О.М. Станжицький
Є.Ю. Таран
Л.Д. Гординський

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О.М. Станжицький
Є.Ю. Таран
Л.Д. Гординський

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

КИЇВський УНІВЕРСИТЕТ 2006

Рецензенти:
чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. М.О. Перестюк,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Мелешко

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 1 від 12 вересня 2005 року)

Станжицький О.М., Таран Є.Ю., Гординський Л.Д.

Основи математичного моделювання **:** Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2006. – 96 с.

Викладено теоретичні основи та наведено основні категорії математичного моделювання, сформульовано його основні принципи. Велику увагу приділено теорії подібності. Розглянуто деякі приклади математичних моделей, побудова й дослідження яких ілюструє й доповнює теоретичні положення.

Для студентів механіко-математичного факультету.

ЧАСТИНА 1
ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. ВСТУП

Моделювання як метод дослідження відоме дуже давно – ще з часів Леонардо да Вінчі та Галілея. З розвитком виробничих сил суспільства воно знаходить усе нові й нові застосування. У сучасному світі моделювання стало складовою частиною не тільки експериментальних досліджень і конкретного технічного проектування – інженерної справи; завдяки моделюванню створюються абстрактні теорії, воно використовується в усіх галузях науки.

Математичне моделювання є найвищою формою моделювання. Воно сприяло розвитку науки й техніки індустріального суспільства, а з появою електронно-обчислювальних засобів обробки інформації привело до бурхливого розвитку сучасного – постіндустріального – суспільства.

Термін *модель* походить від латинських слів *modus, modulus,* які означають *міра, образ, спосіб.* У багатьох мовах світу вслід за латинською з'явились відповідні слова: *modello* – в італійській, *modelo* – в іспанській, *modelle* – у французькій, *model* – в англійській, *Modell* – у німецькій, *модель* – у російській та українській.

Початковий розвиток моделі отримали в будівельному мистецтві. Моделями стали називати речі, виготовлені на основі вимірів, які відтворювали існуючі об'єкти або були зразками для нових – ще не існуючих.

Надалі термін *модель* поступово набуває іншого змісту. Так, моделлю почали називати уявну або матеріальну структуру, що зображує у зручній формі стан деякої системи, процеси в якій мають бути вивчені. Разом з тим на певних етапах розвитку суспільства моделями стали вважати зображення систем, явищ або процесів, які вивчаються за допомогою систем, явищ або процесів іншої природи, іноді навіть уявних.

Найпростішими прикладами є добре відома модель ефіру, яка використовувалася для пояснення поширення електромагнітних коливань у просторі, та модель електричного струму, який моделювався рідиною, що тече провідником. Поняття моделі тут значною мірою збігається з поняттям аналогії, причому навіть з’явилась тенденція вважати аналогію загальним випадком моделі, що не зовсім вірно, оскільки аналогія відображає умовні, часто поверхові співвідношення.

1.2. ОСНОВНІ КАТЕГОРІЇ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання. Метод моделювання є методом дослідження властивостей певного об’єкта (оригіналу) за допомогою вивчення властивостей іншого об’єкта (моделі), який є зручнішим для дослідження і знаходиться у певній відповідності до першого об’єкта (оригіналу).

Моделювання – це побудова (або вибір) і вивчення такого об’єкта будь-якої природи (моделі), що здатний замінити собою досліджуваний об’єкт (оригінал) і вивчення якого дає нову інформацію про досліджуваний об’єкт.

Оригінал. У теорії моделювання *оригінал* – це об’єкт, певні властивості (аспекти) якого підлягають вивченню методом моделювання.

У загальному випадку поняття оригіналу має широку інтерпретацію. Воно охоплює об’єкти (системи, підсистеми, елементи), як реально існуючі, так і такі, що проектуються, а також явища, режими і процеси, які в них відбуваються.

Означимо коротко терміни, які зустрічаються у визначенні оригіналу. *Система* – це сукупність компонентів, яка розглядається як єдине ціле й організована для розв’язання певних функціональних задач так, що два будь-які її компоненти взаємозалежні завдяки деякому системостворюючому відношенню.

У системі можуть бути виділені *підсистеми* – відносно самостійні частини системи, які пов’язані функціонально між собою, а також *елементи* – компоненти системи, які приймаються за відповідної постановки задачі як неподільні.

Явище – це сукупність процесів, які є супутніми функціонуванню або поведінці системи й виявляються у вигляді змін стану або режимів цієї системи.

Режим – це стан системи, який визначається багатьма різними процесами й залежить як від власних параметрів системи, так і від параметрів збурюючих впливів.

Існують стаціонарні (усталені) і нестаціонарні (перехідні) режими.

Стаціонарний режим – це такий стан системи, за якого параметри режиму не змінюються в часі.

У протилежному випадку режим є *нестаціонарним* (перехідним).

Процес – це закономірна послідовна зміна деякої групи параметрів режиму, які називаються параметрами процесу.

Система також характеризується своїми параметрами. Наприклад, при дослідженні механічних явищ параметрами процесів є сили, швидкості, прискорення, а параметрами системи – маси тіл, коефіцієнти тертя, в'язкості рідин тощо.

Системи, у яких параметри є сталими на всьому інтервалі часу, протягом якого відбувається процес, що вивчається, називаються *лінійними*.

Системи, у яких хоча б один параметр змінюється як функція іншого або кількох інших параметрів, називаються *нелінійними*.

Модель. Це допоміжний об'єкт, який знаходиться у певній відповідності до об'єкта, що вивчається (оригіналу), і є більш зручним для дослідження оригіналу.

Відображаючи окремі особливості поведінки об'єкта-оригіналу, модель має деякі риси, ідентичні з оригіналом, і використовується для одержання такої інформації про оригінал, яку важко або неможливо одержати шляхом безпосереднього дослідження оригіналу.

Інтуїтивні уявлення про модель найчастіше асоціюються з технічними засобами, які застосовуються для створення відповідного „еквівалента" об'єкта дослідження, адекватного йому в тому чи іншому сенсі, але практично більш зручного для розв'язання поставлених задач.

Як приклад розглянемо моделі літака. Це матеріальні моделі, оскільки вони є фізичними, матеріальними об'єктами. Модель літака може бути натурною, тобто точною копією літака, яка від оригінала відрізняється тільки розмірами. Така модель, як правило, не може літати. Натурні моделі використовують, наприклад, як експонати на виставках, замість літака-оригіналу.

Інший тип моделі літака – це його функціональна модель (напр., так звана схематична). Вона не відображує зовнішності жодного літака. Такі моделі будують юні авіамоделісти у шкільних гуртках. Ці моделі використовуються для відтворення найважливішої функції літака – його здатності літати.

Проте поняття моделі принципово і суттєво ширше: функції моделі може виконувати не тільки спеціально створений експериментальний пристрій, але й явище, яке спостерігається, і символічне (знакове) описання оригіналу (текстове описання, математичне рівняння, креслення, схема тощо), і уявний образ. Тому у загальному випадку модель – це явище, технічний засіб, знакове утворення або інший умовний образ, що знаходиться у певній відповідності (схожості, подібності) до об'єкта-оригіналу, який вивчається. Модель може замінити оригінал у процесі дослідження, надаючи про нього необхідну інформацію.

Як приклад можна назвати математичну модель гармонійних коливань. З фізики відомо, що диференціальне рівняння вільного коливання пружинного маятника має вигляд

$$m\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\psi\xi(t)\,, \tag{1.1.1}$$

де $\xi(t)$ – відхилення центра мас пружинного маятника від положення рівноваги в момент часу t ; m – маса маятника; ψ – коефіцієнт пружності пружини; $\psi\xi(t)$ – сила, яка діє на маятник з боку пружини. Якщо позначимо

$$\frac{\psi}{m} = \omega_0{}^2, \quad \xi(t) = z,$$

то рівняння (1.1.1) можна переписати у загальній формі рівняння вільних коливань

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0{}^2 z = 0. \qquad (1.1.2)$$

Розглянемо вільні коливання в електричному контурі. Якщо позначити ємність конденсатора C, його заряд у момент часу t – $q(t)$, а індуктивність котушки – L, то рівняння коливань в електричному контурі набуде вигляду

$$L\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0. \qquad (1.1.3)$$

Введемо позначення

$$\frac{1}{LC} = \omega_0{}^2, \quad q(t) = z$$

і отримаємо знову рівняння (1.1.2).

Отже, рівняння (1.1.2), яке описує різні за природою коливальні процеси, є математичною моделлю гармонійних коливань. Ця модель, на відміну від попереднього прикладу моделей літака, є уявною. Оскільки при її побудові отримується звичайне диференціальне рівняння, то вона є математичною моделлю. Повна класифікація моделей і способи їх побудови будуть наведені далі.

Подібність. Наведене визначення моделі дозволяє сформулювати вимоги, які мають задовольняти методи моделювання.

1. Методи моделювання мають наділяти модель здатністю відображення реально існуючого об'єкта або об'єкта, що проектується.

2. Методи моделювання мають базуватися на певних правилах, які б дозволяли встановлювати взаємооднозначну відповідність між моделлю й оригіналом.

3. Методи моделювання мають забезпечити можливість створення моделі, яка, з одного боку, була б достатньо простою, а з іншого – могла б з необхідною повнотою й достовірністю відобразити ту частину властивостей оригіналу, яка є суттєвою саме в даному дослідженні і при даній постановці задачі.

Забезпечення третьої вимоги залежить великою мірою від майстерності й досвіду дослідника, а виконання першої і другої – забезпечується теорією подібності.

Поняття подібності було запозичено з геометрії. *Геометрична подібність* у найпростішому випадку подібності многокутників полягає в тому, що многокутники з однаковою кількістю сторін подібні, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони – пропорційні.

Тобто, якщо

$$l_{1_A}, l_{2_A}, ..., l_{n_A}; \alpha_{1_A}, \alpha_{2_A}, ..., \alpha_{n_A}$$

– сторони й кути n-кутника A,

$$l_{1_B}, l_{2_B}, ..., l_{n_B}; \alpha_{1_B}, \alpha_{2_B}, ..., \alpha_{n_B}$$

– сторони й кути n-кутника B, то мають виконуватися такі співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l_{1_A}}{l_{2_B}} = \frac{l_{2_A}}{l_{2_B}} = ... = \frac{l_{n_A}}{l_{n_B}} = m_l; \\ &\frac{\alpha_{1_A}}{\alpha_{1_B}} = \frac{\alpha_{2_A}}{\alpha_{2_B}} = ... = \frac{\alpha_{n_A}}{\alpha_{n_B}} = m_\alpha = 1. \end{aligned}\right\} \quad (1.1.4)$$

Подібність, таким чином, означає існування певних масштабних співвідношень типу (1.1.4) для параметрів відповідних елементів об’єктів, які зіставляються – многокутників. Ці співвідношення визначають правила переходу від параметрів одного з об’єктів до відповідних параметрів іншого. Масштабні коефіцієнти (масштаби) m_l і m_α, які характеризують пропорційність відповідних параметрів, у теорії подібності називають також *коефіцієнтами подібності.* У співвідношеннях (1.1.4) – це m_l і m_α. Умови вигляду (1.1.4) можна сформулювати інакше, якщо ввести систему прямокутних координат Oxy: при геометричній подібності всі координати x_{i_A}, y_{i_A} першого многокутника пропорційні відповідним координатам x_{i_B}, y_{i_B} другого многокутника

$$\frac{x_{i_A}}{x_{i_B}} = m_x, \frac{y_{i_A}}{y_{i_B}} = m_y, m_x = m_y \ , \quad (1.1.5)$$

де x_i і y_i – координати відповідних точок, які знаходяться на відрізках, що складають контури відповідного (A чи B) многокутника.

Для геометричної подібності у тривимірному просторі до співвідношень (1.1.5) додається

$$\frac{z_{i_A}}{z_{i_B}} = m_z \ , \quad (1.1.6)$$

і при цьому $m_x = m_y = m_z$.

Подальшим розвитком і узагальненням поняття геометричної подібності є поняття *афінної подібності*, при якій допускається нерівність масштабів по окремих координатах x, y, z. У цьому випадку геометричні фігури або тіла деформуються: круг перетворюється на еліпс, паралелепіпед з нерівними ребрами – на куб і т. д. Для відповідних точок $(x_{i_A}, y_{i_A}, z_{i_A})$ і $(x_{i_B}, y_{i_B}, z_{i_B})$ при афінній подібності замість (1.1.5) і (1.1.6) будуть справедливими співвідношення

$$\frac{x_{i_A}}{x_{i_B}} = m_x, \frac{y_{i_A}}{y_{i_B}} = m_y, \frac{z_{i_A}}{z_{i_B}} = m_z$$

і, наприклад, $m_x \neq m_y = m_z$.

Поняття подібності фізичних процесів (об’єктів) є розвитком поняття афінної подібності.

Нехай фізичний процес A характеризується певною функціональною залежністю

$$F(P_1, P_2, ..., P_n) = 0$$

між сукупністю параметрів $P_1, P_2, ..., P_n$, що характеризують процес і систему, у якій він відбувається.

Розглянемо цю функціональну залежність у n-вимірному узагальненому координатному просторі $x_1, x_2, ..., x_n$, у якому параметри $P_1, P_2, ..., P_n$ вимірюються у відповідних координатах $x_1, x_2, ..., x_n$.

Нехай у цій же системі відбувається ще один фізичний процес B, який описується функціональною залежністю $f(R_1, R_2, ..., R_n) = 0$. Він характеризується параметрами $R_1, R_2, ..., R_n$, відповідними до параметрів $P_1, P_2, ..., P_n$, які можуть відрізнятися від $R_1, R_2, ..., R_n$ лише своїми значеннями. Якщо при цьому всі відповідні параметри пропорційні, тобто

$$\frac{P_1}{R_1} = m_1, \frac{P_2}{R_2} = m_2, ..., \frac{P_n}{R_n} = m_n, \qquad (1.1.7)$$

то процеси A і B є подібними.

У зв’язку з тим, що певні параметри P_i, як і параметри R_i, можуть бути взаємозалежними, не всі масштабні коефіцієнти $m_1, m_2, ..., m_n$ подібних фізичних процесів можуть набувати незалежних значень. Це дає можливість упровадження деяких узагальнених характеристик подібних процесів – *критеріїв подібності*, які є функціями груп залежних і незалежних параметрів.

Масштабні коефіцієнти m_i у загальному випадку можуть бути чисельно різними для певних груп подібних процесів, що зіставляються. А критерії подібності набувають однакових значень для всіх подібних процесів у відповідних точках узагальненого координатного простору $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пропорційність параметрів (1.1.7) є частинним випадком подібності фізичних процесів. У загальному ж випадку під подібністю розуміють таку взаємооднозначну відповідність між процесами (об’єктами), що зіставляються, за якої правила переходу від параметрів, що характеризують один із процесів (об’єктів), до параметрів, які характеризують інший процес (об’єкт), відомі, а математичне описання процесів (об’єктів), якщо воно може бути отримане, допускає їх перетворення до однакового вигляду.

1.3. КЛАСИФІКАЦІЯ ВИДІВ ПОДІБНОСТІ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Абсолютна подібність. При встановленні такої подібності можуть порівнюватися між собою процеси в різних системах. Такі процеси є абсолютно подібними, якщо подібними є і процеси, і системи, у яких вони відбуваються. При цьому пропорційність (1.1.7) відповідних параметрів систем і процесів у них можлива при $m_i = \text{const}$, $m_i = \text{var}$, $m_i = g\left(P_{i-r}, P_{i+k}, ...\right)$ тощо.

Таким чином, оригінал і його модель будуть абсолютно подібними, якщо подібними є системи, з яких вони складаються, а також процеси, які в них відбуваються.

Якщо і оригінал, і модель є матеріальними об’єктами, то вони за абсолютної подібності мають бути структурно і фізично ідентичними; різними в них можуть бути лише значення параметрів, які характеризують елементи структури оригіналу й моделі.

Абсолютна подібність на практиці значною мірою є абстрактним поняттям. Повною мірою вона реалізується тільки при математичному моделюванні процесів. У цьому разі оригінал і модель описуються однаковими функціональними залежностями чи рівняннями, відповідні змінні в яких є пропорційними.

Практична подібність. При застосуванні теорії подібності в технічних задачах виникає необхідність введення *практичної подібності.* Розрізняють повну, неповну й наближену практичні подібності.

Повна практична подібність (або *повна подібність*) – це подібність протікання в часі й у просторі тільки тих процесів, які є суттєвими для даного дослідження і з достатньою повнотою характеризують явище, що вивчається, згідно з конкретною постановкою задачі дослідження.

Відповідно, якщо при моделюванні забезпечена повна практична подібність, то має місце *повне моделювання*.

Неповна практична подібність (або *неповна подібність*) – це подібність протікання процесів або тільки в часі, або тільки у просторі.

Цій подібності відповідає *неповне моделювання*.

Наближена практична подібність (або *наближена подібність*) характеризується існуванням спрощувальних припущень, які приводять до певної відмінності процесів, що розглядаються як подібні. Ця відмінність вважається допустимою на основі попередніх оцінок, які отримуються при додаткових дослідженнях. Цій подібності відповідає *наближене моделювання*. Воно, як і наближена подібність, також може бути як повним, так і неповним. Класифікацію типів моделювання наведено на рис. 1.1.1.

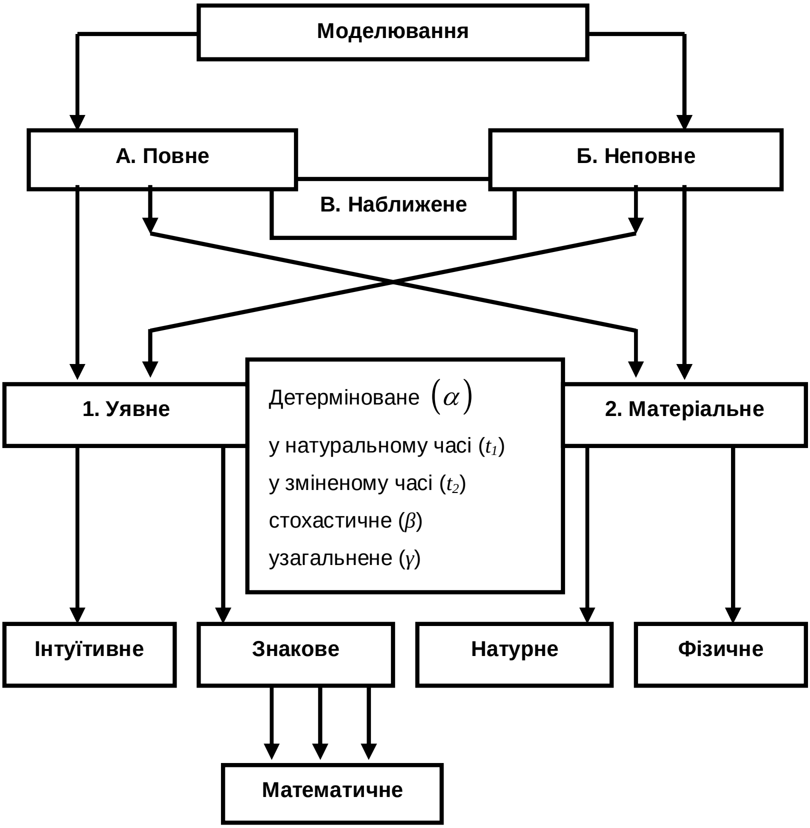


Рис. 1.1.1

Далі всі вказані типи моделювання диференціюються на *уявні* (1) і *матеріальні* (2) залежно від способу їх матеріальної реалізації.

Модель називають матеріальною, якщо вона відтворює основні фізичні, динамічні, геометричні й функціональні параметри об’єкта, що досліджується.

Частинним випадком матеріального моделювання є *натурне* моделювання. При такому моделюванні, залежно від його мети, модель у найпростішому випадку може тільки зовнішньо копіювати об’єкт, тобто бути лише його репрезентативною моделлю. Однак натурна модель може бути настільки складною й максимально наближеною до оригіналу, що за спеціально підібраних умов можна отримати корисну для дослідника інформацію як результат натурного експерименту з моделлю. Надалі виникають принаймні дві проблеми: як обробити отриману інформацію найбільш раціонально, щоб одержати максимальну кількість достовірних даних, і як потім відповідно інтерпретувати отримані результати про матеріальну модель у термінах об’єкта, що вивчається.

Другим частинним випадком матеріального моделювання є *фізичне моделювання.* У цьому випадку об’єкт, що моделюється, і модель мають одну й ту саму фізичну природу, між ними досягається фізична подібність.

Клас так званих *уявних (ідеальних) моделей* створюється як результат побудови ідеальних (уявних) аналогій.

Розрізняють два підкласи моделей: *інтуїтивні* й *знакові*. Інтуїтивні моделі часто виникають у тих сферах знань, які знаходяться ще на попередньому, описовому етапі розвитку дослідження. При такому моделюванні, як правило, не використовуються чітко фіксовані знакові системи. Деякі поняття свідомо подаються дещо розмитими, багатозначними. Така модель може описуватися словесно з використанням гіпотез.

Знакова модель є формалізованим описанням об’єкта з використанням більш-менш економних форм (мова, схема, креслення, формула тощо). До знакових моделей належать, наприклад, географічні карти, хімічні моделі, зображені у вигляді умовних знаків, а також різні топологічні й графові побудови.

Надалі нас в основному буде цікавити важливий частинний випадок знакового моделювання – *математичне моделювання.* Математичне моделювання ґрунтується на математичній подібності, за якої виявляється відповідність схожих параметрів процесів різної фізичної природи, що порівнюються між собою.

Знакову модель з використанням математики можна описати різними способами: аналітично (у вигляді заданих функціональних співвідношень, диференціальних, інтегральних, різницевих рівнянь тощо), алгоритмічно, графічно і т. п. Математичними уявними моделями можна вважати алгоритми й програми, розроблені для обчислювальних машин, які в умовних знаках відбивають (моделюють) певні процеси, що описані диференціальними рівняннями, покладеними в основу алгоритмів, а також різні структурні схеми, які відображають функціональні зв'язки між підсистемами складних систем.

Усі види таких математичних формалізацій будемо об'єднувати однією назвою – *математична модель*, а зміст цього терміну уточнюється залежно від конкретної ситуації.

Як уявні, так і матеріальні типи моделювання можуть бути або детермінованими (α) (відображають детерміновані процеси з однозначно визначеними причинами та їх наслідками), або стохастичними (β) (відображають імовірнісні події). Подібність і моделювання будь-якого типу ($1, 2, A, Б, B, \alpha, \beta$) можуть бути узагальненими (γ), тобто відображати явища оригіналу з тією чи іншою умовністю й реалізовуватися в реальному часі (t_1) при вивченні лінійних систем, а також у зміненому (t_2) відносно реального – при вивченні нелінійних.

2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. ВСТУП

Надалі зосередимось на вивченні математичного моделювання. Нагадаємо, що під математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об'єкта на його математичній моделі. Метою математичного моделювання є виявлення оптимальних умов протікання процесу, керування ним на основі математичної моделі та перенесення результатів на об'єкт.

Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого використання математичного моделювання. Сутність цієї методології полягає в заміні об'єкта, що досліджується, його образом – математичною моделлю – і подальшим вивченням моделі як методами математичного аналізу (аналітично), так і за допомогою обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються на електронних обчислювальних машинах.

Цей метод пізнання, конструювання, проектування поєднує в собі переваги як теорії, так і експерименту. Робота не з самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість безболісно, відносно швидко і без суттєвих витрат вивчати його властивості й поведінку в будь-яких можливих ситуаціях (переваги теорії). У той же час, обчислювальні експерименти (комп'ютерні, симуляційні, імітаційні) з моделями об'єктів дозволяють, опираючись на можливості сучасних обчислювальних методів і технічних засобів інформатики, детально й глибоко вивчати об'єкти з достатньою повнотою, недоступною чисто теоретичним (аналітичним) підходам (переваги експерименту). Не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплюючи все нові сфери – від розробки технічних систем і керування ними до аналізу найскладніших економічних і соціальних процесів.

Використання математичного моделювання можна хронологічно розбити на три етапи його розвитку.

Елементи математичного моделювання використовувались із самого початку виникнення точних наук. Не випадково, що деякі методи обчислень названі іменами таких корифеїв науки, як Ньютон і Ейлер, а слово *алгоритм* походить від імені середньовічного арабського вченого Аль-Хорезмі.

Друге народження цієї методології припало на кінець 40-х – початок 50-х рр. XX ст. і було зумовлено принаймні двома причинами. Перша з них – поява ЕОМ. Друга – безпрецедентне соціальне замовлення – виконання національних програм США і СРСР зі створення ракетно-ядерного щита, які не могли бути реалізованими традиційними методами. Математичне моделювання справилося з цією задачею: ядерні вибухи та польоти ракет і супутників були спочатку здійснені у надрах ЕОМ за допомогою математичних моделей, і лише потім – на практиці.

Зараз математичне моделювання вступає у третій принципово важливий етап свого розвитку – воно вбудовується у структури так званого інформаційного суспільства. Без володіння інформаційними ресурсами не можна навіть уявити розв'язання масштабних проблем, які стоять перед світовою спільнотою. Однак інформація як така мало що дає для аналізу і прогнозу, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Потрібні надійні способи переробки інформаційної сировини на готовий продукт, тобто на точне знання. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може й має бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства.

Технічні, екологічні, економічні та інші системи, які вивчаються сучасною наукою, більше не піддаються дослідженню (з потрібною повнотою й точністю) звичайними теоретичними методами. Прямий натурний експеримент над ними є довгим, дорогим, часто або небезпечним, або просто неможливим, оскільки багато з цих систем існують у єдиному екземплярі. Ціна помилок і прорахунків у поводженні з ними неприпустимо висока. Тому математичне (ширше – інформаційне) моделювання є обов'язковою складовою науково-технічного прогресу.

