

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3-1

ОБЧИСЛЕННЯ РІВНЯ ПІДГОТОВЛЕНОСТІ ДОСЛІДЖУВАНОВОГО θ_i ТА РІВНЯ СКЛАДНОСТІ ЗАВДАННЯ v_j ІЗ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ

Мета: оволодіти процедурою обчислення рівня підготовленості і рівня складності завдання

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Розглянемо процедуру обчислення θ_j та v_j за емпіричними даними. В якості вихідних даних візьмемо бінарну матрицю з таблиці 1. Подальші розрахунки будемо виконувати згідно М. Челишковой [1] (лаб. 4).

Таблиця 1. Редукована бінарна матриця

№	нове	1	2	3	4	5	6	7	8		
нове	старі	7	9	5	1	3	6	2	4	X_j	X_j^2
1	11	1	1	1	1	1	1	1	0	7	49
2	8	1	1	0	1	1	1	0	1	6	36
3	10	1	1	1	1	1	1	0	0	6	36
4	6	1	1	0	1	1	0	1	0	5	25
5	1	1	1	1	0	1	0	0	0	4	16
6	4	1	1	1	0	0	0	0	0	3	9
7	2	0	1	1	0	0	0	0	0	2	4
8	5	0	0	1	1	0	0	0	0	2	4
9	3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	R_j	7	7	6	5	5	4	2	1	37	181
	H_j	3	3	4	5	5	6	8	9		
	P_j	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,2	0,1		
	q_j	0,3	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,8	0,9		
	$p_j q_j$	0,21	0,21	0,24	0,25	0,25	0,24	0,16	0,09		

Крок 1. Спочатку необхідно обчислити частки правильних p_j і неправильних $q_j=1-p_j$ відповідей досліджуваних.

$$p_j = X_j / M$$

де X_j – індивідуальний бал досліджуваного, M – кількість завдань у тесті.

Наприклад для 2-го досліджуваного маємо:

$$p_2 = \frac{6}{8} = 0,75$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Далі обчислюємо початкові значення рівня підготовленості досліджуваних за формулою:

$$\Theta_j = \ln \frac{p_j}{q_j}.$$

Для 2-го досліджуваного маємо:

$$\Theta_2^0 = \ln \frac{0,75}{0,25} = 1,099.$$

Аналогічні розрахунки виконуються для всіх досліджуваних з таблиці 1 заносяться в таблицю 2.

Таблиця 2. Початкові значення рівня підготовленості досліджуваних

i	X_i	p_i	q_i	q_i^{Θ}	$(q_i^{\Theta})^2$
1	7	0,875	0,125	1,946	3,786
2	6	0,750	0,250	1,099	1,207
3	6	0,750	0,250	1,099	1,207
4	6	0,750	0,250	1,099	1,207
5	4	0,500	0,500	0,000	0
6	3	0,375	0,625	-0,511	0,261
7	2	0,250	0,750	-1,099	1,207
8	2	0,250	0,750	-1,099	1,207
9	1	0,125	0,875	-1,946	3,786
10	1	0,125	0,875	-1,946	3,786
				$\sum (q_i^{\Theta})^2 = 17,655$	

Далі обчислюємо початкове значення складності завдань δ_j :

$$\beta_j^0 = \ln \frac{q_j}{p_j}.$$

У цьому випадку j змінює значення від 1 до M , де M – кількість досліджуваних. У якості прикладу розрахуємо початкове значення складності 2-го завдання. Величини p_j та q_j розраховані і наведені у таблиці 1.

$$\beta_2^0 = \ln \frac{q_2}{p_2} = \ln \frac{0,3}{0,7} = -0,847.$$

Розрахунки для всіх 8-ми завдань зведені в таблицю 3.

Таблиця 3. Початкові значення складності завдань.

j	R_j	p_i	q_i	b_j^0	$(b_j^0)^2$
1	7	0,700	0,300	-0,847	0,718
2	7	0,700	0,300	-0,847	0,718
3	6	0,600	0,400	-0,405	0,164
4	5	0,500	0,500	0,000	0
5	5	0,500	0,500	0,000	0
6	4	0,400	0,600	0,405	0,164
7	2	0,200	0,800	1,386	1,922
8	1	0,100	0,900	2,197	4,828
				$\bar{a} (b_j^0)^2 =$	8,514

Тепер ми можемо обчислити середні значення рівня підготовленості досліджуваних та складності завдань.

$$\bar{\Theta} = \frac{\sum_{i=1}^N \Theta^i}{N} = \frac{1,946 + 1,099 + 1,099 + 0 - 0,511 - 1,099 - 1,946 - 1,946}{10} = -0,136$$

$$\bar{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N \beta^i}{M} = \frac{-0,847 - 0,847 - 0,405 + 0 + 0 + 0,405 + 1,386 + 2,197}{10} = +0,236$$

В таблицях 2 та 3 ми маємо значення параметрів на різних інтервальних шкалах. Нам потрібно звести їх у єдину шкалу стандартних оцінок. Для цього необхідно обчислити дисперсії S_{Θ} і S_{β} , використовуючи данні із таблиць 1 та 2.

