрицу `my.mat` мы могли бы сформировать из одномерного вектора следующим образом:

```
my.mat <- 1:16
# Задаем размерность 4x4 вектору my.mat:
dim(my.mat) <- c(4, 4)
my.mat
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    5    9   13
[2,]    2    6   10   14
[3,]    3    7   11   15
[4,]    4    8   12   16
# Функция dim() очень полезна. Она позволяет проверить
# размерность уже имеющейся матрицы (или таблицы данных):
dim(my.mat)
[1] 4 4
```

Матрицу можно собрать также из нескольких векторов, используя функции `cbind()` (от *column* и *bind* – *столбец* и *связывать*) или `rbind()` (от *row* и *bind* – *строка* и *связывать*):

```
# Создадим четыре вектора одинаковой длины:
a <- c(1, 2, 3, 4)
b <- c(5, 6, 7, 8)
d <- c(9, 10, 11, 12)
e <- c(13, 14, 15, 16)
# Объединим эти векторы при помощи функции cbind():
cbind(a, b, d, e)
      a b  d  e
[1,] 1 5  9 13
[2,] 2 6 10 14
[3,] 3 7 11 15
[4,] 4 8 12 16
# Объединим те же векторы при помощи функции rbind():
rbind(a, b, d, e)
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    5    9   13
[2,]    2    6   10   14
[3,]    3    7   11   15
[4,]    4    8   12   16
```



a	1	2	3	4
b	5	6	7	8
d	9	10	11	12
e	13	14	15	16

Практически все векторные операции одинаково применимы в отношении матриц и массивов. Так, путем индексирования мы можем извлекать из матриц необходимые элементы и далее подвергать их требуемым преобразованиям. Рассмотрим лишь несколько примеров:

```
# Извлечем элемент матрицы my.mat, расположенный на
# пересечении 2-й строки и 3-го столбца:
my.mat[2, 3]
[1] 7
# Извлечем из матрицы все элементы, находящиеся в 4-м столбце
# (для этого номера строк перед запятой можно не указывать):
my.mat[, 4]
[1] 4 8 12 16
# Извлечем из матрицы все элементы, находящиеся в 1-й строке
# (в этом случае нет необходимости указывать номера столбцов):
my.mat[1, ]
[1] 1 2 3 4
# Перемножим 1-й и 4-й столбцы матрицы (поэлементно):
my.mat[, 1]*my.mat[, 4]
[1] 4 40 108 208
```

Отметим, наконец, что при необходимости матрицу можно транспонировать (т.е. поменять местами строки и столбцы) при помощи функции `t()` (от *transpose*):

```
t(my.mat)
  A B C D
[1,] 1 5 9 13
[2,] 2 6 10 14
[3,] 3 7 11 15
[4,] 4 8 12 16
```

### 2.3. Факторы

В статистике данные очень часто группируют в соответствии с тем или иным признаком, например, полом, социальным положением, стадией болезни, местом отбора проб и т.п. В R существует специальный класс векторов – **факторы** (*factors*), которые предназначены для хранения кодов соответствующих *уровней* номинальных признаков. Часто уровни факторов кодируют в виде чисел. В таких случаях очень важно "проинструментировать" программу так, чтобы она "распознавала" уровни номинальной переменной от чисел как таковых.

Предположим, что в эксперименте по испытанию эффективности нового медицинского препарата было задействовано 10 пациентов-добровольцев, из которых шесть пациентов принимали новый препарат, а четверо остальных – плацебо (например, таблетки активированного угля). Для обозначения членов этих двух групп мы можем использовать коды 1 (препарат) и 0 (плацебо). Соответственно, информацию о всех десяти участниках эксперимента мы могли бы сохранить в виде следующего вектора:

```
treatment <- c(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
treatment
[1] 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
```

При таком подходе, однако, программа будет "рассматривать" вектор `treatment` в качестве числового (проверьте при помощи команды `class(treatment)`). Это будет ошибкой с нашей стороны, поскольку ноль и единица обозначают лишь два уровня номинальной переменной. С таким же успехом мы могли бы использовать, например, 10 для обозначения контрольной группы пациентов (т.е. пациентов принимавших плацебо) и 110 для обозначения пациентов, принимавших испытываемый препарат. Для преобразования числового (или текстового) вектора в фактор в R существует одноименная функция `factor()`:

```
treatment <- factor(treatment, levels = c(0, 1))
treatment
[1] 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
Levels: 0 1
```

Обратите внимание на то, что теперь при выводе содержимого объекта `treatment` программа подсказывает нам, что этот объект является фактором с двумя уровнями (`Levels: 0 1`). Дополнительно убедиться в этом можно при помощи все той же команды `class(treatment)`:

```
class(treatment)
[1] "factor"
```

Более надежным подходом, позволяющим не запутаться при выполнении анализа, является кодировка уровней факторов при помощи текстовых значений, а не чисел. Например, в нашем примере можно присвоить значение `yes` пациентам, принимавшим препарат, и значение `no` пациентам из контрольной группы. Мы можем перекодировать уровни уже имеющегося фактора `treatment` при помощи функции `levels()`:

```
levels(treatment) <- c("no", "yes")
treatment
[1] yes yes yes yes yes yes no no no no
Levels: no yes
```

Заметьте, что при выводе содержимого вектора `treatment` коды пациентов не заключены в двойные кавычки, как это обычно бывает в случае с текстовыми значениями. Это является одним из внешних признаков того, что мы имеем дело именно с фактором, а не с текстовым вектором, содержащим шесть значений "yes" и четыре значения "no".

Те же факторы легко преобразовать обратно в числовой вектор, состоящий из порядковых номеров уровней факторов:

```
as.numeric(treatment)
[1] 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1
```

Существует также специальная команда для создания факторов:

```
gl(n, k, length = n*k, labels = 1:n),
```

где `n` – количество уровней фактора; `k` – число повторов для каждого уровня; `length` – размер итогового объекта; `labels` – необязательный аргумент, который можно

использовать для указания названий каждого уровня фактора. Например, выполнение следующей команды приведет к созданию вектора `my.fac`, являющегося фактором с двумя уровнями – `Control` и `Treatment`, причем каждая из меток "Control" и "Treatment" будет повторена по 8 раз:

```
my.fac = gl(2, 8, labels = c("Control", "Treatment"))
my.fac
[1] Control Control Control Control Control Control Control
[8] Control Treatment Treatment Treatment Treatment Treatment Treatment
[15] Treatment Treatment
Levels: Control Treatment
```

Еще одна полезная команда создает факторы, разделив область вариации числового вектора `x` на интервалы:

```
cut(x, breaks, labels),
```

где в качестве аргумента `breaks` может выступать либо необходимое число интервалов, либо вектор, содержащий список "точек разрыва", а `labels` определяет названия уровней:

```
x <- c(1,2,3,4,5,2,3,4,5,6,7)
cut(x, breaks=3)
[1] (0.994,3] (0.994,3] (3,5] (3,5] (3,5] (0.994,3] (3,5]
[8] (3,5] (3,5] (5,7.01] (5,7.01]
Levels: (0.994,3] (3,5] (5,7.01]
cut(x, breaks=3, labels = letters[1:3])
[1] a a b b b a b b b c c
Levels: a b c
cut(x, breaks=quantile(x, c(0, .25, .50, .75, 1)),
     labels=c("Q1", "Q2", "Q3", "Q4"), include.lowest=TRUE)
[1] Q1 Q1 Q2 Q2 Q3 Q1 Q2 Q2 Q3 Q4 Q4
Levels: Q1 Q2 Q3 Q4
```

В третьем фрагменте кода числовой вектор "разрезан" по квартильным значениям, а параметр `include.lowest` указан, чтобы избежать появления неопределенности "NA" для значения `x = 1`.

## 2.4. Списки и таблицы

В отличие от вектора или матрицы, которые могут содержать данные только одного типа, в *список* (*list*) или *таблицу* (*data frame*) можно включать сочетания любых типов данных. Это позволяет эффективно, т.е. в одном объекте, хранить разнородную информацию.

Каждый компонент списка может являться переменной, вектором, матрицей, фактором или другим списком. Кроме того, эти элементы могут принадлежать к различным типам: числа, строки символов, булевы переменные. Списки являются наиболее общим средством хранения внутрисистемной информации: в частности, результаты большинства статистических анализов в программе R хранятся в объектах-списках.

Для создания списков в R служит одноименная функция `list()`. Рассмотрим пример:

```

# Сначала создадим три разнотипных вектора - с текстовыми,
# числовыми и логическими значениями:
vector1 <- c("A", "B", "C")
vector2 <- seq(1, 3, 0.5)
vector3 <- c(FALSE, TRUE)
# Теперь объединим эти три вектора в один объект-список,
# компонентам которого присвоим имена Text, Number и Logic:
my.list <- list(Text=vector1, Number=vector2, Logic=vector3)
# Просмотрим содержимое созданного списка:
my.list
$Text
[1] "A" "B" "C"
$Number
[1] 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
$Logic
[1] FALSE TRUE

```

К элементам списка можно получить доступ посредством трех различных операций индексации. Для обращения к поименованным компонентам применяют знак \$. Так, для извлечения компонентов Text, Number и Logic из созданного нами списка my.list необходимо последовательно ввести следующие команды:

```

my.list$Text
[1] "A" "B" "C"
my.list$Number
[1] 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
my.list$Logic
[1] FALSE TRUE

```

Имеется возможность извлекать из списка не только его поименованные компоненты-векторы, но и отдельные элементы, входящие в эти векторы. Для этого необходимо воспользоваться уже рассмотренным ранее способом – индексацией при помощи квадратных скобок. Единственная особенность работы со списками здесь состоит в том, что сначала необходимо указать имя компонента списка, используя знак \$, а уже затем номер(а) отдельных элементов этого компонента:

```

my.list$Text[2]
[1] "B"
my.list$Number[3:5]
[1] 2.0 2.5 3.0
my.list$Logic[1]
[1] FALSE

```

Извлечение компонентов списка можно осуществлять также с использованием двойных квадратных скобок, в которые заключается номер компонента списка:

```

my.list[[1]]
[1] "A" "B" "C"
my.list[[2]]
[1] 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
my.list[[3]]
[1] FALSE TRUE

```

После двойных квадратных скобок с индексным номером компонента списка можно также указать номер(а) отдельных элементов этого компонента:

```
my.list[[1]][2]
[1] "B"
my.list[[2]][3:5]
[1] 2.0 2.5 3.0
my.list [[3]][1]
[1] FALSE
```

Созданный нами список `my.list` содержал всего лишь три небольших вектора, и мы знали, какие это векторы, и на каком месте в списке они стоят. Однако на практике можно столкнуться с гораздо более сложно организованными списками, индексирование которых может быть затруднено из-за отсутствия представлений об их структуре. Для выяснения структуры объектов в языке R имеется специальная функция `str()` (от *structure*):

```
str(my.list)
List of 3
 $ Text   : chr [1:3] "A" "B" "C"
 $ Number: num [1:5] 1 1.5 2 2.5 3
 $ Logic  : logi [1:2] FALSE TRUE
```

Из приведенного примера следует, что список `my.list` включает 3 компонента (`List of 3`) с именами `Text`, `Number` и `Logic` (перечислены в отдельных строках после знака `$`). Эти компоненты относятся к символьному (`chr`), числовому (`num`) и логическому (`logi`) типам векторов соответственно. Кроме того, команда `str()` выводит на экран первые несколько элементов каждого вектора.

**Таблица** данных (*data frame*) представляет собой объект R, по структуре напоминающий лист электронной таблицы Microsoft Excel. Каждый столбец таблицы является вектором, содержащим данные определенного типа. При этом действует правило, согласно которому все столбцы должны иметь одинаковую длину (собственно, с "точки зрения" R таблица данных является частным случаем списка, в котором все компоненты-векторы имеют одинаковый размер).

Таблицы данных – это основной класс объектов R, используемых для хранения данных. Обычно такие таблицы подготавливаются при помощи внешних приложений (особенно популярна и удобна программа Microsoft Excel) и затем загружаются в среду R. Подробнее об импортировании данных в R будет рассказано ниже. Тем не менее, небольшую таблицу можно собрать из нескольких векторов средствами самой системы R. Для этого используют функцию `data.frame()`.

Предположим, у нас есть наблюдения по общей численности мужского (`Male`) и женского (`Female`) населения в трех городах `City1`, `City2`, и `City3`. Представим эти данные в виде одной таблицы с именем `CITY`. Для начала создадим текстовые векторы с названиями городов (`city`) и пола (`sex`), а также вектор со значениями численности представителей каждого пола (`number`):

```
city <- c("City1", "City1", "City2", "City2", "City3", "City3")
sex <- c("Male", "Female", "Male", "Female", "Male", "Female")
number <- c(12450, 10345, 5670, 5800, 25129, 26000)
```

Теперь объединим эти три вектора в одну таблицу данных и посмотрим, что получилось:

```
CITY <- data.frame(City = city, Sex = sex, Number = number)
CITY
  City Sex Number
1 City1 Male 12450
2 City1 Female 10345
3 City2 Male 5670
4 City2 Female 5800
5 City3 Male 25129
6 City3 Female 26000
```

Обратите внимание на синтаксис функции `data.frame()`: ее аргументы перечисляются в формате "заголовок столбца = добавляемый вектор". В качестве заголовков столбцов могут выступать любые пользовательские имена, удовлетворяющие требованиям R (см. об этом подробнее в разделе 2.1).

Извлечь отдельные компоненты таблиц для выполнения необходимых вычислений, как и в примерах со списками, можно с использованием знака `$`, квадратных скобок с указанием двух индексов [`<номер_строки>`, `номер_столбца`], двойных квадратных скобок [`[]`], либо непосредственно по имени столбца:

```
CITY$Sex
[1] Male Female Male Female Male Female
Levels: Female Male
```

```
CITY$Number
[1] 12450 10345 5670 5800 25129 26000
```

*# Идентичные результаты можно получить при помощи команд:*

```
CITY[,2]
[1] Male Female Male Female Male Female
Levels: Female Male
```

```
CITY[[3]]
[1] 12450 10345 5670 5800 25129 26000
```

```
CITY["Sex"]
[1] Male Female Male Female Male Female
Levels: Female Male
```

```
CITY["Number"]
[1] 12450 10345 5670 5800 25129 26000
```

После имени или индексного номера столбца можно указывать индексные номера отдельных ячеек таблицы, что позволяет извлекать содержимое этих ячеек:

*# Извлекаем 4-й элемент из столбца Number:*

```
CITY$Number[4]
[1] 5800
```

*# Извлекаем элементы 1-3 из столбца Number:*

```
CITY$Number[1:3]
[1] 12450 10345 5670
```

```

# Извлекаем все значения численности, превышающие 10000
CITY$Number[CITY$Number > 10000]
[1] 12450 10345 25129 26000
# Извлекаем все значения численности мужского населения:
CITY$Number[CITY$Sex == "Male"]
[1] 12450 5670 25129
# Повторяем те же команды, но с использованием []:
CITY[4, 3]
[1] 5800
CITY[1:3, 3]
[1] 12450 10345 5670
CITY[CITY$Number >10000, 3]
[1] 12450 10345 25129 26000
CITY[CITY$Sex == "Male", 3]
[1] 12450 5670 25129

```

При работе с большими таблицами данных бывает сложно визуально исследовать всё их содержимое перед началом анализа. Однако визуального просмотра содержимого таблиц и не требуется – полную сводную информацию о них (равно как и о других объектах R) можно легко получить при помощи упомянутой ранее функции `str()`:

```

str(CITY)
'data.frame': 6 obs. of 3 variables:
 $ City : Factor w/ 3 levels "City1","City2",...: 1 1 2 2 3 3
 $ Sex : Factor w/ 2 levels "Female","Male": 2 1 2 1 2 1
 $ Number: num 12450 10345 5670 5800 25129 ...

```

Как следует из представленного отчета, объект `CITY` является таблицей данных, в состав которой входят три переменные с шестью наблюдениями каждая. Две из этих переменных – `City` и `Sex` – программа автоматически распознала как факторы с тремя и двумя уровнями соответственно. Переменная `Number` является количественной. Для удобства выводятся также несколько первых значений каждой переменной.

Часто возникает необходимость выяснить лишь имена переменных, входящих в таблицу данных. Это можно сделать при помощи команды `names()`:

```

names(CITY)
[1] "City" "Sex" "Number"

```

Имеется также возможность быстро просмотреть несколько первых или несколько последних значений каждой переменной, входящей в состав таблицы данных. Для этого используются функции `head()` и `tail()` соответственно:

```

head(CITY, n = 3)
  City Sex Number
1 City1 Male 12450
2 City1 Female 10345
3 City2 Male 5670

tail(CITY, n = 2)
  City Sex Number
5 City3 Male 25129
6 City3 Female 26000

```

При необходимости внесения исправлений в таблицу можно воспользоваться встроенным в R редактором данных. Внешне этот редактор напоминает обычный лист Excel, однако имеет весьма ограниченные функциональные возможности. Все, что он позволяет делать – это добавлять новые или исправлять уже введенные значения переменных, изменять заголовки столбцов, а также добавлять новые строки и столбцы. Работая в стандартной версии R, редактор данных можно запустить из меню "Файлы > Редактор данных", либо выполнив команду `fix()` (*fix* – исправлять, чинить) из командной строки консоли R (например, `fix(CITY)`). После внесения исправлений редактор просто закрывают – все изменения будут сохранены автоматически.

### Заполнение пустых значений

Часто на практике некоторые значения в таблице отсутствуют, что может быть обусловлено множеством причин: на момент измерения прибор вышел из строя, по невнимательности персонала измерение не было занесено в протокол исследования, испытуемый отказался отвечать на определенный вопрос(ы) в анкете, была утеряна проба, и т.п. Ячейки с такими отсутствующими значениями (*missing values*) в таблицах данных R не могут быть просто пустыми – иначе столбцы таблицы окажутся разной длины. Для обозначения отсутствующих наблюдений в языке R, как указывалось ранее, имеется специальное значение – NA (*not available* – не доступно). В разделе 4.4 мы остановимся на решении проблемы заполнения пропусков подробнее. Здесь же отметим, что если значение NA имеет смысл нуля (например, экземпляров некоего вида обнаружено не было), то легко произвести эту замену в таблице DF командой

```
DF[is.na(DF)] <- 0
```

### Сортировка таблиц

Сортировка строк таблицы по различным ключам не представляет труда. Для этого используется функция `order()`:

```
DF <- data.frame(X1=c(1,15,1,3), X2=c(1,0,7,0), X3=c(1,0,1,2),
                X4=c(7,4,41,0), X5=c(1,0,5,3))
row.names(DF) <- c("A","B","C","D")
# DF1 - таблица, столбцы которой отсортированы
# по убыванию суммы значений
DF1 <- DF[, rev(order(colSums(DF)))]
# DF2 - таблица, строки которой отсортированы в восходящем
# порядке по 1 столбцу, затем в нисходящем по второму
DF2 <- DF[order(DF$X1, -DF$X2), ]
```

### Объединение таблиц

Пусть мы имеем две таблицы:

DF1				
Y	N	A	B	C
12	22	0	1	0
12	23	1	3	0
12	24	0	0	1

DF2				
Y	N	A	B	D
13	22	0	1	2
13	23	0	3	0
13	24	1	0	5

Объединить их столбцы можно с использованием известной нам функции:



```
cbind(DF1, DF2)
  Y  N A B C  Y  N A B D
1 12 22 0 1 0 13 22 0 1 2
2 12 23 1 3 0 13 23 0 3 0
3 12 24 0 0 1 13 24 1 0 5
```

Для объединения строк мы должны предварительно преобразовать объединяемые таблицы к единому списку столбцов:

```
DF1[, names(DF2) [!(names(DF2) %in% names(DF1))]] <- NA
DF2[, names(DF1) [!(names(DF1) %in% names(DF2))]] <- NA
rbind(DF1, DF2)
  Y  N A B C  D
1 12 22 0 1 0 NA
2 12 23 1 3 0 NA
3 12 24 0 0 1 NA
4 13 22 0 1 NA 2
5 13 23 0 3 NA 0
6 13 24 1 0 NA 5
```

Аналогичную операцию мы можем выполнить с помощью команды

```
merge(DF1, DF2, all = TRUE)
```

Функция `merge()` позволяет выполнять объединение таблиц всеми распространенными способами join-операций языка SQL.

## 2.5. Импорт данных в R

В предыдущих разделах было рассмотрено, как, работая непосредственно в системе R, можно создать небольшие по объему объекты для хранения данных (векторы, матрицы, списки, таблицы данных). Следует отметить, однако, что возможности системы R по вводу и редактированию данных умышленно ограничены ее создателями, которые предполагали, что для этого будут использоваться другие средства (например, программа Microsoft Excel или базы данных). Поэтому подлежащие анализу объемные таблицы данных обычно подготавливаются при помощи сторонних приложений, и только потом загружаются в рабочую среду R из внешних файлов. Хотя предпочтение при этом отдается текстовым файлам, выше был упомянут специальный пакет `foreign`, функции которого позволяют импортировать таблицы, сохраненные во множестве других распространенных форматов (Excel, SPSS, SAS, STATA, Access, Matlab, SQL, Oracle, и т.п.; см. также руководство [R Data Import/Export](#)).

Импорт данных в систему R часто вызывает проблемы у тех, кто только начинает работать с этой программой. Тем не менее, ничего сложного в этом нет. Ниже будут подробно рассмотрены наиболее распространенные способы импорта таблиц данных в рабочую среду R, однако сначала стоит ознакомиться с правилами подготовки загружаемых файлов:

- В импортируемой таблице с данными не должно быть пустых ячеек. Если некоторые значения по тем или иным причинам отсутствуют, вместо них следует ввести NA.
- Импортируемую таблицу с данными рекомендуется преобразовать в простой текстовый файл с одним из допустимых расширений. На практике обычно используются файлы с расширением `.txt`, в которых значения переменных разделены знаками

табуляции (*tab-delimited files*), а также файлы с расширением `.csv` (*comma separated values*), в которых значения переменных разделены запятыми или другим разделяющим символом.

- В качестве первой строки в импортируемой таблице рекомендуется ввести заголовки столбцов-переменных. Такая строка – удобный, но не обязательный элемент загружаемого файла. Если она отсутствует, то об этом необходимо сообщить в описании команды, которая будет управлять загрузкой файла (например, `read.table()` – см. ниже). Все последующие строки файла в качестве первого элемента могут содержать заголовки строк (если таковые предусмотрены), после которых следуют значения каждой из имеющихся в таблице переменных.

Имена столбцов таблицы лучше присвоить с соблюдением правил идентификации переменных R, т.е. исключить пробелы и другие специальные символы, кроме точки и подчеркивания. Во избежание проблем, связанных с кодировкой, все текстовые величины в импортируемых файлах стоит создавать с использованием букв латинского алфавита.

Подлежащий импортированию файл рекомендуется поместить в рабочую папку программы, т.е. папку, в которой R по умолчанию будет "пытаться найти" этот файл (см. раздел 1.1). Чтобы выяснить путь к рабочей папке R на своем компьютере используйте команду `getwd()` (*get working directory* – узнать рабочую директорию); например:

```
getwd()
[1] "C:/Temp/"
```

Изменить рабочую директорию можно при помощи команды `setwd()` (*set working directory* – создать рабочую директорию):

```
setwd("C:/My Documents")
# при выполнении этой команды внешне ничего не произойдет,
# однако последующее применение команды getwd() покажет,
# что путь к рабочей папке изменился:
getwd()
[1] "C:/My Documents/"
```

Ниже приведен фрагмент типичной таблицы данных, которая может быть успешно загружена для анализа в среду R:

	Group	Variable1	Variable2	Variable3
Ivan	A	102	1.3	14
Vitaliy	A	98	1.4	11
Sergey	B	45	NA	8
Mikhail	B	50	3.2	6

Как видим, приведенный фрагмент имеет размерность  $5 \times 5$ , т.е. состоит из пяти строк и пяти столбцов. В первой строке представлены заголовки всех имеющихся в таблице столбцов, за исключением первого. Первый столбец, хотя и не имеет собственного заголовка, не является пустым – он содержит имена добровольцев, участвовавших в некотором эксперименте (Ivan, Vitaliy и т.д.). Второй столбец имеет заголовок `Group` и содержит метки, по которым можно выяснить принадлежность испытуемых к той или иной экспериментальной группе (A, B и т.д.). Мы уже знаем, что в терминах языка R переменная `Group` называется фактором. В последующих столбцах (с заголовками `Variable1`, `Variable2` и т.д.) содержатся значения измеренных в ходе исследования переменных. В приведенном фрагменте таблицы имеется одно отсутствующее значение, вместо которого введено `NA`.

Пожалуй, одним из наиболее доступных и удобных средств подготовки данных для их последующего анализа при помощи R является программа Microsoft Excel. Для сохранения Excel-таблиц в виде `txt`- или `csv`-файлов обычно предлагают использовать опцию *Сохранить как* (*Save as*) в разделе *Файл* (*File*) главного меню этой программы. Другим простым и надежным способом экспорта данных из Excel является создание в редакторе Блокнот (Notepad) нового файла и перенос туда через буфер обмена всей таблицы или выделенной ее части.

Основной функцией для импортирования данных в рабочую среду R является `read.table()`. Эта мощная функция позволяет достаточно тонко настроить процесс загрузки внешних файлов, в связи с чем, она имеет большое количество управляющих аргументов. Наиболее важные из этих аргументов перечислены ниже в таблице (подробнее см. файл помощи, доступный по команде `?read.table`).

Аргумент	Назначение
<code>file</code>	Служит для указания пути к импортируемому файлу. Путь приводят либо в абсолютном виде (например, <code>file = "C:/Temp/MyData.dat"</code> ), либо указывают только имя импортируемого файла (например, <code>file = "MyData.txt"</code> ), но при условии, что последний хранится в рабочей папке программы (см. выше). В качестве имени можно также указывать полную URL-ссылку на файл, который предполагается загрузить из Сети (например: <code>file = "http://somesite.net/YourData.csv"</code> ). Начиная с версии R 2.10, появилась возможность импортировать архивированные файлы в <code>zip</code> -формате.
<code>header</code>	Служит для сообщения программе о наличии в загружаемом файле строки с заголовками столбцов. По умолчанию принимает значение <code>FALSE</code> . Если строка с заголовками столбцов имеется, этому аргументу следует присвоить значение <code>TRUE</code> .
<code>row.names</code>	Служит для указания номера столбца, в котором содержатся имена строк (например, в рассмотренном выше примере это был первый столбец, поэтому <code>row.names = 1</code> ). Важно помнить, что все имена строк должны быть уникальными, т.е. одинаковые имена для двух или более строк не допускаются.
<code>sep</code>	Служит для указания разделителя значений переменных, используемого в файле ( <i>separator</i> – разделитель). По умолчанию предполагается, что значения переменных разделены "пустым пространством", например, в виде пробела или знака табуляции ( <code>sep = ""</code> ). В файлах формата <code>csv</code> значения переменных разделены запятыми, и поэтому для них <code>sep = ", "</code> .
<code>dec</code>	Служит для указания знака, используемого в файле для отделения целой части числа от дроби. По умолчанию <code>dec = "."</code> . Однако во многих странах в качестве десятичного знака применяют запятую, о чем важно вспомнить перед загрузкой файла и, при необходимости, использовать <code>dec = ", "</code> . Следите, чтобы <code>dec</code> и <code>sep</code> не были бы одинаковыми.
<code>nrows</code>	Выражается целым числом, указывающим количество строк, которое должно быть считано из загружаемой таблицы. Отрицательные и иные значения игнорируются. Пример: <code>nrows = 100</code> .
<code>skip</code>	Выражается целым числом, указывающим количество строк в файле, которое должно быть пропущено перед началом импортирования. Пример: <code>skip = 5</code>

Для загрузки тщательно подготовленных файлов (см. правила выше) достаточно использовать минимальный набор аргументов функции `read.table()`. В качестве примера предположим, что нам необходимо загрузить файл `hydro_chem.txt`, который хранится в рабочей папке R и содержит данные по химическому составу воды некоторого водоема. Загружаемую таблицу данных мы намерены сохранить в виде объекта с именем `chem`. Функции `read.table()` в этом случае может быть применена следующим образом:

```
chem <- read.table(file = "hydro_chem.txt", header = TRUE)
```

Как отмечено выше, импортируемые в R файлы часто имеют формат `csv`. Для их загрузки можно воспользоваться той же функцией `read.table()`, но при этом следует указать символ, который используется в качестве разделителя значений переменных в файле (например, запятая):

```
chem <- read.table(file = "hydro_chem.csv", header = TRUE, sep = ",")
```

Аналогом `read.table()` для считывания `csv`-файлов является функция `read.csv()`:

```
chem <- read.csv(file = "hydro_chem.csv", header = TRUE)
```

Если подлежащий загрузке файл хранится в папке, отличной от рабочей папки R, то следует указать полный путь к нему. При этом пользователям операционной системы Windows необходимо помнить, что для указания полных путей к файлам в программе R используется не обратный одинарный слэш (`\`), а прямой одинарный (`/`) либо двойной обратный слэш (`\\`). Например, следующие две команды будут успешно восприняты R и приведут к идентичному результату – загрузке файла `hydro_chem.txt` и сохранению его в виде объекта `chem`:

```
chem <- read.csv(file = "D:\\Documents\\hydrochem.txt", header = TRUE)
chem <- read.csv(file = "D:/Documents/hydrochem.txt", header = TRUE)
```

Для интерактивного выбора загружаемого файла, который хранится вне рабочей папки R, можно применить вспомогательную функцию `file.choose()` (*выбрать файл*). Выполнение этой команды приводит к открытию обычного диалогового окна операционной системы Windows, в котором пользователь выбирает папку с необходимым файлом. Очень удобно совмещать `file.choose()` с командами `read.table()` или `read.csv()`, например:

```
chem <- read.table(file = file.choose(), header = TRUE, sep = ",")
```

## 2.6. Представление даты и времени; временные ряды

### Форматы представления даты и времени

Анализ данных, содержащих даты и время, может иногда сопровождаться приличной головной болью. Причин этому несколько:

- разные годы начинаются в разные дни недели;
- високосные годы имеют дополнительный день в феврале;

- американцы и европейцы по разному представляют даты (например, 8/9/2011 будет 9-м августа 2011 г. для первых и 8-м сентября 2011 г. для вторых);
- в некоторые годы добавляется так называемая "секунда координации";
- страны различаются по временным поясам и в ряде случаев применяют переход на "зимнее" и "летнее" время.

К счастью, система дат и времени в R такова, что многие из указанных проблем относительно легко преодолеваются. С форматом представления дат и времени в R можно ознакомиться, выполнив команду

```
Sys.time()
[1] "2011-09-06 00:38:04 EEST"
```

Как видим, формат строго иерархичен: сначала идет наиболее крупная временная единица – год, потом месяц и день, разделенные дефисом, а затем пробел, час, минуты, секунды и, после еще одного пробела, аббревиатура временной шкалы.

Отдельные элементы из этого результата можно извлечь при помощи функции `substr()` (от *substring* – часть строки), указав позиции первого и последнего элементов извлекаемой строки:

```
substr(as.character(Sys.time()), 1, 10)
[1] "2011-09-06"
```

или

```
substr(as.character(Sys.time()), 12, 19)
[1] "00:38:04"
```

Функция `date()` позволяет выяснить текущую дату:

```
[1] "Tue Sep 06 01:02:24 2011"
```

Если выполнить команду

```
unclass(Sys.time())
[1] 1315258719
```

то получим время в формате `POSIXct`, т.е. выраженное в секундах, прошедших с 1 января 1970 г. (его еще трактуют как Unix-время, по названию операционной системы). Такой "машинный" формат удобен для включения в таблицы данных.

Для человека более удобным является представление времени в формате класса `POSIXlt`. Объекты этого класса представляют собой списки, включающие такие элементы, как секунды, минуты, часы, дни, месяцы, и годы. Например, мы можем конвертировать системное время в объект `POSIXlt` класса следующим образом:

```
date <- as.POSIXlt(Sys.time())
```

Из списка `date` далее легко можно извлечь такие содержащиеся в нем элементы, как `sec` (секунды), `min` (минуты), `hour` (часы), `mday` (день месяца), `mon` (месяц), `year` (год), `wday` (день недели, начиная с воскресенья = 0), `yday` (день года, начиная с 1 января = 0), и `isdst` ("*is daylight savings time in operation?*" – логическая переменная, обозначающая, используется ли режим перехода на "зимнее" и "летнее" время: 1 если TRUE и 0 если FALSE), например:

```
date$wday
[1] 2
date$yday
[1] 248
```

Для просмотра всего содержимого списка `date` можно использовать функцию `unclass()` в сочетании с `unlist()`:

```
unlist(unclass(date))
sec      min      hour      mday      mon
29.97798 26.00000 12.00000  6.00000  8.00000
year     wday     yday     isdst
111.00000 2.00000 248.00000 1.00000
```

### **Вычисления с датами и временем**

В R можно выполнять следующие типы вычислительных операций с датами и временем:

- число + время;
- время – число;
- время1 – время2
- время1 "логический оператор" время2 (в качестве логического оператора могут использоваться `==`, `!=`, `<=`, `<`, `>` или `>=`).

Важной особенностью является то, что перед выполнением любых вычислений с датами или временем необходимо конвертировать их в объекты класса `POSIXlt`. Например, количество дней между 15 сентября 2011 г. и 15 сентября 2000 года можно найти следующим образом:

```
t1 <- as.POSIXlt("2011-09-15")
t2 <- as.POSIXlt("2000-09-15")
t1 - t2
Time difference of 4017 days
```

Разницу во времени, выраженную в часах, можно рассчитать так:

```
t3<-as.POSIXlt("2010-09-22 08:30:30")
t4<-as.POSIXlt("2010-09-22 22:25:30")
t4-t3
Time difference of 13.91667 hours
```

Еще проще разницу между двумя датами можно найти при помощи готовой функции `difftime()` (от *difference* – разница, и *time* – время):

```
difftime("2011-09-22", "2010-06-22")
Time difference of 457 days
```

Чтобы извлечь непосредственно количество дней из результата выполнения предыдущей команды используйте функцию `as.numeric()`:

```
as.numeric(difftime("2011-09-22", "2010-06-22"))
[1] 457
```

Обратите внимание: в R отсутствует возможность для сложения двух дат.

Измерить продолжительность какого-нибудь вычислительного процесса можно с использованием функции "процессорного времени" `proc.time()`, которая, по существу, работает как секундомер: вы засекаете стартовое время, запускаете процесс и, после его завершения, находите разность времен. Например, чтобы вычислить 10 000 значений арктангенса, потребуется 0.02 сек.:

```
t1 <- proc.time()
for (x in 1:10000) y <- atan(x)
time.result <- proc.time() - t1
time.result["elapsed"]
elapsed
0.02
```

### Извлечение даты/времени из текстовых переменных

Функция `strptime()` (от *strip* – раздевать, оголять, и *time* – время) позволяет извлекать даты и время из различных текстовых выражений. При этом важно верно указать формат (при помощи аргумента `format`), в котором приведены временные величины. Приняты следующие условные обозначения для наиболее часто используемых форматов дат и времени (детали доступны по команде `?strptime`):

- %a – сокращенное название для недели (англ. яз.)
- %A – полное название для недели (англ. яз.)
- %b – сокращенное название месяца (англ. яз.)
- %B – полное название месяца (англ. яз.)
- %d – день месяца (01–31)
- %H – часы от 00 до 23
- %I – часы от 01 до 12
- %j – порядковый номер дня года (001–366)
- %m – порядковый номер месяца (01–12)
- %M – минуты (00–59)
- %S – секунды (00–61, с возможностью добавить "високосную секунду")
- %U – неделя года (00–53), первое воскресенье считается первым днем первой недели
- %w – порядковый номер дня недели (0–6, воскресенье – 0)
- %W – неделя года (00–53), первый понедельник считается первым днем первой недели
- %Y – год с указанием века
- %y – год без указания века

Рассмотрим пример. Предположим, у нас имеется текстовый вектор, в котором хранятся даты в формате программы Microsoft Excel:

```
dates.excel <- c("25/02/2008", "24/04/2009",
                "14/06/2009", "25/07/2010", "04/03/2011")
```

Формат имеющихся Excel-дат таков, что сначала идет день месяца, затем порядковый номер самого месяца и, наконец, год с указанием века. Требуется преобразовать эти текстовые выражения в даты формата R. Используя приведенные выше обозначения форматов функции `strptime()`, параметр `format` можно представить в виде `%d/%m/%Y`. Тогда команда для преобразования Excel-дат в R-даты будет выглядеть следующим образом:



```
strptime(dates.excel, format = "%d/%m/%Y")
[1] "2008-02-25" "2009-04-24" "2009-06-14"
[2] "2010-07-25" "2011-03-04"
```

Вот еще один пример, в котором год приведен без указания века, а месяцы приведены в виде их сокращенных названий:

```
example2 <- c("1jan79", "2jan99", "31jan04", "30aug05")
strptime(other.dates, "%d%b%Y")
[1] "1979-01-01" "1999-01-02" "2004-01-31" "2005-08-30"
```

### **Временные ряды**

В R существует специальный класс объектов для работы с данными, представляющими собой временные ряды – *ts* (от *time series* – временной ряд). Для создания объектов этого класса служит одноименная функция `ts()`.

В качестве примера рассмотрим ежемесячные данные по рождаемости в г. Нью-Йорк, собранные в период с января 1946 г. по декабрь 1959 г. Пример заимствован из электронной книги [A Little Book of R for Time Series](#) и исходные данные можно загрузить с сайта проф. Роба Хиндмана (Rob J. Hyndman) следующим образом:

```
birth <-
scan("http://robjhyndman.com/tsdldata/data/nybirths.dat")
Read 168 items
```

Объект `birth` представляет собой вектор со всеми 168 ежемесячными значениями рождаемости (в тыс. человек), в чем можно убедиться при помощи функции:

```
is.vector(birth)
[1] TRUE
```

Функция `head()` позволяет просмотреть первые несколько значений вектора `birth` (по умолчанию первые 6 значений):

```
head(birth)
[1] 26.663 23.598 26.931 24.740 25.806 24.364
```

Преобразовать объект `birth` во временной ряд очень просто:

```
birth.ts <- ts(birth, start = c(1946, 1), frequency = 12)
```

В приведенной команде аргумент `start` был использован для того, чтобы указать дату, с которой начинается временной ряд `birth.ts` (1946 год, 1-й месяц). Дополнительный аргумент `frequency` (частота) позволяет задать шаг приращения последующих дат – в рассматриваемом примере год разбивается на 12 промежутков, так что шаг приращения составляет 1 месяц. Созданный таким образом объект `birth.ts` при просмотре внешне напоминает матрицу. При этом строкам и столбцам этой матрицы были автоматически, исходя из значений аргументов `start` и `frequency`, присвоены соответствующие имена (данные по столбцам Oct, Nov, Dec для экономии места опущены):



```

birth.ts
      Jan   Feb   Mar   Apr   May   Jun   Jul   Aug   Sep
1946 26.663 23.598 26.931 24.740 25.806 24.364 24.477 23.901 23.175
1947 21.439 21.089 23.709 21.669 21.752 20.761 23.479 23.824 23.105
1948 21.937 20.035 23.590 21.672 22.222 22.123 23.950 23.504 22.238
1949 21.548 20.000 22.424 20.615 21.761 22.874 24.104 23.748 23.262
1950 22.604 20.894 24.677 23.673 25.320 23.583 24.671 24.454 24.122
1951 23.287 23.049 25.076 24.037 24.430 24.667 26.451 25.618 25.014
1952 23.798 22.270 24.775 22.646 23.988 24.737 26.276 25.816 25.210
1953 24.364 22.644 25.565 24.062 25.431 24.635 27.009 26.606 26.268
1954 24.657 23.304 26.982 26.199 27.210 26.122 26.706 26.878 26.152
1955 24.990 24.239 26.721 23.475 24.767 26.219 28.361 28.599 27.914
1956 26.217 24.218 27.914 26.975 28.527 27.139 28.982 28.169 28.056
1957 26.589 24.848 27.543 26.896 28.878 27.390 28.065 28.141 29.048
1958 27.132 24.924 28.963 26.589 27.931 28.009 29.229 28.759 28.405
1959 26.076 25.286 27.660 25.951 26.398 25.565 28.865 30.000 29.261

```

Функция `is.ts()` позволяет проверить, действительно ли созданный нами объект `birth.ts` является временным рядом:

```

is.ts(birth.ts)
[1] TRUE

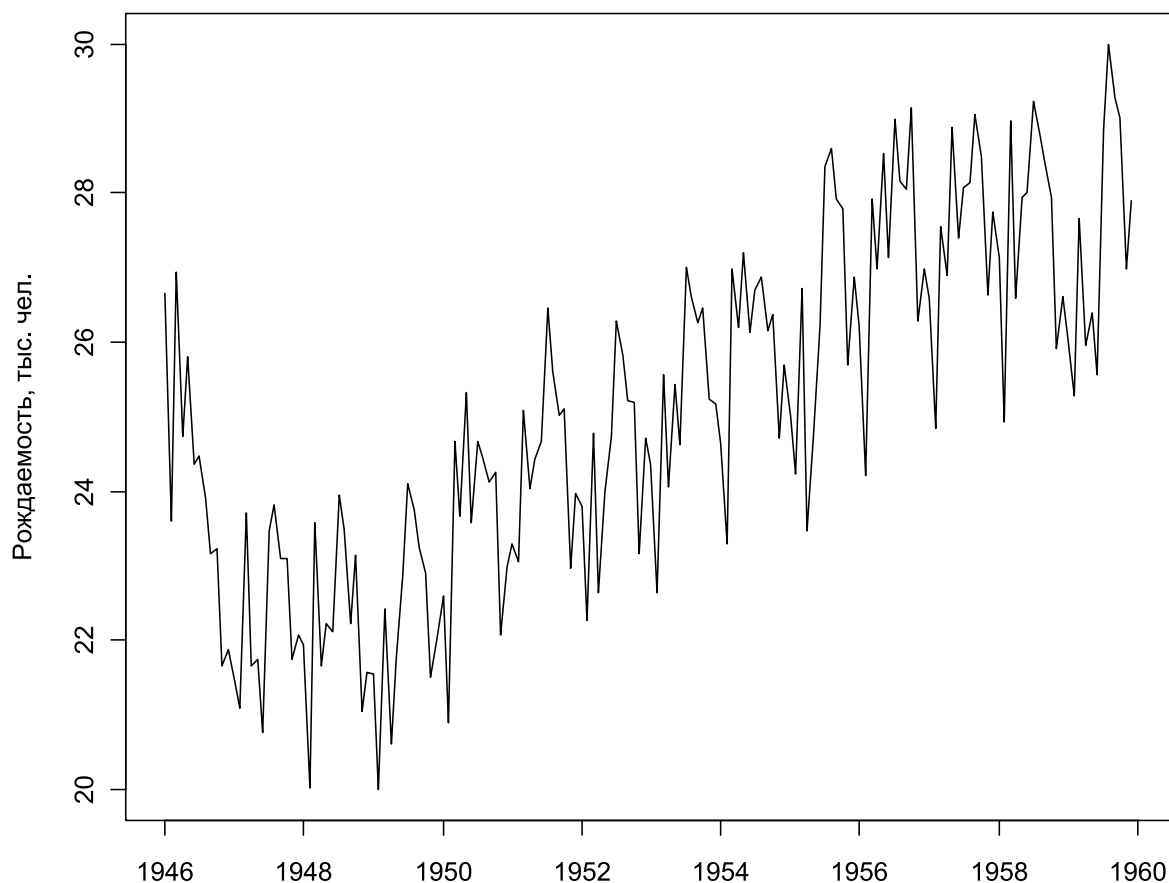
```

В R имеется достаточно большой набор методов для работы с объектами класса `ts`. В частности, при помощи функции `plot()` можно быстро изобразить временной ряд графически:

```

plot(birth.ts, xlab = "", ylab = "Рождаемость, тыс. чел.")

```



## 2.7. Организация вычислений: функции, ветвления, циклы

Абсолютное большинство процедур обработки данных в R реализуется с помощью функций. Функции представляют собой поименованный программный код, состоящий из некоторого набора переменных, констант, операторов и других функций, и предназначенный для выполнения конкретных операций и задач. Как правило (но не всегда), функции возвращают результат своего выполнения в виде объекта языка R – переменной определенного класса: вектора, списка, таблицы и т.д.

По своему назначению функции можно разделить на характерные группы: арифметические, символьные, статистические и прочие. Функции могут быть встроенными (т.е. представленными в базовых или подгружаемых пакетах) и собственными (т.е. написанными непосредственно самими пользователями). Некоторые наиболее употребительные встроенные функции представлены ниже:

Вызов функции и описание	Пример и результат
<b>Арифметические функции</b>	
<b>abs</b> (x) – модуль величины x	abs(-1) ⇒ 1
<b>ceiling</b> (x) – округление до целого в большую сторону	ceiling(9.435) ⇒ 10
<b>floor</b> (x) – округление до целого в меньшую сторону	floor(2.975) ⇒ 2
<b>round</b> (x, digits=n) – округление до указанного числа digits знаков после десятичной точки	round(5.475, 2) ⇒ 5.48
<b>signif</b> (x, digits=n) # округление до указанного числа digits значащих цифр	signif(3.475, 2) ⇒ 3.5
<b>trunc</b> (x) – округление до целого числа	trunc(4.99) ⇒ 4
<b>exp</b> (x) – $e^x$	exp(2.87) ⇒ 17.637
<b>log</b> (x) – логарифм натуральный x	log(3.12) ⇒ 1.137
<b>log10</b> (x) – логарифм десятичный x	log(3.12) ⇒ 0.494
<b>sqrt</b> (x) # корень квадратный x	sqrt(2.12) ⇒ 1.456
<b>cos</b> (x) <b>sin</b> (x) <b>tan</b> (x) <b>acos</b> (x) <b>cosh</b> (x) <b>acosh</b> (x) – тригонометрические функции от x	cos(1.27*pi) ⇒ -0.661
<b>Функции для работы с символьными типами данных</b>	
<b>grep</b> (pattern, x, ignore.case=FALSE, fixed=FALSE) – возврат индекса первого найденного элемента pattern в x	grep("A", c("x", "y", "A", "z"), fixed=TRUE) ⇒ 3
<b>substr</b> (x, start=n1, stop=n2) – выбор или замена символов в строках символьного вектора x	substr("язык R", 2, 4) ⇒ "зык"
<b>paste</b> (..., sep="") – объединение символов или строк через значение разделителя sep	paste("x", 1:3, sep="") ⇒ "x1" "x2" "x3"
<b>strsplit</b> (x, split) – разделяет элементы вектора по разделителям split	strsplit("абв", "") ⇒ "a" "б" "в"
<b>toupper</b> (x) и <b>tolower</b> (x) – преобразуют буквы текстового вектора x в прописные и обратно	toupper("Мал") ⇒ "МАЛ" tolower("БАЛ") ⇒ "бал"

Примеры использования статистических функций приводятся в главе 4.

### Написание собственных функций

Тремя характерными чертами языка R как языка высокого уровня являются модульность построения, ориентация на объекты, и векторизация вычислений. Под модульностью понимается широкое использование групп выражений и функций. Выражения `expr`, состоящие из объектов данных, вызовов функций и других операторов языка могут группироваться в фигурных скобках: `{expr_1; ...; expr_m}`, и значение, которое возвращает эта группа, представляет собой результат выполнения последнего

выражения. Поскольку такая группа является также выражением, то она может быть, например, включена в круглые скобки и использоваться как часть еще более общего выражения.

Например, группа команд ниже выполняет расчет среднего и стандартного отклонения натурального ряда чисел от 1 до 10 и возвращает вектор из этих значений:

```
{aver <- mean(1:10); stdev <- sd(1:10); c(MEAN=aver, SD=stdev)}  
      MEAN      SD  
5.50000 3.02765
```

Однако если этот расчет необходимо выполнить неоднократно для различных наборов исходных данных, то его стоит оформить в виде функции. Общий синтаксис оформления собственной функции пользователя таков:

```
имя_функции <- function(arg1, arg2,...) {  
  группа_выражений  
  return(object) }
```

где `имя_функции` – имя создаваемой функции, `arg1, arg2, ...` – формальные аргументы функции. Оператор `return()` нужен в случаях, когда группа выражений не возвращает целевого результата.

Перед своим первым выполнением функция должна быть определена в текущем скрипте, либо загружена с помощью команды `source()` из скриптового файла, где она была предварительно подготовлена. Тогда вызов функции может быть осуществлен как

```
имя_функции (arg1, arg2,...)
```

где `arg1, arg2, ...` – фактические аргументы, связанные с формальными параметрами функции по порядку их следования, либо по наименованиям.

Для представленного выше примера можно оформить функцию:

```
stat_param <- function(x) {  
  aver <- mean(x); stdev <- sd(x); c(MEAN=aver, SD=stdev)}
```

и включить ее в коллекцию собственных функций, расположенных в файле `my_func.R`. Тогда необходимый нам результат, приведенный выше, можно получить, выполнив

```
source ("my_func.R")  
stat_param (1:10)
```

Компоненты списка аргументов в заголовке функций могут быть обязательными или принимать опциональные значения. Например, следующая функция возводит числовой объект `x` в степень `n`, но если степень не указана, то автоматически происходит возведение в куб:

```
power <- function(x, n = 3) { x^n }
```

Аргументами функций могут быть объекты самого разного типа, например, названия других функций. Так, следующая функция выполняет произвольные преобразования случайных равномерно распределенных величин:

```
my_examp1 <- function(n, func_trans)  
  { x <- runif(n) ; abs(func_trans(x)) }
```

Тогда сгенерировать 5 прологарифмированных значений можно, если записать:

```
my_examp1(5, log)
[1] 0.6345459 0.6522557 2.4180118 0.1007311 1.6983938
```

### Условия и циклы

Как и в любом алгоритмическом языке, в R широко используются ветвления и циклы вычислительного процесса. Условный оператор имеет следующую структуру:

```
if( логическое_выражение )
{ группа_выражений_1 если логическое_выражение равно TRUE }
else { группа_выражений_2 в противном случае }
```

Например, следующая функция сравнивает размеры двух векторов:

```
compare <- function(x, y){ n1 <- length(x) ; n2 <- length(y)
  if(n1!= n2){
    if(n1 > n2){ z=(n1 - n2)
      cat("Первый вектор имеет на ",z," элементов больше \n") }
    else{ z=(n2 - n1)
      cat("Второй вектор имеет на ",z," элементов больше \n")}}
  else{cat("Количество элементов одинаково ",n1,"\n") }
}

x <- c(1:4)
y <- c(1:9)
compare(x, y)
Первый вектор имеет на 5 элементов больше
```

Имеется также сокращенная форма реализации ветвлений:

```
ifelse(логическое_выражение, группа_выражений_1, группа_выражений_2)
```

Повторение в цикле одних и тех же вычислительных операций осуществляется с использованием конструкций **for()**, **while()** или **repeat()**, которые имеют следующий синтаксис:

```
for (index in for_object) { группа_выражений }
while(логическое_выражение) { группа_выражений }
repeat { группа_выражений ; break }
```

Здесь объект `for_object` может быть вектором, массивом, таблицей, или списком, а группа\_выражений выполняется каждый раз для каждого элемента `index` этого объекта.

Рассмотрим в качестве примера функцию оценки доверительного интервала среднего значения для выборки размером  $n$  с использованием непараметрического бутстрепа. Необходимо отметить, что устоявшегося перевода термина "*bootstrap*" с английского языка на русский не существует. Используются разные варианты: "бутстреп", "бутстрэп", "бутстрап", "размножение выборок", "метод псевдovyборок" и даже "ресамплинг" (от англ. "*resampling*"). Несмотря на сложности с русскоязычным названием, суть метода, тем менее, весьма проста и подробно изложена в оригинальных работах

Б. Эфрона (1979-1988). Бутстреп-метод с использованием R для решения различных задач представлен в ряде монографий (Chernick, LaBudde, 2011; Zieffler et al. 2011; Fox, Weisberg, 2012; Шитиков, Розенберг, 2014).

Предположим, что у нас есть выборка некоторого ограниченного объема, и мы имеем основания полагать, что эта выборка является репрезентативной (т.е. хорошо отражает свойства генеральной совокупности, из которой она была взята). Идея бутстреп-метода заключается в том, что мы можем рассматривать саму эту выборку в качестве "генеральной совокупности" и, соответственно, можем извлечь большое число случайных выборок из этой исходной совокупности для расчета интересующего нас параметра (или параметров). Очевидно, что благодаря случайному процессу формирования этих новых выборок, будет наблюдаться определенная вариация значений оцениваемого параметра. Другими словами, мы получим некоторое распределение значений этого параметра. Рассчитав стандартное отклонение этого распределения, мы получим оценку стандартной ошибки параметра, которая при большом числе наблюдений будет асимптотически приближаться к истинной стандартной ошибке. Аналогично можно получить оценки границ доверительного интервала.

Итак, будем генерировать из исходной выборки множество псевдовыборок того же размера, состоящих из случайных комбинаций исходного набора элементов. При этом используем алгоритм "случайного выбора с возвратом" (*random sampling with replacement*), т.е. извлеченный элемент возвращается в исходную совокупность и имеет шанс быть выбранным снова. В результате некоторые члены в каждой отдельной псевдовыборке могут повторяться два или более раз, тогда как другие – отсутствовать. Этот алгоритм в R реализован в функции `sample(data, replace=T)`. Для каждой псевдовыборки мы рассчитаем значение среднего, а в качестве границ 95%-ного доверительного интервала (*bootstrap percentile interval*) примем 2.5% и 97.5% квантили бутстреп-распределения:

```
boot_np <- function(data , Nboot=5000) {
  boots <- numeric(Nboot) # Пустой вектор для хранения результатов
  for (i in 1:Nboot) { boots[i] <- mean(sample(data,replace=T)) }
  CI <- quantile(boots, prob=c(0.025,0.975))
  return (c(m = mean(data),CI))
}
x <-c(5, 5, 8, 10, 10, 10, 19, 20, 20, 20, 30, 40, 42, 50, 50)
boot_np(x)
      m  2.5% 97.5%
22.6  15.0  30.8
```

Здесь конструкция `for()` осуществляет формирование `Nboot = 5000` значений средних для генерируемых псевдовыборок.

Покажем, пользуясь случаем, как можно оценить выборочный доверительный интервал обычным параметрическим методом на основе процентилей распределения Стьюдента:

```
param_CI <- function(data) {
  n = length(data) ; m = mean(data)
  SE = sd(data)/sqrt(n) ; E = qt(.975, df=n-1)*SE
  CI <- m + c(-E, E)
  return (c(m , CI))
}
param_CI(x)
[1] 22.6 13.74741 31.45259
```

## 2.8. Векторизованные вычисления в R с использованием apply-функций

Использование оператора циклов `for()`, что характерно для языков низкого уровня типа Basic, не считается хорошим стилем программирования на языке R, ориентированном на векторизацию вычислений. Вместо того, чтобы выполнять последовательно скалярные операции над каждым из элементов массива, гораздо эффективнее выполнять [параллельные вычисления](#), при которых программа обрабатывает одновременно весь массив (вектор) целиком или по несколько элементов вектора в каждый момент времени. Очевидно, что такой подход потенциально может привести к значительному ускорению однотипных вычислений над большими массивами данных.

Рассмотрим простейший пример векторизованных вычислений в R. Допустим, у нас имеется вектор из 10 положительных чисел, и мы хотим извлечь квадратный корень из каждого из них. Вместо написания цикла для поочередного выполнения этой операции над каждым элементом, мы просто подаем *весь* этот вектор на вход функции `sqrt()`, которая возвращает *вектор* с результатами вычислений:

```
x <- 1:10
sqrt(x)
[1] 1.000 1.414 1.732 2.000 2.236 2.449 2.645 2.828 3.000 3.162
```

Принцип векторизованных вычислений применим не только к векторам как таковым, но и к более сложным объектам R – матрицам, спискам и таблицам данных (для R разницы между последними двумя типами объектов не существует: фактически таблица данных является списком из нескольких компонентов – векторов одинакового размера). В базовой комплектации R имеется целое семейство функций, предназначенных для организации векторизованных вычислений над такими объектами. В названии всех этих функций имеется слово `apply` (англ. *применить*), которому предшествует буква, указывающая на принцип работы той или иной функции (см. подробнее в справочном файле `?apply`). При этом:

- `apply()` в отличие от `for()` можно легко распараллелить (просто переименовав функцию в ее параллельную версию из пакета `snow`);
- алгоритмы, записанные без циклов, легче модифицируются, содержат меньше ошибок и легче набираются в командной строке;
- результат работы `apply()` может быть аргументом функции, не говоря уже о том что любая функция может быть вставлена в качестве аргумента в `apply()`.

В ответе на один из вопросов, опубликованных на сайте [stackoverflow.com](http://stackoverflow.com), который мы постоянно используем для поиска информации по R, был дан замечательный обзор `apply`-функций с примерами их использования. Ниже приводится перевод этого сообщения (с некоторыми изменениями и дополнениями).

**Функция `apply()`** – используется в случаях, когда необходимо применить какую-либо функцию ко всем строкам или столбцам матрицы (или массивам большей размерности):

```
apply(x, MARGIN, FUN, ...)
```

где `x` – это преобразуемый объект, `MARGIN` – индекс, обозначающий направление процесса вычислений (по столбцам или строкам), `FUN` – применяемая для вычислений функция, а `...` – это любые другие параметры применяемой функции. Для матрицы или таблицы данных `MARGIN = 1` обозначает строки, а `MARGIN = 2` – столбцы. Поскольку `FUN` означает любую функцию R, в том числе и ту, которую вы сами написали (см. раздел 2.7), то функция `apply()` – это мощное средство модульной обработки данных.

```

# Создадим обычную двумерную матрицу:
M <- matrix(seq(1,16), 4, 4)
# Найдем минимальные значения в каждой строке матрицы
apply(M, 1, min)
[1] 1 2 3 4
# Найдем минимальные значения в каждом столбце матрицы
apply(M, 2, max)
[1] 4 8 12 16
# Пример с трехмерным массивом:
M <- array(seq(32), dim = c(4,4,2))
# Применим функцию sum() к каждому элементу M[* , ],
# т.е. выполним суммирование по измерениями 2 и 3:
apply(M, 1, sum)
# Результат - одномерный вектор:
[1] 120 128 136 144
# Применим функцию sum() к каждому элементу M[* , *, ],
# - т.е. выполним суммирование по третьему измерению:
apply(M, c(1,2), sum)
# Результат - матрица:
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]   18   26   34   42
[2,]   20   28   36   44
[3,]   22   30   38   46
[4,]   24   32   40   48

```

При необходимости вычисления сумм и средних значений по строкам или столбцам матриц рекомендуется также использовать очень быстрые и специально оптимизированные для этого функции `colSums()`, `rowSums()`, `colMeans` и `rowMeans()`.

**Функция `lapply()`** – используется в случаях, когда необходимо применить какую-либо функцию к каждому компоненту списка и получить результат также в виде списка (буква "l" в названии `lapply()` означает *list* – "список").

```

# Создадим список с тремя компонентами-векторами:
x <- list(a = 1, b = 1:3, c = 10:100)
# Выясним размер каждого компонента списка x
# (функция length()):
lapply(x, FUN = length)
$a
[1] 1
$b
[1] 3
$c
[1] 91
# Выполним суммирование элементов в каждом компоненте списка x:
lapply(x, FUN = sum)
$a
[1] 1
$b
[1] 6
$c

```

[1] 5005

**Функция `sapply()`** – используется в случаях, когда необходимо применить какую-либо функцию к каждому компоненту списка, но результат вывести в виде вектора (буква "s" в названии `sapply()` означает *simplify* – "упростить").

```
# Список из трех компонентов:
x <- list(a = 1, b = 1:3, c = 10:100)
# Выясним размер каждого компонента списка x:
sapply(x, FUN = length)
a b c
1 3 91 # результат возвращен в виде вектора
# Суммирование всех элементов в каждом компоненте списка x:
sapply(x, FUN = sum)
a b c
1 6 5005 # результат возвращен в виде вектора
```

В некоторых более "продвинутых" случаях `sapply()` может выдать результат в виде многомерного массива. Например, если применяемая нами функция возвращает векторы одинаковой длины, `sapply()` объединит эти векторы в матрицу (по столбцам):

```
sapply(1:5, function(x) rnorm(3, x))
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 1.699876 1.898511 2.655672 2.908397 3.841733
[2,] 1.309984 3.279127 2.720922 4.794944 4.723460
[3,] 1.755939 2.780790 2.781063 4.193394 4.220807
```

Если применяемая функция возвращает матрицу, то `sapply()` преобразует каждую матрицу в вектор и объединит такие векторы в одну большую матрицу (звучит не очень понятно, но пример хорошо поясняет эту идею):

```
sapply(1:5, function(x) matrix(x, 2, 2))
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] 1 2 3 4 5
[2,] 1 2 3 4 5
[3,] 1 2 3 4 5
[4,] 1 2 3 4 5
```

Поведение `sapply()`, продемонстрированное в последнем примере, можно отменить при помощи аргумента `simplify = "array"` – в этом случае матрицы будут объединены в один многомерный массив:

```
sapply(1:5, function(x) matrix(x, 2, 2), simplify = "array")
, , 1
      [,1] [,2]
[1,] 1 1
[2,] 1 1
, , 2
      [,1] [,2]
[1,] 2 2
[2,] 2 2
, , 3
      [,1] [,2]
[1,] 3 3
```



```

[2,]    3    3
, , 4
      [,1] [,2]
[1,]    4    4
[2,]    4    4
, , 5
      [,1] [,2]
[1,]    5    5
[2,]    5    5

```

**Функция replicate ()** является своего рода "оберткой" для функции `sapply()` и позволяет провести серию вычислений с целью генерации набора чисел по заданному алгоритму. Синтаксис функции имеет вид:

```
replicate(n, expr, simplify=TRUE)
```

где `n` – число повторов, `expr` – функция или группа выражений, которые надо повторить `n` раз, `simplify = TRUE` – необязательный параметр, который пробует упростить результат и представить его в виде вектора или матрицы значений.

Рассмотрим пример использования функции `replicate()` для проверки статистической гипотезы о равенстве медиан двух выборок бутстреп-методом (см. раздел 2.7). Созданная нами функция `boot_med()` из каждой исходной выборки `x` и `y` извлекает по `N` псевдовыборок, используя алгоритм "случайного выбора с возвратом", и находит разность их медиан. Здесь функция `sample.int()` формирует целочисленные наборы случайных индексов `indx` и `indy` для каждого из сравниваемых векторов:

```

boot_med <- function(x, y, N=100) {
  replicate(N, {
    indx <- sample.int(length(x), length(x), replace=T)
    indy <- sample.int(length(y), length(y), replace=T)
    median(x[indx]) - median(y[indy])
  })
}

```

Для тестирования функции проверим однородность медиан для двух случайных выборок из нормального распределения со средним `mean=10` и стандартным отклонением `sd=4`:

```

Y <- rnorm(100, sd=4, mean=10)
X <- rnorm(100, sd=4, mean=10)
quantile(boot_med(Y,X,10000), probs = c(0.025, 0.975))
      2.5%      97.5%
-0.3834803  2.5177006

```

Поскольку доверительный интервал разности медиан включает 0, то нулевую гипотезу отклонять не следует.

**Функция vapply ()** – схожа с `sapply()`, но работает несколько быстрее за счет того, что пользователь однозначно указывает тип возвращаемых значений (буква "v" в названии `vapply()` означает *velocity* – "скорость"; пример сравнения `sapply()` и `vapply()` можно найти на [stackoverflow.com](http://stackoverflow.com)). Такой подход позволяет также избегать сообщений об ошибках (и прерывания вычислений), возникающих при работе с `sapply()` в некоторых ситуациях. При вызове `vapply()` пользователь должен привести

пример ожидаемого типа возвращаемых значений. Для этого служит аргумент FUN.VALUE:

```
# Аргументу FUN.VALUE присвоено логическое значение FALSE.

# Этим задается тип возвращаемых функцией значений,
# который ожидает пользователь
a <- vapply(NULL, is.factor, FUN.VALUE = FALSE)
# Функция sapply() применена к тому же NULL-объекту:
b <- sapply(NULL, is.factor)
# Проверка типа переменных:
is.logical(a)
[1] TRUE
is.logical(b)
[1] FALSE
```

**Функция mapply()** – используется в случаях, когда необходимо поэлементно применить какую-либо функцию одновременно к нескольким объектам (например, получить сумму первых элементов векторов, затем сумму вторых элементов векторов, и т.д.). Результат возвращается в виде вектора или массива другой размерности (см. примеры для sapply() выше). Буква "m" в названии mapply() означает *multivariate* – "многомерный" (имеется в виду одновременное выполнение вычислений над элементами нескольких объектов).

```
mapply(sum, 1:5, 1:5, 1:5)
[1] 3 6 9 12 15
```

**Функция rapply()** – используется в случаях, когда необходимо применить какую-либо функцию к компонентам вложенного списка (буква "r" в названии rapply() означает *recursively* – "рекурсивно").

```
# Пользовательская функция, которая добавляет ! к элементу
# объекта x если этот элемент является текстовым выражением
# или добавляет 1 если этот элемент является числом:
myFun <- function(x) {
  if (is.character(x)) {
    return(paste(x, "!", sep=""))
  }
  else{
    return(x + 1)
  }
}

# Пример вложенного списка:
l <- list(a = list(a1 = "Boo", b1 = 2, c1 = "Eeek"),
         b = 3, c = "Yikes",
         d = list(a2 = 1, b2 = list(a3 = "Hey", b3 = 5)))

l
$a
$a$a1
[1] "Boo"
$a$b1
[1] 2
$a$c1
```

```

[1] "Eeek"
$b
[1] 3
$c
[1] "Yikes"
$d
$d$a2
[1] 1
$d$b2
$d$b2$a3
[1] "Hey"
$d$b2$b3
[1] 5
# Рекурсивное применение функции myFun к списку l:
rapply(l, myFun)
  a.a1  a.b1  a.c1  b  c  d.a2  d.b2.a3  d.b2.b3
  "Boo!"  "3"  "Eeek!"  "4"  "Yikes!"  "2"  "Hey!"  "6"
# Если необходимо вернуть результат в виде вложенного
# списка, можно воспользоваться аргументом how = "replace".
# В этом случае исходные значения в списке l будут
# заменены на новые:
rapply(l, myFun, how = "replace")
$a
$a$a1
[1] "Boo!"
$a$b1
[1] 3
$a$c1
[1] "Eeek!"
$b
[1] 4
$c
[1] "Yikes!"
$d
$d$a2
[1] 2
$d$b2
$d$b2$a3
[1] "Hey!"

$d$b2$b3
[1] 6

```

**Функция `tapply()`** – используется в случаях, когда необходимо применить какую-либо функцию `fun` к отдельным группам элементов вектора `x`, заданным в соответствии с уровнями какого-либо фактора `group`:

```
tapply(x, group, fun, ...)
```

Например, в следующем фрагменте кода функция `sample()` используется для создания двух случайных выборок: из 50 значений целых чисел от 1 до 4 и связанных с

ними меток четырех групп A-D. Функция `tapply()` подсчитывает суммы `x` для каждого из значений фактора:

```
x <- sample(1:4, size=50, replace=T)
gr <- as.factor(sample(c("A","B","C","D"),size=50, replace=T))
tapply(x, gr, sum)
  A    B    C    D
29   25   30   37
```

Другие примеры использования `tapply()` мы приведем позднее в разделе 4.1, посвященном расчету параметров описательной статистики.

**Функция `by()`** является своего рода аналогом функции `tapply()`, с той разницей, что она применяется для таблиц. Таблица `data` разделяется в соответствии с заданным столбцом-фактором `group` на подмножество подтаблиц и для обработки каждой такой части определяется функция `fun`:

```
by(data, group, fun, ...)
```

Рассмотрим пример с таблицей Моллюски, представленной в разделе 1.3, и рассчитаем средние значения длины раковины `ZMlength` и численности инфузорий `CAnumber` для каждого из трех обследованных озер Lake (Баторино, Мястро и Нарочь):

```
Моллюски <-
read.table("http://figshare.com/media/download/98923/97987",
  header=TRUE, sep="\t", na.strings="NA", strip.white=TRUE)
by(Моллюски[,4:5], Моллюски$Lake, colMeans)
Моллюски$Lake: Batorino
  ZMlength  CAnumber
 18.61339  772.80315
-----
Моллюски$Lake: Myastro
  ZMlength  CAnumber
 16.36944  803.08889
-----
Моллюски$Lake: Naroch
  ZMlength  CAnumber
 14.4929   340.9941
```

**Функция `outer()`** позволяет выполнить комбинаторную операцию `fun` над элементами двух массивов или векторов `x` и `y`, не прибегая к явному использованию "двойного" цикла:

```
outer(x, y, fun="*", ...)
```

По умолчанию осуществляется операция попарного перемножения

```
x <- 1:5 ; y <- 1:5
outer(x, y)
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]  1   2   3   4   5
[2,]  2   4   6   8  10
```

```
[3,] 3 6 9 12 15
[4,] 4 8 12 16 20
[5,] 5 10 15 20 25
```

Используя, например, функцию `outer()` вместе с функцией `paste()`, можно сгенерировать все возможные попарные комбинации "связок" элементов символьного и целочисленного векторов:

```
x <- c("A", "B", "C", "D")
y <- 1:10
outer(x, y, paste, sep="")
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,] "A1" "A2" "A3" "A4" "A5" "A6" "A7" "A8" "A9" "A10"
[2,] "B1" "B2" "B3" "B4" "B5" "B6" "B7" "B8" "B9" "B10"
[3,] "C1" "C2" "C3" "C4" "C5" "C6" "C7" "C8" "C9" "C10"
[4,] "D1" "D2" "D3" "D4" "D5" "D6" "D7" "D8" "D9" "D10"
```

### 3. БАЗОВЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ R



Графическое представление данных играет очень важную роль в статистике. Как сказано в известной книге Дж. Чемберса с соавт. (Chambers et al., 1983): «...нет статистического метода более мощного, чем хорошо подобранный график». Например, графики являются неотъемлемой частью разведочного анализа данных, позволяют выявлять закономерности и тренды в сложных наборах данных, а также могут непосредственно быть результатом статистического анализа (например, при построении деревьев классификации).

Читатель, интересующийся всем спектром графических возможностей R, может посетить сайт [R Graph Gallery](#), где представлены не только примеры всевозможных графиков, но и исходный R-код, использованный для их построения.

Как правило, создание графика начинается с функции высокого уровня, которая определяет его общую структуру: размерность (1D, 2D, 3D), масштабы осей, названия и др. Наиболее часто используемые графические функции высокого уровня – `plot()`, `hist()`, `boxplot()`, `scatterplot()` и `pairs()`. С использованием богатого набора функций низкого уровня к построенному графику могут быть добавлены дополнительные элементы: текст, линии, легенда и проч. (примерами таких функций являются `lines()`, `points()`, `text()` и `axis()`).

Особенностями деталей графического изображения управляет набор параметров, как правило, общий для большинства высокоуровневых и низкоуровневых функций, который определяет цвет, типы и размер символов или маркеров, толщину и характер линий, штриховку, рамку графика и проч.

#### 3.1. Функция `plot()` и ее параметры

**Функция `plot()`** – главная "рабочая лошадка", используемая для построения графиков в R. Поведение этой *функции высокого уровня* определяется классом объектов, указываемых в качестве ее аргументов. Соответственно, с помощью `plot()` можно создать очень большой набор разнотипных графиков.

В качестве примера используем данные ([Kwan K.C. et al., 1976](#)) по скорости выведения из организма человека *индометацина* – одного из наиболее активных противовоспалительных препаратов. В эксперименте приняли участие шесть испытуемых. Результаты этого исследования входят в базовый набор данных R и доступны по команде

```
data (Indometh)
```

Применив команду

```
names (Indometh)  
[1] "Subject" "time" "conc"
```

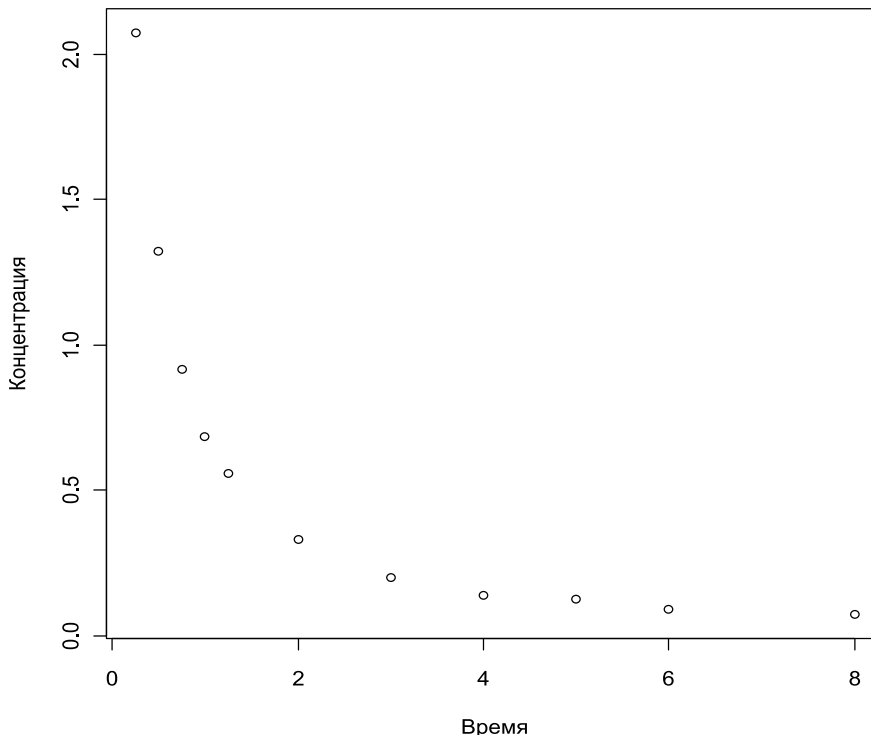
видим, что в состав таблицы `Indometh` входят переменные `Subject` (испытуемый), `time` (время с момента введения препарата) и `conc` (концентрация препарата в крови). Чтобы облегчить дальнейшую работу, прикрепим таблицу `Indometh` к *поисковому пути* R:

```
attach (Indometh)
```

Благодаря этой команде, теперь мы можем напрямую обращаться к переменным таблицы `Indometh` (т.е. использовать их имена непосредственно, например, `time` вместо `Indometh$time`).

Зависимость концентрации индометацина в крови от времени можно легко изобразить при помощи следующей команды:

```
plot(time, conc)
```



Предположим, что перед нами стоит задача отобразить на графике не все исходные данные, а только средние значения концентрации индометацина для каждой временной точки. Рассчитать средние значения (или любые другие количественные величины) для отдельных групп данных позволяет функция `tapply()` (см. разд. 2.8):

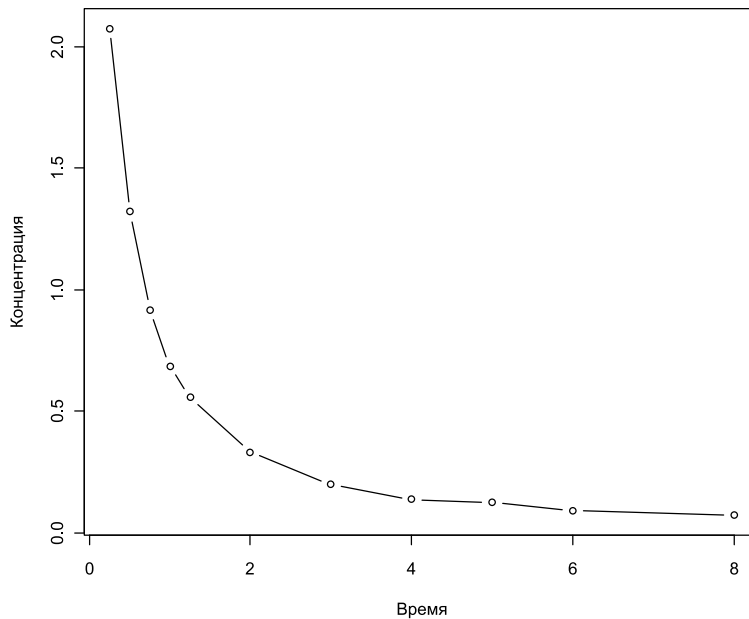
```
(means <- tapply(conc, time, mean))
 0.25    0.5    0.75    1    1.25    2    3
2.07666667 1.32166667 0.91833333 0.68333333 0.55666667 0.33166667 0.19833333
 4    5    6    8
0.13666667 0.12500000 0.09000000 0.07166667
```

Обратите внимание на то, что при создании вектора `means` функция `tapply()` автоматически присвоила каждому из рассчитанных средних величин имя, соответствующее времени учета концентрации индометацина. Это легко проверить:

```
names(means)
[1] "0.25" "0.5" "0.75" "1" "1.25" "2" "3" "4" "5" "6" "8"
```

Мы можем воспользоваться этим обстоятельством при построении графика и создать числовой вектор со значениями времени учета концентрации препарата:

```
indo.times <- as.numeric(names(means))
# строим график типа "точки с линиями":
plot(indo.times, means, type="b")
```



### Управляющие параметры функции plot()

Функция `plot()` имеет большое количество управляющих параметров, которые позволяют осуществить тонкую настройку внешнего вида графика. Ниже рассмотрены лишь некоторые из них.

#### 1. Параметры `xlab` и `ylab`

Параметры `xlab` и `ylab` служат для изменения названий осей X и Y соответственно:

```
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация")
```

#### 2. Параметр `type`

Параметр `type` позволяет изменять внешний вид точек на графике. Он принимает одно из следующих значений:

- "p" – точки (*points*; используется по умолчанию)
- "l" – линии (*lines*)
- "b" – изображаются и точки, и линии (*both points and lines*)
- "o" – точки изображаются поверх линий (*points over lines*)
- "h" – гистограмма (*histogram*)
- "s" – ступенчатая кривая (*steps*)
- "n" – данные не отображаются (*no points*)

#### 3. Параметры `xlim` и `ylim`

Эти два параметра контролируют размах значений на каждой из осей графика. По умолчанию они оба принимают значение `NULL` – в этом случае размах выбирается программой автоматически. Для отмены автоматических настроек соответствующему параметру необходимо присвоить значение в виде числового вектора, содержащего минимальное и максимальное значения, которые должны отображаться на оси. Например:



```

plot(indo.times, means, xlab="Время", ylab="Концентрация",
      xlim=c(0, 15))
plot(indo.times, means, xlab="Время", ylab="Концентрация",
      ylim=c(0, 5))

```

#### 4. Параметры axes и ann

Эти два параметра контролируют отображение осей и их названий соответственно. Каждый из них может принимать одно из двух возможных значений – TRUE или FALSE:

```

plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
      axes = TRUE, ann = TRUE)
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
      axes = FALSE, ann = TRUE)
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
      axes = TRUE, ann = FALSE)

```

#### 5. Параметр log

При помощи аргумента log можно перевести одну или обе оси графика на логарифмическую шкалу, например:

```

plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
      log = "x")
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
      log = "y")
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
      log = "xy")

```

#### 6. Параметр main

Аргумент main служит для создания заголовка графика. По умолчанию название размещается в верхней части рисунка:

```

plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
      main = "Скорость выведения индометацина", type = "o")

```

Далее будут рассмотрены графические параметры, контролирующие внешний вид графиков, например, тип, размер и цвет символов и линий, тип и размер шрифта в названиях графика и его осей, использование математических символов в названиях, размещение легенды, и т.п. Они применяются в качестве аргументов не только при вызове plot(), но и многих других функций.

### Управление общими параметрами – аргументами графических функций

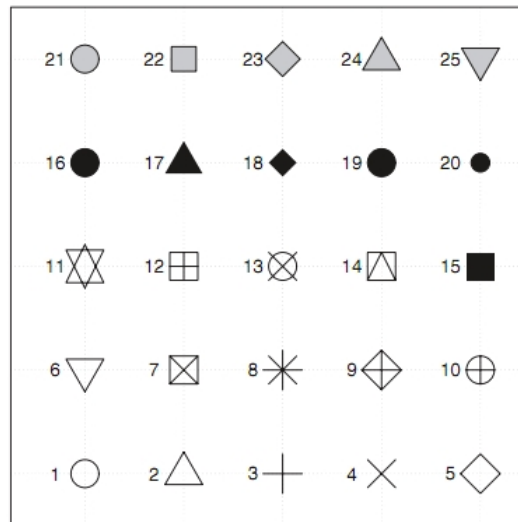
#### 1. Тип символа

Как видно из приведенного выше рисунка, отдельные измерения по умолчанию изображаются в виде кружков. Изменить тип символов, используемых для отображения наблюдений, позволяет аргумент pch (*plotting character* – символ изображения). В

стандартных случаях этот аргумент принимает численные значения от 1 до 25. Например, при `pch = 2` символы превратятся из кружков в незакрашенные треугольники:

```
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o", pch = 2)
```

Таблица 25-ти стандартных маркеров и соответствующие им численные коды представлена ниже:



Набор стандартных маркеров может быть значительно расширен в случае, когда аргумент `pch` используется в комбинации с другим аргументом – `font`, задающим шрифт символов. Параметр `pch` может при этом принимать любое целое число от 1 до 128 и от 160 до 254. Например, при `font = 5` маркеру в виде "сердечка" соответствует код 169:

```
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o",
     pch = 169, font = 5)
```

В качестве маркеров можно также использовать обычные печатные символы, например, буквы:

```
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o",
     pch = "A")
```

### 2. Размер маркера

Размер маркеров задается при помощи аргумента `cex` (*character extension* – размер символа), который по умолчанию равен 1. Уменьшение или увеличение этого параметра приводит к соответствующим пропорциональным изменениям размера символов.

При необходимости мы можем также изменить ширину линии обводки символа. Для этого служит параметр `lwd` (*line width* – ширина линии). Далее будет приведен пример для символа с кодом 21 ("заполненный кружок").

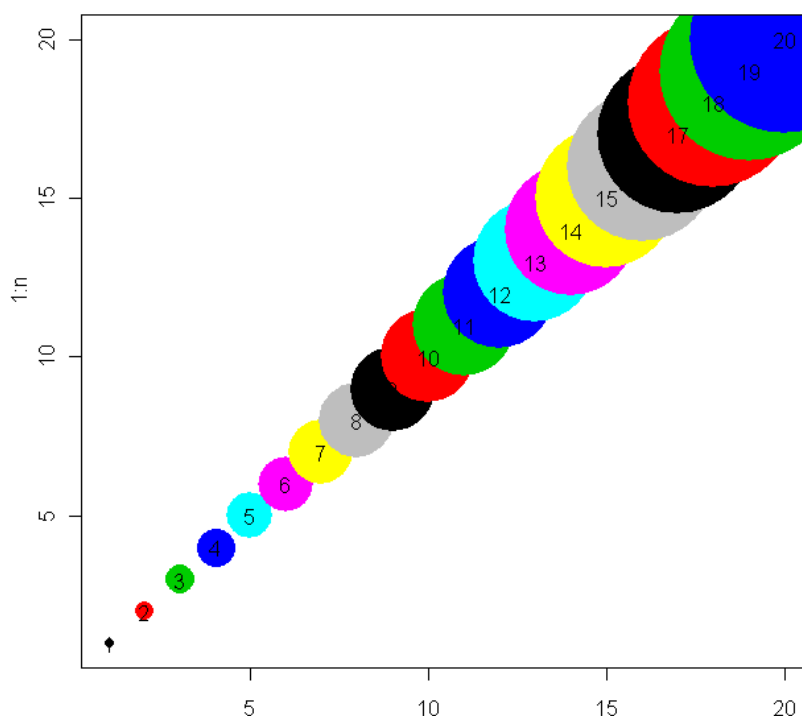
### 3. Цвет маркера

Цвет любого графического объекта может быть задан несколькими способами:

- по названию цвета: например, `col = "red"` (красный), `col = "green"` (зеленый), или `col = "black"` (черный). Всего в R имеется 675 стандартных цветов. Их названия доступны по команде `colors()`;
- путем непосредственного указания красного, зеленого и синего компонентов RGB спектра, например: `"#RRGGBB"` (подробнее см. [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org) и [stm.dp.ua](http://stm.dp.ua));
- по численному коду, например: `col = 2` (красный), `col = 3` (зеленый), или `col = 1` (черный).

Цвет маркеров задается при помощи аргумента `col` (*color* – цвет). Подобрать его можно следующим образом:

```
n <- 20
plot(1:n, pch=CIRCLE<-16, sех=1:n, col=1:n)
text(1:n)
```



Имеются также отдельные параметры для настройки цвета других элементов графика (например, заголовка `col.main`, названий осей `col.lab`, меток осей `col.axes` и др.).

Ниже приведены несколько примеров, иллюстрирующих эффекты параметра `col`.

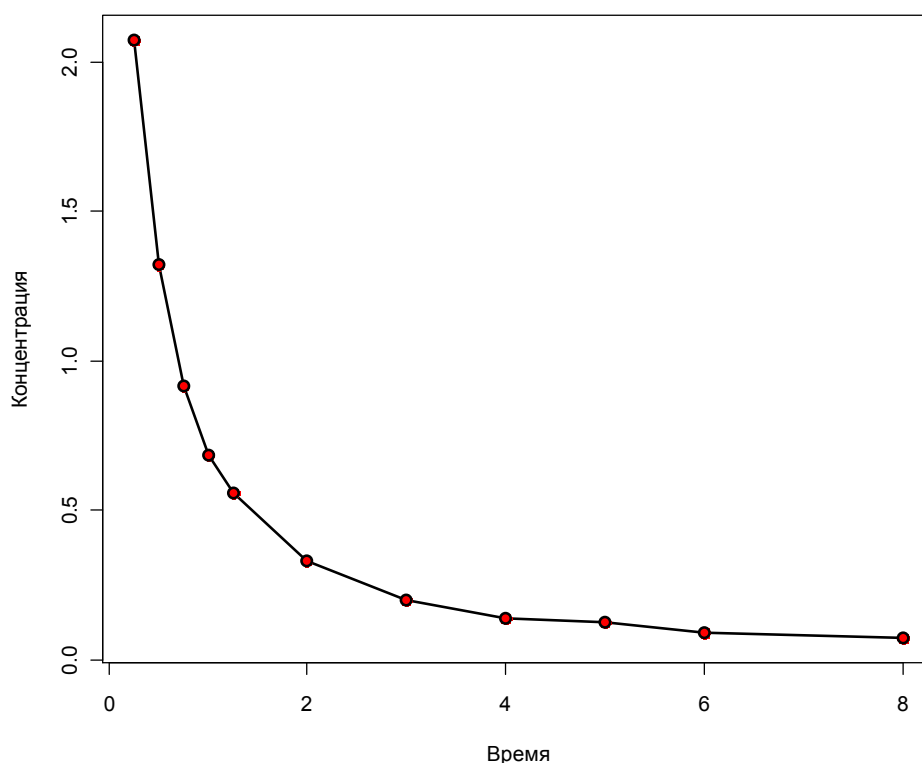
```
# символы в виде треугольников синего цвета pch = 2, col = "blue"
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o",
     pch = 2, sех = 1.2, col = "blue")
# символы в виде ромбиков (pch = 5) красного цвета (col = 2)
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o",
     pch = 5, sех = 1.2, col = 2)
# заголовок графика синего цвета (col.main = "blue")
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o",
     col.main = "blue", sех = 1.2)
```

```
# названия осей выполнены красным цветом (col.lab = "red")
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o",
     col.main = "blue", col.lab = "red", cex = 1.2)
```

При работе с символами 21-25 (см. таблицу выше) мы можем использовать аргумент `bg` (*background* – фон) для указания цвета, которым они должны быть закрасены, например:

```
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "Скорость выведения индометацина", type = "o",
     pch = 21, cex = 1.2, bg = "red", lwd=2, col.main = "blue")
```

Скорость выведения индометацина



#### 4. Ширина линии

Ширина линии задается при помощи аргумента `lwd` (от *line width*) функции `plot()`. Аргумент принимает положительные числовые значения, показывающие, во сколько раз ширина линии должна быть больше относительно ширины, заданной по умолчанию. Ширина линии (по умолчанию равна 1) является безразмерной величиной, поскольку на разных графических устройствах (подробнее см., например, [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org)) линии с одинаковыми параметрами могут выглядеть по-разному. Ниже приведены примеры трех графиков с разными значениями параметра `lwd`:

```
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "lwd = 2", type = "l", lwd = 2)
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "lwd = 5", type = "l", lwd = 5)
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "lwd = 10", type = "l", lwd = 10)
```

## 5. Концы и места соединения линий

Аргумент `lend` (от *line end* – окончание линии) функции `plot()` позволяет настроить внешний вид концов линии. Этот аргумент принимает значения 0 (по умолчанию), 1 или 2, что соответствует округлым, усеченным квадратным и квадратным концам соответственно. Места соединения линий также могут выглядеть по-разному, что определяется аргументом `ljoin` (от *line* – линия, и *join* – место соединения). Аргумент `ljoin` принимает значения 0 (по умолчанию), 1 или 2, что соответствует округлому, остроугольному и усеченному соединениям соответственно.

## 6. Тип линии

Тип линии настраивается при помощи аргумента `lty` (от *line* – линия, и *type* – тип) функции `plot()`. Существует шесть предустановленных типов линий, которые задаются числами от 1 до 6 соответственно.

При необходимости можно создать пользовательские типы линий. В таких случаях в качестве значения аргумента `lty` выступает текстовая последовательность из четырех цифр. Эти числа (от 1 до 9) определяют размер четырех элементов, составляющих повторяющийся паттерн "штрих - пробел - штрих - пробел". Например, при `lty = "4241"` линия будет состоять из повторяющегося паттерна, в котором имеется штрих длиной 4 единицы, пробел длиной 2 единицы, опять штрих длиной 4 единицы, и пробел в 1 единицу. Примеры пользовательских типов линий приведены ниже:

```
_____ lty=1
- - - - - lty=2
. . . . . lty=3
. - . - . lty=4
- - - - - lty=5
- - - - - lty=6
_____ lty=7
. . . . . lty='1234'
- . - . - lty='9111'
```

Цвет линий задается при помощи аргумента `col` (от *color* – цвет). Использование параметра `col` в отношении линий ничем не отличается от его использования в отношении графических символов.

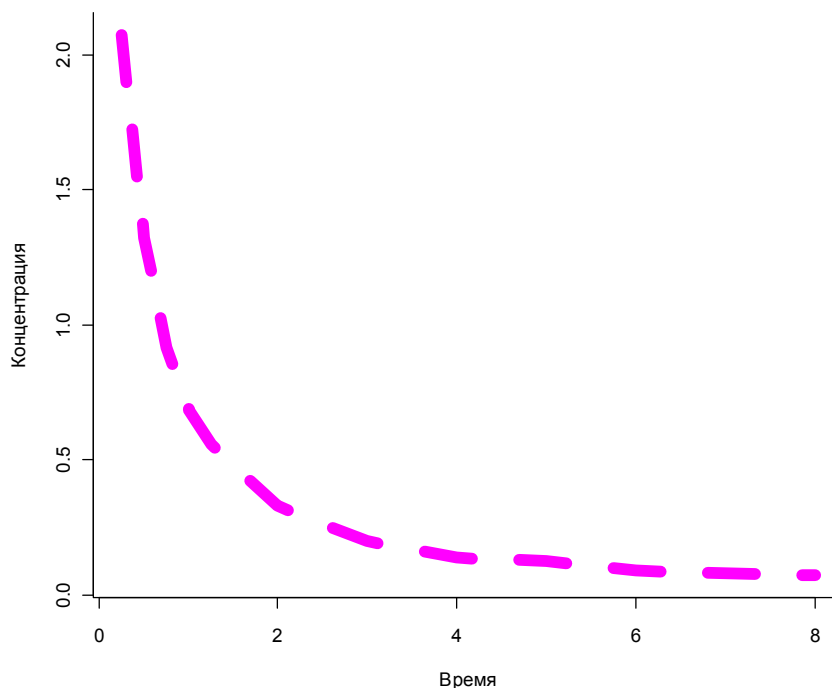
## 7. Рамка графика

Для настройки внешнего вида рамки графика служит аргумент `bty` (от *box* – коробка, и *type* – тип) функции `plot()`. Этот аргумент принимает одно из следующих шести текстовых значений:

"o" "L" "7" "C" "U" "["

Рамка будет принимать вид в соответствии с формой указанного символа (допускается использование также строчных букв `o`, `l`, `c`, и `u`). Ниже приведен пример использования различных перечисленных опций:

```
plot(indo.times, means, xlab = "Время", ylab = "Концентрация",
     main = "", type = "l", lwd = 10, lty = 2, col = 6,
     bty= "L")
```



### 3.2. Гистограммы, функции ядерной плотности и функция `sdplot()`

**Гистограмма** является важным инструментом статистики, позволяющим наглядно представить распределение значений анализируемой переменной. В системе R для построения гистограмм служит функция `hist()`. Ее основным аргументом выступает имя анализируемой переменной.

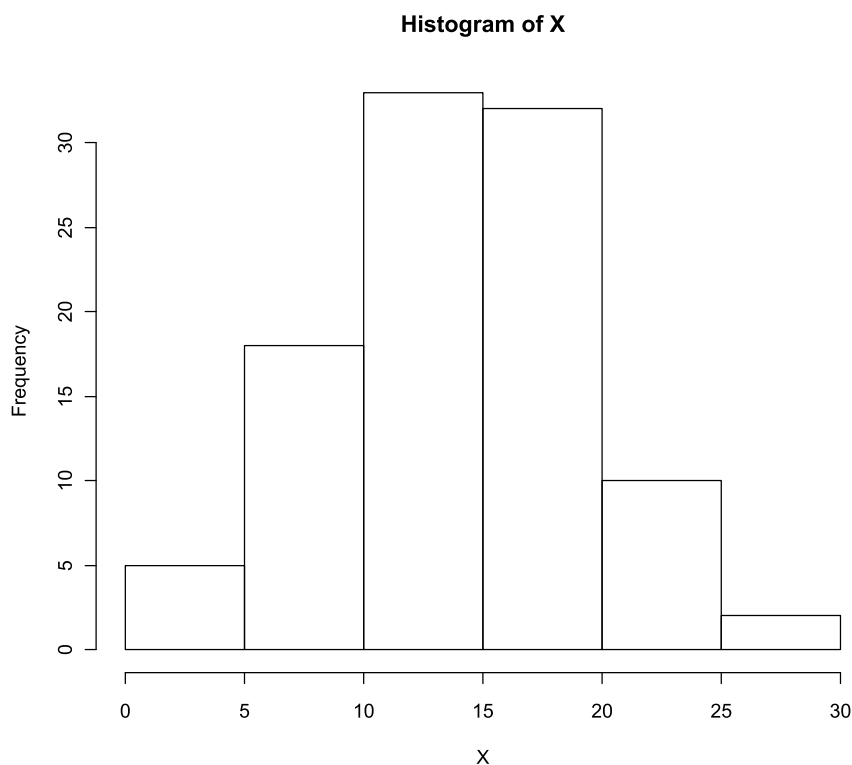
В качестве примера создадим нормально распределенную совокупность  $X$  из 100 наблюдений со средним значением 15 и стандартным отклонением 5:

```
X <- rnorm(n = 100, mean = 15, sd = 5)
```

Для создания переменной  $X$  использована функция `rnorm()` (от *random* – случайный, и *norm* – нормальный). Используя генератор случайных чисел, эта функция формирует нормально распределенные совокупности с заданными размером ( $n$ ), средним значением (`mean`) и стандартным отклонением (`sd`).

Изобразить значения переменной  $X$  в виде гистограммы очень просто:

```
hist(X)
```

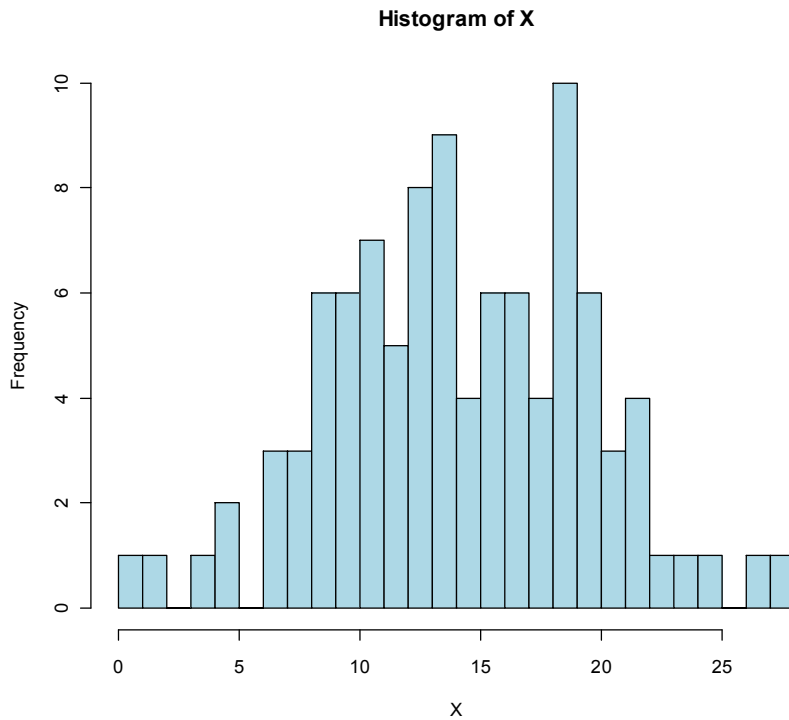


Как видно из приведенного рисунка, функция `hist()` автоматически выбирает количество столбцов для отображения на графике, а также создает названия осей и заголовков графика. Такого рисунка, получаемого с использованием автоматических настроек, может оказаться вполне достаточно (например, при проведении быстрого разведочного анализа данных). Однако часто требуется его дополнительная доработка.

Прежде всего, важно обратить внимание на размер шага, используемого для разбиения данных на классы при построении гистограммы. В приведенном выше примере программа автоматически разбила значения переменной `X` на 6 классов. Однако такое грубое разбиение может недостаточно точно отражать свойства анализируемой совокупности. Для более детального изучения этих свойств можно увеличить дробность деления данных на классы (т.е. использовать меньший классовый промежуток). Сделать это позволяет аргумент `breaks` (*разломы*) функции `hist()`. При необходимости столбцы гистограммы можно залить желаемым цветом. Для этого следует воспользоваться аргументом `col` – это тот же аргумент, который мы использовали при рассмотрении настроек функции `plot()` (раздел 3.1). В приведенном примере выбран светло-голубой цвет столбцов (`"lightblue"`):

```
hist(X, breaks = 20, col = "lightblue")
```

Как видим, результатом выполнения предыдущей команды стала гистограмма с двадцатью столбцами, позволяющая более детально проанализировать распределение значений переменной `X`.



По умолчанию функция `hist()` отображает по оси ординат частоты встречаемости для каждого класса значений  $X$ . Такое поведение функции можно изменить, придав аргументу `freq` (от *frequency* – частота) значение `FALSE`. В этом случае ось ординат будет отражать плотность вероятности каждого класса так, что суммарная площадь под гистограммой составит 1:

```
hist(X, breaks = 20, freq = FALSE)
```

В ряде случаев, в частности при небольшом числе наблюдений, гистограммы могут давать неверное представление о свойствах совокупности, например, из-за небольшого числа редко расположенных столбцов:

```
X <- rnorm(n = 50, mean = 15, sd = 5)
hist(X, breaks = 20, freq = FALSE, col = "lightblue")
```

Вместо гистограммы (или параллельно с ней) в таких случаях рекомендуется воспользоваться *кривой плотности вероятности*. Оценка плотности вероятности выполняется при помощи функции `density()`, которую можно применить в качестве аргумента функции `plot()` для графического изображения результата:

```
plot(density(X))
```

Гладкость получаемой кривой регулируется при помощи аргумента `bw` (от *bandwidth* – ширина окна), например:

```
plot(density(X, bw = 0.8))
```

Для полноты картины гистограмму можно совместить с кривой плотности вероятности. При этом сначала необходимо построить саму гистограмму, а затем добавить к ней кривую плотности при помощи функции `lines()` (подробнее об этой функции будет рассказано в одном последующих разделов):

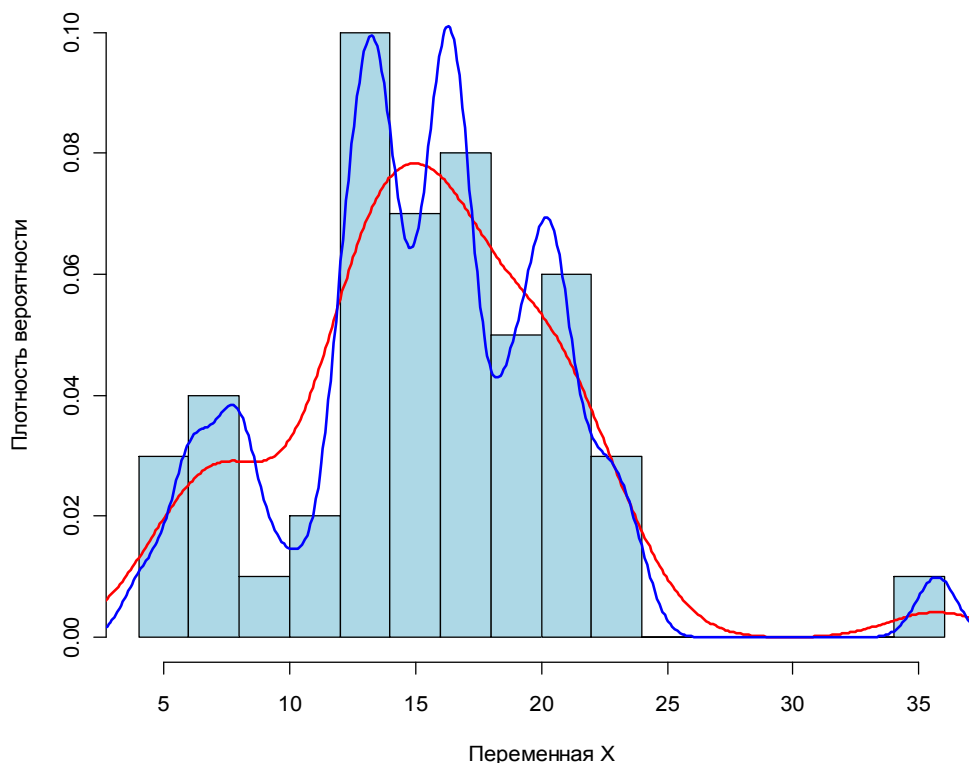


```

hist(X, breaks = 20, freq = FALSE, col = "lightblue",
     xlab = "Переменная X",
     ylab = "Плотность вероятности",
     main = "Гистограмма, совмещенная с кривой плотности")
lines(density(X), col = "red", lwd = 2)
lines(density(X, bw = 0.8), col = "blue", lwd = 2)

```

Гистограмма, совмещенная с кривой плотности



Обратите внимание на дополнительные аргументы, использованные вместе с функцией `hist()`: `xlab` и `ylab` – для создания названий осей, и `main` – для создания заголовка рисунка. Аналогично, в качестве управляющих аргументов функции `lines()` были применены аргументы `col` (для установки цвета линии) и `lwd` (для установки толщины линии). Эти же аргументы мы использовали ранее при построении графиков с помощью функции `plot()`. Приведенные примеры показывают универсальность этих и целого ряда других аргументов, управляющих поведением `plot()`, `hist()` и иных графических функций R высокого уровня.

Особенности использования функции `density()` для визуализации стратифицированных данных рассмотрим на примере данных, полученных в ходе эксперимента по изучению эффективности шести видов инсектицидных средств. Каждым из этих средств обработали по 12 растений, после чего подсчитали количество выживших на растениях насекомых. Данные этого эксперимента входят в состав стандартного набора данных R и доступны по команде `data(InsectSprays)`. В таблице `InsectSprays` имеется два столбца: `count`, содержащий результаты подсчета насекомых, и `spray`, содержащий коды инсектицидных средств (от A до F):

```

data(InsectSprays)
head(InsectSprays)
  count spray
1     10    A
2      7    A

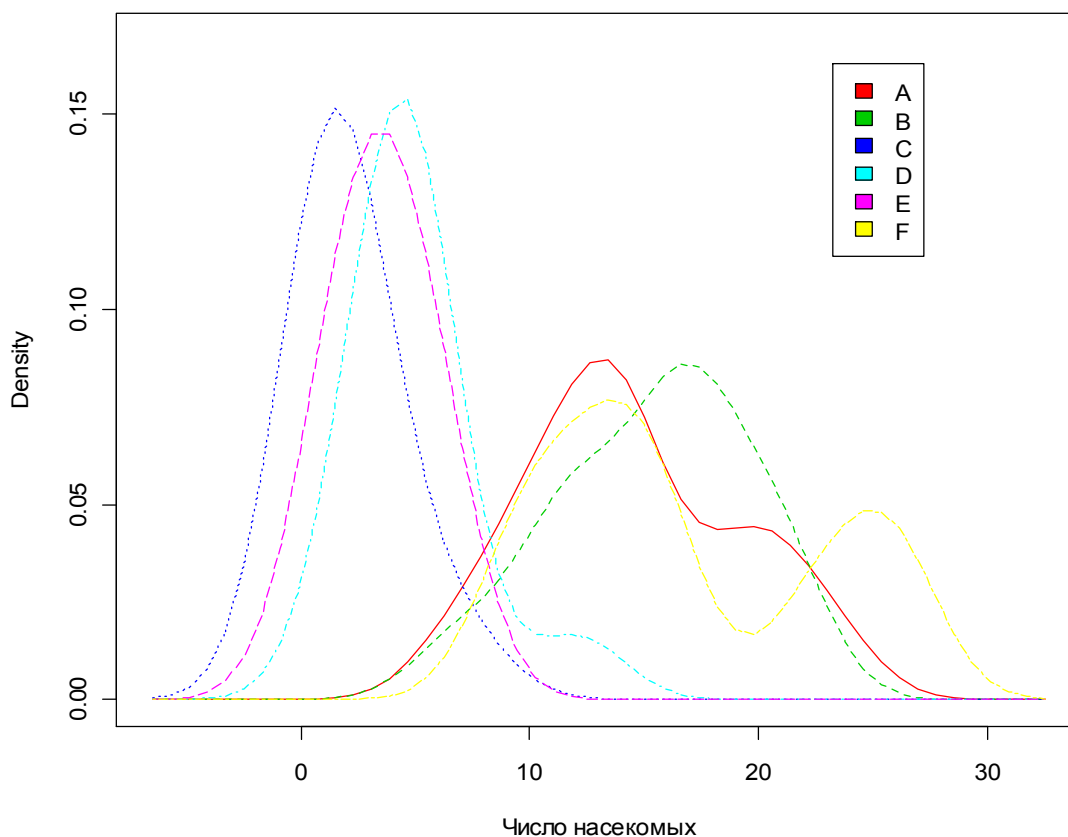
```

3	20	A
4	14	A
5	14	A
6	12	A

Выведем кривые ядерной плотности для каждого из изученных препаратов. Для этого воспользуемся функцией `sm.density.compare()` из пакета `sm` (Smoothing methods), посвященного методам сглаживания и оценкам плотности.

```
attach(InsectSprays)
# Сравнение всех препаратов по кривым ядерной плотности
library(sm)
sm.density.compare(count, spray, lwd = 2,
                   xlab="Число насекомых")
title(main="Кривые ядерной плотности")
# Составляем список кодов использованных цветов
colfill<-c(2:(2+length(levels(spray))))
# добавляем легенду туда, куда мы кликнем мышью
legend(locator(1), levels(spray), fill=colfill)
```

Кривые ядерной плотности



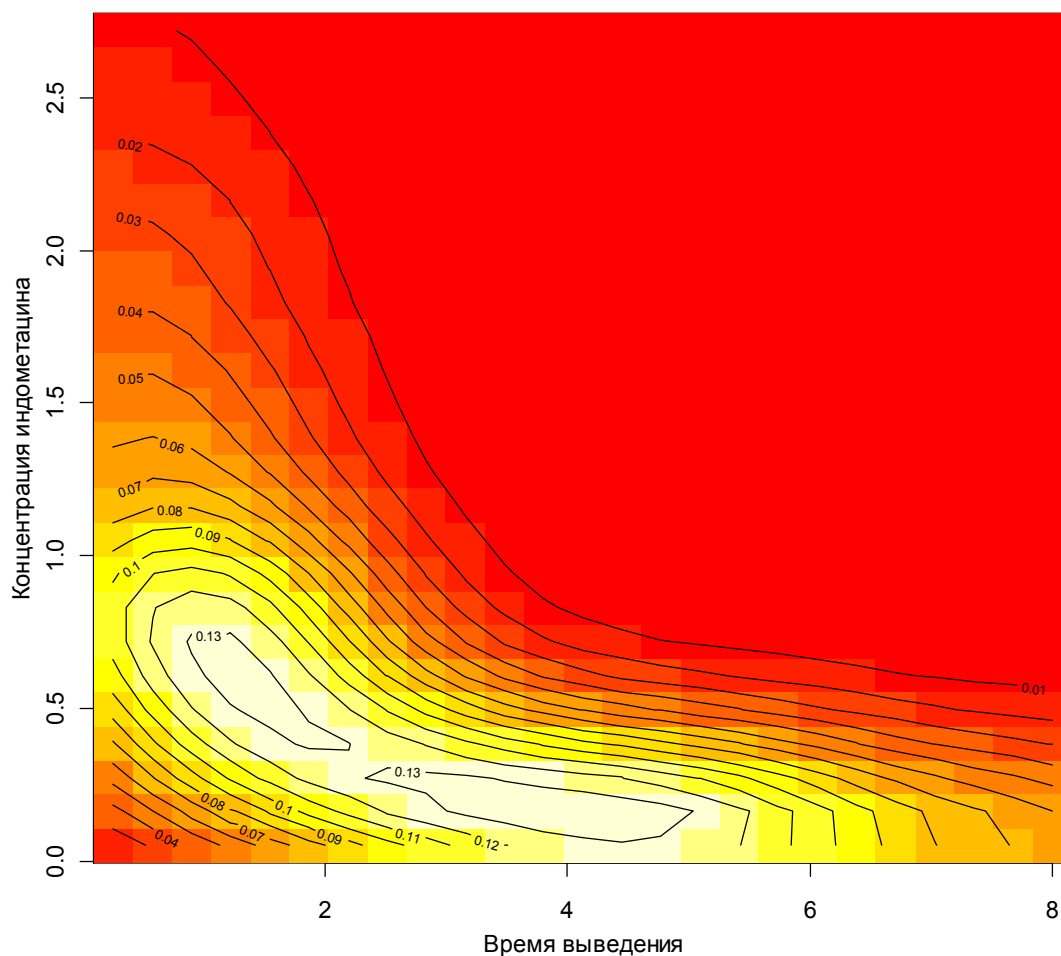
Обратите внимание на использование функции `title()`, добавляющей к графику заголовок и легенду, а также опции `locator(1)`, позволяющей пользователю выбрать место размещения графических атрибутов.

Наконец, для того, чтобы оценить взаимодействие между двумя переменными, представляет интерес построить график поверхности ядерной плотности распределения двумерной случайной величины  $z = f(x, y)$ . Это можно сделать с использованием функции

`kde2d()` из популярного пакета `MASS`. В качестве примера покажем диаграмму совместного распределения показателей `time` и `conc` в эксперименте со скоростью выведения индометацина (см. раздел 3.1):

```
data(Indometh) ; attach(Indometh)
library(MASS)
f <- kde2d(time, conc)
image(f, xlab="Время выведения", ylab="Концентрация индометацина")
contour(f, add=TRUE)
```

Здесь функция `image()` создает окрашенную прямоугольную сетку, цвет которой зависит от значения переменной `f` (в нашем случае это – плотность вероятности), а функция `contour()` – добавляет на график изолинии.



### Функция `cdplot()`

Для визуализации связи между двумя переменными, одна из которых является количественной, а другая качественной (фактором), можно использовать диаграмму размахов (*box plot*). При таком подходе ось ординат обычно соответствует значениям количественной переменной. Но что, если зависимой является качественная переменная? Полезной здесь может оказаться еще одна базовая графическая функция R – `cdplot()`, позволяющая совмещать на одном графике плотности вероятности для каждого уровня интересующей исследователя качественной переменной (англ. *conditional density plot*).

Приведем пример, заимствованный из книги (Everitt, Hothorn, 2010) – одного из лучших, на наш взгляд, руководств по биостатистическому анализу с использованием R.

Нам потребуется пакет HSAUR2, сопровождающий указанную книгу. Его легко установить при помощи команды `install.packages("HSAUR2")`.

В состав пакета HSAUR2 входит набор данных `plasma`:

```
library(HSAUR2)
data(plasma)
summary(plasma)
  fibrinogen      globulin      ESR
Min.   :2.090   Min.   :28.00   ESR < 20:26
1st Qu.:2.290   1st Qu.:31.75   ESR > 20: 6
Median :2.600   Median :36.00
Mean   :2.789   Mean   :35.66
3rd Qu.:3.167   3rd Qu.:38.00
Max.   :5.060   Max.   :46.00
```

Видно, что таблица `plasma` содержит две количественные переменные – `fibrinogen` и `globulin`, и одну качественную переменную с двумя уровнями – `ESR`.

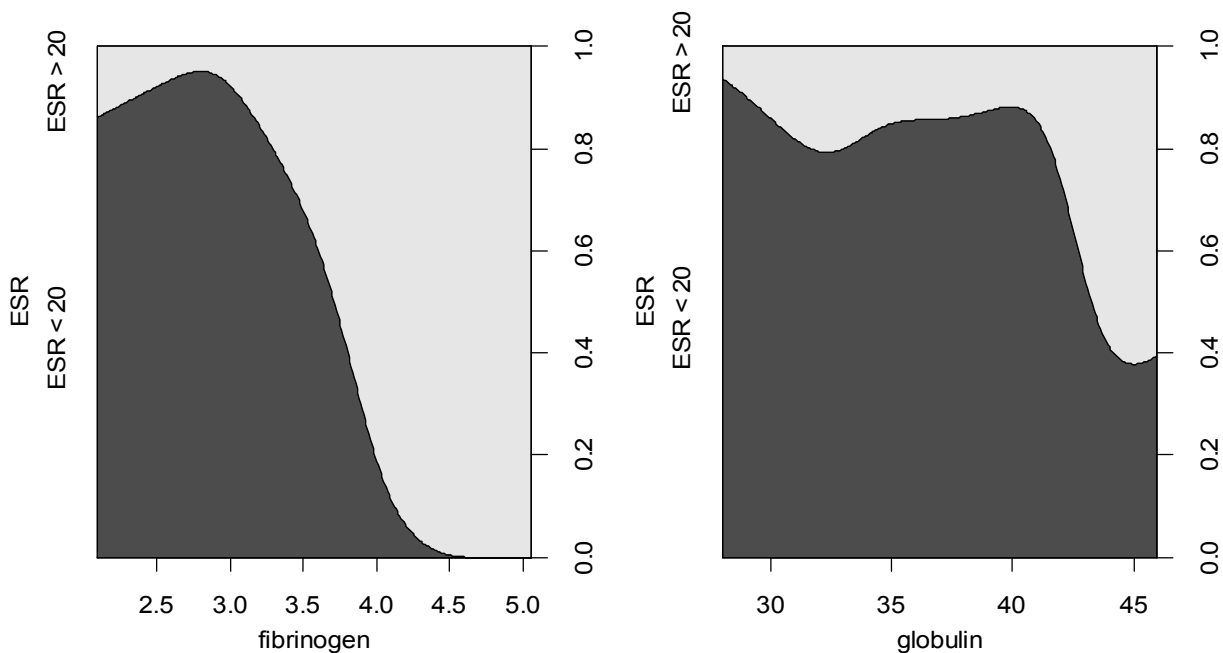
Речь здесь идет о клинических данных. `ESR` расшифровывается как *erythrocyte sedimentation rate*, т.е. скорость оседания эритроцитов (СОЭ, мм/ч). Многие заболевания сопровождаются повышенными значениями СОЭ в связи с увеличением концентрации определенных белков в плазме крови, и, благодаря этому, СОЭ потенциально может служить критерием для диагностики таких заболеваний. Конкретное значение СОЭ у того или иного пациента не очень важно, но известно, что у здоровых людей этот показатель обычно не превышает 20 мм/ч. Поэтому в рассматриваемом исследовании СОЭ регистрировали как качественную переменную с двумя уровнями – "`ESR < 20`" и "`ESR > 20`". Вопрос заключался в том, есть ли связь между СОЭ и концентрацией двух конкретных белков в плазме крови пациентов – фибриногена и глобулина? При отсутствии такой связи СОЭ не может служить надежным диагностическим критерием.

Метод, при помощи которого был получен ответ на приведенный выше вопрос (логистическая регрессия), мы опишем в главе 8.2 при рассмотрении статистических моделей. Здесь же сосредоточимся на разведочном анализе данных: с помощью функции `cdplot()` изобразим графически зависимость вероятности наблюдения "`ESR < 20`" и "`ESR > 20`" при разных концентрациях фибриногена и глобулина. Графики для обоих белков будут изображены на одном рисунке, и поэтому для начала разобьем область графического устройства R на две части при помощи функции `layout()` (подробнее см. `? layout`):

```
layout(matrix(1:2, ncol = 2))
```

Теперь создадим сами графики:

```
cdplot(ESR ~ fibrinogen, data = plasma)
cdplot(ESR ~ globulin, data = plasma)
```



Из полученных графиков видно, что повышение концентрации обоих белков ведет к увеличению вероятности измерения СОЭ > 20 мм/ч, особенно в случае с фибриногеном.

У функции `cdplot()` есть несколько управляющих аргументов, большинство из которых являются стандартными для графических функций в R. Особенно полезными могут оказаться следующие аргументы (подробно см. справочный файл, доступный по команде `? cdplot`):

- При помощи аргумента `col` можно задать текстовый вектор с названиями цветов, которые будут использованы для заливки полигонов на графике:

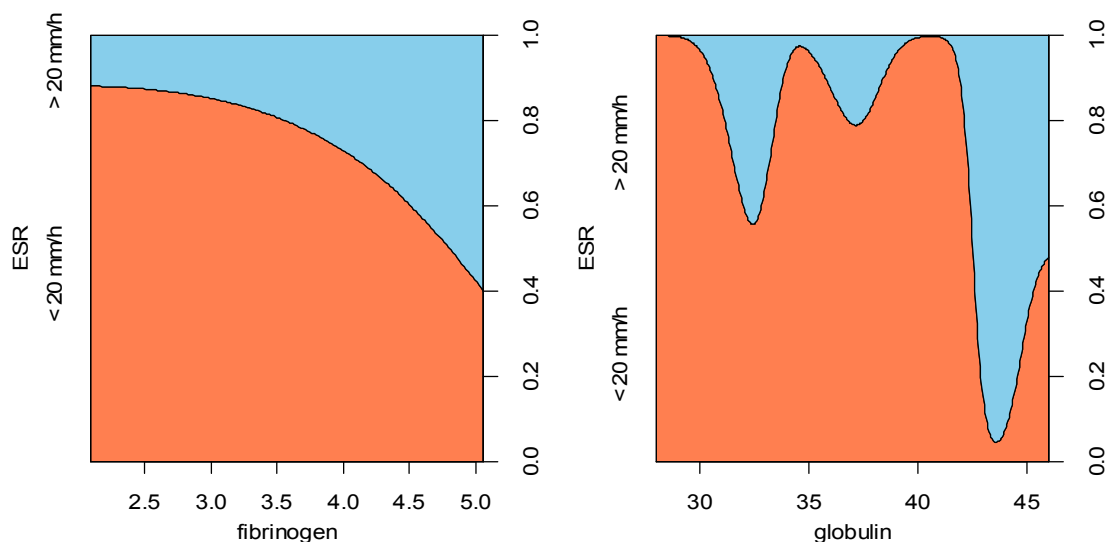
```
cdplot(ESR ~ fibrinogen, col = c("coral", "skyblue"),
      data = plasma)
cdplot(ESR ~ globulin, col = c("coral", "skyblue"),
      data = plasma)
```

- Аргумент `yaxlabels` позволяет "на лету" изменить метки анализируемой зависимой переменной:

```
cdplot(ESR ~ fibrinogen, col = c("coral", "skyblue"),
      yaxlabels = c("< 20 mm/h", "> 20 mm/h"), data = plasma)
cdplot(ESR ~ globulin, col = c("coral", "skyblue"),
      yaxlabels = c("< 20 mm/h", "> 20 mm/h"), data = plasma)
```

- При расчете кривых плотности вероятности функция `cdplot()` обращается к описанной ранее функции `density()`, и поэтому непосредственно при вызове `cdplot()` можно изменять такие параметры `density()`, как уровень сглаживания кривой (аргумент `bw`):

```
cdplot(ESR ~ fibrinogen, col = c("coral", "skyblue"),
      yaxlabels = c("< 20 mm/h", "> 20 mm/h"), bw = 0.9, data = plasma)
cdplot(ESR ~ globulin, col = c("coral", "skyblue"),
      yaxlabels = c("< 20 mm/h", "> 20 mm/h"), bw = 0.9, data = plasma)
```

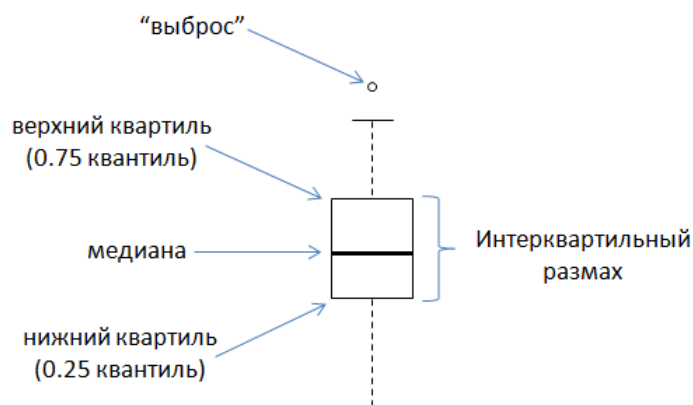


### 3.3. Диаграммы размахов

**Диаграммы размахов**, или "ящики с усами" (англ. *box-whisker plots*), получили свое название за характерный вид: точку или линию, соответствующую среднему положению совокупности данных, окружает прямоугольник ("ящик"), длина которого соответствует одному из показателей разброса или точности оценки генерального параметра. Дополнительно от этого прямоугольника отходят "усы", также соответствующие по длине одному из показателей разброса или точности. Графики этого типа очень популярны, поскольку позволяют дать очень полную статистическую характеристику анализируемой совокупности. Кроме того, диаграммы размахов можно использовать для визуальной экспресс-оценки разницы между двумя и более группами (например, между датами отбора проб, экспериментальными группами, участками пространства и т.п.).

В R для построения диаграмм размахов служит функция `boxplot()`. Здесь, в отличие от других статистических программ, при построении диаграмм размахов используются устойчивые (робастные) оценки центральной тенденции (медиана) и разброса (интерквартильный размах – ИКР). Верхний "ус" простирается от верхней границы "ящика" до наибольшего выборочного значения, находящегося в пределах расстояния  $1.5 \times \text{ИКР}$  от этой границы. Аналогично, нижний "ус" простирается от нижней границы "ящика" до наименьшего выборочного значения, находящегося в пределах расстояния  $1.5 \times \text{ИКР}$  от этой границы. Длину данного интервала (т.е.  $1.5 \times \text{ИКР}$ ) можно изменить при помощи аргумента `range` функции `boxplot()`.

Строение получаемых при помощи этой функции "ящиков с усами" представлено ниже:



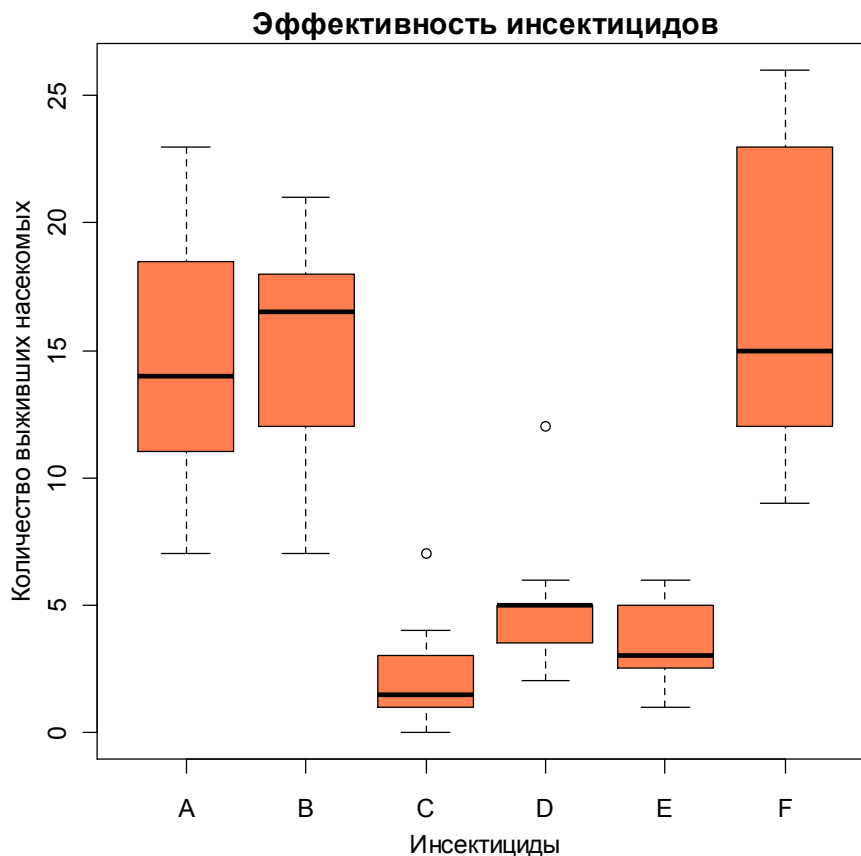
Наблюдения, находящиеся за пределами "усов", потенциально могут быть выбросами. Однако всегда следует внимательно относиться к такого рода нестандартным наблюдениям – они вполне могут оказаться "нормальными" для исследуемой совокупности, и поэтому не должны удаляться из анализа без дополнительного расследования причин их появления.

Особенности использования функции `boxplot()` рассмотрим на примере данных `InsectSprays`, описывающих эксперимент по изучению эффективности шести видов инсектицидных средств (см. раздел 3.2). Для построения графика, на котором будут представлены "ящики с усами" для каждого инсектицида, достаточно выполнить команду

```
boxplot(count ~ spray, data = InsectSprays)
```

Как всегда, мы можем поработать над автоматически построенным графиком и несколько улучшить его внешний вид. Например, можно добавить заголовки осей и самого рисунка (аргументы `xlab`, `ylab` и `main`), а также залить "ящики" каким-нибудь цветом (аргумент `col`):

```
boxplot(count ~ spray,  
        xlab = "Инсектициды",  
        ylab = "Количество выживших насекомых",  
        main = "Эффективность инсектицидов",  
        col = "coral", data = InsectSprays)
```



Как видим, количество насекомых на растениях, обработанных инсектицидами C, D и E было наиболее низким, что говорит о высокой эффективности этих препаратов по сравнению с тремя другими средствами. На растениях, обработанных средствами C и D, были отмечены необычно высокие количества насекомых (см. точки над "усами"). Однако

для насекомых характерно пятнистое пространственное распределение и поэтому вряд ли эти необычно высокие наблюдения являются истинными выбросами.

Обратите внимание на то, как были указаны переменные для построения графика - в виде так называемой *формулы*: `count ~ spray`. Это стандартный способ, используемый в R для формулировки статистических моделей. По левую сторону от знака `~` (он называется "тильда") указывается зависимая переменная, по правую – предикторы.

Подобно функции `plot()`, функция `boxplot()` обладает большим числом управляющих аргументов. Например, используя аргумент `log` можно изобразить данные на логарифмической шкале. Аргумент `varwidth` (от *variable* – переменная, и *width* – ширина) позволяет сделать так, что ширина "ящиков" будет пропорциональна квадратному корню из числа наблюдений в каждой группе (для этого необходимо использовать `varwidth = TRUE`). Это может оказаться полезной опцией для визуализации выборок, значительно различающихся по размеру (в нашем примере смысла в `varwidth = TRUE` нет, поскольку в каждой группе имеется по 12 наблюдений). Аргумент `horizontal` со значением `TRUE` позволяет изобразить "ящики" горизонтально (см. команду ниже). Подробнее об аргументах `boxplot()` можно узнать из справочного файла по этой функции (доступен по команде `? boxplot`).

```
boxplot(count ~ spray,  
        ylab = "Инсектициды",  
        xlab = "Количество выживших насекомых",  
        main = "Эффективность инсектицидов",  
        col = "coral", horizontal = TRUE,  
        data = InsectSprays)
```

Интересно, что построить диаграммы размаха можно не только при помощи специализированной функции `boxplot()`, но также и функции `plot()` – например, по команде

```
plot(count ~ spray, data = InsectSprays)
```

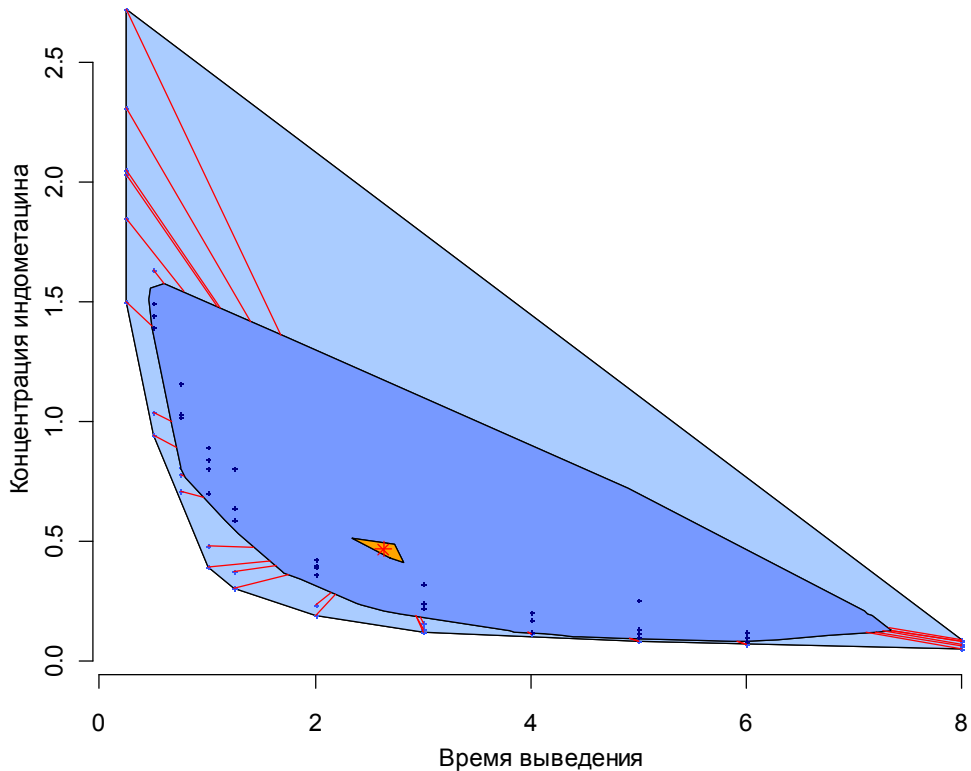
Дело в том, что `plot()` очень "смышленивая" функция: она автоматически распознает, что переменная `count` является количественной, а `spray` – номинальной, и поэтому начинает вести себя как `boxplot()`.

По аналогии с ядерной функцией, описывающей плотность распределения вероятности двумерной случайной величины, при наличии двух измерений "ящик с усами" превращается в "мешок в мешке" (англ. *Bag plots* – см. статью Rousseeuw et al., 1999). Как и в одномерном случае, внешний мешок ограничивается экстремальными выборочными значениями, а внутренний мешок содержит 50% наблюдений. За пределами внешнего мешка могут находиться выбросы. В центре диаграммы размещается область аппроксимации двумерной медианы. В качестве примера покажем диаграмму совместного распределения показателей `time` и `conc` в эксперименте со скоростью выведения индометацина (см. раздел 3.1), полученную с использованием функции `bagplot()` пакета `aplpack`:

```
data(Indometh) ; attach(Indometh)  
library(aplpack)  
bagplot(time, conc, xlab="Время выведения ",  
        ylab="Концентрация индометацина", main="Мешок с усами")
```



## Мешок с усами



### 3.4. Круговые и столбиковые диаграммы

**Круговые диаграммы** (англ. *pie charts*), мягко говоря, не в почете у профессиональных статистиков. Информация, представляемая при помощи круговой диаграммы, плохо воспринимается визуально и практически всегда лучшей альтернативой этому способу визуализации данных будет рассмотренная ниже точечная диаграмма Кливленда или, в крайнем случае, столбиковая диаграмма. Не удивительно поэтому, что в первых версиях R даже не было отдельной функции для построения круговых диаграмм. Позднее такая функция появилась, поскольку в ряде случаев этот вид диаграмм все же может оказаться полезным. Несложно догадаться, что соответствующая функция называется `pie()`.

Функция `pie()` имеет несколько аргументов (подробнее см. ? `pie`). Основными из них являются следующие:

- `x` – вектор из положительных чисел, на основе которых строится диаграмма;
- `labels` – текстовый вектор, содержащий подписи секторов диаграммы; если значения `x` уже имеют атрибут `names` (имена), то аргумент `labels` указывать не обязательно (см. ниже);
- `radius` – изменяет размер квадрата, внутри которого строится диаграмма; в случаях, когда подписи секторов диаграммы слишком длинные, размер этого квадрата можно уменьшить (возможные значения: от -1 до 1; см. ниже);
- `init.angle` – угол поворота диаграммы;
- `col` – вектор (числовой или текстовый), содержащий коды цветов для заливки секторов диаграммы;
- `main` – текстовый вектор, содержащий заголовок диаграммы;
- ... – другие графические параметры (например, параметры, определяющие размер подписей секторов диаграммы, цвет линий, и т.п.).

В качестве примера рассмотрим результаты недавнего голосования в Госдуму Российской Федерации на [top.rbc.ru](http://top.rbc.ru). Изобразим на одном рисунке две круговые диаграммы, отображающие явку избирателей и распределение их голосов. Для начала создадим два числовых вектора с данными:

```
# Данные по явке избирателей:
percent.voted <- c(60, 40)
# Распределение голосов:
votes <- c(49.3, 19.2, 13.2, 11.7, 3.4, 1.0, 0.6)
```

Каждому элементу созданных векторов присвоим соответствующие имена при помощи функции `names()`. Эти имена потом будут автоматически использованы программой в качестве подписей секторов диаграммы:

```
names(percent.voted) <- c("Проголосовали", "Не явились")
names(votes) <- c("Единая Россия", "КПРФ", "Справедливая Россия",
                 "ЛДПР", "Яблоко", "Патриоты России", "Правое дело")
```

Посмотрим, что получилось:

```
percent.voted
Проголосовали    Не явились
              60              40

votes
Единая Россия    КПРФ    Справедливая Россия    ЛДПР
              49.3    19.2              13.2              11.7
              Яблоко    Патриоты России              Правое дело
              3.4              1.0              0.6
```

Поскольку стоит задача изобразить обе диаграммы на одном рисунке, графическое окно R необходимо разбить на две части. Для этого можно использовать команду `par()` (от *parameters* – параметры) и один из ее многочисленных аргументов – `mfrow`:

```
par(mfrow=c(1,2))
```

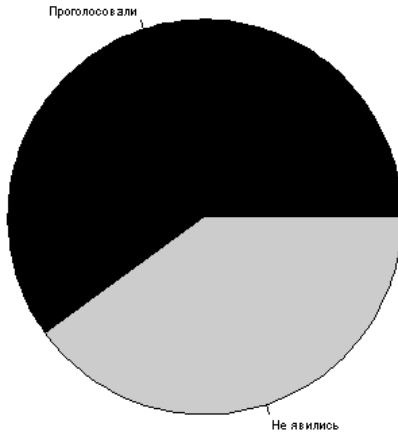
Данная команда приведет к разбиению графического окна R на 2 ячейки, формирующие одну строку. Круговые диаграммы будут последовательно добавлены программой в каждую из этих ячеек:

```
pie(percent.voted, radius = 0.9, cex = 0.6, main = "Явка")
pie(votes, cex = 0.6, radius = 0.9, init.angle = -10,
    main = "Распределение голосов")
```

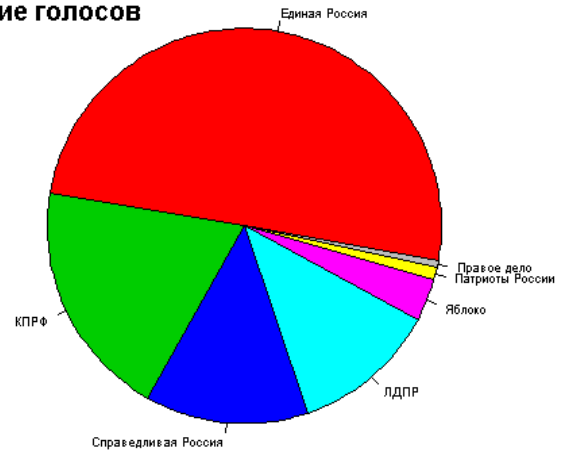
Во второй из приведенных команд можно слегка повернуть диаграмму влево при помощи аргумента `init.angle`, что позволит избежать перекрывания подписей "Правое дело" и "Патриоты России". Цвета заливки секторов диаграммы, используемые программой по умолчанию, можно изменить при помощи аргумента `col`. Например:

```
pie(percent.voted, radius = 0.9, cex = 0.6, main = "Явка",
    col = c("black", "gray80"))
pie(votes, cex = 0.6, radius = 0.9, init.angle = -10,
    main = "Распределение голосов", col = c(2:8))
```

## Явка



## Распределение голосов



### Столбиковые диаграммы

Для создания столбиковых (или "столбчатых", реже "линейчатых"; англ. *bar plots* или *bar charts*) диаграмм в системе R служит функция `barplot()`. У этой функции имеется большое количество аргументов (подробнее см. `? barplot`), к основным из которых относятся:

- `height` ("высота") – числовой вектор или матрица со значениями, используемыми для построения диаграммы. Если аргумент `height` указан в виде вектора, то строится график из последовательно расположенных столбцов, высоты которых соответствуют значениям этого вектора. Если `height` указан в виде матрицы и аргумент `beside = FALSE`, то будет построена столбчатая *диаграмма с накоплением*. Если же `height` указан в виде матрицы и аргумент `beside = TRUE`, то столбцы диаграммы будут *сгруппированы* в соответствии со столбцами матрицы.
- `width` ("ширина") – необязательный параметр, позволяющий регулировать ширину столбцов на диаграмме. Указывается в виде числового вектора, значения которого соответствуют ширине столбцов.
- `space` ("пространство") – величина зазора между столбцами (пропорционально их средней ширине). Может быть указана, либо в виде одного числа, либо в виде вектора из чисел, соответствующих каждому столбцу диаграммы.
- `names.arg` – текстовый вектор, содержащий подписи (вдоль оси X) для каждого столбца или группы столбцов. Если этот аргумент не указан, то в качестве подписей автоматически будут использованы имена элементов вектора `height` (если таковые имеются), либо заголовки столбцов, если `height` представляет собой матрицу.
- `legend.text` – вектор, содержащий текстовые элементы легенды графика. Этот аргумент полезен, если только `height` является матрицей. В этом случае метки легенды должны соответствовать строкам матрицы. Аргументу `legend.text` можно также присвоить значение `TRUE`, и тогда имена строк матрицы (если таковые имеются) будут использованы в качестве меток легенды автоматически.
- `beside` – принимает логическое значение и имеет смысл, если только `height` является матрицей. Значение `FALSE` приведет к построению диаграммы с накоплением. При значении `TRUE` столбцы будут сгруппированы.
- `horiz` – принимает логическое значение: `TRUE` для горизонтального расположения столбцов и `FALSE` – для вертикального.
- `density` – числовой вектор, задающий плотность заштриховки столбцов.

- `angle` – угол наклона штрихов (в градусах).
- `col` – вектор цветовых кодов для столбцов или их элементов. По умолчанию столбцы закрашиваются серым цветом, если `height` – вектор, и разными градациями серого, если `height` – матрица.
- `border` – код цвета для обводки столбцов. Если границу столбцов обводить не предполагается, можно указать `border = NA`.
- `...` – другие графические параметры (см., например, `? plot` и `? par`).

В качестве первого примера используем рассмотренные ранее данные по эффективности шести инсектицидных средств (A – F), входящие в базовую комплектацию R. Загрузим таблицу с этими данными в рабочую среду R:

```
data(InsectSprays)
InsectSprays
```

Стоит задача отобразить в виде столбиковой диаграммы средние значения количества насекомых, учтенных на экспериментальных растениях после обработки каждым инсектицидом. Эти средние значения можно быстро рассчитать для каждой группы при помощи функции `tapply()`. Результат вычислений сохраним в векторе `Means`:

```
attach(InsectSprays)
Means <- tapply(count, spray, mean)
Means
      A      B      C      D      E      F
14.50 15.33  2.08  4.92  3.50 16.67
```

Для построения столбчатой диаграммы в ее простейшем виде достаточно выполнить следующую команду:

```
barplot(height = Means) # или просто barplot(Means)
```

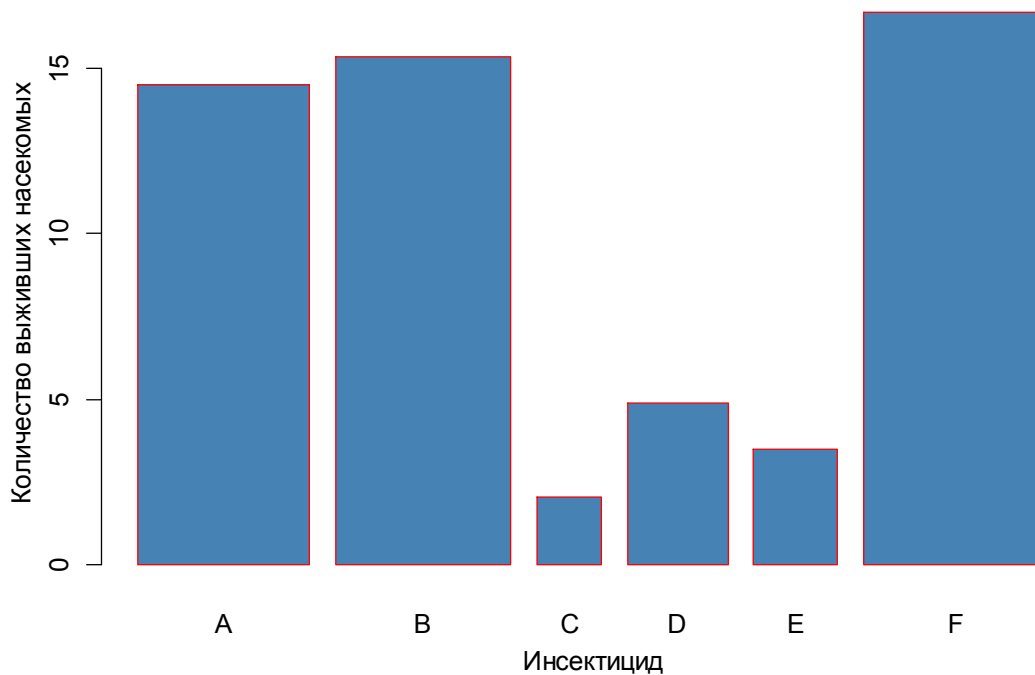
Добавим подписи осей и закрасим столбцы диаграммы голубым цветом:

```
barplot(Means, col = "steelblue",
        xlab = "Инсектицид",
        ylab = "Количество выживших насекомых")
```

Теперь продемонстрируем действие разных аргументов функции `barplot()`, изменяющих внешний вид диаграммы:

- изменена ширина столбцов (теперь она пропорциональна квадратному корню из высоты соответствующего столбца – аргумент `width`) и цвет их обводки (на красный – аргумент `border`):

```
barplot(Means, col = "steelblue",
        xlab = "Инсектицид",
        ylab = "Количество выживших насекомых",
        border = "red", width = sqrt(Means))
```

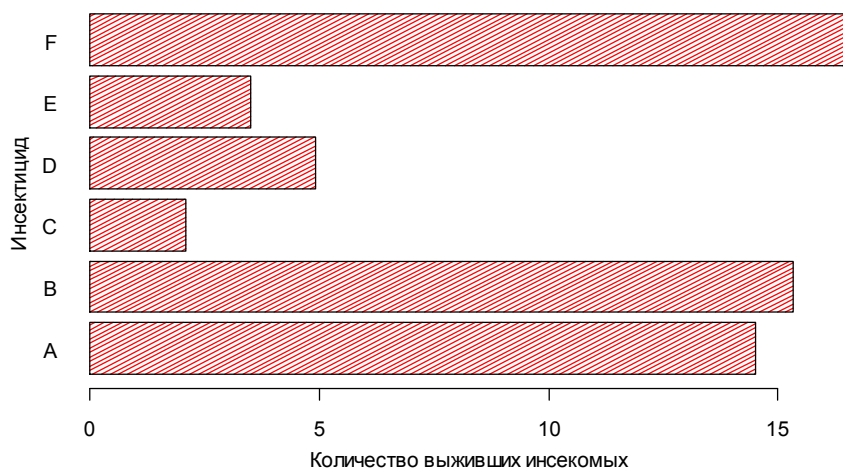


- ° столбцы имеют исходную ширину и цвет обводки, но теперь они заштрихованы (аргумент `density`) и изображены горизонтально (аргумент `horiz`); аргумент `las = 1` заставляет названия инсектицидов принять вертикальное положение :

```
barplot(Means, density = 20, col = "red", horiz = T, las = 1,
         ylab = "Инсектицид",
         xlab = "Количество выживших насекомых")
```

- ° предыдущий график изменен путем увеличения зазора между столбцами (аргумент `space`) и изменения угла наклона штрихов (аргумент `angle`):

```
barplot(Means, density = 20, angle = -45, space = 2,
         col = "red", horiz = TRUE, las = 1,
         ylab = "Инсектицид",
         xlab = "Количество выживших насекомых")
```



Построение диаграммы, где несколько столбцов содержат группировку в соответствии с уровнями какого-либо фактора, рассмотрим на примере данных из таблицы `genotype`, входящей в состав пакета `MASS`. В эту таблицу входят данные из эксперимента, в котором были задействованы лабораторные крысы четырех разных генотипов (A, B, C, D). Выводок (`Litter`), полученный самками (`Mother`) каждого генотипа, изолировался от матерей и отдавался на вскармливание самкам других генотипов. В конце эксперимента (на 28-й день) был измерен вес у крысят (`Wt`), кормившихся молоком от разных самок, с целью установить влияние генотипа на этот показатель:

```
library(MASS)
data(genotype)
head(genotype)
  Litter Mother  Wt
1      A      A 61.5
2      A      A 68.2
3      A      A 64.0
4      A      A 65.0
5      A      A 59.7
6      A      B 55.0
```

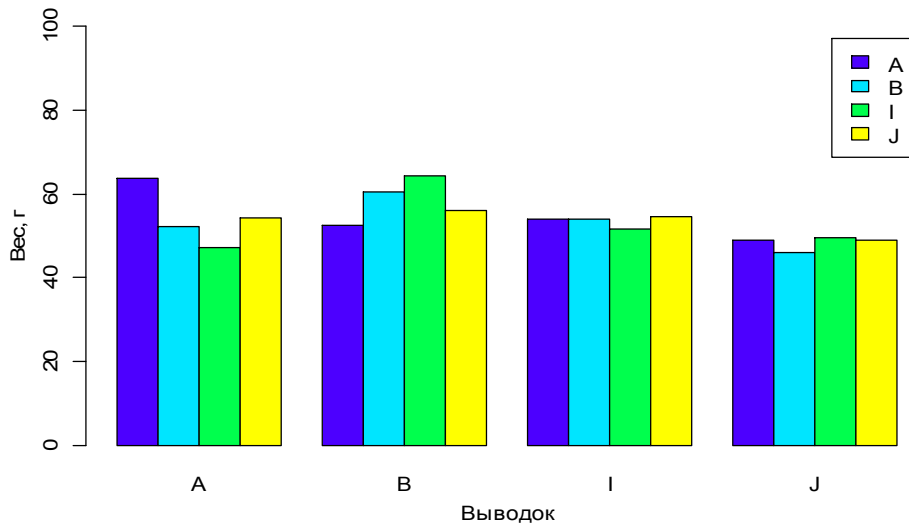
Рассчитаем средние значения веса для каждой экспериментальной группы при помощи функции `tapply()`:

```
means = with(genotype, tapply(Wt, list(Litter, Mother), mean))
# Функция with() позволяет указать таблицу, из которой
# функция tapply() должна брать данные для вычислений
# Просмотрим содержимое матрицы means:
means
  A      B      I      J
A 63.68 52.40 54.12 48.96
B 52.33 60.64 53.92 45.90
I 47.10 64.37 51.60 49.43
J 54.35 56.10 54.53 49.06
```

Матрицу `means` можно уже непосредственно использовать для построения столбчатой диаграммы:

```
barplot(means, beside = TRUE,
        col = topo.colors(4),
        legend.text = rownames(means),
        xlab = "Выводок", ylab = "Вес, г",
        ylim = c(0, 100))
```

В приведенном коде цвет столбцов задан при помощи функции `topo.colors()`, которая автоматически подбирает необходимое количество хорошо сочетающихся цветов в стиле "топографическая карта". Легенда графика включена при помощи аргумента `legend.text`, которому присвоены значения в виде заголовков строк матрицы `means`. Для того чтобы легенда не "наползла" на столбцы, пришлось несколько растянуть ось Y при помощи аргумента `ylim`. Результат выглядит так:



Обратите внимание на то, что для построения приведенного графика аргументу `beside` было присвоено значение `TRUE`. Если бы мы присвоили этому аргументу значение `FALSE`, то получили бы столбиковую *диаграмму с накоплением*:

```
barplot(means, beside = FALSE,
        col = topo.colors(4),
        xlab = "Выводок", ylab = "Вес, г")
```

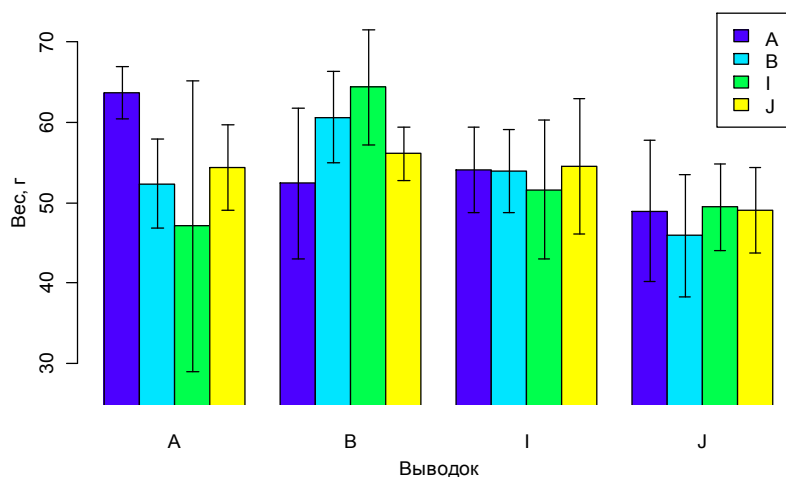
К полученным столбцам диаграмм мы можем добавить "усы", соответствующие, например, стандартным отклонениям. Стандартные отклонения легко рассчитать, используя все ту же функцию `tapply()` (здесь – в связке с `with()`):

```
sds = with(genotype, tapply(Wt, list(Litter, Mother), sd))
# Просмотрим результат:
sds
```

	A	B	I	J
A	3.27	9.37	5.32	8.76
B	5.53	5.65	5.11	7.64
I	18.10	7.12	8.62	5.37
J	5.33	3.35	8.38	5.34

Построим и сохраним диаграмму в виде самостоятельного объекта `b`. Помимо прочего, этот объект будет хранить информацию о высоте столбцов, что потребуется далее при добавлении "усов" к этим столбцам при помощи функции `arrows()`. Аргумент `ylim` в связке с функциями `min()`, `max()` и `pretty()` используется для автоматического подбора оптимального диапазона значений, отображаемых на оси ординат (подробнее см. `?min`, `?max`, `?pretty`):

```
b <- barplot(means, ylim = c(min(pretty(means-sds)),
                             max(pretty(means+sds))),
            col = topo.colors(4),
            beside = TRUE, xpd = FALSE,
            ylab = "Вес, г", xlab = "Выводок",
            legend.text=rownames(means))
# Добавляем "усы" (подробнее см. ?arrows)::
arrows(b, means+sds, b, means-sds, angle = 90, code = 3,
       length = 0.05)
```



### 3.5. Диаграммы Кливленда и одномерные диаграммы рассеяния

**Точечные диаграммы Кливленда** представляют собой графики, на которых точки используются для отображения значений некоторой количественной переменной (или переменных), разбитых на группы в соответствии с уровнями некоторой номинальной переменной (или переменных). Этот инструмент графического анализа данных получил свое название в честь предложившего его У. Кливленда (Cleveland). В работе ([Cleveland, McGill, 1984](#)) было показано, что столбиковые диаграммы, используемые для изображения сгруппированных значений количественных переменных, визуально плохо воспринимаются людьми (*впрочем, это – исключительно дело вкуса...*). В качестве альтернативы были предложены точечные диаграммы.