2.2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОСНОВНІ ЗАХОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Основним поняттям методу математичного моделювання є поняття математичної моделі.

Математичною моделлю називається наближене описання якого-небудь явища або процесу оточуючого світу за допомогою математичної символіки.

На самому початку скористаємося тим, що при вивченні деяких розділів математики читач уже познайомився з деякими прийомами математичного моделювання. Так, вивченню рівнянь математичної фізики передує нехай невеликий, але системно дуже важливий, етап математичного моделювання. Саме на цьому етапі були виведені основні рівняння математичної фізики. Для цього використовується математичне моделювання поширення тепла в нерівномірно нагрітому середовищі, а також моделюються коливання закріпленої на кінцях струни. Моделювання цих процесів дозволило отримати основні рівняння математичної фізики: теплопровідності, хвильове рівняння, рівняння Лапласа й Пуассона, а також сформулювати для них крайові й змішані задачі. Отже, розпочнемо з того, що вже знаємо.

1. При математичному моделюванні вивчається не сам реальний фізичний процес, а деяка його модель, від якої вимагається, щоб вона зберігала основні риси процесу, що розглядається, і в той же час була настільки простою, щоб піддаватися вивченню математичними методами.

2. Створення математичної моделі фізичного явища можна розбити на такі етапи:

2.1. Вибирається основна величина (кілька основних величин), яка характеризує процес. При математичному моделюванні поширення тепла такою величиною є температура u точок середовища, яка в загальному випадку є функцією просторових координат x, y, z і часу t .

2.2. На другому етапі виводиться визначальне рівняння для основної величини, яка характеризує процес. При вивченні поширення тепла таким рівнянням є рівняння теплопровідності. Для виведення цього рівняння використовується закон збереження тепла в деякому довільному об’ємі нерівномірно нагрітого середовища.

2.3. Одержане на другому етапі диференціальне рівняння має безліч розв’язків. Отже, його не досить для описання конкретного процесу. Тому на третьому етапі побудови математичної моделі виводяться так звані умови однозначності, які з безлічі розв’язків визначального рівняння дозволяють виділити єдиний розв’язок, що характеризує даний процес, який моделюється. Нагадаємо, що для рівнянь математичної фізики такими додатковими умовами є крайові й початкові умови.

Таким чином, математична модель процесів, які вивчаються за допомогою рівнянь математичної фізики, складається з диференціального рівняння для основної величини, яка характеризує процес, і додаткових умов, які дозволяють отримати єдиний розв’язок цього рівняння – розв’язок, що описує даний, конкретний фізичний процес.

Після такого вступу перейдемо до основної частини розділу, у якому познайомимось з основними прийомами, що використовуються при виведенні визначальних рівнянь математичної моделі. Наприкінці розділу наведемо формалізовану схему математичного моделювання.

Основною тезою на початку буде така: другий етап побудови математичної моделі, тобто етап виведення визначального рівняння математичної моделі, є суттєво різним залежно від прийомів, які використовуються при її побудові. Розглянемо деякі підходи до побудови математичних моделей, які ілюструють застосування законів природи, варіаційних принципів, аналогій, ієрархічних ланцюгів. Це дає змогу обговорити такі поняття, як адекватність моделей, їх „оснащення”, нелінійність, чисельну реалізацію та низку інших фундаментальних понять математичного моделювання.

2.2.1. Використання законів природи

Найпоширеніший метод побудови математичних моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Ці закони загальновизнані, багаторазово підтверджені досвідом, служать основою великої кількості науково-технічних досягнень. Тому їх обґрунтованість не викликає сумніву, що, крім усього іншого, надає досліднику сильну психологічну підтримку.

Закон збереження енергії. Цей закон відомий майже двісті років і посідає, напевне, найбільш почесне місце серед великих законів природи. Покладаючись на нього, експерт з балістики, який хоче визначити швидкість револьверної кулі і не має поблизу спеціальної лабораторії, може скористатися відносно простим пристроєм типу маятника – вантажем, підвішеним на легкому недеформівному стрижні, який може вільно обертатися (рис. 1.2.1).

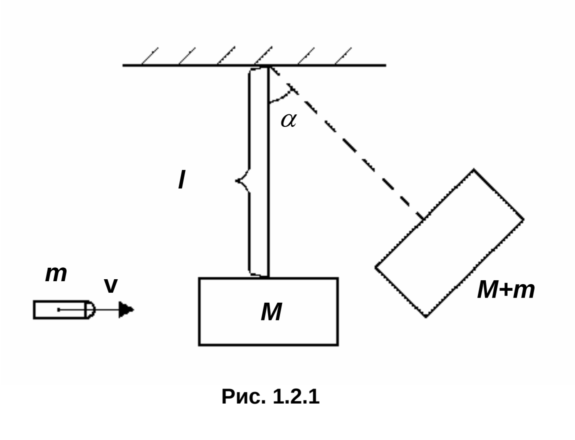


Рис. 1.2.1

Куля, яка застряє у вантажі, надає системі куля-вантаж свою кінетичну енергію, яка в момент найбільшого відхилення стрижня від вертикалі повністю переходить у потенціальну енергію системи. Ці трансформації описуються ланцюгом рівностей

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m)\frac{V^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos\alpha) .$$

Тут $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія кулі масою m, яка має швидкість v; M – маса вантажу; V – швидкість системи куля-вантаж відразу після зіткнення; g – прискорення вільного падіння; l – довжина стрижня; α – кут найбільшого відхилення. Шукана швидкість кулі v, таким чином, визначається з формули

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos\alpha) ,$$

а саме

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gl(1 - \cos\alpha)}{m}} ,$$

яка є досить точною, якщо не враховані нами втрати енергії на нагрівання кулі й вантажу, на подолання опору повітря, розгін стрижня і т. д. є невеликими. Процеси, які відбуваються при зіткненні кулі й маятника, уже не є чисто механічними. Тому закон збереження механічної енергії, який був застосований у цьому підрозділі для обчислення величини v, не є справедливим повною мірою: зберігається повна, а не механічна енергія системи. Закон збереження механічної енергії дає лише нижню межу для оцінки швидкості кулі.

Аналогічні міркування можна застосувати для оцінки часу t_k свердління шару металу товщиною L лазером з потужністю W, випромінювання якого є перпендикулярним до поверхні металу (рис. 1.2.2).

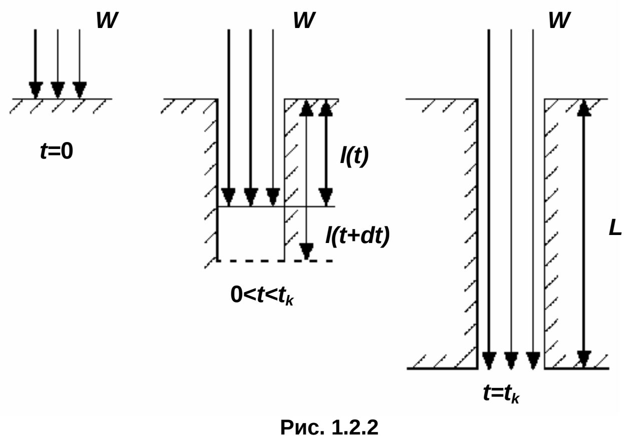


Рис. 1.2.2

Якщо енергія лазера повністю йде на випаровування стовпчика металу масою $LS\rho$, де S – площа, яка опромінюється; LS – об'єм стовпчика; ρ – густина речовини, то закон збереження енергії виражається рівністю

$$E_0 = Wt_k = hLS\rho \, , \qquad (1.2.1)$$

де h – енергія, яка потрібна для випаровування одиниці маси. Величина h має складну структуру: $h = (T_{пл} - T)h_1 + h_2 + h_3$, оскільки матеріал необхідно послідовно нагріти до температури плавлення $T_{пл}$, а потім розплавити й перетворити на пару; тут T – початкова температура; h_1 – питома теплоємність; h_2 і h_3 – відповідно питома теплота плавлення й пароутворення.

Зміна глибини заглиблення $l(t)$ із часом визначається з балансу енергії на проміжку часу від t до $t + dt$. На випарувану за цей час масу

$$[l(t + dt) - l(t)]S\rho = dlS\rho$$

витрачається енергія $dlS\rho h$, яка дорівнює енергії Wdt, що надходить від лазера до речовини:

$$dlS\rho h = Wdt \, ,$$

звідки отримується диференціальне рівняння

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{S\rho h} \, . \qquad (1.2.2)$$

При інтегруванні цього рівняння слід використовувати умову, що початкова глибина заглиблення дорівнює нулю:

$$l\big|_{t=0} = 0 \, . \qquad (1.2.3)$$

Інтегруючи (1.2.2) з урахуванням (1.2.3), матимемо

$$l(t) = \frac{W}{S\rho h} t = \frac{E(t)}{S\rho h} \, , \qquad (1.2.4)$$

де $E(t)$ – це вся енергія, яка була виділена лазером на момент часу t. Отже, глибина заглиблення є пропорційною затраченій енергії. При $t = t_k$, коли $l(t_k) = L$, обчислення часу t_k свердління шару металу товщиною L дає однакові результати і з формули (1.2.1), і з формули (1.2.4):

$$t_k = \frac{hLS\rho}{W} \, .$$

Насправді процес свердління є набагато складнішим за розглянуту схему: енергія витрачається й на нагрівання речовини, і на виділення пари із заглиблення, яке може мати неправильну форму і т. і. Тому впевненість у правильності запропонованого математичного описання є значно меншою, ніж у випадку з кулею. Питання про відповідність об'єкта та його моделі – одне з центральних у математичному моделюванні.

Закон збереження матерії. Використання цього закону при створенні математичної моделі ілюструється таким прикладом. Нехай є невелика кількість радіоактивної речовини (урану), яка оточена товстим шаром звичайного матеріалу (напр., свинцю), – ситуація, яка є типовою при збереженні матеріалів, що розщеплюються, або при їх використанні в енергетиці (рис. 1.2.3).

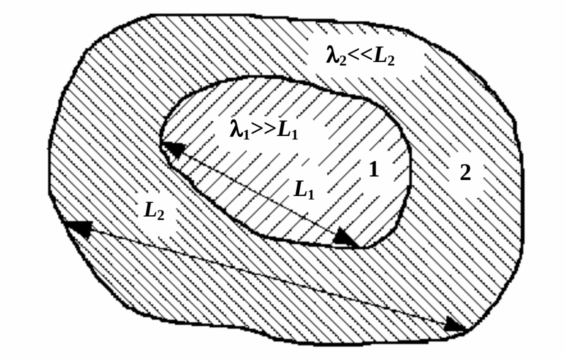


Рис. 1.2.3

Припущення про невелику кількість радіоактивної речовини є спрощувальним, воно дозволяє стверджувати, що всі продукти розщеплення без перешкод залишають область 1 без зіткнень з атомами речовини цієї області. Іншими словами, довжина вільного пробігу продуктів розщеплення λ_1 у першій речовині значно більша за характерні розміри самого матеріалу L_1, тобто $\lambda_1 >> L_1$. Слова „товстий шар" означають, що згідно з метою зберігання продукти розщеплення повністю поглинаються в області 2. Це гарантується при виконанні протилежної умови: $\lambda_2 << L_2$, де λ_2 – довжина вільного пробігу продуктів розщеплення у другій речовині; L_2 – характерний розмір другої речовини.

Отже, усе, що вилітає з області 1, поглинається в області 2, і сумарна маса обох речовин з часом не змінюється. Це і є закон збереження матерії, застосований до даної ситуації. Якщо в початковий момент часу $t = 0$ маси речовин були рівними $M_1(0)$ і $M_2(0)$, то в будь-який момент часу є справедливим баланс

$$M_1(0) + M_2(0) = M_1(t) + M_2(t)\,. \qquad (1.2.5)$$

Одного рівняння (1.2.5), очевидно, недостатньо для знаходження поточних значень двох мас – $M_1(t)$ і $M_2(t)$. Для замикання математичного формулювання необхідно залучити додаткові дані про характер розщеплення. Ці дані формулюються таким твердженням: швидкість розщеплення (кількість атомів, які розпадаються в одиницю часу) є пропорційною загальній кількості атомів радіоактивної речовини.

За малий проміжок часу dt між моментами t і $t+dt$ усього розщепиться

$$N_1(t+dt)-N_1(t)=-\alpha N_1(t+\xi dt),\ \ (\alpha>0,\ 0<\xi<1) \qquad (1.2.6)$$

атомів. Тут повторно використано закон збереження маси, але стосовно не всього процесу, а до відрізка часу dt. У цьому рівнянні, яке описує баланс атомів, у правій частині стоїть знак мінус (кількість речовини зменшується), а величина $N_1(t+\xi dt)$ відповідає деякому середньому значенню кількості атомів за час dt. Перепишемо рівність (1.2.6) у диференціальній формі:

$$\frac{dN_1(t)}{dt}=-\alpha N_1(t)\ .$$

Ураховуючи, що $M_1(t)=\mu_1 N_1(t)$, де μ_1 – атомна вага речовини 1, отримаємо

$$\frac{dM_1(t)}{dt}=-\alpha M_1(t)\ . \qquad (1.2.7)$$

При самочинному (спонтанному) поділі ядер будь-який атом має деяку, не залежну від стану оточуючої речовини, імовірність розщеплення. Тому чим більша (менша) кількість самої радіоактивної речовини, тим більше (менше) виділяється продуктів розщеплення в одиницю часу. Коефіцієнт пропорційності $\alpha>0$ (стала розщеплення) визначається конкретною речовиною. Рівняння (1.2.5) і (1.2.7) разом з умовами $\lambda_1>>L_1$ і $\lambda_2<<L_2$, а також величинами α, $M_1(0)$ і $M_2(0)$ складають математичну модель об’єкта, який розглядається.

Інтегруючи (1.2.7), отримуємо, що маса матеріалу, який розщеплюється, зменшується за експоненціальним законом:

$$\frac{dM_1(t)}{M_1(t)}=-\alpha dt\ \Rightarrow\ \ln M_1(t)=-\alpha t+\ln C\ \Rightarrow\ M_1(t)=Ce^{-\alpha t}\ .$$

При $t=0\ \Rightarrow\ M_1(0)=C$, тому остаточно

$$M_1(t)=M_1(0)e^{-\alpha t}\ .$$

При $t\to\infty$ в області 1 речовина повністю зникає.

Оскільки сумарна маса згідно з (1.2.5) залишається сталою, то в області 2 кількість речовини зростає:

$$M_2(t)=M_2(0)+M_1(0)-M_1(0)e^{-\alpha t}=$$
$$=M_2(0)+M_1(0)(1-e^{-\alpha t}),$$

і при $t\to\infty$ продукти розщеплення повністю переходять з області 1 в область 2.

Закон збереження імпульсу. Човен, який стоїть нерухомо в безвітряну погоду на поверхні озера, почне рухатись уперед, якщо зробити кілька кроків від його носа до корми. Так виявляє себе закон збереження імпульсу, який стверджує: повний імпульс системи, на яку не діють зовнішні сили, зберігається. На переміщення весляра човен реагує зміщенням у протилежний бік.

Принцип реактивного руху покладено в основу багатьох технічних пристроїв, наприклад, ракети, яка виводить на орбіту Землі штучний супутник, для чого їй потрібно розвинути швидкість приблизно 8 км/с. Найпростіша математична модель руху ракети отримується із закону збереження імпульсу при нехтуванні опором повітря, гравітацією та іншими силами, за виключенням, звичайно, тяги реактивних двигунів.

Нехай продукти згоряння ракетного палива залишають розташовані в задній частині ракети вихлопні сопла зі швидкістю u (для сучасних палив швидкість u дорівнює 3-4 км/с). За малий проміжок часу dt між моментами t і $t+dt$ частина палива вигоріла і маса ракети змінилася на величину dm. Змінився також імпульс ракети, але сумарний імпульс системи “ракета плюс продукти згоряння” залишився тим самим, що й у момент t, тобто

$$m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm[v(t+\xi dt) - u],$$

де $v(t)$ – швидкість ракети; $v(t+\xi dt) - u, 0 < \xi < 1$ – середня за проміжок dt швидкість витікання із сопел газів (обидві швидкості беруться відносно Землі). Перший член у правій частині цієї рівності – імпульс ракети в момент $t+dt$, другий – імпульс, переданий газом, що витікає за час dt.

Ураховуючи, що $m(t+dt) = m(t) + (dm/dt)dt + O((dt)^2)$, а також $v(t+dt) = v(t) + (dm/dt)dt + O((dt)^2)$, закон збереження імпульсу можна переписати у вигляді диференціального рівняння

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u\,, \tag{1.2.8}$$

у якому член

$$-\frac{dm}{dt}u\,,$$

очевидно, є ні чим іншим, як силою тяги ракетних двигунів. Рівняння (1.2.8) перетворимо до вигляду

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt} \tag{1.2.8a}$$

$$\left((1.2.8) \Rightarrow \frac{1}{m}\bigg| m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = -u\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt}\right)$$

і проінтегруємо.

Після інтегрування рівняння (1.2.8а) матимемо

$$v(t) + C = -u(\ln m(t) + \ln B),$$

де C і B – довільні сталі, або

$$v(t) + C = -u \ln(Bm(t)). \qquad (1.2.8б)$$

Одержаний загальний розв'язок (1.2.8б) має задовольняти початкову умову: при $t = 0$ $v = v_0; m = m_0$, де v_0, m_0 – відповідно швидкість і маса ракети в момент часу $t = 0$.

Тому довільну сталу C слід узяти рівною v_0, а довільну сталу $B = \frac{1}{m_0}$. При цьому (1.2.8б) набуває вигляду

$$v(t) - v_0 = -u \ln(\frac{m(t)}{m_0})$$

і при $t = 0$ перетворюється на тотожність. Звідси

$$v(t) = v_0 + u \ln(\frac{m_0}{m(t)}). \qquad (1.2.9)$$

Якщо $v_0 = 0$, то максимальна швидкість ракети, яка досягається при повному згорянні палива, дорівнює

$$v = u \ln(\frac{m_0}{m_p + m_s}). \qquad (1.2.10)$$

У (1.2.10) m_p – корисна маса (маса супутника); m_s – структурна маса власне ракетної конструкції – паливних баків, двигунів, систем управління тощо.

Формула (1.2.10) – це *формула Ціолковського.* Вона дозволяє зробити фундаментальний висновок про конструкцію ракети для космічних польотів. Уведемо величину $\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$, яка характеризує при $m_p = 0$ відношення структурної й початкової мас ракети (без корисної маси, тобто супутника). Тоді для практично реальних значень $\lambda = 0{,}1$ і $u = 3$ км/с отримаємо при $m_p = 0$

$$v = u \ln(\frac{1}{\lambda}) = 7 \text{ км/с}.$$

Звідси випливає, що навіть у самій ідеальній ситуації (корисна маса дорівнює нулю, відсутні гравітація та опір повітря тощо) ракета того типу, що розглядається, не здатна розвинути першої космічної швидкості. Звідси випливає важливий висновок – необхідно використовувати так звані багатоступеневі ракети.

Розглянутий приклад ілюструє також свого роду принцип *найбільшого сприяння*, який часто використовується на початковій стадії математичного моделювання складних об'єктів: якщо об'єкт, будучи поставленим у найкращі умови, не в змозі досягнути потрібних характеристик, то слід змінити сам підхід до об'єкта або пом'якшити вимоги до нього; якщо ж вимоги в принципі є досяжними, то наступні кроки пов'язані з дослідженням впливу на об'єкт додаткових, більш складних факторів.

2.2.2. Використання варіаційних принципів

Ще один підхід до побудови моделей полягає у використанні так званих варіаційних принципів. Цей підхід за широтою та універсальністю його можливостей можна зіставити з використанням фундаментальних законів природи при побудові математичних моделей. Варіаційні принципи є досить загальними твердженнями про об'єкт, що розглядається (система, явище), вони стверджують, що з усіх можливих варіантів поведінки об'єкта (руху, еволюції) вибираються лише ті, що задовольняють певну умову. Зазвичай згідно з цією умовою деяка величина, яка пов'язана з об'єктом, досягає свого екстремального значення при переході об'єкта з одного стану в інший.

Приклад. Припустимо, що автомобіль, який рухається зі сталою швидкістю v, має потрапити з точки А в точку В і при цьому торкнутися деякої прямої лінії С. На рис. 1.2.4 показані різні траєкторії руху з точки А в точку В з дотиком до прямої С. Суцільною лінією виділено найкоротший шлях**.**

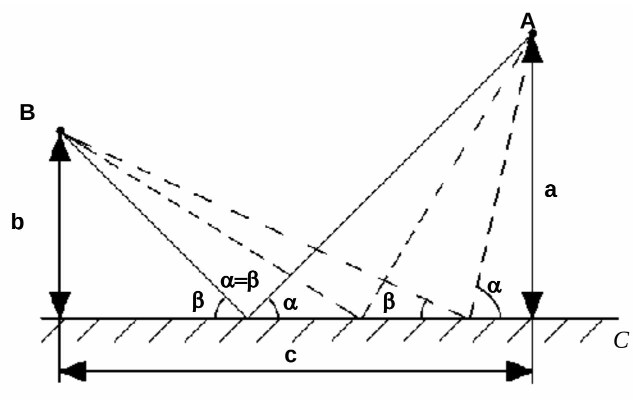


Рис. 1.2.4

Водій автомобіля дуже поспішає й вибирає з багатьох траєкторій шлях, який вимагає мінімальних затрат часу. Зобразимо витрачений час як функцію величини α – кута між прямою С і відрізком шляху від точки А до прямої С:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v\sin\alpha} + \frac{b}{v\sin\beta(\alpha)} .$$

Тут a і b – довжини перпендикулярів, які опущені з точок А і В на пряму С; $\beta(\alpha)$ – кут між прямою С і відрізком шляху з точки дотику до точки В.

Умова екстремальності $t(\alpha)$ за аргументом α означає, що

$$\left.\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{ext}} = 0 ,$$

або

$$\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{b\cos\beta(\alpha)}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 . \quad (1.2.11)$$

Для будь-яких значень α є справедливою рівність

$$c = \frac{a}{tg\alpha} + \frac{b}{tg\beta(\alpha)} , \quad (1.2.12)$$

де c – відстань між проекціями точок А і В на пряму С (ця відстань є однаковою для всіх траєкторій). Диференціюючи (1.2.12), отримаємо співвідношення

$$\frac{a}{\sin^2\alpha} + \frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 , \quad (1.2.13)$$

яке разом з умовою мінімальності (1.2.11) (порівняємо (1.2.11) і (1.2.13)) дає

$$\cos\alpha = \cos\beta(\alpha) ,$$

тобто рівність кутів α і β .

Далі неважко знайти самі значення $\alpha_{\min}, t_{\min}$ через задані величини a, b, c . Однак зараз для нас важливо інше – умова мінімальності витрат часу привела до вибору відповідної траєкторії за правилом *кут падіння дорівнює куту відбивання*. Однак такому ж закону підкоряється і хід променя світла, який потрапляє на дзеркальну поверхню. Може, і промені світла рухаються траєкторіями, які забезпечують найшвидше потрапляння сигналу з однієї точки в іншу? Так, саме так і відбувається згідно з відомим варіаційним принципом Ферма, спираючись на який можна отримати всі основні закони геометричної оптики.

2.2.3. Застосування аналогій при побудові моделей

У дуже великій кількості випадків при побудові математичної моделі об’єкта або неможливо прямо вказати фундаментальні закони чи варіаційні принципи, яким він підкоряється, або, з погляду наших сьогоднішніх знань, узагалі не можна бути впевненими в існуванні подібних законів, які допускають математичне формулювання. Одним із плідних підходів до такого типу об’єктів є використання аналогій з уже вивченими явищами. Що, здавалося б, може бути спільного між радіоактивним розщепленням і динамікою популяцій, зокрема зі зміною чисельності населення нашої планети? Однак на найпростішому рівні така аналогія повністю спостерігається. Про це свідчить одна з найпростіших моделей популяцій, яка називається *моделлю Мальтуса*. В її основу покладено просте твердження: швидкість зміни населення з часом t пропорційна її поточній кількості $N(t)$, помноженій на різницю коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t)$ і смертності $\beta(t)$. У результаті приходимо до рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \qquad (1.2.14)$$

яке доволі схоже з рівнянням радіоактивного розщеплення і збігається з ним при $\alpha < \beta$ (якщо α і β – сталі). Це не дивно, оскільки при виведенні цих рівнянь використовувались однакові міркування. Інтегрування рівняння (1.2.14) дає:

$$(1.2.14) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(t)}{N(t)} = [\alpha(t) - \beta(t)]dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln N(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz + \ln C \quad \Rightarrow$$

$$\ln \frac{N(t)}{C} = \int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz \quad \Rightarrow$$

$$N(t) = C \exp(\int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz).$$

Довільна стала C знаходиться з початкової умови $N(0) = N_0$, де N_0 – початкова чисельність населення, звідки $C = N(0) = N_0$, і розв’язок рівняння (1.2.14) остаточно буде таким:

$$N(t) = N_0 \exp(\int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz). \qquad (1.2.15)$$

Проаналізуємо (1.2.15). При $\alpha = \beta$ чисельність населення залишається сталою. У цьому випадку розв’язком рівняння (1.2.14) буде стала величина $N(t) = N_0$ (рис. 1.2.5).

