Кооперативные игры. C-ядро игры. Вектор Шепли

Напомним основные понятия, относящиеся к теории кооперативных игр (игр с коалициями). Так, игроки обозначаются натуральными числами и множество игроков в игре n лиц имеет вид $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Любое подмножество множества игроков $K \subseteq I$ называется **коалицией**.

Функция $v(K) : \mathcal{P}(I) \to \mathbb{R}$, ставящая в соответствие каждой коалиции уверенно получаемый ею выигрыш, называется **характеристической функцией** игры. Эта функция обладает двумя свойствами:

1. $v(\varnothing) = 0$ — свойство персональности;
2. $v(K \cup L) \geqslant v(K) + v(L), \quad K \cap L = \varnothing$ — свойство супераддитивности.

Исход игры можно описать так называемым **дележом**. Так называется n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, элементы которого удовлетворяют следующим соотношениям:

1. $x_i \geqslant v(i)$ — условие индивидуальной рациональности;
2. $\sum\limits_{i \in I} x_i = v(I)$ — условие коллективной рациональности.

Первое условие означает, что игрок в результате дележа получает не меньший выигрыш, чем он мог бы получить и так, не договариваясь с другими игроками. Второе условие означает, что делится весь возможный суммарный выигрыш. Если сумма элементов дележа меньше этой величины, то объединять усилия бессмысленно. Если больше — значит, в игре появились откуда-то лишние деньги, что нарушает условия.

Принцип сравнения дележей между собой устанавливает определение доминирования дележей. А именно, говорят, что дележ x доминирует дележ y, если

1. $x_i > y_i, \quad i \in K$ — условие единогласия ;
2. $\sum\limits_{i \in K} x_i \leqslant v(K)$ — условие реализуемости.

Наконец, вводится понятие **С-ядра**, как один из вариантов понимания оптимального решения в кооперативной игре. C-ядром кооперативной игры называется множество дележей, для которых не существует дележей, их доминирующих. Рассмотрим несколько примеров, для которых ядро можно построить сравнительно просто.

Пример I.

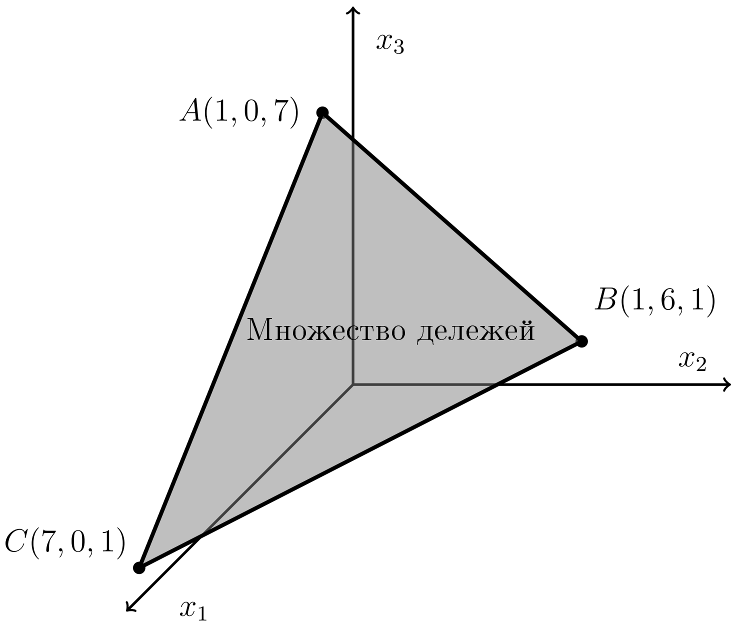
Рассмотрим игру 3-х лиц с характеристической функцией следующего вида:

K	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	1	0	1	4	3	5	8

Найдем C-ядро этой игры. Дележом будет вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющий условиям:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 \geqslant 1, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 1 \ .$$

Первое условие означает, что дележи лежат в одной плоскости, а остальные описывают многоугольник в этой плоскости. Изобразим это на рисунке.



