Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

А.В. Григорьев

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Томск
Издательство ТГАСУ
2014

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18я7

Г 83 **Григорьев, А.В.** Теория игр [Текст] : учебное пособие / А.В. Григорьев. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 80 с.

ISBN 978-5-93057-582-8

В учебном пособии рассматриваются основные понятия теории игр и разные концепции решения игр. Пособие содержит индивидуальные контрольные задания для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 080100 «Экономика» и 080200 «Менеджмент» всех форм обучения.

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18я7

Рецензенты:
к. ф.-м. н., доцент кафедры ММИТЭ экономического факультета ТГУ **В.И. Рюмкин**;
д. ф.-м. н., профессор кафедры прикладной математики ТГАСУ **Ю.В. Гриняев**.

ISBN 978-5-93057-582-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью данного учебного пособия является изложение основных идей и методов теории игр. Теория игр – это математическая дисциплина, задача которой состоит в анализе математических моделей конфликтных ситуаций в социально-экономических процессах. Математический аппарат теории игр достаточно сложен и может отпугнуть при первом знакомстве с предметом. Поэтому в данном пособии основное внимание уделяется не формальной математической стороне предмета, а разъяснению сущности вводимых понятий. Доказательства теорем даются в тех случаях, когда они достаточно просты и способствуют более глубокому пониманию излагаемых идей. Специфической особенностью задач теории игр является то, что сама концепция решения понимается неоднозначно. В пособии рассмотрены следующие основные концепции: равновесие, Парето-оптимальность, НМ-решения, *С*-ядро и вектор Шепли. Знакомство с ними позволит в дальнейшем овладеть и другими, более сложными концепциями решения в теории игр.

Пособие содержит индивидуальные контрольные задания для самостоятельной работы студентов (10 вариантов).

Все примеры и задачи не являются оригинальными, а позаимствованы из разных литературных источников.

ВВЕДЕНИЕ

Человеку постоянно приходится принимать различные решения для достижения поставленных целей. При этом всегда желательно, чтобы решения были оптимальными, т. е. наилучшим образом реализовывали поставленные цели. В обыденной жизни человек находит такие решения интуитивно, опираясь на свой опыт. Однако для управления сложными системами в экономике недостаточно одной только интуиции. Потребности практики привели к созданию специальных научных методов, получивших название «исследование операций». Целью исследования операций является выработка на основе математических моделей рекомендаций по принятию решений.

Теория игр является одним из самостоятельных разделов дисциплины «Исследование операций». В исследовании операций под операцией понимают целенаправленное изменение состояния какой-либо системы или, иначе говоря, совокупность взаимосвязанных действий, направленных на достижение определенной цели. Результат операции оценивается числовым значением некоторой величины v. Эту величину называют *целевой функцией*, поскольку она отражает целевую направленность проводимой операции.

Управление операцией заключается в выборе значений некоторых параметров x, от которых зависит результат операции. Совокупность конкретных значений этих параметров называют *решением*. Наиболее эффективное решение называется *оптимальным решением*.

С точки зрения исследования операций *игра* – это операция, на ход которой оказывают влияние все ее участники, называемые *игроками*. Причем интересы игроков не совпадают, у каждого из них своя цель, своя целевая функция, т. е. имеет место конфликт.

Необходимость анализа таких конфликтных ситуаций привела к созданию специальной математической дисциплины –

теории игр. Задача теории игр – выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта.

Возможные действия игрока от начала до конца операции (игры) составляют его *стратегию*. Как правило, каждый игрок располагает множеством стратегий, из которых при реализации игры выбирает, исходя из каких-либо соображений, одну.

После завершения игры каждый игрок получает свой выигрыш v_i, определяемый значением его целевой функции (*функции выигрыша*) при данном исходе игры. Выигрыш игрока зависит не только от выбора им своей стратегии, но и от выбора своих стратегий каждым участником игры. Поэтому разумный игрок должен определять свое поведение с учетом возможного поведения всех других игроков.

1. Классификация игр

Классификация игр может быть проведена с разных точек зрения, по разным признакам. Прежде всего, по числу участников различают *парные игры* (2 игрока) и *игры n лиц* ($n > 2$).

В зависимости от условий, налагаемых на выигрыши, различают *игры с нулевой суммой*, в которых сумма выигрышей всех игроков всегда равна нулю, и *игры с произвольной суммой*, в которых сумма выигрышей может быть разной для разных исходов игры. Парная игра с нулевой суммой называется *антагонистической*.

По количеству стратегий различают *конечные* и *бесконечные игры*. Игра называется бесконечной, если хотя бы у одного игрока имеется бесчисленное множество стратегий. В противном случае игра называется конечной.

Игры делятся также на *некооперативные* и *кооперативные*. В некооперативных играх игроки не могут обмениваться информацией, договариваться о совместных действиях, образовывать коалиции. В кооперативных играх все это может иметь место.

Приведенная классификация отнюдь не является полной, мы ограничились теми видами игр, которые рассматриваются в нашем курсе.

2. Развернутая форма игры

Посмотрим теперь, каким образом можно задать игру в качестве объекта математического исследования. Обычно мы представляем себе игру (шахматы, карты, «орлянка») как чередование ходов ее участников. Такое представление приводит к так называемой *развернутой форме игры*.

