Министерство сельского хозяйства РФ
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Мичуринский государственный аграрный университет»
Кафедра математического моделирования экономических систем

УТВЕРЖДЕНО
протокол № 9
методической комиссии
экономического факультета
от 12 марта 2008г.

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей

Мичуринск – наукоград РФ
2008

Учебно-методическое пособие составлено зав. кафедрой математического моделирования экономических систем, доктором экономических наук, профессором **Б.И. Смагиным**

Рецензент:
Зав. кафедрой математики и физики Мичуринского государственного аграрного университета профессор **А.И. Бутенко**

Рассмотрено на заседании кафедры
Протокол № 8 от 13 февраля 2008 г.

Содержание

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

Игра называется кооперативной, если в ней игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях (добровольный обмен между игроками информацией, совместный выбор стратегий, передача игроками части выигрыша друг другу и т.п.); иначе говоря, игроки могут образовывать коалиции. Теория кооперативных игр исследует типы коалиций, образующихся в процессе игры и условия, необходимые для их устойчивого существования.

Обозначим через N множество всех игроков, причем игроков принято различать по их номерам, т.е. N={1,2,...,n}, а через S – любое его подмножество, которое является коалицией. Очевидно, что число коалиций, состоящих из k игроков, равно числу сочетаний из n по k, то есть C_n^k, а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от количества n всех игроков в данной игре. Образовав коалицию, множество игроков S действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков. Общность интересов игроков из S означает, что выигрыш объединенного игрока есть сумма выигрышей составляющих его игроков из S.

Пусть игроки из N, образуя различные коалиции, могут получать некоторые сравнимые между собой выигрыши. Обозначим выигрыш, который может уверенно обеспечить себе коалиция $S \subset N$, через V(S). Функция V, ставящая в соответствие каждой коалиции S наибольший уверенно получаемый ею выигрыш V(S), называется характеристической функцией.

Если для всех непересекающихся подмножеств A и B выполняется неравенство

$$V(A \cup B) \geq V(A) + V(B) \qquad (1),$$

то характеристическая функция является супераддитивной. Свойство супераддитивности означает, что если нет ни одного игрока, который входил бы одновременно в обе коалиции A и B, то коалиция, составленная как объединение этих двух подмножеств, будет иметь выигрыш не меньший, чем сумма выигрышей A и B. Предположение о супераддитивности является вполне логичным, т.к. создание коалиций было бы бессмысленным, если бы величина выигрыша уменьшалась с увеличением числа участников коалиции.

Характеристическая функция V называется простой, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция V простая, то коалиции S, для которых V(S)=1, называются выигрывающими, а коалиции S, для которых V(S) = 0, – проигрывающими.

Если в простой характеристической функции V выигрывающими являются только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию Q, то характеристическая функция (V_Q), называется простейшей.

Простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство). Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое «ядро», голосующее с соблюдением правила «вето», а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Следует различать кооперативные игры с побочными платежами, в которых платежи являются переводимыми, и игры без побочных платежей, в которых платежи непереводимы. Основной принцип кооперативной игры без побочных платежей для двух игроков известен как решение Нэша. Игроки достигают определенного соглашения о взаимодействии, причем если бы им не удалось скоординировать свои действия, то каждый игрок получил бы некоторый фиксированный платеж. Этот платеж называется платежом при угрозе. Например, в некооперативной игре точкой угрозы могли бы быть максиминные платежи.

Нэш указал ряд допущений, при которых решение игры с торгом является единственным.

Первое допущение – симметрия; предполагается, что решение не зависит от того, какие номера присвоены игрокам.

Второе допущение – инвариантность относительно линейных преобразований; решение не зависит от монотонных линейных преобразований платежей.

Третье допущение – независимость от не имеющих отношения к делу альтернатив; решение не изменится, если исключить из рассмотрения те возможные выборы, которые не использованы в решении.

Четвертое допущение – оптимальность по Парето; не может быть решением такой набор платежей, помимо которого существует другой набор, более выгодный хотя бы для одного игрока.

При выполнении этих условий, единственным решением является пара платежей (X_1, X_2), которые максимизируют произведение превышений этих платежей над платежами при угрозе (Y_1, Y_2)

$$\max_{X_1, X_2} \left(X_1 - Y_1 \right) \cdot \left(X_2 - Y_2 \right)$$

2. СУЩЕСТВЕННЫЕ И НЕСУЩЕСТВЕННЫЕ ИГРЫ

Супераддитивность характеристической функции свидетельствует о том, что объединение игроков в коалиции (а образовавшихся коалиций – в еще большие коалиции) является целесообразным с точки зрения увеличения выигрыша. Одной из форм супераддитивности характеристической функции (наиболее слабой ее формой) является ее аддитивность, при которой неравенство (1) обращается в равенство

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B) \text{ при всех } A, B \subset N,\ A \cap B = \varnothing/$$

Аддитивность характеристической функции отражает незаинтересованность игроков в образовании каких-либо коалиций.

Теорема 1. Для того, чтобы характеристическая функция была аддитивной, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\sum_{i \in N} V(i) = V(N) \qquad (2)$$

Доказательство. Необходимость очевидна, она вытекает из аддитивности характеристической функции.

Достаточность. Возьмем произвольные непересекающиеся коалиции S и L и напишем систему неравенств, вытекающих из супераддитивности характеристической функции V:

$$V(S) + V(L) \le V(S \cup L),$$

$$\sum_{i \in S} V(i) \le V(S),$$

$$\sum_{i \in L} V(i) \le V(L),$$

$$\sum_{i \in N \setminus (S \cup L)} V(i) \le V\left(N \setminus \left(S \cup L\right)\right),$$

$$V(S \cup L) + V(N \setminus (S \cup L)) \le V(N),$$

$$V(N)=\sum_{i\in N}V(i)$$

Сложим все эти неравенства почленно. Тогда, учитывая, что выражения в левой и правой частях совпадают, получим тождественное равенство. Следовательно, и каждое из складываемых соотношений также является равенством. В частности для первого соотношения получим:

$$V(S) + V(L) = V(S\cup L),$$

Что свидетельствует об аддитивности характеристической функции.