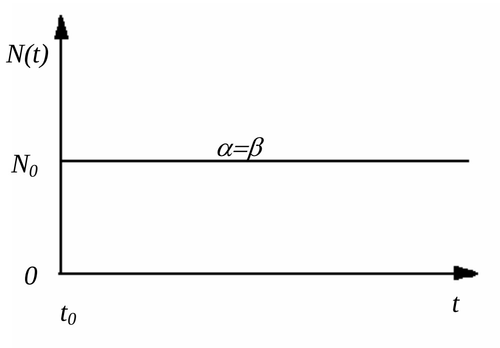


Рис. 1.2.5

Рівновага між народжуваністю і смертністю нестійка у тому розумінні, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ приводить із часом до все більшого відхилення функції $N(t)$ від рівноважного значення N_0. При сталих α і β за умови $\alpha < \beta$ чисельність населення зменшується і прямує до нуля при $t \to \infty$ за експоненціальним законом

$$N(t) = N_0 e^{(\alpha-\beta)t} \quad (\alpha - \beta < 0)$$

(рис. 1.2.6), а при $\alpha > \beta$ зростає $(\alpha - \beta > 0)$, знов-таки за експоненціальним законом (рис. 1.2.7), прямуючи до нескінченності при $t \to \infty$. Такий результат став основою для побоювань Мальтуса про перенаселення Землі з усіма наслідками, які з цього випливають.

Як у даному прикладі, так і в багатьох розглянутих нами випадках можна вказати чимало очевидних обмежень застосування побудованої моделі. Звичайно, дуже складний процес зміни чисельності населення, який залежить до того ж від свідомого втручання самих людей, не може описуватися якимись простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності повною мірою хоча б через обмеженість ресурсів, які необхідні для її існування.

Однак це зауваження ніскільки не применшує ролі аналогій у побудові математичних моделей дуже складних явищ. Застосування аналогій базується на одній з найважливіших властивостей моделей – їх універсальності, тобто їх застосовності до об’єктів принципово різної природи. Так, припущення типу “швидкість зміни величини пропорційна значенню самої величини (або деякої функції від неї)” широко використовується в далеких одна від одної сферах знань.

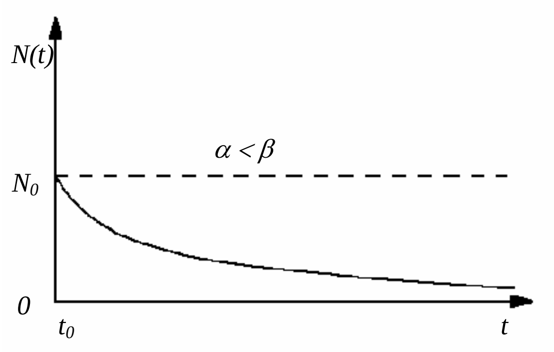


Рис. 1.2.6

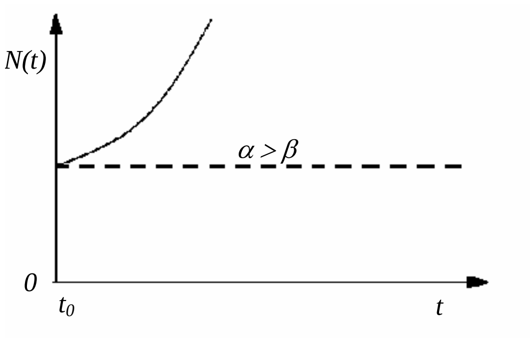


Рис. 1.2.7

2.2.4. Застосування ієрархічного підходу до створення моделей

Лише в окремих випадках буває зручною й виправданою побудова математичних моделей, навіть відносно простих об’єктів, одразу у всій повноті, з урахуванням усіх факторів, які є суттєвими для поведінки об’єктів. Тому природним є підхід, який реалізує принцип *від простого – до складного*, коли наступний крок робиться після досить детального вивчення не дуже складної моделі. При цьому виникає ланцюг (ієрархія) усе більш повних моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх як частинні випадки.

Побудуємо такий ієрархічний ланцюг на прикладі моделі багатоступеневої ракети. Нами вже було встановлено наприкінці підрозділу 2.2.1, що реальна одноступенева ракета неспроможна розвинути першу космічну швидкість. Причина цього – витрата пального на розгін непотрібної, відпрацьованої частини структурної маси. Тому під час руху ракети необхідно періодично позбуватися баласту. На практиці це означає, що ракета має складатися з кількох ступенів, які відкидаються після їх використання.

Нехай m_i – загальна маса *i*-го ступеня ракети; λm_i – відповідна структурна маса (при цьому маса пального дорівнює величині $(1-\lambda)m_i$); m_p – маса корисного вантажу. Припускається, що величини λ і швидкість витікання газу u однакові для всіх ступенів. Візьмемо для визначеності кількість ступенів $n=3$. Початкова маса такої ракети буде рівною

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3 .$$

Розглянемо момент, коли витрачено все паливо першого ступеня й маса ракети дорівнює величині

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3 .$$

Тоді за формулою Ціолковського (1.2.10)

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right)$$

швидкість ракети у випадку, що розглядається, буде

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right) .$$

Після досягнення цієї швидкості v_1 структурна маса λm_1 відкидається і вмикається другий ступінь ракети. Маса ракети у цей момент становить

$$m_p + m_2 + m_3 .$$

Починаючи з цього моменту і до моменту повного вигоряння палива другого ступеня, ніщо не заважає скористатися вже збудованою моделлю, застосувавши її до випадку, що розглядається. Усі міркування стосовно збереження сумарного імпульсу й відповідні перетворення залишаються чинними (слід тільки врахувати, що ракета вже має початкову швидкість v_1). Тоді за формулою (1.2.10) після вигоряння палива у другому ступені ракета досягне швидкості

$$v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right) .$$

Такі ж самі міркування є застосовними й до третього ступеня ракети. Після відключення її двигунів швидкість ракети дорівнюватиме

$$v_3 = v_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right) .$$

Цей ланцюг неважко продовжити для будь-якого числа ступенів і отримати відповідні формули. У випадку ж $n=3$ для остаточної швидкості будемо мати

$$\frac{v_3}{u} = \ln\{(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3})\}$$

або, вводячи величини

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p},$$

отримаємо

$$\frac{v_3}{u} = \ln\{(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)})(\frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)})(\frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)})\}.$$

Даний вираз є симетричним відносно до величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, і неважко показати, що його максимум досягається в симетричному випадку, тобто коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. При цьому *i*=3,

$$\alpha = \frac{1 - \lambda}{P - \lambda}, P = e^{-\frac{v_3}{3u}}.$$

Добуток $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha^3$ дорівнює, як легко перевірити, відношенню $\frac{m_0}{m_p}$, або

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = (\frac{1 - \lambda}{P - \lambda})^3.$$

Для багатоступеневої ракети, аналогічно, маємо

$$\frac{m_0}{m_p} = (\frac{1 + \lambda}{P - \lambda})^n, P = e^{-\frac{v_n}{nu}}, \qquad (1.2.16)$$

де n – кількість ступенів ракети.

Проаналізуємо формулу (1.2.16). Приймемо $v_n = 10{,}5 км/с, \lambda = 0{,}1$. Тоді для $n = 2{,}3{,}4$ отримаємо

$$m_0 = 149 m_p, \quad m_0 = 77 m_p, \quad m_0 = 65 m_p$$

відповідно. Це означає, що двоступенева ракета придатна для виведення на орбіту деякої корисної маси (однак при одній тоні корисного вантажу необхідно мати ракету вагою 149 тон). Перехід до третього ступеня зменшує масу ракети майже у два рази (звичайно при цьому ускладнює її конструкцію), а чотирьохступенева ракета не дає помітного виграшу порівняно з триступеневою.

Побудова ієрархічного ланцюга дозволила відносно просто прийти до цих важливих висновків. Ієрархія математичних моделей часто будується й за протилежним принципом – *від складного – до простого*. У цьому випадку реалізується шлях *згори – униз*: – із досить загальної та складної моделі за відповідних спрощувальних припущень отримується послідовність усе простіших (але таких, які мають меншу сферу застосування) моделей.

2.2.5. Про нелінійність математичних моделей

Простота розглянутих математичних моделей значною мірою пов'язана з їх лінійністю. У математичному сенсі це важливе поняття означає, що є справедливим принцип суперпозиції, тобто будь-яка лінійна комбінація розв'язків (напр., їх сума) теж є розв'язком задачі. Користуючись принципом суперпозиції, не важко, знайшовши розв'язок у якомусь частинному випадку, побудувати розв'язок у більш складній ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна міркувати за властивостями частинного – різниця між двома розв'язками має лише кількісний характер. Наприклад, збільшення у два рази швидкості витікання ракетного палива веде також до дворазового збільшення швидкості ракети, зменшення кута падіння світлового променя на дзеркальну поверхню означає таку саму зміну кута відбивання і т. д. Іншими словами, у випадку лінійних моделей відгук об'єкта на зміну якихось умов є пропорційним величині цієї зміни.

Для нелінійних явищ, математичні моделі яких не задовольняють принцип суперпозиції, знання про поведінку частини об'єкта ще не гарантує знання поведінки всього об'єкта, а його відгук на зміну умов може якісно залежати від величини цієї зміни.

Більшість реальних процесів і математичних моделей, які їм відповідають, є нелінійними. Лінійні ж моделі відповідають вельми частинним випадкам і, як правило, є лише першим наближенням до реальності. Наприклад, популяційні моделі відразу стають нелінійними, якщо прийняти до уваги обмеженість доступних для популяції ресурсів.

2.2.6. Висновки. Схема математичного моделювання

Процес побудови математичних моделей може бути умовно розбитий на такі етапи.

1. Побудова моделі починається зі словесно-змістового описання об'єкта чи явища. Окрім знань загального характеру про природу об'єкта і мету його дослідження, ця стадія може містити також деякі припущення (невагомий стрижень, товстий шар речовини, прямолінійне поширення світла тощо). Даний етап можна назвати формулюванням передмоделі.

2. Наступний етап – завершення ідеалізації об'єкта. Відкидаються всі фактори та ефекти, які вважаються не самими суттєвими для його поведінки. Наприклад, при складанні балансу матерії не враховувався, через його мализну, дефект мас, яким супроводжується радіоактивне розщеплення. За можливості припущення, які використовуються при ідеалізації, записуються в математичній формі. Наприклад, $\lambda_1 >> L_1$ – довжина ві-

льного пробігу продуктів розщеплення λ_1 значно більша за характерний розмір самого матеріалу L_1 (у прикладі про зберігання радіоактивних матеріалів). Це необхідно, щоб справедливість цих припущень піддавалась кількісному контролю.

3. Після виконання перших двох етапів можна переходити до вибору чи формулювання закону (варіаційного принципу, аналогії тощо), якому підлягає об'єкт, і його запису в математичній формі. За необхідності використовуються додаткові дані про об'єкт, які також записуються математично (напр., сталість величини c для всіх траєкторій руху автомобіля – у прикладі про рух автомобіля з точки А у точку В з дотиком до деякої прямої). Слід мати на увазі, що навіть для простих об'єктів вибір відповідного закону є зовсім не тривіальною задачею.

4. Формулювання моделі завершує її "оснащення". Наприклад, необхідно задати дані про початковий стан об'єкта (швидкість ракети та її масу в момент $t = 0$) або інші його характеристики, без знання яких неможливо визначити поведінку об'єкта. І, нарешті, формулюється мета дослідження моделі (напр., досягнути розуміння закономірностей зміни популяції, встановити вимоги до конструкції ракети, яка запускає супутник тощо).

5. Побудована модель вивчається всіма доступними методами, у тому числі – перевіркою з використанням різних підходів. На відміну від найпростіших випадків, які ми розглянули до цього часу, більшість моделей не піддаються чисто теоретичному аналізу, і тому необхідно широко застосовувати обчислювальні методи. Ця обставина особливо важлива при вивченні нелінійних об'єктів, оскільки їх якісна поведінка заздалегідь, як правило, невідома.

6. У результаті дослідження моделі не тільки досягається поставлена мета, але має бути встановлена усіма можливими способами (порівнянням з практикою, з іншими підходами) адекватність моделі – відповідність моделі до об'єкта та сформульованих припущень. Неадекватна модель може дати результат, який буде як завгодно відрізнятися від істинного. Така модель має бути відкинутою або відповідним чином модифікованою.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ПРИ ПОБУДОВІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Метою математичного моделювання є одержання адекватної моделі об'єкта, тобто моделі, яка однозначно відповідає об'єкту та припущенням щодо нього.

Одним з методів забезпечення адекватності є використання на етапі побудови математичної моделі теорії подібності. Сутність цієї теорії буде викладено для математичних моделей, основними визначальними рівняннями яких є диференціальні.

3.1. ЗНАХОДЖЕННЯ КРИТЕРІЇВ ПОДІБНОСТІ ЯВИЩА ЗА НАЯВНОСТІ ЙОГО МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Основні положення теорії подібності визначають властивості подібних об'єктів дослідження й указують вимоги, при задовольнянні яких один з об'єктів може розглядатися як модель (оригінал) відносно до інших.

Нагадаємо, що диференціальне рівняння є математичною моделлю класу процесів. Згідно з цим при інтегруванні будь-якого диференціального рівняння отримується нескінченна множина розв'язків, які задовольняють це рівняння. Щоб отримати з цієї множини можливих розв'язків один частинний, який відповідає певному конкретному процесу, необхідно мати додаткові дані, які не містяться у визначальному диференціальному рівнянні. Додаткові умови, які дозволяють із нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння виділити один, який відповідає даному конкретному процесу, називаються умовами однозначності. Якщо конкретний процес відбувається і в часі, і в просторі, то умови однозначності включають просторові характеристики системи у початковий момент часу (початкові умови), а також умови на тій межі, де система контактує, взаємодіє з оточуючим середовищем (межові умови).

Перехід від класу явищ до одиничного явища відбувається приєднанням до диференціального рівняння умов однозначності. Таким чином, конкретний процес описується диференціальним рівнянням, розв'язки якого задовольняють певні умови однозначності.

Говорячи про подібність фізичних явищ при їх математичному моделюванні, ми повинні пам'ятати, що подібними називаються фізичні явища одного класу, у яких подібні всі характерні величини, тобто всі векторні величини геометрично подібні, а всі скалярні – відповідно пропорційні.

Наведемо кілька прикладів фізичної подібності.

1. Просторова (геометрична) подібність – виражається рівністю всіх відповідних кутів і пропорційністю всіх відповідних лінійних розмірів:

$$\frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = \frac{l_3'}{l_3} = M_l = \text{const} .$$

2. Часова подібність (гомохронність) – виражається пропорційністю інтервалів між відповідними моментами часу:

$$\frac{t_1'}{t_1} = \frac{t_2'}{t_2} = \frac{t'}{t} = M_t = \text{const} .$$

Частинним випадком гомохронності є синхронність, за якої

$$\frac{t'}{t} = 1 \text{, або } t' = t,\ t_1' = t_1,\ t_2' = t_2, ...$$

3. Кінематична подібність, тобто геометрична подібність полів швидкості (а також полів прискорення), виражається відповідністю напрямків і пропорційністю всіх швидкостей (прискорень):

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{v_2'}{v_2} = ... = \frac{v_i'}{v_i} = M_v = \text{const} .$$

4. Динамічна подібність, тобто геометрична подібність силових полів виражається відповідністю напрямків сил і їх пропорційністю:

$$\frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = ... = \frac{l_i'}{l_i} = M_l = \text{const},$$

$$\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2} = ... = \frac{f_i'}{f_i} = M_f = \text{const}.$$

5. Температурна подібність, тобто геометрична подібність температурних полів, виражається відповідною пропорційністю всіх температур:

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{u_2'}{u_2} = ... = \frac{u_i'}{u_i} = M_u = \text{const} .$$

Виходячи зі сказаного, подібність фізичних величин математично виражається у формі пропорцій таким чином:

1. Подібність скалярних величин (напр., температур):

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{u_2'}{u_1} = ... = \frac{u_i'}{u_i} = M_u = \text{const} .$$

2. Подібність векторних величин (напр., швидкостей) виражається відповідністю напрямків і пропорційністю їх абсолютних вартостей:

$$\frac{u_i'}{u_i} = M_u = \text{const}$$

або пропорційністю координат відповідних векторів:

$$\frac{u_{ix}'}{u_{ix}} = \frac{u_{iy}'}{u_{iy}} = \frac{u_{iz}'}{u_{iz}} = M_u = \text{const} .$$

У цих рівностях M_u – це сталий коефіцієнт пропорційності, так званий масштаб подібності (або стала подібності, множник подібного перетворення); позначення без верхнього індексу належать до першого фізичного явища або натури, індекс ´ – до другого фізичного явища або моделі; 1, 2, 3, ..., належать і до відповідних точок простору (поля), і до відповідних моментів часу; індекси x, y, z позначають компоненти векторної величини на відповідних координатних осях.

При моделюванні фізичних явищ масштаби подібності є масштабами моделі: M_l є лінійним масштабом; M_t – масштабом часу; M_v – швидкості; M_f –сил; M_u – масштабом температур тощо.

Для подібності фізичних явищ необхідно й достатньо:

1. Незмінність (інваріантність) системи визначальних рівнянь математичної моделі при подібних перетвореннях змінних (заміні всіх змінних пропорційними їм величинами), тобто сумісність рівнянь

$$\begin{cases} f(u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \\ f(M_1 u_1, M_2 u_2, ..., M_n u_n) = 0, \end{cases}$$

де $u_1, u_2, ..., u_n$ – розмірні змінні; $M_1, M_2, ..., M_n$ – відповідні масштаби подібності.

2. Подібність усіх фізичних параметрів системи визначальних рівнянь математичної моделі.

3. Просторова (геометрична) подібність.

4. Стаціонарність фізичного явища (процесу) або подібність полів усіх змінних у початковий момент часу (тільки для нестаціонарних явищ).

5. Подібність межових умов, які входять до умов однозначності математичної моделі.

Розглянемо детальніше першу умову. У загальній теорії подібності доведено, що необхідною й достатньою умовою незмінності основних рівнянь математичної моделі відносно до подібного перетворення змінних величин є незмінність певних безрозмірних комплексів масштабів цих змінних. Переконаємося у справедливості цього твердження на прикладі.

Розглянемо подібне перетворення змінних рівняння теплопровідності. Нехай два процеси поширення тепла у твердих середовищах описуються диференціальними рівняннями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) , \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = a'^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right) . \qquad (1.3.2)$$

У (1.3.1), (1.3.2) u, u' – температура; t, t' – час; x, y, z і x', y', z' – просторові координати точок середовищ; a, a' – коефіцієнти теплопровідності. Позначення без верхнього індексу належать до першого процесу (оригіналу), позначення з індексом ' – до другого (моделі).

За припущенням процеси, що розглядаються, – подібні, тому між змінними, що характеризують процеси поширення тепла, і між фізичними параметрами a і a', що характеризують властивості середовища, у якому поширюється тепло, існує такий зв'язок:

$$\frac{u'}{u} = M_u, \frac{t'}{t} = M_t, \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = M_l, \frac{a'}{a} = M_a$$

і, відповідно,

$$u' = M_u u,\ t' = M_t t,\ x' = M_l x,\ y' = M_l y,\ z' = M_l z,\ a' = M_a a .$$

Підставимо в рівняння (1.3.2) одержані значення змінних другого явища (моделі), тобто виконаємо подібне перетворення змінних у диференціальному рівнянні (1.3.2):

$$\frac{M_u}{M_t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{M_a{}^2 M_u}{M_l{}^2} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) . \qquad (1.3.3)$$

Ми очікуємо, що після виконаного подібного перетворення одержане рівняння (1.3.3) збіжиться з рівнянням (1.3.1), яке описує процес (оригінал). Для цього необхідно, щоб коефіцієнти рівняння (1.3.3), які є степеневими комплексами масштабів перетворення, були рівними між собою, тобто

$$\frac{M_u}{M_t} = \frac{M_a{}^2 M_u}{M_l{}^2} .$$

Помножимо цю рівність на $\frac{1}{\frac{M_u}{M_t}}$, звідки матимемо $\frac{M_a{}^2 M_t}{M_l{}^2} = 1$,

або, якщо позначити

$$M_{\left(\frac{a^2 t}{l^2}\right)} = \frac{M_a{}^2 M_t}{M_l{}^2} ,$$

то матимемо

$$M_{\left(\frac{a^2 t}{l^2}\right)} = 1 . \qquad (1.3.4)$$

Таким чином, для інваріантності рівняння теплопровідності (1.3.1) до подібних перетворень необхідно, щоб масштаб подібності для безрозмірного комплексу a^2t/l^2

$$M_{(\frac{a^2t}{l^2})}$$

дорівнював одиниці. Це означає, що безрозмірний комплекс a^2t/l^2 має залишатися незмінним для подібних процесів теплопровідності. Дійсно, підставляючи у (1.3.4) замість масштабів подібності їх значення, матимемо

$$\frac{\frac{a'^2}{a^2}\frac{t'}{t}}{\frac{l'^2}{l^2}}=1 \;\Rightarrow\; \frac{a'^2 t'}{l'^2}=\frac{a^2 t}{l^2}=inv\,.$$

Тут має місце незмінність (інваріантність – *inv*), а не сталість (const), оскільки одержані комплекси змінних однакові тільки для відповідних точок системи (полів), а для нестаціонарних процесів – і для відповідних моментів часу. Для різних точок системи й різних моментів часу одержані комплекси змінних можуть бути різними.

Безрозмірні комплекси, незмінність яких є кількісною ознакою подібності фізичних явищ, називаються критеріями подібності.

На конкретному прикладі ми переконались, що необхідною умовою незмінності визначальних рівнянь математичної моделі відносно до подібного перетворення змінних є незмінність критеріїв подібності. Нескладно також переконатись, що така умова є також і достатньою.

Отже, у тих випадках, коли математичні описання групи (двох або більше) якісно однакових процесів однієї й тієї ж фізичної природи є відомими і ці описання можуть бути перетвореними до однакового вигляду, тобто процеси, що розглядаються, є подібними, то такі процеси повинні мати однакові критерії подібності, які встановлюються безпосередньо з математичного описання шляхом приведення його до безрозмірного вигляду.

Таким чином, для знаходження критеріїв подібності фізичного явища за наявності диференціальних рівнянь, які служать його математичною моделлю, слід виконати такі дії:

1) необхідно вибрати одиниці виміру (масштаби) для всіх змінних величин, які входять у систему визначальних диференціальних рівнянь фізичного явища та умов їх однозначності;

2) усі змінні величини в рівняннях системи слід замінити їхніми безрозмірними значеннями, тобто їх відношеннями до вибраних масштабів;

3) степеневі комплекси з масштабів змінних величин і параметрів системи визначальних рівнянь, які при цьому утворюються, також приводяться до безрозмірного вигляду діленням усіх степеневих комплексів у рівнянні на один з них.

Безрозмірні степеневі комплекси, які при цьому отримуються, є шуканими критеріями подібності фізичного явища.

Розглянемо виконання вказаних дій при знаходженні критерію подібності явища поширення тепла в однорідному нерівномірно нагрітому твердому середовищі – явища, яке моделюється рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}),$$

де $u = u(x, y, z, t)$ – температура середовища; a – коефіцієнт температуропровідності; x, y, z – координати точок простору; t – час.

За масштаби розмірних величин u, x, y, z, t вибираються деякі характерні величини, які на цьому першому етапі не обов'язково пов'язувати з конкретним явищем поширення тепла, яке моделюється. Позначимо відповідно U, T, L масштаби температури u, часу t і координат x, y, z. Ці масштаби використовуються для запровадження безрозмірних змінних u', x', y', z', t':

$$u' = \frac{u}{U},\ t' = \frac{t}{T},\ x' = \frac{x}{X},\ y' = \frac{y}{Y},\ z' = \frac{z}{Z}\ .$$

Звідси розмірні змінні, які визначають явище теплопровідності, набувають вигляду

$$u = u'U,\ t = t'T,\ x = x'L,\ y = y'L,\ z = z'L\ .$$

Підставляння їх у рівняння теплопровідності дає

$$\frac{U}{T}\frac{\partial u'}{\partial t'} = a^2 \frac{U}{L^2}(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2})\ .$$

Два степеневі комплекси масштабів визначальних змінних явища теплопровідності

$$UT^{-1} \text{ і } a^2UL^{-2},$$

один з яких містить у своєму складі коефіцієнт температуропровідності середовища a, зводяться до безрозмірного вигляду діленням одержаного рівняння на степеневий комплекс UT^{-1}. Рівняння теплопровідності при цьому набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{a^2T}{L^2}(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2})\ .$$

Єдиний безрозмірний степеневий комплекс a^2TL^{-2}, який залишився в рівнянні, є критерієм подібності явища теплопровідності. Він має історичну назву – *критерій подібності Фур'є:*

$$Fo = \frac{a^2T}{L^2}\ .$$

3.2. ТЕОРЕМИ ПОДІБНОСТІ

Основні положення теорії подібності зазвичай систематизуються у вигляді першої, другої та третьої теорем подібності; перші дві визначають необхідні, а третя – необхідні й достатні умови подібності.

Перша теорема подібності. В основному сучасному формулюванні, яке враховує можливість існування різних типів подібності, перша теорема має такий вигляд: *явища, які є подібними в тому чи іншому розумінні (повно, наближено, фізично, математично тощо), мають певні комбінації параметрів, які називаються критеріями подібності, і які є чисельно однаковими для подібних явищ.*

Отже, перша теорема подібності стверджує, що для явищ (об'єктів, процесів), які є подібними в тому чи іншому розумінні, існують однакові за формою алгебраїчного запису й рівні чисельно безрозмірні степеневі комплекси (добутки та частки) певних груп фізичних величин, які характеризують ці явища. Ця теорема формулює необхідну умову існування подібності (однакові критерії подібності в подібних явищах), але вона не вказує способів установлення подібності й способу її реалізації при побудові моделей.

У справедливості тверджень першої теореми ми переконались на конкретному прикладі, розглядаючи подібні явища теплопровідності.

Перша теорема подібності називається також *теоремою Ньютона або Ньютона – Бертрана*.