В качестве примера рассмотрим игру «Минипокер». Игра состоит в следующем. Два игрока ставят на кон по доллару. Первый игрок наугад берет карту из колоды, запоминает цвет (красная или черная масть) и кладет ее рубашкой вверх, второй игрок не знает цвета взятой карты. Далее первый игрок может либо повысить ставку, добавив еще доллар, либо спасовать. Если он пасует, то забирает все деньги с кона в случае, если была взята красная карта. Если была взята черная карта, то все деньги забирает второй игрок, и игра на этом заканчивается. Если же первый игрок повысил ставку, то игру продолжает второй игрок. Он также может либо повысить ставку, либо спасовать. При пасе второго игрока все деньги забирает первый игрок. При повышении ставки все деньги получает первый игрок, если карта красная, и второй игрок, если карта черная.

Схематически игра «Минипокер» представлена на рис. 1 в виде так называемого дерева.

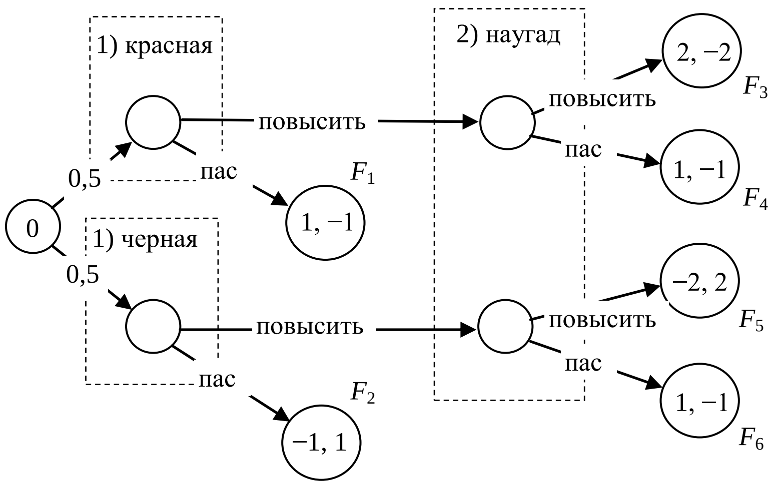

Рис. 1

Такое представление игры называется игрой в развернутой форме. Вершины дерева представляют собой ситуации, складывающиеся в ходе игры. Дуги изображают возможные переходы между ситуациями. Если из вершины выходит несколько дуг, это значит, что в данной ситуации ход игры зависит от выбора одного из игроков или от некоторого внешнего события (ход природы).

Самая левая вершина (корень дерева) означает ситуацию в начале игры. Метка 0 у этой вершины показывает, что ход здесь делает природа. Ход заключается в том, что с одинаковой вероятностью 0,5 происходит одно из двух возможных случайных событий: красная карта, черная карта.

Конечные вершины дерева F_i называются *терминальными*. Каждой такой вершине поставлен в соответствие вектор выигрышей игроков. Компоненты этого вектора суть значения функций выигрыша при данном исходе игры.

Каждая нетерминальная вершина снабжена меткой, указывающей игрока, контролирующего эту вершину, т. е. делающего ход в данной ситуации. Вершину, контролируемую игроком с номером i, называют точкой выбора i-го игрока.

На дереве игры указывается также информированность игрока о том, в какой контролируемой им игровой ситуации он находится. Неразличимые на данном ходе ситуации образуют так называемое *информационное множество*, которое выделяется пунктиром. Первый игрок для первого хода имеет два информационных множества, содержащих по одной вершине, так как ему известна ситуация (цвет карты), в которой он находится. Второй игрок имеет одно информационное множество, содержащее две вершины; ему неизвестно, в какой из них он находится, так как он не знает цвета карты.

3. Игра в нормальной форме

Постановка игры в нормальной форме значительно проще, чем в развернутой. Предполагается, что в начале игры каждый игрок выбирает одну из своих стратегий (т. е. сразу предусматривает всю последовательность своих действий от начала и до конца игры). Этот выбор игроки делают одновременно и независимо друг от друга, не зная выбора противников. После выбора стратегий реализуется соответствующий исход игры, и каждый из игроков получает свой, отвечающий этому исходу выигрыш.

Предполагается, что игрокам известны как свои выигрыши, так и выигрыши противников в зависимости от исхода игры. Такую игру будем называть игрой с полной информированностью игроков. В ней остается только игровая неопределенность: неизвестно, какие стратегии выберут противники. Рассматриваем пока только некооперативные игры.

Определение. Игрой в нормальной форме называется система $\Gamma = \left(X_i, K_i, i \in N\right)$, где X_i – множества стратегий, K_i – функции выигрыша игроков, $K_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to R^1$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков.

Здесь и далее будем обозначать через X_i множество стратегий i-го игрока, а через x_i конкретную стратегию из этого множества, $x_i \in X_i$. Выражение $X_1 \times \ldots \times X_n$ есть декартово произведение множеств, т. е. такое множество, элементами которого являются упорядоченные совокупности (векторы) $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$. Эти упорядоченные совокупности называются *ситуациями*. Функция выигрыша K_i есть отображение множества ситуаций на множество действительных чисел, т. е. она ставит в соответствие каждой ситуации действительное число v_i – выигрыш i-го игрока в данной ситуации:

$$v_i = K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i \in N.$$

Если игра парная и конечная, то функцию выигрыша каждого игрока можно представить матрицей, поставив в соответствие строкам стратегии первого игрока, а столбцам – второго. Пересечения строк и столбцов образуют ситуацию. В качестве элемента матрицы берется выигрыш игрока в данной ситуации. У каждого игрока своя матрица выигрышей, но обычно эти две матрицы объединяют в одну. Пусть, например, игрок *A* и игрок *B* имеют соответственно матрицы выигрышей:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда игру можно описать одной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}.$$

Такие игры получили название *биматричных игр*.