Как видно из рисунка, вершинами многоугольника являются дележи, в которых поочередно по две компоненты принимают свои наименьшие возможные значения. Для дальнейшего анализа удобно рассмотреть треугольник отдельно, введя барицентрические координаты. Вдоль сторон треугольника одна из компонент остается постоянной, как это изображено на рисунке ниже.

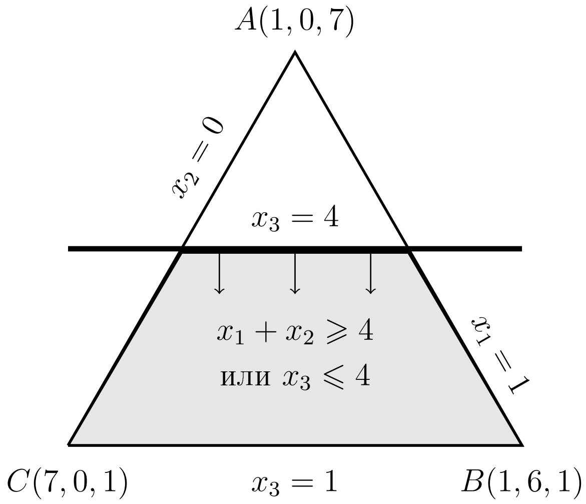
Воспользуемся критерием принадлежности дележа C-ядру, который заключается в выполнении неравенства

$$v(K) \leqslant \sum_{i \in K} x_i$$

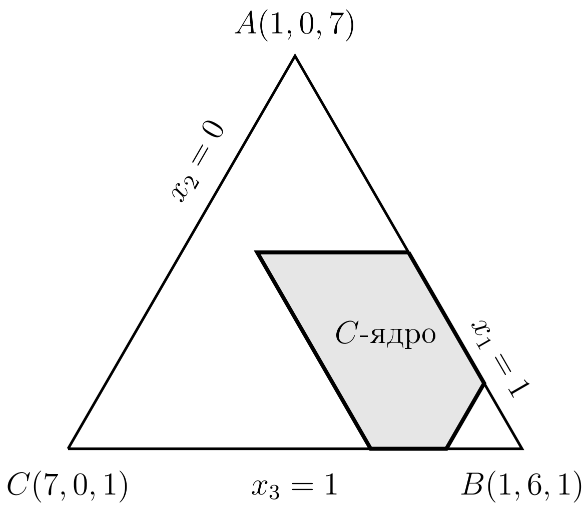
для каждой коалиции K. В нашем случае это означает, что на компоненты вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ накладываются условия:

$$\begin{aligned}
K = \{1,2\} \quad &: \quad x_1 + x_2 \geqslant 4 \quad &\Rightarrow \quad x_3 \leqslant 8 - (x_1 + x_2) = 4\ ,\\
K = \{1,3\} \quad &: \quad x_1 + x_3 \geqslant 3 \quad &\Rightarrow \quad x_2 \leqslant 8 - (x_1 + x_3) = 5\ ,\\
K = \{2,3\} \quad &: \quad x_2 + x_3 \geqslant 5 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \leqslant 8 - (x_2 + x_3) = 3\ .
\end{aligned}$$

Чтобы нарисовать множество, например, $x_1 + x_2 \geqslant 4$ или, что то же самое, $x_3 \leqslant 4$, достаточно заметить, что прямая $x_3 = 4$ будет параллельна стороне BC треугольника и пересекать две другие стороны треугольника на одинаковом расстоянии от вершин B и C. Это расстояние равно 4. А, поскольку координата x_3 убывает по мере приближения к этим вершинам, то множество точек треугольника, для которых $x_3 \leqslant 4$, будет лежать между прямой $x_3 = 4$ и отрезком BC, как показано на рисунке:



Аналогично можно изобразить и остальные условия. Пересечение полученных многоугольников и будет C-ядром игры. Оно изображено на следующем рисунке.



Пример II.