Друга теорема подібності. В основному формулюванні ця теорема має такий вигляд: *будь-яке повне рівняння фізичного процесу, яке записане в певній системі одиниць, може бути зображеним функціональною залежністю між критеріями подібності, які формуються з параметрів, що характеризують процес.*

Ця теорема часто називається π-теоремою, оскільки критерії подібності, які характеризують подібні процеси, найчастіше позначають грецькою літерою π.

Друга теорема подібності встановлює можливість зображення інтеграла диференціального рівняння фізичного процесу не як функції параметрів процесу й системи, у якій відбуваються ці процеси, а як функції відповідно побудованих деяких безрозмірних величин – критеріїв подібності. Якщо диференціальне рівняння, яке характеризує процес, проінтегровано, то одержаний інтеграл дозволяє отримати однозначний функціональний зв'язок між критеріями подібності відповідно до тих припущень, які були прийняті при складанні та інтегруванні даного рівняння. Якщо ж диференціальне рівняння відсутнє або не інтегрувалось, то тип функціональних зв'язків між критеріями подібності не буде встановлений.

Друга теорема базується на дослідженнях Букінгема, Федермана та Еренферст-Афанасьєвої. Можливість зображення інтеграла як функції від критеріїв подібності, знайдених з диференціального рівняння, була строго доведена для частинного випадку Букінгемом. У більш загальному вигляді це положення як математична теорема було доведено Федерманом. Еренферст-Афанасьєва навела доведення в загальному вигляді і знайшла умови, за яких інтеграл можна зобразити як функцію критеріїв подібності.

Проілюструємо справедливість тверджень другої теореми подібності на конкретному прикладі.

Розглядається процес зміни в часі t напруги u на конденсаторі в контурі, який утворено послідовним з'єднанням конденсатора ємністю C з активним елементом, що має опір R. Початком процесу є вмикання такого електричного контуру на сталу напругу E (рис. 1.3.1).

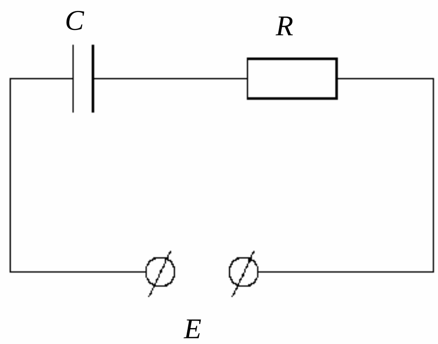


Рис. 1.3.1

За різних значень *C, R, E* процеси в електричному контурі, що розглядається, явно матимуть якісно однаковий характер, що дозволяє розглядати їх як групу подібних процесів.

Перехідний процес у такому контурі при вмиканні сталої напруги *E* описується лінійним диференціальним рівнянням

$$RC\frac{du}{dt}+u=E\,. \tag{1.3.5}$$

Розв'яжемо це рівняння. Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$RC\frac{du}{dt}+u=0 \Rightarrow \frac{du}{u}+\frac{dt}{RC}=0 \Rightarrow \ln u+\frac{t}{RC}=\ln A \Rightarrow$$

$$\ln u-\ln A=-\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{u}{A}=e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow u(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

За методом варіації довільної сталої шукатимемо розв'язок рівняння (1.3.5) у вигляді

$$u(t) = A(t)e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad (1.3.6)$$

де $A(t)$ – поки що невідома функція.

Підставимо (1.3.6) у (1.3.5):

$$RC(A'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - A(t)\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}) + A(t)e^{-\frac{t}{RC}} = E \Rightarrow$$

$$RCA'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \underline{A(t)e^{-\frac{t}{RC}}} + \underline{A(t)e^{-\frac{t}{RC}}} = E \Rightarrow A'(t) = \frac{E}{RC}e^{\frac{t}{RC}} \Rightarrow \qquad (1.3.7)$$

$$A(t) = Ee^{\frac{t}{RC}} + A_1,$$

де A_1 – довільна стала. Підстановка (1.3.7) у (1.3.6) дозволяє отримати загальний розв'язок рівняння (1.3.5) у вигляді

$$u(t) = E + A_1 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

З нульової початкової умови $u = 0$ при $t = 0$ матимемо $0 = E + A_1$ при $t = 0$. Звідси $A_1 = -E$, і розв'язок рівняння (1.3.5) за нульової початкової умови набуде вигляду

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \qquad (1.3.8)$$

Усі члени будь-якого рівняння, яке описує який-небудь фізичний процес, завжди мають однакову розмірність (правило Фур'є), тому рівняння (1.3.5) можна привести до безрозмірного вигляду, тобто зобразити його у вигляді суми безрозмірних членів, якщо поділити його на один із членів, наприклад на u:

$$\frac{RC}{u}\frac{du}{dt} + 1 - \frac{E}{u} = 0$$

або, позначаючи

$$\pi_1 = \frac{RC}{u}\frac{du}{dt} \text{ і } \pi_2 = \frac{E}{u},$$

матимемо

$$\pi_1 + 1 - \pi_2 = 0. \qquad (1.3.9)$$

Перетворимо π_1, скориставшись правилом заміщення.

Правило заміщення. Якщо

$$\frac{u_1'}{u_1}=\frac{u_2'}{u_2}=M_u\,, \qquad (1.3.10)$$

де M_u - const , то

$$\frac{du'}{du}=M_u\,. \qquad (1.3.11)$$

Щоб переконатися у справедливості цього правила, зазначимо, що пропорції

$$\frac{u_1'}{u_1}=\frac{u_2'}{u_2} \text{ і } \frac{u_1'+u_2'}{u_1+u_2}=\frac{u_2'-u_1'}{u_2-u_1}$$

еквівалентні згідно з властивостями пропорцій. Тому врахування (1.3.10) дає

$$\frac{u_1'+u_2'}{u_1+u_2}=\frac{u_2'-u_1'}{u_2-u_1}=M_u\,,$$

звідки

$$\frac{\Delta u'}{\Delta u}=M_u\,, \qquad (1.3.12)$$

де $\Delta u'=u_2'-u_1'$, $\Delta u=u_2-u_1$.

Перейдемо до границі при $\Delta u\to 0$ в обох частинах рівності (1.3.12)

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta u'}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}M_u\,.$$

Ураховуючи, що $M_u-\text{const}$, отримаємо (1.3.11).

Звідси маємо правило: вивчаючи подібність, замість похідної від характерної величини можна розглядати відношення відповідних величин – так званий інтегральний аналог. Аналогічно й для старших похідних.

Тому при вивченні подібних процесів в електричному контурі замість похідної $\frac{du}{dt}$ можна розглядати її інтегральний аналог $\frac{u}{t}$, звідси

$$\pi_1=\frac{RC}{u}\frac{u}{t}=\frac{RC}{t}\,.$$

Отже, π_1 і π_2 у рівнянні (1.3.9) можна зобразити у вигляді

$$\left.\begin{aligned}\pi_1&=\frac{RC}{t}=R^1C^1t^{-1}u^0E^0,\\ \pi_2&=\frac{E}{u}=E^1u^{-1}R^0C^0t^0.\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.13)$$

Вирази для π_1 і π_2, що мають вигляд безрозмірних степеневих комплексів параметрів, які характеризують процес, що розглядається, називаються критеріями подібності; критерії подібності чисельно однакові для відповідних точок подібних процесів.

Спосіб установлення критеріїв подібності за відомим математичним описанням процесу шляхом приведення його до безрозмірного вигляду, при якому символи диференціювання та інтегрування у виразах для критеріїв подібності опускаються, називається *правилом інтегральних аналогів*.

Наявність критеріїв подібності π_1 і π_2 у задачі, що розглядається, дозволяє розв'язок цієї задачі зобразити як функцію критеріїв подібності

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \Rightarrow \frac{u(t)}{E} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}},$$

звідки

$$\frac{1}{\pi_2} = 1 - e^{-\frac{1}{\pi_1}} \text{ або } \pi_2 = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\pi_1}}}. \qquad (1.3.14)$$

Приклад, який ми розглянули, підтверджує положення першої теореми подібності: явища, що є подібними, мають певні комбінації параметрів, які називаються критеріями подібності і є чисельно однаковими для подібних явищ.

Розглянутий приклад ілюструє також другу теорему подібності. А саме: одержання співвідношень (1.3.9) і (1.3.13) підтверджує положення другої теореми подібності, що будь-яке повне рівняння фізичного процесу може бути зображеним функціональною залежністю між критеріями подібності (у прикладі – співвідношення (1.3.9)), які формуються з параметрів, що характеризують процес (у прикладі – співвідношення (1.3.13)).

Розглянутий приклад підтверджує також той факт, що друга теорема подібності встановлює можливість зображення інтеграла диференціального рівняння фізичного процесу не як функцію параметрів процесу і системи, у якій відбуваються ці процеси (у прикладі – функція (1.3.8), яка встановлює зв'язок між u і E, R, C і t), а як функцію критеріїв подібності (у прикладі – співвідношення (1.3.14)). Така можливість була забезпечена тим, що диференціальне рівняння (1.3.5) математичної моделі процесу було проінтегровано. Якби цього не вдалося зробити (напр., через складність рівняння), то теоретичний аналіз, що був застосований у прикладі, не дозволив би знайти зв'язок між критеріями подібності.

Слід зауважити (і це дуже важливо!), що критерії подібності подібних процесів можна отримати й у тому випадку, коли математичне описання процесу є невідомим. Для знаходження критеріїв подібності в такому разі застосовується метод аналізу розмірностей фізичних величин, які визначають характер процесу, що розглядається. До цього методу ми звернемося пізніше.

Третя теорема подібності. У найбільш поширеному формулюванні третя теорема має такий вигляд*: необхідними й достатніми умовами для подібності явищ, які зіставляються між собою, є пропорційність відповідних параметрів, що входять в умови однозначності математичних моделей цих явищ, а також рівність критеріїв подібності цих явищ.*

Третя теорема подібності називається також *оберненою теоремою подібності* або *теоремою Кірпічова – Гухмана*.

До умов однозначності, які згадуються в теоремі, належать такі, незалежні від механізму самого явища, фактори й умови:

- геометричні властивості системи, у якій відбувається процес;
- фізичні параметри середовища й тіл, які утворюють систему;
- початковий стан системи (початкові умови);
- умови на межах системи (межові або крайові);
- взаємодія об’єкта й зовнішнього середовища.

Розглянутий нами приклад про електричне коло підтверджує положення третьої теореми подібності, а саме: розглядаючи подібні процеси з пропорційними величинами u, E, R, C у відповідні моменти часу t, ми прийшли до критеріїв подібності подібних процесів (у прикладі – співвідношення (1.3.13)), які чисельно однакові для подібних процесів у відповідні моменти часу.

Установлення критеріїв подібності означає перехід від величин, що характеризують процес (у прикладі – u, E, R, C, t), до безрозмірних величин (у прикладі – π_1 і π_2), які називаються критеріями подібності і дають можливість змінити характер аналізу процесу, що відбувається в системі. Критерії подібності стають новими змінними системи, їх називають *узагальненими змінними системи*.

Існує думка, що тільки друга теорема подібності може розглядатися як теорема в тому розумінні, у якому це поняття використовується в математиці, а перша й третя теореми подібності є правилами виявлення й забезпечення подібності. У даному курсі лекцій використовується найбільш поширена термінологія – назва першої теореми, яку ввів ще Ньютон, і запропонована Кірпічовим і Гухманом назва третьої теореми.

4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ВІДСУТНОСТІ МОДЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Якщо об'єкт, що вивчається, складний, то часто важко описати його за допомогою математичної моделі, тобто складаючи відповідне визначальне рівняння для основної величини, яка характеризує об'єкт. Відсутність математичного описання оригіналу, а отже й відсутність математичного описання моделі, робить неможливим установлення масштабів і критеріїв подібності за допомогою відповідних визначальних рівнянь оригіналу й моделі.

У багатьох випадках це вдається зробити, використовуючи аналіз розмірностей усіх фізичних величин, які визначають стан матеріального об'єкта, що вивчається, а також π*-теорему*, яка вказує метод установлення критеріїв подібності, коли математичні описання оригіналу й моделі невідомі.

Аналіз розмірностей і π-теорема виявляються також дуже корисними при створенні розрахункових математичних моделей на основі даних, які отримуються шляхом натурних експериментів.

4.1. РОЗМІРНОСТІ

Наріжним каменем теорії розмірностей є твердження: основою будь-якої точної науки є вимірювання величин.

Вимірювання – це порівняння шляхом експерименту даної величини з деяким її значенням, прийнятим за одиницю виміру.

Нехай V – величина, яка вимірюється, а $[V]$ – її одиниця виміру. Виміряти V – це означає знайти число, що виражає відношення величини, яка вимірюється, до одиниці виміру, тобто

$$v = \frac{V}{[V]};$$

це число називається *числовим значенням величини*, яка вимірюється. Таким чином, числове значення величини, яка вимірюється, обернено пропорційне до величини одиниці виміру.

Одиниці виміру різних фізичних величин у принципі можна вибирати як завгодно й незалежно одна від одної. Проте, довільно вибираються одиниці виміру небагатьох фізичних величин.

Різні фізичні величини можуть бути пов'язані між собою певними співвідношеннями. Тому, якщо вибрати довільно одиниці виміру деяких з них, то через ці одиниці можна визначити одиниці виміру всіх інших фізичних величин.

Фізичні величини, розмір одиниць виміру яких вибирається довільно, називаються *основними фізичними величинами*. Одиниці виміру основних фізичних величин називаються *основними одиницями виміру.*

Одиниці всіх інших вторинних фізичних величин виражаються через основні за допомогою відповідних законів і рівнянь зв'язку. Одиниці виміру вторинних фізичних величин називаються *похідними одиницями виміру.*

Сукупність основних і похідних одиниць виміру складає систему одиниць виміру.

У міжнародній системі одиниць, яка скорочено називається SI, основними фізичними величинами є довжина, маса, час, сила електричного струму, термодинамічна температура, сила світла.

Основними одиницями виміру в цій системі вибрано метр, кілограм, секунду, ампер, кельвін і канделу. Додатковими одиницями виміру є радіан – одиниця плоского кута і стерадіан – одиниця тілесного кута.

Припустимо, що між фізичною величиною X, для якої знаходиться похідна одиниця виміру $[X]$, і фізичними величинами $Y_1, Y_2, \ldots$, для яких установлено незалежні основні одиниці виміру $[Y_1], [Y_2], \ldots$, існує залежність

$$X = F(Y_1, Y_2, \ldots). \tag{1.4.1}$$

Такою ж має бути й залежність між числовими значеннями $x, y_1, y_2, \ldots$ цих фізичних величин:

$$x = F\left(y_1, y_2, \ldots\right). \tag{1.4.2}$$

Оскільки

$$X = x[X], \; Y_1 = y_1[Y_1], \; Y_2 = y_2[Y_2], \ldots,$$

то згідно з рівністю (1.4.1), матимемо

$$x[X] = F(y_1[Y_1], \; y_2[Y_2], \ldots), \tag{1.4.3}$$

звідки випливає, що $[X]$ є деякою функцією від $[Y_1], [Y_2], \ldots$,

$$[X] = f([Y_1], \; [Y_2], \ldots), \tag{1.4.4}$$

яка потребує визначення. З рівностей (1.4.2)–(1.4.4) матимемо

$$[X] = f([Y_1], \; [Y_2], \ldots) = \frac{F(y_1[Y_1], y_2[Y_2], \ldots)}{F(y_1, y_2, \ldots)}. \tag{1.4.5}$$

Частка від ділення чисельника цього дробу на знаменник не буде залежати від $y_1, y_2, \ldots$ тільки за умови, що функція F однорідна, тобто має вигляд степеневого комплексу

$$X = F(Y_1, Y_2, \ldots) = aY_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \ldots, \tag{1.4.6}$$

де $a - \mathrm{const}$. Тоді згідно з (1.4.5)

$$[X] = [Y_1]^{\alpha_1} [Y_2]^{\alpha_2} \ldots \ . \qquad (1.4.7)$$

Таким чином, для знаходження похідних одиниць виміру придатними є тільки такі закономірності, які виражаються однорідними функціями.

Формула (1.4.7), що показує, як похідна одиниця виміру залежить від основних одиниць, називається *формулою розмірності відповідної фізичної величини*.

Символічний (буквений) вираз залежності похідної одиниці виміру деякої фізичної величини від основних одиниць у вигляді степеневого комплексу називається *розмірністю* цієї фізичної величини.

Квадратними дужками будемо позначати розмірність величини: позначення $[X]$ означатиме розмірність величини X. Розмірність виражається в символах основних одиниць виміру.

Наведемо розмірності й символи основних одиниць системи СІ:

$[довжина] = L,$ одиниця виміру – метр (м);

$[маса] = M,$ одиниця виміру – кілограм (кг);

$[час] = T,$ одиниця виміру – секунда (с);

$[сила\ електричного\ струму] = I,$ одиниця виміру – ампер (А);

$[температура] = \theta,$ одиниця виміру – кельвін (К);

$[сила\ світла] = J,$ одиниця виміру – кандела (кд).

Згідно з формулою (1.4.7) розмірність фізичної величини X у системі СІ в загальному випадку матиме вигляд

$$[X] = L^{\alpha_1} M^{\alpha_2} T^{\alpha_3} I^{\alpha_4} \theta^{\alpha_5} J^{\alpha_6} \ . \qquad (1.4.8)$$

На практиці, говорячи про розмірності різних величин, часто мають на увазі просто одиниці, у яких виражаються числові значення цих величин. При цьому замість рівності (1.4.8) пишуть

$$[X] = м^{\alpha_1} кг^{\alpha_2} с^{\alpha_3} A^{\alpha_4} K^{\alpha_5} кд^{\alpha_6} \ . \qquad (1.4.9)$$

Приклад 1. Частота періодичного процесу з періодом τ дорівнює $f = \frac{1}{\tau}$. Одиницею виміру частоти служить *герц* – частота періодичного процесу, у якому один цикл відбувається за одну секунду. Якщо τ вимірюється в секундах (с), то частота f виражається в герцах (Гц). Формула розмірності частоти

$$[f] = T^{-1} = c^{-1}.$$

Однак часто пишуть $[f] = Гц$.

Крім розмірних величин у фізичних задачах зустрічаються так звані безрозмірні.

Величина V називається *безрозмірною*, якщо її формула розмірності має вигляд

$$[V]=L^0M^0T^0I^0\theta^0J^0,$$

при цьому

$$V=v[V]=v.$$

На цій підставі, маючи справу з безрозмірною величиною, говорять про нульову розмірність або розмірність, яка дорівнює одиниці.

Оскільки формула розмірності (1.4.8) може бути написаною для будь-якої величини, а кожна величина має відповідну розмірність, то такі величини слід називати *величинами з одиничною розмірністю* $[V]=1$.

Прикладами таких величин є відношення фізично однорідних величин: відносна зміна будь-якої величини

$$\frac{\Delta V}{V},$$

відношення дуги кола до радіуса тощо. Безрозмірними величинами є абстрактні змінні й сталі, з якими має справу "чиста" математика.

Функціональна залежність (1.4.6), яка вибрана для встановлення похідної одиниці виміру $[X]$ величини X, називається *визначальним рівнянням* цієї величини.

Коефіцієнт пропорційності a у такому рівнянні в загальному випадку залежить від вибору одиниць виміру відповідних величин. У визначальному рівнянні сталий коефіцієнт a завжди є безрозмірною величиною

$$[a]=1,$$

причому в системі СІ його числове значення дорівнює одиниці $a=1$. Тому в системі СІ формула розмірності (1.4.7) повністю копіює визначальне рівняння (1.4.6).

Якщо ж залежність (1.4.6) не є визначальною, то коефіцієнт a, який не дорівнює одиниці, може бути як безрозмірною, так і розмірною величиною. У першому випадку формула розмірності (1.4.7) копіює рівняння (1.4.6) з точністю до сталого безрозмірного множника, у другому – замість рівності (1.4.7) маємо

$$[X]=[a][Y_1]^{\alpha_1}[Y_2]^{\alpha_2}... \qquad (1.4.10)$$

Приклад 2. Кінетична енергія тіла масою m, яке рухається зі швидкістю v, дорівнює $E=\frac{1}{2}mv^2$.

Оскільки швидкість v дорівнює шляху l, поділеному на час t, тобто $v=\frac{l}{t}$, то остаточно буде

$$E=\frac{1}{2}ml^2t^{-2}.$$

Це рівняння має вигляд рівності (1.4.7), але в системі СІ воно не є визначальним для енергії. Енергія, тобто працездатність, має розмірність роботи A, тобто $[A]=ML^2T^{-2}$. У системі СІ коефіцієнт $a=1/2$ – безрозмірна величина, і у формулі розмірності

$$[E]=ML^2T^{-2}$$

його немає.

Приклад 3. Одиниця виміру сили в системі СІ може бути встановленою на основі другого закону Ньютона (сила F пропорційна масі m і прискоренню $\frac{l}{t^2}$):

$$F=a_1\frac{ml}{t^2},$$

а також закону всесвітнього тяжіння (сила F пропорційна добутку мас m_1 і m_2 і обернено пропорційна квадрату відстані l)

$$F=a_2\frac{m_1m_2}{l^2}.$$

У системі СІ визначальним рівнянням для сили прийнято закон Ньютона. Одиниця виміру сили – ньютон (Н) визначається як сила, яка надає масі в 1 кг прискорення $1м/с^2$. Тому за формулою другого закону Ньютона

$$Н=a_1\frac{1кг\cdot 1м}{(1с)^2}$$

і, як наслідок, $[a_1]=1, a_1=1$ і

$$F=mlt^{-2},$$

а також

$$[F]=MLT^{-2}.$$

У цьому випадку формула закону всесвітнього тяжіння визначає сталу a_2 як гравітаційну сталу

$$a_2=G=\frac{F\cdot l^2}{m_1\cdot m_2}=6{,}67\cdot 10^{-11}Нм^2кг^{-2},$$

яка має розмірність $[G]=L^3M^{-1}T^{-2}$.

Висновки. Таким чином, формула розмірності похідної фізичної величини однозначно визначається вибором основних одиниць виміру й визначального рівняння.

Одна й та сама формула розмірності може відповідати різним фізичним величинам. Так, наприклад, у СІ розмірності [роботи], [енергії], [моменту сили], [кількості теплоти] збігаються й дорівнюють

$$L^2MT^{-2}.$$

Кількість розмірних коефіцієнтів (фізичних сталих) у фізичних формулах залежить від кількості основних одиниць виміру. Чим більшою є кількість основних фізичних одиниць, тим більшою є кількість універсальних сталих у фізичних формулах. Це ускладнює формули й обчислення з їхньою допомогою. І навпаки, чим меншою є кількість основних одиниць виміру, тим меншою є кількість універсальних фізичних сталих і тим простішими є фізичні формули. Однак при цьому збільшується кількість похідних одиниць виміру, які мають однакові розмірності.

Переконаємося, що за допомогою формули розмірності (1.4.7)

$$[X]=[Y_1]^{\alpha_1}[Y_2]^{\alpha_2}[Y_3]^{\alpha_3}...$$

є можливим досить простий перехід від однієї системи одиниць до іншої.

Нехай для фізичних величин $Y_1, Y_2,...$ одиницями виміру в першій системі є $[Y_1'], [Y_2'],...$, а в другій – $[Y_1''], [Y_2''],...$ Відношення між одиницями виміру й відповідними числовими значеннями $y_1, y_2,...$ величин $Y_1, Y_2,...$, які належать різним системам, визначають безрозмірні коефіцієнти

$$\beta_1=\frac{[Y_1']}{[Y_1'']}=\frac{y_1''}{y_1'}, \beta_2=\frac{[Y_2']}{[Y_2'']}=\frac{y_2''}{y_2'},... \qquad (1.4.11)$$

(оскільки $Y_1=y_1'[Y_1'],\ Y_1=y_1''[Y_1''],...$ у першій і другій системах виміру, то

$$[Y_1']=\frac{Y_1}{y_1'},\ [Y_1'']=\frac{Y_1}{y_1''};$$

поділивши першу одержану рівність на другу, отримаємо β_1. Аналогічно отримуються інші безрозмірні коефіцієнти $\beta_2, \beta_3,...$). Безрозмірні коефіцієнти β_i показують, у скільки разів одна одиниця виміру $[Y_i']$ більша або менша другої $[Y_i'']$ і у скільки разів унаслідок цього зменшується або збільшується числове значення y_i.

Для фізичної величини X, яка пов’язана з $Y_1, Y_2,...$ залежністю (1.4.6)

$$X=F(Y_1,\ Y_2,...)=aY_1^{\alpha_1}Y_2^{\alpha_2}...,$$

числове значення визначається аналітичною формулою

$$x=ay_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}...$$

Тому в першій системі одиниць матимемо

$$x'=a(y_1')^{\alpha_1}(y_2')^{\alpha_2}...,$$

а в другій –

$$x''=a(y_1'')^{\alpha_1}(y_2'')^{\alpha_2}... .$$

З урахуванням співвідношення (1.4.11) матимемо

$$y_1''=y_1'\beta_1,\ y_2''=y_2'\beta_2,...$$

Підставимо ці значення у співвідношення для x'':

$$x''=a(y_1'\beta_1)^{\alpha_1}(y_2'\beta_2)^{\alpha_2}...=$$

$$=a(y_1')^{\alpha_1}(y_2')^{\alpha_2}...(\beta_1)^{\alpha_1}(\beta_2)^{\alpha_2}...=x'(\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}...).$$

Таким чином, знаходиться коефіцієнт

$$\beta_x=\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}... \qquad (1.4.12)$$

для перерахунку числового значення похідної фізичної величини X з однієї системи виміру в іншу. Одержана формула (1.4.12) має таку ж структуру, як і формула (1.4.7).