Для пояснения этой идеи приведем ниже столбиковую диаграмму, изображающую распределение 32 моделей автомобилей 1973-1974 годов выпуска по экономичности двигателя (выражается как количество миль, которое автомобиль проезжает на одном галлоне топлива). Данные, использованные для построения диаграммы, были опубликованы в американском журнале *Motor Trend* в 1974 г. и входят в стандартный набор данных R (доступны по команде `data(mtcars)`).

Для начала загрузим соответствующую таблицу с данными (`mtcars`) в рабочую среду R и исследуем ее содержимое:

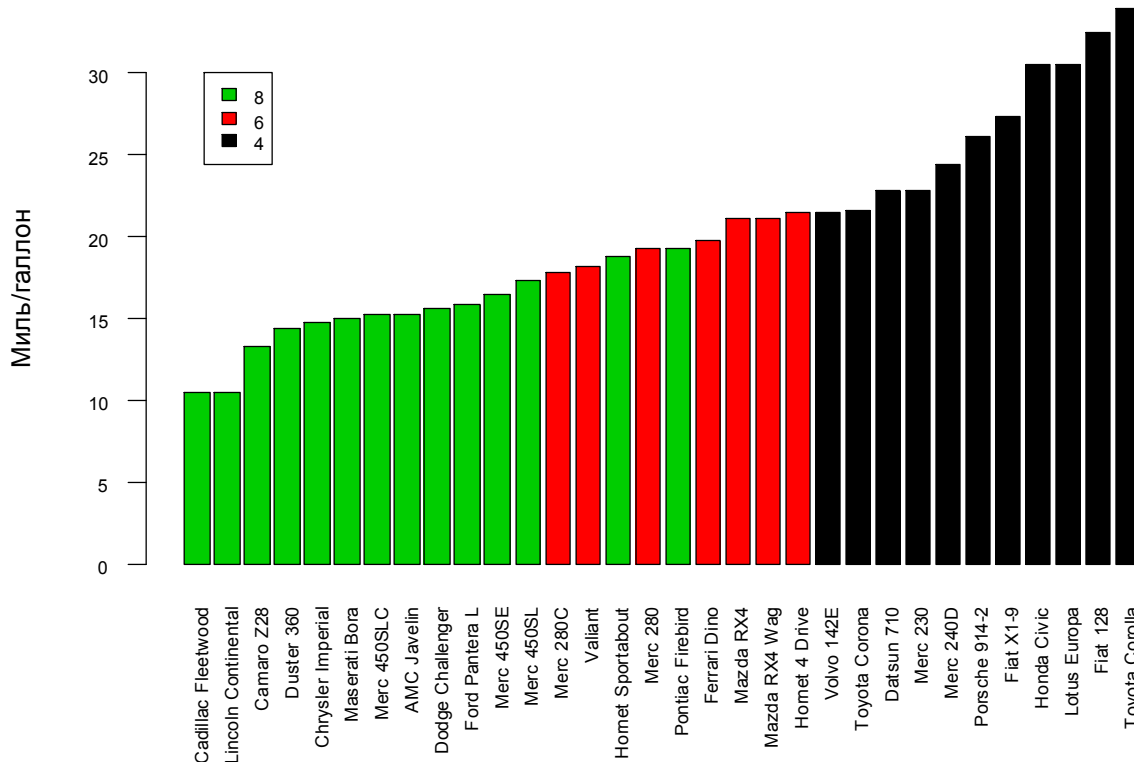
```
data(mtcars)
mtcars
```

	mpg	cyl	disp	hp	drat	wt	qsec	vs	am	gear	carb
Mazda RX4	21.0	6	160.0	110	3.90	2.620	16.46	0	1	4	4
Mazda RX4 Wag	21.0	6	160.0	110	3.90	2.875	17.02	0	1	4	4
Datsun 710	22.8	4	108.0	93	3.85	2.320	18.61	1	1	4	1
Hornet 4 Drive	21.4	6	258.0	110	3.08	3.215	19.44	1	0	3	1
Hornet Sportabout	18.7	8	360.0	175	3.15	3.440	17.02	0	0	3	2
Valiant	18.1	6	225.0	105	2.76	3.460	20.22	1	0	3	1
Duster 360	14.3	8	360.0	245	3.21	3.570	15.84	0	0	3	4
Merc 240D	24.4	4	146.7	62	3.69	3.190	20.00	1	0	4	2
Merc 230	22.8	4	140.8	95	3.92	3.150	22.90	1	0	4	2

В таблице имеются данные по 11 параметрам, характеризующим каждую модель. Подробнее о том, какие параметры были учтены, можно ознакомиться в файле помощи, доступном по команде `? mtcars`.



Построив столбчатую диаграмму, сделаем так, чтобы столбики на рисунке были раскрашены в разные цвета в соответствии с количеством цилиндров `cyl` в двигателях этих моделей. На графике вполне неплохо видно, что автомобили с меньшим количеством цилиндров способны проехать большее расстояние на одном галлоне топлива. Кроме того, можно проследить распределение моделей по экономичности в пределах каждой из групп, выделенных по количеству цилиндров.



Проблема со столбиковыми диаграммами состоит, однако, в том, что они в значительной мере избыточны, поскольку площади, ограниченные столбиками, не несут никакой смысловой нагрузки (т.е. выбрав более узкие или более широкие столбики, мы бы все равно пришли к тем же заключениям о характере распределения автомобилей). По убеждению Кливленда, более подходящим типом статистических графиков для такой ситуации была бы точечная диаграмма. В системе R построение точечных диаграмм осуществляется с помощью функции `dotchart()`. Рассмотрим ее использование на том же примере с автомобилями.

Для нас сейчас интересен столбец `mpg` (от *miles per gallon* – миль на галлон), в котором содержатся данные по пробегу каждой модели в расчете на галлон топлива. Точечную диаграмму по этим данным можно быстро построить следующим образом:

```
dotchart(mtcars$mpg, labels = row.names(mtcars),
         main="Экономия топлива у 32 моделей автомобилей",
         xlab="Миль/галлон", cex = 0.8)
```

В приведенном коде указаны следующие параметры функции `dotchart()`: а) переменная, для которой строится график (`mtcars$mpg`); б) текстовый вектор, содержащий названия моделей автомобилей (в данном случае они являются названиями строк таблицы – `row.names(mtcars)`); в) заголовок графика (аргумент `main`) и название оси X (аргумент `xlab`), и, наконец, г) размер точек на графике и одновременно размер шрифта для названий моделей (`cex = 0.8`).

Такой график пока еще достаточно сырой, хотя и позволяет исследовать разброс имеющихся значений `mpg` у разных моделей. Картина станет гораздо более ясной, если мы отсортируем данные по возрастанию пробега, сгруппируем данные по количеству цилиндров в двигателе и раскрасим соответствующие группы разными цветами.

Сначала отсортируем исходную таблицу по возрастанию `mpg` с использованием функции `order()` и сохраним результат в виде новой таблицы данных с именем `x`:

```
x <- mtcars[order(mtcars$mpg), ]
```

Преобразуем количественную переменную `cyl` (от *cylinder* – цилиндр) в новой таблице `x` в фактор – это нужно сделать, поскольку мы собираемся сгруппировать значения `mpg` именно по количеству цилиндров:

```
x$cyl <- factor(x$cyl)
```

Создадим новый столбец `color` в таблице `x`, который будет содержать числовые коды цветов для каждой из трех групп автомобилей:

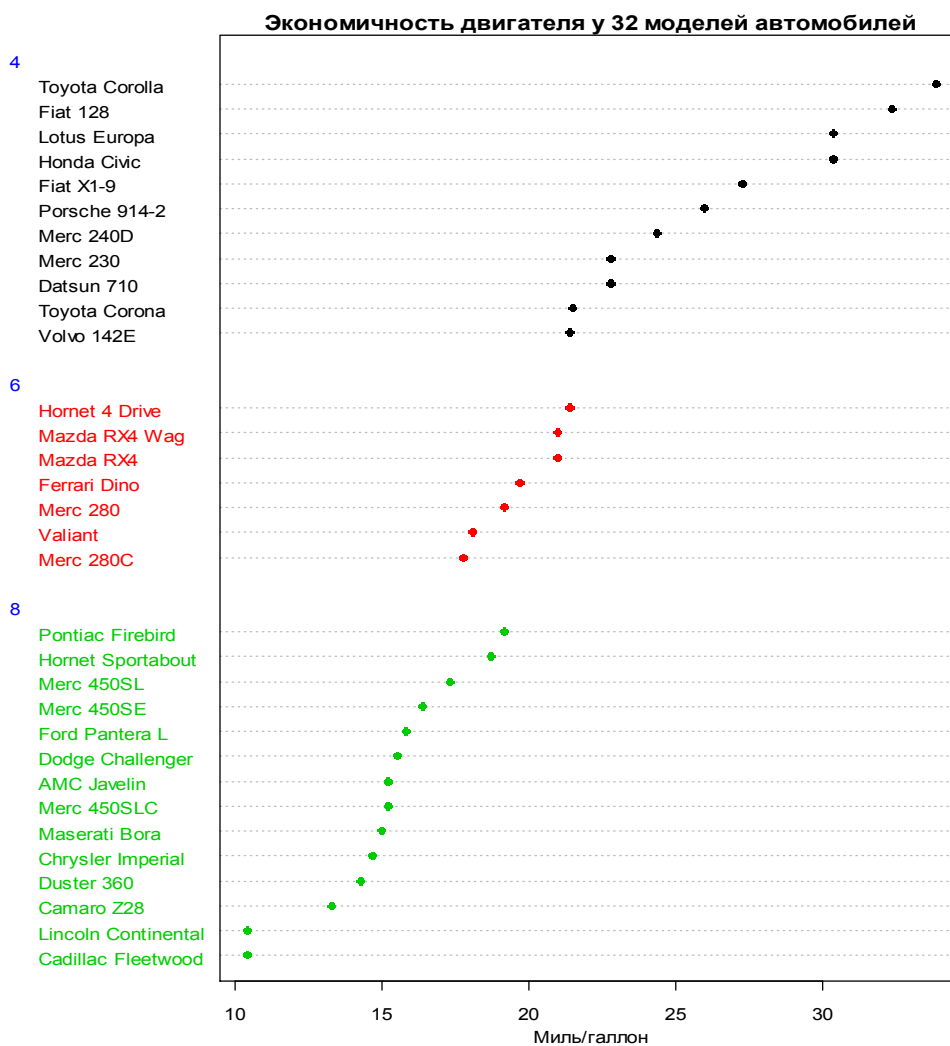
```
x$color[x$cyl==4] <- 1  
x$color[x$cyl==6] <- 2  
x$color[x$cyl==8] <- 3
```

Теперь у нас есть все необходимое для построения желаемого графика:

```
dotchart(x$mpg, labels = row.names(x),  
         groups = x$cyl, gcolor = "blue", pch = 16,  
         main="Экономичность двигателя у 32 моделей автомобилей",  
         xlab="Миль/галлон", sdx = 0.8, color = x$color)
```

В приведенном коде аргумент `groups` используется для указания группирующей переменной (в нашем случае – преобразованная в фактор переменная `cyl`). При помощи аргумента `gcolor` задается цвет названий групп (здесь – голубой). Аргумент `color` служит для указания цветов, специфичных для каждой группы (в нашем примере – 1 (черный) для машин с четырьмя цилиндрами, 2 (красный) для машин с шестью цилиндрами, и 3 (зеленый) для машин с восемью двигателями; все эти числовые коды цветов хранятся в столбце `color` таблицы `x`).

Благодаря сортировке данных и их группированию, а также использованию точек разного цвета вместо столбиков, полученная точечная диаграмма воспринимается гораздо легче, чем приведенная выше "тяжелая" столбиковая диаграмма:



**Одномерные диаграммы рассеяния** (*1-D scatter plots*) представляют собой один из вариантов графического представления распределений количественных переменных. Точки, соответствующие значениям исследуемой переменной, изображаются на таких графиках вдоль единственной числовой оси. При необходимости визуализировать свойства небольших выборок одномерные диаграммы рассеяния будут отличной альтернативой диаграммам размахов. В англоязычной литературе одномерные диаграммы рассеяния называют также *strip charts* или *strip plots*, что можно перевести как "ленточные диаграммы". Это название происходит от характера расположения точек на графике – они как бы выстраиваются в "ленты" (см. ниже). Реже такие графики называют еще "точечными диаграммами Уилкинсона" ([Wilkinson, 1999](#)).

В системе R для построения одномерных диаграмм рассеяния служит функция `stripchart()`. В качестве примера используем ранее рассмотренные данные по эффективности шести инсектицидных средств. Загрузим таблицу с данными в рабочую среду R:

```
data(InsectSprays)
names(InsectSprays)
[1] "count" "spray"
```

Для начала используем все имеющиеся значения из столбца `count` (количество насекомых, выживших после обработки растений инсектицидами) и посмотрим, как они распределяются:

```
stripchart(InsectSprays$count, method = "stack")
```

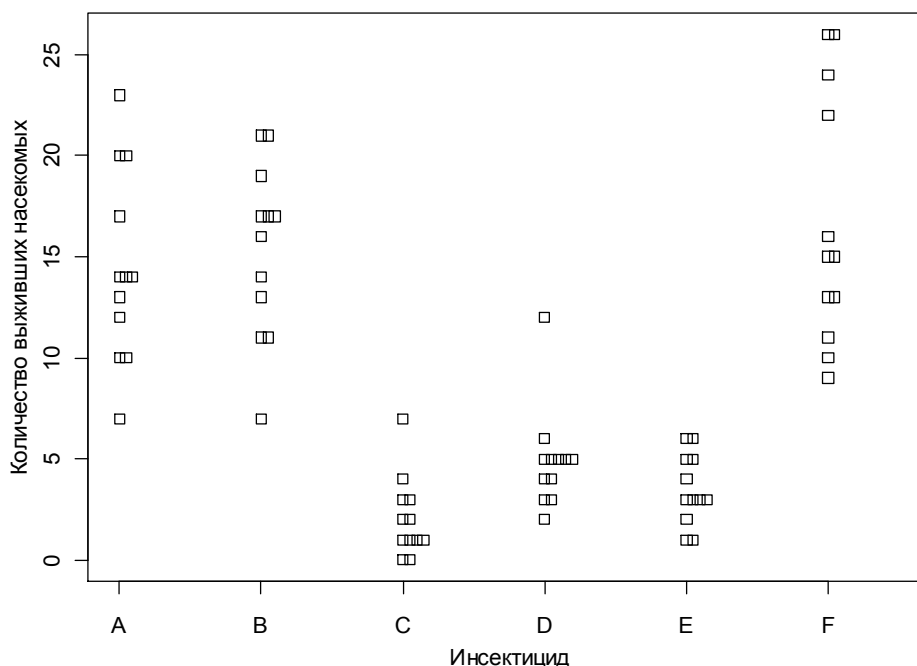
В приведенной команде помимо переменной, для которой строится график (`InsectSprays$count`), был использован также аргумент `method` (метод) со значением `"stack"`. Этот аргумент контролирует характер расположения точек на графике: при значении `"stack"` ("стопка") наблюдения с одинаковыми значениями укладываются друг над другом, образуя фигуры, напоминающие ленты (отсюда название *strip chart* – см. выше).

В таблице `InsectSprays` хранятся данные по эффективности шести видов инсектицидов. Мы можем использовать это обстоятельство и изобразить на одном графике распределения значений `count` для каждого из них. Для этого нужно будет сообщить функции `stripchart()`, что значения переменной `count` сгруппированы по уровням фактора `spray`:

```
stripchart(InsectSprays$count ~ InsectSprays$spray,  
           xlab = "Количество выживших насекомых",  
           ylab = "Инсектицид",  
           method = "stack")
```

Используя аргумент `vertical` со значением `TRUE`, мы можем перевернуть приведенный график так, что по оси X будут отображены названия инсектицидов, а по оси Y – количество выживших насекомых:

```
stripchart(InsectSprays$count ~ InsectSprays$spray,  
           ylab = "Количество выживших насекомых",  
           xlab = "Инсектицид",  
           vertical = TRUE,  
           method = "stack")
```



Следует отметить, что по умолчанию аргумент `method` принимает значение `"overplot"` (от *over* – поверх, и *plot* – рисовать), что приводит к простому наслоению точек с одинаковыми значениями друг на друга:

```
stripchart(InsectSprays$count, method = "overplot")
```

Конечно, такой рисунок имеет мало смысла для рассматриваемых данных, но в некоторых ситуациях метод "overplot" может оказаться полезным.

Иногда очень полезным методом функции `stripchart()` является "jitter" (дословно переводится как "дрожь"), который позволяет вносить случайный шум в расположение точек на графике. Количество шума задается при помощи одноименного аргумента, например:

```
stripchart(InsectSprays$count ~ InsectSprays$spray,  
  ylab = "Количество выживших насекомых",  
  xlab = "Инсектицид",  
  vertical = TRUE,  
  method = "jitter",  
  jitter = 0.1,  
  pch = 1, col = "blue")
```

Обратите внимание на то, что в приведенном выше коде были указаны также такие параметры, как форма символов (аргумент `pch`) и их цвет (аргумент `col`) (подробнее о настройке внешнего вида символов см. раздел 3.1).

Полученный график очень наглядно демонстрирует разброс наблюдений в каждой экспериментальной группе и позволяет сделать определенные предварительные заключения по поводу эффективности исследованных инсектицидов (в частности, похоже, что препараты C, D и E обладают наиболее высокой эффективностью, т.к. вызывают гибель большего количества насекомых, чем при обработке растений другими препаратами). Однако мы можем пойти еще дальше и изобразить на этом же графике средние значения количества выживших насекомых в каждой группе и их соответствующие стандартные отклонения. Для этого придется выполнить некоторые дополнительные вычисления и применить дополнительные графические функции.

Сначала рассчитаем средние значения для каждой группы и сохраним их в виде вектора с именем `means`. Это можно сделать очень быстро при помощи известной нам функции `tapply()`:

```
means <- tapply(InsectSprays$count, InsectSprays$spray,  
  FUN = mean)  
means  
  A    B    C    D    E    F  
14.5 15.3  2.1  4.9  3.5 16.7
```

Аналогичным образом рассчитаем стандартные отклонения для каждой группы:

```
(SDs <- tapply(InsectSprays$count, InsectSprays$spray,  
  FUN = sd))  
  A    B    C    D    E    F  
4.7  4.3  2.0  2.5  1.7  6.2
```

Теперь добавим рассчитанные средние значения на график в виде небольших горизонтальных линий. Добавить произвольную линию на график позволяет функция `segments()` (*сегменты*; подробнее см. ? `segments`). Поскольку у нас имеется шесть групп, функцию `segments()` необходимо будет применить шесть раз. Для ускорения процесса создадим цикл при помощи оператора `for`:

```

for(i in 0:6){
segments(x0 = 0.8+i, y0 = means[1+i],
        x1 = 1+i,   y1 = means[1+i], lwd = 3, lend = "square")
}

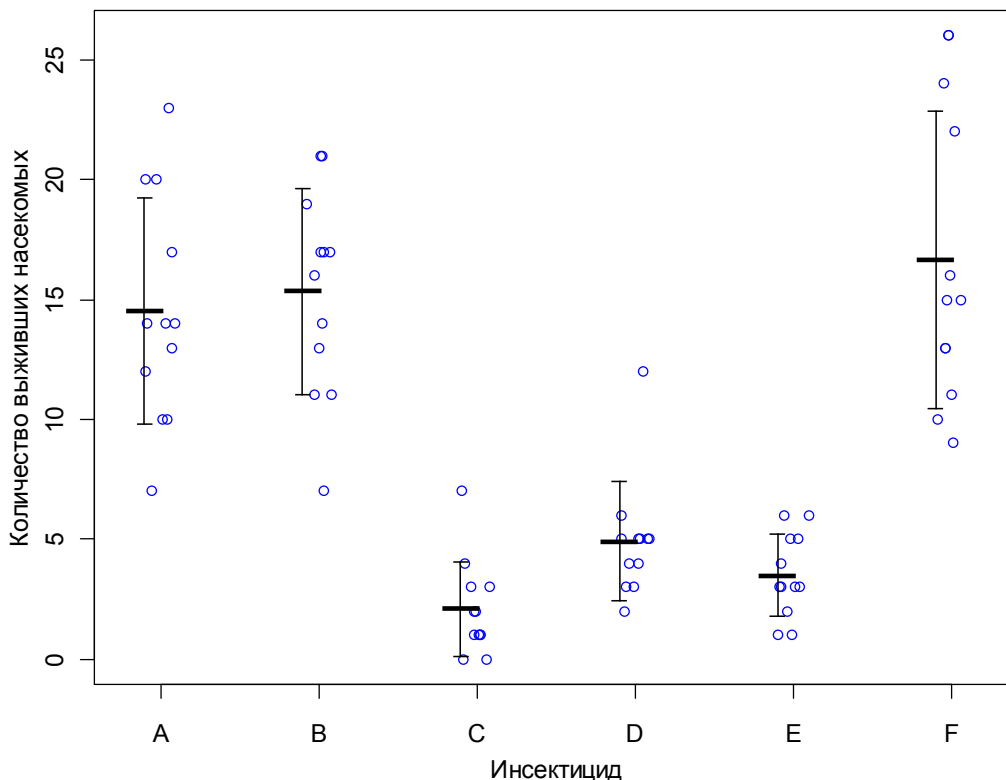
```

Подобно ранее рассмотренному примеру, "усы" к линиям можно добавить при помощи функции `arrows()`:

```

arrows(c(0.9, 1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9), means + SDs,
       c(0.9, 1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9), means-SDs,
       angle = 90, code = 3, length = 0.05, lwd = 1,
       lend = "square")

```



Новый график очень информативен – на нем изображены как все исходные наблюдения для каждой группы, так и сводная статистическая информация в виде соответствующих средних значений и стандартных отклонений.

Еще более полную картину мы можем получить, совместив на одном графике одномерные диаграммы рассеяния и диаграммы размахов. Сделать это можно всего несколькими строками R-кода, используя функции `boxplot()` и `stripchart()`.

В качестве примера используем все те же данные по эффективности шести инсектицидных средств. Построим диаграмму размахов:

```

boxplot(count ~ spray,
# outline=FALSE отключает изображение точек-выбросов
        outline = FALSE, xlab = "Инсектициды",
        ylab = "Количество выживших насекомых",
        main = "Эффективность инсектицидов",
        data = InsectSprays)

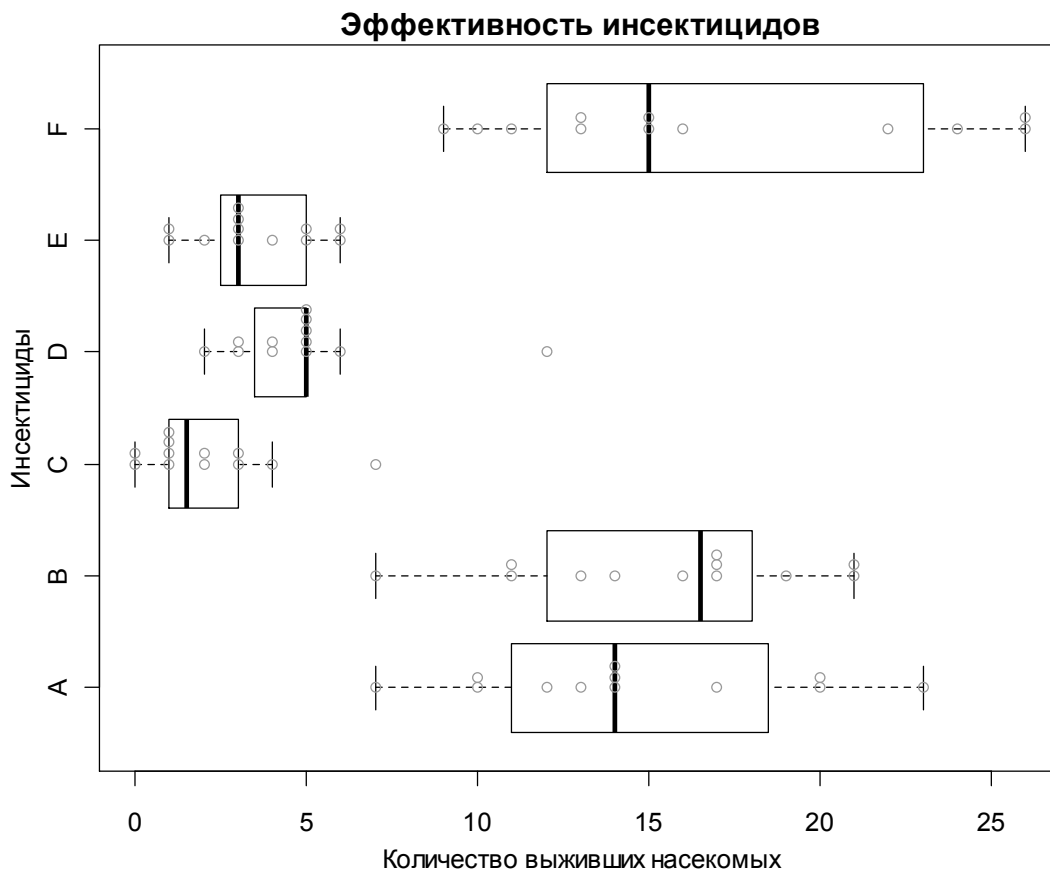
```

При помощи функции `stripchart()` поверх получившегося графика можно наложить диаграмму рассеяния, которая будет отображать все исходные данные в виде точек. Фокус заключается в использовании аргумента `add` (добавить) этой функции. При `add = TRUE` точки будут добавлены к уже существующему графику:

```
stripchart(count ~ spray, method="stack",
            data = InsectSprays, add = TRUE,
            pch = 1, col = "gray60", vertical = TRUE)
```

При необходимости можно легко повернуть весь график на 90 градусов (аргумент `horizontal = TRUE` функции `boxplot()`; в вызове функции `stripchart()` аргумент `vertical` можно пропустить – точки автоматически будут изображены в горизонтальной ориентации). Наконец, можно добавить немного "шума" в расположение точек (`method = "jitter"`):

```
boxplot(count ~ spray, data = InsectSprays, jitter = 0.2,
        outline = FALSE, horizontal = TRUE,
        ylab = "Инсектициды",
        xlab = "Количество выживших насекомых",
        main = "Эффективность инсектицидов")
stripchart(count ~ spray, method="stack",
            data = InsectSprays, add = TRUE,
            pch = 1, col = "gray60")
```



### 3.6. Категоризованные графики

**Функция `coplot()`**, входящая в базовую комплектацию R, предназначена для построения так называемых "*conditioning plots*", название которых можно перевести на русский язык как "*категоризованные графики*". Суть здесь сводится к тому, что анализируемые данные разбиваются на отдельные категории (например, в соответствии с уровнями какого-то фактора) и для каждой из них строится свой график (так называемая *панель*) определенного типа. Все эти графики затем объединяются на одном рисунке, что существенно облегчает выявление статистических закономерностей и структур в данных – подробности можно найти в книге (Cleveland, 1993).

Функция `coplot()` обладает большим количеством управляющих аргументов (см. `? coplot`), основными из которых являются следующие:

- `formula` – формула, описывающая взаимодействие между анализируемыми переменными;
- `data` – таблица данных, содержащая значения переменных, указанных в `formula`;
- `panel` – функция, позволяющая задать тип и настроить внешний вид отдельных панелей категоризованного графика; по умолчанию эти панели представляют собой *диаграммы рассеяния* (см. примеры ниже);
- `rows` и `columns` – панели категоризованного графика размещаются в виде матрицы с количеством строк и столбцов, соответствующим значениям аргументов `rows` и `columns`; изменяя значения этих аргументов, можно упорядочить панели на графике необходимым образом;
- `show.given` – логическое значение (или вектор из двух логических значений в случае двух категориальных переменных, по которым разбиваются данные), позволяющее включать (TRUE) или отключать (FALSE) изображение "вывески" графика (см. ниже);
- `number` – количество интервалов, на которые разбиваются переменные `a` и `b` в случаях, если эти переменные не являются факторами;
- `overlap` – число ( $< 1$ ), определяющее область перекрытия между данными, которые группируются в соответствии с уровнями количественных переменных `a` и `b`; если  $overlap < 0$ , соответствующая доля наблюдений на "стыках" групп *не будет* изображаться.

Формула вида  $y \sim x \mid a$  показывает, что графики зависимости  $y$  от  $x$  должны быть построены для каждого уровня переменной  $a$ . В свою очередь, формула вида  $y \sim x \mid a * b$  показывает, что графики зависимости  $y$  от  $x$  должны быть одновременно построены для каждого уровня как переменной  $a$ , так и переменной  $b$ . Все три или четыре переменные могут быть как количественными, так и качественными (факторами). Если  $x$  или  $y$  являются факторами, то их уровни будут автоматически преобразованы в численные значения (при помощи функции `as.numeric()`).

Кроме перечисленных аргументов, функция `coplot()` принимает также такие стандартные графические параметры, как `col`, `pch`, `xlim`, `ylim`, и др. (см. раздел 3.1).

Работу функции `coplot()` мы проиллюстрируем на примере собственных данных о плотности популяции (экз./м<sup>2</sup>) моллюска *Dreissena polymorpha* в озере Нарочь, Беларусь (подробнее см. в оригинальной статье ([Mastitsky, Veres, 2010](#))). Учеты плотности популяции дрейссены были выполнены в мае и октябре 2005 г. на пяти глубинах озера вдоль восьми трансект. В приведенном ниже примере для простоты использована лишь часть данных (для трех из восьми трансект). Загрузить текстовый файл с данными можно из онлайн-сервиса Dropbox при помощи простой команды:



```

density <- read.delim(file =
  "http://dl.dropbox.com/u/7521662/Dreissena_in_Naroch_Lake.txt",
  header = TRUE)
str(density)
'data.frame': 79 obs. of  4 variables:
 $ Transect: Factor w/ 3 levels "A","B","C": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ Month   : Factor w/ 2 levels "May","October": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ Depth   : num  0.8 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8 2 2 ...
 $ Density : int  36 340 40 40 24 56 28 0 1560 40 ...

```

Созданная указанным образом таблица `density` содержит такие переменные, как `Transect` (Трансекта), `Month` (Месяц), `Depth` (Глубина) и собственно `Density` (Плотность популяции). Для начала изобразим зависимость плотности популяции дрейсенны от глубины для каждого месяца:

```

coplot(Density ~ Depth | Month, data = density,
  xlab = c("Depth", "Month"), ylab = "Density")

```

Воспользовавшись аргументами `pch` и `col`, мы можем изменить внешний вид и цвет точек в каждой панели графика:

```

coplot(Density ~ Depth | Month, data = density,
  pch = 19, col = "blue",
  xlab = c("Depth", "Month"), ylab = "Density")

```

Прямоугольную область графика с названиями уровней фактора, по которым разбиваются данные, по-английски иногда называют *"shingle"* ("вывеска"). При необходимости можно изменить заливку прямоугольников, в которые вписаны названия уровней фактора (см. аргумент `bar.bg`):

```

coplot(Density ~ Depth | Month, data = density,
  bar.bg = c(fac = "coral"), # fac - сокращение от "factor"
  pch = 19, col = "blue",
  xlab = c("Depth", "Month"), ylab = "Density")

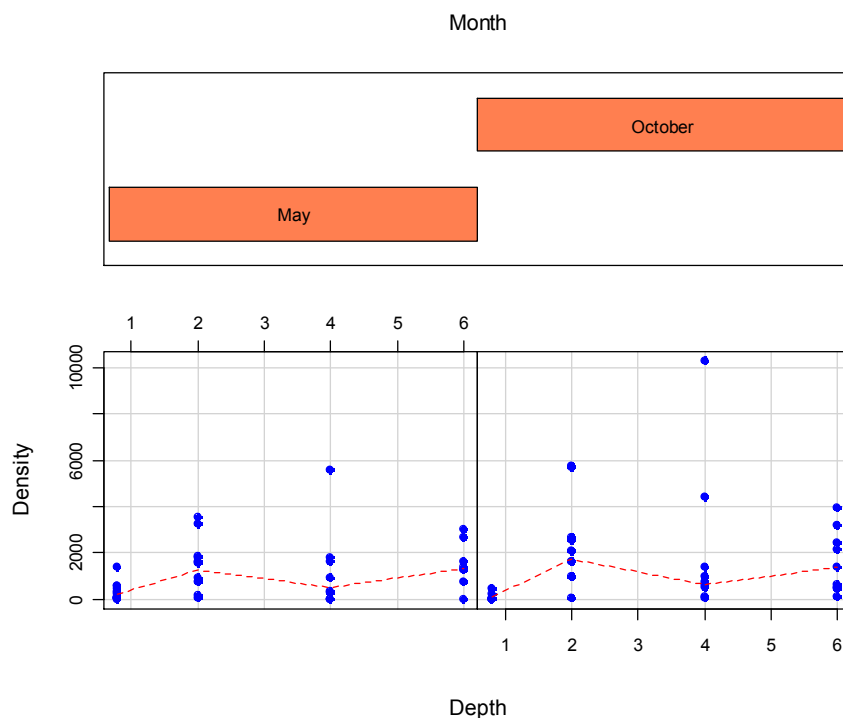
```

Как это часто бывает с данными, характеризующими численность того или иного организма, данные по плотности популяции дрейсенны в озере Нарочь распределены резко асимметрично – большинство наблюдений сосредоточено в области малых значений плотности, и лишь некоторые наблюдения имеют очень высокие значения. Как результат, плотное расположение точек в области низких значений затрудняет вывод о характере анализируемой связи. Для лучшей визуализации этой зависимости мы можем добавить сглаживающие кривые в каждую панель графика. Для этого воспользуемся аргументом `panel`, который, как отмечалось выше, позволяет выполнять тонкую настройку внешнего вида панелей путем прописывания соответствующей графической функции, например, `panel.smooth()`:

```

coplot(Density ~ Depth | Month, data = density,
  panel = function(x, y, ...) {
    panel.smooth(x, y, lty = 2, pch = 19, col = "blue",
      span = 0.6)}, # span регулирует кривизну сглаживающей кривой
  bar.bg = c(fac = "coral"), # fac - сокращение от "factor"
  pch = 19, col = "blue",
  xlab = c("Depth", "Month"), ylab = "Density")

```



Пока закономерность вырисовывается нечетко – и все из-за уже упомянутой асимметричности распределения значений плотности популяции дрейссены. Мы можем несколько снизить эту асимметричность, преобразовав данные путем логарифмирования. Поскольку некоторые значения плотности равны нулю, перед логарифмированием добавим по единице к каждому наблюдению:

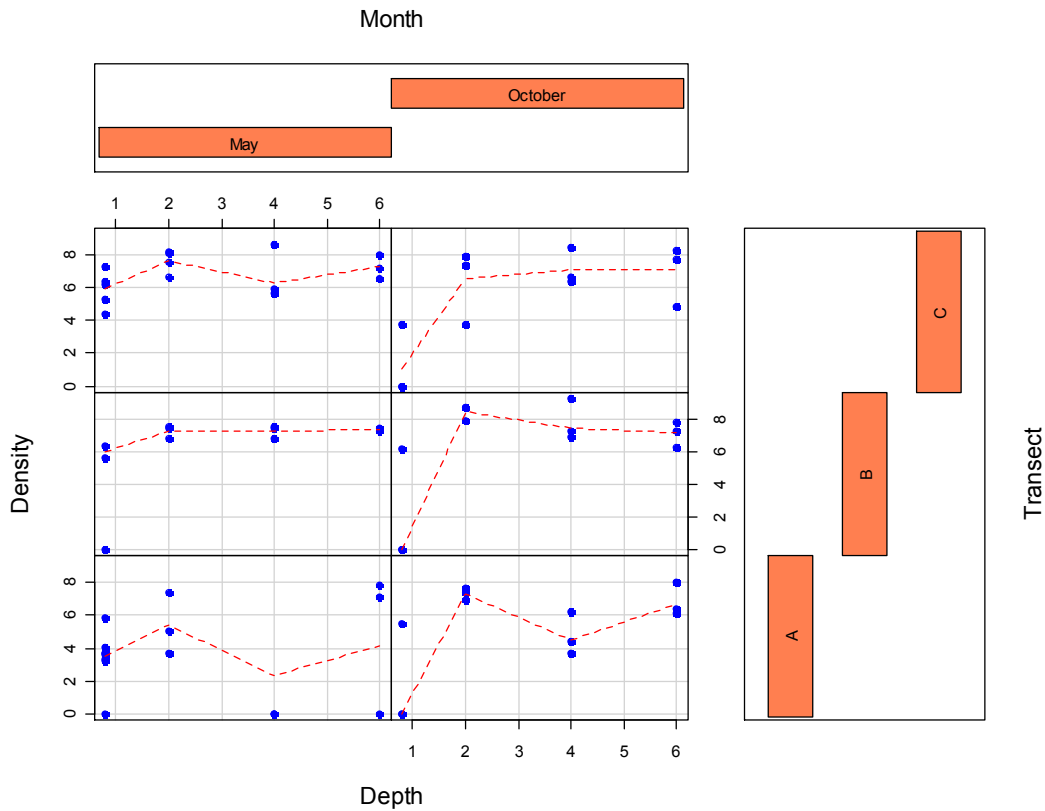
```
coplot(log(Density + 1) ~ Depth | Month, data = density,
  panel = function(x, y, ...) {
    panel.smooth(x, y, lty = 2, pch = 19, col = "blue",
      span = 0.6)}, # span регулирует кривизну сглаживающей кривой
    bar.bg = c(fac = "coral"), # fac - сокращение от "factor"
    pch = 19, col = "blue",
    xlab = c("Depth", "Month"), ylab = "Density")
```

На полученном графике гораздо лучше прослеживается тенденция к возрастанию плотности популяции дрейссены от глубины 0.8 к 2 м и к последующей стабилизации на более глубоких участках озера. При этом данная тенденция имела место как в мае, так и в октябре.

Вспомним, что учёты плотности популяции дрейссены проводились вдоль нескольких трансект. При помощи функции `coplot()` мы можем легко изобразить полученные данные в отношении не только времени отбора проб, но и трансект, вдоль которых эти пробы отбирались (обратите внимание на формулу `log(Density + 1) ~ Depth | Month * Transect`):

```
coplot(log(Density + 1) ~ Depth | Month * Transect,
  panel = function(x, y, ...) {
    panel.smooth(x, y, lty = 2, pch = 19,
      col = "blue", span = 0.6)},
  bar.bg = c(fac = "coral"), xlab = c("Depth", "Month"),
  ylab = c("Density", "Transect"), data = density)
```

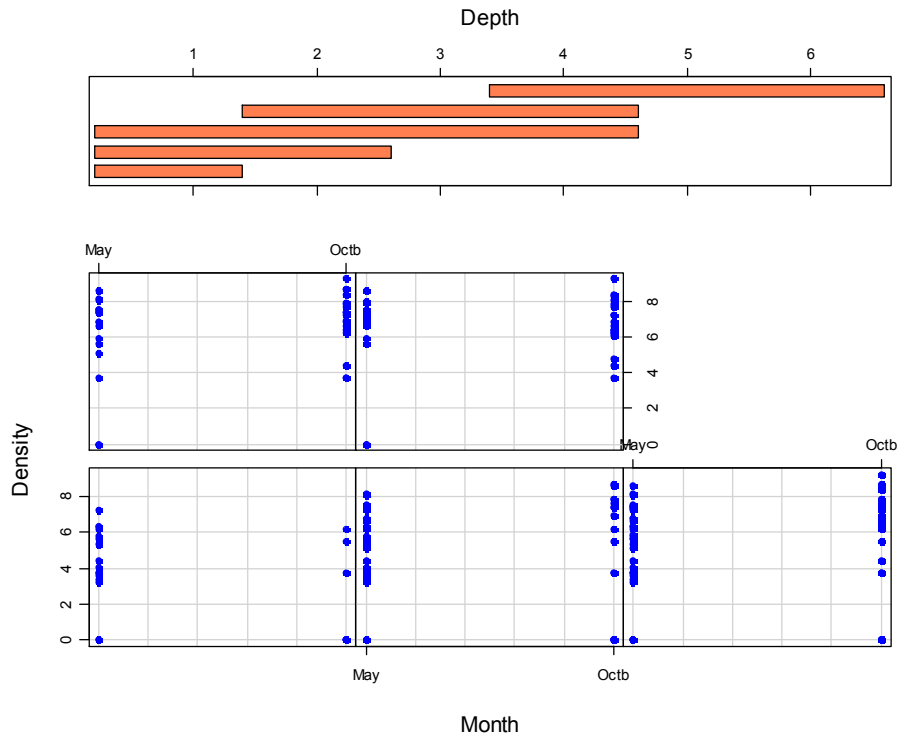
Полученный категоризованный график дает достаточно полную пространственно-временную характеристику изучаемой зависимости.



Как отмечалось выше, в формуле вида  $y \sim x \mid a * b$  любая из переменных может быть количественной, в том числе и переменные, стоящие по правую сторону от “|”. Например, можно разбить наши данные не по месяцам, а по интервалам глубин:

```
coplot(log(Density+1) ~ Month | Depth,
       bar.bg = c(num = "coral"), # num - сокращение от numeric
       pch = 19, col = "blue", xlab = c("Month", "Depth"),
       ylab = c("Density", "Transect"), data = density)
```

Важно понимать, как на полученном графике располагаются отдельные панели: они выстроены в порядке возрастания значений плотности популяции дрейссены. Первой является левая нижняя панель, за которой следуют средняя нижняя и правая нижняя панели. В верхнем ряду порядок аналогичный (т.е. "читать" график нужно слева направо). "Вывеска" в верхней части графика является своего рода легендой, подсказывающей, какие именно данные изображены в каждой панели. Так, в левом нижнем углу представлены данные для диапазона глубин от 0 до примерно 1.5 м; средняя нижняя панель содержит данные для диапазона глубин от 0 до примерно 2.5 м, и т.д. Практически все *автоматически* выделенные программой диапазоны глубин перекрываются.

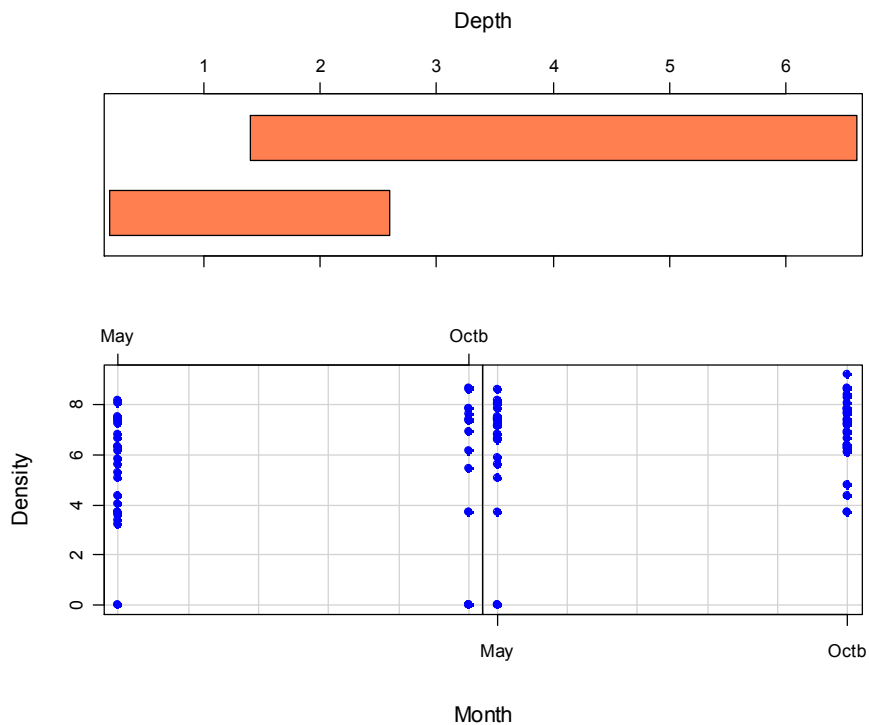


Количество диапазонов и уровень их перекрытия регулируются при помощи аргументов `number` и `overlap` соответственно:

```

coplot(log(Density+1) ~ Month | Depth,
       number = 2, overlap = 0.1,
       bar.bg = c(num = "coral"), pch = 19, col = "blue",
       xlab = c("Month", "Depth"),
       ylab = c("Density", "Transect"), data = density)

```



## 4. ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА И ПОДГОНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ



### 4.1. Оценка выборочных характеристик с использованием специальных функций

Благодаря наличию набора специально созданных для этого функций, расчет параметров описательной статистики в R не составляет никакого труда. Продемонстрируем их использование на примере рассмотренных в разделе 3.5 данных по характеристикам 32 моделей автомобилей (таблица `mtcars`, входящая в стандартный набор данных R):

```
data (mtcars)
head (mtcars)
```

	mpg	cyl	disp	hp	drat	wt	qsec	vs	am	gear	carb
Mazda RX4	21.0	6	160.0	110	3.90	2.620	16.46	0	1	4	4
Mazda RX4 Wag	21.0	6	160.0	110	3.90	2.875	17.02	0	1	4	4
Datsun 710	22.8	4	108.0	93	3.85	2.320	18.61	1	1	4	1
Hornet 4 Drive	21.4	6	258.0	110	3.08	3.215	19.44	1	0	3	1
Hornet Sportabout	18.7	8	360.0	175	3.15	3.440	17.02	0	0	3	2
Valiant	18.1	6	225.0	105	2.76	3.460	20.22	1	0	3	1

Каждая модель автомобиля описана по 11 признакам, два из которых (`vs` и `am`) являются номинальными переменными (факторами) с уровнями, закодированными в виде 0 и 1 (подробнее см. ? `mtcars`).

Для расчета *среднего арифметического, медианы, дисперсии, стандартного отклонения*, а также *минимального и максимального значений* в R служат функции `mean()`, `median()`, `var()`, `sd()`, `min()` и `max()` соответственно. Используем эти функции в отношении, например, параметра `mpg` – пробег автомобиля (в милях) в расчете на один галлон топлива:

```
# Арифметическая средняя:
mean (mtcars$mpg)
[1] 20.1
# Медиана
median (mtcars$mpg)
[1] 19.2
# Дисперсия:
var (mtcars$mpg)
[1] 36.3
# Стандартное отклонение:
sd (mtcars$mpg)
[1] 6.0
# Минимальное значение:
min (mtcars$mpg)
[1] 10.4
# Максимальное значение:
max (mtcars$mpg)
[1] 33.9
```

Специальной функции для расчета *стандартной ошибки среднего* в R нет, однако для этого вполне подойдут уже имеющиеся функции. Как известно, стандартная ошибка

среднего рассчитывается как отношение стандартного отклонения к квадратному корню из объема выборки:  $S_m = S/\sqrt{n}$ . На языке R мы можем записать это следующим образом:

```
SEmpg = sd(mtcars$mpg) / sqrt(length(mtcars$mpg))  
# функция length() возвращает число элементов в векторе mpg
```

Получаем:

```
SEmpg  
[1] 1.065
```

Квантили рассчитываются в R при помощи функции `quantile()`:

```
quantile(mtcars$mpg)  
 0%   25%   50%   75%  100%  
10.400 15.425 19.200 22.800 33.900
```

При настройках, заданных по умолчанию, выполнение указанной команды приведет к расчету минимального (10.4) и максимального (33.9) значений, а также трех *квартелей*, т.е. значений, которые делят совокупность на четыре равные части – 15.4, 19.2 и 22.8.

Разница между первым и третьим квартилями носит название *интерквартильный размах* (ИКР; англ. *interquartile range*). ИКР является *робастным* аналогом дисперсии и может быть рассчитан в R при помощи функции `IQR()`:

```
IQR(mtcars$mpg)  
[1] 7.375
```

Функция `quantile()` позволяет рассчитать и другие квантили. Например, *децили* (т.е. значения, делящие совокупность на десять частей) можно получить следующим образом:

```
quantile(mtcars$mpg, p = seq(0, 1, 0.1))  
 0%   10%   20%   30%   40%   50%   60%   70%   80%   90%  100%  
10.40 14.34 15.20 15.98 17.92 19.20 21.00 21.47 24.08 30.09 33.90
```

В приведенной команде важен аргумент `p` (от *probability* – вероятность), при помощи которого был задан вектор чисел от 0 до 1 с шагом 0.1. Обратите внимание на то, что существует несколько способов оценки квантилей по выборочным данным. Подробнее об этом можно узнать в справочном файле по функции `quantile()` (доступен по команде `? quantile`).

Отсутствующие значения в данных могут несколько усложнить вычисления. В целях демонстрации заменим 3-е значение переменной `mpg` на **NA**, т.е. на обозначение, используемое в R для отсутствующих наблюдений (от *not available* – не доступно), а затем попытаемся вычислить среднее значение:

```
mtcars$mpg[3] <- NA  
# Просмотрим результат:  
head(mtcars$mpg)  
[1] 21.0 21.0 NA 21.4 18.7 18.1  
# Попробуем рассчитать среднее значение для mpg:  
mean(mtcars$mpg)  
[1] NA
```

Ничего не вышло – вместо среднего значения программа выдала NA, что вполне логично. R не будет пропускать отсутствующие значения автоматически, если мы не включим соответствующую опцию – `na.rm` (от *not available* и *remove* – удалить):

```
mean(mtcars$mpg, na.rm = TRUE)  
[1] 20.0
```

Рассмотренный прием (т.е. использование аргумента `na.rm = TRUE`) срабатывает в большинстве случаев. Одним из немногих исключений является функция `length()`, используемая для определения размера вектора. Аргумент `na.rm` у этой функции отсутствует, поэтому будут подсчитаны как имеющиеся, так и отсутствующие значения:

```
length(mtcars$mpg)
[1] 32
```

Если все же стоит задача подсчитать количество неотсутствующих значений, то можно воспользоваться следующим приемом:

```
sum(!is.na(mtcars$mpg))
[1] 31
```

Ключом здесь является использование команды `is.na(mtcars$mpg)`, которая проверяет каждое значение `mpg` и возвращает `FALSE`, если это значение *не* равно `NA`, и `TRUE` иначе. В сочетании с логическим оператором `!` ("не"), функция `sum` используется для подсчета только тех значения `mpg`, которые не равны `NA` (логические `TRUE` здесь конвертируются в `1`, которые можно суммировать).

Существуют еще две функции, которые могут оказаться полезными при анализе свойств совокупностей – `which.min()` и `which.max()`. Как следует из названий, эти функции позволяют выяснить порядковые номера элементов, обладающих минимальным и максимальным значениями соответственно. Если минимальное/максимальное значение принимают несколько элементов в векторе, то будет возвращен порядковый номер первого элемента с этим значением. В случае с `mpg` имеем:

```
which.min(mtcars$mpg)
[1] 15
which.max(mtcars$mpg)
[1] 20
```

Видим, что минимальный и максимальный пробег в расчете на галлон топлива имеют модели под номерами 15 и 20 соответственно. Выяснить названия этих моделей мы можем, совместив команды `which.min()` и `which.max()` с командой `rownames()` (от *row* – строка, и *names* – имена):

```
rownames(mtcars)[which.min(mtcars$mpg)]
[1] "Cadillac Fleetwood"
rownames(mtcars)[which.max(mtcars$mpg)]
[1] "Toyota Corolla"
```

Подробнее приемы индексирования векторов в R были рассмотрели в разделе 2.2.

### Использование функции `tapply()`

Как мы описывали в разделе 2.8, функции "apply"-семейства, к которым относится и `tapply()`, позволяют выполнять векторизованные вычисления над определенными элементами таблиц данных, матриц, или массивов (например, быстро вычислять среднее значение для каждого столбца или строки таблицы, и т.п.).

Предположим, мы хотим выяснить средний объем двигателя (переменная `disp`, в кубических дюймах) у моделей с автоматической и ручной коробкой передач (переменная `am`; 1 – ручная коробка, 0 – автоматическая коробка). Функция `tapply()` позволяет сделать это следующим образом:

```
tapply(X = mtcars$disp, INDEX = mtcars$am, FUN = mean)
      0          1
290.38    143.53
```

Поскольку аргумент INDEX способен принимать список из нескольких факторов, для уровней которых рассчитываются значения функции FUN, мы можем усложнить приведенную выше команду:

```
tapply(X = mtcars$disp, INDEX = list(mtcars$am, mtcars$vs),
        FUN = mean)
      0      1
0 357.62 175.11
1 206.22  89.80
```

Аргумент FUN, как уже было отмечено, может принимать любые, в том числе и пользовательские функции. Рассмотрим, например, расчет стандартных ошибок для средних значений объема двигателя у автомобилей с автоматической и ручной коробкой передач. Для начала создадим функцию SE для расчета стандартных ошибок (см. пример выше):

```
SE <- function(x) {sd(x)/sqrt(length(x))}
Теперь совместим эту новую функцию с tapply():
tapply(X = mtcars$disp, INDEX = mtcars$am, FUN = SE)
      0      1
25.3 24.2
```

Таким образом, объем двигателя у моделей с автоматической коробкой передач составляет в среднем  $290.4 \pm 25.3$ , а у автомобилей с механической коробкой –  $143.5 \pm 24.2$  кубических дюймов.

## 4.2. Использование функций **summary**() и дополнительных пакетов

В системе R имеется возможность и более быстрого расчета основных параметров описательной статистики. Для этого, в частности, служит *функция общего назначения* **summary**():

```
summary(mtcars$mpg)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.    NA's
10.40  15.35   19.20   20.00  22.15   33.90    1.00
```

Всего одной строки кода оказалось достаточно для получения минимального (Min) и максимального (Max) значений переменной mpg, медианы (Median), арифметической средней (Mean), первого (1st Qu.) и третьего (3rd Qu.) квартилей, а также для выяснения количества отсутствующих значений (NA's). Более того, подобную сводку мы можем получить сразу для всей таблицы данных:

```
summary(mtcars)
      mpg          cyl          disp          hp
Min.   :10.40   Min.   :4.000   Min.   : 71.1   Min.   : 52.0
1st Qu.:15.35   1st Qu.:4.000   1st Qu.:120.8   1st Qu.: 96.5
Median :19.20   Median :6.000   Median :196.3   Median :123.0
Mean   :20.00   Mean   :6.188   Mean   :230.7   Mean   :146.7
3rd Qu.:22.15   3rd Qu.:8.000   3rd Qu.:326.0   3rd Qu.:180.0
Max.   :33.90   Max.   :8.000   Max.   :472.0   Max.   :335.0
NA's   : 1.00

      drat          wt          qsec          vs
Min.   :2.760   Min.   :1.513   Min.   :14.50   Min.   :0.0000
1st Qu.:3.080   1st Qu.:2.581   1st Qu.:16.89   1st Qu.:0.0000
Median :3.695   Median :3.325   Median :17.71   Median :0.0000
Mean   :3.597   Mean   :3.217   Mean   :17.85   Mean   :0.4375
3rd Qu.:3.920   3rd Qu.:3.610   3rd Qu.:18.90   3rd Qu.:1.0000
Max.   :4.930   Max.   :5.424   Max.   :22.90   Max.   :1.0000
```



am	gear	carb
Min. :0.0000	Min. :3.000	Min. :1.000
1st Qu.:0.0000	1st Qu.:3.000	1st Qu.:2.000
Median :0.0000	Median :4.000	Median :2.000
Mean :0.4062	Mean :3.688	Mean :2.812
3rd Qu.:1.0000	3rd Qu.:4.000	3rd Qu.:4.000
Max. :1.0000	Max. :5.000	Max. :8.000

Результат выглядел бы замечательно, если бы не одно "но". Переменные `vs` и `am` являются факторами, но уровни их закодированы при помощи чисел 0 и 1. К сожалению, система R не распознала эти две переменные как факторы и рассчитала соответствующие параметры описательной статистики, как для обычных числовых переменных. Однако мы можем изменить такое поведение R, самостоятельно преобразовав `vs` и `am` в факторы при помощи функции `as.factor()`:

```
mtcars$vs <- as.factor(mtcars$vs)
mtcars$am <- as.factor(mtcars$am)
# Проверим, удалась ли конвертация:
is.factor(mtcars$vs)
[1] TRUE
is.factor(mtcars$am)
[1] TRUE
```

Если применить функцию `summary()` к таблице `mtcars` теперь, то переменные `vs` и `am` будут распознаны программой как факторы: единственный способ описать их – это подсчитать количество наблюдений для каждого уровня.

Рассмотренные выше функции позволяют получить достаточно полное представление об анализируемых выборках и таблицах данных. Однако для расчета некоторых параметров описательной статистики необходимы специальные функции, которые не входят в базовую версию R. С одним из таких параметров мы уже столкнулись – стандартная ошибка арифметической средней. Другие примеры включают коэффициенты *экссесса* (англ. *kurtosis*) и *асимметрии* (*skewness*) – параметры, характеризующие форму распределения. Конечно, мы можем рассчитать эти величины по соответствующим формулам или даже написать собственные функции для этих целей. Однако это уже было сделано до нас – достаточно воспользоваться имеющимися дополнительными пакетами для R, например, пакетом `moments`. Если этот пакет не установлен на Вашем компьютере, выполните следующую команду (естественно, Ваш компьютер должен быть при этом подключен к сети Интернет):

```
install.packages("moments")
```

Рассчитать коэффициенты экссесса и асимметрии теперь очень просто:

```
library(moments) #загрузка пакета moments
kurtosis(mtcars$mpg, na.rm = TRUE)
[1] 2.79
skewness(mtcars$mpg, na.rm = TRUE)
[1] 0.68
```

Многие R-пакеты имеют собственные функции, аналогичные стандартной `summary()`, для вывода компактных описательных сводок по таблицам данных. Ниже приведены несколько примеров таких пакетов и функций (здесь и далее предполагается, что соответствующий пакет уже установлен на Вашем компьютере). Подробности вывода результатов анализа здесь не обсуждаются – см. справочные материалы по соответствующим командам.

```

# Пакет Hmisc, функция describe():
describe(mtcars)
mtcars
11 Variables      32 Observations
-----
mpg
  n missing  unique  Mean   .05   .10   .25   .50   .75   .90   .95
31      1     25    20 11.85 14.30 15.35 19.20 22.15 30.40 31.40
lowest : 10.4 13.3 14.3 14.7 15.0, highest: 26.0 27.3 30.4 32.4 33.9
-----

# И так далее по всем остальным переменным

# Пакет pastecs, функция stat.desc(); показаны семь переменных
stat.desc(mtcars)
      mpg      cyl      disp      hp      drat      wt      qsec
nbr.val  31.00  32.00 3.2e+01  32.00  32.000  32.00  32.00
nbr.null  0.00  0.00 0.0e+00   0.00   0.000   0.00   0.00
nbr.na    1.00  0.00 0.0e+00   0.00   0.000   0.00   0.00
min       10.40  4.00 7.1e+01   52.00  2.760   1.51  14.50
max       33.90  8.00 4.7e+02  335.00  4.930   5.42  22.90
range     23.50  4.00 4.0e+02  283.00  2.170   3.91   8.40
sum       620.10 198.00 7.4e+03 4694.00 115.090 102.95 571.16
median    19.20  6.00 2.0e+02  123.00  3.695   3.33  17.71
mean      20.00  6.19 2.3e+02  146.69  3.597   3.22  17.85
SE.mean   1.10  0.32 2.2e+01  12.12  0.095   0.17  0.32
CI.mean.0.95 2.24  0.64 4.5e+01  24.72  0.193   0.35  0.64
var       37.28  3.19 1.5e+04 4700.87  0.286   0.96  3.19
std.dev   6.11  1.79 1.2e+02  68.56  0.535   0.98  1.79
coef.var  0.31  0.29 5.4e-01   0.47  0.149   0.30  0.10

# Пакет psych, функция describe.by() - расчет параметров
# описательной статистики для каждого уровня некоторого фактора.
# Показаны первые три переменных:
describe.by(mtcars, mtcars$am)
group: 0
  var  n  mean    sd median trimmed  mad  min  max range  skew kurtosis  se
mpg   1 19  17.1  3.83  17.3   17.1  3.11 10.4  24.4 14.0  0.01  -0.33  0.88
cyl   2 19   7.0  1.54   8.0    7.1  0.00  4.0   8.0  4.0 -0.95  -0.24  0.35
disp  3 19 290.4 110.17 275.8 289.7 124.83 120.1 472.0 351.9 0.05  -1.01 25.28
-----
group: 1
  var  n  mean    sd median trimmed  mad  min  max range  skew kurtosis  se
mpg   1 12  24.5  6.42  23.7   24.5  7.93 15.0  33.9 18.9 -0.01  -1.35  1.85
cyl   2 13   5.1  1.55   4.0    4.9  0.00  4.0   8.0  4.0  0.87  -0.15  0.43
disp  3 13 143.5 87.20 120.3 131.2 58.86 71.1 351.0 279.9 1.33   2.17 24.19

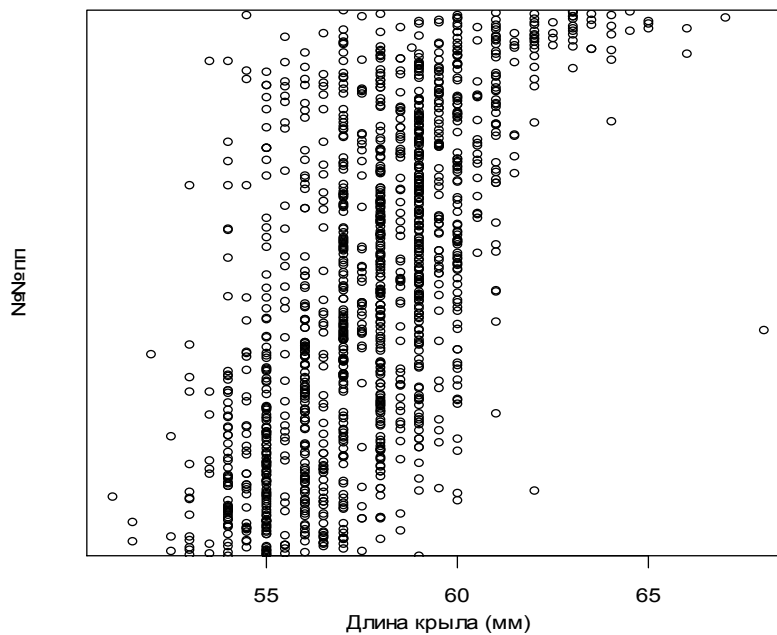
# Пакет doBy, функция summaryBy(). Обладает мощным функционалом.
summaryBy(mpg + wt ~ cyl + vs, data = mtcars,
  FUN = function(x) { c(m = mean(x), s = sd(x)) } )
  cyl vs mpg.m mpg.s wt.m wt.s
1   4  0    26   NA  2.1   NA
2   4  1     NA   NA  2.3 0.60
3   6  0    21 0.75  2.8 0.13
4   6  1    19 1.63  3.4 0.12
5   8  0    15 2.56  4.0 0.76

```

### 4.3. Анализ выбросов

Дадим рабочее определение: под "выбросом" мы будем понимать наблюдение, которое "слишком" велико или "слишком" мало по сравнению с большинством других имеющихся наблюдений.

Обычно для выявления выбросов используют диаграмму размахов или точечную диаграмму Кливленда (см. раздел 3.3 и 3.5). Например, на следующей диаграмме Кливленда, представлены данные о длине крыла у 1295 воробьев ([Zuur et al. 2010](#)). Здесь таблица была предварительно упорядочена в соответствии с весом птиц, и поэтому облако точек имеет примерно S-образную форму.



На рисунке хорошо выделяется точка, соответствующая длине крыла 68 мм. Однако это значение длины крыла не следует рассматривать в качестве выброса, поскольку оно лишь незначительно отличается от других значений длины. Эта точка выделяется на общем фоне лишь потому, что исходные значения длины крыла были упорядочены по весу птиц. Соответственно, выброс скорее стоит искать среди значений веса (т.е. очень высокое значение длины крыла (68 мм) было отмечено у воробья, необычно мало весящего для этого).

Более строгий подход к определению выбросов состоит в оценке того, какое влияние эти необычные наблюдения оказывают на результаты анализа. При этом следует делать различие между необычными наблюдениями для зависимых и независимых переменных (предикторов). Например, при изучении зависимости численности какого-либо биологического вида от температуры большинство значений температуры может лежать в пределах от 15 до 20 °С, и лишь одно значение может оказаться равным 25 °С. Такой план эксперимента, мягко говоря, неидеален, поскольку диапазон температур от 20 до 25 °С будет исследован неравномерно. Однако при проведении реальных полевых исследований возможность выполнить измерения для высокой температуры может представиться только однажды. Что же тогда делать с этим необычным измерением, выполненным при 25 °С? При большом объеме наблюдений подобные редкие наблюдения можно исключить из анализа. Однако при относительно небольшом объеме данных еще большее его уменьшение может быть нежелательным с точки зрения статистической значимости получаемых результатов.

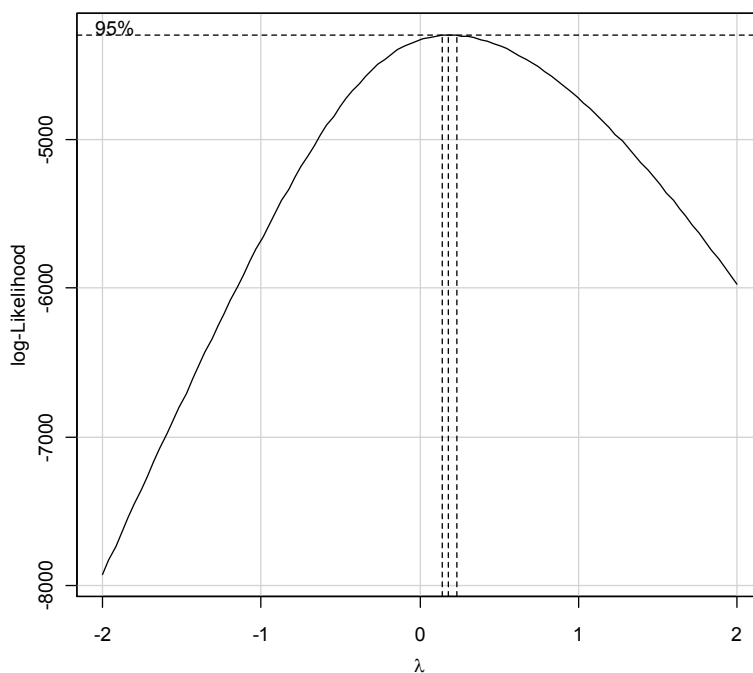
Альтернативой удалению необычных значений предиктора является нормализующее преобразование (чаще всего, логарифмирование). В общем случае, найти оптимальное решение позволяет так называемое преобразование Бокса-Кокса ([Box, Cox, 1964](#)).

Универсальное семейство преобразований Бокса-Кокса (БК) случайной величины  $x$  является степенным преобразованием  $x' = \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}$  с произвольным положительным или отрицательным показателем степени  $\lambda$ . Поскольку деление на нуль приводит к неопределенности, то при  $\lambda = 0$  используется логарифмическое преобразование  $x'(\lambda) = \ln(x)$ . Найти значение  $\lambda$  можно, например, найдя максимум логарифма функции максимального правдоподобия.

Рассмотрим пример из раздела 1.3 с моллюсками *Dreissena polymorpha*, в которых подсчитывалась численность обнаруженных инфузорий (CAnumber):

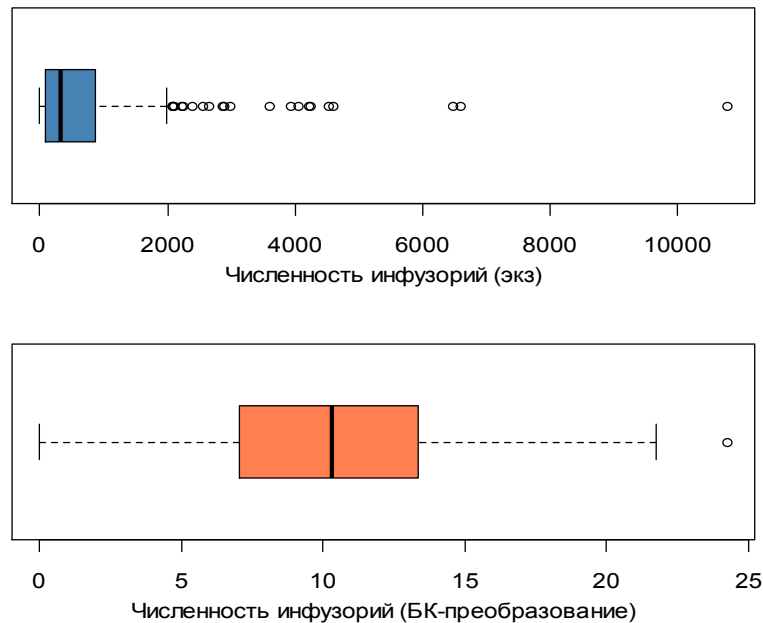
```
Моллюски <-
  read.table("http://figshare.com/media/download/98923/97987",
    header=TRUE, sep="\t", strip.white=TRUE)
library(car)
# Поиск максимума функции правдоподобия и построение графика
# изменения параметра БК-трансформации для заданной модели
m.null <- lm(Моллюски$CAnumber+1~1)
bc.null <- boxCox(m.null)
bc.null.opt <- bc.null$x[which.max(bc.null$y)]
paste("Оптимальная лямбда БК-преобразования:", bc.null.opt)
[1] "Оптимальная лямбда БК-преобразования: 0.181818181818182"
CAnumber_bc <- bcPower(Моллюски$CAnumber+1, bc.null.opt)
par(mfrow=c(2,1))
boxplot(Моллюски$CAnumber, horizontal = TRUE, col = "steelblue",
  xlab = "Численность инфузорий (экз)")
boxplot(CAnumber_bc, horizontal = TRUE, col = "coral",
  xlab = "Численность инфузорий (БК-преобразование)")
```

В нашем случае оптимальное значение  $\lambda = 0.182$  (т.е. наилучшее преобразование достаточно близко к логарифмическому).



Эффект преобразования исходной переменной CAnumber по методу Бокса-Кокса проиллюстрирован на приведенных ниже рисунках. Как видно на диаграмме, где приведены исходные данные, большое число точек лежат за пределами диапазона  $[x_{25} -$

$1.5(x_{75} - x_{25}), x_{75} + 1.5(x_{75} - x_{25})]$  и, соответственно, отмечены функцией `boxplot()` как потенциальные «выбросы». Однако после БК-преобразования распределение значений `CAnumber` приблизилось к нормальному, в связи с чем за пределами указанного интервала оказалось только одно наблюдение.



Имеются и более тонкие критерии идентификации выбросов – статистический критерий Шовене, тест Граббса, критерий Пирса, Q-тест Диксона (все необходимые функции собраны в пакете `outliers`). Например, с использованием теста Граббса можно проверить нулевую гипотезу о том, что максимальное значение не является выбросом:

```
library(outliers)
grubbs.test(Моллюски$CAnumber, type = 10)
  Grubbs test for one outlier
data: Моллюски$CAnumber
G = 10.8336, U = 0.7524, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: highest value 10782 is an outlier
grubbs.test(CAnumber_bc, type = 10)
  Grubbs test for one outlier
data: CAnumber_bc
G = 3.3267, U = 0.9767, p-value = 0.1961
alternative hypothesis: highest value 24.2569 is an outlier
```

Однако исходные значения зависимой переменной обычно представляют особый интерес при построении регрессионных моделей и их преобразование может нарушить содержательный смысл проверяемых гипотез. Например, выполнив преобразование, нормирующее дисперсию, можно легко продемонстрировать, что ежемесячный доход российского олигарха мало отличается от дохода пенсионера. Поэтому лучше попытаться подобрать метод анализа, который основан на распределении вероятностей, допускающем асимметрию разброса значений в области экстремально больших величин (например, гамма-распределение для непрерывных переменных или распределение Пуассона для дискретных количественных переменных).

В конечном счете, решение об удалении необычных значений из анализа принимает сам исследователь. При этом он должен помнить о том, что причины для возникновения таких наблюдений могут быть разными. Так, удаление выбросов,

возникших из-за неудачного планирования эксперимента (см. выше пример с температурой), может быть иногда вполне оправданным. Оправданным будет также удаление выбросов, возникших из-за явных ошибок при выполнении измерений.

В то же время, необычные наблюдения среди значений зависимой переменной могут потребовать более тонкого подхода, особенно если они отражают естественную изменчивость этой переменной. В этой связи важно вести подробное документирование условий, в которых происходила экспериментальная часть исследования – это может помочь интерпретировать "выбросы" в ходе анализа данных. Независимо от причин возникновения необычных наблюдений, в итоговом научном отчете (например, в статье) важно сообщить читателю, как о самом факте выявления таких наблюдений, так и о принятых в их отношении мерах.

#### 4.4. Заполнение пропущенных значений в таблицах данных

К сожалению, большинство статистических методов предполагает, что в ходе наблюдений были получены полностью укомплектованные матрицы, векторы и другие информационные структуры эксперимента. Поскольку на практике пропуски в данных все же являются повсеместным явлением, прежде чем начать аналитические изыскания, необходимо привести обрабатываемые таблицы к "каноническому" виду, т.е. либо удалить фрагменты объектов с недостающими элементами, либо заменить имеющиеся пропуски на некоторые разумные значения.

Несмотря на то, что книги по статистике скупко разбирают проблему исследования недостающих данных, в этой области существует впечатляющее множество подходов, методологий и их критических анализов (см. классическую монографию [Little, Rubin, 2002](#)). На практике процедура "борьбы с пропусками" обычно включает следующие шаги:

1. Идентификация недостающих данных.
2. Исследование закономерностей появления отсутствующих значений.
3. Формирование наборов данных, не содержащих пропуски (в результате удаления или замены соответствующих фрагментов).

Необходимо признать, что идентификация недостающих данных является здесь единственным однозначным шагом. Анализ, почему данные отсутствуют, зависит от вашего понимания процессов, которые воспроизводят экспериментальную информацию. Решение о способе устранения пропущенных значений также будет зависеть от вашей оценки того, какие процедуры приведут к самым надежным и точным результатам. Мы лишь бегло остановимся на некоторых функциях пакета `miss`, который является хорошим средством реализации всех шагов упомянутой процедуры (Kabacoff, 2011).

Для конкретизации наших дальнейших рассуждений рассмотрим набор данных `sleep` из пакета `VIM`, составленный по результатам наблюдений за процессом сна 62 млекопитающих разных видов ([Allison, Chichetti, 1976](#)). Авторы заинтересовались тем, почему потребность в сне у животных меняется от вида к виду и от каких экологических и таксономических переменных она зависит. Зависимые переменные включали продолжительность сна со сновидениями (`Dream`), сна без сновидений (`NonD`), и их сумма (`sleep`). Таксономические переменные включали массу тела (`BodyWgt`), вес мозга (`BrainWgt`), продолжительность жизни (`Span`) и время беременности (`Gest`). Экологические переменные состояли из 5-балльных оценок степени хищничества животных (`Pred`), меры защищенности их места для сна (`Exp`), изменяющегося от глубокой норы до полностью открытого пространства, и показателя риска (`Danger`), который основывался на логической комбинации остальных двух (`Pred` и `Exp`).

Идентификация пропущенных значений обычно легко делается с использованием функций `is.na()` и `complete.cases()`:

```

data(sleep, package="VIM")
head(sleep)
  BodyWgt BrainWgt NonD Dream Sleep Span Gest Pred Exp Danger
1 6654.000  5712.0   NA   NA   3.3 38.6  645   3   5     3
2   1.000    6.6   6.3   2.0   8.3  4.5   42   3   1     3
3   3.385   44.5   NA   NA  12.5 14.0   60   1   1     1
4   0.920    5.7   NA   NA  16.5  NA   25   5   2     3
5 2547.000  4603.0   2.1   1.8   3.9 69.0  624   3   5     4
# список строк, в которых нет пропущенных значений
sleep[complete.cases(sleep),]
# список строк, в которых хотя бы одно пропущенное значение
sleep[!complete.cases(sleep),]
sum(is.na(sleep$Dream))
[1] 12

```

Таким образом, мы имеем 42 полностью укомплектованные строки и 20 строк, имеющих хотя бы одно пропущенное значение. Из них 12 недостающих значений принадлежит переменной `Dream`.

Дополнительную статистическую информацию о пропусках предоставляет функция `md.pattern()`, а функции `aggr()`, `matrixplot()` и `scattMiss()` позволяют отобразить на графиках закономерности во встречаемости отсутствующих наблюдений:

```

library(mice)
md.pattern(sleep)

```

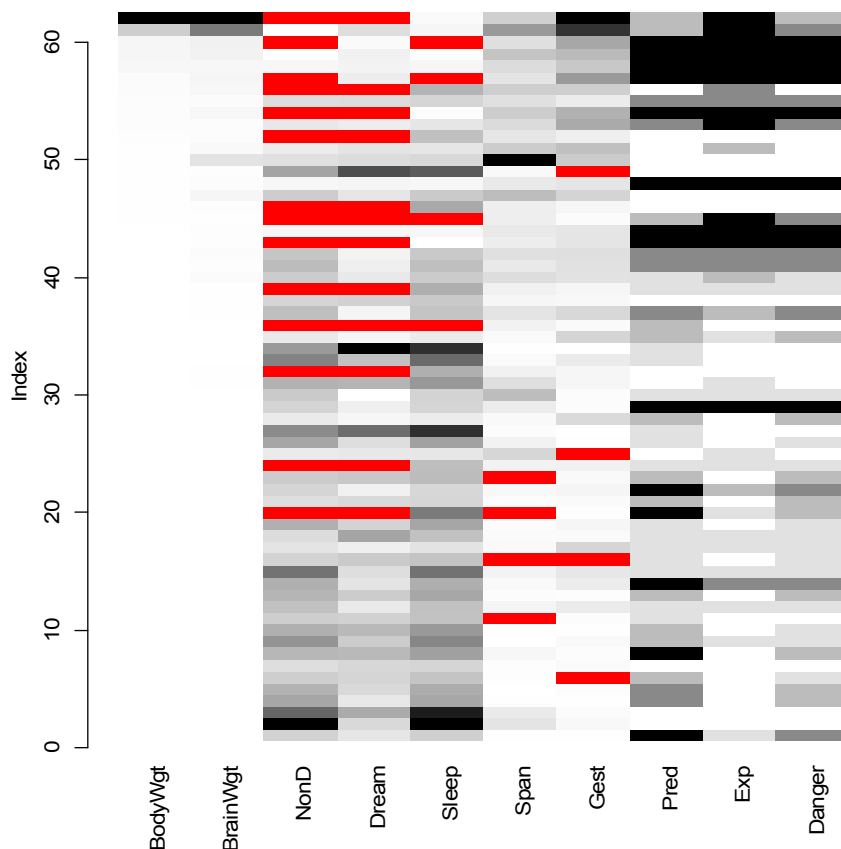
	BodyWgt	BrainWgt	Pred	Exp	Danger	Sleep	Span	Gest	Dream	NonD	
42	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2
2	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	2
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	2
2	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	3
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	3
	0	0	0	0	0	4	4	4	12	14	38

Значения 0 в теле приведенной таблицы соответствуют недостающим значениям, причем в первой строке пропусков нет, а последующие строки упорядочены по числу их появления. Первый столбец указывает число случаев в каждом образце данных, а последний столбец – число переменных с отсутствующими значениями в каждой строке. Например, в четвертой строке в исходных данных содержится 9 случаев с одновременно отсутствующими `NonD` и `Dream`. Набор данных содержит в общей сложности  $(42 \times 0) + (2 \times 1) + \dots + (1 \times 3) = 38$  недостающих значений, а в последней строке приведена частота пропусков для каждой переменной.

На диаграмме, полученной при помощи функции `matrixplot()`, числовые данные масштабируются к интервалу  $[0, 1]$  и представлены уровнями шкалы яркости, причем более темные цветами показаны большие значения. По умолчанию, недостающие значения представлены красным цветом. График является интерактивным: нажатие на столбец отсортирует матрицу по этой переменной (на рисунке – в порядке убывания `BodyWgt`).

```
matrixplot(sleep)
```





Такая визуализация позволяет увидеть, связаны ли пропуски одной или более переменных с фактическими значениями других признаков. Например: при низких значениях массы тела или мозга (BodyWgt, BrainWgt) пропуски переменных сна (Dream, NonD) отсутствуют. Количественно эти зависимости можно установить, рассчитав коэффициенты корреляции исходных переменных с частотами пропущенных значений:

```
# Формируем матрицу со значениями 1 в местах пропусков
x <- as.data.frame(abs(is.na(sleep)))
y <- x[, which(colSums(x) > 0)]
print(cor(y), 4)
```

	NonD	Dream	Sleep	Span	Gest
NonD	1.0000	0.90711	0.48626	0.01520	-0.14183
Dream	0.9071	1.00000	0.20370	0.03752	-0.12865
Sleep	0.4863	0.20370	1.00000	-0.06897	-0.06897
Span	0.0152	0.03752	-0.06897	1.00000	0.19828
Gest	-0.1418	-0.12865	-0.06897	0.19828	1.00000

Корреляционная матрица между частотами пропусков показывает, что появление недостающих значений для NonD и Dream взаимосвязано ( $r = 0.9071$ ). Это естественно: если мы имеем фактическое значение одной из этих переменных, мы можем рассчитать другое с использованием алгебраического соотношения  $\text{NonD} + \text{Dream} = \text{Sleep}$ .

```
cor(sleep, y, use="pairwise.complete.obs")
```

	NonD	Dream	Sleep	Span	Gest
BodyWgt	0.22683	0.22259	0.001685	-0.05832	-0.05397
BrainWgt	0.17946	0.16321	0.007859	-0.07921	-0.07333
NonD	NA	NA	NA	-0.04315	-0.04553
Dream	-0.18895	NA	-0.188952	0.11699	0.22775



Sleep	-0.08023	-0.08023	NA	0.09638	0.03976
Span	0.08336	0.05981	0.005239	NA	-0.06527
Gest	0.20239	0.05140	0.159702	-0.17495	NA
Pred	0.04758	-0.06834	0.202463	0.02314	-0.20102
Exp	0.24547	0.12741	0.260773	-0.19292	-0.19292
Danger	0.06528	-0.06725	0.208884	-0.06666	-0.20444

В первом столбце этой корреляционной матрицы можно заметить, что частота пропусков регистрации сна без сновидений с большей вероятностью связана с высоким весом тела `BodyWgt` ( $r = 0.227$ ), продолжительностью беременности `Gest` ( $r = 0.202$ ) и защищенностью лежбища `Exp` (0.245).

На использовании корреляционных отношений основан популярный метод заполнения пропусков с использованием регрессионных моделей. Другой подход, называемый "множественное присвоение" (*multiple imputation*), основан на многократно повторяющемся моделировании данных с использованием методов Монте-Карло.

Функция `mice()` из одноименного пакета реализует метод Гиббса (*Gibbs sampler*), который представляет собой способ формирования выборок ( $x_1; \dots; x_n$ ) из заданных распределений  $p(x)$   $m$ -мерных переменных путем многократного извлечения имитируемых значений. По умолчанию, каждая переменная, содержащая недостающие величины, моделируется в зависимости от всех других переменных в наборе данных. Полученные уравнения предсказания используются, чтобы приписать наиболее вероятные значения для пропущенных данных. Процесс повторяется, пока не будет достигнут определенный критерий сходимости. Для каждой переменной пользователь может выбрать форму модели предсказания, называемую элементарным методом присвоения.

Процесс заполнения пропусков реализуется в несколько этапов:

- функция `mice()` обрабатывает `mydata` – матрицу или структуру данных, содержащую недостающие значения, и возвращает объект `imp`, содержащий несколько полных наборов данных (например,  $m = 5$ ), отличающихся между собой значениями пропусков, заполненных в ходе процедуры Гиббса, но с включением некоторого случайного компонента:
 

```
imp <- mice(mydata, m)
```
- функция `with()` используется, чтобы применить статистическую модель `analysis` к каждому набору данных из `imp`; это может быть линейная `lm()` или обобщенная линейная `glm()` модели, аддитивная модель `gam()` или любая иная, задаваемая пользователем:
 

```
fit <- with(imp, analysis)
```
- функция `pool()` комбинирует результаты и объединяет их в заключительную модель, в которой стандартные ошибки и  $p$ -значения сбалансированы относительно неопределенности, порожденной пропусками:
 

```
pooled <- pool(fit)
```
- наконец, функция `complete()` создает набор данных с заполненными пропусками:
 

```
complete(imp, action=#)
```

Применим процедуру множественного присвоения к набору данных `sleep`:

```
imp <- mice(sleep, seed=1234)
fit <- with(imp, lm(Dream ~ Span + Gest))
pooled <- pool(fit)
summary(pooled)
```

По результатам анализа моделей из объекта `pooled` можно установить, что показатель `Dream` статистически значимо зависит от переменной `Gest`, тогда как его зависимость от `Span` незначима. Исследуя объекты, созданные в ходе анализа, можно получить дополнительную информацию о процессе восстановления отсутствующих наблюдений. Например, рассмотрев данные объекта `imp`, можно установить, что восстановлены отсутствующие значения для следующих показателей:

```
NonD Dream Sleep Span Gest
      3      4      5      6      7
"pmm" "pmm" "pmm" "pmm" "pmm"
```

причем для этого использовался метод `"pmm"` – "средних относительно предикторов" (`predictive mean matching`). В нашем примере метод заполнения пропусков был выбран по умолчанию, но пользователь может самостоятельно задать любой иной алгоритм из 19 возможных с помощью параметра `method` функции `mice()`.

Для конкретного восстанавливаемого показателя в каждом из пяти имитируемых наборов данных мы можем посмотреть и проанализировать результаты расчетов:

```
imp$imp$Dream
      1      2      3      4      5
1  0.5 0.5 0.5 0.5 0.0
3  2.3 2.4 1.9 1.5 2.4
4  1.2 1.3 5.6 2.3 1.3
14 0.6 1.0 0.0 0.3 0.5
24 1.2 1.0 5.6 1.0 6.6
26 1.9 6.6 0.9 2.2 2.0
30 1.0 1.2 2.6 2.3 1.4
31 5.6 0.5 1.2 0.5 1.4
47 0.7 0.6 1.4 1.8 3.6
53 0.7 0.5 0.7 0.5 0.5
55 0.5 2.4 0.7 2.6 2.6
62 1.9 1.4 3.6 5.6 6.6
```

Наконец, мы можем сохранить любой из 5 полных наборов данных для дальнейшего использования (например, нам понравился набор №3):

```
sleep_imp3 <- complete(imp, action=3)
head(sleep_imp3)
  BodyWgt BrainWgt NonD Dream Sleep Span Gest Pred Exp Danger
1 6654.000   5712.0  2.1  0.5   3.3 38.6  645   3   5     3
2   1.000     6.6  6.3  2.0   8.3  4.5   42   3   1     3
3   3.385    44.5 10.6  1.9  12.5 14.0   60   1   1     1
4   0.920     5.7 11.0  5.6  16.5  4.7   25   5   2     3
5 2547.000   4603.0  2.1  1.8   3.9 69.0  624   3   5     4
sleep[!complete.cases(sleep_imp3), ]
save(sleep_imp3, file="sleep_imp.Rdata")
```

Как видим, все пропуски в нашей таблице оказались заполненными.

Среда R поддерживает также несколько других подходов для восстановления недостающих данных. В иных обстоятельствах могут быть весьма полезными функции `mitools()`, `pan()`, `mix()` из одноименных пакетов, `aregImpute()` и `transcan()` из пакета `Hmisc` и др.

## 4.5. Воспроизводимость результатов при использовании генератора случайных чисел

В практике статистического анализа данных часто приходится иметь дело с необходимостью генерации случайных чисел, подчиняющихся тому или иному закону распределения вероятностей (например, при необходимости случайным образом отобрать небольшую выборку из массивной таблицы данных, при использовании бутстреп-методов, методов Монте-Карло, и т.п.).

В системе R реализован целый ряд алгоритмов, позволяющих генерировать случайные числа (см. ? RNGkind); по умолчанию используется один из наиболее быстрых генераторов – так называемый "вихрь Мерсенна" (*Mersenne twister*). Очень важно понимать, что практически все эти алгоритмы детерминированы, и поэтому генерируемые с их помощью числа правильнее называть "псевдослучайными".

Генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ) начинает свою работу с определенной точки в пространстве возможных чисел. Эта точка называется *начальным числом* (англ. *seed*). В R имеется возможность зафиксировать это число так, что при повторном использовании ГПСЧ будет генерироваться точно та же последовательность чисел, что и в первый раз. Это может оказаться полезным в случаях, когда исследователь (по тем или иным причинам) желает иметь точную воспроизводимость результатов, получаемых с использованием ГПСЧ.

В качестве примера создадим таблицу `example` с двумя столбцами. В первом столбце будут храниться коды уровней гипотетического фактора `Factor` (три уровня: A, B, и C). Для каждого из этих уровней сгенерируем (псевдо-)случайным образом по 300 нормально распределенных значений с разными средними и стандартными отклонениями:

```
example = data.frame(
  Factor = rep(c("A", "B", "C"), each = 300),
  Variable = c(rnorm(300, 5, 2), rnorm(300, 4, 3),
              rnorm(300, 2, 1))
)
tapply(example$Variable, example$Factor, summary)
$A
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.9135  3.5950  5.0190  4.8520  6.2250 10.4900
$B
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-4.407  2.194   4.226   4.028   5.962 13.750
$C
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.517  1.365   1.997   1.975   2.582  4.458
```

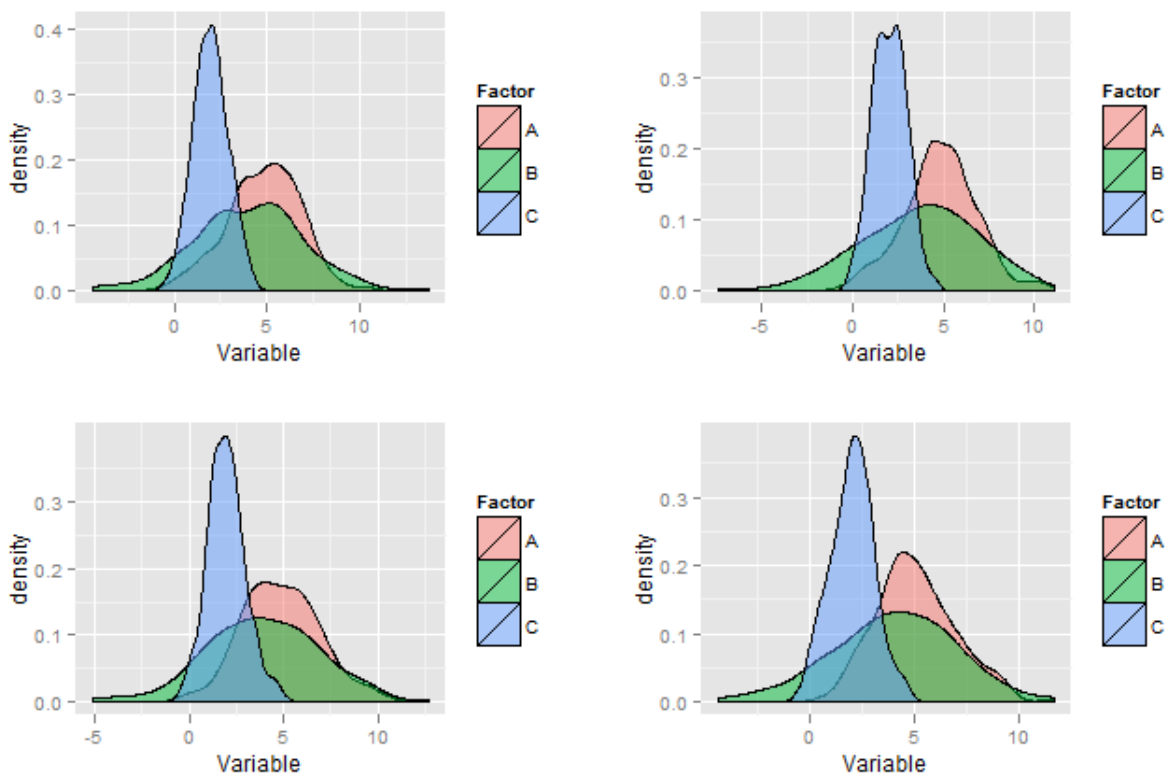
Для построения графика используем `ggplot2` – популярный графический пакет для R. Чтобы изобразить на одном графике кривые плотности вероятности для каждой из трех групп A, B, и C, выполним следующий код:

```
library(ggplot2)
p <- ggplot(example, aes(x = Variable))
(p <- p + geom_density(aes(fill = Factor), alpha = 1/2))
```

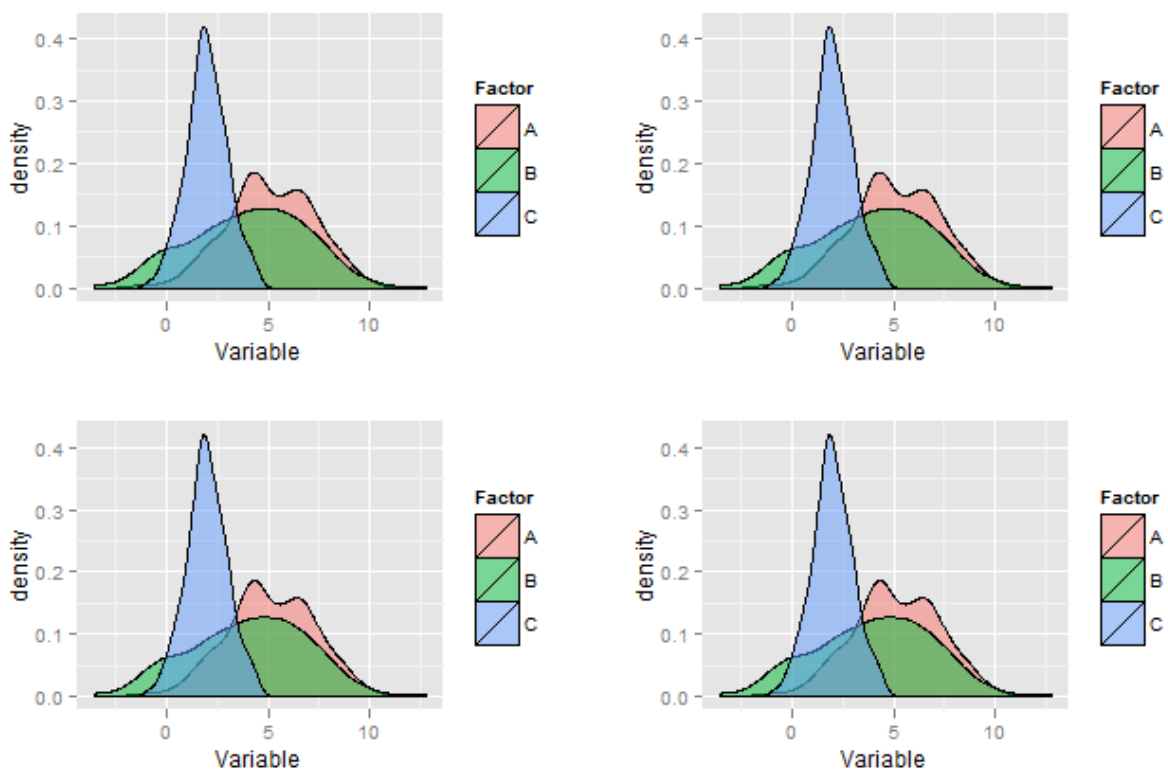
Если бы мы повторили создание таблицы `example` описанным выше способом еще несколько раз, мы получили бы очень похожие, но все-таки несколько различающиеся распределения для групп A, B и C. На приведенном рисунке (а) показан пример кривых

распределения для четырех повторностей таблицы example, созданных при помощи ГПСЧ.

*Кривые распределения четырех повторностей случайно генерируемых значений*



а) без фиксации начального числа генератора случайных чисел



б) установлено начальное значение генератора случайных чисел `set.seed(1020)`

Для того чтобы каждый раз при использовании ГПСЧ в R получать идентичные последовательности чисел, используется функция `set.seed()` (от `set` – задать, установить, и `seed` – начальное число). Как следует из названия, эта функция фиксирует начальную точку для запуска алгоритма генерации (псевдо-)случайных чисел. В качестве аргумента функции указывают произвольное целое число и при повторном выполнении кода мы будем всегда получать одинаковые последовательности значений для групп А, В и С:

```
set.seed(1020)
example = data.frame(
  Factor = rep(c("A", "B", "C"), each = 300),
  Variable = c(rnorm(300, 5, 2), rnorm(300, 4, 3),
              rnorm(300, 2, 1))
```

Повторив приведенный код четыре раза, мы получили бы четыре идентичные таблицы и, соответственно, четыре идентичных графика, изображающих распределения плотностей вероятности на рисунке (б).

#### 4.6. Законы распределения вероятностей, реализованные в R

В базовой версии R имеются функции для работы с целым рядом распространенных законов распределения вероятностей. В зависимости от назначения, имена этих функций начинаются с одной из следующих четырех букв:

- `d` (от "*density*", плотность): функции плотности вероятности ("функция распределения масс" для дискретных величин);
- `p` (от "*probability*", вероятность): кумулятивные функции распределения вероятностей;
- `q` (от "*quantile*", квантиль): функции для нахождения квантилей того или иного распределения;
- `r` (от "*random*", случайный): функции для генерации случайных чисел в соответствии с параметрами того или иного закона распределения вероятностей.

В частности, в базовой версии R реализованы следующие законы распределения вероятностей:

- Бета-распределение (см. `dbeta`)
- Биномиальное распределение (включая распределение Бернулли) (`dbinom`)
- Распределение Коши (`dcauchy`)
- Распределение хи-квадрат (`dchisq`)
- Экспоненциальное распределение (`dexp`)
- Распределение Фишера (`df`)
- Гамма-распределение (`dgamma`)
- Геометрическое распределение (как частный случай отрицательного биномиального распределения) (`dgeom`)
- Гипергеометрическое распределение (`dhyper`)
- Логнормальное распределение (`dlnorm`)
- Полиномиальное (или мультиномиальное) распределение (`dmultinom`)
- Отрицательное биномиальное распределение (`dnbinom`)
- Нормальное распределение (`dnorm`)
- Распределение Пуассона (`dpois`)
- Распределение Стюдента (`dt`)
- Равномерное распределение (`dunif`)

◦ Распределение Вейбулла (dweibull)≤

В качестве примера рассмотрим d-, p-, q- и r-функции, предназначенные для работы с нормальным распределением. Предположим, что мы имеем дело с непрерывной количественной величиной  $X$ , значения которой распределены в соответствии со стандартным нормальным распределением (среднее значение = 0, стандартное отклонение = 1). Функция плотности вероятности представляет собой такую функцию  $f(x)$ , что для любых двух значений  $a$  и  $b$  (при  $a \leq b$ )

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Иными словами, вероятность того, что некоторая случайная величина  $X$  принимает значение, лежащее в интервале  $[a, b]$ , равна площади под кривой плотности вероятности, ограниченной этим интервалом. Заметим, что, по определению, площадь под всей кривой плотности вероятности равна 1. Дифференциальная функция плотности вероятности стандартного нормального распределения в точке  $x$  задается уравнением

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

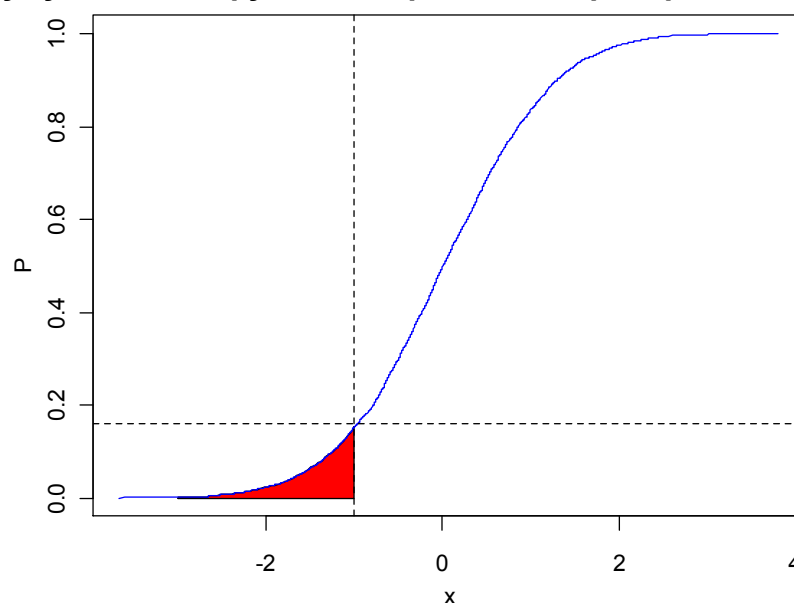
R-функция `dnorm()` позволяет рассчитать значение функции плотности вероятности для заданного значения (или сразу для вектора из нескольких значений)  $X$ . Так, для  $x = -1$  в случае со стандартным нормальным распределением получаем

```
dnorm(-1)  
[1] 0.2419707
```

Кумулятивная функция распределения (или просто "функция распределения") описывает вероятность того, что вещественнозначная случайная переменная  $X$  примет *какое-либо* значение, не превышающее, либо равное  $x$ . Для нашего примера получаем:

```
pnorm(-1)  
[1] 0.1586553
```

### Кумулятивная функция нормального распределения



Для вычисления квантилей нормального распределения служит функция `qnorm()`. Например, следующим образом вычислить нижний и верхний квартили стандартного нормального распределения:

```
qnorm(p = c(0.25, 0.75))  
[1] -0.6744898 0.6744898
```

Наконец, функция `rnorm()` служит для случайной генерации совокупностей нормально распределенных чисел. Сгенерируем совокупность из 10 значений, представляющих стандартное нормальное распределение:

```
rnorm(10, mean = 0, sd = 1)  
[1] -2.69409418 0.09407048 -0.19622289 -1.06719782 -0.55212590  
[6] -0.94019419 -0.14916494 0.17760798 -0.29358930 -0.77420692
```

d-, p-, q- и r-функции для других распределений работают сходным образом. В заключение стоит отметить, что в дополнительных R-пакетах можно найти функции для работы с большим числом других законов распределения вероятностей. Особенно полезными, в частности, могут оказаться пакеты `VGAM`, `actuar`, `gamlss` и `ActuDistns`.

#### 4.7. Подбор закона и параметров распределения в R

Подбор распределения заключается в нахождении математической функции, которая бы наилучшим образом представляла наши экспериментальные данные. Исследователь часто сталкивается с такой задачей: у него есть некоторые наблюдения количественного показателя  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и он желает проверить, принадлежит ли полученная им выборка из неизвестной популяции некой теоретической генеральной совокупности с функцией плотности вероятности  $f(x, \theta)$ , где  $\theta$  является вектором параметров, оцениваемых по имеющимся данным.

Можно выделить 4 шага при подборе распределений (Ricci, 2005):

- 1) Выбор модели: выдвигается гипотеза о принадлежности выборки некоторому семейству распределений;
- 2) Оценка параметров теоретического распределения;
- 3) Оценка качества приближения;
- 4) Проверка согласия между наблюдаемыми и ожидаемыми значениями с использованием статистических тестов.

Имея одну конкретную выборку и задав форму некоторого теоретического распределения, можно рассчитать точечные оценки его параметров  $\hat{\theta}(x)$  (например, среднее и стандартное отклонение нормального распределения). Для этого используются следующие процедуры оценивания: а) по аналогии, б) метод моментов и в) метод максимального правдоподобия.

Метод "по аналогии" мы использовали, рассчитав в разделе 4.1 арифметическое среднее для пробега автомобиля (`mtcars$mpg`), допустив для этой выборки нормальное распределение. Метод моментов – это техника конструирования оценок неизвестных параметров, основанная на предполагаемом соотношении выборочных моментов для заданных распределений. В общем случае, для использования метода нужно составить нелинейное уравнение (или систему уравнений, в зависимости от числа неизвестных параметров), где выборочные моменты приравниваются к соответствующим теоретическим. Нахождение корней уравнений выполняется аналитическими методами или с использованием функций, таких, например, как `multiroot()`.

Сформируем выборку из гамма-распределения с использованием функции `rgamma()` и задаваемыми параметрами масштаба  $\lambda = 0.5$  (аргумент `rate`) и формы  $\gamma = 3.5$  (аргумент `shape`). Аналитическое решение для оценки этих параметров зависит от первых двух моментов нормального распределения (среднего и дисперсии):  $\hat{\lambda} = \bar{x}/s^2; \hat{\gamma} = \bar{x}^2/s^2$ . В R получаем:

```
library(MASS)
set.seed(0)
x.gam<-rgamma(200,rate=0.5,shape=3.5)
# Аналитический путь
med.gam<-mean(x.gam)           # выборочное среднее
var.gam<-var(x.gam)           # выборочная дисперсия
(l.est<-med.gam/var.gam)      ## -оценка лямбда
[1] 0.5257432
(g.est<- (med.gam)^2/var.gam) ## -оценка гамма
[1] 3.533591
# Общий подход
library(rootSolve)
f1=function(x){c(F1=x[1]/x[2]-med.gam,F2=x[1]/x[2]^2-var.gam)}
multiroot(f1,c(3,0.6))
$root
[1] 3.5335907 0.5257432
```

При оценке параметров известного семейства вероятностных распределений этот метод в значительной мере вытесняется методом максимального правдоподобия Фишера (MLE – Maximum Likelihood Estimation), так как максимально правдоподобная оценка имеет большую вероятность оказаться ближе к истинному значению оцениваемой величины.

Принцип максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве "наиболее правдоподобного" значения параметра берут значение  $\Theta$ , максимизирующее вероятность получить при  $n$  опытах имеющуюся выборку  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Предположим, что нам известен закон распределения случайной величины  $X$ , определяемый параметром  $\Theta$ , но неизвестно численное значение этого параметра. И пусть  $p(x_i, \Theta)$  – вероятность того, что в результате испытания величина  $X$  примет значение  $x_i$ . *Функцией правдоподобия* случайной величины  $X$  называют функцию аргумента  $\Theta$ , определяемую по формуле:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = p(x_1, \Theta)p(x_2, \Theta) \dots p(x_n, \Theta).$$

В качестве искомой точечной оценки параметра  $\Theta$  принимают такое его значение, при котором функция правдоподобия достигает максимума:  $\theta_{MLE} = \operatorname{argmax} L(\mathbf{x} | \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ .

Для поиска экстремума необходимо найти частную производную функции правдоподобия, приравняв ее к нулю:  $\partial L(\mathbf{x}, \theta_0)/\partial \theta = 0$ . Если вторая производная в критической точке отрицательна, то это – точка максимума, соответствующая искомому значению параметра. Если нам необходимо найти  $k$  параметров, то формируется и решается система из  $k$  уравнений правдоподобия.

Поскольку функции  $L$  и  $\ln(L)$  достигают максимума при одном и том же значении  $\Theta$ , удобнее искать максимум логарифмической функции правдоподобия. Например, в случае гамма-распределения выражение для функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln[L(x_1, \dots, x_n, \gamma, \lambda)] = -n\gamma \ln(\lambda) - n \ln(\Gamma(\gamma)) + (\gamma - 1) \sum_n \ln x_i - \lambda \sum_n x_i$$



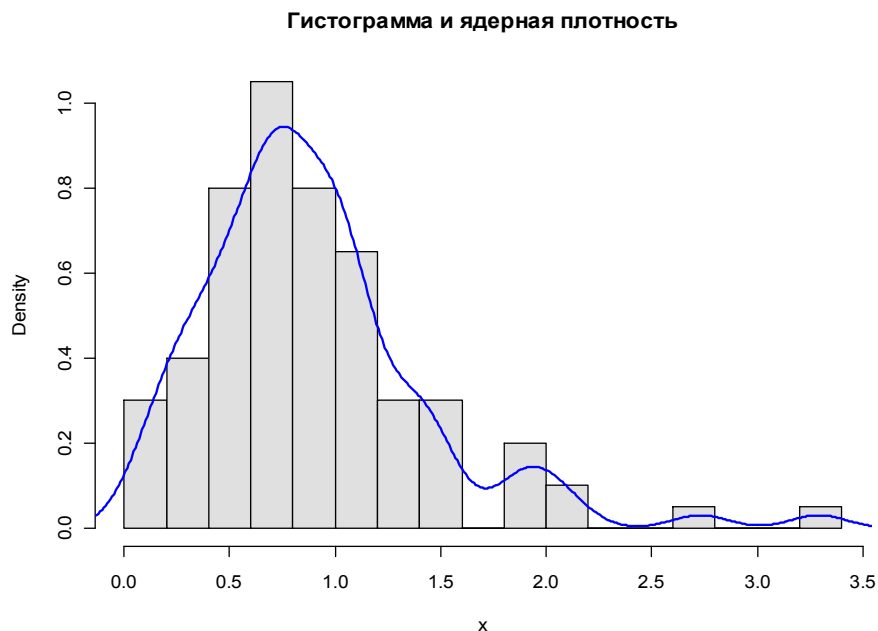
В большинстве функций R, специально предназначенных для оценки параметров, по выбору пользователя реализуется и метод моментов, и метод максимального правдоподобия (более того, последний используется по умолчанию). Для подробного рассмотрения практических коллизий при подборе распределений создадим выборку значений из смеси распределений и постараемся выбрать наиболее подходящую теоретическую модель. При оценке параметров будем использовать функции `fitdistr()` из пакета `MASS` и `fitdist()` из пакета `fitdistrplus`.

Рассмотрим имитацию случайной выборки из распределения Вейбулла с двумя параметрами `shape` – параметр формы, `scale` – параметр  $1/\lambda$ . Оба аргумента – положительные конечные числа, но значение `scale` сделаем переменным, изменяющимся по биномиальному закону (т.е. введем гетероскедастичность). Выполним генерацию 100 значений такой выборки:

```
set.seed(1946)
x = sort(rweibull( 100, 2, (1 + 1.21*rbinom(100, 1, 0.05)) ))
x # Отсортированные значения
[1] 0.03073383 0.11966667 0.15825498 0.16137953 0.17215545 0.17739292 0.23748408
...
[92] 1.59118211 1.84739051 1.85831686 1.90531232 1.98264573 2.02601002 2.11484324
[99] 2.73019016 3.29075676
summary(x) # Выборочные характеристики
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.03073 0.57190 0.79260 0.89500 1.06700 3.29100
```

Выведем график выборочной гистограммы и ядерной функции плотности распределения:

```
hist(x, freq = FALSE, breaks=8,col="grey88",
     main="Гистограмма и ядерная плотность")
lines(density(x), lwd = 2, col="blue")
```



Перед началом процесса подбора теоретического распределения определим функцию вывода двух графиков, на которых мы будем сравнивать функции эмпирического и теоретического распределений – кумулятивную (КФР) и плотности (ФПР):

```

graph_distr <- function (x, pc, pd, main_name="")
{
  op <- par(mfrow=c(1,1), pty="s")
  par(mfrow=c(1,2))
  mn <- paste(c("Эмпирическая КФР и ", main_name))
  plot(x,pc, type="l",col="red", lwd=2, main=mn)
  plot(ecdf(x),add=TRUE)
  mn <- paste(c("Эмпирическая ФПР и ", main_name))
  plot(density(x), lwd = 2, col="blue", main=mn)
  lines(x, pd, col="red",lwd = 2)
  par(op)
}

```

Рассмотрим в качестве моделей-претендентов три закона распределения: нормальное, лог-нормальное и распределение Вейбулла. Процедура подгонки нашего эмпирического распределения состоит из трех шагов:

- оценка параметров распределения на основе метода максимального правдоподобия;
- проверка гипотезы о согласии эмпирического и теоретического распределений с использованием критерия Колмогорова-Смирнова;
- вывод графика по определенной выше функции (для удобства сопоставления показаны на одном рисунке).

```
## оценка параметров нормального распределения
```

```

(dof = fitdistr(x,"normal"))
ep1=dof$estimate[1]; ep2=dof$estimate[2]
      mean      sd
0.89502201  0.53760487
(0.05376049) (0.03801440)

```

```

ks.test(x,pnorm, mean=ep1,sd=ep2)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  x
D = 0.1342, p-value = 0.05463
alternative hypothesis: two-sided

```

```

graph_distr(x, pnorm(x,mean=ep1,sd=ep2),
            dnorm(x,mean=ep1,sd=ep2),
            "нормального распределения")

```

```
## оценка параметров лог-нормального распределения
```

```

(dof = fitdistr(x,"log-normal"))
ep1=dof$estimate[1]; ep2=dof$estimate[2]
      meanlog      sdlog
-0.30750108  0.69803371
( 0.06980337) ( 0.04935844)

```

```

ks.test(x,plnorm, meanlog=ep1,sdlog=ep2)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  x
D = 0.1161, p-value = 0.1346
alternative hypothesis: two-sided

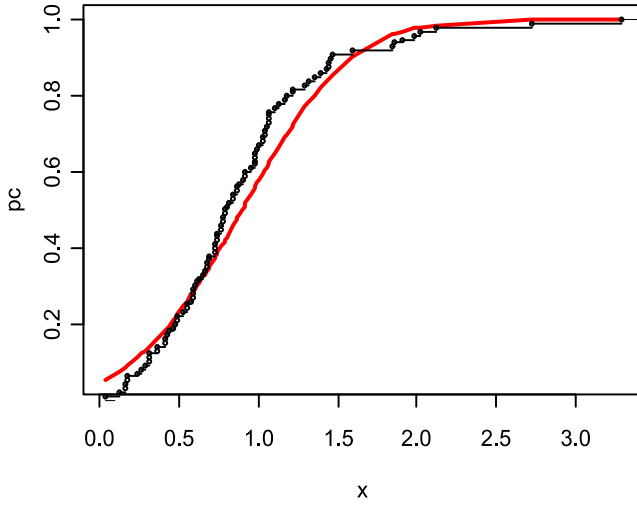
```

```

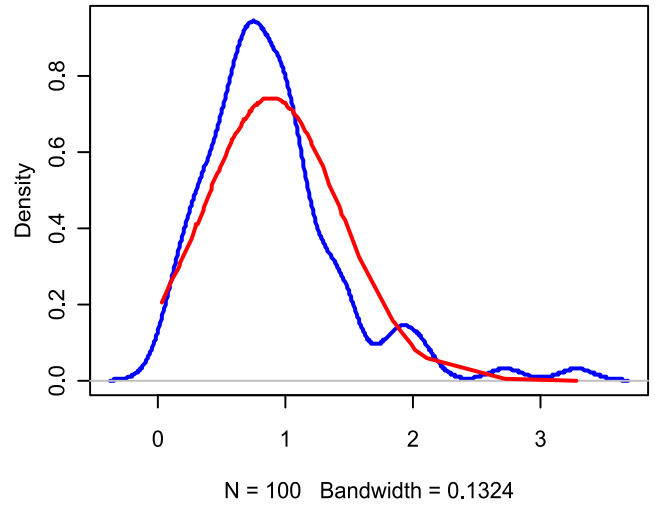
graph_distr(x, plnorm(x,meanlog=ep1,sdlog=ep2),
            dlnorm(x,meanlog=ep1,sdlog=ep2),
            "логнормального распределения")

```

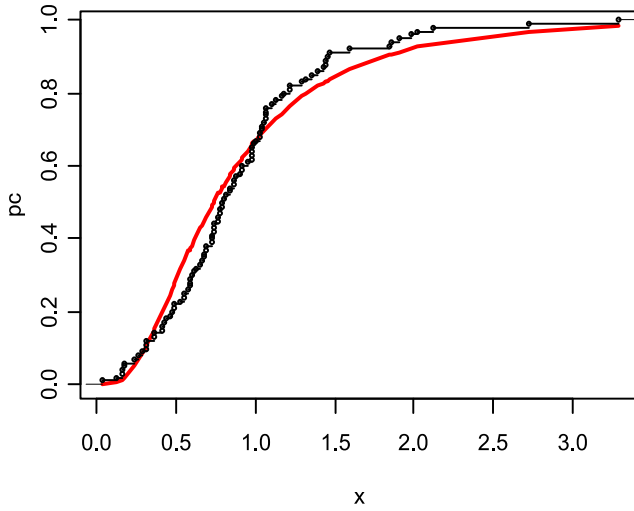
**Эмпирическая КФР и нормального распределения**



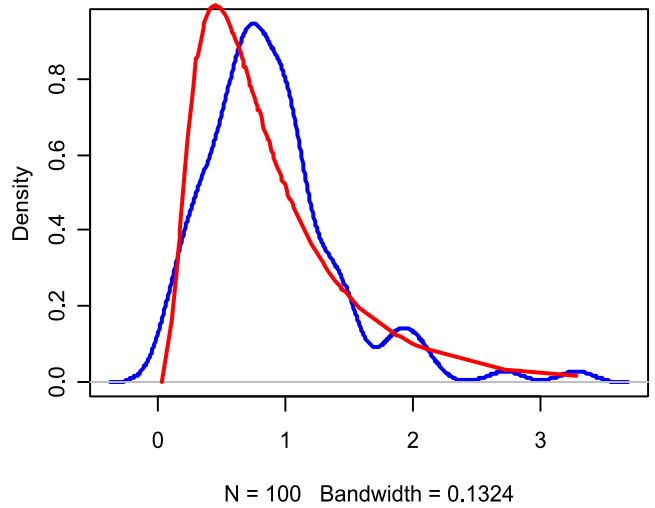
**Эмпирическая ФПР и нормального распределения**



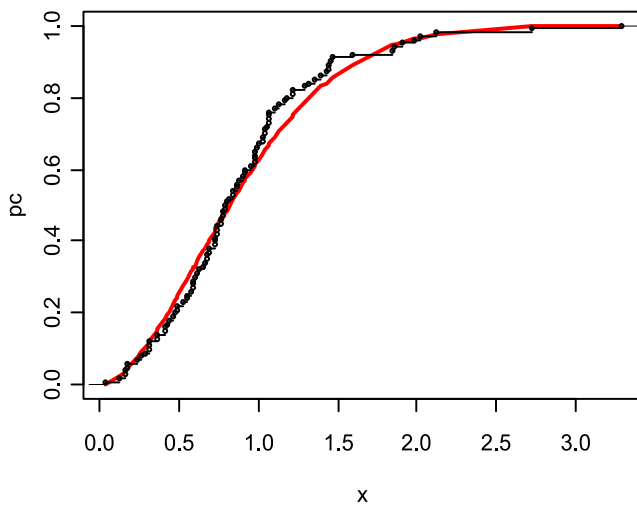
**Эмпирическая КФР и логнормального распределения**



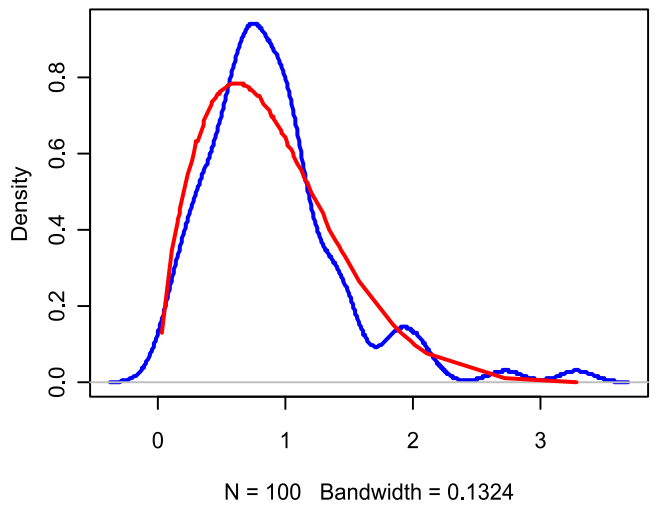
**Эмпирическая ФПР и логнормального распределения**



**Эмпирическая КФР и распределения Вейбулла**



**Эмпирическая ФПР и распределения Вейбулла**



```
## оценка параметров распределения Вейбулла
(dof =
fitdistr(x, densfun=dweibull, start=list(scale=2, shape=2)))
ep1=dof$estimate[1]; ep2=dof$estimate[2]
1: In dweibull(x, shape, scale, log) : созданы NaN
```

Ввиду того, что при оптимизации были получены неопределенные значения, выполним расчет по аналогичной функции из другого пакета

```
library(fitdistrplus)
(dof = fitdist(x, "weibull"))
ep1=dof$estimate[1]; ep2=dof$estimate[2]
Fitting of the distribution ' weibull ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
shape 1.745618 0.12932631
scale 1.005806 0.06078022

ks.test(x, pweibull, shape=ep1, scale=ep2)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  x
D = 0.0897, p-value = 0.3968
alternative hypothesis: two-sided

graph_distr(x, pweibull(x, scale=ep1, shape=ep2),
             dweibull(x, scale=ep1, shape=ep2),
             "распределения Вейбулла")
```

Из приведенных расчетов с использованием теста Колмогорова-Смирнова можно сделать вывод, что все три теоретических распределения статистически значимо согласуются с эмпирическим. В этих условиях и при отсутствии серьезных априорных предположений о законе распределения возникает традиционная (но так однозначно и не решенная) задача статистики: какую модель из некоторого множества претендентов следует предпочесть?

Для выбора *наилучшего* закона распределения из трех возможных можно воспользоваться целым набором мер, таких как средняя абсолютная разность между фактическими и прогнозируемыми значениями, сумма квадратов этих разностей, относительные средние разности, критерий  $\chi^2$  или та же  $D$ -статистика Колмогорова-Смирнова. Ориентируясь, например, на значения последнего критерия, можно полагать нашу выборку распределенной по закону Вейбулла (однако, возможно, другие используемые меры дадут иную предупорядоченность моделей).

В общем случае вопрос о том, являются ли полученные оценки параметров наилучшими, обычно остается открытым. Во-первых, соображения, из которых задается вид теоретического распределения, часто оказываются субъективными. Это нередко приводит к тому, что, выполнив вычисления, мы полагаем, что найдены оценки истинных характеристик генерального распределения, тогда как на самом деле получены оценки параметров некоего теоретического распределения, которое может быть всего лишь "похожим" на распределение генеральной совокупности, из которого взята выборка. Во-вторых, обычно мы ничего не можем сказать об устойчивости модели и ошибке ее воспроизводимости: нет никакой гарантии, что при взятии повторной выборки расхождение искомым величин параметров не окажется слишком большим.

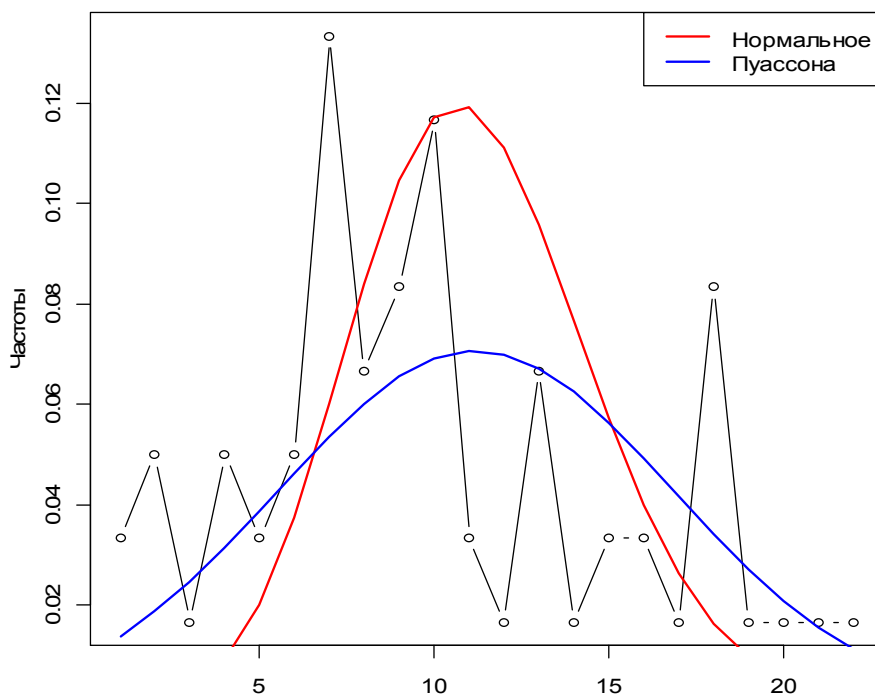
Проблема подбора наилучшего распределения еще более усложняется при обработке счетных данных (*count data*), выборочные элементы которых можно рассматривать как подмножество натуральных чисел. К таким выборкам относятся, например, количество отловленных мышей, результаты стрельбы по мишеням, число избирателей, проголосовавших за каждого кандидата и т.д. Счетные данные занимают некоторое промежуточное положение между числами, представленными на непрерывных шкалах, и измерениями в порядковой шкале.

Традиционно считается, что счетные данные следует аппроксимировать дискретными распределениями типа Пуассона, биномиального или геометрического. Однако известно, что при значении  $\lambda > 9$  и достаточно большом объеме выборки распределение Пуассона хорошо аппроксимируется нормальным распределением. Поэтому "спектр" возможных распределений-претендентов для выборок, состоящих из счетных данных, может включать как дискретные, так и непрерывные теоретические распределения.

Рассмотрим следующий пример: из маленькой речки Байтуган было сделано дночерпателем 60 проб и подсчитывалось число обнаруженных видов донных организмов (моллюсков, рачков, червей, личинок). Это число варьирует от 2 до 30 при среднем  $\bar{x} = 11.2$ . Какое распределение является лучшим с формально-статистической точки зрения: Пуассона с  $\lambda = 11.2$  или нормальное?

```
x <- c(12,20,19,19,18,10,19,30,16,10,8,11,10,11,16,3,7,6,5,11,
8,14,9,8,10,11,14,17,2,7,17,19,9,15,9,8,4,8,11,8,5,3,10,
14,22,11,8,7,3,5,8,11,14,2,13,9,12,6,19,21)
# Оценка параметров распределений нормального и Пуассона
n = length(x); p1 = mean(x) ; p2 = sqrt(var(x)*(n-1)/n)
# Создание векторов эмпирических и теоретических частот
pr_obs <- as.vector(table(x)/n) ; nr <- length(pr_obs)
pr_norm <- dnorm(1:nr, p1, p2) # Частоты нормального распр.
pr_pois <- dpois(1:nr, p1) # Частоты распр. Пуассона
plot(pr_obs, type="b", ylab = "Частоты")
  lines(1:nr, pr_pois , col="red", lwd=2)
  lines(1:nr, pr_norm, col="blue", lwd=2)
  legend("topright", legend = c("Нормальное", "Пуассона"),
        lwd=2, col=c("red","blue"))
# Сравнение качества подгонки распределений
# Среднее абсолютное отклонение
c(sum(abs(pr_obs-pr_norm))/nr, sum(abs(pr_obs-pr_pois))/nr)
[1] 0.02314994 0.03176255
# Средняя квадратичная ошибка
c(sum((pr_obs-pr_norm)^2)/nr, sum((pr_obs-pr_pois)^2)/nr)
[1] 0.0009595203 0.0017446052
# Критерий согласия Колмогорова-Смирнова
c(ks.test(pr_obs, pr_norm)$statistic,
  ks.test(pr_obs, pr_pois)$statistic)
[1] 0.2272727 0.4090909
```

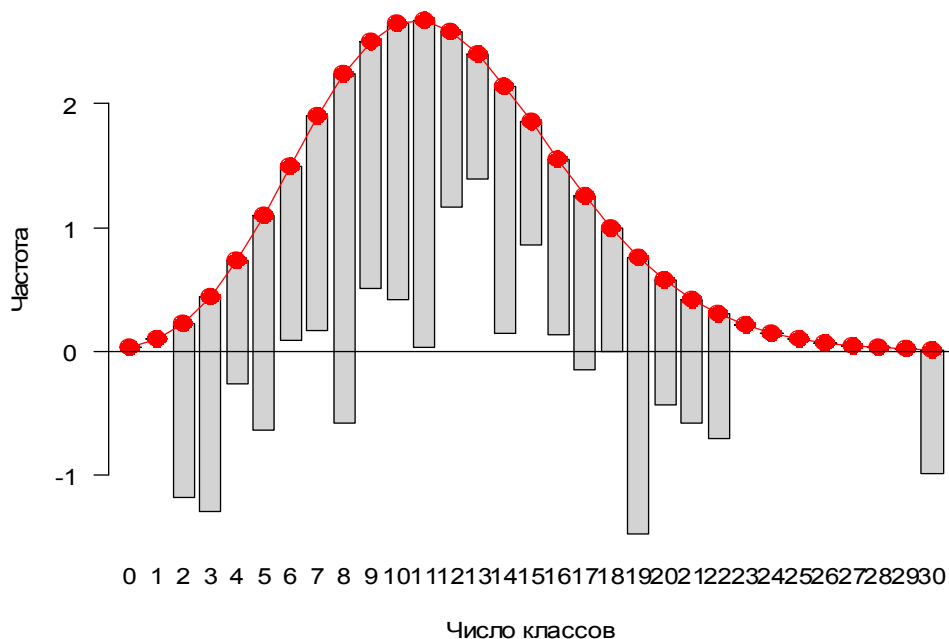
Можно усмотреть из полученных результатов, что по всей совокупности тестов нормальное распределение обеспечивает наименьшую ошибку аппроксимации данных.



Подгонку счетных данных дискретными распределениями можно выполнить с помощью функции `goodfit()` пакета `vcd`. Аргумент `type = c("poisson", "binomial", "nbinomial")` задает здесь тип предполагаемого распределения:

```
library(vcd) ## Visualizing Categorical Data
gf<-goodfit(table(x),type="poisson",method="ML")
summary(gf)
      Goodness-of-fit test for poisson distribution
              X^2 df      P(> X^2)
Likelihood Ratio 75.41796 20 2.320178e-08
# Визуализация подогнанных данных гистограммой
plot(gf,ylab="Частота", xlab="Число классов")
```

Подгонка распределением Пуассона



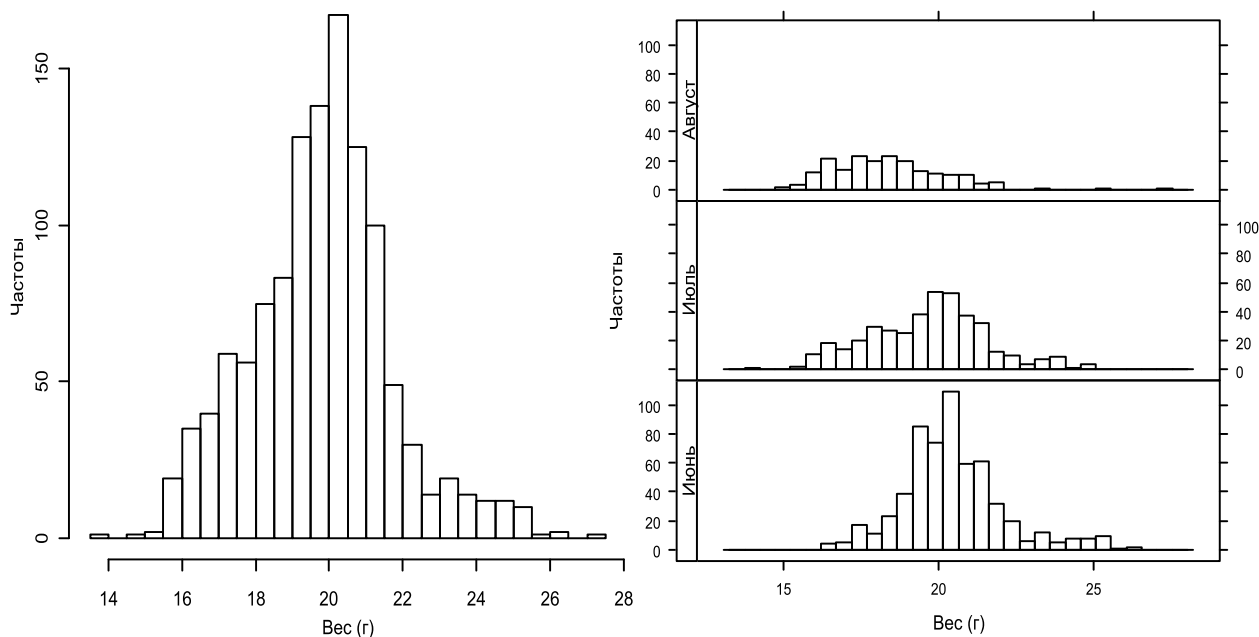
## 4.8. Проверка на нормальность распределения

Далее в главе 6 будет показано, что проверка исследуемых переменных на нормальность распределения является важной составной частью разведочного анализа данных. Существует несколько способов такой проверки и их можно разделить на две рассмотренные ниже группы.

### Графические способы

Самый простой графический способ проверки характера распределения данных – это построение *гистограммы*. Если гистограмма имеет колоколообразный симметричный вид, можно сделать заключение о том, что анализируемая переменная имеет примерно нормальное распределение. Однако при интерпретации гистограмм следует соблюдать осторожность, поскольку их внешний вид может сильно зависеть как от числа наблюдений, так и от шага, выбранного для разбиения данных на классы (подробнее см. раздел 3.2). Кроме того, достаточно часто при анализе выборок, извлеченных из *смеси* нормально распределенных совокупностей, гистограммы приобретают асимметричный вид, вводя исследователя в заблуждение.

Например, на гистограмме распределения веса 1193 воробьев ([Zuur et al., 2010](#)) слева приведены объединенные данные для июня, июля и августа. Поскольку вес птиц зависит от времени года, гистограмма приобретает асимметричный вид. На графике справа показаны те же данные, но отдельно по каждому месяцу. На основании этого графика Цуур с соавторами заключают (на наш взгляд, без достаточно серьезных оснований), что на самом деле вес воробьев имеет примерно нормальное распределение.



Другим очень часто используемым графическим способом проверки характера распределения данных является построение так называемых *графиков квантилей* (*q-q plots, quantile-quantile plots*). На таких графиках изображаются квантили двух распределений – эмпирического (т.е. построенного по анализируемым данным) и теоретически ожидаемого стандартного нормального распределения. При нормальном распределении проверяемой переменной точки на графике квантилей должны выстраиваться в прямую линию, исходящую под углом 45 градусов из левого нижнего угла графика. Графики квантилей особенно полезны при работе с небольшими по размеру совокупностями, для которых невозможно построить гистограммы, принимающие какую-либо выраженную форму.

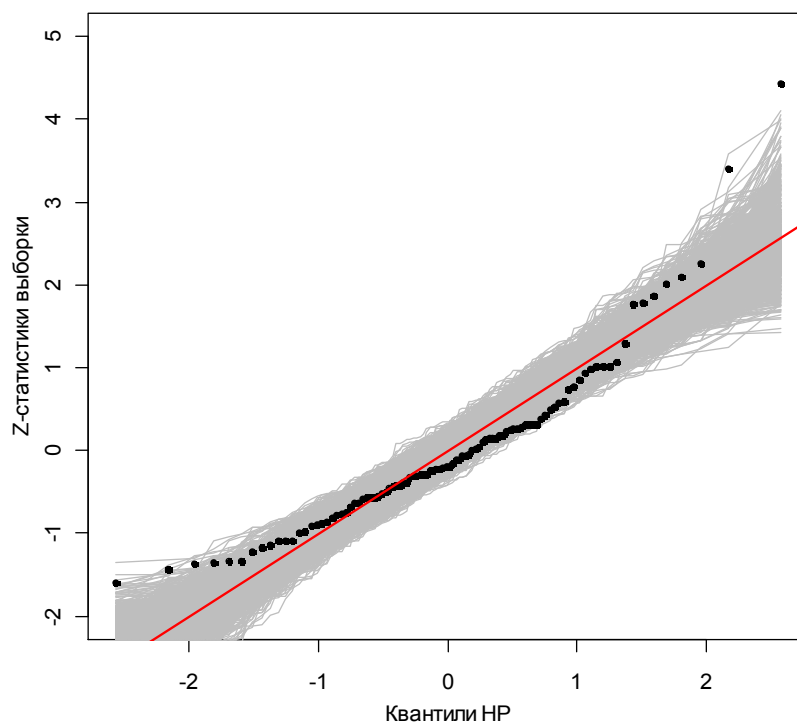
Интерпретация квантильных графиков, получаемых с использованием распространенных функций `qqnorm()` и `qqplot()`, носит в значительной мере "субъективно-эмоциональный характер". Например, одни исследователи могут полагать, что экспериментальные точки в значительной степени отклоняются от диагонали теоретических квантилей, а другие на том же графике сочтут эти отклонения достаточно приемлемыми для принятия гипотезы о нормальности.

Проблема объективной количественной оценки меры расхождения (*deviation test*) эмпирической и теоретических кривых является одной из важнейших задач прикладной статистики. Б. Рипли ([Ripley, 1978](#)) ввел удобный графический метод для анализа возможных причин расхождения модели и данных – *метод огибающих* (*simulation envelopes*). В основе алгоритма имитаций лежит, в частности, параметрический бутстреп.

Используем метод огибающих для оценки расхождений между квантилями нормального распределения и студентизированными значениями случайной выборки из смеси распределений Вейбулла (анализировалась в разделе 4.7). Для этого извлечем из нормального распределения с заданными параметрами (т.е. со средним  $m = 0.895$  и стандартным отклонением  $s = 0.538$ , что соответствует полученным выше выборочным оценкам) 999 различных случайных выборок. Далее построим на графике пучок из 999 линий, соответствующих имитируемым выборкам. Поскольку каждая из наших нормальных выборок является ограниченной ( $n = 100$ ), то их кривые не будут полностью совпадать с теоретической линией квантилей (к которой они будут приближаться при  $n \rightarrow \infty$ ), но их совокупный статистический разброс даст нам объективную оценку, в каких "допусках" может быть принята гипотеза о нормальности. Если задаться доверительной вероятностью  $\gamma = (1 - \alpha/2)$ , то можно найти геометрическое место точек гипотетических огибающих, внутри которых будет находиться  $\gamma\%$  имитаций теоретической модели:

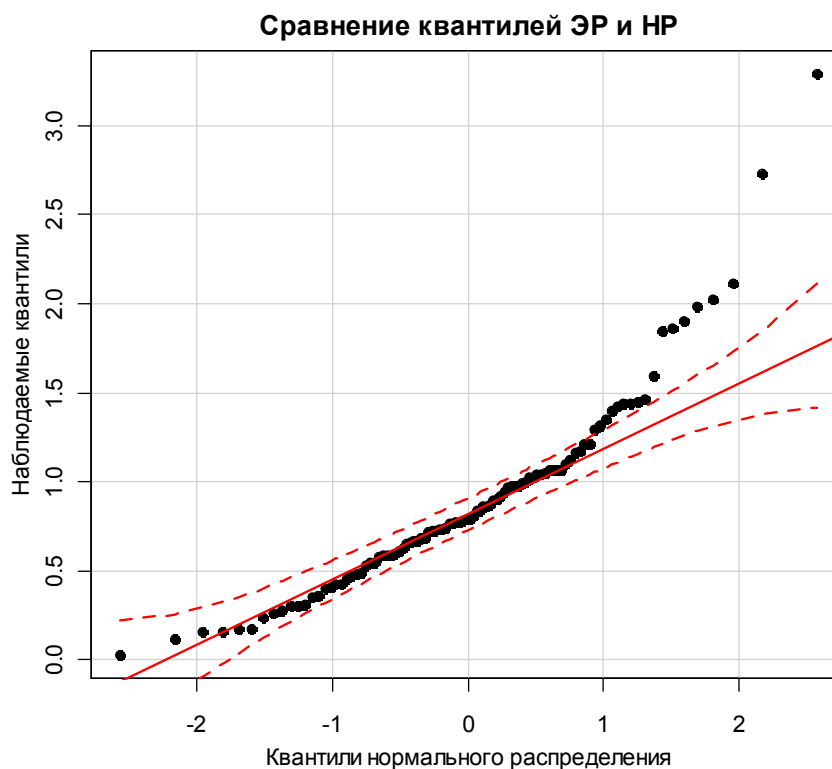
```
set.seed(1946)
x = sort(rweibull( 100, 2, (1 + 1.21*rbinom(100, 1, 0.05)) ))
c(mean(x), sd(x))
[1] 0.89502201 0.53760487
# Квантиль-квантильный график без доверительных огибающих
qqnorm(x); qqline(x)
# Определяем и рисуем огибающие
# (подробности п. 4.2.4 Davison and Hinkley (1997))
z <- (x - mean(x))/sqrt(var(x)) # Стандартизация выборки
x.qq <- qqnorm(z, plot.it = FALSE)
x.qq <- lapply(x.qq, sort)
plot(x.qq, ylim = c(-2, 5), ylab = "Z-статистики выборки",
      xlab = "Квантили HP")
library(boot)
# Генерация 999 бутстреп-выборок (т.е. случайных выборок из
# нормального распределения с параметрами выборки z)
x.gen <- function(dat, mle) rnorm(length(dat))
x.qqboot <- boot(z, sort, R = 999,
                sim = "parametric", ran.gen = x.gen)
sapply(1:999, function(i) lines(x.qq$x, x.qqboot$t[i,],
                               type="l", col = "grey"))
points(x.qq, pch = 20)
lines(c(-3,3), c(-3,3), col = "red", lwd=2)
```





Если далее использовать функцию `envelope()`, то можно построить доверительные огибающие (confidence envelopes), соответствующие заданной доверительной вероятности. Однако приведенный алгоритм уже заложен в функции `qqPlot()` пакета `car`, что избавляет нас от необходимости громоздких вычислений:

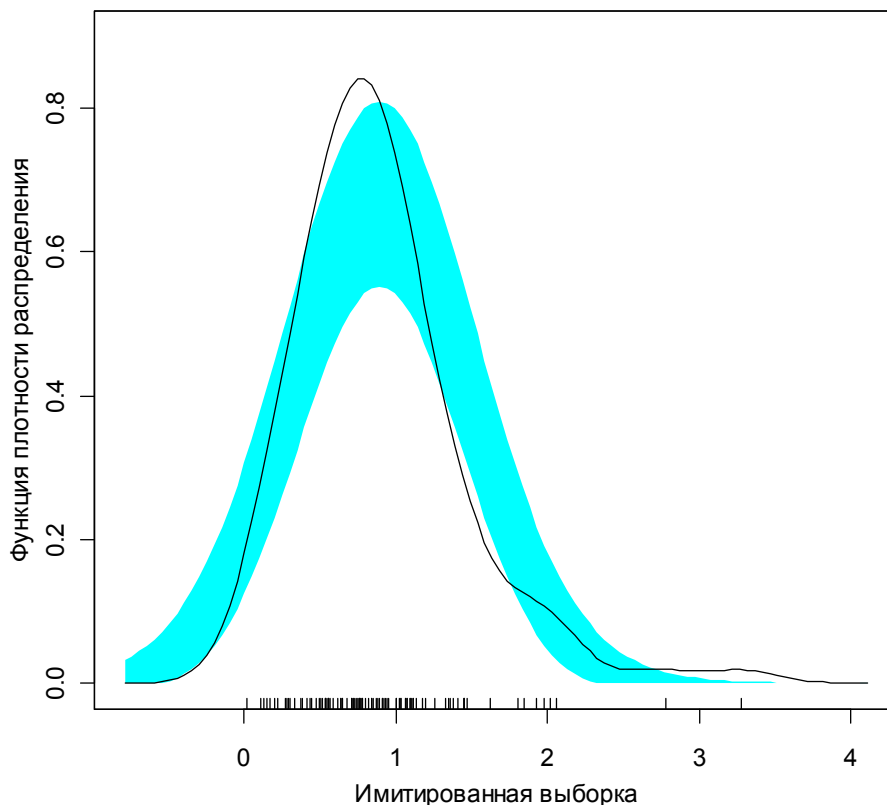
```
library(car)
qqPlot(x, dist="norm", col=palette()[1], pch=19,
       xlab="Квантили нормального распределения",
       ylab="Наблюдаемые квантили",
       main="Сравнение квантилей ЭР и НР")
```



На графиках для нашего примера можно обнаружить группы точек, которые выходят за пределы доверительной полосы огибающих с  $\gamma = 0.95$ , что заставляет сомневаться в согласии эмпирического и нормального распределений.

Прекрасной альтернативой квантильным графикам `qqPlot()` является использование функций `sm.density()` и `sm.density.compare()` из пакета `sm`. Если, например, указать для функции `sm.density()` параметр `model = "Normal"`, то получим на графике такую же доверительную полосу, но относительно теоретической функции плотности распределения при выборочных значениях параметров. На этом же графике показывается кривая ядерной плотности для эмпирических данных и можно оценить, насколько правдоподобно предположение о нормальности, и в каких диапазонах анализируемой переменной наблюдаются отклонения:

```
library(sm)
sm.density(x, model = "Normal", xlab="Имитированная выборка",
           ylab="Функция плотности распределения")
```



### Формальные тесты

Существует целый ряд статистических тестов, специально разработанных для проверки нормальности распределения данных. В общем виде проверяемую при помощи этих тестов нулевую гипотезу можно сформулировать так: "анализируемая выборка происходит из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение". Если получаемая при помощи того или иного теста вероятность ошибки  $p$  оказывается меньше некоторого заранее принятого уровня значимости (например, 0.05), нулевая гипотеза отклоняется.