Хрестоматийным примером биматричной игры служит игра «Семейный спор». Вот как она содержательно формулируется. Муж и жена независимо друг от друга решают, куда им пойти: на футбол или на балет. Если они пойдут на футбол, муж получит больше удовольствия, чем жена, его выигрыш в этом случае оценивается числом 2, ее выигрыш – числом 1. Если они пойдут на балет, то выигрыш мужа – 1, выигрыш жены – 2. Если же их выборы не совпадут, то они никуда не пойдут, и выигрыш каждого в этом случае равен нулю.

У обоих игроков (муж и жена) есть по две стратегии: первая – идти на футбол (Ф), вторая – идти на балет (Б). Игра в нормальной форме описывается биматрицей размера 2×2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Ф} & \text{Б} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Ф} \\ \text{Б} \end{array} & \begin{pmatrix} (2, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 2) \end{pmatrix}. \end{array}$$

4. Переход от развернутой к нормальной форме игры

Игры в нормальной форме гораздо проще анализировать, чем игры в развернутой форме, поэтому основные результаты теории игр получены для игр в нормальной форме. В то же время любая игра в развернутой форме может быть единственным образом представлена игрой в нормальной форме. Изложим алгоритм такого перехода, предварительно уточнив понятие «стратегия» для развернутой формы игры.

Определение. Стратегией игрока называется функция, отображающая множество информационных состояний игрока на множество его ходов таким образом, что каждому информационному состоянию ставится в соответствие один из возможных в данном состоянии ходов.

Таким образом, стратегия определяет, какую альтернативу должен выбирать игрок в каждом из своих информационных состояний.

Для того чтобы задать игру в нормальной форме, надо перечислить все стратегии игроков и выигрыши для каждой ситуации. Поскольку в общем случае одним из участников игры является природа, делающая свои ходы случайным образом, то исходы игры также являются случайными событиями, и в качестве выигрышей рассматриваются их математические ожидания.

Определим для каждой терминальной вершины F_i (исхода игры) вероятность достижения ее $P(F_i \mid x)$, при условии использования игроками вектора стратегий $x = (x_1, \ldots, x_n)$, с помощью следующей рекуррентной процедуры:

– если Q – корневая вершина, то $P(Q \mid x) = 1$;

– если вершина R предшествует вершине Q в графе игры, переход из R в Q определяется природой и происходит с вероятностью p, то $P(Q \mid x) = P(R \mid x)\, p$;

– если вершина R предшествует вершине Q в графе игры, переход из R в Q определяется одним из игроков, то $P(Q \mid x) = P(R \mid x)$, в случае, если данный переход содержится в векторе стратегий x, в противном случае $P(Q \mid x) = 0$.

Теперь можем определить ожидаемые значения выигрышей игроков при использовании ими вектора стратегий x (в ситуации $(x_1, \ldots, x_n)$) по формуле

$$K_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j f_i(F_j)\, P(F_j \mid x), \quad i \in N, \tag{1}$$

где $f_i(F_j)$ – выигрыш i-го игрока в терминальной вершине F_j.

Пример. Перейдем к нормальной форме игры «Минипокер» (см. рис. 1). У первого игрока есть два информационных состояния: красная карта (К), черная карта (Ч). В каждом из этих состояний у него есть две альтернативы: повысить ставку (Пов) или пасовать (Пас). Следовательно, первый игрок имеет четыре стратегии: К-Пов, К-Пас, Ч-Пов, Ч-Пас. У второго игрока – одно информационное состояние, в котором две альтернативы: повысить ставку (Пов) или пасовать (Пас). Следовательно, он имеет две стратегии: Пов и Пас. Таким образом, в игре «Минипокер» имеется восемь ситуаций, для каждой из которых надо найти вектор математических ожиданий выигрышей игроков (K_1, K_2).

Рассмотрим ситуацию $x =$(К-Пов, Пов). Для этого вектора стратегий отлична от нуля только вероятность попадания в терминальную вершину F_3. По описанной выше рекуррентной процедуре, двигаясь от начальной вершины к F_3, находим

$$P(F_3 \mid x) = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5,$$

затем по формуле (1) вычисляем

$$(K_1(x), K_2(x)) = (2, -2)0{,}5 = (1, -1).$$

Ситуация $y =$ (К-Пов, Пас) с вероятностью 0,5 приводит к терминальной вершине F_4, поэтому

$$(K_1(y), K_2(y)) = (1, -1)0{,}5 = (0{,}5, -0{,}5).$$

Рассмотрев так все ситуации, приходим к следующей нормальной форме игры «Минипокер»:

$$\begin{array}{c} \\ \text{К-Пов} \\ \text{К-Пас} \\ \text{Ч-Пов} \\ \text{Ч-Пас} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\text{Пов}\quad & \quad\text{Пас}\quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1, -1) & (0{,}5, -0{,}5) \\ (0{,}5, -0{,}5) & (0{,}5, -0{,}5) \\ (-1, 1) & (0{,}5, -0{,}5) \\ (-0{,}5, 0{,}5) & (-0{,}5, 0{,}5) \end{pmatrix} \end{array}.$$

При выборе первым игроком стратегии К-Пас или Ч-Пас второй игрок фактически не участвует в создании ситуации, поскольку у него нет хода. Однако можно считать, что он выбирает одну из своих стратегий, но результат игры один и тот же при любом его выборе.