Кооперативная игра с аддитивной характеристической функцией называется несущественной.

Игра (N,V) называется существенной в том случае, если

$$\sum_{i\in N}V(i)<V(N) \qquad (3)$$

3. ДЕЛЕЖИ В КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

Основная задача в кооперативной игре состоит в дележе общего выигрыша между членами коалиции. Очевидно, что даже в том случае, когда игра является существенной, нельзя сделать вывод, что игроки захотят объединяться, т.к. они не знают правил распределения дополнительного выигрыша, возникающего в результате объединения их в коалицию. Если в результате распределения выигрыш некоторого члена коалиции окажется меньше того выигрыша, который он получил бы, действуя самостоятельно, то он не захочет входить в данное объединение. Если вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяет условиям:

$$x_i \geq V_i \text{ для всех } i \in N \qquad (4)$$

$$\sum_{i\in N}x_i=V(N), \qquad (5)$$

то он называется дележом. В данном случае x_i определяет выигрыш i-го игрока (i = 1,2,…,n), который он получит при распределении общего выигрыша между всеми членами коалиции.

Условие (4) называется <u>условием индивидуальной рациональности</u>, смысл которого состоит в том, что объединяться выгодно только в том случае, когда каждый вошедший в коалицию игрок получит при распределении общего выигрыша сумму, не меньшую, чем та, которую он мог бы получить, действуя самостоятельно, не объединяясь с другими игроками ни в какие коалиции.

Условие (5) называется условием коллективной рациональности. Оно означает, что игроки должны делить между собой реально возможный выигрыш.

Таким образом, вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется дележом в условиях характеристической функции V.

Система (N, V), состоящая из множества игроков, характеристической функцией над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям (4) и (5) называется классической кооперативной игрой.

Классические кооперативные игры нередко называют играми в форме характеристической функции.

Теорема 2. Для того, чтобы вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ был дележом в классической кооперативной игре (N,V) необходимо и достаточно выполнение условия:

$$x_i = V(i) + a_i, \text{ где } i \in N,$$

$$\text{при этом } a_i \geq 0, \sum_{i\in N} a_i = V(N) - \sum_{i\in N} V(i) \qquad (6)$$

Доказательство. Достаточность устанавливается проверкой условий индивидуальной и коллективной рациональности вектора X.

Необходимость. Положим

$$x_i - V(i) = a_i \qquad (i \in N) \qquad (7)$$

Из условия индивидуальной рациональности (4) следует, что $a_i \geq 0$. Суммируя последовательно все равенства (7) и учитывая условия коллективной рациональности (5) получим (6).

Теорема 3. В несущественной игре имеется только один дележ:

$$[V(1), V(2), \ldots, V(n)] \qquad (8)$$

Во всякой существенной игре с более чем одним игроком множество дележей бесконечно.

Доказательство. В соответствии с теоремой (2) представим дележ X в виде:

$$\mathbf{X} = [V(1) + a_1, V(2) + a_2, \ldots, V(n) + a_n],\ a_i \geq 0 \ \ (i \in N) \qquad (9)$$

В случае несущественной игры выполняется равенство (2), так что для дележа **X** остается единственная возможность: $a_i = 0$ $(i \in N)$, и мы получаем дележ (8).

Если же игра существенна, то

$$V(N) - \sum_{i\in N} V(i) > 0,$$

и эта положительная разность может быть представлена бесконечным множеством способов.

Понятие дележа является одним из центральных в теории кооперативных игр, т.к. именно дележ, возникающий как результат соглашения игроков, является решением игры.

Чтобы выявить какие из множества дележей могут стать решениями игры, вводится понятие доминирования, позволяющее сравнивать дележи по предпочтительности.

Дележ **X** доминирует дележ **Y** по коалиции S $\left(\boldsymbol{X} \succ_{S} \boldsymbol{Y}\right)$, если выполняются следующие соотношения:

1) $x_i > y_i$ для всех $i \in S$

$$2) \sum_{i \in S} x_i \le V(S)$$

Условие 1) означает, что дележ **X** лучше дележа **Y** для всех членов коалиции S, т.е. отражает необходимость «единогласия» в предпочтении со стороны коалиции, а условие 2) означает реальную возможность коалиции S предложить каждому игроку, вошедшему в ее состав, величину выигрыша x_i.

Доминирование возможно не по всякой коалиции. В частности доминирование невозможно по коалиции, состоящей из одного игрока, а также по множеству всех игроков N. Действительно, из $\boldsymbol{X} \succ_{i} \boldsymbol{Y}$ следовало бы $y_i < x_i \le V(i)$, а это противоречит индивидуальной рациональности дележа Y.

Из $\boldsymbol{X} \succ_{i} \boldsymbol{Y}$ следовало бы $x_i > y_i$ для всех $i \in N$. Поэтому

$$\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i = V(N),$$

что противоречит условию коллективной рациональности дележа X.

Кооперативная игра (N, V) называется эквивалентной игре (N, V') {(N,V) ~ (N, V') или V ~ V}, если существует положительное число k и вещественные числа c_i ($i = 1,2, \ldots,n$), такие, что для любой коалиции $S \subset N$ выполняется равенство:

$$V'(S) = k \cdot V(S) + \sum_{i \in S} c_i$$

Для эквивалентных игр выполняются следующие свойства:

a) рефлексивности: V ~ V;

b) симметрии отношений: если V ~ V', то V' ~ V;

c) транзитивности: если V ~ V' и V' ~ V", то V ~ V".

Теорема 4. Если V ~ V', то отображение X → X', где $x_i' = kx_i + c_i$, $i \in N$, устанавливает такое взаимно однозначное отображение множества всех дележей игры V на множество дележей игры V', что из $X \succ_S Y$ следует, что $X' \succ_S Y'$.

Доказательство. Положим

$$V'(S) = kV(S) + \sum_{i \in S} c_i \quad (k > 0, S \subset N).$$

Доминирование $\left(X \succ_S Y\right)$ означает, что

$$\sum_{i \in N} x_i \le V(S) \text{ и } y_i < x_i \text{ при } i \in N.$$

В таком случае

$$\sum_{i \in S} x_i' = \sum_{i \in S} \left(kx_i + c_i\right) = k\sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in S} c_i \le kV(S) + \sum_{i \in S} c_i = V'(S)$$

и $y_i' = ky_i + c_i < kx_i + c_i = x_i'$, т.е. $X' \succ_S Y'$.