В R реализованы практически все имеющиеся тесты на нормальность – либо в виде стандартных функций, либо в виде функций, входящих в состав подгружаемых пакетов. Примером базовой функции является `shapiro.test()`, при помощи которой

можно выполнить широко используемый тест Шапиро-Уилка. Можно также перечислить функции из пакета `nortest`, реализующие другие распространенные тесты на нормальность:

- `ad.test()` - тест Андерсона-Дарлинга;
- `cvm.test()` - тест Крамера фон Мизеса;
- `lillie.test()` - тест Колмогорова-Смирнова в модификации Лиллиефорса;
- `sf.test()` - тест Шапиро-Франсия (см. [Thode, 2002](#)).

Выполним серию тестов на проверку нормальности все той же случайной выборки из смеси распределений Вейбулла (раздел 4.7) с использованием всех перечисленных критериев:

```
# Тесты на нормальность
shapiro.test(x)
      Shapiro-Wilk normality test
data:  x
W = 0.8986, p-value = 1.219e-06

library(nortest)
ad.test(x)
      Anderson-Darling normality test
data:  x
A = 2.0895, p-value = 2.382e-05
cvm.test(x)
      Cramer-von Mises normality test
data:  x
W = 0.3369, p-value = 0.0001219
lillie.test(x)
      Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
data:  x
D = 0.1348, p-value = 0.0001225
sf.test(x)
      Shapiro-Francia normality test
data:  x
W = 0.8936, p-value = 3.617e-06
```

Обратим внимание на то, что тест Колмогорова-Смирнова, выполненный в разделе 4.7, не нашел оснований отклонить нулевую гипотезу о нормальном характере распределения анализируемых данных, что свидетельствует о недостаточной мощности этого критерия согласия при малых и средних объемах выборок.

## 5. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И КРИТЕРИИ СТАТИСТИКИ



### 5.1. Гипотеза о равенстве средних двух генеральных совокупностей

**Критерий Стьюдента**  $t$  относится к одним из наиболее давно разработанных и широко используемых статистических критериев. Чаще всего он применяется для проверки нулевой гипотезы о равенстве средних значений двух совокупностей, хотя существует также и одновыборочная модификация этого метода. В этом разделе мы продемонстрируем, как можно реализовать в R статистические тесты, основанные на этом критерии.

Начать, пожалуй, следует с математических допущений, на которых основан критерий Стьюдента. Основных таких допущений, как известно, два:

- сравниваемые выборки должны происходить из нормально распределенных совокупностей;
- дисперсии сравниваемых генеральных совокупностей должны быть равны.

Кроме того, в своей исходной форме,  $t$ -критерий предполагает независимость сравниваемых выборок.

Проверка указанных требований применительно к анализируемым данным должна всегда предшествовать формальному статистическому анализу, в котором задействован критерий Стьюдента (к сожалению, многие исследователи забывают об этом). Методы проверки одного из этих предположений мы рассмотрели в разделе 4.8. Отметим, однако, что условие нормальности распределения данных становится не таким жестким при достаточно больших объемах выборок, а для выборок с разными дисперсиями существует особая модификация  $t$ -критерия (критерий Уэлча; см. ниже). Кроме того, если сам по себе  $t$ -критерий корректно отражает степень различия выборок, но неверно оценивается его статистическая значимость с использованием таблиц стандартного распределения Стьюдента, то для решения этой проблемы и расчета  $p$ -значения, не зависящего от законов распределения, с успехом могут использоваться методы рандомизации и бутстрепа (Шитиков, Розенберг, 2014).

#### **Одновыборочный $t$ -критерий**

Этот вариант критерия Стьюдента служит для проверки нулевой гипотезы о равенстве среднего значения ( $\mu_1$ ) генеральной совокупности, из которой была взята выборка, некоторому априори известному значению ( $\mu_0$ ):  $H_0: \mu_1 = \mu_0$ .

В общем виде проверка (или, иными словами, "тестирование") этой гипотезы выполняется при помощи  $t$ -критерия, который рассчитывается как отношение разницы между выборочным средним и известным значением к стандартной ошибке выборочного среднего:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}}$$

Рассчитанное значение критерия мы можем далее интерпретировать следующим образом, исходя из свойств  $t$ -распределения: если это значение попадает в так называемую *область отклонения* нулевой гипотезы, то мы вправе отвергнуть проверяемую нулевую гипотезу. Область отклонения нулевой гипотезы для критерия Стьюдента определяется заранее принятым уровнем значимости (например,  $\alpha = 0.05$ ) и числом степеней свободы.

Эквивалентным подходом к интерпретации результатов теста будет следующий: если допустить, что нулевая гипотеза верна, то мы можем рассчитать, насколько велика *условная вероятность* получить  $t$ -критерий, равный или превышающий то реальное

значение, которое мы рассчитали по имеющимся выборочным данным. Если эта вероятность оказывается меньше, чем заранее принятый уровень значимости (например,  $\alpha < 0.05$ ), мы вправе отклонить проверяемую нулевую гипотезу. Именно такой подход сегодня используется чаще всего: исследователи приводят в своих работах  $p$ -значение (т.е. достигнутый уровень значимости), которое легко рассчитывается при помощи статистических программ. Рассмотрим, как это можно сделать в системе R.

Предположим, у нас имеются данные по суточному потреблению энергии, поступающей с пищей (кДж/сутки), для 11 женщин: пример заимствован из книги ([Altman, 1981](#)):

```
d.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515,
             6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
```

Среднее значение для этих 11 наблюдений составляет:

```
mean(d.intake)
[1] 6753.6
```

Зададимся вопросом: отличается ли это выборочное среднее значение от установленной нормы в 7725 кДж/сутки? Разница между нашим выборочным значением и этим нормативом довольно прилична:  $7725 - 6753.6 = 971.4$ . Но насколько эта разница статистически значима с учетом уровня вариации приведенных выше 11 значений? Ответить на этот вопрос поможет одновыборочный  $t$ -тест. Как и другие варианты  $t$ -теста, одновыборочный тест Стьюдента выполняется в R при помощи функции `t.test()`:

```
t.test(d.intake, mu = 7725)
      One Sample t-test
data:  d.intake
t = -2.8208, df = 10, p-value = 0.01814
alternative hypothesis: true mean is not equal to 7725
95 percent confidence interval:
 5986.348 7520.925
sample estimates:
mean of x
 6753.636
```

Видим, что для имеющихся выборочных данных  $t$ -критерий составляет  $-2.821$  при 10 степенях свободы ( $df$ ). Вероятность получить такое (либо большее) значение  $t$  при условии, что проверяемая нулевая гипотеза верна, оказалась весьма мала:  $p$ -value =  $0.01814$  (во всяком случае, это меньше 5%). Следовательно, по правилу, представленному выше, мы можем отклонить проверяемую нулевую гипотезу о равенстве выборочного среднего значения нормативу и принять альтернативную гипотезу (`alternative hypothesis: true mean is not equal to 7725`). Принимая это предположение, мы рискуем ошибиться с вероятностью менее 5%.

Помимо  $t$ -критерия, числа степеней свободы,  $p$ -значения и выборочного среднего (`sample estimates: mean of x`), программа рассчитала также 95%-ный доверительный интервал (`95 percent confidence interval`) для истинной разницы между выборочным средним значением суточного потребления энергии и нормативом. Если бы мы повторили аналогичный тест много раз для разных групп из 11 женщин, то в 95% случаев эта разница оказалась бы в диапазоне от 5986.3 до 7520.9 кДж/сутки.

### Сравнение двух независимых выборок

При сравнении двух выборок проверяемая нулевая гипотеза состоит в том, что обе эти выборки происходят из нормально распределенных генеральных совокупностей с одинаковыми средними значениями:  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ . Поскольку эти генеральные средние мы оцениваем при помощи выборочных средних значений, формула  $t$ -критерия приобретает вид

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}.$$

Поскольку на практике зачастую нет оснований предполагать, что выборки происходят из генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями, обычно используют формулу критерия Стьюдента с так называемой *поправкой Уэлча*:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Если  $H_0$  верна, то значение критерия является случайным числом из  $t$ -распределения с  $(n_1 + n_2 - 2)$  степенями свободы и ее интерпретация выполняется точно так же, как и в случае с одной выборкой (см. выше).

Рассмотрим пример о суточном расходе энергии (expend) у худощавых женщин (lean) и женщин с избыточным весом (obese), приведенный в книге П. Дальгаарда (Dalgaard, 2008). Данные из этого примера (подробнее см. ?energy) входят в состав пакета ISwR, сопровождающего эту книгу:

```
library(ISwR)
data(energy)
attach(energy)
head(energy)
  expend stature
1     9.21  obese
2     7.53   lean
3     7.48   lean
4     8.08   lean
5     8.09   lean
6    10.15   lean
```

Соответствующие средние значения потребления энергии в рассматриваемых группах пациенток можно найти с использованием знакомой нам функции `tapply()`:

```
tapply(expend, stature, mean)
lean obese
8.07 10.30
```

Вопрос заключается в том, различаются ли эти средние значения статистически? Проверим гипотезу об отсутствии разницы при помощи  $t$ -теста:

```
t.test(expend ~ stature)
      Welch Two Sample t-test
data:  expend by stature
t = -3.8555, df = 15.919, p-value = 0.001411
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-3.459167 -1.004081
```

```
sample estimates:
mean in group lean mean in group obese
      8.066154      10.297778
```

Обратите внимание на использование знака  $\sim$  в вызове функции `t.test()`. Это стандартный для R способ записи *формул*, описывающих связь между переменными. В нашем случае выражение `expend ~ stature` можно расшифровать как "зависимость суточного потребления энергии (`expend`) от статуса пациентки (`stature`)".

Согласно величине полученного  $p$ -значения ( $p\text{-value} = 0.001411$ ), средний уровень потребления энергии у женщин из рассматриваемых весовых групп статистически значимо различается. Отвергая нулевую гипотезу о равенстве этих средних значений, мы рискуем ошибиться с вероятностью лишь около 0.15%. При этом истинная разница между средними значениями с вероятностью 95% находится в диапазоне от -3.5 до -1.0 (см. 95 percent confidence interval).

Следует подчеркнуть, что при выполнении двухвыборочного  $t$ -теста функция R по умолчанию принимает, что дисперсии сравниваемых совокупностей *не равны*, и, как следствие, выполняет  $t$ -тест в модификации Уэлча. Мы можем изменить такое поведение программы, воспользовавшись аргументом `var.equal = TRUE`: (от *variance* – дисперсия, и *equal* – равный):

```
t.test(expend ~ stature, var.equal = TRUE)
      Two Sample t-test
data:  expend by stature
t = -3.9456, df = 20, p-value = 0.000799
alternative hypothesis: true difference in means is not equal
to 0
95 percent confidence interval:
 -3.411451 -1.051796
sample estimates:
mean in group lean mean in group obese
      8.066154      10.297778
```

$P$ -значение стало еще меньше, и мы так же, как и после теста в модификации Уэлча, можем сделать вывод о наличии существенной разницы групповых средних. Однако такое совпадение выводов будет иметь место не всегда и, следовательно, на разницу между групповыми дисперсиями (или ее отсутствие) следует обращать серьезное внимание при выборе и интерпретации того или иного варианта  $t$ -теста.

### **Сравнение двух зависимых выборок**

*Зависимыми*, или *парными*, являются две выборки, содержащие результаты измерений какого-либо количественного признака, выполненных на одних и тех же объектах. Во многих исследованиях определенный отклик измеряется у одних и тех же объектов *до и после* экспериментального воздействия. При такой схеме эксперимента исследователь более точно оценивает эффект воздействия именно потому, что прослеживает его фактически у каждого уникального объекта.

Нас интересуют свойства выборки, составленной из разностей значений признака у одних и тех же объектов, а точнее – "истинная средняя разность" как результат экспериментального воздействия (обозначим его  $\delta$ ). Если верна нулевая гипотеза  $H_0: \delta = 0$ , утверждающая, что средняя разность  $\delta$  между парами реализаций случайных величин статистически значимо не отличается от нуля, то нет оснований предполагать, что эффект воздействия имеет место. Тогда формула для *парного критерия Стьюдента* примет вид:

$$t = \frac{\bar{d}}{s\sqrt{n}}; s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_1^n (d_i - \bar{d})^2}; d_i = x_{2i} - x_{1i}.$$

В книге П. Дальгаарда (Dalgaard, 2008) имеется другой пример о суточном потреблении энергии, измеренном уже у *одних и тех же* 11 женщин до и после периода менструаций:

```
data(intake) # из пакета ISwR
attach(intake)
head(intake)
  pre post
1  5260 3910
2  5470 4220
3  5640 3885
4  6180 5160
5  6390 5645
```

Индивидуальные разности потребления энергии у этих женщин составляют:

```
post - pre
[1] -1350 -1250 -1755 -1020  -745 -1835 -1540 -1540
[9]  -725 -1330 -1435
```

Усреднив эти индивидуальные разности, получим

```
mean(post - pre)
[1] -1320.5
```

Задача заключается в том, чтобы оценить, насколько статистически значимо эта средняя разность отличается от нуля. Применим парный критерий Стьюдента (обратите внимание на использование аргумента `paired = TRUE`):

```
t.test(pre, post, paired = TRUE)
  Paired t-test
data:  pre and post
t = 11.9414, df = 10, p-value = 3.059e-07
alternative hypothesis: true difference in means is not equal
to 0
95 percent confidence interval:
 1074.072 1566.838
sample estimates:
mean of the differences
      1320.455
```

Как видим, рассчитанное программой *p*-значение оказалось намного меньше 0.05, что позволяет нам сделать заключение о наличии существенной разницы в потреблении энергии у исследованных женщин до и после менструации. Истинная величина эффекта (в абсолютном выражении) с вероятностью 95% находится в интервале от 1074.1 до 1566.8 кДж/сутки.

Приведенные выше примеры охватывают наиболее типичные случаи применения критерия Стьюдента. За рамками этого раздела остаются так называемые *односторонние*



варианты  $t$ -теста, когда проверяемая нулевая гипотеза заключается в том, что одно из сравниваемых средних значений больше (или меньше) другого. Однако можно отметить, что односторонний вариант  $t$ -теста легко реализуется при помощи функции `t.test()` в сочетании с аргументом `alternative`, который может принимать одно из трех значений - "two.sided" ("двухсторонний"; выбирается программой по умолчанию), "greater" ("больше") или "less" ("меньше").

## 5.2. Использование рангового критерия Уилкоксона-Манна-Уитни

Как описано выше, одно из важных условий корректного применения критерия Стьюдента состоит в том, что анализируемые выборки должны принадлежать нормально распределенным генеральным совокупностям. В случаях, когда это условие не выполняется, вместо критерия Стьюдента следует использовать его непараметрический аналог – *критерий Уилкоксона (Wilcoxon rank test)*. Здесь необходимо сразу пояснить, что создатели системы R под названием "критерий Уилкоксона" (или "тест Уилкоксона") объединяют как метод, предложенный собственно Ф. Уилкоксоном (*Wilcoxon*) в 1945 г., так и опубликованный несколько позднее (1947 г.) метод Манна-Уитни. Первый из этих методов обычно используется для сравнения двух парных выборок, тогда как второй предназначен для сравнения двух независимых выборок. Ниже мы не будем разграничивать эти методы, придерживаясь подхода, принятого в системе R.

### Одновыборочный критерий Уилкоксона

Этот вариант критерия (*Wilcoxon signed rank test*) служит для проверки нулевой гипотезы о том, что анализируемая выборка происходит из симметрично распределенной генеральной совокупности с центром в точке  $\mu_0$ . Алгоритм метода заключается в следующем:

- $\mu_0$  отнимают от каждого выборочного значения;
- получившиеся величины ранжируют по возрастанию, игнорируя знак;
- ранговые номера со знаком + суммируют, получая величину  $V$ ;
- критерий  $V$  сравнивают с критическим значением для заданного уровня значимости и числа степеней свободы.

Альтернативный вариант интерпретации результатов теста заключается в нахождении условной вероятности случайным образом получить значение критерия, равное или превышающее эмпирическую величину  $V$ , при условии истинности нулевой гипотезы.

Ниже при описании теста Уилкоксона мы будем использовать примеры, рассмотренные в предыдущем разделе для иллюстрации  $t$ -теста Стьюдента и представленные в пакете ISwR. Это позволит нам сравнить результаты, получаемые при помощи обоих методов. В частности, обратимся к данным о суточном потреблении энергии у 11 женщин из книги (Altman, 1981) и выясним, имеются ли отличия от нормативного значения 7725 кДж/сутки:

```
d.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515,  
             6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
```

Для выполнения теста Уилкоксона в системе R используется функция `wilcox.test()`:

```
wilcox.test(d.intake, mu = 7725)  
Wilcoxon signed rank test with continuity correction  
data: d.intake
```

```
V = 8, p-value = 0.0293
alternative hypothesis: true location is not equal to 7725
Warning message:
In wilcox.test.default(d.intake, mu = 7725) :
  cannot compute exact p-value with ties
```

Видим, что рассчитанное значение критерия  $V = 8$ . Вероятность случайно получить такое (или превышающее его) значение при условии, что нулевая гипотеза верна, не превышает 0.05 ( $p$ -value = 0.0293). Это позволяет нам отклонить нулевую гипотезу о том, что суточное потребление энергии у обследованных 11 женщин не отличается от принятой нормы. Обратите внимание на выданное программой предупреждение о том, что полученное значение вероятности  $p$  не является точным из-за наличия в данных значений с одинаковыми рангами (Warning message... cannot compute exact p-value with ties). Проблема расчета точных  $p$ -значений при наличии повторяющихся значений в данных характерна для статистических методов, основанных на рангах, и критерий Уилкоксона здесь, увы, не исключение (хотя можно упомянуть функцию `wilcox_test()` из пакета `coin`). При наличии повторяющихся наблюдений  $p$ -значение рассчитывается путем аппроксимации распределения критерия Уилкоксона нормальным распределением (см. справочный файл по функции `?wilcox.test`).

### Сравнение двух независимых выборок

Если сравниваемые выборки являются независимыми (аргумент `paired = FALSE`), то мы имеем дело с критерием Уилкоксона, который в англоязычной литературе называют *Wilcoxon rank sum test* (как было отмечено выше, этот метод называют также методом Манна-Уитни). Проверяемая с его помощью нулевая гипотеза состоит в том, что центры распределений, из которых происходят сравниваемые выборки, смещены относительно друг друга на величину  $\mu$  (например,  $\mu = 0$ ). Алгоритм метода состоит в следующем:

- все имеющиеся значения ранжируют, игнорируя их знак;
- ранги значений, принадлежащих к первой группе, суммируют, получая величину  $W$ ;
- $W$  сравнивают со значением, которое можно было бы ожидать при верной нулевой гипотезе и имеющемся числе степеней свободы.

Альтернативный подход – находят вероятность случайным образом получить значение  $W$ , равное или превышающее наблюдаемое значение (при условии истинности нулевой гипотезы).

Используем рассмотренный ранее пример о суточном расходе энергии (`expend`) у худощавых женщин (`lean`) и женщин с избыточным весом (`obese`):

```
data(energy) # из пакета ISwR
attach(energy)
str(energy)
'data.frame': 22 obs. of 2 variables:
 $ expend : num  9.21 7.53 7.48 8.08 8.09 ...
 $ stature: Factor w/ 2 levels "lean","obese": 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
```

Проверим гипотезу об отсутствии разницы в потреблении энергии у женщин из этих двух групп при помощи критерия Уилкоксона для независимых выборок:

```
wilcox.test(expend ~ stature, paired = FALSE)
Wilcoxon rank sum test with continuity correction
data:  expend by stature
```

```

W = 12, p-value = 0.002122
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
Warning message:
In wilcox.test.default(x = c(7.53, 7.48, 8.08, 8.09, 10.15, 8.4, :
  cannot compute exact p-value with ties

```

Согласно полученному  $p$ -значению ( $p$ -value = 0.002122), потребление энергии у женщин из рассматриваемых весовых групп статистически значимо различается. Отвергая нулевую гипотезу о равенстве потребляемой энергии, мы рискуем ошибиться с вероятностью лишь около 0.2%.

### Сравнение двух зависимых выборок

Понятие "зависимые", или "связные выборки" обсуждалось ранее в разделе, посвященном критерию Стьюдента. Сейчас для нас более важен тот факт, что обе сравниваемые выборки происходят из ненормально распределенных генеральных совокупностей. Это дает нам весомые основания выполнить сравнение при помощи парного рангового критерия Уилкоксона.

Как и в парном тесте Стьюдента, находят разницу между всеми имеющимися парными выборочными наблюдениями с целью проверить нулевую гипотезу о том, что медиана полученных разностей равна нулю (либо какому-либо другому, отличному от нуля значению). Здесь (псевдо)-медианой распределения  $F$  называют медиану распределения  $(u + v) / 2$ , где  $u$  и  $v$  являются независимыми переменными, каждая из которых имеет распределение  $F$ . Если распределение  $F$  симметрично, псевдомедиана и медиана совпадают (подробнее см. ?wilcox.test).

Используем рассмотренный ранее пример о суточном потреблении энергии, измеренном у *одних и тех же* 11 женщин до и после периода менструаций:

```

data(intake) # из пакета ISwR
attach(intake)

```

Сравнить два периода по потреблению энергии при помощи критерия Уилкоксона можно следующим образом (обратите внимание на использование аргумента `paired = TRUE`):

```

wilcox.test(pre, post, paired = TRUE)
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data: pre and post
V = 66, p-value = 0.00384
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
Warning message:
In wilcox.test.default(pre, post, paired = T) :
  cannot compute exact p-value with ties

```

Как видим, рассчитанное программой  $p$ -значение оказалось меньше 0.05, что позволяет нам сделать заключение о наличии статистически значимой разницы в потреблении энергии у исследованных женщин до и после менструации. (Для сравнения:  $p$ -значение, полученное при помощи критерия Стьюдента было  $\ll 0.001$ ). Мы можем оценить доверительный интервал, в котором с определенной вероятностью находится истинная величина эффекта, воспользовавшись аргументом `conf.int` (вероятность задается при помощи аргумента `conf.level`; по умолчанию рассчитывается 95%-ный доверительный интервал):

```

wilcox.test(pre, post, paired = TRUE, conf.int = TRUE)
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data:  pre and post
V = 66, p-value = 0.00384
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 1037.5 1582.5
sample estimates:
(pseudo)median
 1341.332
Warning messages:
1: In wilcox.test.default(pre, post, paired = TRUE, conf.int = TRUE):
  cannot compute exact p-value with ties
2: In wilcox.test.default(pre, post, paired = TRUE, conf.int = TRUE):
  cannot compute exact confidence interval with ties

```

Видим, что истинная разность уровней потребленной энергии с вероятностью 95% находится в интервале от 1037.5 до 1581.5 кДж/сутки. Опять-таки, из-за наличия повторяющихся наблюдений, расчет точных доверительных пределов оказался невозможным (см. пункт 2 в списке предупреждений Warning messages). Псевдомедиана ((pseudo)median) индивидуальных разностей между парными значениями потребления энергии была оценена в 1341.3 кДж/сутки.

Важно отметить одно из ограничений критерия Уилкоксона для двух выборок (зависимых или независимых): если общее количество наблюдений не превышает 6, то обнаружить разницу между выборками с уровнем ошибки в 5% просто невозможно (Dalggaard, 2008).

### 5.3. Рандомизация, бутстреп и оценка статистической мощности (на примере двухвыборочного t-критерия)

Обычно процесс проверки статистической гипотезы включает следующие шаги:

1. Формулировка собственно проверяемой нулевой гипотезы. Например, в случае двухвыборочного критерия Стьюдента она состоит в том, что обе выборки происходят из нормально распределенной генеральной совокупности с некоторым средним значением.
2. Выбор подходящего статистического критерия для проверки нулевой гипотезы и вычисление значения этого критерия по имеющимся выборочным данным.
3. Определение критического значения критерия, исходя из желаемого уровня статистической значимости  $\alpha$  и свойств теоретического распределения этого критерия.
4. Проверка того, превышает ли рассчитанный по выборочным данным критерий заданное критическое значение. Если такое превышение *не наблюдается*, делают вывод о том, что нулевая гипотеза *верна*.

Современные компьютерно-интенсивные технологии позволяют обобщить и углубить смысл этой процедуры. В законченном варианте проблема заключается в том, чтобы получить *три* эмпирические функции распределения статистического критерия: а) при условии справедливости нулевой гипотезы  $H_0$ ; б) для имеющихся эмпирических данных, и, наконец, в) при условии справедливости альтернативной гипотезы  $H_1$ .

Получить эмпирическое распределение тестового критерия в условиях справедливости нулевой гипотезы – наиболее простая задача и решается с использованием рандомизации. Для этого объединяем обе сравниваемые выборки, случайно перемешиваем наблюдения между собой (другие термины – "перестановка" или "пермутация", от англ. *permutation*), снова создаем две группы и вычисляем значение нашего критерия. Эту процедуру можно повторить многократно и получить частотное распределение критерия

$p_0(t^*)$  – например, распределение разности групповых средних  $t = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ .

Это распределение  $p_0(t^*)$  будет иметь место *при справедливости нулевой гипотезы*  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ , поскольку все возможные комбинации элементов в сравниваемых группах будут равновероятны. Тогда, если величина  $t_{\text{obs}}$  для экспериментальных данных является типичным значением из распределения рандомизации  $p_0(t^*)$ , то нет оснований отклонять  $H_0$ . Если же это не так и  $t_{\text{obs}}$  оказывается в критической области критерия, то нулевая гипотеза отвергается на некотором уровне значимости и (косвенно) альтернативная гипотеза считается более вероятной.

Здесь уровень значимости для  $t_{\text{obs}}$  – процент от значений из распределения рандомизации  $p_0(t^*)$ , которые равны или превышают  $t_{\text{obs}}$ . Это соотношение может интерпретироваться таким же образом, как и для обычных критериев значимости: если число превышений  $t_{\text{obs}}$  менее 5%, то это является достаточно весомым свидетельством в пользу того, что нулевая гипотеза не верна, а если процент превышений оказывается меньше 1%, то значимость отклонения  $H_0$  становится ещё более убедительной.

Получить эмпирическое распределение тестового критерия  $T_{\text{obs}}$  для *имеющихся эмпирических данных* – также довольно простая задача с использованием описанного ранее бутстреп-метода (см. раздел 2.7). Более того, мы легко можем оценить доверительные интервалы для  $t_{\text{obs}}$  при заданном уровне надежности и, если они не включают 0, то нулевая гипотеза отклоняется.

Покажем, как это можно выполнить в R на том же примере (expend) о суточном расходе энергии у худощавых и упитанных женщин:

```
# функция, выполняющая пермутацию t-критерия заданное число раз
simP <- function(x, group, permutations=5000) {
  n <- length(x)
  replicate(permutations, {
    xr <- sample(x, n)
    t.test(xr ~ group)$statistic
  })
}
# функция, выполняющая бутстреп t-критерия заданное число раз
bootP <- function(x, group, boots=5000) {
  n <- length(x)
  replicate(boots, {
    ind <- sample.int(n, n, replace=T)
    t.test(x[ind] ~ group[ind])$statistic
  })
}
# Выполнение расчетов:
data(energy, package="ISwR")
attach(energy)
t.emp <- t.test(expend ~ stature)$statistic
t.perm <- simP(expend, stature, 1000)
t.boot <- bootP(expend, stature, 1000)

mm <- range(c(t.emp, t.perm, t.boot))
mm # размах значений t:
[1] -17.691141  4.351739

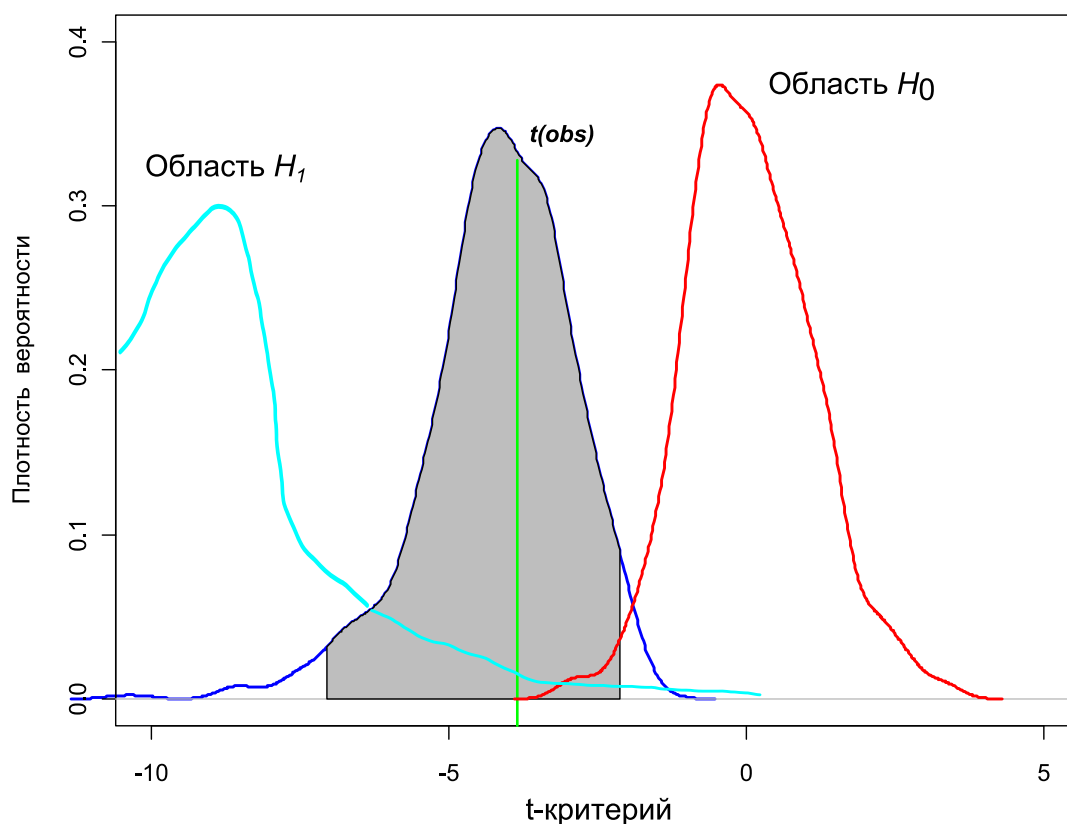
# псевдо-P:
p <- (sum(abs(t.perm) - abs(t.emp) >= 0) + 1) / (1000 + 1)
[1] 0.002997003
```

```

# Доверительный интервал:
CI <- quantile(t.boot, probs = c(0.025, 0.975))
      2.5%      97.5%
-7.102815 -2.126967

dens <- density(t.boot)
plot(dens,col = "blue", lwd = 2, xlim=c(-10,5), ylim=c(0,0.4))
# Заливаем полигон доверительной области
x1 <- min(which(dens$x >= CI[2]))
x2 <- max(which(dens$x < CI[1]))
with(dens, polygon(x=c(x[c(x1,x1:x2,x2)]),
                    y= c(0, y[x1:x2], 0), col="gray"))
abline(v=t.emp,col = "green", lwd = 2 )
lines(density(t.perm),col = "red", lwd = 2)

```



Функция распределения  $p_0(t^*)$ , полученная при выполнении рандомизации (на рисунке показана красным цветом), как и положено, имеет среднее значение, близкое к 0. Обнаружено, что из 1000 итераций только в двух случаях  $t$ -критерий превысил эмпирическое значение  $t_{\text{obs}}$  (сравнение проводилось по абсолютной величине, поскольку проверялась двухсторонняя гипотеза). Следовательно, риск  $\alpha$  совершить ошибку первого рода, т.е. *отклонить верную* нулевую гипотезу, равен достигнутому уровню значимости:  $P = (2 + 1) / (1000 + 1) = 0.003$ , где 1 добавлена, имея в виду также исходные выборки. Эта оценка несколько выше значения, рассчитанного выше с использованием рангового критерия ( $p = 0.0021$ ), но меньше значения, рассчитанного параметрическим методом ( $p = 0.014$ ).

Несколько шире по сравнению с параметрическими оценками оказался 95%-й доверительный интервал для  $t_{\text{obs}}$ , найденный бутстреп-методом (область, залитая серым цветом). Обратим также внимание на его несимметричность, связанную с асимметрией кривой эмпирического распределения (показана синим цветом).



Значительно более сложной задачей является нахождение по эмпирическим данным функции  $p_1(t^*)$  распределения  $t$ -критерия *при справедливой альтернативной гипотезе*  $H_1$ . Такая гипотетическая кривая для нашего примера должна была пройти на представленном графике где-то левее остальных кривых (условно показана голубым цветом), а сегмент площади под ней, ограниченный слева  $t_{obs}$ , определит риск  $\beta$  ошибки второго рода, т.е. *принятие неверной* нулевой гипотезы.

Число  $\chi = (1 - \beta)$ , равное вероятности отвержения неверной нулевой гипотезы  $H_0$ , называется *статистической мощностью* критерия. Эта вероятность соответствует

площади фигуры  $\chi = \int_{x=t_{obs}}^{\infty} p_1(t)dt$ , образованной графиком функции  $p_1(t^*)$  и лежащей справа

от точки  $t_{obs}$ . Мощность критерия  $\chi$  является одной из количественных оценок статистической *мощности исследования* (statistical power), отражающей *чувствительность* диагностического теста, т.е. вероятность того, что в эксперименте будет найдено статистически достоверное различие, когда это различие действительно существует.

Можно показать, что при любом фиксированном объеме выборки  $n$  какая-нибудь перестройка критерия в направлении уменьшения уровня значимости  $\alpha$  связана с одновременным уменьшением значений функции мощности  $\chi$ , так как при этом расширяется область отклонения альтернативы. И наоборот: любые попытки увеличения мощности критерия при одних и тех же  $n$  приводят к неизбежному одновременному увеличению его уровня значимости ([Айвазян с соавт., 1983](#)).

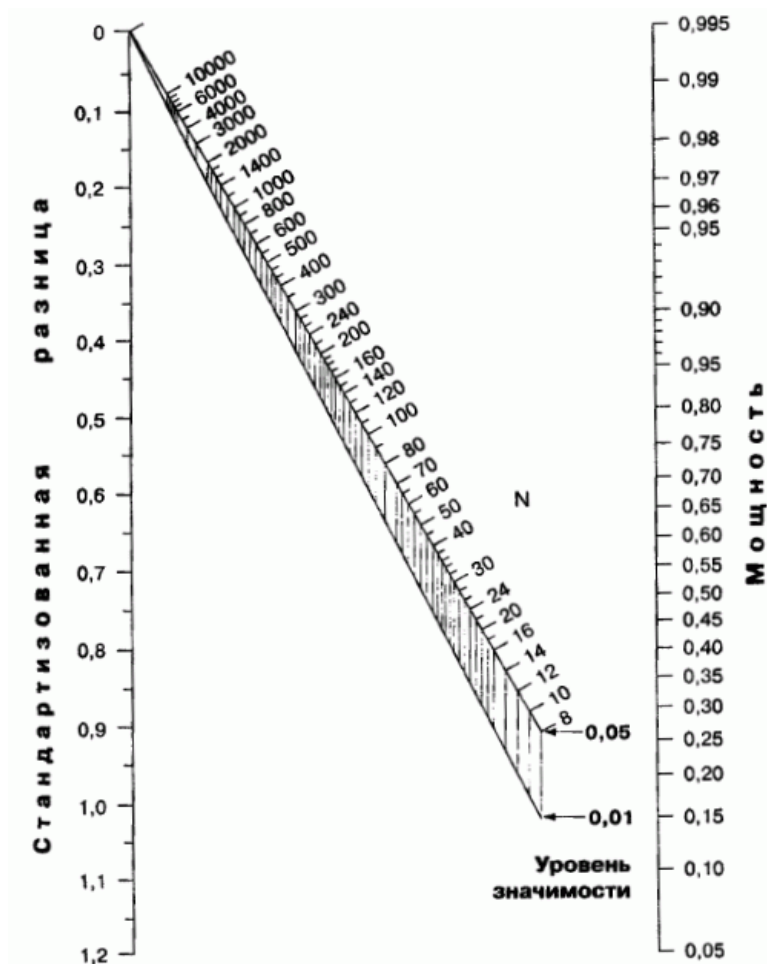
При увеличении объема выборки  $n$  становится выше мощность теста: при достаточно больших" выборках даже небольшие различия окажутся статистически значимыми. И наоборот – при малых выборках даже большие различия выявить становится весьма трудно. Казалось бы, здесь налицо "тупиковая" ситуация: при малых выборках вывод статистически ненадежен, а при слишком больших – однозначно предопределен и неизменно приводит к отрицательному результату (т. е. к отвержению проверяемой гипотезы).

Чтобы избежать эффектов "слишком малой" и "слишком большой" выборок, априорное задание обеих характеристик точности критерия (уровня значимости  $\alpha$  и ошибки второго рода  $\beta$ ) необходимо увязывать с объемом имеющихся данных. При малых  $n$ , прежде чем выполнять тест на наличие различий, исследователь должен оценить, будет ли мощность планируемого к применению статистического критерия в данном эксперименте достаточной для их обнаружения. В случае больших выборок полезно смоделировать динамику уменьшения достигнутого уровня значимости  $\alpha$  в зависимости от  $n$  и найти порог обязательного отвержения основной гипотезы.

Статистический *анализ мощности* (Statistical Power Analysis) выполняет исследование взаимосвязи между четырьмя компонентами: а) стандартизированной величиной ожидаемого эффекта  $\delta$ ; б) числом выполняемых измерений  $n$ ; в) задаваемой величиной уровня значимости  $\alpha$ ; г) необходимым соотношением между ошибками первого ( $\alpha$ ) и второго ( $\beta$ ) рода. Математически взаимосвязь между этими величинами в достаточно широком классе случаев может быть представлена приближенной (асимптотической) формулой

$$n(\alpha; \beta; \delta) \approx \frac{(u_{1-\alpha} + u_{1-\beta})^2}{\delta(H_0, H_1)},$$

где:  $u_q$  – квантиль уровня  $q$  стандартного нормального закона распределения;  $\delta(H_0, H_1)$  – величина эффекта или "расстояние" между гипотезами  $H_0$  и  $H_1$ , которое находится на основе распределений  $p_0(t^*)$  и  $p_1(t^*)$ . Если закон распределения статистики критерия неизвестен, то можно воспользоваться одной из номограмм, например, приведенной в книге ([Реброва, 2002](#)) для нахождения необходимого общего объема двух выборок:



В нашем случае "величина эффекта"  $\delta$  или минимальное стандартизованное различие определяется как отношение  $d/s$ , где  $d$  – абсолютное значение средней разности между сравниваемыми группами, а  $s$  – известное априори среднее квадратичное отклонение изучаемого показателя у данной категории экспериментальных единиц. На практике обычно (но не всегда) приемлемой считается мощность теста  $\chi$ , равная или превышающая 80% (что соответствует  $\beta$ -риску в 20%). Этот уровень является следствием так называемого "соотношения 1 к 4" (англ. "one-to-four trade-off") между уровнями  $\alpha$ -риска и  $\beta$ -риска: если принять уровень значимости  $\alpha = 0.05$ , тогда  $\beta = 0.05 \times 4 = 0.20$  и мощность критерия составит  $\chi = 1 - 0.20 = 0.80$ .

Приняв во внимание эти закономерности, мы можем заранее (т.е. до проведения исследования) по представленной номограмме определить, например, минимальный размер выборок, нужный для выявления эффекта. Но, разумеется, гораздо удобнее просто подать необходимые исходные данные на вход соответствующей функции среды R.

В качестве примера предположим, что мы планируем проведение эксперимента для установления эффекта влияния температуры воды на индивидуальный вес водного жука. В эксперименте будут задействованы два температурных режима и, соответственно, для выявления эффекта воздействия мы будем проверять, сравнивая средние значения веса жуков из двух экспериментальных групп при помощи двустороннего критерия Стьюдента. Двусторонний вариант выбран потому, что до проведения эксперимента мы не знаем, каков именно эффект вызовет повышение температуры – повышение или понижение веса жуков. Проверяемая в этом случае нулевая гипотеза состоит в том, что температура не оказывает никакого влияния на вес жуков.

Допустим, что минимальная разница в среднем весе жуков, которую мы хотим выявить в ходе эксперимента, составляет 3 мг. Если задаться уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ , желаемая мощность теста из соотношения 1:4 будет составлять  $\chi = 80\%$ . Вопрос



заключается в том, сколько особей мы должны задействовать в эксперименте для того, чтобы перечисленные условия были выполнены.

Как следует из приведенного выше списка, для определения оптимального размера выборки нам необходимо знать стандартное отклонение веса изучаемого вида жуков. К сожалению, до проведения эксперимента мы не можем оценить этот параметр. Вариантов решения этой проблемы два: *а)* основываясь на своем экспертном заключении, исследователь может дать *примерную* оценку стандартного отклонения; *б)* можно попытаться найти соответствующие *литературные данные*. Предположим, что мы воспользовались вторым вариантом и выяснили, что стандартное отклонение массы тела для изучаемого вида жуков составляет 1.8 мг.

Теперь у нас есть вся необходимая информация для расчета минимального объема выборки. В среде R соответствующие вычисления можно выполнить при помощи базовой функции `power.t.test()`:

```
power.t.test(delta = 3.0,
             sd = 1.8,
             sig.level = 0.05,
             power = 0.8)
Two-sample t test power calculation
  n = 6.76095
  delta = 3
  sd = 1.8
  sig.level = 0.05
  power = 0.8
  alternative = two.sided
NOTE: n is number in *each* group
```

В приведенной выше команде `delta` – минимальная величина эффекта, которую мы хотим обнаружить в ходе эксперимента; `sd` – стандартное отклонение веса жуков (по литературным данным); `sig.level` – уровень значимости, а `power` – мощность *t*-критерия. В результатах вычислений программа еще раз перечисляет имеющиеся исходные параметры, а также сообщает `n` – рассчитанный минимальный размер *каждой* выборки для обнаружения желаемого эффекта при этих параметрах (округлив, получаем 7 жуков в каждой экспериментальной группе). Кроме того, программа напоминает нам, что вычисления были выполнены для двухстороннего критерия Стьюдента (`alternative = two.sided`) и что параметр `n` соответствует числу наблюдений в каждой группе (`n is number in *each* group`).

Зная число наблюдений, величину эффекта, стандартное отклонение и уровень значимости мы можем рассчитать мощность теста. Например:

```
power.t.test(n = 15,
             delta = 3.0,
             sd = 1.8,
             sig.level = 0.05)
Two-sample t test power calculation
  n = 15
  delta = 3
  sd = 1.8
  sig.level = 0.05
  power = 0.9927162
  alternative = two.sided
NOTE: n is number in *each* group
```

Как видим, при  $n = 15$ ,  $\delta = 3$ ,  $sd = 1.8$  и  $sig.level = 0.05$  мощность критерия составит 99%.

При необходимости выполнить вычисления для парного критерия Стьюдента, в вызове функции `power.t.test()` достаточно добавить аргумент `type = "paired"`:

```
power.t.test(delta = 3.0,
             sd = 1.8,
             sig.level = 0.05,
             power = 0.8,
             type = "paired")
Paired t test power calculation
n = 5.04919
delta = 3
sd = 1.8
sig.level = 0.05
power = 0.8
alternative = two.sided
NOTE: n is number of *pairs*, sd is std.dev. of *differences*
within pairs
```

Видно, что в случае с зависимыми выборками минимальный размер выборок, необходимый для выявления заданной величины эффекта, несколько меньше, чем в случае с независимыми выборками (в рассматриваемом примере – 5 против 7 жуков в каждой группе).

Наконец, при необходимости выполнить одновыборочный  $t$ -тест аргументу `type` следует присвоить значение `"one.sample"`:

```
power.t.test(delta = 3.0,
             sd = 1.8,
             sig.level = 0.05,
             power = 0.8,
             type = "one.sample")
One-sample t test power calculation
n = 5.04919
delta = 3
sd = 1.8
sig.level = 0.05
power = 0.8
alternative = two.sided
```

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что если в ходе выполнения  $t$ -теста проверяемая нулевая гипотеза не отклонена, это не значит, что эффект в действительности отсутствует. Возможно, объемы выборок были просто недостаточно велики для этого. Поэтому рекомендуется приводить в отчетах (статьях, презентациях, и т.п.) не только результаты статистического теста как такового, но еще и информацию о его мощности (оцененную *до проведения* исследования). Это позволит читателям отчета сформировать более четкое представление о том, насколько полученные данные поддерживают сделанные по результатам анализа выводы.

## 5.4. Гипотеза об однородности дисперсий

В общем виде ***F-критерий Фишера***, или *F*-тест, используется для сравнения дисперсий двух нормально распределенных генеральных совокупностей, т.е. проверятся следующая нулевая гипотеза:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Генеральные дисперсии оцениваются на основе выборок, и сам критерий непосредственно рассчитывается как отношение одной выборочной дисперсии к другой:  $F = s_1^2 / s_2^2$ . На практике в числитель приведенной формулы обычно помещают бóльшую дисперсию, а в знаменатель – меньшую.

Критерий Фишера можно использовать для сравнения и более, чем двух совокупностей (как, например, в дисперсионном анализе). В таких случаях критерий рассчитывается как отношение *межгрупповой дисперсии* к *внутригрупповой дисперсии*. Кроме того, *F*-критерий используется при оценке значимости линейной регрессии (подробнее см. главу 7).

Очевидно, что чем ближе рассчитанное значение *F* к 1, тем больше у нас оснований сделать заключение о справедливости приведенной выше нулевой гипотезы. И наоборот – чем больше это значение, тем больше имеется оснований отклонить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий. *Критическое значение F*, начиная с которого нулевую гипотезу отклоняют, определяются уровнем значимости (например,  $\alpha = 0.05$ ) и числом степеней свободы для каждой из сравниваемых дисперсий. Кроме того, справедливость нулевой гипотезы можно выразить при помощи *p*-значения для *F*-критерия, т.е. вероятности того, что случайная величина с соответствующим распределением Фишера окажется равной или превысит значение *F*, рассчитанное по выборочным данным.

При выполнении *F*-теста и интерпретации получаемых с его помощью результатов важно помнить о следующих ограничениях (например, [Zar, 2010](#)):

- сравниваемые совокупности должны быть нормально распределены;
- сравниваемые совокупности должны быть статистически независимыми.

Для выполнения теста Фишера в R имеется функция `var.test()` (от *variance* – дисперсия, и *test* – тест). Используем рассмотренный ранее пример о суточном потреблении энергии у худощавых женщин (`lean`) и женщин с избыточным весом (`obese`):

```
data(energy, package="ISwR")
attach(energy)
colnames(energy)
  expend stature
```

Дисперсии в этих двух весовых группах женщин можно легко сравнить следующим образом:

```
var.test(expend ~ stature)
  F test to compare two variances
data:  expend by stature
F = 0.7844, num df = 12, denom df = 8, p-value = 0.6797
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.1867876 2.7547991
sample estimates:
ratio of variances
 0.784446
```

Как видим, полученное  $p$ -значение значительно превышает 5%-ный уровень значимости, на основании чего мы *не можем* отклонить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий в исследованных совокупностях. Истинное отношение сравниваемых дисперсий с вероятностью 95% находится в интервале от 0.19 до 2.75 (см. 95 percent confidence interval).

Исходя из данного результата, мы, например, вправе были бы использовать вариант  $t$ -критерия Стьюдента для совокупностей с одинаковыми дисперсиями при сравнении среднего потребления энергии у женщин из рассматриваемых весовых групп (подробнее см. раздел 5.1).

### **Проверка однородности дисперсии в нескольких группах**

Решение более общей задачи проверки однородности дисперсии в двух или более группах осуществляется с использованием различных классических и непараметрических тестов: Левене, Бартлетта, Кохрана, Хартли, Флигнера, Ансари-Бредли, Сижела-Тьюки, Муда и др. Подробное исследование распределения используемых при этом статистик и сравнительный анализ мощности критериев выполнили, например, [Лемешко с соавт. \(2013\)](#).

Проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий  $k$  выборок имеет вид  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ , а конкурирующая с ней гипотеза  $H_A: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ , где неравенство выполняется хотя бы для одной пары индексов  $i, j$ .

Статистика Левене (Levene) имеет вид:

$$L = \frac{(n-k) \sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_{i\cdot} - \bar{z}_{\cdot\cdot})^2}{(k-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_{i\cdot})^2},$$

где  $z_{ij} = |x_{ij} - c_i|$ ;  $c_i$  – среднее, усеченное среднее или медиана для  $i$ -й группы;  $n$ ,  $n_i$  – объемы всех данных и  $i$ -й выборки соответственно,  $\cdot$  – символ усреднения по индексу. Считается, что критерий Левене мало чувствителен к отклонениям анализируемых выборок от нормального закона, хотя он же оказывается и менее мощным.

Статистика Бартлетта вычисляется в соответствии с соотношениями:

$$\chi^2 = M \left[ 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - k} \right) \right];$$

$$M = (n - k) \ln \left[ \frac{1}{n - k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2 \right] - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln s_i^2,$$

где  $s_i^2$  – оценка дисперсии в  $i$ -й группе. Тест Бартлетта не зависит от объема выборок, но чувствителен к отклонениям от нормальности распределения.

Критерий Флигнера-Килина (*median-centering Fligner-Killeen test*) не требует предположений о нормальности сравниваемых выборок и оценивает совокупное распределение рангов абсолютных разностей  $z_{ij} = |x_{ij} - c_i|$ , где  $c_i$  – выборочная медиана для  $i$ -й группы. Тестовая статистика Флигнера-Килина (конкретная формула для ее расчетов приведена на [wiki.stat.ucla.edu](http://wiki.stat.ucla.edu)), как и статистика Бартлетта, имеет стандартное  $\chi^2$ -распределение с  $(k - 1)$  степенями свободы.

Рассмотрим реализацию в среде R перечисленных тестов на примере данных, полученных в ходе эксперимента по изучению эффективности шести видов инсектицидных средств (см. разделы 3.2-3.3):

```
data (InsectSprays)
```

Тест Левене можно выполнить при помощи функции `leveneTest()` из пакета `car`.

```
library(car)

leveneTest(count ~ spray, data = InsectSprays)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
  Df F value    Pr(>F)
group 5   3.8214 0.004223 **
  66
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

leveneTest(count ~ spray, data = InsectSprays, center = mean)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = mean)
  Df F value    Pr(>F)
group 5   6.4554 6.104e-05 ***
  66
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Аналогично тесты Бартлетта и Флигнера-Килина выполняются при помощи функций `bartlett.test()` и `fligner.test()` соответственно:

```
bartlett.test(count ~ spray, data = InsectSprays)
Bartlett test of homogeneity of variances
data:  count by spray
Bartlett's K-squared = 25.9598, df = 5, p-value = 9.085e-05

fligner.test(count ~ spray, data = InsectSprays)
Fligner-Killeen test of homogeneity of variances
data:  count by spray
Fligner-Killeen: med chi-squared = 14.4828, df = 5, p-value = 0.01282
```

Все тесты показывают, что нулевая гипотеза о равенстве дисперсий в группах должна быть отклонена, однако оценки значимости  $p$  существенно разнятся в зависимости от того, используется для анализа среднее или медиана (что косвенно свидетельствует о слабом предположении в отношении нормальности распределения исследуемой совокупности).

## 5.5. Введение в дисперсионный анализ

Рассмотренный ранее  $t$ -критерий Стьюдента (равно как и его непараметрические аналоги) предназначен для сравнения исключительно двух совокупностей. Однако часто он неверно используется для попарного сравнения большего количества групп, что приводит к так называемому *эффекту множественных сравнений* (англ. *multiple comparisons*; Гланц, 1999, с. 101-104). Об этом эффекте и о том, как с ним бороться, мы поговорим позднее в главе 6. Здесь же мы опишем принципы *однофакторного дисперсионного анализа*, как раз предназначенного для *одновременного* сравнения средних значений двух и более групп. Принципы дисперсионного анализа (англ. *analysis of variance*, ANOVA) были разработаны в 1920-х гг. сэром Рональдом Эйлером Фишером (англ. Ronald Aylmer Fisher) – «гением, едва ли не в одиночку заложившим основы современной статистики» (Hald, 1998).

Может возникнуть вопрос: почему метод, используемый для сравнения *средних* значений, называется *дисперсионным* анализом? Все дело в том, что при установлении разницы между средними значениями мы в действительности сравниваем дисперсии анализируемых совокупностей. Однако обо всем по порядку...

### Постановка задачи

Рассмотренный ниже пример заимствован из книги (Maindonald, Braun, 2010). Имеются данные о массе кустов томатов (всё растение целиком; `weight`, в кг), которые выращивали в течение 2 месяцев при трех разных экспериментальных условиях (`trt`, от *treatment*) – при поливе водой (`Water`), в среде с добавлением удобрения (`Nutrient`), а также в среде с добавлением удобрения и гербицида 2,4-D (`Nutrient+24D`):

```
# Создадим таблицу с данными:
tomato <-
  data.frame(weight=
    c(1.5, 1.9, 1.3, 1.5, 2.4, 1.5, # water
      1.5, 1.2, 1.2, 2.1, 2.9, 1.6, # nutrient
      1.9, 1.6, 0.8, 1.15, 0.9, 1.6), # nutrient+24D
    trt = rep(c("Water", "Nutrient", "Nutrient+24D"),
      c(6, 6, 6)))
```

Переменная `trt` представляет собой фактор с тремя уровнями. Для более наглядного сравнения экспериментальных условий в последующем, сделаем уровень "Water" базовым (англ. *reference*), т.е. уровнем, с которым R будет сравнивать все остальные уровни. Это можно сделать при помощи функции `relevel()`:

```
tomato$trt <- relevel(tomato$trt, ref = "Water")
```

Подлежащую проверке нулевую гипотезу можно сформулировать так:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3,$$

т.е. все полученные измерения веса растений происходят из одной нормально распределенной генеральной совокупности. Другими словами, нулевая гипотеза утверждает, что в действительности исследованные условия выращивания растений не оказывают никакого влияния на вес последних, а *наблюдаемые различия между групповыми средними несущественны и вызваны влиянием случайных факторов*.

Подчеркнем еще раз, что рассматриваемый пример соответствует случаю *однофакторного* дисперсионного анализа: изучается действие одного фактора – условий выращивания (с тремя уровнями `Water`, `Nutrient` и `Nutrient+24D`) на интересующую нас переменную-отклик (вес растений).

К сожалению, исследователь почти никогда не имеет возможности изучить всю генеральную совокупность. Как же нам тогда узнать, верна ли приведенная выше нулевая гипотеза, располагая только выборочными данными? Мы можем сформулировать этот вопрос иначе: *какова вероятность получить наблюдаемые различия между групповыми средними, извлекая случайные выборки из одной нормально распределенной генеральной совокупности?* Для ответа на этот вопрос нам потребуется статистический критерий, который количественно характеризовал бы величину различий между сравниваемыми группами.

Перед тем, как сконструировать такой критерий, зададимся еще одним вопросом: что заставляет нас думать, что различия между ними неслучайны? Чтобы лучше понять свойства имеющихся данных, визуализируем их при помощи одномерной диаграммы рассеяния:

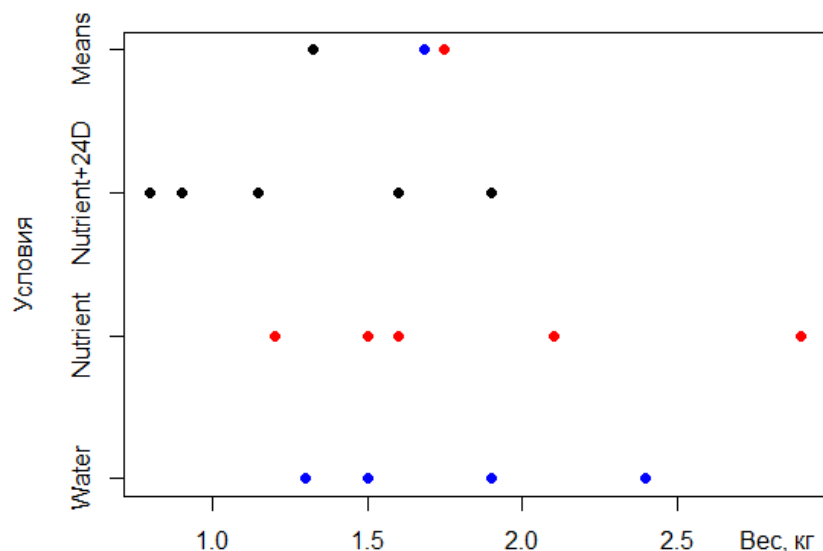
```
attach(tomato)
stripchart(weight ~ trt, xlab = "Вес, кг", ylab = "Условия")
```

Для подтверждения своего визуального впечатления рассчитаем групповые средние

```
(Means <- tapply(weight, trt, mean))
      Water      Nutrient Nutrient+24D
1.683333    1.750000    1.325000
```

и создадим рисунок, где к исходным данным добавлена еще одна группа из точек, соответствующих выборочным средним (Means).

Если сравнить на рисунке разброс значений *внутри* экспериментальных групп с *разбросом трех групповых средних*, видно, что разброс групповых средних в целом меньше, чем разброс значений в экспериментальных группах. Измеренные значения среднего веса растений достаточно близки для всех трех экспериментальных условий, хотя и есть некоторая тенденция к снижению веса в группе "Nutrient+24D":



Таким образом, для оценки различий между группами следует каким-то образом сравнить разброс групповых средних с разбросом значений внутри групп. Это – ключевая идея дисперсионного анализа.

### Две оценки дисперсии при дисперсионном анализе

Чем больше разброс выборочных средних и чем меньше разброс значений внутри групп, тем меньше вероятность того, что наши группы являются случайными выборками из одной совокупности. Дисперсию генеральной совокупности можно оценить двумя способами. С одной стороны, оценкой дисперсии генеральной совокупностью будет дисперсия, вычисленная *для каждой группы*. Такая оценка не будет зависеть от различий групповых средних. С другой стороны, при верной нулевой гипотезе (см. выше) *разброс групповых средних* тоже позволит оценить дисперсию генеральной совокупности. Очевидно, что такая оценка уже будет зависеть от различий между группами.

Если экспериментальные группы – это случайные выборки из одной и той же нормально распределенной генеральной совокупности, то оба способа оценки генеральной дисперсии должны давать примерно одинаковые результаты. Соответственно, если эти оценки действительно оказываются близки, то мы не можем отвергнуть нулевую гипотезу. И наоборот: если разница между этими оценками оказывается существенной, мы можем

принять альтернативную гипотезу: *маловероятно, что мы получили бы наблюдаемые различия между группами, если бы они были просто случайными выборками из одной нормально распределенной генеральной совокупности.*

Как именно проверить сформулированную гипотезу? Пусть  $x_{ij}$  обозначает наблюдение  $j$  в группе  $i$  (например,  $x_{13}$  будет третьим наблюдением из первой группы),  $\bar{x}_{i\cdot}$  – среднее значение в группе  $i$ , а  $\bar{x}_{\cdot\cdot}$  – общее среднее значение, рассчитанное по всем имеющимся наблюдениям. Тогда каждое наблюдение мы можем разложить на следующие составляющие:  $x_{ij} = \bar{x}_{\cdot\cdot} + (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})$ , где  $(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})$  – отклонения групповых средних от общего среднего значения, а  $(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})$  – отклонения отдельных наблюдений от среднего значения группы, к которой они принадлежат.

Тогда разброс наблюдений *внутри групп* можно рассчитать как

$$SSW = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})^2,$$

а разброс *между группами* (разброс групповых средних) как

$$SSB = \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2.$$

В приведенных выражениях буквы  $W$  и  $B$  соответствуют английским словам "*within*" (внутри) и "*between*" (между).

Нормализовав  $SSW$  и  $SSB$  по их соответствующим степеням свободы, получим *внутри- и межгрупповую дисперсии*, о которых мы говорили выше:

$$MSW = SSW/(n - k) \text{ и } MSB = SSB/(k-1).$$

В последних двух выражениях  $n$  – общее число наблюдений, а  $k$  – число сравниваемых групп. Аббревиатура  $MS$  означает "*mean squares*" ("средние квадраты"; имеются в виду усредненные суммы квадратов отклонений  $SSW$  и  $SSB$ ) и часто встречается в результатах дисперсионного анализа, выдаваемых статистическими программами.

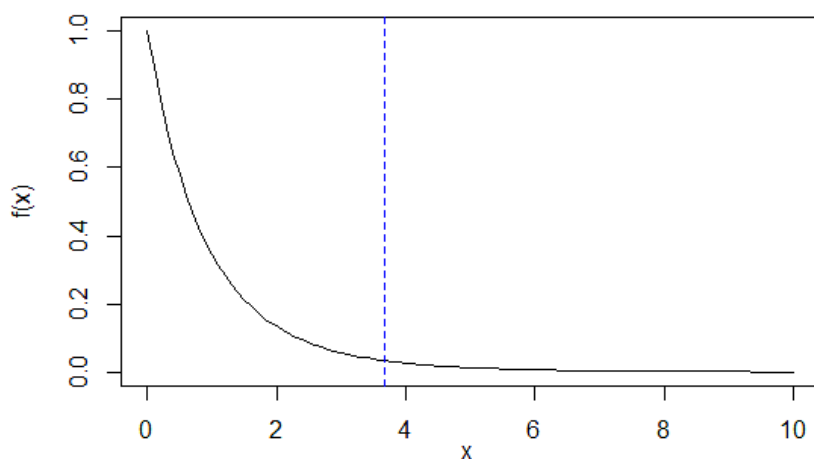
Нормализация  $SSW$  и  $SSB$  по числу степеней свободы позволяет получить сравнимые величины. Формально внутри- и межгрупповые дисперсии сравниваются при помощи  $F$ -критерия, или *критерия Фишера* (обратите внимание: в числителе всегда находится межгрупповая дисперсия,  $MSB$ ):

$$F = MSB / MSW.$$

Очевидно, что чем ближе  $F$  к 1, тем меньше у нас оснований утверждать, что внутри- и межгрупповая дисперсии различаются. Иными словами, у нас нет оснований отклонить сформулированную выше нулевую гипотезу. Если же  $F$  значительно выше 1, нулевую гипотезу можно отклонить. Возникает вопрос: начиная с какой именно величины  $F$  нулевую гипотезу можно отвергать?

Критическое значение  $F$ -критерия определяется желаемым уровнем значимости и свойствами  $F$ -распределения, форма которого полностью задается меж- и внутригрупповым степенями свободы. Так, для нашего примера, межгрупповое число степеней свободы составляет  $df_B = k - 1 = 3 - 1 = 2$ , а внутригрупповое –  $df_W = n - k = 18 - 3 = 15$ . Внешний вид  $F$ -распределения при этих степенях свободы представлен на графике:





Вертикальная линия соответствует 3.682 – критическому значению  $F$  при  $\alpha = 0.05$ . Если  $F$ -значение, рассчитанное по экспериментальным данным, превышает критическое значение, мы можем отклонить нулевую гипотезу об отсутствии эффекта изучаемого фактора.

### **Выполнение дисперсионного анализа в R**

Дисперсионный анализ в R можно выполнить при помощи базовых функций `aov()` и `lm()`. Для нашего примера получаем:

```
summary(aov(weight ~ trt, data = tomato))
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
trt      2  0.627   0.3135   1.202  0.328
Residuals 15  3.912   0.2608
```

В приведенных результатах строка, обозначенная как `trt`, соответствует источнику дисперсии в данных, связанному с действием изучаемого экспериментального фактора – условий выращивания растений. Строка, обозначенная как `Residuals`, характеризует внутригрупповую дисперсию (ее еще называют *флуктуирующей* или *остаточной* дисперсией – в том смысле, что она не может быть объяснена влиянием экспериментального фактора и является следствием случайной флуктуации данных).

Столбец `Sum Sq` содержит  $SSB$  и  $SSW$ , а столбец `Mean Sq` – меж- и внутригрупповую дисперсии  $MSB$  и  $MSW$ . В столбце `F value` представлено рассчитанное по имеющимся данным значение  $F$ -критерия. Наконец, в столбце `Pr(>F)` представлена вероятность получить  $F$ -значение, равное или превышающее выборочное наблюдаемое значение, при условии, что нулевая гипотеза верна. Как видим, эта вероятность достаточно высока. Во всяком случае, она превышает 5%-ный уровень значимости и, на этом основании, мы заключаем, что нулевая гипотеза верна. Таким образом, с достаточно высокой степенью уверенности мы можем утверждать, что экспериментальные условия не оказали существенного влияния на вес растений.

### **Двухфакторный дисперсионный анализ**

Описанный однофакторный дисперсионный анализ заключается в выяснении влияния какого-то одного фактора на интересующую нас количественную переменную. Однако очень редко тот или иной процесс определяется только одним фактором. Напротив – обычно наблюдается одновременное влияние многих факторов. Задача исследователя – выявить, какие факторы оказывают существенное влияние на изучаемое явление, а какие можно исключить из рассмотрения. Как будет показано ниже,

двухфакторный дисперсионный анализ (англ. *two-way analysis of variance*, или *two-way ANOVA*) позволяет установить одновременное влияние двух факторов, а также взаимодействие между этими факторами. При наличии более двух факторов говорят о *многофакторном дисперсионном анализе* (англ. *multifactor ANOVA*, который не следует путать с многомерным анализом *MANOVA – multivariate ANOVA!*).

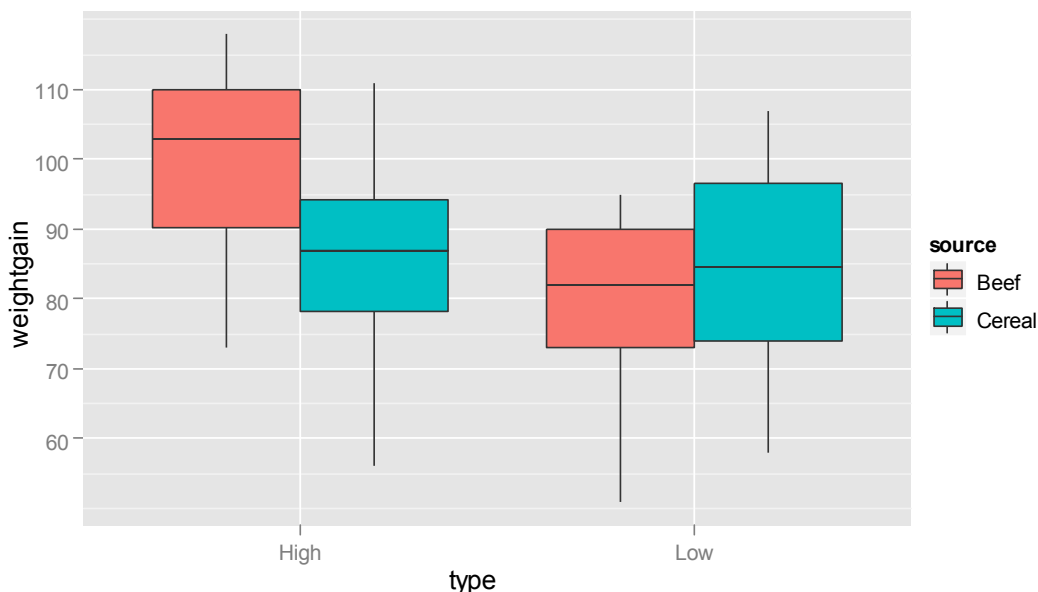
В качестве примера рассмотрим результаты реального эксперимента ([Hand et al. 1993](#)), в котором лабораторным крысам примерно одинакового возраста и веса в течение определенного времени давали корм с разным содержанием белка (фактор `type` с двумя уровнями: низкое содержание – `Low`, и высокое содержание – `High`). Кроме того, корма различались по происхождению белка (фактор `source` с двумя уровнями: `beef` – говядина, и `cereal` – злаки). В конце эксперимента был измерен прирост веса у крыс (`weightgain`) в каждой группе. Таблица с данными из этого эксперимента входит в состав пакета `HSAUR2`, который является приложением к одной из лучших на наш взгляд вводных книг по R – Everitt, Hothorn (2010).

Структура таблицы `weightgain` выглядит так:

```
library(HSAUR2)
data(weightgain)
str(weightgain)
'data.frame': 40 obs. of 3 variables:
 $ source      : Factor w/ 2 levels "Beef","Cereal": 1 1 1 1 1 1 1 1 1...
 $ type        : Factor w/ 2 levels "High","Low": 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
 $ weightgain: int  90 76 90 64 86 51 72 90 95 78 ...
```

Перед любыми статистическими расчетами полезно выполнить *разведочный анализ данных* и "рассмотреть" структуру данных на графиках:

```
library(ggplot2)
ggplot(data = weightgain, aes(x = type, y = weightgain)) +
  geom_boxplot(aes(fill = source))
```



Подробнее об использованном графическом пакете `ggplot2` см. [здесь](#).

Также стоит ознакомиться со сводными описательными статистиками, используя например, возможности пакета `doBy`:

```

require (doBy)
summaryBy(weightgain ~ type + source, data = weightgain,
            FUN = c(mean, sd, length))
  type source weightgain.mean weightgain.sd weightgain.length
1 High Beef 100.0 15.13642 10
2 High Cereal 85.9 15.02184 10
3 Low Beef 79.2 13.88684 10
4 Low Cereal 83.9 15.70881 10

```

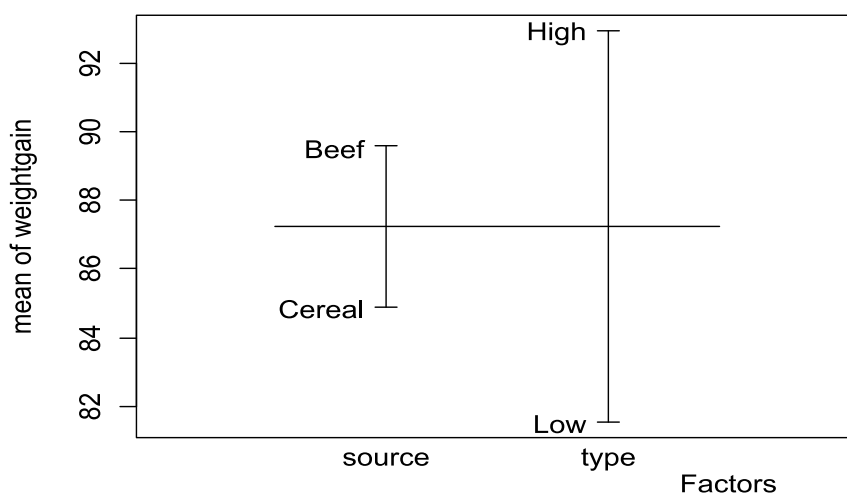
Средние значения прироста веса в исследованных группах заметно варьируют. Видно, например, что прирост веса у животных, которых содержали на корме с низкой концентрацией белка животного происхождения, оказался существенно ниже, чем в группе "High - Beef". Задача двухфакторного дисперсионного анализа – выяснить, связаны ли наблюдаемые различия в приросте веса с изучаемыми факторами, либо эти различия случайны и не имеют никакого отношения к содержанию белка в корме и его происхождению.

Полезным приемом, позволяющим лучше понять анализируемые эффекты, является также построение графика "плана эксперимента" (англ. *design plot*). На таком графике отображаются средние значения переменной-отклика в соответствии с каждым уровнем изучаемых факторов:

```

plot.design(weightgain)

```



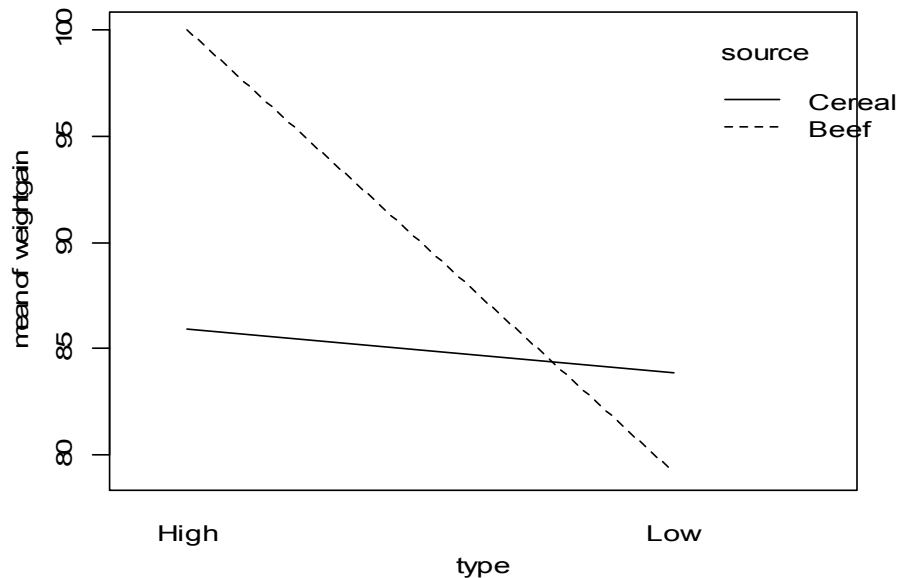
Из полученного графика видно, что наибольшая разница в средних приростах веса крыс связана с уровнем содержания белка в корме, тогда как эффект источника происхождения белка выражен в меньшей степени.

Рассматриваемое исследование можно отнести к *полнофакторному эксперименту* (англ. *full factorial experiment*), поскольку в нем реализуются все возможные сочетания имеющихся уровней факторов. Значительное преимущество такого дизайна эксперимента заключается в том, что он позволяет выяснить наличие взаимодействия между изучаемыми факторами. В рамках дисперсионного анализа, под "взаимодействием" (англ. *interaction*) понимают такую ситуацию, когда переменная-отклик ведет себя по-разному в зависимости от сочетания изучаемых факторов. Понять эту концепцию поможет "график взаимодействий" (*interaction plot*), который в R можно построить при помощи базовой функции `interaction.plot()`:

```

with(weightgain, interaction.plot(x.factor = type,
                                   trace.factor = source,
                                   response = weightgain))

```



Из приведенного рисунка видно, что при высоком содержании белка в корме, прирост веса крыс в среднем также высок, но при условии, что этот белок имеет животное происхождение. Если же содержание белка низкое, то ситуация меняется на противоположную – прирост оказывается несколько выше (хотя и не намного) в группе крыс, получавших корм растительного происхождения.

Помимо того, что рассматриваемый эксперимент является полнофакторным, во всех четырех группах имеется также одинаковое число крыс (по 10 в каждой), т.е. мы имеем дело со *сбалансированным* набором данных. Для анализа сбалансированных наборов данных мы можем применить классический способ разложения общей дисперсии на отдельные составляющие, реализованный в функции `aov()`:

```
M1 <- aov(weightgain ~ source + type + source:type,
          data = weightgain)
```

```
summary(M1)
```

```

source      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
type        1  1300  1299.6    5.812 0.0211 *
source:type  1   884   883.6    3.952 0.0545 .
Residuals  36  8049   223.6

```

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Подробное объяснение того, как интерпретировать полученную таблицу дисперсионного анализа, было приведено ранее. В целом, можно сделать вывод об отсутствии статистически значимой связи между приростом веса крыс и источником белка в корме ( $p = 0.3269$ ), тогда как влияние уровня содержания белка в корме оказалось значимым ( $p = 0.0211$ ). Взаимодействие между источником происхождения белка и уровнем его содержания в корме незначимо ( $p = 0.0545$ ), что, в принципе, согласуется с результатом анализа приведенного выше графика взаимодействий.

Обратите внимание на то, как в формуле, поданной на функцию `aov()`, было задано взаимодействие между двумя факторами: сначала были приведены два главных фактора, разделенные знаком "+", а затем к ним добавлено выражение "source:type". Это стандартный синтаксис для такого рода анализа в R. Однако приведенную формулу можно было бы также сократить до `weightgain ~ source*type` – результат оказался бы идентичным. Подробнее о синтаксисе формул в R мы расскажем в главе 6, а сводку правил можно получить, например, на [science.nature.nps.gov](http://science.nature.nps.gov) (англ. яз.).

Как следует из названия, данный раздел является введением в дисперсионный анализ и его выполнение при помощи R. В главе 6 мы продолжим эту тему и обсудим такие вопросы, как условия применимости параметрического дисперсионного анализа и способы их проверки, множественные сравнения групп, расчет необходимого числа наблюдений для дисперсионного анализа и др.

## 5.6. Оценка корреляции двух случайных величин

**Коэффициент корреляции**  $r$  – удобный показатель степени взаимосвязи между двумя случайными величинами  $(X, Y)$ , который представляет собой безразмерную величину, изменяющуюся от  $-1$  до  $+1$ . Имея связанные выборки этих величин, мы можем рассчитать наиболее часто используемый коэффициент корреляции – коэффициент Пирсона (англ. *Pearson correlation coefficient*):

$$r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{S_x^2} \sqrt{S_y^2}},$$

где  $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  и  $S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  – выборочные дисперсии значений  $X$  и  $Y$ , а

$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$  – ковариация, характеризующая совместное распределение  $(X, Y)$  в двухмерном евклидовом пространстве.

При независимом варьировании переменных, когда связь между ними отсутствует,  $r = 0$ . Чем сильнее связь, тем больше абсолютная величина коэффициента корреляции. При этом положительные значения  $r$  указывают на положительную (или "прямую") связь, когда при увеличении значений одной переменной в среднем возрастают значения и другой переменной, а отрицательные  $r$  – на отрицательную (или "обратную") связь, когда при возрастании одной переменной другая в среднем уменьшается.

Вычисление коэффициента корреляции в R мы продемонстрируем на примере данных по уровню зараженности двустворчатого моллюска *Dreissena polymorpha* инфузорией-комменсалом *Conchophthirus acuminatus* (см. также разделы 1.3, 4.3):

```
dat <-
  read.delim("http://figshare.com/media/download/98923/97987")
```

В таблице `dat` нас интересуют, в частности, две переменные: длина раковины моллюска (`ZMlength`, мм) и число обнаруженных в моллюске инфузорий (`CANumber`). В разделе 1.3 мы с помощью меню R Commander уже рассчитали коэффициент корреляции и на построенном графике обнаружили положительную связь между этими двумя переменными.

Теперь мы рассмотрим, как можно оценить корреляцию, обратившись непосредственно в среде R к функциям `cor()` и `cor.test()`. Различие между этими двумя функциями заключается в том, что `cor()` позволяет вычислить только сам коэффициент корреляции, тогда как `cor.test()` выполняет еще и оценку статистической значимости коэффициента, проверяя нулевую гипотезу о равенстве его нулю. Естественно, предпочтительнее использовать именно вторую функцию:

```
attach(dat)
cor.test(CANumber, ZMlength)
Pearson's product-moment correlation
data:  CANumber and ZMlength
```

```

t = 11.4964, df = 474, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.3935877 0.5343949
sample estimates:
      cor
0.466946

```

Как видим, рассчитанный коэффициент корреляции Пирсона оказался равен 0.467. Несмотря на то, что он не очень высок, этот коэффициент статистически значимо отличается от нуля ( $p$ -value <  $2.2e-16$ ). Для нашего удобства, программа также автоматически вычислила 95%-ный доверительный интервал для полученного коэффициента корреляции (95 percent confidence interval: 0.394 0.534).

Необходимо помнить, что коэффициент корреляции Пирсона основан на следующих важных допущениях:

- обе анализируемые переменные распределены нормально;
- связь между этими переменными линейна.

В разделе 4.3 мы на этом примере показали, что как минимум в отношении значений интенсивности инвазии условие нормальности распределения не выполняется, и для исправления ситуации выполнили преобразование Бокса-Кокса. Здесь мы ограничимся тем, что прологарифмируем обе переменные ZMlength и CAnumber. Для преобразованных переменных коэффициент корреляции Пирсона составит:

```

cor.test(log(CAnumber+1), log(ZMlength))
Pearson's product-moment correlation
data: log(CAnumber + 1) and log(ZMlength)
t = 21.5166, df = 474, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.6543961 0.7456953
sample estimates:
      cor
0.7029297

```

Поскольку логарифмирование очень часто используется как нормализующее преобразование, то не удивительно, что новое значение коэффициента корреляции значительно возросло (0.703 против 0.467).

И все же, несмотря на логарифмирование, значения интенсивности инвазии *S. acuminatus* не подчиняются нормальному распределению. Показать это можно как графически, так и при помощи, например, теста Шапиро-Уилка (подробнее о проверке данных на нормальность см. раздел 4.8):

```

shapiro.test(log(CAnumber+1))
Shapiro-Wilk normality test
data: log(CAnumber + 1)
W = 0.9508, p-value = 1.734e-11

```

Для ненормально распределенных переменных, а также при наличии нелинейной связи между переменными, следует использовать непараметрический коэффициент корреляции Спирмена (англ. *Spearman correlation coefficient*). В отличие от коэффициента Пирсона, этот вариант коэффициента корреляции работает не с исходными значениями переменных, а с их рангами (однако формула при этом используется та же, что и для

коэффициента Пирсона). Для вычисления коэффициента Спирмена в R при вызове функции `cor.test()` необходимо воспользоваться аргументом `method` со значением "spearman":

```
cor.test(CAnumber, ZMlength, method = "spearman")
Spearman's rank correlation rho
data:  CAnumber and ZMlength
S = 6574110, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
      rho
0.6342627
Warning message:
In cor.test.default(CAnumber, ZMlength, method = "spearman"):
  Cannot compute exact p-values with ties
```

Коэффициент корреляции Спирмена составил 0.634 и оказался статистически значимым ( $p \ll 0.001$ ). Поскольку в данных имеют место значения с одинаковыми рангами ("связанные ранги", англ. *ties*), программа не смогла рассчитать точное  $p$ -значение, о чем предупредила в сообщении "Warning message:...".

В связи с тем, что коэффициент корреляции Спирмена работает с рангами, любое преобразование исходных данных никак не сказывается на его значении. Например, после логарифмирования мы получим результат, идентичный предыдущему:

```
cor.test(log(CAnumber+1), log(ZMlength), method = "spearman")
Spearman's rank correlation rho
data:  log(CAnumber + 1) and log(ZMlength)
S = 6574110, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
      rho
0.6342627
```

Наконец, третий вариант коэффициента корреляции, который можно рассчитать при помощи функции `cor.test()`, имеет название *коэффициент ранговой корреляции Кендалла  $\tau$*  (англ. *Kendall's tau*). Вычисляется он следующим образом. Предположим, что у нас есть набор из парных наблюдений двух переменных:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ . Говорят, что две пары наблюдений  $(x_i, y_i)$  и  $(x_j, y_j)$  являются *конкордантными*, если имеется согласие между рангами соответствующих элементов этих пар, т.е. если

- $x_i > x_j$  и  $y_i > y_j$
- или  $x_i < x_j$  и  $y_i < y_j$ .

Если найти число конкордантных пар (*nconc.pairs*) и число *дискордантных* пар (*ndiscord.pairs*), то коэффициент Кендалла составит:

$$\tau = 2(nconc.pairs - ndiscord.pairs) / n(n - 1)$$

Коэффициент Кендалла часто используют при анализе согласованности результатов измерений, полученных при помощи разных приборов, или результатов голосования разных экспертов по одному и тому же вопросу, и т.п. В R коэффициент Кендалла можно вычислить с использованием той же функции `cor.test()`:

```
cor.test(CAnumber, ZMlength, method = "kendall")
```



```

Kendalls rank correlation tau
data: CAnumber and ZMlength
z = 14.9307, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true tau is not equal to 0
sample estimates:
      tau
0.4655232

```

Подробнее об аргументах функции `cor.test()` можно узнать из ее справочного файла, доступного по команде `?cor.test`

## 5.7. Критерий хи-квадрат

Критерий  $\chi^2$  ("хи-квадрат", также "критерий согласия Пирсона") имеет чрезвычайно широкое применение в статистике. В общем виде можно сказать, что он используется для проверки нулевой гипотезы о подчинении наблюдаемой случайной величины определенному теоретическому закону распределения. Однако конкретная формулировка проверяемой гипотезы от случая к случаю будет варьировать.

В этом разделе мы опишем принцип работы критерия  $\chi^2$  на гипотетическом примере из иммунологии. Представим, что мы выполнили эксперимент по установлению эффективности подавления развития микробного заболевания при введении в организм соответствующих антител. Всего в эксперименте было задействовано 111 мышей, которых мы разделили на две группы, включающие 57 и 54 животных соответственно. Первой группе мышей сделали инъекции патогенных бактерий с последующим введением сыворотки крови, содержащей антитела против этих бактерий. Животные из второй группы служили контролем – им сделали только бактериальные инъекции. После некоторого времени инкубации оказалось, что 38 мышей погибли, а 73 выжили. Из погибших 13 принадлежали первой группе, а 25 – ко второй (контрольной).

Проверяемую в этом эксперименте нулевую гипотезу можно сформулировать так: введение сыворотки с антителами не оказывает никакого влияния на выживаемость мышей. Иными словами, мы утверждаем, что наблюдаемые различия в выживаемости мышей (77.2% в первой группе против 53.7% во второй группе) совершенно случайны и не связаны с действием антител. Полученные в эксперименте данные можно представить в виде таблицы:

Группа	Погибло	Выжило	<b>Всего</b>
Бактерии + сыворотка	13	44	<b>57</b>
Только бактерии	25	29	<b>54</b>
<b>Всего</b>	<b>38</b>	<b>73</b>	<b>111</b>

Таблицы, подобные приведенной, называют таблицами сопряженности. В рассматриваемом примере таблица имеет размерность 2×2: есть два класса объектов («Бактерии + сыворотка» и «Только бактерии»), которые исследуются по двум признакам ("Погибло" и "Выжило"). Это простейший случай таблицы сопряженности: безусловно, и количество исследуемых классов, и количество признаков может быть бóльшим.

Для проверки сформулированной выше нулевой гипотезы нам необходимо знать, какова была бы ситуация, если бы антитела действительно не оказывали никакого действия на выживаемость мышей. Другими словами, нужно рассчитать *ожидаемые частоты* для соответствующих ячеек таблицы сопряженности. Как это сделать?

В эксперименте всего погибло 38 мышей, что составляет 34.2% от общего числа задействованных животных. Если введение антител не влияет на выживаемость мышей, в



обеих экспериментальных группах должен наблюдаться одинаковый процент смертности, а именно 34.2%. Рассчитав, сколько составляет 34.2% от 57 и 54, получим 19.5 и 18.5. Это и есть ожидаемые величины смертности в наших экспериментальных группах. Аналогичным образом рассчитываются и ожидаемые величины выживаемости: поскольку всего выжили 73 мыши, или 65.8% от общего их числа, то ожидаемые частоты выживаемости составят 37.5 и 35.5. Составим новую таблицу сопряженности, теперь уже с ожидаемыми частотами:

Группа	Погибшие	Выжившие	Всего
Бактерии + сыворотка	19.5	37.5	57
Только бактерии	18.5	35.5	54
<b>Всего</b>	<b>38</b>	<b>73</b>	<b>111</b>

Как видим, ожидаемые частоты довольно сильно отличаются от наблюдаемых, т.е. введение антител, похоже, все-таки оказывает влияние на выживаемость мышей, зараженных патогенным микроорганизмом. Это впечатление мы можем выразить количественно при помощи критерия согласия Пирсона  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum (f_o - f_e)^2 / f_e,$$

где  $f_o$  и  $f_e$  – наблюдаемые и ожидаемые частоты соответственно. Суммирование производится по всем ячейкам таблицы. Так, для рассматриваемого примера имеем

$$\chi^2 = (13 - 19.5)^2/19.5 + (44 - 37.5)^2/37.5 + (25 - 18.5)^2/18.5 + (29 - 35.5)^2/35.5 = 2.16 + 1.12 + 2.31 + 1.20 = 6.79$$

Достаточно ли велико полученное значение  $\chi^2$ , чтобы отклонить нулевую гипотезу? Для ответа на этот вопрос необходимо найти соответствующее критическое значение критерия. Число степеней свободы для  $\chi^2$  рассчитывается как  $df = (R - 1)(C - 1)$ , где  $R$  и  $C$  – количество строк и столбцов в таблице сопряженности.

В нашем случае  $df = (2 - 1)(2 - 1) = 1$ . Зная число степеней свободы, мы легко можем узнать критическое значение  $\chi^2$  при помощи стандартной R-функции `qchisq()`:

```
qchisq(p = 0.95, df = 1)
[1] 3.841459
```

Таким образом, при одной степени свободы только в 5% случаев величина критерия  $\chi^2$  превышает 3.841. Полученное нами значение 6.79 значительно превышает это критическое значение, что дает нам право отвергнуть нулевую гипотезу об отсутствии связи между введением антител и выживаемостью зараженных мышей. Отвергая эту гипотезу, мы рискуем ошибиться с вероятностью менее 5%.

Следует отметить, что приведенная выше формула для критерия  $\chi^2$  дает несколько завышенные значения при работе с таблицами сопряженности размером 2x2. Причина заключается в том, что распределение самого критерия  $\chi^2$  является непрерывным, тогда как частоты бинарных признаков ("погибло" / "выжило") по определению дискретны. В связи с этим при расчете критерия принято вводить так называемую *поправку на непрерывность*, или *поправку Йетса*:

$$\chi_Y^2 = \sum \frac{(|f_o - f_e| - 0.5)^2}{f_e}$$

В нашем случае критерий  $\chi^2$  с поправкой на непрерывность составил бы 5.792, и нулевая гипотеза об отсутствии эффекта антител все равно была бы отклонена. Возможно, однако, что в других ситуациях это сделать так легко не удалось бы.

Безусловно, нет необходимости выполнять приведенные выше вычисления вручную. В R для этого имеется стандартная функция `chisq.test()`. При работе с этой функцией данные оформляются в виде матрицы, напоминающей приведенную выше таблицу сопряженности:

```
mice <- matrix(c(13, 44, 25, 29), nrow = 2, byrow = TRUE)
mice # просмотр содержимого матрицы
      [,1] [,2]
[1,]  13  44
[2,]  25  29
chisq.test(mice) # тест хи-квадрат
Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
data:  mice
X-squared = 5.7923, df = 1, p-value = 0.0161
```

Как видим, R автоматически применяет поправку Йетса на непрерывность (Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction). Рассчитанное программой значение  $\chi^2$  составило 5.79213. Мы можем отклонить нулевую гипотезу об отсутствии эффекта антител, рискуя ошибиться с вероятностью чуть более 1% (p-value = 0.0161).

### **Критерий хи-квадрат для таблиц сопряженности размером больше 2x2**

Выше мы описали принцип работы критерия  $\chi^2$  и привели пример его применения в отношении простейшего случая - анализа частот, сведенных в таблицу сопряженности размером 2x2. Однако на практике можно столкнуться с данными, имеющими и более сложную структуру. В целом, можно говорить о таблицах сопряженности размером  $R \times C$ , где  $R$  - количество строк, а  $C$  - количество столбцов в таблице. Число степеней свободы в таких таблицах составляет  $df = (R - 1)(C - 1)$ .

Предположим, мы выполнили исследование трех популяций наземных моллюсков, в ходе которого отмечали цвет раковины. Цвет выражался следующими тремя градациями - "светлый" (light), "темный" (dark) и "очень темный" (very dark). Необходимо выяснить, различаются ли частоты встречаемости каждого из вариантов окраски в исследованных популяциях. Допустим, что учтенные в эксперименте частоты выражались следующими значениями:

```
light <- c(12, 40, 45)
dark <- c(87, 34, 75)
very.dark <- c(3, 8, 2)
```

Соберем все три вектора в одну матрицу:

```
color.data <- matrix(c(light, dark, very.dark), nrow = 3,
                    dimnames = list(c("Pop1", "Pop2", "Pop3"),
                                     c("Light", "Dark", "Very dark")))
color.data
      Light Dark Very dark
Pop1    12   87         3
Pop2    40   34         8
Pop3    45   75         2
```

Дальше достаточно подать эту матрицу на вход функции `chisq.test()`:

```
chisq.test(color.data)
Pearson's Chi-squared test
data: color.data
X-squared = 43.4337, df = 4, p-value = 8.411e-09
Warning message:
In chisq.test(color.data) : Chi-squared approximation may be incorrect
```

Поскольку полученное  $p\text{-value} = 8.411e-09$  намного меньше 0.05, у нас есть все основания отклонить нулевую гипотезу об отсутствии разницы между популяциями моллюска по частотам встречаемости разных вариантов окраски раковины.

## 5.8. Точный тест Фишера; критерии Мак-Немара и Кохрана-Мантеля-Хензеля

### Точный тест Фишера

Одно из условий применимости рассмотренного выше критерия  $\chi^2$  состоит в том, что ожидаемые частоты в любой из ячеек таблицы сопряженности *не должны быть меньше 5* (Гланц, 1999). При небольшом числе наблюдений это условие может не выполняться, и тогда более корректным подходом с точки зрения получаемых  $p$ -значений будет использование *точного теста Фишера (Fisher's exact test)*.

Тест основан на переборе всех возможных вариантов заполнения таблицы сопряженности при имеющейся численности групп, и поэтому, чем эта численность меньше, тем проще выполнить соответствующие вычисления. Фишер показал, что вероятность получения любого набора частот  $n_{ij}$  таблицы  $R \times C$  задается гипергеометрическим распределением:

$$P = \frac{(R_1!R_2!\dots R_r!)(C_1!C_2!\dots C_c!)}{N! \prod_{i,j} n_{ij}!},$$

где  $R_i$  и  $C_j$  – суммы по строкам и столбцам соответственно,  $N$  – общее число наблюдений, а знак "!", как обычно, означает факториал.

	Столбец 1	Столбец 2	Суммы по строкам
Строка 1	$n_{11}$	$n_{12}$	$R_1$
Строка 2	$n_{21}$	$n_{22}$	$R_2$
Суммы по столбцам	$C_1$	$C_2$	$N$

Построив все варианты заполнения таблицы, возможные при имеющихся маргинальных суммах, каждый раз рассчитывают соответствующие значения вероятности  $P$  по приведенной выше формуле. Вероятности, которые не превышают вероятность исходной таблицы, суммируют. Полученная сумма, включающая также вероятность исходной таблицы, и будет статистической значимостью  $p$  для *двухстороннего* варианта точного теста Фишера. Приведенный ниже пример из книги С. Гланца (1999) поможет лучше понять суть того, как работает этот тест.

Точный тест Фишера, в отличие от критерия  $\chi^2$ , имеет одно- и двухсторонний варианты. Большинство авторов используют односторонний вариант (возможно потому, что он дает меньшие значения  $P$ , что обычно выглядит более привлекательно в публикациях). Но даже при таком предвзятом подходе многие авторы, к сожалению, оставляют читателя в неведении по поводу того, каким именно вариантом теста они

пользовались. В работе ([McKinney et al., 1989](#)) подсчитано, насколько часто в статьях из двух известных медицинских журналов указан вариант точного теста Фишера:

Журнал	Вариант теста указан	Вариант теста не указан	<b>Всего</b>
New England Journal of Medicine	1	8	9
Lancet	10	4	14
<b>Всего</b>	11	12	23

Как видим, число наблюдений в первой ячейке таблицы невелико, и критерий  $\chi^2$  применять здесь нельзя. Поэтому для анализа частот различных вариантов использования точного теста Фишера мы применим сам этот тест. По приведенной выше формуле рассчитаем вероятность получить *наблюдаемый* набор чисел в клетках таблицы сопряженности *при имеющихся значениях* сумм по строкам и столбцам:

$$P = 9!14!11!12 / 23!(1!8!10!4!) = 0.00666.$$

Теперь возьмем наименьшее из чисел в ячейках таблицы сопряженности и уменьшим его на 1. Числа в остальных клетках при этом должны быть изменены так, чтобы маргинальные суммы по строкам и столбцам остались неизменными:

Журнал	Вариант теста указан	Вариант теста не указан	<b>Всего</b>
New England Journal of Medicine	0	9	9
Lancet	11	3	14
<b>Всего</b>	11	12	23

Вероятность новой таблицы составит:

$$P = 9!14!11!12 / 23!(0!9!11!3!) = 0.00027.$$

Поскольку наименьшее число в новой таблице равно 0, дальше его уменьшать невозможно. Соответственно, односторонний вариант точного теста Фишера даст

$$p = 0.00666 + 0.00027 = 0.00693.$$

Для получения двухстороннего варианта теста необходимо перебрать и все остальные возможные варианты заполнения таблицы сопряженности (при неизменных маргинальных суммах), каждый раз рассчитывая соответствующую вероятность. Для рассматриваемого примера мы получили бы еще 8 таблиц, для двух из которых вероятности не превысили бы вероятность исходного заполнения таблицы:  $P = 0.00242$  и  $P = 0.00007$ . Таким образом, у нас есть еще три варианта "маловероятного" заполнения таблицы, кроме исходного. Просуммировав все соответствующие вероятности, получим  $p$ -значение для двухстороннего точного варианта критерия Фишера:

$$p = 0.00666 + 0.00027 + 0.00242 + 0.00007 = 0.0094.$$

Согласно полученным результатам, мы можем заключить, что различие частоты правильного использования точного критерия Фишера в журналах *New England Journal of Medicine* и *Lancet* статистически значимо.

В R для выполнения точного теста Фишера служит функция `fisher.test()`. Подобно функции `chisq.test()`, `fisher.test()` принимает в качестве основного аргумента матрицу, соответствующую таблице сопряженности:

```
(X <- matrix(c(1, 10, 8, 4), ncol = 2))
      [,1] [,2]
```

```

[1,] 1 8
[2,] 10 4
fisher.test(X)
Fisher's Exact Test for Count Data
data: X
p-value = 0.009423
alternative hypothesis: true odds ratio is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.001034782 0.656954980
sample estimates:
odds ratio
0.05851868

```

Полученное функцией `fisher.test()`  $p$ -значение оказалось практически таким же, что и рассчитанное "вручную" ( $p\text{-value} = 0.009423$ ). Таким образом, у нас, опять-таки, есть все основания отклонить нулевую гипотезу о том, что частоты использования точного критерия Фишера в журналах *New England Journal of Medicine* и *Lancet* существенно различаются.

Разумеется, при больших значениях частот и размерностях таблицы число возможных перебираемых комбинаций достигает астрономических величин. К счастью, функция `fisher.test()` имеет возможность запустить процесс Монте-Карло и оценить  $p$ -значение для нулевой гипотезы по ограниченному подмножеству комбинаций. Можно отметить хорошую сходимость результатов этого подхода: в одном из наших расчетов при увеличении параметра числа комбинаций от 1000 до 100000 полученное  $p$ -значение варьировало в пределах от 0.0002 до 0.0001. Дополнительную информацию по функции `fisher.test()` можно найти в ее справочном файле (команда `?fisher.test`).

### **Критерий Мак-Немара**

Рассмотренный выше критерий  $\chi^2$  для анализа таблиц сопряженности размером  $2 \times 2$  применим только в отношении независимых наблюдений. Если же учет какого-либо дихотомического признака выполняется, например, на одних и тех же испытуемых, то вместо критерия  $\chi^2$  следует использовать *критерий Мак-Немара*, названный по имени автора – американского психолога и статистика, описавшего этот критерий ([McNemar, 1947](#)).

Представим такую ситуацию: 15-ти испытуемым дали попробовать новый освежительный напиток, который скоро должен будет поступить в продажу. Испытуемых попросили ответить на вопрос, понравился ли им этот напиток - с вариантами ответа "да" или "нет". После этого *тем же* 15 участникам эксперимента показали рекламу, содержащую информацию о пользе и вкусовых качествах напитка. По завершении просмотра испытуемым снова дали выпить напиток и попросили ответить на ранее поставленный вопрос. Производитель напитка желает выяснить эффективность рекламы, изучив изменения в предпочтениях участников эксперимента после ее просмотра. Данные, полученные в ходе эксперимента, могли бы выглядеть так (пример заимствован с сайта [Cookbook for R](#)):

```

data <- read.table(header=TRUE, con <- textConnection("
  subject time result
           1 pre      0
           1 post     1
           2 pre      1
...
          15 pre      0

```

```
15 post      1
"))
```

В таблице `data` столбец `subject` содержит идентификационные номера испытуемых, столбец `time` – метки, отражающие время проведения опроса (`pre` – до показа рекламы, `post` – после), а столбец `result` – ответы на вопрос (закодированы как 0 – "нет" и 1 – "да"). Данные умышленно приведены сначала в так называемом "длинном формате", чтобы продемонстрировать еще раз, что *одни и те же* 15 испытуемых были опрошены дважды и что их ответы могли измениться после просмотра рекламы.

Подобно критерию  $\chi^2$ , критерий Мак-Немара работает с таблицей сопряженности размером  $2 \times 2$ . Для преобразования объекта `data` в такую таблицу необходимо выполнить несколько дополнительных операций. Сначала преобразуем `data` в таблицу "широкого формата", для чего используем возможности пакета `reshape2` ([Wickham, 2007](#)):

```
# Если пакет еще не установлен на Вашем компьютере:
install.packages("reshape2")
# Преобразуем данные в "широкий формат":
data.wide <- dcast(data, subject ~ time, value.var="result")
data.wide
  subject post pre
1         1   1  0
2         2   1  1
3         3   1  0
...
14        14   0  0
15        15   1  0
```

Теперь эти данные можно легко свести в матрицу, соответствующую таблице сопряженности (использованная ниже функция `table()` входит в базовый набор функций R):

```
ct <- table( data.wide[,c("pre", "post")] )
ct
      post
pre 0 1
    0 2 8
    1 1 4
```

Полученная таблица сопряженности отражает изменения предпочтений участников эксперимента до и после показа рекламы (сравните с критерием Стьюдента для парных выборок). Так, например, мы видим, что двоим испытуемым напиток не нравился как до, так и после показа рекламы (пересечение строки 0 и столбца 0); восьми испытуемым напиток не нравился до показа рекламы, но понравился после (пересечение строки 0 и столбца 1), и т.д. В общем виде таблицу сопряженности для критерия Мак-Немара мы можем представить так:

	Тест 2 (-)	Тест 2 (+)	Всего
Тест 1 (-)	$a$	$b$	$a + b$
Тест 1 (+)	$c$	$d$	$c + d$
Всего	$a + c$	$b + d$	$a + b + c + d$

Критерий Мак-Немара предназначен для проверки нулевой гипотезы о том, что маргинальные частоты строк и столбцов таблицы сопряженности не различаются, т.е.

$$p(a) + p(b) = p(a) + p(c) \quad \text{и} \quad p(c) + p(d) = p(b) + p(d).$$

После сокращения получаем ([McNemar, 1947](#)):

$$H_0: p(b) = p(c) \quad \text{и} \quad H_1: p(b) \neq p(c).$$

Критерий рассчитывается следующим образом:

$$Q = (b - c)^2 / (b + c)$$

При больших объемах выборок (примерно 50 и выше)  $Q$  имеет распределение, близкое к распределению  $\chi^2$  с одной степенью свободы. Более точное приближение достигается при помощи поправки Эдвардса ([Edwards, 1948](#)):

$$Q = (|b - c| - 1)^2 / (b + c)$$

В R приведенные формулы реализованы в базовой функции `mcnemar.test()`:

```
mcnemar.test(ct)
McNemar's Chi-squared test with continuity correction
data: ct
McNemar's chi-squared = 4, df = 1, p-value = 0.0455
```

По умолчанию применяется поправка Эдвардса. При необходимости ее можно отключить, воспользовавшись аргументом `correct`:

```
mcnemar.test(ct, correct = FALSE)
McNemar's Chi-squared test
data: ct
McNemar's chi-squared = 5.4444, df = 1, p-value = 0.01963
```

Как видим, в обоих случаях  $p\text{-value} < 0.05$ , что дает нам основания отклонить нулевую гипотезу об отсутствии эффекта рекламы - число испытуемых, которым напиток понравился после ее просмотра, увеличилось.

Обратите внимание: хотя критерий Мак-Немара имеет дело с таблицей сопряженности  $2 \times 2$ , структура этой таблицы в корне отличается от таковой для критерия  $\chi^2$ . В случае с  $\chi^2$  факт повторного учета дихотомического признака на тех же объектах не отражен:

```
table(data[,c("time", "result")])
      result
time    0    1
post    3   12
pre    10    5
```

### Критерий Кохрана-Мантеля-Хензеля для таблиц сопряженности размером $2 \times 2 \times K$

Как правило, таблицу сопряженности  $2 \times 2$  получают в ходе единичного эксперимента (или так называемого "обсервационного исследования"), направленного на изучение распределения того или иного бинарного признака в двух группах объектов (например, в экспериментальной и контрольной группах). Но что, если один и тот же эксперимент повторяют несколько раз?



Например, в ходе клинических испытаний часто эффективность какого-либо нового препарата исследуют по одинаковой схеме в разных медицинских учреждениях. В результате получают набор из  $K$  таблиц сопряженности размером  $2 \times 2$ , где  $K$  – это количество участвовавших в исследовании медицинских центров. По разным причинам можно ожидать, что результаты эксперимента будут несколько варьировать от центра к центру. Соответственно, "медицинский центр" становится важной ковариатой, действие которой мы должны учесть при установлении эффективности испытываемого нового препарата. Одним из статистических методов, позволяющих это сделать, является критерий Кохрана-Мантеля-Хензеля (англ. "Cochran-Mantel-Haenszel test" или просто "CMH test" – по фамилии авторов Cochran (1954) и Mantel and Haenszel (1959)). Насколько нам известно, устоявшегося перевода фамилии последнего автора в русскоязычной литературе нет – кроме приведенного, встречаются, например, названия "критерий Кохрана-Мантеля-Гензеля" и "критерий Кохрана-Мантеля-Хенселя". Обсуждение особенностей перевода этого названия можно найти на [proz.com](http://proz.com).

Принцип работы CMH-критерия и функцию языка R для его вычисления мы опишем на примере из книги А. Агрести ([Agresti, 2002](#), стр. 230). Имеются результаты исследования эффективности действия мази, содержащей новое действующее вещество, в отношении определенного инфекционного заболевания. Дизайн эксперимента заключался в следующем: две группы испытуемых подвергались лечению при помощи нового препарата и плацебо. В конце эксперимента учтено количество случаев успешного и неуспешного лечения в обеих группах. Эксперимент был повторен по описанной схеме в 8 медицинских центрах, при разном общем количестве испытуемых и разном их количестве в отдельных экспериментальных группах в каждом центре. Данные представлены в таблице ниже:

Медицинский центр	Экспериментальная группа	Исход лечения	
		Успешное	Неуспешное
1	Препарат	11	25
	Контроль	10	27
2	Препарат	16	4
	Контроль	22	10
3	Препарат	14	5
	Контроль	7	12
4	Препарат	2	14
	Контроль	1	16
5	Препарат	6	11
	Контроль	0	12
6	Препарат	1	10
	Контроль	0	10
7	Препарат	1	4
	Контроль	1	8
8	Препарат	4	2
	Контроль	6	1

Обозначим ячейки каждой  $k$ -й таблицы сопряженности следующим образом:

Экспериментальная группа	Успешное лечение	Неуспешное лечение	Всего
Препарат	$n_{k11}$	$n_{k12}$	$n_{k1.}$
Контроль	$n_{k21}$	$n_{k22}$	$n_{k2.}$
<b>Всего</b>	$n_{k.1}$	$n_{k.2}$	$n_{k..}$



Тогда формулу СМН-критерия можно записать так:

$$SMH = \left\{ \left| \sum_k \left( n_{k11} - \frac{n_{k\bullet} n_{\bullet 1}}{n_{k\bullet\bullet}} \right) \right| - 0.5 \right\}^2 / \sum_k \frac{n_{k\bullet} n_{\bullet 1} n_{k\bullet 2} n_{k2\bullet}}{n_{k\bullet\bullet}^2 (n_{k\bullet\bullet} - 1)}$$

Как видно из приведенной формулы, СМН-критерий очень схож с критерием хи-квадрат. В частности, в числителе формулы мы видим сумму квадратов разностей между наблюдаемой частотой в ячейке  $n_{k11}$  и ее ожидаемой частотой при верной нулевой гипотезе. Знаменатель содержит оценку дисперсии этих квадратов разностей. В связи с таким сходством, СМН-критерий часто называют еще критерием *хи-квадрат Мантеля-Хензеля*.

Нулевая гипотеза, проверяемая при помощи СМН-критерия, заключается в том, что между двумя анализируемыми качественными признаками (в нашем случае "экспериментальная группа" и "исход лечения") нет никакой связи. Технически говоря, тестируется гипотеза о том, что *отношение шансов* в каждой из  $K$  таблиц сопряженности равно 1 (про отношение шансов, например, см. на [donbas-socproject.blogspot.com](http://donbas-socproject.blogspot.com)).

В базовой версии R для выполнения СМН-теста имеется функция `mantelhaen.test()`. Данные подаются на нее в виде трехмерного массива, состоящего из  $2 \times 2 \times K$  элементов. В нашем случае данные можно ввести следующим образом:

```
drug <-
  array(c(11, 10, 25, 27,
          16, 22, 4, 10,
          14, 7, 5, 12,
          2, 1, 14, 16,
          6, 0, 11, 12,
          1, 0, 10, 10,
          1, 1, 4, 8,
          4, 6, 2, 1),
        dim = c(2, 2, 8),
        dimnames = list(
          Group = c("Drug", "Control"),
          Response = c("Success", "Failure"),
          Center = c("1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8")))

drug
, , Center = 1
      Response
Group   Success Failure
Drug      11      25
Control  10      27
, , Center = 2
      Response
Group   Success Failure
Drug      16       4
Control  22      10
...
, , Center = 8
      Response
Group   Success Failure
Drug       4       2
Control   6       1
```

Далее подаем массив `drug` на вход функции `mantelhaen.test()`:

```

mantelhaen.test(drug)
Mantel-Haenszel chi-squared test with continuity correction
data: drug
Mantel-Haenszel X-squared = 5.6716, df = 1, p-value = 0.01724
alternative hypothesis: true common odds ratio is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 1.177590 3.869174
sample estimates:
common odds ratio
 2.134549

```

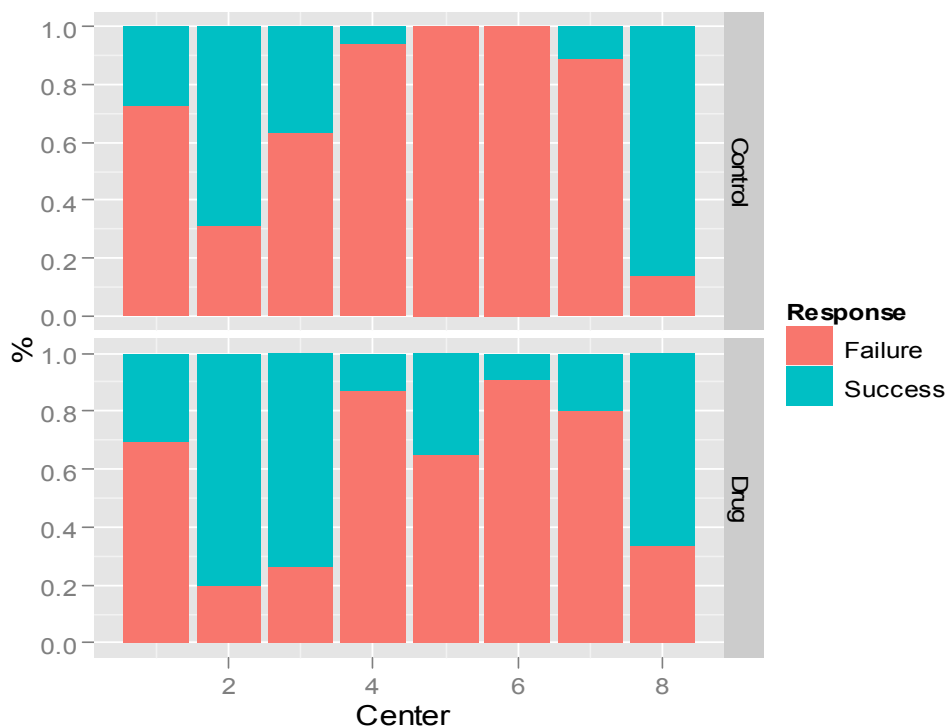
Как видим, исход лечения оказался статистически значимо связанным с тем, получали ли испытуемые новый препарат ( $p$ -value = 0.01724). Иными словами, мы можем принять альтернативную гипотезу, которая заключается в том, что истинное общее отношение шансов (для всех таблиц) не равно 1 (true common odds ratio is not equal to 1). Это подтверждается также рассчитанным программой 95%-ным доверительным интервалом для отношения шансов, который не включает 1 (95 percent confidence interval: 1.177590 - 3.869174).

Графически мы можем изобразить имеющиеся данные следующим образом:

```

library(reshape) # для функции melt()
drug.df <- data.frame(melt(drug,
                           id=c("Center", "Group", "Response")))
library(ggplot2) # графический пакет
p <- ggplot(data = drug.df,
            aes(x = Center, y = value, fill = Response)) +
  ylab("%")
p + geom_bar(stat = "identity", position = "fill") +
  facet_grid(Group~.)

```



Из рисунка видно, что частота успешных исходов лечения в целом выше у испытуемых, которые получали новый препарат.

При интерпретации результатов СМН-теста, выполняемого при помощи функции `mantelhaen.test()`, следует иметь в виду следующее:

- *Выполняется ли поправка на непрерывность?* По умолчанию используется поправка за счет вычитания значения 0.5 в числителе – см. выше формулу критерия. При необходимости ее отключить воспользуйтесь аргументом `correction = FALSE` (получаемое в результате этого  $p$ -значение может измениться, что в некоторых случаях может привести к противоположному заключению относительно справедливости нулевой гипотезы).

- *Какой вариант гипотезы проверяется?* Возможные варианты: `alternative = "two.sided"` (двухсторонний критерий; по умолчанию), `alternative = "greater"` (больше) или `alternative = "less"` (меньше).

- *Однородны ли отношения шансов в каждой из анализируемых таблиц сопряженности?* Функция `mantelhaen.test()` автоматически "предполагает", что это условие выполняется. По поводу необходимости проверки однородности отношений шансов однозначного мнения нет (подробнее см. [udel.edu](http://udel.edu)). Тем не менее, функции `cmh_test()` из пакета `coin` и `epi.2by2()` из пакета `epiR` позволяют выполнить специально предназначенный для этого тест Бреслоу-Дэя ([Breslow, Day, 1980](#)).

- *Наблюдается ли сходный отклик на экспериментальное воздействие во всех имеющихся таблицах сопряженности?* Мощность СМН-критерия значительно снижается, когда наблюдаются разнонаправленные отклики в анализируемых таблицах сопряженности (например, если бы в нашем случае в части таблиц наблюдалось выраженное снижение, а в части таблиц – выраженное повышение частоты случаев успешного лечения среди испытуемых, получавших новый препарат). Это, соответственно, затрудняет интерпретацию высоких  $p$ -значений (например,  $> 0.05$ ): вызвано ли наблюдаемое высокое  $p$ -значение отсутствием эффекта или это результат наличия разнонаправленных откликов?

## 5.9. Оценка статистической мощности при сравнении долей

В этом разделе мы продолжим тему оценки мощности статистических критериев, начатую в разделе 5.3, и покажем, как при помощи R можно выполнить анализ мощности при сравнении долей. Представим, что мы входим в команду кандидата в президенты страны  $X$ . Согласно результатам опросов, выполненных командой кандидата-соперника, выяснилось, что популярность нашего кандидата у городских жителей выше, чем у жителей села (28% против 20% соответственно среди каждых 100 опрошенных респондентов каждой категории). Безусловно, это важная информация, которая может помочь в планировании агитационных мероприятий: например, следует ли направить больше ресурсов на агитацию среди сельских жителей. Однако насколько стоит доверять информации из лагеря соперника?

Перед нами поставлена задача спланировать независимое исследование для выяснения лояльности городских и сельских жителей в отношении нашего кандидата. Имеющиеся на проведение исследования ресурсы (деньги и проч.) ограничены, и поэтому необходимо определиться с оптимальным количеством респондентов в предстоящем опросе.

Начнем с анализа данных, полученных командой соперника. Как уже было показано в разделе 4.7, две доли мы можем сравнить при помощи критерия "хи-квадрат":

```

votes <- matrix(c(28, 72, 20, 80), ncol = 2, byrow = T)
votes
      [,1] [,2]
[1,]   28   72
[2,]   20   80
chisq.test(votes)
Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
data:  votes
X-squared = 1.3432, df = 1, p-value = 0.2465

```

Выполненный тест хи-квадрат позволяет заключить, что жители города и села статистически не различаются по своим предпочтениям в отношении нашего кандидата ( $p$ -value = 0.2465).

Казалось бы, это хорошие новости, т.к. нашей команде, по-видимому, нет необходимости предпринимать дополнительные усилия для обеспечения более высокой лояльности среди сельских жителей. Но что, если этот вывод неверен просто в силу недостаточно большого числа опрошенных? Иными словами, мощность критерия недостаточно велика и мы совершили ошибку второго рода – не отклонили неверную нулевую гипотезу об отсутствии разницы между опрошенными категориями жителей?

Хотя в базовой комплектации R имеется специальная функция для оценки мощности при сравнении двух долей `power.prop.test()`, мы воспользуемся возможностями специализированного пакета `pwr` (его можно установить при помощи команды `install.packages("pwr")`). Реализованные в этом пакете функции следуют формулам из известной книги Коэна ([Cohen, 1988](#)). Для анализа мощности критерия хи-квадрат служит функция `pwr.chisq.test()`, имеющая следующие аргументы:

- `w` – размер эффекта
- `N` – общее число наблюдений
- `df` – число степеней свободы
- `sig.level` – уровень значимости
- `power` – мощность критерия

Следует пояснить, что под размером эффекта  $w$  для  $\chi^2$  подразумевается величина, рассчитываемая по формуле  $w = \sum (p_{0i} - p_{1i})^2 / p_{0i}$ , где  $p_{0i}$  – ожидаемая вероятность для  $i$ -й ячейки таблицы сопряженности при верной нулевой гипотезе об отсутствии эффекта, а  $p_{1i}$  – наблюдаемая вероятность. Иными словами,  $w$  измеряет степень отклонения наблюдаемых частот в таблице сопряженности от тех, которые можно было бы ожидать при отсутствии эффекта исследуемого фактора.

Рассчитаем мощность приведенного выше теста  $\chi^2$ . Для удобства, сначала сохраним результаты теста в виде самостоятельного объекта (назовем его `res`):

```

res <- chisq.test(votes)
res
Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
data:  votes
X-squared = 1.3432, df = 1, p-value = 0.2465

```

Объект `res` представляет собой список из нескольких компонентов, включая таблицы с наблюдаемыми и ожидаемыми частотами. Мы можем легко извлечь эти таблицы и рассчитать соответствующие вероятности:

```

obs <- res$observed
      [,1] [,2]
[1,]   28  72
[2,]   20  80
exptd <- res$expected
      [,1] [,2]
[1,]   24  76
[2,]   24  76
obs <- obs/200 # здесь и ниже, 200 - общее число опрошенных
      [,1] [,2]
[1,] 0.14 0.36
[2,] 0.10 0.40
exptd <- exp/200
      [,1] [,2]
[1,] 0.12 0.38
[2,] 0.12 0.38

```

Используя приведенную выше формулу, рассчитаем размер эффекта:

```

sqrt(sum((exptd-obs)^2/exptd))
[1] 0.09365858

```

Приведенные вычисления размера эффекта можно было значительно сократить, воспользовавшись готовой функцией из пакета `pwr - ES.w2()`, на вход которой в виде матрицы подается таблица сопряженности с наблюдаемыми вероятностями:

```

library(pwr)
ES.w2(obs)
[1] 0.09365858

```

Много это или мало – 0.094? Показатель  $w$  изменяется от 0 до 1, и чем ближе его значение к 1, тем сильнее эффект исследуемого фактора. В рассматриваемом случае размер эффекта весьма невысок – место проживания респондентов очень слабо связано с их лояльностью в отношении нашего кандидата. При таком размере эффекта и при общем числе опрошенных респондентов, равном 200, мощность выполненного выше теста  $\chi^2$  составляет

```

pwr.chisq.test(w = ES.w2(obs), df = 1, N = 200)
Chi squared power calculation
      w = 0.09365858
      N = 200
      df = 1
sig.level = 0.05
power = 0.2630843
NOTE: N is the number of observations

```

Рассчитанная мощность (~ 26%) гораздо ниже условно принятого порога в 80%. Таким образом, команда соперника имеет мало оснований утверждать, что наш кандидат менее популярен среди сельских жителей. Скорее всего, число опрошенных ими респондентов было недостаточным для такого вывода при имеющемся небольшом размере эффекта.

Приведенная выше величина мощности критерия  $\chi^2$  (26%) называется достигнутой, или *наблюдаемой мощностью* (англ. *observed power*). Следует подчеркнуть, что результат

такого ретроспективного расчета мощности статистического теста (т.е. расчета, выполненного после проведения исследования) следует интерпретировать с очень большой осторожностью (Thomas, 1997). В частности, логически не имеют смысла утверждения вроде следующего: "Поскольку нулевая гипотеза не была отвергнута и наблюдаемая мощность теста высока, имеющиеся данные свидетельствуют в пользу нулевой гипотезы". Дело здесь в том, что между мощностью теста и уровнем значимости  $\alpha$  по определению имеется тесная функциональная связь: чем выше  $\alpha$ , тем ниже мощность. Соответственно, рассчитанные в ходе теста высокие  $p$ -значения всегда сопровождаются низкой мощностью, что делает сам ретроспективный расчет мощности бессмысленным – подробности см. в статье (Hoenig, Heisey, 2001).

Оценка мощности статистического теста должна выполняться на стадии планирования исследования. Выполним такую оценку для нашего независимого опроса общественного мнения. Поскольку имеющиеся у нас ресурсы ограничены, решено, что результаты этого исследования будут приняты во внимание при разработке агитационных мероприятий только в том случае, если выявленный размер эффекта окажется достаточно большим, и если мощность критерия  $\chi^2$  составит не менее 80% при уровне значимости 0.05. Однако, что значит "достаточно большой" эффект? Согласно классификации, предложенной Коэном,  $w = 0.10$  следует считать небольшим эффектом,  $w = 0.3$  – умеренно большим, а  $w = 0.5$  и выше – большим эффектом. Примем, что порог  $w = 0.15$  является достаточно значительным эффектом, чтобы обратить на него внимание в нашей ситуации (должность президента на кону, как-никак!). Тогда минимальное число подлежащих опросу респондентов составит:

```
pwr.chisq.test(w = 0.15, N = NULL, df = 1,
              sig.level = 0.05, power = 0.8)
Chi squared power calculation
  w = 0.15
  N = 348.8382
  df = 1
sig.level = 0.05
power = 0.8
NOTE: N is the number of observations
```

Обратите внимание на аргумент N – ему было присвоено значение NULL, поскольку рассчитывается именно число наблюдений.

Таким образом, всего необходимо будет опросить около 350 случайным образом выбранных респондентов (примерно половина из них будет из числа городских жителей, а другая половина – из числа сельских).

В завершение, следует упомянуть еще три функции из пакета `pwr`, созданные для анализа статистической мощности при работе с долями:

- ° `pwr.2p.test()` – анализ мощности для двух долей, рассчитанных по выборкам одинакового размера;
- ° `pwr.2p2n.test()` – анализ мощности для двух долей, рассчитанных по выборкам разного размера;
- ° `pwr.p.test()` – анализ мощности для одной доли (например, при сравнении ее с каким-либо ожидаемым значением).

Мощность теста можно оценить также путем многократных имитаций. Приведенная ниже функция рассчитывает мощность по четырем параметрам – объему выборки в первой группе, объему выборки во второй группе, ожидаемой частоте в первой группе и ожидаемой частоте во второй группе. Генерируется 10000 таблиц размером  $2 \times 2$  и на их основе рассчитывается вероятность отвергнуть нулевую гипотезу.

```

prop.power=function(n1,n2,p1,p2) {
  twobytwo=matrix(NA,nrow=10000, ncol=4)
  twobytwo[,1]=rbinom(n=10000, size=n1, prob=p1)
  twobytwo[,2]=n1-twobytwo[,1]
  twobytwo[,3]=rbinom(n=10000, size=n2, prob=p2)
  twobytwo[,4]=n1-twobytwo[,3]
  p=rep(NA, 10000)
  chisq.test.v = function(x)
    as.numeric(chisq.test(matrix(x, ncol=2), correct=FALSE)[3])
  p=apply(twobytwo, 1, chisq.test.v)
  power=sum(iffelse(p<0.05,1,0))/10000
  return(power)
}

```

Эта функция дает результат, сходный с приведенной выше ретроспективной оценкой мощности:

```

prop.power(100,100,0.28, 0.20)
[1] 0.2649

```



## 6. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В ДИСПЕРСИОННОМ АНАЛИЗЕ



### 6.1. Протокол разведочного анализа данных

За последние несколько десятилетий арсенал прикладной статистики значительно пополнился за счет развития новых методов, таких, например, как обобщенные линейные модели (*Generalized Linear Models*), обобщенные аддитивные модели (*Generalized Additive Models*), модели со смешанными эффектами (*Mixed-Effects Models*), деревья принятия решений (*Regression and Classification Trees*), анализ выживаемости (*Survival Analysis*), многомерное шкалирование (*Multidimensional Scaling*) и др. Более того, появление быстрых современных компьютеров и свободного программного обеспечения (вроде R) сделало все эти методы, требующие значительных вычислительных ресурсов, доступными практически для каждого исследователя. Однако такая доступность еще больше обостряет хорошо известную проблему всех статистических методов, которую на английском языке часто описывают как "*garbage in, garbage out*", т.е. "мусор на входе – мусор на выходе". Речь здесь идет о следующем: чудес не бывает, и если мы не будем уделять должного внимания тому, как тот или иной метод работает и какие требования предъявляет к анализируемым данным, то получаемые с его помощью результаты нельзя будет воспринимать всерьез. Поэтому каждый раз исследователю следует начинать свою работу с тщательного ознакомления со свойствами полученных данных и проверки необходимых условий применимости соответствующих статистических методов. Этот начальный этап называют *разведочным анализом* (*Exploratory Data Analysis*).

В литературе по статистике можно найти немало рекомендаций по выполнению разведочного анализа данных (РДА). В концентрированной форме эти рекомендации сведены в единый протокол в отличной публикации ([Zuur et al., 2010](#)). Несмотря на то, что статья написана для биологов (в частности, для экологов), изложенные в ней принципы, вероятно, верны и в отношении других научных дисциплин. Прежде чем перейти к детальному описанию методик построения и интерпретации конкретных статистических моделей, приведем выдержки из указанной работы и опишем предложенный авторами РДА-протокол. Подобно тому, как это сделано в оригинальной статье, описание отдельных шагов протокола будет сопровождаться краткими рекомендациями по использованию соответствующих функций и пакетов системы R.

Предлагаемый протокол включает следующие основные элементы:

1. Формулировка исследовательской гипотезы. Выполнение эксперимента для сбора наблюдаемых данных.
2. Разведочный анализ данных:
  - Выявление точек-выбросов
  - Проверка однородности дисперсий
  - Проверка нормальности распределения данных
  - Выявление избыточного количества нулевых значений
  - Выявление коллинеарных переменных
  - Выявление характера связи между анализируемыми переменными
  - Выявление взаимодействий между переменными-предикторами
  - Выявление пространственно-временных корреляций между значениями зависимой переменной
3. Применение статистического метода (модели) в соответствии с поставленной задачей и свойствами данных.

А. Цуур с соавторами (2010) отмечают, что РДА наиболее эффективен при использовании разнообразных графических средств, поскольку графики часто позволяют иногда лучше понять структуру и свойства анализируемых данных, чем формальные статистические тесты.



### Выявление точек-выбросов

С рекомендаций по исключению из анализа выскакивающих наблюдений ("экстремальных точек", "выбросов", "засорений") начинаются многие руководства по прикладной статистике. Некоторые способы идентификации и "борьбы" с выбросами описаны нами в разделе 4.3.

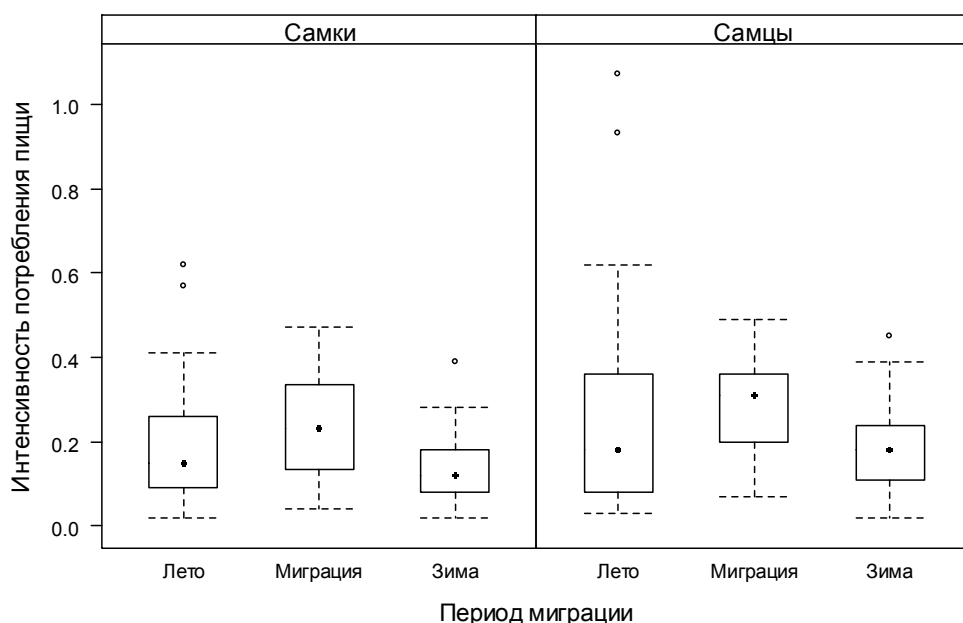
Очень часто исследователи забывают, что большинство таких процедур предназначено для отбрасывания одного и только одного экстремального значения. Тем не менее, можно встретить тексты, в которых, скажем, из шести наблюдений отбрасываются три. Это совершенно недопустимо: отбрасывание аномальных значений должно быть основано на очень серьезных изначальных предположениях. Наличие выбросов часто может означать, что исходное распределение, например, не является простым нормальным, а смесью разных распределений. Для проверки такого предположения потребуется изучение дополнительных выборок большего объема.

Чувствительность разных статистических методов к наличию выбросов в данных неодинакова. Так, при использовании обобщенной линейной модели для анализа зависимой переменной, распределенной по закону Пуассона (например, количество случаев какого-либо заболевания в разных городах), наличие выбросов может вызвать избыточную дисперсию, что может сделать модель неприменимой. В то же время, при использовании неметрического многомерного шкалирования, основанного на индексе Жаккара, все исходные данные переводятся в номинальную шкалу с двумя значениями (1/0), и наличие выбросов никак не сказывается на результатах анализа. Исследователь должен четко понимать эти различия, обусловленные разными методами.

### Проверка однородности групповых дисперсий

С проблемой выбросов тесно связан второй пункт протокола разведочного анализа – проверка условия однородности дисперсии (англ. вариант термина "*homogeneity of variance*"). Однородность групповых дисперсий постулируется как важное условие применимости дисперсионного анализа (ANOVA) и других линейных моделей регрессионного типа, а также ряда методов многомерной статистики (например, дискриминантного анализа).

На рисунке ниже приведены категоризованные диаграммы размахов для значений интенсивности потребления пищи канадским веретенником – птицы из семейства бекасовых (Zuur et al., 2010).



Если бы стояла задача применить параметрический дисперсионный анализ для установления эффектов пола и периода наблюдений на интенсивность потребления пищи веретенником (а также взаимодействия между этими двумя факторами), то должны были бы выполняться следующие условия:

- дисперсии не различаются у самцов и самок;
- дисперсии не различаются между периодами наблюдений;
- дисперсии не различаются между периодами наблюдения у каждого из полов.

Как можно увидеть из графика, дисперсия интенсивности потребления пищи у самцов низка зимой и несколько повышается в летний период, но в целом в приведенном примере различия групповых дисперсий невелики и не потребуют особых действий со стороны аналитика. Это можно подтвердить не только субъективными визуальными ощущениями, но и с использованием функций для формальной проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий (см. раздел 5.4).

Конечно, такая ситуация будет наблюдаться далеко не всегда. Если отношение между самой высокой и самой низкой групповыми дисперсиями превышает 4, то оценки параметров моделей, основанных на методе наименьших квадратов, будут значительно смещенными (Fox, 2008). При построении регрессионных моделей проверка условия однородности дисперсии чаще всего выполняется путем графического анализа распределения остатков: по оси ординат откладываются значения остатков, а по оси абсцисс - предсказываемые моделью средние значения зависимой переменной. Точки на таком графике должны располагаться случайным образом, не формируя какого-либо четкого паттерна. При наличии в модели номинальных переменных (факторов), для остатков строят категоризованные диаграммы размахов вроде той, что приведена на рисунке выше (дисперсии остатков в отдельных группах, соответствующих уровням фактора, должны быть сходными).

При выявлении существенной неоднородности дисперсии возможны два решения: определенное преобразование исходных данных (например, логарифмирование) или использование моделей, основанных на обобщенном методе наименьших квадратов (*Generalized Least Squares Models*) и допускающих неоднородность дисперсии.

### **Проверка на нормальность распределения**

Подчиняются ли анализируемые количественные переменные закону нормального распределения вероятностей? Очень многие статистические методы предполагают положительный ответ на этот вопрос ([Zuur et al., 2010](#)), и поэтому проверка исследуемых переменных на нормальность распределения является важной составной частью разведочного анализа данных.

Проверяя условие нормальности распределения данных, необходимо, однако, хорошо представлять себе, в каких случаях его выполнение является критическим для применения конкретного статистического метода. Так, например, *метод главных компонент* (*Principle Components Analysis, PCA*) не требует, чтобы данные были распределены нормально ([Jolliffe, 2002](#)). *Линейная регрессия* (*Linear Regression*) хотя и предполагает нормальность распределения зависимой переменной, является достаточно робастным методом при незначительных отклонениях от этого условия ([Fitzmaurice et al., 2004](#)). В то же время для успешного применения *дискриминантного анализа* (*Discriminant Analysis*) нормальность распределения признаков в каждой группе классифицируемых объектов - условие обязательное ([Huberty, 1994](#)).

Определение закона распределения вероятностей, которому подчиняются эмпирические данные – это отдельная большая тема и мы ее частично обсуждали в разделах 4.7-4.8. Отличную статью на русском языке с примерами подгонки распределений средствами R можно почитать на [disorder.ru](#). Советуем также обратить внимание на пакет `fitdistrplus` и на [руководство](#) по работе с ним (англ. яз.).

### **Выявление избыточного количества нулевых значений**

Важным этапом разведочного анализа данных является обнаружение "избыточного" количества нулевых значений. Данные, включающие большое количество нулей, традиционны, например, в экологических исследованиях, когда исследователь оценивает численность популяции того или иного вида. Особи одной популяции редко распределены в пространстве равномерно – чаще они образуют скопления в силу, например, неоднородности распределения необходимых им факторов среды или для повышения выживаемости. Обследуя территорию, на которой обитает популяция с таким типом пространственного распределения, исследователь в большинстве случаев не встретит ни одной особи изучаемого вида, реже ему попадутся единичные экземпляры, и лишь иногда – большие скопления особей.

Для анализа характера распределения данных такого рода (англ. count data – "счетные данные") бывает достаточно построить гистограмму или полигон частот. Часто счетные данные подчиняются отрицательному биномиальному распределению или распределению Пуассона, поэтому для их анализа не подходят обычные модели линейной регрессии, предполагающие нормальное распределение остатков. Здесь следует использовать *обобщенные линейные модели (Generalized Linear Models)* с соответствующим распределением остатков – см. справочный файл по функции `glm()`.

Однако во многих случаях количество нулей оказывается слишком большим, чем это предсказывают отрицательное биномиальное распределение или распределение Пуассона. В таких данных имеет место избыточная дисперсия, с которой обычным обобщенным линейным моделям "не справиться". Выходом здесь могут стать так называемые обобщенные линейные модели для данных с *избыточным количеством нулей (Zero Inflated Generalized Linear Model)*. Рекомендуем в этой связи почитать часто цитируемую обзорную работу ([Zeileis et al., 2008](#)), в которой рассмотрены возможности R для регрессионного анализа счетных данных, включая *Zero Inflated GLM*. Много подробных примеров из экологии (с сопутствующим R-кодом) можно найти в книге А. Цуура с соавторами (Zuur et al., 2009).

### **Выявление коллинеарности**

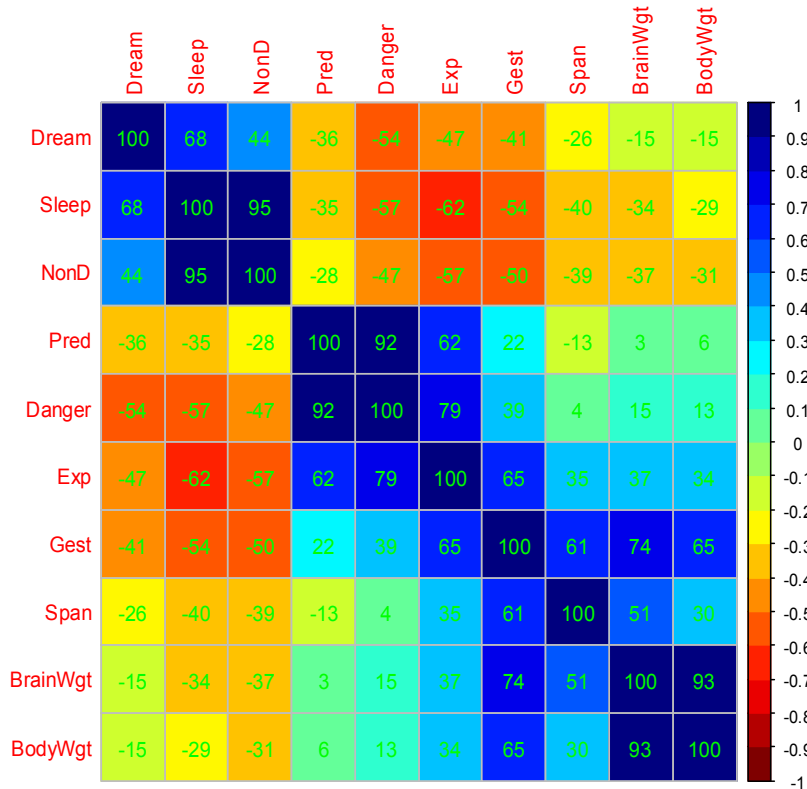
Когда цель анализа заключается в нахождении переменных (*предикторов*), связанных со значениями *зависимой переменной*, важным этапом разведочного анализа данных является обнаружение коллинеарности. Под *коллинеарностью* (англ. *collinearity*) понимают наличие линейной зависимости между двумя предикторами. В задачах с несколькими предикторами (например, при выполнении *множественного регрессионного анализа*) говорят также о *мультиколлинеарности* (англ. *multicollinearity*), т.е. наличии линейной зависимости сразу между несколькими переменными.

Проблема *мультиколлинеарности* приводит к проблемам при вычислении регрессионных коэффициентов: оценки параметров модели оказываются неустойчивыми и становится трудно анализировать вклад каждого отдельного фактора в прогнозируемую величину. Как результат, исследователь может столкнуться с "парадоксальной" ситуацией, когда, например, все коэффициенты множественной регрессионной модели статистически незначимы, тогда как сама модель оказывается значимой (т.е. проверяемая при помощи *F*-теста гипотеза о равенстве *всех* коэффициентов нулю отвергается).

Традиционным способом оценки мультиколлинеарности является анализ корреляционной матрицы. Хорошим способом повысить наглядность отображения уровня взаимных зависимостей переменных является использование раскрашенных матриц, создаваемых функцией `corrplot()` из одноименного пакета. Рассмотрим пример с изучением потребности в сне у животных, использованный в разделе 4.4 (в

приведенном ниже коде предполагается, что таблица данных с заполненными пропусками sleep\_imp.Rdata была сохранена ранее нами для дальнейшего использования):

```
load(file="sleep_imp.Rdata")
M <- cor(sleep_imp3)
library(corrplot)
col4 <- colorRampPalette(c("#7F0000", "red", "#FF7F00", "yellow",
"#7FFF7F", "cyan", "#007FFF", "blue", "#00007F"))
corrplot(M, method="color", col=col4(20), cl.length=21,
order = "AOE", addCoef.col="green")
```



Нетрудно выделить на рисунке два блока предикторов: таксономические (BodyWgt + BrainWgt) и экологические (Pred + Danger) показатели, которые высоко коррелируют между собой.

Другим способом оценить степень мультиколлинеарности  $m$ -мерного комплекса переменных является вычисление фактора инфляции дисперсии (*Variance Inflation Factor, VIF*), который для каждого  $j$ -го предиктора из  $m$  тем выше, чем теснее его линейная связь со всеми остальными ( $m - 1$ ) независимыми переменными. Значения *VIF* находятся следующим образом:

- строится регрессионная модель зависимости переменной  $X_j$  от всех остальных предикторов:
$$X_j = \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_m X_m + \beta_0 + \varepsilon;$$
- рассчитывается коэффициент детерминации  $R_j^2$  для полученной регрессионной модели и оценивается доля увеличения дисперсии коэффициента регрессии  $\beta_j$  вследствие эффекта корреляции данных по следующей формуле:

$$VIF(\beta_j) = 1/(1 - R_j^2);$$

- эти действия выполняются последовательно для всех переменных  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Значение фактора инфляции дисперсии, равное 1, говорит об ортогональности вектора реализаций признака по отношению ко всем остальным. Принято считать, что значения *VIF<sub>j</sub>* от 1 до 2 (что соответствует  $R_j^2$  от 0 до 0.5) означают отсутствие проблемы

мультиколлинеарности для  $X_j$ , т.е. добавление в модель или удаление из нее любых других независимых переменных не изменяет ни самой оценки коэффициента  $\beta_j$ , ни критериев его статистической значимости. Если  $VIF_j = 4$ , то это означает, что ошибка выборочной оценки параметра  $\beta_j$  в  $(4)^{0.5} = 2$  раза превышает эту оценку, но полученную при полном отсутствии мультиколлинеарности.

Функции для автоматического расчета  $VIF$  и выполнения перечисленных выше шагов реализованы в нескольких пакетах для R. Одним из примеров таких функций является `vif()` из пакета `car`:

```
library(car)
vif(lm(Sleep~BodyWgt+BrainWgt+Span+Gest+Pred+Exp+Danger,data=sleep_imp3))
BodyWgt BrainWgt Span Gest Pred Exp Danger
12.363 15.895 2.659 4.124 8.211 4.921 12.879
```

Представленные оценки вектора  $VIF$  указывают на высокую мультиколлинеарность предикторных переменных рассматриваемого примера.

Предложена итерационная процедура построения моделей с использованием фактора инфляции дисперсии: значения  $VIF_j$  сравниваются с выбранным пороговым значением и предиктор с максимальным  $VIF$ , превышающим пороговое значение, исключается из анализа (эти шаги повторяются, пока в модели не останутся предикторы с низкими  $VIF$ ). Процедура селекции информативного комплекса предикторов будет более подробно обсуждаться нами в главе 7. Пока же отметим, что к формальному исключению предикторов стоит относиться критически, поскольку «с водой легко выплеснуть и ребенка». Так, например, нет единого мнения в отношении того, какое значение  $VIF$  следует считать пороговым (обычно  $VIF = 5$ , хотя реже предлагается и  $VIF = 10$ ).

### **Выявление характера связи между переменными**

Существующие в природе количественные соотношения между переменными являются, как правило, нелинейными, и часто выполняемое приведение их к линейной форме – лишь одна из возможностей удобной аппроксимации, которая не обязательно будет удовлетворительно моделировать изучаемые процессы по наблюдаемым данным. Поэтому на этапе разведочного анализа данных важно исследовать характер взаимодействия между анализируемыми переменными. Например, получив невысокий коэффициент корреляции Пирсона, мы можем сделать неверный вывод об отсутствии взаимного влияния факторов, поскольку эта связь может иметь нелинейный характер (см. раздел 5.6). Обнаруженные на этом этапе закономерности будут определять выбор статистической модели для описания данных, необходимость преобразования нелинейно связанных переменных и т.д.

Характер связи между переменными проще всего выявить, используя соответствующие графические средства. Так, при анализе нескольких количественных переменных очень удобным инструментом являются *матричные диаграммы рассеяния* (англ. *scatterplot matrices*), или *парные диаграммы рассеяния* (англ. *pair plots*). Матричные диаграммы рассеяния в R можно построить при помощи нескольких функций. Проще всего воспользоваться базовой R-функцией `pairs()`, которая имеет ряд аргументов для тонкой настройки графика.

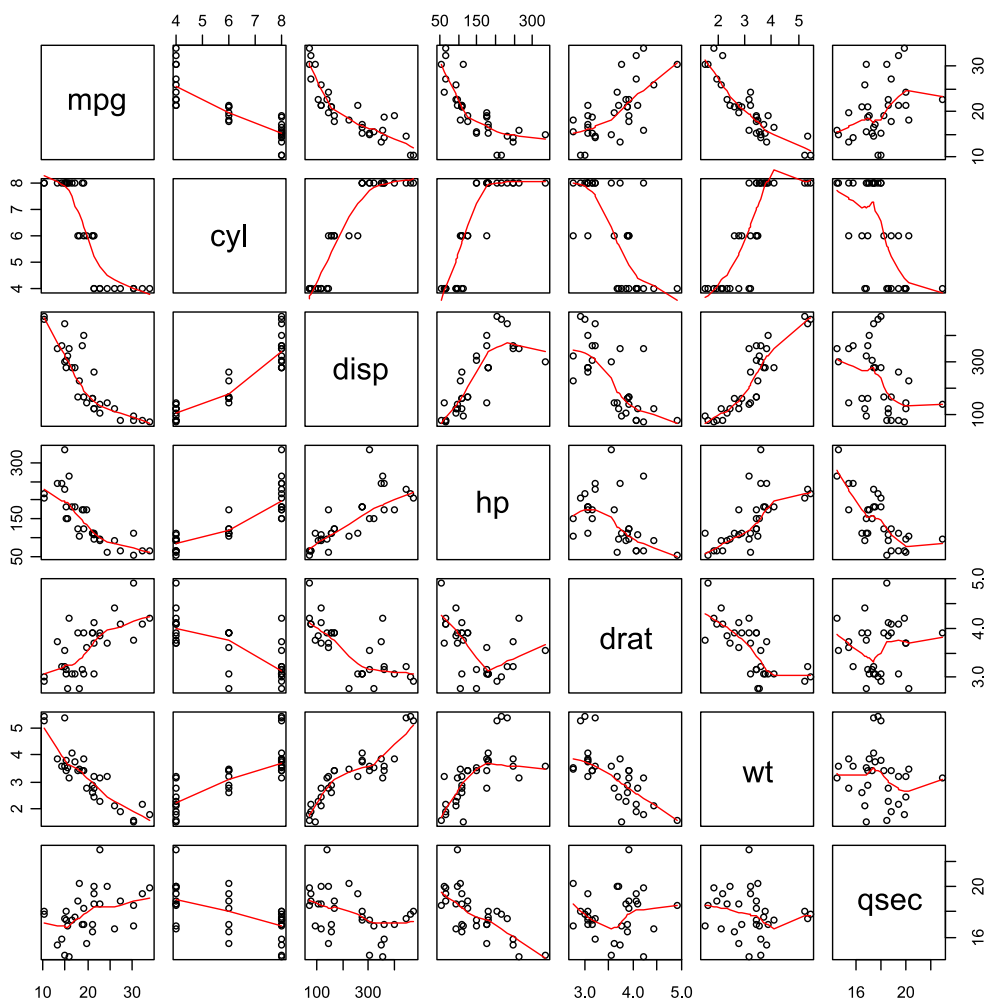
В качестве примера рассмотрим первые семь количественных параметров, описывающих разные модели автомобилей, из таблицы `mtcars` (эти данные уже были использованы нами в разделе 3.5). Для облегчения интерпретации характера связи между анализируемыми переменными мы можем добавить сглаживающую кривую к каждой диаграмме рассеяния (аргумент `panel` со значением `panel.smooth`):

```
cars <- mtcars[, 1:7]
```

```
pairs(cars, panel = panel.smooth)
```

Аргументы `lower.panel` и `upper.panel` позволяют назначить практически любую функцию для преобразования исходных данных и последующего отображения результатов работы этой функции на графике (ниже или выше центральной диагонали матрицы соответственно). Например, вот так мы можем добавить к графику значения коэффициентов корреляции Спирмена, определив собственную функцию заполнения панели:

```
# Функция для оформления панелей с коэффициентом корреляции
panel.cor <- function(x, y, digits = 2,
  prefix = "", cex.cor, ...)
{
  usr <- par("usr"); on.exit(par(usr))
  par(usr = c(0, 1, 0, 1))
  r <- abs(cor(x, y, method = "spearman"))
  txt <- format(c(r, 0.123456789), digits=digits)[1]
  txt <- paste(prefix, txt, sep = "")
  # эта команда позволяет изменять размер шрифта
  # в соответствии со значением коэффициента корреляции:
  if(missing(cex.cor)) cex.cor <- 0.8/strwidth(txt)
  text(0.5, 0.5, txt, cex = cex.cor * r)
}
# Строим сам график:
pairs(cars, , panel = panel.smooth, lower.panel = panel.cor)
```



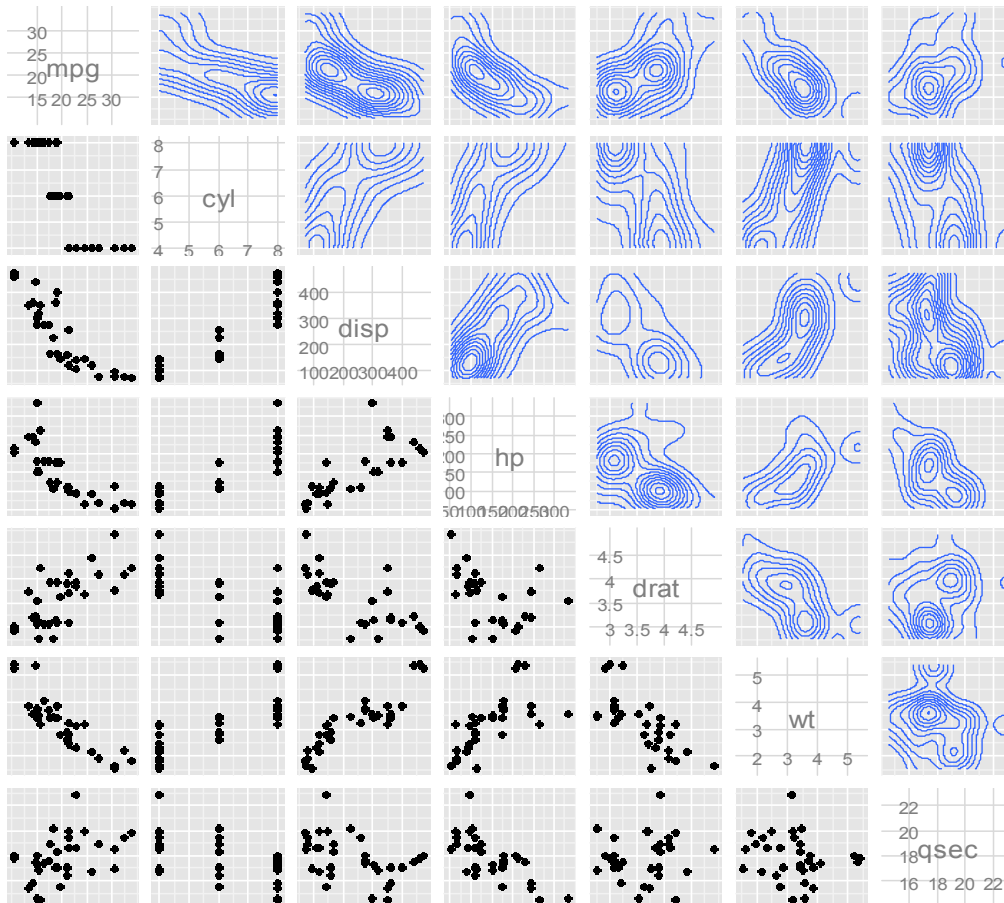


Построение матричных диаграмм рассеяния возможно также с использованием функции `splom()` из графического пакета `lattice`:

```
library(lattice)
splom(cars)
```

Функция `ggpairs()` из пакета `GGally`, служащего дополнением к одному из лучших графических пакетов для R – `ggplot2`, позволяет строить как простые матричные диаграммы рассеяния, так и гораздо более сложные графики, включающие, например, двухмерные диаграммы ядерной плотности:

```
ggpairs(cars,
  upper = list(continuous = "density", combo = "box"),
  lower = list(continuous = "points", combo = "dot"))
```



Для количественной оценки справедливости линейной спецификации модели можно использовать значения *эффективных степеней свободы* (*EDF – effective degrees of freedom*) нелинейных сглаживающих функций для каждой из независимых переменных. Значения EDF легко получить с использованием обобщенной аддитивной модели GAM и функции `gam()` пакета `mgcv` (Wood, 2006), которые подробно рассматриваются далее в главе 8. Например, для зависимостей между параметрами моделей автомобилей:

```
library(mgcv)
summary(gam(mpg ~ s(hp) + s(qsec), data=cars))
Approximate significance of smooth terms:
      edf Ref.df      F p-value
s(hp)  2.642  3.276 24.08 4.8e-08 ***
s(qsec) 1.228  1.412  3.35  0.065 .
```

Значения оценок EDF, превышающие 1.5, свидетельствуют о существенной степени нелинейности связи между переменными. По результатам проведенного расчета можно предположить, что расход топлива (mpg) линейно связан со скоростью на ¼ мили (qsec) и нелинейно с объемом цилиндров (disp):

<u>disp</u>	<u>hp</u>	<u>wt</u>	qsec	drat
5.636	2.642	2.096	1.228	1

### **Выявление взаимодействий между предикторами**

Как было показано выше, вопрос о силе и характере взаимодействия между предикторами, измеренными в номинальных шкалах, решается с использованием корреляционного анализа или функций сглаживания. В отношении категориальных переменных отличным инструментом для выявления взаимодействий между анализируемыми предикторами являются категоризованные графики R (мы подробно рассматривали их в разделе 3.6).

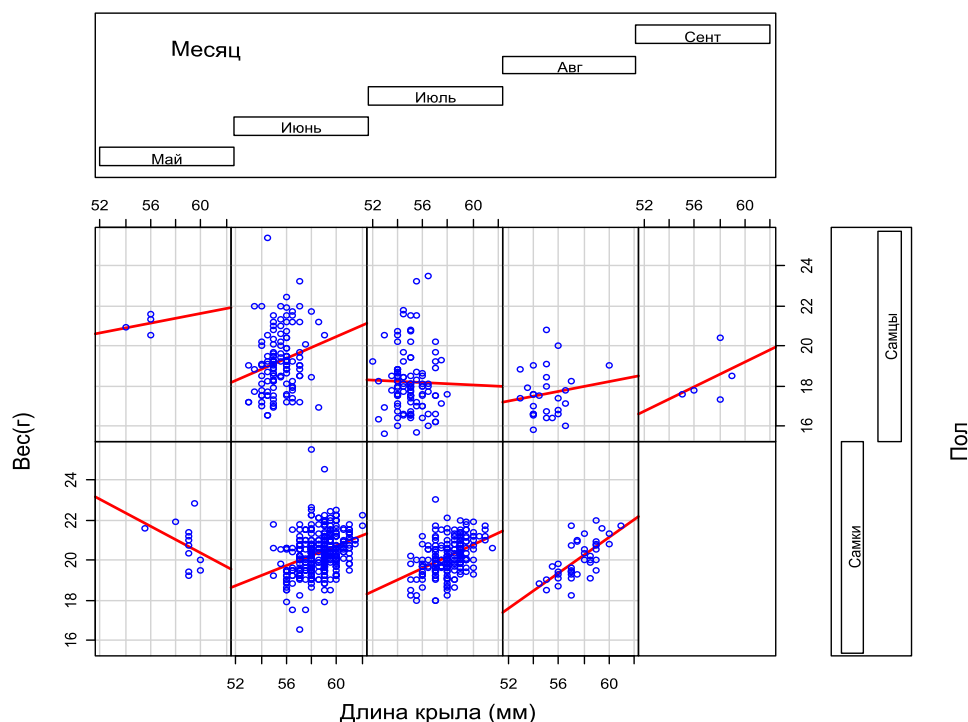
Обратимся к орнитологическому примеру, обсуждаемому Цууром с соавт. ([Zuur et al., 2010](#)). Файл с исходными данными доступен для скачивания в составе комплекта приложений к статье на [onlinelibrary.wiley.com](#). Исследователи задались вопросом о существовании *взаимодействия между* весом воробьев (weight), длиной их крыльев (length), полом (sex) и временем года (month).