А теперь обратимся к известной, очень простой игре «Крестики-нолики», и посмотрим, как будет выглядеть описание ее в развернутой и в нормальной формах.

У первого игрока имеется девять альтернатив для первого хода. Значит, из начальной вершины дерева игры выходит девять дуг и, следовательно, появляется девять вершин, контролируемых вторым игроком. Второй игрок может занять одну из восьми свободных клеток. Таким образом, появляется 72 (9·8) вершины, контролируемые первым игроком, и т. д. Для упрощения дальнейших рассуждений предположим, что игра ведется до заполнения всей таблицы. Тогда будут выполнены все девять ходов, и у дерева игры будет 9! = 362880 терминальных вершин.

Крестики-нолики – игра с полной информированностью, каждый игрок знает свою позицию перед очередным ходом. Следовательно, у каждого игрока число информационных множеств совпадает с числом контролируемых им вершин. А из этого следует, что число стратегий у каждого игрока равно числу терминальных вершин. Итак, в нормальной форме игра «Крестики-нолики» задается матрицей размером 362880×362880.

Последний пример показывает, что «приведение любой конкретной игры, за исключением простейших, к нормальной форме представляет задачу, превышающую человеческие возможности; но поскольку нормальная форма всех возможных игр сравнительно проста, можно надеяться успешно выполнить математическое исследование всех возможных игр в нормальной форме. Изучение конкретных игр может оказаться почти невозможным, но … вполне может быть осуществима попытка классифицировать, анализировать и определить особенности всех игр. Для некоторых практических целей это может быть достаточным» [7, с. 84].

5. Матричные игры

Матричной игрой называют конечную антагонистическую игру, т. е. игру двух лиц с нулевой суммой и конечным числом стратегий. Такую игру можно задать одной матрицей A – матрицей выигрышей первого игрока, поскольку матрица выигрышей второго игрока – это та же матрица A, умноженная на (–1).

Рассмотрим матричную игру с платежной матрицей

$$A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Первый игрок стремится выбрать такую свою стратегию, которая даст ему наибольший выигрыш. Однако этот наибольший выигрыш зависит также от выбора своей стратегии вторым игроком, а этот выбор неизвестен первому игроку. Если он выбирает стратегию A_i, то в худшем случае он получит выигрыш, равный $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$. Следовательно, первому игроку целесообразно выбрать такую стратегию, при которой этот минимальный выигрыш максимален. Величина

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

называется *нижней ценой игры*. Это гарантированный выигрыш первого игрока при правильном выборе им стратегии. Соответствующая ему стратегия A_{i_0} называется *максиминной*.

С другой стороны, второй игрок выберет такую свою стратегию B_{j_0}, при которой наибольший его проигрыш $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ будет минимальным. Величина

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

называется *верхней ценой игры*. Стратегия B_{j_0} называется *минимаксной.* Можно показать, что $\alpha \le \beta$.

Выясним, что дает игрокам использование максиминной и минимаксной стратегий. С этой целью рассмотрим две матричные игры:

1) $\begin{array}{c|ccc|} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 1 & 9 & 3 \\ A_2 & 5 & 3 & 4 \\ A_3 & 4 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{c|ccc|} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 4 & 5 & 9 \\ A_2 & 7 & 6 & 8 \\ A_3 & 8 & 2 & 9 \\ \hline \end{array}$

Проанализируем игру 1. Найдем нижнюю и верхнюю цены игры и соответствующие стратегии.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & B_1 & B_2 & B_3 & \alpha_i \\ \hline A_1 & 1 & 9 & 3 & 1 \\ A_2 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ A_3 & 4 & 2 & 8 & 2 \\ \hline \beta_j & 5 & 9 & 8 & \end{array}$$

$$\alpha = \max\{1, 3, 2\} = 3,$$
$$\beta = \min\{5, 9, 8\} = 5,$$
$$\alpha \neq \beta.$$

Максиминная стратегия – A_2, минимаксная – B_1.

Предположим, что игрок A придерживается максиминной, а игрок B – минимаксной стратегии, т. е. имеет место ситуация (A_2, B_1). Эта ситуация не является устойчивой: игроку B выгодно выйти из нее, заменив стратегию B_1 на стратегию B_2 (его проигрыш уменьшится с 5 до 3). В новой ситуации (A_2, B_2) игроку A выгодно перейти к стратегии A_1. Ситуацию (A_1, B_2) захочет изменить игрок B и т. д. Ни у кого из игроков нет оснований остановиться на какой-либо стратегии.

Проанализируем теперь аналогичным образом игру 2.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & B_1 & B_2 & B_3 & \alpha_i \\ \hline A_1 & 4 & 5 & 9 & 4 \\ A_2 & 7 & 6 & 8 & 6 \\ A_3 & 8 & 2 & 9 & 2 \\ \hline \beta_j & 8 & 6 & 9 & \end{array}$$

$$\alpha = \max\{4, 6, 2\} = 6,$$
$$\beta = \min\{8, 6, 9\} = 6,$$
$$\alpha = \beta.$$

Максиминная стратегия – A_2, минимаксная – B_2.

Здесь ситуация (A_2, B_2), когда игрок A придерживается максиминной, а игрок B минимаксной стратегии, является устойчивой. У игроков нет причин менять свои стратегии, каждый из них, в одиночку меняя стратегию, не может увеличить свой выигрыш (уменьшить проигрыш).