4. 0 – 1 РЕДУЦИРОВАННАЯ ФОРМА КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЫ

Игра (N, V) называется игрой в 0 – 1 редуцированной форме, если

$$V(i) = 0 \text{ для всех } i \in N,\ V(N) = 1.$$

Теорема 5. Каждая существенная кооперативная игра эквивалентна одной и только одной игре в 0 – 1 редуцированной форме.

Доказательство. Пусть V – характеристическая функция произвольной существенной игры. Эквивалентной ей будет характеристическая функция V'. Составим систему n+1 уравнений с n+1 неизвестными $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и k:

$$\begin{cases} V'(i) = kV(i) + c_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ V'(N) = kV(N) + \sum_{i \in N} c_i = 1 \end{cases} \qquad (10)$$

Складывая почленно первые n уравнений, получим:

$$k\sum_{i\in N}V(i)+\sum_{i\in N}c_i=0.$$

Вычитая теперь полученное уравнение из последнего уравнения системы (10), будем иметь:

$$k\left[V(N)-\sum_{i\in N}V(i)\right]=1.$$

Ввиду существенности игры коэффициент при k положителен. Следовательно

$$k=\frac{1}{V(N)-\sum_{i\in N}V(i)}>0 \qquad (11)$$

Определим теперь неизвестные c_i:

$$c_i=\frac{-V(i)}{V(N)-\sum_{i\in N}V(i)} \qquad (12)$$

Равенства (11) и (12) являются необходимыми следствиями системы уравнений (10). Поэтому характеристическая функция 0 – 1 редуцированной формы существенной игры определяется однозначно.

Из теоремы 4 следует, что существенные игры достаточно изучать по их 0 – 1 редуцированным формам.

Если V – характеристическая функция произвольной существенной игры (N, V), то

$$V'(S)=\frac{V(S)-\sum_{i\in S}V(i)}{V(N)-\sum_{i\in N}V(i)} \qquad (13)$$

является 0 – 1 нормализацией, соответствующей функции V. Действительно, используя формулы (11) и (12), полученные в результате доказательства теоремы 5, получим:

$$V'(S)=kV(S)+\sum_{i\in S}V(i)=\frac{V(S)}{V(N)-\sum_{i\in N}V(i)}+\frac{-\sum_{i\in N}V(i)}{V(N)-\sum_{i\in N}V(i)}=\frac{V(S)-\sum_{i\in S}V(i)}{V(N)-\sum_{i\in N}V(i)}$$

Используя данное выражение, убеждаемся, что

$$V'(i)=\frac{V(i)-V(i)}{V(N)-\sum\limits_{i\in N}V(i)}=0\ \textit{для всех}\ i\in N;$$

$$V'(N)=\frac{V(N)-\sum\limits_{i\in N}V(i)}{V(N)-\sum\limits_{i\in N}V(i)}=1\ \textit{для всех}\ i\in N.$$

Дележом в игре, представленной в 0 – 1 редуцированной форме, является вектор **X**, компоненты которого удовлетворяют следующим условиям:

$$x_i\geq 0;\quad \sum_{i\in N}x_i=1$$

Пример 1. Предположим, что:

V(1) = 100; V(2) = 150; V(3) = 200;

V(1,2) = 300; V(1,3) = 350; V(2,3) = 420;

V(1,2,3) = 550.

Тогда значения этой функции, выраженные в 0 – 1 редуцированной форме, будут иметь вид:

V'(∅) =0;

V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0;

$$V'(1,2)=\frac{V(1,2)-\sum\limits_{i=1}^{2}V(i)}{V(N)-\sum\limits_{i\in N}V(i)}=\frac{300-(100+150)}{550-(100+150+200)}=0,5;$$

$$V'(1,3)=\frac{V(1,3)-\sum\limits_{i=1;3}V(i)}{V(N)-\sum\limits_{i\in N}V(i)}=\frac{350-(100+200)}{550-(100+150+200)}=0,5;$$

$$V'(2,3)=\frac{V(2,3)-\sum\limits_{i=2}^{3}V(i)}{V(N)-\sum\limits_{i\in N}V(i)}=\frac{420-(150+200)}{550-(100+150+200)}=0,7;$$

V'(1,2,3) = 1.

5. C – ЯДРО

Рассмотрим некоторые аспекты, позволяющие понять отличие дележа от недоминируемого дележа, а также какие требования кроме индивидуальной и групповой рациональности, могут предъявлять игроки к дележу **X**. Некоторая коалиция S может возражать против этого дележа, так как считает, что ее интересы недостаточно полно учтены при распределении общего выигрыша, полученного от объединения всех участников игры. В том случае, если ее требование не будет учтено, коалиция S угрожает не входить в кооперацию со всеми остальными N\S игроками. На угрозу коалиции S остальные игроки, не вошедшие в нее, также отвечают угрозой, называемой стабилизационной, которая состоит в том, что все остальные N\S игроков объединяются в одну коалицию, ступающую против коалиции S. В этом случае максимально гарантированный выигрыш коалиции S будет V(S).

Таким образом, для предотвращения возможности реализации угроз необходимо учитывать интересы и возможности каждой из коалиций. Следовательно, дележ **X***, учитывающий возможности каждой из коалиций, которую могли бы организовать участники игры, будет доминировать дележ **X**, который эти угрозы игнорирует. Тем самым дележ **X*** отличается от недоминируемого дележа **X** тем, что помимо удовлетворения требованиям индивидуальной и групповой рациональности, он удовлетворяет также и требованиям коалиционной рациональности.

Формально требования коалиционной рациональности выражаются в системе дополнительных ограничений, которым должны удовлетворять недоминируемые дележи.

Множество недоминируемых дележей кооперативной игры называется C – ядром.

