§ 4. Кооперативные игры. Примеры

1. Трансферы.

Кооперативные игры отличаются от игр другой категории, *бескоалиционных игр*, тем, что в них возможны так называемые *обязывающие соглашения* между игроками. Такие соглашения называются обязывающими, потому что они безусловно соблюдаются игроками в силу самой природы игры; следствиями же этих соглашений являются заключение союзов между игроками (точнее, образование *коалиций*) и *трансферы*, т.е. передача полезностей (выигрыша) от одних игроков другим. Выбор согласованных действий, стратегий, ходов в конкретных позициях — объект изучения теорий стратегических и позиционных игр. Для нас же более важен тот аспект кооперативных игр, который имеет дело с дележом выигрышей, полученных коалицией, среди участников данной коалиции.

Рассмотрим основополагающий пример Дж. фон Неймана, который привел к понятиям дележа и характеристической формы игры. В нем стратегиями игроков по существу являются выбор коалиции, в которой они хотят участвовать.

Пример 1. *Простая мажоритарная игра трех лиц.* Это игра трех лиц с нулевой суммой.

Каждый игрок выбирает один из номеров других игроков, причем ходы всех трех игроков делаются одновременно — делая выбор, игрок не знает, какие выборы сделали другие игроки Если два игрока выбрали друг друга, то они образовали пару. Будет создана либо 1 пара, либо ни одной. Если пара есть, то оба игрока этой пары получают по 1/2, а третий (исключенный игрок) теряет 1. Если пар нет, то у всех игроков нулевой выигрыш.

Правила игры совершенно симметричны и абсолютно безобидны, однако поведение игроков заведомо таковым не будет. Было бы неразумно не образовывать коалиций, но то, какая именно из трех коалиций будет образована, выходит за рамки теории.

Возможны модификации правил:
1) если сложилась пара ($\{1,2\}$), то $u_1 = \frac{1}{2}+\varepsilon$, $u_2 = \frac{1}{2}-\varepsilon$; в остальных случаях ничего не меняется;
2) если игрок 1 участвует в паре, то $u_1 = \frac{1}{2}+\varepsilon$, другой участник пары получает $\frac{1}{2}-\varepsilon$;
3) в парах ($\{1,3\}$) и ($\{2,3\}$) игроки 1 и 2 выигрывают $\frac{1}{2}+\varepsilon$, а для игрока 3 $u_3 = \frac{1}{2}-\varepsilon$.

Рассмотрим, например, модификацию 1. Хотя игрок 1 по правилам игры имеет преимущество, он не может им воспользоваться. Предположим, что игра не допускает соглашений между игроками. Тогда (при условии рациональности игроков) игрок 1 выберет игрока 2, т.к. для него пара (1,2) более привлекательна; игрок 2 выберет игрока 3, т.к. для него пара (1,2), напротив, непривлекательна; наконец, поскольку пара (1,3) никогда не составляется, игрок 3 выберет игрока 2. Лучшее, что в сложившейся ситуации может сделать игрок 1, это возвратить добавку ε игроку 2, чтобы сделать пару (1,2) столь же привлекательной для игрока 2, как конкурирующая пара (2,3).

Более существенна следующая модификация. *Игра трех лиц с коалициями разной силы.*

Игроки 1 и 2, объединившись, могут получить от игрока 3 сумму $\leqslant c$, 1 и 3 от 2-го $\leqslant c$, 2 и 3 от 1-го $\leqslant a$. Исследуем необходимые трансферы.

Пусть игрок 1 пытается объединиться с игроком 2 или 3 и получить x в любой ситуации: тогда игрок 2 в коалиции с 1-м может получить $\leqslant (c-x)$, а игрок 3 — $\leqslant (b-x)$, что приводит к неравенству $(c-x)+(b-x) \geqslant a$, т.е. $x \leqslant \frac{-a+b+c}{2}$; следовательно, максимальный выигрыш игрока 1 составляет $\alpha = \frac{-a+b+c}{2}$. Аналогично вычисляются максимальные выигрыши игроков 2 и 3 — соответственно $\beta = \frac{a-b+c}{2}$ и $\gamma = \frac{a+b-c}{2}$. Эти выигрыши действительно достигаются, т.к. $\alpha+\beta = c$, $\alpha+\gamma = b$, $\beta+\gamma = a$.

2. Игры в характеристической форме.