Матричная игра, для которой $\alpha = \beta$, называется *игрой с седловой точкой* (или *вполне определенной*). Величина $v = \alpha = \beta$ называется *ценой* (*значением*) *игры*. Элемент матрицы выигрышей $a_{i_0 j_0}$, соответствующий максиминной и минимаксной стратегиям A_{i_0} и B_{j_o}, называется *седловым элементом матрицы*. Нетрудно видеть, что он является наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце.

Стратегии A_{i_0} и B_{j_0} называют *оптимальными стратегиями*. Они оптимальны в том смысле, что дают лучший результат в наихудших условиях. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому игроку невыгодно отступать от своей, т. е. эти две стратегии образуют равновесную ситуацию. Принцип оптимальности, основанный на построении равновесной ситуации, в теории игр называют *принципом равновесия*.

Решением матричной игры будем называть совокупность оптимальных стратегий и цены игры: $\left\langle A_{i_0}, B_{j_0}, v \right\rangle$.

Для того, чтобы найти такое решение, достаточно найти в матрице игры седловой элемент. Технически выполнить это очень просто. Надо в каждой строке матрицы пометить каким-либо знаком минимальный элемент, а в каждом столбце другим знаком – максимальный элемент. Если в результате появляется элемент, помеченный обоими знаками, то он и есть седловой элемент. Строка седлового элемента соответствует оптимальной (максиминной) стратегии игрока A, а столбец – оптимальной (минимаксной) стратегии игрока B.

Пример.

$$\begin{pmatrix} \tilde{9} & \underline{\tilde{5}} & \tilde{6} & \underline{5} \\ \underline{1} & 4 & 3 & \tilde{8} \\ 6 & 3 & \underline{2} & 5 \end{pmatrix}; \quad \left\langle A_1, B_2, 5 \right\rangle.$$

Заметим, что матрица может иметь несколько седловых элементов, которые, естественно, равны между собой.

6. Смешанные стратегии

Если матрица игры не имеет седлового элемента, то никакие стратегии не образуют ситуации равновесия, и анализ игры не приводит ни к каким полезным выводам.

Предположим теперь, что такая игра повторяется многократно, и в каждой партии игроки выбирают свою стратегию случайным образом, по-прежнему независимо друг от друга. Тогда результат такого многократного проведения игры будет характеризоваться средним выигрышем игрока A, т. е. его математическим ожиданием. Пусть p_i – вероятность применения игроком A стратегии A_i, а q_j – вероятность применения игроком B стратегии B_j, тогда математическое ожидание выигрыша равно:

$$K = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Обобщим понятие «стратегия». Введенные ранее стратегии будем называть «чистыми» стратегиями.

Определение. *Смешанной стратегией* называется распределение вероятностей на множестве чистых стратегий.

Таким образом, смешанные стратегии игроков A и B – это следующие векторы:

$$S_A = (p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_m), \quad S_B = (q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_n),$$

для которых имеют место очевидные равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Заметим, что чистую стратегию, например A_k, можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии S_A, где $p_k = 1,\ p_i = 0\ (i \neq k)$.

Определим оптимальные смешанные стратегии, исходя из рассмотренного выше принципа равновесия.

Для игрока A оптимальной будет та стратегия S_A^*, которая максимизирует математическое ожидание его выигрыша при любой стратегии игрока B:

$$K(S_A^*, S_B) = \max_{S_A} K(S_A, S_B),$$

а для игрока B оптимальна та стратегия S_B^*, которая минимизирует его проигрыш при любой стратегии игрока A:

$$K(S_A, S_B^*) = \min_{S_B} K(S_A, S_B).$$

Предположим, что

$$\max_{S_A} K(S_A, S_B) = \min_{S_B} K(S_A, S_B) = K(S_A^*, S_B^*) = v$$

(пока это только гипотеза), тогда

$$K(S_A, S_B^*) \le K(S_A^*, S_B^*) \le K(S_A^*, S_B). \qquad (2)$$

Если неравенства (2) выполняются, то ситуация (S_A^*, S_B^*) является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях – никому из игроков невыгодно в одиночку отступать от своей оптимальной стратегии. Число $v = K(S_A^*, S_B^*)$ называют ценой (значением) игры.

Теорема. Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Доказательство. Докажем теорему сначала для игры со строго положительной матрицей:

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad a_{ij} > 0 \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}).$$

Пусть игрок B применяет свою смешанную стратегию $S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, а игрок A – одну из своих чистых стратегий $A_i = S_A = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Тогда из левого неравенства (2), $K(S_A, S_B^*) \le v$, получаем m неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le v; \quad i = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Имеем также условие

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{4}$$

Делим соотношения (3), (4) на v, и учитывая, что $v > 0$, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{q_j}{v} \le 1; \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{v} = \frac{1}{v}.$$

Введем обозначение $x_j = q_j / v$, тогда последние соотношения принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1; \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{v}.$$

Оптимальная стратегия S_B^* должна минимизировать значение v (проигрыш игрока B), т. е. максимизировать функцию $z = 1/v$. Следовательно, имеем следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1, \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Аналогичным образом, исходя из правого неравенства (2), $K(S_A^*, S_B) \geq v,$ и условия $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$ учитывая, что оптимальная стратегия S_A^* максимизирует функцию v, приходим к такой задаче линейного программирования:

$$f = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq 1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

