

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4-1

РОЗРАХУНОК ЛАТЕНТНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗА МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ

Мета: здійснити розрахунок оцінок латентних параметрів методом максимальної вірогідності.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Значення обчислених параметрів θ_i і β_j можуть змінюватися на інших вибірках досліджуваних. При великих об'ємах вибірки можна обчислити значення θ_i і β_j , до яких в результаті ітераційної процедури, будуть прямувати θ_i і β_j . Зазвичай ітераційна процедура виконується методом максимальної вірогідності Р.Фішера.

Можно показати, що функція максимальної вірогідності має вигляд

$$L(\alpha_{ij}, \theta_i, \beta_j) = \exp \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} (\theta_i - \beta_j) \right] \cdot \left[\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M (1 + \exp(\theta_i - \beta_j)) \right]^{-1}$$

де α_{ij} - елементи бінарної матриці результатів тестування.

У якості оцінок найбільшої вірогідності θ_i і β_j приймають такі значення θ_i і β_j , при яких функція вірогідності досягає глобального максимуму.

Оскільки функції L і $\ln L$ досягають максимуму при одних і тих значеннях своїх аргументів, то зручно шукати максимум функції $\ln L$, що має назву *логарифмічної функції вірогідності*.

$$\ln L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} \theta_i - \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \beta_j - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \ln [1 + \exp(\theta_i - \beta_j)]$$

Для знаходження максимуму логарифмічної функції вірогідності потрібно знайти частинні похідні функції за кожним її аргументом і прирівняти до нуля.

Ми отримали систему рівнянь вірогідності. Ця система рівнянь розв'язується в ітераційному циклі шляхов послідовної підстановки знайдених значень аргументів у якості вихідних.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} - \sum_{i=1}^N P_{ij} = \mathbf{c}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} = -\sum_{i=1}^N \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^M P_{ij} = \mathbf{0}$$

Цикл припиняється, коли різниця в аргументах не стане менше наперед заданої величини. Система рівнянь вірогідності нелінійна і для організації ітераційного циклу потребує використання обчислювальної техніки.

Результати обчислень для нашого прикладу наведені в таблицях 1 і 2 (четвертий стовпець). Видно, що дані у другому і четвертому стовпчиках значно відрізняються. Це пов'язано з тим, що наша модельна вибірка неприпустимо мала. При більших вибірках ця відмінність невелика.

Таблиця 1. Обчислення підготовленості досліджуваних методом максимальної вірогідності

i	θ_i	$S_{\theta_i}(\theta_i)$	θ_i^*
1	3,955	2,043	2,436
2	2,335	1,560	1,365
3	2,335	1,560	1,365
4	2,335	1,560	0,523
5	0,236	1,351	-0,157
6	-0,740	1,396	-0,781
7	-1,863	1,560	-1,431
8	-1,863	1,560	-1,431
9	-3,483	2,043	-2,217
10	-3,483	2,043	-2,217

Таблиця 2. Оцінка трудності (легкості) завдань методом максимальної вірогідності

J	β_j	$S_{\Sigma}(\beta_j)$	β_j'
1	-2,071	1,576	-1,545
2	-2,071	1,576	-1,669
3	-1,062	1,474	-0,603
4	-0,136	1,445	-0,502
5	-0,136	1,445	-0,256
6	0,790	1,474	0,102
7	3,030	1,806	1,854
8	4,882	2,408	2,620

Крім методу найбільшої вірогідності існують і інші методи знаходження стійких оцінок латентних параметрів. Зокрема, A.J.Stenner, B.D.Wright & J.M.Linacre запропонували нову ітераційну процедуру, час проходження якої, в середньому, в два рази менший, ніж у методі найбільшої вірогідності.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.

1. Робота є логічним продовженням попередньої. У якості первинних балів використати дані з виконуваних у минулому семестрі досліджень методами класичної теорії тестування або використати дані отримані при проведенні тесту (або навіть власноручно, або згідно варіанту). Виконати розрахунки латентних параметрів запропонованим методом та побудувати графіки характеристичних кривих завдань та характеристичні криві досліджуваних для тесту, який ми досліджуємо.

2. Проаналізувати отримані результати. Які висновки можна зробити щодо набору завдань та учасників тестування?

3. Підготувати звіт виконаної лабораторної роботи, який має містити титульну сторінку з відомостями про виконану роботу, а також знімки екрану всіх кроків процесу виконання даної роботи.