Приклад. Розглянемо залежність, що пов'язує шлях S, який проходить тіло, час t і швидкість v:

$$v=\frac{S}{t}=St^{-1}. \qquad (1.4.13)$$

Розмірності шляху, часу і швидкості пов'язані аналогічною формулою:

$$[v]=\frac{[S]}{[t]}=[S][t]^{-1}. \qquad (1.4.14)$$

Розмірності $[S]$ і $[t]$ – незалежні, розмірність $[v]$ – похідна (залежна). Нехай числові значення цих величин виражаються в одиницях системи СІ, тобто відповідно в метрах, секундах і метрах за секунду *(м, с, м/с)*. Позначимо ці числові значення S', t', v'.

Нехай у іншій системі одиниць ці ж самі числові значення виражаються в сантиметрах, хвилинах, сантиметрах за хвилину *(см, хв, см/хв)*. Позначимо через S'', t'', v'' числові значення тих самих величин у другій системі одиниць виміру. При цьому

$$\beta_S=\frac{S''}{S'}=\frac{100}{1}, \beta_t=\frac{t''}{t'}=\frac{1}{60}.$$

За аналогією з рівністю (1.4.14) знаходимо

$$\beta_v=\beta_S\beta_t^{-1}=100(\frac{1}{60})^{-1}=6000.$$

Тому

$$v''=\beta_v v'=6000v'.$$

Числовий приклад. Нехай $v'=0{,}15 м/с$. Візьмемо в системі *(м, с, м/с)* $S'=0{,}15 м$, а $t'=1 с$. Це дозволить отримати вказану швидкість $v'=0{,}15 м/с$.

Якщо ці величини виразити в системі *(см, хв, см/хв),* то матимемо $S''=15 см, t''=(\frac{1}{60}) хв$. Звідси $\beta_S=\frac{S''}{S'}=\frac{15}{0{,}15}=100; \beta_t=\frac{t''}{t'}=\frac{1}{60}:1=\frac{1}{60}$. Це дозволяє отримати

$$\beta_v = \beta_S \beta_t^{-1} = 100(\frac{1}{60})^{-1} = 6000 .$$

Тому

$$v'' = \beta_v v' = 6000 v' .$$

4.2. π-ТЕОРЕМА

Фізична закономірність, яка визначає стан чи зміну стану будь-якого матеріального об'єкта, існує об'єктивно, незалежно від того, відома вона чи ні. Нехай математичним описанням (розрахунковою моделлю) такої фізичної закономірності є функціональна залежність

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad (1.4.15)$$

між визначальними величинами $x_1, x_2, ..., x_n$.

π **-теорема.** Залежність (1.4.15), що математично виражає стан чи зміну стану матеріального об'єкта і пов'язує $n = k + m$ величин

$$x_1,\ x_2, ...,\ x_k,\ X_1,\ X_2, ...,\ X_m ,$$

серед яких k величин $x_1,\ x_2, ...,\ x_k$ мають незалежні розмірності, може бути перетворена на залежність між $m = n - k$ незалежними безрозмірними степеневими комплексами фізичних величин вигляду

$$\pi_i = \frac{X_i}{x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \cdot ... \cdot x_k^{\alpha_{ki}}},\ i = 1, 2, ..., m ,$$

які називаються *критеріями подібності*.

Доведення. Нехай у рівнянні (1.4.15) функція Φ невідома, але відомі всі розмірні визначальні фізичні величини $x_1, x_2, ..., x_n$, які містяться під її знаком (у тому числі й фізичні розмірні константи). Ставиться задача: знайти критерії подібності $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$, за яких залежність (1.4.15) перетворюється на залежність

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m) = 0 , \qquad (1.4.16)$$

де φ – також невідома функція.

Незалежними розмірностями будемо вважати такі, які не можуть бути отримані у вигляді степеневих комплексів розмірностей інших величин. Наприклад, розмірності $[довжини] = L, [швидкості] = LT^{-1}$ і $[енергії] = L^2 MT^{-2}$ – незалежні; розмірності $[довжини] = L$, $[швидкості] = LT^{-1}$ і $[прискорення] = LT^{-2}$ – залежні, оскільки

$$[прискорення] = LT^{-2} = L^{-1}(LT^{-1})^2 =$$
$$= [довжини]^{-1}[швидкості]^2 .$$

Отже, нехай серед визначальних фізичних величин $x_1, x_2, ..., x_n$ рівняння (1.4.15) незалежні розмірності мають перші k величин:

$$x_1, x_2, ..., x_k .$$

Інші m величин

$$x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+m}$$

мають залежні розмірності, причому, $k + m = n$. Позначимо ці величини для зручності через

$$X_1 = x_{k+1}, X_2 = x_{k+2}, ..., X_m = x_{k+m} .$$

Нехай розмірності цих величин визначаються співвідношеннями

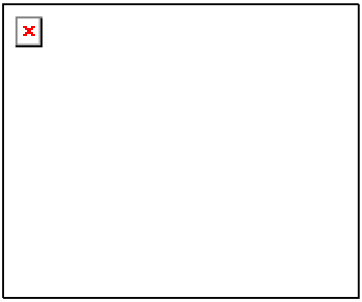
$$[X_1] = [x_1]^{\alpha_{11}} \cdot [x_2]^{\alpha_{21}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{k1}},$$

$$[X_2] = [x_1]^{\alpha_{12}} \cdot [x_2]^{\alpha_{22}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{k2}},$$

....

$$[X_m] = [x_1]^{\alpha_{1m}} \cdot [x_2]^{\alpha_{2m}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{km}} .$$

На основі цих формул можна скласти m безрозмірних степеневих комплексів



(1.4.17)

Ці комплекси називають *критеріями подібності* $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$.

Доведемо тепер, що функціональна залежність (1.4.15)

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

може бути приведеною до критеріальної форми (1.4.16)

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m) = 0 .$$

Для строгого доведення цього приймемо величини $x_1, x_2, ..., x_k$ за основні й будемо виражати їх числові значення в незалежних одиницях $[x_1], [x_2], ..., [x_k]$. Значення $X_1, X_2, ..., X_m$ як похідних величин будемо виражати в похідних одиницях $[X_1], [X_2], ..., [X_m]$.

Загальна структура математичного описання фізичної закономірності не залежить від одиниць виміру визначальних фізичних величин. Однак, залежно від того, які величини вибрані за основні, у математичному описанні можуть з'явитися розмірні сталі, які належать до визначальних фізичних величин. За такої умови зі зміною розмірностей основних величин у математичному описанні змінюються тільки значення безрозмірних сталих коефіцієнтів.

Значення визначальних величин у вибраних одиницях виміру пов'язані рівнянням

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_k, X_1, X_2, ..., X_m) = 0. \qquad (1.4.18)$$

Змінимо розмірності одиниць виміру величин $x_1, x_2, ..., x_k$ відповідно у $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ разів. Тоді нові значення $x_1', x_2', ..., x_k', X_1', X_2', ..., X_m'$ будуть дорівнювати

$$\left.\begin{aligned}
&x_1' = \beta_1 x_1,\\
&x_2' = \beta_2 x_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&x_k' = \beta_k x_k;\\
&X_1' = \beta_1^{\alpha_{11}} \cdot \beta_2^{\alpha_{21}} \cdot ... \cdot \beta_k^{\alpha_{k1}} X_1,\\
&X_2' = \beta_1^{\alpha_{12}} \cdot \beta_2^{\alpha_{22}} \cdot ... \cdot \beta_k^{\alpha_{k2}} X_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&X_m' = \beta_1^{\alpha_{1m}} \cdot \beta_2^{\alpha_{2m}} \cdot ... \cdot \beta_k^{\alpha_{km}} X_m.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.19)$$

Закономірність, яка описується визначальним рівнянням (1.4.18), не залежить від вибору системи одиниць. Тому маємо

$$\Phi(x_1', x_2', ..., x_k'; X_1', X_2', ..., X_m') = 0. \qquad (1.4.20)$$

Виберемо безрозмірні коефіцієнти $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ рівними

$$\beta_1 = \frac{1}{x_1}, \beta_2 = \frac{1}{x_2}, ..., \beta_k = \frac{1}{x_k}.$$

Якщо числові значення $x_1, x_2, ..., x_k$ змінні, то змінними будуть і $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$. Це означає використання незвичної системи одиниць виміру, що неперервно змінюються, системи, яка принципово завжди можлива, але очевидно у всіх випадках, крім даного, є дуже незручною. За таких умов згідно із системою (4.19) маємо

$$x_1' = x_2' = \ldots = x_k' = 1,$$

$$X_1' = \frac{1}{x_1^{\alpha_{11}}} \cdot \frac{1}{x_2^{\alpha_{21}}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_k^{\alpha_{k1}}} X_1 = \frac{X_1}{x_1^{\alpha_{11}} \cdot x_2^{\alpha_{21}} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_{k1}}} = \pi_1,$$

$$X_2' = \frac{X_2}{x_1^{\alpha_{12}} \cdot x_2^{\alpha_{22}} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_{k2}}} = \pi_2,$$

....

$$X_m' = \frac{X_m}{x_1^{\alpha_{1m}} \cdot x_2^{\alpha_{2m}} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_{km}}} = \pi_m,$$

де π_1, $\pi_2, \ldots,$ π_m – безрозмірні степеневі комплекси – критерії подібності. Рівняння (1.4.20) набуває при цьому критеріальної форми (1.4.16):

$$\Phi(1, 1, \ldots, 1; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) \equiv \varphi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = 0.$$

Таким чином, залежність між n розмірних величин $x_1, x_2, \ldots, x_k; x_1, x_2, \ldots, x_m$ замінилася залежністю між m безрозмірних степеневих комплексів $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$.

Ця доведена теорема дозволяє не використовувати при встановленні критеріїв подібності математичне описання об'єкта, який розглядається.

Приклад. Розглядається явище протікання електричного струму i через послідовно з'єднані опір r і ємність C після підключення сталого напруження $u = \mathrm{const}$. Це явище характеризується в кожний момент часу конкретними значеннями $i, u, r, C, t.$

Отже, перехідний процес у rC-контурі визначає залежність, що пов'язує п'ять $(n = 5)$ фізичних величин: $i, u, r, C, t.$ Їх розмірності в системі СІ дорівнюють

$$[i] = I, \quad [u] = L^2 M T^{-3} I^{-1}, \quad [r] = L^2 M T^{-3} I^{-2},$$

$$[C] = L^{-2} M^{-1} T^4 I^2, \quad [t] = T.$$

Звідси видно, що розмірності величин u і t виражаються через розмірності величин i, r і C:

$$[u] = L^2 M T^{-3} I^{-2} \cdot I^1 = [r] \cdot [i], \tag{1.4.21}$$

$$[t] = T = L^2 M T^{-3} I^{-2} \cdot L^{-2} M^{-1} T^4 I^2 = [r] \cdot [C].$$

З останньої рівності маємо

$$[t] = [r] \cdot [C]. \tag{1.4.22}$$

Тому з п'яти визначальних величин i, u, r, C, t три – $i,$ $r,$ t – мають незалежні розмірності. Отже, у даному випадку $k = 3, m = n - k = 5 - 3 = 2$. Тому залежність між i, u, r, C, t може бути заміненою залежністю між двома деякими степеневими комплексами π_1 і π_2, складеними з i, u, r, C, t. Ці комплекси на основі формул розмірності (1.4.21), (1.4.22) і системи (1.4.17) матимуть вигляд

$$[u] = [r] \cdot [i] \Rightarrow \frac{u}{ir} = \pi_1;$$

$$[t] = [r] \cdot [C] \Rightarrow \frac{t}{rC} = \pi_2.$$

Таким чином, згідно з аналізом розмірностей і π-теоремою залежність між i, u, r, C, t може бути зображеною у вигляді залежності між критеріями

$$\pi_1 = \psi(\pi_2) \text{ або } \frac{u}{ir} = \psi(\frac{t}{rC}),$$

де функція ψ залишається невизначеною.

У даному випадку висновки, що отримуються на основі π-теореми, легко перевіряються. Якщо скласти й розв’язати відповідне диференціальне рівняння об’єкта, то знайдемо

$$i = \frac{u}{r} \exp(-\frac{t}{rC}) \Rightarrow \frac{1}{\pi_1} = \exp(-\pi_2),$$

або

$$\pi_1 = \exp(\pi_2).$$

4.3. МЕТОДИКА ЗНАХОДЖЕННЯ КРИТЕРІЇВ ПОДІБНОСТІ ЗА ВІДСУТНОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСАННЯ ОБ’ЄКТА

У загальному випадку методика знаходження критеріїв подібності на основі аналізу розмірностей і π-теореми, коли математичне описання об’єкта невідоме, полягає в такому:

1. Установлюються всі n фізичних величин:

$$x_1, \quad x_2, ..., \quad x_n,$$

що визначають стан або поведінку об’єкта, який розглядається.

2. Установлюються розмірності всіх n визначальних величин у будь-якій системі одиниць виміру (як правило, у системі СІ).

3. Розмірності одних величин виражаються через розмірності інших:

$$[X_r] = [x_1]^{\alpha_{1r}} \cdot [x_2]^{\alpha_{2r}} \cdot ... \cdot [x_k]^{\alpha_{kr}} \quad (r = 1, 2, ..., m; n = k + m).$$

У результаті встановлюється кількість k величин, які мають незалежні розмірності, і кількість критеріїв подібності $m = n - k$.

4. На основі складених формул розмірностей і згідно із системою (1.4.17) знаходять критерії подібності π_r $(r = 1, 2, ..., m)$.

Приклад. Розглядається явище піднімання рідини всередині капілярної трубки, яка занурена в рідину.

1. Висоту підйому рідини h визначають внутрішній радіус трубки r, питома вага рідини γ і поверхневий натяг σ рідини.

Отже, визначальними фізичними величинами явища є $h, \quad r, \quad \gamma, \quad \sigma$. Їхня кількість $n = 4$.

2. Розмірності визначальних величин у системі СІ є такими:

$$\left[h\right] = L, \ \left[r\right] = L, \ \left[\gamma\right] = L^{-2}MT^{-2}, \ \left[\sigma\right] = MT^{-2}.$$

3. Складаємо формули розмірностей:

$$[h] = [r], \quad [\gamma] = L^{-2} \cdot MT^{-2} = [r]^{-2} \cdot [\sigma]. \qquad (1.4.23)$$

Звідси основними визначальними фізичними величинами є r і σ, тому що вони мають незалежні розмірності. Залежними визначальними фізичними величинами є h і γ – вони мають залежні розмірності.

4. На основі знайдених формул розмірностей (1.4.23) отримаємо два критерії подібності:

$$[h] = [r] \Rightarrow \pi_1 = \frac{h}{r};$$

$$[\gamma] = [\sigma] \cdot [r]^{-2} \Rightarrow \pi_2 = \frac{\gamma r^2}{\sigma}.$$

Таким чином, згідно з аналізом розмірностей і π-теоремою залежність між $h, \quad r, \quad \gamma, \quad \sigma$ може бути зображеною у вигляді

$$\pi_1 = \psi(\pi_2) \Rightarrow \frac{h}{r} = \psi(\frac{\gamma r^2}{\sigma}).$$

Функція ψ, однак, залишається невизначеною.

Конкретний вираз для критеріїв подібності

$$\pi_r = \frac{X_r}{x_1^{\alpha_{1r}} \cdot x_2^{\alpha_{2r}} \cdot ... \cdot x_k^{\alpha_{kr}}}$$

у рівнянні визначається тим, які з визначальних величин вибираються за такі, що мають незалежні розмірності. Оскільки це може бути зроблено по-різному, то форма критеріїв подібності може бути різною. Однак кожна з цих форм завжди може бути перетвореною на будь-яку іншу.

Приклад. Якщо в попередньому прикладі за величини з незалежними розмірностями вибрати не r і σ, а h і γ, то на основі формул розмірностей

$$[r] = [h]; \ [\sigma] = [\gamma][r]^2 = [\gamma][h]^2$$

отримаємо інші критерії подібності:

$$[r]=[h]\Rightarrow \frac{r}{h}=\pi_1';$$

$$[\sigma]=[\gamma][h]^2\Rightarrow \frac{\sigma}{\gamma h^2}=\pi_2'.$$

Однак

$$\pi_1'=\frac{r}{h}=\frac{1}{\frac{h}{r}}=\frac{1}{\pi}\Rightarrow \pi_1'=\frac{1}{\pi_1};$$

$$\pi_2'=\frac{\sigma}{\gamma h^2}=\frac{1}{\frac{\gamma h^2}{\sigma}}=\frac{1}{\frac{\gamma r^2}{\sigma}\cdot\frac{h^2}{r^2}}=\frac{1}{\pi_1^2\pi_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_2'=\frac{1}{\pi_1^2\pi_2},$$

або

$$\pi_1=\frac{1}{\pi_1'};\quad \pi_2=\frac{(\pi_1')^2}{\pi_2'}.$$

Успіх цього методу знаходження критеріїв подібності залежить від того, наскільки правильно встановлені величини, які визначають об’єкт дослідження. Якщо деякі величини пропущено або вони є зайвими, то тип і кількість критеріїв подібності буде встановлено невірно.

У складних випадках, коли кількість визначальних величин є великою, найпростіший – евристичний – спосіб складання формул розмірностей для величин із залежними розмірностями і знаходження за ними критеріїв подібності є незручним і може призвести до суттєвих помилок.

Найпоширеніший метод формального характеру – це метод, який потребує складання й розв’язання деякої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Цей метод вивчається у більш загальних курсах лекцій з математичного моделювання.

Найзручнішим для практичного застосування є метод вилучення розмірностей. Він полягає в поступовому вилученні із системи формул розмірностей визначальних величин

$$[x_1]=\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\eta_q^{\omega_1},$$

$$[x_2]=\eta_1^{\alpha_2}\eta_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot\eta_q^{\omega_2},$$

....

$$[x_n]=\eta_1^{\alpha_n}\eta_2^{\beta_n}\cdot\ldots\cdot\eta_q^{\omega_n}$$

усіх символів розмірностей $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_q$ основних визначальних величин з одночасним зменшенням кількості формул з n до m. У міру зменшення кількості формул їх праві частини спрощуються, а в лівих частинах формуються все складніші степеневі комплекси з визначальних величин. Поява, унаслідок виключення чергового символу η_i, рівності, що містить у правій частині одиницю, означає, що в лівій її частині сформовано безрозмірний степеневий комплекс – критерій подібності. Порядок виключення символів розмірностей $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_q$ не має значення.

Приклад. Перехідний процес в електричному контурі, який складається з резистора, конденсатора й дроселя, при вмиканні синусоїдної напруги визначають сім величин: струм i, амплітуда напруження U, опір r, ємність C, індуктивність L_1, час t і частота ω. Отже, $n = 7$. Випишемо формули розмірностей усіх семи визначальних величин у системі СІ:

$$[i] = I, \qquad [C] = L^{-2} M^{-1} T^4 I^2,$$
$$[U] = L^2 M T^{-3} I^{-1}, \qquad [L_1] = L^2 M T^{-2} I^{-2},$$
$$[t] = T,$$
$$[r] = L^2 M T^{-3} I^{-2}, \qquad [\omega] = T^{-1}.$$

Виключимо з формул розмірностей символ T – розмірність часу t. Для цього поставимо собі питання: на скільки треба помножити U, щоб добуток у формулі розмірностей не містив символу розмірності часу T? Ураховуючи, що формула розмірності для U містить T у степені (-3), отримаємо, що U слід помножити на $t^3 \Rightarrow U \cdot t^3$, тоді $[Ut^3]$ не буде містити в правій частині символ T – розмірність часу t. Отже, $[Ut^3] = L^2 M I^{-1}$. Зробимо те саме з усіма іншими формулами розмірностей. Отримаємо

$$[i] = I, \qquad [Ct^{-4}] = L^{-2} M^{-1} I^2,$$
$$[Ut^3] = L^3 M I^{-1}, \qquad [L_1 t^2] = L^2 M I^{-2},$$
$$[rt^3] = L^2 M I^{-2}, \qquad [\omega t] = 1.$$

У результаті знаходимо перший критерій подібності $\pi_1 = \omega t$.

Виключимо I з п'яти формул, що залишилися, – це символ розмірності струму i:

$$[Ut^3 i] = L^2 M, \qquad [Ct^{-4} i^{-2}] = L^{-2} M^{-1},$$
$$[rt^3 i^2] = L^2 M, \qquad [L_1 t^2 i^2] = L^2 M.$$

Тепер виключимо $L^2 M$. З перших двох формул випливає

$$[Ut^3 i] = [rt^3 i^2]\,. \qquad (1.4.24)$$

З першої і третьої –

$$[Ut^3 i] = [Ct^{-4} i^{-2}]^{-1}\,. \qquad (1.4.25)$$

З першої і четвертої –

$$[Ut^3 i] = [L_1 t^2 i^2]\,. \qquad (1.4.26)$$

Звідси ми знаходимо ще три критерії. З рівності (1.4.24) випливає, що добутки $Ut^3 i$ і $rt^3 i^2$ мають однакові розмірності. Тому при діленні одного з них на другий ми отримаємо безрозмірний комплекс

$$\frac{rt^3 i^2}{Ut^3 i} = \frac{ri}{U} \Rightarrow \pi_2 = \frac{ri}{U}\,.$$

Аналогічно з формули (1.4.25) видно, що добутки $Ut^3 i$ і $(Ct^{-4} i^{-2})^{-1}$ мають однакові розмірності. Звідси отримується ще один безрозмірний комплекс. Поділимо $(Ct^{-4} i^{-2})^{-1}$ на $Ut^3 i$

$$\frac{t^4 i^2}{CUt^3 i} = \frac{it}{CU} \Rightarrow \pi_3 = \frac{it}{CU}\,.$$

Аналогічно з рівності (1.4.26)

$$\frac{L_1 t^2 i^2}{Ut^3 i} = \frac{L_1 i}{Ut} \Rightarrow \pi_4 = \frac{L_1 i}{Ut}\,.$$

4.4. РОЗРАХУНКОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ КРИТЕРІЇВ ПОДІБНОСТІ

Можливість приведення залежності між n розмірних величин $x_1, x_2, ..., x_n$ до залежності між m безрозмірних критеріїв подібності $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ дозволяє при $m < n$ спростити (часто дуже суттєво) знаходження математичного описання різних об’єктів, тобто здійснити розрахункове моделювання.

Експериментальне встановлення залежності

$$x_n = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \qquad (1.4.27)$$

за великих n потребує великої кількості дослідних даних. Так, для табулювання функції однієї змінної необхідно два рядки, функції двох змінних – сторінка, при трьох аргументах – книга, а при чотирьох – уже ціла бібліотека. Обробка цих даних з метою отримання аналітичного виразу функції f є складною й трудомісткою.

У той же час експериментальне встановлення критеріальної залежності

$$\pi_m = \psi(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{m-1}) \qquad (1.4.28)$$

за малих m може бути зовсім простим.

У випадку розрахункового моделювання матеріальних об'єктів за допомогою аналізу розмірностей і π-теореми дуже важливою є форма критеріїв подібності, яка в загальному випадку може бути різною.

Кілька порад:

1. З усіх можливих варіантів форми критеріїв подібності кращим є той, якому відповідає найпростіший вираз функції (1.4.28).

2. Підставою для вибору форми критеріїв подібності можуть служити міркування зручності планування експериментів.

3. У всіх випадках доцільно вибирати такі форми критеріїв подібності, які мають певний фізичний зміст.

Приклад. Тіло з певною формою поверхні, розміри якого визначає деякий характерний відрізок d, наприклад, підводний човен, поперечним перерізом якого є коло діаметром d, рухається зі швидкістю v у рідині з коефіцієнтом динамічної в'язкості μ і густиною ρ. Необхідно встановити силу лобового опору

$$F = f(d, v, \mu, \rho),$$

який зазнає тіло.

Розмірності вказаних $n = 5$ визначальних величин у системі СІ є такими:

$$[F] = LMT^{-2}, \ [d] = L, \ [v] = LT^{-1},$$

$$[\mu] = L^{-1}MT^{-1}, \ [\rho] = L^{-3}M.$$

Оскільки необхідно знайти залежність F від d, v, μ, ρ у явному вигляді, то F приймемо за величину із залежною розмірністю і знайдемо

$$[F] = [\rho][v]^2[d]^2 . \qquad (1.4.29)$$

Іншою величиною із залежною розмірністю є μ. Для неї отримаємо

$$[\mu] = [\rho][v][d] . \qquad (1.4.30)$$

Таким чином, $k = 3, \ m = n - k = 5 - 3 = 2$ і два критерії подібності згідно з (1.4.29) і (1.4.30) будуть

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 d^2}, \ \pi_2 = \frac{\mu}{\rho v d} .$$

Якщо прийняти за величини із залежними розмірностями F і ρ, то отримаємо

$$\pi_1' = \frac{F}{\mu v d}, \ \pi_2' = \frac{\rho v d}{\mu} .$$

Якщо за величини із залежними розмірностями прийняти F і v, то матимемо

$$\pi_1'' = \frac{F\rho}{\mu^2},\ \pi_2'' = \frac{\rho v d}{\mu}.$$

Такий самий результат дає випадок, коли величинами із залежними розмірностями вибираються F і d.

Таким чином, у всіх розглянутих варіантах другий критерій подібності залишається практично незмінним.