где $y_i = p_i / v.$

Задачи (5) и (6) являются взаимно двойственными. Нетрудно видеть, что каждая из них имеет допустимое решение (план), т. е. вектор, удовлетворяющий всем ограничениям. Для задачи (5) это, например, вектор $x = (0, \ldots, 0),$ для задачи (6) – вектор $y = (1/\min_{ij} a_{ij}, \ldots, 1/\min_{ij} a_{ij}).$ Следовательно, согласно теореме двойственности линейного программирования, обе задачи имеют решения (оптимальные планы):

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*), \quad y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*), \quad z^* = z_{\max},$$

из которых определяются оптимальные стратегии

$$S_A^* = (y_1^* / z^*, \ldots, y_m^* / z^*), \quad S_B^* = (x_1^* / z^*, \ldots, x_n^* / z^*)$$

и цена игры $v = 1 / z^*.$

Если же матрица A игры Γ_A не является строго положительной, то можно перейти к стратегически эквивалентной игре $\Gamma_{A'}$ со строго положительной матрицей $A',$ которая получается из матрицы A прибавлением к каждому элементу числа

$c > \max\limits_{a_{ij}<0} |a_{ij}|$. Нетрудно видеть, что оптимальные стратегии у игры Γ_A будут те же, что у игры $\Gamma_{A'}$ (а у нее они по уже доказанному существуют), а цена игры будет $v = v' - c$.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Практическая реализация оптимальных смешанных стратегий заключается в применении чистых стратегий A_i $(i = \overline{1,m})$, B_j $(j = \overline{1,n})$ в серии партий игры с относительными частотами p_i^*, q_j^*.

На множестве смешанных стратегий все матричные игры становятся вполне определенными.

Доказательство теоремы дает способ решения матричной игры в смешанных стратегиях путем сведения ее к задаче линейного программирования. Алгоритм построения решения состоит из следующих шагов.

1. От матрицы A переходим к неотрицательной матрице A': $a'_{ij} = a_{ij} + c$, где $c = \max\limits_{a_{ij}<0} |a_{ij}|$.

2. Записываем задачу линейного программирования:

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max; \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \le 1, \quad i = \overline{1,m}; \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

3. Симплексным методом одновременно получаем решение записанной и двойственной задач: $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$, $z^* = z_{\max}$.

4. Находим оптимальные смешанные стратегии каждого игрока: $S_A^* = (y_1^*/z^*, \ldots, y_m^*/z^*)$, $S_B^* = (x_1^*/z^*, \ldots, x_n^*/z^*)$, цену игры $v = 1/z^* - c$.

Пример. Найдем решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к стратегически эквивалентной игре с неотрицательной матрицей, прибавив число $c = 2$ к каждому элементу матрицы:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при доказательстве теоремы мы переходили к строго положительной матрице для того, чтобы гарантировать существование решения соответствующей задачи линейного программирования. В то же время наличие нулей в матрице несколько уменьшает объем вычислений, что существенно при решении задачи «вручную». В существовании же решения мы убедимся непосредственно, решая задачу.

Записываем соответствующую игре $\Gamma_{A'}$ задачу линейного программирования:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad + 9x_3 + 6x_4 \le 1, \\ \;\; x_1 + 3x_2 + 6x_3 \qquad\quad \le 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + \;\; x_3 + 3x_4 \le 1; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

Получаем решение этой и двойственной к ней задачи симплексным методом (табл. 1):

$$X^* = (0,\ 1/3,\ 0,\ 1/9);\;\; Y^* = (0,\ 1/9,\ 1/3);\;\; z^* = 4/9.$$

Теперь находим компоненты векторов оптимальных стратегий и цену игры:

$$p_1^* = \frac{0}{4/9} = 0;\ \ p_2^* = \frac{1/9}{4/9} = 1/4;\ \ p_3^* = \frac{1/3}{4/9} = 3/4;$$

$$q_1^* = \frac{0}{4/9} = 0;\ \ q_2^* = \frac{1/3}{4/9} = 3/4;\ \ q_3^* = \frac{0}{4/9} = 0;\ \ q_4^* = \frac{1/9}{4/9} = 1/4;$$

$$v' = \frac{1}{z^*} = \frac{1}{4/9} = 9/4;\ \ v = v' - c = 9/4 - 2 = 1/4.$$

Таблица 1

i	Баз.	$C_б$	A_0	1	1	1	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	1	2	0	9	6	1	0	0
2	A_6	0	1	1	[3]	6	0	0	1	0
3	A_7	0	1	4	2	1	3	0	0	1
$m+1$	Δ_j		0	–1	–1	–1	–1	0	0	0
1	A_5	0	1	2	0	9	6	1	0	0
2	A_2	1	1/3	1/3	1	2	0	0	1/3	0
3	A_7	0	1/3	10/3	0	–3	[3]	0	–2/3	1
$m+1$	Δ_j		1/3	–2/3	0	1	–1	0	1/3	0
1	A_5	0	1/3	–14/3	0	15	0	1	4/3	–2
2	A_2	1	1/3	1/3	1	2	0	0	1/3	0
3	A_4	1	1/9	10/9	0	–1	1	0	–2/9	1/3
$m+1$	Δ_j		4/9	4/9	0	0	0	0	1/9	1/3

Итак, получили решение игры:

$$\langle (0;\ 1/4;\ 3/4),\ (0;\ 3/4;\ 0;\ 1/4),\ 1/4 \rangle.$$

7. Доминирование стратегий

Вернемся к чистым стратегиям матричной игры. Если в матричной игре для каких-либо стратегий A_k и A_l первого игрока выполняются условия $a_{kj} \geq a_{lj}$ $(j = \overline{1, n})$, причем если хотя бы для одного j $a_{kj} > a_{lj}$, то стратегия A_k называется доминирующей стратегию A_l, а стратегия A_l – доминируемой стратегией A_k.