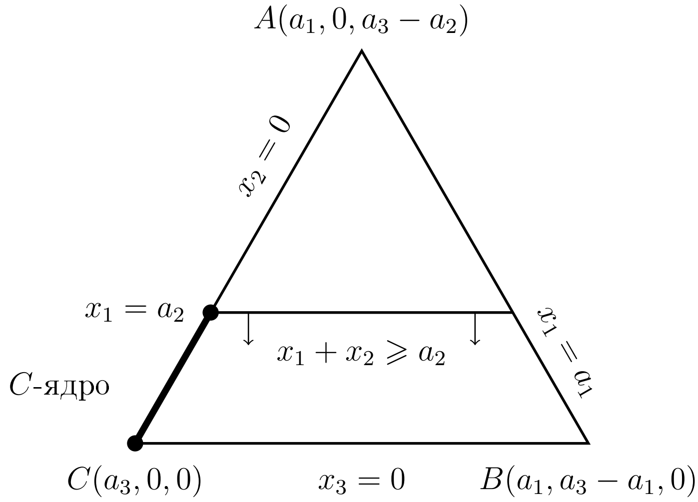
Рассмотрим следующую игровую ситуацию. Некому торговцу картинами в руки попало редкое полотно, которое он оценивает самое меньшее в a_1 долларов. Он хотел бы продать картину одному из двух своих знакомых галеристов, которые оценивают картину в a_2 и a_3 долларов соответственно, причем $a_1 < a_2 < a_3$. Если торговец ни с кем не договорится, то он останется при своих, то есть $v(\{1\}) = a_1$. Галеристы ни по отдельности, ни даже вместе никак картиной не завладеют (разве что украдут ее). Поэтому $v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$. Если же торговец договорится о продаже со вторым галеристом, то картина уйдет не меньше чем за a_3 долларов. Аналогично при сделке между торговцем и первым галеристом цена картины $\geqslant a_2$ долларов. Запишем характеристическую функцию игры:

K	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	a_1	0	0	a_2	a_3	0	a_3

Применяя критерий C-ядра, получаем систему неравенств:

$$\begin{aligned}
K = \{1,2\} &: \quad x_1 + x_2 \geqslant a_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 \leqslant a_3 - (x_1 + x_2) = a_3 - a_2 \ , \\
K = \{1,3\} &: \quad x_1 + x_3 \geqslant a_3 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leqslant a_3 - (x_1 + x_3) = 0 \ , \\
K = \{2,3\} &: \quad x_2 + x_3 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leqslant a_3 - (x_2 + x_3) = a_3 \ .
\end{aligned}$$

Как видим, получили, что $x_2 = 0$. Значит, C-ядро будет целиком лежать на одной из сторон треугольника.



Таким образом, второй галерист может купить картину за любую сумму α при условии, что $a_2 \leqslant \alpha \leqslant a_3$. Торговец получает выигрыш α, второй галерист — картину, а первый галерист вообще не участвует в дележе. Заметим, однако, что если бы его не было, то второй галерист мог бы рассчитывать купить картину и меньше, чем за a_2 долларов. Однако присутствие соперника создает угрозу и заставляет тратить больше.

Пример III.

Три оксфордских профессора математики, назовем их A, B и C , собираются на следующей неделе посетить одного и того же дантиста. Каждому из них уже назначен день визита: понедельник, вторник и среда, соответственно. Однако это совсем не устраивает господ профессоров. Справедливо полагая, что три джентльмена всегда смогут договориться, они сообщили друг другу свои предпочтения, выразив их численно:

	Понедельник	Вторник	Среда
A	2	4	8
B	10	5	2
C	10	6	4

Если два или более профессора договорятся об обмене, то они меняются днями так, как им удобнее всего и результат объединения есть сумма реализованных предпочтений. Так, если договорятся A и B, A сможет пойти к дантисту во вторник (и получает 4 балла), а B — в понедельник (10 баллов). Значит, $v(\{A, B\}) = 4 + 10 = 14$. Если бы они не договорились, то A был бы удовлетворен на 2 балла, а B — на 5 баллов.