```
# Загрузка исходных данных из файла
Sparrows <- read.table(file = "SparrowsElphick.txt", header = TRUE)
# Отбираем необходимый комплект данных: воробьи с длиной крыла >= 65
I1 <- Sparrows$SpeciesCode==1 & Sparrows$Sex != "0" & Sparrows$wingcrd<65
Wing1 <- Sparrows$wingcrd[I1]
Wt1 <- Sparrows$wt[I1]
Mon1 <- factor(Sparrows$Month[I1])
Sex1 <- factor(Sparrows$Sex[I1])
# Определим месяц и пол как категориальные переменные
fMonth1 <- factor(Mon1, levels=c(5, 6, 7, 8, 9),
                  labels=c("May", "Jun", "Jul", "Aug", "Sep"))
fSex1 <- factor(Sex1, levels =c(4, 5),
                labels=c("Male", "Female"))
```

Силу и направление связи между весом воробьев и длиной крыла в зависимости от их пола и времени проведения измерений наглядно и во всех деталях можно проанализировать на категоризованных диаграммах рассеяния. Для удобства интерпретации этой связи к каждому графику добавим линии регрессии. Если прямые на всех приведенных диаграммах окажутся параллельными, то можно сделать вывод об отсутствии влияния пола воробьев и времени года на связь между длиной крыла и весом птиц.

```
# Вывод категориальной диаграммы
coplot(Wt1 ~ Wing1 | fMonth1 * fSex1, ylab = "Weight (g)",
        xlab = "Wing length (mm)",
        panel = function(x, y, ...) {
          tmp <- lm(y ~ x, na.action = na.omit)
          abline(tmp)
          points(x, y) })
```





Поскольку линии регрессии на диаграмме не параллельны, это указывает на необходимость включения в статистическую модель соответствующих взаимодействий. На языке R эту модель можно было бы записать в виде `weight ~ length*sex*month`. Подобная запись предполагает наличие в модели эффектов всех трех индивидуальных предикторов, а также всех парных и одного тройного взаимодействия.

Средства визуализации позволяют также наглядно установить, что для некоторых сочетаний "месяц/пол" мы имеем недостаточно репрезентативное число наблюдений (например, в сентябре данные для самцов не были получены вовсе), что может подвергнуть сомнению результаты последующего анализа.

Выполним трехфакторный дисперсионный анализ с учетом взаимодействий, причем воспользуемся для этого комбинацией функций `lm()` и `anova()`, о которых речь пойдет в следующих разделах. Пользуясь случаем, покажем, как можно вывести таблицу дисперсионного анализа непосредственно в файл Microsoft Word с применением пакета `stargazer`, который специально предназначен для вывода информации о статистических моделях в форматах LATEX, HTML и ASCII. Многочисленные управляющие параметры функции `stargazer()` позволяют получить в желаемом виде необходимые результаты расчетов:

```
# Удаляем данные за май и сентябрь
df <- data.frame(weight=Weight, length=Wing1, sex = fSex1, month = fMonth1)
df1 <- df[df$month != "May" & df$month != "Sep", ]
# Строим линейную модель и получаем дисперсионную таблицу
M1 <- lm(weight ~ length*month*sex, data=df1)
DT <- anova(M1)
# Выводим результаты расчетов в таблицы файлов Word
require(stargazer)
stargazer(M1, type="html", out="M1.doc")
stargazer(DT, type="html", out="DT.doc", summary=FALSE)
```

Как следует из полученной таблицы, статистически значимым являются как влияние всех трех независимых предиктора, так и эффекты трех парных и тройного взаимодействия:

**Analysis of Variance Table**

	<i>Df</i>	<i>Sum Sq</i>	<i>Mean Sq</i>	<i>F value</i>	<i>Pr(&gt; F)</i>
<i>Response: weight</i>					
length	1	537.216	537.216	446.246	0
month	2	25.233	12.617	10.480	0.00003
sex	1	64.997	64.997	53.991	0
length:month	2	23.375	11.687	9.708	0.0001
length:sex	1	5.446	5.446	4.524	0.034
month:sex	2	26.887	13.443	11.167	0.00002
length:month:sex	2	8.683	4.342	3.607	0.028
Residuals	872	1,049.763	1.204		

### **Влияние пространственно-временных факторов на анализируемую переменную**

Важным условием корректности статистического анализа является решение проблемы "мнимых повторностей" (или псевдорепликации), обсуждаемой С. Хелбертом (Hulbert, 1984), перевод статьи которого вместе с подробными комментариями представлен в сборнике «Проблемы экологического эксперимента» (2008). Псевдорепликация является одним из наиболее широко цитируемых и недооцененных на практике понятий и определяется как «использование дедуктивной статистики для оценки влияния фактора, когда данные эксперимента фактически не имеют повторностей или эти повторности не являются статистически независимыми...».

Например, мы ставим своей целью выявить влияние качества воды на популяционную плотность рыбных сообществ, но этот показатель зависит в свою очередь от сезонного периода и гидрологических характеристик участка реки, откуда брались пробы. Поэтому при оценке статистической значимости воздействия загрязнения на встречаемость рыб необходимо обязательно учесть вариацию значений отклика, обусловленную пространственно-временными факторами. Если игнорировать их влияние, то можно значительно увеличить вероятность ошибки первого рода: например, при выполнении регрессионного анализа эта ошибка может возрасти до 400% (Ostrom, 1990).

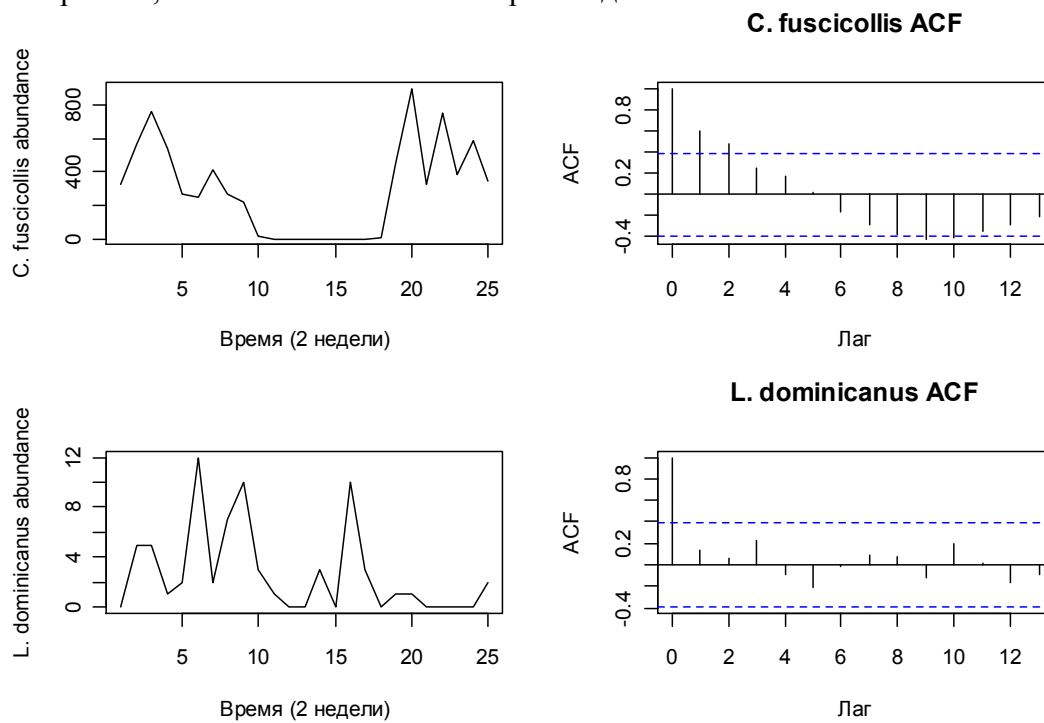
Существует несколько основных принципов обеспечить статистическую независимость повторностей эксперимента от контролируемых внешних факторов:

1. *Рандомизация*, т.е. планирование экспериментальных групп таким образом, чтобы они отличались между собой (в среднем!) лишь уровнем изучаемого воздействия, а прочие факторы влияли бы на сформированные группы случайно и равновероятно;
2. Использование *моделей со смешанными эффектами*, о которых мы расскажем в главе 8; в них присутствуют особые члены – случайные факторы, которые аккумулируют в себе всю возможную пространственно-временную изменчивость (Pinheiro, Bates, 2000; Zuur et al., 2009);
3. Анализ временной и пространственной *автокорреляции* отклика и построение кригинговых моделей, в которых регулярная составляющая изменчивости рядов данных учитывается посредством специально сконструированных предикторов.

В динамических рядах данных неизбежно содержатся существенные периодические колебания (суточные, сезонные, многолетние) вокруг некоторой общей тенденции, которая и сама может иметь периодический характер. Известный русский математик Е.Е.Слущкий (1927), положивший начало анализу периодичностей, писал: «Наличие синусоидальных волн различных порядков, начиная с длинных, обнимающих

десятилетия, продолжая циклами примерно от пяти до десяти лет длиной и кончая совсем короткими волнами, остается как факт, требующий объяснения».

Один из наиболее простых подходов оценки автокорреляции между значениями анализируемой переменной заключается в построении графика зависимости отклика от времени или пространственных координат. Наличие каких-либо четких паттернов на таком графике будет указывать на существование корреляции между значениями этой переменной. На рисунке внизу слева показаны два небольших временных ряда, отражающих динамику численности двух видов птиц на одном из побережий Аргентины ([Zuur et al., 2010](#)). Динамика численности первого вида демонстрирует четкую закономерность, чего нельзя сказать о втором виде.



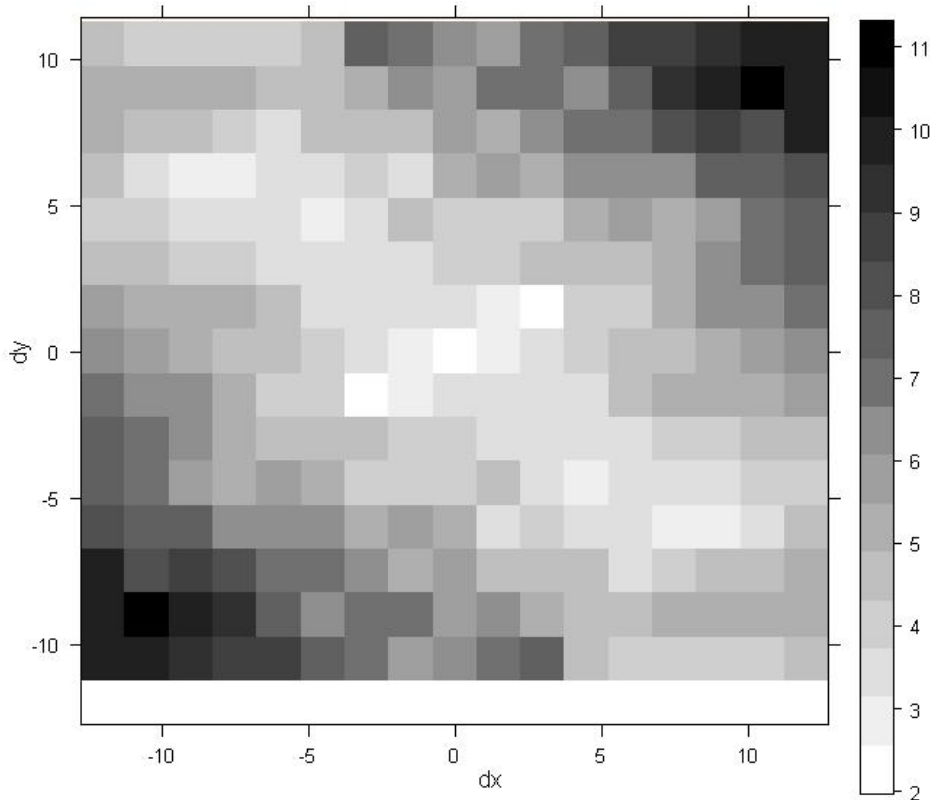
Формальным способом проверки наличия временной взаимосвязи между значениями анализируемой переменной является анализ графика *автокорреляционной функции* (АКФ). При оценке этой функции последовательно происходит расчет коэффициента корреляции Пирсона между значениями того же временного ряда, но каждый раз взятых со сдвигом по времени на определенную величину  $k$  (лаг). В среде R для расчета АКФ служит функция `acf()`:

```
# Загрузка данных и определение оси времени
Waders <- read.table(file = "wader.txt", header = TRUE)
Time <- seq(1, 25)
# Построение четырех графиков в одном окне
par(mfrow = c(2, 2), mar = c(5, 4, 3, 2))
plot(Time, Waders$C.fuscicollis, type = "l", xlab =
      "Время (2 недели)", ylab = "C. fuscicollis abundance")
acf(Waders$C.fuscicollis, main = "C. fuscicollis ACF")
plot(Time, Waders$L.dominicanus, type = "l", xlab =
      "Время (2 недели)", ylab = "L. dominicanus abundance")
acf(Waders$L.dominicanus, main = "L. dominicanus ACF")
```

Результатом работы этой функции является построение графиков, приведенных на рисунке вверху справа, где хорошо видна тесная временная взаимосвязь между значениями численности *C. fuscicollis* на протяжении первых четырех недель (т.е. до  $k =$

2; величина лага  $k$  соответствует двум неделям). В то же время для второго вида – *L. dominicanus* – подобная зависимость не наблюдается.

Эффективным способом визуальной оценки пространственной анизотропии изучаемого явления является построение поверхности вариограммы, пример которой представлен для распределения численности моллюска *B. cylindrica* на пробном участке парка в г. Днепропетровске (Шитиков, Розенберг, 2014):



С доступным математическим описанием этого метода можно ознакомиться, например, на сайте [dvseisgeo.ru](http://dvseisgeo.ru). Функции для построения вариограмм входят в состав нескольких пакетов для R (например, функция `Variogram()` из стандартного R-пакета `nlme`; функция `variog()` из пакета `geoR`; функция `variogram()` из пакета `gstat`).

Что же делать, если рассмотренный выше разведочный анализ данных выявил некоторые отклонения от пунктов представленного протокола? Ответ таков: использовать современные статистические методы, позволяющие корректно учесть отсутствие необходимых исходных предположений о нормальности, однородности и независимости. Речь, прежде всего, идет об активном использовании рандомизации, бутстрепа, байесовских методов, робастных форм регрессии, обобщенных линейных и аддитивных моделей и др.

## 6.2. Линейные модели дисперсионного анализа

В разделе 5.5, который представлял собой введение в дисперсионный анализ (ANOVA), мы упомянули о том, что в R этот анализ можно выполнить как с помощью функции `aov()`, так и `lm()`, которая предназначена для построения линейных регрессионных моделей. Напомним, что под *статистическими моделями* понимаются математические выражения, описывающие связь между анализируемыми случайными переменными. Модель считается *линейной* (или обладает свойством *суперпозиции*), если отклик системы на сумму независимых воздействующих факторов равен сумме откликов на каждое воздействие.

Суть "классического" однофакторного дисперсионного анализа мы рассматривали на примере эксперимента (Maindonald, Braun, 2010), в котором томаты выращивали при трех разных экспериментальных условиях: на воде, в среде с добавлением удобрения, а также в среде с добавлением удобрения и гербицида. В конце эксперимента был измерен вес растений из этих трех групп.

Мы выяснили, что каждое измеренное значение веса растений можно разложить на следующие составляющие:

$$x_{ij} = \bar{x}_{..} + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i.}) \quad (1)$$

где  $(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})$  – отклонения групповых средних от общего среднего значения (т.е. вычисленного по всем значениям веса растений), а  $(x_{ij} - \bar{x}_{i.})$  – отклонения отдельных наблюдений от среднего значения группы, к которой они принадлежат.

Используя эти отклонения, а также учитывая число анализируемых групп и число наблюдений в каждой группе, мы далее рассчитали меж- и внутригрупповую дисперсии и сравнили их при помощи  $F$ -критерия Фишера. Исходя из величины полученного критерия, был сделан вывод, что нулевую гипотезу об отсутствии разницы между групповыми средними значениями массы растений отклонять нельзя.

Уравнение (1) для однофакторного дисперсионного анализа можно записать в более простом виде:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

где  $y_{ij}$  – вес растения  $j$  из экспериментальной группы  $i$ ,  $\mu$  – среднее значение веса всех задействованных в эксперименте растений,  $\alpha_i$  – разность между  $\mu$  и средним значением растений в группе  $i$ , а  $\varepsilon_{ij}$  – это *остатки*, отражающие отклонения отдельных наблюдений в группе  $i$  от среднего значения этой группы. Предполагается, что остатки имеют нормальное распределение со средним значением 0 и стандартным отклонением  $\sigma$ , причем это стандартное отклонение *одинаково во всех группах*.

Можно заметить, что уравнение (2) почти ничем не отличается от уравнения простой регрессии (3), которая, выражаясь терминами статистики, является линейной моделью, в которой *переменная-отклик* аддитивна относительно эффектов, оказываемых *предикторами* (т.е. независимыми переменными по правую сторону равенства):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (3)$$

где  $y_i$  – это  $i$ -е значение зависимой *количественной переменной*  $y$ ;  $x_i$  – значение *количественного предиктора*  $x$ , соответствующее  $i$ -тому значению  $y$ ;  $\beta_0$  – значение, которое принимает  $y$  при  $x = 0$  (геометрически, это точка, в которой линия регрессии пересекает ось  $Y$ ; отсюда англ. термин для этого коэффициента – *intercept*, что значит "пересечение");  $\beta_1$  – *коэффициент регрессии*, который показывает, насколько изменяется  $y$  при изменении  $x$  на одну единицу;  $\varepsilon_i$  – это *остатки*, т.е. разница между наблюдаемыми значениями  $y_i$  и средними значениями, предсказанными моделью для каждого  $x_i$ .

Наиболее важные отличия между уравнениями (2) и (3) заключаются в следующем:

- В обоих случаях зависимая переменная  $y$  является количественной. Однако в дисперсионном анализе значения  $y$  сгруппированы в соответствии с  $i$  уровнями изучаемого фактора – отсюда индекс  $i$  в обозначении  $y_{ij}$ , указывающий, к какой группе принадлежит каждое наблюдение.

- В ANOVA независимая переменная является *качественной*, тогда как в регрессионной модели мы имеем дело с *количественным* предиктором. Степень взаимосвязи между предиктором и независимой переменной в регрессионной модели определяется *коэффициентом регрессии*  $\beta_1$  в уравнении (3). В дисперсионном анализе *размер эффекта* изучаемого фактора (т.е. степень отклонения групповой средней от общего среднего значения) выражен при помощи разностей  $\alpha_i$ .

К сожалению, с моделью в уравнении (2) имеется одна проблема – не все ее параметры *идентифицируемы*. Это значит, что существует бесконечное множество возможных (*неуникальных*) значений параметров модели. Например, если мы добавим к  $\mu$  2.5 (или любую другую константу) и соответственно вычтем 2.5 из каждого  $\alpha_i$ , то получим точно те же значения  $y_{ij}$ . Однако проблему неидентифицируемости можно легко обойти, наложив определенные ограничения на параметры модели.

При работе с категориальными предикторами (факторами) возможны несколько разных подходов к наложению подобных ограничений – см., например, (Faraway, 2009, с. 191-192). Во многих статистических программах, включая R, величину эффекта для первого уровня анализируемого фактора ("*базового*" уровня; англ. *reference level* или *baseline level*) по умолчанию принимают равной 0:  $\alpha_1 = 0$ . Тогда  $\mu$  будет представлять собой среднее значение зависимой переменной для базового уровня фактора (например, в контрольной группе какого-либо эксперимента), тогда как  $\alpha_i$  для  $i \neq 1$  будут отражать разницу между средним значением базового уровня и средними значениями остальных уровней. Используя этот подход, мы можем переписать уравнение (2) в виде регрессионного уравнения следующим образом:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{k-1} x_{k-1} + \varepsilon_i \quad (4)$$

где  $\beta_0$  – среднее значение зависимой переменной для базового уровня изучаемого фактора (например, в контрольной группе);  $\beta_1 \dots \beta_{k-1}$  – коэффициенты, отражающие разницу между средним значением базового уровня и средними значениями остальных уровней;  $\varepsilon_i$  – остатки.

Ключевой момент для понимания здесь состоит в том, что уровни изучаемого фактора (всего имеется  $k$  таких уровней) закодированы при помощи дополнительной переменной-индикатора  $x$  (англ. *dummy variable*, дословно "переменная-пустышка"), которая может принимать только два значения – 0 или 1, в зависимости от того, к какому уровню принадлежит конкретное наблюдение  $y_i$ . Например, если наблюдение  $y_3$  принадлежит к уровню  $x_1$ , тогда  $x_1$  в уравнении (4) примет значение 1, а  $x_2 \dots x_{k-1}$  все будут равны 0, и, следовательно, для наблюдения  $y_3$  регрессионное уравнение примет вид:

$$y_3 = \beta_0 + \beta_1 \times 1 + \varepsilon_3 = \beta_0 + \beta_1 + \varepsilon_3$$

Уравнение (4) как раз и описывает ту линейную модель, которая рассчитывается в R при выполнении однофакторного дисперсионного анализа с помощью функции `lm()`. Посмотрим, как это всё работает, вернувшись к примеру с растениями томатов, которые выращивали при разных экспериментальных условиях.

# Создадим таблицу с данными:

```
tomato <-
  data.frame(weight=
    c(1.5, 1.9, 1.3, 1.5, 2.4, 1.5, # water
      1.5, 1.2, 1.2, 2.1, 2.9, 1.6, # nutrient
      1.9, 1.6, 0.8, 1.15, 0.9, 1.6), # nutrient+24D
    trt = rep(c("Water", "Nutrient", "Nutrient+24D"),
      c(6, 6, 6)))
```

В зависимости от стоящей задачи, исследователь волен выбрать в качестве базового любой уровень изучаемого фактора. В рассматриваемом примере имеет смысл проводить сравнения с уровнем `Water` (растения, выращенные на воде). Если базовый уровень не задан исследователем однозначно, то функция R автоматически расположит названия всех уровней в алфавитном порядке и выберет в качестве базового первый уровень из этого списка (например, в нашем случае это был бы уровень `Nutrient`). Задать базовый уровень фактора в R позволяет функция `relevel()`:

```

# Автоматически R выберет Nutrient в качестве базового уровня:
levels(tomato$trt)
[1] "Nutrient"      "Nutrient+24D" "Water"
# Изменим базовый уровень на Water:
tomato$trt <- relevel(tomato$trt, ref = "Water")
levels(tomato$trt)
[1] "Water"        "Nutrient"      "Nutrient+24D"

```

Теперь рассчитаем коэффициенты линейной модели для рассматриваемого эксперимента:

```

# Сохраним модель в виде объекта с именем M:
M <- lm(weight ~ trt, data = tomato)
# Просмотрим результаты вычислений:
summary(M)
Call:
lm(formula = weight ~ trt, data = tomato)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.5500 -0.3500 -0.1792  0.2750  1.1500
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      1.68333    0.20849   8.074 7.69e-07 ***
trtNutrient       0.06667    0.29485   0.226  0.824
trtNutrient+24D -0.35833    0.29485  -1.215  0.243
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.5107 on 15 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1381, Adjusted R-squared: 0.02321
F-statistic: 1.202 on 2 and 15 DF,  p-value: 0.328

```

Разберемся с основными элементами результатов анализа. Прежде всего, программа напоминает нам, к какой модели относятся выводимые результаты (это бывает очень удобно при одновременном построении большого количества моделей): Call: lm(formula = weight ~ trt, data = tomato). Далее следует сводная информация о распределении остатков (Residuals: ...; на эту тему мы поговорим позднее).

Самая интересная часть таблицы с результатами анализа представлена под заголовком Coefficients. Здесь приведены оценки коэффициентов построенной нами модели  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon_i$ . В первой строке (Intercept) мы видим информацию, относящуюся к коэффициенту  $\beta_0$ . В столбце Estimate ("оценка") представлено рассчитанное значение этого коэффициента (1.683), которое равно среднему весу растений в группе Water (установленный нами базовый уровень изучаемого фактора). Во второй строке (trtNutrient) мы находим коэффициент  $\beta_1$ , который отражает разность между базовым уровнем и средним значением в группе Nutrient ( $1.683 + 0.067 = 1.750$ ). Наконец, в третьей строке (trtNutrient+24D) мы видим коэффициент  $\beta_2$ , который отражает разность между базовым уровнем и средним значением в группе Nutrient+24D ( $1.683 - 0.358 = 1.325$ ). Верность описанной интерпретации полученных коэффициентов мы можем легко проверить, рассчитав средние значения для каждой экспериментальной группы:



```
tapply(tomato$weight, tomato$trt, mean)
      Water      Nutrient Nutrient+24D
1.683333  1.750000  1.325000
```

В столбцах Std. Error, t value и Pr(>|t|) представлены стандартные ошибки рассчитанных коэффициентов, значения  $t$ -критерия Стьюдента, который используется для проверки гипотезы о равенстве коэффициента нулю, и  $p$ -значения для каждого  $t$ -критерия соответственно. Как видим, ни один из исследованных уровней фактора "условия выращивания" не отличается от базового уровня по среднему значению веса растений – в обоих случаях  $p$ -значения регрессионных коэффициентов оказались  $>0.05$ , что указывает на то, что наблюдаемое их отличие от нуля с большой долей вероятности является случайным. Другими словами: исследованные условия выращивания в среднем не оказали никакого влияния на вес растений по сравнению с растениями, выращенными на воде.

Далее в таблице с результатами анализа мы видим:

- Residual standard error – оценка стандартного отклонения остатков. Вспомним: предполагается, что остатки имеют нормальное распределение со средним значением 0 и стандартным отклонением  $\sigma$ . В данной строке результатов анализа как раз и приводится оценка значения  $\sigma$ .
- Multiple R-squared и Adjusted R-squared – коэффициент детерминации и коэффициент детерминации с поправкой на число параметров модели соответственно.
- F-statistic – значение критерия Фишера, при помощи которого проверяется нулевая гипотеза о том, что все коэффициенты истинной модели (в нашем случае  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ) равны 0.

Значение  $F$ -критерия для линейных моделей рассчитывается как отношение дисперсии в данных, "объясненной" параметрами модели, к дисперсии остатков (т.е., части общей дисперсии, которую модель "не объясняет"). Это легко увидеть, используя объект M как параметр функции `anova()` (не путать с `aov()`):

```
anova(M)
Analysis of Variance Table
Response: weight
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
trt    2  0.6269  0.31347   1.2019  0.328
Residuals 15  3.9121  0.26081
```

Полученная дисперсионная таблица идентична таблице с результатами однофакторного дисперсионного анализа, которую мы представили в разделе 5.5 с использованием функции `aov()`.

Идентичность результатов не удивительна, поскольку, в конечном счете, мы в обоих случаях оцениваем одни и те же наиболее важные величины – дисперсию в данных, ассоциированную с действием изучаемого фактора, и остаточную дисперсию, которую мы не можем приписать действию этого фактора. С точки зрения программного кода, `aov()` является лишь "функцией-упаковщиком" (англ. *wrapper function*), назначение которой сводится к вызову функции `lm()`. Различие между этими двумя функциями состоит только в том, как получаемые с их помощью результаты выводятся при подаче на `print()` и `summary()`. В случае с `aov()` результаты выводятся в виде классической таблицы дисперсионного анализа, а не в виде списка с коэффициентами линейной модели.

Следует также отметить, что функция `aov()` предназначена для анализа сбалансированных наборов данных, т.е. таких ситуаций, когда имеется одинаковое число



наблюдений для каждого уровня изучаемого фактора. Если условие сбалансированности не выполняется, следует использовать функцию `lm()` (пробнее см. справочный файл, доступный по команде `?lm`).

### Линейная модель в матричной форме

Тесное сходство между моделью дисперсионного анализа и регрессионной моделью неслучайно, поскольку обе являются частными случаями *общей линейной модели* (ОЛМ – англ. *General Linear Model*; не путать с *обобщенными линейными моделями* – *Generalized Linear Models*). Понимание концепции ОЛМ очень важно для осмысленного использования `lm()` и других функций R, позволяющих создавать линейные модели. Поэтому стоит остановиться на ОЛМ более подробно.

Общую линейную модель можно выразить в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{U}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{Y}$  – многомерная матрица предсказываемых моделью значений;  $\mathbf{X}$  – *матрица модели* (*model matrix*) или *матрица плана* (*design matrix*), которая содержит значения включенных в модель предикторов;  $\mathbf{B}$  – матрица параметров модели, которые оцениваются на основе имеющихся данных, а  $\mathbf{U}$  – матрица остатков модели.

В случае однофакторного дисперсионного анализа мы имеем дело с одномерной зависимой переменной, так что матрицы  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{U}$  в приведенном уравнении (5) будут представлять собой векторы из  $n$  значений каждый (где  $n$  – это объем наблюдений), тогда как размер  $m \times n$  матрицы модели  $\mathbf{X}$  будет определяться количеством уровней анализируемого фактора  $m$  и объемом наблюдений  $n$ .

Для рассматриваемого нами примера с выращиванием томатов мы можем переписать уравнение (4) в матричной форме, следуя концепции ОЛМ (уравнение 6):

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ y_{17} \\ y_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

В этом уравнении по левую сторону от знака "=" мы видим все измеренные значения веса растений из соответствующих экспериментальных групп (сначала идут 6 значений из контрольной группы, затем 6 значений из группы Nutrient и, наконец, 6 значений из группы Nutrient+24D).

Сразу после знака "=" представлена матрица плана модели размером  $18 \times 3$ . Как было отмечено выше, размерность этой матрицы определяется объемом наблюдений ( $n = 18$ ) и числом подлежащих оценке параметров модели (в нашем случае  $m = 3$ ). Матрица

модели содержит значения переменной-индикатора  $x$  (англ. *dummy variable*), которая принимает только два значения – 0 и 1, и служит для обозначения принадлежности каждого наблюдения  $y_i$  к той или иной экспериментальной группе. Просмотреть матрицу той или иной подогнанной линейной модели можно с использованием функции `model.matrix()`, которая для созданной нами выше модели  $M$  дает матрицу, в точности соответствующую матрице модели из уравнения (6):

```
model.matrix(M)
      (Intercept) trtNutrient trtNutrient+24D
1             1             0             0
2             1             0             0
... ..
18            1             0             1
attr(,"assign")
[1] 0 1 1
attr(,"contrasts")
attr(,"contrasts")$trt
[1] "contr.treatment"
```

О значении в приведенном выше результате такого важного выражения, как "contr.treatment", мы расскажем в следующем разделе.

Матрица модели умножается на матрицу с параметрами модели, которая в рассматриваемом примере представлена вектором из 3 величин –  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , отражающих разницу между средним значением веса растений в контрольной группе и средними значениями в других группах. Оценки этих параметров модели, полученные выше с использованием функции `lm()`, представляют собой вектор  $\mathbf{B} = \{1.683, 0.067, -0.358\}$ . Таким образом, модель предсказывает, что в контрольной группе средний вес растений составит 1.683 кг, в группе Nutrient он будет на 0.067 кг выше ( $1.683 + 0.067 = 1.750$  кг), а в группе Nutrient+24D) на 0.358 кг ниже ( $1.683 - 0.358 = 1.325$  кг), чем в контрольной группе.

Конечно, реальные измеренные значения веса будут в большинстве случаев несколько отличаться от предсказываемых моделью средних значений для каждой группы. Отсюда мы и получаем то, что называется остатками – это разности между наблюдаемыми и предсказанными значениями, которые не могут быть объяснены включенными в модель предикторами.

Согласно правилам умножения матриц, каждое значение  $y_i$  получается путем поэлементного произведения чисел из  $i$ -й строки матрицы модели на вектор, содержащий параметры модели. Например, прогнозируемый вес растения для первого значения из контрольной группы и остаток для него  $\varepsilon_1$  получим следующим образом:

$y_1 = \beta_0 \times 1 + \beta_1 \times 0 + \beta_2 \times 0 = 1.683 \times 1 + 0.067 \times 0 - 0.358 \times 0 = 1.683$ ;  $\varepsilon_1 = 1.5 - 1.683 = -0.183$ ;  
для первого значения веса из группы Nutrient:

$y_7 = \beta_0 \times 1 + \beta_1 \times 1 + \beta_2 \times 0 = 1.683 \times 1 + 0.067 \times 1 - 0.358 \times 0 = 1.750$ ;  $\varepsilon_7 = 1.5 - 1.750 = -0.250$ ;  
для первого значения веса из группы Nutrient+24D:

$y_{13} = \beta_0 \times 1 + \beta_1 \times 0 + \beta_2 \times 1 = 1.683 \times 1 + 0.067 \times 0 - 0.358 \times 1 = 1.325$ ;  $\varepsilon_{13} = 1.9 - 1.325 = 0.575$ .

Очевидно, что при большом объеме наблюдений и числе параметров модели, полная запись модели по образцу уравнения (6) и расчетов по нему будет неэкономичной (представьте себе, например, ситуацию с 1000 измеренных значений зависимой переменной и 10 параметрами модели!). В связи с этим в статистике и применяют компактную матричную форму записи линейных моделей, приведенную выше в уравнении (5).

Универсальность матричной формы состоит еще и в том, что матрица модели может включать значения предикторов любого типа – как количественных, так и

качественных. Так, в случае дисперсионного анализа мы имеем дело только с *качественными* переменными-предикторами и матрица модели содержит только значения 1 и 0, отражающие принадлежность того или иного наблюдения к конкретной группе. В случае множественной регрессии, матрица модели состоит из значений нескольких *количественных* предикторов. Наконец, при наличии *как количественных, так и качественных предикторов* мы имеем дело с так называемым ковариационным анализом (*analysis of covariance, ANCOVA*), и матрица модели содержит значения предикторов обоих типов. Вне зависимости от того, о каком из вариантов ОЛМ идет речь, модель всегда может быть записана в виде уравнения (5). О множественной регрессии и ковариационном анализе мы расскажем в главах 7 и 8 соответственно.

### 6.3. Структура модельных объектов дисперсионного анализа

Рассмотрим на примере классического однофакторного дисперсионного анализа, где хранятся результаты моделирования и как получить к ним доступ, чтобы, в частности, проанализировать адекватность построенной модели.

В качестве примера используем данные эксперимента по изучению эффективности 6 разных инсектицидов (таблица `InsectSprays` с этими данными входит в состав базовой версии R; см. также разделы 3.2, 3.3 и 4.5). Каждым из этих препаратов (фактор `spray`) обработали по 12 растений, после чего подсчитали количество выживших на растениях насекомых (отклик `count`). Нулевая гипотеза, которую мы проверим при помощи дисперсионного анализа, заключается в том, что исследованные инсектициды не различаются по эффективности, т.е. наблюдаемые различия в групповых средних значениях числа выживших насекомых совершенно случайны.

Линейную модель, параметры которой нам предстоит оценить, можно записать следующим образом:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \varepsilon_i,$$

где  $y_i$  – это число насекомых на  $i$ -м растении,  $\beta_0$  – среднее значение числа насекомых для базового уровня изучаемого фактора (по умолчанию R выберет в качестве базового инсектицид A),  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и т.д. – коэффициенты, отражающие разницу между средним значением числа насекомых на растениях из группы A и средними значениями в других группах (B, C ... F), а  $\varepsilon_i$  – остатки модели.

Оценим параметры приведенной модели при помощи функции `lm()`:

```
M <- lm(count ~ spray, data = InsectSprays)
```

В ходе выполнения приведенной команды внешне ничего не происходит. На самом же деле мы сохранили результаты вычислений в виде самостоятельного объекта M – *модельного объекта* (англ. *model object*).

Такой подход к выводу и хранению результатов подгонки линейных и других моделей является одним из существенных преимуществ R в сравнении с большинством других статистических программ, которые просто выводят результаты вычислений на экран, без возможности их непосредственного использования в дальнейшем анализе. Рассмотрим, как устроены модельные объекты в R, и как извлекать из них отдельные элементы.

Итак, результатом работы функции `lm()` является достаточно сложно устроенный объект M, который с точки зрения представления данных в нем является списком. Соответственно, мы при необходимости можем без труда извлечь отдельные элементы из такого списка и использовать их в последующих вычислениях. Строение объекта мы можем выяснить при помощи функции `str()` (от *structure* - структура):

**str** (M)

List of 13

```
$ coefficients : Named num [1:6] 14.5 0.833 -12.417 -9.583 -11 ...
..- attr(*, "names")= chr [1:6] "(Intercept)" "sprayB" "sprayC" "sprayD" ...
$ residuals    : Named num [1:72] -4.5 -7.5 5.5 -0.5 -0.5 ...
..- attr(*, "names")= chr [1:72] "1" "2" "3" "4" ...
$ effects      : Named num [1:72] -80.6 22.1 -24.2 -19.9 -34.2 ...
..- attr(*, "names")= chr [1:72] "(Intercept)" "sprayB" "sprayC" "sprayD" ...
$ rank         : int 6
$ fitted.values: Named num [1:72] 14.5 14.5 14.5 14.5 14.5 ...
..- attr(*, "names")= chr [1:72] "1" "2" "3" "4" ...
$ assign       : int [1:6] 0 1 1 1 1 1
$ qr           :List of 5
..$ qr        : num [1:72, 1:6] -8.485 0.118 0.118 0.118 0.118 ...
.. ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
.. .. ..$ : chr [1:72] "1" "2" "3" "4" ...
.. .. ..$ : chr [1:6] "(Intercept)" "sprayB" "sprayC" "sprayD" ...
.. ..- attr(*, "assign")= int [1:6] 0 1 1 1 1 1
.. ..- attr(*, "contrasts")=List of 1
.. .. ..$ spray: chr "contr.treatment"
..$ qraux: num [1:6] 1.12 1.05 1.06 1.07 1.09 ...
..$ pivot: int [1:6] 1 2 3 4 5 6
..$ tol : num 1e-07
..$ rank : int 6
..- attr(*, "class")= chr "qr"
$ df.residual  : int 66
$ contrasts     :List of 1
..$ spray: chr "contr.treatment"
$ xlevels      :List of 1
..$ spray: chr [1:6] "A" "B" "C" "D" ...
$ call         : language lm(formula = count ~ spray, data = InsectSprays)
$ terms        :Classes 'terms', 'formula' length 3 count ~ spray
.. ..- attr(*, "variables")= language list(count, spray)
.. ..- attr(*, "factors")= int [1:2, 1] 0 1
.. .. ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
.. .. .. ..$ : chr [1:2] "count" "spray"
.. .. .. ..$ : chr "spray"
.. ..- attr(*, "term.labels")= chr "spray"
.. ..- attr(*, "order")= int 1
.. ..- attr(*, "intercept")= int 1
.. ..- attr(*, "response")= int 1
.. ..- attr(*, ".Environment")=<environment: R_GlobalEnv>
.. ..- attr(*, "predvars")= language list(count, spray)
.. ..- attr(*, "dataClasses")= Named chr [1:2] "numeric" "factor"
.. .. ..- attr(*, "names")= chr [1:2] "count" "spray"
$ model        :'data.frame': 72 obs. of 2 variables:
..$ count: num [1:72] 10 7 20 14 14 12 10 23 17 20 ...
..$ spray: Factor w/ 6 levels "A","B","C","D",...: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
..- attr(*, "terms")=Classes 'terms', 'formula' length 3 count ~ spray
.. .. ..- attr(*, "variables")= language list(count, spray)
.. .. ..- attr(*, "factors")= int [1:2, 1] 0 1
.. .. .. ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
.. .. .. .. ..$ : chr [1:2] "count" "spray"
.. .. .. .. ..$ : chr "spray"
.. .. .. ..- attr(*, "term.labels")= chr "spray"
.. .. .. ..- attr(*, "order")= int 1
.. .. .. ..- attr(*, "intercept")= int 1
.. .. .. ..- attr(*, "response")= int 1
.. .. .. ..- attr(*, ".Environment")=<environment: R_GlobalEnv>
.. .. .. ..- attr(*, "predvars")= language list(count, spray)
.. .. .. ..- attr(*, "dataClasses")= Named chr [1:2] "numeric" "factor"
.. .. .. .. ..- attr(*, "names")= chr [1:2] "count" "spray"
```

```
- attr(*, "class")= chr "lm"
```

От обилия выведенных результатов может закружиться голова, но переживать не стоит, т.к. далеко не все строки потребуют пристального внимания. Главное здесь то, что модельный объект `M`, как хорошо видно, представляет собой список из 13 основных элементов (`List of 13`). Отметим также, что похожий сложно устроенный объект может быть создан при выполнении дисперсионного анализа при помощи функции `aov()`.

Некоторые из этих элементов сами являются списками – отсюда такая сложная структура. Тем не менее, используя стандартные для R приемы индексации списков, мы можем легко извлечь любой желаемый элемент объекта `M`. На практике наиболее интересными и важными для анализа являются, например, такие элементы, как `coefficients` (коэффициенты подогнанной линейной модели), `residuals` (остатки), `fitted.values` (предсказанные моделью значения) и некоторые другие.

Используя оператор `$`, мы можем, например, извлечь остатки модели и предсказанные ею значения и сохранить их в виде самостоятельных векторов:

```
M.res <- M$residuals
M.fit <- M$fitted.values
```

Эти два новых вектора мы далее можем использовать для других целей. Например, хранящиеся в них значения можно отобразить графически для проверки условия гетероскедастичности в отношении модели `M`:

```
plot(M1.fit, M1.res, pch = 19, col = 4,
      xlab = "Предсказанные значения", ylab = "Остатки")
```

Для более быстрого извлечения определенных элементов из модельных объектов, созданных при помощи `aov()`, `lm()` и многих других функций в R имеются соответствующие функции-экстракторы (англ. *Extractor functions*). В частности, наиболее полезны:

- `coefficients()` или, в сокращенном виде, `coef()` – извлекает коэффициенты линейной модели.
- `residuals()` или, в сокращенном виде, `resid()` – извлекает остатки модели.
- `fitted()` – извлекает предсказанные моделью значения.

Так, приведенная ниже команда позволяет рассчитать коэффициент корреляции Пирсона между исходными данными и предсказанными моделью значениями:

```
cor.test(fitted(M2), InsectSprays$count)
Pearsons product-moment correlation
data: fitted(M2) and InsectSprays$count
t = 13.5657, df = 70, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.7716214 0.9044641
sample estimates:
      cor
0.8511398
```

Разумеется, наиболее полезная функция работы с модельными объектами – `summary()`, которая обобщает компоненты списка и представляет результаты в компактной форме:

```

summary (M)
Call:
lm(formula = count ~ spray, data = InsectSprays)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-8.333 -1.958 -0.500  1.667  9.333
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  14.5000     1.1322  12.807 < 2e-16 ***
sprayB        0.8333     1.6011   0.520  0.604
sprayC       -12.4167     1.6011  -7.755 7.27e-11 ***
sprayD        -9.5833     1.6011  -5.985 9.82e-08 ***
sprayE       -11.0000     1.6011  -6.870 2.75e-09 ***
sprayF         2.1667     1.6011   1.353  0.181
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 3.922 on 66 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7244, Adjusted R-squared:  0.7036
F-statistic: 34.7 on 5 and 66 DF, p-value: < 2.2e-16

```

Как видим, программа автоматически выбрала в качестве базового уровня группу наблюдений для препарата А (поскольку буква А идет первой по алфавиту) – см. строку, озаглавленную как (Intercept) в таблице с результатами анализа. Среднее число выживших насекомых в этой группе составило 14.5. В следующей строке приведена информация, отражающая, насколько препарат В эффективнее по сравнению с препаратом А: видим, что среднее количество выживших насекомых в группе В было несколько выше, чем в группе А (на 0.83), но это повышение не было статистически значимым ( $Pr(>|t|) = 0.604$ ). В третьей строке представлена информация о различиях между базовым уровнем (препарат А) и препаратом С: эффективность препарата С существенно ( $Pr(>|t|) < 7.27e-11$ ) выше, чем эффективность препарата А (число выживших насекомых в группе С в среднем оказалось на 12.4 ниже, чем в группе А, т.е.  $14.5 - 12.4 = 2.1$ ). Интерпретация следующих строк таблицы с результатами аналогична.

#### 6.4. Оценка адекватности модели дисперсионного анализа

Выше было показано, что дисперсионный анализ представляет собой частный случай общей линейной модели, оценку параметров которой позволяет выполнить базовая R-функция `lm()`. Однако с подгонки модели серьезный анализ только начинается. Необходимо осуществить комплексную оценку *адекватности модели* (англ. *model adequacy*), т.е. проверить условия выполнения ряда допущений, традиционно используемых при построении линейных моделей, выполнить интерпретацию оценок параметров, вывести графики распределения остатков и т.д.

##### Проверка исходных предположений общей линейной модели

Перед тем, как начать содержательно интерпретировать рассчитанные параметры и выдвигать научные гипотезы на их основе, необходимо выяснить, выполняются ли лежащие в ее основе *допущения* (англ. *model assumptions*).

Здесь для нас наибольший интерес представляет строка в таблице с результатами, обозначенная как *F-statistic*. В этой строке представлено расчетное значение *F*-

критерия (34 . 7 при 5 и 66 числа степеней свободы), при помощи которого проверяется гипотеза об одновременном равенстве всех коэффициентов истинной модели нулю. Как видно из соответствующего  $p$ -значения этого критерия ( $p$ -value:  $< 2.2e-16$ ), вероятность того, что эта гипотеза верна, крайне мала. Другими словами, мы можем заключить, что эффективность исследованных инсектицидов существенно различается.

Однако насколько мы можем доверять полученному  $F$ -значению (и соответствующему ему  $p$ -значению), чтобы сделать такой вывод? Другими словами, насколько рассчитанное значение  $F$ -критерия близко к тому значению, которое следует ожидать, исходя из свойств  $F$ -распределения и верной нулевой гипотезы? Это соответствие будет полным при одновременном выполнении следующих трех условий:

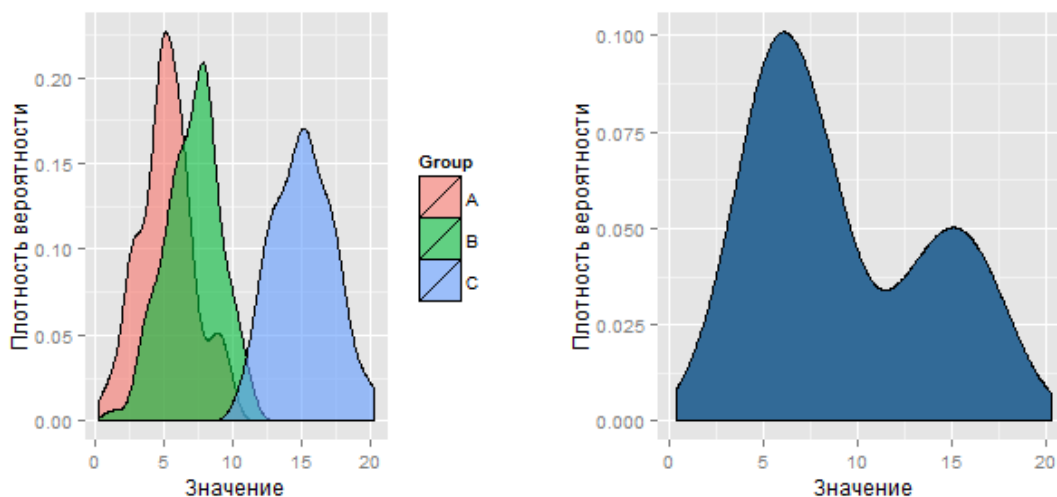
- Во всех группах значения зависимой переменной являются независимыми.
- Во всех анализируемых группах (инсектициды А, В, ... F) значения зависимой переменной (число выживших насекомых) распределены нормально.
- Дисперсия значений зависимой переменной одинакова во всех группах.

Формально проверить (и скорректировать) первое условие сложно – его выполнение следует обеспечивать на стадии планирования исследования (например, путем случайного назначения каждого растения в ту или иную экспериментальную группу) и в ходе сбора данных (например, используя строго один и тот же метод подсчета насекомых на растениях из всех экспериментальных групп).

Для проверки остальных двух допущений существуют графические и формальные методы, которые мы подробно рассмотрели ранее (разделы 4.8 и 5.4 соответственно). Ниже мы обсудим методологическую сторону проблемы применительно к дисперсионному анализу.

### **Проверка условия нормальности распределения**

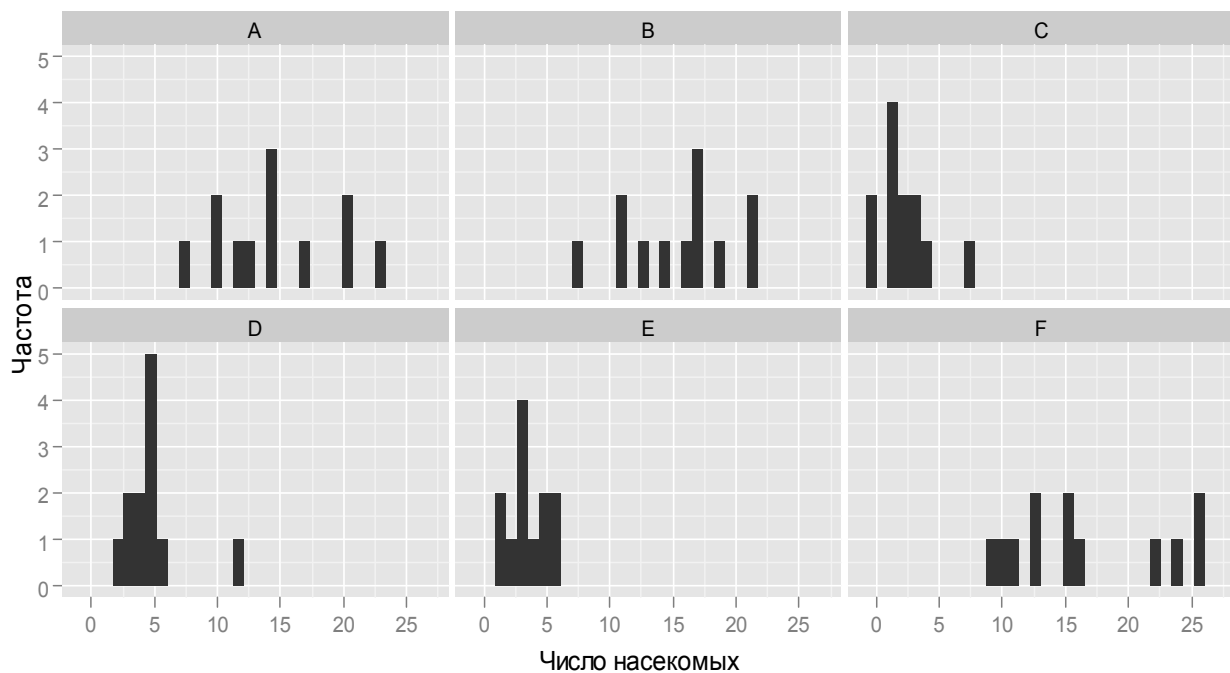
Отметим вначале, что вывод о нормальном распределении данных в каждой группе может не совпадать с характером распределения наблюдаемых значений во всем эксперименте. Поясним это явление на примере имитированных данных. Предположим, что у нас имеется некоторая количественная переменная, значения которой разбиты на 3 группы в соответствии с уровнями некоторого гипотетического фактора. В каждую группу включим по 100 наблюдений, случайным образом сгенерированных из нормально распределенных совокупностей. Кривые плотностей распределения вероятности этих данные приведены на рисунке внизу слева. На том же рисунке справа приведено распределение плотности вероятности для всех данных, объединенных без учета их групповой принадлежности. Очевидно, что, хотя исходные наблюдения в каждой группе А, В и С имели нормальное распределение, то после их объединения в одну большую совокупность свойство нормальности исчезает и оно приобретает бимодальный характер.



Важно понимать: условие нормальности в отношении дисперсионного анализа предполагает, что значения зависимой переменной имеют нормальное распределение в пределах *каждой группы*, определяемой уровнями изучаемых факторов. При этом совсем не обязательно, чтобы значения отклика, взятые все вместе (т.е. без разделения их по группам), имели нормальное распределение – подробнее см. на [theanalysisfactor.com](http://theanalysisfactor.com). Так, в эксперименте с инсектицидами значения числа выживших насекомых должны быть нормально распределены в каждой из 6 экспериментальных групп.

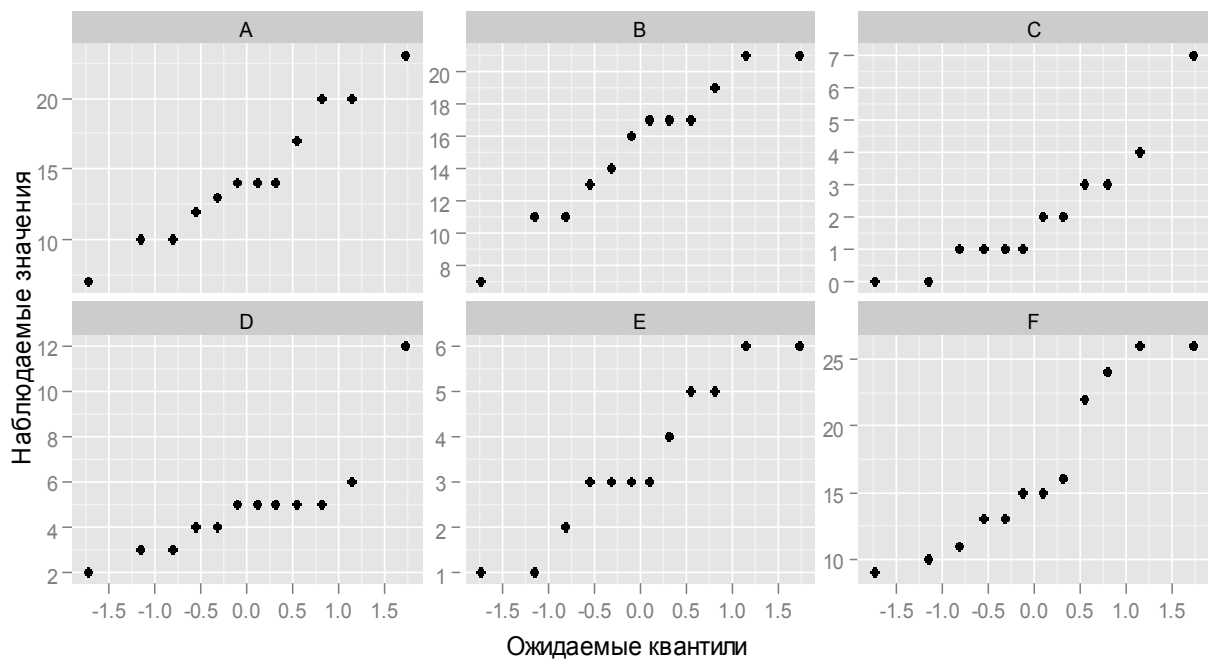
Однако на практике во многих исследованиях (в частности, эколого-биологического профиля) не удастся скомплектовать экспериментальные группы с достаточно большим числом измерений. А при малых объемах выборок (от 8 до 20) проверка предположения о нормальности распределения с использованием формальных статистик Шапиро-Уилка, Андерсона-Дарлинга и других – скорее ритуал, чем объективно корректная процедура. В этих условиях они обладают ложной чувствительностью и «...фактически не способны различать гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ » (Лемешко, 2005). И здесь повышается роль графических методов, основанных на удивительной способности человеческого глаза обнаруживать сходство или различия геометрических образов.

Визуальная оценка нормальности распределения, которая обычно сводится к изучению формы гистограммы, диаграммы плотности вероятности значений анализируемой переменной, или графика квантилей, при малой численности групп также весьма затруднительна. Например, в эксперименте с инсектицидами имеется лишь по 12 наблюдений на группу. Попытка использовать гистограммы для проверки условия нормальности распределения в этом случае ни к чему определенному не приведет:



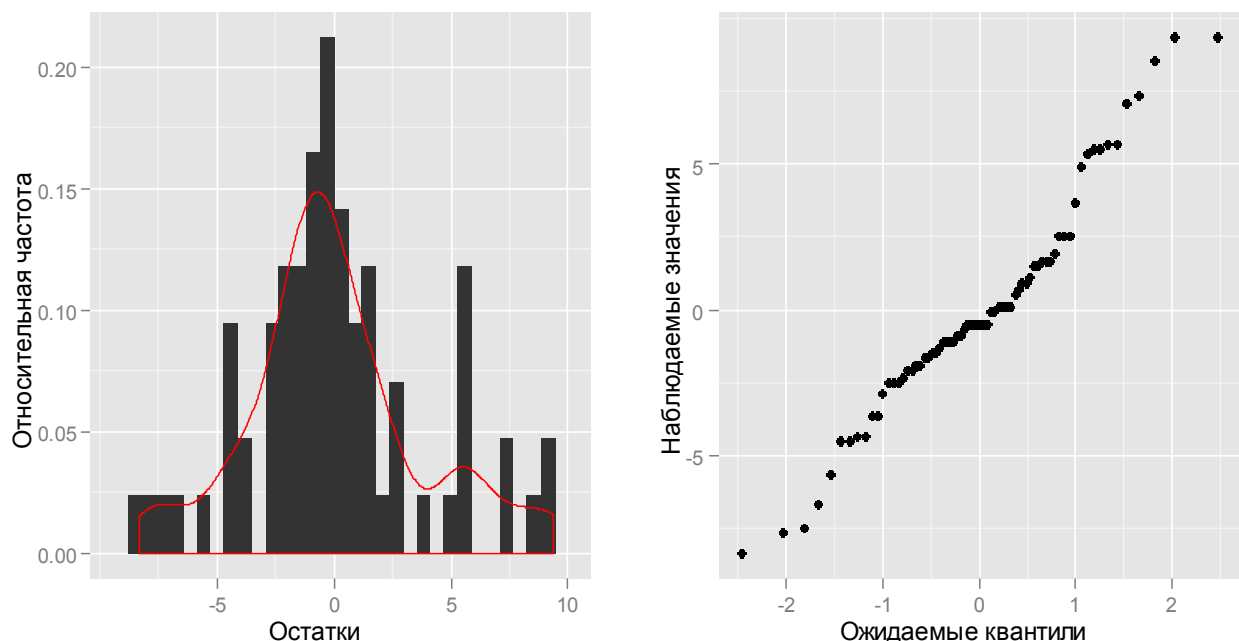
Более информативно выглядят квантильные графики, хотя и с их помощью однозначный вывод о нормальности распределения значений в *каждой* экспериментальной группе сделать также затруднительно:





Как же быть? На помощь приходят свойства нормального распределения. Дело в том, что если значения зависимой переменной в каждой экспериментальной группе распределены нормально, то нормально будут распределены и значения остатков соответствующей линейной модели (см. материалы на [theanalysisfactor.com](http://theanalysisfactor.com)). При этом предполагается, что распределение остатков  $\varepsilon_i$  имеет среднее значение, равное 0, и некоторое стандартное отклонение  $\sigma_\varepsilon$ . Формально мы можем записать это так:  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ . Таким образом, вместо проверки нормальности распределения значений зависимой переменной в каждой группе, достаточно проверить нормальность распределения остатков модели (число которых, по определению, равно общему объему наблюдений).

Ниже приведены гистограмма с наложенной кривой плотности вероятности и график квантилей для остатков подогнанной нами ранее модели M:



Из приведенных рисунков можно сделать предварительное заключение о том, что распределение остатков модели M не соответствует нормальному (обратите внимание на

наличие второго "пика" в правой части гистограммы, а также на S-образную фигуру на графике квантилей). Впрочем, это и неудивительно, поскольку в данном случае мы имеем дело с числом выживших насекомых – такого рода дискретные количественные переменные по определению не подчиняются нормальному закону распределения.

Формально мы можем проверить этот вывод, например, при помощи теста Шапиро-Уилка (для всех 72 измерений он уже обладает достаточной мощностью):

```
shapiro.test(resid(M))  
Shapiro-Wilk normality test  
data: resid(M) W = 0.9601, p-value = 0.02226
```

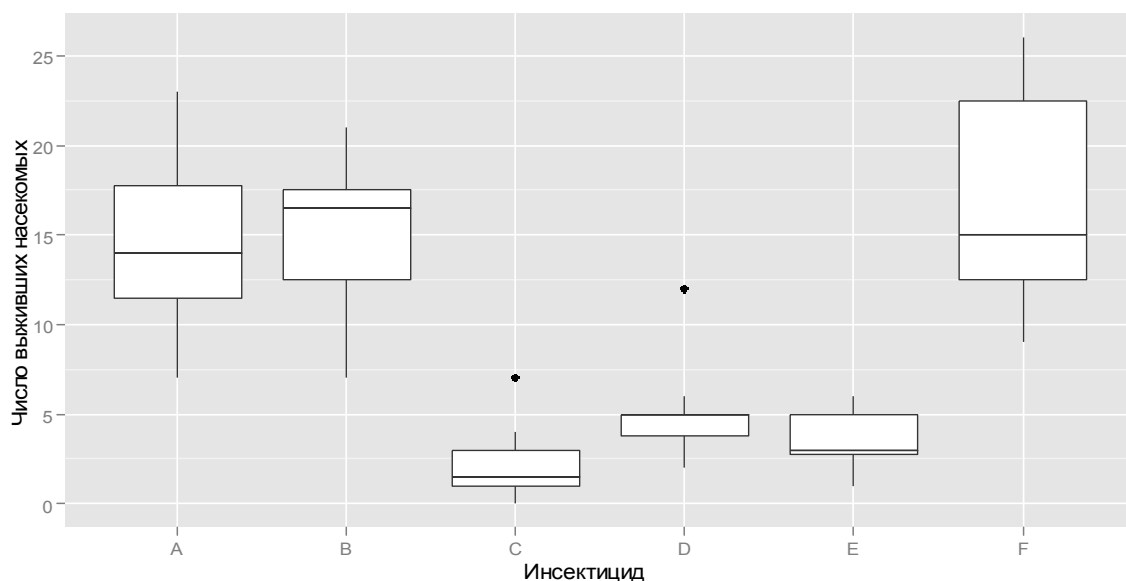
Как видно из полученного  $p$ -значения критерия  $W$  ( $p\text{-value} = 0.022$ ), распределение остатков модели  $M$  отличается от нормального. Этот вывод согласуется с визуальной оценкой характера распределения остатков.

Таким образом, условие нормальности в отношении модели  $M$  не выполняется. Это значит, что модель  $M$  не является адекватной для описания анализируемых данных и, соответственно, мы не можем делать строгих выводов на ее основе. Далее будут даны некоторые рекомендации по поводу того, как поступать в таких ситуациях.

### Проверка условия однородности групповых дисперсий

Вторым важным условием применимости классического дисперсионного анализа является однородность (также "*гомоскедастичность*") групповых дисперсий (англ. *homogeneity of variance*, или *homoscedasticity of variance*). Речь здесь идет о том, что помимо нормального распределения в каждой группе, значения зависимой переменной должны также иметь одинаковую степень разброса. Необходимость выполнения этого условия определяется способом вычисления внутри- и межгрупповых дисперсий, применяемым в классическом дисперсионном анализе (подробнее см. раздел 5.5): при значительно различающихся групповых дисперсиях используемые формулы просто не будут работать корректно.

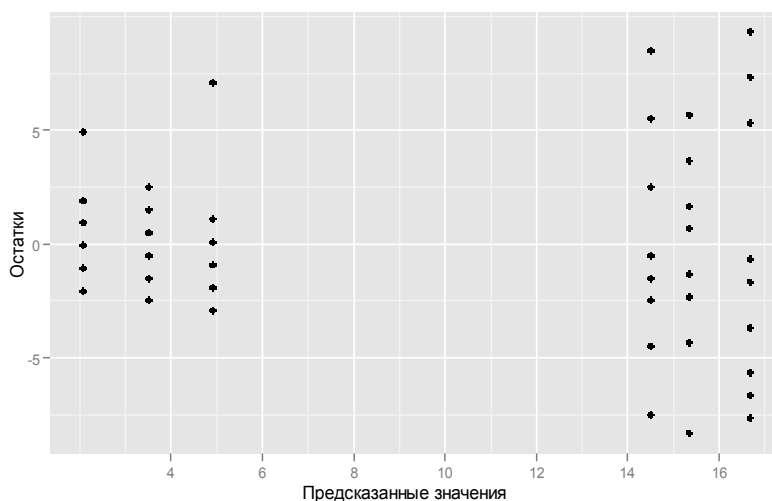
Способы проверки однородности групповых дисперсий включают как графические, так и формальные методы (см. разделы 3.3 и 5.4). При большом числе наблюдений в экспериментальных группах это условие можно проверить при помощи диаграмм `boxplot()`: сравнение интерквартильных размахов позволяет сделать заключение о том, насколько велики межгрупповые различия в разбросе данных. Для эксперимента с инсектицидами получаем следующую диаграмму:



Из приведенного рисунка хорошо видно, что разброс данных в разных группах неодинаков, что указывает на несоблюдение условия однородности дисперсии.

Подобно тому, как это было сделано нами при проверке условия нормальности, вместо исходных данных мы можем использовать остатки модели и для проверки условия однородности групповых дисперсий. Как и в случае с исходными данными, визуально оценить разброс остатков в каждой группе позволяет диаграмма размахов:

Другим часто используемым способом является изучение графика, на котором по оси X откладываются предсказанные моделью значения зависимой переменной, а по оси Y – соответствующие остатки. При соблюдении условия однородности дисперсии точки на таком графике не должны формировать каких-либо выраженных паттернов:



Для примера с инсектицидами хорошо видно, что по мере увеличения предсказанных моделью средних групповых значений разброс остатков также увеличивается. Такая "воронкообразная" форма распределения остатков типична для случаев, когда условие однородности групповых дисперсий не выполняется. Это вполне ожидаемо в данном случае, поскольку мы, скорее всего, имеем дело со значениями, распределенными по закону Пуассона.

Неудивительно, что тест Левене также оказался существенно значимым, указывая на выраженную неоднородность групповых дисперсий:

```
library(car) # пакет car должен быть предварительно установлен
leveneTest(InsectSprays$count, InsectSprays$spray)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
  Df F value Pr(>F)
group 5  3.8214 0.004223 **
      66
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Таким образом, для данных из эксперимента по изучению эффективности инсектицидов не выполняется ни условие нормальности, ни условие однородности групповых дисперсий. Как следствие, обычный однофакторный дисперсионный анализ не является адекватным методом для этих данных.

### **Что делать, когда однофакторный дисперсионный анализ неприменим?**

Следует отметить, что однофакторный дисперсионный анализ в определенной степени все же устойчив к нарушениям условий нормальности и гомоскедастичности. В частности, при одинаковом (или "близком" к одинаковому) числе наблюдений во всех группах метод будет относительно устойчив к нарушениям условия однородности

групповых дисперсий. Если размер экспериментальных выборок достаточно велик (например, несколько десятков), то требование нормального закона распределения в группах также ослабевает (нужный эффект обеспечивается центральной предельной теоремой). Часто в таких условиях проверка равенства математических ожиданий сравниваемых групп с помощью критерия Фишера дает правильные результаты, независимо от того, выполнены ли предпосылки нормальности и равенства дисперсий или нет ([Zar, 1999](#); [Орлов, 2004](#); Шитиков, Розенберг, 2014).

Однако какие-либо четкие рекомендации по поводу того, в каких случаях нарушения условий нормальности и гомоскедастичности следует считать допустимыми, дать очень сложно. Все будет определяться конкретными данными и стоящими перед исследователем задачами. Тем не менее, при серьезных нарушениях этих условий использование параметрического дисперсионного анализа для установления влияния того или иного фактора на изучаемое явление будет некорректным. В зависимости от того, какие именно проблемы возникают при выполнении анализа, решения могут быть разными. Рассмотрим возможные ситуации.

◦ **Распределение в группах нормальное, дисперсии неоднородны.** Когда данные в каждой экспериментальной группе распределены нормально, но условие однородности групповых дисперсий не выполняется, можно воспользоваться методом Уэлча (*Welch's test*). Этот метод позволяет выполнить определенную поправку в числе степеней свободы, что приводит и к соответствующему изменению итогового значения *F*-критерия. В R однофакторный дисперсионный анализ по Уэлчу выполняется при помощи функции `oneway.test()`. В качестве альтернативы поправке Уэлча, можно также использовать *перестановочные тесты* (англ. *permutation tests*, или *randomization tests*). Подробно на русском языке эти тесты описаны в книге Шитикова и Розенберга (2013). Одним из пакетов R, позволяющих выполнять перестановочные тесты для линейных моделей, является `lmPerm`.

◦ **Распределение в группах ненормальное, дисперсии однородны:** Когда распределение значений зависимой переменной в экспериментальных группах отличается от нормального, часто помочь может определенная трансформация этих значений. Наиболее обычным способом трансформации количественных переменных является логарифмирование. При работе с относительными частотами и долями часто используется также извлечение квадратного корня из исходных значений. Эти, а также некоторые другие способы, являются частными случаями более общего подхода – степенной трансформации по Боксу-Коксу (англ. *Box-Cox transformation*). Одним из преимуществ такого преобразования является также то, что помимо приведения данных к нормальному распределению, она часто позволяет также "стабилизировать" групповые дисперсии (т.е. приводит к выполнению условия гомоскедастичности). Пример того, как это работает, приведен ниже.

Если при помощи трансформации не удастся привести данные к нормальному распределению, вместо классического однофакторного дисперсионного анализа можно применить его непараметрический аналог – ранговый дисперсионный анализ по Краскелу-Уоллису. Этот метод проверяет нулевую гипотезу о равенстве центров (медиан) сравниваемых групп, используя ранги исходных значений, и поэтому особенно хорошо работает при наличии выбросов. Хотя формально метод Краскела-Уоллиса предполагает однородность дисперсий сравниваемых групп, на практике нарушение этого условия имеет малое влияние на конечные результаты (Logan, 2010). Поэтому этот метод можно также использовать в ситуациях, когда не выполняются условия, как нормальности, так и гомоскедастичности.

◦ **Распределение в группах ненормальное, дисперсии неоднородны.** Предположим, что трансформация исходных значений зависимой переменной не позволило привести их к нормальному распределению в каждой группе и стабилизировать групповые дисперсии. Пусть также есть основания полагать, что метод Краскела-Уоллиса не даст надежных

результатов, например, из-за существенной неоднородности групповых дисперсий. Тогда единственным выходом будет использование статистических моделей, которые не предполагают соблюдение этих условий. Речь идет о классе так называемых *обобщенных линейных моделей* (англ. *Generalized Linear Models*), где дополнительно задается некоторая *функция связи*  $g(\eta)$ , конкретный выбор которой осуществляется в зависимости от природы случайного распределения отклика  $y$  и его остатков. Тем самым GLM существенно расширяют диапазон приложений линейного моделирования, охватывая широкий класс альтернативных распределений вероятностей.

В рассмотренном выше примере с инсектицидами мы выяснили, что условия нормальности и гомоскедастичности не выполняются. Для исправления этой ситуации мы можем попробовать трансформировать исходные данные путем логарифмирования и подогнать новую линейную модель на основе трансформированных значений:

```
M.log <- lm(log(count + 1) ~ spray, data = InsectSprays)
# Обратите внимание: к исходным значениям была добавлена 1.
# Это обычный прием при логарифмировании данных,
# содержащих нулевые значения (поскольку логарифм нуля, как
# известно, не определен).
summary(M.log)
Call:
lm(formula = log(count + 1) ~ spray, data = InsectSprays)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.95261 -0.25946  0.01131  0.25935  1.12683
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    2.6967      0.1181  22.829 < 2e-16 ***
sprayB         0.0598      0.1671   0.358  0.721
sprayC        -1.7441      0.1671 -10.440 1.30e-15 ***
sprayD        -0.9834      0.1671  -5.887 1.45e-07 ***
sprayE        -1.2705      0.1671  -7.605 1.35e-10 ***
sprayF         0.1189      0.1671   0.712  0.479
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.4092 on 66 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7771, Adjusted R-squared:  0.7602
F-statistic: 46.01 on 5 and 66 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Обратите внимание на то, что значение  $F$ -критерия, рассчитанное при помощи новой модели (`M.log`), превышает исходное (46.01 против 34.7, рассчитанного по модели `M`). Хотя в данном случае вывод, который мы делаем в отношении различий инсектицидов по эффективности, не меняется по сравнению с первоначальным выводом, такая ситуация будет наблюдаться после трансформации данных не всегда.

Тест Шапиро-Уилка показывает, что условие нормальности распределения остатков модели `M.log` выполняется:

```
shapiro.test(resid(M.log))
Shapiro-Wilk normality test
data:  resid(M.log)
W = 0.9847, p-value = 0.5348
```

Аналогично, тест Левене показывает, что условие однородности групповых дисперсий теперь также соблюдено:

```
leveneTest(log(InsectSprays$count + 1), InsectSprays$spray)
Levenes Test for Homogeneity of Variance (center = median)
  Df F value Pr(>F)
group 5 1.8821 0.1093
      66
```

Таким образом, логарифмирование исходных данных привело к выполнению обоих важных условий применимости однофакторного дисперсионного анализа, и мы можем обоснованно использовать модель  $M.\log$  для того, чтобы делать заключения по поводу эффективности исследованных инсектицидов.

## 6.5. Дисперсионный анализ по Краскелу-Уоллису

*Дисперсионный анализ по Краскелу-Уоллису* (англ. *Kruskal-Wallis ANOVA by ranks* или *Kruskal-Wallis rank sum test*), описание которого было представлено в оригинальной статье ([Kruskal, Wallis, 1952](#)), является непараметрическим аналогом ANOVA. В русскоязычной литературе для этого метода используются также названия "критерий Краскала-Уоллиса", "*H*-критерий Краскала-Уоллиса" и даже иногда "критерий Краскала-Валлиса".

Поскольку дисперсионный анализ по Краскелу-Уоллису относится к группе непараметрических методов статистики, это значит, что при выполнении соответствующих расчетов параметры того или иного вероятностного распределения (например, нормального) никак не задействованы. Вместо этого используются ранги исходных значений и их суммы в сравниваемых группах. В частности, метод Краскала-Уоллиса основан на вычислении так называемого *H*-критерия:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k R_i^2 - 3(N+1),$$

где  $n_i$  – число наблюдений в группе  $i$ ,  $N$  – общее число наблюдений во всех  $k$  группах, а  $R_i$  – сумма рангов наблюдений в группе  $i$ . Ранг представляет собой порядковый номер конкретного наблюдения в ряду упорядоченных по возрастанию (или по убыванию, что не важно) наблюдений. Чем больше значение *H*-критерия, тем больше у нас оснований отклонить нулевую гипотезу об отсутствии разницы между сравниваемыми группами.

Если рассчитанное по выборочным данным значение *H* превышает определенное *критическое значение*, нулевая гипотеза отклоняется. Критическое значение определяется с учетом принятого в исследовании уровня значимости и числа степеней свободы: в частности, при  $m > 5$  *H*-критерий сравнивается с критическими значениями критерия "хи-квадрат" для числа степеней свободы  $m - 1$ . При меньшем числе сравниваемых групп вносятся определенные поправки (например, поправка Имана-Давенпорта).

Интересно, что если бы мы выполнили обычный дисперсионный анализ, используя ранговые номера исходных значений анализируемой переменной, то результат совпал бы результатом теста Краскала-Уоллиса ([Zar, 1999](#)). Кроме того, при наличии двух сравниваемых групп, тест Краскала-Уоллиса будет идентичен тесту Манна-Уитни.

Если бы анализируемые данные удовлетворяли условиям нормальности и однородности групповых дисперсий, то статистическая мощность теста Краскала-Уоллиса в отношении таких данных составила бы примерно 95% от обычного параметрического дисперсионного анализа. Однако при нарушении этих условий мощность тест Краскала-Уоллиса может оказаться даже выше, чем у обычного дисперсионного анализа.



В теории, для расчета несмещенных оценок  $H$ -критерия Краскела-Уоллиса значения анализируемой переменной должны иметь *одинаковый разброс и форму распределения* во всех сравниваемых группах. Однако на практике нарушение этих условий мало сказывается на качестве выводов, получаемых при помощи  $H$ -критерия, и ими обычно пренебрегают.

В R дисперсионный анализ по Краскелу-Уоллису выполняется при помощи функции `kruskal.test()`. В качестве примера, как и в предыдущем разделе, используем данные эксперимента по изучению эффективности 6 разных инсектицидов (таблица `InsectSprays`). Каждым из этих средств обработали по 12 растений, после чего подсчитали количество выживших насекомых. Нулевая гипотеза, которую мы проверим при помощи теста Краскела-Уоллиса, заключается в том, что исследованные инсектициды не различаются по эффективности (т.е. наблюдаемые различия в групповых *медианных значениях* числа выживших насекомых совершенно случайны).

```
kruskal.test(count ~ spray, data = InsectSprays)
Kruskal-Wallis rank sum test
data: count by spray
Kruskal-Wallis chi-squared = 54.6913, df = 5, p-value = 1.511e-10
```

Как видно из полученного результата, вероятность получить столь высокое наблюдаемое значение  $H$ -критерия при верной нулевой гипотезе крайне мала и, следовательно, мы можем смело эту гипотезу отклонить.

Следует подчеркнуть, что подобно классическому дисперсионному анализу, тест Краскела-Уоллиса позволяет сделать заключение только следующего вида: либо "сравниваемые группы статистически значимо различаются" (например, при  $p < 0.05$ ), либо "статистически значимых различий между группами нет" (например, при  $p > 0.05$ ). Ни один из этих методов сам по себе не позволяет сказать, между какими именно группами могут существовать различия. Чтобы выяснить это, необходимо выполнить соответствующие *апостериорные тесты* (англ. *post hoc tests*), речь о которых пойдет в следующих разделах.

## 6.6. Модели двух- и многофакторного дисперсионного анализа

Планы многофакторного эксперимента являются развитием однофакторного ANOVA, когда каждый уровень варьирования одного фактора может комбинироваться со всеми возможными уровнями остальных факторов. Но если однофакторный дисперсионный анализ ставит своей основной целью проверить статистическую значимость эффекта группировки, то многофакторный ANOVA смещает акцент в сторону оценки степени влияния отдельных факторов или взаимодействий между ними. В этом смысле он еще более близок множественной регрессии с ее аппаратом селекции наиболее информативного комплекса объясняющих переменных.

Методологию многофакторного анализа в значительной мере определяет наличие повторностей и характер распределения общего количества наблюдений по "ячейкам" (т.е. экспериментальным группам), в связи с чем выделяют следующие типы *дисперсионного комплекса*:

- комплексы с единственным наблюдением в ячейке, когда расчёт статистической ошибки невозможен и в качестве таковой используется взаимодействие факторов;
- равномерные или сбалансированные комплексы, когда в каждой ячейке содержится одинаковое количество наблюдений (наиболее желательный для анализа вариант);

- пропорциональные комплексы, когда соотношение числа наблюдений на всех уровнях фактора одинаковое (например, во всех группах число особей мужского пола ровно в 2 раза больше чем женского);
- неравномерные или несбалансированные комплексы с разным числом наблюдений в ячейках;
- комплексы с пропущенными значениями, когда есть ячейки без наблюдений, которые могут возникнуть вследствие потери части экспериментального материала или в специальных экспериментальных планах с ограничениями на рандомизацию.

Последние две категории дисперсионных планов часто некорректно решаются в рамках классического дисперсионного анализа, основанного на подсчете средних квадратов групповых отклонений и оценке значения  $F$ -критерия. При анализе любых *несбалансированных* наборов данных, способ выполнения дисперсионного анализа, реализованный в функции `anova()`, будет давать смещенные оценки  $p$ -значений (подробнее см. справочный файл по этой функции – `?anova`). Дополнительные трудности возникают при включении в факторную модель двух или более случайных факторов.

Использование общей линейной модели существенно упрощает технику дисперсионного анализа. Во-первых, при создании модели исследователь получает доступ к детальным результатам расчетов, что позволяет ему лучше понять, где именно сосредоточены различия между сравниваемыми группами. Во-вторых, использование синтаксиса формул R дает возможность гибко управлять селекцией значимых фиксированных эффектов и их взаимодействий, а также выбирать и оперативно перестраивать различные многофакторные схемы. Наконец, имеется возможность строить модели с неполными повторными измерениями, когда число наблюдений для разных объектов различно, а также с произвольным законом распределения отклика. Дальнейшее развитие математического аппарата моделирования в направлении обобщенных линейных (*linear mixed-effects model* – LMEM) и нелинейных (NMEM) моделей со смешанными эффектами (Pinheiro, Bates, 2000; Wood, 2006) еще больше расширяет возможности общей линейной модели, в том числе:

- становится возможным анализ коррелированных данных и данных с непостоянной дисперсией;
- можно моделировать не только средние значения, но также дисперсии и ковариации, что позволяет оценить, какую долю изменчивости отклика можно отнести за счет случайного фактора (например, пространственно-временной автокорреляции).

### **Синтаксис объекта "формула"**

Рассмотрим предварительно правила составления формул в R (на основе обучающих материалов, представленных на сайте [science.nps.gov](http://science.nps.gov)). Формула представляет собой объект R, задающий в виде символьного выражения отношения между откликом или зависимой переменной (слева) и предикторами или независимыми переменными (справа), которые разделяются знаком  $\sim$  (“тильда”). В момент начала подгонки модели переменные, указанные в формуле, должны быть представлены объектами (векторами, матрицами), «видимыми» относительно *поискового пути* R, или заданы параметром `data = <таблица данных>`.

Основное применение формул – спецификация различных статистических моделей регрессионного или дисперсионного анализа. В этих случаях в правой части формулы могут быть представлены объекты 3 типов:

- подмножество числовых векторов, связываемых знаком “+” (каждому такому вектору соответствует один рассчитываемый коэффициент регрессионной модели  $\beta$ )
- численная матрица, для каждого из столбцов которой оценивается коэффициент регрессии;



◦ подмножество факторов, каждому из которых соответствуют коэффициенты модели ANOVA для всех его уровней (если факторы связаны знаком "+", то в модель включаются только главные факторы без учета их взаимодействия).

Если объекты-члены формулы связаны символом ":", то в модель включается только их парный эффект (так, A:B отражает взаимодействие факторов A и B). Использование в формуле символа умножения "\*" приводит к включению, как главных эффектов, так и их парных взаимодействий (т.е. A\*B эквивалентно A + B + A:B, а A\*B\*C эквивалентно A+B+C+A:B+A:C+B:C+A:B:C). Возможно использование и других операторов в формуле, в частности: "%in%" для "гнездового дисперсионного анализа" (nested ANOVA), "|" - для определения случайных эффектов и т.д.

Примеры формул:

- рассчитываются свободный член уравнения и коэффициенты регрессии двух переменных ( $\beta_0, \beta_1$  и  $\beta_2$ ):  $Y \sim X1+X2$
- та же модель регрессии, но без свободного члена  $\beta_0$ :  $Y \sim 0 +X1 + X2$  или  $Y \sim -1 + X1 + X2$
- в регрессии предикторами являются все столбцы таблицы mydata кроме отклика Y :  
 $Y \sim ., data = mydata$
- двухфакторная модель без парных взаимодействий (рассчитывается столько коэффициентов, сколько есть уровней в факторах group1 и group2 ) :  
 $Y \sim group1 + group2$
- двухфакторная модель с главными эффектами, всеми комбинациями парных взаимодействий и эффектом совместного действия всех трех факторов:  
 $Y \sim group1*group2*group3$
- гнездовая модель, учитывающая вариацию Y под влиянием фактора River и для фактора Site, изменяющегося только для каждого уровня фактора River:  
 $Y \sim River + Site \%in\% River$
- смешанная модель, включающая фиксированный фактор Water и два случайных фактора RiverType и Season:  
 $Y \sim Water + (1 | RiverType) + (1 | Season).$

Как отмечалось выше, посмотреть матрицу плана модели можно с использованием функции `model.matrix()`.

Кроме объявленных типов объектов в состав формулы можно включить любые выражения, принятые в R, в том числе различные преобразования и вызовы функций. Например:

- `cut (Age, 3)` – количественная переменная Age конвертируется в фактор с тремя уровнями;
- `I (age^2)` – числовой вектор age возводится в квадрат; общий синтаксис `I (< любое допустимое выражение >)` ;
- `poly (Age, 3)` – переменная Age трансформируется в полином 3-й степени;
- `smooth (x, k=s)` – строится функция сглаживания вектора x с заданной степенью.

Такая гибкость синтаксиса объекта "формула" обеспечивает его широкое использование не только в моделях регрессии/ANOVA, но и при построении комплексных диаграмм, деревьев классификации и во многих других приложениях R.

### Выполнение двухфакторного дисперсионного анализа при помощи функции `lm ()`

Как было показано ранее в разделе 5.5, двухфакторный дисперсионный анализ (англ. *two-way analysis of variance*, или *two-way ANOVA*) позволяет установить одновременное влияние двух факторов, а также взаимодействие между этими факторами. В качестве примера были рассмотрены данные из таблицы `weightgain`, содержащей

измерения прироста массы лабораторных крыс (`weightgain`) в четырех группах с разным характером питания. Корма имели разное содержание белка (фактор `type` с двумя уровнями: низкое содержание – `Low`, и высокое содержание – `High`) и разное происхождение (фактор `source` с двумя уровнями: `beef` – говядина, и `cereal` – злаки).

Применим теперь функцию `lm()` для этих данных:

```
data(weightgain, package="HSAUR2")
M2 <- lm(weightgain ~ type*source, data = weightgain)
summary(M2)
Call:
lm(formula = weightgain ~ type * source, data = weightgain)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-29.90  -9.90   2.05  10.85  25.10
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)         100.000     4.729  21.148 < 2e-16 ***
typeLow              -20.800     6.687  -3.110  0.00364 **
sourceCereal        -14.100     6.687  -2.109  0.04201 *
typeLow:sourceCereal  18.800     9.457   1.988  0.05447 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 14.95 on 36 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.23, Adjusted R-squared:  0.1658
F-statistic: 3.584 on 3 and 36 DF,  p-value: 0.02297
```

Оцененные параметры модели можно интерпретировать подобно тому, как мы это делали в случае однофакторной модели. В первой строке таблицы с параметрами модели (`Intercept`) представлена информация, относящаяся к среднему значению прироста веса в группе крыс, которым давали корм с высоким содержанием белка (`High`) животного происхождения (`Beef`) (для простоты обозначим эту базовую группу как "`High - Beef`"). Видим, что средний прирост веса в этой группе составил 100 г, и что этот прирост значимо отличается от 0 (стандартная ошибка = 4.729 г, значение  $t$ -критерия Стьюдента = 21.148,  $P$ -значение  $\ll 0.001$ ).

Вторая строка (`typeLow`) содержит оценку величины эффекта, связанного с низким содержанием в корме белка животного происхождения: в этой группе крыс прирост веса оказался существенно ниже (на 20.8 г,  $p = 0.00364$ ), чем в группе "`High - Beef`" ( $100 - 20.8 = 79.2$  г). Из третьей строки таблицы (`sourceCereal`) мы узнаём, что у крыс, которым давали корм с высоким содержанием белка растительного происхождения прирост веса был статистически значимо ниже (на 14.1 г,  $p = 0.04201$ ), чем в группе "`High - Beef`" ( $100 - 14.1 = 85.9$  г). Наконец, в четвертой строке мы находим оценку эффекта взаимодействия между факторами "`type`" и "`source`" – 18.8 г.

Сложив первые три коэффициента с эффектом взаимодействия, получим среднее значение прироста веса крыс в группе, которым давали корм с низким содержанием белка растительного происхождения:  $100 - 20.8 - 14.1 + 18.8 = 83.9$  (см. также приведенную ранее таблицу в разделе 5.5 со средними значениями по каждой группе). Как видим, этот средний прирост лишь незначительно ( $p = 0.05447$ ) превысил таковой в группе крыс, которым давали корм с низким содержанием белка растительного происхождения (83.9 против 79.2).

Как видим, полученные результаты хорошо согласуются со значениями, которые мы получили в ходе расчета описательных статистик по каждой группе, а также при выполнении графического разведочного анализа данных (см. раздел 5.5).

Результаты дисперсионного анализа, выполненного при помощи функции `lm()`, можно представить также и в виде классической таблицы ANOVA. Для этого соответствующий модельный объект необходимо использовать как входящий параметр функции `anova()`:

```
anova(M2)
Analysis of Variance Table
Response: weightgain
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
type    1 1299.6 1299.60   5.8123 0.02114 *
source  1   220.9   220.90   0.9879 0.32688
type:source 1   883.6   883.60   3.9518 0.05447 .
Residuals 36 8049.4   223.59
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Представленные в этой таблице результаты идентичны таковым в таблице, полученной ранее при помощи функции `cov()`.

### Порядок перечисления факторов в формуле модели

В ходе спецификации модели M2 мы сначала указали фактор "type", а затем "source" (см. выше: `weightgain ~ type*source`). Что произойдет, если этот порядок изменить?

```
M3 <- lm(weightgain ~ source*type, data = weightgain)
anova(M3)
Analysis of Variance Table
Response: weightgain
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
source  1   220.9   220.90   0.9879 0.32688
type    1 1299.6 1299.60   5.8123 0.02114 *
source:type 1   883.6   883.60   3.9518 0.05447 .
Residuals 36 8049.4   223.59
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Результаты идентичны тем, что были получены для модели M2. Единственная разница состоит лишь в том, что строки, содержащие информацию по факторам "type" и "source" поменялись местами.

Такое полное совпадение результатов будет наблюдаться только при работе со сбалансированными наборами данных. Для демонстрации этого утверждения изменим исходные данные путем удаления, например, первых 6 наблюдений и последних 7 наблюдений:

```
weightgain2 <- weightgain[-c(1:6, 34:40), ]
# Модели с разным порядком указания предикторов:
M4 <- lm(weightgain ~ type*source, data = weightgain2)
M5 <- lm(weightgain ~ source*type, data = weightgain2)
# ANOVA-таблица для модели M4
```

```

anova (M4)
Analysis of Variance Table
Response: weightgain
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
type    1  758.0   758.02   3.1655 0.08843 .
source  1  584.8   584.76   2.4419 0.13179
type:source 1  744.5   744.54   3.1092 0.09113 .
Residuals 23 5507.6   239.46
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
# ANOVA-таблица для модели M5
anova (M5)
Analysis of Variance Table
Response: weightgain
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
source  1 1188.8 1188.83   4.9645 0.03594 *
type    1  153.9   153.95   0.6429 0.43087
source:type 1  744.5   744.54   3.1092 0.09113 .
Residuals 23 5507.6   239.46
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Как видим, выводы, сделанные на основании этих двух новых моделей оказываются совершенно разными: ни один из параметров модели M4 не является статистически значимым, тогда как модель M5 указывает на существование существенного эффекта источника происхождения белка. Такая разница обусловлена алгоритмом, по которому происходит декомпозиция общей дисперсии при анализе несбалансированных наборов данных. Какая из последних двух моделей отражает действительность?

Ответ на этот вопрос в значительной степени будет определяться тем, как именно мы хотим представить результаты анализа. Если дисперсионный анализ рассматривать как частный случай общей линейной модели и представлять его результаты в виде таблицы с оценками параметров такой модели, тогда никакой разницы между M4 и M5 нет. Соответствующие оценки лишь изменяют свое положение в таблице результатов – это еще раз подчеркивает универсальность концепции ОЛМ:

```

summary (M4)
Call:
lm(formula = weightgain ~ type * source, data = weightgain2)
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-27.00 -10.82   2.00  11.18  23.10
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    100.000     4.893   20.435 3.02e-16 ***
typeLow        -16.250     9.155   -1.775  0.0891 .
sourceCereal   -24.000    10.187   -2.356  0.0274 *
typeLow:sourceCereal  24.150    13.696   1.763  0.0911 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 15.47 on 23 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2748, Adjusted R-squared:  0.1802
F-statistic: 2.906 on 3 and 23 DF, p-value: 0.05643

```

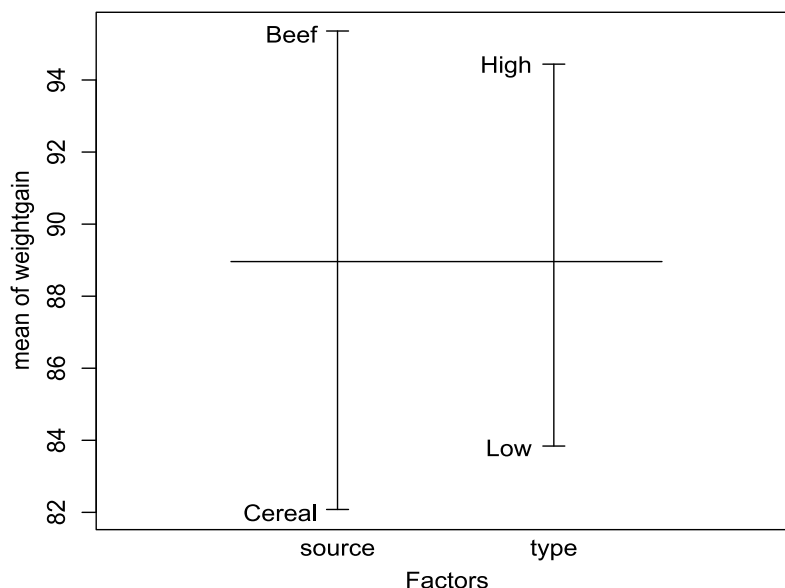
```

summary (M5)
Call:
lm(formula = weightgain ~ source * type, data = weightgain2)
Residuals:
    Min     1Q   Median     3Q     Max
-27.00 -10.82   2.00  11.18  23.10
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)         100.000     4.893  20.435 3.02e-16 ***
sourceCereal        -24.000    10.187  -2.356  0.0274 *
typeLow             -16.250     9.155  -1.775  0.0891 .
sourceCereal:typeLow  24.150    13.696   1.763  0.0911 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 15.47 on 23 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2748, Adjusted R-squared:  0.1802
F-statistic: 2.906 on 3 and 23 DF, p-value: 0.05643

```

Если же мы хотим представить результаты анализа несбалансированных данных в виде классической таблицы ANOVA, следует уделить особое внимание разведочному анализу данных. Особенно полезным, в частности, будет график дизайна эксперимента (см. раздел 5.5). Тот фактор, который, судя по такому графику, оказывает наибольшее влияние на изучаемую переменную-отклик, следует включать в модель первым. Для нашей видоизмененной таблицы с данными получаем:

```
plot.design(weightgain2)
```



Поскольку источник происхождения теперь имеет больший эффект на прирост веса крыс, чем уровень содержания белка, предпочтение следует отдать модели M5.

### Многофакторный дисперсионный анализ

При наличии более двух факторов говорят о *многофакторном дисперсионном анализе*. Тщательно спланированный и выполненный многофакторный дисперсионный анализ может оказаться очень полезным для понимания изучаемого явления. Однако следует помнить о возникающих при этом затруднениях. Уже при наличии трех основных

факторов (X, Y и Z) в модель войдут четыре дополнительных параметра, отражающих взаимодействия между этими факторами (XY, XZ, YZ, XYZ). Чем больше параметров мы оцениваем, тем больше степеней свободы нам нужно. Другими словами, требуется собрать больше данных, что не всегда возможно.

Кроме того, при проверке статистических гипотез в отношении большого числа параметров возрастает вероятность сделать неверное заключение о значимости как минимум некоторых из них. Но даже если мы имеем "достаточно" много данных для надежной оценки большого числа параметров, возникает также проблема с интерпретацией этих параметров – в частности, с интерпретацией взаимодействий высокого порядка (> 2-3). К счастью, однако, в большинстве случаев взаимодействия высокого порядка оказываются незначимыми, что дает нам возможность исключить их из модели. Выбор оптимальных моделей – это отдельная большая тема, к которой мы еще вернемся.

## 6.7. Контрасты в линейных моделях, содержащих категориальные предикторы

Как было показано выше, однофакторный дисперсионный анализ (ANOVA) представляет собой частный случай общей линейной модели, в которой единственный предиктор представлен категориальной переменной (фактором) с двумя или более уровнями. В случае многофакторного дисперсионного анализа имеется несколько интересующих нас факторов. Категориальные предикторы могут быть также включены в модели с количественными предикторами, и тогда мы будем иметь дело с ковариационным анализом.

Важным понятием при работе с категориальными предикторами, которому, к сожалению, уделяется недостаточно внимания в соответствующей методической литературе, является понятие "*контрастов*" (англ. *contrasts*). Ниже мы постараемся дать небольшое введение на эту тему и привести примеры применения контрастов в R. Для простоты изложения речь будет идти только об однофакторном дисперсионном анализе.

### Основные понятия

Априорные контрасты представляют собой взвешенные суммы средних значений каждого уровня какой-либо категориальной переменной:

$$L = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 \dots + c_k \bar{x}_k$$

где  $c_1, \dots, c_k$  – весовые коэффициенты для каждого из  $k$  уровней изучаемого фактора, а  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  – групповые средние значения.

В зависимости от значений задаваемых коэффициентов контрасты позволяют проверять разные гипотезы о средних значениях отдельных уровней или комбинаций уровней анализируемого фактора (факторов). Обычно (но не всегда – см. пример ниже) используют нормированные весовые коэффициенты, т.е.  $\sum_i^k c_i = 0$ . Для этого должны выполняться следующие обязательные условия:

- коэффициенты сравниваемых уровней (или комбинаций уровней) должны иметь разные знаки (+ или -);
- коэффициенты уровней, не представляющих для нас интереса, приравниваются нулю.

Например, если изучаемый фактор имеет три уровня – А, В и С, и мы хотим "выявить контраст" между средними значениями уровней А и С (т.е. сравнить эти значения статистически), то коэффициентам контраста можно придать следующие значения:

```

      [,1]
A      -1
B       0
C       1

```

Аналогично, при сравнении средних значений уровней А и В коэффициенты соответствующего контраста составят:

```

      [,1]
A      -1
B       1
C       0

```

Обратите внимание на то, что выбор значений весовых коэффициентов в контрастах совершенно произволен – главное, чтобы в сумме они давали 0. Так, в первом из приведенных примеров коэффициенты вполне могли бы составить

```

      [,1]
A    -0.5
B     0.0
C     0.5

```

Также обратите внимание на то, что при наличии трех уровней фактора, мы можем иметь только два контраста. Это и неудивительно, поскольку сравнив А с В и А с С, мы, пусть и косвенным образом, но уже сравнили и В с С. Поэтому при попарном сравнении средних значений фактора с тремя уровнями мы получаем следующую *матрицу контрастов*:

```

contr.matrix <- matrix(c(-1, 0, 1, -1, 1, 0), ncol = 2)
rownames(contr.matrix) <- c("A", "B", "C")
contr.matrix
      [,1] [,2]
A      -1  -1
B       0   1
C       1   0

```

При необходимости мы можем сравнивать также *комбинации из нескольких уровней* фактора с другими его уровнями (или комбинациями уровней), что, как несложно догадаться, открывает широкие возможности для проверки самых разнообразных гипотез в отношении анализируемых данных. Так, по тем или иным причинам, мы могли бы захотеть сравнить среднее значение уровня А с общим средним значением уровней В и С. Тогда коэффициенты контраста можно было бы выразить следующим образом:

```

      [,1]
A       2
B      -1
C      -1

```

В базовой версии R реализованы четыре основных типа стандартных контрастов:

- *treatment contrasts*: контрасты комбинаций условий;
- *sum contrasts*: контрасты сумм;
- *Helmert contrasts*: контрасты Хелмерта;
- *polynomial contrasts*: полиномиальные контрасты.

Выбор типа контраста зависит от того, является ли фактор упорядоченным (англ. *ordered factors*), т.е. являются ли его уровни естественным образом упорядоченными по возрастанию или убыванию. Например, в отношении ежемесячного дохода можно выделить уровни: "низкий" < "средний" < "высокий". По умолчанию в R для неупорядоченных факторов применяются "контрасты комбинаций условий", а для

упорядоченных факторов – полиномиальные контрасты. Мы можем выяснить текущие глобальные настройки контрастов при помощи функции `options()`:

```
options()$contrasts
  unordered          ordered
"contr.treatment"  "contr.poly"
```

Та же функция позволяет изменить глобальные настройки контрастов:  
`options(contrasts = c("contr.treatment", "contr.poly"))`

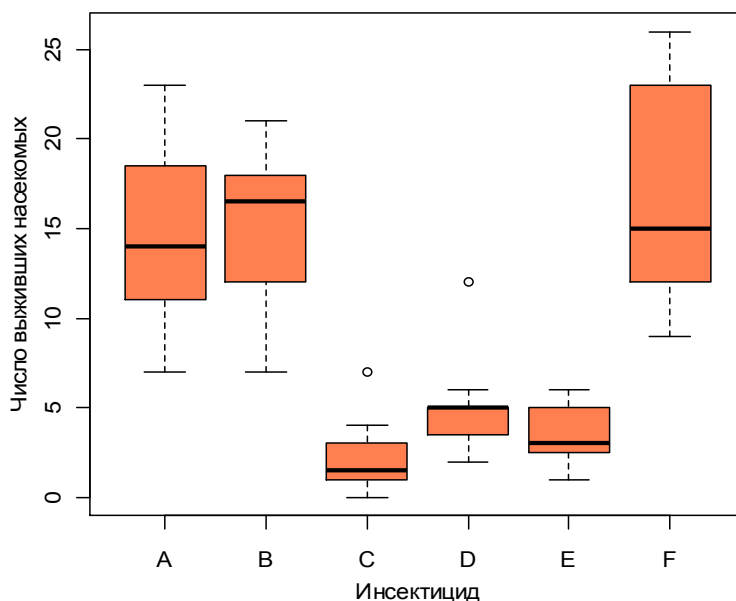
Полиномиальные контрасты применяются гораздо реже других и здесь не рассматриваются. Подробнее об этом, а также о других типах контрастов, можно почитать на сайте [ats.ucla.edu](https://ats.ucla.edu) (англ. яз.).

### Контрасты комбинаций условий (treatment contrasts)

Как отмечено выше, этот тип контрастов используется в R по умолчанию. Собственно, о лежащем в его основе принципе мы уже писали в разделе 6.2 при рассмотрении дисперсионного анализа как частного случая общей линейной модели. Применение этого типа контрастов предполагает, что один из уровней изучаемого фактора (например, контрольная группа) принимается в качестве базового, а все остальные уровни сравниваются с этим базовым уровнем.

В качестве примера используем данные эксперимента по изучению эффективности 6 разных инсектицидов (таблица `InsectSprays` с этими данными входит в состав базовой версии R; см. также разделы 3.2 и 4.5). Каждым из этих средств (фактор `spray`) обработали по 12 растений, после чего подсчитали количество выживших на растениях насекомых (отклик `count`). Рассмотрим еще раз представленную в разделе 3.3 диаграмму размахов переменной `count` для каждого варианта обработки `spray`.

```
boxplot(count ~ spray, data = InsectSprays, col = "coral",
        xlab = "Инсектицид",
        ylab = "Число выживших насекомых")
```



В разделах 5.4 и 6.4 мы подробно рассмотрели результаты дисперсионного анализа для проверки нулевой гипотезы об отсутствии разницы между инсектицидами по их эффективности и, поскольку  $p$ -значение для  $F$ -критерия мало ( $< 2e-16$ ), сделали заключение о значимости различий. Процедура подгонки линейной модели при помощи



функции `lm()` выполнила множественные сравнения и позволила нам выяснить, какие именно пары инсектицидов различались между собой. Уточним механизм этих сравнений.

При рассмотрении структуры построенной модели обратим внимание на строку:

```
str(M)
..$ spray: chr "contr.treatment"
```

Функция `contrasts()` позволяет ознакомиться с матрицей контрастов для того или иного фактора:

```
contrasts(InsectSprays$spray)
  B C D E F
A 0 0 0 0 0
B 1 0 0 0 0
C 0 1 0 0 0
D 0 0 1 0 0
E 0 0 0 1 0
F 0 0 0 0 1
```

Таким образом, мы имеем типичный пример матрицы, содержащей весовые коэффициенты "контрастов комбинаций условий" ("`contr.treatment`").

Контрасты комбинаций условий – как раз тот случай, когда все сравнения выполняются относительно базового уровня (в качестве такового автоматически выбрана группа наблюдений для препарата А, поскольку буква А идет первой по алфавиту). Для базового уровня проверяется статистическая гипотеза  $H_0: \beta_0 = \mu_1 = 0$ , т.е. гипотеза о равенстве 0 среднего значения `count` при использовании препарата А (эта проверка, как правило, особого содержательного смысла не имеет).

Число столбцов приведенной матрицы контрастов равно количеству оцениваемых коэффициентов линейной модели, за исключением  $\beta_0$ . Для того чтобы оценить статистическую значимость коэффициента  $\beta_1$ , берут первый столбец матрицы контрастов, умножают его на вектор групповых средних и сравнивают по  $t$ -критерию результат с  $\beta_0$ . Тем самым, при такой структуре матрицы контрастов, проверяется следующая статистическая гипотеза: *средние значения отклика для групп растений А и В одинаковы*. Аналогично проводится тестирование коэффициентов модели  $\beta_2 - \beta_5$  (или равенство групповых средних группы А со средними в группах С, D, Е и F).

Как отмечено выше, суммы весовых коэффициентов по каждому столбцу матрицы контрастов не всегда должны быть равны нулю, и контрасты комбинаций условий – пример такого случая. Следующая таблица обобщает принцип, заложенный в основу контрастов комбинаций условий:

Параметр модели	Оценка	Проверяемая нулевая гипотеза
$\beta_0$	среднее значение для базового уровня $\bar{x}_1$	$H_0: \mu_1 = 0$
$\beta_1$	среднее значение второго уровня за вычетом среднего значения базового уровня: $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$	$H_0: \mu_2 - \mu_1 = 0$
$\beta_2$	среднее значение третьего уровня за вычетом среднего значения базового уровня: $\bar{x}_3 - \bar{x}_1$	$H_0: \mu_3 - \mu_1 = 0$
...	...	...
...	...	...

### Контрасты сумм (sum contrasts)

При параметризации модели дисперсионного анализа с помощью *контрастов сумм* базовый уровень, с которым сравниваются остальные уровни, представляет собой среднее значение из средних по каждой группе. Разберемся с этим типом контрастов, продолжив пример с инсектицидами.

Используя функцию `contrasts()` в сочетании с `contr.sum()` (подробнее см. `?contr.sum`), мы можем изменить исходное поведение R в плане того, какие контрасты программа автоматически применяет в отношении *конкретного* фактора. Еще раз обратите внимание: для изменения глобальных настроек следует использовать функцию `options()` – см. выше.

```
contrasts(InsectSprays$spray) <- contr.sum(n = 6)
```

В итоге получаем матрицу контрастов сумм:

```
contrasts(InsectSprays$spray)
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
A     1     0     0     0     0
B     0     1     0     0     0
C     0     0     1     0     0
D     0     0     0     1     0
E     0     0     0     0     1
F    -1    -1    -1    -1    -1
```

Как видим, в отличие от матрицы с контрастами комбинаций условий, суммы по всем столбцам матрицы контрастов сумм равны нулю.

Выполнив дисперсионный анализ, увидим, что интерпретация оцененных параметров модели теперь также изменилась:

```
M3 <- lm(count ~ spray, data = InsectSprays)
summary(M3)
Call:
lm(formula = count ~ spray, data = InsectSprays)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-8.333 -1.958 -0.500  1.667  9.333
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      9.5000     0.4622  20.554 < 2e-16 ***
spray1           5.0000     1.0335   4.838 8.22e-06 ***
spray2           5.8333     1.0335   5.644 3.78e-07 ***
spray3          -7.4167     1.0335  -7.176 7.87e-10 ***
spray4          -4.5833     1.0335  -4.435 3.57e-05 ***
spray5          -6.0000     1.0335  -5.805 2.00e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 3.922 on 66 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7244, Adjusted R-squared:  0.7036
F-statistic:  34.7 on 5 and 66 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Первая строка в таблице с результатами анализа (Intercept) содержит среднее значение числа выживших насекомых, рассчитанное по средним значениям каждой группы. Мы можем легко это проверить, выполнив команду

```
with(InsectSprays, mean(tapply(count, spray, mean)))
[1] 9.5
```

Во второй строке содержится информации относительно того, насколько среднее число выживших насекомых в следующей группе (B) отличается от среднего значения, вычисленного для всех групп ("общее среднее"). Аналогично, в третьей строке содержится информации о том, насколько среднее число выживших насекомых в группе C отличается от общего среднего, и т.д. Заметьте: по причинам, описанным выше в подразделе "Определение понятия", в таблице с результатами анализа представлено только пять сравнений с общим средним значением. Следующая таблица обобщает принцип, заложенный в основу контрастов сумм:

Параметр модели	Оценка	Проверяемая нулевая гипотеза
$\beta_0$	среднее значение из средних по каждой группе ("общее среднее"): $\sum_k \bar{x}_k / k$	$H_0: \sum_k \bar{x}_k / k = 0$
$\beta_1$	среднее значение первого уровня за вычетом общего среднего: $\bar{x}_1 - \sum_k \bar{x}_k / k$	$H_0: \bar{x}_1 - \sum_k \bar{x}_k / k = 0$
$\beta_2$	среднее значение второго уровня за вычетом среднего значения общего среднего: $\bar{x}_2 - \sum_k \bar{x}_k / k$	$H_0: \bar{x}_2 - \sum_k \bar{x}_k / k = 0$
...	...	...
...	...	...

### Контрасты Хелмерта

При параметризации модели дисперсионного анализа с помощью *контрастов Хелмерта* базовый уровень представляет собой среднее значение из средних по каждой группе ("общее среднее"). Сравнения групповых средних с этим базовым уровнем выполняются согласно схеме, обобщенной в следующей таблице:

Параметр модели	Оценка	Проверяемая нулевая гипотеза
$\beta_0$	среднее значение из средних по каждой группе ("общее среднее"): $\sum_k \bar{x}_k / k$	$H_0: \sum_k \bar{x}_k / k = 0$
$\beta_1$	$\bar{x}_2 - (\bar{x}_1 + \sum_k \bar{x}_k / k)$	$H_0: \bar{x}_2 - (\bar{x}_1 + \sum_k \bar{x}_k / k) = 0$
$\beta_2$	$\bar{x}_3 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \sum_k \bar{x}_k / k)$	$H_0: \bar{x}_3 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \sum_k \bar{x}_k / k) = 0$
...	...	...
...	...	...

Применим контрасты Хелмерта к данным по инсектицидам:

```
# изменение контрастов для фактора spray на контрасты Хелмерта:
contrasts(InsectSprays$spray) <- contr.helmert(n = 6)
contrasts(InsectSprays$spray)
```

```

      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
A      -1  -1  -1  -1  -1
B       1  -1  -1  -1  -1
C       0   2  -1  -1  -1
D       0   0   3  -1  -1
E       0   0   0   4  -1
F       0   0   0   0   5

```

Обратите внимание, что суммы по всем столбцам матрицы контрастов Хелмерта равны нулю. Кроме того, сумма произведений элементов любых двух столбцов матрицы также равна нулю (контрасты с такими свойствами называются *ортогональными*). Например:

```

mat <- contrasts(InsectSprays$spray)
sum(mat[, 1]*mat[, 2])
[1] 0

```

Рассчитаем теперь параметры линейной модели с применением контрастов Хелмерта:

```

M4 <- lm(count ~ spray, data = InsectSprays)
summary(M4)
Call:
lm(formula = count ~ spray, data = InsectSprays)
Residuals:
    Min     1Q  Median     3Q     Max
-8.333 -1.958 -0.500  1.667  9.333
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    9.5000     0.4622  20.554 < 2e-16 ***
spray1         0.4167     0.8006   0.520  0.604
spray2        -4.2778     0.4622  -9.255 1.53e-13 ***
spray3        -1.4306     0.3268  -4.377 4.38e-05 ***
spray4        -1.1417     0.2532  -4.510 2.73e-05 ***
spray5         1.4333     0.2067   6.934 2.12e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 3.922 on 66 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7244, Adjusted R-squared:  0.7036
F-statistic:  34.7 on 5 and 66 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Интерпретация полученных параметров модели выполняется в соответствии с последней из приведенных выше таблиц. Следует отметить, что, несмотря на такие привлекательные математические свойства как ортогональность, контрасты Хелмерта редко применяются на практике, поскольку получаемые параметры модели сложно интерпретировать применительно к конкретным проблемам. Тем не менее, в некоторых статистических программах этот тип контрастов является настройкой по умолчанию (например, в S-PLUS, коммерческой реализации языка S, который является предшественником R).

### Контрасты, задаваемые пользователем

Помимо рассмотренных стандартных типов контрастов, пользователь имеет возможность задавать свои собственные контрасты, предназначенные для проверки определенных гипотез в отношении анализируемых данных.

Продолжая работать с данными по эффективности инсектицидов, предположим, что нас интересуют ответы на три конкретных вопроса (пример рассматривается на ресурсе [r-eco-evo.blogspot.de](http://r-eco-evo.blogspot.de)):

- Различаются ли исследованные препараты по своей эффективности в целом (выше мы уже выяснили, что так оно и есть, но допустим, что пока мы этого не знаем) ?
- Различается ли средняя эффективность трех первых инсектицидов (А, В и С) от трех последних (D, E и F)?
- Имеются основания ожидать, что средняя эффективность препаратов А, В и F в среднем ниже (т.е. количество выживших насекомых после обработки ими выше), чем эффективность трех остальных препаратов.

Так ли это? Ответ на первый вопрос мы можем получить, применив функцию `aov()` и любые из рассмотренных выше контрастов. А вот ответ на последние два вопроса потребует создания соответствующих пользовательских контрастов:

```
# коэффициенты контраста для ответа на второй вопрос:
con1 <- c(1, 1, 1, -1, -1, -1)
# коэффициенты контраста для ответа на третий вопрос:
con2 <- c(1, 1, -1, -1, -1, 1)
# объединение обоих векторов в матрицу контрастов:
con.matrix <- cbind(con1, con2)
con.matrix
      con1 con2
[1,]    1    1
[2,]    1    1
[3,]    1   -1
[4,]   -1   -1
[5,]   -1   -1
[6,]   -1    1
```

Сообщим программе, что созданная нами матрица контрастов `con.matrix` должна использоваться для всех моделей, включающих фактор `spray`:

```
contrasts(InsectSprays$spray) <- con.matrix
```

Выполним дисперсионный анализ при помощи функции `aov()`:

```
M5 <- aov(count ~ spray, data = InsectSprays)
```

Как обычно, результаты анализа можно вывести на экран при помощи функции `summary()`. Однако, учитывая специфичность выполняемых межгрупповых сравнений, мы дополнительно воспользуемся аргументом `split` этой функции (подробнее см. `?summary.aov`):

```
summary(M5, split = list(spray =
  list("Первые три против остальных" = 1, "ABF против CDE" = 2)))
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
spray      5 2668.8    533.8  34.702 <2e-16 ***
  spray: Первые три против остальных  1    93.4    93.4   6.072 0.0164 *
  spray: ABF против CDE              1 2558.7 2558.7 166.349 <2e-16 ***
Residuals      66 1015.2    15.4
---
```

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Числа 1 и 2 в выражении, задающем значение аргумента `split`, указывают столбцы матрицы контрастов `con.matrix`, где содержатся соответствующие весовые коэффициенты.

Из полученных результатов следует, что исследованные инсектициды в целом существенно различаются по своей эффективности (см. первую строку в таблице –  $\Pr(>F) < 2e-16$ ). Кроме того, первые три препарата в среднем значительно отличаются по эффективности действия от трех других препаратов (вторая строка:  $\Pr(>F) = 0.0164$ ), а препараты А, В и F в среднем отличаются от группы препаратов С, D и E (третья строка:  $\Pr(>F) < 2e-16$ ).

## 6.8. Проблема множественных проверок статистических гипотез

В практике статистического анализа часто возникает ситуация, когда на *одном и том же* наборе данных выполняется проверка большого числа гипотез. Например, интерес может представлять выполнение всех возможных попарных сравнений средних значений нескольких экспериментальных групп. В других случаях несколько экспериментальных групп могут сравниваться с одной контрольной группой. Особенно большие количества одновременно проверяемых гипотез можно встретить в некоторых областях биологии: например, при работе с данными, которые получают при помощи технологии микрочипов, одновременно проверяются гипотезы в отношении уровней экспрессии нескольких тысяч генов (см., например, статью на [projecteuclid.org](http://projecteuclid.org)).

По определению, при проверке каждой статистической гипотезы закладывается возможность совершения ошибки первого рода (т.е. отклонения верной нулевой гипотезы). Чем больше гипотез мы проверяем на одних и тех же данных, тем больше будет вероятность допустить как минимум одну такую ошибку. Это явление называют *эффектом множественных сравнений* (англ. *multiple comparisons* или *multiple testing*). Рассмотрим проблему оценки групповой вероятности ошибки первого рода с математической точки зрения.

Предположим, что мы проверяем истинность  $m$  нулевых гипотез, которые можно обозначить как  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_m$ . В отношении каждой из этих гипотез мы применяем определенный статистический критерий (например,  $t$ -критерий Стьюдента) и делаем заключение о том, верна ли она (т.е. выполняем  $m$  одинаковых тестов на одних и тех же данных и принимаем либо отвергаем каждую гипотезу). Результаты такого анализа можно свести в таблицу следующего вида:

	Число принятых гипотез	Число отвергнутых гипотез	Всего
Число верных гипотез	$U$	$V$	$m_0$
Число неверных гипотез	$T$	$S$	$m - m_0$
Всего	$W$	$R$	$m$

В этой таблице

- $m_0$  – число верных нулевых гипотез (англ. *true null hypotheses*);
- $m - m_0$  – число истинных альтернативных гипотез (*true alternative hypotheses*);
- $U$  – число безошибочно принятых гипотез (*true negatives*);
- $V$  – число ошибочно отвергнутых гипотез (*false positives*) (ошибка первого рода);
- $T$  – число ошибочно принятых гипотез (*false negatives*) (ошибка второго рода);
- $S$  – число безошибочно отвергнутых гипотез;

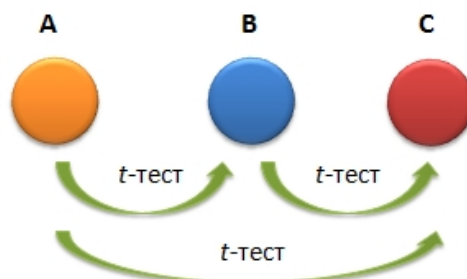
- $W$  – общее число принятых гипотез;
- $R$  – общее число отвергнутых гипотез.

Представленную таблицу следует интерпретировать следующим образом. В первой строке мы видим, что всего имеется  $m_0$  верных нулевых гипотез. В ходе выполнения анализа определенная их часть ошибочно отвергается ( $V$ ), тогда как остальные  $U$  гипотез классифицируются правильно. Аналогично, во второй строке мы видим, что всего имеется  $m - m_0$  альтернативных гипотез, из которых в ходе анализа  $S$  гипотез безошибочно отвергаются, а  $T$  гипотез – ошибочно принимаются. Обратите внимание на то, что общие количества отвергнутых ( $R$ ) и принятых ( $W$ ) гипотез нам известны, тогда как  $m_0$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $T$  и  $S$  – ненаблюдаемые случайные величины.

Таким образом, при одновременной проверке группы (или "семейства", англ. *family*) статистических гипотез задача заключается в том, чтобы минимизировать число ложных отклонений  $V$  и ложных принятий  $T$ . Традиционно исследователи пытаются минимизировать величину  $V$ . Если  $V \geq 1$ , мы совершаем как минимум одну ошибку первого рода. Вероятность допущения такой ошибки при множественной проверке гипотез называют "*групповой вероятностью ошибки*"  $P_F$  (англ. "*familywise error rate*", *FWER*; реже используется термин "*experiment-wise error rate*"). По определению,  $P_F = P(V \geq 1)$ . Соответственно, когда мы говорим, что хотим *контролировать* групповую вероятность ошибки на определенном уровне значимости  $\alpha$ , мы подразумеваем, что должно выполняться неравенство  $P_F \leq \alpha$ . Контроль над групповой вероятностью ошибки первого рода позволяют обеспечить *методы множественной проверки гипотез*.

Представим, что у нас имеются три группы, подвергшиеся разным уровням воздействия определенного фактора. Как выяснить влияние этого фактора на интересующую нас переменную-отклик? При выполнении определенных условий, данную задачу можно решить, сравнив средние значения имеющихся групп при помощи однофакторного дисперсионного анализа. Однако дисперсионный анализ позволит сделать только вывод типа "да/нет", т.е. эффект изучаемого фактора либо имеется, либо отсутствует. Допустим, что результаты дисперсионного анализа указывают на наличие эффекта. Как теперь выяснить, какие именно группы различаются между собой?

Одним из (очень гибких) способов ответить на этот вопрос является использование линейных контрастов, описанное выше. Пусть эта концепция мало знакома конкретному исследователю, но зато ему хорошо знаком  $t$ -критерий Стьюдента, который легко рассчитать для каждой пары сравниваемых групп. Выполняя тест Стьюдента, исследователь хочет проверить нулевую гипотезу об отсутствии разницы между генеральными средними двух сравниваемых групп А и В с вероятностью ошибки менее 5%. Точно такой же риск ошибиться он устанавливает и при сравнении В с С и А с С:



Принципиальная проблема, возникающая при выполнении подобных множественных сравнений, заключается в том, что в действительности вероятность ошибки первого рода может значительно превышать принятое критическое значение 5%. Так, для рассматриваемого примера вероятность ошибиться хотя бы в одном из трех сравнений составит  $P_F = 1 - (1 - 0.05)^m = 1 - (1 - 0.05)^3 = 0.143$ . Очевидно, что дальнейшее



увеличение числа одновременно проверяемых гипотез будет неизбежно сопровождаться дальнейшим возрастанием  $P_F$ .

Для устранения эффекта множественных сравнений существует большой арсенал методов, обеспечивающих контроль над групповой вероятностью ошибки  $P_F$  на определенном уровне  $\alpha$ , но различающихся по своей мощности. Рассмотрим наиболее распространенные из этих методов.

### Поправка Бонферрони

Метод Бонферрони, названный так в честь предложившего его итальянского математика К. Бонферрони (*Carlo Emilio Boferroni*), является одним из наиболее простых и известных способов контроля над групповой вероятностью ошибки.

Предположим, что мы применили определенный статистический критерий 3 раза (например, сравнили при помощи критерия Стьюдента средние значения групп А и В, А и С, и В и С) и получили следующие три  $p$ -значения: 0.01, 0.02 и 0.005. Если мы хотим, чтобы групповая вероятность ошибки при этом не превышала определенный уровень значимости  $\alpha$  (например, 0.05), то, согласно методу Бонферрони, мы должны сравнить каждое из полученных  $p$ -значений не с  $\alpha$ , а с  $\alpha/m$ , где  $m$  – число проверяемых гипотез. Деление исходного уровня значимости  $\alpha$  на  $m$  – это и есть *поправка Бонферрони*. В рассматриваемом примере каждое из полученных  $p$ -значений необходимо было бы сравнить с  $0.05/3 = 0.017$ . В результате мы выяснили бы, что  $p$ -значение для второй гипотезы (0.02) превышает 0.017 и, соответственно, у нас не было бы оснований отвергнуть эту гипотезу.

Вместо деления изначально принятого уровня значимости на число проверяемых гипотез, мы могли бы умножить каждое из исходных  $p$ -значений на это число. Сравнив такие скорректированные  $p$ -значения (англ. *adjusted p-values*; обычно обозначаются буквой  $q$ ) с  $\alpha$ , мы пришли бы к точно тем же выводам:

- $0.01 * 3 = 0.03 < 0.05$ : гипотеза отклоняется;
- $0.02 * 3 = 0.06 > 0.05$ : гипотеза принимается;
- $0.005 * 3 = 0.015 < 0.05$ : гипотеза отклоняется.

В ряде случаев при умножении исходных  $p$ -значений на  $m$  результат может превысить 1. По определению, вероятность не может быть больше 1, и если это происходит, то получаемое значение просто приравнивают к 1.

В базовой версии R имеется функция `p.adjust()`, которая позволяет легко применять как метод Бонферрони, так и ряд других методов, обеспечивающих контроль групповой вероятности ошибки на определенном уровне (задаются при помощи аргумента `method`). При реализации метода Бонферрони с помощью этой функции применяется второй из описанных выше подходов, т.е. исходные  $p$ -значения умножаются на число проверяемых гипотез. Функция `p.adjust()` принимает на входе вектор с исходными  $p$ -значениями и возвращает скорректированные значения:

```
# Скорректированные p-значения:
p.adjust(c(0.01, 0.02, 0.005), method = "bonferroni")
[1] 0.030 0.060 0.015
# Какие из проверяемых гипотез следует отвергнуть?
alpha <- 0.05
p.adjust(c(0.01, 0.02, 0.005), method = "bonferroni") < alpha
[1] TRUE FALSE TRUE
```

Хотя метод Бонферрони очень прост в реализации, он обладает одним существенным недостатком: при возрастании числа проверяемых гипотез мощность этого метода резко снижается. Другими словами, при возрастании числа гипотез нам будет все сложнее и сложнее отвергнуть многие из них, даже если они неверны и должны быть



отвергнуты. Например, при проверке 10 гипотез, применение поправки Бонферрони привело бы к снижению исходного уровня значимости до  $0.05/10 = 0.005$ . Соответственно, для отклонения той или иной гипотезы, *все* соответствующие  $p$ -значения должны были бы оказаться меньше 0.005, что случалось бы нечасто. В связи с этим метод Бонферрони не рекомендуется использовать, если число проверяемых гипотез превышает 7-8.

### Метод Холма

Для преодоления проблем, связанных с низкой мощностью метода Бонферрони, С. Холм ([Holm, 1978](#)) предложил гораздо более мощную его модификацию (часто этот метод называют еще методом Холма-Бонферрони). Этот модифицированный метод основан на последовательном алгоритме проверки групповой гипотезы, который включает следующие шаги:

- Исходные  $p$ -значения упорядочивают по возрастанию:  $p(1) \leq p(2) \leq \dots \leq p(m)$ . Эти  $p$ -значения соответствуют проверяемым гипотезам  $H(1), H(2), \dots, H(m)$ .
- Если  $p(1) \geq \alpha/m$ , все нулевые гипотезы  $H(1), H(2), \dots, H(m)$  принимаются и процедура останавливается. Иначе следует отвергнуть гипотезу  $H(1)$  и продолжить.
- Если  $p(2) \geq \alpha/(m-1)$ , нулевые гипотезы  $H(2), H(3), \dots, H(m)$  принимаются и процедура останавливается. Иначе гипотеза  $H(2)$  отвергается и процедура продолжается.
- ...
- Если  $p(m) \geq \alpha$ , нулевая гипотеза  $H(m)$  принимается и процедура останавливается.

Описанную процедуру называют *нисходящей* (англ. *step-down*): она начинается с наименьшего  $p$ -значения в упорядоченном ряду и последовательно "спускается" вниз к более высоким значениям. На каждом шаге соответствующее значение  $p(i)$  сравнивается со скорректированным уровнем значимости  $\alpha/(m + i - 1)$ .

Как и в случае с поправкой Бонферрони, вместо корректировки уровня значимости мы можем скорректировать непосредственно  $p$ -значения – конечный результат (в смысле принятия или отклонения той или иной гипотезы) окажется идентичным. Соответствующая поправка выполняется в виде  $q_i = p(i)(m + i - 1)$ . Так, для рассмотренного выше примера с тремя  $p$ -значениями получаем:

- $q_1 = p(1)(m - 1 + 1) = 0.005 \times 3 = 0.015$
- $q_2 = p(2)(m - 2 + 1) = 0.01 \times 2 = 0.02$
- $q_3 = p(3)(m - 3 + 1) = 0.02 \times 1 = 0.02$

Именно последний подход реализован в R-функции `p.adjust()`:

```
# Скорректированные p-значения:
p.adjust(c(0.01, 0.02, 0.005), method = "holm")
[1] 0.020 0.020 0.015
# (обратите внимание: функция автоматически упорядочивает
# итоговые p-значения по убыванию)
# Какие из проверяемых гипотез следует отвергнуть?
alpha <- 0.05
p.adjust(c(0.01, 0.02, 0.005), method = "holm") < alpha
[1] TRUE TRUE TRUE
```

Сравните результаты, полученные при помощи методов Бонферрони и Холма: в последнем случае мы отвергаем все три гипотезы, тогда как при использовании поправки Бонферрони отклонены были бы только две из трех проверяемых гипотез. Этот простой пример указывает на то, что метод Холма обладает большей мощностью, чем метод Бонферрони.

### Метод Беньямини-Хохберга

Сегодня проверка действительно большого числа гипотез (десятков тысяч и даже миллионов) стала рутинной операцией в самых разных областях, таких как генетика (анализ данных, получаемых при помощи технологии микрочипов), протеомика (данные масс-спектрометрии), нейробиология (анализ изображений мозга), экология, астрофизика, и др. Недостаточная мощность традиционных процедур множественной проверки гипотез приводит к тому, что при больших значениях  $m$  критический уровень значимости становится очень низким и многие нулевые гипотезы, которые должны были бы быть отклонены, не отвергаются. В итоге исследователь может пропустить интересные "открытия" (англ. *discoveries*), достойные более подробного изучения. Например, в ходе сравнения уровней экспрессии генов у больных и здоровых испытуемых, результаты для некоторых потенциально важных генов могли бы оказаться ложно-отрицательными.

В 1995 г. израильские исследователи И. Беньямини и Й. Хохберг опубликовали [статью](#) ([Benjamini, Hochberg, 1995](#)), в которой был предложен принципиально иной подход к проблеме множественных проверок статистических гипотез (эта работа на сайте [tandfonline.com](#) входит в список 25 наиболее цитируемых статей по статистике). Суть предложенного подхода заключается в том, что вместо контроля над групповой вероятностью ошибки первого рода выполняется контроль над ожидаемой *долей ложных отклонений* (англ. *false discovery rate, FDR*) из числа  $R$  всех отклоненных гипотез:

$$FDR = \mathbf{E}(V/R),$$

где  $V$  – число ошибочно отвергнутых гипотез (см. таблицу в разделе 6.8).

В отличие от уровня значимости  $\alpha$ , каких-либо "общепринятых" значений  $FDR$  не существует. Многие исследователи по аналогии контролируют  $FDR$  на уровне 5%. В генетических исследованиях часто встречается также уровень 10%. Интерпретация порогового значения  $FDR$  очень проста: например, если в ходе анализа данных отклонено 1000 гипотез, то при  $q = 0.10$  ожидаемая доля ложно отклоненных гипотез не превысит 100. Описание процедуры Беньямини-Хохберга выглядит так:

- Исходные  $p$ -значения упорядочивают по возрастанию:  $p(1) \leq p(2) \leq \dots \leq p(m)$ . Пусть  $H(i)$  обозначает нулевую гипотезу, которой соответствует  $i$ -тое значение в этом упорядоченном ряду –  $p(i)$ .
- Находят максимальное значение  $k$  среди всех индексов  $i = 1, 2, \dots, m$ , для которого выполняется неравенство  $p(i) \leq qi/m$ .
- Отклоняют все гипотезы  $H(i)$  с индексами  $i = 1, 2, \dots, k$ .

В качестве примера рассмотрим следующий ряд из 15 упорядоченных по возрастанию  $p$ -значений из оригинальной статьи (Benjamini, Hochberg, 1995):

0.0001, 0.0004, 0.0019, 0.0095, 0.0201, 0.0278, 0.0298,  
0.0344, 0.0459, 0.3240, 0.4262, 0.5719, 0.6528, 0.7590, 1.000

Если бы мы осуществили контроль над групповой вероятностью ошибки, применив, например, поправку Бонферрони для уровня значимости 0.05 (т.е.  $0.05/15 = 0.0033$ ), то отклоненными оказались бы три гипотезы, которым соответствуют первые три  $p$ -значения.

При контроле над ожидаемой долей ложных отклонений на уровне 5% мы сравниваем каждое значение  $p(i)$  с  $0.05i/15$ , начиная с самого высокого –  $p(15)$ . В итоге мы увидим, что первое  $p$ -значение, соответствующее указанному ограничению (5%), – это  $p(4)$ :

$$p(4) = 0.0095 \leq (4/15)0.05 = 0.013$$

Теперь мы отклоняем четыре гипотезы, которым соответствуют первые четыре  $p$ -значения в приведенном выше ряду, поскольку все эти значения не превышают 0.013.

Функция `p.adjust()` реализует не только описанные в разделе 6.8 метод Холма и поправку Бонферрони, но и процедуру Беньямини-Хохберга. Для этого на вход функции подается вектор с исходными  $p$ -значениями и аргументу `method` присваивается значение "BH" (от "*Benjamini-Hochberg*") или значение-синоним "fdr" ("*false discovery rate*").

Контроль над  $FDR$  при помощи этой функции выполняется способом, несколько отличным от описанного выше. В частности, вместо нахождения максимального индекса  $k$ , исходные  $p$ -значения корректируются по формуле  $q(i) = p(i)m/i$ .

Например, для первых двух  $p$ -значений из приведенного выше примера мы получили бы

- $(0.0001 \times 15)/1 = 0.0015$
- $(0.0004 \times 15)/2 = 0.003$

Воспользовавшись функцией `p.adjust()` для всех  $p$ -значений из рассмотренного примера, получим:

```
pvals <- c(0.0001, 0.0004, 0.0019, 0.0095, 0.0201,
          0.0278, 0.0298, 0.0344, 0.0459, 0.3240,
          0.4262, 0.5719, 0.6528, 0.7590, 1.000)
p.adjust(pvals, method = "BH")
[1] 0.00150000 0.00300000 0.00950000 0.03562500 0.06030000
[6] 0.06385714 0.06385714 0.06450000 0.07650000 0.48600000
[11] 0.58118182 0.71487500 0.75323077 0.81321429 1.00000000
```

Интерпретация этих скорректированных  $p$ -значений (в большинстве литературных источников их называют  $q$ -значениями) такова:

- Допустим, что мы хотим контролировать долю ложно отклоненных гипотез на уровне  $FDR = 0.05$ .
- Все гипотезы,  $q$ -значения которых  $\leq 0.05$ , отклоняются.
- Среди всех этих отклоненных гипотез доля ошибочно отклоненных не превышает 5%.

Как видим, в рассмотренном примере конечный результат после коррекции исходных  $p$ -значений при помощи функции `p.adjust()` идентичен тому, что был получен при использовании оригинальной процедуры Беньямини-Хохберга: на уровне 5% отклоняются первые четыре гипотезы.

Коррекция  $p$ -значений по методу Беньямини-Хохберга работает особенно хорошо в ситуациях, когда необходимо принять *общее решение* по какому-либо вопросу при наличии информации (т.е. проверенных гипотез) *по многим параметрам*.

Типичным примером будет одновременный анализ многих биологических параметров (вес и температура тела, клеточные показатели крови, и т.п.) в группе пациентов, которых лечили новым препаратом, в сравнении с группой, которой давали плацебо. Средние значения каждого параметра в этих группах можно было бы сравнить, например, при помощи  $t$ -теста или какого-либо из его непараметрических аналогов. В итоге в распоряжении исследователя оказалось бы большое число соответствующих  $p$ -значений.

Общий вывод, который исследователь хотел бы сделать, состоит в том, что новый препарат оказывает положительное влияние на исход лечения. Конечно, в такой ситуации, исследователь был бы заинтересован в обнаружении максимально большого числа параметров, по которым экспериментальные группы различаются (контролируя при этом долю ложных заключений на определенном уровне). Контроль над групповой вероятностью ошибки в этом случае оказался бы слишком строгим, тогда как более мощный метод Беньямини-Хохберга допускает наличие определенной доли ложных отклонений среди всех отклоненных гипотез и тем самым способствует общему положительному выводу по поводу эффективности нового препарата.

Следует отметить, что описанный здесь метод контроля над ожидаемой долей ложных отклонений предполагает, что все тесты, при помощи которых получают  $p$ -значения, независимы (Benjamini, Hochberg, 1995). На практике, однако, в большинстве случаев это условие выполняться не будет: многие биологические параметры в вышеприведенном примере были измерены у одних и тех же испытуемых, что вносит определенный уровень корреляции между соответствующими тестами.

### Метод Беньямини-Йекутили

Понимая важность и одновременно неосуществимость на практике предположения о независимости всех проверяемых гипотез, И. Беньямини и Д. Йекутили (Benjamini, Yekutieli, 2001) предложили усовершенствованный метод, учитывающий наличие корреляции между проверяемыми гипотезами (подробное описание метода и соответствующие доказательства можно найти в оригинальной статье).

Процедура Беньямини-Йекутили очень похожа на процедуру Беньямини-Хохберга.

Основное отличие заключается во введении поправочной константы  $c(m) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i}$ :

- Исходные  $p$ -значения упорядочивают по возрастанию:  $p(1) \leq p(2) \leq \dots \leq p(m)$ . Пусть  $H(i)$  обозначает нулевую гипотезу, которой соответствует  $i$ -тое значение в этом упорядоченном ряду, т.е.  $p(i)$ .
- Находят максимальное значение  $k$  среди всех индексов  $i = 1, 2, \dots, m$ , для которого выполняется неравенство  $p(i) \leq (i/m) \times qc(m)$
- Отклоняют все гипотезы  $H(i)$  с индексами  $i = 1, 2, \dots, k$ .

В качестве примера рассмотрим следующий ряд из 15 упорядоченных по возрастанию  $p$ -значений (Benjamini, Hochberg, 1995):

0.0001, 0.0004, 0.0019, 0.0095, 0.0201, 0.0278, 0.0298,  
0.0344, 0.0459, 0.3240, 0.4262, 0.5719, 0.6528, 0.7590, 1.000

При контроле над ожидаемой долей ложных отклонений на уровне 5% мы сравниваем каждое значение  $p(i)$  с величиной  $i/15 \times 0.05/c(m)$ , начиная с самого высокого, т.е.  $p(15)$ . В данном случае константа  $c(m) = \sum_{i=1}^{15} 1/i = 3.31823$ . В итоге мы увидим, что первое  $p$ -значение, соответствующее указанному ограничению (5%), – это  $p(3)$ :

$$p(3) = 0.0019 \leq (3/15) \times (0.05/3.31823) = 0.003014.$$

Таким образом, следует отклонить три гипотезы, которым соответствуют первые три  $p$ -значения в приведенном выше ряду, поскольку все эти значения не превышают 0.003014.

Контроль над ожидаемой долей ложных отклонений по методу Беньямини-Йекутили можно реализовать в R при помощи функции `p.adjust()`, подав на ее вход вектор с исходными  $p$ -значениями и присвоив аргументу `method` значение "BY" (от "Benjamini-Yekutieli"). При этом контроль над  $FDR$  с помощью этой функции выполняется способом, несколько отличным от описанной выше процедуры: вместо нахождения максимального индекса  $k$ , выполняется корректировка исходных  $p$ -значений по формуле:

$$q(i) = p(i) \times m \times c(m) / i$$

Например, для первых двух  $p$ -значений из приведенного выше примера мы получили бы

- $(0.0001 \times 15 \times 3.31823) / 1 = 0.004977$
- $(0.0004 \times 15 \times 3.31823) / 2 = 0.009955$

Воспользуемся функцией `p.adjust()` для преобразования всех  $p$ -значений из рассмотренного примера:

```
pvals <- c(0.0001, 0.0004, 0.0019, 0.0095, 0.0201,
           0.0278, 0.0298, 0.0344, 0.0459, 0.3240,
           0.4262, 0.5719, 0.6528, 0.7590, 1.000)
p.adjust(pvals, "BY")
[1] 0.004977 0.009954 0.031523 0.118211 0.200089 0.211892
[7] 0.211892 0.214025 0.253844 1.000000 1.000000 1.000000
[13] 1.000000 1.000000 1.000000
```

Интерпретация скорректированных  $p$ -значений выполняется тем же образом, что и в случае с методом Беньямини-Хохберга.

Кроме описанных четырех методов, функция `p.adjust()` предлагает также корректировку  $p$ -значений с использованием процедур Хохберга (не путать с методом Беньямини-Хохберга) и Хоммеля (*Hommel*) – подробнее см. обзор на [stats.stackexchange.com](https://stats.stackexchange.com). С другой стороны, контроль над ожидаемой долей ложных отклонений с использованием описанных процедур Беньямини-Хохберга-Йекутили можно выполнять также при помощи функций, входящих в состав специализированных пакетов, список которых можно найти, например, на сайте Лондонского колледжа [strimmerlab.org](https://strimmerlab.org).

## 6.9. Методы сравнения групповых средних в дисперсионном анализе

Применяя однофакторный дисперсионный анализ, мы можем проверить нулевую гипотезу о том, что все сравниваемые группы происходят из одной генеральной совокупности, и следовательно их средние значения не различаются, т.е.  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$ . Если нулевую гипотезу не удастся отвергнуть при заданном уровне значимости (например,  $\alpha = 0.05$ ), то в дальнейшем анализе, в принципе, нет необходимости. Если нулевая гипотеза отвергается, то *единственный вывод*, который можно сделать при помощи классического дисперсионного анализа заключается в том, что изучаемый фактор оказывает существенное влияние на интересующую нас переменную.