Для второго игрока стратегия B_k называется доминирующей, а стратегия B_l – доминируемой, если $a_{ik} \le a_{il}$ $(i = \overline{1,m})$, причем хотя бы для одного i $a_{ik} < a_{il}$.

Часто бывает удобнее говорить не о доминировании стратегий, а о доминировании строк и столбцов.

Доминируемые стратегии можно исключить из матрицы игры, поскольку они не могут войти в число оптимальных.

После исключения доминируемых строк в матрице могут появиться доминируемые столбцы, которые не были до этого доминируемыми. То же может иметь место и для строк после исключения доминируемых столбцов.

Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Строка 2 доминирует строку 4, поэтому исключаем строку 4 из исходной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Столбец 1 доминирует столбцы 3 и 6, а столбец 2 доминирует столбец 4. Исключаем доминируемые столбцы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теперь строка 3 доминирует строку 2 (этого не было в предыдущей матрице). Исключаем строку 2:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице нет доминируемых строк и столбцов. Таким образом, удалось существенно упростить анализ матричной игры, перейдя от игры с матрицей размера 5×6 к игре с матрицей 3×3.

Замечание. Выявление доминирующих стратегий требует довольно трудоемкого поэлементного сравнения строк и сравнения столбцов. Проще проверить игру на наличие решения в чистых стратегиях и найти это решение, и только если такого решения нет, следует попытаться упростить игру, исключив доминируемые стратегии.

8. Графоаналитический метод решения матричных игр

Этим методом можно находить решения игр, в которых, по крайней мере, у одного игрока только две стратегии. Рассмотрим вначале игру с матрицей 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В декартовой системе координат будем откладывать по оси абсцисс значение вероятности p_1, а по оси ординат – значение функции выигрыша игрока A (рис. 2):

$$K(S_A, S_B) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, p_i q_j .$$

Пусть игрок B применяет чистую стратегию B_1, т. е. $q_1 = 1,\, q_2 = 0,$ тогда

$$K(S_A, B_1) = \sum_{i=1}^{2} a_{i1} p_i = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 =$$

$$= a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = (a_{11} - a_{21})\, p_1 + a_{21}.$$

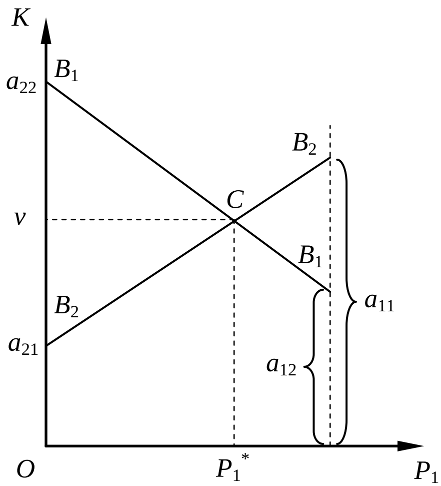

Рис. 2

Если игрок B применяет чистую стратегию B_2 $(q_1 = 0,$ $q_2 = 1)$, то

$$K(S_A, B_2) = \sum_{i=1}^{2} a_{i2} p_i = a_{12} p_1 + a_{22} p_2 =$$
$$= a_{12} p_1 + a_{22}(1 - p_1) = (a_{12} - a_{22}) p_1 + a_{22}.$$

Графиком функции $K(S_A, B_1)$ служит отрезок прямой B_1B_1, а графиком функции $K(S_A, B_2)$ – отрезок B_2B_2.

Максимальный гарантированный выигрыш, не зависящий от выбора игрока B, игрок A получает при вероятности p_1^*, соответствующей точке пересечения отрезков B_1B_1 и B_2B_2. Ордината этой точки C дает цену игры v. Таким образом, для определения значений p_1^* и v имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{21}) p_1 + a_{21} = v, \\ (a_{12} - a_{22}) p_1 + a_{22} = v. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}}; \tag{7}$$

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}}. \tag{8}$$

Для компоненты q_1^* оптимальной стратегии игрока B аналогичным образом получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12})q_1 + a_{12} = v, \\ (a_{21} - a_{22})q_1 + a_{22} = v, \end{cases}$$

откуда

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} - a_{21} + a_{11} - a_{12}}. \tag{9}$$

Итак, формулы (7) – (9) позволяют найти решение матричной игры 2×2 в смешанных стратегиях:

$$\left\langle (p_1^*,\, p_2^*),\, (q_1^*,\, q_2^*),\, v \right\rangle,$$

где $p_2^* = 1 - p_1^*$; $q_2^* = 1 - q_1^*$.