Кооперативные игры подразделяются на 2 больших класса: *игры с трансферабельной полезностью (ТП-игры)* и *игры с нетрансферабельной полезностью (НТП-игры)*. Мы будем изучать в первую очередь ТП-игры, поскольку теория таких игр более понятна. Другое название — игры с побочными платежами, поскольку именно в возможности дополнительных платежей, перераспределяющих выигрыш между игроками, заключается суть понятия **трасферабельной полезности**. Точнее, принимается следующий постулат.

Среди тех благ, которые имеет игрок, есть обладающее 2 свойствами:

1) его можно передать другому игроку;

2) его можно делить на части.

Пример: *деньги* — это трансферабельная полезность. Если все прочие блага можно оценить через эту полезность, то выигрыш каждого игрока в игре можно выражать одним действительным числом, характеризующим величину данной полезности, которую игрок получает. В стратегических играх мы принимали аксиому существования трансферабельной полезности, не формулируя ее явно.

Для кооперативных игр имеется далеко не единственная форма представления, но мы будем изучать игры в *характеристической форме*. Альтернативой служит, например *форма разбиения*: игры в форме разбиения изучаются с точки зрения возможных коалиционных структур.

Игра в характеристической форме задается

1) множеством игроков $N = \{1, 2, ..., n\}$; $i \in N$ — типичный игрок;

2) множеством коалиций $\mathcal{K} \subset 2^N$, причем обычно имеет место равенство $\mathcal{K} = 2^N$; $K \in \mathcal{K}$ — типичная коалиция;

3) функцией выигрыша (или **характеристической функцией**) $v : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$; $v(K)$ — выигрыш коалиции K; $v(i)$, или, точнее, $v(\{i\})$ — выигрыш игрока i.

Эта модель игры может быть интерпретирована так. Пусть игроки начинают переговоры между собой. Если все игроки $i_1, i_2, \ldots, i_k$ объединяются, чтобы образовать коалицию $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, то они получают (вместе, как единая группа) выигрыш $v(K)$. Как распределить этот выигрыш между участниками коалиции, определяется дальнейшими переговорами. При этом мы интересуемся не самими переговорами, их механизмом, процедурой и т.п. (это значительно усложнило бы модель), а лишь исходом, конечным результатом переговоров.

Каждый исход приписывает каждому игроку некоторую долю выигрыша. Задачей теории является определение естественных принципов равновесия и оптимальности при распределении выигрыша.

Сначала рассмотрим примеры задания игр характеристической функцией.

3. Примеры кооперативных игр.

Пример 2. *Игра голосования.* Характеристическая функция задается формулой

$$v(K) = \begin{cases} 0, & |K| < m \\ 1, & |K| \geqslant m \end{cases},$$

где m — некоторое фиксированное число, называемое *критерием большинства* (для простого большинства $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$).

Коалиция, в состав которой вошло по крайней мере m игроков, выигрывает; коалиция, размер которой меньше, чем m, проигрывает. Выигрыш оценивается в 1 единицу — это может означать, например, следующее: 1 кандидат от коалиции проходит в парламент. Проигрыш в таком случае оценивается нулем (а не -1).

Пример 3. *Диктатура.*

$$v(K) = \begin{cases} 0, & 1 \notin K \\ 1, & 1 \in K \end{cases}.$$

Здесь 1-й игрок — диктатор. Выигрывают те и только те коалиции, которые имеют в своем составе диктатора.

Пример 4. *Игра в перчатки.* Имеется n перчаток, некоторые из них левые, другие — правые. У каждого игрока — одна перчатка. Множество N имеет естественное разбиение: $\Lambda \cup \Pi = N$; Λ — множество владельцев левых перчаток, Π — правых. Выигрыш коалиции равен количеству целых пар, которыми коалиция владеет:

$$v(K) = \min\{|K \cap \Lambda|, |K \cap \Pi|\}.$$

Допустимый общий выигрыш равен

$$v(N) = \min\{|\Lambda|, |\Pi|\}.$$

Пример 5. *Игра "Помещик и батраки".* Игрок 1 — "помещик" — владеет полем, но сам не обрабатывает его. Если для работы на поле наняты x батраков ($0 \leqslant x \leqslant n-1$), то ожидаемая выручка от продажи урожая задается некоторой неубывающей целочисленной функцией $f(x)$. Эту функцию можно интерпретировать как производительность труда батраков.

$$v(K) = \begin{cases} 0, & i \notin K \\ f(|K|-1), & i \in K \end{cases}.$$

Пример 6. *Игра производства.*

$$v(K) = f(\omega(K)),$$