Безрозмірний степеневий комплекс $\frac{1}{\pi_2}$ зустрічається в багатьох задачах гідромеханіки й має певний фізичний зміст: його числове значення характеризує співвідношення між силами інерції й силами тертя в потоці в'язкої рідини. Цей комплекс називається *критерієм* або *числом Рейнольдса* і позначається

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu}.$$

Із трьох критеріїв π_1, π_1', π_1'' певний фізичний зміст має тільки один критерій π_1. Він характеризує відношення лобового опору до сили, яка виникає внаслідок тиску рідини на лобову поверхню. Якщо вибрати цей критерій, то отримаємо критеріальне рівняння $F = f(d, v, \mu, \rho)$ у вигляді

$$\pi_1 = \psi\left(\frac{1}{\pi_2}\right), \tag{1.4.31}$$

звідки

$$F = \rho v^2 d^2 \psi(\mathrm{Re}).$$

Із цього виразу перед усім випливає, що вплив в'язкості рідини виявляється тільки через число Рейнольдса. Чим більша в'язкість μ, тим менше Re і більше F. Значить, при зменшенні Re функція (1.4.31) має зростати. Зі зменшенням в'язкості μ число Re збільшується. Функція ψ із зростанням Re має прямувати до деякої межі при $\mu = 0$, що відповідає ідеальній рідині. При русі тіла в ідеальній рідині лобовий опір є пропорційним густині ρ рідини, квадрату швидкості v руху тіла й площі S його лобової поверхні. Для в'язкої рідини такий закон зберігається наближено при достатньо великих значеннях Re.

ЧАСТИНА 2
ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Перейдемо до побудови й дослідження конкретних математичних моделей із застосуванням викладеної вище теоретичної бази. На прикладах проілюструємо прийоми й методи математичного моделювання.

1. БІОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ

Будь-яку кінетичну біологічну систему можна охарактеризувати як сукупність деяких параметрів, значення яких підтримуються незмінними протягом часу спостереження за системою, та змінних у часі. Параметрами є, наприклад, такі фізичні величини, як температура, вологість, електрична провідність мембрани, pH і т. д. Залежно від досліджуваних біосистем змінними вважаються: в екології – чисельність виду, у біофізиці – мембранний потенціал, у мікробіології – кількість мікроорганізмів, у біохімії – концентрація речовини тощо.

Припустимо, що в біосистемі є n різних компонент (напр., хімічних сполук), які з часом зазнають метаболічних перетворень. Це означає, що значення концентрації c_i кожної i -ї сполуки ($i = 1,2,...,n$) змінюється з часом унаслідок її взаємодії з будь-якою іншою ($n-1$) компонентою. Такого припущення достатньо для побудови загальної математичної моделі, яка є системою n диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dt} = f_1\left(c_1,...,c_n\right), \\ .... \\ \dfrac{dc_n}{dt} = f_i\left(c_1,...,c_n\right). \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

У системі (2.1.1), де dc_i/dt $(i = 1,2,...,n)$ – швидкості зміни невідомих концентрацій (змінних), f_i – деякі функції, які можуть залежати як від внутрішніх (напр., рН), так і від зовнішніх (напр., температура) параметрів біосистеми.

Знайти загальний розв'язок моделі (2.1.1) в аналітичному вигляді, як правило, вдається лише тоді, коли вона є лінійною. Однак процеси, які відбуваються в біологічних системах, як правило, є нелінійними; відповідно нелінійними є й математичні моделі цих процесів. Проте існують методи якісного аналізу диференціальних рівнянь, які дають можливість виявити важливі загальні властивості (закономірності) моделі (2.1.1), не знаходячи в явному вигляді невідомі функції $c_i(t)$.

Ці методи базуються на таких експериментальних фактах. По-перше, різні функціональні процеси в біосистемах суттєво відрізняються один від одного за часом проходження або характерними швидкостями. Так, наприклад, у біосистемі одночасно мають місце швидкі процеси ферментативного каталізу (час обороту ферменту становить $t = 10^{-1} \div 10^{-5}$ с), фізіологічні процеси (час – хвилини) та процеси репродукції (від кількох хвилин і більше). По-друге, якщо окремі (проміжні) стадії загального процесу в біосистемі характеризуються часом $t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_n$ і найповільніша стадія має час t_k такий, що $t_k >> t_1, ..., t_n$, то визначальною ланкою всього процесу є k-та стадія, і загальний час проходження процесу практично збігається з t_k. Отже, наявність такої часової ієрархії процесів у біосистемі дає можливість значно спростити вихідну модель, звівши її, по суті, до кінетичного опису поведінки найбільш повільної стадії.

Як видно з рівнянь (2.1.1), зміна стану системи описується деякою точкою $A(c_1, c_2, ..., c_n)$ у n-мірному просторі значень змінних $c_1, c_2, ..., c_n$. Простір з координатами $c_1, c_2, ..., c_n$ називається фазовим. Крива, яку описує в цьому просторі точка A, називається фазовою траєкторією.

Однією з важливих властивостей відкритих систем (на відміну від ізольованих) є наявність у них стаціонарних станів. За означенням, у стаціонарному стані

$$\frac{dc_i}{dt} \equiv 0 \quad (i = 1, ..., n). \tag{2.1.2}$$

У результаті отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення стаціонарної (особливої) точки фазового простору $A(\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n)$:

$$\begin{cases} f_1(c_1,...,c_n) = 0, \\ .... \\ f_n(c_1,...,c_n) = 0. \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

Динамічні біосистеми, які описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь типу (2.1.1), називаються точковими системами. Це означає, що в будь-якій точці такої системи значення шуканої величини (напр., концентрації речовини) зберігається з часом. Однак загальнішим є випадок, коли значення змінних є різними в різних точках простору. Наприклад, коли одночасно з реакцією, яка відбувається на деякій ділянці системи, реагенти дифундують, переходячи до іншої ділянки. Кінетичні рівняння, які враховують дифузійний зв'язок між окремими ділянками простору в біосистемі, мають вигляд

$$\frac{dc_i}{dt} = f_i(c_1,...,c_n) + D_{c_i} \frac{\partial^2 c_i}{\partial r^2} \quad (i = 1,...,n), \qquad (2.1.4)$$

де D_{c_i} – коефіцієнт дифузії речовини c_i, r – просторова координата.

Система рівнянь (2.1.4) дає можливість пояснити деякі загальні принципи процесів самоорганізації в живих організмах.

1.2. ПОПУЛЯЦІЙНІ МОДЕЛІ

Побудуємо й дослідимо математичні моделі, що описують зміну чисельності біологічних популяцій. Від найпростіших одновидових популяцій перейдемо до складніших, багатовидових популяцій з урахуванням дедалі більшого числа факторів, що впливають на зміну чисельності в популяціях. Побудуємо ієрархічний ланцюг у даних моделях. Коротко опишемо сучасний стан проблеми, укажемо на питання, що є актуальними для цієї теорії і розв'язання яких може бути темою подальших наукових досліджень або кваліфікаційних робіт з математичного моделювання.

1.2.1. Модель Мальтуса одновидової популяції

Розглянемо модель одновидової біологічної популяції. Через $N(t)$ позначимо кількість особин у момент часу t. Наша мета – вивести закон зміни кількості особин із часом. Для цього, згідно з принципами математичного моделювання, зробимо деякі спрощувальні припущення. А саме: будемо вважати, що дана популяція існує ізольовано й на деякій території розміщена однорідно. Пізніше ми ці припущення дещо послабимо.

Виберемо закон, згідно з яким відбувається розвиток популяцій. За основу візьмемо відомий закон Мальтуса: швидкість зміни популяції пропорційна величині популяції з певним коефіцієнтом, що є різницею між коефіцієнтом народжуваності $\alpha(t)\geq 0$ і смертності $\beta(t)\geq 0$. За цих припущень можна отримати закон зміни чисельності популяцій, що в математичній формі має вигляд

$$\frac{dN}{dt}=(\alpha(t)-\beta(t))N\ . \qquad (2.1.5)$$

З формули (2.1.5) можна зробити висновки про зміни чисельності з часом. Так, якщо $\alpha(t)>\beta(t)$ (миттєва народжуваність більша за миттєву смертність), то $N(t)\to\infty$ при $t\to\infty$; якщо $\alpha(t)=\beta(t)$, то $N(t)=N(0)$ – чисельність із часом не змінюється; якщо $\alpha(t)<\beta(t)$ – чисельність популяції прямує до нуля.

З математичного погляду дана модель є дуже зручною, оскільки її можна повністю дослідити. Зокрема, з неї випливає результат, який ще у 1798 р. отримав Мальтус і запропонував свою "похмуру теорію": *людство може вижити, тільки якщо періоди зростання в геометричній прогресії будуть перериватися епідеміями, війнами й стихійними лихами.* Дійсно, це той випадок, коли $\alpha(t)>\beta(t)$ і $N(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Насправді це не так. Модель Мальтуса дуже наближено відповідає оригіналу, коли інтервали часу є невеликими. Її можна розглядати лише як перше наближення до реального процесу.

Дуже складний процес зміни чисельності населення, залежний до того ж від свідомого втручання самих людей, не може описуватись простими законами. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності повною мірою хоча б через обмеженість ресурсів, необхідних для її існування. З цього випливає так званий *ефект насичення.*

Вправа. За яких умов на $\alpha(t)$ і $\beta(t)$, $N(t)$ є:

1) обмеженою при $t\geq 0$;
2) періодичною?

1.2.2. Модель одновидової популяції з урахуванням насичення (логістична модель)

Більш точна модель має враховувати конкурентну боротьбу в обмеженому життєвому просторі. Зробимо відносно моделі таке припущення, що підтверджується практичними спостереженнями: середньостатистична кількість попарних сутичок у популяції за одиницю часу пропорційна N^2. Тоді рівняння балансу "зміна кількості" = "приріст" – "втрати" можна подати у вигляді

$$\frac{dN}{dt}=k(t)N-\ell(t)N^2,\quad k(t)>0,\quad \ell(t)>0\ . \qquad (2.1.6)$$

Це рівняння вивів у 1837 р. данський учений Ферхюльст. Воно називається *логістичним* і є математичною моделлю одновидової популяції з урахуванням ефекту насичення.

Проаналізуємо дану математичну модель. Основна вимога до неї – досить точно описувати реальний процес за великих значень t. З математичного погляду цій вимозі відповідає нелінійне рівняння Ріккатті, загальний розв'язок якого може бути знайденим у квадратурах шляхом його зведення до лінійного. Однак точні формули виявляються досить громіздкими для практичного користування. Проте нас цікавить лише асимптотична поведінка розв'язків при $t \to \infty$. Таке дослідження у випадку, коли $k(t)$ і $\ell(t)$ є сталими, можна провести й без інтегрування рівняння (2.1.6).

Заміною змінних t і N рівняння (2.1.6) можна звести до вигляду

$$\overset{\circ}{N} = N - N^2, \tag{2.1.7}$$

тобто коефіцієнти k і ℓ можна вважати рівними 1.

Розв'язки залежать від зміни знаків функції $f(N) = N - N^2$. Очевидно, що $f(N) > 0$ при $N \in (0;1)$ і $f(N) < 0$ при $N > 1$ (нас цікавить випадок $N \geq 0$).

Отже, дане рівняння має два положення рівноваги: $N = 0$ і $N = 1$, причому перше з них є нестійким, а друге – асимптотично стійким, усі розв'язки при $t \to \infty$ наближуються до нього. Поведінку інтегральних кривих зображено на рис. 2.1.1.

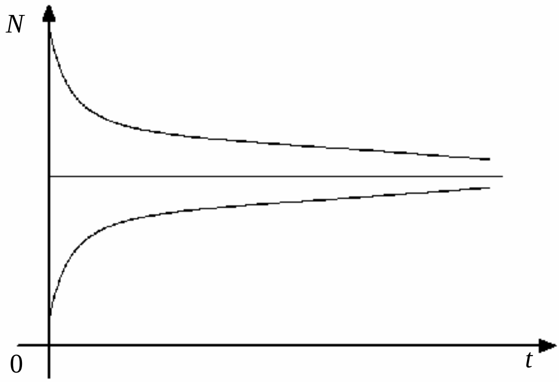


Рис. 2.1.1

Отже, у логістичній моделі всі розв'язки з часом прямують до рівноважного стану, і ніякого перенаселення, як стверджував Мальтус, бути не може.

1.2.3. Логістична модель з урахуванням зовнішніх впливів

Описані вище моделі будувалися на припущенні, що популяція існує ізольовано й не зазнає жодних зовнішніх впливів. Це припущення, зрозуміло, значно понижує степінь адекватності даної моделі оригіналу. Побудуємо більш складну модель, що враховує зовнішній вплив. Вона буде наступною ланкою в ієрархічному ланцюзі моделей популяцій, побудованому за принципом знизу-вверх (від простої моделі – до більш складної).

Якщо мова йде, наприклад, про популяцію риб у водоймі, то зовнішній вплив може означати постійне їх відловлення.

Будемо вважати, що швидкість вилучення особин з популяції є сталою, тоді, за аналогією з попереднім, математичною моделлю даного об'єкта є рівняння

$$\overset{\circ}{N} = k_1 N - k_2 N^2 - \lambda \qquad (2.1.8)$$

Покладемо, що $k_1 > 0$ і $k_2 > 0$ рівні 1. Отримаємо рівняння

$$\overset{\circ}{N} = N - N^2 - \lambda\,, \qquad (2.1.9)$$

де $\lambda > 0$ – параметр, що відповідає за швидкість вилучення. Розглянемо його вплив на процес розвитку популяції.

При $\lambda = 0$ – це описана вище логістична модель. При зростанні λ відбувається зближення положень рівноваги $N_1^0(\lambda)$ і $N_2^0(\lambda)$, які є функціями λ, але їх характер не змінюється, як і в логістичній моделі (рис. 2.1.2).

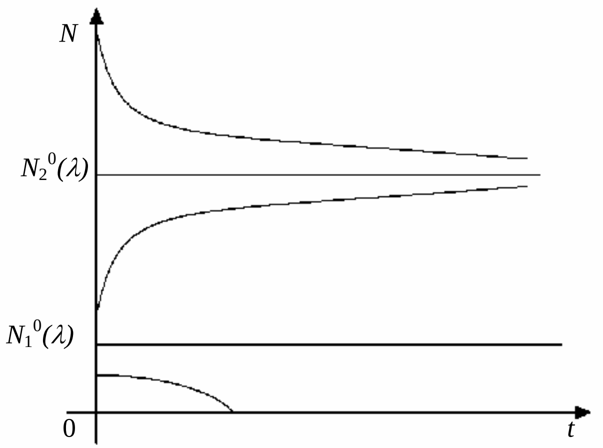


Рис. 2.1.2

При критичному значенні $\lambda = \lambda_{kp} = \frac{1}{4}$ положення рівноваги зливаються в одне кратне положення рівноваги (рис. 2.1.3).

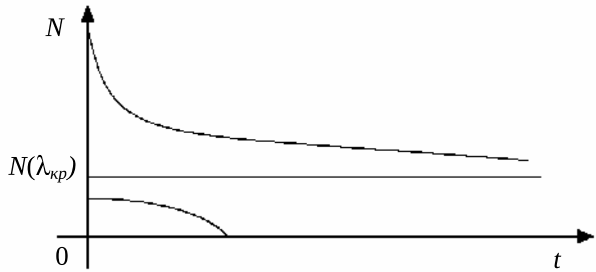


Рис. 2.1.3

При подальшому зростанні λ рівняння (2.1.9) не матиме положень рівноваги, і популяція з часом зникне (рис. 2.1.4).

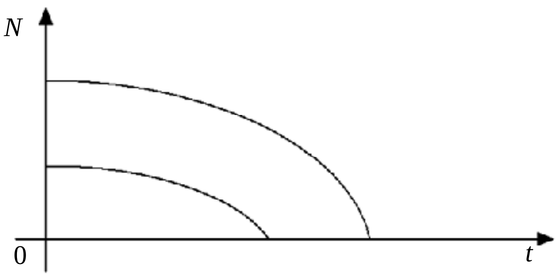


Рис. 2.1.4

Тобто сильний зовнішній вплив, наприклад, відловлення риб, може призвести до зникнення виду, як це трапилося з турами, стелеровою коровою тощо.

Якісна зміна поведінки системи при проходженні параметром λ критичного значення λ_{kp} називається *біфуркацією*; вона відображає явище фазового переходу в біологічній системі (популяції).

Небезпечними для виживання популяції, незалежно від її початкової величини, є не тільки значення $\lambda > \lambda_{kp}$, а й усі значення λ, досить близькі до критичного. Дійсно, на перший погляд, якщо $N_0 > N_2^0(\lambda)$, то $N(t, N_0) \to N_2^0(\lambda)$, при $t \to \infty$, і популяції вимирання не загрожує. Однак якщо $\lambda \cong \lambda_{kp}$, то $N_1^0(\lambda) \cong N_2^0(\lambda)$, і найменша випадкова флуктуація величини популяції $N(t, N_0) \cong N_2^0(\lambda)$ (t – досить велике) може зробити цю величину меншою за $N_1^0(\lambda)$, що спричинить вимирання популяції.

1.2.4. Модель двовидової популяції Лотки – Вольтерра

Від моделі одновидової популяції перейдемо до наступної в ієрархічному ланцюзі популяцій ланки, коли існує кілька біологічних видів. Найпростішим випадком такої ситуації є двовидова популяція типу "хижак-жертва". Нехай скалярні змінні *x* та *y* характеризують величини популяцій хижаків і жертв відповідно. При побудові математичної моделі зробимо такі спрощувальні припущення:

а) за відсутності хижаків жертви розвиваються згідно з логістичним рівнянням (2.1.6);

б) за наявності хижаків додаткові втрати жертв пропорційні як їх кількості, так і кількості хижаків (отже, у правій частині рівняння (2.1.6) потрібно дописати вираз $-mxy, \quad m > 0$);

в) за відсутності жертв хижаки вимирають за логістичним рівнянням $\frac{dy}{dt} = -py - qy^2, \quad p > 0, \quad q > 0$, причому знак "–" перед p вибирається на підставі припущення, що жертви є єдиним джерелом існування для хижаків;

г) наявність жертв викликає приріст, пропорційний як їх кількості, так і кількості хижаків (отже, права частина рівняння має містити доданок $rxy, \quad r > 0$).

З вищенаведеного одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - \ell x^2 - mxy, \\ \dot{y} = -py - qy^2 + rxy, \end{cases} \tag{2.1.10}$$

що і є математичною моделлю еволюцій двовидової популяції.

Дослідимо дану модель.

Спочатку розглянемо випадок, коли конкуренцією всередині кожного виду можна знехтувати. Поклавши в системі (2.1.10) $\ell = q = 0$, одержимо рівняння так званої моделі Лотки – Вольтерра:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - mxy, \\ \dot{y} = -py - qy^2 + rxy. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

Фазовим простором даної системи є перший квадрант. Розділивши перше рівняння на x, а друге – на y, а потім проінтегрувавши їх, отримаємо систему інтегральних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \ell^{\int_0^t (k - my(s))ds}, \\ y(t) = y_0 \ell^{\int_0^t (-p + rx(s))ds}, \end{cases} \qquad (2.1.12)$$

з якої бачимо, що якщо $x_0 > 0$ і $y_0 > 0$, тобто розв'язок починався в першому квадранті, то він там весь час і знаходиться.

Еволюцію хижаків і жертв можна дослідити, не розв'язуючи систему (2.1.11), а намалювавши на площині $(x0y)$ її фазовий портрет. Знайдемо рівняння її фазових траєкторій. Розділивши перше рівняння на друге, отримаємо диференціальне рівняння траєкторій

$$\frac{dx}{dy} = \frac{kx - mxy}{-py + rxy},$$

що має загальний інтеграл:

$$rx - p\ell nx + my - k\ell ny = C\,. \qquad (2.1.13)$$

Система (2.1.11) має два положення рівноваги: точки (0;0) і $\left(\frac{p}{r};\frac{k}{m}\right)$.

Щоб зобразити решту траєкторій, розглянемо функцію (рівняння поверхні)

$$Z(x,y) = rx - p\ell nz + my - k\ell ny\,.$$

Її лінії рівня і будуть шуканими кривими. Графік цієї функції має форму ями. У цьому неважко переконатися, пересікаючи поверхню паралельними осі OZ площинами, що проходять через точку $\left(\frac{p}{r};\frac{k}{m}\right)$. Сукупність зазначених площин описується рівнянням $a\left(x - \frac{p}{r}\right) = y - \frac{k}{m}$, де a – довільне. У перерізі даної поверхні з кожною з площин отримаємо криву, що описується рівнянням

$$Z = rx - p\ell nx + ma\left(x - \frac{p}{r}\right) + k - k\ell n\left[a\left(x - \frac{p}{m}\right) + \frac{k}{m}\right].$$

При цьому

$$Z'' = \frac{p}{x^2} + \frac{k}{\left(a\left(x - \frac{p}{r}\right) + \frac{k}{m}\right)^2} > 0\,,$$

а отже, усі криві опуклі вниз, що й доводить наше твердження.

Лінії рівня поверхні є замкнутими, тому й фазові криві системи Лотки – Вольтерра є замкнутими кривими, що охоплюють положення рівноваги. Останнє означає, що розв'язки системи – періодичні функції часу.

Тепер зрозуміло, що в досліджуваній системі відбуваються незгасаючі коливання навколо положення рівноваги, тобто жодному виду вимирання не загрожує.

Проте, виникає питання: наскільки дана модель відповідає оригіналу? Адже система (2.1.11) не враховує всіх факторів, що можуть впливати на динаміку даної популяції. Зокрема, не бралась до уваги конкуренція між особинами одного виду $(p = q = 0)$. Тому більш точною є система вигляду (2.1.10). Лінеарізувавши її в околі положення рівноваги $\left(\frac{p}{r};\frac{k}{m}\right)$ і знайшовши власні числа відповідної матриці лінійної системи, можна переконатися, що положення рівноваги – або асимптотично стійкий вузол, або асимптотично стійкий фокус. Мовою популяцій це означає, що з часом кількість особин кожного з видів прямує до рівноважного стану, і популяція не вимирає.

1.2.5. Модель багатовидової популяції

Наступною ланкою в ієрархічному ланцюзі є перехід до моделі багатовидової популяції. Розглянемо таку модель, а також укажемо на задачі, пов'язані з нею. Розв'язання таких задач може стати темою подальших наукових досліджень і кваліфікаційних робіт різного рівня.

Нехай $N_i(t)$ – кількість особин і-го виду $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Математичною моделлю їх співіснування є узагальнення моделі Лотки – Вольтерра на n рівнянь

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(\alpha_i(t) - \sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}(t)N_k\right), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.1.14}$$

де $\alpha_i(t) \geq 0, \quad \beta_{ik}(t) \geq 0$ – коефіцієнти системи.

Аналогічно можна переконатися, що перший квадрант є фазовим простором даної системи. При її дослідженні (навіть у випадку сталих коефіцієнтів) виникає низка серйозних математичних проблем, відповідь на які потрібно отримати в термінах коефіцієнтів системи, тобто функцій $\alpha_i(t)$ і $\beta_{ik}(t)$:

1. Дослідити умови конкурентного зникнення одного чи кількох видів, тобто умови, за яких $N_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для деяких i.

2. Знайти умови обмеженості числа особин певного виду, тобто $\exists C > 0,$ щоб $N_i(t) \leq C$ для деяких i.

3. Знайти умови періодичності зміни числа особин $N_i(t+T) = N_i(t).$

4. Дослідити умови перманентності системи (2.1.14).

Останнє означає існування в першому квадранті деякої компактної множини M, що має таку властивість: усі розв'язки системи (2.1.14), починаючи з деякого моменту часу (для кожного розв'язку – свого), лежать у даній множині.

З погляду біологічних популяцій, умови перманентності означають умови "мирного" співіснування всіх видів, коли жоден з видів не зникає.

1.2.6. Узагальнення моделі багатовидової популяції. Побудова ієрархічного ланцюга

Узагальненням моделі (2.1.14) є модель, що враховує вплив зовнішніх факторів на розвиток популяції. Це може бути, наприклад, відловлення риби, збирання врожаю, запускання у водойму мальків. Проміжки часу, протягом яких відбувається зовнішній вплив, є малими порівняно з часом розвитку популяції, тому можна вважати, що такі впливи є миттєвими. Останнє приводить до математичних моделей, що є диференціальними рівняннями з імпульсною дією. Нехай $\tau_1, \tau_2,...\tau_n,...$ – моменти зовнішніх впливів. Тоді, якщо $t \neq \tau_i$, то популяції еволюціонує за законом, що описується системою (2.1.14), а в моменти τ_i відбувається стрибок розв'язку. У математичній формі це записується у вигляді

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i(\alpha_i(t) - \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}(t)Nk) \quad t \neq \tau_k \quad i = \overline{1,n}\,, \qquad (2.1.15)$$

$$N_i(\tau_k + 0) = N_i(\tau_k - 0) + I_{ik}(N_1(\tau_k - 0), N_2(\tau_k - 0),...N_n(\tau_k - 0))\,.$$

Функції I_{ik} характеризують величини зовнішніх впливів. Тобто розв'язками систем з імпульсною дією є кусково-розривні функції, на відміну від розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, що значно ускладнює їх вивчення. Систематичне дослідження таких рівнянь було започатковано одночасно в Київському університеті імені Тараса Шевченка та Інституті математики НАН України й отримало подальший розвиток у роботах викладачів Київського університету.

Для імпульсних моделей можна ставити всі задачі, анонсовані в п. 1.2.5, а також порівнювати результати для ізольованих біологічних популяцій і популяцій, що зазнають впливу ззовні. Їх поведінка є зовсім різною. Наприклад, у популяції без зовнішнього впливу деякі види можуть зникати, а за рахунок зовнішньої корекції – відновлюватися. Усі проблеми, перелічені в п. 1.2.5, є досить цікавими й доволі складними математичними задачами для систем з імпульсами, розв'язання яких вимагає практика. На сьогодні ці проблеми розв'язані лише в деяких частинних випадках.

