ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра загальної математики

Індивідуальна робота

з математичного моделювання

на тему:

«Лінійні балансові моделі. Модель Леонтьєва.

Модель міжнародної торгівлі.»

Виконали:

студентки 4-го курсу

групи 4214

математичного факультету

спеціальності «Математика»

Піморенко А. О.

Яковлєва І. В.

Пилипенко О. А.

Запоріжжя, 2017 р.

ЗМІСТ

1. ВСТУП……………………………………………………………………..3
2. МОДЕЛЬ ЛЄОНТЬЄВА…………………………………………………..3
3. МОДЕЛЬ МІЖНОРОДНОЇ ТОРГІВЛІ…………………………………..6
4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА………………………………………………..10
5. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА…………………………………………….....13
6. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ………………………………………………….18

**1 ВСТУП**

При постановці і вирішенні багатьох завдань в фінансово-економічній і технічній сфері використовується системний підхід. Вибирається система об'єктів, достатніх для математичного моделювання відповідних систем, що містять ці об'єкти. Встановлюються взаємозв'язок цих об'єктів у вибраній системі, визначаються залежні і незалежні параметри системи. Тобто відомі кількісно деякі характеристики об'єктів системи, а деякі необхідно визначити з урахуванням виконання умов взаємодії об'єктів в загальній балансовій схемі.

**Балансова модель:**

1. Система рівнянь (балансових співвідношень, балансових рівнянь), які задовольняють вимогу відповідності двох елементів: наявності ресурсу та його використання (наприклад, виробництва кожного продукту і по- потреби в ньому, робочої сили і кількості робочих місць, платоспроможного попиту населення та пропозиції товарів і послуг). Відповідність тут розуміється або як рівність, або менш жорстко - як достатність ресурсів для покриття потреби (і, отже, наявність деякого резерву).

2. При описі економічної системи в цілому - система рівнянь, кожне з яких виражає вимогу балансу між виробленим окремими ними економічними об'єктами кількістю продукції та сукупної потребою в цій продукції. Отже, в даному випадку розглядається система, що складається з економічних об'єктів, кожний з яких випускає деякий продукт, частково споживаний іншими об'єктами системи, частково виводиться за її межі в якості її кінцевого продукту.

Основна інформація для БМ міститься в матриці коефіцієнтів витрат ресурсів на конкретні напрямки.

Найчастіше балансові системи представляються у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Інакше кажучи, лінійні балансові моделі в економіці часто зводяться до вирішення, що відповідає постановці завдання СЛАР. У разі, коли кількість невідомих більше числа рівнянь переходять до систем нерівностей і визначають область допустимих рішень. Коли кількість невідомих менше числа рівнянь для отримання наближеного рішення використовують метод найменших квадратів. Для обліку динаміки в балансових схемах враховують залежність параметрів системи від часу, тобто вирішують систему диференціальних рівнянь.

**Лінійна модель** - модель, що відображає стан або функціонування системи таким чином, що всі взаємозалежності в ній приймаються лінійними. Відповідно вона може формулюватися у вигляді одного лінійного рівняння або системи лінійних рівнянь. Причому в ряді випадків нелінійності взаємозалежностей може приводитися до лінійної формі шляхом математичних перетворень змінних.

**2 МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА**

Ефективне функціонування економіки передбачає наявність балансу між окремими галузями. Кожна галузь при цьому виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, а з іншого - як споживач продуктів, що виробляються іншими галузями. Для наочного вираження взаємного зв'язку між галузями використовують таблиці певного виду, які називають таблицями міжгалузевого балансу. Вперше ці таблиці були опубліковані в 1926 році в Росії. Математична модель міжгалузевого балансу (МОБ), яка припускає широкі можливості аналізу і прогнозу, з'явилася пізніше (1936 г.) в працях американського економіста Василя Леонтьєва.

Розглянемо найбільш простий варіант моделі міжгалузевого балансу (її називають моделлю Леонтьєва, або моделлю «витрати - випуск»).

Алгебраїчна теорія аналізу моделі «витрати - випуск» зводиться до вирішення СЛАР, в яких параметрами є коефіцієнти витрат на виробництво продукції.

Нехай весь виробничий сектор народного господарства розбитий на *n* «чистих» галузей. «Чиста» галузь - це умовне поняття - деяка частина народного господарства, більш-менш цілісна (наприклад, енергетика, машинобудування, сільське господарство тощо).