Запишем характеристическую функцию этой игры:

K	$\varnothing$	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{C\}$	$\{A, B\}$	$\{A, C\}$	$\{B, C\}$	$\{A, B, C\}$
$v(K)$	0	2	5	4	14	18	9	24

Найдите самостоятельно C-ядро этой игры, применив описанный выше графоаналитический метод. Проверьте, что им будет четырехугольник с вершинами $(15, 5, 4)$, $(9, 5, 10)$, $(14, 6, 4)$, $(8, 6, 10)$.

Следует заметить, что C-ядро исторически было не первой попыткой конкретизировать понятие решения кооперативной игры. Если ослабить требования к недоминируемости дележей, мы приходим к понятию решения по Нейману–Моргенштерну. Формальное определение таково: **решением по Нейману–Моргенштерну** (Н–М–решением) кооперативной игры называется множество R дележей, обладающее следующими свойствами:

1) внутренняя устойчивость: никакие два дележа из R не доминируют друг друга;

2) внешняя устойчивость: каков бы ни был дележ $x \notin R$, найдется дележ $y \in R$ такой, что $y \succ x$.

Содержательная интерпретация Н–М–решения состоит в том, что любые две нормы поведения, соответствующие Н–М–решению, не могут быть противопоставлены друг другу. Каково бы ни было отклонение от допустимых поведений, найдется такая коалиция, которая будет стремиться к восстановлению нормы.

Можно доказать, что если в кооперативной игре существует C-ядро и решение по Нейману-Моргенштерну R, то $C \subset R$.

Пример IV.

Рассмотрим простую игру трех лиц, в которой коалиция, состоящая из двух и трех игроков, выигрывает (т. е. $v(K) = 1$), а коалиция, включающая одного игрока, проигрывает ($v(K) = 0$). Для этой игры рассмотрим множество трех дележей

$$x^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad x^2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad x^3 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Видно, что ни один из дележей не доминирует другой. Т. е. выполняется условие внутренней устойчивости.

Пусть теперь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — другой дележ. По определению дележа $x_i \geqslant v(\{i\}) = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = v(1, 2, 3) = 1$. Поэтому не более двух компонент дележа могут быть не меньше $\frac{1}{2}$. Если их в точности две, то они равны $\frac{1}{2}$. Если же такая компонента одна, то две другие меньше $\frac{1}{2}$. В любом случае, x доминируется одним из дележей из $\{x^1, x^2, x^3\}$. Таким образом, выполняется и условие внешней устойчивости. Это означает, что $R = \{x^1, x^2, x^3\}$ — решение по Нейману–Моргенштерну.

Заметим, что решение мы просто угадали. Четких критериев, которые позволили бы выделить подходящие дележи. Так, например, для рассматриваемой задачи существует на самом деле **бесконечное** множество дележей, составляющих Н–М–решение.

Рассмотрим множество

$$L_3(c) = \{(a, 1-a-c, c) \quad | \quad 0 \leqslant a \leqslant 1-c\}, \quad \text{где } c \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Интерпретация дележа из $L_3(c)$ следующая: игрок 3 получает c, игроки 1 и 2 делят остаток $1-c$ между собой в различных пропорциях. Покажем, что выполняются условия внутренней и внешней устойчивости.

Пусть $x' = (a', 1-c-a', c)$ и $x'' = (a'', 1-a''-c, c)$. Если $a' \geqslant a''$, то $1-c-a' \leqslant 1-c-a''$, а значит, x' и x'' не доминируют друг друга ни для какого допустимого значения c. Если, наоборот, $a' < a''$, то $1-c-a' > 1-c-a''$ и снова x' и x'' не доминируют друг друга. Таким образом, $L_3(c)$ обладает свойством внутренней устойчивости.

Несколько сложнее доказывается внешняя устойчивость. Рассмотрим дележ $y \notin L_3(c)$. Согласно определению множества $L_3(c)$, это возможно, если либо $y_3 < c$, либо $y_3 > c$.