После того установления существенной разницы между группами в целом интересно пойти дальше и выполнить так называемый *апостериорный анализ* (*post-hoc analysis*), т.е. выяснить, какие именно группы статистически значимо отличаются друг от друга. Однако при выполнении попарных сравнений необходимо использование методов, обеспечивающих контроль над групповой вероятностью ошибки 1-го рода. Как было отмечено ранее, при наличии большого числа сравниваемых групп метод Бонферрони становится очень консервативным.

Специально для дисперсионного анализа разработан целый ряд апостериорных тестов (например, в пакете SPSS их насчитывается не менее 18). В список наиболее известных тестов включают: проверку наименьшего значения значимой разности LSD, критерий Дункана (Duncan), метод Стьюдента-Ньюмана-Кейлса (Student-Newman-Keuls), проверку достоверно значимой разности HSD Тьюки (Tukey), модифицированный метод LSD, критерий, основанный на контрастах Шеффе (Scheffe) и др. Здесь они перечислены в порядке снижения их мощности (или увеличения консервативности), хотя на этот счет в литературе существуют довольно противоречивые рекомендации.

### **Критерий Тьюки**

Наиболее распространённым и рекомендуемым в литературе является тест, использующий *критерий достоверно значимой разности* HSD, названный в честь предложившего его американского математика и статистика Дж. Тьюки (англ. *Tukey's*

*honestly significant difference test*, или просто *Tukey's HSD test*). HSD тест задает наименьшую величину разности математических ожиданий в группах, которую можно считать значимой, а также позволяет рассчитать ее доверительные интервалы с учетом числа выполняемых сравнений.

Критерий Тьюки используется для проверки нулевой гипотезы  $H_0: \mu_B = \mu_A$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu_B \neq \mu_A$ , где индексы  $A$  и  $B$  обозначают любые две сравниваемые группы. При наличии  $m$  групп всего возможно выполнить  $m(m - 1)/2$  попарных сравнений.

Первый шаг заключается в упорядочивании всех имеющихся групповых средних значений по возрастанию (от 1 до  $m$ ). Далее выполняют попарные сравнения этих средних так, что сначала сравнивают наибольшее среднее с наименьшим, т.е.  $m$ -ое с 1-ым, затем  $m$ -ое со вторым, третьим, и т.д. вплоть до  $(m - 1)$ -го. Затем предпоследнее среднее,  $(m - 1)$ -ое, тем же образом сравнивают с первым, вторым, и т.д. до  $(m - 2)$ -го. Эти сравнения продолжаются до тех пор, пока не будут перебраны все пары.

Указанные сравнения выполняются при помощи критерия Тьюки, который представляет собой несколько модифицированный критерий Стьюдента:

$$q = (\bar{x}_B - \bar{x}_A) / SE.$$

Отличие от критерия Стьюдента заключается в том, как рассчитывается стандартная ошибка  $SE$ :

$$SE = \sqrt{MS_w / n},$$

где  $MS_w$  – рассчитываемая в ходе дисперсионного анализа *внутригрупповая дисперсия*.

Приведенная формула для критерия Тьюки верна для случаев, когда все сравниваемые группы содержат одинаковое число наблюдений  $n$ . Если сравниваемые группы неодинаковы по размеру, стандартная ошибка будет рассчитываться следующим образом:

$$SE = \sqrt{\frac{MS_w}{2} \left( \frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}.$$

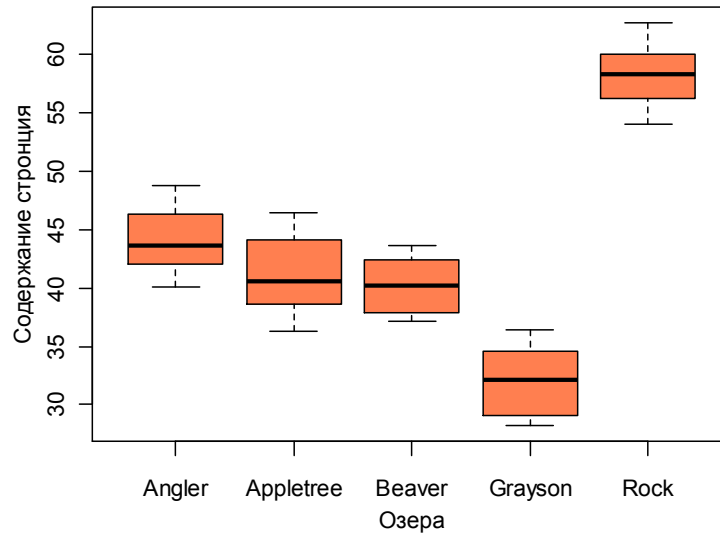
Благодаря тому обстоятельству, что в приведенные выше формулы стандартной ошибки входит внутригрупповая дисперсия  $MS_w$ , критерий Тьюки становится подходящим критерием для выполнения большого числа парных сравнений групповых средних. Проверяемые нулевые гипотезы принимают или отвергают либо путем сравнения получаемых значений критерия  $q$  с определенным критическим значением для выбранного уровня значимости, либо рассчитывают соответствующие  $p$ -значения (подробнее см. примеры для критерия Стьюдента).

В среде R множественные сравнения групповых средних при помощи теста Тьюки можно выполнить с использованием функции `TukeyHSD()`, входящей в базовую версию системы. В качестве примера, заимствованного из книги ([Zar, 2010](#)), используем данные по содержанию стронция (мг/мл) в пяти водоемах США:

```
waterbodies <- data.frame(Water = rep(c("Grayson", "Beaver",
                                       "Angler", "Appletree",
                                       "Rock"), each = 6),
                          Sr = c(28.2, 33.2, 36.4, 34.6, 29.1, 31.0,
                                  39.6, 40.8, 37.9, 37.1, 43.6, 42.4,
                                  46.3, 42.1, 43.5, 48.8, 43.7, 40.1,
                                  41.0, 44.1, 46.4, 40.2, 38.6, 36.3,
                                  56.3, 54.1, 59.4, 62.7, 60.0, 57.3)
                          )
```



На рисунке ниже эти данные представлены графически:



Необходимо выяснить: а) есть ли существенные различия между этими водоёмами по содержанию стронция в целом и, если есть, то б) какие именно водоемы отличаются друг от друга. Для ответа на первый вопрос выполним дисперсионный анализ при помощи функции `aov()`:

```
M <- aov(Sr ~ Water, data = waterbodies)
summary(M)
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Water    4 2193.4   548.4   56.16 3.95e-12 ***
Residuals 25  244.1     9.8
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Как видно из полученных результатов, обследованные водоемы статистически значимо различаются по содержанию стронция. Для того чтобы выяснить, где именно лежат эти различия, достаточно подать объект `M` на вход функции `TukeyHSD()`:

```
TukeyHSD(M)
Tukey multiple comparisons of means
 95% family-wise confidence level
Fit: aov(formula = Sr ~ Water, data = waterbodies)
$Water
      diff      lwr      upr    p adj
Appletree-Angler -2.9833333 -8.281979  2.315312 0.4791100
Beaver-Angler    -3.8500000 -9.148645  1.448645 0.2376217
Grayson-Angler  -12.0000000 -17.298645 -6.701355 0.0000053
Rock-Angler      14.2166667  8.918021 19.515312 0.0000003
Beaver-Appletree -0.8666667 -6.165312  4.431979 0.9884803
Grayson-Appletree -9.0166667 -14.315312 -3.718021 0.0003339
Rock-Appletree   17.2000000 11.901355 22.498645 0.0000000
Grayson-Beaver  -8.1500000 -13.448645 -2.851355 0.0011293
Rock-Beaver      18.0666667 12.768021 23.365312 0.0000000
Rock-Grayson     26.2166667 20.918021 31.515312 0.0000000
```

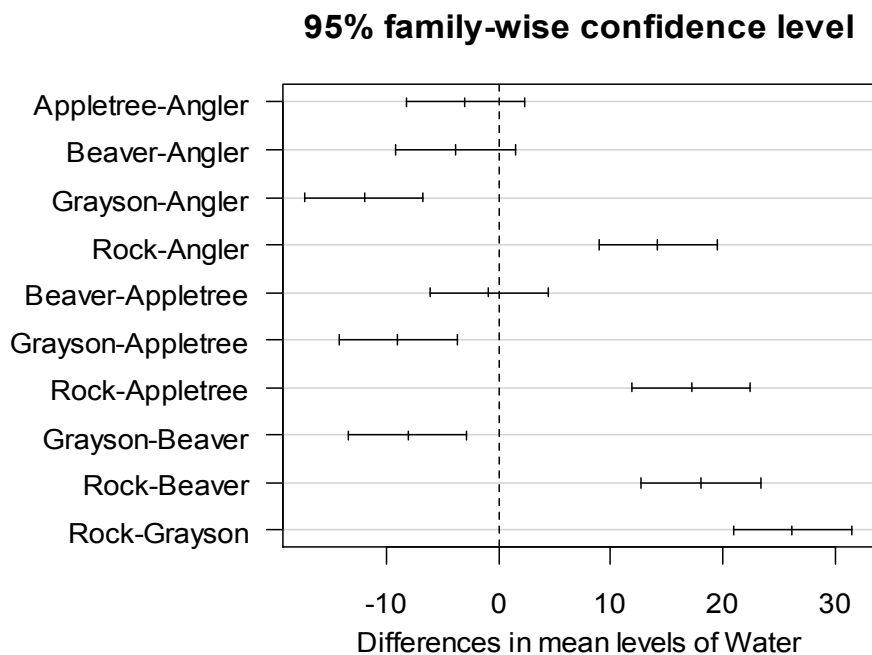
В первом столбце полученной таблицы перечислены пары сравниваемых водоемов. Во втором столбце содержатся различия между соответствующими групповыми средними.

Третий и четвертый столбцы содержат значения нижнего (lwr) и верхнего (upr) 95%-ных доверительных пределов для соответствующих разностей. Наконец, в пятом столбце представлены  $p$ -значения для каждой из сравниваемых пар водоемов.

Хорошо видно, что существенной разницы в парах "Appletree-Angler", "Beaver-Angler" и "Beaver-Appletree" нет ( $p > 0.05$ ), тогда как во всех остальных случаях разница статистически значима. В целом полученные результаты хорошо согласуются с визуальной оценкой различий, которую можно сделать, глядя на приведенную выше диаграмму размахов.

Результаты парных сравнений групповых средних можно легко изобразить на графике:

```
par(mar = c(4.5, 8, 4.5, 4.5))
plot(TukeyHSD(M), las = 1)
```



На представленном рисунке приведены разности между групповыми средними (Differences in mean levels of Water) и их доверительные интервалы, рассчитанные с учетом контроля над групповой вероятностью ошибки (95% family-wise confidence level). В трех случаях доверительные интервалы включают 0, что указывает на отсутствие различий между соответствующими группами (сравните с  $p$ -значениями выше).

Критерий Тьюки имеет те же условия применимости, что и собственно дисперсионный анализ, т.е. *нормальность распределения* данных и (особенно важно!) *однородность групповых дисперсий* (подробнее см. раздел 6.4). Устойчивость к отклонению от этих условий, равно как и статистическая мощность критерия Тьюки, возрастают при одинаковом числе наблюдений во всех сравниваемых группах ([Zar, 2010](#)).

### Методы множественных проверок гипотез, реализованные в пакете multcomp

Многообразие описанных выше методов множественных проверок статистических гипотез может создать ощущение неразберихи и привести в замешательство даже опытных исследователей. Тем не менее, между многими методами существует большое сходство. Более того, можно показать, что некоторые методы, известные и используемые под разными названиями и для разных целей, с математической точки зрения эквивалентны (например, тесты Тьюки и Даннета).



Используя теорию общих линейных моделей, проф. Ф. Бретц с соавт. ([Bretz et al., 2010](#)) разработали общую методологическую схему, объединяющую большинство классических критериев для множественной проверки гипотез. Как это часто происходит в наши дни, соответствующие методологические подходы были реализованы в дополнительном пакете для R – `multcomp` (от "*multiple comparisons*" – "множественные сравнения"). Ниже дается описание основных возможностей этого пакета. Заинтересованные читатели найдут подробные математические выкладки и множество примеров R кода в упомянутой выше книге ([Bretz et al., 2010](#)).

В качестве примера используем данные по содержанию стронция в воде пяти водоемов США, представленные ранее при рассмотрении метода Тьюки:

```
waterbodies <- data.frame(Water = rep(c("Grayson", "Beaver",
                                       "Angler", "Appletree",
                                       "Rock"), each = 6),
                          Sr = c(28.2, 33.2, 36.4, 34.6, 29.1, 31.0,
                                 39.6, 40.8, 37.9, 37.1, 43.6, 42.4,
                                 46.3, 42.1, 43.5, 48.8, 43.7, 40.1,
                                 41.0, 44.1, 46.4, 40.2, 38.6, 36.3,
                                 56.3, 54.1, 59.4, 62.7, 60.0, 57.3)
                          )
```

Предположим, что наша задача заключается в выявлении различий между исследованными водоемами `Water` по содержанию стронция. Наличие категориальных предикторов предполагает использование дисперсионного анализа.

Решение поставленной задачи сводится к оценке параметров следующей линейной модели:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon_i,$$

где  $y_i$  – это  $i$ -е значение содержания стронция в воде;  $\beta_0$  – среднее значение содержания стронция для базового уровня изучаемого фактора (в данном случае выбор базового уровня совершенно произволен; по умолчанию R выберет в качестве базового тот уровень, название которого идет первым по алфавиту – `Angler`);  $\beta_1, \dots, \beta_4$  – коэффициенты, отражающие разницу между средним значением содержания стронция в воде "базового водоема" и средними значениями в других водоемах;  $\varepsilon_i$  – нормально распределенные остатки.

Параметры модели легко оценить с помощью функции `lm()`:

```
M <- lm(Sr ~ Water, data = waterbodies)
summary(M)
Call:
lm(formula = Sr ~ Water, data = waterbodies)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.8000 -2.2500 -0.4833  2.2042  5.3000
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    44.083     1.276  34.555 < 2e-16 ***
WaterAppletree  -2.983     1.804  -1.654  0.1107
WaterBeaver     -3.850     1.804  -2.134  0.0428 *
WaterGrayson   -12.000     1.804  -6.651 5.72e-07 ***
WaterRock      14.217     1.804   7.880 3.09e-08 ***
---
```

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.125 on 25 degrees of freedom  
Multiple R-squared: 0.8998, Adjusted R-squared: 0.8838  
F-statistic: 56.15 on 4 and 25 DF, p-value: 3.948e-12

Как видим, в целом средние уровни содержания стронция в воде исследованных водоемов значимо различаются (см. последнюю строку результатов:  $p$ -значение для  $F$ -критерия оказалось существенно меньше 0.05, а именно  $3.948e-12$ ). Кроме того, из полученных результатов мы можем сделать определенные выводы касательно того, какие из исследованных водоемов отличались от водоема Angler, автоматически выбранного программой в качестве "эталоны" для сравнений. В частности, есть основания считать, что параметры  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  и  $\beta_4$  статистически значимо (на уровне 0.05) отличаются от 0. Другими словами, мы можем утверждать, что среднее содержание стронция в "эталонном" водоеме Angler значимо отличалось от таковых в Beaver ( $p = 0.0428$ ), Grayson ( $p = 5.72e-07$ ) и Rock ( $p = 3.09e-08$ ).

К сожалению, такая интерпретация  $p$ -значений, полученных для параметров модели  $M$ , имеет один существенный недостаток: они являются *безусловными* (англ. *marginal*, сравните с "*условным распределением вероятностей*"; англ. *conditional probability distribution*). Такое название связано с тем, что эти  $p$ -значения рассчитываются, исходя из допущения об отсутствии какой-либо связи между параметрами модели. Иными словами, параметры модели рассматриваются как некоррелируемые случайные величины, каждая из которых имеет свое собственное распределение вероятностей.

Проблема, однако, заключается в том, что мы не можем строго утверждать об отсутствии корреляции между оцениваемыми параметрами, поскольку при построении модели используем *один конкретный набор данных*. Как следствие, проверяя одновременно несколько статистических гипотез (в отношении коррелируемых параметров модели) на одних и тех же данных, мы не выполняем должного контроля над групповой вероятностью ошибки первого рода. Это, в свою очередь, может привести к повышенной вероятности того, что выводы, основанные на таком анализе, не подтвердятся в будущем при сборе дополнительных данных (например, при повторении эксперимента). В ряде областей слабая воспроизводимость результатов может иметь серьезные практические последствия (например, в фармацевтической промышленности, когда какая-либо компания объявляет о повышенной эффективности своего нового дорогого препарата по сравнению с эффективностью более дешевого старого аналога).

Одним из возможных решений указанной проблемы является корректировка полученных  $p$ -значений при помощи того или иного метода множественных сравнений (например, с использованием поправки Бонферрони). Однако, как отмечают Бретц с соавторами, более мощным подходом (в смысле статистической мощности) является расчет  $p$ -значений, основанный на непосредственном учете корреляции между параметрами модели.

Этот подход как раз и реализован в пакете `multcomp`. В частности, в зависимости от класса рассматриваемой модели, принимается допущение о том, что наблюдаемые значения ее параметров являются случайными реализациями значений из определенного многомерного распределения ( $t$ -распределения или нормального распределения), ковариационная матрица которого отражает корреляцию между параметрами модели. Размерность распределения равна числу одновременно проверяемых статистических гипотез в отношении параметров модели. Соответствующие  $p$ -значения рассчитываются, исходя из свойств этого распределения.

Главной функцией пакета `multcomp` является `glht()` (от *general linear hypothesis testing*), которая предоставляет удобный интерфейс для выполнения одновременной проверки статистических гипотез в отношении параметров самых разнообразных

статистических моделей, включая общие линейные модели, обобщенные линейные модели, модели со смешанными эффектами и т.д. Основное требование: соответствующий R-объект с результатами расчета той или иной модели должен содержать оценки ее параметров и ковариационной матрицы, которые могут быть извлечены из модельного объекта при помощи методов `coef()` и `vcov()` соответственно. Так, для рассчитанной нами выше модели M, имеем:

```
coef(M)
(Intercept) WaterAppletree   WaterBeaver   WaterGrayson   WaterRock
      44.08         -2.98         -3.85         -12.00          14.22

vcov(M)
      (Intercept) WaterAppletree WaterBeaver WaterGrayson WaterRock
(Intercept)      1.63         -1.63         -1.63         -1.63         -1.63
WaterAppletree  -1.63          3.26          1.63          1.63          1.63
WaterBeaver     -1.63          1.63          3.26          1.63          1.63
WaterGrayson    -1.63          1.63          1.63          3.26          1.63
WaterRock       -1.63          1.63          1.63          1.63          3.26
```

Синтаксис команд с использованием функции `glht()` в большинстве случаев имеет следующую структуру:

```
glht(model,      linfct,
      alternative = c("two.sided", "less", "greater"),...)
```

Здесь аргумент `model` – это линейная модель, подогнанная с использованием, например, таких стандартных функций, как `aov()`, `lm()`, или `glm()`. На вход аргумента `linfct` (от *linear function*, "линейная функция") подается матрица контрастов, при помощи которой задаются подлежащие проверке гипотезы (см. раздел 6.7). Имеющиеся способы спецификации аргумента `linfct` будут рассмотрены ниже. Аргумент `alternative` служит для указания типа альтернативных гипотез: "two.sided" (двусторонняя), "less" ("меньше чем") и "greater" ("больше чем"). Многоточие "..." означает, что функция `glht()` может принимать и другие дополнительные аргументы (см. справочный файл, доступный по команде `? glht`).

Способы спецификации линейных контрастов, используемых для кодирования сочетаний экспериментальных групп и подаваемых на аргумент `linfct`, рассмотрим на примере с содержанием стронция в водоемах. Следует подчеркнуть, что с подлежащими сравнению группами следует определиться *до выполнения анализа данных*. Иными словами, проверяемая научная гипотеза (или гипотезы) должна быть сформулирована до сбора данных. Действительно, любые гипотезы, формулируемые во время анализа уже имеющихся данных, будут диктоваться свойствами именно этих данных и нет никакой гарантии, что при повторении эксперимента исследователь обнаружит те же самые закономерности (в англоязычной литературе это называют "*data dredging*" или "*data fishing*").

В случае с дисперсионным анализом, самый простой способ задать матрицу контрастов состоит в использовании служебной функции `mcp()` (от "*multiple comparisons*"), которая сделает всю работу автоматически. От нас требуется лишь указать фактор, уровни которого соответствуют сравниваемым группам, и название одного из "встроенных" критериев для выполнения сравнений. Так, для выполнения всех парных сравнений средних значений концентрации стронция в исследованных водоемах при помощи критерия Тьюки, соответствующая команда будет иметь вид:

```
glht(M, linfct = mcp(Water = "Tukey"))
```

General Linear Hypotheses  
Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts  
Linear Hypotheses:

	Estimate
Appletree - Angler == 0	-2.9833
Beaver - Angler == 0	-3.8500
Grayson - Angler == 0	-12.0000
Rock - Angler == 0	14.2167
Beaver - Appletree == 0	-0.8667
Grayson - Appletree == 0	-9.0167
Rock - Appletree == 0	17.2000
Grayson - Beaver == 0	-8.1500
Rock - Beaver == 0	18.0667
Rock - Grayson == 0	26.2167

Результатом выполнения приведенной команды является таблица с перечисленными проверяемыми гипотезами (например, первая гипотеза состоит в том, что средние значения концентрации стронция в водоемах Appletree и Angler не различаются: Appletree - Angler == 0) и наблюдаемыми уровнями различий между группами (так, в водоеме Appletree содержание стронция в среднем оказалось на 2.983 мг/мл меньше, чем в Angler). Позднее мы увидим, как можно получить также  $p$ -значения для каждой из этих гипотез.

Помимо критерия Тьюки, реализованы и другие широко используемые критерии, как например, критерий Даннетта ("Dunnnett"), который применяется для сравнения всех групп с контрольной. Критерий Уильямса ("Williams"), который широко используется в токсикологии при анализе зависимости величины биологического эффекта от дозы исследуемого вещества, подобен критерию Даннетта, но применяется для сравнения всех групп с контрольной только в случае, если групповые средние демонстрируют монотонный тренд на убывание или возрастание. С полным списком "встроенных" критериев можно ознакомиться в справочном файле, доступном по команде ?contrMat.

При необходимости выполнить сравнения только для определенных групп, мы можем воспользоваться другим способом спецификации матрицы контрастов, который состоит в подаче на функцию mcp() списка из проверяемых гипотез, используя символьные выражения (англ. expression). Предположим, нас интересуют сравнения только следующих водоемов друг с другом: "Rock vs. Angler", "Grayson vs. Appletree" и "Grayson vs. Beaver". Соответствующая команда будет иметь вид:

```
glht(M, linfct = mcp(Water = c(
  "Rock - Angler = 0",
  "Grayson - Appletree = 0",
  "Grayson - Beaver = 0"))
)
```

General Linear Hypotheses  
Multiple Comparisons of Means: User-defined Contrasts  
Linear Hypotheses:

	Estimate
Rock - Angler == 0	14.217
Grayson - Appletree == 0	-9.017
Grayson - Beaver == 0	-8.150

Наконец, пользователь может создать матрицу с весовыми коэффициентами линейных контрастов самостоятельно. Предположим, мы хотим выполнить те же три сравнения, что и в предыдущем примере. Создадим соответствующую матрицу с коэффициентами контрастов:

```

contr <- rbind("Rock - Angler" = c(-1, 0, 0, 0, 1),
              "Grayson - Appletree" = c(0, -1, 0, 1, 0),
              "Grayson - Beaver" = c(0, 0, -1, 1, 0)
              )

contr

```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
Rock - Angler	-1	0	0	0	1
Grayson - Appletree	0	-1	0	1	0
Grayson - Beaver	0	0	-1	1	0

Теперь подадим матрицу `contr` на вход функции `mcp()`:

```

glht(M, linfct = mcp(Water = contr))

```

General Linear Hypotheses  
Multiple Comparisons of Means: User-defined Contrasts  
Linear Hypotheses:

	Estimate
Rock - Angler == 0	14.217
Grayson - Appletree == 0	-9.017
Grayson - Beaver == 0	-8.150

Как видим, результат оказался идентичным предыдущему.

Метод `summary()` позволяет получить дополнительные результаты расчетов, выполняемых функцией `glht()`. В частности, мы можем вывести *p*-значения для соответствующих сравнений:

```

summary(glht(M, linfct = mcp(Water = "Tukey")))

```

Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses  
Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts  
Fit: lm(formula = Sr ~ Water, data = waterbodies)  
Linear Hypotheses:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
Appletree - Angler == 0	-2.9833	1.8042	-1.654	0.47913	
Beaver - Angler == 0	-3.8500	1.8042	-2.134	0.23757	
Grayson - Angler == 0	-12.0000	1.8042	-6.651	< 1e-04	***
Rock - Angler == 0	14.2167	1.8042	7.880	< 1e-04	***
Beaver - Appletree == 0	-0.8667	1.8042	-0.480	0.98848	
Grayson - Appletree == 0	-9.0167	1.8042	-4.998	0.00035	***
Rock - Appletree == 0	17.2000	1.8042	9.533	< 1e-04	***
Grayson - Beaver == 0	-8.1500	1.8042	-4.517	0.00112	**
Rock - Beaver == 0	18.0667	1.8042	10.014	< 1e-04	***
Rock - Grayson == 0	26.2167	1.8042	14.531	< 1e-04	***

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1  
(Adjusted p values reported -- single-step method)

Кроме получения подобной сводной информации, мы можем выполнить и некоторые другие виды анализа, воспользовавшись аргументом `test` функции `summary` (подробнее см. справочный файл `?summary.glm`).

Помимо расчета скорректированных  $p$ -значений, имеется также возможность рассчитать доверительные интервалы, которые будут учитывать корреляцию между параметрами модели. Для этого следует воспользоваться функцией `confint()`, подав на нее объект, полученный при помощи `glm()`, и указав требуемый доверительный уровень:

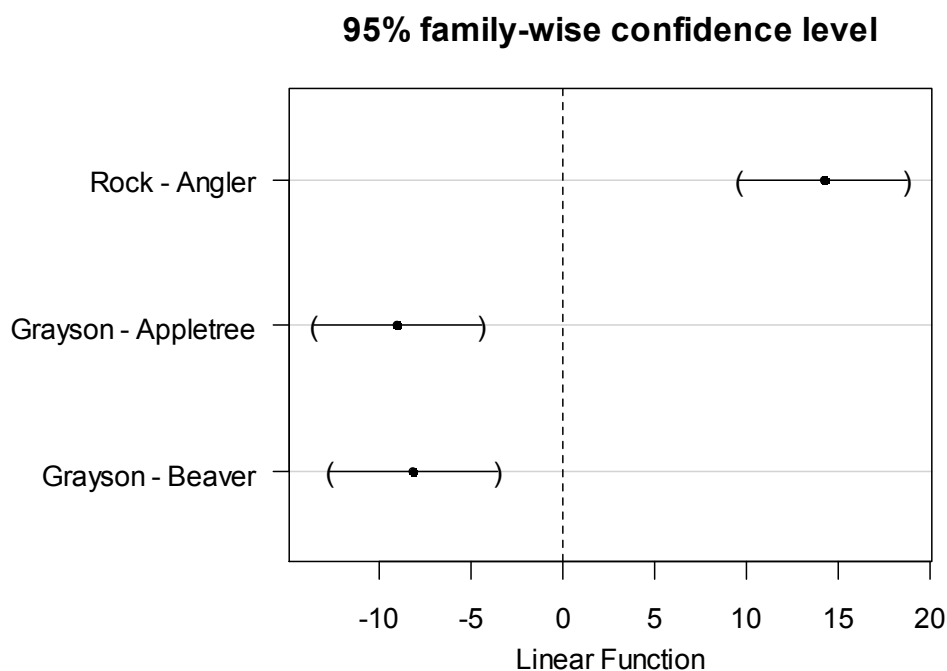
```
mult <- glm(M, linct = mcp(Water = contr))
confint(mult, level = 0.95)
Simultaneous Confidence Intervals
Multiple Comparisons of Means: User-defined Contrasts
Fit: lm(formula = Sr ~ Water, data = waterbodies)
Quantile = 2.5324
95% family-wise confidence level
Linear Hypotheses:
```

	Estimate	lwr	upr
Rock - Angler == 0	14.2167	9.6478	18.7855
Grayson - Appletree == 0	-9.0167	-13.5855	-4.4478
Grayson - Beaver == 0	-8.1500	-12.7188	-3.5812

В выведенных результатах столбцы `lwr` и `upr` содержат нижний и верхний доверительный пределы соответствующих оценок параметров модели (`Estimate`).

Для удобства интерпретации рассчитанных доверительных интервалов, а также для презентации этих результатов в сжатом виде, мы можем легко построить график следующего рода:

```
plot(confint(mult, level = 0.95))
```



## 7. РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ КОЛИЧЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

### 7.1. О понятии "статистическая модель"

Термин "модель" используется во многих сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Тем не менее, в общем виде модель можно определить как некоторую искусственную конструкцию, являющуюся *упрощенным представлением* реальной системы. Более простое устройство модели выражается в том, что при ее создании принимают во внимание только определенные свойства реальной системы, полагаемые существенными для изучаемого процесса или явления (представьте себе, например, масштабную модель дома, созданную архитектором). Изменяя эти свойства у модели, мы можем лучше понять устройство реальной системы и, что особенно важно, с определенной вероятностью предсказать ее поведение в разных ситуациях.

Построение моделей является одной из центральных тем статистики как науки. Существует большое число классов статистических моделей, различающихся как по лежащим в их основе математическим принципам, так и по преимущественным областям применения. Однако, несмотря на все свое разнообразие, статистические модели сходны в том, что они описывают *взаимосвязь между случайными переменными*. Как именно это происходит? Постараемся разобраться.

#### Пример простейшей статистической модели

В мире реальных вещей и явлений практически всегда присутствует некоторый уровень *неопределенности*, вызванный естественной изменчивостью, влиянием внешних факторов или погрешностью измерений. Предположим, что мы имеем дело с некоторой *случайной* количественной переменной  $Y$ . Отдельные выборочные значения этой переменной будем обозначать как  $y_i$ . Индекс  $i$  изменяется от 1 до  $n$ , где  $n$  – это объем выборки.

В качестве примера рассмотрим систолическое кровяное давление у людей (выражается в мм ртутного столба). Очевидно, что уровень кровяного давления не может быть одинаковым у всех людей – при обследовании *случайно сформированной выборки* мы почти всегда будем наблюдать определенный *разброс значений* этой переменной, хотя некоторые значения будут встречаться чаще других. Сформируем выборку возможного распределения 100 значений давления крови, (не будем пока уточнять механизм получения данных и предположим, что это – реальные измерения у реальных случайно отобранных людей, различающихся по возрасту, полу, массе тела и, возможно, каким-то другим характеристикам):

```
y <- c(
109.14, 117.55, 106.76, 115.26, 117.13, 125.39, 121.03,
114.03, 124.83, 113.92, 122.04, 109.41, 131.61, 103.93,
116.64, 117.06, 111.73, 120.41, 112.98, 101.20, 120.19,
128.53, 120.14, 108.70, 130.77, 110.16, 129.07, 123.46,
130.02, 130.31, 135.06, 129.17, 137.08, 107.62, 139.77,
121.47, 130.95, 138.15, 114.31, 134.58, 135.86, 138.49,
110.01, 127.80, 122.57, 136.99, 139.53, 127.34, 132.26,
120.85, 124.99, 133.36, 142.46, 123.58, 145.05, 127.83,
140.42, 149.64, 151.01, 135.69, 138.25, 127.24, 135.55,
142.76, 146.67, 146.33, 137.00, 145.00, 143.98, 143.81,
159.92, 160.97, 157.45, 145.68, 129.98, 137.45, 151.22,
```



```

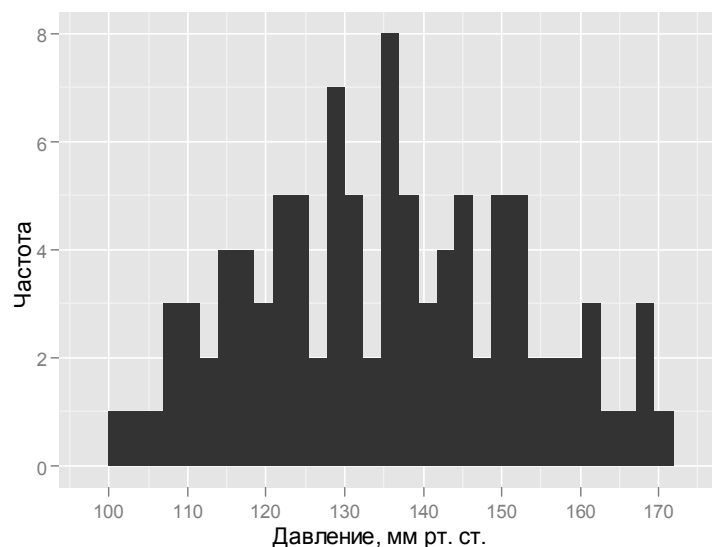
136.10, 150.60, 148.79, 167.93, 160.85, 146.28, 145.97,
135.59, 156.62, 153.12, 165.96, 160.94, 168.87, 167.64,
154.64, 152.46, 149.03, 159.56, 149.31, 153.56, 170.87,
163.52, 150.97)

c(mean(y), sd(y)) # среднее значение и станд. отклонение
[1] 135.15730 16.96017

shapiro.test(y) # тест на нормальность распределения
      Shapiro-Wilk normality test
data:  y
W = 0.9826, p-value = 0.2121

library(ggplot2) # графическое изображение распределения данных
ggplot(data = data.frame(y), aes(x = y)) + geom_histogram() +
  ylab("Частота") + xlab("Давление, мм рт. ст.")

```



Приведенная выше гистограмма по форме напоминает колокол, указывая на то, что мы, вероятно, имеем дело с нормально распределенной переменной. Об этом же свидетельствуют и формальные тесты на нормальность, в частности, тест Шапиро-Уилка.

Как известно, произвольное нормальное распределение полностью задается двумя параметрами:  $\mu$  – математическим ожиданием (а именно, средним значением) и  $\sigma$  – стандартным отклонением. То обстоятельство, что случайная величина  $Y$  распределена согласно нормальному закону, принято обозначать выражением  $y_i \sim N(\mu, \sigma)$ , которое представляет собой пример простейшей статистической модели.

Подобно другим параметрическим моделям, эта модель включает две составные части: систематическую и случайную. Систематическая часть представлена средним значением  $\mu$ , которое отражает центральную тенденцию в данных. В свою очередь, стандартное отклонение  $\sigma$  характеризует степень вариации значений  $Y$ , т.е. их разброс относительно среднего.

Греческие буквы  $\mu$  и  $\sigma$  обозначают истинные (также "генеральные") параметры модели, которые, как правило, нам неизвестны. Тем не менее, мы можем оценить значения параметров по соответствующим выборочным статистикам. Так, в случае представленных выше 100 значений систолического кровяного давления выборочные среднее значение и стандартное отклонение составляют 135.16 мм рт. ст. и 16.96 мм рт. ст. соответственно. Допуская, что данные действительно происходят из нормально распределенной генеральной совокупности, мы можем записать нашу модель в виде



$y_i \sim N(135.16, 16.96)$ . Эту модель можно использовать для предсказания давления крови, однако для всех людей предсказанное значение окажется одинаковым и будет равно  $\mu$ . Обычным способом записи этой модели является следующий:

$$y_i = 135.16 + \varepsilon_i,$$

где  $\varepsilon_i$  – это *остатки* модели, имеющие нормальное распределение со средним значением 0 и стандартным отклонением 16.96:  $\varepsilon_i \sim N(0, 16.96)$ . Остатки рассчитываются как разница между реально наблюдаемыми значениями переменной  $Y$  и значениями, предсказанными моделью (в рассматриваемом примере  $\varepsilon_i = y_i - 135.16$ ).

С другой стороны эта запись представляет собой ни что иное, как *линейную регрессионную модель*, у которой нет ни одного предиктора, и которую часто называют "нуль-моделью" или «нулевой моделью» (англ. *null models*).

### Исследование свойств статистических моделей имитационными методами

В сущности, статистическая модель – это *упрощенное математическое представление процесса, который, как мы полагаем, привел к генерации наблюдаемых значений изучаемой переменной*. Это значит, что мы можем использовать модель для *симуляции* (simulation) – т.е. процедуры, имитирующей моделируемый процесс и позволяющей тем самым искусственно генерировать новые значения изучаемой переменной, которые, как мы надеемся, будут обладать свойствами реальных данных. Причин, по которым мы хотели бы получить такие "искусственные данные", можно назвать много, но основные из них обычно сводятся к решению следующих практических задач:

- нахождение границ доверительных интервалов для параметров модели;
- оценка уровня неопределенности в отношении предсказываемых моделью значений зависимой переменной;
- оценивание статистической мощности (сопутствующая задача – нахождение минимального объема наблюдений, необходимого для ответа на стоящий перед исследователем вопрос);
- сравнение искусственно сгенерированных значений зависимой переменной с реально наблюдаемыми значениями с целью выяснить, насколько хорошо модель подходит для описания изучаемого явления.

С подробными примерами, посвященными использованию *имитационных методов* при построении обычных регрессионных и многоуровневых иерархических моделей, можно ознакомиться в великолепной книге Э. Гелмана и Дж. Хилл (Gelman, Hill, 2007). Там же приведены многочисленные скрипты R-кода для решения различных задач статистического анализа. Здесь мы обратимся к последней из перечисленных выше задач и рассмотрим, насколько хорошо значения кровяного давления, генерируемые нашей нулевой моделью, согласуются с экспериментальными данными.

Новые данные на основе этой простой модели можно легко сгенерировать в R при помощи функции `rnorm()` (подробнее см. раздел 4.6):

```
set.seed(101) # для воспроизводимости результата
y.new.1 <- rnorm(n = 100, mean = 135.16, sd = 16.96)
```

Выше было показано, что альтернативным способом получения этих же значений будет генерация нормально распределенных остатков модели  $\varepsilon_i$ :

```
set.seed(101)
y.new.2 <- 135.16 + rnorm(n = 100, mean = 0, sd = 16.96)
```

```
# проверим, идентичны ли оба вектора?
all(y.new.1 == y.new.2)
[1] TRUE
```

Теперь необходимо вспомнить о том, что параметры нашей нулевой модели являются лишь *точечными* оценками истинных параметров, и что всегда будет присутствовать *неопределенность* в отношении того, *насколько точны* эти точечные выборочные оценки. В приведенных выше командах эта неопределенность не была учтена: при создании векторов `y.new.1` и `y.new.2` выборочные оценки среднего значения и стандартного отклонения кровяного давления рассматривались как параметры генеральной совокупности. В зависимости от поставленной задачи, такой подход может оказаться достаточным. Однако мы сделаем еще один шаг и постараемся учесть неопределенность в отношении точечных оценок параметров модели.

При проведении имитаций воспользуемся функцией `lm()`, которая предназначена для подгонки линейных регрессионных моделей. Ничего удивительного здесь нет – ведь мы уже знаем, что нашу простую модель кровяного давления можно рассматривать как линейную регрессионную модель, у которой нет ни одного предиктора:

```
y.lm <- lm(y ~ 1) # формула для оценки только свободного члена
summary(y.lm)
Call:
lm(formula = y ~ 1)
Residuals:
    Min     1Q  Median     3Q    Max
-33.96 -13.26  0.41  12.04  35.71
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  135.157      1.696   79.69  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 16.96 on 99 degrees of freedom
```

Как следует из приведенных результатов, свободный член подогнанной модели (Intercept) в точности совпадает со средним значением данных (135.16 мм рт. ст.), а стандартное отклонение остатков модели (Residual standard error) совпадает со стандартным отклонением этих данных (16.96 мм рт. ст.). Важно, однако, что мы при этом вычислили также оценку стандартной ошибки среднего значения, равную 1.696 (см. столбец Std. Error на пересечении со строкой (Intercept)).

По определению, стандартная ошибка параметра – это стандартное отклонение [нормального] распределения значений этого параметра, рассчитанных по выборкам одинакового размера из той же генеральной совокупности. Мы можем использовать это обстоятельство для учета неопределенности в отношении точечных оценок параметров модели при порождении новых данных. Так, зная выборочные оценки параметров и их стандартные ошибки, мы можем: *а)* сгенерировать несколько возможных значений этих параметров (т.е. составить несколько реализаций той же модели, варьируя значения параметров) и *б)* сгенерировать новые данные на основе каждой из этих альтернативных реализаций модели.

Решение перечисленных задач возможно с использованием функции `sim()` из пакета `arm`, который является приложением к упомянутой выше книге (Gelman, Hill, 2007). Эта функция принимает на входе модельные объекты классов `lm`, `glm` и др., извлекает оценки параметров и их соответствующие стандартные ошибки и возвращает заданное пользователем число альтернативных реализаций модельных параметров.

Например, следующие команды позволят сгенерировать 5 альтернативных реализаций среднего кровяного давления и его стандартного отклонения для нашей простой модели:

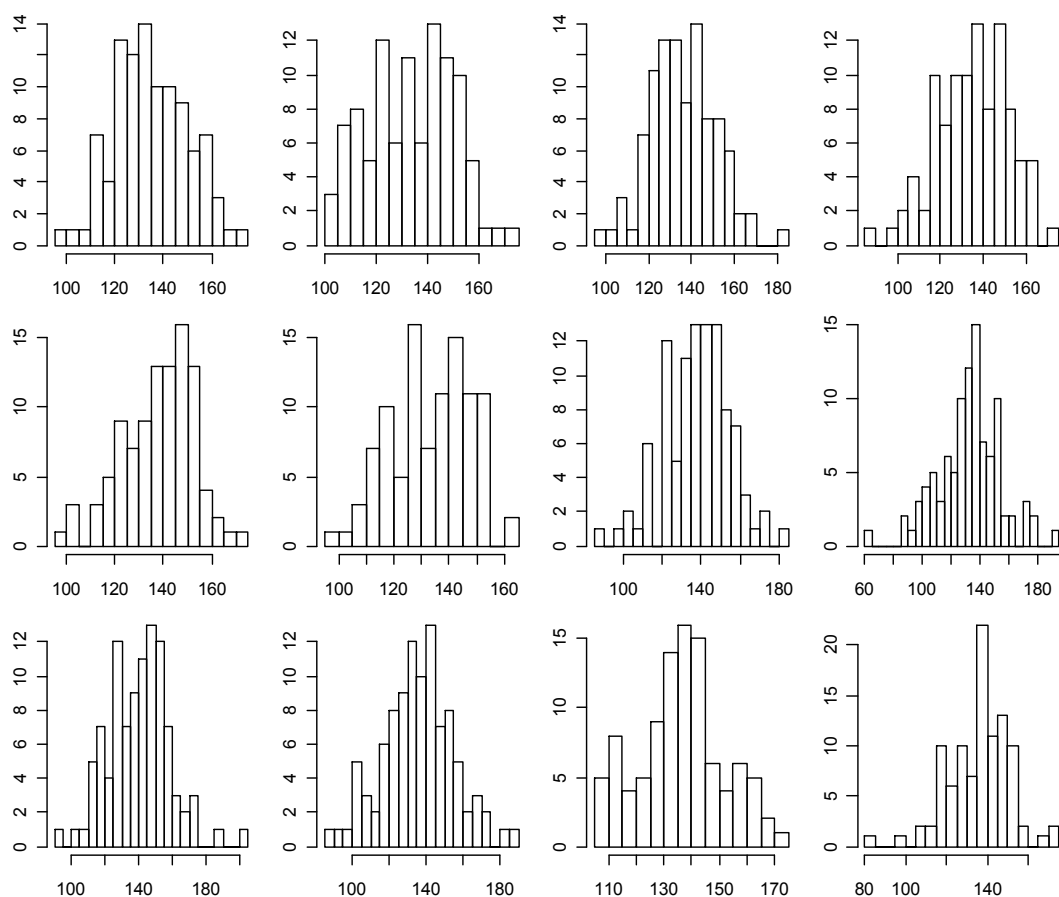
```
install.packages("arm")
library(arm)
set.seed(102) # для воспроизводимости результата
y.sim <- sim(y.lm, 5)
# y.sim - объект класса S4, который содержит
# слоты coef (коэффициенты модели) и sigma
# (станд. отклонения остатков модели):
str(y.sim)
Formal class 'sim' [package "arm"] with 2 slots
  ..@ coef : num [1:5, 1] 136 134 137 136 137
  .. ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
  .. .. ..$ : NULL
  .. .. ..$ : NULL
  ..@ sigma: num [1:5] 16.8 18.9 17.3 16.7 15
# Извлекаем альтернативные реализации среднего из y.sim:
y.sim@coef
      [,1]
[1,] 136.4775
[2,] 134.3283
[3,] 136.7074
[4,] 136.0771
[5,] 137.3246
# Извлекаем альтернативные реализации ст.отклонений остатков:
y.sim@sigma
[1] 16.829, 18.870, 17.303, 16.743, 15.006
```

Конечно, 5 реализаций модели – это совершенно недостаточно, чтобы сделать какие-либо убедительные выводы. Увеличим это число до 1000:

```
set.seed(102) # для воспроизводимости результата
y.sim <- sim(y.lm, 1000)
# Инициализация пустой матрицы, в которой мы будем сохранять
# данные, сгенерированные на основе 1000 альтернативных
# реализаций модели:
y.rep <- array(NA, c(1000, 100))
# Заполняем матрицу y.rep имитированными данными:
for(s in 1:1000){
  y.rep[s, ] <- rnorm(100, y.sim@coef[s], y.sim@sigma[s])
}
```

Чтобы лучше понять, что мы только что сделали, изобразим гистограммы выборочных распределений значений кровяного давления, сгенерированных на основе, например, первых 12 реализаций нулевой модели:

```
par(mfrow = c(5, 4), mar = c(2, 2, 1, 1))
for(s in 1: 12){ hist(y.rep[s, ], xlab = "", ylab = "",
breaks = 20, main = "")}
```



Приведенный рисунок дает некоторое представление о том, насколько варьируют между собой и по отношению к реально наблюдаемым данным распределения значений кровяного давления, полученные имитацией на основе альтернативных реализаций нашей нуль-модели.

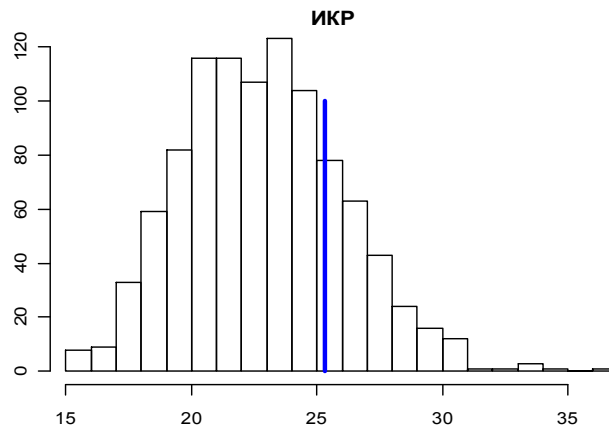
Однако нас больше всего интересует наличие *систематических расхождений* между свойствами этих имитированных значений и свойствами реально наблюдаемых данных. Если такие расхождения имеются, значит нулевая модель недостаточно хороша для описания вариации реально наблюдаемых значений. Имеется несколько подходов для обнаружения этих расхождений. Один из них – расчет каких-либо подходящих описательных статистик для каждого из имитированных распределений и сравнение их с теми же статистиками у реально наблюдаемых данных.

Рассчитаем *интерквартильный размах* (ИКР) для каждого имитированного набора данных и сравним полученное распределение из 1000 значений с ИКР реальных данных. Для расчета ИКР в R служит функция `IQR()`:

```
# Расчет ИКР для каждого из 1000 имитированных
# распределений значений кровяного давления
test.IQR <- apply(y.rep, MARGIN = 1, FUN = IQR)
```

Выведем гистограмму значений ИКР, рассчитанных для каждого из 1000 имитированных распределений кровяного давления. Вертикальной синей линией покажем ИКР для реально наблюдаемых значений кровяного давления:

```
hist(test.IQR, xlim = range(IQR(y), test.IQR),
      main = "ИКР", xlab = "", ylab = "Частота", breaks = 20)
lines(rep(IQR(y), 2), c(0, 100), col = "blue", lwd = 4)
```



На приведенном рисунке хорошо видно, что значения ИКР для имитированных данных систематически занижены по сравнению с реальными данными. Это свидетельствует о том, что нулевая модель в целом недооценивает уровень вариации реальных значений кровяного давления. Причиной этому может быть то, что мы не учитываем воздействие на кровяное давление каких-либо важных факторов (например, возраст, пол, диета, состояние здоровья, и т.п.). Рассмотрим, как можно расширить нашу нулевую модель, добавив в нее один из таких факторов.

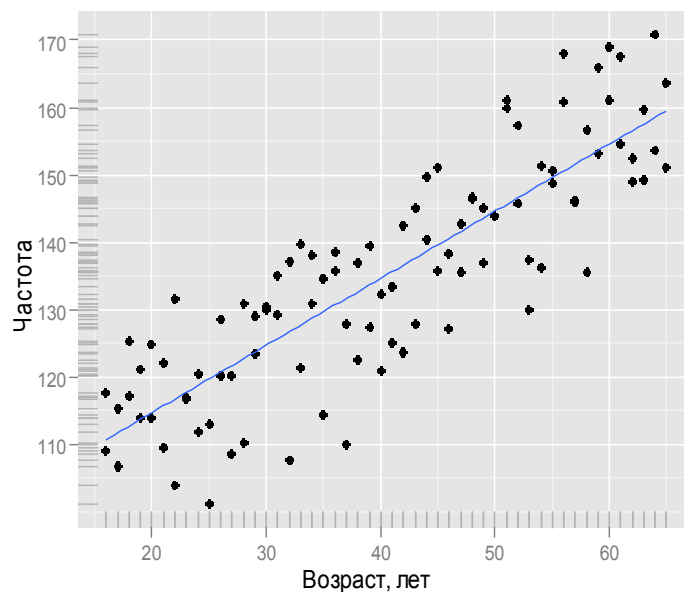
### Пример модели с одним количественным предиктором

Предположим, что помимо кровяного давления мы также измеряли у каждого испытуемого его/ее возраст (в годах):

```
# Значения возраста:
x <- rep(seq(16, 65, 1), each = 2)
# Объединяем значения возраста и давления крови в одну таблицу
Data <- data.frame(Age = x, BP = y)
```

Покажем графически связь между возрастом и систолическим кровяным давлением. Для визуализации тренда в данных добавим линию регрессии синего цвета:

```
ggplot(data = Data, aes(x = Age, BP)) + geom_point() +
  geom_smooth(method = "lm", se = FALSE) +
  geom_rug(color = "gray70", sides = "tr") +
  ylab("Частота") + xlab("Возраст, лет")
```



Небольшие отрезки светло-серого цвета по краям графика соответствуют наблюдаемым значениям возраста (вверху) и кровяного давления (справа). Подробнее об этом типе оформления диаграмм (*rugs*) описано в документации `ggplot()` на сайте [docs.ggplot2.org](http://docs.ggplot2.org).

Из графика видно, что между давлением крови и возрастом существует выраженная линейная зависимость: несмотря на определенную вариацию наблюдений, по мере увеличения возраста давление *в среднем* также возрастает. Мы можем учесть это систематическое изменение среднего кровяного давления, добавив возраст (*Age*) в нашу нулевую модель:

$$y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 \times \text{Age}_i, \sigma),$$

или в иной форме записи:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \times \text{Age}_i + \varepsilon_i, \text{ где } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma).$$

Параметры  $\beta_0$  и  $\beta_1$  можно без труда оценить методом наименьших квадратов при помощи функции `lm()`:

```
summary(lm(BP ~ Age, data = Data))
Call:
lm(formula = BP ~ Age, data = Data)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-21.6626  -6.2509   0.0075   6.3125  17.3525
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  94.85346    2.66731   35.56  <2e-16 ***
Age           0.99515    0.06204   16.04  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 8.953 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7242, Adjusted R-squared:  0.7214
F-statistic: 257.3 on 1 and 98 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Согласно полученным результатам, модель кровяного давления можно записать как

$$y_i \sim N(94.853 + 0.995 \times \text{Age}_i, 8.953)$$

или

$$y_i = 94.853 + 0.995 \times \text{Age}_i + \varepsilon_i, \text{ где } \varepsilon_i \sim N(0, 8.953).$$

Графически эта модель изображена выше на рисунке в виде линии тренда. Обратите внимание: помимо высокой значимости параметров подогнанной модели ( $p \ll 0.001$  в обоих случаях), стандартное отклонение остатков составляет 8.853, что почти в 2 раза меньше, чем у нулевой модели (16.96). Это указывает на то, что модель, включающая возраст как предиктор, гораздо лучше описывает вариацию значений кровяного давления у 100 обследованных испытуемых, чем наша исходная модель без параметра.

Это заключение подтверждается тем, что в результате выполнения имитаций, аналогичных описанным выше, значение интерквартильного размаха для исходных данных располагается в центре распределения имитированных значений ИКР, указывая на отсутствие систематических различий между имитированными и наблюдаемыми данными. Код на языке R и полученную гистограмму мы здесь не приводим, рекомендуя проделать вычисления самому читателю.

Теперь настало время раскрыть небольшой секрет: тот факт, что модель, включающая возраст, гораздо лучше описывает исходные данные, неудивителен, поскольку эти наблюдения были... сгенерированы на основе модели

$$y_i = 97.078 + 0.949 \times \text{Age}_i + \varepsilon_i, \text{ где } \varepsilon_i \sim N(0, 9.563)$$

следующим образом:

```
set.seed(101)
y <- rnorm(100, mean = 97.078 + 0.949*x, 9.563)
```

Последняя модель, придуманная в целях демонстрации обсуждаемых принципов, была использована в качестве "истинной" (англ. *true model*) в том смысле, что она описывала генеральную совокупность. Другими словами, мы предположили, что у нас была возможность одновременно измерить давление у всех существующих людей и полученные данные описывались бы именно этой "истинной" моделью.

В реальной ситуации ни структура (систематическая часть + остатки), ни значения параметров истинной модели исследователю, как правило, неизвестны. Все, чем он располагает – это наборы экспериментальных данных, часто недостаточно репрезентативных и сильно "зашумленных". Имея эти данные и хорошее понимание изучаемого явления (в смысле того, какие предикторы считать достаточно важными для рассмотрения), исследователь может только надеяться приблизиться к структуре истинной модели и оценить ее параметры с определенной точностью. К сожалению, такой успех гарантирован далеко не всегда.

### Назначение регрессионных моделей

В общем виде под *регрессией* случайной величины  $Y$  на  $X$  понимается зависимость, задающая траекторию движения точки  $(y_x, x)$ , которая определяется условным математическим ожиданием  $y_x = E[Y|X = x]$  для каждого текущего значения  $x$ . Эта траектория моделируется с использованием некоторой *функции регрессии*  $f(x, \beta)$  с постоянными параметрами  $\beta$ , которая позволяет оценить средние значения  $\hat{y}$  реализаций зависимой переменной  $Y$  для каждого фиксированного значения  $x$  независимой переменной (предиктора)  $X$ . Поскольку для точного описания  $f(x, \beta)$  необходимо знать закон условного распределения  $E[Y|X = x]$ , то на практике ограничиваются ее наиболее подходящей аппроксимацией  $\hat{f}_a(x, \beta)$ , обеспечивающей минимум средней ошибки  $\varepsilon$  восстановления значений  $Y(x)$ . Эти рассуждения легко распространить на многомерный случай, где  $X$  – набор предикторов. В сущности, статистическое моделирование (или "*статистическое обучение*") (от англ. *statistical learning*, см. [James et al., 2013](#)) представляет собой набор подходов, позволяющих оценить функцию  $f(x, \beta)$  на основе ограниченной совокупности наблюдений.

Существуют несколько основных причин для нахождения функции регрессии:

1. Статистические выводы и объяснение научных феноменов: оценка функции  $f(x, \beta)$  облегчает понимание характера взаимоотношений между переменной-откликом и предикторами (например, насколько силен отклик при изменении того или иного предиктора, какой из предикторов наиболее важен, и т.п.). Так, в примере выше мы выяснили, что возраст тесно связан с уровнем систолического давления – информация, которая может оказаться очень важной для практикующего врача.

2. Компактное описание, позволяющее представить наиболее объяснимые с предметной точки зрения функциональные отношения между переменными в рамках формальной модели и найти оценку ее параметров, основанную на эмпирических данных.

3. Обобщение результатов многих выборочных наблюдений и распространение статистических выводов на всю генеральную совокупность (в форме, например, доверительных интервалов модели).

4. Прогноз (или предсказание), заключающийся в вычислении предполагаемых значений  $\hat{y}$  переменной-отклика с использованием уравнения регрессии. Например, банк хочет спрогнозировать риск невозврата кредита (отклик  $Y$ ) от набора предикторов (уровень доходов и образования, опыт работы, пол, возраст, кредитная история клиента).

Точность предсказания будет зависеть от двух составляющих – *устранимой* и *неустранимой погрешности* (англ. *reducible error* и *irreducible error* соответственно). Первая связана с тем, что наша модель никогда не является идеальной, хотя при использовании дополнительной информации об изучаемом явлении и применении более точных статистических методов имеющуюся неопределенность можно снизить. В свою очередь, неустраняемая погрешность обусловлена неточностью измерений и влиянием скрытых факторов, которые мы не можем учесть, потому что просто о них не знаем.

## 7.2. Простая линейная регрессия: каков возраст Вселенной?

Как было показано выше, статистическая модель регрессии представляет собой упрощенное математическое представление изучаемого процесса, с помощью которого, по нашему предположению, можно будет с минимальной ошибкой "предсказывать" вероятные значения наблюдаемой величины. Во многих случаях первым естественным приближением функции регрессии отклика  $y$  на предиктор  $x$  является *модель простой линейной регрессии*, которая представляет собой зависимость следующего вида:

$$y = E(Y|X = x) + \varepsilon = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon_y,$$

где  $\beta_0$  и  $\beta_1$  – параметры (или "коэффициенты") функции регрессии;  $\varepsilon_y$  – случайные остатки (ошибки или "невязки" модели), в отношении которых делается предположение, что они статистически независимы и одинаково распределены. Следует, правда, оговориться, что, если случайная величина  $\varepsilon_y$  имеет единственную реализацию (т.е. нет повторных наблюдений), то проверить гипотезу о независимости весьма затруднительно. Тогда для так называемой "классической" линейной модели вводятся дополнительные и весьма жесткие предположения о стохастической части модели:

- ошибки  $\varepsilon_y$  нормально распределены с нулевым средним, т.е. их математическое ожидание  $E[\varepsilon_y] = 0$ ;

- дисперсия остатков  $\varepsilon_i$  одинакова на всем диапазоне наблюдаемых значений  $x$ :  $E[\varepsilon_y^2] = \sigma^2$ ,  $\varepsilon_y \sim N(0, \sigma^2)$  (см. аналогичные исходные предпосылки для линейной модели дисперсионного анализа ANOVA, представленные в разделах 6.2 и 6.4).

Пусть необходимо выполнить линейный регрессионный анализ с использованием выборки из пар наблюдений  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Первый и основной этап заключается в построении эмпирического уравнения

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом необходимо получить такие оценки  $\hat{\beta}_0$  и  $\hat{\beta}_1$  неизвестных параметров  $\beta_0$  и  $\beta_1$ , которые наилучшим образом описывали характер зависимости между выборочными значениями  $x$  и  $y$ .

Общий подход при нахождении оптимальных оценок параметров модели заключается в минимизации некоторой выбранной *функции потерь*  $\rho(\hat{\varepsilon})$ , учитывающей разности между прогнозируемыми и фактическими значениями отклика:

$$\sum_{i=1}^n \rho[y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] = \sum_{i=1}^n \rho[(y_i - \hat{y}_i)] = \sum_{i=1}^n \rho(\hat{\varepsilon}) \rightarrow \min.$$

Использование  $\rho(\hat{\varepsilon}) = \hat{\varepsilon}^2$  приводит к таким оценкам коэффициентов модели  $\beta_0$  и  $\beta_1$ , которые минимизируют *сумму квадратов остатков* (англ. *residual sum of squares*), т.е.

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Если выборочные остатки модели регрессии  $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_n$  распределены нормально, то так называемый *метод наименьших квадратов* (МНК; англ. *ordinary least*



squares, OLS) имеет несомненное преимущество, поскольку позволяет получить несмещенные, наиболее эффективные и однозначно определенные оценки параметров.

Можно показать, что минимальное значение  $RSS$  будет достигаться при следующих значениях коэффициентов модели:

$$\hat{\beta}_1 = \{\sum y_i x_i - \bar{x} \sum y_i\} / \{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n\},$$

что соответствует тангенсу угла наклона линии регрессии в координатах  $(x; y)$ ;

$$\hat{\beta}_0 = \{\sum y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_i\} / n \quad - \text{отрезок, отсекаемый этой линией на оси ординат.}$$

Наконец, *стандартное отклонение остатков* (англ. *residual standard error*), являющееся важной характеристикой качества модели, в случае простой линейной регрессии оценивается как  $\sigma = [RSS/(n - 2)]^{0.5}$ .

### Модель оценки возраста вселенной

Как известно, связь между расстоянием до внегалактического объекта (например, галактики, квазара) и скоростью его удаления, обусловленного расширением Вселенной после Большого взрыва, описывается законом Хаббла ([ru.wikipedia.org/wiki](http://ru.wikipedia.org/wiki)). Этот закон выражается простой линейной зависимостью:  $y = \beta x$ , где  $y$  – относительная скорость движения любых двух галактик, разграниченных в данный момент времени расстоянием  $x$ , а  $\beta$  – постоянная Хаббла, выраженная в км/с на мегапарсек. Величина, обратная постоянной Хаббла, дает приблизительный возраст Вселенной (так называемый, "Хаббловский возраст").

В рамках проекта *Key Project* ("ключевой проект"), целью которого являлось уточнение значения  $\beta$ , с помощью космического телескопа "Хаббл" ([ru.wikipedia.org/wiki](http://ru.wikipedia.org/wiki)) были измерены расстояния до 24 галактик и установлены скорости их удаления. Пользуясь этими опубликованными данными ([Freedman et al., 2001](#)), мы можем оценить значение постоянной Хаббла при помощи простой линейной регрессии. Обратим внимание на то, что свободный член уравнения здесь приравнен нулю, поскольку в момент, когда Вселенная находилась в состоянии сингулярности, галактик не существовало и они, конечно же, не могли удаляться друг от друга.

Готовые для построения модели данные из указанной статьи можно найти в составе таблицы `hubble` из пакета `gamair`:

```
install.packages("gamair")
library(gamair)
data(hubble)
str(hubble)
'data.frame': 24 obs. of 3 variables:
 $ Galaxy: Factor w/ 24 levels "IC4182","NGC0300",...: 2 3 4 5
6 8 9 7 10 11
 $ y      : int  133 664 1794 1594 1473 278 714 882 80 772 ...
 $ x      : num  2 9.16 16.14 17.95 21.88 ...
```

Как было показано ранее, параметры линейной модели в R можно оценить при помощи стандартной функции `lm()`:

```
M <- lm(y ~ x - 1, data = hubble)
```

Обратите внимание на `-1` в формуле модели – такое обозначение используется для того, чтобы исключить свободный член регрессионной модели. Посмотрим на результат подгонки модели:

```

summary (M)
Call:
lm(formula = y ~ x - 1, data = hubble)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-736.5 -132.5  -19.0   172.2   558.0
Coefficients:
    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
x      76.581     3.965   19.32 1.03e-15 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 258.9 on 23 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9419, Adjusted R-squared:  0.9394
F-statistic: 373.1 on 1 and 23 DF,  p-value: 1.032e-15

```

Как видим, оцененное значение постоянной Хаббла составило 76.581 км/с на мегапарсек. Это значение существенно отличается от нуля (см.  $p$ -значение соответствующего  $t$ -теста в столбце  $\text{Pr}(>|t|)$ ).

С использованием полученного нами уравнения  $y = 76.581x$  расчет возраста Вселенной не представляет труда. Один мегапарсек – это  $3.09 \times 10^{19}$  км. Разделим полученную выше постоянную Хаббла на это значение, чтобы выразить ее в секундах:

```

(hub.const <- 76.581/3.09e19)
[1] 2.47835e-18

```

Тогда возраст Вселенной, выраженный в секундах, составит:

```

(age <- 1/hub.const)
[1] 4.034943e+17

```

Выполнив простое преобразование, получим возраст, выраженный в годах:

```

age/(60^2*24*365)
[1] 12794721567

```

Таким образом, данные (Freedman et al., 2001) указывают на то, что возраст Вселенной составляет ~12.8 миллиардов лет. Отметим, что по последним оценкам возраст Вселенной составляет 13.798 млрд. лет ([ru.wikipedia.org/wiki](http://ru.wikipedia.org/wiki)).

### Доверительные интервалы модели

Обычно истинные величины коэффициентов регрессии  $\beta_0$  и  $\beta_1$  неизвестны и мы осуществляем лишь нахождение их оценок  $b_0$  и  $b_1$  (например, при помощи функции `lm()`). Иначе говоря, истинная линия регрессии может проходить как-то иначе, чем построенная по выборочным данным. Оценить неопределенность в отношении построенной модели можно, вычислив доверительную область для линии регрессии.

В общем случае различают три способа выражения интервальных оценок точности и воспроизводимости рассчитанной модели: а) доверительная область модели регрессии, б) доверительная область для значений прогнозируемой переменной и в) толерантные интервалы регрессии (Кобзарь, 2006, с. 665).

Как было отмечено выше, предполагается, что при любом значении  $x$  соответствующие ему значения  $y$  распределены нормально, а их средним является значение  $\hat{y}$ , полученное по уравнению регрессии. Неопределенность оценки  $\hat{y}$  характеризуется стандартной ошибкой регрессии:

$$S_{\hat{y}} = S_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}, \text{ где } S_e = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2} - \text{стандартное отклонение}$$

остатков (ранее оно было также обозначено как *RSE*).

Неопределенность положения линии простой регрессии для каждого текущего  $x = x_0$  определяется ошибкой  $S_e(\hat{\mu}_{Y|x_0})$  значений  $\hat{y}$ , которые рассчитываются как  $\hat{\mu}_{Y|x_0} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$ . Тогда  $100(1 - \alpha)$ -процентный *доверительный интервал модели регрессии* (*CI*, от англ. *confidence interval*) в точке  $x_0$  рассчитывается как  $CI = \hat{\mu}_{Y|x_0} \pm t_{\alpha/2, n-2} S_{\hat{y}}$ , где  $t_{(1-\alpha/2), n-2}$  – это соответствующий квантиль *t*-распределения Стьюдента. Доверительная область, рассчитанная по приведенному соотношению, является геометрическим местом доверительных интервалов для различных значений предиктора. Обычно это – довольно узкая полоса, которая несколько расширяется при крайних значениях  $x$ .

*Доверительный интервал для зависимой переменной* или интервал предсказания (*PI*, от англ. *prediction intervals*) складывается из разброса значений вокруг линии регрессии и неопределенности положения самой этой линии. Его ширина определяется ошибкой  $S_e(\hat{y}|x_0) = S_e(\hat{\mu}_{Y|x_0}) + \varepsilon_{Y|x_0}$ , где  $\varepsilon_{Y|x_0}$  – случайная условная ошибка при прогнозе  $Y$ . Для простой линейной регрессии эту ошибку можно рассчитать по формуле

$$S_Y = S_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}.$$

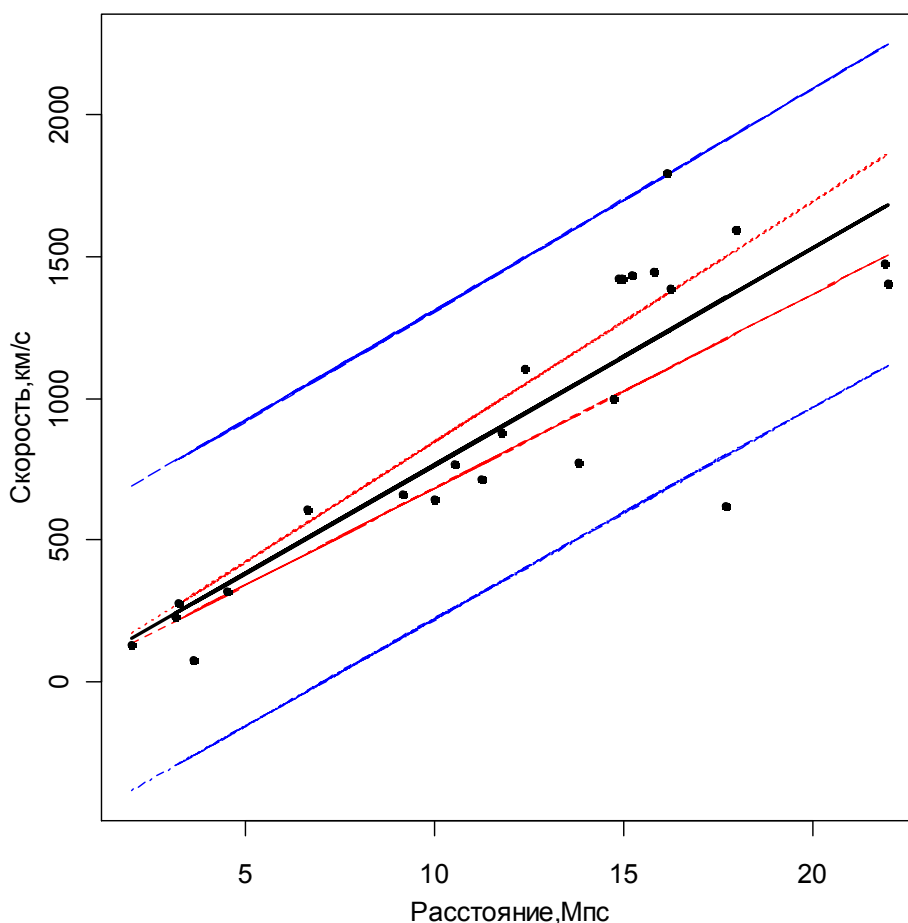
Доверительная область  $PI = \hat{\mu}_{Y|x_0} \pm t_{\alpha/2, n-2} S_Y$ , рассчитанная для всех возможных значений предиктора  $x_0$ , является геометрическим местом доверительных интервалов для величин  $\hat{y}$ , экстраполированных на "новые" прогнозируемые значения отклика.

В статистической среде R интервалы *CI* и *PI* для линейной модели легко оценить с использованием функции `predict.lm()`. В общем случае эта функция предназначена для расчета значений  $\hat{y}$  по подогнанной модели и имеет два важных параметра: `newdata`, который определяет таблицу с набором предикторов (если он не определен, то используется исходная выборка) и `interval = c("none", "confidence", "prediction")`, обозначающий тип оцениваемой доверительной области. Для модели, оценивающей постоянную Хаббла, имеем:

```
CPI.df <- cbind(predict(M, interval = "conf"),
                predict(M, interval = "pred"))
CPI.df <- CPI.df[, -4] ;
colnames(CPI.df) <- c("Y_fit", "CI_l", "CI_u", "PI_l", "PI_u")
head(CPI.df)
      Y_fit      CI_l      CI_u      PI_l      PI_u
1  153.1623  136.7587  169.5659 -382.7326  689.0573
2  701.4835  626.3550  776.6120  160.5966 1242.3704
3 1236.0201 1103.6430 1368.3972  684.2611 1787.7791
4 1374.6320 1227.4097 1521.8544  819.1244 1930.1397
5 1675.5960 1496.1406 1855.0515 1110.6902 2240.5019
6  246.5914  220.1816  273.0012 -289.7031  782.8859
```

Построим рисунок с линией регрессии и доверительными областями:

```
matplot(hubble$x, CPI.df,
        type="l", lwd=c(2, 1, 1, 1, 1), col=c(1, 2, 2, 4, 4),
        ylab="Скорость, км/с", xlab="Расстояние, Мпс")
with(hubble, matpoints(x, y, pch=20))
```



На рисунке показана линия регрессии  $y = 76.581x$ , построенная по 24 точкам, а также 95%-я доверительная область линии регрессии, которая ограничена пунктирными линиями красного цвета. С 95%-й вероятностью можно утверждать, что истинная линия находится где-то внутри этой области, т.е. если мы соберём аналогичные наборы данных по другим галактикам и построим по ним линии регрессии, то в 95 случаях из 100 эти прямые не покинут пределов доверительной области.

Обратите внимание, что некоторые точки оказались вне доверительной области. Это совершенно естественно, поскольку речь идёт о доверительной области *CI* линии регрессии, а не самих значений. А вот в 95%-ю доверительную область прогнозирования *PI*, ограниченную синими линиями, попадет 95% всех возможных значений величины  $y$  в исследованном диапазоне значений  $x$ .

### **Оценка неопределенности в отношении параметров линейной регрессии**

Как и в случае с любыми другими выборочными оценками, всегда существует неопределенность в отношении того, насколько выборочные оценки параметров регрессионной модели близки к соответствующим истинным значениям (т.е. найденным по генеральной совокупности). Рассмотрим несколько способов, позволяющих охарактеризовать эту неопределенность, которая количественно выражается величинами стандартных ошибок и доверительных интервалов параметров модели.

1. Параметрический подход. Если объем выборки "достаточно велик" и выполняются определенные условия в отношении свойств остатков модели, можно воспользоваться *Центральной Предельной Теоремой* (ЦПТ – [ru.wikipedia.org/wiki/](http://ru.wikipedia.org/wiki/)), согласно которой выборочные оценки того или иного параметра линейной модели имеют приближенно нормальное распределение.

Как видно из приведенных ранее результатов расчетов, полученных с помощью функции  $\ln()$ , постоянная Хаббла была оценена (Estimate) в 76.581 км/с на мегапарсек

со стандартной ошибкой (Std. Error) 3.965 км/с на мегапарсек. По определению, стандартная ошибка параметра – это стандартное отклонение [нормального] распределения значений этого параметра, полученного по случайным выборкам фиксированного размера из той же генеральной совокупности. Соответственно, чем меньше значение стандартной ошибки параметра, тем более он точен.

Согласно ЦПТ мы предполагаем, что истинное значение постоянной Хаббла принадлежит нормально распределенной совокупности, математическое ожидание и стандартное отклонение которой составляют около 76.581 и 3.965 км/с на мегапарсек соответственно. Заметим, однако, что найденное нами наиболее вероятное точечное значение  $\beta$  при повторных измерениях может оказаться иным. Чтобы охарактеризовать эту неопределенность, необходимо рассчитать *доверительный интервал* – не противоречащий имеющимся данным диапазон значений, в котором истинное значение постоянной Хаббла находится с определенной вероятностью (например, 95%).

Ориентировочно оценить границы доверительного интервала можно, предположив, что примерно 95% всех значений распределения оценок постоянной Хаббла лежат в диапазоне  $\pm 2SE_{\beta}$  относительно его среднего значения, где  $SE_{\beta}$  – стандартная ошибка параметра  $\beta$ , т.е.:

$$76.581 - 2 \times 3.965 = 68.651 \quad \text{и} \quad 76.581 + 2 \times 3.965 = 84.511 \text{ км/с на мегапарсек.}$$

Однако неопределенность имеется в отношении не только оценки параметра  $\beta$ , но и оценки его стандартного отклонения для соответствующего нормального распределения. Не углубляясь в детали, отметим, что в связи с этим обстоятельством более точные значения границ доверительного интервала дадут вычисления, основанные на свойствах  $t$ -распределения Стьюдента. Тогда границы 95%-го доверительного интервала для параметра  $\beta$  составят:  $\beta \pm t_{0.975} SE_{\beta}$ , где  $t_{0.975}$  – 0.975-квантиль  $t$ -распределения с  $(n - p)$  числом степеней свободы,  $n$  – объем выборки, а  $p$  – число параметров модели.

Для нашего примера получаем:

```
beta <- summary(M)$coefficients[1]
SE <- summary(M)$coefficients[2]
ci.lower <- beta - qt(0.975, df = 23)*SE
ci.upper <- beta + qt(0.975, df = 23)*SE
c(ci.lower, ci.upper)
[1] 68.379 84.783
```

Используя эти оценки нижней и верхней границ 95%-ного доверительного интервала, мы можем рассчитать диапазон значений, в котором с вероятностью 95% находится истинный возраст Вселенной:

```
Uni.upper <- 1/(ci.lower*60^2*24*365.25/3.09e19)
Uni.lower <- 1/(ci.upper*60^2*24*365.25/3.09e19)
c(Uni.lower, Uni.upper)
[1] 11549039573 14319551383
```

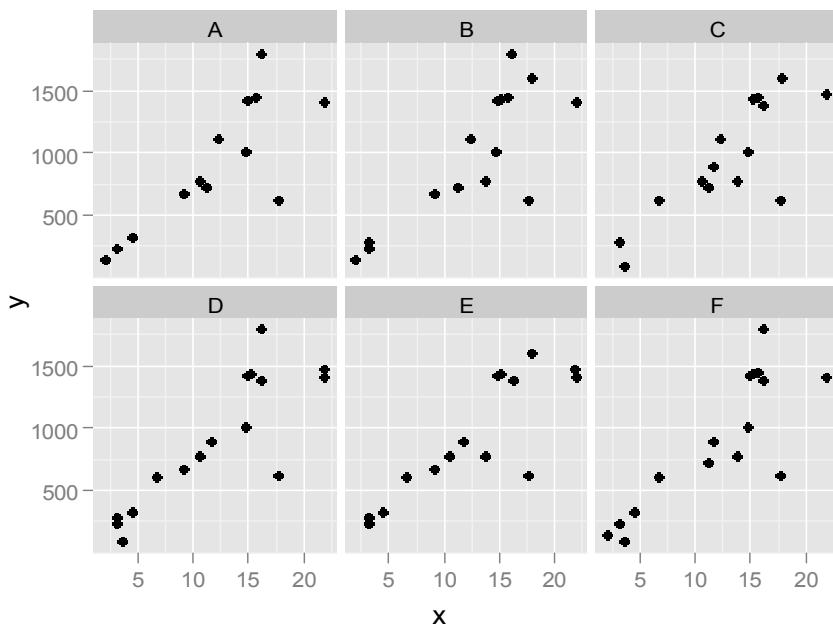
# т.е. примерно от 11.5 до 14.3 млрд. лет

Заметьте, что полученный таким способом доверительный интервал включает значение возраста Вселенной, рассчитанное на основе самых последних космологических изысканий (13.798 млрд. лет).

2. Бутстреп-метод. В разделах 2.7 и 5.3 нами рассматривались методы "размножения выборок" (рандомизация и бутстреп) для получения эмпирического распределения анализируемых статистик. Используем бутстреп-метод для оценки стандартной ошибки и 95%-ного доверительного интервала для постоянной Хаббла.

На следующем рисунке приведены примеры 6 случайных выборок из 24 наблюдений, извлеченных из исходной совокупности данных по скорости удаления галактик. Эти псевдовыборки формируются "с возвратом" – это значит, что, будучи

однажды случайно выбранным, то или иное наблюдение вновь помещается в исходную совокупность, откуда оно может быть извлечено снова (следовательно, некоторые наблюдения могут повторяться в генерируемой выборке несколько раз).



Обратите внимание: на представленном рисунке общий тренд сохраняется ("чем больше  $x$ , тем больше  $y$ "), однако наблюдения, входящие в состав каждой выборки А - F, несколько различаются, что в итоге приведет и к несколько различающимся оценкам постоянной Хаббла при подгонке линейной модели при помощи функции `lm()`.

Как отмечено выше, при выполнении бутстреп-процедуры формируется "большое" число повторных выборок из исходной совокупности. То, насколько "большим" должно быть это число, зависит от объема исходной совокупности и ее свойств (подробнее см. [Efron, Tibshirani, 1994](#)). Для нашего примера мы сформируем 1000 случайных повторных выборок. Хотя формирование бутстреп-распределений параметров регрессии можно реализовать в R, "вручную" записав необходимые команды, проще будет воспользоваться специально предназначенной для этого функцией `boot()` из одноименного стандартного пакета. Эта функция имеет следующие обязательные аргументы:

- `data`: таблица с исходными данными;
- `statistic`: функция, выполняющая вычисление интересующего нас параметра(-ов);
- `R`: число повторных выборок, по которым рассчитывается этот параметр.

Напишем небольшую функцию, которая будет оценивать параметры регрессионной модели и возвращать значения постоянной Хаббла:

```
regr <- function(data, indices) {
  # вектор indices будет формироваться функцией boot()
  dat <- data[indices, ]
  fit <- lm(y ~ -1 + x, data = dat)
  return(summary(fit)$coefficients[1])
}
```

Теперь подадим `regr()` на функцию `boot()`:

```
library(boot)
results <- boot(data = hubble, statistic = regr, R = 1000)
```

При выводе содержимого объекта `results` на экран получим:

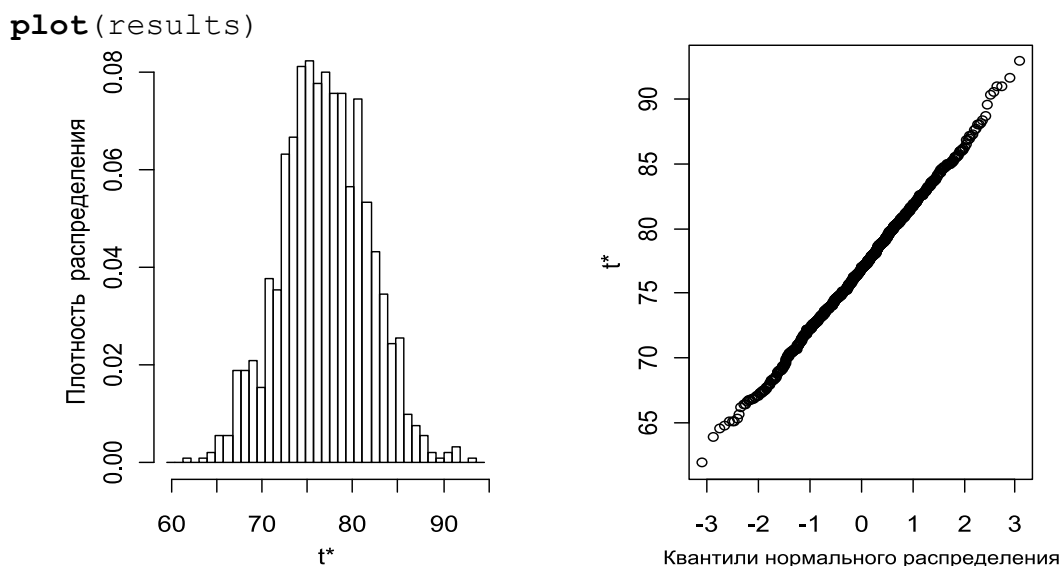
```

results
ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP
Call:
boot(data = hubble, statistic = regr, R = 1000)
Bootstrap Statistics :
      original      bias      std. error
t1* 76.58117 0.03528876      4.812987

```

В представленных результатах `original` – это значение постоянной Хаббла, оцененное по эмпирическим данным (см. выше); `bias` (смещение) – разница между средним значением 1000 бутстреп-оценок постоянной Хаббла и исходной оценкой; `std. error` – бутстреп-оценка стандартной ошибки постоянной Хаббла. Обратите внимание на то, что полученная бутстреп-оценка стандартной ошибки выше, чем рассчитанная параметрическим методом.

Для объектов класса `boot`, к которому принадлежит `results`, имеется метод `plot`, который позволяет изобразить графически полученное распределение бутстреп-оценок постоянной Хаббла и одновременно проверить нормальность их распределения при помощи графика квантилей:



Как отмечено выше, мы можем оценить нижнюю и верхнюю границы 95%-ного доверительного интервала постоянной Хаббла, найдя 0.025- и 0.975-квантили изображенного выше распределения:

```

quantile(results$t, c(0.025, 0.975))
      2.5%      97.5%
67.07360 85.73249

```

Используя эти значения, рассчитаем соответствующие границы значений возраста Вселенной:

```

U.lower <- 1/(85.73249*60^2*24*365.25/3.09e19)
U.upper <- 1/(67.07360*60^2*24*365.25/3.09e19)
U.lower
[1] 11421129999 # т.е. примерно 11.4 млрд. лет
U.upper
[1] 14598320553 # т.е. примерно 14.6 млрд. лет

```



Следует отметить, что границы доверительного интервала, рассчитанные методом "процентилей", могут оказаться смещенными. В состав пакета `boot` входит функция `boot.ci()`, которая позволяет рассчитать несколько других типов доверительных интервалов, включая интервалы с поправкой на смещение (аргумент `type = "bca"`; подробнее см. ? `boot.ci`):

```
boot.ci(results, type = "bca")
BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
Based on 1000 bootstrap replicates
CALL :
boot.ci(boot.out = results, type = "bca")
Intervals :
Level          BCa
95%          (66.44, 85.36 )
Calculations and Intervals on Original Scale
```

3. Использование имитационных процедур. Как было показано в разделе 7.1, можно также использовать принципы *байесовской статистики* и оценить неопределенность в отношении параметров той или иной модели методом имитаций. В общем виде эта процедура включает следующие шаги:

- подгонка определенной модели к имеющимся данным;
- полученные оценки параметров модели используются для генерации большого количества альтернативных, но, в то же время, правдоподобных (т.е. непротиворечащих данным) реализаций этих параметров.

Этот метод легко реализовать с помощью функции `sim()` из пакета `arm` (подробнее см. Gelman, Hill, 2007), которая выполняет следующие шаги:

1. При помощи обычного регрессионного анализа оцениваются вектор регрессионных коэффициентов  $\hat{\beta}$ , ковариационная матрица  $V_{\hat{\beta}}$  и стандартное отклонение остатков  $\hat{\sigma}$ .
2. Создается большое число реализаций оценок вектора параметров  $\beta^*$  и стандартного отклонения остатков  $\sigma^*$ . Для каждой реализации:
  - генерируется значение  $\sigma^* = \hat{\sigma} \sqrt{(n-k)/\chi^2}$ , где статистика  $\chi^2$  случайным образом извлекается из соответствующего распределения с  $n - k$  степенями свободы;
  - с учетом полученного значения  $\sigma^*$ , формируется вектор  $\beta^*$  путем случайного извлечения значений из многомерного нормального распределения со средним значением  $\hat{\beta}$  и ковариационной матрицей  $V_{\hat{\beta}}$ .

Для нашего примера получаем:

```
library(arm)
simulations <- sim(M, 1000)
hist(simulations@coef, breaks = 30)
```

Гистограмма распределения 1000 имитированных значений постоянной Хаббла по форме практически не отличается от приведенной выше гистограммы, полученной бутстреп-методом.

Рассчитав стандартное отклонение этого распределения, мы можем оценить стандартную ошибку постоянной Хаббла и увидеть, что она, как и в случае с бутстреп-анализом, также оказалась выше исходной оценки (см. `summary(M)`):

```
sd(simulations@coef)
[1] 4.051294
```



95%-ный доверительный интервал легко можно найти известным нам способом:  
`quantile(simulations@coef, c(0.025, 0.975))`  
 2.5%      97.5%  
 68.11832 84.31069

Конечно, может возникнуть вопрос – какой из описанных выше трех методов следует применять на практике? Ответ на этот вопрос определяется несколькими факторами. Так, если модель адекватно описывает данные (с точки зрения ее структуры и выполнения требований к ее остаткам), то рассмотренный в самом начале классический подход даст хороший результат. Бутстреп-анализ и имитации, возможно, окажутся слишком "тяжелой артиллерией" для характеристики неопределенности в отношении одного единственного коэффициента простой регрессии. В то же время эти методы незаменимы при оценке неопределенности в отношении величин, которые являются функцией (особенно нелинейной функцией) от каких-либо параметров модели. Например, при выполнении бутстреп-анализа мы могли бы рассчитывать для каждой "псевдовыборки" не просто постоянную Хаббла, а сразу возраст Вселенной, изменив соответствующим образом функцию `regr()`.

### Статистики, используемые для оценки "качества" регрессионной модели

В нашем примере вычисления постоянной Хаббла с помощью простой линейной регрессии оценка коэффициента  $\beta$  оказалась статистически значимой, что является косвенным (и в нашем случае вполне достаточным) подтверждением адекватности модели имеющимся данным. Но, когда возникает необходимость сравнить между собой несколько альтернативных моделей, отличающихся между собой по виду функции регрессии и/или составу исходных данных, желательно получить более точный ответ на вопрос, какая из возможных спецификаций модели предпочтительней.

Многие руководства по статистике предлагают ориентироваться на формальные критерии качества аппроксимации, такие как *среднеквадратичная ошибка регрессии*, *коэффициент детерминации* и *дисперсионное отношение Фишера*. Эти показатели, вычисляемые при помощи функции `lm()` и обобщенные `summary()`, образуют завершающий блок результатов (полный выводимый текст был приведен выше):

```
...
Residual standard error: 258.9 on 23 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9419, Adjusted R-squared: 0.9394
F-statistic: 373.1 on 1 and 23 DF, p-value: 1.032e-15
```

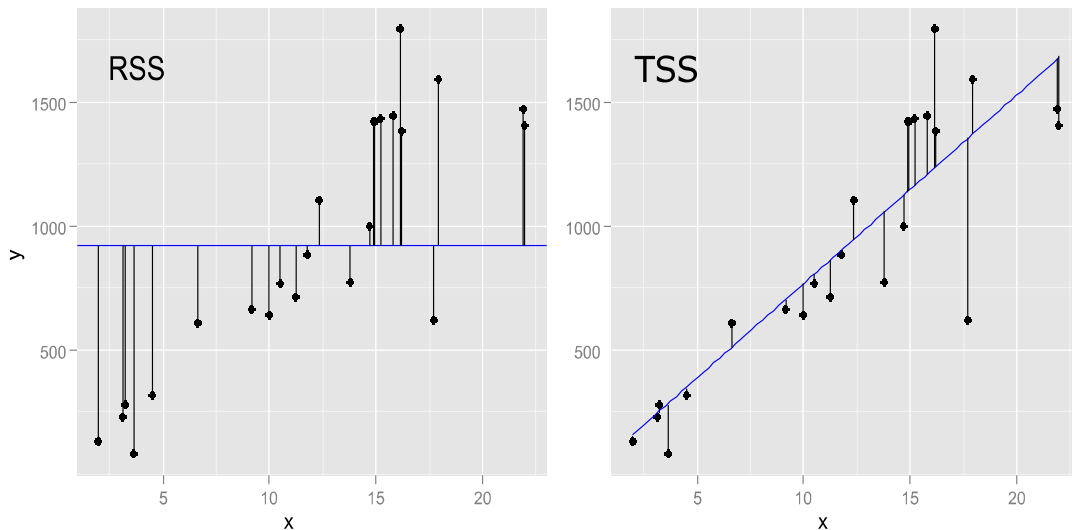
В третьей строке приведенных результатов фигурирует значение  $F$ -критерия и соответствующее ему  $p$ -значение. В разделе 5.5 мы рассматривали дисперсионный анализ, где  $F$ -критерий использовался для сравнения меж- и внутригрупповой дисперсий. Поскольку дисперсионный анализ и линейная регрессия с математической точки зрения являются частными случаями одного и того же класса "общих линейных моделей" (см. раздел 6.2), здесь  $F$ -критерий представляет собой также отношение дисперсий с похожей интерпретацией:

$$F = \frac{(TSS - RSS)/k}{RSS/(n - k - 1)}$$

где  $TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  – общая сумма квадратов (англ. *total sum of squares*),

$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2$  – сумма квадратов остатков,  $k = 2$  – число параметров модели (коэффициент регрессии и стандартное отклонение остатков),  $n$  – объем выборки.

Ниже приведена геометрическая интерпретация понятий "общая сумма квадратов" ( $TSS$ ) и "сумма квадратов остатков" ( $RSS$ ). Предположим, что мы не строим никакой модели и пытаемся предсказать зависимую переменную  $y$ , просто рассчитав ее среднее значение (рис. *слева*). Вертикальные отрезки отражают расстояние от каждого выборочного наблюдения  $y$  до этого предсказанного среднего значения (представлено в виде синей горизонтальной линии). При расчете  $TSS$  все эти расстояния возводятся в квадрат и суммируются. Вертикальные отрезки на рис. *справа* отражают расстояние от каждого выборочного значения зависимой переменной  $y$  до значения, предсказанного регрессионной моделью ( $\hat{y}$ ). При расчете  $RSS$  все эти расстояния также возводятся в квадрат и суммируются.



Выполнить разложение дисперсии отклика  $y$  на описанные составляющие и получить стандартную таблицу дисперсионного анализа можно с использованием функции `anova()`:

```
anova(M)
Analysis of Variance Table
Response: y
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
x       1 25013691 25013691  373.08 1.032e-15 ***
Residuals 23  1542066    67046
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Очевидно, что чем меньше значение  $RSS$  (т.е., чем ближе регрессионная линия ко всем наблюдениям одновременно), тем больше будет значение  $F$ -критерия и тем лучше построенная регрессионная модель будет *в целом* описывать экспериментальные данные. Другими словами, рассчитывая  $F$ -критерий, мы проверяем нулевую гипотезу о равенстве всех регрессионных коэффициентов построенной модели нулю (*Omnibus test*):

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0.$$

В приведенном виде эта нулевая гипотеза соответствует случаю множественной регрессии (т.е. когда имеется несколько предикторов). В рассматриваемом нами примере мы оценивали лишь один параметр (постоянную Хаббла) и  $F$ -критерий составил 373.1, что гораздо больше 1. Этот результат означает, что вероятность получить столь же высокое значение  $F$  при отсутствии связи между  $x$  и  $y$  очень мала ( $p = 1.032e-15$ ). Поскольку у нас есть лишь один предиктор, то мы одновременно проверили гипотезы о

статистической значимости модели в целом и о равенстве нулю постоянной Хаббла  $\beta$  (обратите внимание, что  $p$ -значения в обоих этих тестах совпадают).

Во второй снизу строке результатов расчета модели приведены значения Multiple R-squared и Adjusted R-squared. В первом случае речь идет о так называемом *коэффициенте детерминации*, который обозначается как  $R^2$  и рассчитывается как  $R^2 = 1 - RSS / TSS$ . Напомним, что  $TSS$  отражает общий разброс значений зависимой переменной без учета регрессионной модели, а  $RSS$  – остаточную дисперсию значений отклика, которую нам не удалось "объяснить" при помощи построенной модели.

Таким образом, коэффициент детерминации  $R^2$  измеряет *долю* общей дисперсии зависимой переменной, объясненную моделью, и изменяется от 0 до 1. Чем ближе значение  $R^2$  к 1, тем точнее модель описывает данные: для случая простой регрессии с одним предиктором  $R^2$  будет представлять собой просто возведенный в квадрат коэффициент корреляции между  $y$  и  $x$ . Достигнутое нами значение коэффициента детерминации составило  $R^2 = 0.9419$ , что указывает на весьма высокое качество рассматриваемой модели.

*Скорректированный* коэффициент детерминации (англ. *adjusted R-squared*) имеет практический смысл лишь для сравнения моделей-претендентов с разным количеством предикторов и будет обсуждаться нами в последующих разделах. Здесь мы лишь приведем формулу для его расчета  $R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-1}$  (где  $k$  – это число параметров модели) и отметим, что  $R^2 \geq R_{adj}^2$ .

В первой строке приведенных выше результатов регрессионного анализа представлено значение Residual standard error – стандартное отклонение остатков модели, которое в общем виде рассчитывается как  $RSE = \sqrt{RSS / (n - k - 1)}$ . По определению,  $RSE$  является оценкой разброса наблюдаемых значений зависимой переменной относительно истинной линии регрессии. Так, в нашем примере,  $RSE = 258.9$ , из чего следует, что в среднем наблюдаемые значения скорости галактик отличаются от истинных значений на 258.9 км/сек. Очевидно, что чем меньше значение  $RSE$ , тем точнее модель описывает анализируемые данные.

Считается, что рассмотренные количественные показатели отражают разные аспекты "качества" регрессионной модели, и поэтому их стоит использовать в совокупности. На самом деле они лишь по-разному комбинируют суммы квадратов отклонений  $RSS$  и  $TSS$ . В дальнейшем у нас будет еще возможность критически их оценить и рассмотреть критерии, основанные на иных принципах.

### 7.3. Модели регрессии при различных видах функции потерь

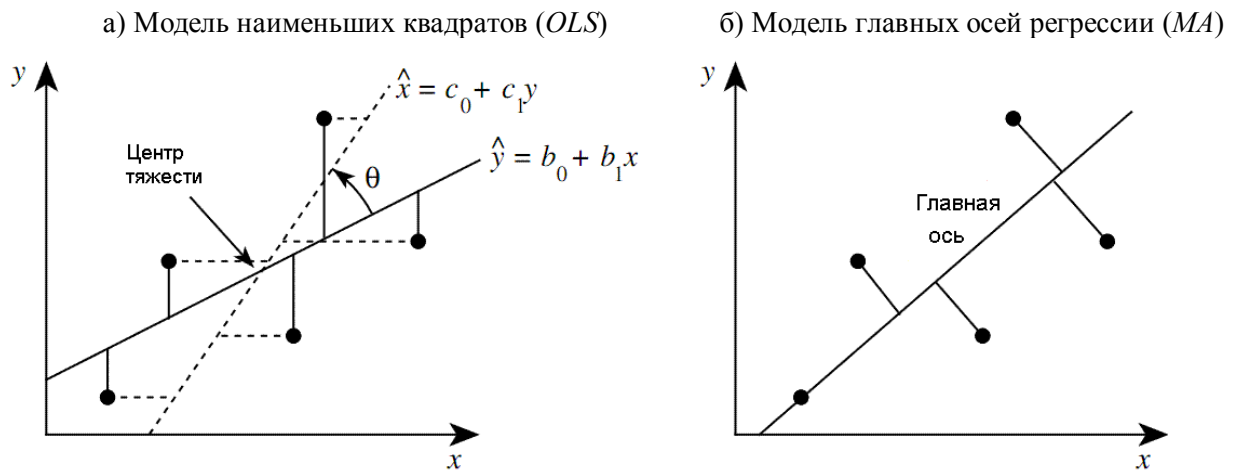
#### Два типа регрессионных моделей

Рассмотрим предварительно геометрическую интерпретацию двух основных типов моделей регрессии (Sokal, Rohlf, 1981; Legendre, Legendre, 1998).

*Модель I типа*, подробно рассмотренная в предыдущем разделе, применяется в условиях, когда объясняющая переменная  $X$  является "управляемой" (т.е. известной априори) или случайная составляющая ее вариации существенно меньше ошибки  $Y$ . Помимо гипотезы о том, что переменные в эксперименте линейно связаны, для модели I типа существенны все предположения классической модели (раздел 7.2).

Концептуально модель регрессии I-го типа ориентирована на *оптимальный прогноз* значений отклика  $Y$ . С геометрической точки зрения при этом выполняет поиск минимальной суммы квадратов остатков, т.е. отсчет ведется строго по вертикали (см. сплошные линии на рисунке внизу *слева*). Можно также показать, что найденная прямая

$Y = f(X)$  проходит через "центр тяжести" облака точек-наблюдений, образованный средними значениями переменных  $(\bar{x}, \bar{y})$ .



«В рамках модели I-го типа (т.е. когда независимая переменная  $X$  является управляемой) гипотеза корреляции о *взаимозависимости* случайных величин  $X$  и  $Y$  не имеет смысла.» (Legendre, Legendre, 1998, p. 499). Это подтверждается тем фактом, что для простой регрессии коэффициент детерминации  $R^2$  просто сводится к квадрату коэффициента линейной корреляции Пирсона  $r_{xy}$ , рассмотренному в разделе 5.6. Однако на практике через центральную точку  $(\bar{x}, \bar{y})$  проходит и линия обратной регрессии  $x = c_0 + c_1y + \varepsilon$ , которая будет совпадать с основной линией лишь при  $r_{xy} = 1$  – см. рисунок слева. В противном случае коэффициент корреляции равен геометрическому среднему из оценок параметров регрессии каждой из переменных на другую:  $c_{(X,Y)} = r_{xy}^2 / b_{(Y,X)}$  или  $r_{xy} = \text{tg}(45^\circ - \theta/2)$ , а величина угла  $\theta$  между двумя линиями регрессии может быть использована для оценки нелинейных нарушений функции  $Y = f(X)$ .

Если случайные вариации  $X$  и  $Y$  равновелики и пропорциональны, то на оценку параметра  $\beta$  угла наклона регрессионной прямой, найденную обычным МНК, оказывает влияние наличие ошибки измерения предиктора.

Модели *регрессии II типа* используются, когда требуется оценить параметры уравнения, описывающего функциональные отношения между парой двух случайных переменных (т.е.  $X$  уже не является управляемой переменной, поскольку неконтролируемая ошибка ее измерения достаточно велика). Предполагается (Sokal, Rohlf, 1981; Legendre, Legendre, 1998), что модели II типа более корректным образом оценивают *степень отношения* между двумя исходными переменными.

При аппроксимации данных моделями II типа имеет значение направление, в котором измеряются отклонения от линии регрессии:

- в методе *главных осей* (MA, от англ. *major axis regression*) расстояния от эмпирических точек отсчитываются в перпендикулярном направлении к аппроксимирующей прямой, после чего квадраты этих расстояний суммируются и минимизируются (см. рисунок вверху справа);
- в *стандартном* методе главных осей (SMA, от англ. *standard major axis*) находятся и суммируются разности вдоль направления, которое совпадает с перпендикуляром к линии регрессии I типа;
- *ранжированный* метод главных осей (RMA, от англ. *ranged major axis*) осуществляет предварительное преобразование осей переменных для достижения однородных рангов (здесь имеется некоторая неразбериха в обозначениях, поскольку метод SMA в некоторых источниках известен также под названием *редуцированных главных осей* или RMA от англ. *reduced major axis regression*).

Коэффициенты этих функций регрессии, основанные на геометрических представлениях, рассчитываются по простым формулам. Например, для модели SMA имеем:

$$\hat{\beta}_{1(SMA)} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n}} = |\hat{\beta}_{1(OLS)}| / r_{xy}, \quad \hat{\beta}_{0(SMA)} = \bar{y} - \hat{\beta}_{1(SMA)} \bar{x} \cdot \hat{\beta}$$

Предположим, что мы хотим проанализировать изменчивость видового состава донных организмов, для чего в изучаемой реке на всем ее протяжении от истоков до устья возьмем 13 гидробиологических проб. Построим модели регрессии доли численности  $d_{DO}$  (%) двух семейств организмов – Diamesinae и Orthocladiinae (личинок хирономид, или комара-звонца) – в общей численности зообентоса от температуры воды  $t$ , которая обусловлена продольным градиентом реки:

```
# Определяем исходные данные: NDO - доля Diamesinae+Orthocladiinae
# T - температура воды при взятии гидробиологической пробы
NDO <- c(88.9, 94.9, 70.8, 46.4, 31.0, 66.5, 83.6, 71.9,
        59.6, 22.5, 29.2, 6.5, 17.5)
T <- c(14.8, 14.5, 11.5, 12.6, 12, 14.5, 13.3, 16.7, 16.9, 20.6, 21.2, 22.5, 22.4)
Ex1 <- lm(NDO ~ T) ; Ex0 <- lm(NDO ~ 1) ; summary(Ex1)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  134.779      27.464   4.908 0.000466 ***
T             -4.978       1.628  -3.057 0.010909 *
---
Residual standard error: 22.53 on 11 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4593,    Adjusted R-squared:  0.4102
F-statistic: 9.346 on 1 and 11 DF,  p-value: 0.01091
(здесь и далее используется сокращенный формат результатов моделирования lm())
```

Комплексный регрессионный анализ с использованием различных моделей I и II типов может быть одновременно выполнен на основе функции `lmodel2()` из одноименного пакета (разработан P. Legendre):

```
library(lmodel2)
# Для RMA-модели вводим нормировку осей.
# Задаем 999 перестановок
Ex2.res <- lmodel2(NDO ~ T, range.y= "relative",
                  range.x="relative", nperm=999); Ex2.res
Model II regression
n = 13    r = -0.6777465    r-square = 0.4593404
Parametric P-values: 2-tailed = 0.01091  1-tailed = 0.0054547
Angle between the two OLS regression lines = 6.086494 degrees
Regression results
Method Intercept      Slope  Angle (degrees)  P-perm (1-tailed)
1    OLS  134.7791  -4.978119      -78.64165          0.008
2     MA  229.2404 -10.729858      -84.67554          0.008
3    SMA  173.6523  -7.345105      -82.24713           NA
4    RMA  204.0832  -9.198041      -83.79524          0.008

Confidence intervals
Method 2.5%-Intercept 97.5%-Intercept 2.5%-Slope 97.5%-Slope
1    OLS      74.33168      195.2265      -8.562224  -1.394014
2     MA     155.11402      675.9505     -37.930007  -6.216310
3    SMA     128.38529      246.1094     -11.757010  -4.588800
```

```

4   RMA      134.22977      500.2764   -27.233223   -4.944670
Eigenvalues: 868.0162 8.551026
H statistic used for computing C.I. of MA: 0.004425181

```

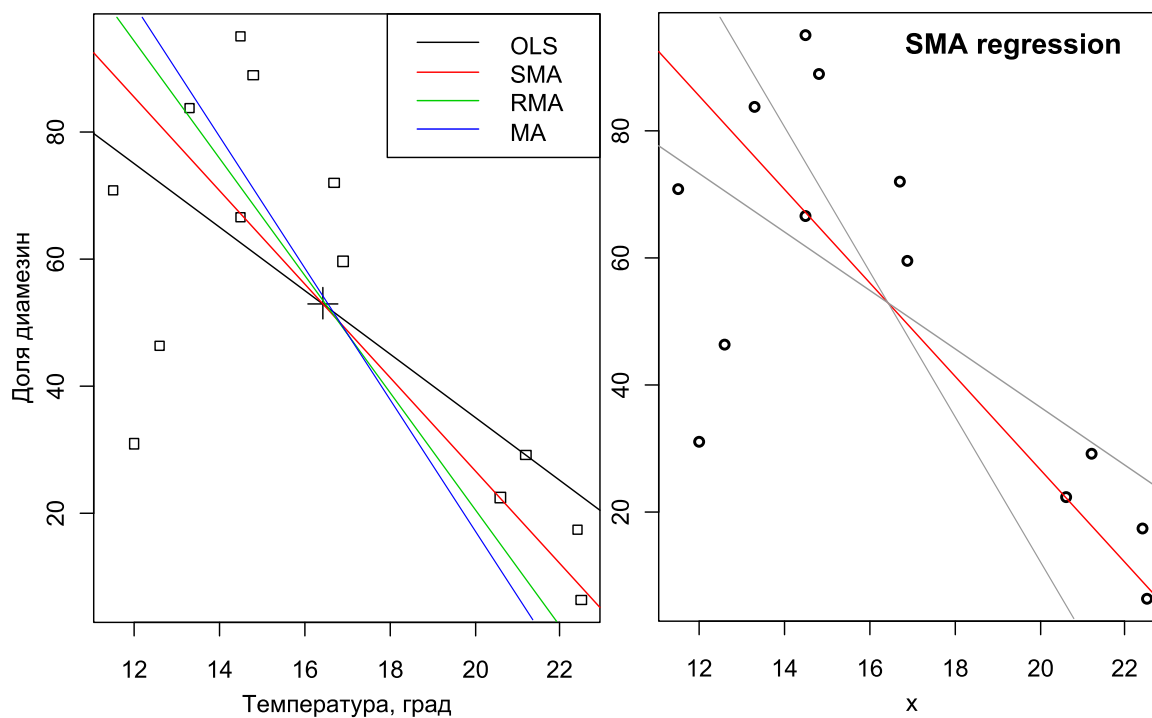
По итогам расчетов мы сразу получили объемную и ценную информацию для последующего анализа: а) подсчитан коэффициент корреляции и проверена его статистическая значимость; б) для четырех версий моделей получены оценки параметров моделей, углы расхождения между линиями регрессии и вычислена бутстреп-методом значимость коэффициента угла наклона  $b_1$ ; в) приведены границы доверительных интервалов для всех оцениваемых параметров.

Теперь изобразим все 4 модели на одном графике (слева внизу) и отдельно модель *SMA* с доверительными интервалами для линии регрессии (справа внизу):

```

op <- par(mfrow = c(2,2))
plot(Ex2.res, method="OLS", conf = FALSE, centroid=TRUE, main="",
      xlab = "Температура, град", ylab = "Доля диамезин",
      col=1,pch = 22, bg = "blue")
lines(Ex2.res, "SMA", col=2, conf = FALSE) ;
lines(Ex2.res, "RMA", col=3, conf = FALSE)
lines(Ex2.res, "MA", col=4, conf = FALSE) ;
legend("topright", c("OLS", "SMA", "RMA", "MA"), col=1:4, lty=1)
plot(Ex2.res, "SMA", lwd=2)

```



Подробные рекомендации из 8 пунктов касательно того, в каких условиях та или иная модель может оказаться предпочтительнее, обосновываются П. Лежандром в руководстве пользователя к пакету *lmodel2*, которое можно скачать, выполнив команду

```
vignette ("mod2user")
```

Мы же только обратим внимание читателя на то, что при использовании моделей II типа оценка коэффициента  $\hat{\beta}_1$ , угол наклона линии регрессии к оси  $X$ , а также угол  $\theta$  между линиями прямой и обратной регрессии увеличиваются.

### Робастные процедуры

Если распределение выборочных остатков модели регрессии  $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_n$  имеет асимметрию и "длинные хвосты", то это обычно вызывает обоснованное беспокойство при использовании метода наименьших квадратов. Действительно, функция потерь  $\rho(\hat{\varepsilon}) = \hat{\varepsilon}^2$  при возведении отклонений в квадрат придает слишком большой вес значениям, аномально отклоняющимся от общей тенденции – даже один выброс может существенно изменить оценку искомых параметров. Возможный и далеко не самый лучший метод борьбы с этим явлением – удалить наибольшие остатки как выбросы и повторить расчеты. Альтернативой является использование функции потерь  $\rho(\hat{\varepsilon}) = |\hat{\varepsilon}|$ , т.е. минимизация суммы абсолютных разностей  $|y_i - \hat{y}|$  (англ. *least absolute deviations*, *LAD*). В русскоязычной литературе соответствующую регрессию называют медианной, а процедуру подгонки моделей – *методом наименьших модулей* (см. [ru.wikipedia.org/wiki](http://ru.wikipedia.org/wiki)).

Еще более предпочтительным вариантом является использование различных методов *надежной* (*robust*) и *устойчивой* (*resistant*) регрессии. Рассмотрим три из них.

Регрессия Хубера (*Huber regression*) пытается найти компромисс между двумя крайними случаями – *OLS* и *LAD*:

- небольшие остатки возводятся в квадрат  $\rho(\hat{\varepsilon}) = \hat{\varepsilon}^2$  при  $|x| < c$ ;
- для больших отклонений при  $|x| > c$  используются простые разности  $\rho(\hat{\varepsilon}) = 2c|\hat{\varepsilon}| - c^2$ .

Пороговое значение  $c$  (*tuning constant*) находится с использованием эмпирической зависимости  $c = 1.345S_e$ , где  $S_e$  – стандартное отклонение для остатков, либо путем кросс-проверки. Эта версия модели легко реализуется в R функцией `rlm()` из пакета `MASS`:

```
# Робастная регрессия Хубера
library(MASS) ; summary(rlm(NDO ~ T))
Coefficients:
                Value      Std. Error t value
(Intercept) 147.2908    32.1618    4.5797
T              -5.6236     1.9070   -2.9490
Residual standard error: 17.52 on 11 degrees of freedom
```

Обратите внимание на существенное снижение стандартного отклонения остатков по сравнению с методом *OLS*.

Другой известный подход основан на методе *урезанных квадратов* (*LTS*, от англ. *least trimmed squares*), в котором минимизируется  $\sum_{i=1}^q \hat{\varepsilon}_{(i)}^2$ , где  $q < n$ , а  $(i)$  – комбинации наилучших индексов  $x$ , которые подбираются так называемым "генетическим алгоритмом" (см. [ru.wikipedia.org/wiki](http://ru.wikipedia.org/wiki)). Этот вариант модели также легко реализуем в R функцией `lmrob()` из пакета `robustbase`.

```
# Метод урезанных квадратов LTS
library(robustbase) ; summary(lmrob(NDO ~ T))
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   146.948      44.743    3.284  0.00728 **
T              -5.616       2.234   -2.513  0.02881 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Robust residual standard error: 17.95
Convergence in 18 IRWLS iterations
```



Наконец, робастная линейная регрессия *Кендалла-Тейла* (KTR, от англ. *Kendall-Theil robust line*; см. [Helsel, Hirsch, 2002](#)) имеет вид  $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \varepsilon$ . Знак ^ над символами  $\beta$  означает, что коэффициенты регрессии являются не параметрами некоей теоретической модели, а заданными статистиками на множестве возможных значений случайных величин  $X$  и  $Y$ . Регрессия Кендалла-Тейла тесно связана с коэффициентом ранговой корреляции  $\tau$  Кендалла, т.е. проверка гипотезы  $H_0: \hat{\beta}_1 = 0$  идентична оценке значимости  $\tau$   $H_0: \tau = 0$ .

Основные шаги процедуры подбора уравнения регрессии KTR сводятся к следующему:

- вычисляется множество  $n(n - 1)/2$  коэффициентов угла наклона  $b_{ij} = (y_i - y_j)/(x_i - x_j)$  для всех возможных пар точек  $i$  и  $j$  исходной выборки;

- расчетные коэффициенты модели оцениваются как медианы

$$\hat{\beta}_1 = \text{med}(b_{ij}); \hat{\beta}_0 = \text{med}(y) - \hat{\beta}_1 \times \text{med}(x);$$

- доверительные интервалы коэффициентов рассчитываются по интерполяционным формулам (см. прилагаемый скрипт `Kendall_Theil_Regr.r`, разработанный М. Вейнкауфом), а статистическая значимость модели в целом оценивается по формулам для коэффициента ранговой корреляции  $\tau$  Кендалла.

```
# Расчеты характеристик регрессии Кендалла-Тейла
source("Kendall_Theil_Regr.r")
df1 <- data.frame(T, NDO) ; Kendall(df1)
Results
Dip          -5.56716418
Upper CI Dip  0.21153846
Lower CI Dip -9.48214286
Intercept    141.99402985
Tau          -0.42307692
p            0.05047365
```

Интересно, что это – единственная из рассмотренных моделей, оказавшаяся статистически незначимой.

Итак, мы получили семь различных вариантов модели линейной регрессии для нашего примера:

$Y = 135 - 4.98 X$  (модель I, метод LSQ);  
 $Y = 229 - 10.7 X$  (модель II, метод MA).  
 $Y = 174 - 7.34 X$  (модель II, метод SMA);  
 $Y = 204 - 9.20 X$  (модель II, метод RMA);  
 $Y = 147.3 - 5.62 X$  (регрессия Хубера);  
 $Y = 146.9 - 5.61 X$  (метод LTS);  
 $Y = 146.9 - 5.57 X$  (метод KTR).

Обращает на себя внимание почти полное единодушие в оценках параметров робастными методами (дискуссию о робастных оценках и следует ли их называть по-русски "устойчивыми" или "надежными" можно почитать на сайте [habrahabr.ru](http://habrahabr.ru)).

Педантичный читатель, вероятно, будет требовать от нас прямого указания, какой из перечисленных вариантов наиболее адекватный. Ответа у нас нет, хотя бы потому, что разные модели служат разным целям исследований. Современные подходы к формальному тестированию моделей реализуются с позиций ресэмплинга, кросс-проверки и имитационных методов (Шитиков, Розенберг, 2014). Однако пока можно лишь сказать, что поиск моделей регрессии, которые "наилучшим образом" описывает двухмерное облако экспериментальных точек, является фундаментальной проблемой анализа данных, не имеющей конечного решения.



## 7.4. Критерии выбора моделей оптимальной сложности

В разделе 7.2 общий вид модели регрессии с одной независимой переменной был представлен как  $y = E(Y|X = x) + \varepsilon = f(x, \beta) + \varepsilon$ , т.е. условное математическое ожидание отклика  $E(Y|X = x)$  моделируется некоторой аппроксимирующей функцией  $f(x, \beta)$  с постоянными параметрами  $\beta$ , которая с ошибкой  $\varepsilon$  восстанавливает среднюю величину реализаций  $y$  случайной величины  $Y$  для произвольного значения  $x$  независимой переменной  $X$ . Нахождение оптимальной структуры регрессионной модели сводится к выбору семейства функций  $f(x, \beta)$ , в рамках которых происходит дальнейшая оценка вектора неизвестных параметров  $\beta$  уравнения регрессии.

Необходимо отметить, что большинство процессов в реальном мире нелинейны (более того, можно пойти еще дальше и утверждать, что линейных зависимостей в природе вообще не существует). Например, закон Ома нелинеен, если включить в него зависимость сопротивления проводника от температуры. Поэтому в учебниках физики основные законы мироздания представлены экспонентами, гиперболами, параболоми, показательными, степенными и полиномиальными функциями, тригонометрическими рядами Фурье, а также их различными комбинациями.

Иногда статистике поручается *верификация* теоретической модели (т.е. проверка ее истинности, адекватности по отношению к новым полученным данным, англ. *model verification*). При этом предметная (или дескриптивная) модель жестко обуславливает модель статистическую, предписывая ей определенные свойства, включающие в себя функциональную структуру и требуемые переменные. Привлечение априорной информации о механизме изучаемых процессов часто является решающим фактором при выборе формы зависимости. Например, принято считать, что зависимость "доза-эффект" в токсикологии описывается пробит-функцией (см. на [www.statistica.ru](http://www.statistica.ru) или [ru.wikipedia.org/wiki](http://ru.wikipedia.org/wiki)), а большинство аллометрических зависимостей между размерами двух структурных частей организма подчиняется степенному уравнению, предложенному Т. Гексли еще в 1932 г. Однако в большинстве иных случаев выбор алгебраической формы функции  $f(x, \beta)$  далеко не очевиден и обычно осуществляется с учетом следующих обстоятельств:

- возможность непротиворечивой интерпретации регрессионной модели на основе теоретических представлений в конкретной предметной области;
- точность аппроксимации моделью имеющихся выборочных данных;
- устойчивость регрессионной модели при экстраполяции (т.е. при  $x \rightarrow |\infty|$ ) и робастность по отношению к "выбросам";
- минимальная сложность ("экономность" модели), определяемая числом подбираемых параметров  $\beta$ .

Подбор или "селекция" конкретной модели (англ. *model selection*) из ограниченного числа моделей-претендентов является частным случаем более общей задачи определения структуры модели (*structure selection*). Естественным является желание выбрать модель, обеспечивающую минимальную среднеквадратичную ошибку  $\varepsilon$ , которая по мере увеличения сложности функции  $f(x, \beta)$ , как правило, монотонно убывает. Однако дополнительные члены, включаемые в модель, на определенном этапе уже не несут полезной информации или дублируют друг друга (что происходит, например, при бесконтрольном увеличении степени полинома). При этом средняя ошибка на независимых контрольных данных сначала уменьшается, затем проходит через точку минимума и далее только возрастает. Модели, содержащие избыточное количество параметров и, как следствие, генерирующие предсказания с высокой ошибкой, называют *переобученными* (англ. *overfitted*) или "переусложненными".

«Переусложнение модели может привести к "подлинной катастрофе" (т.е. к "развалу" решения)... Она может очень хорошо объяснять исходную эмпирическую выборку, но вне этих фактов в рамках изучаемого явления становится абсолютно "слепой", т.е. даёт такие прогнозы, которые генерируются не изучаемым явлением, а самой этой моделью в результате ее переусложнения.» (Васильев, 2001). К созданию переобученных моделей часто приводит ориентация на внутренние критерии качества, основанные на среднеквадратичном отклонении остатков ( $RSE$ ), такие как дисперсионное отношение Фишера  $F$  и коэффициент детерминации  $R^2$ . Эти показатели будут *всегда возрастать* при увеличении числа переменных модели, даже если включаемые в модель дополнительные предикторы не имеют тесной связи с зависимой переменной.

Выход заключается в использовании таких критериев, которые налагают "штраф" на число параметров модели  $k$  – чем больше параметров, тем больше этот "штраф" и, как результат, тем меньше значение соответствующего критерия. Одним из таких критериев является упомянутый ранее скорректированный коэффициент детерминации

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-1}.$$

К сожалению, на практике величина штрафа, налагаемого на число параметров модели в формуле  $R_{adj}^2$ , часто оказывается недостаточной. В связи с этим современные подходы к выбору хорошо интерпретируемых моделей оптимальной сложности ориентируются на применение информационных критериев, основанных на функции максимального правдоподобия и более чувствительных к увеличению числа параметров модели, а также на использование методов перекрестной проверки.

*Информационный критерий Акаике* (AIC, от англ. *Akaike information criterion*) в явном виде включает "штраф" за увеличение сложности модели

$$AIC = G^2 + 2k,$$

где  $G^2$  – так называемый *девианс* (англ. *deviance*) – показатель адекватности модели, вычисляемый с использованием функции правдоподобия (подробнее см. раздел 8.2). При нормальном законе распределения остатков

$$G^2 = -n \ln \left( \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 / n \right), \text{ где } n - \text{ количество наблюдений (Burnham, Anderson, 2002).}$$

В случаях, когда переобучение модели особенно нежелательно, используют различные "клоны" AIC, где штраф на число параметров увеличен еще больше:

- байесовский информационный критерий:  $BIC = G^2 + 2 \ln(n) k$ ;
- скорректированный критерий:  $AIC_c = AIC + 2k(k+1)/(n-k-1)$ .

В среде R для расчета информационных критериев используются функции  $AIC(\text{fit})$ ,  $BIC(\text{fit})$ , где  $\text{fit}$  – объект соответствующей модели, а также  $\text{extractAIC}()$ , возвращающая дополнительно эквивалентное число степеней свободы.

Все перечисленные выше показатели качества подгонки модели (англ. *goodness of fit*) относятся к *внутренним* критериям, т.е. они оценивают модель с использованием тех же данных, по которым эта модель была построена. Однако минимизация ошибок на обучающем множестве, которое не бывает ни идеальным, ни бесконечно большим, неизбежно приводит к моделям, смещенным относительно истинной функции процесса, порождающего наблюдаемые данные. Преодолеть это смещение можно только с использованием *внешних критериев*.

Само возникновение термина "внешний критерий" обязано аналогии с термином "внешнее дополнение" (Бир, 1963), что в свое время служило косвенным обоснованием предпочтительности их применения. Сейчас стало ясно, что, поскольку теоретически строгого определения обоих этих понятий не существует, представляется несколько неуместной ссылка на теорему Геделя о неполноте (Нагель, Ньюмен, 1970) как аргумент

целесообразности использования "принципа внешнего дополнения". Однако если понимать под использованием внешних критериев процедуру, когда оценки параметров моделей  $\beta$  и суммы квадратов остатков вычисляются на несовпадающих множествах, то окажется, что внешние критерии почти всегда лучше внутренних в смысле эффективности прогноза. Они также являются незаменимыми при выборе оптимального числа параметров моделей, как эффективное средство против их переусложнения (см. приложение к книге [Розенберга и др., 1994](#), написанное Ю.П. Юрачковским).

Прямой путь к объективной оценке ошибки воспроизводимости предсказаний модели – это использовать для проверки (также "валидации", от англ. *validation*) новые, независимые данные из того же источника наблюдений. И если нам нужно выбрать одну модель из числа многих, мы выбираем ту, которая оказалась лучшей при испытании в независимых условиях. Поскольку получить новые порции данных чаще всего возможности не имеется, то будет логичным разделить доступные данные случайным образом на две части – так называемые *обучающую* и *проверочную* выборки. Такой подход является определенной гарантией того, что эти две выборки независимы и одинаково распределены. Наконец, естественным будет сделать эту процедуру многократной.

*Перекрестная проверка* или "*кросс-проверка*" (*cross-validation, CV*) является общей процедурой эмпирического оценивания моделей, построенных по прецедентам. В ходе *многократного случайного* разбиения исходной выборки на обучающую и проверочную оценка параметров модели выполняется только на обучающей выборке, тогда как оценка погрешности прогноза отклика  $\hat{y}_i$  делается для значений из проверочной совокупности. Если исходные выборки независимы, то средняя ошибка перекрестной проверки даёт *несмещённую* оценку ошибки регрессии. Это выгодно отличает её от средней ошибки на обучающей выборке, которая при переусложнении модели может оказаться оптимистично заниженной.

Стандартной считается методика *r*×*k*-кратной кросс-проверки (*r*×*k*-fold cross-validation), когда исходная выборка случайным образом *r* раз разбивается на *k* блоков (англ. *folds*) равной (или почти равной) длины. При реализации каждой повторности *r* (англ. *replication*) один из блоков по очереди становится проверочной последовательностью, а объединение всех остальных блоков – обучающей выборкой. При этом генерируется *r*×*n* значений отклика  $\hat{y}$ , рассчитанных по модели (*n* – общее количество наблюдений), по которым оценивается ошибка кросс-проверки *scv*.

Частным случаем является перекрестная проверка с последовательным исключением одного наблюдения (*leave-one-out CV*), т.е. *k* = *n*. При этом строится *n* моделей регрессии по (*n* – 1) выборочным значениям, а исключенное наблюдение каждый раз используется для расчета ошибки прогноза. Задавать число репликаций *r* здесь смысла уже не имеет. Такая процедура называется *скользящим контролем* ([Вапник с соавт., 1984](#), с. 59-65), хотя в последнее время этот термин стали не вполне точно распространять и на иные формы кросс-проверки (например, на сайте [www.machinelearning.ru](http://www.machinelearning.ru)). Мы в своей книге возвращаемся к первоначальному значению этого понятия.

В среде R кросс-проверка модели может быть выполнена с использованием нескольких функций:

- `cv1m(df, form.lm, m=3)` из пакета DAAG, где *df* – исходная таблица с данными, *form.lm* – формула линейной модели, *m* – число блоков (сюда подставляется значение *k*);

- `cv.glm(df, glmfit, K = n)` из пакета boot, где *df* – исходная таблица с данными, *glmfit* – объект обобщенной линейной модели типа *glm*, *K* – число блоков (т.е. по умолчанию выполняется скользящий контроль);

- `cvLm(lmfit, folds = cvFolds(n, K, R), cost)` из пакета cvTools, где *lmfit* – объект обобщенной линейной модели *lm*, *K* – число блоков, *R* – число репликаций, *cost* – наименование одного из пяти разновидностей выводимых критериев

кросс-проверки; аналогичная функция `cvLmrob()` осуществляет кросс-проверку робастных моделей – см. раздел 7.3.

Тестовыми характеристиками качества моделей, подвергаемых процедуре кросс-проверки, могут быть различные статистики, основанные на средней разности эмпирических и прогнозируемых значений  $y$ , которые, например, в случае скользящего контроля могут иметь вид:

- среднеквадратичная ошибка:  $s_{CV} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$  ;
- среднее абсолютное отклонение:  $d_{CV} = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| / n$  ;
- коэффициент детерминации:  $R_{CV}^2 = 1 - s_{CV}^2 / s_y^2$ , где  $s_y^2$  – оценка дисперсии зависимой переменной.

## 7.5. Полиномиальные и нелинейные модели регрессии

### Полиномиальная регрессия

Поскольку вычислительные аспекты общей линейной модели достаточно просты, естественным является стремление исследователей представить "криволинейные" зависимости (англ. *curvilinear regression*) в рамках линейной регрессии.

Есть два подхода к понятию линейности регрессионной модели: линейность по переменным и линейность по параметрам. Функция  $y = f(x_1, \dots, x_m)$  *линейна по* всем независимым *переменным* лишь тогда, когда любая производная  $df/dx_i$  не включает  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . К счастью, многие нелинейные модели можно представить в форме, линейной по параметрам. *Линейность по параметрам* – это свойство регрессионных моделей, позволяющее рассматривать их как линейные функции с точки зрения оценки параметров (подробнее см. на [ru.wikipedia.org/wiki](http://ru.wikipedia.org/wiki)). Соответствующий процесс преобразования модели называется *линеаризацией*.

Наиболее распространенным способом представить нелинейность отклика линейной моделью является использование полиномов:  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_k x^k$ . Действительно, достаточно заменить  $x^2$  на новую переменную  $z_2$ ,  $x^3$  – на новую переменную  $z_3$  и т.д., – и модель превратится в обычную линейную регрессионную модель, параметры которой можно легко оценить при помощи функции `lm()`.

Рассмотрим в качестве примера анализ зависимости частоты ( $Y$ ) встечаемости аллеля Lar94 в генах мидии *Mytilus edulis* от расстояния места популяции в милях от г. Саундпорт ( $X$ ). Данные используются для построения полиномиальной регрессии в книге (Sokal, Rolf, 1995, p. 667), которая является, пожалуй, одной из лучших монографий по применению статистики в биологии. Повторим выполнение этого анализа в среде R:

```
Y <- c(0.155, 0.15, 0.165, 0.115, 0.11, 0.16, 0.17, 0.355,
       0.43, 0.305, 0.315, 0.46, 0.545, 0.47, 0.45, 0.51, 0.525)
X <- c( 1, 9, 11, 17, 18.5, 25, 36, 40.5,
       42, 44, 45, 51, 54, 55.5, 57, 61, 67)
```

Следуя расчетам Сокала и Рольфа, выполним аппроксимацию данных кубическим полиномом с использованием функции `poly(X, degree = 3..)`. Параметр `raw` принят равным `TRUE`, чтобы получить натуральные значения  $x^k$ , поскольку иначе сформируется ортогональный полином Чебышева:

```
lm.3 <- lm(Y ~ poly(X, 3, raw = TRUE))
summary(lm.3)
```

Coefficients:

```
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      2.010e-01  5.467e-02   3.676  0.00279 **
poly(X, 3, raw = TRUE)1 -1.371e-02  6.760e-03  -2.028  0.06360 .
poly(X, 3, raw = TRUE)2  6.091e-04  2.211e-04   2.755  0.01637 *
poly(X, 3, raw = TRUE)3 -4.922e-06  2.080e-06  -2.366  0.03418 *
---
Residual standard error: 0.0548 on 13 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9061,    Adjusted R-squared:  0.8844
F-statistic:  41.8 on 3 and 13 DF,  p-value:  6.134e-07
```

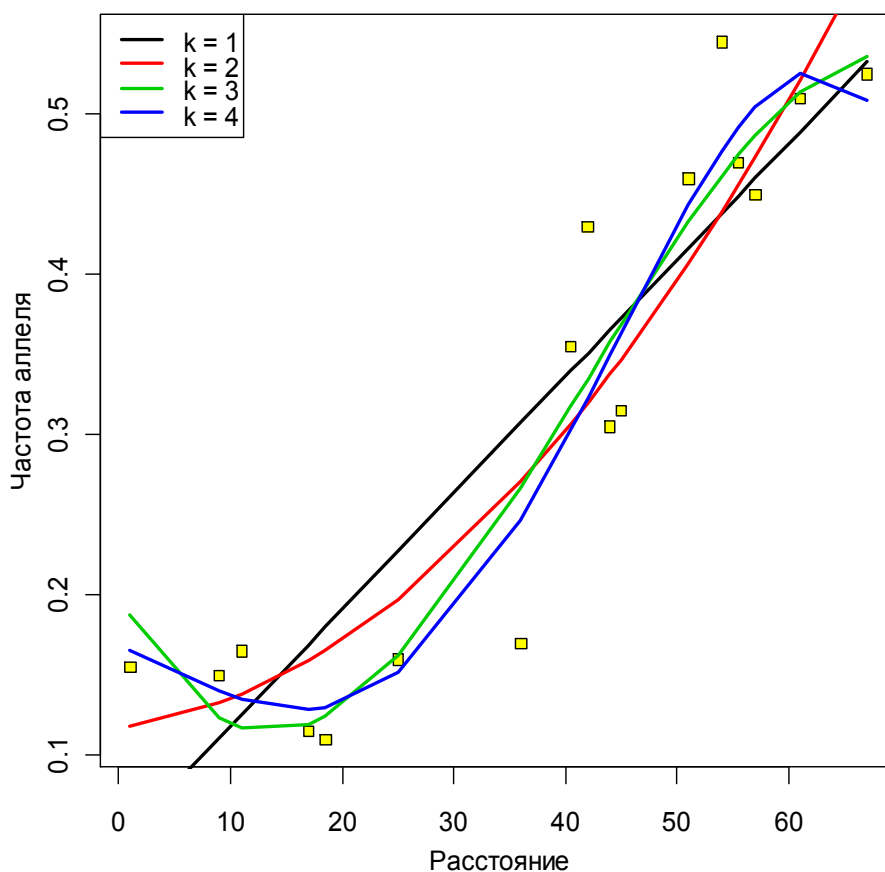
Можно предположить, что полином иной степени (т.е. большей или меньшей 3) будет лучше аппроксимировать данные представленных наблюдений. Рассчитаем комплект критериев качества моделей для значений степени полинома  $k$  от 1 (простая линейная регрессия) до 4 (многочлен 4-й степени):

```
# Создаем список из объектов всех четырех моделей
allModel <- lapply(1:4,function(k) lm(Y~poly(X,k,raw = TRUE)))
extract <- function(fit) {
  sigma <- summary(fit)$sigma # среднеквадратичная ошибка
  R2.adj <- summary(fit)$adj.r.squared # скорректиров. R2
  aic <- AIC(fit) # AIC-критерий
  out <- data.frame(sigma=sigma,R2.adj=R2.adj, AIC=aic)
return(out) }
result <- lapply(allModel, extract) # Список результатов
# Преобразуем список результатов в таблицу
result <- as.data.frame(matrix(unlist(result),nrow=4,byrow=T))
colnames(result) <- c("M.sigma", "M.R2adj", "M.AIC")
# Вычисление среднеквадратичной ошибки кросс-проверки
M.ErCV <- sapply(1:4,function(k) {
  n <- length(X) ; Err_S <- 0
  for(i in 1:n) { Xcv <- X[-i]
    lm.temp <- lm( Y[-i] ~ poly(Xcv, k , raw = TRUE))
    YR <- predict(lm.temp, newdata=data.frame(Xcv=X))[i]
    Err_S <- Err_S + (Y[i] - YR)^2 }
  sqrt(Err_S/n) })
cbind(result, M.ErCV)
      M.sigma  M.R2adj  M.AIC  M.ErCV
1 0.06955197 0.8137430 -38.51702 0.07418150
2 0.06315947 0.8464073 -40.96789 0.07202873
3 0.05479741 0.8843851 -45.05640 0.06904193
4 0.05406893 0.8874387 -44.87215 0.07535719
```

Видно, что стандартное отклонение для остатков  $M.\sigma$  и приведенный коэффициент детерминации  $M.R2adj$  изменяются монотонно (т.е. убывают и возрастают соответственно), тогда как информационный критерий  $M.AIC$  и стандартная ошибка кросс-проверки  $M.ErCV$  достигают минимума при  $k = 3$ .