Нехай - обсяг продукції галузі *i*, споживаний в *j*- галузі;

 - обсяг виробництва *i*- галузі за даний проміжок часу (так званий валовий випуск *i* - продукції);

 - обсяг споживання продукції галузі *i* в невиробничій сфері (обсяг кінцевого споживання). Одиниці виміру всіх зазначених величин повинні бути однакові.

 Для випуску заданої кількості продукції галузь повинна отримати певну кількість продукції інших галузей, тобто

Для того, щоб галузь випустила валову продукцію, що коштує одну грошову одиницю, вона повинна отримати від інших галузей продукції на грошових одиниць.

А для утримання валового продукту:

Аналогічно для усіх галузей, тобто:

 (1)

Коефіцієнти називаються коефіцієнтами прямих витрат, тобто витрати *і* – галузі на одиницю валової продукції *j* – галузі.

Відповідно, продукція, що випускається кожною галуззю описується рівнянням:

 (2)

Враховуючи (1), отримаємо:

 (3)

Або в матричному вигляді запишемо так:

Вектор *X* називається вектором валового випуску, вектор *Y* - вектором кінцевого споживання, а матриця *А* - матрицею прямих витрат. Співвідношення називається рівнянням лінійного міжгалузевого балансу. Разом з викладеною інтерпретацією матриці *А* і векторів *X і Y* це співвідношення називають також ***моделлю Леонтьєва***.

За допомогою цієї моделі можна виконувати три види планових розрахунків:

1. Задаючи для кожної галузі величини валової продукції , можна визначити обсяги кінцевої продукції кожної галузі :
2. Задаючи величини кінцевої продукції всіх галузей (*Yi*), можна визначити величини валової продукції кожної галузі (*Xi*)*:*
3. Задаючи для ряду галузей величини валової продукції, а для всіх інших галузей - обсяги кінцевої продукції, можна знайти величини кінцевої продукції перших галузей і обсяги валової продукції других.

Позначимо зворотну матрицю через *В = (Е – А)–1,* тоді систему рівнянь в матричній формі можна записати так:

*X = BY.*

Елементи матриці *В* називаються коефіцієнтами повних матеріальних витрат. Вони показують, скільки всього потрібно виробити продукції галузі *i* для випуску в сферу кінцевого використання одиниці продукції галузі *j.* Планові розрахунки по моделі Леонтьєва можна виконувати, якщо виконується умова продуктивності.

Матрицю *А ≥* 0 будемо називати ***продуктивною***, якщо існує невід’ємний вектор X ≥ 0, що *Х > АХ*.

Для того щоб матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат була продуктивною, необхідно та достатньо, щоб виконувалась одна з умов:

1. матриця (Е – А) невідємно оборотна, тобто існує зворотня матриця (Е – А)–1 > 0;
2. найбільше за модулем власне значення λ матриці А, тобто розвязок характеристичного рівняння | λЕ – A | = 0 строго менше одиниці;
3. всі головні мінори матриці (Е – А) позитивні. Більш простим способом перевірки продуктивності матриці А є обмеження на величину її норми, в даному випадку на величину найбільшої з сум елементів матриці А в кожному стовпці. Якщо норма матриці А строго менше одиниці, то ця матриця продуктивна.
4. **МОДЕЛЬ МІЖНАРОДНОЇ ТОРГІВЛІ**

Розглянемо лінійну модель обміну, яку часто інтерпретують, як модель міжнародної торгівлі, що дає змогу визначити торгівельні доходи країн ( або їхні співвідношення) для збалансованої торгівлі. Нехай маємо групу з *n* країн , які ведуть між собою торгівлю. Позначимо через торгівельний прибуток *j*-ої країни, який формується з продажу власних товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках. Структуру торгівельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частина торгівельного прибутку , яку *j*-та країна витрачає на купівлю товарів *і*-тої країни, є сталою.

Розглянемо матрицю

яку називають **структурною матрицею торгівлі**.

Вважатимемо, що весь торгівельний прибуток витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпчика матриці ***Q*** дорівнює одиниці:

Для країни прибуток від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить:

Для збалансованої торгівлі необхідно знайти таку матрицю торгівельних прибутків

щоб справджувалось матричне рівняння *Q∙X = X* , з якого можна визначити *Х*.