Теорема 6. Для того чтобы дележ X принадлежал C – ядру кооперативной игры с характеристической функцией V, необходимо и достаточно выполнение системы неравенств:

$$V(S) \le X(S) = \sum_{i \in S} x_i \quad \textit{для всех } S \subset N. \qquad (14)$$

Доказательство. Необходимость. X принадлежит C – ядру. Доказательство необходимости проведем от противного. Пусть для некоторой коалиции S дележ X удовлетворяет условию:

$$V(S) > \sum_{i \in S} x_i$$

Заметим, что коалиция S должна состоять более, чем из одного игрока и быть отличной от N.

$$\sum_{i \notin S} x_i = V(N) - \sum_{i \in S} x_i \geq V(S) - \sum_{i \in S} x_i > 0.$$

Возьмем теперь положительное число ε, удовлетворяющее условию:

$$0 < e < \frac{1}{|S|}\left[V(S) - \sum_{i \in S} x_i\right],$$

и образуем вектор Y = $(y_1, y_2, \dots y_n)$ с координатами

$$y_i = \begin{cases} x_i + e, \, если \; i \in S, \\ \dfrac{1}{|N \setminus S|}\left(\sum_{i \in S} x_i - |S| \cdot e\right), \, если \; i \notin S. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что вектор Y = $(y_1, y_2, \dots y_n)$ является дележом, причем $\boldsymbol{Y} \underset{S}{\succ} \boldsymbol{X}$. Поэтому **X** не принадлежит С – ядру. Полученное противоречие и доказывает необходимость.

<u>Достаточность</u>. Выполнено условие (14). Требуется доказать, что дележ **X** принадлежит С – ядру. Предположим противное: дележ **X** доминируется дележом **Y**, т.е. для некоторой коалиции S

$$\sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i \leq V(S),$$

что противоречит (14).Полученное противоречие и доказывает достаточность. Таким образом, теорема доказана полностью.

С – ядро является замкнутым, выпуклым подмножеством множества дележей.

Проиллюстрируем систему неравенств, которой должны удовлетворять дележи, принадлежащие С – ядру, на примере рассмотренной выше кооперативной игры трех лиц, представленной в 0 – 1 редуцированной форме. В этой игре:

$$V'(\varnothing) = 0;$$
$$V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0;$$
$$V'(1,2) = 0{,}5; \;\; V'(1,3) = 0{,}5; \;\; V'(2,3) = 0{,}7;$$
$$V'(1,2,3) = 1.$$

Следовательно, для того, чтобы дележ X принадлежал С – ядру, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$V'(1,2) = 0{,}5 \leq x'_1 + x'_2,$$

$$V'(1,3) = 0{,}5 \le x'_1 + x'_3,$$
$$V'(2,3) = 0{,}7 \le x'_2 + x'_3$$

Множество дележей, принадлежащих С – ядру, должно удовлетворять условиям индивидуальной, групповой и коалиционной рациональности.

6. РЕШЕНИЕ ПО НЕЙМАНУ – МОРГЕНШТЕРНУ

Рассмотренное нами С – ядро включает в себя множество дележей, каждый из которых не доминируется какими-либо другими дележами. Однако идеальным было бы нахождение такого дележа, который не только не доминировался бы какими-либо другими дележами, но сам доминировал бы любой другой дележ. К сожалению такого дележа найти не удается.

Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн предложили рассматривать такие множества дележей, которые удовлетворяют следующим двум свойствам: внутренней устойчивостью (дележи, входящие в решение нельзя противопоставлять друг другу) и внешней устойчивостью, состоящей в возможности каждому отклонению от решения противопоставлять некоторый дележ, принадлежащий решению. Формализация этих требований приводит к следующему определению.

Подмножество дележей **R** кооперативной игры (N, V) называют решением по Нейману – Моргенштерну (или Н – М решением) если:

1) из того, что **X f Y** следует, что либо **X** Ï **R**, либо **Y** Ï **R**;

2) для любого **X** Ï **R** существует такой **Y** Î **R**, что **Y f X.**

Между С – ядром кооперативной игры и ее Н – М решением имеется связь, выражаемая следующей теоремой.

Теорема 7. Если в кооперативной игре имеется С – ядро С и Н – М решение R, то $C \subset R$.

Доказательство. Если дележ $\mathbf{X} \in C$, то он не может доминироваться каким-либо другим дележом. Если же он не принадлежит решению, то он должен доминироваться некоторым дележом из решения. Следовательно, принадлежащий С – ядру дележ должен принадлежать и каждому Н – М решению.

Следует отметить, что Н – М решение кооперативной игры не может состоять только из одного дележа.

Теорема 8. Если некоторое Н – М решение кооперативной игры (N, V) состоит из единственного дележа X, то характеристическая функция V является несущественной.

Доказательство. Предположим противное: характеристическая функция V существенная. Тогда она имеет 0 – 1 редуцированную форму. Пусть x_i некоторая положительная компонента дележа **X.** Для существенной характеристической функции |N| = n > 1, и можно построить дележ

Y = (y_1, y_2, …, y_n), где

$$y_k = \begin{cases} x_k + \dfrac{x_i}{n-1}, \text{при } k \neq i, \\ 0, \text{при } k = i \end{cases}$$

По определению доминирования дележ **X** не может доминировать **Y**; следовательно. **Y** отличаясь от **X** должен входить вместе с **X** в любое Н – М решение игры.

Следует отметить, что имеются кооперативные игры, которые не имеют Н – М решений. Кроме того, многие кооперативные игры имеют более одного решения, поэтому принцип оптимальности, приводящий к Н – М решению не в состоянии указать игрокам единственный вариант распределения выигрыша. Особо отметим, что решения существенных кооперативных игр состоят более чем из одного дележа. Следовательно, выбор конкретного Н–М решения еще не определяет выигрыш каждого из игроков.

Теорема.[8] Если для кооперативной игры (N, V), характеристическая функция которой представлена в 0 – 1 редуцированной форме, выполняются неравенства

$$V(S) \leq \frac{1}{n-|S|+1}, \qquad (15)$$

где n – число членов в коалиции (N), |S| – число членов в коалиции S, то С – ядро такой игры не пусто и является Н – М решением.

Н – М решение представляет собой множество таких дележей, которые обладают:

a) внешней устойчивостью, т.е. доминируют любые дележи, которые не принадлежат этому подмножеству;

b) внутренней устойчивостью, т.е. дележи, принадлежащие этому подмножеству, не доминируют друг друга.