```
plot(X, Y, type="p",pch = 22, bg="yellow",
      xlab = "Расстояние", ylab = "Частота аллеля")
sapply(1:4,function(k) points(X,predict(lm(Y~poly(X, k,
raw = TRUE))),type="l", col=k, lwd=2 ))
legend ("topleft", c("k = 1", "k = 2","k = 3","k = 4"),
       col = 1:4, lwd = 2)
```





Внимательный читатель заметит, что полученные нами результаты несколько отличаются от представленных в книге (Sokal, Rolf, 1995). Дело в том, что мы не стали предварительно выполнять угловое преобразование Фишера для долей  $\varphi = 2 \arcsin(\sqrt{p})$ , поскольку ряд авторитетных современных специалистов в области статистики относятся к нему резко негативно: «При малых объемах выборок и малых значениях долей его применение приводит к ложной чувствительности (мощности) соответствующих критериев и ложным выводам о значимости различий, которых в реальности нет» (Хромов-Борисов с соавт., 2004, с. 65). Впрочем, отличия незначительны, особенно при графической интерпретации кривых.

### Нелинейная регрессия

В ряде случаев приведение нелинейной функции к линейной форме (т.е. линеаризация) невозможна и тогда подгонка значений коэффициентов модели следует выполнять стандартными методами нелинейного программирования – методом Ньютона-Рафсона, симплекс-методом Нелдера-Мидда и проч. Для этого в среде R чаще всего используется функция `nls(...)`. Приведем два характерных примера.

Ставится задача оценить чувствительность водных беспозвоночных к уровню минерализации воды на примере речных экосистем Приэльтонья. Область варьирования фактора солености  $S$  разбивается на последовательность подинтервалов, а в качестве значений отклика  $y$  подсчитывается доля  $P_k$  проб из  $k$ -го диапазона  $x$ , в которых встретился тот или иной анализируемый вид.

Будем использовать логистическую модель нелинейной регрессии, основанную на сигмоидальной функции  $P = \theta_1 / \{1 + e^{-(\theta_2 + \theta_3 S)}\}$ , которая зависит от трех параметров  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  и графически выглядит как симметричная S-образная кривая. Эта модель основана на предположении, что скорость изменения отклика  $dy/dx$  имеет нелинейный характер и достигает своего максимума в точке перегиба кривой. Параметр  $\theta_1$  определяет

расстояние между верхней и нижней асимптотами, а константы  $\theta_2$  и  $\theta_3$  регулируют соответственно наклон и изгиб моделируемой кривой.

Выполним подгонку параметров модели для вида *Tanytarsus kharaensis*:

```
library(car)
S1 <- c(3, 7.5, 12.5, 17.5, 22.5, 27.5)
p1 <- c(50, 23, 45, 25, 2, 9)
log.ss1 <- nls(p1 ~ SSlogis(S1, phi1, phi2, phi3))
summary(log.ss1)
Formula: p1 ~ SSlogis(S1, phi1, phi2, phi3)
Parameters:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
phi1  39.3387     7.5842   5.187  0.0139 *
phi2  17.9981     4.7656   3.777  0.0325 *
phi3  -0.8797     8.2858  -0.106  0.9221
---
Residual standard error: 12.88 on 3 degrees of freedom
Number of iterations to convergence: 1
Achieved convergence tolerance: 9.036e-06
```

Протокол вывода результатов работы функции `nls()` в части оценок параметров аналогичен функции `lm()`. Исходя из полученных результатов модель можно записать в следующем виде:

$$P = 39.3 / \{1 + \exp(0.88S - 18)\}.$$

"Ложкой дегтя" здесь является статистическая незначимость оценки коэффициента  $\theta_3$  модели, что определяется малым числом точек при выбранном способе представления данных (при рассмотрении обобщенных линейных моделей в разделе 8.3 мы покажем, как те же выборочные наблюдения можно использовать существенно эффективнее).

Рассчитаем коэффициент детерминации  $R^2$  и доверительные интервалы нелинейной модели регрессии методом аппроксимации (пример заимствован с сайта [thebiobucket.blogspot.ru](http://thebiobucket.blogspot.ru)):

```
Rsquared <- 1 - var(residuals(log.ss1))/var(p1)
# Рассчитанные по модели значения отклика
x <- 0:max(S1)
pr1 = predict(log.ss1, data.frame(S1=x))
## заметим, что независимая переменная в SSlogis имеет имя "S1",
## и поэтому мы изменяем имя столбца в таблице предикторных значений
### вычисляем ошибку регрессии линейной аппроксимацией
se.fit <- sqrt(apply(attr(pr1, "gradient"), 1,
      function(mat) sum(vcov(log.ss1)*outer(mat, mat))))
PCI <- pr1 + outer(se.fit, qnorm(c(.5, .025, .975)))
```

Ошибка регрессии в области перегиба кривой также чрезвычайно высока, но в данном случае нам важнее методическая составляющая примера.

Любой биологический вид в зависимости от уровня воздействующего фактора может находиться в трех фазах: благоприятного режима, переходного состояния и угнетения. Поэтому после оценки параметров  $\theta$  регрессионной модели выделим три критические точки пределов экологической толерантности, т.е. расчетные величины солёности при некоторых значениях  $\pi\theta_1$ . Пусть минерализация в точках, где  $\pi = 0.05$  и  $\pi = 0.95$ , соответствует минимальной и максимальной статистическим границам встречаемости ([Rutherford, Kefford, 2005](#)), а при  $\pi = 0.5$  – пороговой величине солёности,

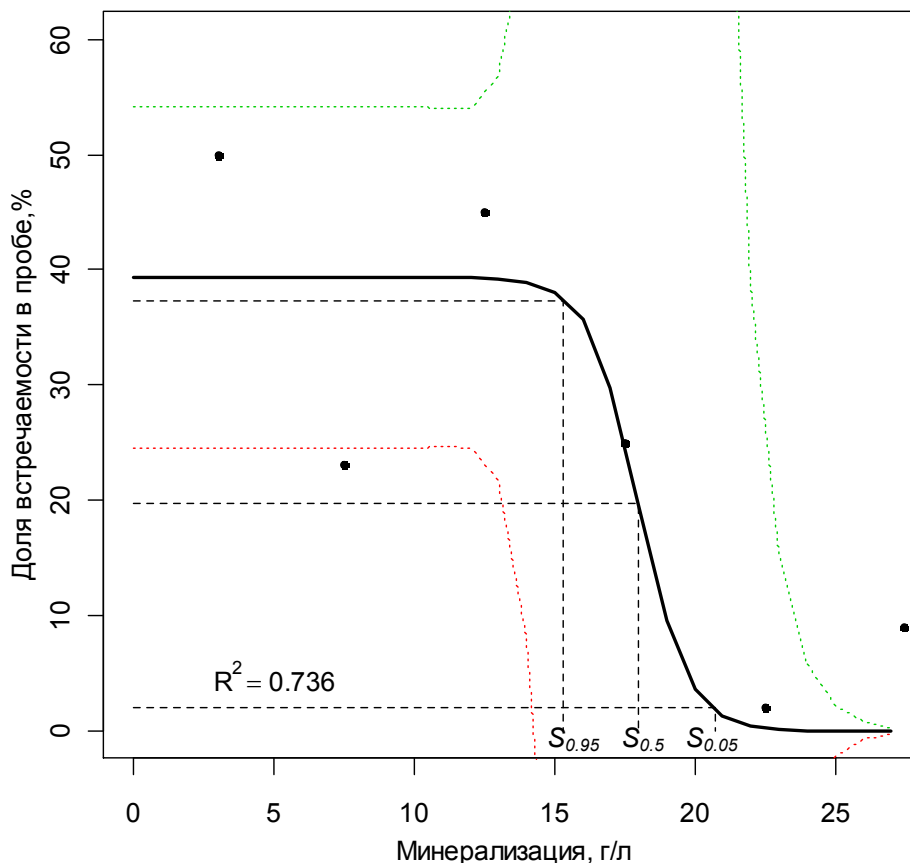
за которой наступает резкое снижение популяционной устойчивости. Попробуем рассчитать эти критические точки в R:

```
# Критические точки отклика
a <- coef(log.ss1)[1]*c(0.05, 0.5, 0.95)
[1] 1.966937 19.669366 37.371795
# Критические точки солености
plx<-approx(pr1, x, xout = a)$y
[1] 20.70461 17.99787 15.29205
```

Обратите внимание на функцию `approx()`, выполняющую линейную аппроксимацию произвольных таблиц, которую мы использовали, чтобы найти значение независимой переменной по заданной величине отклика.

Отобразим все вычисленные компоненты на графике:

```
matplot(x, PCI,type="l", xlab = "Минерализация, г/л",
ylab = "Доля встречаемости в пробе,%",
lty=c(1,3,3),lwd=c(2,1,1), ylim=c(0,60))
matpoints(S1,p1,pch=20)
text(5,5,bquote(R^2==. (round(Rsquared, 3))))
sapply(1:3, function(i)
  lines(c(0, plx[i],plx[i]) ,c(a[i],a[i],0), lty=2))
```



На приведенном графике видно, что исследуемый вид имеет отчетливо выраженное пороговое значение солености  $S_{0.5} = \theta_2 = 18$  г/л и достаточно узкий диапазон от  $S_{0.95} = 15.3$  г/л до  $S_{0.05} = 20.7$  г/л переходной фазы снижения толерантности, разделяющий зону максимальной встречаемости (слева) и фазу "угнетенного состояния" (справа).



Рассмотрим второй пример, иллюстрирующий одно статистическое заблуждение, характерное для продукционной гидробиологии второй половины XX-го века и частично заскочившее в XXI век ([Зотин, Зотин, 1999](#), с. 85-88).

Пусть, например, исследователь из некоторых теоретических соображений желает оценить параметры модели, описывающей степенную зависимость следующего вида

$$Y_i = a \cdot X_i^k + \varepsilon_i \quad (1)$$

Поскольку оценить параметры нелинейной модели трудно, то А.А.Умновым (Журн. общ. биол. 1976. Т. 37. № 1. С. 71-86) предлагается выполнить логарифмирование данных, применить МНК и рассчитать коэффициенты линейной в логарифмах зависимости

$$\lg Y_i = \lg a + k \lg X_i + \varepsilon_i \quad (2)$$

Являются ли уравнения (1) и (2) математически идентичными и можно ли коэффициенты уравнения (2) использовать для описания степенной зависимости (1)? Ответ на этот вопрос найдем, проанализировав пример из статьи А.А. Умнова (1976), посвященный моделированию потребления кислорода ( $Q$ , мм<sup>3</sup> O<sub>2</sub>/час экз) в зависимости от массы тела пескожила *Arenicola marina* ( $W$ , г). Построим сначала модель степенной регрессии:

```
W <- c(2.37, 2.82, 3.12, 3.21, 3.22, 3.24, 3.38, 3.6, 4, 4.65, 4.91, 4.93,
      5.72, 5.95, 7.65, 8.26, 8.5, 10.62, 14.6, 18.76)
Q <- c(105.33, 192.63, 177.13, 221.84, 95.9, 107, 202.5, 105.4, 182.38,
      198.2, 167.45, 195, 108.8, 233.13, 190.17, 254.35, 191.88,
      416.87, 472.75, 538.34)
m.ppo <- nls(Q ~ a*W^k, start = list(a=55, k=0.8))
summary(m.ppo)
Formula: Q ~ a * W^k
Parameters:
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
a 53.36171   10.59057    5.039 8.54e-05 ***
k  0.78470    0.08612    9.112 3.66e-08 ***
---
Residual standard error: 56.24 on 18 degrees of freedom
Number of iterations to convergence: 4
Achieved convergence tolerance: 1.858e-06
```

Теперь найдем коэффициенты линейной модели после логарифмирования переменных:

```
m.lpo <- lm(log(Q) ~ I(log(W)))
summary(m.lpo)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    4.1550     0.2151  19.320 1.75e-13 ***
I(log(W))      0.6725     0.1237   5.437 3.64e-05 ***
---
Residual standard error: 0.308 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6216, Adjusted R-squared: 0.6006
F-statistic: 29.57 on 1 and 18 DF, p-value: 3.638e-05
exp(coef(m.lpo)[1])
(Intercept)
 63.74962
```

Многие биологи полагают, что величина коэффициента  $k = 0.75$  одинакова для всех животных от простейших до млекопитающих и называют ее универсальной константой Хеммингсена (Hemmingesen, 1970). Как видим, коэффициенты обеих моделей существенно отличаются:

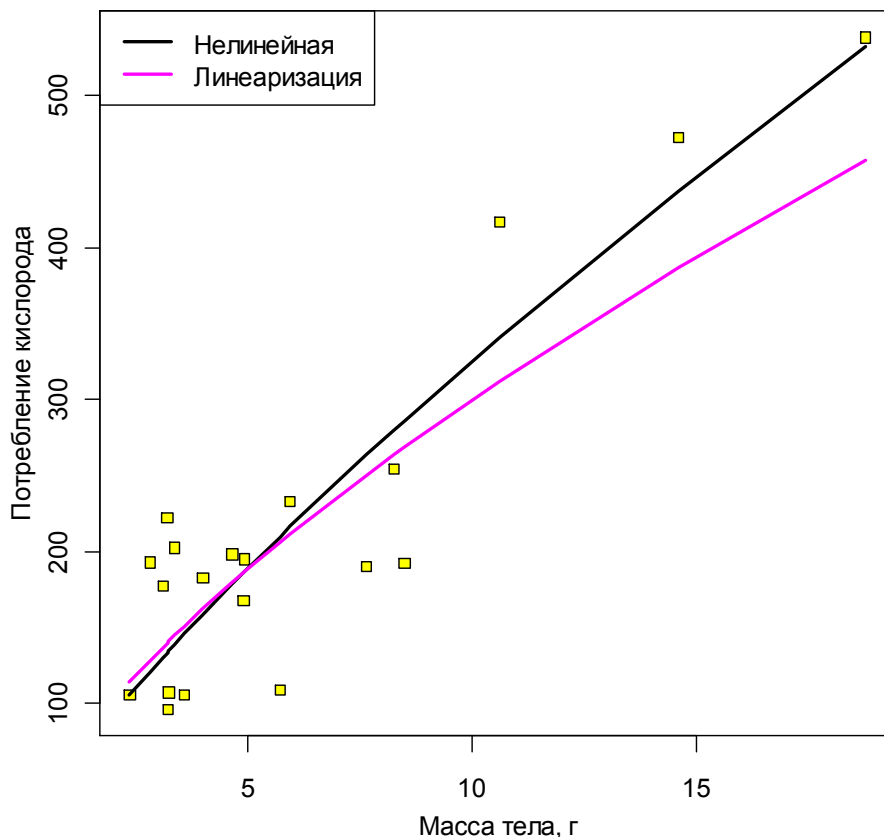
$$Q = 53.36W^{0.785} \quad \text{– нелинейная модель (1);}$$

$$Q = 63.75W^{0.672} \quad \text{– нелинейная модель, полученная в результате линеаризации (2).}$$

Почему так произошло? Согласно известным положениям регрессионного анализа (Дрейпер, Смит, 1973) нелинейная функция может быть приведена к линейной форме только в том случае, если ошибка обоих уравнений регрессии остается аддитивной, то есть зависимая переменная должна оставаться суммой своего математического ожидания и ошибки. Однако при обратном преобразовании логлинейного уравнения (2) в уравнение (1) будет иметь место мультипликативное вхождение ошибок  $\varepsilon_i$  в нелинейное уравнение отклика:  $Y_i = a \cdot X_i^k \cdot \varepsilon_i$ , что далеко не идентично стандартной регрессионной модели с аддитивными ошибками  $Y_i = a \cdot X_i^k + \varepsilon_i$ . Иными словами, выражения (1) и (2) представляют собой два принципиально разных уравнения регрессии, поэтому использование для модели  $Y = a \cdot X^k$  МНК-оценок ( $a$ ,  $k$ ) из уравнения  $\lg Y_i = \lg a + k \lg X_i + \varepsilon_i$  неизбежно приведет к заведомо искаженным результатам.

Это обстоятельство легко просматривается на следующем графике:

```
plot(W, Q, type="p", pch = 22, bg="yellow",
      xlab = "Масса тела, г", ylab = "Потребление кислорода")
lines(W, predict(m.ppo), lwd=2)
lines(W, exp(predict(m.lpo)), col=6, lwd=2)
legend("topleft", c("Нелинейная", "Линеаризация"),
       col = c(1,6), lwd = 2)
```



Очевидно, что модель, построенная с использованием линеаризации, некорректно оценивает остатки при большой массе тела. В частности, стандартное отклонение для остатков у линейной модели с логарифмированными переменными существенно больше ошибки "правильной" нелинейной модели ( $RSE = 56.24$ ):

```
sqrt (sum ( (Q - exp (predict (m.lpo))) ^2) / (n-2) )
[1] 60.85349
```

В многочисленных публикациях последних десятилетий в области продукции водоемов приводятся таблицы значений коэффициентов  $a$  и  $k$  для подсчета удельных энергозатрат на обмен для различных групп организмов, однако к этим результатам следует относиться весьма критично, поскольку за давностью лет осталось непонятным, для каких моделей они были рассчитаны (1) или (2).

## 7.6. Модель множественной регрессии и выбор ее спецификации

Естественным обобщением парной регрессии (см. раздел 7.3) является множественная регрессионная модель (*multiple regression model*), рассматривающая влияние нескольких ( $m > 1$ ) предикторов на зависимую переменную  $Y$ :

$$E[Y|x_1, x_2, \dots, x_m] = f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

где  $f(\dots)$  – произвольная функция  $m$  переменных.

Первым естественным приближением функции  $f(\dots)$  является линейная зависимость (если, конечно, характер наблюдаемых данных не противоречит этому), что приводит к модели следующего вида:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_m X_m + \varepsilon$$

Каждый коэффициент регрессии  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , численно отражает степень влияния предиктора  $X_j$  на условное математическое ожидание  $E(Y|x_1, x_2, \dots, x_m)$  отклика  $Y$ , если мысленно принять, что все остальные объясняющие переменные модели остаются постоянными.

Классическая (т.е. отвечающая условиям теоремы [Гаусса-Маркова](#)) модель множественной регрессии является частным случаем общей линейной модели – см. раздел 6.2, посвященный дисперсионному анализу. В связи с этим, относительно случайных ошибок  $\varepsilon$  (или остатков) делаются те же предположения, что были сделаны нами для простой регрессии (раздел 7.2):

- статистическая независимость наблюдений;
- гомоскедастичность  $E[\varepsilon^2] = \sigma^2$ , некоррелированность, несмещенность центра положения  $E[\varepsilon] = 0$  и совместное нормальное распределение остатков  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ .

Как и в случае парной регрессии, анализ начинается с расчета величин  $b_j$ , являющихся выборочными оценками коэффициентов модели  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Далее выполняется проверка статистических гипотез, позволяющая сделать вывод о надежности найденных точечных оценок коэффициентов, интерпретируемости найденного эмпирического уравнения регрессии и степени его соответствия результатам наблюдений.

Для проверки гипотезы  $H_0: b_j = \beta_j$  используется, как правило, статистика:  $t = (b_j - \beta_j) / S_{b_j}$ , где  $S_{b_j}$  – ошибка коэффициента регрессии, равная стандартному отклонению случайной величины  $b_j$ . Поскольку  $t$  при справедливости  $H_0$  имеет

распределение Стьюдента, нетрудно найти соответствующее ему  $p$ -значение. Наряду с проверкой статистической значимости, выполняется оценка доверительных интервалов  $\beta_j$ .

Пусть  $\hat{\varepsilon} = (y_i - \hat{y}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  – отклонения выборочных величин  $y_i$  зависимой переменной от значений  $\hat{y}_i$ , получаемых по уравнению регрессии. Тогда для оценки качества полученной модели используются те же критерии, что были описаны ранее, с той лишь разницей, что сейчас при их расчете учитывается число предикторов:

- стандартное отклонение для остатков  $RSE = \sqrt{(\sum \hat{\varepsilon}_i^2)/(n - m - 1)}$ ,
- коэффициент детерминации  $R^2 = 1 - \sum \hat{\varepsilon}_i^2 / \sum (y_i - \bar{y})^2$ ;
- скорректированный коэффициент детерминации  $R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1}$ , который налагает "штраф" на добавление новых параметров в регрессионную модель;
- $F$ -статистика  $F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}$ ,  $p$ -значение для оценки статистической значимости которого получают с использованием распределения Фишера;
- информационный критерий Акаике  $AIC = n \ln(\sum \hat{\varepsilon}_i^2 / n) + 2m$  и некоторые его разновидности – байесовский информационный критерий (BIC), критерий Шварца и др. (см. разд. 7.4).

В разделе 6.1 были рассмотрены основные пункты протокола разведочного анализа данных. Многие из этих статистических процедур обеспечивают построение хорошо интерпретируемых моделей:

- анализ мультиколлинеарности (или взаимосвязи) независимых переменных;
- отбор информативных факторов многомерной функции регрессии;
- регрессионная диагностика и оценка статистической значимости параметров;
- анализ степени нелинейной связи между переменными.

Рассмотрим пример с изучением потребности в сне у животных, использованный ранее в разделах 4.4 (таблица данных с заполненными пропусками была сохранена нами для дальнейшего использования) и 6.1. Там была проанализирована корреляционная матрица между наблюдаемыми признаками и показана высокая мультиколлинеарность предикторов, оцененная на основе значений фактора инфляции дисперсии  $VIF$ . Чем сильнее мультиколлинеарность предикторов, тем менее надежной является оценка распределения суммы объясненной вариации по отдельным предикторам с помощью метода наименьших квадратов.

### Полная модель и обоснование необходимости ее оптимизации

Рассчитаем выборочные коэффициенты регрессионной модели, содержащей все имеющиеся предикторы:

```
load(file="sleep_imp.Rdata")
M <- lm(Sleep~BodyWgt+BrainWgt+Span+Gest+Pred+Exp+Danger,
        data=sleep_imp3)

summary(M)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 15.717666   1.147964  13.692 < 2e-16 ***
BodyWgt     -0.002149   0.001644  -1.307  0.19665
BrainWgt     0.002105   0.001802   1.169  0.24768
Span        -0.073393   0.038519  -1.905  0.06206 .
Gest        -0.004159   0.005916  -0.703  0.48507
Pred         2.539990   0.815866   3.113  0.00296 **
```

Exp	0.232926	0.581090	0.401	0.69012
Danger	-4.269622	1.046721	-4.079	0.00015 ***

---

Residual standard error: 3.283 on 54 degrees of freedom  
Multiple R-squared: 0.5707, Adjusted R-squared: 0.515  
F-statistic: 10.25 on 7 and 54 DF, p-value: 4.272e-08

**AIC (M)**  
[1] 332.7936

В нашем случае мультиколлинеарность приводит к тому, что оценки большинства коэффициентов полной линейной модели регрессии оказываются статистически незначимыми по  $t$ -критерию, хотя  $F$ -критерий свидетельствует о значимости всей модели в целом. Считается, что наиболее эффективный путь устранения мультиколлинеарности – исключение из регрессионной модели незначимых коэффициентов, или, выражаясь точнее, отбор *информативного комплекса* из  $q$  переменных ( $q < m$ ).

Причины, по которым стоит проводить селекцию "лучшего подмножества" предикторов, Дж. Фаравэй (Faraway, 2006) видит в следующем:

1. Принцип бритвы Оккама утверждает, что из нескольких вероятных объяснений явления лучшим является самое простое. Компактная модель, из которой удалены избыточные предикторы, лучше объясняет имеющиеся данные.

2. Ненужные предикторы добавляют шум к оценке других факторов, которыми мы интересуемся. Иначе (часто ограниченные) степени свободы будут тратиться впустую.

3. При наличии коллинеарности некоторые переменные будут "пытаться сделать одну и ту же работу" (т.е., объяснить вариацию значений зависимой переменной).

4. Если модель используется для прогнозирования, то можно сэкономить время и/или деньги, не измеряя избыточные переменные.

Модель с настроенными параметрами, основанная на  $q$  предикторах из  $m$ , которые обеспечивают минимум некоторого критерия качества  $L(\beta, x, q)$ , называется *моделью оптимальной структуры*. Поскольку глобальной оптимум такого показателя при больших  $m$  достичь невозможно, представляется разумным получить в результате расчета для последующего содержательного анализа некоторый набор субоптимальных моделей-претендентов.

Как отмечалось ранее (см. раздел 7.4), использование в качестве критериев качества регрессионных моделей коэффициента детерминации  $R^2$ ,  $F$ -критерия и других статистик, основанных на стандартном отклонении остатков  $RSE$ , не вполне корректно. Поиск наилучшей модели множественной регрессии на их основе является, как правило, "жадным" процессом, т.е. предпочтение будет всегда отдаваться модели с наибольшим числом параметров:  $q \rightarrow m$ . Более взвешенный подход реализуется с использованием информационных критериев (например, AIC), налагающих "штраф" на добавление новых параметров.

Таким образом, когда говорят об оптимальных моделях регрессии, то имеют в виду одну или несколько компактных моделей, обеспечивающих субэкстремальные значения выбранного критерия качества (т.е. минимум AIC или максимум  $R_{adj}^2$ ). Существует целый арсенал методов, реализующих процедуры выбора моделей с оптимальной структурой:

- последовательные, или пошаговые методы;
- полный перебор всех возможных сочетаний предикторов;
- использование специальных методов оценивания коэффициентов, когда увеличение числа параметров модели сопровождается наложением «штрафа» на критерий ее качества (гребневая регрессия, алгоритм Лассо, метод наименьших углов);
- алгоритмы эволюционного поиска: метод модельной закалки (англ. *simulated annealing*), генетический алгоритм (*genetic algorithm*), случайный поиск с адаптацией (СПА – см. книгу Г.С. Лбова, 1981 на сайте [math.nsc.ru](http://math.nsc.ru)) и др.

### Пошаговые алгоритмы селекции переменных

Шаговый регрессионный анализ (Дрейпер, Смит, 1987) представлен процедурами трех типов:

- "пошаговое включение" (англ. *stepwise forward selection*) – на первом шаге из всех  $m$  предикторов выбирается наилучший по заданному критерию; на втором шаге выбирается предиктор, который дает оптимальное решение в сочетании с первым предиктором, и т.д. Алгоритм останавливается, когда критерий достигает экстремума и в модель включены  $q$  переменных;

- "пошаговое исключение" (*stepwise backward selection*) – на первом шаге перебираются все комбинации из  $m$  переменных и исключается наименее информативный признак с точки зрения заданного критерия; эти шаги повторяются, пока критерий не достигнет экстремума или не будут выполнены какие-то иные условия расчета;

- комбинированный алгоритм, в котором этапы включения и исключения предикторов сменяют друга.

Выполним выбор оптимальной модели по критерию Акайке, используя комбинированный подход:

```
Mstep <- step(M, direction="both")
summary(Mstep)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 15.54848     1.09002  14.264 < 2e-16 ***
Span        -0.06371     0.02571  -2.478  0.01613 *
Pred         2.54554     0.77185   3.298  0.00167 **
Danger      -4.22022     0.78506  -5.376 1.42e-06 ***
---
Residual standard error: 3.245 on 58 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5494,    Adjusted R-squared:  0.5261
F-statistic: 23.57 on 3 and 58 DF,  p-value: 4.21e-10
AIC(Mstep)
[1] 327.7868
```

К такой же модели можно было придти "вручную", отбрасывая из полной модели  $M$  поочередно предикторы с наибольшими  $p$ -значениями. Отметим, что, наряду с уменьшением AIC-критерия, значение  $R_{adj}^2$  также возросло, несмотря на рост ошибки модели  $RSE$ .

Некоторые специалисты утверждают ([Blanchet et al., 2008](#)), что стандартный метод пошагового включения переменных в модель недостаточно эффективен, поскольку переоценивает долю объясненной дисперсии и приводит к повышенному риску ошибки I рода. Один из вариантов решения этих проблем реализован в функции `forward.sel()` пакета `packfor` (англ. *forward selection with permutation*; Legendre P., Legendre L., 2012). Используемый в ней метод селекции последовательно включает в модель предиктор, имеющий наибольший частный коэффициент корреляции Пирсона с откликом  $r_{yx}$ . Чтобы предотвратить "перенасыщение" модели, включение новой переменной выполняется, если: а) статистическая значимость  $r_{yx}$  по рандомизационному (*permutation*) тесту находится на заданном уровне  $\alpha$ , или б)  $r_{yx}$  превышает заданный порог.

```
library(packfor)
forward.sel(sleep_imp3$Sleep, sleep_imp3[, -1], alpha = 0.2)
Procedure stopped (alpha criteria):
  pvalue for variable 5 is 0.286000 (superior to 0.200000)
  variables order      R2      R2Cum  AdjR2Cum      F  pval
```

1	Exp	6	0.38759370	0.3875937	0.3773869	37.974172	0.001
2	Span	3	0.03672481	0.4243185	0.4048039	3.763824	0.047
3	Danger	7	0.05144769	0.4757662	0.4486507	5.692052	0.028
4	Pred	5	0.07455370	0.5503199	0.5187634	9.450187	0.004

В результате была отобрана модель из 4-х переменных, три из которых (Exp, Pred и Danger) представляют собой сильно коррелирующие переменные (см. раздел 6.1).

### Построение "всех возможных моделей"

Действительно ли мы нашли оптимальную модель, выполнив описанный выше анализ? Для сравнения рассмотрим алгоритм перебора всех возможных предикторов, который вполне реализуем при числе переменных менее 8. Подходящая функция, найденная в [Интернете](#), не слишком хороша, поскольку требует перестройки исходной таблицы и фиксированного списка имен переменных ( $y$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  и т.д.). Однако она предоставляет читателям простор для самостоятельного творчества и содержит многие полезные для обучения фрагменты кода:

```
all.possible.regressions <- function(dat, k){
  n <- nrow(dat)
  regressors <- paste("x", 1:k, sep="")
  lst <- rep(list(c(T, F)), k)
  regMat <- expand.grid(lst);
  names(regMat) <- regressors
  formular <- apply(regMat, 1, function(x)
    as.character(paste(c("y ~ 1", regressors[x]), collapse="+")))
  allModelsList <- apply(regMat, 1, function(x)
    as.formula(paste(c("y ~ 1", regressors[x]), collapse=" + ") )
  allModelsResults <- lapply(allModelsList,
    function(x, data) lm(x, data=data), data=dat)
  n.models <- length(allModelsResults)
  extract <- function(fit) {
    df.sse <- fit$df.residual
    p <- n - df.sse - 1
    sigma <- summary(fit)$sigma
    MSE <- sigma^2
    R2 <- summary(fit)$r.squared
    R2.adj <- summary(fit)$adj.r.squared
    aic <- AIC(fit)
    sse <- MSE*df.sse
    bic <- n*log(sse) + log(n)*(p+2)
    out <- data.frame(df.sse=df.sse, p=p, SSE=sse, MSE=MSE,
      R2=R2, R2.adj=R2.adj, AIC=aic, BIC=bic)
    return(out)
  }
  result <- lapply(allModelsResults, extract)
  result <- as.data.frame(matrix(unlist(result), nrow=n.models, byrow=T))
  result <- cbind(formular, result)
  rownames(result) <- NULL
  colnames(result) <- c("model", "df", "p", "SSE", "MSE", "R2",
    "R2.adj", "AIC", "BIC")
  return(result)
}
```

Перестраиваем таблицу и переименовываем столбцы с исходными переменными:

```
ind.yx <- c(5, 1:2, 6:10);
names.xy <- c("y", paste("x", 1:7, sep=""))
yx <- sleep_imp3[,ind.yx]
data.frame(Old=colnames(yx), New=names.xy, Index=ind.yx)
```



```

      Old New Index
1     Sleep   y     5
2   BodyWgt  x1     1
3 BrainWgt  x2     2
4     Span   x3     6
5     Gest   x4     7
6     Pred   x5     8
7     Exp    x6     9
8   Danger   x7    10
colnames(yx) <- names.yx

```

Получаем список из всех возможных моделей, которых насчитывается 128:

```

all.mod <- all.possible.regressions(dat=yx, k=7)
write.table(all.mod,"clipboard",sep="\t") # Вывод в буфер обмена
head(all.mod[order(all.mod$AIC),], 10)

```

	model	df	p	SSE	MSE	R2	R2.adj	AIC	BIC
	y ~ 1+x3+x5+x7	58	3	610.8497	10.53189	0.5494240	0.5261183	327.7868	418.3564
	y ~ 1+x1+x3+x5+x7	57	4	598.3928	10.49812	0.5586124	0.5276379	328.5094	421.2061
	y ~ 1+x3+x4+x5+x7	57	4	600.5966	10.53678	0.5569869	0.5258982	328.7373	421.4341
	y ~ 1+x4+x5+x7	58	3	622.9865	10.74115	0.5404716	0.5167029	329.0066	419.5762
	y ~ 1+x2+x3+x5+x7	57	4	605.4408	10.62177	0.5534137	0.5220743	329.2354	421.9321
	y ~ 1+x1+x2+x3+x5+x7	56	5	587.6900	10.49446	0.5665071	0.5278023	329.3904	424.2143
	y ~ 1+x3+x5+x6+x7	57	4	609.6351	10.69535	0.5503199	0.5187634	329.6634	422.3602
	y ~ 1+x1+x3+x4+x5+x7	56	5	596.8407	10.65787	0.5597573	0.5204499	330.3484	425.1723
	y ~ 1+x1+x3+x5+x6+x7	56	5	598.3770	10.68530	0.5586241	0.5192155	330.5078	425.3316
	y ~ 1+x2+x3+x4+x5+x7	56	5	600.5008	10.72323	0.5570575	0.5175091	330.7274	425.5513

Отметим, что комбинированный метод последовательных шагов включения с исключениями предикторов позволил нам выбрать оптимальную модель (согласно AIC-критерию) при имеющемся наборе предикторов. Характеристики модели, полученной с использованием функции `forward.sel()` представлены в седьмой строке приведенного списка. Однако, если использовать для сортировки моделей коэффициент детерминации  $R_{adj}^2$ , то список из 10 топ-моделей выглядел бы несколько иным образом.

Полный перебор всех возможных комбинаций предикторов можно также осуществить с использованием функции `regsubsets()` из пакета `leaps`:

```

library(leaps)
leaps <- regsubsets(Sleep~BodyWgt+BrainWgt+Span+Gest+Pred+Exp+Danger,
                    data=sleep_imp3, nbest=7)
summary(leaps)

```

Если число переменных велико, то функция реализует различные алгоритмы последовательного перебора для формирования вариантов подмножеств предикторов.

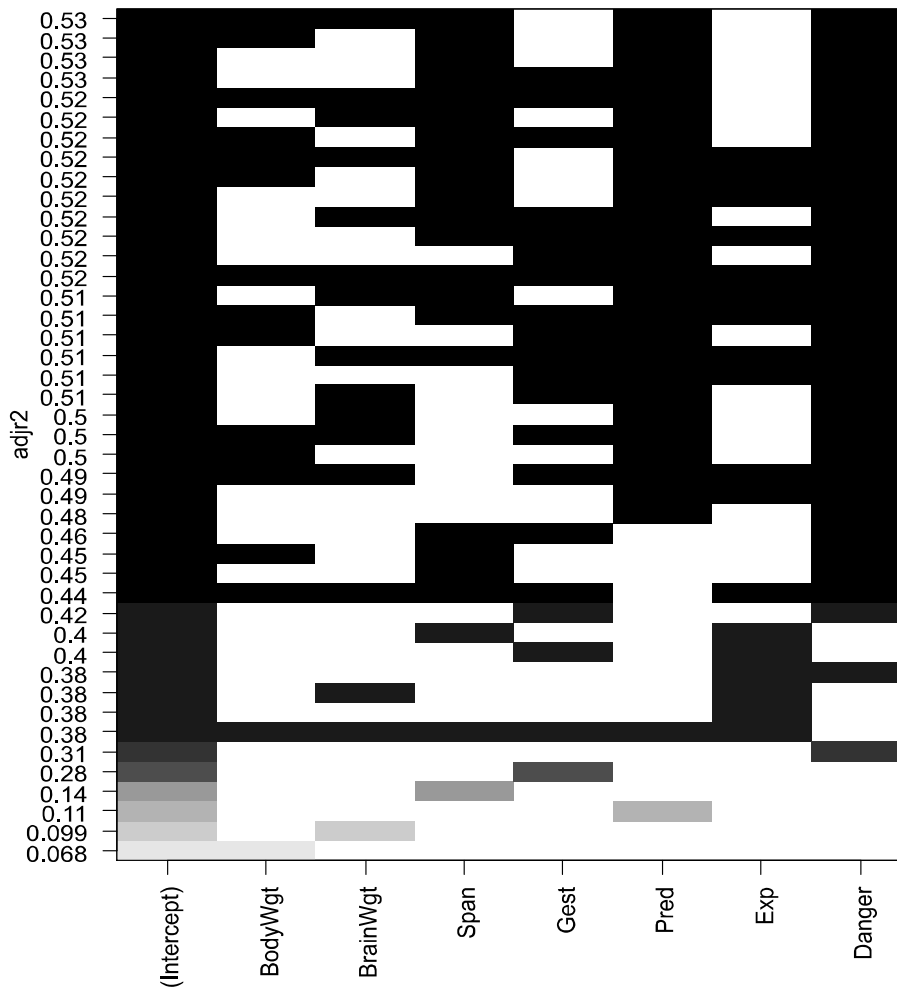
Далее мы можем показать на графике таблицу сгенерированных моделей, отобразив степень участия в них каждого предиктора, отсортированную по интересующему исследователя критерию – параметр `scale=c("bic", "Cp", "adjr2", "r2")`:

```

plot(leaps, scale="adjr2")

```





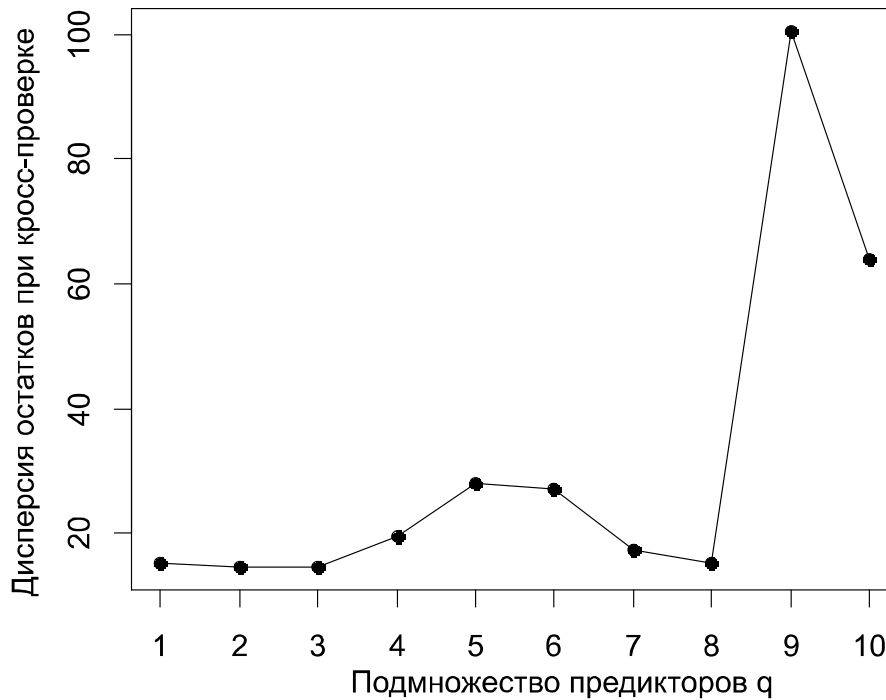
### Пошаговое включение предикторов в сочетании с перекрестной проверкой

Как было отмечено ранее (разд. 7.4), выбор оптимальной модели может быть основан на использовании внешних критериев качества, оцениваемых в результате кросс-проверки. Ничто не запрещает нам использовать подобные критерии и при реализации алгоритмов пошагового включения и/или исключения предикторов. Один из таких подходов ("*forward selection*"), представлен в пакете `FWDselect` (Miller, 1990), который основан на скользящем контроле ("*leave-one-out CV*"), т.е. строится  $n$  регрессионных моделей по  $(n - 1)$  выборочным значениям, а исключенное наблюдение каждый раз

используется для расчета ошибки предсказания  $s_{CV} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$

Алгоритм осуществляет перебор всех уровней сложности модели  $\{k = 1, 2, \dots\}$  и для каждого уровня находит модель, оптимальную с точки зрения критериев  $s_{CV}$  или  $R^2_{CV}$ . Примем глубину перебора  $k$  до семи переменных и построим график зависимости ошибки  $s_{CV}$  от  $k$ :

```
# Алгоритм "Forward selection" с использованием кросс-проверки
library(FWDselect)
qob = qselection(x=sleep_imp3[,-1],y=sleep_imp3[,1],
  qvector=c(1:7),method="lm",criterion="variance")
# Вывод графика зависимости внешнего критерия от сложности модели
plot(qob)
```



В качестве оптимальной принимается модель той размерности подмножества предикторов, которая обеспечивает максимум выбранного внешнего критерия. В нашем случае минимум ошибки предсказания соответствует включению в модель трех предикторов:

```

selection(x= sleep_imp3[,-1],y=sleep_imp3[,1], q=5,
  criterion = "variance", method = "lm", family = "gaussian")
*****
Best subset of size q = 3 : Pred Span Danger
Information Criterion Value - variance : 14.55175
*****

```

Неожиданностей, как видим, не произошло – нами получена та же модель, что и при шаговом отборе по AIC-критерию.

### 7.7. Процедуры диагностики моделей множественной регрессии

В предыдущем разделе мы получили две модели зависимости продолжительности сна Sleep от экологических и таксономических показателей различных животных – полную модель M и полученную шаговой селекцией Mstep. Предварительно рассмотрим, имеются ли между ними статистически значимые различия.

Если сравниваемые модели являются *вложенными* (т.е. когда модель 1 полностью включает весь набор параметров  $\beta_j$  модели 2), то при небольших различиях в степенях свободы оценить статистическую значимость различий стандартных отклонений для остатков  $RSE_1$  и  $RSE_2$  можно с использованием последовательного (англ. *incremental*) теста Фишера (одновременно проверяется различие коэффициентов детерминации  $R_1^2$  и  $R_2^2$ ):

$$F_0 = \frac{(RSS_2 - RSS_1)/q}{RSS_2/(n - k - 1)} = \frac{n - k - 1}{q} \times \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_2^2}.$$

При использовании функции `anova()` из базового пакета реализуется тест I типа, который стартует с минимальной модели и анализ значимости добавления каждого нового члена выполняется последовательно:

```
anova(M, Mstep)
Analysis of Variance Table
Model 1: Sleep ~ BodyWgt + BrainWgt + Span + Gest + Pred + Exp + Danger
Model 2: Sleep ~ Span + Pred + Danger
  Res.Df  RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
1      54 582.06
2      58 610.85 -4    -28.79 0.6677 0.6172
```

Эта процедура не всегда корректна (вспомним проблему множественных сравнений), поэтому предпочтительнее использовать версию функции `Anova()` из пакета `car`, в которой тест II типа оценивает значимость добавления каждый нового параметра только после того, как в модель были включены все остальные члены, учитывая тем самым взаимодействие между переменными:

```
library(car)
Anova(M, Mstep)
Anova Table (Type II tests)
Response: Sleep
      Sum Sq Df F value    Pr(>F)
BodyWgt   18.42  1  1.7491 0.1911822
BrainWgt  14.72  1  1.3977 0.2419281
Span      39.13  1  3.7155 0.0588098 .
Gest       5.33  1  0.5058 0.4798043
Pred     104.47  1  9.9196 0.0025848 **
Exp        1.73  1  0.1644 0.6865898
Danger    179.35  1 17.0288 0.0001192 ***
Residuals 610.85 58
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Из представленных результатов можно сделать вывод, что исключение из полной модели комплекса переменных `BodyWgt`, `BrainWgt`, `Gest`, `Exp` не приводит к статистически значимому увеличению внутренней ошибки модели, и, если это отвечает интересам исследователя, он может принять для использования более компактную модель.

Однако равноценны ли эти модели при прогнозировании новых данных? Выполним для этого оценку ошибки при кросс-проверке с разбиением исходной выборки на  $k = 3$  блока:

```
library(DAAG)
(cvObjM <- cv.lm(df=sleep_imp3, M, m=3, seed=0))
  ss  df Overall ms
5073 62      81.8
(cvObjMstep <- cv.lm(df=sleep_imp3, Mstep, m=3, seed=0))
  ss  df Overall ms
1213 62      19.6
```

Сумма квадратов отклонений расчетных и эмпирических значений для полной модели `M` в четыре раза превышает *CV*-ошибку модели `Mstep`. Внимательное изучение

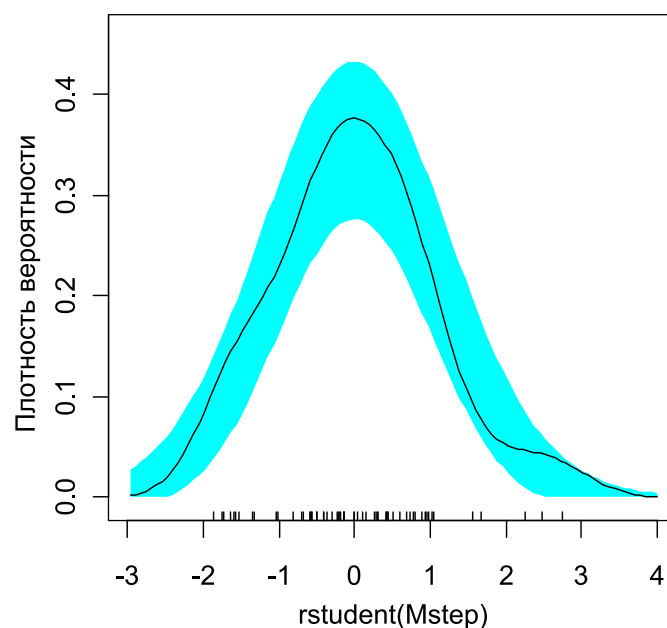
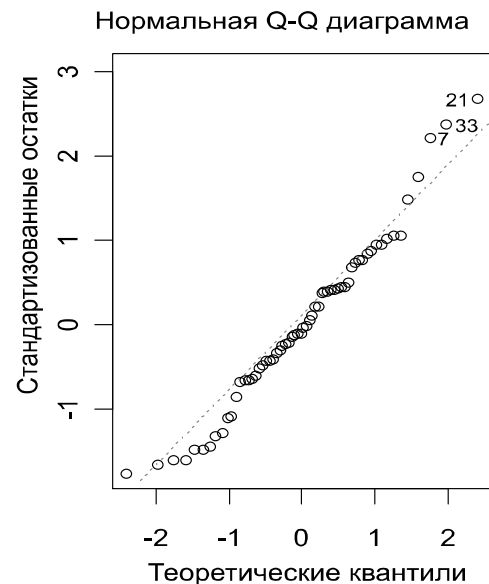
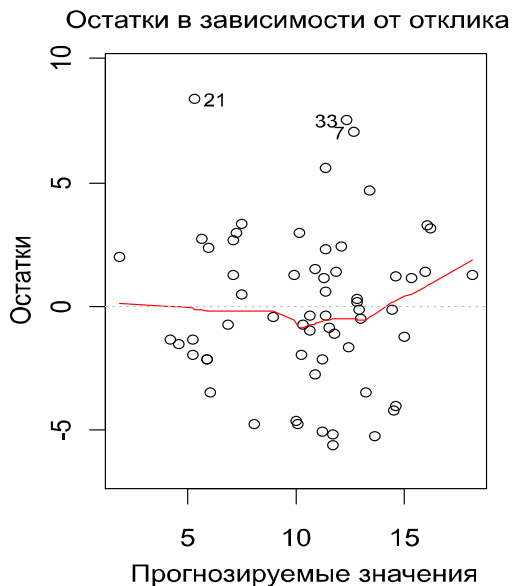
протокола работы программы позволяет сделать вывод, что эта разница во многом определяется сильной асимметрией распределения массы тела животных `BodyWgt`.

Так же, как и в случае простой регрессии, диагностика множественной модели начинается с проверки ее предположений, подробно рассмотренных ранее:

- нормальность распределения остатков и их постоянная дисперсия;
- независимость остатков от значений предикторов  $X$  и прогнозов отклика  $\hat{y}$ ;
- адекватность линейной формы модели обработанным данным.

Оценить зависимость остатков от прогнозируемых значений и нормальность распределения  $\hat{\epsilon}$  можно "штатными" графическими средствами функции `plot()`, либо с использованием функции `sm.density()` пакета `sm()`:

```
par(mfrow = c(1, 2))
plot(Mstep, which=c(1,2))
library(sm)
sm.density(rstudent(Mstep), model="normal")
shapiro.test(resid(M))
Shapiro-Wilk normality test
W = 0.973, p-value = 0.1777
```



На полученных графиках видно, что "выбросы" среди остатков полученной модели достаточно умеренны, а гипотеза о нормальности их распределения подтверждается также с использованием критерия Шапиро-Уилка. Здесь функция `rstudent()` выполняет формирование так называемых *стьюдентизированных остатков*, вычисляемых как стандартизированные остатки после исключения одного из наблюдений из оценки стандартного отклонения ошибок и асимптотически принимающих форму  $t$ -распределения с  $(n - k - 2)$  степенями свободы (см. [www.statistica.ru](http://www.statistica.ru))

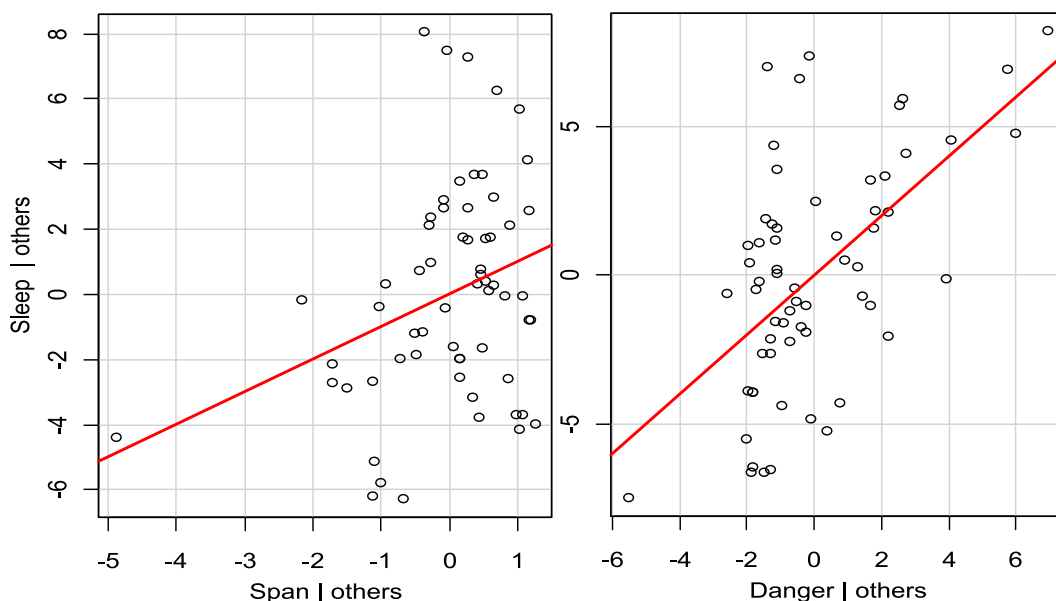
Резко выделяющиеся наблюдения приводят к несимметричности распределения остатков, вызывая неоднородности дисперсии. Обработка таких данных методом обычного регрессионного анализа может привести к ошибкам настолько большим, что полученная модель не будет иметь смысла. С использованием стьюдентизированных остатков мы можем проверить нулевую гипотезу, что выброс  $y_i$  статистически не отличается от остальной части наблюдений. Так как на первой итерации выбирается самый "далекий выброс" и выполняются множественные сравнения (см. раздел 6.8), то неверно использовать простой тест Стьюдента. Поэтому обычно ориентируются на скорректированные  $p$ -значения с учетом поправки Бонферрони. Все необходимые вычисления осуществляются функцией `outlierTest()` из пакета `car`:

```
outlierTest(Mstep, cutoff=0.05)
No Studentized residuals with Bonferonni p < 0.05
Largest |rstudent|:
  rstudent unadjusted p-value Bonferonni p
21      2.84           0.00632         0.392
```

Для нашей модели `Mstep` выбросы отсутствуют и предположение, что наиболее специфическое наблюдение 21 (см. графики выше) не отличается от остальных, можно принять с вероятностью ошибки  $p_{adj} = 0.392$ . В противном случае целесообразно было бы удалить из выборки аномальное наблюдение и повторить подгонку модели.

Весьма полезно также оценить зависимость остатков от вариации отдельных предикторов, поскольку необычные значения  $x$ -ов (т.е. далеко отстоящие от их среднего) могут оказаться наиболее весомым рычагом (англ. *leverage*), определяющим положение в пространстве поверхности функции регрессии. Выполнить это можно с использованием функций `av.Plots()` и `leveragePlot()` из пакета `car`:

```
par(mfrow = c(1, 2))
leveragePlot(Mstep, "Span")
leveragePlot(Mstep, "Danger")
```



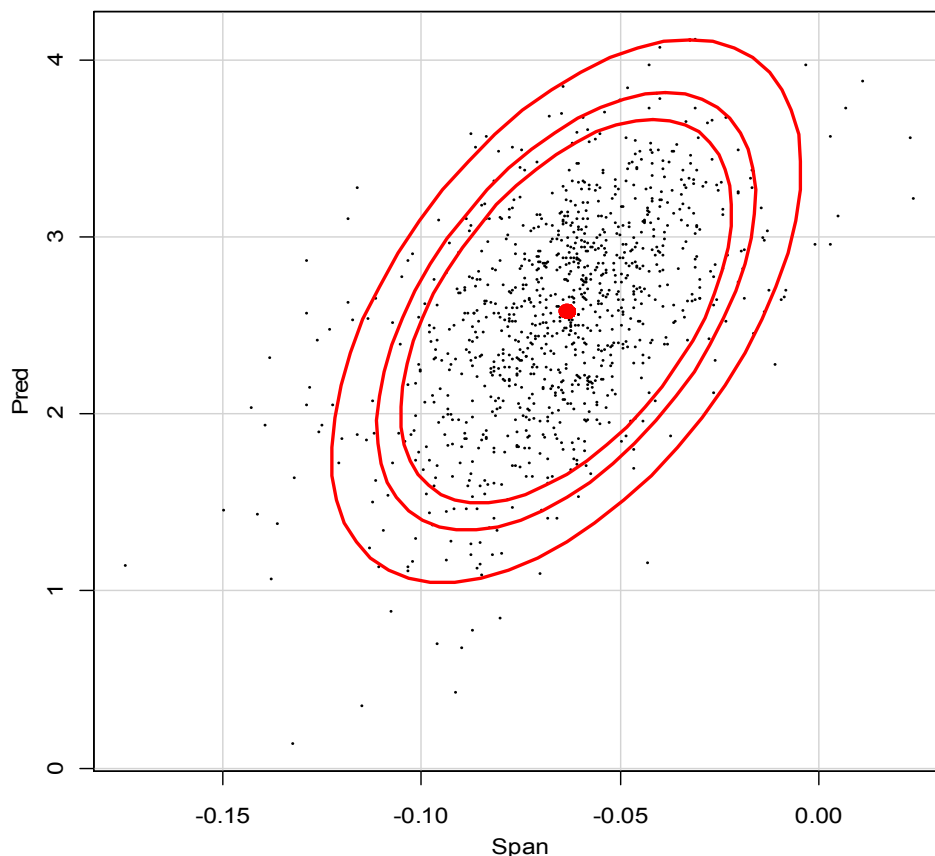
Наконец, проверить отсутствие автокорреляции остатков модели (т.е. некоторой периодической составляющей в них) можно с использованием статистики Дарбина-Уотсона (см. подробности на [dic.academic.ru](http://dic.academic.ru)):

```
durbinWatsonTest(Mstep)
lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
1      0.2251362      1.509941    0.052
Alternative hypothesis: rho != 0
```

Обратим теперь внимание на проблему статистической значимости параметров полученной модели. В общем случае оценка доверительных интервалов коэффициентов множественной регрессии параметрическими методами представляет собой нетривиальную проблему и основывается на сложных аналитических формулах, учитывающих ковариацию между предикторами. Эта задача упрощается с использованием процедур бутстрапа и рандомизации, техника реализации которых, описанная нами в случае парной регрессии, в равной степени может применяться и для многомерного случая.

С помощью функции `boot()` для найденной регрессионной модели рассчитаем доверительные интервалы и покажем на графиках характер взаимного влияния и совместного распределения коэффициентов моделей для отдельных пар предикторов:

```
library(boot); library(car)
# функция, возвращающая вектор коэффициентов
bootF <- function(data, indices){data <- data[indices,]
  mod <- lm(Sleep ~ Span + Pred + Danger, data=data)
  coefficients(mod) }
Sleep.boot <- boot(sleep_imp3, bootF, 1000)
data.ellipse(Sleep.boot$t[,2], Sleep.boot$t[,3], xlab="Span",
  ylab="Pred",cex=.3, levels=c(.9, .95, .99), robust=T)
```



На приведенном графике показано поле корреляции бутстреп-оценок коэффициентов для двух переменных – Span (продолжительность жизни) и Pred (степень хищничества), – а также проведены доверительные эллипсы бутстреп-интервалов для вероятностей 0.9, 0.95 и 0.99, которые основаны на вычислении робастных оценок ковариационной матрицы коэффициентов (Fox, 2002).

```
boot.ci(Sleep.boot, index = 2, type = "bca") # Для Span
BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
Based on 1000 bootstrap replicates
CALL :
boot.ci(boot.out = Sleep.boot, type = "bca", index = 2)
Intervals :
Level      BCa
95%      (-0.1120, -0.0204 )
```

Поскольку доверительные интервал для параметра при переменной Span не включает значение 0, есть основания считать этот коэффициент статистически значимым.

### Учет нелинейного характера влияния предикторов на отклик

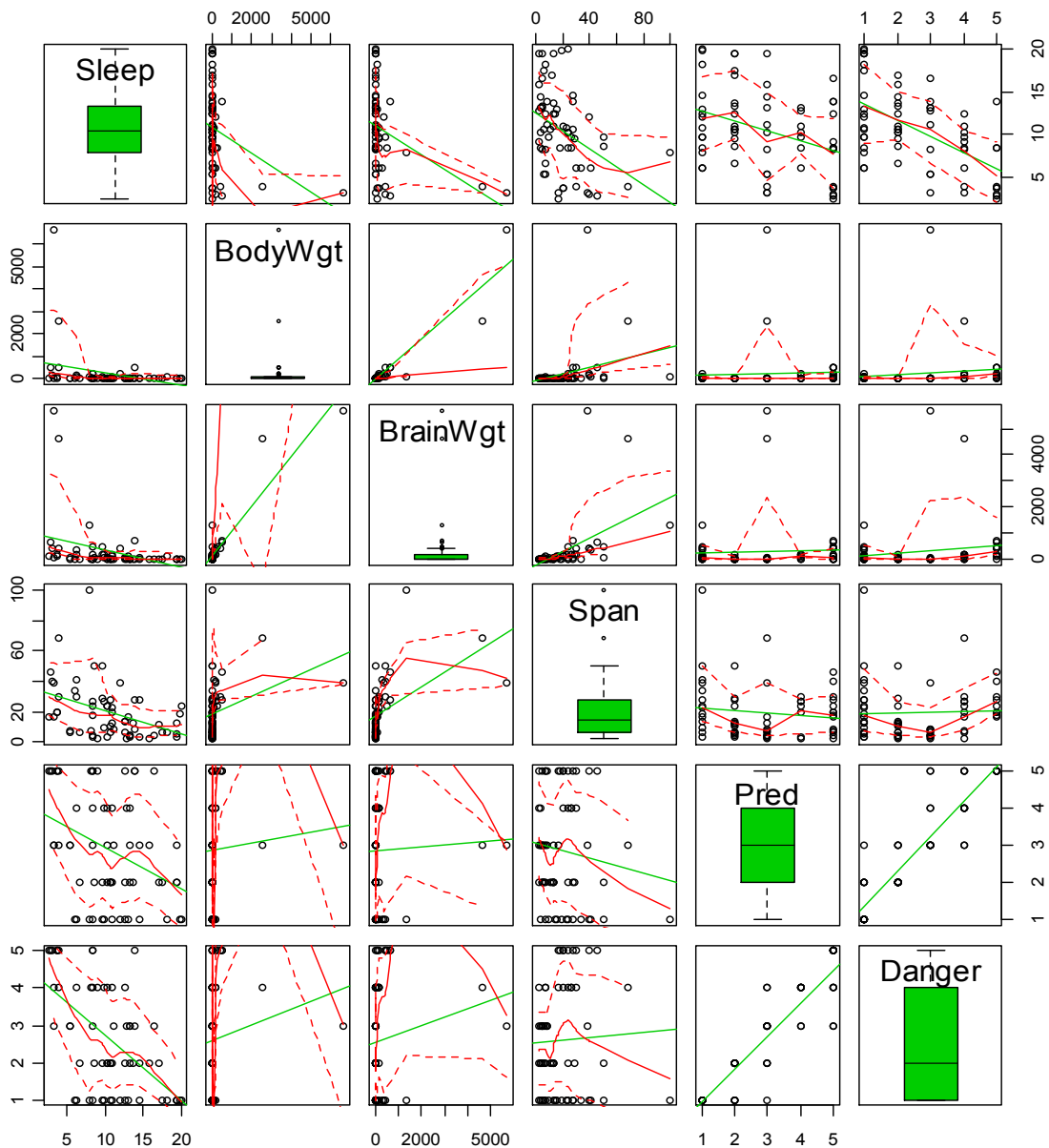
Одной из проблем идентификации адекватных регрессионных моделей является проверка справедливости линейной спецификации модели. Как уже отмечалось ранее, существующие в природе процессы в подавляющем большинстве своем являются нелинейными, а приведение их к линейной форме – лишь одна из возможностей удобной аппроксимации, которая может оказаться весьма грубой. Для оценки степени нелинейности той или иной зависимости рекомендуется использовать матричные диаграммы рассеяния (см. разд. 6.1).

Функция `scatterplotMatrix()` из пакета `car` позволяет построить диаграммы, отражающие как линейную аппроксимацию зависимости для каждой пары переменных, так и сглаживающую кривую с доверительными интервалами:

```
library(car)
scatterplotMatrix(~Sleep + BodyWgt + BrainWgt + Span +
  Pred + Danger, data = sleep_imp3, diag = "boxplot")
```

Из полученного графика видно, что распределение биометрических показателей массы тела (`BodyWgt`) и массы мозга (`BrainWgt`) имеет сильно асимметричный характер: наряду с подавляющим большинством животных, обладающих небольшим весом, есть две особи с весом несколько тонн. Можно усмотреть нелинейность также в зависимости продолжительности сна (`Sleep`) от продолжительности жизни (`Span`).

Однако проблема в том, как перевести эти "вербальные предположения, основанные на визуальных ощущениях", в количественные соотношения множественной регрессионной модели?



Простейший способ учесть нелинейность в модели – это заменить в правой части уравнения регрессии определенные предикторы на их некоторые разумные нелинейные преобразования и проверить, как изменится при этом принятый критерий качества модели. Для этого включим в исходную таблицу данных новые переменные: прологарифмируем значения массы тела  $\ln(\text{BodyWgt})$  и массы мозга  $\ln(\text{BrainWgt})$ , вычислим соотношение  $\text{BodyWgt}/\text{BrainWgt}$ , а также обратную величину  $1/\text{Span}$ .

```
df_n1 <- data.frame(ln_BodyWgt=log(sleep_imp3$BodyWgt),
                    ln_BrainWgt=log(sleep_imp3$BrainWgt),
                    Brain.Body = sleep_imp3$BrainWgt/sleep_imp3$BodyWgt,
                    rev_Span = 1/sleep_imp3$Span)
ind.yx <- c(5, 1:2,6:10)
sleep_n1 <- cbind(sleep_imp3[,ind.yx], df_n1)
```

Заменим в формуле полной модели  $M$  предиктор  $\text{BodyWgt}$  на  $\ln_{\text{BrainWgt}}$  и оценим изменение внешнего критерия – ошибку при однократной кросс-проверке с разделением на три блока:



```
M.n11 <- lm(Sleep ~ ln_BodyWgt + BrainWgt + Span + Gest + Pred
           + Exp + Danger, data=sleep_n1)
(cvObjM.n11 <- cv.lm(df=sleep_n1, M.n11, m=3, seed=0))
  ss   df   Overall ms
1043  62    16.8
```

Столь незначительное изменение спецификации модели привело к тому, что ошибка кросс-проверки уменьшилась в пять раз с 81.8 до 16.8 и оказалась меньше, чем для наилучшей модели `Mstep`, полученной на основе внутренних критериев ( $s_{CV}^2 = 19.6$ ).

Заметим, что нам не удалось с использованием АИС-критерия найти лучшую модель, чем `Mstep`, используя таблицу `sleep_n1` с включенными в нее нелинейно трансформированными переменными. Пошаговый метод "включений с исключениями", неустойчиво работающий в условиях высокой мультиколлинеарности, остановился на модели с почти полным составом предикторов и локальным минимумом АИС, далеко от глобального оптимума. Другая функция `glmulti()` из одноименного пакета, реализующая *генетический алгоритм* (см. описание, например, в книге Шитикова и Розенберга, 2014), снова выбрала в качестве оптимальной знакомую нам модель `Mstep`.

Это обстоятельство подтверждает важный принцип разграничения сфер компетентности критериев двух типов: если внутренние критерии ориентированы на построение как можно более компактных моделей, служащих целям объяснения, то внешние критерии призваны обеспечить, в первую очередь, низкую ошибку прогноза.

## 7.8. Гребневая и лассо-регрессия; использование главных компонент

Если в ходе диагностики выясняется, что ряд основных предположений регрессионного анализа не выполняется, то это может серьезно сказаться на качестве построенной модели, как средства приближенного описания действительности. Например, как показал Р. Фишер, за пределами области, где остатки нормально распределены, *все* линейные оценки оказываются часто очень плохими. Чтобы обеспечить надежность и эффективность оценок параметров регрессии, одним из выходов является использование методов регуляризации, выполняющими своего рода "корректировку" отклонений от нормального распределения остатков.

Идея регуляризации заключается в том, чтобы в функцию потерь  $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2$ , которую мы минимизируем при нахождении оценок параметров модели методом МНК, добавить дополнительный член, зависящий от этих самих этих параметров. Например, вместо  $RSS$  можно было бы минимизировать выражение:

$$L_1 = RSS + \lambda \sum_{i=1}^n |\beta_i| ,$$

или другой вариант:

$$L_2 = RSS + \lambda \sum_{i=1}^n \beta_i^2 .$$

Тем самым мы ввели штраф за неоправданно большие значения  $\beta_i$ , причем величина этого штрафа пропорциональна величине параметра  $\lambda$ , с помощью которого теперь можно настраивать алгоритм подгонки модели и попытаться получить более устойчивое решение. Первый вариант носит название  *$L_1$ -регуляризации*, второй –  *$L_2$ -регуляризации* или регуляризации Тихонова (интересное обсуждение реализации этих методов в R приведено на сайте [www.algorithmist.ru](http://www.algorithmist.ru)).

В примерах ниже мы будем использовать набор исходных данных `sleep_n1` по продолжительности сна животных с включением дополнительных предикторов.

### Гребневая или ридж-регрессия

Гребневая регрессия (*ridge regression*) реализует классическую  $L_2$ -регуляризацию Тихонова, при которой оценки параметров модели  $\hat{\beta}$  находят из условия минимизации

$$\hat{\beta} = \arg \min \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^m \beta_j x_{ij})^2 + \lambda \sum_{j=1}^m \beta_j^2 \right].$$

В матричном виде гребневая регрессия представляет собой линейную модель

$$\hat{y} = \mathbf{H}y \mathbf{X}, \text{ где } \mathbf{H}_{\text{ridge}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T,$$

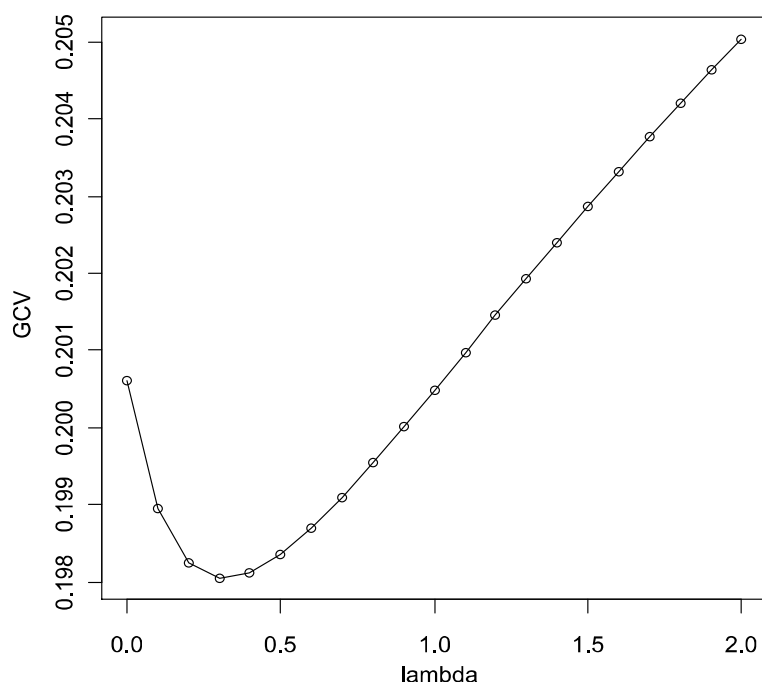
т.е. к информационной матрице перед ее обращением добавляется диагональная матрица  $\lambda \mathbf{I}$ , называемая "гребнем" (англ. *ridge*). В результате матрица становится хорошо обусловленной, оставаясь в то же время "похожей" на исходную.

При  $\lambda \rightarrow 0$  регуляризованное решение стремится к МНК-решению, т.е. обычной линейной модели. При увеличении  $\lambda$  вектор коэффициентов  $\hat{\beta}$  становится всё более устойчивым и жёстко определённым (фактически, происходит понижение эффективной размерности решения). При  $\lambda \rightarrow \infty$  чрезмерная регуляризация приводит к вырожденному решению:  $\hat{\beta} \rightarrow 0$ . Оба крайних случая нежелательны, поэтому оптимальным является некоторое промежуточное значение  $\lambda$ . Для его нахождения применяется несколько методов: кНКВ (аббревиатура, берущая начало от фамилий создателей метода – Ноерл, Kennard и Baldwin), kLW (происхождение неизвестно) и обобщенная перекрестная проверка на основе внешнего критерия *GCV* (от англ. *generalized cross-validation*):

$$GCV = \frac{1}{n} \sum_i \left( \frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - \text{tr}(\mathbf{H})/n} \right)^2.$$

Построим модель гребневой регрессии с использованием функции `lm.ridge()` из пакета MASS. Зададим последовательность из нескольких значений  $\lambda$  (`lambda`), поскольку оптимальное значение этого параметра заведомо неизвестно:

```
library(MASS)
M.ridge <- lm.ridge(Sleep~., data=sleep_n1, lambda=seq(0,2,0.1))
plot(x=M.ridge$lambda, y=M.ridge$GCV, type="o")
```



Функция `lm.ridge()` рассчитала серию из 20 моделей со значениями  $\lambda$  от 0 до 2. Найдем коэффициенты модели, для которой  $\lambda$ , доставляет минимум критерию *GCV*:

```
lambda <- M.ridge$GCV[which.min(M.ridge$GCV)]
[1] 0.3
(M.ridge1 <- lm.ridge(Sleep~., data=sleep_n1, lambda=lambda))
      BodyWgt BrainWgt      Span      Gest      Pred
19.437482 -0.002578  0.002567 -0.081775 -0.002898  2.400439
      Exp      Danger ln_BodyWgt ln_BrainWgt Brain.Body rev_Span
-0.026019 -3.955231  1.261660  -1.667830  0.094902 -8.150611
beta.M.ridge1 <- coef(M.ridge1)
m <- length(beta.M.ridge1)
# Остатки модели
resid.ridge <- sleep_n1$Sleep - beta.M.ridge1[1] -
               as.matrix(sleep_n1[,2:m])%*%beta.M.ridge1[2:m]
# Найдем число степеней свободы гребневой регрессии
d <- svd(as.matrix(sleep_n1[,2:m]))$d
df <- nrow(sleep_n1) - sum(d^2/(lambda+d^2))
[1] 51.37781
# Средний квадрат отклонений модели
rss.ridge <- sum(resid.ridge^2)/df
[1] 10.23191
```

Поскольку найденное значение параметра регуляризации  $\lambda = 0.3$  не столь значительно превышает 0, коэффициенты модели не сильно отличаются от модели, например, полученной для той же таблицы исходных данных методом МНК.

### Лассо-регрессия Тибширани

Метод *регрессии "лассо"* (*LASSO*, от англ. *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) внешне похож на гребневую регрессию, т.е. оценки параметров модели  $\hat{\beta}$  также находят из условия минимизации функции потерь с учетом штрафа ([Tibshirani, 1996](#)):

$$\hat{\beta} = \arg \min [0.5 \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^m \beta_j x_{ij})^2 + \lambda \sum_{j=1}^m |\beta_j|].$$

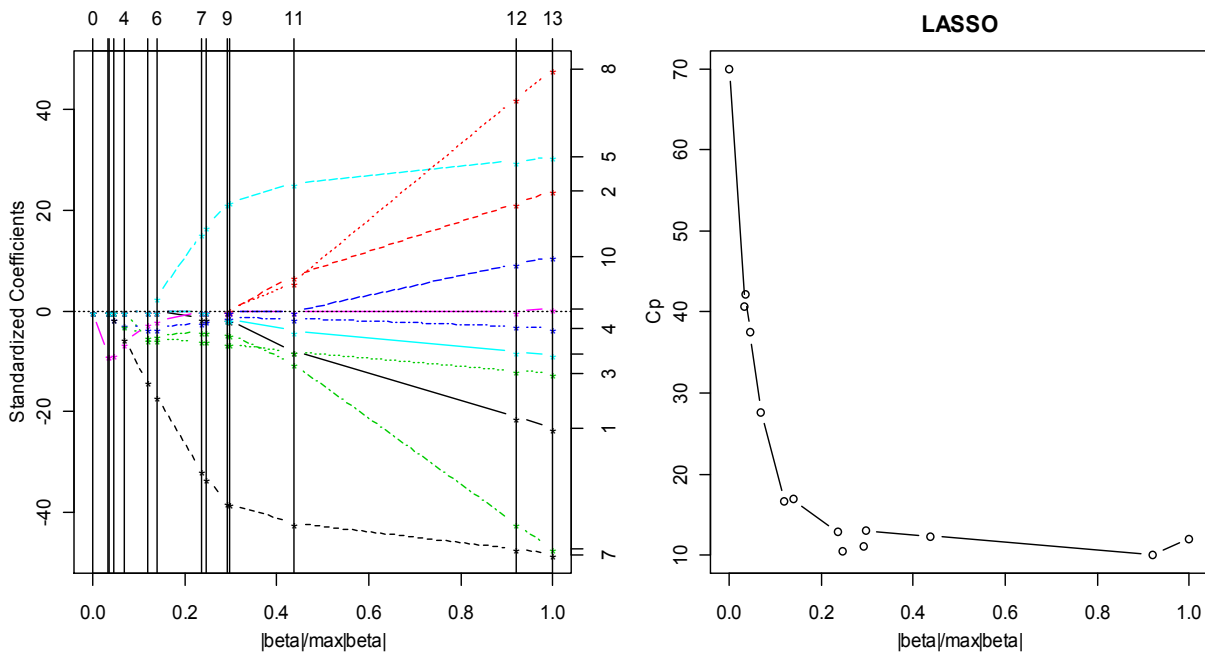
Однако замена штрафного слагаемого  $\lambda \sum_{j=1}^m \beta_j^2$  на  $\lambda \sum_{j=1}^m |\beta_j|$  приводит к качественно иному поведению вектора коэффициентов в ходе оптимизации: наряду с относительно равномерной подстройкой всего набора  $\beta$ , некоторые коэффициенты становятся равными нулю, что позволяет одновременно выполнить отбор информативных предикторов.

Иными словами, если ввести ограничение-неравенство, регулирующее слишком большую сумму модулей стандартизованных коэффициентов  $\sum_{j=1}^m |\beta_j^0| \leq \tau$ , то при  $\tau_{\text{опт}}$  достигается некоторый компромисс между величиной ошибки регрессии и размерностью используемого пространства переменных, выраженного суммой абсолютных значений  $|\beta^0|$ . При значении относительного параметра фракционирования  $s = \tau / \sum_{j=1}^m |\beta_j^0| = 1$  лассо-регрессия сводится к обычному методу наименьших квадратов, а по мере его уменьшения  $s \rightarrow 0$  формируемая модель становится все более лаконичной (с точки зрения числа входящих в нее параметров), пока все коэффициенты не станут равными 0. Оптимальную

величину  $s$  находят путем минимизации  $C_p$ -критерия Мэллоу (Mallow's  $C_p$ ), либо с использованием перекрестной проверки.

Построим регрессионную лассо-модель с использованием функции `lars()` из одноименного пакета:

```
library(lars)
Xmat <- as.matrix(sleep_n1[, -1])
M.las <- lars(Xmat, sleep_n1[, 1], type="lasso")
plot(M.las, plottype="coefficients") ;
plot(M.las, plottype="Cp")
# Параметр фракционирования s найдем перекрестной проверкой
set.seed(0) ; r <- cv.lars(Xmat, sleep_n1[, 1])
```



На графике слева видно, как меняются значения стандартизованных коэффициентов регрессии при увеличении параметра фракционирования  $s$ . При  $s = 0$  все коэффициенты равны 0, а при  $s = 1$  получаем полную модель. Вертикальные линии отмечают значения  $s$  при которых происходит обнуление определенных коэффициентов. На рисунке справа показано, как в тех же условиях изменяется средний квадрат ошибки при перекрестной проверке (с доверительными интервалами). Минимум ошибки наблюдается при  $s = 0.22$ .

Из всех возможных коэффициентов модели при оптимальном значении  $s$  семь оказались ненулевыми:

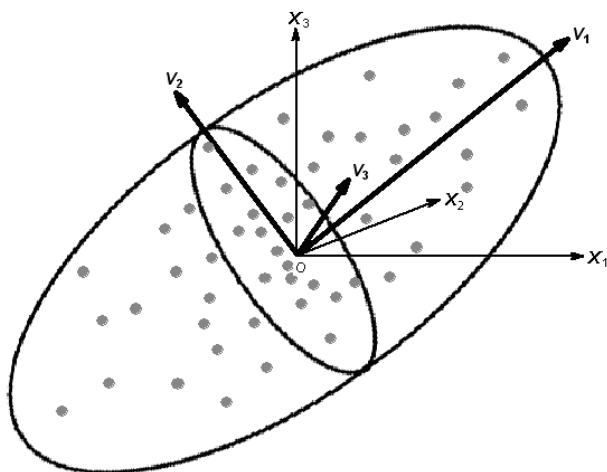
```
(bestfrac <- r$index[which.min(r$cv)])
0.2222222
las.coef <- predict(M.las, Xmat, s=bestfrac,
                    type="coefficient", mode="fraction")
las.coef # Получение коэффициентов модели
$coefficients
  BodyWgt  BrainWgt      Span      Gest      Pred      Exp
-0.000172  0.000000 -0.042027 -0.002149  1.171393 -0.0246898
  Danger  ln_BodyWgt ln_BrainWgt Brain.Body  rev_Span
-2.6286958 0.0000000 -0.2210219  0.0000000  0.0000000
# Остатки модели
las.resid = sleep_n1$Sleep - predict.lars(M.las, Xmat,
                                           s=bestfrac, type="fit", mode="fraction")$fit
```

```
rss.lasso <- sum(las.resid^2)/(nrow(sleep_n1) - 7)
11.28749
```

### Регрессия на главные компоненты

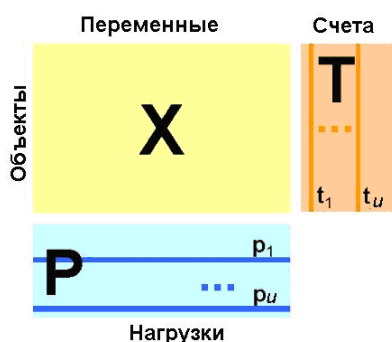
Метод *главных компонент* (англ. *principal component analysis*, PCA) является одной из фундаментальных процедур многомерного анализа и используется для оптимального ортогонального проецирования (*projecting pursuit*) исходного многомерного пространства в пространство меньшей размерности.

Пусть мы имеем матрицу наблюдений  $\mathbf{X}$  размерностью  $n \times m$ , которая может быть представлена в многомерном пространстве облаком точек, имеющих конфигурацию, напоминающую удлинённый сплюснённый эллипсоид (см. рисунок ниже). Представим эти точки в новой системе координат, которая будет лучше отражать внутреннюю структуру анализируемых данных. Первую ось  $V_1$  (она будет называться первой главной компонентой) проведем в направлении наибольшей дисперсии данных, совпадающем с главной осью многомерного эллипсоида. Вторую главную компоненту  $V_2$  проведем перпендикулярно к  $V_1$  в направлении наибольшего разброса наблюдений в этой ортогональной плоскости. Третья главная компонента  $V_3$  и все последующие находят по аналогичному принципу.



Чего мы этим достигли? Во-первых, в новой системе координат оси расположены ортогонально, а это значит что, переменные  $V_1, V_2, V_3 \dots$  теперь статистически независимы и проблема мультиколлинеарности, которая заботила нас в предыдущих разделах, попросту отпала. Во-вторых, главные компоненты ранжированно связаны с общим статистическим разбросом наблюдений, т.е. первая из них объясняет наибольшую долю вариации исходных данных, а в ряду последующих главных компонент доля объясненной дисперсии постоянно снижается. Наконец, выделив  $u$  осей новой системы координат ( $m > u$ ), можно сократить количество предикторов, т.е. уменьшить размерность задачи, пожертвовав некоторой минимальной погрешностью.

Результатом PCA-преобразования матрицы наблюдений  $\mathbf{X}$  является матрица  $\mathbf{T}$  *факторных значений* (или "счетов" scores) размерностью  $n \times u$ , содержащая проекции исходных точек выборки  $\mathbf{X}$  в новом  $u$ -мерном базисе. Другая матрица  $\mathbf{P}$  размерностью  $(u \times m)$  содержит *факторные нагрузки* (loadings) – коэффициенты пропорциональности, обеспечивающие пересчет данных из  $m$ -мерного пространства исходных переменных в  $u$ -мерное пространство главных компонент (подробнее, например, см. на [rsc.chemometrics.ru](http://rsc.chemometrics.ru)):



Каждая  $k$ -я строка матрицы  $\mathbf{P}$  состоит из оценок коэффициентов  $p_{jk}$ , отражающих долю участия  $j$ -й исходной переменной в формировании  $k$ -й главной компоненты (фактически, это проекция  $x_j$  на новую  $k$ -ю ось). Математически связь между этими матрицами выглядит как тривиальное линейное преобразование:

$$\mathbf{XP} \rightarrow \mathbf{T}$$

Проблема остается только в том, как вычислить нагрузки  $p_{jk}$  на главные компоненты.

Пусть  $\mathbf{C} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$  – корреляционная матрица (значения  $\mathbf{X}$  были предварительно стандартизованы).

Тогда для представленных матриц имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{P}'\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \quad \text{где } \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\},$$

т.е. дисперсии столбцов матрицы  $\mathbf{T}$  соответствуют собственным значениям  $\lambda_j$  (eigen values) матрицы  $\mathbf{C}$ , являющимися диагональными элементами матрицы  $\mathbf{\Lambda}$ . Что такое собственные значения и как их рассчитать – задача линейной алгебры, а нам важно, что найдя значения  $\lambda_j$ , мы легко получаем и все остальное.

Регрессионное уравнение, использующее в качестве независимых переменных главные компоненты, в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

и его коэффициенты могут быть найдены обычным методом наименьших квадратов.

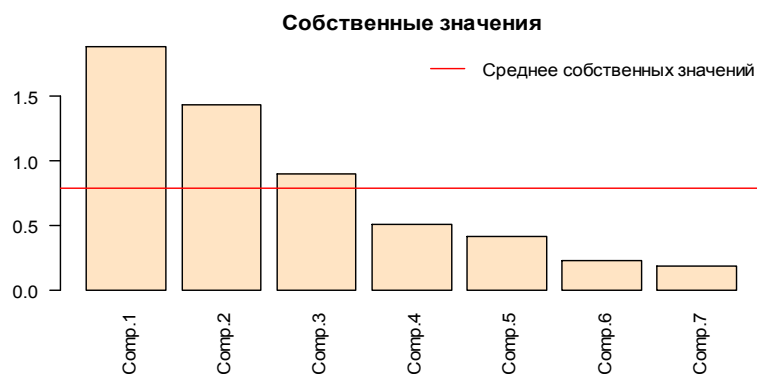
Остальные детали метода рассмотрим на примере с изучением потребности в сне у животных, использованном в двух предыдущих разделах. Для реализации PCA используем функцию `princomp()`:

```
load(file="sleep_imp.Rdata")
sleep_imp <- as.data.frame(scale(sleep_imp3))
Sleep.pca <- princomp(~BodyWgt + BrainWgt + Span + Gest + Pred
                      + Exp + Danger, data=sleep_imp)

summary(Sleep.pca)
Importance of components:
              Comp.1  Comp.2  Comp.3  Comp.4  Comp.5  Comp.6  Comp.7
Standard deviation  1.877693 1.4294425 0.8997436 0.5019613 0.41554081 0.226892702 0.180001283
Proportion of Variance 0.511933 0.2966861 0.1175442 0.0365851 0.02507213 0.007474891 0.004704517
Cumulative Proportion 0.511933 0.8086191 0.9261634 0.9627485 0.98782059 0.995295483 1.000000000
```

Из результатов видим, что первая главная компонента объясняет 51.1% общей вариации данных (Proportion of Variance), а первые три компоненты вместе – 92.6% (Cumulative Proportion). Критерий Кайзера-Гуттмана рекомендует оставить для дальнейшего анализа только те главные компоненты, собственные значения которых превышают среднее (собственных значений):

```
# Оценка необходимого числа главных компонент
ev <- Sleep.pca$sdev
ev[ev > mean(ev)] # Критерий Кайзера-Гуттмана
# Столбиковая диаграмма собственных значений
barplot(ev, main="Собственные значения", col="bisque", las=2)
abline(h=mean(ev), col="red")
legend("topright", "Среднее собственных значений", lwd=1,
       col=2, bty="n")
```



Анализируя таблицу нагрузок на главные компоненты, можно предположить, что вторая главная компонента связана с наблюдаемыми переменными Pred и Danger, а третья — с BodyWgt и Span, тогда как на Comp.1 относительно равномерно проецируются все исходные предикторы:

```
P <- loadings(Sleep.pca)[,1:3]
print(P, 3)
      Comp.1 Comp.2  Comp.3
BodyWgt -0.382 -0.323  0.53402
BrainWgt -0.414 -0.363  0.30478
Span     -0.288 -0.312 -0.72764
Gest     -0.468 -0.163 -0.15051
Pred     -0.267  0.558  0.15573
Exp      -0.435  0.265 -0.21344
Danger   -0.346  0.507  0.00313
```

Подготовим данные для регрессионного анализа (т.е. составим матрицу счетов **T**) и выполним построение линейной модели на главные компоненты:

```
T <- predict(Sleep.pca)[,1:3]
sleep_PCA <- as.data.frame(cbind(Sleep = sleep_imp3[,5], T))
M.PCA <- lm(Sleep~., data=sleep_PCA)
summary(M.PCA)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  10.5774     0.4526  23.371 < 2e-16 ***
Comp.1         1.5518     0.2410   6.438 2.56e-08 ***
Comp.2        -0.5103     0.3166  -1.612  0.1125
Comp.3         1.0908     0.5030   2.169  0.0342 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.564 on 58 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4567,    Adjusted R-squared:  0.4286
F-statistic: 16.25 on 3 and 58 DF,  p-value: 8.801e-08
AIC(M.PCA)
[1] 339.3941
```

Полученная модель регрессии на главные компоненты оказалась несколько хуже по величине AIC-критерия многих моделей на основе наблюдаемых переменных и, кроме того, весьма затруднительна для интерпретации.

Метод *частных наименьших квадратов* PLS (англ. *Partial Least Squares* или *projection into latent structure*) также использует разложение исходных предикторов на



осях главных компонент, но дополнительно выделяет подмножество латентных переменных, в пространстве которых связь между зависимой переменной и предикторами достигает максимального значения (т.е. формирует вектор весов зависимой переменной для главных компонент). Обсуждение этого метода, вызванное статьей А. Виноградова, см. на [alexwin1961.livejournal.com](http://alexwin1961.livejournal.com).

Реализация PLS-регрессии в среде R представлена в пакете `pls`, который включает в себя большое количество функций для построения регрессионных моделей, создания диагностических графиков и извлечения информации из результатов вычислений. Модель, построенная с использованием функции `pls()` и доставляющая минимум ошибке прогноза  $RSS$ , основана на четырех главных компонентах:

```
# Частный метод наименьших квадратов (Partial Least Squares)
library(pls)
M.pls <- pls(Sleep~., 4, data=sleep_imp3, method="oscorespls")
summary(M.pls)
Data:   X dimension: 62 9
        Y dimension: 62 1
Fit method: oscorespls
Number of components considered: 4
TRAINING: % variance explained
      1 comps  2 comps  3 comps  4 comps
X          96.1   99.10   99.99  100.00
Sleep      10.7   19.64   30.42   53.96
beta.pls <- drop(coef(M.pls))
      BodyWgt  BrainWgt  NonD  Dream  Span  Gest  Pred
-0.003965451  0.004859369  0.298043025  0.076676001 -0.161543351 -0.007841193 -0.036476207
      Exp  Danger
-0.046134970 -0.055274459
resid.pls <- drop(M.pls$resid)[, 4]
rss.pls <- sum(resid.pls^2)/(nrow(sleep_imp3) - 5)
rss.pls
[1] 10.95129
```

Определение того, какая из моделей продолжительности сна животных, описанных в трех последних разделах, является наилучшей, представляет собой непростую проблему из-за отсутствия сопоставимых объективных критериев их качества. В частности, мы не стали рассчитывать AIC-критерий для моделей с регуляризацией и PLS-метода из-за ряда проблем вычислительного характера. Поэтому приведем ниже сравнительную таблицу средних квадратов отклонений модели  $RSS$ :

```
# Сравнение критерия RSS качества подгонки семи моделей
c(rss.M = rss.ls <- sum(M$resid^2)/M$df.residual,
  rss.Mstep = rss.ls <- sum(Mstep$resid^2)/Mstep$df.residual,
  rss.M.nll = rss.ls <- sum(M.nll$resid^2)/M.nll$df.residual,
  rss.ridge = rss.ridge,
  rss.lasso = rss.lasso,
  rss.M.PCA = rss.ls <- sum(M.PCA$resid^2)/M.PCA$df.residual,
  rss.pls = rss.pls)
      rss.M  rss.Mstep  rss.M.nll  rss.ridge  rss.lasso  rss.M.PCA  rss.pls
10.77889  10.53189  11.11991  10.23191  11.28749  12.70027  10.95129
```

Хотя наиболее точная подгонка модели к данным была выполнена с применением гребневой регрессии, выше было показано, что использование критерия  $RSS$  для оценки качества не всегда оправдано. Альтернативное решение этой проблемы может дать вычислительный эксперимент с использованием имитационных методов (см. разд. 7.1).



## 7.9. Сравнение эффективности различных моделей при прогнозировании

Выше были рассмотрены некоторые методические проблемы построения линейных моделей, в том числе: а) методы *оценивания параметров* модели (англ. *estimation*); б) поиск "наилучшего" сочетания предикторов (англ. *model selection*) и в) сравнительная диагностика моделей-претендентов. Мы при этом старались опираться на общепринятые внутренние критерии качества моделей (коэффициент детерминации, *F*-критерий, информационные критерии Акаике, Байеса, Шварца и др.), которые могут косвенно отражать "объясняющую или познавательную ценность" результатов регрессионного анализа. Внешние критерии, такие как ошибка кросс-проверки, ориентированы, в значительной мере, на "потребительскую ценность" модели, т.е. ее максимальную эффективность при прогнозировании величины отклика на новых данных. Подробное обсуждение различий в функциях *объяснения* и *прогнозирования* при моделировании наблюдаемых феноменов в исследуемом классе систем можно найти в фундаментальной монографии Г.С. Розенберга (2013), с которой можно ознакомиться на сайте [ievbras.ru/ecostat](http://ievbras.ru/ecostat).

Многokратное деление исходной выборки на *обучающую* и *проверочную*, по которой осуществляется "подстройка" параметров модели, в большинстве случаев весьма эффективно, однако не вполне отвечает таким принципам тестирования, как массовость и независимость. Несмещенную оценку качества прогноза можно получить только на "свежих" данных, не принимавших участия в формировании функции регрессии, т.е. с использованием *экзаменационной* последовательности. Для обеспечения необходимой массовости теста мы будем использовать не реальные наборы данных, а процедуру их случайной имитации, что позволит сформировать из одной условной генеральной совокупности и обучающую, и экзаменационную выборки любого задаваемого объема.

В этом разделе использованы методические материалы проф. К. Саттона ([Clifton Sutton](http://CliftonSutton), George Mason University). Описание использованных алгоритмов построения моделей и особенности их реализации в R приведены в предыдущих разделах.

### Формирование исходных данных для построения моделей

Сгенерируем обучающую выборку умеренного объема ( $n_i = 50$ ), включающую отклик  $y$  и шесть независимых переменных  $x_1$ – $x_6$ . Для этого используем функции `runif(...)` и `rnorm(...)`, получая реализации случайной величины из распределений с заданными параметрами:

```
# Установим начальный код запуска генератора случайных чисел,  
# чтобы получать одни и те же данные  
set.seed(632)  
n=50 # Объем генерируемой выборки  
x1 <- runif(n, 0, 1)  
x2 <- x1 + rnorm(n, 0, 0.25)  
x3 <- (x1 + x2)/2 + runif(n, 0, 0.1)  
x4 <- runif(n, 0, 1)  
x5 <- (2*x4 + rnorm(n, 0, 0.25))/2 + runif(n, 0, 0.1)  
x6 <- runif(n, 0, 1)  
y <- (3 + x1 + x2 + 0.5*x3 + 0.75*x4 + 0.5*x5 + 0.5*x6 + rnorm(n, 0, 1))  
# Для последующих вычислений найдем средние и дисперсии  
x <- cbind(x1,x2,x3,x4,x5,x6)  
mx <- apply(x,2, mean)  
varx <- apply(x,2, var)  
  
# Стандартизация всех X-ов
```

```
x <- scale(x)
trdata <- data.frame( cbind(y,x) )
print(trdata,digits = 4)
      y      x1      x2      x3      x4      x5      x6
1  5.137  0.911254  1.72750  1.332126 -1.40850 -1.59800  1.05042
2  5.288 -0.865048 -1.11143 -1.157837  1.47749  1.49121  0.87614
... ..
48 4.214  0.972390  0.85598  0.873112 -1.18340 -0.91012  0.53214
49 5.245 -0.201314  0.32514  0.019597  0.51390  0.65354 -1.68411
50 5.110  0.721397 -0.00579  0.425851 -1.53167 -1.94168  0.35642
attach(trdata)
```

Как показано в разделе 6.1, необходимым этапом разведочного анализа данных является оценка коэффициентов корреляции и визуализация парных зависимостей между исследуемыми переменными таблицы trdata:

```
library(Hmisc)
# Функция расчета корреляционной матрицы с p-значениями
corsig <- function(x) {
  x <- as.matrix(x) ; R <- rcorr(x)$r ; p <- rcorr(x)$P
  ipa <- lower.tri(p, diag = FALSE) ; R[ipa] <- p[ipa]
  return (R)
}
round(corsig(trdata),4)
      y      x1      x2      x3      x4      x5      x6
y      1  0.693  0.553  0.651 -0.011  0.028  0.014
x1     0   1  0.768  0.918 -0.319 -0.268 -0.015
x2     0   0   1  0.953 -0.201 -0.180 -0.002
x3     0   0   0   1 -0.272 -0.240 -0.023
x4     0.939 0.023 0.161 0.056   1  0.911  0.019
x5     0.847 0.059 0.211 0.092   0   1  0.083
x6     0.920 0.919 0.989 0.876  0.894  0.564   1
```

Выше главной диагонали полученной матрицы представлены коэффициенты корреляции Пирсона, а ниже – статистическая значимость их отличий от 0. Очевидно, что переменные y, x1, x2 и x3 образуют тесно связанный коллинеарный комплекс. Также высоко коррелируют между собой предикторы x4 и x5.

### Общая линейная модель и ее проверка на экзаменационной выборке

Получив некоторое представление о взаимодействиях переменных, будем строить модели линейной регрессии. Начнем с обыкновенной МНК-модели, включающей все независимые переменные:

```
ols1 <- lm(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)
summary(ols1)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.18630     0.14205  36.510  <2e-16 ***
x1           0.61073     0.83894   0.728   0.471
x2          -0.50784     1.09678  -0.463   0.646
x3           0.90961     1.77767   0.512   0.611
x4           0.15647     0.36113   0.433   0.667
```

```

x5          0.18453      0.35716      0.517      0.608
x6          0.03007      0.14731      0.204      0.839
---
Residual standard error: 1.004 on 43 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5352,      Adjusted R-squared: 0.4703
F-statistic: 8.251 on 6 and 43 DF,  p-value: 5.747e-06

```

Бытует мнение, что величины  $t$ -критерия для оценки значимости оценок коэффициентов модели в какой-то мере определяют относительную информативность каждого предиктора. В нашем случае это не вполне так: все коэффициенты  $\beta$  примерно в равной степени статистически незначимы. Другими словами, в данном случае  $t$ -критерии всего лишь отражают небольшой объем исходной обучающей выборки и никак не зависят от характера совместного распределения анализируемых случайных величин. Если, например, ту же модель построить на выборке с  $n = 1000000$ , то все коэффициенты как "по волшебству" становятся статистически значимыми (т.е. наблюдается эффект "слишком большой" выборки, который мы обсуждали в разделе 5.3, посвященном анализу статистической мощности):

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.001321   0.003618  829.61  <2e-16 ***
x1           1.001048   0.018097   55.32  <2e-16 ***
x2           0.997782   0.017753   56.20  <2e-16 ***
x3           0.502433   0.034600   14.52  <2e-16 ***
x4           0.737344   0.008519   86.55  <2e-16 ***
x5           0.507769   0.007787   65.21  <2e-16 ***
x6           0.501448   0.003460  144.93  <2e-16 ***
---
Residual standard error: 0.9988 on 999993 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4371,      Adjusted R-squared: 0.4371
F-statistic: 1.294e+05 on 6 and 999993 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Для независимой проверки предсказательных свойств модели `ols1` и всех последующих моделей сформируем репрезентативную экзаменационную выборку, состоящую из  $n_e = 5000$  наблюдений, полученных по тому же алгоритму случайной генерации. Чтобы наш эксперимент был корректным (т.е. чтобы обучающая и тестовая выборки были сравнимы), для стандартизации переменных экзаменационной выборки будем использовать соответствующие средние и дисперсии нестандартизованной обучающей выборки.

```

gx1 <- runif(5000, 0, 1)
gx2 <- gx1 + rnorm(5000, 0, 0.25)
gx3 <- (gx1 + gx2)/2 + runif(5000, 0, 0.1)
gx4 <- runif(5000, 0, 1)
gx5 <- (2*gx4 + rnorm(5000, 0, 0.25))/2 + runif(5000, 0, 0.1)
gx6 <- runif(5000, 0, 1)
gy <- (3 + gx1 + gx2 + 0.5*gx3 + 0.75*gx4 + 0.5*gx5 +
      0.5*gx6 + rnorm(5000, 0, 1))
gx <- cbind(gx1,gx2,gx3,gx4,gx5,gx6)
for (i in 1:6) gx[,i] <- (gx[,i]-mx[i])/sqrt(varx[i])
gendata <- data.frame( cbind(gy, gx) )
names(gendata) <- c("y", "x1", "x2", "x3", "x4", "x5", "x6")
summary(gendata)

```

Сравнение *эффективности* моделей для прогнозирования будем осуществлять, оценивая средний квадрат ошибки прогноза на данных из экзаменационной выборки:

```
ols1.mspe <- mean( (gy - predict(ols1, newdata=gendata))^2 )
1.194602
```

Значения этого показателя (.mspe), вычисленные для всех тестируемых моделей, мы в итоге представим в одной сводной таблице.

### **Выбор информативного комплекса предикторов**

Выполним процедуру пошаговых включений и исключений параметров модели на основе критерия Акаике:

```
ols2 <- step(ols1, direction="both")
summary(ols2)
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    5.1863      0.1367  37.931 < 2e-16 ***
x1              1.0415      0.1434   7.264 3.25e-09 ***
x5              0.3179      0.1434   2.217 0.0315 *
---
Residual standard error: 0.9668 on 47 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5293, Adjusted R-squared: 0.5093
F-statistic: 26.43 on 2 and 47 DF, p-value: 2.04e-08
```

К такой же модели `ols2` можно прийти и вручную, исключая поочередно параметры с наибольшими *p*-значениями.

Выполним теперь процедуру "построения всех возможных моделей" `all.possible.regressions()`, скрипт кода которой представлен в разделе 7.5.

```
all.mod <- all.possible.regressions(dat=trdata, k=6)
all.mod[order(all.mod$AIC), ]
```

Отсортировав все 64 возможные модели по критерию Акаике обнаружим, что пошаговый метод выбрал не модель № 1 с наименьшим АИС, а расположенную ниже в позиции № 2 (т.е. последовательные алгоритмы не всегда находят глобальный оптимум):

№	model	df.sse	p	SSE	MSE	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> .adj	AIC	BIC
1	y ~ 1+x1+x4	47	2	43.92783	0.934635	0.529353	0.509325	197.1274	204.7755
2	y ~ 1+x1+x5	47	2	43.93306	0.934746	0.529297	0.509267	197.1334	204.7814
3	y ~ 1+x1+x4+x5	46	3	43.69985	0.949997	0.531796	0.50126	198.8672	208.4273
4	y ~ 1+x1+x3+x5	46	3	43.8223	0.952659	0.530484	0.499863	199.0071	208.5673
...									
57	y ~ 1	49	0	93.33496	1.904795	0	0	230.8097	234.6338
...									
63	y ~ 1+x4+x6	47	2	93.30361	1.985183	0.000336	-0.0422	234.7929	242.441
64	y ~ 1+x4+x5+x6	46	3	92.5297	2.011515	0.008628	-0.05603	236.3765	245.9366

Зато алгоритм прямого поиска (Blanchet et al., 2008), реализованный в функции `forward.sel()` из пакета `packfor`, позволил выбрать линейную МНК-модель `ols3` с наименьшим значением АИС-критерия (№ 1 в списке выше) из всех возможных моделей, которые могут быть получены на основе сгенерированных данных:

```
library(packfor)
```

```

forward.sel(trdata$y, trdata[,-1])
Procedure stopped (alpha criteria):
  pvalue for variable 3 is 0.632000 (superior to 0.050000)
  variables order      R2      R2Cum  AdjR2Cum      F  pval
1      x1      1 0.4800657 0.4800657 0.4692337 44.319355 0.001
2      x4      4 0.0492872 0.5293529 0.5093254  4.921943 0.036
ols3 <- lm(y ~ x1 + x4, data=trdata)

```

Наконец, еще одна модель `ols4` может быть получена методом “forward selection”, представленным в пакете `FWDselect` (Miller, 1990) и основанным на внешних критериях перекрестной проверки:

```

library(FWDselect)
qob =qselection(x=trdata[,-1],y=trdata$y,qvector=c(1:6),
  method="lm",criterion="variance")
plot(qob)

```

При анализе зависимости ошибки кросс-проверки от сложности модели искомым минимумом соответствует модели `ols4` лишь с одним предиктором `x1`:

```

selection(x=trdata[,-1],y=trdata$y, q=1, criterion="variance",
  method = "lm", family = "gaussian")
Best subset of size q = 1 : x1
Information Criterion Value - variance : 0.7212502
ols4 <- lm(y ~ x1, data=trdata)

```

Рассчитаем для всех трех типов моделей средние квадраты ошибки прогноза на данных из тестовой выборки:

```

ols2.mspe <- mean( (gy - predict(ols2, newdata=gendata))^2 )
1.222605
ols3.mspe <- mean( (gy - predict(ols3, newdata=gendata))^2 )
1.225119
ols4.mspe <- mean( (gy - predict(ols4, newdata=gendata))^2 )
1.319385

```

Построим теперь серию моделей методами гребневой и лассо-регрессии, а также регрессии на главные компоненты. Каждый раз в их число мы будем включать (исключительно в методических целях) модель, которая при соответствующих условиях сводится к полной МНК-модели `ols1`.

### Модели с использованием регуляризации

Построим серию моделей гребневой регрессии, в которых параметр  $\lambda$  находится тремя методами: а) кНКВ, б) `kLW` и в) обобщенной перекрестной проверкой (GCV). Оптимальное значение  $\lambda$  для метода GCV будем находить методом последовательных приближений, задавшись предварительно последовательностью возможных значений от 1 до 10:

```

library(MASS)
lmridge <- lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata,
  lambda = seq(0, 10, 1))
lmridge$kНКВ      # lambda, полученная методом кНКВ
2.713368
lmridge$kLW      # lambda, полученная методом kLW
4.039776
lmridge$GCV

```

```

0          1          2          3          4          5          6          7          8          9          10
0.02240937 0.02135273 0.02112040 0.02099452 0.02092176 0.02088160 0.02086311 0.02085967 0.02086701 0.02088224 0.02090335
# обобщенная перекрестная-проверка показала, что оптимальное значение
# lambda лежит между 6 и 8
# Выполним несколько итераций для уточнения этого значения
lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata, lambda = seq(6, 8, 0.25))$GCV
6.00      6.25      6.50      6.75      7.00      7.25      7.50      7.75      8.00
0.02086311 0.02086104 0.02085982 0.02085938 0.02085967 0.02086063 0.02086220 0.02086434 0.02086701
lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata, lambda = seq(6.5, 7, 0.1))$GCV
6.5       6.6       6.7       6.8       6.9       7.0
0.02085982 0.02085955 0.02085941 0.02085938 0.02085947 0.02085967
lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata, lambda = seq(6.7, 6.9, 0.05))$GCV
6.70      6.75      6.80      6.85      6.90
0.02085941 0.02085938 0.02085938 0.02085941 0.02085947
lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata, lambda = seq(6.75, 6.85, 0.01))$GCV
6.75      6.76      6.77      6.78      6.79      6.80      6.81      6.82      6.83      6.84      6.85
0.02085938 0.02085938 0.02085938 0.02085938 0.02085938 0.02085938 0.02085939 0.02085939 0.02085940 0.02085941 0.02085941
# Построим четыре модели гребневой регрессии с различными значениями
# lambda: 2.7 (кНКВ), 4.0 (кLW), 6.8 (GCV) и 0 (OLS) .
(ridge1 <- lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata, lambda = 2.7))
x1          x2          x3          x4          x5          x6
5.18630128 0.74553130 -0.08257060 0.35314248 0.13822561 0.17157641 0.02063876

(ridge2 <- lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, lambda = 4.0))
x1          x2          x3          x4          x5          x6
5.18630128 0.70928392 -0.04437111 0.33906950 0.13068938 0.16810009 0.01982505
(ridge3 <- lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata, lambda = 6.8))
x1          x2          x3          x4          x5          x6
5.18630128 0.64312193 0.01142751 0.32437084 0.11900851 0.15938204 0.01863222
# Модель с lambda=0 сводится к полной модели OLS
(ridge4 <- lm.ridge(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata, lambda = 0))
x1          x2          x3          x4          x5          x6
5.18630128 0.61072813 -0.50783517 0.90961393 0.15646842 0.18452901 0.03006552

```

Рассчитаем для всех гребневых моделей средние квадраты ошибки прогноза на данных экзаменационной выборки (к сожалению, метода `predict()` для функции `lm.ridge()` не предусмотрено):

```

ridge1.mspe <- mean( (gy - (gx %*% ridge1$coef + ridge1$ym))^2 )
1.143391
ridge2.mspe <- mean( (gy - (gx %*% ridge2$coef + ridge2$ym))^2 )
1.129384
ridge3.mspe <- mean( (gy - (gx %*% ridge3$coef + ridge3$ym))^2 )
1.109517
ridge4.mspe <- mean( (gy - (gx %*% ridge4$coef + ridge4$ym))^2 )
1.189688

```

При построении лассо-моделей оптимальное значение параметра фракционирования  $s$  будем находить путем минимизации  $C_p$ -критерия Мэллоу и с использованием перекрестной проверки:

```

library(lars)
M.lasso <- lars(as.matrix(trdata[,2:7]),trdata[,1], type="lasso")
plot(las, plottype="coefficients") ; plot(las, plottype="Cp")
# Из графика для Cp получили параметр фракционирования S= 0.56
las.Cp <- predict(M.lasso, as.matrix(trdata[,2:7]), s=0.56,
type="coefficient", mode="fraction")

```

```

# А теперь попробуем рассчитать его значение перекрестной проверкой
r <- cv.lars(as.matrix(trdata[,2:7]),trdata[,1])
(bestfrac <- r$index[which.min(r$cv)]) # Кросс-проверка
0.434
las.CV <- predict(M.lasso, as.matrix(trdata[,2:7]),s=bestfrac,
  type="coefficient",mode="fraction")
las.CV # Получение коэффициентов модели
$coefficients
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
0.77168874 0.00000000 0.04019982 0.00000000 0.08479717 0.00000000
# При s=1 лассо-модель сводится к полной модели OLS1
las.OLS <- predict(M.lasso, as.matrix(trdata[,2:7]), s=1,
  type="coefficients", mode="fraction")
las.OLS
$coefficients
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
0.61072813 -0.50783517 0.90961393 0.15646842 0.18452901 0.03006552

```

Средние квадраты ошибки прогноза на данных экзаменационной выборки:

```

predlas <- predict.lars(M.lasso, newx=gx, type="fit", mode="fraction",s=0.434)
las1.mspe <- mean( (gy - predlas$fit)^2 )
1.187218
predlas <- predict.lars(M.lasso, newx=gx, type="fit", mode="fraction", s=0.56)
las2.mspe <- mean( (gy - predlas$fit)^2 )
1.194602
predlas <- predict.lars(M.lasso, newx=gx, type="fit", mode="fraction", s=1)
las3.mspe <- mean( (gy - predlas$fit)^2 )
1.198071

```

### Регрессия на главные компоненты

На первом этапе найдем значения главных компонент с использованием функции `princomp()` и выясним, как распределена по главным компонентам объясняемая ими доля общей дисперсии:

```

tr.pca <- princomp(~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, data=trdata)
summary(tr.pca) ; plot(tr.pca)
Importance of components:
      Comp.1  Comp.2  Comp.3  Comp.4  Comp.5  Comp.6
Standard deviation  1.7368644 1.2559060 0.9880699 0.47281774 0.28653718 0.0637169144
Proportion of Variance 0.5130439 0.2682483 0.1660344 0.03801983 0.01396319 0.0006904499
Cumulative Proportion 0.5130439 0.7812922 0.9473265 0.98534636 0.99930955 1.000000000

```

Выведем для анализа факторные нагрузки на исходные переменные:

```

loadings(tr.pca)
Loadings:
      Comp.1  Comp.2  Comp.3  Comp.4  Comp.5  Comp.6
x1 -0.510 -0.210      0.747      -0.361
x2 -0.492 -0.311     -0.649     -0.483
x3 -0.532 -0.278      0.797
x4 0.335 -0.611      -0.709
x5 0.318 -0.632     0.129 0.694
x6      0.994

```



Вторым шагом найдем значения главных компонент для данных из экзаменационной выборки и перейдем к производным переменным в пространстве главных компонент:

```
pcomp.tr <- predict(tr.pca)
pc1 <- pcomp.tr[,1]
pc2 <- pcomp.tr[,2]
pc3 <- pcomp.tr[,3]
pc4 <- pcomp.tr[,4]
pc5 <- pcomp.tr[,5]
pc6 <- pcomp.tr[,6]
```

Рассчитаем модель линейной регрессии на шесть переменных, соответствующих всем главным компонентам (т.е. не ограничивая последовательность собственных значений). Эта модель фактически сводится к полной МНК-модели на исходные переменные `ols1`, хотя и отличается от нее значениями коэффициентов:

```
pcr1 <- lm(y ~ pc1 + pc2 + pc3 + pc4 + pc5 + pc6)
summary(pcr1)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.186301    0.142052  36.510 < 2e-16 ***
pc1          -0.433444    0.081787  -5.300 3.77e-06 ***
pc2          -0.438356    0.113107  -3.876 0.000358 ***
pc3          -0.008835    0.143767  -0.061 0.951285
pc4           0.750803    0.300438   2.499 0.016352 *
pc5          -0.097052    0.495755  -0.196 0.845716
pc6           0.751324    2.229428   0.337 0.737754
---
Residual standard error: 1.004 on 43 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5352,    Adjusted R-squared:  0.4703
F-statistic: 8.251 on 6 and 43 DF,  p-value: 5.747e-06
```

Отметим такой парадокс: мы получили модель с характеристиками ( $RSE$ ,  $R^2$ ,  $R^2_{adj}$ , F-критерий), идентичными `ols1`, хотя проблема мультиколлинеарности переменных теперь отсутствует. Максимальный коэффициент корреляции между преобразованными переменными не превышает 0.25 (для исходных переменных он доходил до 0.989):

```
cor(pcomp.gen)
      Comp.1      Comp.2      Comp.3      Comp.4      Comp.5      Comp.6
Comp.1 1.00000000  0.13364140  0.003681865  0.019540693  0.10729636  0.25095819
Comp.2 0.133641402  1.00000000  0.040613638 -0.196402431  0.04131167  0.03071873
Comp.3 0.003681865  0.04061364  1.000000000  0.006022093 -0.21084556  0.15956346
Comp.4 0.019540693 -0.19640243  0.006022093  1.000000000 -0.09829697 -0.02395636
Comp.5 0.107296363  0.04131167 -0.210845556 -0.098296972  1.00000000  0.08981856
Comp.6 0.250958194  0.03071873  0.159563465 -0.023956355  0.08981856  1.00000000
```

Заметим, что в модели `pcr1` статистически значимыми оказались коэффициенты при переменных  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_4$ . Поэтому вторую модель, основанную на подмножестве информативных главных компонент, получим, запустив пошаговую процедуру, основанную на AIC-критерии:



```

pcr2 <- step(pcr1)
summary(pcr2)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.18630     0.13759  37.694 < 2e-16 ***
pc1          -0.43344     0.07922  -5.472 1.78e-06 ***
pc2          -0.43836     0.10955  -4.001 0.000227 ***
pc4           0.75080     0.29100   2.580 0.013137 *
---
Residual standard error: 0.9729 on 46 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5335,    Adjusted R-squared: 0.5031
F-statistic: 17.53 on 3 and 46 DF,  p-value: 9.894e-08

```

Для получения прогнозируемых значений регрессии на главные компоненты и оценки ошибок моделей необходимо привести значения переменных из экзаменационной выборки в пространство новых координат:

```

pcomp.gen <- predict(tr.pca, newdata=gendata)
genpcdata <- data.frame(pcomp.gen)
names(genpcdata) <- c("pc1", "pc2", "pc3", "pc4", "pc5", "pc6")
pcr1.mspe <- mean( (gy - predict(pcr1, newdata=genpcdata))^2 )
1.194602
pcr2.mspe <- mean( (gy - predict(pcr2, newdata=genpcdata))^2 )
1.192678

```

### **Результаты и некоторые выводы**

Сведем результаты приведенных выше расчетов в одну таблицу и отсортируем ее по увеличению ошибки:

```

mspe.all <- c(
ols1.mspe,    ### OLS (все переменные)
ols2.mspe,    ### МНК (2 переменные, найденные включениями с исключениями)
ols3.mspe,    ### МНК (2 переменные, найденные полным перебором)
ols4.mspe,    ### МНК (1 переменная, найденная методом "forward selection")
ridge1.mspe,  ### гребневая модель (lambda получена НКВ)
ridge2.mspe,  ### гребневая модель (lambda получена L-W)
ridge3.mspe,  ### гребневая модель (lambda получена обобщенной c-v)
ridge4.mspe,  ### гребневая модель с lambda= 0
las1.mspe,    ### лассо (фракция найдена кросс-проверкой c-v)
las2.mspe,    ### лассо (фракция найдена Cp)
las3.mspe,    ### лассо с фракцией = 1
pcr1.mspe,    ### PCA-регрессия с полным набором главных компонент
pcr2.mspe)    ### PCA-регрессия (используются 3 главных компоненты)
sort(mspe.all)

```

№№ пп	Тип регрессии	Средний квадрат ошибки
1	Гребневая ( $\lambda$ получена перекрестной проверкой)	1.109517
2	Гребневая ( $\lambda$ параметр по L-W)	1.129384
3	Гребневая ( $\lambda$ параметр по Hoerl-Kennard-Baldwin)	1.143391
4	Лассо (параметр $s$ найден минимизацией $C_p$ -критерия Мэллоу)	1.187218
5	Гребневая с $\lambda=0$	1.189688
6	РСА-регрессия (используется 3 главных компоненты)	1.192678
7	Лассо с $s = 1$	1.194602
8	РСА-регрессия с полным набором главных компонент	1.194602
9	МНК (все переменные)	1.194602
10	Лассо (параметр $s$ найден перекрестной проверкой)	1.198071
11	МНК (2 переменные, найденные включениями с исключением)	1.222605
12	МНК (2 переменные, найденные полным перебором)	1.225119
13	МНК (1 переменная, найденная методом "forward selection")	1.319385

Отметим, что три модели (7-9) совершенно идентичны, поскольку все они сводятся к линейной МНК-модели (OLS1) с полным набором переменных. Должна быть им идентична и модель 5, однако по неясной причине вычислительного характера оценки ее параметров незначительно отличаются.

*Выводы:*

1. Использование гребневой регрессии для прогноза существенно превышает эффективность остальных моделей в условиях умеренной мультиколлинеарности данных.

2. Лассо-регрессия и регрессия на главные компоненты занимают промежуточное положение, причем для метода лассо не вполне решенной является проблема нахождения параметра фракционности  $s$ .

3. Обычная линейная МНК-модель показывает наихудшие результаты; особенно это касается так называемых "оптимальных" моделей с информативным набором параметров, выбранных на основе AIC.

4. Статистическая значимость коэффициентов, оцененная по  $t$ -критериям, а также величина таких критериев, как дисперсионное отношение Фишера, коэффициент детерминации, информационный AIC-критерий, могут служить оценками "адекватности" линейной модели, предназначенной для *объяснения* изучаемого явления, но не имеют решающего значения при выборе наиболее эффективной модели для *прогнозирования*.

## 8. ОБОБЩЕННЫЕ, СТРУКТУРНЫЕ И ИНЫЕ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ



### 8.1. Модели сглаживания

Как обсуждалось в предыдущей главе, основная цель регрессионного анализа состоит в осуществлении разумной (т.е. адекватной поставленной задаче) *аппроксимации* математического ожидания отклика  $E[Y|x_1, x_2, \dots, x_m]$  по обучающей выборке с помощью некоторой функции регрессии  $f(\dots)$ . Если в центре внимания находится попытка "объяснить" внутренние механизмы изучаемого явления и оценить при этом сравнительную роль отдельных факторов, то используются параметрические методы регрессионного анализа. Такой подход часто предполагает, что искомая модель имеет некоторую предписанную ей функциональную форму  $f(\dots)$  и полностью описывается конечным набором параметров.

Типичным примером параметрической модели является полиномиальная регрессия (см. раздел 7.4), параметры которой представлены вектором коэффициентов  $\beta$  и случайной ошибкой модели  $\sigma_Y$ . Здесь на *всем диапазоне* значений  $x$  осуществляется приближение данных *одной и той же функцией* (т.е. полиномом заданной степени). На отдельных участках оси  $x$  отклонения от аппроксимируемой кривой могут оказаться значительными, но если величина общей ошибки  $\sigma_Y$  будет приемлема в практических целях, мы принимаем *единую модель* на всей области определения  $x$ .

Естественно, что неверная спецификация выбранной функциональной формы единой модели может привести к серьезным, а часто и непредсказуемым искажениям при интерпретации результатов. Поэтому возникла идея: а нельзя ли для разных интервалов  $x$  строить не одну, а несколько самостоятельных моделей, или как-то динамически подстраивать коэффициенты полинома при движении слева направо по оси  $x$ ? Так оказалось, что прекрасной альтернативой классической регрессии является непараметрическое *сглаживание* (*smoothing*).

Сразу оговоримся, что тут есть некоторая проблема с терминологией. При широко применяемом сглаживании, например, компьютерных изображений (*Image Smoothing*), в процессе цифровой обработки непрерывная функция не строится, и преобразуются, скажем, только цвета пикселей. Мы же ниже рассматриваем варианты локальной аппроксимации для получения сглаженной функции. К сожалению, прямой перевод *smooth fitted curve* иного выхода нам не предоставляет.

Непараметрическое сглаживание применяется, если по условию поставленной задачи исследования важна эффективная интерполяция значений  $y$  с минимальной ошибкой, а конкретный набор оцениваемых параметров модели самостоятельного интереса не представляет. Кроме того, при сглаживании практически невозможно проводить *экстраполяцию*, т.е. распространять оценку модели за пределы выборочного диапазона  $x$  для прогноза значений отклика  $Y$ .

Любопытна точка зрения (см. прекрасные лекции С. Shalizi на [stat.cmu.edu](http://stat.cmu.edu)), что сглаживание, классическая регрессия и даже выборочное среднее – лишь частные случаи применения к данным линейных сглаживающих фильтров (англ. *smoothers*). Все они задаются общей функцией регрессии для произвольного текущего значения  $x_0$  в следующей форме:

$$\hat{y}(x_0) = \sum_{i=1}^n y_i w(x_i, x_0),$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – набор из  $n$  значений выборочного ряда, в котором для каждого значения предиктора  $x_i$  известно точное (в пределах ошибки измерения) значение отклика  $y_i$ ;  $x_0$  – значение предиктора, для которого мы хотим найти прогнозируемую величину  $\hat{y}(x_0)$ ;  $w(\dots)$  – некоторая функция расчета весовых коэффициентов, оцениваемых по заданной выборке.

Действительно, многие классические статистические формулы являются частным случаем приведенного выше выражения. Например, приняв  $w(x_i, x_0) = 1/n$  для  $x_0$  и всех  $x_i$ , получим в итоге простое среднее для  $y$ . Оценки отклика по методу  $k$ -ближайших соседей (англ.  $k$ -nearest neighbors) основаны на взвешивающей функции  $w(x_i, x_0) = 1/k$ , если между  $x_i$  и  $x_0$  находится менее  $k$  наблюдений, и  $w(x_i, x_0) = 0$  в противном случае. Наконец, простая модель линейной регрессии (без свободного члена) приобретает привычный вид, если принять  $w(x_i, x_0) = (x_i / ns_x^2) x_0$ , поскольку

$$\hat{y}(x_0) = \hat{b}x_0 = x_0 \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i (x_i / ns_x^2) x_0.$$

Процедуры сглаживания и другие методы непараметрической аппроксимации предоставляют в настоящее время целый набор гибких и эффективных средства анализа неизвестных регрессионных зависимостей. Варьируя формой функции  $w(x_i, x_0)$ , можно получить различные версии алгоритмов сглаживания: скользящей средней, экспоненциальной моделью, ядерной функцией, сплайнами, локальной полиномиальной регрессией LOESS или LOWESS, методом Хольта-Винтерса и др. (Hastie et al., 2009). При сглаживании данных уже не производится "втискивание данных в прокрустово ложе" фиксированной параметризации, а сама модель регрессии имеет динамический функциональный характер, подстраиваемый под текущие значения предикторов.

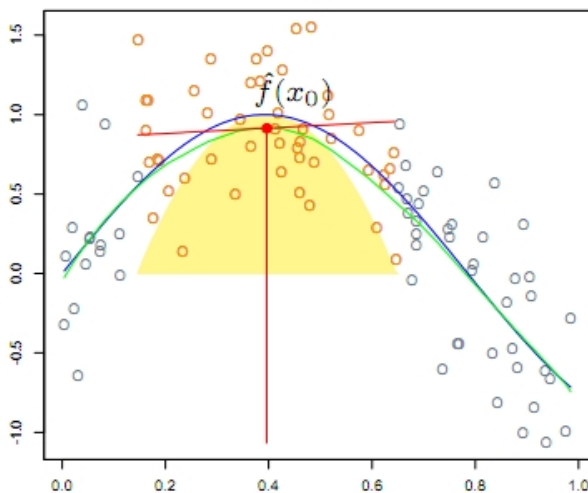
*Модели сглаживания* отклика  $y$  на шкале независимой переменной  $x$  основаны на предположении, что для оценки значения  $\hat{y}(x_0)$  в точке  $x_0$  наиболее ценными являются наблюдения, находящиеся в окрестности  $[x_0 - h, x_0 + h]$ , т.е. в "окне" шириной  $2h$ .

Метод локальной регрессии (или LOESS – акроним от *local regression*) представляет собой процедуру вычисления параметров линейной  $y_i = \beta_0(x_0) + \beta_1(x_0) \cdot x_i + \varepsilon_i$  или полиномиальной (квадратичной) модели  $y_i = \beta_0(x_0) + \beta_1(x_0) \cdot x_i + \beta_2(x_0) \cdot x_i^2 + \varepsilon_i$ . Форма записи  $\beta_j(x_0)$  означает, что коэффициенты  $\beta_j$  подстраиваются динамически для каждого текущего значения  $x_0$ . Подгонка такой модели методом наименьших квадратов осуществляется с учетом вектора весов  $w(x_0, x_i, h)$ , которые тем больше, чем ближе точки исходной выборки  $x_i$  располагаются по отношению к тестируемому объекту  $x_0$ :

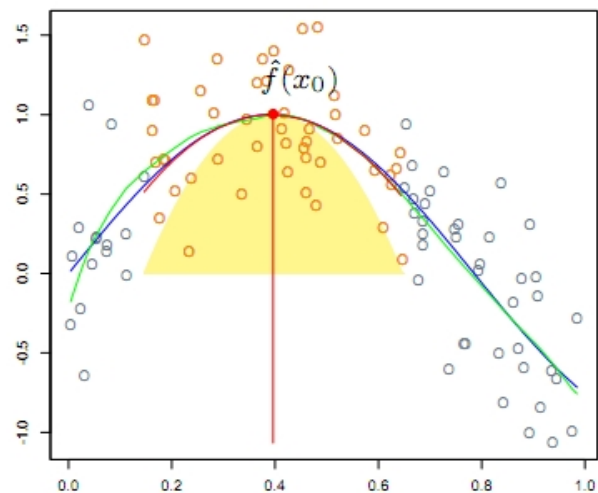
$$\min \sum_{i=1}^n w(x_0, x_i, h) [y_i - \beta_0(x_0) - \beta_1(x_0)x_i]^2,$$

т.е. при этом выполняется скользящее усреднение данных в окне некоторой ширины  $2h$ .

Ниже показан результат (кривая зеленого цвета) сглаживания двумя различными моделями 100 пар точек  $x_i, y_i$ , сгенерированных со случайной гауссовой ошибкой относительно синусоиды  $Y = \sin(4X)$ , которая представлена на графике кривой синего цвета (пример заимствован из Hastie et al., 2009):



Линейная модель



Квадратичная модель

Сглаженные значения  $\hat{y}(x_0)$  в точке  $x_0$  (которая залита красным цветом), оцениваются по линейной или квадратичной модели, построенной по точкам, попавшим в "окно" (кружки красного цвета). Дополнительно при этом учитываются также веса  $w$ , причем наибольшие их значения приписываются наблюдениям, находящимся ближе к  $x_0$ . Аппроксимирующая кривая рассчитывается последовательно по мере передвижения "окна" слева направо по шкале  $x$ , в результате чего новая порция наблюдений включается в расчет локальных моделей взамен исключаемых старых.

Воспользовавшись такой процедурой, мы проделываем своеобразный "ядерный трюк" ([Анатольев, 2009](#)): нам нет уже необходимости задумываться над выбором базисной функции регрессии, либо остерегаться, что не подтвердятся те или иные исходные предположения анализа. Нам достаточно выбрать степень локального полинома и ширину окна  $h$  (что, впрочем, тоже является непростой задачей).

На рисунке можно усмотреть важные отличия линейной сглаживающей модели от квадратичной: на концах области определения предпочтительнее более устойчивая линейная модель, тогда как при аппроксимации "горбов" (экстремумов), преимущество получает квадратичная модель.

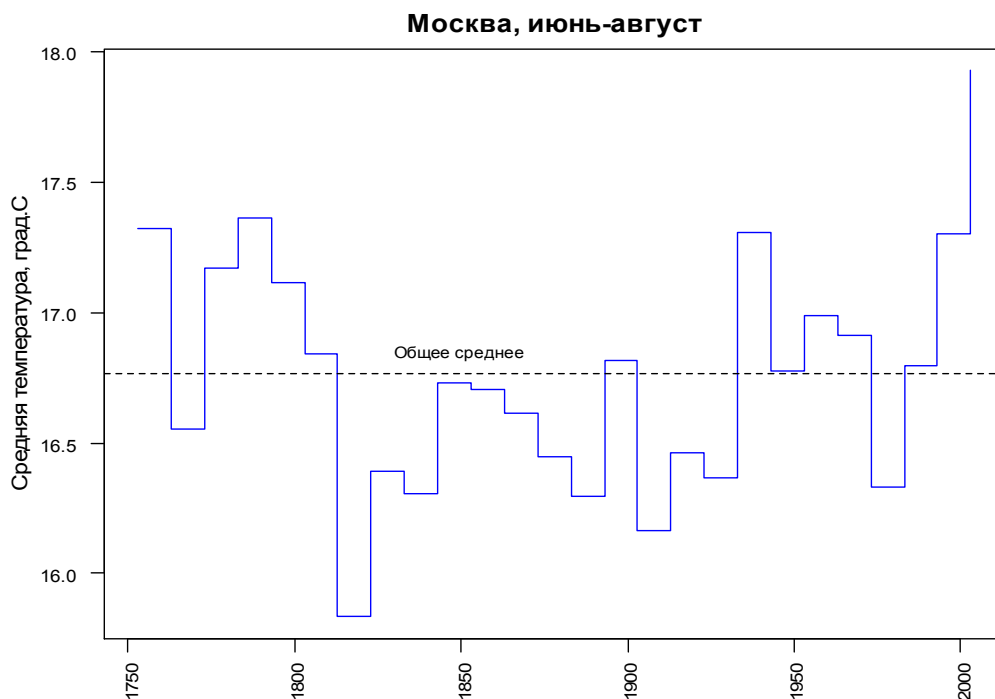
Ширина окна на каждом шаге аппроксимации локальной регрессией обычно принимается равной стандартному отклонению задействованных точек (соответствующая ему гауссиана показана на вышеприведенном рисунке сегментом желтого цвета), т.е. не является фиксированной. Поэтому важным параметром локальной регрессии является *степень сглаживания*  $Span = k/n$ , которая соответствует доле (фракции) числа точек, используемых для подбора коэффициентов в окрестностях точки  $x_0$ , от общего объема выборки  $n$  (Cleveland, 1979).

Выбирая пример для демонстрации моделей сглаживания, мы постарались внести "свою лепту ( $\cong 5$  коп.)" в рассмотрение проблемы всемирного потепления. Воспользуемся базой свободно распространяемых данных научной ассоциации *Berkeley Earth* и отыщем там массив наблюдений среднемесячной температуры в г. Москве и ее окрестностях (файл [55.45N-36.85E-TAVG-Trend.txt](#) может быть свободно скачан с сайта ассоциации [berkeleyearth.org](#)). Для удобства использования выделим ряд, охватывающий 260-летний (с 1753 по 2012 гг.) временной период без пропусков, и преобразуем его в матрицу  $260 \times 12$ , где в столбцах будут представлены среднемесячные температуры за каждый год. Поскольку данные Беркли содержат только отклонения (anomaly), то переведем матрицу в значения натуральных температур (базовые среднемесячные значения за период с января 1951 г. по декабрь 1980 г. представлены там же):

```
moscow.dat <- read.delim("TAVG_Moscow.txt", header = TRUE)
Year.list <- unique(moscow.dat$Year)
moscow.mat <- matrix(moscow.dat$Anomaly,
                    nrow=260, ncol=12, byrow = TRUE)
Tbase <- c(-10.39, -9.28, -4.06, 4.80, 11.96, 16.16,
          17.76, 16.25, 10.77, 4.37, -1.86, -6.65)
moscow.nmat <- t(sapply(1:260,
                       function(i) moscow.mat[i,]+Tbase))
dimnames(moscow.nmat)=list(Year.list, 1:12)
head(moscow.nmat)
  1      2      3      4      5      6      7      8      9     10     11     12
1753 -10.168 -10.462 -1.864 4.772 12.496 16.405 17.899 16.014 11.101 4.793 -2.072 -12.491
1754 -10.737 -12.392 -4.202 7.699 12.498 17.522 17.826 14.832 9.764 4.518 -2.323 -6.163
1755 -11.605 -12.385 -4.582 4.812 13.596 18.586 19.175 15.056 10.549 4.626 -1.155 -8.790
1756 -7.467 -4.435 -3.497 5.885 12.295 18.091 18.455 14.325 10.830 3.344 -3.778 -9.951
1757 -12.616 -6.441 -3.169 6.169 12.907 20.278 22.321 17.593 12.540 -0.025 -2.585 -11.060
1758 -15.429 -10.831 -4.825 3.208 10.184 15.941 17.803 14.317 8.503 -1.073 -2.625 -8.531
# Сохраним матрицу данных для последующего использования
save(moscow.nmat, Year.list, file="TAVG_Moscow.RData")
```

Проведем анализ динамики средней летней температуры (июнь-август). Попробуем сначала обойтись без моделей сглаживания: разобьем ряд на 10-летние отрезки, рассчитаем средне-летнюю температуру за каждое десятилетие и построим ломаную кривую с уступами:

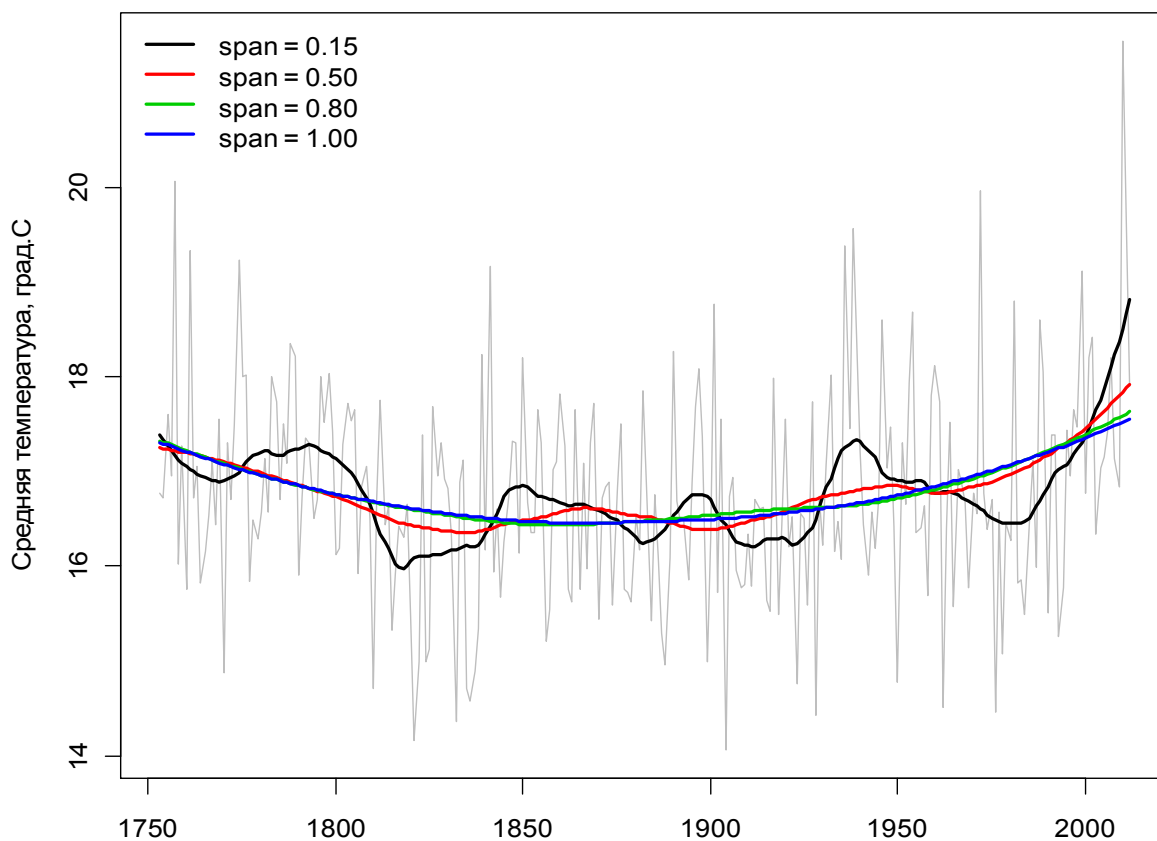
```
T.summer <- apply(moscow.nmat[,6:8], 1, mean)
summary(T.summer)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 14.06  16.06   16.71   16.76   17.43   21.54
moscow.mat10 <- matrix(T.summer,nrow=26,ncol=10, byrow = TRUE)
plot(seq(1753, 2003, by = 10), rowMeans(moscow.mat10),
  type = "s", ylab = "Средняя температура, град.С",
  xlab = NA, col = "blue", lwd = 1.5, las = 2,
  cex.axis = 0.8, main = "Москва, июнь-август")
abline(h = mean(T.summer), col = 1, lty = 2, lwd = 1.2)
text(1830,16.85, adj = 0, "Общее среднее", cex = 0.75)
```



Выполним теперь аппроксимацию этих же данных с использованием локальной регрессии, реализованной в R функцией `loess()`. Чтобы подобрать адекватную степень сглаживания кривой, выполним построение серии моделей, варьируя величину `span`:

```
# Создаем список значений параметра сглаживания
spanlist <- c(0.15, 0.50, 0.8, 1.0)
plot(Year.list,T.summer, col="grey", type="l", xlab="",
  ylab="Средняя температура, град.С")
for (i in 1:length(spanlist)) {
  T.loess <- loess(T.summer ~ Year.list, span=spanlist[i])
  T.predict <- predict(T.loess)
  lines(Year.list,T.predict,col=i, lwd=2)
}
legend ("topleft",c(paste("span =", formatC(spanlist,digits=2,
  format="f"))), col=1:length(spanlist), lwd=2, bty="n")
```





Отметим, что после  $\text{span} = 0.5$  форма кривой практически стабилизируется. По результатам анализа нельзя сказать о значительном повышении летней температуры, хотя "кошмарное" лето 2010 г. внесло существенное возмущение и в модель, и в природу (в г. Тольятти был практически уничтожен 300-летний сосновый лес).

**Ядерная модель сглаживания** отклика  $y$  на шкале независимой переменной  $x$  основывается практически на тех же исходных предпосылках, что и локальная регрессия. Основное отличие – в способе оценки значения  $\hat{y}(x_0)$  в точке  $x_0$ . Например, для функции регрессии среднего значения отклика в окне  $2h$  можно воспользоваться оценкой Надарайа-Уотсона (Nadaraya, Watson):

$$\hat{y}(t_0) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i w(x_i, x_0, h)}{\sum_{i=1}^n w(x_i, x_0, h)},$$

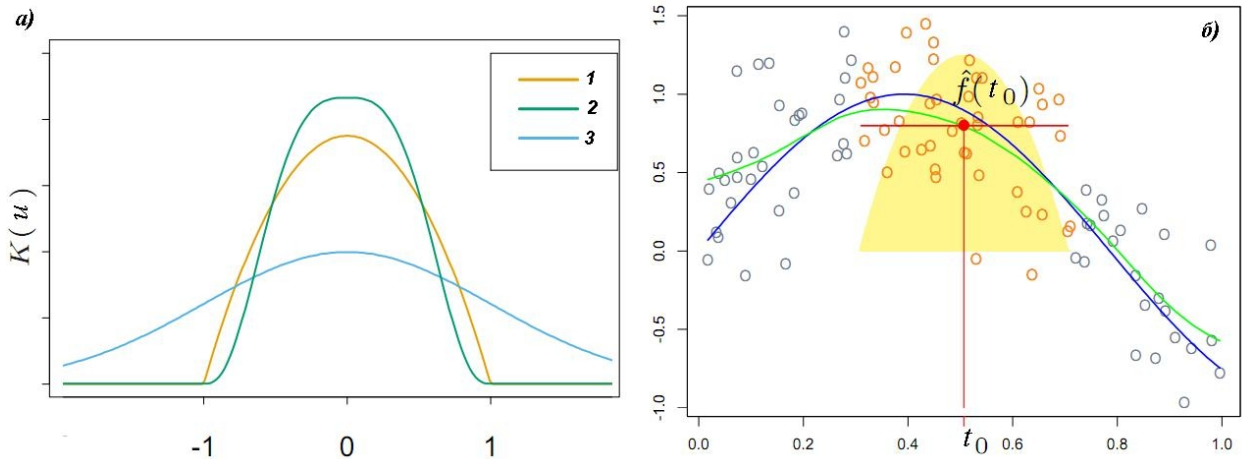
где  $w(x_i, x_0, h) = K(u) / h$ ,  $u = (x_i - x_0) / h$ ,  $K(u)$  – некоторая симметричная ядерная функция, интегрируемая на всем интервале варьирования данных. Если взять интеграл от  $K(u)$  по всей области определения, которой может быть отрезок (обычно  $[-1, 1]$ ) или вся числовая ось, то  $\int K(u) du = 1$ .

На приведенном ниже рисунке слева показана форма трех наиболее популярных ядерных функций:

- 1 – ядро Епанечникова  $K(u) = 3(1 - u^2)/4$ ;
- 2 – "трижды кубическая функция"  $(1 - |u|^3)^3$ ;

3 – функция нормального гауссового ядра  $K(u) = (e^{-u^2/2}) / \sqrt{2\pi}$ , которая, в отличие от двух предыдущих, не принимает значение 0 за пределами интервала  $[-1, 1]$ .

Справа на рисунке приведен пример сглаживания точек в окне, образованном ядром Епанечникова (область, закрашенная желтым цветом) относительно текущего значения  $x_0$ : черным показана теоретическая кривая, зеленым – кривая ядерного сглаживания, в подстройке весов которой каждый раз участвуют только точки, отмеченные красным цветом.



Как и в случае с локальной регрессией, для успешной аппроксимации нам необходимо выбрать ширину окна  $h$  и вид  $K(u)$  ядерного регрессора (если нет иных предпочтений, разумно просто воспользоваться гауссовым ядром).

Роль параметра ширины окна  $h$  чрезвычайно велика. Если параметр  $h$  слишком велик, то это приводит к явлению сверхсглаженности: кривая вырождается в прямую и перестает отслеживать тенденцию изменения наблюдений. Если же  $h$  слишком мал, то модель начнет следовать за случайными флуктуациями наблюдений и недосглаженная кривая будет выглядеть чересчур извилистой.

Сложность проблемы здесь в том, что если попытаться минимизировать традиционный критерий качества модели – среднеквадратичную ошибку регрессии в точках исходной выборки, то она устремится к нулю и выберет окно минимальной ширины с одним единственным значением (т.е. каждое наблюдение будет объясняться только им самим). Такое сглаживание нас, конечно, не устраивает, поэтому разумной альтернативой поиска оптимального  $h$  будут внешние критерии – два варианта функции кросс-проверки (см. выше раздел 7.4):

$$CV_2(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{-i}(x_i))^2 \quad \text{или} \quad CV_1(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_{-i}(x_i)|$$

где  $\hat{y}_{-i}(x_i)$  – оценка Надарая-Уотсона в точке  $x_i$ , основанная на всех наблюдениях, кроме  $i$ -го. Оптимальная в смысле процедуры скользящего контроля ширина окна  $h^{CV}$  соответствует минимуму ошибки  $CV(h)$  на независимом наборе данных.

Приведем функцию на языке R, которая рассчитывает этот оптимум для обоих критериев кросс-проверки – параметр `band` функции ядерного сглаживания `ksmooth()`:

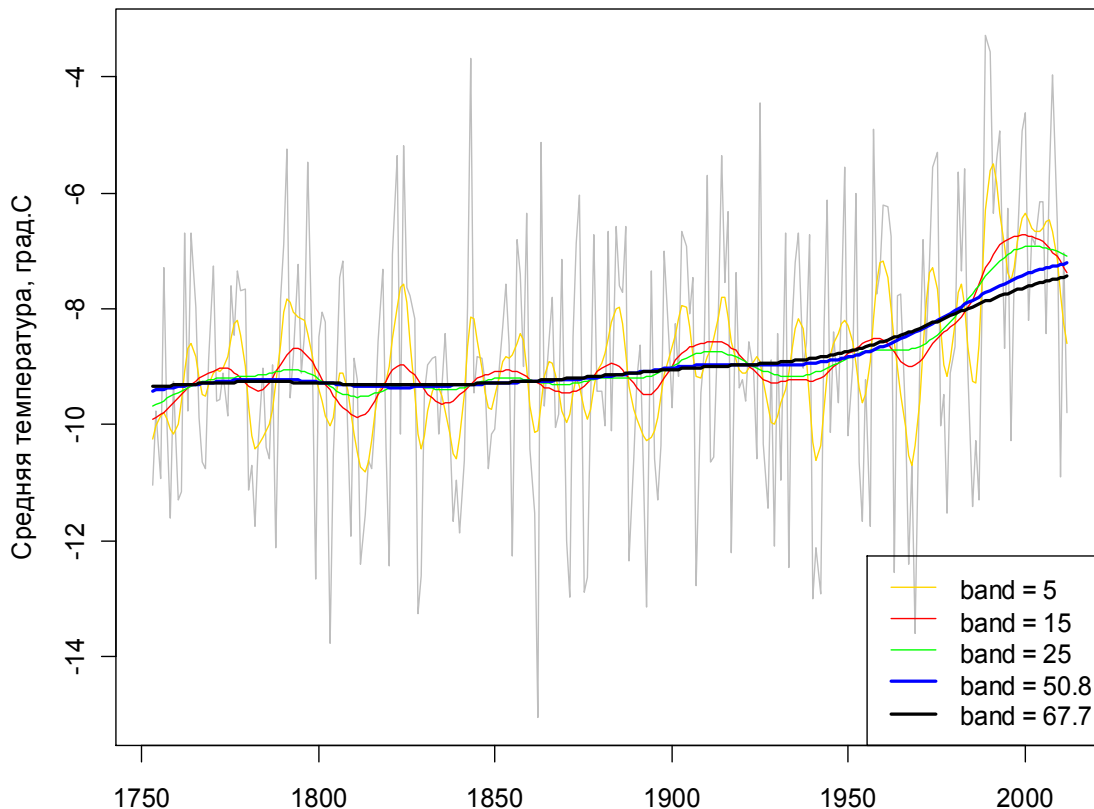
```
# Функция оценки оптимальной ширины окна кросс-проверкой
bandcrossval <- function(x, y, nstep=20, bmax=0, L1=TRUE) {
  if (bmax==0) {bmax<- 1.5*sqrt(var(x))}
  bstep<- bmax/nstep ; n <- length(x) ; SSE<- c(1:nstep)*0
  for (i in 1:nstep) {
    for (k in 2:(n-1)) {
      xx<- c(x[1:(k-1)], x[(k+1):n])
      yy<- c(y[1:(k-1)], y[(k+1):n])
      kss<- ksmooth(xx, yy, "normal", ban=(i*bstep),
                    x.points=x[k])
      if (L1==FALSE) {SSE[i]<- SSE[i]+(y[k]-kss$y)^2}
      if (L1==TRUE) {SSE[i]<- SSE[i]+ abs(y[k]-kss$y)}
    }
  }
  k<- c(1:nstep)*bstep
  return(k[SSE==min(SSE,na.rm = TRUE)])
}
```



Рассчитаем теперь среднюю зимнюю температуру в г. Москве для каждого астрономического года, начиная с 1753 г.:

```
T.winter <- apply(moscow.nmat[,c(1,2,12)], 1, mean)
summary(T.winter)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-15.050 -10.400  -8.925  -8.894  -7.331  -3.294
# Сглаживание ядерной функцией и вывод графика
bandcrossval(Year.list, T.winter, L1=FALSE)
[1] 67.67976 # Квадрат ошибки при кросс-проверке
bandcrossval(Year.list, T.winter)
[1] 50.75982 # Абсолютная ошибка при кросс-проверке
plot(Year.list, T.winter, ylab="Средняя температура, град.С",
     xlab="", col="grey", type="l",
     main = "Москва: январь, февраль, декабрь")
lines(ksmooth(Year.list, T.winter,
              "normal", bandwidth=5), col="gold")
lines(ksmooth(Year.list, T.winter,
              "normal", bandwidth=15), col="red")
lines(ksmooth(Year.list, T.winter,
              "normal", bandwidth=25), col="green")
lines(ksmooth(Year.list, T.winter,
              "normal", bandwidth=50.8), col="blue", lwd=2)
lines(ksmooth(Year.list, T.winter,
              "normal", bandwidth=67.7), col=1, lwd=2)
legend("bottomright", lwd = c(1,1,1,2,2),
       c("band = 5", "band = 15", "band = 25", "band = 50.8",
         "band = 67.7"), col = c("gold", "red", "green", "blue", 1))
```

Москва: январь, февраль, декабрь



Рассчитанные с помощью функции `bandcrossval()` оценки оптимальной ширины окна `bandwidth` равны 67.7 (квадрат ошибки) и 50.8 (абсолютная ошибка при кросс-проверке). Тенденция повышения зимней температуры, начиная с 1950 г., выглядит с использованием этих параметров сглаживания вполне очевидной.

**Аппроксимация сплайнами** выполняет сглаживание в виде композиции из "кусочков" гладкой функции – как правило, полиномов. Свое происхождение термин "сплайн" ведет от длинных гибких линеек, используемых чертежниками в качестве лекал для проведения плавных кривых через заданные точки. Пусть отрезок оси абсцисс  $[a, b]$  разбит на  $(k + 1)$  частей точками  $a_1 < \dots < a_k$ . Сплайном, или кусочно-полиномиальной функцией степени  $m$  с  $k$  сопряжениями в точках  $a_1, \dots, a_k$  называется функция  $f_j(x)$ , которая на каждом интервале  $(a_j, a_{j+1})$ , где  $j = 0, \dots, k$ , описывается алгебраическим полиномом  $P_j(x)$  степени  $m$ . Коэффициенты полиномов  $P_j(x)$  согласованы между собой так, чтобы выполнялись условия непрерывности функции  $f_j(x)$  и ее  $(m - 1)$  производных в узлах сопряжений. Поскольку функция имеет непрерывно дифференцируемые переходы в точках сочленения, участки состыковываются между собой так, что получившаяся кривая в целом также оказывается гладкой. Наиболее употребительны кубические сплайны с  $m = 3$ , которые обладают свойством минимальной кривизны (Wood, 2006).

В общем случае мерой близости некоторой кривой  $g$  к данным обучающей выборки является сумма квадратов остатков  $MSE = \sum_{i=1}^n [y_i - g(x_i)]^2 / n$ . Если не ограничивать количество сопряжений сплайна, то можно достичь хорошей аппроксимации данных, но получить кривую, имеющую много резких локальных изменений. Наоборот, плавность кривой достигается обычно за счет увеличения ошибки сглаживания. Компромисс между этими двумя противоречивыми целями достигается за счет введения штрафа за нарушение плавности, равного интегралу от квадрата второй производной  $SPL = \int (g''(x))^2 dx$ . Если ввести регулирующий параметр сглаживания  $\lambda$ , то функция оптимизации сплайна будет иметь вид  $L(g, \lambda) = MSE + \lambda SPL$ . Оптимальное значение  $\lambda$  находится с использованием бутстреп-методов (Hastie et al., 2009; Maindonald, Braun, 2010).

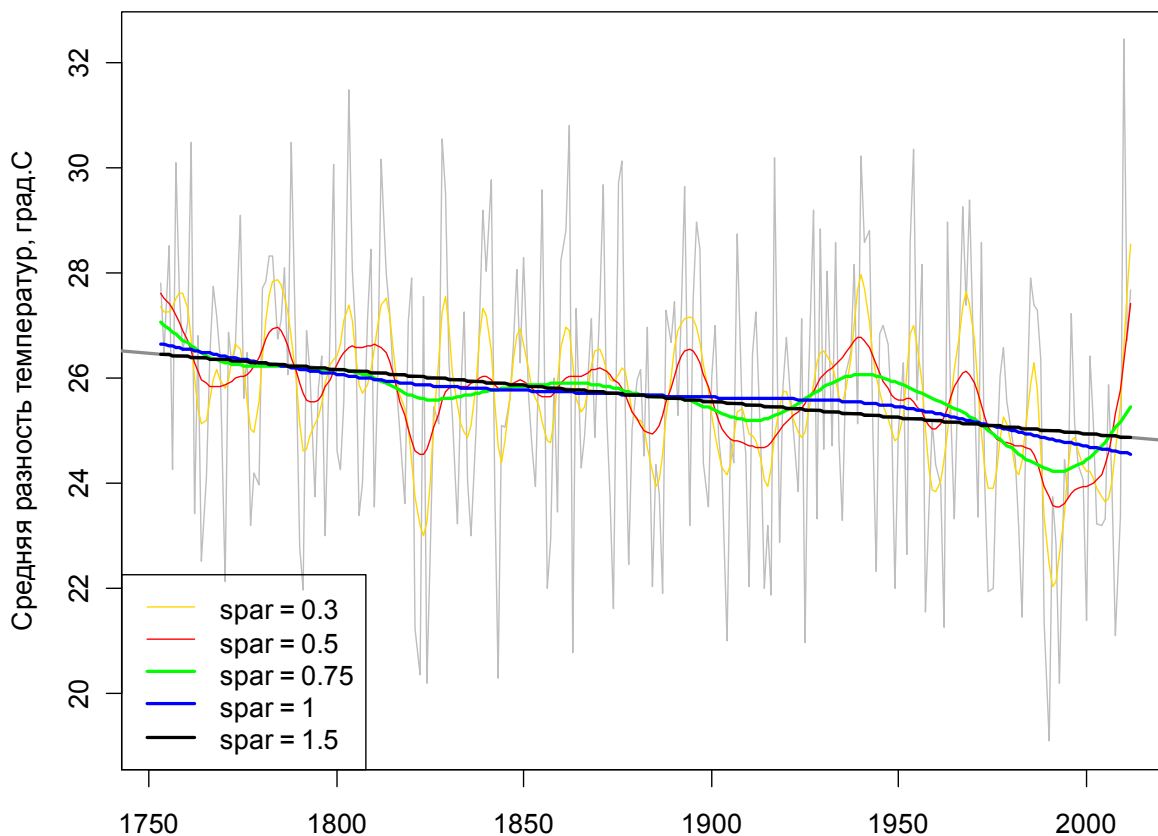
В функции `smooth.spline()`, которая реализует в R сглаживание сплайнами, степень сглаживания задается параметром `spar`, который связан монотонной функцией с величиной  $\lambda$  и обычно (но не обязательно) изменяется на интервале  $[0; 1]$ . Можно указать его конкретное значение, либо задать аргумент `cv=TRUE`, чтобы найти оптимум  $\lambda$  кросс-проверкой.

Рассмотрим теперь в качестве примера сглаживание временного ряда разности летней и зимней температур в г. Москве за последние 260 лет:

```
T.delta <- T.summer - T.winter
summary(T.delta)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 19.08  23.92   25.76   25.66  27.29   32.45
# Выводим кривые сглаживания сплайнами
# для различных значений параметра spar
plot(Year.list, T.delta, col="grey", type="l", xlab="",
      ylab="Средняя разность температур, град.С")
abline(lm(T.delta ~ Year.list), col="grey55", lwd=2)
lines(smooth.spline(Year.list, T.delta, spar=0.3), col="gold")
lines(smooth.spline(Year.list, T.delta, spar=0.5), col="red")
lines(smooth.spline(Year.list, T.delta, spar=0.75),
      col="green", lwd=2)
lines(smooth.spline(Year.list, T.delta, spar=1.0),
      col="blue", lwd=2)
```

```
T.spline <- smooth.spline(Year.list,T.delta, cv=TRUE)
T.spline$spar # Параметр сглаживания найден кросс-проверкой
[1] 1.499964
lines(T.spline, lwd=2) # Оптимальная кривая
legend("bottomleft",c("spar = 0.3","spar = 0.5","spar = 0.75",
  "spar = 1","spar = 1.5"), lwd = c(1,1,2,2,2),
  col = c("gold", "red", "green", "blue", 1))
```

### Москва: разность зимних и летних температур



Интересно, что параметр сглаживания, найденный кросс-проверкой, приводит нас к сплайну, совпадающему с линейной регрессией. Т.е. аппроксимирующая линия обладает свойством нулевой кривизны и вполне ощутимо указывает на то, что климат становится менее континентальным. «А все-таки Она нагревается...» – так говорят о Земле современные Галилеи.

## 8.2. Обобщенные модели регрессии

*Обобщенные модели* расширяют класс общих линейных и нелинейных моделей регрессии, связывая зависимую переменную с факторами и ковариатами посредством задаваемой *функции связи* (link function), причем допускается наличие у отклика произвольного распределения, отличающегося от нормального. При этом охватываются широко используемые статистические модели, такие как линейная регрессия для откликов с нормальным распределением, логистические модели для двоичных данных, лог-линейные модели для счетных данных, модели с дополняющим двойным логарифмированием для интервал-цензурированных данных выживания и многие другие статистические модели.

Обобщенные *линейные* модели GLM (*generalized linear model*) и обобщенные *аддитивные* модели GAM (*generalized additive model*) представляют собой частные случаи общего уравнения нелинейной регрессии

$$y = g^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n \beta_i q_i(x_i) \right]$$

где  $g(y^{-1})$  является функцией связи, а  $q_i(x_i)$  – произвольные функции нелинейного преобразования независимых факторов. Если принимаются некоторые условия тождественности этих функций, то мы получаем следующие классы моделей:

- при  $q_i(x_i) = x_i$  – обобщенную линейную модель  $y = g^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right)$ ;
- при  $g(y) = y$  – обобщенную аддитивную модель  $y = \sum_{i=1}^n \beta_i q_i(x_i)$ ;
- при  $g(y) = y$  и  $q_i(x_i) = x_i$  – обычную линейную регрессию  $y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ .

Обобщенные линейные модели ([McCullagh, Nelder, 1989](#); Venables, Ripley, 2002) дают возможность использовать различные функции связи, конкретный выбор которых зависит обычно от природы случайного распределения отклика  $y$  и его остатков. Существует множество возможных сочетаний связывающих функций по отношению к закону распределения зависимой переменной, и несколько из них могут оказаться одинаково приемлемыми для моделируемых данных. Поэтому при выборе функции связи можно руководствоваться априорными теоретическими соображениями или тем, какой вариант "на глаз" кажется наиболее подходящим.

Функция `glm()` для подгонки обобщенной линейной модели имеет вид:

```
Model <- glm(formula, family=family.generator, data=data.frame)
```

Единственный, по сравнению с функцией `lm()`, новый параметр `family` служит инструментом для описания типа модели и, в свою очередь, вызывает функцию, которая генерирует заданное распределение отклика. Генератор `family.generator` имеет вид:

<наименование распределения>(link = <наименование функции связи>).

Рассмотрим некоторые из комбинаций, задаваемых параметром `family`:

1. Нормальное распределение: `family = gaussian`. Если мы располагаем выборочными значениями переменных  $y$  и  $x$ , измеренными в непрерывных шкалах, и нет оснований отказываться от предположения о нормальном распределении остатков, то функция преобразования является тождеством  $g(y) = y$  (`link = identity`). В некоторых случаях оказывается полезным нормализующее преобразование отклика: логарифмирование (`link = log`) или получение обратной величины (`link = inverse`).

2. Биномиальное распределение: `family = binomial` - применимо только к переменным, представляющим бинарный отклик или количество регистрируемых событий. Пробит- и логит-регрессия основана на функциях связи (`link = probit`) и (`link = logit`); в моделях дожития для интервально цензурированных данных можно использовать также дважды логарифмическую функцию связи (`link = cloglog`).

3. Гамма-распределение: `family = Gamma` - применимо к переменным с положительными значениями масштаба (`scale`) со скосом в направлении больших значений. Если выборочное значение меньше или равно 0, то такие наблюдения должны быть удалены.

4. Распределение Пуассона: `family = poisson` - может быть представлено в виде количества событий, произошедших в фиксированный период времени, и применимо к переменным с неотрицательными целыми значениями. К распределению Пуассона часто применяют логарифмическую функцию связи (`link = log`), чтобы подогнать к счетным данным (частотам событий) лог-линейные модели, используя непрерывный суррогат этого распределения.

5. Квазиправдоподобные генераторы: `family = quasi` – точное распределение отклика не специфицируется, но указывается функция связи и форма зависимости дисперсии от среднего (например: `variance="1/mu^2"`, `variance="constant"`).

При использовании обобщенных аддитивных моделей GAM ([Hastie, Tibshirani, 1990](#), Wood, 2006) вида  $g(y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p q_i(x_i) + \varepsilon$  в качестве функции связи  $g(y)$  чаще всего ограничиваются тождеством  $g(y) = y$ , но, например, в случае биномиального распределения широкое применение находят и модели логита  $g(y) = \log(y/(1 - y))$ .

Аддитивные модели являются более гибким инструментом аппроксимации, чем линейные модели, поскольку вид лучшей преобразующей функции  $q_i(x_i)$  для каждой переменной может быть предварительно установлен по результатам мета-анализа или подобран в ходе специальных исследований (предположим, мы знаем, что перед включением показателя семейного дохода в эконометрическую модель из него следует извлекать кубический корень). Если никаких исходных предпосылок о виде  $q_i(x_i)$  нет, можно использовать любую гладкую функцию, например,  $q(x) = (1/x)$ , логарифмическую функцию  $q(x) = \log(x)$  и т.д. Однако наиболее эффективно применение описанных выше непараметрических моделей сглаживания локальной регрессией или сплайнами. В сущности, GAM часто представляет собой лишь средство обобщения частных функций в единое целое без каких-либо параметрических предположений относительно формы  $q_i$ .