1. **ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА**

**Модель Леонтьєва міжгалузевого балансу**

Підприємство має три цехи, кожен з яких випускає один вид продукції. Прямі витрати одиниці продукції -го цеху,  що використовується як сировина (проміжний продукт) для випуску одиниці вибору продукції -го цеху, а також кількість одиниць продукції -го цеху, які будуть використані для реалізації, наведені в таблиці:

Таблиця 1. Витрати – випуск.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  Продукція цехів |  Прямі витрати |  Кінцевий продукт |
|  |   |  |
| 1-го |  |  |  |  |
| 2-го |  |  |  |  |
| 3-го |  |  |  |  |

Знайти:

1) коефіцієнти повних витрат;

2) план (валовий випуск) для кожного цеху;

3) виробничу програму цехів;

4) коефіцієнти непрямих витрат.

Числа в кожному стовпці таблиці описують структуру витрат відповідного цеха.

Мета побудови таблиці полягає в аналізі перетікання товарів між цехами, що забезпечує таке функціонування виробничого процесу, коли обсяг випуску відповідає сумарному (виробничому і кінцевому) попиту на товари.

Повернемося до передумов моделі. Усі галузі передбачаються взаємозалежними в тому сенсі, що для виробництва свого продукту кожна з них використовує результати виробництва (продукти) інших галузей.

**Розв’язання**. Якщо ввести в розгляд матрицю коефіцієнтів прямих витрат , вектор-стовпець валової продукції і вектор-стовпець кінцевої продукції , то математична модель міжгалузевого балансу набуде вигляду:

Критерії продуктивності матриці :

1. Матриця продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому хоча б для одного з стовпців сума елементів строго менше одиниці.

2. Для того щоб забезпечити позитивний кінцевий випуск по всіх галузях необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з перерахованих нижче умов:

- визначник матриці не дорівнює нулю, тобто матриця має зворотну матрицю .

- найбільше по модулю власне значення матриці , тобто рішення рівняння строго менше одиниці.

- всі головні мінори матриці порядку від до , додатні.

3. Матриця має невід'ємні елементи і відповідає критерію продуктивності (при будь-якому сума елементів стовпця ).

Визначимо матрицю коефіцієнтів повних витрат за допомогою формул звернення невироджених матриць. Коефіцієнт повних витрат показує, скільки продукції -й галузі потрібно зробити, щоб з урахуванням прямих і непрямих витрат цієї продукції отримати одиницю кінцевої продукції -й галузі. Повні витрати відображають використання ресурсу на всіх етапах виготовлення і дорівнюють сумі прямих і непрямих витрат на всіх попередніх стадіях виробництва продукції.

 Позначимо виробничу програму підприємства через , де  -  валові випуски продукції -го цехів, а план випуску товарної продукції через .

Матриця   - симетрична.

Виробничі взаємозв’язки підприємства подаються такою системою трьох рівнянь:

aбо

.

В матричному вигляді

,

,

.

Позначимо

.

Одержимо

.

Отже,

.

Для розв’язання системи   обчислимо обернену матрицю  для симетричної матриці і знайдемо розв’язок за формулою  .

Обчислимо визначник

.

Алгебраїчні доповнення елементів матриці :

,

,

,

,

,

.

*.*

Таким чином, елементи кожного стовпця показують, скільки потрібно затратити продукції кожної галузі для виробництва тільки одиниці кінцевого продукту -й галузі.

1. Покажемо, що елементи оберненої матриці є коефіцієнтами повних внутрішньо виробничих витрат. Нехай матриця кінцевого продукту .

Тоді

.

Отже, для виробництва одиниці продукції -го цеху, яка буде реалізована, треба витратити продукції -го цехів відповідно од. Аналогічно, якщо , , та , . Звідси, елементи оберненої матриці – це коефіцієнт повних витрат.

2. Знаходимо розв’язки системи

.

Валові випуски (план) продукції -го цехів відповідно

3. Знайдемо виробничу програму кожного цеху

;

;

;

;

;

;

;

;

.