Следует отметить, что если Н – М решение существует, а С – ядро не пусто, то Н – М решение содержит С – ядро.

Используя данную теорему, определим, является ли С – ядро рассматриваемой игры не пустым множеством.

Для имеющихся данных:

$$V'(\varnothing) = 0;$$
$$V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0;$$
$$V'(1,2) = 0{,}5;\ \ V'(1,3) = 0{,}5;\ \ V'(2,3) = 0{,}7;$$
$$V'(1,2,3) = 1.$$

Проверим выполнение системы неравенств:

$$V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0 < 1/(3 - 1 + 1) = 1/3,$$
$$V'(1,2) = 0{,}5 \le 1/(3 - 2 + 1) = 0{,}5,$$
$$V'(2,3) = 0{,}7 > 1/(3 - 2 + 1) = 0{,}5.$$

Так как условие для $V'(2,3)$ не выполняется, то нельзя сделать вывод о том, что C – ядро рассмотренной кооперативной игры (N, V) не пусто.

Пример 2. Рассматривается кооперативная игра с тремя игроками. Известны значения характеристической функции, определяющие соответственно выигрыши первого, второго и третьего игроков, когда каждый из них играет в одиночку, не кооперируясь ни с кем из других игроков:

$$V(1)= 1200;\ V(2)= 1500;\ V(3) = 1800.$$

Выигрыши, которые могут обеспечить себе игроки, действуя попарно, составляют:

$$V(1,2) = 2900;\ V(1,3) = 3300;\ V(2,3) = 3500.$$

Общий выигрыш, который могут обеспечить себе игроки, образуя максимально большую коалицию N, состоящую из трех игроков равен:

$$V(1,2,3) = 6000.$$

Необходимо определить, выгодно ли игрокам объединять свои усилия и если да, то на каких условиях? Основным критерием, который использует каждый из игроков для принятия решения, является максимизация выигрыша.

Решение. Число подмножеств, на которых определена характеристическая функция V, равно $2^3 = 8$. Оно складывается из трех одноэлементных коалиций, трех двухэлементных коалиций, одной трехэлементной коалиции и пустого множества, для которого $V(\varnothing) = 0$.

Определим, каким образом формируются непересекающиеся коалиции S и Q. Если часть игроков из N входит в коалицию S, то все другие игроки образуют коалицию Q, формируемую по правилу $Q = N \setminus S$. Таким образом, если S является одноэлементной коалицией, состоящей из первого игрока, то в коалицию Q войдут второй и третий игроки; если же в коалицию S войдут первый и второй игроки, то коалиция Q будет состоять только из третьего игрока и т.д.

Проверим выполнение свойства супераддитивности для рассматриваемого нами примера.

Пусть S = {1}, тогда Q = {2,3}; V(1) + V(2,3) < V(S ∪ Q) = V(N),

1200 + 3500 = 4700 < 6000.

Пусть S = {2}, тогда Q = {1,3}; V(2) + V(1,3) < V(S ∪ Q) = V(N),

1500 + 3300 = 4800 < 6000.

Пусть S = {3}, тогда Q = {1,2}; V(3) + V(1,2) < V(S ∪ Q) = V(N),

1800 + 2900 = 4700 < 6000.

Поскольку каждое из рассмотренных неравенств удовлетворяет условию (1), можно сделать вывод, что характеристическая функция является супераддитивной. Это свидетельствует о целесообразности объединения игроков с точки зрения увеличения выигрыша.

Теперь проверим, является ли рассматриваемая игра существенной.

$$\sum_{i\in N} V(i) = 1200+1500+1800 = 4500 < V(N) = 6000,$$

т.е. выполняется неравенство (2). Следовательно, рассматриваемая игра является существенной и ее решение следует искать среди множества недоминируемых дележей.

Представим данную игру в 0 – 1 редуцированной форме. Так как

V'(i) = 0 для всех i ∈ N и V'(N) =1, то

V'(1) = V'(2) = V'(3) = 0; V'(1,2,3)=1.

Чтобы определить другие значения характеристической функции, воспользуемся формулой (13).

$$V'(1,2) = \frac{V(1,2) - \sum_{i=1}^{2} V(i)}{V(N) - \sum_{i\in N} V(i)} = \frac{2900 - (1200+1500)}{6000 - (1200+1500+1800)} = \frac{2}{15};$$

$$V'(1,3) = \frac{V(1,3) - \sum_{i=1;3} V(i)}{V(N) - \sum_{i\in N} V(i)} = \frac{3300 - (1200+1800)}{6000 - (1200+1500+1800)} = 0,2;$$

$$V'(2,3) = \frac{V(2,3) - \sum_{i=2}^{3} V(i)}{V(N) - \sum_{i\in N} V(i)} = \frac{3500 - (1500+1800)}{6000 - (1200+1500+1800)} = \frac{2}{15};$$

V'(1,2,3) = 1.

Для того, чтобы убедиться в непустоте С – ядра, следует проверить выполнение условий (15):

1) для одноэлементных коалиций

$$V'(i) = 0 \le 1(3 - 1 + 1) = 1/3;$$

2) для двухэлементных коалиций

$$V'(1,2) = 2/15 \le 1/(3 - 2 + 1) = 1/2;$$
$$V'(1,3) = 0,2 \le 1/(3 - 2 + 1) = 1/2;$$
$$V'(2,3) = 2/15 \le 1/(3 - 2 + 1) = 1/2;$$

3) для трехэлементных коалиций

$$V'(1,2,3) = 1 = 1/(3 - 3 + 1) = 1.$$

Поскольку характеристическая функция игры, представленная в 0 – 1 редуцированной форме, удовлетворяет системе ограничений (15), то С – ядро такой системы не пусто и, следовательно, любой дележ, принадлежащий С – ядру, является решением игры.