Методы подгонки аддитивных моделей реализованы в R функцией `gam()` из пакета `mgcv`, которая специальным образом нацелена на получение достаточно "экономной" модели с оптимальным числом степеней свободы на основе функционала квадратичного штрафа. При этом в качестве многомерных сглаживающих функций используются изотропические сплайны (или результаты их преобразования в тензорном пространстве). Вид функции в ее общеупотребительном варианте вполне традиционен:

```
Model <- gam(formula, family = gaussian, data = data.frame,...),
```

но включает еще два десятка дополнительных параметров, объяснение которых потребовало бы пересказа монографии С. Вуда (Wood, 2006).

Таким образом, обобщенные модели расширяют диапазон приложений линейного моделирования, рассматривая широкий класс альтернативных распределений в случае неустойчивых дисперсий или нарушений предположений об их нормальности.

Метод наименьших квадратов, реализованный в `lm()`, оценивает параметры, которые являются оптимальными лишь при нормальном законе распределения остатков  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Разумеется, его использование для оценивания параметров моделей GLM и GAM является некорректным. К асимптотически (т.е. при  $n \rightarrow \infty$ ) оптимальным значениям неизвестных параметров для широкого класса вероятностных моделей приводит уже упоминавшийся выше универсальный *метод максимального правдоподобия* (MLE – Maximum Likelihood Estimation), который дает наилучшие оценки с точки зрения квадратичной функции ошибки модели.

Принцип максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве "наиболее правдоподобного" значения параметров берут значения  $\Theta$ , максимизирующие вероятность получить при  $n$  опытах имеющуюся выборку  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Предположим, что нам известен закон распределения дискретной случайной величины  $X$ , определяемый одним параметром  $\Theta$ , но неизвестно численное значение этого параметра. Пусть  $p(x_i, \Theta)$  – вероятность того, что в результате испытания величина  $X$  примет значение  $x_i$ . *Функцией правдоподобия* случайной величины  $X$  называют функцию аргумента  $\Theta$ , определяемую по формуле:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = p(x_1, \Theta)p(x_2, \Theta) \dots p(x_n, \Theta).$$

Тогда в качестве искомой точечной оценки параметра  $\Theta$  принимают такое его значение, при котором функция правдоподобия достигает максимума:  $\theta_{MLE} = \operatorname{argmax} L(\mathbf{x} | \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ .



Для поиска этого экстремума необходимо найти частную производную функции правдоподобия и приравнять ее нулю:  $\partial L(\mathbf{x}, \theta_0) / \partial \theta = 0$ . Если вторая производная в критической точке отрицательна, то это – точка максимума, соответствующая искомому значению параметра. Если нам необходимо найти  $k$  параметров  $\theta$ , то формируется и решается система из  $k$  уравнений правдоподобия.

Например, в стандартном методе наименьших квадратов (МНК) находят минимум суммы квадратов разностей между эмпирическими и полученными по модели значениями отклика  $\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_i)^2$ . Чтобы найти наиболее правдоподобные значения  $\mu_i$ , необходимо проанализировать функцию максимального правдоподобия  $L$ . Если предположить, что функция плотности распределения каждого  $y_i$  подчиняется нормальному закону, а параметр дисперсии  $\sigma$  постоянен для всех наблюдений, то

$$L(\mu, y) = \sum_{i=1}^n \left\{ -(y_i - \mu_i)^2 / 2\sigma^2 - \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \right\},$$

а наиболее правдоподобные MLE-оценки  $\mu_i$  будут идентичны полученным МНК.

Если мы проводим регрессионный анализ в рамках предположений классической модели, то можно записать функцию правдоподобия в терминах остатков:

$$L(\varepsilon | \theta; \sigma^2) = -n \ln(2\pi) / 2 - n \ln(\sigma^2) / 2 - [(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\theta)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\theta)] / 2\sigma^2.$$

Однако другие функции вероятности распределения остатков (например, функция Пуассона  $e^{-\mu_i} \mu_i^{y_i} / y_i!$ ) приводят к другим выражениям для функции максимального правдоподобия. Тогда для нахождения искомых параметров  $\mu_i$ , а, следовательно, и коэффициентов моделей, необходимо воспользоваться итеративными нелинейными процедурами оптимизации функции  $L$  ([Oberhofer, Kmenta, 1974](#); Справочник ... , 1989).

Поскольку функции  $L(\dots)$  и  $\ln L(\dots)$  достигают максимума при одном и том же значении  $\theta$ , удобнее искать максимум логарифмической функции правдоподобия  $\ln L$  (*log-likelihood*):

$$LL = \ln \{L(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})\} \rightarrow \max.$$

Для формальной оценки адекватности моделей GLM или GAM, а также для сравнения между собой качества построенных моделей, обычно используется такая статистика, как девианс (*deviance*), непосредственно вытекающая из оценок максимального правдоподобия. Девианс  $G^2$  для анализируемой модели  $M$ , основанной на наборе данных  $y$ , определен как

$$G^2 = -2 (LL_M - LL_S),$$

где  $LL_S$  – максимум логарифма функции правдоподобия для полной или "насыщенной" (*saturated*) модели  $S$ , которая содержит так много параметров  $\theta_S$ , чтобы по возможности точно восстановить значения  $y$  выборочных данных ([Singer, Willett, 2003](#), 122 p.). На практике вероятность правдоподобия такой модели  $S$ , точно воспроизводящей данные, обычно близка к 1, а логарифм максимума ее функции правдоподобия равен 0. При нормальном законе распределения такая модель регрессии  $S$  включает  $n$  параметров, а результаты ее прогноза совпадают с выборочными наблюдениями.

Для тестируемой модели  $M$  величина  $LL_M$  всегда отрицательна и тогда  $LL_S > LL_M$  для любых  $M$ . Таким образом, оценка статистической величины девианса  $G^2$  по своему смыслу оказывается идентичной знакомой нам сумме квадратов остатков  $n \hat{\sigma}_e^2$  классической модели регрессии.

Другой экстремальной моделью является нуль-модель с одним параметром, установленным как  $E(y_i) = \hat{\mu}, \forall i$  (для "нормальной" регрессии он был определен как свободный член  $\beta_0$ ). Как правило, девианс нуль-модели превышает девианс тестируемой модели  $M$ , а распределение их разницы может быть аппроксимировано  $\chi^2$ -распределением с  $(n - k)$  степенями свободы. Таким образом, мы можем сделать вывод о значимости модели  $M$ , если разность девиансов нуль- и  $M$ -моделей по абсолютной величине достаточно велика и статистически превышает значение 0.

### 8.3. Модели пробит- и логит-регрессии

Зачастую наблюдаемая переменная  $Y$  носит альтернативный (дихотомический или бинарный) характер: "выражен или нет эффект от воздействия лекарственного препарата", "обнаружен или нет биологический вид в выполненной пробе", "голосование за или против на референдуме" и т.д. Если этот показатель выступает в качестве зависимой переменной, то наш анализ сводится, по сути, к расчету вероятности  $P$  наступления события или наличия требуемого свойства. На величину отклика  $P$  может оказывать влияние один или несколько факторов  $X$ , таких как "количество введенного лекарственного препарата", "температура водоема", "интенсивность мультимедийной нагрузки на электорат" и т.д.

Сформулируем условия и способ построения линейной модели для бинарного отклика, которая позволила бы количественно оценить степень влияния независимого предиктора  $x$  и/или "объяснить" внутренние механизмы моделируемого процесса. Возникает вопрос, можем ли мы использовать для этого обычную модель регрессии, основанную на методе наименьших квадратов:  $P = p(Y = 1) = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ?

Многочисленные экспериментальные данные показывают, что кривая зависимости  $P = f(x)$  часто носит ярко выраженный нелинейный S-образный характер, асимптотически приближаясь к значениям  $P_0 = 0$  и  $P_1 = 1$ , что напоминает интегральную функцию плотности нормального распределения. При этом обычно делается предположение, что доля альтернатив  $p(Y = 1)$  является случайной величиной, подчиненной биномиальному закону с параметрами  $(n, \pi)$ . Очевидно, что при расчете такой модели методом МНК нарушаются основные предпосылки линейной регрессии и возникают следующие проблемы, связанные с особенностями биномиального распределения отклика:

1. *Проблема наличия гетероскедастичности*: поскольку для бинарной переменной  $\sigma^2 = pq$ , то итоговую дисперсию вероятности для модели с одним предиктором можно представить как  $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = (\beta_0 + \beta_1 X_i) (1 - \beta_0 - \beta_1 X_i)$ , т.е. с изменением  $X$  меняется и  $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ ;

2. *Проблема ненормального распределения ошибок*: остатки  $\hat{\varepsilon}_i = 1 - \beta_0 - \beta_1 X_i$  при  $Y_i = 1$  и  $\hat{\varepsilon}_i = -\beta_0 - \beta_1 X_i$  при  $Y_i = 0$ , т.е. вариация  $\hat{\varepsilon}$  является ограниченной и ненормально распределенной, а значит стандартная ошибка регрессии и  $t$ -статистика неверны.

3. *Проблема правильной спецификации модели*: предсказываемые вероятности должны "уместиться" в интервале  $[0, 1]$ , а обычная регрессионная модель может вполне предсказывать значения далеко за пределами этого интервала.

Логика преодоления ограничений классической линейной модели состоит в том, чтобы трансформировать значения частот (долей)  $P$  в некоторые непрерывные количественные величины  $Z$ , принимающие значения в диапазоне  $(-\infty, +\infty)$ , а затем полученные значения регрессии преобразовать обратно в вероятности. Как было показано в предыдущем разделе, такое преобразование выполняется с использованием *связывающей функции* (англ. *link function*), вид которой выбирается, исходя из практических соображений и с учетом предположений о законе распределения отклика.

#### Пробит-регрессия для моделирование зависимости "доза-эффект"

Рассмотрим токсикологический эксперимент, в котором под величиной эффекта  $P$  принимается доля погибших подопытных животных за фиксированное время в выборке объемом  $n$  при внешнем вредном воздействии с интенсивностью  $D$ . Можно показать (Справочник ... , 1989, т.1, с. 337), что при воздействии дозы  $D$  вероятность гибели животного, случайно отобранного из всей совокупности, равна:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \{e^{-0.5(y-\mu)^2/\sigma^2}\} dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$



где  $x = \ln(D)$ ,  $\Phi(\dots)$  – интегральная функция плотности стандартного нормального распределения  $N(\mu, \sigma)$ .

Если принять  $\beta_0 = -\mu / \sigma$  и  $\beta_1 = 1 / \sigma$ , то получим:

$$P = \Phi(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon), \quad \text{или}$$

$$\Phi^{-1}(P) = (\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon).$$

Таким образом, с использованием обратной функции  $\Phi^{-1}(\dots)$  величина  $\hat{P}(x)$  определяется единственным образом по вычисленному значению  $(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x)$ . В статистической среде R значения прямой и обратной функции  $\Phi(\dots)$  по заданной вероятности легко найти с использованием функций `qnorm(p)` и `rnorm(q)`:

```
p = c(0.05, 0.1, 0.25, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75, 0.9, 0.95)
q = qnorm(p)
rbind(q, p = pnorm(q))
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4] [,5]      [,6]      [,7]      [,8]      [,9]
q -1.644854 -1.281552 -0.6744898 -0.2533471  0.0  0.2533471  0.6744898  1.281552  1.644854
p  0.050000  0.100000  0.2500000  0.4000000  0.5  0.6000000  0.7500000  0.900000  0.950000
```

Значение квантиля  $q = \Phi^{-1}(P)$ , используемое в моделях в качестве аргумента функции связи, называют *пробитом* (буквально *probit* происходит от *probability unit*). Как показано выше,  $probit(p = 0) = -\infty$ ,  $probit(p = 0.05) = -1.645$ ,  $probit(p = 0.5) = 0$ ,  $probit(p = 0.95) = 1.645$ ,  $probit(p = 1) = \infty$ . Во времена, когда графики строили на миллиметровой бумаге, во избежание отрицательных значений к значению квантиля добавляли число 5 и *пробитом* называли полученный результат. Сейчас эта операция считается излишней.

Таким образом, чтобы получить прогнозируемую величину эффекта  $P$ , достаточно оценить параметры  $\hat{\beta}_0$  и  $\hat{\beta}_1$  модели простой регрессии на величину дозы  $D$ , после чего найденное пробит-значение трансформировать в вероятность  $P$ . Все эти операции выполняет функция `glm()`, осуществляющая построение *обобщенной линейной модели*:

```
glm(formula = <формула>, data = <таблица с данными>,
     family = binomial(link = "probit"))
```

где `family` определяет закон распределения отклика, а подпараметр `link` – вид функции связи (см. раздел 8.2).

Рассмотрим построение пробит-модели на следующем примере (исследования лаборатории герпетологии и токсикологии [ИЭВБ РАН](#)). Группам мышей одинаковой массы ( $20 \pm 1.0$  грамм) подкожно вводили возрастающие дозы ядов гадюк из разных местообитаний и через сутки подсчитывали число погибших и выживших животных. Группы формировались отдельно из мышей-самцов и мышей-самок. Поставим задачу построить зависимость "доза-эффект", оценить величину средней полуметальной дозы LD50 и проверить гипотезы: *а)* об отсутствии различий в токсичности яда гадюк из разных регионов и *б)* об одинаковой чувствительности самцов и самок к действию яда.

```
# Загружаем данные из файла
df <- read.table(file = "Гадюки.txt",
                 header = TRUE, sep = "\t")

head(df)
  пол местооб доза численность погубло выжило
1  М   Перм 0.15             3         0      3
2  М   Перм 0.30             3         0      3
3  М   Перм 0.75             3         1      2
14 Ф   Перм 1.48             3         1      2
15 Ф   Перм 2.23             3         3      0
16 Ф   Перм 2.97             3         3      0

levels(df$местооб)
```

```
[1] "Моск" "НжНов" "Новг" "Перм" "Самар" "Татар" "Хвал"
```

При расчете пробит-регрессии в R отклик можно задавать в виде матрицы, в которой первый столбец содержит число "погибших", а второй – число "выживших" особей:

```
# Строим модель на всем имеющемся материале
dead <- cbind(df$погибло, df$выжило)
M1 <- glm(dead ~ доза,
           family = binomial(link = "probit"), data = df)
summary(M1)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  -2.3540      0.2262  -10.40  <2e-16 ***
доза          1.5181      0.1364   11.13  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Null deviance: 335.48 on 124 degrees of freedom
Residual deviance: 112.00 on 123 degrees of freedom
AIC: 190.61
Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

Мы получили пробит-модель вида

$$\text{probit}(P) = -2.35 + 1.52D$$

со статистически значимым коэффициентом угла наклона  $\hat{\beta}_1$  ( $p$ -значение  $<2e-16$ ). Формат вывода результатов отличается от формата, получаемого с помощью знакомой нам функции `lm()`, лишь в деталях, за которыми скрываются серьезные математические отличия. Приведенные выше результаты расчетов включают:

- ° нуль-девианс (Null deviance) – девианс "пустой" модели, не включающей ни одного параметра, кроме  $\beta_0$ ;
- ° остаточный девианс (Residual deviance) – косвенно соответствует дисперсии в данных, оставшейся необъясненной после включения в модель предиктора доза.

Смысл информационного АИС-критерия был описан нами в разделе 7.4. Наконец, в последней строке указывается, сколько итераций было сделано, прежде чем модель пришла к удовлетворительным оценкам (их число не должно быть слишком велико).

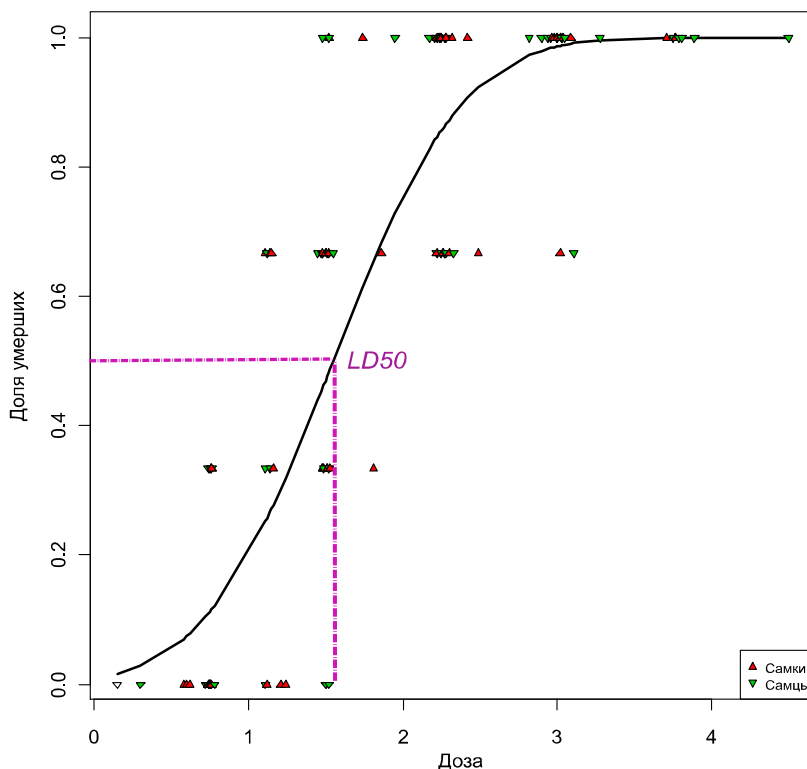
Проведем теперь оценку статистической значимости по критерию  $\chi^2$  отличий девианса полученной логит-модели от девианса нуль-модели без предикторов:

```
M0 <- glm(dead ~ 1,
           family = binomial(link = "probit"), data = df)
anova(M1, M0, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table
Model 1: dead ~ доза
Model 2: dead ~ 1
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance P(>|Chi|)
1      123      112.00
2      124      335.48 -1  -223.48 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Разность между девиансами моделей 1 и 2 весьма велика, что определяет вывод о высокой статистической значимости полученной регрессионной зависимости.

Построим график зависимости "доза-эффект" для модели M1. Если пробиты пересчитать в вероятности, то получим традиционную S-образную кривую:

```
df.plot = data.frame(df, p = M1$fit,
  пробит = predict(M1, type = "link"),
  эффект = df$погибло / (df$погибло + df$выжило))
df.plot = df.plot[order(df.plot$доза), ]
plot(df.plot$доза, df.plot$p, type="l", lwd=2,
  xlab="Доза", ylab="Доля умерших")
points(df.plot$доза, df.plot$эффект, cex=0.7, pch = 23 +
  as.numeric(df.plot$пол), bg = 1+as.numeric(df.plot$пол))
legend("bottomright", c("Самки", "Самцы"), pt.bg = 2:3,
  pch = 24:25, cex=0.7)
```



Если рассматривать на графике распределение экспериментальных точек относительно модельной кривой, то визуально ошибка аппроксимации достаточно велика. Усложним модель и включим в качестве дополнительной переменной фактор "пол":

```
M2b <- glm(dead ~ доза * пол,
  family = binomial(link = "probit"), data = df)
```

```
summary(M2b)
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z )	
(Intercept)	-2.40332	0.32609	-7.370	1.71e-13	***
доза	1.54307	0.19659	7.849	4.19e-15	***
полМ	0.09592	0.45256	0.212	0.832	
доза:полМ	-0.04833	0.27295	-0.177	0.859	

В новой пробит-модели M2b свободный член (Intercept) и коэффициент при переменной доза корректируются в зависимости от пола животных, т.е. к ним добавляются значения 0.096 и -0.048 соответственно, но только при условии, что выборка мышей состоит из самцов. Однако эти приращения столь малы, что статистически значимо не отличаются от 0 ( $p$ -значения, оцененные по  $z$ -критерию для этой нулевой гипотезы, равны 0.832 и 0.859 соответственно).

Вывод об отсутствии различий в чувствительности самцов и самок к действию яда гадюк подтверждает и сравнение девиансов двух моделей M1 и M2b: после добавления в качестве предиктора фактора пола дисперсия, оставшаяся необъясненной, снижается статистически незначимо (*Resid. Deviance* падает лишь с 112.0 до 111.96):

```
anova(M1b,M2b, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table
Model 1: dead ~ доза
Model 2: dead ~ доза * пол
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance P(>|Chi|)
1      123      112.00
2      121      111.96  2  0.046683    0.9769
```

Немного изменив объект *formula*, мы можем получить ту же модель, но с иным составом коэффициентов:

```
M2a <- glm(dead ~ пол/доза - 1,
            family = binomial(link = "probit"), data = df)
summary(M2a)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
полF          -2.4033     0.3261  -7.370 1.71e-13 ***
полМ          -2.3074     0.3138  -7.353 1.94e-13 ***
полF:доза      1.5431     0.1966   7.849 4.19e-15 ***
полМ:доза      1.4947     0.1894   7.894 2.93e-15 ***
```

Тогда в рамках регрессионного анализа одной и той же выборки мы получим два уравнения регрессии:

$$\text{probit}(P) = -2.40 + 1.52D \quad \text{— Модель для групп самок}$$

$$\text{probit}(P) = -2.31 + 1.49D \quad \text{— Модель для групп самцов}$$

Рассчитаем теперь такой важный показатель токсикометрии, как средне-эффективная доза LD50 (т.е. доза, после введения которой в генеральной популяции мышей погибнет 50% особей – аббревиатура от *lethal dose, 50%*), для чего используем функцию *dose.p()* из пакета *MASS*. Отметим, что 95%-ные доверительные интервалы значений LD50 для групп самцов и самок также пересекаются:

```
library(MASS)
# На всем имеющемся материале
dose.p(M1b, p=0.5)
      Dose          SE
p = 0.5: 1.550653 0.05523258
# Отдельно для самок и самцов
dose.p(M2a, c(1,3))      ## Самки
      Dose          SE
p = 0.5: 1.557488 0.0768487
dose.p(M2a, c(2,4))      ## Самцы
      Dose          SE
p = 0.5: 1.543672 0.07934212
```

Построим теперь пробит-модель, учитывающую региональную изменчивость токсичности яда гадюк, и рассмотрим с использованием анализа девиансов, является ли введение фактора местооб статистически значимым в смысле уменьшения ошибки модели:

```

M3b <- glm(dead ~ доза * местооб,
            family = binomial(link = "probit"), data = df)
anova(M1,M3b, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table
Model 1: dead ~ доза
Model 2: dead ~ доза + местооб
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance P(>|Chi|)
1      123     112.003
2      111      71.045 12   40.958 4.98e-05 ***

```

Девианс остатков уменьшился с 112 до 71.0, что является статистически значимым по критерию  $\chi^2$  ( $p$ -значение равно 0.00005). Следовательно, можно сделать вывод: *яд гадюк, отловленных в разных регионах, имеет разную токсичность.*

Удобнее ту же модель представить в виде набора коэффициентов индивидуальных регрессий отдельно для каждого региона (общая идентичность моделей M3a и M3b подтверждается, например, совпадением девианса остатков):

```

M3a <- glm(dead ~ местооб/доза - 1,
            family = binomial(link = "probit"), data = df)
summary(M3a)
Coefficients:
                Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
местообМоск      -5.6921     2.2650  -2.513 0.011967 *
местообНжНов     -3.5051     0.8906  -3.935 8.30e-05 ***
местообНовг      -2.6839     0.6602  -4.065 4.79e-05 ***
местообПерм      -2.4000     0.5399  -4.445 8.79e-06 ***
местообСамар     -2.9431     0.8417  -3.496 0.000471 ***
местообТатар     -4.0693     0.9972  -4.081 4.49e-05 ***
местообХвал      -1.4277     0.5438  -2.625 0.008656 **
местообМоск:доза  4.2497     1.6054   2.647 0.008117 **
местообНжНов:доза 2.0651     0.4966   4.159 3.20e-05 ***
местообНовг:доза 1.6773     0.4072   4.119 3.80e-05 ***
местообПерм:доза 1.2775     0.2728   4.683 2.83e-06 ***
местообСамар:доза 2.4325     0.6588   3.692 0.000222 ***
местообТатар:доза 2.0514     0.4859   4.221 2.43e-05 ***
местообХвал:доза 1.1058     0.3763   2.938 0.003301 **

Null deviance: 335.485 on 124 degrees of freedom
Residual deviance: 71.045 on 111 degrees of freedom
AIC: 173.65

```

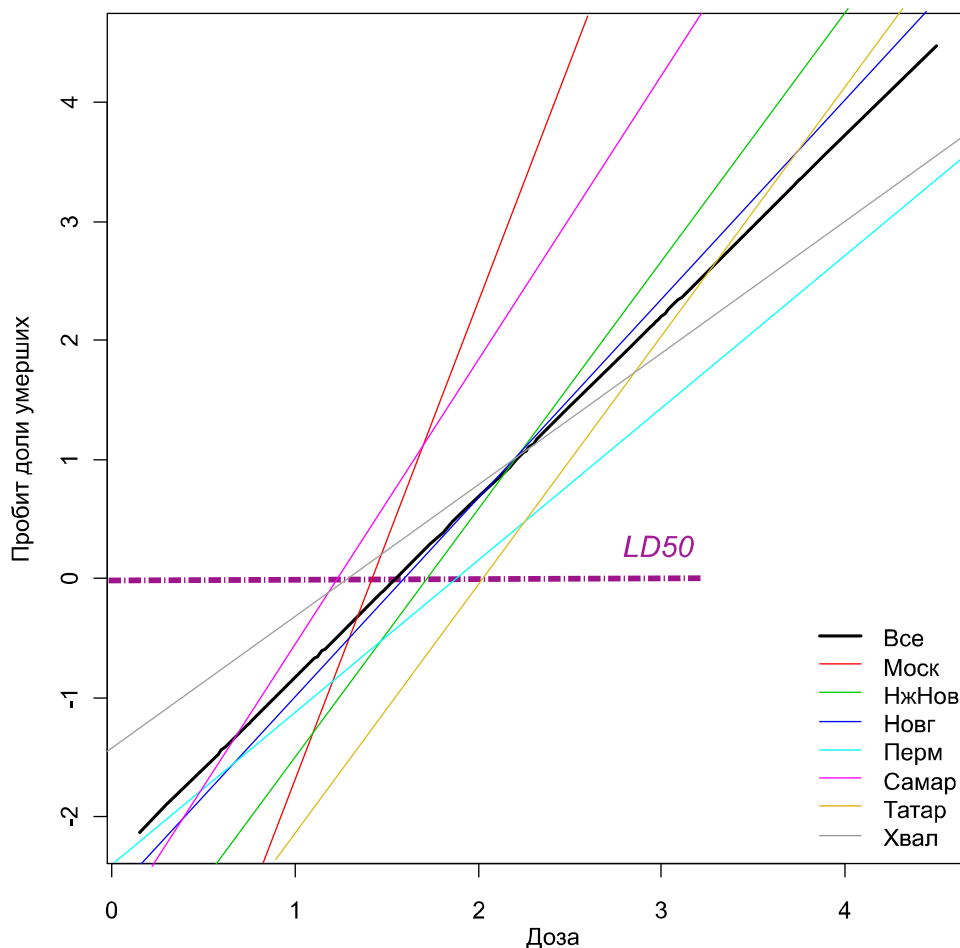
Отметим также, что величина AIC-критерия после включения предиктора *местооб* уменьшилась со 190.6 для модели M1 до 173.6.

Форма представления коэффициентов модели M3a позволяет отдельно для каждого региона построить на графике линии пробит-регрессии и рассчитать значения LD50:

```

lf = length(levels(df$местооб))
# Линии регрессии в координатах доза-пробит
plot(df.plot$доза, df.plot$пробит, type="l", lwd=2,
      xlab="Доза", ylab="Пробит доли умерших")
for (i in 1:lf) abline(coef(M3a)[i], coef(M3a)[lf+i], col=i+1)
legend("bottomright", c("Все", levels(df$местооб)),
      col = 1:8, lwd=c(2, rep(1, 7)))

```



```
# Рассчитаем региональные величины LD50 для яда гадюки
df.dl=data.frame(region =levels(df$местооб),
  LD50 = rep(0,lf), SE = rep(0,lf))
```

```
for (i in 1:lf) {
  a = dose.p(M3a, c(i,lf+i))
  df.dl[i,2] = a[1]
df.dl[i,3] = as.numeric(attr(a, "SE")) }
df.dl
```

region	LD50	SE
1 Моск	1.339411	0.08731109
2 НжНов	1.697298	0.12916933
3 Новг	1.600140	0.13659801
4 Перм	1.878631	0.16627411
5 Самар	1.209885	0.10357006
6 Татар	1.983671	0.12654838
7 Хвал	1.291132	0.17611961

Заметим, что LD50 – это точечный показатель, не дающий представления о всем процессе развития эффекта при изменении дозы. Например, регионы Москва и Хвалынский имеют близкие LD50, но они являются антиподами при сравнении зависимостей "доза-эффект". В частности, величина коэффициента угла наклона  $\beta_1$  (местообМосква:доза = 4.25 против местообХвал:доза = 1.11) определяет скорость нарастания эффекта, т.е. насколько круто S-образная кривая взмывает вверх в области ее перегиба. Читателю, интересующемуся этой темой, советуем обратить внимание на пакет `dlc`, специально ориентированный на построение различных зависимостей чувствительности биологических объектов к внешним воздействиям (*Bioassay Analysis* – см. [jstatsoft.org](http://jstatsoft.org))

### Модель логистической регрессии

Другая возможность преобразования отклика  $Y(0, 1)$  в интервальную шкалу заключается в расчете так называемых "шансов" (odds). Если событие происходит с вероятностью  $p$ , то шансы представляют собой  $O(p) = p/(1 - p)$ . К сожалению,  $O(p) = 0$  при  $p = 0$  и  $O(p) = \infty$  при  $p = 1$ , т.е. подобного рода трансформация является неполной, не охватывая отрицательные значения отклика. Поэтому функцию связи обычно задают в виде *логита* (logit link) или логарифма отношения шансов:  $g(y) = \log\left(\frac{y}{1-y}\right) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ .

Обобщенная логит-линейная модель (или логистическая регрессия на  $m$  предикторов) тогда будет иметь вид

$$g(y) = \log \frac{p(y)}{1-p(y)} = \beta_0 + \sum_{k=1}^m \beta_k x_k,$$

а оценки ее параметров можно трактовать следующим образом: при изменении значения предиктора на единицу, значение логарифма отношения шансов зависимой переменной  $y$  изменится на величину соответствующего коэффициента  $\beta_k$ . Как и в случае пробит-регрессии, мы вносим предположение, что отклик имеет биномиальный закон распределения.

В целях интерпретации коэффициентов нам все же лучше получать не логит-значения, а непосредственно предсказанные вероятности  $P$  для каждой комбинации независимых переменных. В случае одного предиктора логиты можно преобразовать в вероятности следующим образом:

$$\log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) = \beta_0 + \beta_1 X; \quad \frac{Y}{1-Y} = e^{\beta_0 + \beta_1 X}; \quad Y = (e^{\beta_0 + \beta_1 X} - e^{\beta_0 + \beta_1 X} Y) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X}}.$$

Рассмотрим пример построения логистической регрессии в R. Ежемесячно с мая по октябрь 2006 г. на различной глубине (0.8 и 4 м) оз. Нарочь (Беларусь) было собрано по 15 моллюсков *Dreissena polymorpha*. Некоторые моллюски оказались зараженными личинками трематоды *Echinoparyphium recurvatum*. Необходимо ответить на вопрос: зависит ли степень зараженности моллюсков от периода сбора и глубины обитания?

Загружаем файл с исходными данными, где столбцы представлены следующими переменными: Day – количество дней с начала исследования, Depth – фактор глубины взятия проб; Infected и Noninfected – число зараженных и незараженных животных соответственно:

```
infection <- read.table(file = "dreissena_infection.txt",
                        header = TRUE, sep = "\t")

str(infection)
'data.frame':  12 obs. of  4 variables:
 $ Day      : int  0 26 56 92 124 152 0 26 56 92 ...
 $ Depth   : Factor w/ 2 levels "0.8m","4m": 1 1 1 1 1 1 2 2 2 ...
 $ Infected : int  1 1 1 0 1 1 3 0 0 2 ...
 $ Noninfected: int  17 16 14 15 14 14 12 15 13 13 ...
```

В R можно рассчитать логистическую регрессию по табличным данным двумя различными путями:

- отклик приводится в виде матрицы, в которой первый столбец содержит число "больных", а второй – число "здоровых" особей (так мы делали в примере выше);
- отклик представляет собой долю "больных" экземпляров в общем числе особей.

Выполним расчет на основе второго варианта с использованием предварительно вычисленных долей и построим модель регрессии:



```

n.total <- infection$Infected + infection$Noninfected
prop.inf <- infection$Infected/n.total
M2 <- glm(prop.inf ~ Day + Depth, weights = n.total,
          family = binomial(link = "logit"), data = infection)
summary(M2)
Call:
glm(formula = prop.inf ~ Day + Depth, family = binomial(link =
"logit"), data = infection)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -3.836627    0.651911  -5.885 3.98e-09 ***
Day           0.011039    0.004623   2.388 0.01695 *
Depth4m      1.543597    0.537679   2.871 0.00409 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
Null deviance: 34.394 on 11 degrees of freedom
Residual deviance: 18.146 on 9 degrees of freedom
AIC: 45.338

```

Если выполнить расчет на основе первого варианта (с использованием предварительно вычисленной матрицы численностей), то мы получим совершенно идентичные результаты (читатель может проверить это самостоятельно):

```

inf.tbl <- cbind(infection$Infected, infection$Noninfected)
M1 <- glm(inf.tbl ~ Day + Depth,
          family = binomial(link = "logit"), data = infection)

```

Проведем теперь оценку статистической значимости модели M2 по критерию  $\chi^2$  (при этом проводится последовательное включение факторов в модель):

```

anova(M2, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table
Model: binomial, link: logit
Response: prop.inf
Terms added sequentially (first to last)
      Df Deviance Resid. Df Resid. Dev P(>|Chi|)
NULL           11      34.394
Day            1    6.4053      10    27.989 0.011378 *
Depth         1    9.8424       9    18.146 0.001705 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Отметим, что использование в модели обоих предикторов Day и Depth является статистически значимым. Второй вариант тестирования заключается в анализе отличий девианса полученной логит-модели от девианса "пустой" модели без параметров:

```

M0 <- glm(prop.inf ~ 1,
          family = binomial(link = "logit"), data = infection)
anova(M2, M0, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table
Model 1: prop.inf ~ Day + Depth
Model 2: prop.inf ~ 1
      Resid. Df Resid. Dev Df Deviance P(>|Chi|)

```

```

1          9      18.146
2         11     34.394 -2  -16.248 0.0002964 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Мы также с легкостью можем построить логистическую модель, используя "сырые" данные (т.е. без предварительного подсчета долей). Например, для рассматриваемой задачи можно загрузить таблицу, каждая строка которой соответствует одной особи, а бинарная переменная EchinoPresence принимает значение 1, если животное инфицировано. После этого построим модель логистической регрессии:

```

inf.raw <- read.table(file = "dreissena_infection_raw_data.txt",
                      header = TRUE, sep = "\t")

head(inf.raw)
  Day Depth Length EchinoPresence
1   0  0.8m    25             0
2   0  0.8m    25             0
3   0  0.8m    25             0
4   0  0.8m    25             0
5   0  0.8m    28             1
6   0  0.8m    23             0

M3 <- glm(EchinoPresence ~ Day + Depth,
          family = binomial(link = "logit"), data = inf.raw)

summary(M3) # с сокращениями
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -3.948497    0.682565  -5.785 7.26e-09 ***
Day           0.009975    0.004669   2.136 0.03264 *
Depth4m       1.754168    0.580965   3.019 0.00253 **
Null deviance: 134.20  on 181  degrees of freedom
Residual deviance: 117.36  on 179  degrees of freedom
AIC: 123.36

```

Включим теперь в модель дополнительно показатель длины тела моллюсков Length и оценим по критерию  $\chi^2$  значимость различий девиансов до и после включения нового предиктора:

```

M4 <- glm(EchinoPresence ~ Length + Day + Depth,
          family = binomial(link = "logit"), data = inf.raw)

anova(M4, M3, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table
Model 1: EchinoPresence ~ Length + Day + Depth
Model 2: EchinoPresence ~ Day + Depth
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance P(>|Chi|)
1       178       116.72
2       179       117.36 -1  -0.64642  0.4214

```

Поскольку статистически значимых преимуществ у модели M4 нет, целесообразно использовать более экономичную модель M3.

Интересно, что прогнозирующая эффективность полученной логистической модели в данном примере оказалась невелика: все предъявляемые объекты обучающей выборки предсказываются моделью M3 как незараженные:

```

mp <- predict(M3, type="response")
classified <- ifelse(mp > (1-mp), 1, 0)
# Расчет ошибки распознавания
mean(inf.raw$EchinoPresence != classified)
[1] 0.1428571
table(Факт=inf.raw$EchinoPresence, Прогноз=classified)
      Прогноз
Факт   0   1
   0 160   0
   1  22   0

```

Здесь имеет место более чем распространенная ситуация, связанная с выраженным дисбалансом в распределении классов отклика: зараженных особей оказалось в семь раз больше, чем незараженных. Логистическая модель при распознавании по умолчанию исходит из предположения о соотношении классов 50/50 и, соответственно, использует вероятность 0.5 в качестве пороговой при принятии решения о классификации. Обычно для нахождения оптимальной пороговой вероятности обычно используется ROC-анализ (Receiver Operator Characteristic – см. [Goddard, Hinberg, 1990](#); [Леонов, 2009](#); James et al., 2013; Kuhn, Johnson, 2013, а также статью, посвященную описанию пакета pROC на [biomedcentral.com](#)). Кроме того, при обучении моделей на данных с выраженным дисбалансом классов используют и другие подходы, о которых можно в подробностях прочитать в фундаментальных монографиях (James et al., 2013) и (Kuhn, Johnson, 2013).

#### 8.4. Обобщенные модели для оценки экологической толерантности

Прежде чем приступить к рассмотрению примеров, определимся с тем, что мы хотим рассчитать. Основной задачей моделирования окружающей среды (habitat models) является количественная оценка экологического отклика различных видов живых организмов на внешние и внутренние возмущения. К слову сказать, эта проблема актуальна не только в отношении биоты, но и для человека (например, какое количество выпитого джина является оптимальным) или социума в целом.

Традиционно используемые статистические методы предполагают, что кривая зависимости показателя толерантности вида  $y$  от величины воздействующего фактора  $x$  имеет симметричную форму колоколообразной гауссианы  $y = h e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$  с тремя интерпретируемыми параметрами:  $\mu$  – локальный оптимум на оси  $x$ , которому соответствует максимум толерантности  $h$ ;  $\sigma$  – стандартное отклонение на шкале градиента относительно этого оптимума.

Однако, в результате сложного воздействия коррелированного комплекса факторов, эта зависимость часто имеет ярко выраженный асимметричный или полимодальный характер. Поэтому, приняв традиционную симметричную гауссову модель только как образец для сравнения, рассмотрим статистические методы аппроксимации асимметричных кривых отклика различными типами моделей GLM и GAM.

Интересно проследить математическую идентичность гауссовой модели отклика и GLM в форме полинома 2-го порядка, если задать распределение Пуассона при логарифмической функции связи

$$\log(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \Leftrightarrow y = h \exp[-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2].$$

При этом удовлетворяются условия  $\mu = -\beta_1 / 2\beta_2$ ;  $\sigma = (-1 / 2\beta_2)^{0.5}$ ;  $h = \exp(\beta_0 - \beta_1^2 / 4\beta_2)$ . Использование иных семейств распределений или полиномов 3-го и более порядков будет подчеркивать отличия асимметричных отклонений функции отклика от гауссианы.

### Модели с нормально распределенным откликом

Рассмотрим модели отклика на примере распределения популяционной плотности личинок комара-звонца вида *Palpomyia* sp. на различных участках малых рек, впадающих в оз. Эльтон (комплексные исследования института [ИЭВБ РАН](#)). Подробное изложение различных аспектов анализа данных см. в статье [Зинченко и др., 2014](#). Напомним, что с этой проблемой мы уже имели дело в разделе 7.4, когда анализировали изменчивость толерантности *Tanytarsus kharaensis* в отношении солености водотоков с использованием логистической функции.

Подготовим комплект данных для расчета пяти статистических моделей: двух (GLM и GAM) – на основе прологарифмированной численности особей и трех (GAUSS, GLM и GAM) – с использованием бинарной переменной встречаемости вида. В расчетах использовались отдельные фрагменты модуля R "Species response curves", разработанного Д. Зелены (Zelený) в рамках надстройки к программе JUICE и доступного для скачивания на сайте [sci.muni.cz](http://sci.muni.cz).

```
require (vegan) ; require (mgcv)
SpecEnv <- read.delim("Elton_TolInt.txt", header=TRUE)
gr <- SpecEnv$S      # Действующий фактор - минерализация
# Логарифмируем численность вида Palpomyia sp. (см. vegan)
amblog.species <- decostand(SpecEnv$CePal_sp, "log")
# Создадим бинарную переменную встречаемости
bin.species <- SpecEnv$CePal_sp
bin.species[bin.species>0] <- 1
data.frame(gr, Nat=SpecEnv$CePal_sp,
           NatLog=amblog.species, Bin = bin.species)
      gr  Nat  NatLog Bin
9      14.375  0  0.000000  0
10     31.588 40  6.321928  1
11     27.310 390 9.607330  1
12     28.672 2860 12.481799  1
13     10.280  0  0.000000  0
14      9.746  0  0.000000  0
```

Предположим, что зависимость численности популяции от солености воды может быть линейной или описываться произвольным полиномом до 3-й степени включительно. Поэтому будем осуществлять селекцию степени полинома по минимуму AIC-критерия. Для этого определим предварительно функцию, возвращающую объект "лучшей" модели:

```
model.GLM <- function (part.species, gr, family='gaussian') {
  glm.1<-glm(part.species~poly(gr,1), family=family)
  glm.2<-glm(part.species~poly(gr,2), family=family)
  glm.3<-glm(part.species~poly(gr,3), family=family)
  allAIC <- c(extractAIC (glm.1)[2],
             extractAIC (glm.2)[2], extractAIC (glm.3)[2])
  switch (c(1,2,3)[allAIC==min(allAIC)],
        {glm.GLM <- glm.1; GLM.deg <- 1},
        {glm.GLM <- glm.2; GLM.deg <- 2},
        {glm.GLM <- glm.3; GLM.deg <- 3})
  return (glm.GLM)
}
```

Получаем первую модель (приведен сокращенный формат вывода):

```

GLM.amb <- model.GLM(amblog.species, gr)
summary(GLM.amb)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    2.7365     0.2678  10.218 1.90e-15 ***
poly(gr, 3)1   26.5543     2.2881  11.605 < 2e-16 ***
poly(gr, 3)2   -9.7435     2.2881  -4.258 6.38e-05 ***
poly(gr, 3)3  -17.2841     2.2881  -7.554 1.31e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Null deviance: 1460.06 on 72 degrees of freedom
Residual deviance: 361.25 on 69 degrees of freedom
AIC: 333.9

```

В этом случае GLM сводится к функции обычной полиномиальной регрессии, которая для *Palpomyia* sp. ограничена многочленом 3-й степени

$$\ln(N) = 2.73 + 26.5S - 9.74S^2 - 17.3S^3$$

и может быть представлена традиционной кривой колоколообразной формы. Интересно, что, если мы проведем расчеты с использованием функции `lm()`, то получим идентичную модель, но с другим протоколом статистик для анализа адекватности:

```

summary(lm(amblog.species~poly(gr, 3)))
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    2.7365     0.2678  10.218 1.90e-15 ***
poly(gr, 3)1   26.5543     2.2881  11.605 < 2e-16 ***
poly(gr, 3)2   -9.7435     2.2881  -4.258 6.38e-05 ***
poly(gr, 3)3  -17.2841     2.2881  -7.554 1.31e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 2.288 on 69 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7526,    Adjusted R-squared:  0.7418
F-statistic: 69.96 on 3 and 69 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Для построения модели GAM нам надо подобрать оптимальное число степеней свободы сглаживающего сплайна. Эти действия мы выполним по аналогичной схеме:

```

model.GAM <- function (part.species, gr, family='gaussian') {
  gam.3<-gam(part.species~s(gr,k=3), family=family)
  gam.4<-gam(part.species~s(gr,k=4), family=family)
  gam.5<-gam(part.species~s(gr,k=5), family=family)
  allAIC <- c(extractAIC (gam.3)[2],
              extractAIC (gam.4)[2], extractAIC (gam.5)[2])
  switch (c(1,2,3)[allAIC==min(allAIC)],
    {gam.GAM <- gam.3; GAM.deg <- 3},
    {gam.GAM <- gam.4; GAM.deg <- 4},
    {gam.GAM <- gam.5; GAM.deg <- 5})
  return (gam.GAM)
}
GAM.amb <- model.GAM(amblog.species, gr)

```

```

summary (GAM. amb)
Family: gaussian
Link function: identity
Formula: part.species ~ s(gr, k = 4)
Parametric coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.7365     0.2614   10.47 6.77e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Approximate significance of smooth terms:
      edf Ref.df      F p-value
s(gr) 2.976      3 74.45 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
R-sq.(adj) =  0.754   Deviance explained = 76.4%
GCV score = 5.2741   Scale est. = 4.9868     n = 73

```

Полученная нами модель основана на 4-х степенях свободы: одна принадлежит свободному члену `Intercept` (обратите внимание, что он совпал с таковым в модели GLM), а остальные 3 (точнее 2.976) "погружены" в сплайн `s(gr)`, который практически имеет смысл той же самой кубической параболы. Мы можем также убедиться в статистической значимости сглаживающего члена, "полюбоваться" на коэффициент детерминации `R-sq.(adj)`, долю объясненного девианса `Deviance explained` и прочие технические детали расчетов.

Важными параметрами жизнедеятельности любой популяции является экологический оптимум и интервалы толерантности на шкале действующего фактора. (Из энциклопедии: «Диапазон толерантности - минимальное и максимальное значение неблагоприятного фактора, переносимого данным организмом или экосистемой в целом»). Однако, для всех моделей, кроме гауссианы, неясен теоретический метод их оценки. На практике ([Coudun, Gégout, 2006](#)) приняты два эвристических способа нахождения критических точек популяционной изменчивости на оси абсцисс: а) по значениям ординат, составляющим половину от достигнутой величины экологического максимума, и б) по минимальному диапазону значений фактора, ограничивающему заданную площадь распределения вероятностей под модельной кривой.

Богатый материал для содержательного анализа предоставляет визуализация построенных моделей. Определим функцию, которая возвратит нам для любой модели `M` расчетные значения ординат `fit`, а также абсциссы экологического максимума `Sopt` и точек, ограничивающих 80% площади под кривой `amplitude.range`:

```

fit.model <- function (M, axx) {
  fit <- predict(M, list(gr=axx), type='response')
  Sopt <- axx[fit==max(fit)][1]
  auc <- 80 ; whole.auc <- sum (fit)
  part.auc <- whole.auc * (auc/100)
  for (l in seq(max(fit)[1], min(fit)[1], length = 100))
  { if (sum (fit[fit >= l]) >= part.auc)
    {last.l <- l; break ()}
  }
  amplitude.prob <- last.l
  amplitude.range <- range(axx[fit >= amplitude.prob])
  return (list (fit, Sopt, amplitude.range))
}

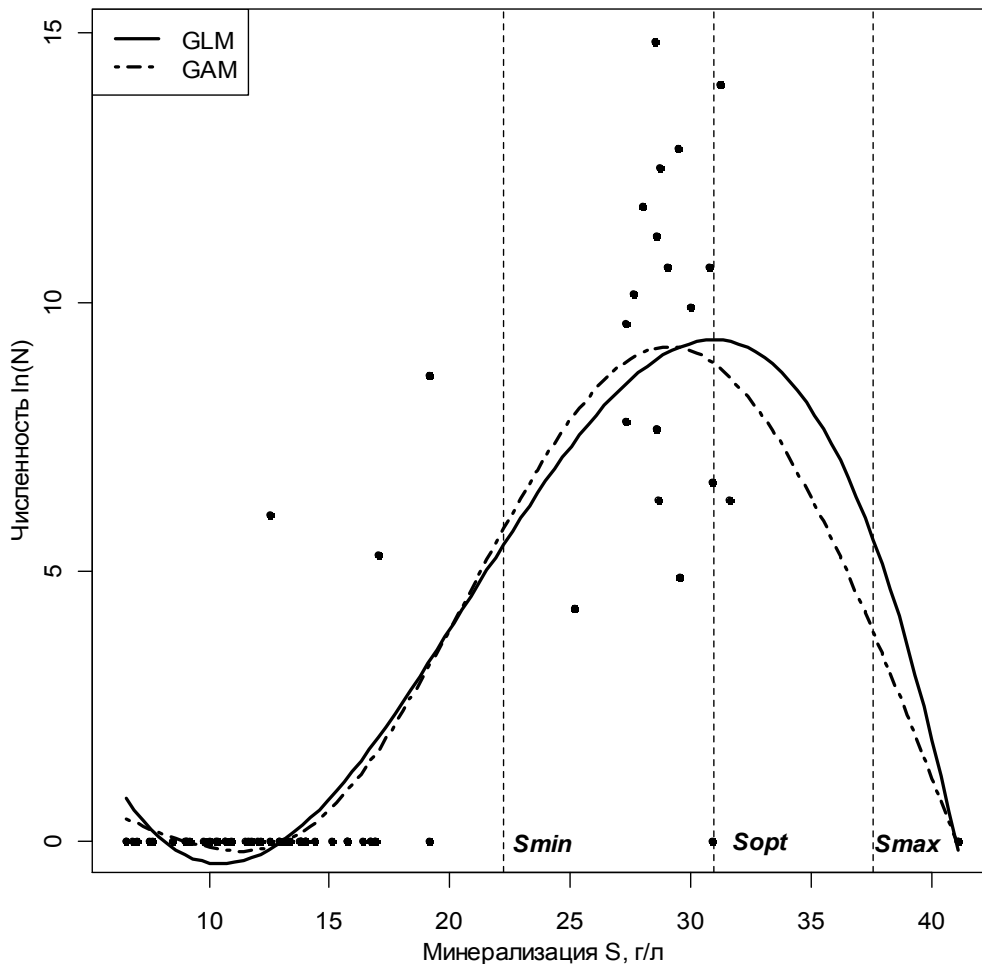
```

Теперь мы можем построить графики по сетке из 100 значений и показать на них положение критических точек:

```

axx<-seq(range(gr)[1], range(gr)[2], len=100)
l.GLM <- fit.model(GLM.amb, axx)
plot(gr,amblog.species, type="p",xlab="Минерализация S, г/л",
      ylab = "Численность ln(N)", pch =20)
lines(axx,l.GLM[[1]], lwd=2)
lines(axx,fit.model(GAM.amb, axx)[[1]], lwd=2, lty=4)
abline(v=l.GLM[[2]], lty=2)
abline(v=l.GLM[[3]][1], lty=2)
abline(v=l.GLM[[3]][2], lty=2)
text (23.8,0,"Smin", font=4) ; text (32.8,0,"Sopt", font=4)
text (39,0,"Smax", font=4)
legend ("topleft", lty = c(1,4), lwd=2, c("GLM", "GAM"))

```



Как показано на рисунке, в соответствии с прогнозом по GLM экологический оптимум солености воды, соответствующий максимуму популяционной плотности *Palpomyia* sp., составляет  $S_{\text{опт}} = 31$  г/л, а диапазон толерантности вида, ограниченный пределами области, составляющей 80% площади под кривой отклика, находится в интервале от 22.2 до 37.6 г/л. Оптимум минерализации  $S_{\text{опт}} = 29.2$  г/л, рассчитанный по модели GAM, оказался несколько смещен в сторону меньших значений.



### Модели с альтернативным (бинарным) откликом

Построим теперь три модели, ориентируясь лишь на вероятности встретить экземпляры *Palpomyia* sp. в водоемах с разной соленостью. Как было упомянуто выше, аппроксимация частот гауссовой кривой может быть выполнена в рамках модели Пуассона при логит-трансформации вероятностей  $P(x)$  и с использованием квадратичной параболы в качестве функции регрессии ([ter Braak, Looman, 1986](#)) :

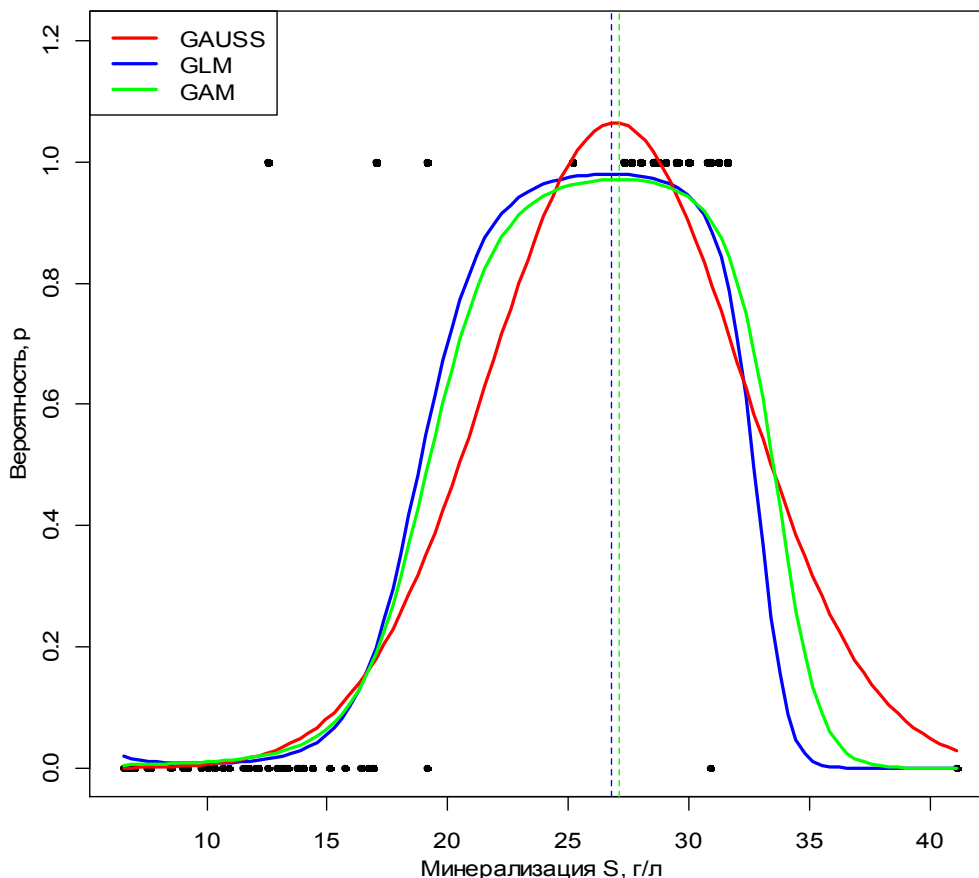
```
GLM.gaus <- glm(bin.species~gr+I(gr^2), family=poisson)
summary(GLM.gaus)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -13.016747   4.186785  -3.109  0.00188 **
gr           0.971451    0.379070   2.563  0.01039 *
I(gr^2)     -0.018038    0.008194  -2.201  0.02771 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Null deviance: 52.774  on 72  degrees of freedom
Residual deviance: 14.761  on 70  degrees of freedom
AIC: 64.761
```

Модели GLM и GAM мы получим, используя приведенные выше функции. Статистическую значимость модели оценим, используя критерий  $\chi^2$ :

```
GLM.bin <- model.GLM(bin.species, gr, family='binomial')
anova(GLM.bin, test="Chisq")
Analysis of Deviance Table
Model: binomial, link: logit
Response: part.species
Terms added sequentially (first to last)
              Df Deviance Resid. Df Resid. Dev P(>|Chi|)
NULL                72      89.355
poly(gr, 3)         3      64.587         69      24.768 6.148e-14 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
GAM.bin <- model.GAM(bin.species, gr, family='binomial')
summary(GAM.bin)
Family: binomial
Link function: logit
Parametric coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  -1.9288     0.8205  -2.351  0.0187 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Approximate significance of smooth terms:
              edf Ref.df Chi.sq  p-value
s(gr) 2.619  2.879  24.71 1.52e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
R-sq.(adj) = 0.784  Deviance explained = 72.5%
UBRE score = -0.56439  Scale est. = 1          n = 73
```

Убедившись в статистической значимости построенных моделей, покажем на графике вид этих функций и отметим положение максимума встречаемости. Для модели GAUSS вектор прогнозируемых значений рассчитаем на основе специальной функции:

```
GAUS.fun <- function(p, x)
  { exp(p[1] + p[2]*x + p[3]*(x^2)) }
p.glm.gaus<-coef(GLM.gaus)
fit.GAUS<-GAUS.fun(p.glm.gaus, axx)
# Для других моделей используем ранее определенную функцию
l.GLM <- fit.model(GLM.bin, axx)
l.GLM[[2]]
[1] 26.76949 # Экологический оптимум для GLM
l.GAM <- fit.model(GAM.bin, axx)
l.GAM[[2]]
[1] 27.11814 # Экологический оптимум для GAM
plot(gr,bin.species, type="p",xlab="Минерализация S, г/л",
      ylab = "Вероятность, p", ylim=c(0, 1.2), pch =20)
lines(axx,l.GLM[[1]],col="blue", lwd=2)
abline(v=l.GLM[[2]], col="blue",lty=2)
lines(axx,l.GAM[[1]], col="green", lwd=2)
abline(v=l.GAM[[2]], col="green",lty=2)
lines(axx,fit.GAUS,col="red", lwd=2)
legend ("topleft", col = c("red","blue","green"), lwd=2,
        c("GAUSS","GLM", "GAM"))
```



Если сравнивать модели GLM, построенные на основе нормально распределенного GLM.gaus и бинарного GLM.bin отклика, то экологический оптимум обилия вида немного сместился в область низкой солености воды (с 31 до 27 г/л).

## 8.5. Ковариационный анализ

В отличие от дисперсионного и регрессионного анализов, рассмотренных в главах 5-7, ковариационный анализ (ANCOVA) оперирует с набором предикторов, включающим как качественные группообразующие переменные, так и количественные переменные, измеренные в непрерывных шкалах и называемые *ковариатами*. Если исследуется характер взаимосвязи между реализациями зависимой величины  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  и определенной совокупностью предикторов, то строится *ковариационная модель*, которая является как бы синтезом регрессионного и дисперсионного анализов:

$$y_i = \sum_{j=1}^k f_{ij} \theta_j + \sum_{j=1}^m \beta_j x_i^{(j)} + \varepsilon_{ij},$$

где  $k$  – возможные типы условий (в данном случае, однофакторного) эксперимента,  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ ;  $m$  – число независимых ковариат,  $X = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$ . Как обычно для общей линейной модели, индикаторные переменные  $f_{ij}$  равны 1, если  $j$ -е условие эксперимента имеет место при наблюдении  $y_i$ , и 0 в противном случае. Коэффициенты  $\theta_j$  определяют эффект влияния  $j$ -го условия, а  $\beta_j$  – значения соответствующих коэффициентов регрессии  $Y$  по  $x^{(j)}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – независимые случайные ошибки с нулевым математическим ожиданием. При включении в модель второго, третьего и последующих факторов в правой части уравнения появятся слагаемые, отвечающие за эффекты их уровней.

Ковариационный анализ позволяет разложить общую вариацию зависимой переменной на две составляющие:

- степень случайной изменчивости отклика  $Y$ , связанную с эффектами  $F$ , т.е. с влиянием категориальных предикторов и их комбинаций; если значимой взаимосвязи здесь нет, то для оценки степени воздействия ковариат на отклик достаточно воспользоваться обычным регрессионным анализом;

- долю изменчивости отклика за счет влияния непрерывных предикторов  $X$ ; если при этом воздействие ковариат оказывается статистически незначимым, то достаточно воспользоваться обычным дисперсионным анализом.

Основное назначение ковариационного анализа – получение статистических оценок  $\theta_1, \dots, \theta_k$  и  $\beta_1, \dots, \beta_p$ , а также статистических критериев для проверки различных гипотез относительно значений этих параметров. Основные теоретические и прикладные процедуры ковариационного анализа относятся к линейным моделям, но имеются некоторые особенности касательно интерпретации результатов.

Поскольку в приведённой формуле модели коэффициенты регрессии зависимой переменной  $Y$  на сопутствующую переменную  $x$  не зависят от качественных факторов, то можно сделать предположение, что для каждого уровня  $f_j$  кривые регрессии  $x$  параллельны. Можно также сделать предположение, что линейная зависимость имеет одинаковые коэффициенты для каждого значения качественного фактора, т.е. проверить гипотезу:

$$H_0(F): \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k.$$

В случае одной независимой переменной ( $m = 1$ ) эта гипотеза предполагает, что линии регрессии совпадают.

Другая гипотеза, которая проверяется значительно реже, относится к статистической значимости влияния ковариат, т.е. все их регрессионные коэффициенты равны 0:

$$H_0(X): \beta_j = 0$$

Рассмотрим особенности проведения ковариационного анализа на примере. Таблица `hellung` из пакета `ISwR` содержит данные о численности `conc` (экз/мл) и диаметре `diameter` особей ресничных инфузорий *Tetrahymena*, которые выращивались в питательной среде без (`glucose = 0`) и с добавлением (`glucose = 1`) глюкозы. Нужно ответить на вопрос: оказывает ли наличие глюкозы влияние на связь `diameter ~ conc`? Для определенности конвертируем переменную `glucose` в фактор, принимающий значения "Да/Нет", и оценим характер распределения данных:

```

data(hellung, package = "ISwR")
head(hellung)
  glucose  conc diameter
1      1 631000     21.2
2      1 592000     21.5
3      1 563000     21.3
4      1 475000     21.0
5      1 461000     21.5
6      1 416000     21.3
hellung$glucose <- factor(hellung$glucose,
                          labels = c("Да", "Нет"))
attach(hellung)
tethym.gluc <- hellung[glucose == "Да", ]
tethym.nogluc <- hellung[glucose == "Нет", ]

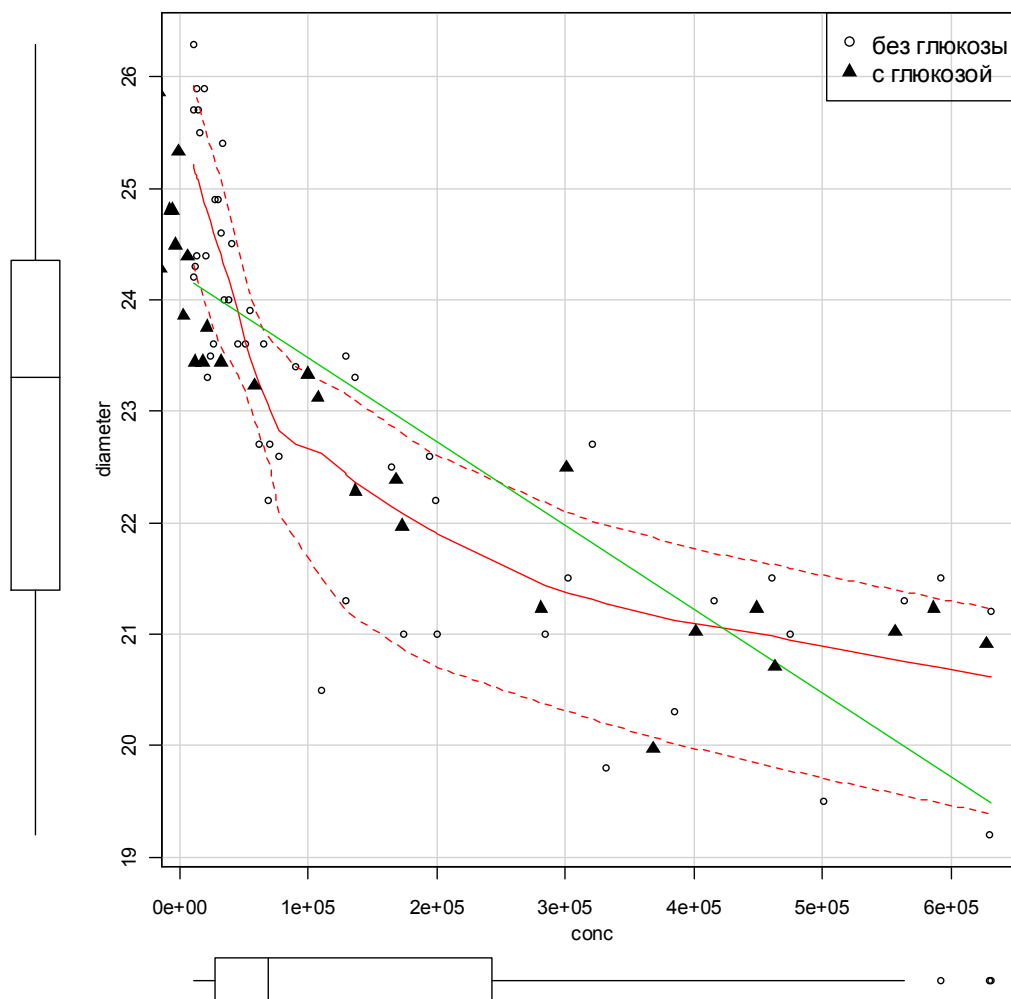
```

Для визуализации воспользуемся комплексной функцией `scatterplot()` из пакета `car`, которая покажет нам характер линейной зависимости `diameter ~ conc`, кривую аппроксимации локальной регрессией с доверительными интервалами и графики `boxplot` для обеих переменных:

```

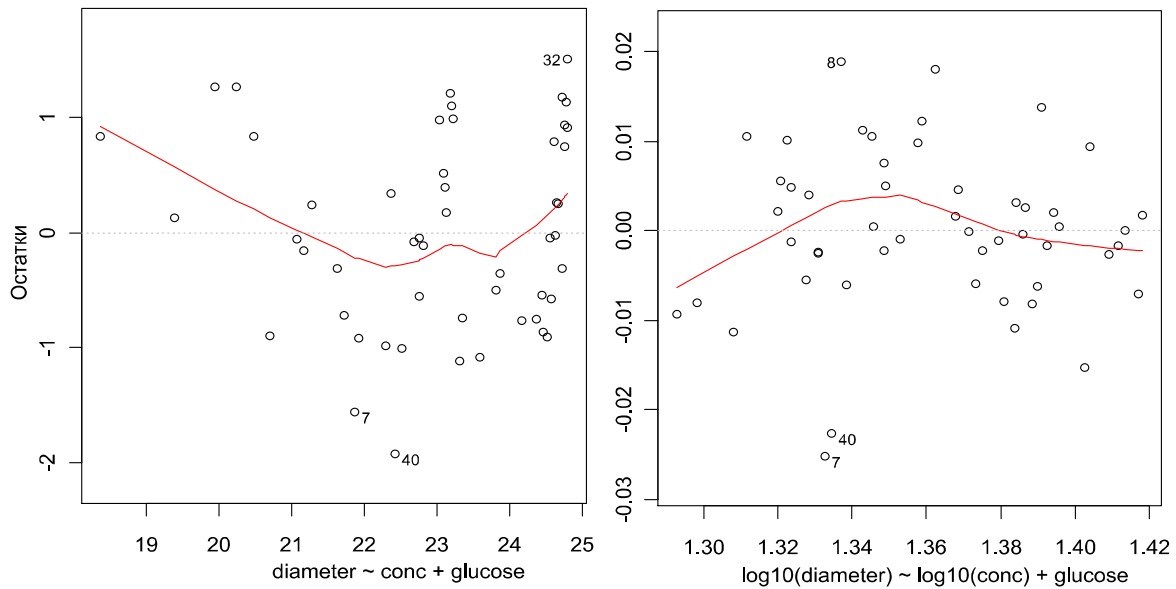
library(car)
scatterplot(diameter ~ conc)
points(tethym.gluc$conc, tethym.gluc$diameter, pch = 17)
legend("topright", legend = c("без глюкозы", "с глюкозой"),
      pch = c(1, 17))

```



Поскольку на графике наблюдается выраженная обратная экспоненциальная зависимость, то перед построением линейных моделей будем трансформировать данные путем логарифмирования, что может привести к нормализации распределения переменных и гомоскедастичности дисперсии остатков. Проверим это предположение и выведем графики зависимости величины остатков от прогнозируемого значения отклика до и после преобразования:

```
plot(aov(diameter ~ conc + glucose, hellung), with=1)
plot(aov(log10(diameter) ~ log10(conc) + glucose, hellung),
      which = 1)
```

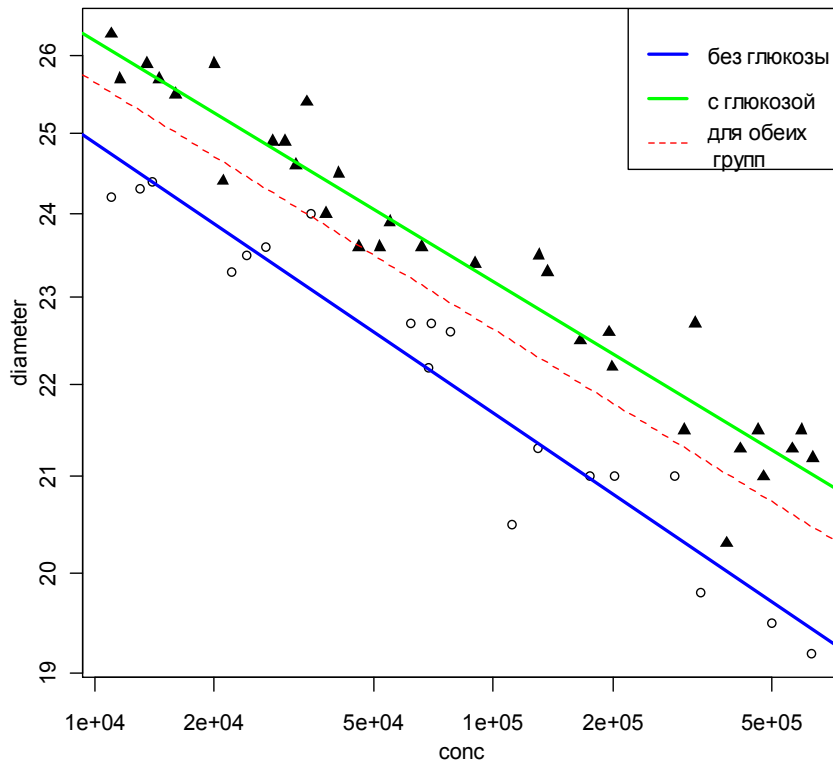


Некоторая неопределенность относительно однородности распределения остатков остается, но этот пункт протокола проверки предположений был нами честно выполнен.

Для реализации ANCOVA в R используется все та же функция `lm()`. Выполним построение линейных моделей зависимости размера клеток от плотности популяции отдельно для каждого способа выращивания инфузорий:

```
(lm.nogluc <- lm(log10(diameter)~log10(conc), data=tethym.nogluc))
Coefficients:
(Intercept)  log10(conc)
 1.63476      -0.05968
# Найдем доверительные интервалы коэффициентов
confint(lm.nogluc)
           2.5 %      97.5 %
(Intercept) 1.59212391 1.67739837
log10(conc) -0.06837895 -0.05097448
(lm.gluc <- lm(log10(diameter)~ log10(conc), data = tethym.gluc))
Coefficients:
(Intercept)  log10(conc)
 1.6313      -0.0532
confint(lm.gluc)
           2.5 %      97.5 %
(Intercept) 1.60387478 1.65881239
log10(conc) -0.05875114 -0.04764137
# Выводим распределение точек для преобразованных данных
p_symb = c(17,1)
plot(conc, diameter, pch = p_symb[as.numeric(glucose)], log = "xy")
```

```
# Добавляем регрессионные линии для каждой группы
abline(lm.nogluc, col="blue", lwd=2) ;
abline(lm.gluc, col="green", lwd=2)
abline(lm(log10(diameter)~ log10(conc), data = hellung),
       col="red", lty=2)
legend("topright", legend=c("без глюкозы", "с глюкозой", "для обеих
  групп"), lwd=c(2,2,1), lty=c(1,1,2), col = c("blue", "green", "red"))
```



Основные вопросы, которые ставит ковариационный анализ в данном случае:

- Различаются ли линии по углам наклона, (т.е. по степени влияния ковариат)?
- Различаются ли группы по среднему размеру клеток?

Линии на рисунке располагаются примерно параллельно и доверительные интервалы обоих коэффициентов пересекаются, что позволяет сделать вывод об отсутствии влияния глюкозы. Подкрепим, однако, проверку нулевой гипотезы проведением стандартного дисперсионного анализа.

ANCOVA предполагает одинаковые групповые дисперсии. Это условие можно проверить и убедиться в справедливости нулевой гипотезы о равенстве дисперсий следующим образом:

```
var.test(lm.gluc, lm.nogluc)
      F test to compare two variances
data:  lm.gluc and lm.nogluc
F = 0.8482, num df = 30, denom df = 17, p-value = 0.6731
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.3389901 1.9129940
sample estimates:
ratio of variances
 0.8481674
```

Функция `lm()` дает возможность построить общую линейную модель для любых комбинаций факторов и ковариат. Матрица плана **A** (*design matrix* – см. раздел 6.2) в этом

случае получается добавлением новых столбцов  $X$  к матрице плана однофакторного анализа  $F$  без ковариации. Построим вначале модель AN1 с учетом взаимодействий фактора с ковариатой:

```
AN1 <- lm(log10(diameter) ~ log10(conc)*glucose)
summary(AN1)
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    1.631344    0.013879 117.543 <2e-16 ***
log10(conc)   -0.053196    0.002807 -18.954 <2e-16 ***
glucoseНет     0.003418    0.023695   0.144  0.886
log10(conc):glucoseНет -0.006480    0.004821  -1.344  0.185
```

Интерпретация модели AN1 может быть выполнена следующим образом:

1. Первые две строки содержат свободный член и регрессионный коэффициент модели для культуры с глюкозой (показаны зеленым цветом), т.е. при концентрации  $C$  ожидаемое среднее значение логарифма диаметра клеток  $D$  будет выражено зависимостью:

$$\log_{10}D = 1.6313 - 0.0532 \times \log_{10}C.$$

2. Остальные две строки содержат разницу между группами по свободному члену и регрессионному коэффициенту при выращивании культуры без добавления глюкозы, и зависимость будет иметь вид:

$$\log_{10}D = (1.6313 + 0.0034) - (0.0532 + 0.0064) \times \log_{10}C$$

Поскольку инкремент регрессионного коэффициента для культур без глюкозы статистически незначим, то линии модели можно принять параллельными.

Построим теперь модель AN2 без учета взаимодействия между фактором и ковариатой:

```
AN2 <- lm(log10(diameter) ~ log10(conc) + glucose)
summary(AN2)
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    1.642132    0.011417 143.83 < 2e-16 ***
log10(conc)   -0.055393    0.002301 -24.07 < 2e-16 ***
glucoseНет    -0.028238    0.002647 -10.67 2.93e-14 ***
```

В соответствии с `summary(AN2)`, имеем две ситуации:

- культура с глюкозой:  $\log_{10}D = 1.6421 - 0.0554 \times \log_{10}C$ ;
- культура без глюкозы:  $\log_{10}D = (1.6421 - 0.0282) - 0.0554 \times \log_{10}C$ .

Таким образом, клетки в культуре без глюкозы в среднем на 6.3% мельче ( $10^{-0.0282} = 0.937$ ).

Статистическую значимость различий групп по среднему размеру клеток подтверждает таблица дисперсионного анализа:

```
anova(AN2)
Response: log10(diameter)
              Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
log10(conc)   1  0.046890  0.046890   561.99 < 2.2e-16 ***
glucose       1  0.009494  0.009494   113.78 2.932e-14 ***
Residuals    48  0.004005  0.000083
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



## 8.6. Модели со смешанными эффектами для иерархически организованных данных

### Основные идеи

В разделе 6.5 нами подчеркивалось, что если при проведении многофакторного дисперсионного анализа с учетом взаимодействий число уровней категориальных переменных достигает пяти и более, возникает необходимость оценки значительного количества коэффициентов модели. Было бы ошибкой механически включать в анализ весь набор возможных параметров и скрупулезно оценивать связанные с ними эффекты. Как правило, многое зависит от постановки задачи и природы анализируемых факторов.

Например, мы хотим сравнить удои молока у различных пород коров ([Рокицкий, 1973](#)). В таблице данных имеется два фактора: порода скота  $F_1$  и различные пастбища  $F_2$ , на которых производится их выпас. Можно построить модель с двумя факторами и проделать все предусмотренные протоколом действия. Однако, есть ли необходимость, наравне с интересующим нас фактором  $F_1$ , выполнять полный цикл вычислений и для фактора  $F_2$ : сравнивать групповые средние, оценивать коэффициенты модели и т.д.? Во-первых, у нас нет такой задачи – сравнивать между собой пастбища. Во-вторых, если порода скота имеет строго фиксированные уровни, определенные исследователем, то список пастбищ, на которых паслись коровы, может быть выбран случайно (например, на следующий год места выпаса могли поменяться). По условию задачи нам было бы вполне достаточно оценить долю общей дисперсии надоев молока, обусловленную фактором  $F_2$ .

Независимые переменные, уровни которых надежно определены исследователем и могут быть воспроизведены при реализации повторностей, называются *фиксированными факторами*. Модели на их основе, рассмотренные в главе 6, называются моделями I типа, или моделями с *фиксированными эффектами* (*fixed effects*). В них значение объясняемой переменной  $Y$  определяется генеральной средней  $\mu$ , *дифференциальными* эффектами воздействия индивидуальных факторов, а также комбинаторными эффектами их парных, тройных (и остальных, до  $t$ ) взаимодействий.

Другой тип эффектов, часто вызывающий интерес исследователей, представляют *случайные эффекты* (*random effects*). Здесь предполагается, что при реализации повторного эксперимента выборки каждый раз могут извлекаться с иным составом группировки наблюдаемых объектов. Следовательно уровни изучаемого фактора будут формироваться случайно из некоторой совокупности возможных градаций или назначаться по субъективным соображениям. Модели II типа *со случайными эффектами* используются в случаях, когда исследователя интересует не значимость вкладов уровней факторов, а оценка и сравнение компонентов дисперсии распределения включенных в модель дифференциальных эффектов. Это позволяет обобщить наши заключения о природе факторов и значимости их влияния вне связи с конкретными уровнями, заданными в плане эксперимента. Включение в модель случайного эффекта позволяет выделить из независимых остатков  $\varepsilon$  с дисперсией  $\sigma$  долю вариации, "в среднем" объясняемую влиянием этого фактора.

В рамках линейной модели II типа, например, для двух факторов с  $k$  повторностями

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

случайные эффекты  $\alpha_i$  на  $i$  уровнях воздействия фактора А,  $\beta_j$  на  $j$  уровнях воздействия фактора В, а также эффект их взаимодействия  $(\alpha\beta)_{ij}$ , должны быть независимы в совокупности и иметь нормальное распределение с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\sigma_{(\alpha\beta)}$  соответственно. Если это условие выполняется, то проверяются нулевые гипотезы

$$H_0(A): \sigma_\alpha = 0; \quad H_0(B): \sigma_\beta = 0; \quad H_0(AB): \sigma_{(\alpha\beta)} = 0,$$

т.е. дисперсия случайного фактора на всех его уровнях равна нулю и не вносит дополнительно вклада в изменчивость наблюдаемой случайной величины.

Модели III типа со смешанными эффектами (Pinheiro, Bates, 2000; Demidenko, 2004; Wood, 2006) включают как фиксированные, так и случайные факторы. Для простой схемы группировки по уровням линейную модель LMEM (*linear mixed-effects model*) со смешанными эффектами удобно представить в матричной форме:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{b} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_{\theta}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \Lambda\sigma^2),$$

где  $\mathbf{y}$  –  $N$ -мерный вектор зависимой переменной,  $N$  – число ячеек дисперсионного комплекса,  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Z}$  – матрицы, состоящие из нулей и единиц и описывающие группировку фиксированных и случайных факторов по уровням в соответствии с планом эксперимента,  $\boldsymbol{\beta}$  – вектор фиксированных эффектов (параметров модели). Распределение вектора случайных эффектов  $\mathbf{b}$  описывается вектором нулевых средних  $\mathbf{0}$  и положительно определенной ковариационной матрицей  $\boldsymbol{\Psi}_{\theta}$ , зависящей от вектора параметров  $\theta$ , оценка которых является основной целью статистического вывода о природе случайных эффектов. Наконец,  $\Lambda$  – положительно определенная матрица простой структуры, которая обычно используется при моделировании автокорреляции остатков  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , но часто это просто единичная матрица.

Включение случайных факторов в модели с фиксированными эффектами часто существенно повышает обобщаемость заключений о главном результате исследования при распространении его на другие пространственные, временные или биологические уровни организации. Например, сделав вывод о влиянии одного целевого фактора (например, добавка или отсутствие удобрения), корректно было бы выполнить анализ о статистической значимости остальных случайных факторов (таких, как все возможные места размещения пробных площадок, периоды эксперимента, варианты видов растений и т.д.) по всем возможным их уровням. Модели со смешанными эффектами широко используются во многих био- и социологических исследованиях (Zuur et al., 2009), где случайный фактор – "обследуемая группа респондентов", либо "проба из смеси видов".

### Пример с морскими животными: несколько частных моделей

Рассмотрим небольшой пример, представленный в книге А. Цуура с соавторами (Zuur et al., 2009). Файлы с исходными данными и комплект скриптов R к главам книги можно скачать на сайте авторов [highstat.com](http://highstat.com).

Все вы, вероятно, любите бродить по морскому берегу и собирать мелких морских животных (ракушек, рачков, морских звезд, гребешков, крабов, ланцетиков). Именно этим и занимался институт RIKZ, специалисты которого собрали данные по бентосу в девяти областях приливной зоны на Голландском побережье: Beach = {1, ..., 9}. Для каждой из 45 площадок сбора проб (Sample) была учтена высота пляжа над средним уровнем прилива NAP и подсчитано число обнаруженных видов бентоса Richness. Дополнительно был рассчитан индекс степени морских возмущений Exposure, учитывающий интенсивность приливной волны, наклон дна, зернистость грунта, толщину анаэробного слоя и т.д. Этот индекс был приведен к фактору с двумя уровнями: "a" при значениях Exposure < 11 и "b" при Exposure = 1. Необходимо оценить статистическую зависимость богатства видов Richness от высоты NAP и возмущения Exposure.

```
RIKZ <- read.table(file = "RIKZ.txt", header = TRUE, dec = ".")
head(RIKZ)
```

	Sample	Richness	Exposure	NAP	Beach
1	1	11	10	0.045	1
2	2	10	10	-1.036	1
3	3	13	10	-1.336	1
4	4	11	10	0.616	1
5	5	10	10	-0.684	1

```
6      6      8      8  1.190      2
ExposureBeach <- c("a", "a", "b", "b", "a", "b", "b", "a", "a")
```

Наивный подход приведет нас к мысли описать искомую зависимость знакомой нам моделью линейной регрессии с гауссовым распределением остатков:

$$R_{ij} = \alpha + \beta_1 \times \text{NAP}_{ij} + \beta_2 \times \text{Exposure}_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2),$$

где  $R_{ij}$  - богатство видов участка  $j$  на пляже  $i$ ,  $\text{NAP}_{ij}$  и  $\text{Exposure}_i$  – предикторы модели и  $\varepsilon_{ij}$  – случайные остатки. Однако эта модель не учитывает *эффекта вложенности (nested)* данных: на каждом пляже сделано по 5 проб и, скорее всего, число видов на участках одного пляжа будет более схожим, чем на участках различных местообитаний. Эту модель целесообразно забраковать.

Вторая мысль (более плодотворная, но, все же, не оптимальная) приведет нас к выполнению так называемого двухэтапного анализа. На первом этапе рассчитаем значения коэффициентов регрессии  $\beta_i$  для каждого  $i$ -го пляжа по совокупности из 5 проб:

$$R_{ij} = \alpha + \beta_i \times \text{NAP}_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad j = 1, \dots, 5.$$

На втором шаге мы найдем параметры общей линейной модели, которая оценивает зависимость коэффициентов  $\hat{\beta}_i$ , полученных на первом этапе, от предиктора  $\text{Exposure}$ :

$$\hat{\beta}_i = \eta + \tau \times \text{Exposure}_i + b_i, \quad i = 1, \dots, 9.$$

Эта модель соответствует тривиальному однофакторному дисперсионному анализу.

```
Beta<-vector(length=9)      # Первый этап
for (i in 1:9){
  tmpout<-summary(lm(Richness~NAP,
                     subset = (Beach==i), data=RIKZ))
  Beta[i] <- tmpout$coefficients[2,1]
}
print(Beta, 3)
[1] -0.372 -4.175 -1.755 -1.249 -8.900 -1.389 -1.518 -1.893 -2.968
# Второй этап
tmp2 <- lm(Beta ~ factor(ExposureBeach), data=RIKZ)
summary(tmp2)
Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)         -3.662      1.099  -3.332   0.0126 *
factor(ExposureBeach)b  2.184      1.649   1.325   0.2268
```

Кроме огорчившей нас статистической незначимости фактора, отражающего абиотические условия, двухэтапный анализ имеет и другие недостатки:

- вариация всех данных для каждого берега сводится к одному параметру;
- на втором шаге мы анализируем параметры регрессии, а не наблюдаемые данные (т.е. не моделируем непосредственно интересующий нас отклик);
- итоговая статистическая величина не зависит от числа наблюдений (их может быть 5, 50, или 50 000).

Наконец, в качестве третьей версии можно представить нашу модель как линейную зависимость богатства видов от высоты NAP, где свободный член изменяется для каждого пляжа  $\text{Beach}_i$ , номер которого выступает в качестве фактора с девятью фиксированными уровнями:

$$R_{ij} = (\alpha + \beta_1 \times \text{Beach}_i) + \beta_2 \times \text{NAP}_{ij} + \varepsilon_{ij}.$$

Однако мы вовсе не интересуемся знанием точной природы "эффекта пляжа", хотя платить за включение этого члена в модель приходится восемью степенями свободы (слишком высока цена!).

Все перечисленные проблемы решаются с использованием моделей со смешанными эффектами, которые комбинируют действия обеих шагов в одну простую модель:

$$R_i = \mathbf{X}_i \times \beta + \mathbf{Z}_i \times b_i. \quad (1)$$

Здесь  $R_i$  является оценкой богатства видов на пляже  $i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ . Предикторы модели включают фиксированный компонент  $\mathbf{X}_i \times \beta$  и случайный компонент  $\mathbf{Z}_i \times b_i$ . Даже для этого небольшого примера есть несколько вариантов заполнения матриц  $\mathbf{X}_i$  и  $\mathbf{Z}_i$ , которые мы обсудим ниже. Пока нам только важно, что эти матрицы имеют размерности  $n_i \times p$  и  $n_i \times q$  соответственно, где  $n_i$  - число наблюдений  $R_i$ ,  $p$  - число предикторов в  $\mathbf{X}_i$ , и  $q$  - число объясняющих переменных в  $\mathbf{Z}_i$ .

Переходя к обсуждению модели LMEM, рассмотрим последовательно три примера:

- a) Модель со случайным свободным членом зависимости между  $R_i$  и NAP $_i$ ;
- б) Модель со случайными свободным членом и коэффициентом угла наклона;
- в) Различные модели со смешанными эффектами, включающими все предикторы.

Модель со случайным свободным членом использует местоположение пляжа Beach $_i$  как случайный фактор, однако предполагает, что весь эффект его влияния сконцентрирован в сдвиге свободного члена:

$$R_i = NAP_i \times \beta + b_i.$$

В развернутой форме эта модель имеет вид:

$$\begin{pmatrix} R_{i1} \\ R_{i2} \\ R_{i3} \\ R_{i4} \\ R_{i5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & NAP_{i1} \\ 1 & NAP_{i2} \\ 1 & NAP_{i3} \\ 1 & NAP_{i4} \\ 1 & NAP_{i5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times b_i + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \varepsilon_{i3} \\ \varepsilon_{i4} \\ \varepsilon_{i5} \end{pmatrix}$$

т.е. матрица случайных эффектов  $\mathbf{Z}_i$  в выражении (1) представляет собой единичный вектор.

Для расчета воспользуемся функцией lme () из пакета nlme, которая, в отличие от функции lm(), позволяет задать случайные эффекты. В частности, параметр ~1 | fBeach определяет случайный свободный член модели (справа от знака '|' задается предикторная переменная):

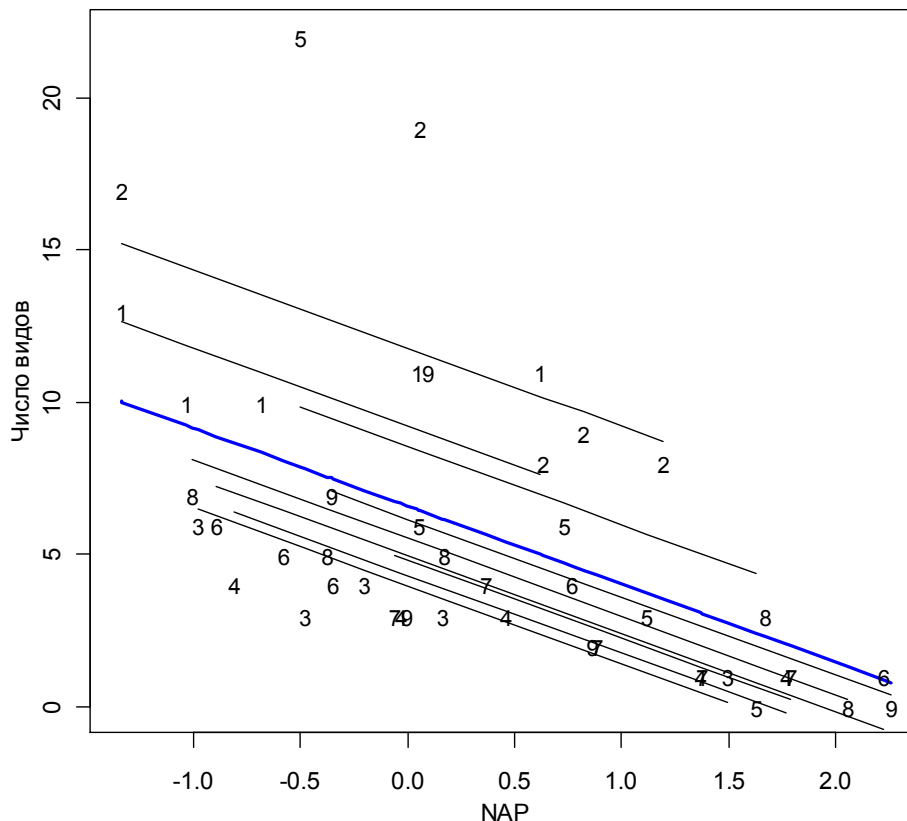
```
library(nlme)
RIKZ$fBeach <- factor(RIKZ$Beach)
Mlme1 <- lme(Richness ~ NAP, random = ~1 | fBeach, data=RIKZ)
summary(Mlme1)
Linear mixed-effects model fit by REML
Data: RIKZ
      AIC      BIC    logLik
247.4802 254.525 -119.7401
Random effects:
Formula: ~1 | fBeach
      (Intercept) Residual
StdDev:    2.944065  3.05977
Fixed effects: Richness ~ NAP
              Value Std.Error DF   t-value p-value
(Intercept)  6.581893 1.0957618 35    6.006682    0
NAP          -2.568400 0.4947246 35   -5.191574    0
```

В первой части блока выведенных результатов приведены информационные критерии AIC и BIC, а также достигнутый максимум функции правдоподобия logLik. Эти показатели могут потребоваться нам для селекции моделей. Вторая и третья части содержат анализ случайных и фиксированных эффектов. Часть, связанная с Fixed effects, определяет зависимость числа видов от высоты пляжа как  $6.58 - 2.56 \times NAP_i$ ,

причем к свободному члену этой функции добавляется величина случайного эффекта  $b_i$ . Стандартное отклонение этого приращения свободного члена (StdDev: 2.94) определено выше в части, связанной с Random effects, и почти совпадает со стандартным отклонением для остатков Residual.

Приведем график, отражающий смысл этой модели:

```
F0 <- fitted(Mlme1, level=0)
F1 <- fitted(Mlme1, level=1)
I <- order(RIKZ$NAP) ; NAPs <- sort(RIKZ$NAP)
plot(NAPs, F0[I], lwd=2, col="blue", type="l", ylim=c(0, 22),
      ylab="Число видов", xlab="NAP")
for (i in 1:9){
  x1<-RIKZ$NAP[RIKZ$Beach==i]
  y1<-F1[RIKZ$Beach==i] ; K<-order(x1)
  lines(sort(x1), y1[K])
}
text(RIKZ$NAP, RIKZ$Richness, RIKZ$Beach, cex=0.9)
```



Жирная синяя линия определяет центральную тенденцию зависимости числа видов от высоты над уровнем прилива. К свободному члену этой зависимости добавлены (с учетом знака!) случайные эффекты местоположения каждого пляжа, вызывающие параллельные сдвиги остальных 9 прямых. Цифрами показаны координаты точек по исходным данным для каждого пляжа (по 5 точек повторностей).

**Модель со случайными свободным членом и коэффициентом угла наклона** также использует местоположение пляжа  $Beach_i$  как случайный фактор, однако выдвигает дополнительное предположение о том, что характер зависимостей между числом видов  $R_i$  и высотой  $NAP_i$  различен для каждого пляжа. Иными словами, для каждого значения фактора  $Beach_i$  должен корректироваться не только свободный член зависимости между  $R_i$  и  $NAP_i$ , но и коэффициент угла наклона. Модель имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} R_{i1} \\ R_{i2} \\ R_{i3} \\ R_{i4} \\ R_{i5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & NAP_{i1} \\ 1 & NAP_{i2} \\ 1 & NAP_{i3} \\ 1 & NAP_{i4} \\ 1 & NAP_{i5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & NAP_{i1} \\ 1 & NAP_{i2} \\ 1 & NAP_{i3} \\ 1 & NAP_{i4} \\ 1 & NAP_{i5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \varepsilon_{i3} \\ \varepsilon_{i4} \\ \varepsilon_{i5} \end{pmatrix}$$

т.е. в матрицу  $Z_i$ , определяющую конфигурацию случайных эффектов, дополнительно включается набор значений  $NAP_i$ . Это выражается в изменении вида аргумента  $\sim 1 + NAP$  | fBeach для параметра random функции lme() :

```
Mlme2 <- lme(Richness ~ NAP, method = "REML",
             random = ~1 + NAP | fBeach, data = RIKZ)
```

```
summary(Mlme2)
```

```
Random effects: Formula: ~1 + NAP | fBeach
```

```
Structure: General positive-definite, Log-Cholesky parametrization
```

```
StdDev Corr
```

```
(Intercept) 3.549100 (Intr)
```

```
NAP 1.715015 -0.99
```

```
Residual 2.702785
```

```
Fixed effects: Richness ~ NAP
```

```
Value Std.Error DF t-value p-value
```

```
(Intercept) 6.588729 1.2647708 35 5.209425 0e+00
```

```
NAP -2.830029 0.7229514 35 -3.914549 4e-04
```

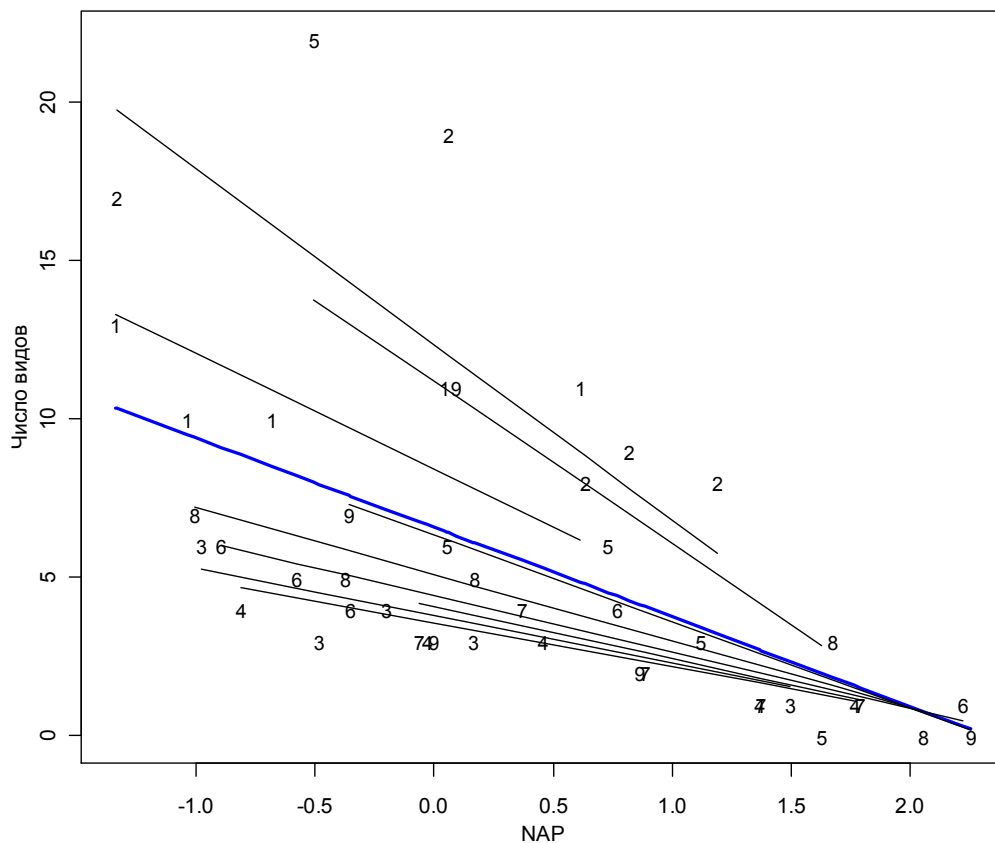
```
Correlation:
```

```
(Intr)
```

```
NAP -0.819
```

```
# Блок кода R для вывода графика в целом идентичен
```

```
# представленному выше
```





Изменению подвергся блок выводимых результатов для случайных эффектов, который стал включать уже два члена. Первый  $b_1$ , как и в предыдущей модели, определяет оценку стандартного отклонения свободного члена (Intercept) для модели с фиксированными эффектами. Второй  $b_2$  определяет изменчивость угла наклона прямых зависимости  $R_i$  от  $NAP_i$  для всех девяти пляжей:

Можно отметить также, что вариация, сконцентрированная в случайном эффекте  $b_1$ , в четыре раза превышает дисперсию, заключенную в  $b_2$ , при высоком коэффициенте корреляции между ними (-0.99).

Другое наше замечание связано с упоминанием загадочной аббревиатуры метода REML, который используется по умолчанию при подгонке смешанных моделей. Он расшифровывается как *метод максимального правдоподобия с ограничениями (restricted maximum likelihood)*. Относительно возможного вопроса о том, чем он отличается от обычного метода максимального правдоподобия (кстати, его также можно использовать, если задать параметр `method = "ML"`), большинство книг на эту тему приводит несколько страниц не слишком дружелюбных формул в духе матричной алгебры, либо избегает деталей и представляет REML, как некий мистический путь "корректировки степеней свободы". Ограничимся этим и мы.

### Смешанные модели с использованием всех предикторов

Преобразуем индекс интенсивности абиотических возмущений Exposure в фактор fExp и выполним построение линейной модели, в фиксированной части которой учтем как дифференциальные эффекты, так и эффект парного взаимодействия NAP и fExp:

```
RIKZ$fExp<-RIKZ$Exposure
RIKZ$fExp[RIKZ$fExp==8]<-10
RIKZ$fExp<-factor(RIKZ$fExp,levels=c(10,11))
Mlme4 <- lme(Richness ~1 + NAP * fExp,
             random = ~1 + NAP | fBeach, data = RIKZ)
summary(Mlme4)
Random effects: Formula: ~1 + NAP | fBeach
                   StdDev   Corr
(Intercept) 2.421276 (Intr)
NAP          1.507835 -0.801
Residual    2.607753

Fixed effects: Richness ~ 1 + NAP * fExp
                   Value Std.Error DF   t-value p-value
(Intercept)  9.118945  1.2242357 34   7.448684  0.0000
NAP          -3.879203  0.8816476 34  -4.399947  0.0001
fExp11      -5.534743  1.8510032  7  -2.990132  0.0202
NAP:fExp11   2.429496  1.3327641 34   1.822900  0.0771

Correlation:
                   (Intr) NAP    fExp11
NAP                -0.637
fExp11             -0.661  0.421
NAP:fExp11         0.421 -0.662 -0.658
```

Общий смысл представленной модели заключается в следующем. Как всегда при построении модели регрессии, мы имеем некоторую неопределенность искомой зависимости числа обнаруженных видов морских животных  $R_i$  от высоты пляжа  $NAP_i$  и



интенсивности приливных возмущений  $f_{Exp_i}$  (фиксированные факторы). Некоторую часть этой неопределенности мы можем объяснить *вариацией между местообитаниями*. Объявив для этого в качестве случайного эффекта  $f_{Beach}$ , мы оцениваем вклад этого фактора в виде стандартного отклонения соответствующего нормального распределения  $StdDev$ . Иными словами, местообитание перестает быть самостоятельным предиктором модели, но, внося свой вклад в общую дисперсию, наряду с необъясняемыми остатками  $\varepsilon$ , ограничивает возможность совершения ошибки 1-го рода (отклонение верной нулевой гипотезы).

Здесь, конечно, естественен вопрос: является ли найденная модель оптимальной? Рассчитаем еще две модели: в первой из них исключим член  $NAP : f_{Exp11}$ , оценивающий парное взаимодействие, который по  $t$ - критерию оказался незначимым:

```
Mlme5 <- lme(Richness ~1 + NAP + fExp,
             random = ~1 + NAP | fBeach, data = RIKZ)
summary(Mlme5)
Fixed effects: Richness ~ 1 + NAP + fExp
                Value Std.Error DF   t-value p-value
(Intercept)  8.407714  1.183419 35   7.104595  0.0000
NAP          -2.808422  0.759642 35  -3.697034  0.0007
fExp11      -3.704917  1.517669  7  -2.441189  0.0447
Correlation:
      (Intr) NAP
NAP    -0.500
fExp11 -0.573 -0.024
```

Вторая модель возвращает нас к модели со случайным свободным членом:

```
Mlme6 <- lme(Richness ~1 + NAP + fExp, data = RIKZ,
             random = ~1 | fBeach, method = "REML")
summary(Mlme6)
Random effects: Formula: ~1 | fBeach
                  (Intercept) Residual
StdDev:          1.907175  3.059089
```

Для сравнения полученных моделей используем знакомую нам функцию `anova()`, которая для смешанных моделей приобретает более расширенный вид:

```
anova(Mlme4, Mlme5, Mlme6)
      Model df      AIC      BIC    logLik  Test  L.Ratio p-value
Mlme4     1   8 237.1331 250.8416 -110.5665
Mlme5     2   7 240.5327 252.6964 -113.2663 1 vs 2 5.399608 0.0201
Mlme6     3   5 240.5538 249.2422 -115.2769 2 vs 3 4.021142 0.1339
```

Очевидно, что по минимуму АИС-критерия наилучшей моделью является `Mlme5`, которая статистически значимо отличается от остальных двух моделей. Обобщая изложенное, приведем сравнительную таблицу изменения АИС-критерия для всех построенных моделей. Здесь первая модель с одним случайным эффектом, ранее не обсуждавшаяся нами, вообще не включает абиотических факторов, а показывает лишь изменчивость числа видов морских организмов для различных пляжей:

	Фиксированный эффект	Случайный эффект	DF	AIC
1	Richness ~ 1	~1   fBeach	3	267.11
2	Richness ~ NAP	~1   fBeach	4	247.48
3	Richness ~ NAP	~1 + NAP   fBeach	6	244.38
4	Richness ~ 1 + NAP * fExp	~1 + NAP   fBeach	8	<b>237.13</b>
5	Richness ~ 1 + NAP + fExp	~1 + NAP   fBeach	7	240.53
6	Richness ~ 1 + NAP + fExp	~1   fBeach	5	240.55

Нам осталось затронуть проблему: как проверить, являются ли построенные нами модели статистически значимыми в целом? Ответ на этот вопрос в случае моделей со смешанными эффектами сводится к применению различных методов рандомизации, бутстрепа и марковских цепей Монте-Карло (MCMC). Некоторые примеры их использования приведены в книге (Шитиков, Розенберг, 2014).

### 8.7. Индуктивные модели (метод группового учета аргументов)

В конце 60-х годов группа украинских ученых во главе с акад. А.Г. Ивахненко разработала базовую концепцию индуктивного моделирования, которая легла в основу целой серии эволюционных алгоритмов искусственного интеллекта (*artificial intelligence*). В отличие от классического *дедуктивного* пути («от предполагаемых механизмов изучаемого процесса к верификации конкретной математической модели»), при *индуктивном* подходе сама конечная модель, построенная в ходе ее постепенной компьютерной адаптации к исходному набору данных, является объективным результатом исследования (см. статью В.С. Степашко на [www.gmdh.net](http://www.gmdh.net)). При этом используются следующие *принципы самоорганизации*:

1. Определяется класс моделей, в рамках которого возможен последовательный переход от простейших вариантов к наиболее сложным (т.е. индуктивный процесс). Здесь могут использоваться самые различные типы моделей: линейная или нелинейная регрессия, ряды Фурье, кластеры объектов, наборы логических правил и проч.

2. Задается механизм эволюции моделей и критерии их отбора, благодаря которым каждая отдельная мутация оценивается с точки зрения полезности для улучшения качества конечного результата. При этом наиболее целесообразный путь постепенного усложнения самоорганизующейся модели основан на принципах *неокончателности решений* Д. Габора и *массовой селекции* А.Г. Ивахненко, которые заключаются в необходимости сохранения достаточной "свободы выбора" из некоторого подмножества лучших решений на каждом шаге адаптации.

3. Формирование модели оптимальной сложности, описывающей анализируемые закономерности, которые скрыты в зашумленных экспериментальных данных, осуществляется с использованием принципа *внешнего дополнения*. Только внешние критерии, основанные на новой информации, являются: а) своеобразным фильтром, отбрасывающим "мусор" в исходных данных, и б) средством, позволяющим блокировать переусложнение искомой модели, которое, по словам Ивахненко, «так же вредно, как и ее недоусложнение».

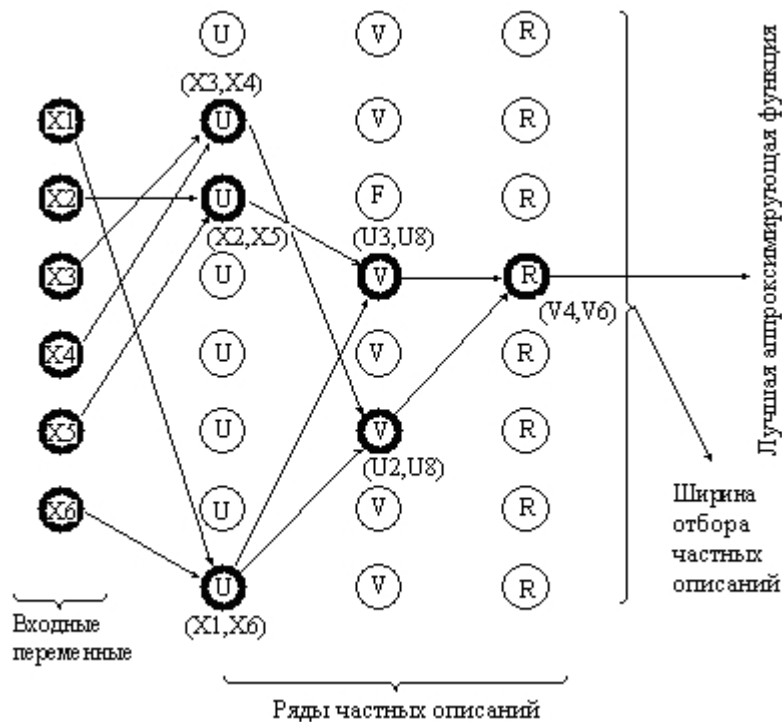
Эти принципы легли в основу такого направления анализа данных как *метод группового учёта аргументов* – МГУА (*Group Method of Data Handling, GMDH*). При синтезе моделей МГУА используются различные процессы самоорганизации: комбинаторные (*COMBI* и *MULTI*), многорядные (*MIA*) и релаксационные (*RIA*) схемы, алгоритмы гибридизации, основанные на конечных стохастических автоматах и т.д. На сайте [www.gmdh.net](http://www.gmdh.net) представлено для ознакомления большое число монографий и журнальных публикаций, описывающих теоретические и практические аспекты метода (1968-2004 гг., рус., укр., англ. яз.).

Рассматриваемый нами ниже многорядный итерационный алгоритм МГУА (MIA) является одним из обобщений регрессионного анализа, где некоторая сложная зависимость случайной величины  $y$  от  $m$  предикторов

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

заменяется последовательностью рядов "частных описаний", являющихся простыми функциями двух переменных.

Первый ряд селекции (см. рисунок ниже) формируется с использованием  $s$  моделей регрессии ( $s = C_m^2$ ), основанных на всех парных комбинациях исходных переменных ( $x_i, x_j$ ), т.е.  $u_1 = f(x_1, x_2), u_2 = f(x_1, x_3), \dots, u_s = f(x_{m-1}, x_m)$ . Рассчитанные по этим моделям прогнозируемые значения  $u_1, \dots, u_s$  используются для построения частных описаний во втором ряду селекции –  $v_1 = f(u_1, u_2), v_2 = f(u_1, u_3), \dots, v_p = f(u_{s-1}, u_s)$ , где  $p = C_s^2$ . Этот итеративный процесс продолжается далее, т.е. формируются третий и последующие ряды селекции.



Результирующая сложность такой многорядной модели зависит от трех факторов: вида опорной функции  $f$  для каждого частного описания, количества рядов селекции и ширины отбора частных описаний. Отметим предварительно ключевую роль здесь критерия самоорганизации  $L$ , адекватный выбор которого призван обеспечить:

а) ранжирование частных описаний внутри каждого ряда, чтобы пропустить для дальнейшего усложнения модели только лучшие решения, адекватные по отношению к новым данным и устойчивые к "мусору";

б) остановку итерационного процесса, если на текущем шаге селекции достигнуто оптимальное значение критерия  $L_{opt}$  – см. статью (Васильев, Ланге, 2002 на [gmdh.net](http://gmdh.net)).

В оригинальном описании алгоритма исходную выборку предварительно разделяют случайным образом на две статистически однородные части: обучающую и проверочную (контрольную) последовательности. Тогда в качестве внешнего критерия селекции можно использовать стандартную ошибку частных описаний на проверочной выборке, что обеспечивает несмещенность получаемого решения. Нами в представленном ниже скрипте предпринята попытка использовать для этого ошибку  $scv$  при кросс-проверке.

Каждое частное описание обычно задается линейной или полиномиальной функцией  $f$  двух переменных вида

$$y_k = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_j \quad \text{или} \\ y_k = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_j + \beta_3 x_i x_j + \beta_4 x_i^2 + \beta_5 x_j^2; \quad 0 < i < m, \quad 0 < j < m.$$

Коэффициенты такого регрессионного уравнения могут быть легко определены даже по небольшому числу наблюдений обучающей последовательности методом наименьших квадратов.

Усложнение модели происходит только за счет многорядности, поскольку на каждом шаге количество используемых коэффициентов  $\beta_i$ , как минимум, удваивается (если формируется достаточно много рядов, то число аргументов модели может насчитывать миллионы). На практике число шагов ограничивают значением  $m$ , хотя минимум критерия селекции обычно достигается достаточно быстро.

Ширину отбора частных описаний обычно (но не всегда) также принимают равной исходному числу предикторов  $m$ , т.е., например, при  $m = 7$  из  $C_7^2 = 21$  моделей, полученных на первом шаге, во второй ряд отбирается только 7 частных описаний, наилучших по используемому критерию. По завершении итерационного процесса (т.е. когда величина  $L_{opt}$  стабилизируется), последний ряд селекции содержит  $m$  конечных моделей оптимальной сложности.

Рассмотрим реализацию многорядного алгоритма на примере. Используем для этого таблицу `state.x77` из базовой реализации R, которая содержит 8 показателей по каждому из 50 штатов США: численность населения (`Population`), доход на душу населения (`Income`), процент неграмотных (`Illiteracy`), число убийств и смертей по неосторожности на 100000 жителей (`Murder`), процент выпускников средней школы (`HS Grad`), число дней в году с температурой ниже  $0^\circ$  (`Frost`), площадь штата (`Area`) и среднюю продолжительность жизни (`Life Exp`). Последний признак будем считать зависимой переменной  $y$  и построим для неё модель регрессии, включающие остальные семь предикторов. Поскольку названия некоторых переменных таблицы содержат пробелы (что по синтаксису языка R нежелательно), выполним их коррекцию.

Определим также список формул моделей, которые мы будем использовать для подгонки частных описаний:

```
X <- state.x77[,c(1:3,5:8,4)]
colnames(X)[8] = "Life.Exp"
colnames(X)[5] = "HS.Grad"
M <- ncol(X) ; N <- nrow(X)
names(X)
[1] "Population" "Income"      "Illiteracy" "Murder"     "HS.Grad"
[6] "Frost"       "Area"        "Life.Exp"
FormulList <- c(
  "Y~X1", "Y~X2", "Y~X1+X2", "Y~X1+X2+I(X1*X2)",
  "Y~X1+X2+I(X1*X1)", "Y~X1+X2+I(X2*X2)",
  "Y~X1+X2+I(X1*X2)+I(X1*X1)", "Y~X1+X2+I(X1*X2)+I(X2*X2)",
  "Y~X1+X2+I(X1*X2)+I(X1*X1)+I(X2*X2)")
as.data.frame(FormulList)

FormulList
1      Y~X1
2      Y~X2
3      Y~X1+X2
4      Y~X1+X2+I(X1*X2)
5      Y~X1+X2+I(X1*X1)
6      Y~X1+X2+I(X2*X2)
```

```

7           Y~X1+X2+I (X1*X2)+I (X1*X1)
8           Y~X1+X2+I (X1*X2)+I (X2*X2)
9 Y~X1+X2+I (X1*X2)+I (X1*X1)+I (X2*X2)

```

Для проведения кросс-проверки моделей, составляющих частные описания, будем использовать функцию `cvLm()` из пакета `cvTools`. Параметр `cost = rtmspe` означает, что мы будем использовать в качестве критерия самоорганизации  $L$  цензурированное (*trimmed*) стандартное отклонение ошибки предсказания на проверочных последовательностях (`trim = 0.1` – пропорция "урезания"). Другой параметр – `fold`s, данные для которого подготавливаются функцией `cvFolds()`, в нашем случае определяет, что исходная выборка объемом  $N = 50$  случайно разбивается на пять групп численностью по 10 строк каждая ( $K = 10$ ), после чего последовательно по четырем группам вычисляются параметры модели, а оставшаяся пятая группа используется для проверки (см. раздел 7.4). Вся эта процедура повторяется  $R = 5$ , т.е. фактически нами для каждой тестируемой модели рассчитывается  $R*N/K = 25$  значений ошибки кросс-проверки  $scv$ , среднее из которых после цензурирования (т.е. отбрасывания 10% экстремальных значений) возвращается функцией `cvLm()`.

Определим также две собственные функции. Первая – `NEML()` – для каждой пары векторов предикторов  $X1, X2$  и отклика  $Y$  рассчитывает значения AIC-критериев для всех линейных моделей по списку из `FormulList`, после чего лучшая из них подвергается кросс-проверке описанным выше способом. Вторая функция – `PRED.NEML()` – просто возвращает при тех же входных аргументах модельный объект с номером `Iopt`:

```

library(cvTools)
set.seed(1234)
folds <- cvFolds(N, K = 10, R = 5)
NEML <- function (Y,X1,X2) {
  allAIC <- sapply(1:length(FormulList), function(k)
    AIC(lm(as.formula(FormulList[k]))))
  Iopt <- which.min(allAIC)
  Mopt <- lm(as.formula(FormulList[Iopt]))
  cvFitLm <- cvLm(Mopt, cost = rtmspe, folds = folds, trim = 0.1)
  return (c(Iopt, cvFitLm$scv))
}
PRED.NEML <- function (Y,X1,X2,Iopt) {
  Mopt <- lm(as.formula(FormulList[Iopt]))
  return (Mopt)
}

```

Теперь мы можем реализовать вычисления по многоградному алгоритму МГУА:

```

eps <- 0.001 # Малое число для оценки стабилизации L
AllModel <- list() # Список для складирования коэффициентов
for (h in 1:(M-1)) { # Нарастивание рядов селекции
  res1 <- matrix(0, ncol=6, nrow=(M-1)*(M-2)/2)
  colnames(res1) <- c("H","пп","I", "J", "Nmod", "CVcrit")
  a <- 0
  for (i in 1:(M-2)) { # Перебор всех пар предикторов
    for (j in (i+1):(M-1)) {
      a <- a + 1
      res1[a,1:4] = c(h,0,i,j)
      res1[a,5:6] = NEML(X[,M], X[,i], X[,j])
    }
  }
}

```

```

# Получили таблицу частных описаний для одного ряда селекции
# Сортируем ее по величине критерия самоорганизации
res1 <- res1[order(res1[,6]),]
res1[,2] <- 1:nrow(res1)
if (h==1) { # Первый шаг селекции
  CVglob <- res1[1,6] # Лучшая модель в ряду
  result <- res1[1:(M-1),]
} else {
# Если шаг селекции не первый, проверяем сходимость процесса
if ((CVglob-res1[1,6])<eps) break
  CVglob <- res1[1,6]
  result <- rbind(result, res1[1:(M-1),])
}
listMod1 <- lapply(1:(M-1), function(k) PRED.NEML(X[,M],
  X[,res1[k,3]], X[,res1[k,4]],res1[k,5]))
# Для (M-1)-лучших моделей извлекаем коэффициенты и прогнозы
listCoef1 <- lapply(listMod1, function(fit) fit$coef)
XP <- sapply(listMod1, function(fit) fit$fit)
AllModel <- c(AllModel, listCoef1)
# Заменяем исходную таблицу на подогнанные значения Y (!!!)
X[,1:(M-1)] <- XP
}

```

```

result # Получаем результаты моделирования
      Н  pp  I  J  Nmod   CVcrit
[1,] 1  1  1  4    4 0.5837048
[2,] 1  2  4  7    6 0.6270402
[3,] 1  3  3  4    2 0.6451471
[4,] 1  4  2  4    5 0.6585327
[5,] 1  5  4  5    3 0.6616672
[6,] 1  6  4  6    3 0.6627902
[7,] 1  7  3  5    4 0.8189247
[8,] 2  1  1  2    1 0.5603183
[9,] 2  2  1  3    1 0.5603183
[10,] 2  3  1  6    1 0.5603183
[11,] 2  4  2  3    1 0.5814782
[12,] 2  5  1  7    3 0.5819404
[13,] 2  6  2  7    3 0.5867959
[14,] 2  7  1  5    8 0.5915364
[15,] 3  1  1  7    2 0.5464488
[16,] 3  2  2  7    2 0.5464488
[17,] 3  3  3  7    2 0.5464488
[18,] 3  4  4  7    2 0.5464488
[19,] 3  5  5  7    2 0.5464488
[20,] 3  6  6  7    2 0.5464488
[21,] 3  7  1  6    3 0.5542008

```

Нетрудно заметить, что последний (третий) шаг селекции ( $H = 3$ ) – в некотором смысле формальность, поскольку шесть его наилучших ( $L_{opt} = 0.546$ ) моделей, как будет показано ниже, представляют собой тождество  $y = v_7$ . Выведем последовательно информацию о коэффициентах частных описаний во втором и первом рядах:

```

AllModel[[15]] # X2 = V7
  (Intercept)          X2
1.339446e-13 1.000000e+00
AllModel[[14]] # X1 = U1 X2 = U5
  (Intercept)          X1          X2  I(X1 * X2)  I(X2 * X2)
229.7523966  47.4951225 -53.0944657 -0.6636776  0.7110299
AllModel[[1]] # X1 = Population X2 = Murder
  (Intercept)          X1          X2  I(X1 * X2)
7.337297e+01 -1.065221e-04 -3.695612e-01 1.856252e-05
AllModel[[5]] # X1 = Murder X2 = HS.Grad
  (Intercept)          X1          X2
70.2970840 -0.2370901  0.0438873
sd(X[,1]-X[,M]) # Стандартное отклонение разностей (не остатков!!!)
0.7019943

```

Запишем уравнения модели в привычном для нас виде:

$Life.Exp = 229.7 + 47.5 \cdot u_1 - 53.1 \cdot u_5 - 0.663 \cdot u_1 \cdot u_5 + 0.711 \cdot u_5^2$ , где  
 $u_1 = 73.3 - 0.000106 \cdot Population - 0.369 \cdot Murder + 1.85 \cdot 10^{-5} \cdot Population \cdot Murder$   
 $u_5 = 70.3 - 0.237 \cdot Murder + 0.0438 \cdot HS.Grad$

Беглый анализ модели говорит о том, что продолжительность жизни зависит от уровня образования и обратно пропорциональна криминальной обстановке. Для полноты картины выполним построение обычной линейной модели, на основании которой мы, в целом, можем прийти к аналогичным выводам:

```

fitLm <- lm(Life.Exp ~ ., data = X)
summary(fitLm)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  7.094e+01  1.748e+00  40.586 < 2e-16 ***
Population   5.180e-05  2.919e-05   1.775  0.0832 .
Income      -2.180e-05  2.444e-04  -0.089  0.9293
Illiteracy   3.382e-02  3.663e-01   0.092  0.9269
Murder      -3.011e-01  4.662e-02  -6.459 8.68e-08 ***
HS.Grad      4.893e-02  2.332e-02   2.098  0.0420 *
Frost       -5.735e-03  3.143e-03  -1.825  0.0752 .
Area        -7.383e-08  1.668e-06  -0.044  0.9649
---
Residual standard error: 0.7448 on 42 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7362,    Adjusted R-squared:  0.6922
F-statistic: 16.74 on 7 and 42 DF,  p-value: 2.534e-10
# Кросс-проверка полной линейной модели
cvLm(fitLm, cost = rtmspe, folds = folds, trim = 0.1)
10-fold CV results:
      CV
0.7040126

```

В качестве некоторого резюме можно отметить, что применение МГУА оправдано в следующих случаях: а) когда отсутствует или почти отсутствует априорная информация о структуре модели и распределении ее параметров, б) объем имеющейся выборки наблюдений существенно мал при большом числе скоррелированных между собой переменных, в) моделируемый процесс имеет объективно сложный характер (например, временные ряды с нестационарным трендом).



## 8.8. Моделирование структурными уравнениями

Предметом большинства исследований, требующих статистического моделирования, является анализ причинно-следственных связей в изучаемой системе. При этом в ряде общественных или естественных отраслей науки (экономика, социология, экология и проч.) постановка активного эксперимента не всегда бывает возможна, и поэтому в качестве альтернативы используются специфические статистические процедуры обработки неэкспериментальных данных. В частности, вводятся гипотетические конструкторы, не доступные прямому наблюдению, но имеющие тесную эмпирическую связь с независимыми переменными и оказывающие решающее скрытое воздействие на моделируемый отклик. Совместный анализ наблюдаемых и латентных переменных осуществляется при *моделировании структурными уравнениями (structural equation modeling)*, которое называют еще многопараметрическим комплексным анализом (multitrait multimethod analysis), путевым анализом (path analysis), линейным причинным анализом (linear causal analysis) или методом одновременных уравнений (simultaneous equations).

Обычные уравнения регрессии дают информацию о степени простой связи между переменными  $x$  и  $y$  в форме утверждения «когда изменяется  $x$ , то изменяется и  $y$ », тогда как структурные уравнения представляют более высокий уровень абстракции, на котором при эмпирическом объединении переменных в центре внимания оказываются их множественные причинные связи. Сама модель представляет собой уже *систему одновременных* (совместных, или взаимозависимых) *уравнений*, где одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \dots + b_{1m}y_m & + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2m}y_m & + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + \dots + b_{3m}y_m & + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n + \varepsilon_3, \\ \dots & \dots \\ y_m = b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \dots + b_{m,m-1}y_{m-1} & + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Тогда изменение любой одной переменной не может происходить при абсолютной неизменности прочих и отражается практически во всей системе взаимосвязанных признаков.

Система одновременных уравнений (или *структурная форма* модели) обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные:

*Эндогенные переменные* – это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе и которые были выше обозначены через  $y$ .

*Экзогенные переменные*, обозначенные через  $x$ , – это предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.

Рассмотрим простой пример и алгоритм его алгебраического решения (он называется еще *косвенным* методом наименьших квадратов). Необходимо построить модель потребления свинины на душу населения  $y_1$  (в кг) в зависимости от цены на нее  $y_2$  (руб/кг), располагаемого дохода  $x_1$  (в руб.) и расходов по обработке мяса  $x_2$  (% от цены). При этом известно, что:

1. Потребление свинины пропорционально ее цене и располагаемому доходу, причем потребление падает с ростом цен.
2. Цена растет с ростом потребления свинины и ростом стоимости ее переработки.

С учетом отмеченных закономерностей спецификацию модели можно записать в виде ( $u_t$  и  $v_t$  – остатки модели, обусловленные неучтенными факторами):

$$\left. \begin{aligned} y_{1t} &= a_{12}y_{2t} + b_{11}x_{1t} + u_t \\ y_{2t} &= a_{21}y_{1t} + b_{22}x_{2t} + v_t \\ a_{12} &< 0 \end{aligned} \right\}$$

Для определения регрессионных коэффициентов  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  структурная форма модели преобразуется в так называемую *приведенную форму* модели, которая будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + u_1, \\ y_2 &= \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_2. \end{aligned} \right.$$

Мы получили неодновременную систему уравнений, каждое из которых можно решить методом наименьших квадратов.

На втором этапе находят нелинейную связь между коэффициентами обеих форм модели. В данном случае достаточно просто подставить одно уравнение в другое:

$$a_{12} = \delta_{12}/\delta_{22}; b_{11} = \delta_{11} - a_{12}\delta_{21}; a_{21} = \delta_{21}/\delta_{11}; b_{22} = \delta_{22} - a_{21}\delta_{12}.$$

Соберем исходные данные для модели и выполним расчет с использованием R:

```
Ddf <- as.data.frame(matrix(
  c(-3, 0.6, -200, 3, -1, -0.4, -200, -1, 2, -0.2, 0, -1, -1,
    0.6, 100, 6, 3, -0.6, 300, -7),
  nrow = 5, ncol=4, byrow=TRUE,
  dimnames = list(c("1990", "1991", "1992", "1993", "1994"),
    c("Y1", "Y2", "X1", "X2"))))
Ddf # Данные представлены в виде абсолютных отклонений от среднего
      Y1  Y2  X1 X2
1990 -3  0.6 -200  3
1991 -1 -0.4 -200 -1
1992  2 -0.2   0 -1
1993 -1  0.6  100  6
1994  3 -0.6  300 -7
# Находим коэффициенты регрессии для приведенной модели
(E1 <- lm(Y1 ~ X1 + X2, data=Ddf)$coef)
      (Intercept)           X1           X2
6.580070e-17  6.093636e-03 -2.648135e-01
(E2 <- lm(Y2 ~ X1 + X2, data=Ddf)$coef)
      (Intercept)           X1           X2
-2.981894e-17  2.940746e-04  1.120702e-01
# Пересчитываем коэффициенты для структурной модели
Coef <- matrix(NA, nrow = 2, ncol=2)
Coef[1,1] =E1[3]/E2[3] ; Coef[1,2] = E1[2]- Coef[1,1]*E2[2]
Coef[2,1] =E2[2]/E1[2] ; Coef[2,2] = E2[3]- Coef[2,1]*E1[3]
Coef
      [,1]      [,2]
[1,] -2.3629243 0.006788512
[2,]  0.0482593 0.124849940
```

Таким образом, решенная система структурных уравнений будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} y_{1t} &= -2.363 y_{2t} + 0.0067 x_{1t} + u_t \\ y_{2t} &= 0.048 y_{1t} + 0.125 x_{2t} + v_t \end{aligned} \right\}$$

Естественно, в сложных случаях такая подстановка неосуществима, поэтому наиболее распространенным методом решения систем структурных уравнений является *двухшаговый метод* наименьших квадратов (*Two-stage least squares – 2SLS*), основанный на использовании "инструментальных" переменных. Переменные ( $z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{kt}$ ) называются *инструментальными*, если они коррелируют с независимыми переменными  $x_{it}$  и не коррелируют с остальными случайными возмущениями (при  $n \rightarrow \infty$ ). Тогда процедура

$$\tilde{a} = \left( Z^T X \right)^{-1} Z^T \bar{y}$$

обеспечивает состоятельные оценки параметров модели. Подробно проблемам инструментальных переменных посвящен выпуск журнала "Квантиль", № 2, 2007 (см. [quantile.ru](http://quantile.ru)).

В двухшаговом МНК используется следующая процедура:

1 шаг. Строятся модели регрессии каждой эндогенной переменной на  $Z$  и получают расчетные значения этих переменных обычным методом наименьших квадратов.

2 шаг. Оцениваются параметры структурной формы уравнения модели: для этого в правую часть вместо значений эндогенных переменных подставляются их оценки, рассчитанные на предыдущем шаге.

В среде R идентификация и подбор коэффициентов при моделировании структурными уравнениями реализованы в нескольких пакетах. Для оценивания коэффициентов представленного примера двухшаговым методом наименьших квадратов используем функцию `tsls()` из пакета `sem`. Вызов этой функции отличается от построения обычной линейной модели `lm()` включением нового параметра `instruments`, определяющего список инструментальных переменных:

```
library(sem)
summary(tsls(Y1 ~ Y2 + X1 + X2, # 1-е уравнение системы
            instruments ~ X1 + X2), data=Ddf)
2SLS Estimates
Model Formula: Y1 ~ Y2 + X1
Instruments: ~X1 + X2
              Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.623e-17  0.548006 -4.787e-17  1.0000
Y2           -2.363e+00  1.254677 -1.883e+00  0.2004
X1           6.789e-03  0.003096  2.193e+00  0.1596
summary(tsls(Y2 ~ Y1 + X2, # 2-е уравнение системы
            instruments ~ X1 + X2, data=Ddf))
2SLS Estimates
Model Formula: Y2 ~ Y1 + X1
Instruments: ~X1 + X2
              Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.110e-17  0.15648 -7.095e-17  1.0000
Y1           4.826e-02  0.15217  3.171e-01  0.7812
X2           1.248e-01  0.06867  1.818e+00  0.2107
```

Были получены те же коэффициенты системы структурных уравнений.

Можно заметить, что классификация переменных на эндогенные и экзогенные условна и зависит от содержательной концепции принятой модели. В общем случае, все переменные, измеряемые и латентные, взаимодействуют друг с другом, однако характер этих взаимодействий устанавливается исследователем на этапе формулирования гипотез. Любые две переменные могут детерминировать друг друга (т. е. составлять причинно-следственную пару): детерминирующая переменная будет называться независимой, а детерминируемая – зависимой. Например, в качестве экзогенных переменных могут

рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (лаговые переменные).

Рассмотрим еще один пример, традиционно приводимый при обсуждении моделей с одновременными уравнениями. Нобелевский лауреат в области экономики Л. Клейн предложил следующую простую модель макроэкономики США, содержащую 3 уравнения и 3 балансовых тождества. Три экзогенными переменными, которые задаются вне модели, являются:

- $G_t$  – государственные расходы (без заработной платы) в период  $t$ ;
- $T_t$  – непрямые налоги на бизнес и поступления от экспорта;
- $A_t$  – учитываемый период времени (текущий год  $t$  - 1931)

Придавая этим переменным планируемые значения, можно получать с помощью модели прогнозные значения 9 эндогенных переменных:

- $C_t$  – объем валового потребления;
- $I_t$  – объем валовых инвестиций;
- $W^p_t$  и  $W^s_t$  – уровень заработной платы (в частном и государственном секторе);
- $K_t$  – валовой объем основных капитальных фондов;
- $P_t$  – прибыль частных компаний;
- $X_t$  – равновесие между спросом и предложением.

Дополнительными экзогенными переменными являются лаговые значения  $P_{t-1}$ ,  $K_{t-1}$  и  $X_{t-1}$ , т.е. прибыль, основной капитал и увеличение предложения над спросом за предыдущий год. Основное предположение модели состоит в том, что влияние экзогенных и лаговых переменных условно независимо и они не вносят дополнительной ошибки в оценки значений эндогенных переменных.

Система из трех структурных уравнений включает коэффициенты  $\beta_{ij}$  при экзогенных переменных,  $\alpha_{ij}$  – при эндогенных переменных, и ошибки  $\varepsilon_i$  уравнений (или структурные флуктуации), имеющие тот же смысл, что и ошибки обычной регрессии:

- $C_t = \alpha_{10} + \alpha_{11} P_t + \beta_{11} P_{t-1} + \alpha_{11} (W^p_t + W^s_t) + \varepsilon_{1t}$  : Потребительская функция;
- $I_t = \alpha_{20} + \alpha_{21} P_t + \beta_{21} P_{t-1} + \beta_{22} K_{t-1} + \varepsilon_{2t}$  : Инвестиционная функция;
- $W^p_t = \alpha_{30} + \alpha_{31} X_t + \beta_{31} A_t + \beta_{32} X_{t-1} + \varepsilon_{3t}$  : Динамика заработной платы

Балансовыми тождествами, которые не включают структурные коэффициенты и ошибки модели, являются:

- $X_t = C_t + I_t + G_t$
- $P_t = X_t - T_t - W^p_t$
- $K_t = K_{t-1} + I_t$

Подгонка модели Клейна осуществлялась с использованием временного ряда данных с 1921 по 1941 гг. Эти данные представлены в таблице Klein из пакета sem. Выполним формирование лаговых переменных (заметим, что для 1920 г. эти значения не определены из-за отсутствия значений переменных  $P_0$  и  $X_0$ ).