В результаті отримаємо такі дані:

Таблиця 2. Міжгалузевий баланс.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Цех | Внутрішньовиробничі витрати | Всього | Кінцевий продукт | Валовий випуск |
|  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |

4. Коефіцієнти непрямих витрат  знаходяться як різниці повних внутрівиробничих витрат  і прямих витрат . В матричній формі:

**Лінійна модель міжнародної торгівлі**

Візьмемо три країни (наприклад, США, Німеччину й Україну) – учасниці торгівлі з торговельними доходами **.** Вважатимемо, що весь торговельний доход кожної країни витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн. Нехай США половину торговельного доходу витрачають на закупівлю товарів на своїй території, чверть – на закупівлю товарів із Німеччини та ще чверть – товарів із України. Німеччина порівну витрачає торговельний доход на закупівлю товарів із США, на своїй території та з України. Україна половину торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів із США, іншу половину – з Німеччини й нічого не закуповує на своїй території. Визначити доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю, якщо сума їхніх доходів становить євро.

**Розв’язання.** Лінійна модель міжнародної торгівлі дає можливість знайти співвідношення національних бюджетів країн для збалансованої торгівлі. Нехай є країн, бюджети яких відповідно витрачаються на закупку товарів всередині країни або із зовні (торговий бюджет). Позначаючи через частку бюджету -ї країни, яка витрачається на закупку товарів у -ї країни, отримаємо матрицю , яку називають структурною матрицею торгівлі. Її елементи повинні задовольняти умову

Запишемо структурну матрицю торгівлі: в першому стовпчику – США, в другому – Німеччина, в третьому – Україна:

.

Нехай – частина доходу, яку j-та країна витрачає на закупівлю товарів -тої країни. Зазначимо, що сума елементів матриці у кожному стовпці дорівнює одиниці.

Після підбиття підсумків торгівлі за рік -та країна отримає прибуток

 .

запишемо систему рівнянь для знаходження матриці X.

або

.

Тобто

.

Розв’язок цієї системи:

.

Отриманий результат означає, що збалансованість торгівлі даних країн досягається за співвідношення їхніх національних доходів

Знайдемо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що сума доходів євро.

Підставимо в цю рівність значення , де Отримаємо

Звідки . Отже , , євро.

Тобто для збалансованої торгівлі між цими країнами їх бюджети повинні задовольняти співвідношення 4:3:2.

**Висновки:**

1. Міжгалузевий баланс відображає виробництво і розподіл валового національного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу. Ідея збалансованості лежить в основі будь-якого раціонального функціонування господарства. Суть її в тому, що всі витрати повинні компенсуватися доходами господарства. В основі створення балансових моделей лежить балансовий метод - взаємне зіставлення наявних ресурсів і потреб в них.

Особливості моделі Леонтьєва:

- Розглядається економіка, в якій кожна галузь випускає один і тільки свій вид продукту;

- Взаємозв'язок між випуском і витратами описується лінійними рівняннями (лінійна і постійна технології);

- Вектор попиту на товари вважається заданим, тобто в моделі відсутні як такі оптимізаційні задачі споживачів;

- Вектор випуску товарів обчислюється, виходячи з попиту, тобто відсутні як такі оптимізаційні задачі фірм;

- Рівновага розуміється як суворе рівність попиту та пропозиції.

Аналіз показників таблиць «витрати-випуск» надає комплексну характеристику процесів, що відбуваються в економічній системі загалом і в окремих її складових. Це дає підстави вважати модель «витрати-випуск» могутнім інструментом для проведення різних аналітичних розрахунків з метою перевірки можливості реалізації варіантів розвитку економіки та обґрунтуванні на урядовому рівні рішень з реалізації основних соціально-економічних заходів. Безумовно, метод «витрати-випуск» посідає дуже важливе місце в макроекономічних дослідженнях.

2. Макроекономіка функціонування багатогалузевого господарства вимагає балансу між окремими галузями. Кожна галузь, з одного боку, є виробником, а з іншого – споживачем продукції, що випускається іншими галузями. Виникає досить непроста задача розрахунку зв’язку між галузями через випуск і споживання продукції різного виду.

Мета балансового аналізу: встановити яким має бути обсяг виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі. При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції. Ця модель основана на алгебрі матриць і використовує апарат матричного аналізу.

**5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА**

**Завдання 1**

У таблиці містяться дані балансу трьох галузей промисловості за деякий проміжок часу. Треба знайти об’єм валового випуску кожного виду продукції, якщо кінцеве споживання за галузями збільшити, відповідно, до 60, 70 та 30 умовних грошових одиниць.