В соответствии с теоремой о необходимых и достаточных условиях принадлежности дележа С – ядру, имеем:

$$V'(1) = 0 \le x'_1,$$
$$V'(2) = 0 \le x'_2,$$
$$V'(3) = 0 \le x'_3,$$
$$V'(1,2) = 2/15 \le x'_1 + x'_2,$$
$$V'(1,3) = 0,2 \le x'_1 + x'_3,$$
$$V'(2,3) = 2/15 \le x'_2 + x'_3,$$
$$V'(1,2,3) = 1 = x'_1 + x'_2 + x'_3.$$

Следует различать кооперативные игры с побочными платежами, в которых платежи являются переводимыми, и игры без побочных платежей, в которых платежи непереводимы.

Рассмотренной системе ограничений будет удовлетворять вектор **X'** = (x'_1 = 0,3; x'_2 = 0,3; x'_3 = 0,4). Чтобы найти соответствующий ему вектор X, воспользуемся взаимно однозначным соответствием множества всех дележей в эквивалентных играх, в соответствии с которым:

$$x'_i = kx_i + c_i \quad \text{и} \quad x_i = k'\,x'_i + c'_I \ \ (i \in N), \text{ где}$$

$$k' = V(N) - \sum_{i \in N} V(i), \quad c'_i = V(i).$$

Тогда

$x_1 = k'\,x'_1 + c'_1 = [6000 - (1200 + 1500 + 1800)]\cdot 0,3 + 1200 = 1650,$

$x_2 = k'\,x'_2 + c'_2 = [6000 - (1200 + 1500 + 1800)]\cdot 0,3 + 1500 = 1950,$

$x_3 = k'\,x'_3 + c'_3 = [6000 - (1200 + 1500 + 1800)]\cdot 0,4 + 1800 = 2400,$

Таким образом,

$$\sum_{i \in N} V(i) = \sum_{i=1}^{3} x_i = 1650 + 1950 + 2400 = 6000.$$

Следует отметить, что найденное решение игры будет не единственным.

7. ВЕКТОР ШЕПЛИ

Недостатки классических Н – М решений привели к необходимости их модификаций. В частности вводятся так называемые игры с обязательными соглашениями. В данных играх участники стремятся к кооперации, которая разрешена правилами и критерий экономической полезности для игроков, образующих ту или иную коалицию может быть не единственным. Кроме того, в игре присутствует арбитр, в функции которого входит нахождение дележа. В том случае, если игроки одобряют основные принципы распределения общего выигрыша и сформированный арбитром дележ, то в дальнейшем никто из них не будет возражать против такого распределения. В этом случае дележ, предложенный арбитром можно рассматривать как решение кооперативной игры. Если же игроки не согласны с принципами распределения общего выигрыша, то каждый из них будет иметь только тот выигрыш, который он может обеспечить себе, действуя самостоятельно.

Дележ, предлагаемый арбитром, должен удовлетворять следующим требованиям:

1) быть справедливым ко всем членам коалиции;

2) иметь алгоритм формирования этого дележа;

3) быть единственным, который удовлетворяет данной системе принципов (аксиом).

Рассмотрим арбитражное решение, предложенное Шепли.

Все участники кооперативной игры делятся на «болванов» и «носителя». Игрок называется «болваном» (b), если он не способен увеличить выигрыш ни одной из коалиций S, к какой бы он ни присоединился, т.е для него выполняется соотношение:

$$V(S \cup b) = V(S) + V(b) \text{ для } \forall b \in B \subset N, \qquad (16)$$

где B – множество «болванов» в игре (N, V).

Подмножество всех не «болванов» называется носителем игры ($D \subset N$), для которого

$$V(S) = V(S \cap D) + \sum_{b \in S} V(b), \qquad (17)$$

для $\forall S,D \subset N$, при этом $D = N\backslash B$

Для игр, представленных в 0 – 1 редуцированной форме, соотношения (16) и (17) соответственно принимают вид:

$$V(S \cup b) = V(S) \text{ для } \forall b \in B \subset N, \qquad (18)$$

$$\exists D \subset N \text{ такое, что } V(S) = V(S \cap D) \text{ для } \forall S \subset N \qquad (19)$$

Процедура формирования коалиций предполагает, что:

1) каждый из игроков имеет свой порядковый номер;

2) игроки участвуют в переговорах не в соответствии с их порядковыми номерами, а в последовательности, которая формируется случайно и с равными вероятностями;

3) каждый из игроков i участвует в переговорах, когда другие игроки уже образовали коалицию $S\backslash i$. Поэтому его вклад при присоединении к этой коалиции будет представлять величину $[V(S) - V(S\backslash i)]$.

Арбитр каждой кооперативной игре (N, V) может поставить в соответствие вектор Шепли:

$$\Phi(V) = (\phi_1(V), \phi_2(V), \ldots, \phi_n(V)),$$

компоненты которого интерпретируются как полезности, получаемые игроками в результате дележа общего выигрыша, полученного от объединения всех участников игры.

Предположения, на которых основано арбитражное решение, были отражены Шепли в виде системы аксиом:

1) <u>Аксиома симметрии</u> утверждает, что выигрыши игроков не зависят от их порядковых номеров в произвольной перестановке.

2) <u>Оптимальность по Парето</u> означает, что не существует варианта распределения общего выигрыша V(N), полученного в результате объединения всех участников кооперативной игры, в котором выигрыш хотя бы одного из игроков увеличился, не уменьшая выигрыши других игроков.

3) <u>Аксиома эффективности</u> означает, что в распределении общего выигрыша, полученного от объединения всех игроков «болван» не участвует, т.е. если для любой коалиции $S \subset N$ выполняется равенство

$$V(S \cup \{i\}) = V(S), \text{ то } \phi_i(V) = 0.$$

Это обусловлено тем, что «болван» невыгоден для коалиции, т.к. его присоединение к ней не способно увеличить ее выигрыш.

4) <u>Аксиома агрегации</u> утверждает, что если игрок i участвует в двух играх (N, V) и (N, U), то его суммарный выигрыш будет определяться как сумма выигрышей $\phi_i(V)$ и $\phi_i(U)$, полученных им в каждой из этих игр.

Единственность дележа Шепли для любой кооперативной игры (N, V) обусловлена существованием и единственностью функции Ф, удовлетворяющей аксиомам 1) – 4). При этом величина платежей зависит от «силы» каждого игрока, которая учитывается исходя из значения дополнительного выигрыша, который может получить коалиция, если данный игрок войдет в нее.