$y_3 = c + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$	$y_3 < c$
Сконструируем дележ с компонентами $$x_1 = y_1 + \frac{\varepsilon}{2}; x_2 = y_2 + \frac{\varepsilon}{2}; x_3 = c.$$ Очевидно, $x \in L_3(c)$ и $x_1 > y_1, x_2 > y_2$. Следовательно, $x \succ y$ по коалиции $\{1,2\}$.	Оставшиеся две компоненты дележа y не могут быть больше $\frac{1}{2}$. Пусть $y_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Положим $x = (1-c, 0, c)$. Тогда $x_1 = 1 - c \geqslant \frac{1}{2} \geqslant y_1$ и $x_3 = c > y_3$. Поэтому $x \succ y$ по коалиции $\{1,3\}$. Пусть $y_2 \leqslant \frac{1}{2}$. Положим $z = (0, 1-c, c)$. Тогда $z_2 = 1 - c \geqslant \frac{1}{2} \geqslant y_2$ и $z_3 = c > y_3$. Следовательно, $z \succ y$ по коалиции $\{2,3\}$.

Таким образом, любой дележ $y \notin L_3(c)$ доминируется каким-то дележем из $L_3(c)$ и условие внешней устойчивости выполняется.

Заметим, что в отличие от исходного множества R из трех дележей, обладавшего симметрией, в $L_3(c)$ игрок 3 заведомо получает некоторую фиксированную долю c, в то время как выигрыш остальных игроков может меняться. Говорят, что игрок 3 дискриминирован. В крайнем случае $c = 0$ и игрок 3 полностью исключается из дележа. Очевидно, что такой результат противоречит интуитивному понимаю справедливого и рационального распределения выигрыша.

Из соображений симметрии очевидно, что существуют также два семейства Н–М–решений $L_1(c)$ и $L_2(c)$, в которых дискриминируются игроки 1 и 2.

Завершим рассмотрение решения по Нейману–Могренштерну, перечислив некоторые его свойства:

1) Н–М–решение не может состоять только из одного дележа;

2) Н–М–решения может не быть. Четких критериев, позволяющих судить о наличии у кооперативной игры такого рода решения, нет;

3) кооперативная игра можеть иметь более одного Н–М–решения;

4) Н–М–решение лишь в малой степени отражает естественное понимание справедливого распределения выигрыша в коалиции игроков.

Рассмотрим теперь кооперативные игры с иной точки зрения, приводящей к построению единственного оптимального в определенном смысле дележа, а не множества, как в случае с C-ядром. Вернемся ко второму примеру. Представим, что три игрока стоят перед дверью комнаты, в которой происходит дележ. Они начинают заходить по очереди: сначала торговец, потом первый галерист, и, наконец, второй галерист. Торговец заходит в комнату, в которой еще никого нет и приносит туда картину, т.е. $w(1) = v(\{1\}) = a_1$ долларов. Затем входит первый галерист. Он образует с торговцем коалицию, причем, как известно, $v(\{1,2\}) = a_2$. Значит, вклад первого галериста в выигрыш коалиции (его значимость) равен $w(2) = v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = a_2 - a_1$, так как торговец с картиной уже никуда не денется из комнаты. Затем входит второй галерист и его вклад определяется аналогично: $w(3) = v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = a_3 - a_2$.

Легко видеть, что $w(1) + w(2) + w(3) = a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 = a_3 = v(\{1,2,3\})$. Значит, вектор $w = (w(1), w(2), w(3)) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2)$ является дележом. Его особенность в том, что доля, достающаяся каждому игроку, является, в некотором смысле "справедливой она связана с важностью игроков для коалиции. Очевидно, что дележ зависит от порядка, в котором игроки входят в комнату. Чтобы построить действительно справедливый дележ, можно перебрать все возможные варианты последовательностей вхождений игроков и найти среднее этих дележей. Такой дележ и будет называться вектором Шепли. Можно составить следующую табличку для его вычисления:

	w(1)	w(2)	w(3)
1 – 2 – 3	a_1	$a_2 - a_1$	$a_3 - a_2$
1 – 3 – 2	a_1	0	$a_3 - a_1$
2 – 1 – 3	a_2	0	$a_3 - a_2$
2 – 3 – 1	a_3	0	0
3 – 1 – 2	a_3	0	0
3 – 2 – 1	a_3	0	0
Сумма	$2a_1 + a_2 + 3a_3$	$a_2 - a_1$	$3a_3 - 2a_2 - a_1$
Вектор Шепли	$\frac{2a_1 + a_2 + 3a_3}{6}$	$\frac{a_2 - a_1}{6}$	$\frac{3a_3 - 2a_2 - a_1}{6}$