*Розв’язання*. Випишемо вектори валового випуску та кінцевого споживання та матрицю коефіцієнтів прямих витрат. Відповідно формулі маємо:

Матриця *А* задовольняє обом критеріям продуктивності. У випадку заданого збільшення кінцевого споживання новий вектор кінцевого продукту буде мати

 Треба знайти новій вектор валового випуску , який задовольняє відношенням балансу в припущенні, що матриця *А* не зміниться. У такому випадку компоненти невідомого вектора знаходиться з системи рівнянь, яка в матричній формі має наступний вигляд:

,

Матриця цієї системи

Розв’язок системи лінійних рівнянь , при заданому вектором правої частини

(наприклад, методом Гауса) дає новий вектор як розв’язок рівнянь міжгалузевого балансу:

Таким чином, для того щоб забезпечити задане збільшення компонент вектора кінцевого продукту, необхідно збільшити відповідні валові випуски: видобуток та переробку вуглеводню на 52,2%, рівень енергетики – на 35,8% та випуск машинобудування – на 85% - в порівнянні з вихідними величинами, вказаними в

.

**Завдання 2**

Знайти національні доходи торгуючих країн у збалансованій системі міжнародної торгівлі. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

Розв’язання. Знайдемо власний вектор , який відповідає власному значенню , розв’язавши рівняння . Система рівнянь має вигляд

За допомогою метода Гаусса знайдемо загальний розв’язок цієї системи

Із приведених обчислень видно, що збалансованість торгівлі трьох країн досягається при векторі національних доходів , тобто при відношення доходів країн 2,25:2,5:1, або 9:10:4.

**Висновки**

У лабораторній роботі було приведено два приклади на модель Леонтьева та модель міжнародної торгівлі.

В першій задачі на модель Леонтьева треба було знайти об’єм валового випуску кожного виду продукції, якщо кінцеве споживання за галузями збільшити на деяку кількість умовних грошових одиниць, за даними таблиці балансу трьох гілок промисловості за деякий проміжок часу. Алгебраїчна теорія аналізу моделі «витрати - випуск» зводиться до розв’язку СЛАУ, в яких параметрами є коефіцієнти витрат на виробництво продукції.

В другому завданні на модель міжнародної торгівлі постановка задачі складалася в тому що, треба було знайти національні доходи трьох торгуючих країн у збалансованій системі міжнародної торгівлі, при умові, що дано структурну матрицю торгівлі трьох країн. У моделі міжнародної торгівлі процес взаємних закупівель товарів аналізується з використанням понять власного числа й власного вектора матриці.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Бистров, А.І. Інноваційний підхід до вирішення фінансово-економічних та технічних завдань з використанням балансових схем [Текст] / А.І. Бистров // Механізми переходу на інноваційний шлях роз- витку: мат-ли доповідей Всерос. наук.-практич. інтернет-конф. (23 квітня 2012 року). - Уфа: бисть (філія) ОУП ВПО «АТиСО», 2012. - С. 18-21.

2. Бистров, А.І. Використання методу вирішення балансових завдань в схемах нафтопереробки для оптимального вибору технологічних проектів з найбільш вигідними економічними показниками [Текст] / А.І. Бистров

// Вісник бисть (Башкирського інституту соціальних технологій). - 2014. - № 1 (22). - С. 27-32.

3. Бистров, А.І. Підготовка і проведення розрахунків процесів переробки нафтової сировини [Текст] / А.І. Бистров, В.Н. Деменков, І.Р. Хайруді- новий. - Уфа: Изд-во ГУП ІНХП РБ, 2014. - 288 с.

4. Бистров, А.І. Застосування комп'ютерних математичних технологій в дипломному проектуванні: навч. посібник [Текст] / А.І. Бистров, М.Ю. Доломатов. - М.-Уфа: РІО бисть, 2007. - 164 с.

5. Вілкас Е.Й. Рішення: теорія, інформація, моделювання [Текст] / Е.Й. Вілкас, Ю.З. Маймінас. - М.: Радио и связь, 1981. - 328 с.

6. Кундишева, Е.С. Економіко-математичне моделювання: підручник [Текст] / Є.С. Кундишева; під наук. ред. проф. Б.А. Суслакова. - М.: Даш- ков і К, 2008. - 424 с.

7. Орлова, І.В. Економіко-математичне моделювання. Практичне по- посібник за рішенням задач [Текст] / І.В. Орлова. - М .: Вузівський підручник, 2004. - 144 с.

8. Економіко-математичні методи і моделі [Текст]: навч. посібник / кол. авторів; під ред. С.І. Макарова. - 2-е изд., Перераб. і доп. - М.: КНОРУС, 2009. - 240 с.