У всіх розглянутих вище моделях популяцій швидкість зміни їх чисельності залежить лише від їх кількості на даний момент. Однак швидкість залежить і від попередньої чисельності популяцій (особливо, якщо мова йде про людське суспільство, де суттєвим є людський фактор). Якщо врахувати таку залежність, то отримаємо математичну модель біологічної популяції, що є системою диференціальних рівнянь з післядією:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = N_i(t)(\alpha_i(t) - \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}(t) N_k(t - \tau_k(t))), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2.1.16)$$

де функції $\tau_k(t) \in [0,T]$ характеризують запізнення. Порівняно з попередніми моделями, ця система є значно складнішим математичним об’єктом. Наприклад, множина розв’язків розглянутих вище рівнянь утворює скінченновимірний простір, розв’язки ж системи (2.1.16) – нескінченно вимірний. Теорія таких рівнянь знаходиться лише на початковій стадії розвитку. Для отримання більш-менш змістовних результатів у цьому напрямі потрібно залучати найсучасніші математичні методи. Однак мета виправдовує засоби. За допомогою даних рівнянь можна пояснити деякі ефекти, які не підлягають математичному дослідженню без урахування післядії. Наприклад, урахування часу τ – запізнення в логістичній моделі – приведе до рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - mx(t)x(t-\tau),$$

де за певних співвідношень між r та τ удається встановити існування стійкого періодичного режиму коливань чисельності виду, на відміну від звичайної логістичної моделі. Такі коливання дійсно спостерігаються в деяких випадках і не можуть бути пояснені, виходячи з простої логістичної моделі.

Урахування запізнення в ланцюгу оберненого зв’язку математичної моделі локатора (відоме рівняння Мінорського) дозволило виявити стійкі коливання у RLC-контурі на частоті, що дуже відрізняється від частоти контуру. Цей ефект було виявлено експериментально, але він не мав математичного пояснення, оскільки відповідні математичні моделі мали дуже малий степінь адекватності оригіналу. Введення запізнення в математичну модель процесу обробки деталі на токарному станку дозволило пояснити появу небажаних вібрацій різця. Ефект “галопування”, що спостерігався багатьма дослідниками під час руху літака ґрунтівкою, став очевидним, як тільки в лінійному рівнянні руху було враховане запізнення, викликане часом проходження літаком відстані між передніми й задніми колесами шасі. Урахування післядії бажано й у інших математичних моделях. Воно дозволить не тільки пояснити явища, експериментально виявлені раніше, але й передбачити нові ефекти. Якщо подібні роботи з’являються в інженерних журналах і монографіях порівняно рідко, то це, скоріше за все, викликано або складністю, або навіть повною відсутністю потрібного математичного апарату. Таким чином, моделі біологічних популяцій з урахуванням запізнення є наступною ланкою в побудові ієрархічного ланцюга.

Перейдемо до ще однієї ланки. Усі вказані вище моделі апріорі будувалися на тому, що кількість особин усіх видів у просторі розміщується однорідно. Якщо врахувати залежність кількості особин не тільки від часу, а й від розташування в просторі, то прийдемо до моделей біологічних популяцій з дифузією, що математично зображуються системою параболічних рівнянь у частинних похідних. Для одновидової популяції, де $N = N(t, x, y, z)$ – кількість особин у момент t у точці (x, y, z), отримаємо рівняння

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha(t)N + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\beta_1(t)N + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\beta_2(t)N + \frac{\partial^2 N}{\partial Z^2}\beta_3(t)N.$$

Таким рівнянням описується, наприклад, динаміка скупчення амеб. На сьогодні добре вивчена лише двовидова популяція з урахуванням дифузії.

Останньою, найвищою ланкою в ієрархічному ланцюзі є моделі, що враховують випадковий вплив на динаміку чисельності популяції. Усі впливи на популяцію носять випадковий характер і коефіцієнти $\alpha(t)$ і $\beta_{ik}(t)$ – випадкові процеси. У детермінованих моделях ці коефіцієнти є деякими усередненими характеристиками випадкових процесів.

Останнє означає, що детерміновані моделі дуже мало враховують випадковий характер впливу. Якщо його прийняти до уваги, то прийдемо до математичних моделей, що є диференціальними рівняннями з випадковими збуреннями. Аналіз таких рівнянь не менш складний, ніж рівнянь із запізненням. При їх дослідженні, окрім методів звичайних диференціальних рівнянь, використовуються методи теорії випадкових процесів. Отримані при цьому результати можуть якісно відрізнятися від аналогічних результатів детермінованого випадку. Так, наприклад, у логістичній моделі з урахуванням випадковостей можуть бути нестійкими обидва положення рівноваги або стійким нульове, а друге – нестійким, на відміну від звичайної логістичної моделі.

На завершення розгляду даних моделей наведемо схематично ієрархічний ланцюжок як приклад побудови ієрархій у математичному моделюванні (рис. 2.1.5).

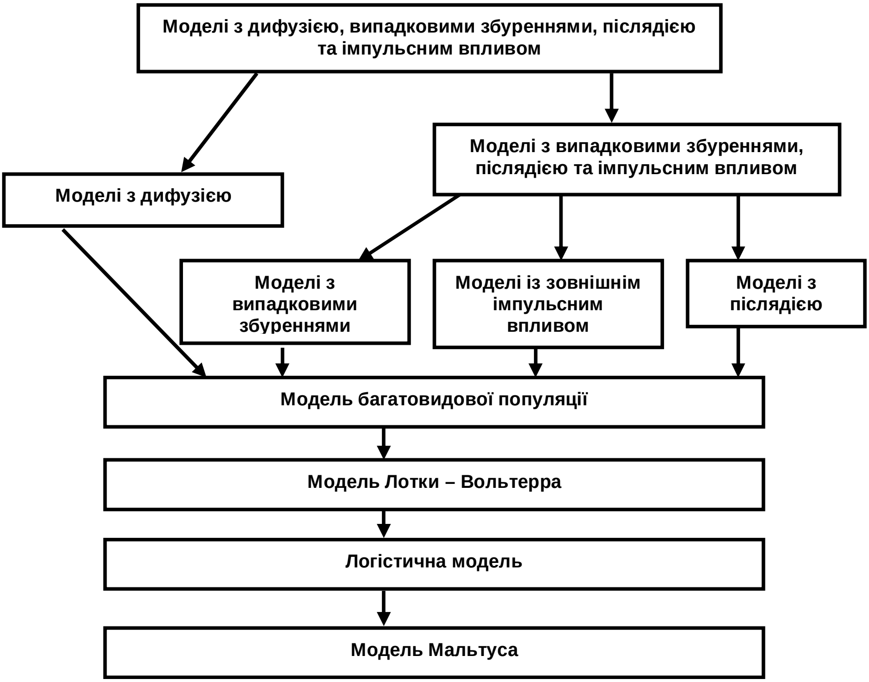


Рис. 2.1.5.

2. МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ФІНАНСОВИХ І СТРАХОВИХ ПРОЦЕСІВ

2.1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОБОТИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Побудуємо й дослідимо математичну модель роботи страхової компанії. Вона організована таким чином. У початковий момент часу ($t=0$) компанія має деякий початковий капітал u. Клієнти компанії у проміжок часу $[0,t]$ роблять страхові внески згідно з договором. Позначимо їх сумарний капітал V_t. У цей же проміжок часу відбуваються страхові виплати клієнтам. Терміни й величини виплат є випадковими. Позначимо їх S_t. Тоді сумарний капітал U_t страхової компанії в момент t дорівнюватиме

$$U_t = u + V_t - S_t . \tag{2.2.1}$$

Задача страхової компанії полягає в організації роботи так, щоб компанія не зазнала банкрутства, тобто щоб $U_t \geq 0$ для $\forall t > 0$. У зв’язку з цим виникає питання: яким має бути початковий капітал, щоб $U_t \geq 0$? Оскільки U_t залежить від випадкових чинників, то U_t у будь-який момент часу є випадковою величиною, а отже U_t – випадковий процес.

Позначимо через $\boldsymbol{\Psi(u) = P\{U_t < 0,}$ **для деякого** $\boldsymbol{t\}}$ і назвемо цю функцію ймовірністю банкрутства страхової компанії при стартовому капіталі u. Відповідно функцію $\boldsymbol{\varphi(u) = 1 - \Psi(u) = P\{U_t \geq 0,}$ **при** $\boldsymbol{t \geq 0\}}$ назвемо ймовірністю небанкрутства. Дані функції відіграють ключову роль у роботі страхової компанії. Очевидно, що якщо ймовірність банкрутства досить велика, тобто $\Psi(u)$ близька до 1, то роботу компанії зі страховим капіталом u розпочинати не варто.

Знайти аналітичний вигляд функцій $\Psi(u)$ і $\varphi(u)$ у загальному випадку досить важко. Тому потрібно від реальної ситуації перейти до її математичної моделі, яка б, з одного боку, відповідала реальності, а з іншого – дозволяла б досліджувати функції $\Psi(u)$ і $\varphi(u)$.

Розглянемо так звану класичну модель ризику. У цій моделі припускається, що страхові внески від клієнтів надходять за лінійним законом: $V_t = ct$ ($c > 0$ – коефіцієнт інтенсивності внесків).

Розміри страхових виплат $Y_k, k \geq 1$ – це випадкові величини, які вважаються незалежними, однаково розподіленими, з функцією розподілу $F(x)$, мають математичне сподівання $EY_k = \mu$ і дисперсію $DY_k = \sigma^2$.

Покладемо $Y_k \geq 0$ з імовірністю 1, тобто $F(0) = 0$. Через N_t позначимо кількість страхових виплат на $[0, t]$. Очевидно, що N_t – випадковий процес. Для нього зробимо припущення:

1) надходження вимог на виплату в інтервали часу, що не перетинаються – незалежні події;

2) розподіл кількості вимог на інтервалі $(t, t+h)$ залежить не від t, а лише від h (довжини інтервалу);

3) імовірність надходження хоча б однієї вимоги протягом часу Δt дорівнює $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$, де $\alpha > 0$ – інтенсивність вимог, тобто ймовірність пропорційна довжині інтервалу;

4) імовірність надходження хоча б двох вимог на інтервалі Δt дорівнює $o(\Delta t)$, тобто вимоги виплати відбуваються не досить часто.

У теорії ймовірностей доводиться, що за виконання умов 1)-4) N_t є відомим процесом Пуассона, а тому для $\forall t \quad P\{N_t = k\} = \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t}$, де k – ціле додатне число. Отже, сума страхових виплат протягом часу $[0, t]$ дорівнює

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \ . \tag{2.2.2}$$

Тоді загальний прибуток компанії

$$Q_t = ct - S_t \ . \tag{2.2.3}$$

Означення. Випадковий процес $U_t = u + ct - S_t, \quad t \geq 0$ називається *процесом ризику*.

Дослідимо отриману математичну модель.

У формулі (2.2.2) наведено суму випадкової кількості випадкових величин, що не залежать одна від одної та від N_t. Відомо, що математичне сподівання $ES_t = EY_k \cdot EN_t = \mu\alpha t$ (оскільки математичне сподівання процесу Пуассона дорівнює αt). З моделі видно, що якщо $c < \alpha\mu$, то страхова компанія з імовірністю 1 зазнає краху за будь-якого початкового капіталу.

Розглянемо S_t у цілі моменти часу $t = n.$ Нехай $S_n = (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + ... + (S_n - S_{n-1})$ – це послідовність сум незалежних, однаково розподілених випадкових величин зі скінченним математичним сподіванням. Із закону великих чисел (теорема Колмогорова) маємо, що $\frac{S_n}{n} \to E(S_1 - S_0)$ при $n \to \infty$ з імовірністю 1. Однак $E(S_1 - S_0) = ES_1 = \alpha\mu.$ Тому $\frac{Q_n}{n} = \frac{c_n - S_n}{n} = c - \frac{S_n}{n} \to c - \alpha\mu, \quad n \to \infty$ з імовірністю 1. За умови $c < \alpha\mu, \quad Q_n \to -\infty$ і при довільному початковому капіталі через скінченний час U_t стане менше нуля з імовірністю 1, тобто компанія зазнає краху. Отже, можна зробити висновок: роботу варто розпочинати, коли $c > \alpha\mu$.

Використовуючи формулу повної ймовірності для функції $\varphi(u)$, можна довести таку теорему.

Теорема. Функція $\varphi(u)$ є абсолютно неперервною й майже скрізь задовольняє інтегро-диференціальне рівняння

$$\varphi'(u)=\frac{\alpha}{c}\varphi(u)-\frac{\alpha}{c}\int_0^u\varphi(u-z)dF(z)\,. \qquad (2.2.4)$$

Рівняння (2.2.4) є складним і в загальному випадку не розв’язується, однак, коли страхові виплати мають показниковий розподіл з параметром $\frac{1}{\mu}$,

$$F(z)=\begin{cases}0,\ z\le 0\\ 1-e^{-\frac{z}{\mu}},\ \ z>0,\end{cases} \qquad (2.2.5)$$

то рівняння (2.2.4) розв’язується у явному вигляді.

Дійсно, у цьому випадку рівняння (2.2.4) має вигляд

$$\varphi'(u)=\frac{\alpha}{c}\varphi(u)-\frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u\varphi(u-z)e^{-\frac{z}{\mu}}dz\,. \qquad (2.2.6)$$

Диференціюючи його ще раз, отримаємо

$$\varphi''(u)=-\frac{c-\alpha\mu}{c\mu}\varphi'(u)\,.$$

Ввівши позначення $\rho=\frac{c}{\alpha\mu}-1$ ($\rho>0,$ оскільки $c>\alpha\mu$), маємо

$$\varphi''(u)=-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}\varphi'(u)\,.$$

Це лінійне рівняння другого порядку. Його загальний розв’язок:

$$\varphi(u)=c_1+c_2e^{-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u}\,. \qquad (2.2.7)$$

Із змісту функції φ маємо, що $\varphi(+\infty)=1$ (оскільки при нескінченному початковому капіталі банкрутство неможливе). Тому $c_1=1$. c_2 знайдемо зі значення $\varphi(0)$. $\varphi(0)$ можна знайти з таких міркувань.

Якщо рівняння (2.2.4) проінтегрувати на відрізку $[0,t]$, то можна отримати еквівалентне йому інтегральне рівняння

$$\varphi(u)=\varphi(0)+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\varphi(u-z)(1-F(z))dz, \qquad (2.2.8)$$

перейшовши в якому до границі при $u\to\infty$ і врахувавши, що $\varphi(+\infty)=1$, отримаємо, що $\varphi(0)=1-\frac{\alpha\mu}{c}=\frac{\rho}{1+\rho}=c_1+c_2\Rightarrow c_2=-\frac{1}{1+\rho}$. Таким чином, за умови $\rho>0$

$$\varphi(u) = 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u} .$$

Тоді ймовірність банкрутства

$$\Psi(u) = 1 - \varphi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u} . \qquad (2.2.9)$$

Подальший аналіз наведеної моделі пов'язаний з вивченням асимптотичної поведінки розв'язків рівняння (2.2.4) або (2.2.8) при $u \to \infty$ і проводиться із застосуванням результатів, що були отримані при дослідженні випадкових процесів відновлення. Виявляється, що формула (2.2.9) є типовою для класичної моделі ризику, а саме $\Psi(u) \sim A(R)e^{-Ru}$, де A – деяка функція від R, яку можна записати явно, а $R > 0$ – корінь деякого спеціального рівняння, який називається *сталою Лундберга*.

2.2. МОДЕЛЮВАННЯ РИНКУ ФІНАНСІВ

Використання фінансів, вкладання коштів завжди є дещо ризиковим – на прибуток чи збитки впливають різні випадкові чинники. Оцінити величину цього ризику, зменшити можливість збитків – задача фінансової математики, у якій широко застосовується теорія випадкових процесів.

Інвестор працює на ринку цінних паперів. Основними цінними паперами є облігації та акції.

Облігація – це позика на певний фіксований час, після якого повертаються гроші з фіксованим або плаваючим відсотком.

У найпростіших моделях фінансового ринку цей відсоток вважається детермінованим (невипадковим).

Позначимо B (t) – вартість облігації в час t, T – час погашення облігації, B_0 – сума, що буде сплачена за договором, $a(t)$ – відсоткова ставка в момент t. Тоді буде виконуватись рівність на інтервалі [t, t+ Δ t]:

$$\frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{B(t)} = a(t)\Delta t .$$

Припускаючи диференційовність функції *B (t),* з останньої рівності граничним переходом при $\Delta t \to 0$ отримаємо $\frac{B'(t)}{B(t)} = a(t)$, звідки

$$B(t) = B_o \ell^{\int_t^T a(S)dS} . \qquad (2.2.10)$$

Формула (2.2.10) виражає вартість облігації в момент *t* і є неперервним аналогом формули складних відсотків.

Акція – це документ про підтвердження права на частину майна підприємства та на певну частину прибутку. Ціна акції залежить від того, настільки прибутковим є підприємство, і від інших чинників (загальна політична ситуація в країні, економічний спад чи піднесення). Тобто на ціну впливають мікроекономічні фактори, що мають випадковий характер, і макроекономічні (загальнодержавні чинники), які на певний період часу можна вважати невипадковими. Тому ціна акції в момент *t* – *S(t)* є випадковою.

Отримаємо рівняння для визначення ціни акції, припустивши, що в математичній моделі фінансового ринку випадкові чинники є незалежними та їх кількість є великою. Тобто результуючий випадковий фактор є сумою великої кількості однаково розподілених незалежних випадкових величин, що дає змогу застосувати в моделі центральну граничну теорему. При цьому зручніше розглядати не абсолютну зміну вартості акцій $S(t+\Delta t)-S(t)$, а відносну: $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}$. Наприклад, якщо акція вартістю 1 грн дешевшає на 1 к., то акція вартістю 100 грн дешевшає на 1 грн. Тому відносна зміна вартості є зручнішою. Отже, замість $S(t)$ розглянемо $R(t)=\ln S(t)$.

Нехай спочатку час t приймає дискретну послідовність значень $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$ Якщо немає глобальних фінансових змін, політична ситуація стабільна, то $\Delta R(t)=\ln S(t+\Delta t)-\ln S(t)=\ln\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}=\ln(1+\frac{\Delta S(t)}{S(t)})$ є випадковою величиною з нульовим математичним сподіванням, оскільки за припущенням моделі всі випадкові фактори однаково можливі, тому в середньому зміна ціни не відбувається. При цьому дисперсія $\Delta R(t)$ пропорційна Δt, тобто $\Delta R(t)\approx\sigma^2(t)\Delta t,$ де $\sigma(t)$ – коефіцієнт зміни, його називають *коефіцієнтом дифузії* або *коефіцієнтом волатильності*. Дійсно,

$$\Delta R(t)=\Delta\ln S(t+\Delta t)-\ln S(t)=(\ln S(t+\Delta t)-\ln S(t+\frac{\Delta t}{2}))+(\ln S(t+\frac{\Delta t}{2})-\ln S(t)).$$

Згідно з моделлю, ці прирости незалежні, а тому дисперсії додаються. Отже, дисперсія $\Delta R(t)$ для Δt удвічі більша, ніж дисперсія для $\frac{\Delta t}{2}$; те ж саме виконується для $\frac{\Delta t}{n}$ і т. д. Звідси випливає лінійність зміни. Тому, оскільки $\Delta R(t)$ є сумою однаково розподілених, незалежних випадкових величин з нульовим математичним сподіванням і дисперсією, пропорційною довжині Δt, то згідно з центральною граничною теоремою $\frac{R(t)}{\sigma(t)}$ має нормальний розподіл (при $\Delta t\to 0$) з нульовим математичним сподіванням, а отже, при $\Delta t\to 0$ є вінерівським процесом *W (t),* і

$$\frac{\Delta R(t)}{\sigma(t)} \approx W(t+\Delta t) - W(t) = \Delta W(t) \text{ при } \Delta t \to 0 .$$

Маємо

$$\ln(1+\frac{\Delta S(t)}{S(t)}) \approx \sigma(t)\Delta W(t) . \qquad (2.2.11)$$

Оскільки при малих $x, \ln(1+x) \approx x$, то формулу (2.2.11) можна переписати у вигляді

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \approx \sigma(t)\Delta W(t) . \qquad (2.2.12)$$

Вона стане точною, якщо в останній рівності перейти до границі при $t \to 0$ і переписати її у вигляді

$$S'(t) = \sigma(t)S(t)W'(t) \qquad (2.2.13)$$

або в диференціальній формі:

$$dS(t) = \sigma(t)S(t)dW(t) , \qquad (2.2.14)$$

або в інтегральній:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma(s)S(s)dW(s) . \qquad (2.2.15)$$

Однак у класичному сенсі ні похідної $W'(t)$, ні $dW(t)$, ні інтеграла у формулі (2.2.15) не існує, оскільки відомо, що траєкторії вінерівського процесу, які є неперервними функціями, ніде не диференційовані та мають необмежену варіацію, тому інтеграл у (2.2.15) не можна розглядати як звичайний інтеграл Стільт'єса. Інтеграл у (2.2.15) розуміється як спеціальний стохастичний інтеграл Іто, а диференціал у (2.2.14) – як стохастичний диференціал Іто, конструкцію якого можна знайти в будь-якому підручнику з випадкових процесів.

Формула (2.2.14) отримана за відсутності макроекономічних чинників. Якщо їх урахувати (напр., інфляцію), то зміна вартості акції буде сумарним результатом макроекономічних чинників, вплив яких можна вважати лінійним ($\approx \mu(t)\Delta t$), і мікроекономічних ($\sigma(t)\Delta W(t)$). Тому остаточно отримаємо:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu(t)\Delta t + \sigma(t)\Delta W(t) .$$

Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, для вартості акцій $S(t)$ можна написати лінійне стохастичне диференціальне рівняння

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t) , \qquad (2.2.16)$$

де перший диференціал звичайний, а другий – стохастичний.

Розв'язок цього рівняння [4] матиме вигляд

$$S(t) = S(0)\ell^{\int_0^t (\mu(u) - \frac{\sigma^2(u)}{2})du + \int_0^t \sigma(u)dW(u)} . \qquad (2.2.17)$$

Якщо $\mu(t)$ і $\sigma(t)$ – сталі, то формула (2.2.17) набуває вигляду

$$S(t) = S(0)\ell^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \qquad (2.2.18)$$

і називається *формулою Самуельсона*. Вона дозволяє моделювати зміну вартості акцій за допомогою вінерівського процесу та знаходити ймовірносні характеристики $S(t)$ (розподіли, моменти тощо).

Описана вище модель називається моделлю (B,S)-ринку (облігації, акції). Маючи формули для вартості акцій і облігацій, інвестор може вигідніше вкладати свої кошти в ті чи інші папери, тобто будувати свою стратегію поведінки на ринку цінних паперів, а відтак отримувати прибуток від гри на біржі чи, принаймні, застрахувати себе від збитків.

3. НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ФІЛЬТРАЦІЇ

3.1. РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТЕПЛА ПРИ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ

Класична лінійна теорія розповсюдження тепла в середовищі зі сталими теплопровідністю та теплоємністю вважається найбільш вивченим розділом математичної фізики, чого не можна сказати про нелінійні задачі розповсюдження тепла. Такі задачі виникають, коли в рівнянні розповсюдження тепла розглядаються джерела тепла, потужність яких залежить від температури. З такими задачами ми зустрічаємося в теорії розповсюдження полум’я, у теорії зірок. В обох випадках, разом із впливом температури на швидкість виділення тепла, має місце істотна залежність (як правило, степенева) теплопровідності й теплоємності від температури. Зараз у теорії горіння й теорії зірок добре вивчені одновимірні стаціонарні та квазі-стаціонарні процеси, у яких температура залежить тільки від однієї просторової змінної, що дає можливість переходити до звичайних диференціальних рівнянь. В ієрархії складності наступними є одновимірні нестаціонарні процеси, у яких температура залежить від однієї просторової змінної та часу. Відповідна до них математична модель є одномірним нелінійним рівнянням теплопровідності.

Загальне рівняння теплопровідності в інертному середовищі (без джерел тепла) має вигляд

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div(\lambda\, grad u)\,. \qquad (2.3.1)$$

Якщо теплоємність c пропорційна u^m, а теплопровідність λ пропорційна u^n, то (2.3.1) записується у вигляді

$$u^m \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 div(u^n gradu), \qquad (2.3.2)$$

де a^2 – стала, що об'єднує коефіцієнти пропорційності й густину середовища при $m = n = 0$, $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$. При перетворенні Кірхгофа

$$\psi(m+1)\int_0^u u^m du = u^{m+1}, \quad u = \psi^{\frac{1}{m+1}}$$

$$u^n = \psi^{\frac{n}{m+1}}, \quad gradu = \frac{1}{m+1}\psi^{-\frac{m}{m+1}} grad\psi, \quad u^m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m+1}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

рівняння (2.3.2) набуває вигляду

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 div\left(\psi^{\frac{n-m}{m+1}} grad\psi\right), \qquad (2.3.3)$$

тобто стає рівнянням теплопровідності для випадку сталої теплоємності та степеневої залежності теплопровідності від температури. Тому досить обмежитися розглядом рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 div\left(u^k gradu\right). \qquad (2.3.4)$$

Розглянемо одновимірні нелінійні рівняння, коли від операторів div та $grad$ залишаються тільки їх радіальні частини в циліндричній і сферичній системах координат:

$$div = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.) \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2..) \end{cases}, \quad grad = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{cases}.$$

Якщо ввести показник розмірності простору $n = 1,2,3$, то наведені рівняння об'єднуються в рівняння вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}u^k \frac{\partial u}{\partial r}\right), n = 1,2,3. \qquad (2.3.5)$$

Сім'ї розв'язків цього рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу [1]:

$$u(r,t)=v(t)\cdot V\left(\frac{r}{R(t)}\right). \qquad (2.3.6)$$

Змінна $\eta = r/R(t)$ називається *змінною подібності* тому, що значення функції $V(\eta)$ дорівнює одній і тій самій сталій $V_0 = V(\eta_0)$ для всіх точок кривої $r=\eta_0 R(t)$ на площині (t,r).