Компоненты вектора Шепли определяются равенством [1, с. 155]:

$$f_i(V) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)! \cdot (n-|S|)!}{n!} [V(S) - V(S \setminus \{i\})].$$

Пример. Рассматривается кооперативная игра с тремя игроками. Известны значения характеристической функции, определяющие соответственно выигрыши первого, второго и третьего игроков, когда каждый из них играет в одиночку, не кооперируясь ни с кем из других игроков:

V(1)= 1200; V(2)= 1500; V(3) = 1800.

Выигрыши, которые могут обеспечить себе игроки, действуя попарно, составляют:

V(1,2) = 2700; V(1,3) = 3000; V(2,3) = 4000.

Общий выигрыш, который могут обеспечить себе игроки, образуя максимально большую коалицию N, состоящую из трех игроков равен:

V(1,2,3) = 5200.

В рассматриваемой игре

$V(1,2) = V(1 \cup 2) = 2700$; $V(1) + V(2) = 1200 + 1500 = 2700$.

Следовательно, $V(1 \cup 2) = V(1) + V(2)$.

$V(1,3) = V(1 \cup 3) = 3000$; $V(1) + V(2) = 1200 + 1800 = 3000$.

Следовательно, $V(1 \cup 3) = V(1) + V(3)$.

$V(2,3) = V(2 \cup 3) = 4000$; $V(2) + V(3) = 1500 + 1800 = 3300$.

Следовательно, $V(2 \cup 3) > V(2) + V(3)$.

$V(1,2,3) = V(1 \cup 2 \cup 3) = 5200$; $V(1) + V(2 \cup 3) = 1200 + 4000 = 5200$.

Следовательно, $V(1 \cup 2 \cup 3) = V(1) + V(2 \cup 3)$.

Таким образом, в данной игре «болваном» является первый игрок, т.к. его присоединение к любой из возможных коалиций не увеличивает ее выигрыш. «Носителем» игры являются второй и третий игроки.

Для определения возможных выигрышей каждого из игроков в случае их объединения может быть использован вектор Шепли:

$$f_1(V) = \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[V(1,2,3) - V(2,3)] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,2) - V(2)] +$$

$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,3) - V(3)] + \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[V(1) - 0] = 1200;$$

$$f_2(V) = \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[V(1,2,3) - V(1,3)] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,2) - V(1)] +$$

$$+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(2,3) - V(3)] + \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[V(2) - 0] = 1850;$$

$$f_3(V) = \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[V(1,2,3) - V(1,2)] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(1,3) - V(1)] +$$

$$+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[V(2,3) - V(2)] + \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[V(3) - 0] = 2150.$$

В том случае если все три игрока соглашаются с данным распределением общего выигрыша, то вектор Ф становится решением рассматриваемой игры, при этом выигрыш от объединения получают только второй и третий игроки, а выигрыш первого игрока останется таким же, каким он был до объединения.

Проверим принадлежность вектора Шепли С – ядру.

Положим $\phi_1 = x_1$, $\phi_2 = x_2$, $\phi_3 = x_3$. В соответствии с теоремой о необходимых и достаточных условиях принадлежности дележа С – ядру, имеем:

$$V(1) = 1200 = x_1 = 1200;$$
$$V(2) = 1500 < x_2 = 1850;$$
$$V(3) = 1800 < x_3 = 2150;$$
$$V(1,2) = 2700 < x_1 + x_2 = 3050;$$
$$V(1,3) = 3000 < x_1 + x_3 = 3350;$$
$$V(2,3) = 4000 = x_2 + x_3 = 4000;$$
$$V(1,2,3) = 5200 = x_1 + x_2 + x_3 = 5200.$$

Поскольку система неравенств выполняется, вектор Шепли принадлежит С – ядру и является одним из возможных решений рассматриваемой классической кооперативной игры.

8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Сформулируйте определение кооперативной игры.
2. Что представляет собой коалиция и ее характеристическая функция в кооперативной игре?
3. Какая характеристическая функция является супераддитивной?
4. Сформулируйте допущения Нэша, при которых решение игры с торгом является единственным.

5. Что представляет собой платеж при угрозе?
6. Какие кооперативные игры называются эквивалентными?
7. Какими свойствами обладают эквивалентные игры?
8. Укажите свойства характеристической функции для кооперативной игры, представленной в 0 – 1 редуцированной форме.
9. Дайте определение и сформулируйте основные свойства дележа в кооперативной игре.
10. Укажите основные свойства дележа кооперативной игры, представленной в 0 – 1 редуцированной форме.
11. Сформулируйте определение существенной игры.
12. Сформулируйте и дайте интерпретацию условиям индивидуальной и коллективной рациональности.
13. Сформулируйте понятие доминирования, позволяющее сравнивать дележи по предпочтительности.
14. В чем суть требований коалиционной рациональности?
15. Какое подмножество дележей кооперативной игры называют решением по Нейману – Моргенштерну (или Н – М решением)?
16. По какому принципу участники кооперативной игры делятся на «болванов» и «носителя»?
17. Сформулируйте предположения (в виде системы аксиом), на которых основано арбитражное решение Шепли.
18. Дайте интерпретацию и формулу для вычисления компонент вектора Шепли.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Рассматривается кооперативная игра с тремя игроками. Известны значения характеристической функции, определяющие соответственно выигрыши первого, второго и третьего игроков, когда каждый из них играет в одиночку, не кооперируясь ни с кем из других игроков: V(1) ; V(2) ; V(3), а также выигрыши, которые могут обеспечить себе игроки, действуя попарно: V(1,2) ; V(1,3) ; V(2,3) и общий выигрыш, который могут обеспечить себе игроки, образуя максимально большую коалицию, состоящую из трех игроков:
V(1,2,3). Требуется:
1. Проверить выполнение условий супераддитивности и существенности для данной кооперативной игры.

2. Выразить значения характеристической функции в 0 – 1 редуцированной форме.
3. Проверить условия, определяющие непустоту С – ядра и найти один из вариантов решения игры (дележ **X**).
4. Определить выигрыши каждого из игроков в случае их объединения на основе использования вектора Шепли. Проверить принадлежность вектора Шепли С – ядру.