$$S_{\Theta} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Theta^i)^2 - N(\bar{\Theta})^2}{N-1} = \frac{17,655 - 10 \cdot (-0,136)^2}{10-1} = 1,941$$

$$S_{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^M (\beta_j^0)^2 - M(\bar{\beta})^2}{M-1} = \frac{8,514 - 8 \cdot (0,236)^2}{8-1} = 1,153$$

Далі обчислюємо кутові коефіцієнти [2].

$$\alpha_{\theta} = \sqrt{\frac{1 + S_{\theta} / 2,89}{1 - S_{\theta} S_{\beta} / 8,35}} = \sqrt{\frac{1 + 1,153 / 2,89}{1 - 1,941 \cdot 1,153 / 8,35}} = 1,911$$

$$\alpha_{\beta} = \sqrt{\frac{1 + S_{\beta} / 2,89}{1 - S_{\theta} S_{\beta} / 8,35}} = \sqrt{\frac{1 + 1,941 / 2,89}{1 - 1,941 \cdot 1,153 / 8,35}} = 2,284$$

Нарешті, ми можемо записати оцінки параметрів θ і β на єдиній інтервальній шкалі [10].

$$\theta_i = \alpha_{\theta} \theta_i^0 + \beta,$$

$$\beta_j = \alpha_{\beta} \beta_j^0 + \bar{\theta}.$$

Для нашого прикладу отримуємо

$$\theta_i = 1,911 \cdot \theta_i^0 + 0,236$$

$$\beta_j = 2,284 \cdot \beta_j^0 - 0,136$$

Всі результати приведені в таблиці 4 і 5 (другий стовпець).

Таблиця 4. Розрахункові параметри для рівня підготовленості досліджуваних

i	θ_i	$S_{\theta}(\theta_i)$	θ_i'
1	3,955	2,043	2,436
2	2,335	1,560	1,365
3	2,335	1,560	1,365
4	2,335	1,560	0,523
5	0,236	1,351	-0,157
6	-0,740	1,396	-0,781
7	-1,863	1,560	-1,431
8	-1,863	1,560	-1,431
9	-3,483	2,043	-2,217
10	-3,483	2,043	-2,217

Таблиця 5. Розрахункові параметри для рівня складності завдань.

j	β_j	$S_E(\beta_j)$	β_j'
1	-2,071	1,576	-1,545
2	-2,071	1,576	-1,669
3	-1,062	1,474	-0,603
4	-0,136	1,445	-0,502
5	-0,136	1,445	-0,256
6	0,790	1,474	0,102
7	3,030	1,806	1,854
8	4,882	2,408	2,620

Із таблиці 4 випливає, що

$$\Sigma_j = \sum_{j=1}^N \beta_j = +3,226$$

Тобто, завдань з додатніми β_j більше, ніж з від'ємними. Даний тест не збалансований, він містить більше складних завдань ніж легких.

Рекомендується прагнути до того, щоб Σ_j було близьким до нуля.

Залишається обчислити стандартні похибки вимірювання $S_E(\Theta_j)$ та $S_E(\beta_j)$ для Θ_j і β_j .

$$S_E(\Theta_j) = \frac{a_{\Theta}}{\sqrt{p_j(M - X_j)}} = \frac{a_{\Theta}}{\sqrt{M p_j(1 - p_j)}} = \frac{a_{\Theta}}{\sqrt{M p_j q_j}}$$

$$S_E(\beta_j) = \frac{a_{\beta}}{\sqrt{p_j(N - R_j)}} = \frac{a_{\beta}}{\sqrt{N p_j(1 - p_j)}} = \frac{a_{\beta}}{\sqrt{N p_j q_j}}$$

Наприклад для 1-го досліджуваного отримаємо:

$$S_E(\Theta_1) = \frac{1,911}{\sqrt{8 \cdot 0,875 \cdot 0,125}} = 2,043$$

Для першого завдання стандартна помилка дорівнює:

$$S_E(\beta_1) = \frac{2,284}{\sqrt{10 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = 1,576$$

Виявлені значення стандартних помилок наведені у таблицях 4 і 5.

Приклад виконання завдання у файлі [Lab_1.xls](#)

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1. Згенерувати матрицю тестових результатів згідно варіанту

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Кількість респодентів	10	15	20	25	30	35	24	18	16	14	26	28	12	40
Кількість завдань	30	25	20	20	15	10	20	22	30	30	20	24	30	10

У якості первинних балів використати дані з виконуваних у минулому семестрі досліджень тестування або використати дані отримані при проведенні тесту (або навіть власноручно) згенерувати таблицю первинних балів відомими способами.

2. Виконати розрахунки за запропонованою схемою.
3. Проаналізувати отримані результати. Які висновки можна зробити щодо набору завдань та учасників тестування?
4. Підготувати звіт виконаної лабораторної роботи, який має містити титульну сторінку з відомостями про виконану роботу, а також знімки екрану всіх кроків процесу виконання даної роботи.