```
Klein$P.lag <- with(Klein, c(NA, P[-length(P)]))
Klein$X.lag <- with(Klein, c(NA, X[-length(X)]))
Klein$A <- Klein$Year - 1931
head(Klein)
  Year   C   P   Wp   I K.lag   X   Wg   G   T P.lag X.lag   A
1 1920 39.8 12.7 28.8  2.7 180.1 44.9 2.2 2.4 3.4   NA   NA -11
2 1921 41.9 12.4 25.5 -0.2 182.8 45.6 2.7 3.9 7.7 12.7 44.9 -10
3 1922 45.0 16.9 29.3  1.9 182.6 50.1 2.9 3.2 3.9 12.4 45.6  -9
4 1923 49.2 18.4 34.1  5.2 184.5 57.2 2.9 2.8 4.7 16.9 50.1  -8
5 1924 50.6 19.4 33.9  3.0 189.7 57.1 3.1 3.5 3.8 18.4 57.2  -7
6 1925 52.6 20.1 35.4  5.1 192.7 61.0 3.2 3.3 5.5 19.4 57.1  -6
# Подгонка структурных моделей Клейна методом 2SLS
# Определим формулу для списка инструментальных переменных
InstFor <- as.formula(~ G + T + Wg + A + P.lag + K.lag + X.lag)
```

```

eqn.1 <- tsls(C ~ P + P.lag + I(Wp + Wg), InstFor, data=Klein)
summary(eqn.1) # Модель 1 потребительской функции
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  16.5548    1.46798 11.2772 2.587e-09
P             0.0173    0.13120  0.1319 8.966e-01
P.lag        0.2162    0.11922  1.8137 8.741e-02
I(Wp + Wg)   0.8102    0.04474 18.1107 1.505e-12

```

Вызывает подозрение низкая статистическая значимость коэффициента  $\alpha_{11}$  при  $P$ , поэтому выполним проверку адекватности уравнения, сравнив остаточные дисперсии модели eqn.1 и нулевой модели с одним свободным членом:

```

anova(eqn.1, tsls(C ~ 1, InstFor, data=Klein))
Analysis of Variance
Model 1: C ~ P + P.lag + I(Wp + Wg)
Model 2: C ~ 1
Instruments: ~G + T + Wg + A + P.lag + K.lag + X.lag
      Res.Df    RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
Model 1      17  21.93
Model 2      20 941.43   3     919.5 237.65 4.485e-14 ***
# Аналогичным образом выполним подгонку и проверку
# адекватности остальных двух уравнений
eqn.2 <- tsls(I ~ P + P.lag + K.lag, InstFor, data=Klein)
eqn.3 <- tsls(Wp ~ X + X.lag + A, InstFor, data=Klein)

```

Полученные прогнозные значения эндогенных переменных могут дать информацию для проведения государством рациональной стабилизационной политики.

Важным средством представления и интерпретации структурной модели является отображение ее в виде графа, который часто называют *диаграммой пути* (path diagram, [Blau, Duncan, 1967](#)). Модели, которые могут быть представлены графом пути, называют *рекурсивными*, и к ним предъявляются некоторые естественные требования: отсутствие взаимонаправленных связей или обратных петель, взаимная независимость коэффициентов модели и др.

Рассмотрим процесс построения диаграмм пути, заодно показав возможности другого известного пакета – lavaan, включающего функции конфирматорного факторного анализа (confirmatory factor analysis, CFA), построения структурных уравнений sem() и моделирования латентного роста (latent growth curve models). Представим еще один интересный пример из книги [K. Bollen \(1989\)](#), в котором проводится анализ связи между степенью индустриализации страны и уровнем демократизации политической жизни. Таблица PoliticalDemocracy с исходными данными, включенная в пакет lavaan, содержит сведения по 75 странам в виде набора из 11 переменных за два фиксированных периода – 1960 и 1965 гг. (указаны в скобках за обозначениями переменных), в том числе:

- $x_1$  (1960) – валовой национальный продукт (ВНП) на душу населения;
- $x_2$  (1960) – потребление индустриальной энергии на душу населения;
- $x_3$  (1960) – процент рабочей силы, занятой в промышленности;
- $y_1$  (1960),  $y_5$  (1965) – экспертная оценка свободы прессы;
- $y_2$  (1960),  $y_6$  (1965) – свобода политической оппозиции;
- $y_3$  (1960),  $y_7$  (1965) – справедливость выборов;
- $y_4$  (1960),  $y_8$  (1965) – эффективность избранного законодательного органа.

Первым шагом является определение переменных структурной модели:

```

library(lavaan)
head(PoliticalDemocracy)
  y1      y2      y3      y4      y5      y6      y7      y8      x1      x2      x3
1  2.50  0.000000  3.333333  0.000000  1.250000  0.000000  3.726360  3.333333  4.442651  3.637586  2.557615
2  1.25  0.000000  3.333333  0.000000  6.250000  1.100000  6.666666  0.736999  5.384495  5.062595  3.568079
3  7.50  8.800000  9.999998  9.199991  8.750000  8.094061  9.999998  8.211809  5.961005  6.255750  5.224433
4  8.90  8.800000  9.999998  9.199991  8.907948  8.127979  9.999998  4.615086  6.285998  7.567863  6.267495
5 10.00  3.333333  9.999998  6.666666  7.500000  3.333333  9.999998  6.666666  5.863631  6.818924  4.573679
6  7.50  3.333333  6.666666  6.666666  6.250000  1.100000  6.666666  0.368500  5.533389  5.135798  3.892270
model <- '
# ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ КОМПОНЕНТЫ
ind60 =~ x1 + x2 + x3
dem60 =~ y1 + y2 + y3 + y4
dem65 =~ y5 + y6 + y7 + y8
# регрессия
dem60 ~ ind60
dem65 ~ ind60 + dem60
# корреляции остатков
y1 ~~ y5
y2 ~~ y4 + y6
y3 ~~ y7
y4 ~~ y8
y6 ~~ y8
'
```

Спецификация модели `model`, принятая в рамках пакета `lavaan`, позволяет в явной и наглядной форме представить ее структуру. Как и в обычных формулах среды R знак "`~`" означает оператор регрессии. Слева от него представлены зависимые эндогенные переменные, которыми в данном примере являются `dem60` и `dem65` – уровень демократизации общества в 1960 и 1965 гг. соответственно. Справа могут быть как экзогенные (наблюдаемые) переменные, так и другие латентные компоненты, в частности, уровень индустриализации страны в 1960 г. – `ind60`.

Другой блок уравнений определяет способ вычисления латентных переменных. Оператор "`=~`" имеет смысл утверждения "рассчитывается как". Справа от него представлен список независимых переменных.

Наконец, третий блок задает схему корреляционных отношений между экзогенными переменными, которые связываются между собой оператором "`~~`" (двойная тильда). В этом примере разумно предположить, что одни и те же показатели демократизации за оба сравниваемых периода времени имеют значимую ковариацию остатков. В спецификацию также включена информация о возможности связи между степенью свободы для оппозиции и эффективностью выбираемого парламента.

Функция – `sem()` на основе спецификации модели `model` выполняет оценку ее параметров. По умолчанию для оптимизации искомых коэффициентов используется метод максимального правдоподобия, но доступны и различные версии метода наименьших квадратов. Результаты получить можно стандартной функцией `summary()` или в более развернутом виде при помощи `parameterEstimates()`:

```

fit <- sem(model, data=PoliticalDemocracy)
parameterEstimates(fit)
  lhs op   rhs  est   se      z pvalue ci.lower ci.upper
1  ind60 =~   x1  1.000 0.000    NA     NA     1.000    1.000
2  ind60 =~   x2  2.180 0.139 15.742 0.000    1.909    2.452
3  ind60 =~   x3  1.819 0.152 11.967 0.000    1.521    2.116
4  dem60 =~   y1  1.000 0.000    NA     NA     1.000    1.000
```

5	dem60	==	y2	1.257	0.182	6.889	0.000	0.899	1.614
6	dem60	==	y3	1.058	0.151	6.987	0.000	0.761	1.354
7	dem60	==	y4	1.265	0.145	8.722	0.000	0.981	1.549
8	dem65	==	y5	1.000	0.000	NA	NA	1.000	1.000
9	dem65	==	y6	1.186	0.169	7.024	0.000	0.855	1.517
10	dem65	==	y7	1.280	0.160	8.002	0.000	0.966	1.593
11	dem65	==	y8	1.266	0.158	8.007	0.000	0.956	1.576
12	dem60	~	ind60	1.483	0.399	3.715	0.000	0.701	2.265
13	dem65	~	ind60	0.572	0.221	2.586	0.010	0.139	1.006
14	dem65	~	dem60	0.837	0.098	8.514	0.000	0.645	1.030
15	y1	~~	y5	0.624	0.358	1.741	0.082	-0.079	1.326
16	y2	~~	y4	1.313	0.702	1.871	0.061	-0.063	2.689
17	y2	~~	y6	2.153	0.734	2.934	0.003	0.715	3.591
18	y3	~~	y7	0.795	0.608	1.308	0.191	-0.396	1.986
19	y4	~~	y8	0.348	0.442	0.787	0.431	-0.519	1.215
20	y6	~~	y8	1.356	0.568	2.386	0.017	0.242	2.470
21	x1	~~	x1	0.082	0.019	4.184	0.000	0.043	0.120
22	x2	~~	x2	0.120	0.070	1.718	0.086	-0.017	0.256
23	x3	~~	x3	0.467	0.090	5.177	0.000	0.290	0.643
24	y1	~~	y1	1.891	0.444	4.256	0.000	1.020	2.762
25	y2	~~	y2	7.373	1.374	5.366	0.000	4.680	10.066
26	y3	~~	y3	5.067	0.952	5.324	0.000	3.202	6.933
27	y4	~~	y4	3.148	0.739	4.261	0.000	1.700	4.596
28	y5	~~	y5	2.351	0.480	4.895	0.000	1.410	3.292
29	y6	~~	y6	4.954	0.914	5.419	0.000	3.162	6.746
30	y7	~~	y7	3.431	0.713	4.814	0.000	2.034	4.829
31	y8	~~	y8	3.254	0.695	4.685	0.000	1.893	4.615
32	ind60	~~	ind60	0.448	0.087	5.173	0.000	0.279	0.618
33	dem60	~~	dem60	3.956	0.921	4.295	0.000	2.151	5.762
34	dem65	~~	dem65	0.172	0.215	0.803	0.422	-0.249	0.593

Используя функцию `fitMeasures()`, можно выполнить серию проверок на адекватность модели различными методами и получить 36 тестовых показателей. Ограничимся получением результатов тестирования по критерию  $\chi^2$  и величине корня из среднеквадратичной ошибки аппроксимации (RMSEA – Root Mean Square Error of Approximation) с выводом соответствующих им  $p$ -значений, а также знакомых нам информационных критериев (AIC, BIC) и индекса качества подгонки тестируемой модели по сравнению с "максимально насыщенной" (CFI – Comparative Fit Index):

```
fitMeasures (fit, c("chisq", "df", "pvalue", "aic", "bic",
"cfi", "rmsea", "rmsea.pvalue" ))
      chisq      df      pvalue      aic      bic
38.125    35.000     0.329    3157.582    3229.424
      cfi      rmsea  rmsea.pvalue
0.995     0.035     0.611
```

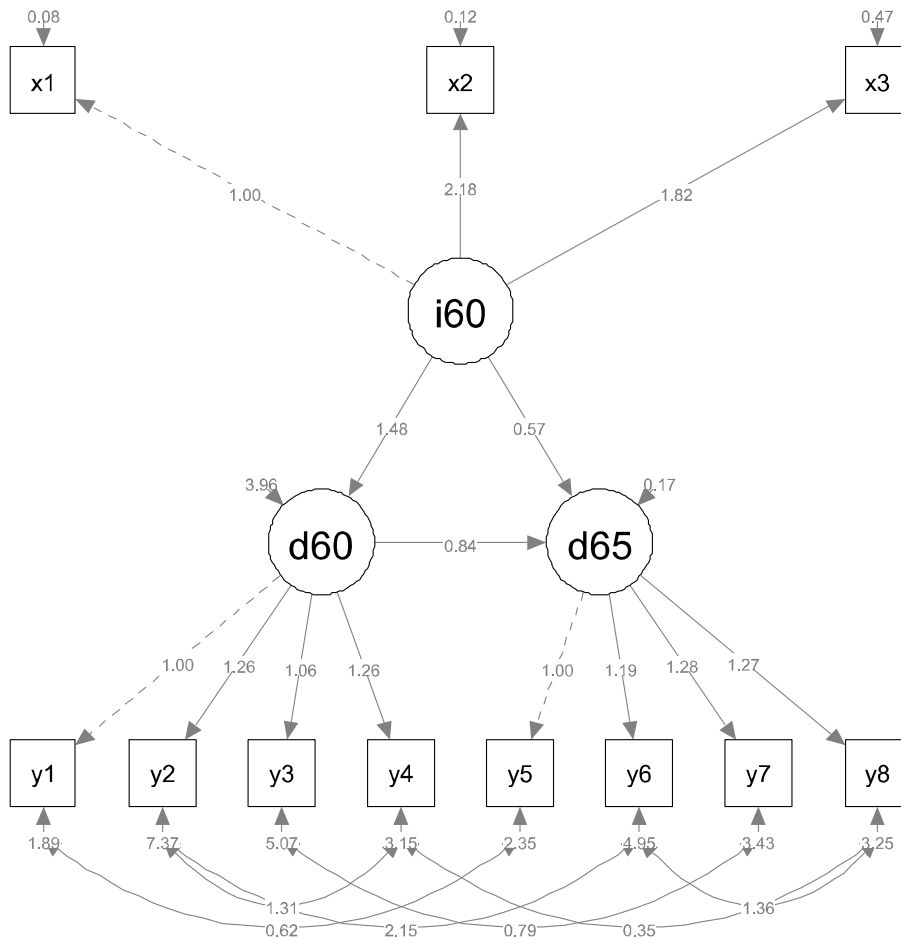
Подробности см. в статье Y. Rosseel (2012), представленной на [jstatsoft.org](http://jstatsoft.org).

Изучение длинных списков коэффициентов системы линейных уравнений множественной регрессии и ковариационных соотношений является весьма утомительным занятием (даже для нашего скромного примера число оцененных параметров составляет 34). Анализ модели становится нагляднее, если полученные результаты отобразить на диаграмме пути. Выполнить визуализацию графов структурных моделей можно с



использованием функции `semPaths()` из пакета `semPlot` (внимание: при его установке возможна загрузка двух десятков косвенно связанных пакетов!). Многочисленные графические параметры функции позволяют регулировать объем включаемой информации, цвет, форму и другие атрибуты создаваемого изображения:

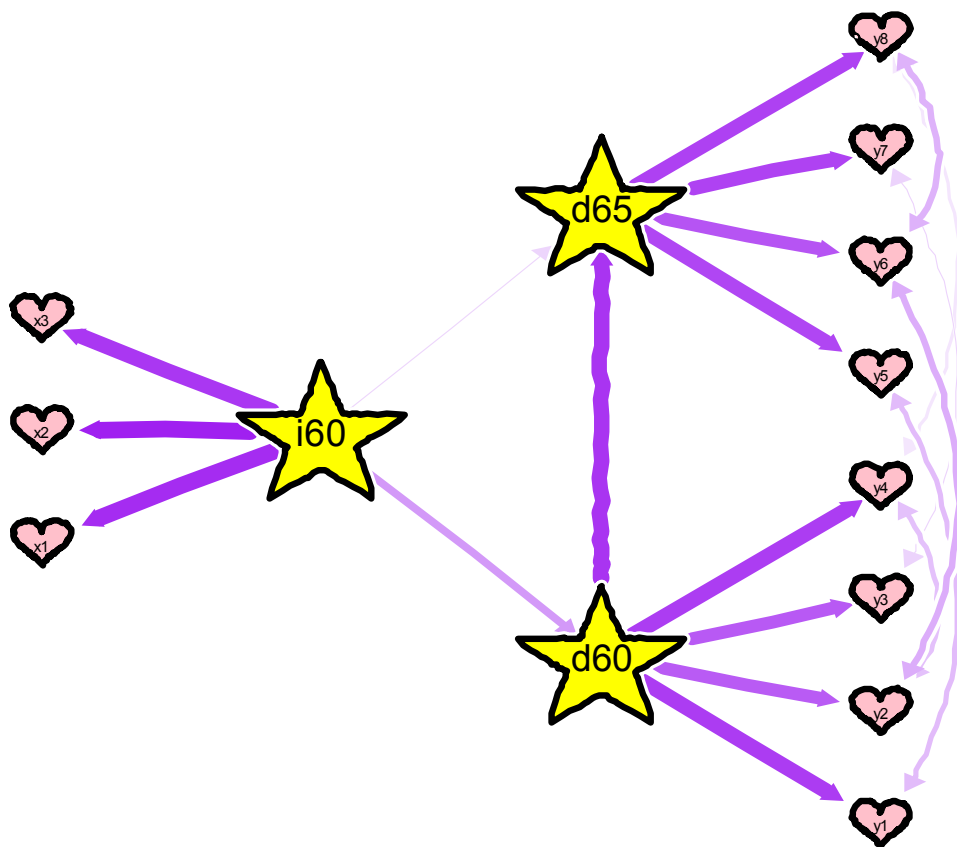
```
# классическая форма диаграммы
semPaths(fit, "model", "est", style = "lisrel")
```



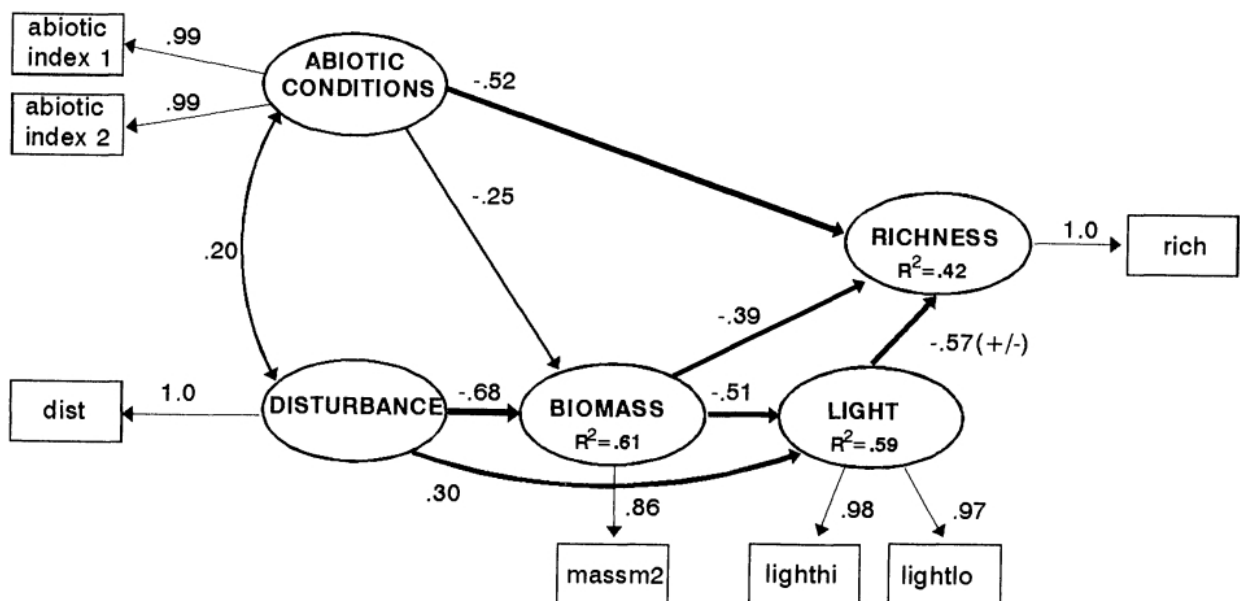
На представленной выше диаграмме пути латентные переменные обозначаются овалами, а наблюдаемые – прямоугольниками, причинно-следственная пара соединяется односторонней стрелкой, исходящей от независимой к зависимой переменной. Ковариационные связи обозначаются двухсторонними стрелками. Над стрелками проставлены значения коэффициентов модели.

Вид другой диаграммы может понравиться, например, влюбленным аналитикам:

```
# Привет от Св. Валентина
semPaths(fit, "std", "hide",
  sizeLat = 15, shapeLat = "star",
  shapeMan = "heart",
  col = list(man = "pink", lat = "yellow"),
  residuals = FALSE,
  borders = FALSE, edge.color = "purple",
  XKCD = TRUE, edge.width = 2,
  rotation = 2, layout = "tree2",
  fixedStyle = 1, mar = c(1, 3, 1, 3))
```



Для читателя, интересующегося применением структурных моделей в биологии и экологии, рекомендуем статью Grace and Pugsek (1997), прогнозировавших видовое богатство растительности в штате Луизиана (представлена на [labs.bio.unc.edu](http://labs.bio.unc.edu)). Диаграмма пути для их общей модели имела вид:



## 9. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И СОЗДАНИЕ КАРТОГРАММ



Изучение расположения и взаимосвязи объектов в пространстве играет очень важную роль при обработке результатов наблюдений. Можно даже сказать категоричнее – большинство социальных или экологических исследований являются частным случаем анализа пространственных структур. На современном этапе пространственно-временные технологии моделирования систем в различных масштабах рассматриваются как основной путь интегрального анализа и обобщения всего массива данных о состоянии природы и общества.

Статистическая среда R имеет весьма продвинутый инструментарий пространственного анализа, обеспечивающий геостатистическое моделирование, визуализацию, связь с современными ГИС-системами и интернет-ресурсами. Со списком основных пакетов можно ознакомиться в соответствующем разделе на сайте [cran.r-project.org](http://cran.r-project.org). Некоторые возможности их использования мы рассмотрим в настоящей главе. Следует подчеркнуть, что пространственный анализ с помощью R – это огромная тема, изложение которой легко может занять по объему несколько отдельных книг. Наша цель – привести лишь некоторые примеры, связанные либо с нашими собственными исследованиями, либо с исследованиями наших коллег.

### 9.1. Простая карта: использование растрового рисунка и подсчет расстояний

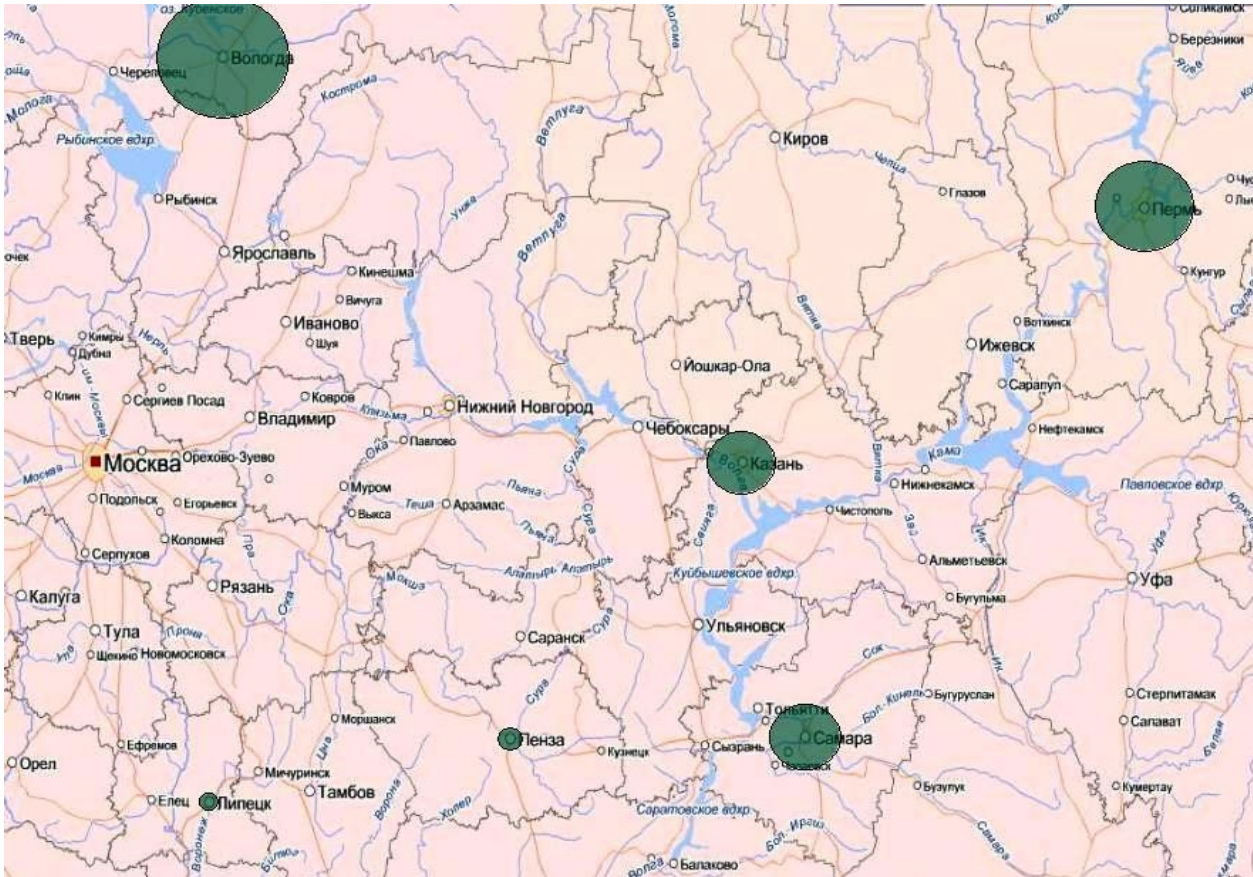
Рассмотрим простой пример нанесения точек на карту. Пусть в шести областях европейской части России был проведен отлов обыкновенной гадюки *Vipera berus* (исследования лаборатории герпетологии и токсикологии [ИЭВБ РАН](#)). У каждого из отловленных экземпляров измеряли морфологические признаки (всего 10 показателей) и в лабораторных условиях определяли протеолитическую активность яда.

Создадим растровый рисунок в формате JPG путем выкопировки нужного фрагмента из любого географического атласа, которые во множестве представлены в Интернете. Пусть размеры рисунка  $X_{\text{ras}} = 1015$  и  $Y_{\text{ras}} = 635$  пикселей. Откроем в среде R графическое окно с использованием функций `readJPEG()` и `rasterImage()`. Установим координаты мест отлова змей (условно совмещая их с точками областных центров), используя функцию `locator()`. Тут важно сделать в точности 6 кликов мышью, сохраняя выбранную последовательность прохода по регионам:

```
library(jpeg)
image <- readJPEG("maps.yandex.ru.JPG")
Xras=1015 ; Yras =635
Reg <- c("Вологда", "Пермь", "Казань", "Самара", "Пенза", "Липецк")
par(mar = c(0, 0, 0, 0))
plot(1,xlim = c(0, Xras), ylim = c(0, Yras),
      xlab = "", ylab = "")
lim <- par()
rasterImage(image, lim$usr[1], lim$usr[3], lim$usr[2], lim$usr[4])
xy <- locator(6)
xy
$x
[1] 152.4807 959.6825 607.1545 660.7189 402.8627 138.7782
$y
[1] 619.51773 500.95917 301.65812 88.04829 86.00417
33.87928
```

Предположим, что по результатам статистического анализа важным для нас показателем является протеолитическая активность яда PA. Нанесем на нашу картосхему круги, диаметр которых пропорционален величине этого признака. Чтобы были видны надписи на карте, сделаем эти круги полупрозрачными ( $\alpha = 0.6$ ). Вот что мы при этом получаем:

```
PA <- c(21.7,19.1,16.4,16.7,9.4,6.2)
mycex = ((PA - min(PA))^2/max(PA) + 2)
colpts = rgb(0.2, 0.5, 0.4, alpha = 0.6)
points(xy$x, xy$y, cex = mycex, col = 1, pch = 21, bg = colpts)
```



Очевидно, что активность яда гадюк увеличивается в направлении северо-востока.

**Использование географических расстояний в статистическом анализе.**

Найденные нами координаты точек на карте могут быть использованы для оценки расстояний между ними:

```
df <- data.frame(xy)
dist(df)
      1      2      3      4      5
2 816.8005
3 554.1790 406.5527
4 736.2293 511.4361 221.5197
5 589.8756 695.6555 296.9448 257.8642
6 582.7054 943.9776 537.4254 524.4364 268.6027
```

Мы получили матрицу относительных ("пиксельных") дистанций, которые, безусловно, неточны, хотя бы потому, что не учитывают неравные размеры сторон пикселя. Однако имеющейся точности вполне достаточно для реализации некоторых аспектов статистического анализа.

Предположим, что имеются две матрицы расстояний **A** и **B**, относящиеся к одному и тому же фиксированному набору объектов. Тест Мантеля (*quadratic assignment* – Mantel, 1967) проверяет гипотезу  $H_0$  от том, что расстояния между объектами в матрице **A** независимы от расстояний между теми же самыми объектами в матрице **B**. Тест оценивает, по сути, силу связи между многомерными структурами данных, вычисляя коэффициент линейной корреляции двух матриц, составленных на основе меры расстояния любой природы.

Если найти сумму элементов в матрице  $Z = \mathbf{AB}$ , которая является произведением обоих сравниваемых матриц расстояний **A** и **B**, при этом исключая элементы на главной диагонали, то получим  $Z$ -статистику Мантеля, т. е.  $Z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} b_{ij}$ . Стандартизованная статистика Мантеля  $R^2$  изменяется от +1 до -1 и соответствует коэффициенту корреляции Пирсона  $r$  между матрицами расстояний **A** и **B**.

С использованием теста Мантеля можно, например, оценить обоснованность следующих содержательных гипотез:

- связана ли статистически значимой зависимостью плотность изучаемых популяций с географическим расстоянием между их местообитаниями;
- имеется ли взаимосвязь между двумя группами объектов, обитающих в одних и тех же пунктах (например, между числом врачей-хирургов и гангстеров);
- имеются ли изменения в структуре сообщества до и после нанесения возмущения.

Пусть, например, мы имеем матрицу евклидовых расстояний между 6 изученными регионами, оцененную с использованием 10 средних стандартизованных морфологических показателей гадюки *Vipera berus* (процедуру ее расчета мы здесь не приводим):

```
Rmat <- matrix(c(
0, 0.87763393, 1.37359643, 1.07033575, 1.26727796, 1.62654352,
0.87763393, 0, 1.03383327, 1.01546645, 1.12793326, 1.6236099,
1.37359643, 1.03383327, 0, 1.22476184, 1.09088194, 1.39409792,
1.07033575, 1.01546645, 1.22476184, 0, 1.18241739, 1.87482882,
1.26727796, 1.12793326, 1.09088194, 1.18241739, 0, 1.57430208,
1.62654352, 1.6236099, 1.39409792, 1.87482882, 1.57430208, 0
), nrow=6)
Rdist <- as.dist(Rmat)
```

Выполним тест Мантеля с использованием функции `mantel()` из пакета `vegan`:

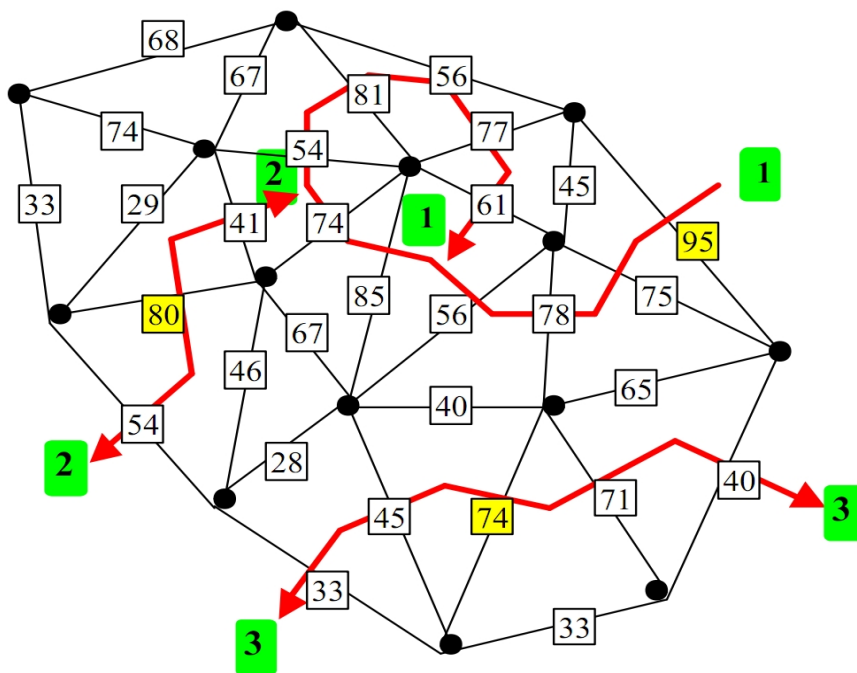
```
# «Морфометрия гадюк» ~ «Пространственное расположение»
library(vegan)
mantel(Rdist, dist(df))
Mantel statistic based on Pearson's product-moment correlation
Call:
mantel(xdis = Rdist, ydis = dist(df))
Mantel statistic r: 0.02597
Significance: 0.471
Empirical upper confidence limits of r:
 90%  95% 97.5%  99%
0.469 0.518 0.557 0.618
Based on 999 permutations
```



Статистика Мантеля оказалась незначимой, что заставляет предположить два возможных объяснения: либо гадюки с разными морфометрическими признаками равномерно распределены по изученной территории, либо эта зависимость имеет существенно нелинейный характер (т.е. нельзя подобрать гиперплоскость, гладко аппроксимирующую наблюдаемые данные).

Поскольку есть все основания предположить второе, то используем один из геометрических подходов, применяемых в биогеографии и генетике, который позволяет выявить особенности изменения структуры объектов в реальных пространственных координатах (*isolation by distance*, IBD). В нашем случае речь идет об *идентификации «барьеров»*, т.е. выделении границ, относительно которых параметры изучаемых сообществ претерпевают резкие характерные изменения.

Одной из базовых структур вычислительной геометрии является триангуляция Делоне, которая отображает множество точек на плоскости сетью треугольников (каждое подпространство является изолированным, границы являются непересекающимися, сумма длин всех ребер минимальна среди всех возможных триангуляций). После того, как получена сеть, объединяющая окрестности всех географических точек, каждое звено сети может быть связано со значением расстояния матрицы дистанций, полученной по данным наблюдений (на рисунке – число в квадрате). Алгоритм *максимума различий Монмюьера* ([Monmonier, 1973](#)) используется, чтобы идентифицировать границы области, где расстояния между смежными парами изучаемых объектов являются наибольшими.



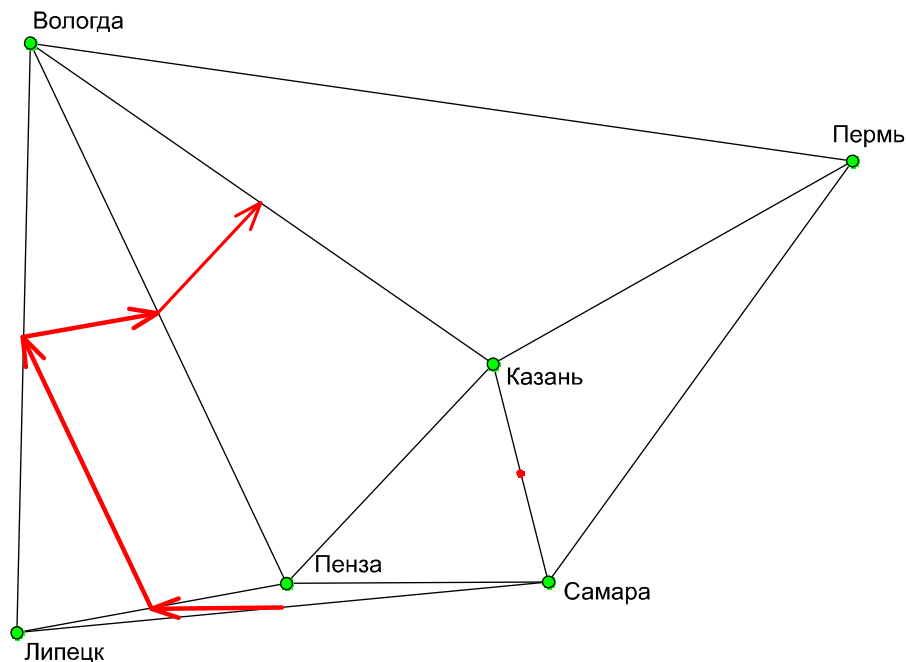
Перебор обычно начинается с краевого звена с максимальным значением расстояния и продолжается через прилегающие звенья, пока формируемая граница не достигнет пределов триангуляции или замкнется на себя, формируя контур вокруг совокупности точек. Оценить статистическую значимость вычисленных барьеров можно с использованием рандомизационного теста – подробности см. в статье (Manni et al., 2004) и руководстве к программе **Barrier** на сайте [ecoanthropologie.mnhn.fr](http://ecoanthropologie.mnhn.fr).

Получим для имеющихся географических точек сеть триангуляции Делоне с использованием функции `chooseCN()` из пакета `adegenet`. Функция `monmonier()` позволяет нам найти две максимальные границы (`nrun=2`), разделяющие наиболее различающиеся между собой популяции гадюк согласно матрице наблюдений `Rdist`. Полученный рисунок выведем в PDF-файл:

```

library(adegetnet)
cn <- chooseCN(df,type=1)
mon <- monmonier(df,Rdist,cn,threshold=1.2, nrun=2)
pdf("Berus.pdf")
plot(mon, method="greylevel",add.arr=TRUE, col="red")
points(df, pch = 21, cex = 1.2, bg = "green")
text(df,Reg,adj=c(0,0))
graphics.off()
shell.exec("Berus.pdf") # Открываем файл со схемой

```



Первый основной барьер отделяет от других регионов липецкую популяцию. Вторая граница проходит на северо-восток, подчеркивая тем самым специфичную морфологию вологодских змей. К сожалению, приведенный пример не слишком характерен из-за своей простоты, поэтому в полной мере со смыслом алгоритма и примерами его работы можно ознакомиться по приведенным выше источникам или книге ([Шитиков и др., 2011](#)).

### Расчет расстояния между объектами по их географическим координатам

Приведенный выше пример оценивает приближенные относительные расстояния и непригоден, когда, например, прикидываешь запас бензина для автомобильной поездки. Более точно расстояния между точками на географической карте можно рассчитать по их координатам широты и долготы на земной поверхности.

Предположим, что по каким-то причинам нас интересуют четыре местоположения на территории... острова Мадагаскар (*мы всегда хотели побывать на этом острове – отсюда и выбор примера*), показанные ниже в виде точек красного цвета:

Приведенная карта была построена при помощи следующего кода R:

```

library(sp)
library(maptools)
library(ggplot2)
load(url(
  "http://biogeo.ucdavis.edu/data/gadm2/R/MDG_adm0.RData"))
madagascar <- fortify(gadm)

```

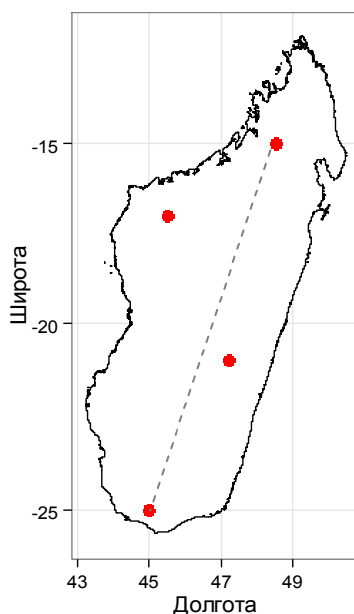


```

m <- ggplot() + geom_map(data = madagascar,
  aes(map_id = id),
  map = madagascar,
  fill = "white", color = "black") +
  expand_limits(x = madagascar$long, y = madagascar$lat) +
  coord_map("mercator") +
  xlab("Долгота") + ylab("Широта") + theme_bw()
mp <- m + geom_point(data = data.frame(Lon = c(45.0, 47.2,
  45.5, 48.5), Lat = c(-25.0, -21.0, -17.0, -15.0)),
  aes(Lon, Lat), color = I("red"), size = 3)
print(mp)

```

Для начала рассчитаем расстояние между двумя наиболее удаленными точками:



Возможности для расчета расстояния между географическими объектами по их координатам имеются в нескольких пакетах R. Мы воспользуемся пакетом `geosphere`, в состав которого входит большой набор функций, реализующих методы пространственной тригонометрии. В частности, в этом пакете имеется несколько функций для расчета кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности Земли разными методами: `distCosine()`, `distVincentySphere()`, `distVincentyEllipsoid()`, `distHaversine()`, `distMeeus()`.

Применим функцию `distHaversine()`, которая рассчитывает расстояние по широко используемой формуле гаверсина – см. [en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org). Эта функция имеет следующий синтаксис:

```
distHaversine(p1, p2, r = 6378137),
```

где `p1` – координаты точки (или точек), подаваемые либо в виде вектора из двух значений (долгота, широта), либо в виде матрицы с двумя столбцами (первый столбец – долгота, второй – широта); `p2` – то же, что и `p1`; `r` – радиус Земли, выраженный в метрах.

Для нашего примера получаем:

```

library(geosphere)
# делим на 1000 для выражения расстояния в км
distHaversine(c(45.0, -25.0), c(48.5, -15.0))/1000
[1] 1171.7

```

Следует отметить, что полученный результат основан на предположении, что Земля имеет форму шара. Однако известно, что это не совсем верно – Земля представляет собой эллипсоид. При расчете расстояния между существенно удаленными объектами это обстоятельство может сказаться на точности результата. В таких случаях стоит воспользоваться функцией `distVincentyEllipsoid()`.

Теперь несколько усложним задачу и предположим, что требуется рассчитать расстояния между всеми имеющимися парами точек. Необходимость такого рода расчетов часто возникает, например, в экологии при анализе пространственного распределения особей того или иного вида, когда требуется вычислить среднее расстояние между особями в целом. Сохраним координаты имеющихся точек в виде матрицы:

```
coords <- cbind(c(45.0, 47.2, 45.5, 48.5),
               c(-25.0, -21.0, -17.0, -15.0))
coords
      [,1] [,2]
[1,] 45.0 -25
[2,] 47.2 -21
[3,] 45.5 -17
[4,] 48.5 -15
```

Теперь мы можем легко рассчитать все пары расстояний, воспользовавшись базовой R-функцией `apply()`:

```
Dist <- apply(coords, 1, FUN =
              function(eachPoint) distHaversine(eachPoint, coords)/1000)
Dist
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,]  0.0000 499.0594 892.0671 1171.6513
[2,] 499.0594  0.0000 479.8662  681.9332
[3,] 892.0671 479.8662  0.0000  390.6508
[4,] 1171.6513 681.9332 390.6508  0.0000
```

Как видим, в итоговой квадратной матрице информация о расстояниях между точками дублируется по обе стороны от главной диагонали. Является ли это проблемой, зависит от поставленной задачи. Например, при выполнении кластерного анализа, многие соответствующие функции примут такую матрицу, как она есть. Но при необходимости вычислить среднее расстояние (или какие либо другие статистики) потребуются только те значения, которые расположены сверху или снизу от главной диагонали матрицы. Извлечение этих значений не представляет проблемы: для этого необходимо воспользоваться одной из базовых R-функций – `lower.tri()` или `upper.tri()`. Для нашего примера получаем:

```
Dist <- Dist[lower.tri(Dist)]
Dist
[1] 499.0594 892.0671 1171.6513 479.8662 681.9332 390.6508
```

Рассчитать среднее расстояние теперь очень легко:

```
mean(Dist)
[1] 514.4
```

## 9.2. Анализ пространственного размещения точек

Под *пространственным анализом* (*Spatial analysis*) понимается набор методов исследований, в которых случайная переменная  $Z$  связана с некоторым изучаемым показателем, изменяющимся в пространстве и характеризующим динамику изучаемой системы, а остальные независимые переменные определяют пространственно-временное положение объекта или точки наблюдения (время  $t$ ,  $x$ - $y$  координаты, высота  $h$  и т.д.).

При изучении пространственных структур принято выделять два направления: *геостатистический анализ* и *анализ пространственного размещения точек*, которые отличаются методом получения исходных данных (т.е. способом реализации выборочного процесса). В первом случае исследователь для анализа пространственного распределения какого-то показателя (например, содержания тяжелых металлов в верхнем слое почвы) *сам планирует* точки, в которых будут проводиться наблюдения. Полученные выборочные значения пространственной переменной  $z(x)$  рассматриваются как возможные реализации случайной функции  $Z(x)$ . Теоретические аспекты геостатистического анализа и примеры его реализации в R см. в книге (Савельев и др., 2012), представленной на сайте [gis-lab.info](http://gis-lab.info) сообщества "Гис-Лаб".

Во втором случае также анализируются свойства определенного участка пространства по выборочным данным, полученным в разных его точках, однако местоположение этих точек устанавливается не по воле исследователя, а *случайно назначается* неким природным "механизмом" (например, число яиц в гнезде можно подсчитать только там, где есть гнездо). Иными словами, изучаемое явление трактуется как не зависящий от наблюдателя процесс, генерирующий поток дискретных событий ([Baddeley, 2010](#)). О свойствах этого процесса мы можем судить по характеру размещения на координатной сетке ансамбля точек, соответствующих произошедшим событиям.

Диагностика характера процесса, генерирующего данные, обычно сводится к отнесению конкретной совокупности точек на изучаемом участке пространства к одному из возможных типов размещения: *а)* регулярное (детерминированное равномерное или стохастическое равномерное); *б)* групповое или агрегированное (детерминированное неравномерное); *в)* неоднородное случайное и, наконец, *г)* *полностью случайное размещение* (CSR – *Complete Spatial Randomness*). Тестирование гипотезы о наличии CSR обычно проводится на основе имитации *однородным процессом Пуассона*, т.е. проверяется условие, что количество точек, попавших в любую из непересекающихся областей пространства  $\Omega$ , является *независимой случайной величиной*. Другое условие *однородности* удовлетворяется, если вероятность того, что в некоторую область  $A$ ,  $A \subset \Omega$ , попадет ровно  $n$  точек, не зависит от положения области  $A$  на плоскости или ее формы.

Рассмотрим пример, заимствованный из семинарского занятия Н. Чижиковой (2012) на конференции "Открытые ГИС!" ([gisconf.ru](http://gisconf.ru)). Текст доклада "Введение в разведочный анализ точечных образов с помощью пакета spatstat R" можно скачать в разделе "Мастер-классы" на странице [gisconf.ru/talks](http://gisconf.ru/talks), а скрипты и исходные данные для презентации находятся там же в архивном файле [lect18-chizhikova-rsstat.zip](#).

Пусть таблица наблюдений содержит пространственные координаты точек  $x$  и  $y$ , где были обнаружены цветковые растения *Adonis vernalis L.*, количество цветков `blossoms`, а также фактор возраста `age`, который принимает значения `gene` (генеративный) и `pre`. С помощью функции `ppp()` пакета `spatstat` создадим объект типа `ppp` (`point pattern`), который содержит всю необходимую информацию для последующего анализа:

```
library(spatstat)
# Загружаем текстовый файл с данными
plot_13 <- read.table(file="13.txt",header = T,sep = "\t")
# Вычислим размеры площадки по осям X и Y
```

```

xmin <- floor(min(plot_13$x))
xmax <- ceiling(max(plot_13$x))
ymin <- floor(min(plot_13$y))
ymax <- ceiling(max(plot_13$y))
# Создадим объект ppp (point pattern)
ppp_object <- ppp(x=plot_13$x, y=plot_13$y,
  marks=data.frame(age=plot_13$age,
    blossoms=plot_13$blossoms), # марки
  window=owin(c(xmin, xmax), c(ymin, ymax), # Окно
  unitname=c("metre", "metres"))) # единицы измерения

```

Простейший способ показать графически характер распределения точек – это нанести их на сетку квадратов. Выбрать оптимальные размеры ячейки сетки при площади всего участка  $A = 10 \times 10 \text{ м}^2$  и общей численности наблюдаемых точек  $N = 126$  можно, например, с использованием эмпирического правила "большого пальца":

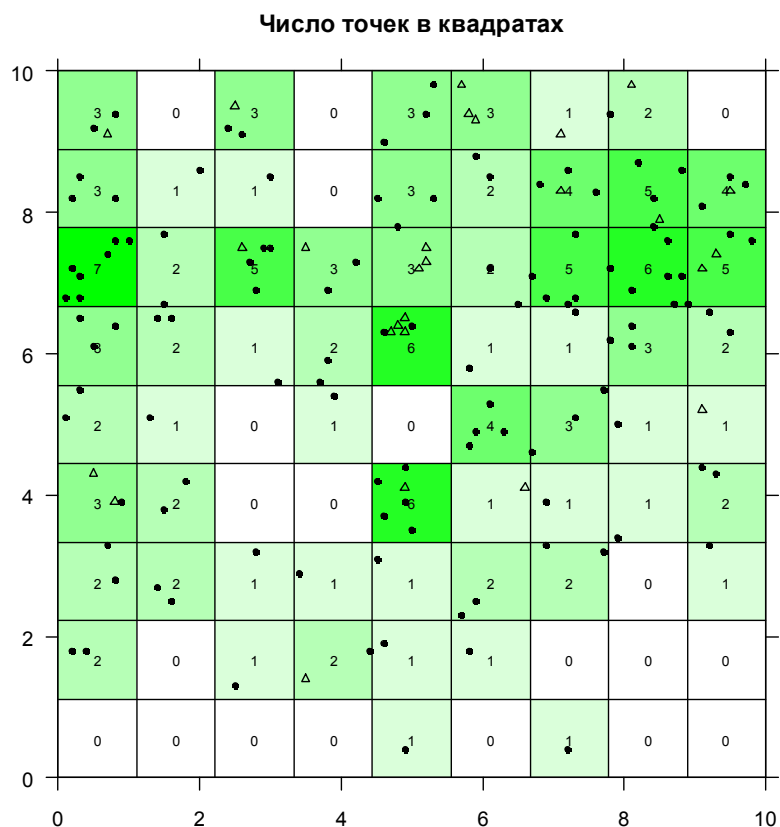
$$\text{Сторона квадрата } L = (2 \cdot A / N)^{0.5} = (2 \cdot 10 \cdot 10 / 126)^{0.5} = 1.17 \text{ м.}$$

Эмпирические частоты в каждом  $k$ -м квадрате (представлены на рисунке ниже) при справедливости гипотезы о случайности размещения точек статистически значимо не отличаются от теоретических частот распределения Пуассона  $Np_k = N(\lambda^k e^{-\lambda})/k!$ . Здесь несмещенной оценкой интенсивности процесса  $\lambda$  является среднее число точек на единицу площади:  $\lambda = \bar{n}_{\text{pois}}(k)N / A$ .

```

# площадь площадки
A <- area.owin(ppp_object$window)
# число точек
N <- ppp_object$n
# сторона одной ячейки, чтобы в них попадало в среднем 2 точки
L <- sqrt(2*A/N)
# сколько ячеек уместится в сторону площадки 10x10 м
quadnum <- round(10/L)
# построим сетку ячеек
ppp_quadrats <- quadrats(ppp_object, nx = quadnum, ny = quadnum)
# посчитаем число точек в ячейках, округлим до 1 десятичного знака
quadcount <- quadratcount(ppp_object, tess=ppp_quadrats)
quadcount <- round(quadcount, 1)
##### отобразим число точек в квадратах
# вычислим центры ячеек
xgrid <- quadrats(ppp_object, nx = quadnum, ny = quadnum)$xgrid
ygrid <- quadrats(ppp_object, nx = quadnum, ny = quadnum)$ygrid
image(xgrid, ygrid,
  t(quadcount[order(1:quadnum, decreasing = T), ]),
  col = colorRampPalette(c("white", "green"))(15),
  axes=F, asp=1, xlab="", ylab="",
  main="Число точек в квадратах")
plot(quadcount, add=T, cex=0.7)
axis(2, las = 1, pos = 0, at = seq(0, 10, 2), cex.axis=1)
axis(1, las = 1, pos = 0, at = seq(0, 10, 2), cex.axis=1)
axis(3, pos = 10, at = seq(0, 10, 2), labels = F, cex.axis=1)
axis(4, pos = 10, at = seq(0, 10, 2), labels = F, cex.axis=1)
#добавим точки
plot(ppp_object, which.marks="age",
  chars=c(19, 24), cex=0.7, add=T)

```



На представленном ниже рисунке кружочками показаны цветущие (age = gene), а треугольниками – несозревшие растения (age = pre).

Проверка гипотезы о равенстве эмпирических и теоретических вероятностей  $H_0: p = p_{\text{pois}}$  осуществляется, например, с использованием критерия согласия  $\chi^2$ :

```
# Хи-квадрат тест CSR с использованием численности точек в квадратах
quadrat_test_result <- quadrat.test(ppp_object, nx=9, ny=9)
round(quadrat_test_result$expected, 2) # Частоты Пуассона
[1] 1.81 1.81 ... 1.81 1.81
quadrat_test_result
  Chi-squared test of CSR using quadrat counts
data: ppp_object
X-squared = 127.9592, df = 80, p-value = 0.0005321
Quadrats: 9 by 9 grid of tiles
```

Второе проверяемое предположение, заключается в оценке *однородности* (стационарности) пуассоновского процесса: число точек в любых двух непересекающихся частях области исследования являются случайными и независимыми переменными. Пространственная версия теста Колмогорова-Смирнова позволяет проверить, равномерно ли распределено число точек вдоль пространственных осей  $x$  или  $y$ :

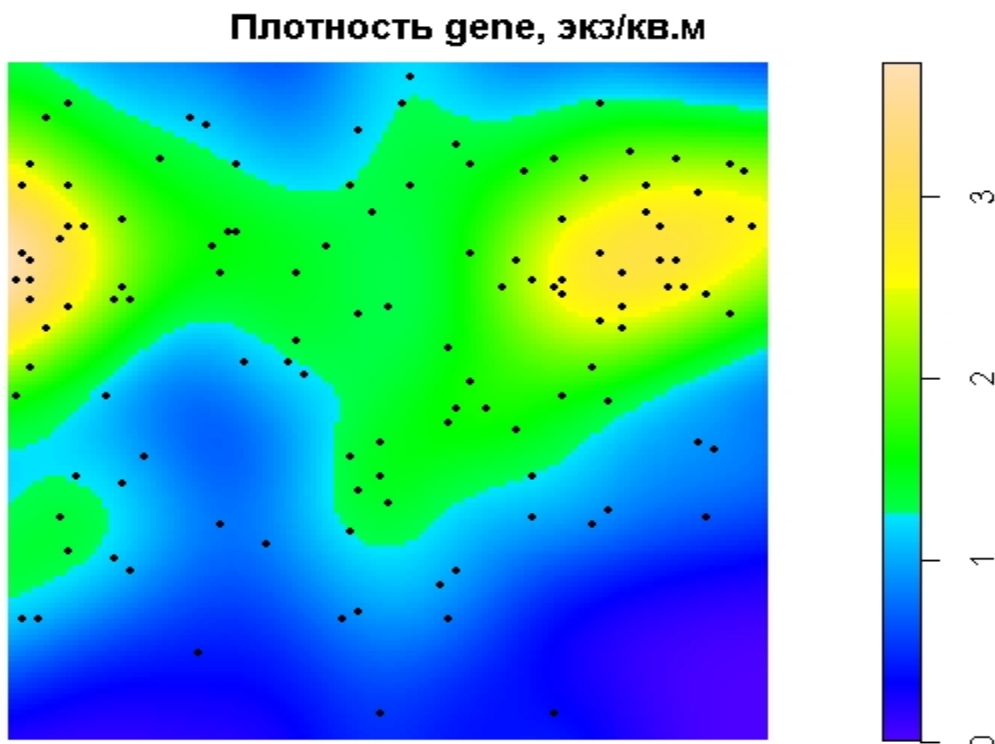
```
kstest(ppp_object, "x") # Тест Колмогорова-Смирнова по оси X
  Spatial Kolmogorov-Smirnov test of CSR
data: covariate 'x' evaluated at points of 'ppp_object'
D = 0.0783, p-value = 0.3285
alternative hypothesis: two-sided
kstest(ppp_object, "y") # Тест Колмогорова-Смирнова по оси Y
  Spatial Kolmogorov-Smirnov test of CSR
data: covariate 'y' evaluated at points of 'ppp_object'
D = 0.2451, p-value = 4.296e-08
```

Выполненные расчеты  $D$ -статистики позволяют сделать очевидный вывод, что размещение популяций изучаемых растений равномерно распределено относительно оси  $x$ , но не является стационарным относительно оси  $y$ . Отметим, однако, что тест на стационарность выполняется, если только в тесте  $\chi^2$  для проверки CSR нулевая гипотеза не отклоняется, т.е. его выполнение нами было не вполне правомочным.

В разделе 8.1 мы рассматривали сглаживание точек на плоскости ядерными функциями. Однако те же модели мы можем использовать для трехмерного (а в общем случае и многомерного) сглаживания. Эти процедуры являются основным инструментом построения карт локальных плотностей, с помощью которых осуществляется визуальный ГИС-анализ пространственной неоднородности распределения популяций биологических видов и других переменных.

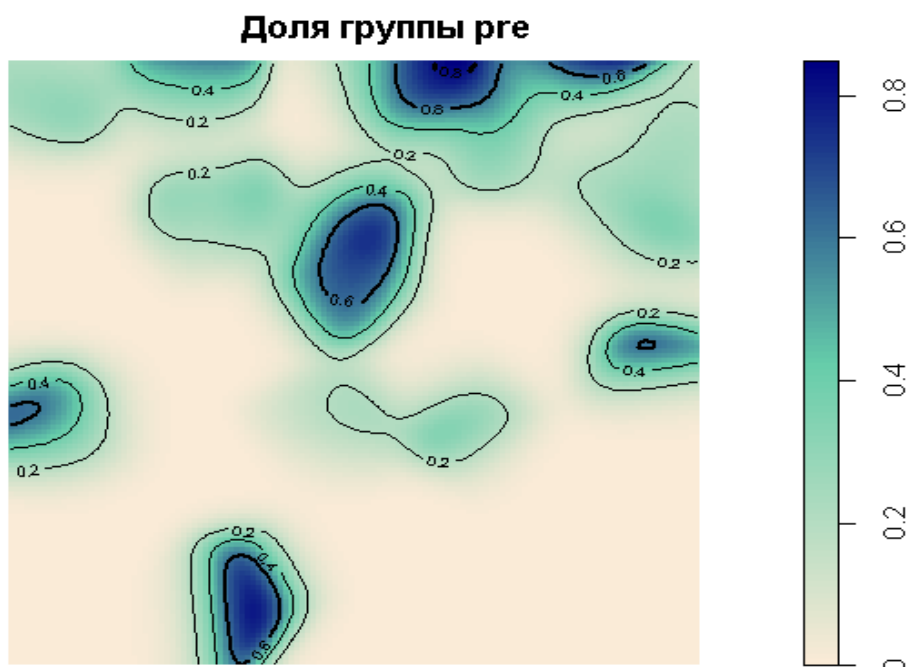
Выполним построение поверхности интерполяции плотности точек с помощью радиальных гауссовых ядерных функций. При этом, как и при аппроксимации кривых, скользящее "окно" сканирует всю пространственную область и суммирует вклады точек в окрестности, связанной с текущим положением курсора. Гладкость полученной поверхности интерполяции зависит от ширины окна (*bandwidth*), которая может быть предварительно оценена по эмпирическим формулам или найдена автоматически в ходе кросс-проверки. Интенсивность процесса, генерирующего размещение точек *gene*, представлена на рисунке:

```
# выделим генеративные особи
gene_ppp <- ppp_object[ppp_object$marks$age=="gene"]
# вычислим размер скользящего окна, bandwidth
# по правилу Silverman
sigma<-(sd(gene_ppp$x)+sd(gene_ppp$y))/2
iqr<-(IQR(gene_ppp$x)+IQR(gene_ppp$y))/2
bandwidth <- 0.9*min(sigma, iqr)*gene_ppp$n^(-1/5)
[1] 0.9102268
gene_intensity <- density.ppp(gene_ppp, sigma=bandwidth)
plot(gene_intensity, main="Плотность gene, экз/кв.м")
points(gene_ppp, pch=19, cex=0.6)
```



Важной дополнительной возможностью является построение карт пространственно-обусловленного относительного риска (например, чтобы обозначить области, где число заболевших особей превысило какой-то процент). Например, на следующем рисунке представлена карта распределения доминирующих возрастных групп нашего растения, позволяющая легко выделить фрагменты территории, где  $p = n_{pre} / n_{gene} > 0.5$ , т.е. число экземпляров  $n_{pre}$  превышает число генеративных экземпляров  $n_{gene}$ :

```
# выделим коды возрастов
for_relrisk_example <- ppp_object # создадим копию ppp объекта
marks(for_relrisk_example) <- ppp_object$marks$age
# вычислим вероятность появления особей возраста pre
p <- relrisk(for_relrisk_example, 0.5)
plot(p, main="Доля группы pre", col=colorRampPalette(
  c("antiquewhite", "aquamarine3", "navyblue"))(100))
# добавим изолинии
contour(p, nlevels=5, lwd=seq(from=0.1, to=3, length.out=5),
  add=T)
```



### 9.3. Использование сервисов картографической системы Google Maps

Признанным лидером среди современных картографических систем являются карты Google (Google Maps; [maps.google.ru](https://maps.google.ru)). Система содержит детализированные спутниковые изображения для обширных регионов любых стран и предоставляет интерактивный доступ к этим картам онлайн. Разработано также большое количество дополнительных сервисов и инструментов (Google Earth, Google Mars, разнообразные погодные и транспортные сервисы, один из самых мощных API).

Многие из этих сервисов реализованы в пакете `googleVis`, в состав которого входит также ряд функций, обеспечивающих взаимодействие R с интерфейсом программирования приложений Google Visualization API (см. [code.google.com](https://code.google.com)). Функции



из этого пакета генерируют html-код, который можно легко вставить на страницу веб-сайта.

В общем виде синтаксис функции для визуализации изображений Google Maps выглядит следующим образом:

```
gvisMap(data, locationvar=" ", tipvar=" ", options = list(), chartid)
```

где

- `data` – таблица данных (`data.frame`), которая должна содержать как минимум два столбца – с географическими координатами точек (`locationvar`) и с текстом всплывающих подсказок для каждой из этих точек (`tipvar`);
- `locationvar` – имя столбца, содержащего географические координаты точек. Координаты задаются в формате "широта:долгота" (см. пример ниже). Вместо географических координат можно также указывать [максимально полный] почтовый адрес, однако авторы пакета `googleVis` рекомендуют этот способ не применять;
- `tipvar` – имя столбца, содержащего текст всплывающих подсказок для каждой точки;
- `options` – список опций, определяющих внешний вид карты;
- `chartid` – текстовая переменная, при помощи которой карте можно присвоить пользовательское имя. По умолчанию данная настройка отключена (в этом случае ID карты генерируется случайным образом автоматически).

Внешний вид карты настраивается при помощи следующих опций:

- `enableScrollWheel` – логическая переменная, по умолчанию принимающая значение `FALSE`. При `enableScrollWheel = TRUE` появится возможность изменять масштаб карты, вращая колесо мышки.
- `showTip` – логическая переменная, по умолчанию равная `FALSE`. Активация этой настройки (`showTip = TRUE`) позволит видеть описание точки при наведении на нее курсора.
- `ShowLine` – позволяет включать (`TRUE`) или выключать (`FALSE`) линию, соединяющую точки на карте.
- `lineColor` – текстовая переменная, задающая цвет вышеупомянутой линии ("red", "green", и т.п.; возможно также использование html-цветов, например "#800000").
- `lineWidth` – ширина линии. По умолчанию составляет 10 пикселей. Очевидно, что эта настройка имеет смысл только при `ShowLine = TRUE`.
- `mapType` – текстовая переменная, задающая тип карты. Возможные значения: "normal" (обычная схематичная карта), "terrain" (режим "Земля"), "satellite" ("спутник") или "hybrid" ("гибрид").
- `useMapTypeControl` – логическая переменная, по умолчанию равная `FALSE`. Значение `TRUE` активизирует меню, позволяющее пользователю выбирать тип карты (см. предыдущий пункт).
- `zoomLevel` – количественная переменная, принимающая целые значения от 0 (виден весь мир) до 19 (максимальное приближение).

Функция `gvisMap()` возвращает объект класса "gvis", который представляет собой список, состоящий, как минимум, из следующих трех элементов: `type` (тип Google-карты), `chartid` (см. выше) и `html`. Именно последний элемент интересует нас больше всего, поскольку он содержит html-код карты.

Работу функции `gvisMap()` проиллюстрируем на примере данных из своей статьи ([Mastitsky, Makarevich, 2007](#)), посвященной распространению в Беларуси чужеродных видов *бокоплаво*. В ходе выполненного обследования белорусской части реки Днепр был, например, обнаружен рачок *Dikerogammarus haemobaphes* – выходец из

нижнего течения рек Понто-Каспийского бассейна. Этот вид был отмечен на трех обследованных створах реки. Для начала создадим таблицу (назовем ее Dikero – по названию вида), в которой будут храниться координаты створов и их названия:

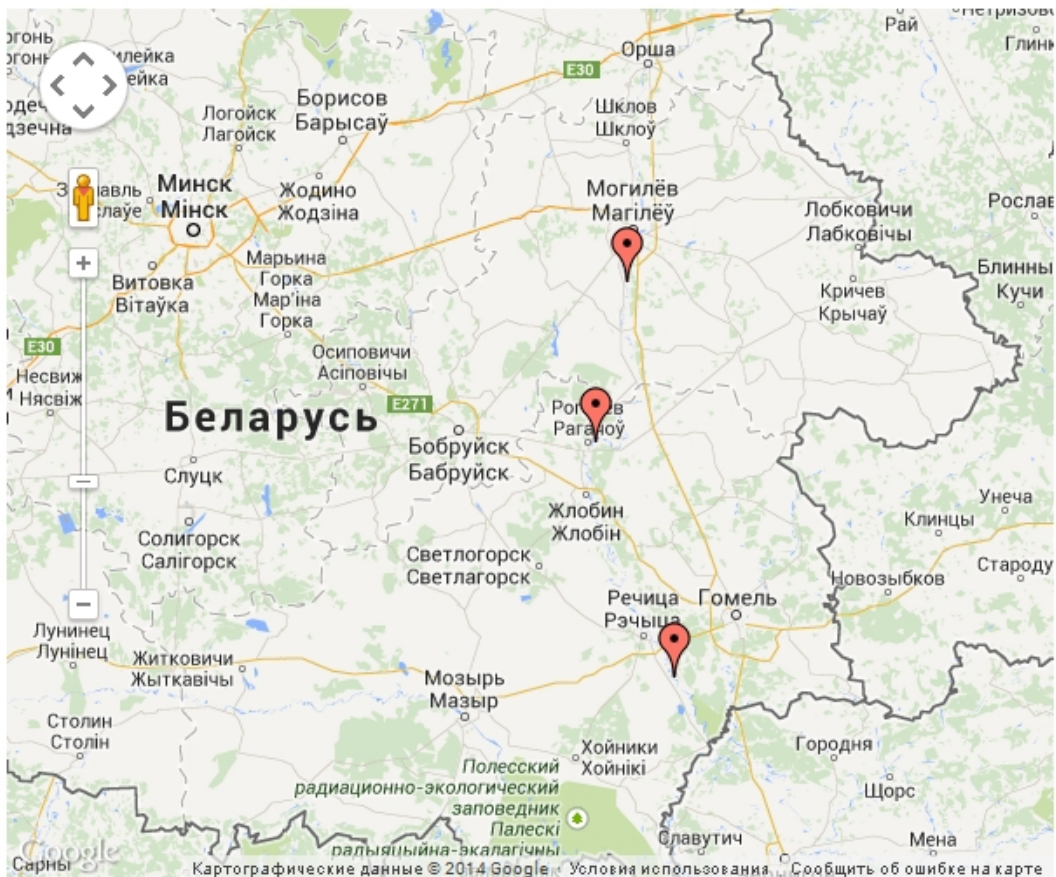
```
Dikero <- data.frame(Coords = c("52.2:30.6",  
                                "53.1:30.1", "53.7:30.3"),  
                    Location = c("д. Холмеч", "г. Рогачев", "д. Стайки"))  
Dikero  
  Coords  Location  
1 52.2:30.6 д. Холмеч  
2 53.1:30.1 г. Рогачев  
3 53.7:30.3 д. Стайки
```

Отообразим координаты этих створов на Google-карте. Используя функцию `gvisMap()`, создадим объект с каким-либо произвольным именем (например, `Map`) в котором будет храниться html-код и другие элементы карты:

```
Map <- gvisMap(Dikero, "Coords", "Location",  
              Options = list(showTip=TRUE, mapType='normal',  
                             enableScrollWheel = TRUE),  
              chartid = "Dikerogammarus")
```

Команда `plot()` приведет к открытию браузера, в котором появится созданная Google-карта (естественно, при этом компьютер должен быть подключен к Internet).

```
plot(Map)
```



В тексте настоящего пособия мы привели лишь изображение экрана браузера, но читатель может увидеть работу функции `живьем`, перейдя к сообщению "*Создание пользовательских карт Google*" на сайте [goo.gl](http://goo.gl).

Для извлечения html-кода карты из объекта `Map` необходимо выполнить следующую команду:

```
print(Map, tag = "chart")
```

Код будет выведен непосредственно в консоль R, откуда его можно скопировать и вставить в свою веб-страницу.

### Создание интерактивной веб-графики

В состав библиотеки `googleVis` входят не только функции работы с картами Google, но и сервис для интерактивной визуализации многомерных данных (образцы презентаций Х. Рослинга см. на сайте [gapminder.org](http://gapminder.org)). Рассмотрим пример создания анимационного графика на основе таблицы данных `Fruits`, входящей в состав библиотеки `googleVis`.

Подключаем эту таблицу к рабочей среде R и просматриваем ее содержимое:

```
data(Fruits)  
Fruits
```

Таблица содержит динамику продаж трех видов фруктов (`Apples`, `Bananas`, `Oranges`) в двух регионах (`East` и `West`). Предположим, мы хотим визуализировать зависимость затрат `Expenses` от объема продаж `Sales` для всех видов фруктов `Fruit` в разных регионах `Location` и для разных периодов времени `Year`.

Для создания графика с набором переключателей, дающих возможность пользователю выбирать разные наборы отображаемых фрагментов данных, используем функцию `gvisMotionChart()`, которая имеет четыре основных аргумента:

```
gvisMotionChart(data, idvar = "id", timevar="date", chartid)
```

где `data` – имя таблицы данных; `idvar` – имя номинальной переменной для которой строится график; `chartid` – аргумент, позволяющий присвоить графику уникальное имя.

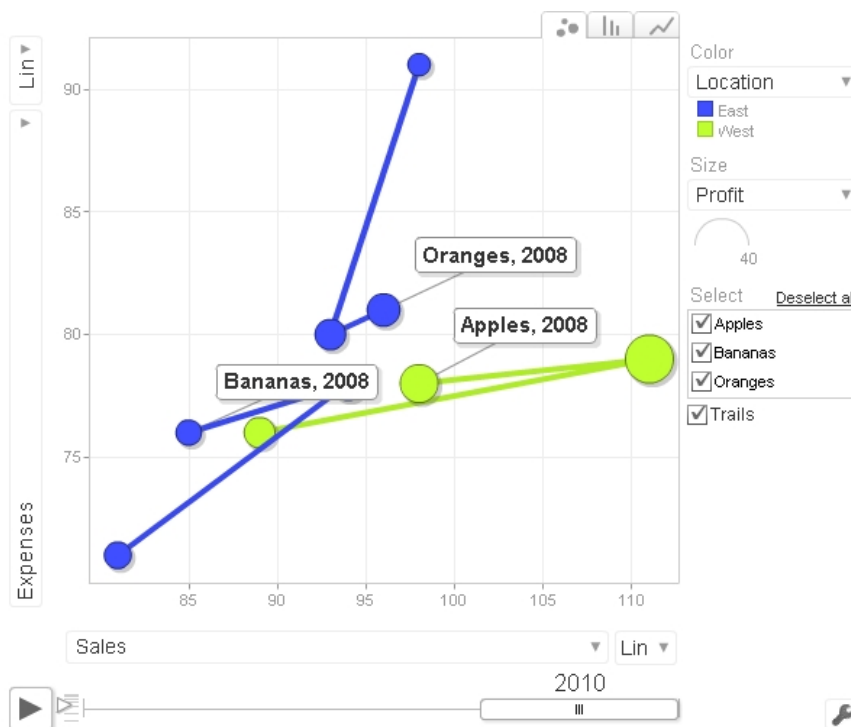
В нашем случае команда выглядит следующим образом:

```
M <- gvisMotionChart(Fruits, idvar = "Fruit", timevar = "Year")
```

Объект `M` является списком из трех списков (проверьте командой `str(M)`). Первые два элемента этого списка содержат информацию о типе графика (`MotionChart`) и его уникальное имя (`chartid`). Третий элемент списка наиболее интересен, поскольку он содержит html код графика. Этот третий элемент в свою очередь включает четыре других элемента: `header` ("шапка"), `chart` – непосредственно код графика, `caption` – подпись графика, и `footer` ("футер"). html-код графика можно легко извлечь командой `print(M, tag = "chart")`, а затем скопировать и вставить на страницу веб-сайта.

В тексте настоящего издания мы, естественно, не можем показать процесс анимации и ограничились изображением окна браузера (рисунок приведен ниже). Увидеть непосредственный результат работы функции `gvisMotionChart()` можно, перейдя к сообщению "*Создаем интерактивную веб-графику*" на сайте [goo.gl](http://goo.gl).

На полученном графике имеется несколько возможностей для визуализации зависимостей между различными переменными. Например, мы можем: а) выбрать для отображения необходимый период времени Year путем перемещения "слайдера" в нижней части графика, б) раскрасить желаемым цветом "пузыри" на графике в соответствии с регионом Location, в) прикрепить названия фруктов к каждому "пузырю" (меню Select), г) изменить стиль графика с "пузырей" на столбиковую диаграмму или линейную зависимость и т.д.



При помощи функций пакета `googleVis` можно создавать и множество других типов графиков, а также объединять их на одной странице. Для ознакомления с имеющимися возможностями выполните команду `demo(googleVis)`. В частности, рассмотренный в этом разделе пример был заимствован из руководства пользователя пакета `googleVis` ([goo.gl](http://goo.gl)).

## 9.4. Создание картограмм при помощи R

В этом разделе мы покажем, как при помощи R можно создать *картограммы* (англ. *choropleth maps*). На картограммах отдельные территориальные единицы залиты цветом, интенсивность которого соответствует величине отображаемой количественной переменной (плотность населения, уровень дохода, процент проголосовавших за определенного кандидата на выборах, и т.п.). Процедуру построения картограммы мы без комментариев использовали в разделе 1.2, когда описывали приемы работы с командной консолью R. Теперь настало время объяснить все поподробнее.

### Шейп-файлы

Основой для создания картограмм являются так называемые "шейп-файлы" (англ. *shapefile*) для разных административно-территориальных единиц страны. Шейп-файл представляет собой распространенный векторный формат хранения информации о геометрическом положении и определенных атрибутах географических объектов. Несмотря на свое название, в действительности шейп-файл – это не один, а набор из

нескольких файлов с одинаковым именем, но разными расширениями. Обязательными при этом являются файлы с расширениями `.shp`, `.dbf` и `.shx`. Мы не будем описывать здесь, что содержится в каждом из этих файлов, т.к. об этом можно найти много информации в Сети – см., например, [статью](#) в Википедии и официальное техническое описание формата на сайте [esri.com](http://esri.com). Для наших целей достаточным будет представление о шейп-файле как о файле, по данным из которого можно воспроизвести контурную карту страны и/или отдельных ее территориальных единиц.

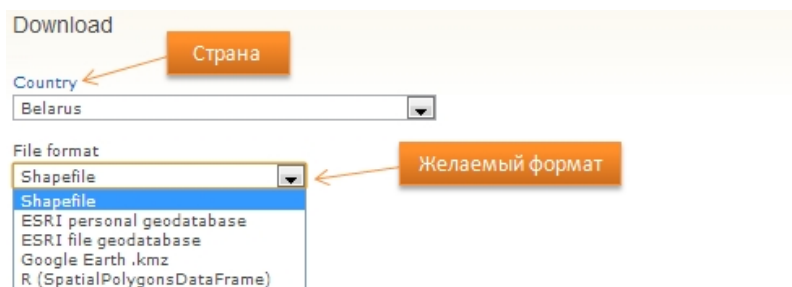
Естественно, встает вопрос о том, где можно раздобыть шейп-файлы для той или иной интересующей нас территории? Одним из бесплатных (для некоммерческого использования) источников является "Глобальная база данных административных областей" (*Global Administrative Areas*, [GADM](#)). В этой базе данных доступны шейп-файлы трех разных уровней пространственного разрешения, например, на уровне страны, областей и районов.

Необходимые нам шейп-файлы можно получить на сайте GADM двумя разными путями. Во-первых, мы можем сделать это "вручную", зайдя на сайт GADM и выполнив следующие шаги.

1. В главном меню сайта выбираем опцию *Download* (отмечена стрелкой на рисунке ниже):

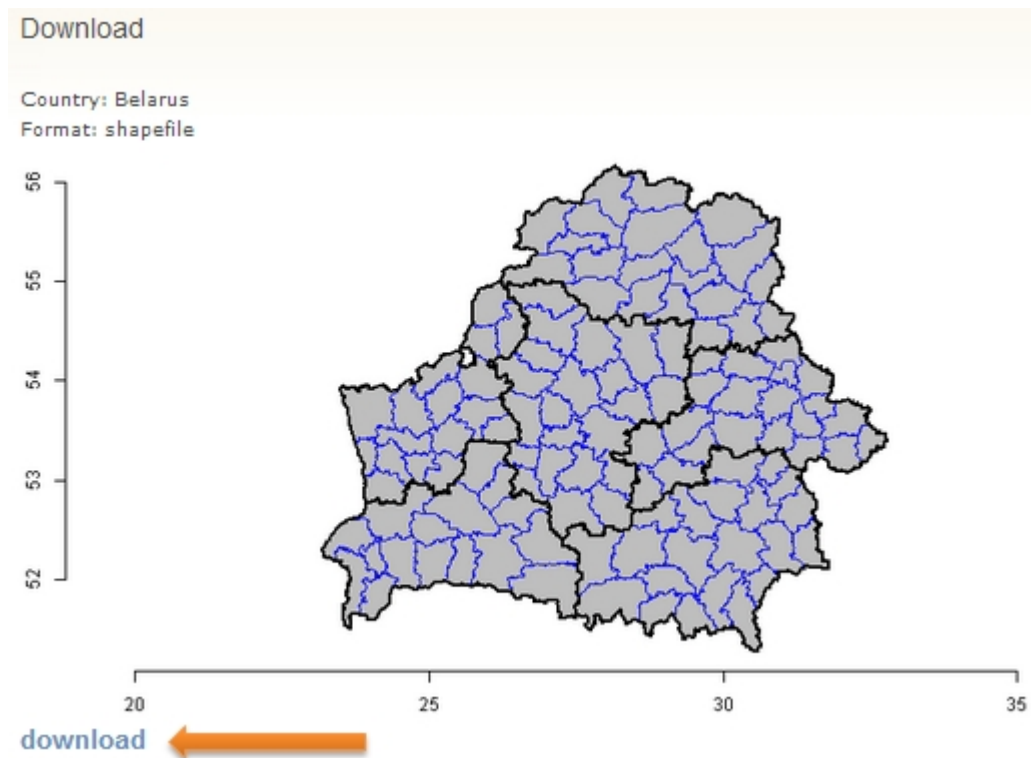
2. На открывшейся странице из выпадающих меню выбираем желаемую страну (*Country*) и формат скачиваемых файлов (*File Format*).

В меню *File Format*, как видно из рисунка ниже, доступны несколько опций, включая нужный нам шейп-файл (*Shapefile*). Обратите внимание: специалисты, работающие над созданием и поддержкой GADM, отлично осведомлены о распространенности и возможностях R, и, как следствие, в качестве одной из опций в меню *File Format* мы видим R (*SpatialPolygonsDataFrame*) – файл "рабочего пространства" (англ. *workspace*), который уже содержит шейп-файл в необходимом формате и может быть непосредственно загружен в R. Описание того, как это сделать, приведено ниже. Пока же выберем опцию *Shapefile*:



3. Все последующие картограммы мы будем строить на примере Республики Беларусь. На открывшейся странице увидим карту страны, под которой находится ссылка `download` для скачивания `zip`-архива с нужными нам шейп-файлами для всех трех уровней пространственного разрешения. Сохраним этот архив (`BLR_adm.zip`) в удобном для нас месте.





4. Разархивируем BLR\_adm.zip в текущую рабочую папку R. В результате в этой папке появятся следующие файлы:

Name	Date modified	Type	Size
BLR_adm0.csv	20-Dec-11 2:12 PM	Microsoft Office E...	1 KB
BLR_adm0.dbf	20-Dec-11 10:47 AM	DBF File	2 KB
BLR_adm0.prj	20-Dec-11 10:47 AM	PRJ File	1 KB
BLR_adm0.shp	20-Dec-11 10:47 AM	SHP File	90 KB
BLR_adm0.shx	20-Dec-11 10:47 AM	SHX File	1 KB
BLR_adm1.csv	20-Dec-11 2:54 PM	Microsoft Office E...	2 KB
BLR_adm1.dbf	20-Dec-11 12:10 PM	DBF File	4 KB
BLR_adm1.prj	20-Dec-11 12:10 PM	PRJ File	1 KB
BLR_adm1.shp	20-Dec-11 12:10 PM	SHP File	198 KB
BLR_adm1.shx	20-Dec-11 12:10 PM	SHX File	1 KB
BLR_adm2.csv	20-Dec-11 3:05 PM	Microsoft Office E...	10 KB
BLR_adm2.dbf	20-Dec-11 12:56 PM	DBF File	68 KB
BLR_adm2.prj	20-Dec-11 12:56 PM	PRJ File	1 KB
BLR_adm2.shp	20-Dec-11 12:56 PM	SHP File	674 KB
BLR_adm2.shx	20-Dec-11 12:56 PM	SHX File	2 KB
read_me.pdf	20-Dec-11 3:49 PM	PDF File	208 KB

Все перечисленные файлы важны и должны находиться в одной директории. Обратите внимание на цифры в именах файлов – они помогают понять, какому уровню пространственного разрешения соответствует каждый файл. Так, файлы, в названии которых имеется 0, описывают контуры страны, 1 – контуры страны и областей, а 2 – контуры страны, областей и районов.

Для загрузки шейп-файлов в операционную среду R можно воспользоваться функцией `readShapePoly()` из пакета [maptools](#). Так, шейп-файл для первого уровня

пространственного разрешения (страна, разделенная на области) можно загрузить следующим образом:

```
library (maptools)
Regions <- readShapePoly ("BLR_adm1.shp")
```

**Второй способ** получения шейп-файлов с сайта GADM состоит в их загрузке по URL непосредственно из среды R. Обычно этот способ предпочтительнее и ниже будем предполагать, что им вы и воспользовались. Так, для загрузки шейп-файла с контурами страны и областей следует выполнить следующую команду:

```
load (url ("
http://biogeo.ucdavis.edu/data/gadm2/R/BLR_adm1.RData"))
```

В результате в рабочей среде R появится объект с именем `gadm`. Во избежание путаницы в дальнейшем, стоит сохранить этот объект, присвоив ему какое-либо более описательное имя, например `Regions`, а исходный объект затем просто удалить:

```
Regions <- gadm
rm (gadm)
```

С точки зрения своего внутреннего устройства и представления в R, созданный нами объект `Regions` принадлежит к объектам класса `S4` (подробнее об этом классе можно узнать на сайте [adv-r.had.co.nz](http://adv-r.had.co.nz) – англ. яз.). Вкратце можно сказать, что такие объекты имеют сложную структуру, напоминающую структуру обычных списков R. Отдельные компоненты `S4`-объектов называются *слотами* (англ. *slots*) и могут сами являться сложными объектами любого другого класса. В отличие от обычных списков, обращение к слотам `S4`-объектов происходит при помощи оператора `@`, а не `$`. Кроме того, к слотам можно обращаться только по их именам, тогда как отдельные элементы списков мы можем индексировать также по их порядковым номерам. Имена слотов, входящих в состав `Regions`, легко выяснить при помощи базовой R-функции `slotNames()`:

```
slotNames (Regions)
[1] "data"           "polygons"      "plotOrder"
     "bbox"         "proj4string"
```

Наибольший интерес для нас представляют слоты `"data"` и `"polygons"`. Первый включает обычную таблицу данных (*data frame*), содержание которой станет понятным из приведенного ниже вывода команды `Regions@data`:

```
Regions@data
```

ID_0	ISO	NAME_0	ID_1	NAME_1	VARNAME_1	NL_NAME_1	HASC_1	CC_1	TYPE_1	ENGTYP_1	VALIDFR_1	VALIDTO_1	REMARKS_1	Shape_Leng	Shape_Area
0	28	BLR	Belarus	398	Brest	?????[Brestskaya Voblasts]Brest	NA	BY.BR	NA	Voblasts' Region	1957	Present	NA	16.52709697	4.304276917
1	28	BLR	Belarus	399	Homyl'	?????[Gomel]Gomel'Homyl'skaya Voblasts]Homje	NA	BY.HO	NA	Voblasts' Region	1957	Present	NA	17.09816571	5.283263417
2	28	BLR	Belarus	400	Hrodna	?????[Grodno]Hrodzenskaya Voblasts'	NA	BY.HR	NA	Voblasts' Region	1957	Present	NA	15.8004154	3.389445034
3	28	BLR	Belarus	401	Mahilyow	?????[Mahiljow]Mogilev[Mahilyowskaya Voblasts'	NA	BY.MA	NA	Voblasts' Region	1957	Present	NA	18.3312179	3.942340117
4	28	BLR	Belarus	402	Minsk	?????[Minsk Oblast]Minskaya Voblasts'	NA	BY.MI	NA	Voblasts' Region	1957	Present	There was a s	19.56079479	5.458635601
5	28	BLR	Belarus	403	Vitsyebk	?????[Vitebsk]Vitebsk[Vitsyebkaya Voblasts]Vitebsk	NA	BY.VI	NA	Voblasts' Region	1957	Present	NA	19.46918296	5.666403546

К сожалению, на многих компьютерах русскоязычные названия территориальных единиц не распознаются (отсюда знаки `???` в примере выше). В разделе 1.2 показано, что их легко можно откорректировать.



В свою очередь, слот "polygons" содержит список с координатами точек, задающих контуры соответствующих территориальных единиц в формате системы координат WGS84 (см. подробнее на [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org)), а также некоторые другие атрибуты:

```
str(Regions@polygons)
List of 6
 $ :Formal class 'Polygons' [package "sp"] with 5 slots
  .. ..@ Polygons :List of 1
  .. .. ..$ :Formal class 'Polygon' [package "sp"] with 5 slots
  .. .. .. .. ..@ labpt   : num [1:2] 25.5 52.4
  .. .. .. .. ..@ area    : num 4.3
  .. .. .. .. ..@ hole    : logi FALSE
  .. .. .. .. ..@ ringDir: int 1
  .. .. .. .. ..@ coords  : num [1:2100, 1:2] 25.9 25.9 26 26 26 ...
  .. ..@ plotOrder: int 1
  .. ..@ labpt     : num [1:2] 25.5 52.4
  .. ..@ ID       : chr "0"
  .. ..@ area     : num 4.3
# остальная часть выведенной информации опущена для экономии места
```

Разобравшись со структурой шейп-файлов и их представлением в R, приступим собственно к построению картограмм. Как это часто случается, в R имеется несколько способов достижения одной и той же цели. Не являются исключением и картограммы.

### **Функция `spplot()` из пакета `sp`**

Пакет `sp` содержит функции, реализующие ряд методов и классов для пространственных данных (импорт, преобразование и экспорт данных, графические методы и т.п.). В частности, в нем имеется функция `spplot()`, которая позволяет отображать на графике данные, заключенные в шейп-файле. В основе этой функции лежат высокоуровневые команды `lattice` – одного из популярных графических R-пакетов.

Для начала построим картограмму Беларуси, на которой каждая область будет залита своим цветом (цвет на этой карте будет служить просто для идентификации области – никакой другой информационной нагрузки он нести не будет). Посмотрим еще раз на названия областей, которые следуют по алфавиту (приведены оригинальные белорусские названия в написании латинскими буквами):

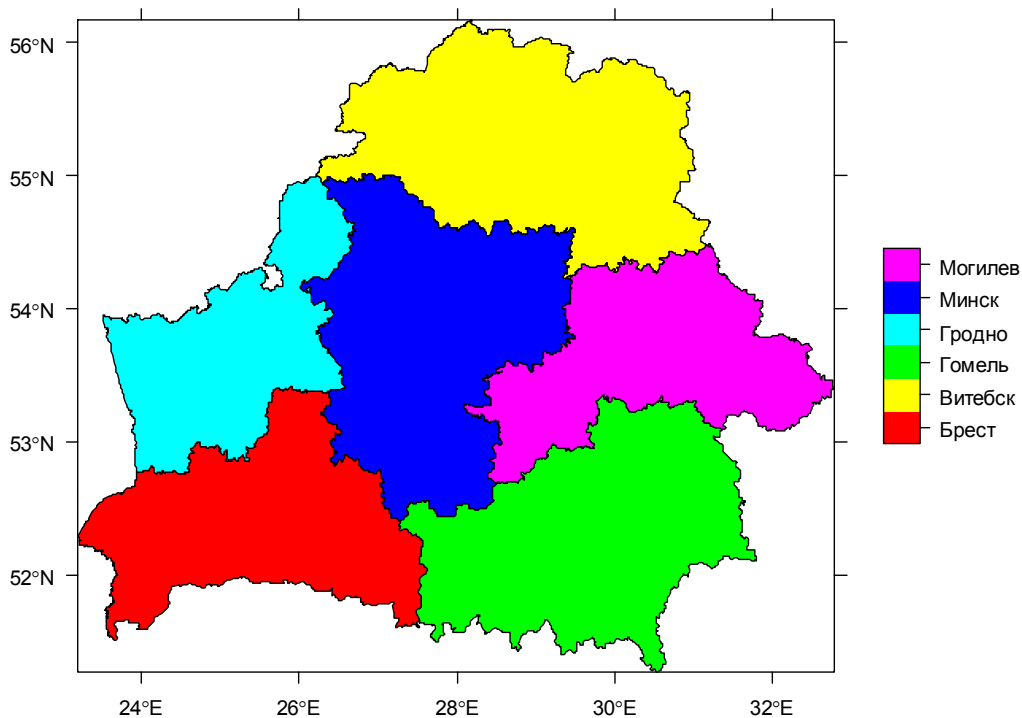
```
(Regions@data$NAME_1 <- factor(Regions@data$NAME_1))
[1] Brest      Homyel'    Hrodna     Mahilyow   Minsk      Vitsyebsk
Levels: Brest Homyel' Hrodna Mahilyow Minsk Vitsyebsk
```

Переменная `NAME_1`, как видим, является фактором с 6 уровнями. Каждому их этих уровней при построении карты необходимо будет присвоить уникальный цвет.

Хорошо отличимые друг от друга цвета можно подобрать, воспользовавшись одной из стандартных палитр R, например `rainbow()`:

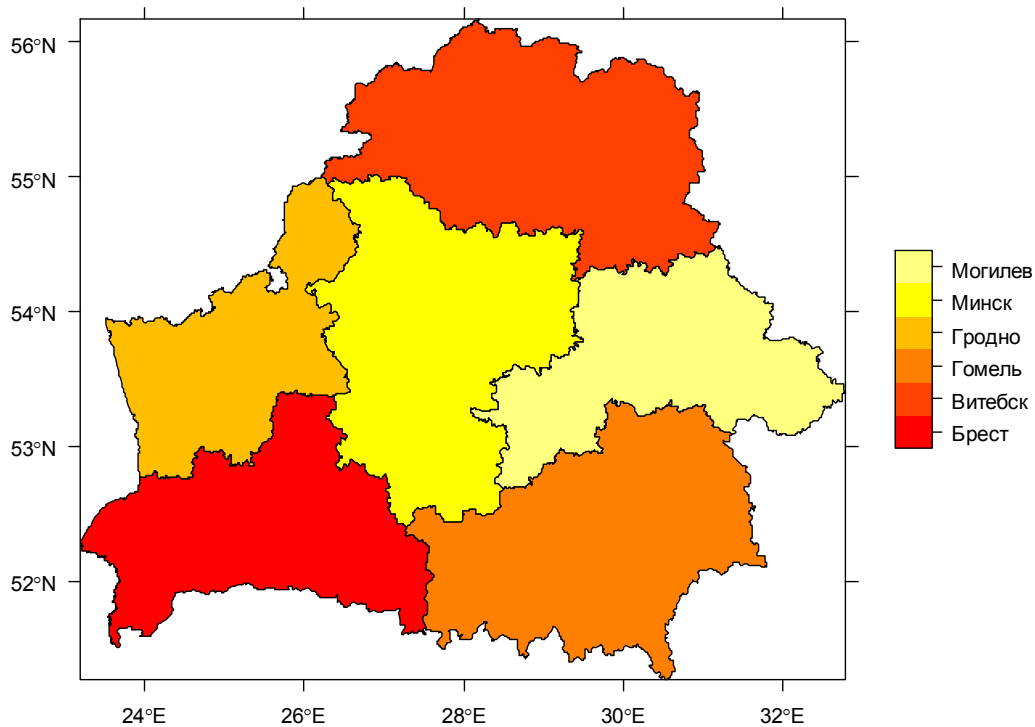
```
spplot(Regions, "NAME_1", # отображаемая переменная
       scales = list(draw = T), # отображение координатных осей
       col.regions = rainbow(n = 6) ) # опция, задающая заливку цветом
```

rainbow(n = 6)



Можно попробовать и другие стандартные палитры R, например `terrain.colors()` (см раздел 1.2) или `heat.colors()`:

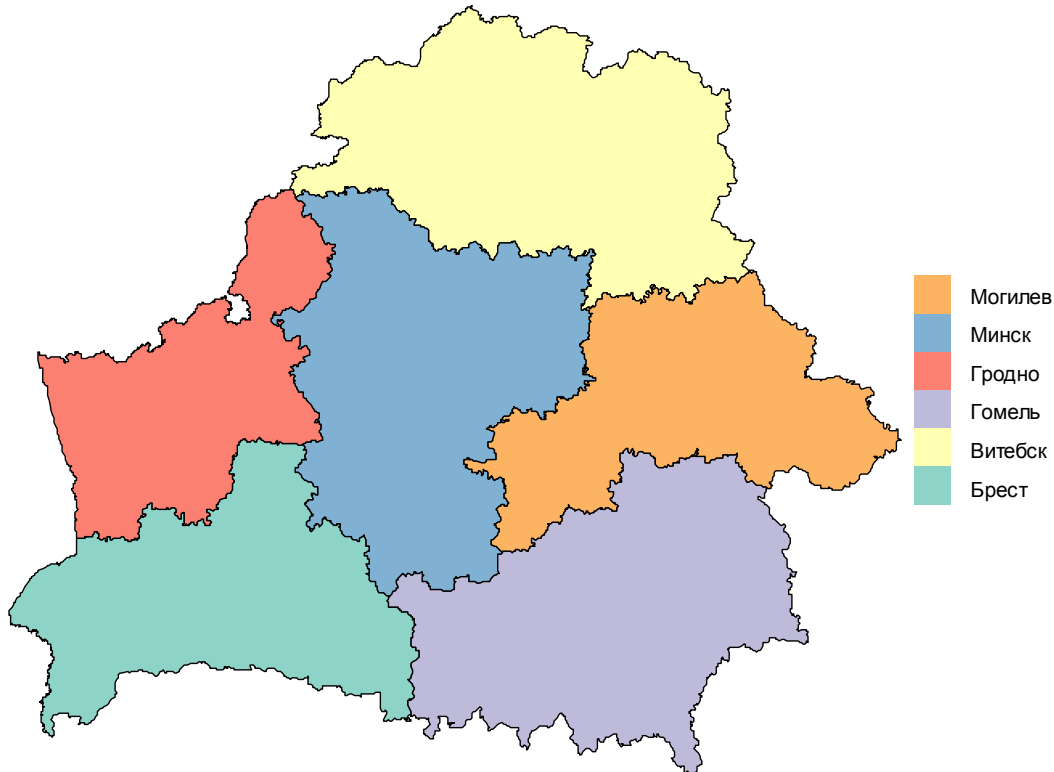
heat.colors (n=6)



Можно также предложить к использованию хорошо подобранные и потому приятные на вид палитры, входящие в состав пакета `RColorBrewer` (см. [colorbrewer2.org](http://colorbrewer2.org)). Помимо использования одной из палитр `RColorBrewer`, в

приведенном примере также добавлена опция `par.settings`, при помощи которой отключаются координатные оси вокруг карты:

```
spplot(Regions, "NAME_1",  
       col.regions = brewer.pal(6, "Set3"),  
       par.settings = list(axis.line = list(col = NA)))
```



Теперь придадим цвету смысл – построим картограмму, на которой цветовая шкала будет соответствовать числу мужчин, проживающих в каждой области. Данные взяты с сайта [belstat.gov.by](http://belstat.gov.by) и представляют собой результаты переписи населения Беларуси за 2009 г. Значения численности мужчин достаточно добавить в таблицу данных, хранящуюся в слоте `data` объекта `Regions` (см. выше):

```
# Порядок чисел важен! Он должен совпадать с порядком,  
# в котором в таблице data перечислены соответствующие области:  
Regions@data$Population = c(186716, 152169, 131817,  
                             105417, 253427, 135348)
```

Перед построением картограммы нам необходимо определиться с цветовой шкалой, т.е. какими цветами шкала должна быть представлена и на сколько градаций разбита. Сделать это можно разными способами, в зависимости от стоящей задачи, а также от разброса значений отображаемой на картограмме переменной. Воспользуемся одним из таких способов – определением цветовой палитры при помощи базовой R-функции `colorRampPalette()`.

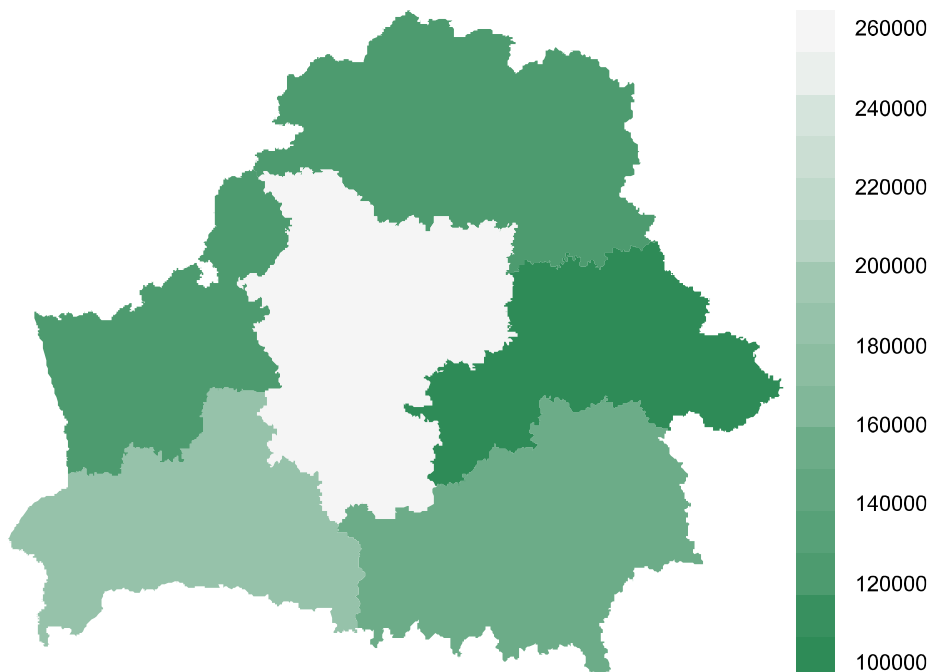
В качестве аргументов этой функции следует указать "опорные" цвета, между которыми требуется произвести интерполяцию (т.е. плавный переход, например, от красного к желтому). Функция `colorRampPalette()` возвращает другую функцию, которая и выполняет такую интерполяцию автоматически. Для нашего примера мы

создадим цветовую шкалу, в которой будет происходить плавный переход от цвета seagreen к whitesmoke (для ознакомления со списком стандартных цветов R выполните команду colors()):

```
mypalette <- colorRampPalette(c("seagreen", "whitesmoke"))
# Объект mypalette - это функция:
mypalette
function (n)
{
  x <- ramp(seq.int(0, 1, length.out = n))
  rgb(x[, 1L], x[, 2L], x[, 3L], maxColorValue = 255)
}
```

Теперь функцию mypalette мы можем подать на вход функции spplot(). При этом в качестве (единственного) аргумента mypalette следует указать общее количество опорных плюс промежуточных цветов (n), которое должно присутствовать в шкале. Чем больше разброс значений отображаемой переменной, тем выше должно быть это число – так будет достигаться плавный переход между цветами. В нашем случае разброс значений численности мужчин в отдельных областях невелик, и поэтому выберем n = 20. В приведенной ниже команде для демонстрации еще одной опции функции spplot() добавлен аргумент col со значением "transparent" (прозрачный) – с его помощью отключается отображение линий, ограничивающих каждую область:

```
spplot(Regions, "Population",
       col.regions = mypalette(20), # определение цветовой шкалы
       col = "transparent", # отключение контурных линий на карте
       par.settings = list(axis.line = list(col = NA)))
```



Как видим, наибольшая численность мужчин в Беларуси имеет место в Минской области и в двух южных областях – Брестской и Гомельской.

Рассмотренный принцип добавления пользовательских данных в слот data шейп-файла с последующим их отображением на картограмме можно применить и к более

дробным территориальным единицам – например, районам. Загрузим соответствующий шейп-файл с сайта GADM и сохраним его в виде объекта с именем `Counties`:

```
load(url(
  "http://biogeo.ucdavis.edu/data/gadm2/R/BLR_adm2.RData"))
Counties <- gadm ; rm(gadm)
```

Вместо использования реальных данных, воспользуемся генератором случайных чисел и создадим вектор `Fake` из нормально распределенных значений. Этот вектор будет добавлен в слот `data` объекта `Counties`. Длина вектора `Fake` будет соответствовать числу районов в Беларуси:

```
set.seed(1234) # для воспроизводимости результата
Counties@data$Fake <- rnorm(dim(Counties@data)[1], 100, 35)
```

Для создаваемой картограммы применим еще один способ определения цветовой шкалы. Пусть в основу этой шкалы лягут цвета из пакета `RColorBrewer` (см. выше), в частности из палитры `RdBu`.

При работе с количественными переменными возникает проблема с тем, чтобы разбить их значения на отдельные промежутки, которым можно сопоставить соответствующие цвета. В R такое разбиение не составляет труда, причем есть несколько способов это сделать. Мы воспользуемся возможностями пакета `classInt` (не забудьте установить его перед первым использованием!). Функция `classIntervals()` разбивает имеющуюся совокупность чисел на классы с определенным шагом, задаваемым при помощи аргумента `style`. Мы постараемся разбить наш вектор `Fake` на 6 классов одинакового размера:

```
require(classInt)
brks.eq = classIntervals(Counties$Fake, n = 6,
                          style = "equal")
```

Вот результат разбиения этого вектора на 6 одинаковых классов:

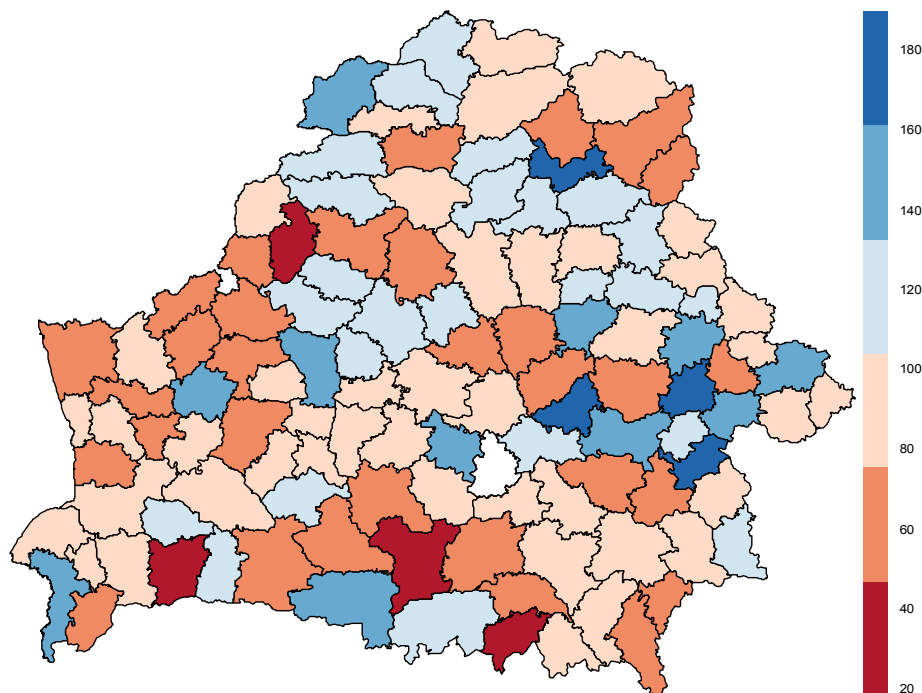
```
brks.eq
style: equal
  one of 167,549,733 possible partitions of this variable
  into 6 classes
[17.90058,46.45293) [46.45293,75.00528) [75.00528,103.5576)
           4           31           43
 [103.5576,132.11) [132.11,160.6623) [160.6623,189.2147)
           24           11           5
```

```
# Задаем палитру из 6 цветов:
```

```
plotcol <- brewer.pal(6, "RdBu")
```

```
# Рисуем карту:
```

```
spplot(Counties, "Fake",
        col.regions = plotcol,
        at = brks.eq$brks, # задает границы классов
        par.settings = list(axis.line = list(col = NA)))
```



### Создание картограмм при помощи пакета `ggplot2`

Пакет `ggplot2` – пожалуй, самая популярная коллекция графических функций для R. Следует сразу оговориться, что синтаксис команд `ggplot2` является своего рода мини-языком программирования. Изложение основ `ggplot2` не является целью данного раздела – для этого существуют соответствующие руководства, из которых особое внимание стоит обратить на официальную документацию пакета ([docs.ggplot2.org](https://docs.ggplot2.org)), а также на книги ([Wickham, 2009](#); [Chang, 2013](#)). В приведенных ниже примерах даются лишь краткие пояснения к коду, необходимые для его понимания.

Напомним, что выше мы загрузили шейп-файл, необходимый для административно-территориальных единиц Беларуси на уровне районов и создали объект `Counties`, который относится к объектам класса `S4`. Единственный формат данных, который принимают функции пакета `ggplot2`, – это "таблица данных" (*data frame*). Соответственно, нам необходимо каким-то образом преобразовать объект `Counties` в таблицу данных. Сделать это позволяет функция `fortify()`:

```
library(ggplot2); library(rgeos); library(maptools)
counties <- fortify(Counties, region = "NAME_2")
# аргумент region = "NAME_2" указывает на переменную (NAME_2)
# с идентификаторами # административных единиц – районов
str(counties)
'data.frame': 42659 obs. of 7 variables:
 $ long : num  29.1 29.1 29.1 29.1 29.1 ...
 $ lat  : num  52.9 52.9 52.9 52.9 52.8 ...
 $ order: int   1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 ...
 $ hole : logi FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE ...
 $ piece: Factor w/ 1 level "1": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ group: Factor w/ 118 levels "Aktsyabar.1",...: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ id   : chr  "Aktsyabar" "Aktsyabar" "Aktsyabar" "Aktsyabar" ...
```

Теперь мы можем построить прототип нашей будущей картограммы при помощи следующей составной команды:

```
ggplot() + geom_map(data = counties,
                    aes(map_id = id),
                    map = counties, color = "gray70") +
expand_limits(x = counties$long, y = counties$lat) +
coord_map("polyconic")
```

Создание статистических графиков средствами `ggplot2` напоминает послойное создание изображений в программе *Adobe Photoshop*: вначале создается пустой слой графика, поверх которого далее добавляются другие слои, содержащие определенные графические элементы (в частности, изображение карты). Рассмотрим отдельные части приведенной выше команды подробнее:

- `ggplot()`: иницирует создание пустого слоя.
- `geom_map()`: создает слой с картой, внешний вид которой задается при помощи соответствующих аргументов. Так, при помощи аргумента `data` мы указываем таблицу данных, в которой содержатся подлежащие отображению на карте данные. Поскольку на первом этапе никаких таких данных у нас нет, в качестве "заглушки" мы просто укажем таблицу `counties`. Аргумент `aes()` позволяет настроить "эстетические параметры" (англ. *aesthetics*) создаваемого слоя, и, в частности, указать, какая переменная в таблице с данными содержит идентификаторы административно-территориальных единиц (районов). Аргумент `map` служит для указания таблицы, содержащей координаты соответствующих полигонов на карте (в нашем случае это `counties` – таблица, которую мы создали при помощи функции `fortify()` из объекта `Counties`.
- `expand_limits()`: в отличие от других функций `ggplot2`, которые предназначены для создания новых слоев с графическими элементами, функция `geom_map()` не способна автоматически определять оптимальные пределы значений `x`- и `y`-координат. Сделать это ей помогает функция `expand_limits()`.
- `coord_map()`: задает тип картографической проекции (см. подробнее на сайте [goo.gl](http://goo.gl)). В приведенном примере использован тип "polyconic" – поликоническая проекция. Доступны также многие другие типы, реализованные в пакете `mapproj` (подробнее см. справочный файл, доступный по команде `?mapproject`).

Для иллюстрации принципа создания картограмм добавим к структуре `Counties@data` столбец `fake_data$Value` со случайно сгенерированными данными для каждого района Беларуси:

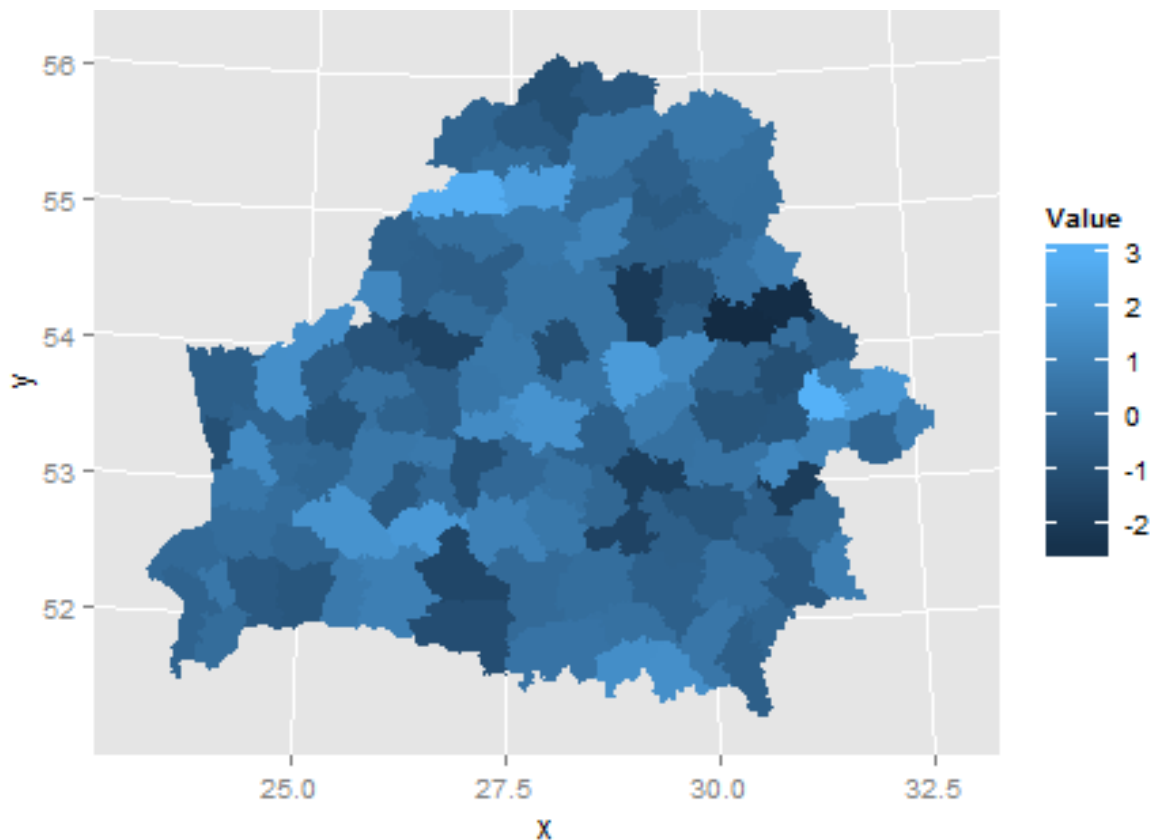
```
fake_data <- as.data.frame(Counties@data)
fake_data$Value <- rnorm(nrow(fake_data))
```

Теперь отобразим данные из столбца `Value` таблицы `fake_data` на картограмме:

```
ggplot() + geom_map(data = fake_data,
                    aes(map_id = NAME_2, fill = Value),
                    map = counties) +
expand_limits(x = counties$long, y = counties$lat) +
coord_map("polyconic")
```

Результатом приведенной команды будет картограмма с автоматически выбранной цветовой шкалой:

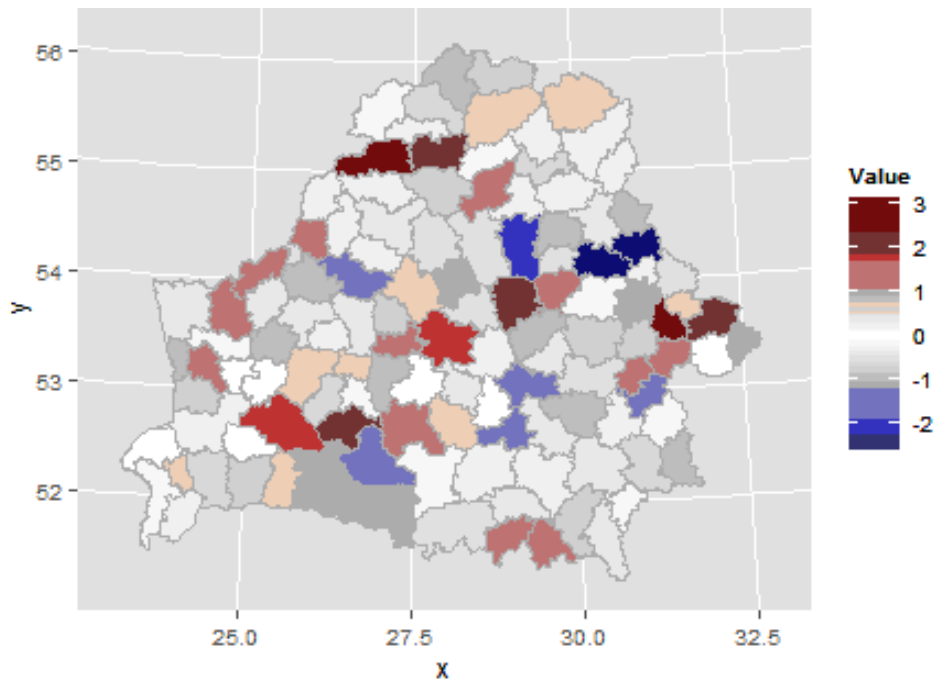




Может возникнуть необходимость изменить эту цветовую шкалу. Так, в рассматриваемом примере отображаемые на карте данные имеют среднее значение 0. Имеет смысл определенным образом выделить это значение на цветовой шкале, например, при помощи белого цвета. Для значений же, отклоняющихся от 0 в отрицательную и в положительную стороны, можно выбрать, например, оттенки синего и красного соответственно.

Для создания подобных расходящихся (англ. *diverging*) цветовых шкал в пакете `ggplot2` служит функция `scale_fill_gradient2()`, которая работает примерно следующим образом:

```
library(scales) # для функции muted (см. ниже)
ggplot() + geom_map(data = fake_data,
                    aes(map_id = NAME_2, fill = Value),
                    colour = "gray",
                    map = counties) +
  expand_limits(x = counties$long, y = counties$lat) +
  scale_fill_gradient2(low = muted("blue"),
                      midpoint = 0,
                      mid = "white",
                      high = muted("red"),
                      limits = c(min(fake_data$Value),
                                max(fake_data$Value))) +
  coord_map("polyconic")
```



Обратите внимание на аргумент `colour = "gray"` функции `geom_map()` – он добавлен для обводки границ районов серым цветом.

При необходимости мы можем выполнить тонкую настройку и других деталей внешнего вида графика. В частности, при помощи функции `theme()` ("тема", или "шаблон") можно отключить отображение серого фона, координатной сетки, а также осей и их подписей:

```
ggplot() + geom_map(data = fake_data,
                    aes(map_id = NAME_2, fill = Value),
                    colour = "gray",
                    map = counties) +
  expand_limits(x = counties$long, y = counties$lat) +
  scale_fill_gradient2(low = muted("blue"),
                      midpoint = 0,
                      mid = "white",
                      high = muted("red"),
                      limits = c(min(fake_data$Value),
                                max(fake_data$Value))) +
  coord_map("polyconic") +
  theme(
    axis.line = element_blank(),
    axis.text.x = element_blank(),
    axis.text.y = element_blank(),
    axis.ticks = element_blank(),
    axis.title.x = element_blank(),
    axis.title.y = element_blank(),
    plot.background = element_blank(),
    panel.grid.major = element_blank(),
    panel.grid.minor = element_blank(),
    panel.border = element_blank(),
    panel.background = element_blank() )
```

## БИБЛИОГРАФИЯ И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

### Основные литературные ссылки по тексту книги

#### Рекомендуемые пособия по изучению R

- Зарядов И.С.* Введение в статистический пакет R: типы переменных, структуры данных, чтение и запись информации, графика. Москва: Изд-во РУДНБ, 2010а. 207 с. [PDF](#)
- Зарядов И.С.* Статистический пакет R: теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Изд-во РУДНБ, 2010б. 141 с. [PDF](#)
- Шуиунов А.Б. и др.* Наглядная статистика. Используем R! Москва: ДМК Пресс, 2014. 298 с. [PDF](#)
- Шутиков В.К., Розенберг Г.С.* Рандомизация и бутстреп: статистический анализ в биологии и экологии с использованием R. Тольятти : Кассандра, 2014. 314 с. (PDF, данные и скрипты доступны на сайте авторов [ievbras.ru/ecostat](http://ievbras.ru/ecostat)).
- Altham P.M.* Introduction to Statistical Modelling in R. University of Cambridge, 2012. 115 p.
- Bolker B.M.* Ecological Models and Data in R. Princeton University Press, 2008. 517 p.
- Borcard D., Gillet F., Legendre P.* Numerical Ecology with R. Springer, 2011. 319 p.
- Chernick M.R., LaBudde R.A.* An Introduction to Bootstrap Methods with Applications to R. Wiley, 2011. 236 p.
- Cleveland W.* Visualizing Data. At&T Bell Laboratories, 1993. 360 p.
- Crawley M.J.* The R Book. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley, 2013. 1076 p.
- Dalgaard P.* Introductory Statistics with R. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2008. 364 p.
- Everitt B.S., Hothorn T.* A Handbook of Statistical Analyses Using R. 2<sup>nd</sup> ed. Chapman, Hall/CRC, 2010. 376 p.
- Faraway J.J.* Practical Regression and Anova using R. University of Bath, 2002. [PDF](#) (данные и скрипты доступны также на [сайте](#) автора)
- Faraway J.J.* Extending the Linear Model with R: Generalized Linear, Mixed Effects and Nonparametric Regression Models. Chapman, Hall/CRC, 2006. 345 p.
- Fox J.* Applied Regression Analysis and Generalized Linear Models, 2<sup>nd</sup> ed. Sage Publications, 2008.
- Fox J., Weisberg S.* An R Companion to Applied Regression, 2<sup>nd</sup> ed. Sage Publications, 2011.
- Gelman A., Hill J.* Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models. Cambridge University Press, 2006. 651 p.
- Kabacoff R.* R in Action: Data Analysis and Graphics With R. Manning Publications, 2011. 447 p. (Рус. пер.: *Кабаков П.И.* R в действии: Анализ и визуализация данных в программе R / пер. с англ. П.А. Волкова. Москва: ДМК Пресс, 2014. 580 с.)
- Karp N.* R Commander: An Introduction. 2014. 52 p. [PDF](#)
- Lam L.* An Introduction to R. Vrije Universiteit Amsterdam, 2010. 212 p. [PDF](#)
- Larson-Hall J.* A Guide to Doing Statistics in Second Language Research Using R. New York, NY: Routledge, 2009. 320 p. [PDF](#)
- Logan M.* Biostatistical Design and Analysis Using R: A Practical Guide. Wiley-Blackwell, 2010. 576 p.
- Maindonald J.H., Braun W.J.* Data Analysis and Graphics Using R: An Example-Based Approach. 3<sup>rd</sup> ed. Cambridge University Press, 2010. 565 p.
- Meys J., Vries A.* R For Dummies. For Dummies, 2012. 406 p.
- Ricci V.* Fitting Distributions with R. 2005. 24 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Sarkar D.* Lattice: Multivariate Data Visualization with R. Springer, 2008. 268 p.
- Venables W.N., Ripley B.D.* Modern Applied Statistics with S. 4<sup>th</sup> ed. Springer, 2002. 505 p.

- Venables W.N., Smith D.M.* An Introduction to R. R Development Core Team, 2014. 105 p. ([PDF](#) на сайте CRAN). (Рус. пер.: *Венэблз У.Н., Смит Д.М.* Введение в R: Заметки по R: среда программирования для анализа данных и графики : пер. с англ. Вер. 3.1.0. Москва, 2014. 109 с. [PDF](#))
- Wickham H.* Advanced R. Chapman & Hall/CRC. The R Series, 2014. 476 p. (официальная бесплатная версия книги доступна по адресу <http://adv-r.had.co.nz/>)
- Wood S.N.* Generalized Additive Models: An Introduction with R. Chapman, Hall/CRC, 2006. 410 p.
- Zieffler A.S., Harring J.R., Long J.D.* Comparing Groups: Randomization and Bootstrap Methods Using R. Wiley, 2011. 332 p.
- Zuur A. F., Ieno E.N., Walker N. et al.* Mixed Effects, Models and Extensions in Ecology with R. Berlin: Springer Sci., 2009. 574 p.

### Методическая литература по статистическому анализу

- Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрии. М.: ЮНИТИ, 1998. 1022 с.
- Афифи А., Эйзен С.* Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ. М.: Мир, 1982. 488 с.
- Гланц С.* Медико-биологическая статистика. М.: Практика, 1999. 459 с.
- Дрейнер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика. Кн. 1, 1986. 366 с. Кн. 2, 1987. 352 с.
- Монтгомери Д.К.* Планирование эксперимента и анализ данных. Л.: Судостроение, 1980. 384 с.
- Справочник по прикладной статистике.* В 2-х т. Пер. с англ. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю. Н. Тюрина. М.: Финансы и статистика. Т. 1. 1989. 510 с., Т. 2. 1990. 526 с.
- Фишер Р.А.* Статистические методы для исследователей. М.: Госстатиздат, 1958. 268 с.
- Chambers J., Cleveland W., Kleiner B., Tukey P.* Graphical Methods for Data Analysis (Statistics). Chapman and Hall/CRC, 1983. 336 p.
- Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2009. 745 p.
- Legendre P., Legendre L.* Numerical Ecology. 3<sup>rd</sup> ed. Amsterdam: Elsevier Sci. BV, 2012. 990 p.
- Sokal R.R., Rohlf F.J.* Biometry: The principles and practice of statistics in biological research. 3<sup>rd</sup> ed. N.Y.: Freeman, 1995. 887 p.
- Zar J.H.* Biostatistical Analysis. 5<sup>th</sup> ed. London: Pearson Prentice Hall, 2010. 945 p.

## Библиографический указатель литературы по использованию R

- Волкова П.А., Шипунов А.Б. Статистическая обработка данных в учебно-исследовательских работах / под ред. Ю. А. Багринцева, Б. М. Каплан, Е. Н. Сиднева. Москва: Экспресс, 2008. 60 с.
- Геостатистический анализ данных в экологии и природопользовании (с применением пакета R): Учебное пособие / А. А. Савельев [и др.]. Казань: Казанский университет, 2012. 120 с.
- Гнатюк В. Выступ до R на прикладах. (Укр. яз). Харьковский национальный экономический университет, 2010. 107 с.
- Дружков П.Н., Золотых Н.Ю., Половинкин А.Н. Введение в R. 2013. 18 с.
- Дьяконов А.Г. Справочник по базовым командам системы R. 2013. 91 с.
- Зорин А.В., Федоткин М.А. Введение в прикладной статистический анализ в пакете R. Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 2010. 50 с.
- Коробейников А.И., Малов С.В., Матвеева И.В. Анализ данных с R: Методические указания к спецкурсу «Вычислительные методы и пакеты в статистическом исследовании». 2010. 12 с.
- Коробейников А.И., Малов С.В., Матвеева И.В. Основные алгоритмы численного анализа. Использование пакета R (S-PLUS) для анализа статистических данных: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Вычислительная математика». Санкт-Петербург, 2011. 40 с.
- Основные понятия языка R. Учебно-методическое пособие / А. А. Савельев [и др.]. Казань: Казанский университет, 2007. 29 с.
- Определение языка R: пер. с англ. Вер. 3.1.0. Рабочая группа разработки R. Москва, 2014. 64 с.
- Савельев А.А., Мухарамова С.С., Пилюгин А.Г. Использование языка R для статистической обработки данных. Учебно-методическое пособие. Казань: Казанский университет, 2007. 28 с.
- Статистический анализ данных в системе R. Учебное пособие / А. Г. Буховец [и др.]; под ред. А. Г. Буховец. Воронеж: ВГАУ, 2010. 124 с. [PDF](#)
- Хорник К. Часто задаваемые вопросы по R: R ЧаВо: пер. с англ., 2007. 7 с.
- Шишкин В.А. Программное обеспечение эконометрических расчетов. Пермь: ПГНИУ, 2014. 273 с.
- Юу Н. Искусство визуализации в бизнесе: Как представить сложную информацию простыми образами / пер. с англ. А. Кирова. Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2013. 352 с.
- Abedin J. Data Manipulation with R. Packt Publishing, 2014. 103 p.
- Adler J. R in a Nutshell: A Desktop Quick Reference. 2<sup>nd</sup> ed. O'Reilly Media, 2012. 724 p.
- Advances in Social Science Research Using R / ed. by H. D. Vinod. Springer, 2010. 205 p.
- Aho K. A. Foundational and Applied Statistics for Biologists. Using R. CRC Press, 2013. (см. также [PDF](#)-приложение «Introduction to R» на сайте автора).
- Aizaki H., Nakatani T., Sato K. Stated Preference Methods Using R. Chapman, Hall/CRC, 2014. 254 p.
- Albert J. Bayesian Computation With R. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2009. 304 p.
- Albert J., Rizzo M. R by Example. Springer, 2012. 374 p.
- Allerhand M. A Tiny Handbook of R. Springer, 2011. 94 p.
- An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R / G. James [et al.]. Springer, 2013. 430 p.
- Analyzing Spatial Models of Choice and Judgment with R / D. A. Armstrong II [et al.]. Chapman, Hall/CRC, 2014. 351 p.

- Ando T.* Bayesian Model Selection and Statistical Modeling. Chapman, Hall/CRC, 2010. 300 p.
- Aragón T.J.* Applied Epidemiology Using R. 2013. 240 p.
- Arratia A.* Computational Finance: An Introductory Course with R. Atlantis Press, 2014. 305 p.
- Azzalini A., Capitanio A.* The Skew-Normal and Related Families. Cambridge University Press, 2014. 272 p.
- Baayen R.H.* Analyzing Linguistic Data: A Practical Introduction to Statistics using R. Cambridge University Press, 2008. 369 p.
- Barker T.* Pro Data Visualization using R and JavaScript. Apress, 2013. 207 p.
- Baron J., Li Y.* Notes on the use of R for psychology experiments and questionnaires. University of Pennsylvania, 2003. 46 p. ([PDF на сайте авторов](#)).
- Basic R for Finance / D. Würtz [et al.].* Zurich: Rmetrics Association & Finance Online Publishing, 2010. 312 p.
- Beaujean A.A.* Latent Variable Modeling Using R: A Step-by-Step Guide. Routledge, 2014. 218 p.
- Beckerman A.P., Petchey O.L.* Getting Started with R: An introduction for Biologists. Oxford University Press, 2012. 128 p.
- Beeley C.* Web Application Development with R Using Shiny. Packt Publishing, 2013. 110 p.
- Berridge D. M., Crouchley R.* Multivariate Generalized Linear Mixed Models Using R. CRC Press, 2011. 284 p.
- Beyersmann J., Allignol A., Schumacher M.* Competing Risks and Multistate Models with R. Springer, 2012. 249 p.
- Bioconductor Case Studies / F. Hahne [et al.].* Springer, 2008. 296 p.
- Bioinformatics and Computational Biology Solutions Using R and Bioconductor / ed. by R. Gentleman [et al.].* Springer, 2005. 492 p.
- Bivand R. S., Pebesma E., Gómez-Rubio V.* Applied Spatial Data Analysis with R. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2013. 414 p.
- Bliese P.* Multilevel Modeling in R. R Development Core Team, 2013. 88 p. ([PDF на сайте CRAN](#)).
- Bloomfield V.A.* Computer Simulation and Data Analysis in Molecular Biology and Biophysics: An Introduction Using R. Springer, 2009. 321 p.
- Bloomfield V.A.* Using R for Numerical Analysis in Science and Engineering. Chapman, Hall/CRC, 2014. 352 p.
- Bogetoft P., Otto L.* Benchmarking with DEA, SFA, and R. Springer, 2011. 368 p.
- Boogaart K.G. van den, Tolosana-Delgado R.* Analyzing Compositional Data with R. Springer, 2013. 269 p.
- Boos D.D., Stefanski L. A.* Essential Statistical Inference: Theory and Methods. Springer, 2013. 567 p.
- Braun W.J., Murdoch D.J.* A First Course in Statistical Programming with R. Cambridge University Press, 2007.
- Bretz F., Hothorn T., Westfall P.* Multiple Comparisons Using R. Chapman, Hall/CRC, 2011. 194 p.
- Broman K.W., Sen S.* A Guide to QTL Mapping with R/qtl. Springer, 2009. 412 p.
- Broström G.* Event History Analysis with R. CRC Press, 2012. 234 p.
- Burns P.* The R Inferno. 2011. 126 p. ([PDF на сайте CRAN](#)).
- Buuren S. van.* Flexible Imputation of Missing Data. Chapman, Hall/CRC, 2012. 342 p.
- Cano E.L., Moguerza J.M., Redchuk A.* Six Sigma with R: Statistical Engineering for Process Improvement. Springer, 2012. 296 p.
- Carmona R.* Statistical Analysis of Financial Data in R. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2014. 595 p.
- Chambers J.M.* Programming with Data: A Guide to the S Language. Springer, 1998. 486 p.
- Chambers J. M.* Software for Data Analysis: Programming with R. Springer, 2008.
- Chambers J. M., Hastie T.J.* Statistical models in S. Chapman, Hall/CRC, 1991. 608 p.
- Chan N.H.* Time Series: Applications to Finance with R and S-Plus. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley, 2010. 316 p.



- Chang M.* Adaptive design theory and implementation using SAS and R. Chapman, Hall/CRC, 2008. 441 p.
- Chang S.S.* Exploring Everyday Things with R and Ruby: Learning About Everyday Things. O'Reilly Media, 2012.
- Chang W.R.* Graphics Cookbook. O'Reilly Media, 2012. 413 p.
- Chatterjee S., Simonoff J.S.* Handbook of Regression Analysis. Wiley, 2013. 237 p.
- Chen D.-G., Peace K.E.* Clinical Trial Data Analysis Using R. CRC Press, 2011. 381 p.
- Chen D.-G., Peace K.E.* Applied Meta-Analysis with R. Chapman, Hall/CRC, 2013.
- Cheung Y.K.* Dose Finding by the Continual Reassessment Method. Chapman, Hall/CRC, 2011. 200 p.
- Chihara L.M., Hesterberg T.C.* Mathematical Statistics with Resampling and R. Wiley, 2011. 434 p.
- Clark M.* Introduction to R: A First Course in R. Center for Social Research University of Notre Dame, 2013. 29 p.
- Claude J.* Morphometrics with R. Springer, 2008. 316 p.
- Coghlan A.* A Little Book of R for Biomedical Statistics. University College Cork, 2013. 31 p.
- Coghlan A.* A Little Book of R for Multivariate Analysis. University College Cork, 2013. 47 p.
- Coghlan A.* A Little Book of R for Time Series. University College Cork, 2014. 71 p.
- Cohen Y., Cohen J.Y.* Statistics and Data with R: An Applied Approach Through Examples. Wiley, 2008. 603 p.
- Computational Actuarial Science with R / ed. by A. Charpentier.* Chapman, Hall/CRC, 2014. 604 p.
- Cook D., Swayne D.F.* Interactive and Dynamic Graphics for Data Analysis: With R and Ggobi. Springer, 2007. 188 p.
- Cotton R.* Learning R. O'Reilly Media, 2013. 400 p.
- Cowles M.K.* Applied Bayesian Statistics: With R and OpenBUGS Examples. Springer, 2013. 240 p.
- Cowpertwait P.S., Metcalfe A.* Introductory Time Series with R. Springer, 2009. 262 p.
- Crawley M.J.* Statistics: An Introduction Using R. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley, 2014. 336 p.
- Crowder M.J.* Multivariate Survival Analysis and Competing Risks. Chapman, Hall/CRC, 2012. 396 p.
- Cryer J.D., Chan K.-S.* Time Series Analysis: With Applications in R. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2008. 491 p.
- Curran J.M.* Introduction to Data Analysis with R for Forensic Scientists. CRC Press, 2010. 317 p.
- Danneman N., Heimann R.* Social Media Mining with R: Deploy cutting-edge sentiment analysis techniques to real-world social media data using R. Packt Publishing, 2014.
- Demidenko E.* Mixed Models: Theory and Applications with R. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley, 2013. 754 p. (Wiley Series in Probability and Statistics).
- Deshmukh S.* Multiple Decrement Models in Insurance: An Introduction Using R. Springer, 2012. 220 p.
- Dobrow R.P.* Probability: With Applications and R. Wiley, 2014. 520 p.
- Douc R., Moulines E., Stoffe D.* Nonlinear Time Series: Theory, Methods and Applications with R Examples. Chapman, Hall/CRC, 2014. 551 p.
- Dudoit S., Laan M.J. van der.* Multiple Testing Procedures with Applications to Genomics. Springer, 2008. 611 p.
- Eddelbuettel D.* Seamless R and C++ Integration with Rcpp. Springer, 2013. 220 p.
- Ekstrom C.T.* The R Primer. Chapman, Hall/CRC, 2011. 299 p.
- Ergül Ö.* Guide to Programming and Algorithms Using R. Springer, 2013. 200 p.
- Everitt B.S.* An R and S-Plus® Companion to Multivariate Analysis. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2007. 221 p.



- Everitt B.S., Hothorn T.* An Introduction to Applied Multivariate Analysis with R. Springer, 2011. 283 p.
- Everitt B.S., Rabe-Hesketh S.* Analyzing Medical Data Using S-PLUS. Springer, 2001. 487 p.
- Falissard F.* Analysis of Questionnaire Data with R. Chapman, Hall/CRC, 2011.
- Faraway J.J.* Linear Models with R. Chapman, Hall/CRC, 2004. 240 p.
- Feigelson E.D., Babu G.J.* Modern Statistical Methods for Astronomy: With R Applications. Cambridge University Press, 2012. 490 p.
- Finch W.H., Bolin J.E., Kelley K.* Multilevel Modeling Using R. CRC Press, 2014. 226 p.
- Foulkes A.S.* Applied Statistical Genetics with R: For Population-based Association Studies. Springer, 2009. 252 p.
- Fox J.-P.* An R and S-Plus® Companion to Applied Regression. SAGE Publications, Inc, 2002. 330 p. (Приложения и примеры доступны на [Web Appendix](#))
- Fox J.-P.* Bayesian Item Response Modeling: Theory and Applications. Springer, 2010. 326 p.
- Frery A.C., Perciano T.* Introduction to Image Processing Using R: Learning by Examples. Springer, 2013. 95 p.
- Gaetan C., Guyon X.* Spatial Statistics and Modeling. Springer, 2010. 308 p.
- Galecki A., Burzykowski T.* Linear Mixed-Effects Models Using R: A Step-by-Step Approach. Springer, 2013. 625 p.
- Galwey N.W.* Introduction to Mixed Modelling: Beyond Regression and Analysis of Variance. Wiley, 2006. 377 p.
- Gardener M.* Beginning R: The Statistical Programming Language. Wrox, 2012. 504 p.
- Gardener M.* The Essential R Reference. Wiley, 2013. 578 p.
- Gelman A., Hill J.* Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models. Cambridge University Press, 2006. 651 p.
- Gentleman R.* R Programming for Bioinformatics. Chapman, Hall/CRC, 2008. 328 p.
- Gilli M., Maringer D., Schumann E.* Numerical Methods and Optimization in Finance. Academic Press, 2011. 584 p.
- Good P.I.* Introduction to Statistics Through Resampling Methods and R. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley, 2013. 217 p.
- Greenacre M.* Correspondence Analysis in Practice. 2<sup>nd</sup> ed. Chapman, Hall/CRC, 2007. 296 p.
- Gries S. T.* Quantitative Corpus Linguistics with R: A Practical Introduction. Routledge, 2009. 256 p.
- Gries S. T.* Statistics for Linguistics with R: A Practical Introduction. 2<sup>nd</sup> ed. De Gruyter Mouton, 2013. 375 p.
- Hay-Jahans C.* An R Companion to Linear Statistical Models. Chapman, Hall/CRC, 2011. 372 p.
- Heiberger R.M., Holland B.* Statistical Analysis and Data Display: An Intermediate Course with Examples in S-Plus, R, and SAS. Springer, 2004. 730 p.
- Heiberger R.M., Neuwirth E.* R Through Excel: A Spreadsheet Interface for Statistics, Data Analysis, and Graphics. Springer, 2009. 344 p.
- Helsel D.R.* Statistics for Censored Environmental Data Using Minitab and R. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley, 2012. 344 p.
- Henry M., Stevens H.* A Primer of Ecology with R. Springer, 2009. 388 p.
- Hettmansperger T.P., McKean J.W.* Robust Nonparametric Statistical Methods and R. 2<sup>nd</sup> ed. CRC Press, 2011. 553 p.
- Hilbe J.M., Robinson A.P.* Methods of Statistical Model Estimation. Chapman, Hall/CRC, 2013. 243 p.
- Hoff P.D.* A First Course in Bayesian Statistical Methods. Springer, 2009. 270 p.
- Højsgaard S., Edwards D., Lauritzen S.* Graphical Models with R. Springer, 2012. 182 p.
- Hollander M., Wolfe D.A., Chicken E.* Nonparametric Statistical Methods. 3<sup>rd</sup> ed. Wiley, 2014. 848 p.

- Horton N.J., Kleinman K.* Using R for Data Management, Statistical Analysis, and Graphics. CRC Press, 2010. 296 p.
- Husson F., Le S., Pages J.* Exploratory Multivariate Analysis by Example Using R. CRC Press, 2010. 240 p.
- Hyndman R.J., Athanasopoulos G.* Forecasting: principles and practice. Otexts, 2014. 292 p. (официальная бесплатная версия книги доступна по адресу <https://www.otexts.org/fpp>).
- Iacus S.M.* Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples. Springer, 2008. 286 p.
- Iacus S.M.* Option Pricing and Estimation of Financial Models with R. Wiley, 2011. 472 p.
- Implementing Reproducible Research* / ed. by V. Stodden, F. Leisch, R. D. Peng. Chapman, Hall/CRC, 2014. 448 p.
- Interval-Censored Time-to-Event Data: Methods and Applications* / ed. by D.-G. Chen, J. Sun, K. E. Peace. Chapman, Hall/CRC, 2012. 426 p.
- Introduction to R for Quantitative Finance* / G. Daróczy [et al.]. Packt Publishing, 2013. 164 p.
- James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R.* An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R. Springer, 2013. 426 p. [PDF](#)
- Janacek G.* Unlock the Secrets of R. 2007. 72 p.
- Janert P.K.* Data Analysis with Open Source Tools. O'Reilly Media, 2010. 540 p.
- Jank W.* Business Analytics for Managers. Springer, 2011. 189 p.
- Jockers M.L.* Text Analysis with R for Students of Literature. Springer, 2014. 199 p.
- Johnson P.E.* R tips. Revival 2014! 2014. 72 p.
- Jones O., Maillardet R., Robinson A.P.* Introduction to Scientific Programming and Simulation using R. Chapman, Hall/CRC, 2009. 472 p.
- Jonge E. de, Loo M. van der.* An introduction to data cleaning with R. Statistics Netherlands, 2013. 53 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Jureckova J., Picek J.* Robust Statistical Methods with R. Chapman, Hall/CRC, 2005. 216 p.
- Kaltenbach H.-M.* A Concise Guide to Statistics. Springer, 2011. 111 p.
- Karian Z.A., Dudewicz E.J.* Handbook of Fitting Statistical Distributions with R. Chapman, Hall/CRC, 2011.
- Kateri M.* Contingency Table Analysis: Methods and Implementation Using R. Springer, 2014. 315 p.
- Keele L.* Semiparametric Regression for the Social Sciences. Wiley, 2008. 230 p.
- Kenett R., Salini S.* Modern Analysis of Customer Surveys: with Applications using R. Wiley, 2012. 524 p.
- Kenett R., Zacks S.* Modern Industrial Statistics: with applications in R, MINITAB and JMP. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley, 2014. 586 p.
- Kerns G.J.* Introduction to Probability and Statistics Using R. G. Jay Kerns, 2010. 396 p.
- Kleiber C., Zeileis A.* Applied Econometrics with R. Springer, 2008. 222 p.
- Kleinman K., Horton N.J.* SAS and R: Data Management, Statistical Analysis and Graphics. 2<sup>nd</sup> ed. Chapman, Hall/CRC, 2014. 425 p.
- Klemelä J.* Smoothing of Multivariate Data: Density Estimation and Visualization. Wiley, 2009. 603 p.
- Klemelä J.* Multivariate Nonparametric Regression and Visualization: With R and Applications to Finance. Wiley, 2014. 396 p.
- Knoblauch K., Maloney L.T.* Modeling Psychophysical Data in R. Springer, 2012. 367 p.
- Kolaczyk E.D., Csárdi G.* Statistical Analysis of Network Data with R. Springer, 2014. 207 p.
- Krause A., Olson M.* The Basics of S-PLUS. 4th ed. Springer, 2005. 455 p.
- Krijnen W.* Applied Statistics for Bioinformatics Using R. Hanze University, 2009. 278 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Kruschke J.K.* Doing Bayesian Data Analysis: A Tutorial Introduction with R and BUGS. Academic Press, 2010. 542 p.

- Kuhn M., Johnson K.* Applied Predictive Modeling. Springer, 2013. 600 p.
- Kuhnert P.M., Venables W.N.* An Introduction to R: Software for Statistical Modelling & Computing. CSIRO Mathematical, Information Sciences, Australia, 2005. 364 p. ([PDF](#) с исходными данными и скриптами на сайте CRAN).
- Lamigueiro O.P.* Displaying Time Series, Spatial, and Space-Time Data with R. Chapman, Hall/CRC, 2014. 206 p.
- Lantz B.* Machine Learning with R. Packt Publishing, 2013. 396 p.
- Lavine M.L.* Introduction to Statistical Thought. 2013. 463 p. [PDF](#)
- Lawrence M.F., Verzani J.* Programming Graphical User Interfaces in R. Chapman, Hall/CRC, 2012. 479 p.
- Ledolter J.* Data Mining and Business Analytics with R. Wiley, 2013.
- Leipzig J., Li X.* Data Mashups in R. O'Reilly Media, 2011. 40 p.
- Li Y., Baron J.* Behavioral Research Data Analysis with R. Springer, 2012. 245 p.
- Lindsey J. K.* Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time. Cambridge University Press, 2004. 354 p.
- Link W.A., Barker R.J.* Bayesian Inference: with ecological applications. Elsevier/Academic , Boston, MA. 2010. 339 p.
- Loo M.P. van der, Jonge E. de.* Learning RStudio for R Statistical Computing. Packt Publishing, 2012. 126 p.
- Lovelace R., Cheshire J.* Introduction to visualising spatial data in R. 2014. 24 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Lumley T.* Complex Surveys: A Guide to Analysis Using R. Wiley, 2010. 297 p.
- Lumley T.* R Fundamentals and Programming Techniques. R Core Development Team. 2006. 225 p. ([PDF](#) на сайте автора).
- MacFarland T. W.* Two-Way Analysis of Variance: Statistical Tests and Graphics Using R. Springer, 2012. 150 p.
- MacFarland T.W.* Introduction to Data Analysis and Graphical Presentation in Biostatistics with R: Statistics in the Large. Springer, 2014. 167 p.
- Mahajan S.* Street-Fighting Mathematics: The Art of Educated Guessing and Opportunistic Problem Solving. The MIT Press, 2010. 152 p.
- Maindonald J.H.* Using R for Data Analysis and Graphics. Introduction, Code and Commentary. Australian National University, 2008. 88 p. ([PDF](#), данные и скрипты доступны на [сайте автора](#)).
- Marin J.-M., Robert C.* Bayesian Essentials with R. 2nd ed. Springer, 2014. 312 p.
- Marques de Sá J.* Applied Statistics Using SPSS, STATISTICA, MATLAB and R. Springer, 2007. 520 p.
- Martinussen T., Scheike T.H.* Dynamic Regression Models for Survival Data. Springer, 2006. 470 p.
- Mathur S.K.* Statistical Bioinformatics with R. Academic Press, 2010. 336 p.
- Matloff N.* The Art of R Programming: A Tour of Statistical Software Design. No Starch Press, 2011. 400 p.
- Matthiopoulos J.* How to be a Quantitative Ecologist: The 'A to R' of Green Mathematics and Statistics. Wiley, 2011. 490 p.
- McCallum Q.E., Weston S.* Parallel R. O'Reilly Media, 2011. 126 p.
- McCarthy M.A.* Bayesian Methods for Ecology. Cambridge University Press, 2007. 312 p.
- Micheaux P.L. de, Drouilhet R., Liquet B.* The R Software: Fundamentals of Programming and Statistical Analysis. Springer, 2013. 628 p.
- Millard S.P.* EnvStats: An R Package for Environmental Statistics. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2013. 305 p.
- Millard S.P., Neerchal N.K., Dixon P.* Environmental Statistics with S-PLUS. CRC Press, 2000. 848 p.

- Mirman D.* Growth Curve Analysis and Visualization Using R. Chapman, Hall/CRC, 2014. 188 p.
- Mittal H.V.* R Graphs Cookbook. Packt Publishing, 2011. 272 p.
- Modeling Dose-Response* Microarray Data in Early Drug Development Experiments Using R: Order-Restricted Analysis of Microarray Data / ed. by D. Lin [et al.]. Springer, 2012. 282 p.
- Modern Actuarial Risk Theory: Using R* / R. Kaas [et al.]. 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2008. 394 p.
- Muenchen R.A.* R for SAS and SPSS Users. 2nd ed. Springer, 2011. 715 p.
- Muenchen R.A., Hilbe J.M.* R for Stata Users. Springer, 2010. 542 p.
- Multiple testing* problems in pharmaceutical statistics / ed. by A. Dmitrienko [et al.]. Chapman & Hall/CRC, 2010. 301 p.
- Murrell P.* R Graphics. Chapman, Hall/CRC, 2005. 322 p.
- Murtagh F.* Correspondence Analysis and Data Coding with Java and R. Chapman, Hall/CRC, 2005. 256 p.
- Myers W.L., Patil G.P.* Multivariate Methods of Representing Relations in R for Prioritization Purposes. Springer, 2012. 304 p.
- Nagarajan R., Scutari M., Lebre S.* Bayesian Networks in R: with Applications in Systems Biology. Springer, 2013. 168 p.
- Nason G.P.* Wavelet Methods in Statistics with R. Springer, 2008. 268 p.
- Navarro D.J.* Learning Statistics with R. lulu.com, 2014. 562 p.
- Nolan D., Temple-Lang D.* XML and Web Technologies for Data Sciences with R. Springer, 2014. 677 p.
- Nonparametric Hypothesis Testing: Rank and Permutation Methods with Applications in R* / S. Bonnini [et al.]. Wiley, 2014. 240 p.
- O’Gorman T.W.* Adaptive Tests of Significance Using Permutations of Residuals with R and SAS. Wiley, 2012. 364 p.
- Ohri A.* R for Business Analytics. Springer, 2013. 319 p.
- Oja H.* Multivariate Nonparametric Methods with R: An approach based on spatial signs and ranks. Springer, 2010. 244 p.
- Optimal Experimental Design with R* / D. Rasch [et al.]. Chapman, Hall/CRC, 2011. 345 p.
- Owen J.* The R Guide. University of Richmond, 2010. 61 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Pace L.* Beginning R: An Introduction to Statistical Programming. Apress, 2012. 336 p.
- Paradis E.* R for Beginners. Universite Montpellier, 2005. 76 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Paradis E.* Analysis of Phylogenetics and Evolution with R. 2nd ed. Springer, 2012. 404 p.
- Peng R.D., Dominici F.* Statistical Methods for Environmental Epidemiology with R: A Case Study in Air Pollution and Health. Springer, 2008. 154 p.
- Petris G., Petrone S., Campagnoli P.* Dynamic Linear Models with R. Springer, 2009. 252 p.
- Pfaff B.* Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R. 2nd ed. Springer, 2008. 190 p.
- Pfaff B.* Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R. Wiley, 2013. 374 p.
- Pinheiro J.C., Bates D.M.* Mixed-Effects Models in S and S-PLUS. Springer, 2000. 530 p.
- Plant R.E.* Spatial Data Analysis in Ecology and Agriculture Using R. CRC Press, 2012. 637 p.
- Prajapati V.* Big Data Analytics with R and Hadoop. Packt Publishing, 2013. 238 p.
- Pruscha H.* Statistical Analysis of Climate Series: Analyzing, Plotting, Modeling, and Predicting with R. Springer, 2013. 200 p.
- Quick J.M.* Statistical Analysis with R Beginner’s Guide. Packt Publishing, 2010. 300 p.
- Ramsay J., Hooker G., Graves S.* Functional Data Analysis with R and MATLAB. Springer, 2009. 213 p.
- Rayner J.C., Thas O., Best D.J.* Smooth Tests of Goodness of Fit: Using R. 2nd ed. Wiley, 2009. 290 p.
- Ritz C., Streibig J.C., [et al.]* Nonlinear Regression with R. Springer, 2008. 148 p.



- Rizopoulos D.* Joint Models for Longitudinal and Time-to-Event Data: With Applications in R. Chapman, Hall/CRC, 2012. 275 p.
- Robert C., Casella G.* Introducing Monte Carlo Methods with R. Springer, 2010. 284 p.
- Robinson A.P.* Icebreakers. University of Melbourne, 2010. 159 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Robinson A.P., Hamann J.D.* Forest Analytics with R: An Introduction. Springer, 2011. 354 p.
- Robinson R., White H.* Elementary Statistics. 2014. 404 p.
- Rosenbaum P.R.* Design of Observational Studies. Springer, 2010. 385 p.
- Rossiter D.G.* Introduction to the R Project for Statistical Computing for Use at the ITC. University of Twente, 2012. 141 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Rossiter D.G.* An example of statistical data analysis using the R environment for statistical computing. 2014. 144 p.
- Rousseeuw P.J., Ruts I., Tukey J.W.* The bagplot: a bivariate boxplot // The American Statistician. 1999. V. 53, № 4. P. 382–387.
- Ruppert D.* Statistics and Data Analysis for Financial Engineering. Springer, 2011. 638 p.
- Sanchez G.* Handling and Processing Strings in R. 2013. 113 p.
- Santos-Fernández E.* Multivariate Statistical Quality Control Using R. Springer, 2012. 127 p.
- Schafer J. L.* Analysis of Incomplete Multivariate Data. Chapman, Hall/CRC, 1997. 444 p.
- Schumacker R., Tomek S.* Understanding Statistics Using R. Springer, 2013. 296 p.
- Schumacker R. A., Akers A.* Understanding Statistical Concepts Using S-plus. Lawrence Erlbaum Associates, 2001. 384 p.
- Seefeld K., Linder E.* Statistics Using R with Biological Examples. University of New Hampshire, Durham, 2007. 324 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Selvin S.* Modern Applied Biostatistical Methods: Using S-Plus. Oxford University Press, 1998. 476 p.
- Shahbaba B.* Biostatistics with R: An Introduction to Statistics Through Biological Data. Springer, 2012. 368 p.
- Shalizi C.* Advanced Data Analysis from an Elementary Point of View. Springer, 2013. 586 p. ([PDF](#) на сайте автора).
- Sheather S.* A Modern Approach to Regression with R. Springer, 2009. 393 p.
- Shumway R.H., Stoffer D.S.* Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples. 3<sup>rd</sup> ed. Springer, 2011. 604 p.
- Siegmund D., Yakir B.* The Statistics of Gene Mapping. Springer, 2007. 337 p.
- Sinha P.P.* Bioinformatics with R Cookbook. Packt Publishing, 2014. 340 p.
- Soetaert K., Cash J., Mazzia F.* Solving Differential Equations in R. Springer, 2012. 248 p.
- Soetaert K., Herman P. M. J.* A Practical Guide to Ecological Modelling: Using R as a Simulation Platform. Springer, 2009. 372 p.
- Spector P.* Data Manipulation with R. Springer, 2008. 152 p.
- Stanton J.M.* Introduction to Data Science. 2013. 182 p.
- Statistical Data Analysis Explained: Applied Environmental Statistics with R / C. Reimann [et al.].* Wiley, 2008. 359 p.
- Statistical Methods for Hospital Monitoring with R / A. Morton [et al.].* Wiley, 2013. 426 p.
- Statistical Tools for Nonlinear Regression: A Practical Guide With S-PLUS and R Examples / S. Huet [et al.].* 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2003. 249 p.
- Statistics in Psychology Using R and SPSS / D. Rasch, K. Kubinger, T. Yanagida, [et al.].* Wiley, 2011. 568 p.
- Steyerberg E.W.* Clinical Prediction Models: A Practical Approach to Development, Validation, and Updating. Springer, 2009. 500 p.
- Stowell S.* Using R for Statistics. Apress, 2014. 232 p.
- Suess E.A., Trumbo B.E.* Introduction to Probability Simulation and Gibbs Sampling with R. Springer, 2010. 307 p.
- Shumway R., Stoffer D.* Time Series Analysis and Its Applications. With R Examples. 3<sup>rd</sup> ed. Springer, 2010. 610 p.

Swenson N.G. Functional and Phylogenetic Ecology in R. Springer, 2014. 212 p.

Takezawa K. Introduction to Nonparametric Regression. Wiley, 2005. 568 p.

Takezawa K. Guidebook to R Graphics Using Microsoft® Windows. Wiley, 2013. 272 p.

Takezawa K. Learning Regression Analysis by Simulation. Springer, 2014. 310 p.

Tattar P.N. R Statistical Application Development by Example Beginner's Guide. Packt Publishing, 2013. 344 p.

Teetor P. 25 Recipes for Getting Started with R: Excerpts from the R Cookbook. O'Reilly Media, 2011. 62 p.

Teetor P. R Cookbook. O'Reilly Media, 2011. 438 p.

The Statistical Sleuth in R: A Course in Methods of Data Analysis / L. Loi [et al.]. 2013. 153 p.

Thiem A., Duşa A. Qualitative Comparative Analysis with R: A User S Guide. Springer, 2013. 99 p.

Tollefson M. R Quick Syntax Reference. Apress, 2014. 209 p.

Torgo L. Data Mining with R: Learning with Case Studies. Chapman, Hall/CRC, 2010. 305 p.

Trevino V., Falciani F. GALGO. An R package for Genetic Algorithm Searches. University of Birmingham, 2006. 92 p.

Trosset M.W. An Introduction to Statistical Inference and Its Applications with R. Chapman, Hall/CRC, 2009. 496 p.

Tsay R.S. An Introduction to Analysis of Financial Data with R. Wiley, 2012. 416 p.

Tsay R.S. Multivariate Time Series Analysis: With R and Financial Applications. Wiley, 2014. 522 p.

Tufféry S. Data Mining and Statistics for Decision Making. Wiley, 2011. 704 p.

Valiente G. Combinatorial Pattern Matching Algorithms in Computational Biology Using Perl and R. Chapman, Hall/CRC, 2009. 368 p.

Varmuza K., Filzmoser P. Introduction to Multivariate Statistical Analysis in Chemometrics. CRC Press, 2009. 336 p.

Vasishth S., Broe M. The Foundations of Statistics: A Simulation-based Approach. Springer, 2010. 195 p.

Venables W.N., Ripley B.D. S programming. Springer, 2000. 265 p.

Verzani J. Using R for Introductory Statistics. Chapman, Hall/CRC, 2004. 432 p.

Verzani J. Getting Started with RStudio. O'Reilly Media, 2011. 98 p.

Verzani J. simpleR - Using R for Introductory Statistics. R Development Core Team, 2002. 114 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).

Voss J. An Introduction to Statistical Computing: A Simulation-based Approach. Wiley, 2013. 396 p.

Wehrens R. Chemometrics with R: Multivariate Data Analysis in the Natural Sciences and Life Sciences. Springer, 2011. 285 p.

Wickham H. Practical tools for exploring data and models. 2008. 122 p.

Wickham H. ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis. Springer, 2009. 213 p.

Wienke A. Frailty Models in Survival Analysis. Chapman, Hall/CRC, 2010. 312 p.

Wilcox R.R. Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing. 3<sup>rd</sup> ed. Academic Press, 2012. 690 p.

Wildi O. Data Analysis in Vegetation Ecology. 2nd ed. Wiley, 2013. 315 p.

Willekens F. Multistate Analysis of Life Histories with R. Springer, 2014. 308 p.

Williams G. Data Mining with Rattle and R: The Art of Excavating Data for Knowledge Discovery. Springer, 2011. 395 p.

Wright D.B., London K. Modern Regression Techniques Using R: A Practical Guide. SAGE Publications Ltd, 2009. 216 p.

Wünschiers R. Computational Biology: A Practical Introduction to BioData Processing and Analysis with Linux, MySQL, and R. 2nd ed. Springer, 2013. 449 p.

Yakir B. Introduction to Statistical Thinking. The Hebrew University, 2011. 314 p.

- Yan X., Su X. G.* Linear Regression Analysis: Theory and Computing. World Scientific Publishing Company, 2009. 348 p.
- Zhao Y. R.* and Data Mining: Examples and Case Studies. Academic Press, 2012. 256 p. ([PDF](#) на сайте CRAN).
- Zhao Y., Cen Y.* Data Mining Applications with R. Academic Press, 2013. 514 p.
- Zivot E., Wang J.* Modeling Financial Time Series with S-PLUS®. 2nd ed. Springer, 2006. 998 p.
- Zucchini W., MacDonald I. L.* Hidden Markov Models for Time Series: An Introduction Using R. Chapman, Hall/CRC, 2009. 278 p.
- Zumel N., Mount J.* Practical Data Science with R. Manning Publications, 2014. 416 p.
- Zuur A. F., Ieno E. N., Meesters E.* A Beginner's Guide to R. Springer, 2009. 220 p.
- Zuur A. F., Ieno E. N., Smith G.M.* Analysing Ecological Data. Springer, 2007. 672 p.



## Основные Интернет-ресурсы

### *Русскоязычные ресурсы:*

- <http://r-analytics.blogspot.com/> блог «Анализ и визуализация данных» С. Мастицкого;
- <http://molbiol.ru/forums/index.php?showtopic=102724> раздел в форуме «Биофизика и матметоды в биологии», где можно получить оперативную помощь по возникшим затруднениям;
- <http://r-statistics.livejournal.com/> разделы в «Живом журнале»;
- <http://alexwin1961.livejournal.com/tag/r> блог А. Виноградова;
- <http://gis-lab.info/forum/viewforum.php?f=31> ветка на форуме GIS-Lab.info;
- <http://vk.com/club8142131> открытая группа ВКонтакте;
- <http://www.algorithmist.ru/search/label/R> серия статей С. Едунова по реализации в R различных алгоритмов;
- <http://statinr.blogspot.de/> блог А. Дубасовой – использование статистики в лингвистике (с видео-уроками);
- <http://aakinshin.blogspot.ru/search/label/r> «Записки разработчика» А. Акиншина;
- <http://rrus.wordpress.com/> блог «R по-русски»
- [http://donbas-socproject.blogspot.com/search/label/учебник по R](http://donbas-socproject.blogspot.com/search/label/учебник%20по%20R) блог «странного ученого» М. Касьянчука;
- <http://chetvericov.ru/tag/r/> блог «аспиранта-психолога» А. Четверикова;
- <http://www.inp.nsk.su/~baldin/DataAnalysis/index.html> - материалы Е. Балдина;
- <http://www.linuxformat.ru/archive.phtml> архив журнала Linux Format (см. №№ 1-12 за 2008 г., №№ 2-5 за 2010 г.);
- <https://m7876.wiki.zoho.com/Introduction-to-R.html> «Введение в R» по-русски
- <http://habrahabr.ru/hub/r/> серия статей по применению R в трейдинге;
- <http://voliadis.ru/taxonomy/term/1> материалы Р. Габидуллина;
- [http://ru.wikibooks.org/wiki/Язык программирования R](http://ru.wikibooks.org/wiki/Язык_программирования_R) материал из Вики-учебника;
- <http://www.ibm.com/developerworks/ru/library/l-r1/index.html> перевод трех статей Метца и Хантинга «Статистическое программирование в R»;
- <http://psylab.info/R:Литература> большой сборник библиографических материалов на сайте «Энциклопедия психодиагностики Psylab.info»;
- <http://www.twirpx.com/library/comp/r/> раздел с материалами по R в библиотеке для студентов и аспирантов,
- <http://www.ievbras.ru/ecostat/Kiril/R/> раздел сайта В. Шитикова, содержащий комплект файлов к настоящему пособию.

Англоязычные ресурсы:

- <http://www.r-project.org/> основной сайт «*The R Project for Statistical Computing*»;
- <http://cran.r-project.org/> ресурсы для свободного распространения программных модулей и других материалов по R;
- <http://journal.r-project.org/archive/> архив выпусков постоянного журнала *The R Journal*
- <http://www.inside-r.org/> справочные материалы и коллекция других ресурсов;
- <http://www.statmethods.net> *Quick-R* – прекрасный справочник по использованию R;
- <http://www.cookbook-r.com/> *Cookbook for R* – руководство для начинающих;
- <http://www.r-bloggers.com/> *R-bloggers* – агрегатор сообщений из блогов, посвященных R;
- <http://stackoverflow.com/questions/tagged/r> *Stackoverflow* – форум помощи для пользователей R;
- <http://stats.stackexchange.com/> *Cross Validated* – форум помощи для пользователей R;
- <http://r.789695.n4.nabble.com/> форум помощи по проблемам R;
- <http://rtutorialseries.blogspot.ru/> *R Tutorial Series* by J. Quick – большой сборник обучающих материалов;
- [http://zoonek2.free.fr/UNIX/48\\_R/all.html](http://zoonek2.free.fr/UNIX/48_R/all.html) полный курс лекций по языку и функциям R (V. Zoonekynd);
- <http://statistics.ats.ucla.edu/stat/r/> ресурсы Университета UCLA по обучению R;
- <http://thebiobucket.blogspot.ru/> блог К. Cichini с примерами использования R;
- [http://www.colorado.edu/geography/class\\_homepages/geog\\_4023\\_s11/lectures.html](http://www.colorado.edu/geography/class_homepages/geog_4023_s11/lectures.html) курс лекций по количественным методам в географии (E. Root);
- <http://strimmerlab.org/software.html> сайт Лондонского колледжа с описанием пакетов биостатистики (K.Strimmer)
- <http://ecology.msu.montana.edu/labdsv/R/> лабораторные работы по статистике в R для студентов-экологов;
- <http://www.bio.umontreal.ca/legendre/indexEn.html> страница П. Лежандра, содержащая много скриптов и функций R.