Заметим, что доля первого галериста пропорциональна тому, как высоко он подымает цену на картину по сравнению с минимумом в a_1 долларов. Как видим, за исключением случая, когда $a_2 = a_1$, то есть мнения торговца и первого галериста по поводу стоимости картины совпадают, вектор Шепли не принадлежит C-ядру игры. Таким образом, справедливый в указанном смысле дележ не обязательно должен быть устойчивым при сравнении с другими дележами.

Вектор Шепли может быть вычислен и другим способом, по формуле

$$w_i = \sum_{S \ni i} \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!} \left(v(S) - v(S \setminus i)\right) ,$$

где $n = |I|$ — мощность множества игроков. Вычислим по этой формуле, например, долю торговца:

S	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\|S\|$	1	2	2	3
$v(S)$	a_1	a_2	a_3	a_3
$v(S \setminus 1)$	$v(\varnothing) = 0$	$v(\{2\}) = 0$	$v(\{3\}) = 0$	$v(\{2,3\}) = 0$
	$\frac{(3-1)!(1-1)!}{3!} a_1$	$\frac{(3-2)!(2-1)!}{3!} a_2$	$\frac{(3-2)!(2-1)!}{3!} a_3$	$\frac{(3-3)!(3-1)!}{3!} a_3$
w_1	$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{6} + \frac{a_3}{3} = \frac{2a_1 + a_2 + 3a_3}{6}$			

Таким же образом можно найти остальные компоненты вектора Шепли.

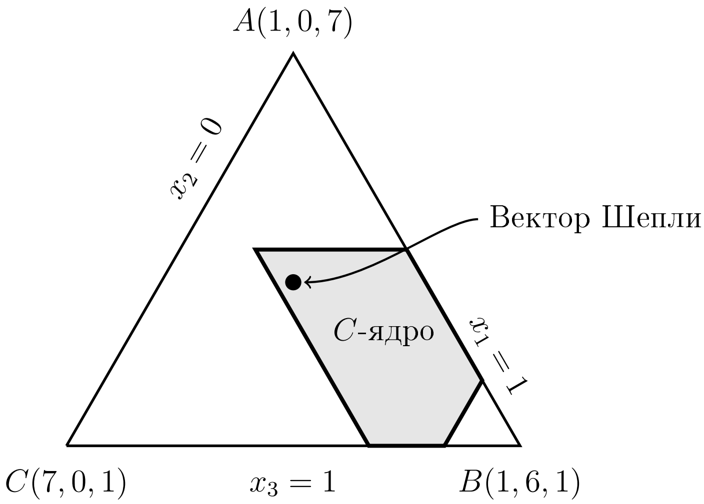
Найдем теперь вектор Шепли для самого первого примера. Напомним вид характеристической функции этой игры:

K	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	1	0	1	4	3	5	8

Нарисуем таблицу, следуя первому способу построения вектора Шепли.

	w(1)	w(2)	w(3)
1 – 2 – 3	1	$4-1=3$	$8-4=4$
1 – 3 – 2	1	$3-1=2$	$8-3=5$
2 – 1 – 3	$4-0=4$	0	$8-4=4$
2 – 3 – 1	$8-5=3$	0	$5-0=5$
3 – 1 – 2	$3-1=2$	$8-3=5$	1
3 – 2 – 1	$8-5=3$	$5-1=4$	1
Сумма	14	14	20
Вектор Шепли	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$

Легко проверить, что дележ Шепли $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$ принадлежит C-ядру игры:



Как видим, в этом случае справедливый дележ является также и устойчивым, то есть, по крайней мере, не существует дележей, его доминирующих.

Найдите для этой игры вектор Шепли по формуле, приведенной выше.