Виберемо розв'язок у вигляді (2.3.6) і відокремимо змінні в рівнянні

$$\frac{\partial u}{\partial t}=V(\eta)\cdot v'(t)-rv(t)\frac{R'(t)}{R^2(t)}\frac{dV(\eta)}{d\eta}=V(\eta)v'(t)-\eta\frac{R'(t)}{R(t)}v(t)\frac{dV(\eta)}{d\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{v(t)}{R(t)}\frac{dV(\eta)}{d\eta};\ u^k r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{v^{k+1}(t)}{R(t)}r^{n-1}V^k(\eta)\frac{dV(\eta)}{d\eta}$$

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(u^k r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{R^{n-1}(t)\eta^{n-1}}\frac{1}{R(t)}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{v^{k+1}(t)}{R(t)}R^{n-1}(t)\eta^{n-1}V^k(\eta)\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right)=$$

$$=\frac{v^{k+1}(t)}{R^2(t)}\frac{1}{\eta^{n-1}}\frac{d}{d\eta}\left(V^k(\eta)\eta^{n-1}\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right).$$

Згідно з цими виразами, рівняння (2.3.5) після домноження на $R^2(t)\neq 0$ переписується у вигляді

$$V^{k+1}(t)\eta^{n-1}\frac{d}{d\eta}(V^k(\eta)\eta^{n-1}\frac{dV(\eta)}{d\eta})=$$
$$\frac{1}{a^2}R(t)\left[R(t)v'(t)V(\eta)-\eta v(t)R'(t)\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right]. \qquad (2.3.7)$$

Ми не накладали обмежень на функції $V(t)$ та $R(t)$, крім умови $R(t)\neq 0$. Для відокремлення змінних у рівнянні (2.3.7) припустимо, що

$$v(t)R'(t)=-Av'(t)R(t),$$

де A – стала. Звідси $R(t)=[v(t)]^{-A}$ або $v(t)=[R(t)]^{-\frac{1}{A}}$. При цьому права частина рівняння (2.3.7) матиме вигляд

$$R(t)\left[R(t)v'(t)V(\eta)-\eta v(t)R'(t)\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right]=R^2(t)v'(t)\left[V(\eta)+A\alpha\eta\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right],$$

що дозволяє зробити відокремлення змінних:

$$\frac{\eta^{\frac{1}{n-1}}\frac{d}{d\eta}\left(V^k(\eta)\eta^{n-1}\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right)}{V(\eta)+A\eta\frac{dV(\eta)}{d\eta}}=\frac{R^2(t)v'(t)}{a^2v^{k+1}(t)}=-B.$$

Для визначення $V(\eta)$, $R(t)$ і $v(t)$ одержимо звичайні диференціальні рівняння:

$$\frac{d}{d\eta}(V^k(\eta)\eta^{n-1}\frac{dV}{d\eta})+AB\eta^n\frac{dV(\eta)}{d\eta}+B\eta^{n-1}V(\eta)=0\,. \qquad (2.3.8)$$

$$R^{\frac{A+X}{A}}(t)R'(t)=a^2AB\,. \qquad (2.3.9)$$

$$v(t)=\left[R(t)\right]^{-\frac{1}{A}}\,. \qquad (2.3.10)$$

Загальний розв’язок рівняння (2.3.9) має вигляд

$$R(t)=\left[\frac{a^2A^2B}{2A+k}\left(t-t_0\right)\right]^{\frac{A}{2A+k}}\,. \qquad (2.3.11)$$

Тоді

$$v(t)=\left[\frac{a^2A^2B}{2A+k}\left(t-t_0\right)\right]^{-\frac{1}{2A+k}}\,. \qquad (2.3.12)$$

Домножимо рівняння (2.3.8) на $\eta^{\frac{1-nA}{A}}$ і перепишемо його у вигляді

$$\eta^{\frac{1-nA}{A}}\frac{d}{d\eta}\left(V^k(\eta)\eta^{n-1}\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right)+AB\left(\eta^{\frac{1}{A}}\frac{dV(\eta)}{d\eta}+\frac{1}{A}\eta^{\frac{1-A}{A}}V(\eta)\right)=0$$

або

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{\frac{1-A}{A}}V^k(\eta)\frac{dV(\eta)}{d\eta}\right)-\frac{1-nA}{(k+1)A}\eta^{\frac{1-2A}{A}}\frac{dV^{k+1}(\eta)}{d\eta}+ \qquad (2.3.13)$$
$$+AB\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{\frac{1}{A}}V(\eta)\right)=0\,.$$

Якщо $A=\frac{1}{n}$ або $A=\frac{1}{2}$, то рівняння (2.3.13) можна один раз проінтегрувати:

$$\frac{dV^k(\eta)}{d\eta}=-\frac{k}{n}B\eta\,. \qquad (2.3.14)$$

Інтегруючи (2.3.14) ще раз, отримаємо

$$V(\eta)=\left[\frac{k}{2n}B\left(\eta_0^2-\eta^2\right)\right]^{\frac{1}{k}} \qquad (2.3.15)$$

– розв’язок, що залежить від довільної сталої η_0. При $\eta=\eta_0$ він дорівнює нулю. З диференціального рівняння (2.3.7) випливає, що при $\eta=\eta_0$ дорівнює нулю перша й усі старші похідні. Тому для всіх $\eta=\eta_0$ функція $V(\eta)$ тотожно дорівнює нулю. Отже,

$$u(r,t)=\begin{cases}\left[\left[\dfrac{a^2B}{(2+nk)n}(t-t_0)\right]^{-\frac{n}{2+nk}}\left[\dfrac{kB}{2n}\left(\eta_0^2-\eta^2\right)\right]\right]^{\frac{1}{k}}, 0\le\eta\le\eta_0,\\ 0\text{ , при } \eta_0\le\eta<\infty\end{cases} \quad (2.3.16)$$

$$\eta=\frac{r}{R(t)}=r\left[\frac{a^2B}{(2+nk)n}(t-t_0)\right]^{-\frac{1}{2+nk}}, \quad (2.3.17)$$

де $B,\ \ t_0,\ \ \eta_0$ – параметри.

$$\eta_\Phi(t)=\eta_0\left[\frac{a^2B}{(2+nk)n}(t-t_0)\right]^{-\frac{1}{2+nk}}$$ – рівняння фронту розповсюдження,

що відділяє збурене середовище від середовища, до якого в даний момент часу збурення ще не дійшло.

Швидкість розповсюдження збурення така:

$$v=\frac{\eta_0a^2B}{(2+nk)^2n}\left[\frac{a^2B}{(2+nk)n}(t-t_0)\right]^{-\frac{1+nk}{2+nk}}. \quad (2.3.18)$$

У лінійній теорії теплопровідності й дифузії поняття області впливу відсутнє: температура, концентрація й густина тільки асимптотично прямує до нуля на нескінченній відстані від джерела. У нелінійній теорії, якщо в початковому стані в середовищі теплопровідність дорівнює нулю, то в кожний даний момент часу теплове збурення охоплює тільки певний скінченний об’єм.

У другому частинному випадку $A=\frac{1}{2}$ маємо

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{k+1}\eta\frac{dV^{k+1}(\eta)}{d\eta}-\frac{2-n}{k+1}V^{k+1}(\eta)+\frac{1}{2}B\eta^2V(\eta)\right]=0\ .$$

Тоді $\eta\dfrac{dV^k(\eta)}{d\eta}-\dfrac{(2-n)k}{k+1}V^k(\eta)=-\dfrac{k}{2}B\eta^2$.

Звідси

$$V(\eta)=\begin{cases}\eta^{\frac{2-n}{k+1}}\left[\frac{k(k+1)}{2(2+kn)}B\left(\eta_0^{\frac{2+kn}{k+1}}-\eta^{\frac{2+kn}{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{k}}, 0\le\eta\le\eta_0,\\ 0\quad,\quad \eta_0\le\eta<\infty.\end{cases}\qquad (2.3.19)$$

Загальним розв'язком задачі буде

$$u(r,t)=\begin{cases}\left[\frac{a^2B}{4(1+k)}(t-t_0)\right]^{-\frac{1}{2(1+k)}}\left[\frac{k(k+1)}{2(2+kn)}B\left(\eta_0^{\frac{2+rn}{k+1}}-\eta^{\frac{2+kn}{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{k}}, 0\le\eta\le\eta_0,\\ 0\quad,\quad \eta_0\le\eta<\infty.\end{cases}$$

де $\eta=r\left[\frac{a^2B}{4(1+k)}(t-t_0)\right]^{-\frac{1}{1+k}}$ залежить від параметрів B,t_0,η_0.

Форма змінних подібності $\eta(:,t)$ залежить від параметрів B і η_0. Вони можуть бути визначені за допомогою спеціальних крайових умов.

Особливий інтерес становлять процеси розповсюдження фіксованої кількості тепла, енергії або маси, виділених у початковий момент часу в початку координат.

$$\int_0^\infty U(r,t)\,r^{n-1}dr=\frac{1}{\varpi_n}Q=\text{const}\,.\qquad (2.3.20)$$

ω_n – площа одиничної сфери в просторі n змінних.

Підставляючи (2.3.6) у (2.3.20), отримуємо

$$\int_0^\infty u(r,t)r^{n-1}dr=R^n(t)v(t)\int_0^\infty V(\eta)\eta^{n-1}d\eta=v^{1-An}(t)\int_0^\infty V(\eta)\eta^{n-1}d\eta=\frac{Q}{\omega_n}\,.$$

Отже, $A=\frac{1}{n}$.

Такому значенню A відповідає розв'язок (2.3.16)–(2.3.17). Однак для фізики цікаві не всі такі розв'язки, а тільки ті, для яких $\frac{\partial u(o,t)}{\partial r}=0$, $u(\infty,t)=0$. Обидві умови виконуються автоматично, а використовується тільки одна:

$$\int_0^\infty V(\eta)\eta^{n-1}d\eta=\left(\frac{k}{2n}B\right)^{\frac{1}{k}}\int_0^{\eta_0}(\eta_2^2-\eta^2)^{\frac{1}{k}}\eta^{n-1}d\eta=\left(\frac{k}{2n}\right)^{\frac{1}{k}}\left(B\eta_0^{2+kn}\right)^{\frac{1}{k}}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{k}}x^{n-1}dx=\frac{Q}{\omega n}$$

Звідси $(B\eta_0{}^{2+kn})^{\frac{1}{k}} = \frac{Q}{w_n}(\frac{2n}{k})^{\frac{1}{k}} I_{kn}^{-1}$,

$$I_{kn} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{k}} x^{n-1} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{k+2} \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{k})}, \quad n=1, \\ \frac{k}{2(k+1)}, \quad n=2, \\ \frac{k\sqrt{\pi}}{2(2+3k)} \quad \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{k})}, n=3; \end{cases}$$

$$\varpi_n = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)};$$

$$\eta_0^2 B^{\frac{2}{2+nk}} = \left(\frac{2n}{k}\frac{Q^k}{g_{kn}^k}\right)^{\frac{2}{2+kn}},$$

$$g_{kn} = \varpi_n I_{kn} = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{2+nk} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{k}\right)}.$$

Точні розв’язки залежать тільки від комбінації $\eta_0^2 B^{\frac{2}{2+nk}}$ параметрів η_0 та B.

$$u(r,t) = \begin{cases} \left[\left(\frac{(2+nk)k}{2a^2 t}\right)^n \left(\frac{Q}{g_{kn}}\right)^2\right]^{+\frac{1}{2+nk}} \left[1-\frac{r^2}{r_\Phi^2(t)}\right], \quad 0 \le r \le r_\Phi^{(t)} \\ o \quad , \quad r_\Phi^{(t)} \le r < \infty \end{cases}$$

$$r_\Phi(t) = \left[\frac{2}{k}\frac{a^2}{2+nk}\left(\frac{Q}{g_{kn}}\right)^k t\right]^{\frac{1}{2+nk}},$$

$$g_{kn}=\frac{2}{2+nk}\left(\sqrt{\pi}\right)^n\frac{\Gamma(\frac{1}{k})}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{k}\right)}.$$

3.2. РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ

Під фільтрацією будемо розуміти рух, а точніше, просочування рідини або газу в пористому середовищі або середовищі з тріщинами.

Основними величинами, що визначають стан рідини чи газу в природному ґрунті, є густина ρ, тиск p і швидкість фільтрації. Характеристикою ґрунту або іншого середовища, у якому відбувається фільтрація, є пористість m.

Під швидкістю фільтрації $\vec{v}$ розуміють витрати рідини чи газу, віднесені до одиниці площі, виділеної в пористому середовищі. Фільтрація – це рух частинок рідини через канали, що утворилися між частинками ґрунту або іншого пористого середовища.

Відношення загального об'єму каналів або пор, що знаходяться в деякому об'ємі пористого середовища, до всього об'єму цього середовища називається пористістю середовища m. $0\le m\le 1$.

В основі теорії фільтрації лежить закон, установлений експериментально у 1852–1855 рр. французьким інженером А. Дарсі. Згідно з цим законом, кількість рідини чи газу пропорційна падінню гідродинамічного тиску в напрямку потоку рідини:

$$v_n=-k\frac{\partial p}{\partial n}, \tag{2.3.21}$$

де p – тиск, n – нормаль до одиничної площадки, а k – коефіцієнт фільтрації.

Якщо ρ – густина, то кількість рідини ΔQ_1, зібраної в деякому об'ємі Ω за відрізок часу $[t_1,t_2]$, визначається інтегралом

$$\Delta Q_1=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_{\Omega}m\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz\,. \tag{2.3.22}$$

Кількість рідини Q_1 у Ω, що відповідає заданій густині, визначається інтегралом

$$Q_1=\iiint_{\Omega}m\rho dxdydz\,,\ \Delta Q_1=\Delta Q_2=\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_{S}v_n\rho d\delta\,. \tag{2.3.23}$$

Це співвідношення аналогічне відповідному співвідношенню, що визначає кількість накопиченого тілом тепла Q.

При виведенні рівняння фільтрації рідини або газу в пористому середовищі необхідно використати рівняння руху в'язкої рідини Нав'є – Стокса, а також рівняння нерозривності та стану. Їх використання обумовлене тим, що на відміну від теплопровідності й дифузії, процес фільтрації визначається густиною ρ, тиском p і швидкістю фільтрації $\vec{v} = (u, v, w)$. Безпосереднє інтегрування рівнянь Нав'є – Стокса у випадку обтікання нескінченно великого числа частинок (при фільтрації) не можна виконати. Тому застосовують штучний підхід, що базується на використанні рівнянь руху Ейлера.

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X_1 + X_2 - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = У_1 + У_2 - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z_1 + Z_2 - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}, \qquad (2.3.24)$$

де $(X_1;У_1;Z_1)$ – вектор масових сил, $(X_2;У_2;Z_2)$ – вектор сил опору, $(u;v;w)$ – вектор швидкості.

Вважатимемо, що компонентами сил ваги є $X_1 = 0, У_1 = 0, Z_1 = -g$, де g – прискорення сили ваги. Знак “-” вибрано відповідно до вибору напрямку осі OZ.

Сили опору $(X_2;У_2;Z_2)$, що виникають при обтіканні рідиною частинок пористого середовища, визначаються за допомогою закону Дарсі:

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x}, \; v = -k\frac{\partial p}{\partial y}, \; w = -k\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (2.3.25)$$

Для їх визначення в рівняннях (2.3.24) нехтують силами інерції та силою ваги. Це приводить до такого рівняння:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X_2, \; \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = У_2, \; \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z_2. \qquad (2.3.26)$$

Використовуючи закон Дарсі, отримуємо

$$X_2 = -\frac{u}{k\rho}, \; У_2 = -\frac{v}{k\rho}, \; Z_2 = -\frac{w}{k\rho}. \qquad (2.3.27)$$

Якщо підставити в рівняння (2.3.24) знайдені компоненти сил, то отримуємо

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u}{k\rho} - \frac{du}{dt},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{v}{k\rho} - \frac{dv}{dt}, \qquad (2.3.28)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g - \frac{w}{k\rho} - \frac{dw}{dt}.$$

До цих рівнянь необхідно приєднати рівняння стану рідини чи газу (вони пов'язують густину ρ і тиск p)

$$\rho = f(p) \qquad (2.3.29)$$

і рівняння нерозривності

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0\,. \qquad (2.3.30)$$

Однак така система рівнянь є невиправдано ускладненою. Як правило, сили інерції $\left(\frac{du}{dt};\frac{dv}{dt};\frac{dw}{dt}\right)$ досить малі, тому ними можна знехтувати в рівняннях (2.3.28). Тоді рівняння (2.3.28) спрощується:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u}{k};\;\; \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{v}{k};\;\; \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{w}{k} - \rho g. \qquad (2.3.31)$$

Звідси випливають рівняння фільтрації:

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x},\;\; v = -k\frac{\partial p}{\partial y},\;\; w = -k\frac{\partial p}{\partial z} - k\rho g. \qquad (2.3.31^1)$$

Підставляючи знайдені u, v, w у рівняння нерозривності й ураховуючи рівняння стану, отримаємо основне рівняння фільтрації відносно тиску p:

$$m\frac{\partial f(p)}{\partial t} - div\big(kf(p)gradp\big) = \frac{\partial}{\partial z}\big(kgf(p)\big). \qquad (2.3.32)$$

Фільтрація нестисливої рідини. Якщо рідина нестислива, то її густина – стала. Рівняння стану (2.3.29) у цьому випадку не використовується, а рівняння нерозривності набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,,\;\; (div\,\vec{v} = 0)\,. \qquad (2.3.33)$$

Якщо ввести функцію напору (п'єзометричного напору)

$$p = g\varphi - gz \quad \varphi = z + \frac{p}{g}\,, \qquad (2.3.34)$$

то рівняння фільтрації ($2.3.31^1$) матимуть вигляд

$$u = -kg\frac{\partial \varphi}{\partial x},\;\; v = -kg\frac{\partial \varphi}{\partial y},\;\; w = -kg\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,. \qquad (2.3.35)$$

Підставляючи (2.3.35) у (2.3.33), запишемо рівняння для знаходження напору φ:

$$div(kggrad\varphi) = 0\,. \qquad (2.3.36)$$

Якщо g і $k = \mathrm{const}$, то воно зводиться до рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0\,. \qquad (2.3.37)$$

Тут частинки нестисливої рідини рухаються лініями току, що ортогональні до поверхонь сталого напору:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}\,. \qquad (2.3.38)$$

Рівняння фільтрації політропного газу. Рівняння стану такого газу має вигляд

$$\rho = \frac{1}{\beta g} p^{\frac{1}{n}}\,, \qquad (2.3.39)$$

де p – абсолютний тиск газу, β – стала газу, n – показник політропи. Підставляючи (2.3.39) у рівняння фільтрації (2.3.32) і нехтуючи в ньому малими силами ваги, отримаємо рівняння

$$\frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}(p^{\frac{1}{n}}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p^{\frac{1}{n}}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p^{\frac{1}{n}}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p^{\frac{1}{n}}\frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad (2.3.40)$$

Якщо ввести заміну $P = p^{1+\frac{1}{n}}, \Leftrightarrow p = P^{\frac{n}{n+1}}$, то $p^{\frac{1}{n}}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{n}{n+1}\frac{\partial P}{\partial x}$;

$p^{\frac{1}{n}}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{n}{n+1}\frac{\partial P}{\partial z}$; $\frac{\partial}{\partial t}(p^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n+1} p^{-\frac{n}{n+1}}\frac{\partial P}{\partial t}$,

і рівняння (2.3.40) набуде вигляду

$$\frac{m}{kn} P^{-\frac{n}{n+1}}\frac{\partial P}{\partial t} = \nabla P\,. \qquad (2.3.41)$$

Це і є основне рівняння фільтрації політропного газу в пористому середовищі (Лейбензона). При його інтегруванні необхідно задати початкову

$$P(x, y, z, 0) = P_0(x, y, z),\ (x; y; z) \in \Omega$$

та крайову

$$P(x, y, z, t) = P_1(x, y, z, t),\ (x; y; z) \in \partial\Omega; \quad t > 0$$

умови.

Рівняння Бусінеска. Однією з основних модельних задач руху ґрунтових вод є задача плоскої фільтрації рідини в пласті. Пласт, яким рухається рідина, має знизу непроникний ґрунт. Вода займає лише частину пласта й має вільну поверхню, тиск над якою є сталим. При відкачуванні води з пласта через водозбірні криниці або свердловини її початковий рівень у пласті змінюється, і рівень вільної поверхні води знижується в напрямку стоку. Припустимо, що висота вільної поверхні в пласті, що розташований під площиною відліку, описується функцією координат x та y, яка змінюється неперервно й дуже повільно протягом усього пласта, а глибина дна H також є неперервною функцією від x та y, що дуже повільно змінюється протягом усього пласта. Ці припущення дозволяють вважати рух рідини плоским, тобто таким, що всі величини, які його характеризують, залежать лише від x та y, а вертикальна складова швидкості фільтрації $w=0$.

Математичною моделлю такої плоскої фільтрації є диференціальне рівняння Бусінеска відносно п'єзометричного напору $h(x,y)$:

$$\frac{m}{\gamma}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]=\frac{q}{\gamma},$$

де $H=H(x,y)$ – глибина дна пласта, $k=k(x,y)$ – коефіцієнт фільтрації, $\gamma=g\rho$ – питома вага, m – пористість шару, $q=q(x,y,z,t)$ – густина осадів.

Якщо $k=\text{const}$, то при $q=0$ маємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]-\frac{1}{a^2}\frac{\partial h}{\partial t}=0, \qquad (2.3.42)$$

де $a^2=\dfrac{k\gamma}{m}$.

Розглянемо деякі окремі випадки рівняння (2.3.42):

1. Якщо відношення $\dfrac{h}{H}\le 1$, то в рівнянні (2.3.42) можна знехтувати напором h порівняно з глибиною H, що приводить до лінійного рівняння із змінними коефіцієнтами

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Коли рух усталиться, отримаємо стаціонарне рівняння

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}=0.$$

2. Якщо підстильний пласт горизонтальний, то його можна прийняти за горизонтальну площину $x0y$ і взяти $H=0$. Тоді рівняння (2.3.42) матиме вигляд

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

або

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}-\frac{2}{a^2}\frac{\partial h}{\partial t}=0. \qquad (2.3.43)$$

Це важливе рівняння було отримано Буссінеском.

Якщо рух є стаціонарним, то маємо

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = 0 .$$

Це рівняння Дюпюї.

3. Проведемо аналогію з рухом газу. Якщо процес фільтрації газу ізотермічний, то показник політропи $n = 1$. Тоді рівняння (2.3.40) має вигляд

$$\frac{m}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

Якщо рух газу плоский, то отримаємо рівняння

$$\frac{m}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

або

$$\frac{2m}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2},$$

яке збігається з рівнянням (2.3.41).

Одномірні нелінійні крайові задачі нестаціонарної ізотермічної фільтрації рідин і газів у пористих середовищах. До таких задач ми приходимо у випадку, коли процес фільтрації залежить тільки від однієї просторової змінної та часу t. Така властивість притаманна процесам із плоскою, циліндричною або сферичною симетрією.

Тоді рівняння (2.3.32) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1} k f(p) \frac{\partial p}{\partial r} \right] - m\frac{\partial f(p)}{\partial t} = 0 , \qquad (2.3.44)$$

де r – просторова координата, тобто відстань: а) від даної точки пористого середовища до площини відліку при русі газу плоскими хвилями; б) від цієї точки до осі симетрії руху при осесиметричному русі газу; в) від точки до центра симетрії при центрально-симетричному русі газу. Відповідно n дорівнює 1, 2 або 3 для цих типів руху.

Якщо $k = \text{const}$, то для політропного газу отримаємо рівняння

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1} p^{\nu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] - \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 .$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. – К., 1974. – Ч. I, II.

2. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – М., 1976.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – К., 1974.

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К., 1968.

5. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М., 1983.

6. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., исправл. – М., 2001.

Зміст

ЧАСТИНА 1
ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ 3
   1.1. Вступ 3
   1.2. Основні категорії теорії моделювання 4
   1.3. Класифікація видів подібності та моделювання 9
2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ 12
   2.1. Вступ 12
   2.2. Математичні моделі та основні заходи математичного моделювання 13
3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ПРИ ПОБУДОВІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ 31
   3.1. Знаходження критеріїв подібності явища за наявності його математичної моделі 31
   3.2. Теореми подібності 37
4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ВІДСУТНОСТІ МОДЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 43
   4.1. Розмірності 43
   4.2. π -теорема 50
   4.3. Методика знаходження критеріїв подібності за відсутності математичного описання об'єкта 54
   4.4. Розрахункове моделювання за допомогою критеріїв подібності 58

ЧАСТИНА 2
ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

1. БІОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ 61
   1.2. Популяційні моделі 63
2. МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ФІНАНСОВИХ І СТРАХОВИХ ПРОЦЕСІВ 74
   2.1. Математична модель роботи страхової компанії 74
   2.2. Моделювання ринку фінансів 78
3. НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ФІЛЬТРАЦІЇ 81
   3.1. Розповсюдження тепла при теплопровідності, що залежить від температури 81
   3.2. Рівняння фільтрації 88
ЛІТЕРАТУРА 94

Навчальне видання

СТАНЖИЦЬКИЙ Олександр Миколайович
ТАРАН Євген Юрійович
ГОРДИНСЬКИЙ Любомир Дмитрович

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

Редактор *Н.М. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Підписано до друку 7.12.06. Формат 60х84$^{1/16}$. Вид. № 324. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 125. Ум. друк. арк. 5,58. Обл.-вид. арк. 6,86. Зам. № 26-3674.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28.
E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua
WWW: http://vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво внесено до державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02.