1) V(1) = 1000; V(2) = 800; V(3) = 1200; V(1,2) = 2000; V(1,3) = 2500; V(2,3) = 2300; V(1,2,3) = 4000.

2) V(1) = 1500; V(2) = 1200; V(3) = 1000; V(1,2) = 3000; V(1,3) = 2700; V(2,3) = 2400; V(1,2,3) = 4400.

3) V(1) = 1100; V(2) = 1600; V(3) = 1300; V(1,2) = 3000; V(1,3) = 2600; V(2,3) = 3200; V(1,2,3) = 5000.

4) V(1) = 900; V(2) = 850; V(3) = 1200; V(1,2) = 2000; V(1,3) = 2400; V(2,3) = 2500; V(1,2,3) = 3600.

5) V(1) = 1300; V(2) = 1400; V(3) = 1700; V(1,2) = 3000; V(1,3) = 3400; V(2,3) = 3600; V(1,2,3) = 5600.

6) V(1) = 2000; V(2) = 1800; V(3) = 1500; V(1,2) = 4200; V(1,3) = 4000; V(2,3) = 3700; V(1,2,3) = 6400.

7) V(1) = 960; V(2) = 1200; V(3) = 2300; V(1,2) = 2400; V(1,3) = 3600; V(2,3) = 3900; V(1,2,3) = 5800.

8) V(1) = 2400; V(2) = 2000; V(3) = 1800; V(1,2) = 4800; V(1,3) = 4500; V(2,3) = 4200; V(1,2,3) = 7000.

9) V(1) = 80; V(2) = 130; V(3) = 180; V(1,2) = 240; V(1,3) = 280; V(2,3) = 350; V(1,2,3) = 480.

10) V(1) =100; V(2) = 180; V(3) = 120; V(1,2) = 300; V(1,3) = 250; V(2,3) = 340; V(1,2,3) = 480.

11) V(1) = 960; V(2) = 740; V(3) = 800; V(1,2) = 1800; V(1,3) = 1900; V(2,3) = 1700; V(1,2,3) = 2800.

12) V(1) = 1600; V(2) = 1400; V(3) = 1500; V(1,2) = 3300; V(1,3) = 3400; V(2,3) = 3100; V(1,2,3) = 5500.

13) V(1) = 10800; V(2) = 11200; V(3) = 13000; V(1,2) = 23000; V(1,3) = 25000; V(2,3) = 26000; V(1,2,3) = 42000.

14) V(1) = 1640; V(2) = 1460; V(3) = 1400; V(1,2) = 3280; V(1,3) = 3200; V(2,3) = 3000; V(1,2,3) = 5200.

15) V(1) = 2200; V(2) = 2000; V(3) = 1800; V(1,2) = 4500; V(1,3) = 4100; V(2,3) = 4000; V(1,2,3) = 6800.

16) V(1) = 1700; V(2) = 1500; V(3) = 1300; V(1,2) = 3600; V(1,3) = 3400; V(2,3) = 3100; V(1,2,3) = 6000.
17) V(1) = 1000; V(2) = 1400; V(3) = 1200; V(1,2) = 2700; V(1,3) = 2600; V(2,3) = 3100; V(1,2,3) = 5000.
18) V(1) = 1600; V(2) = 1400; V(3) = 2000; V(1,2) = 3500; V(1,3) = 4200; V(2,3) = 4000; V(1,2,3) = 6800.
19) V(1) = 1400; V(2) = 2200; V(3) = 4000; V(1,2) = 4200; V(1,3) = 6000; V(2,3) = 7000; V(1,2,3) = 10000.
20) V(1) = 1700; V(2) = 1500; V(3) = 1800; V(1,2) = 3500; V(1,3) = 4000; V(2,3) = 3800; V(1,2,3) = 6500.
21) V(1) = 40; V(2) = 60; V(3) = 100; V(1,2) = 120; V(1,3) = 170; V(2,3) = 200; V(1,2,3) = 300.
22) V(1) = 2500; V(2) = 3000; V(3) = 2500; V(1,2) = 6000; V(1,3) = 5800; V(2,3) = 6400; V(1,2,3) = 10000.
23) V(1) = 1200; V(2) = 1000; V(3) = 1800; V(1,2) = 2500; V(1,3) = 3500; V(2,3) = 3400; V(1,2,3) = 6000.
24) V(1) = 2400; V(2) = 1800; V(3) = 1800; V(1,2) = 4600; V(1,3) = 4800; V(2,3) = 4200; V(1,2,3) = 8000.
25) V(1) = 800; V(2) = 1600; V(3) = 2600; V(1,2) = 3000; V(1,3) = 4300; V(2,3) = 5000; V(1,2,3) = 7000.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев, Н.Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков/ Н.Н. Воробьев. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. – 160с.
2. Губко, М.В. Теория игр в управлении организационными системами. Учебное пособие /М.В. Губко, Д.А. Новиков. – М.: СИНТЕГ, 2002. – 148с.
3. Замков, О.О. Математические методы в экономике: Учебник. 3-е изд., перераб. – М.: «Дело и сервис», 2001. – 368с.
4. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория /М. Интрилигатор. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 575с.
5. Кузнецов, Ю.Н. Математическое программирование /Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М.: Высшая школа, 1980. – 300с.
6. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. – М.: Мир, 1985. – 200с.
7. Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник / Г.П. Фомин. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544с.
8. Хачатрян, С.Р. Методы и модели решения экономических задач: Учебное пособие /С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384с.
9. Шапкин, А.С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций: Учебник. / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – М.: Дашков и К°, 2005. – 880с.

Технический редактор – М.Е. Кабанова
Отпечатано в издательско-полиграфическом центре МичГАУ
Подписано в печать 26.03.08 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$,
Бумага офсетная № 1. Усл.печ.л. 1,5 Тираж 50 экз. Ризограф
Заказ №

Издательско-полиграфический центр
Мичуринского государственного аграрного университета
393760, Тамбовская обл., г. Мичуринск, ул. Интернациональная, 101,
тел. +7 (47545) 5-55-12
E-mail: vvdem@mgau.ru