Пример 1. Найдем решение игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Данная игра 2×2 не имеет решения в чистых стратегиях, так как матрица не имеет седлового элемента, поэтому строим решение в смешанных стратегиях по формулам (7) – (9):

$$p_1^* = \frac{6-4}{6-4+9-5} = \frac{2}{6} = 0{,}33; \quad p_2^* = 1 - 0{,}33 = 0{,}67;$$

$$q_1^* = \frac{6-5}{6-4+9-5} = \frac{1}{6} = 0{,}17; \quad q_2^* = 1 - 0{,}17 = 0{,}83;$$

$$v = \frac{6 \cdot 9 - 4 \cdot 5}{6 - 4 + 9 - 5} = \frac{34}{6} = 5{,}67; \quad \big\langle (0{,}33,\ 0{,}67),\ (0{,}17,\ 0{,}83),\ 5{,}67 \big\rangle.$$

Рассмотрим теперь игру с матрицей размера $2 \times n$. Каждой чистой стратегии B_j игрока B отвечает функция выигрыша $K(S_A, B_j)$, график которой – отрезок прямой $B_j B_j$ (рис. 3).

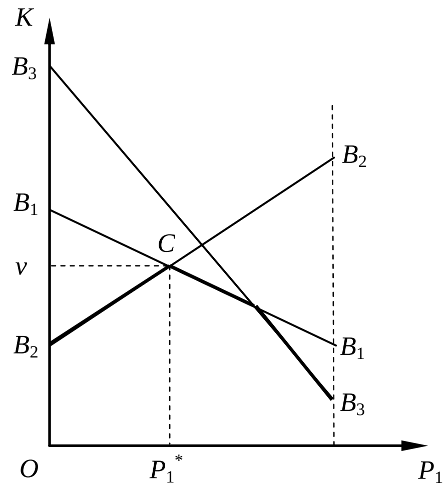

Рис. 3

Построив все такие отрезки, найдем ломаную, определяющую нижнюю границу выигрыша (нижнюю огибающую графиков). Вершина C этой ломаной, в которой значение выигрыша наибольшее, определяет цену игры v и оптимальное значение вероятности p_1^*. Для точного вычисления этих значений определяем так называемые активные стратегии игрока B, соответствующие пересекающимся в точке C отрезкам. Присвоив активным стратегиям номера 1 и 2, находим решение игры по формулам (7) – (9). Записывая решение данной задачи, надо вернуться к первоначальной нумерации стратегий. Чистые стратегии, не являющиеся активными, входят в оптимальную смешанную стратегию с нулевыми вероятностями.

Для игры с матрицей размера $m \times 2$ надо строить в координатах q_1, K отрезки прямых

$$K = (a_{i1} - a_{i2})q_1 + a_{i2}, \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \le q_1 \le 1,$$

являющиеся графиками функций $K(A_i, S_B)$. По ним находим ломаную, определяющую верхнюю границу выигрыша (проигрыша игрока *B*). Точка *C*, соответствующая минимальному значению *K* на этой границе, определяет цену игры *v* и оптимальную вероятность q_1^*. Она же определяет активные стратегии игрока *A*. Далее решение строится так же, как и в случае игры с матрицей $2 \times n$.

Пример 2. Найдем решение игры с матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строим графики функции выигрыша $K(p_1)$ для чистых стратегий игрока *B* и нижнюю огибающую графиков (рис. 4).

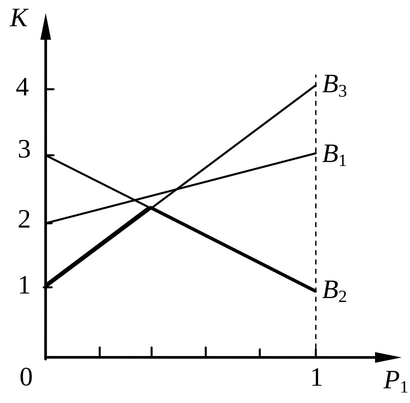

Рис. 4

По огибающей определяем, что активными стратегиями являются B_2 и B_3. Присваиваем им, соответственно, номера 1, 2, и по формулам (7) – (9) находим:

$$p_1^* = \frac{1-3}{1-3+1-4} = \frac{-2}{-5} = 0{,}4; \quad p_2^* = 1 - 0{,}4 = 0{,}6;$$

$$q_1^* = \frac{1-4}{1-3+1-4} = \frac{-3}{-5} = 0{,}6; \quad q_2^* = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$

$$v = \frac{1 \cdot 1 - 3 \cdot 4}{1-3+1-4} = \frac{-11}{-5} = 2{,}2.$$

Возвращаемся к исходной нумерации стратегий игрока B и записываем решение игры:

$$\langle (0{,}4,\ 0{,}6),\ (0,\ 0{,}6,\ 0{,}4),\ 2{,}2 \rangle.$$

Пример 3. Найдем решение игры с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Строим графики функции выигрыша $K(q_1)$ для чистых стратегий игрока A и верхнюю огибающую графиков (рис. 5).

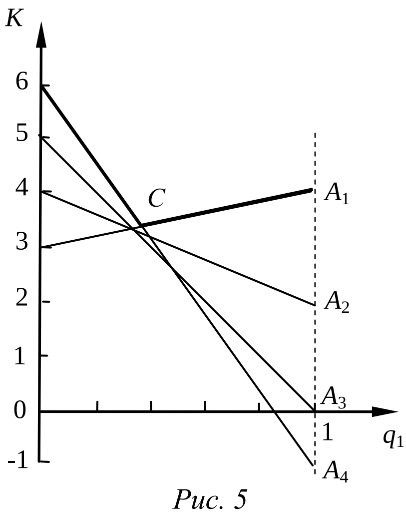

Рис. 5

По огибающей определяем, что активными стратегиями являются A_1 и A_4. Присваиваем им, соответственно, номера 1 и 2 и по формулам (7) – (9) находим:

$$p_1^* = \frac{6-(-1)}{6-(-1)+4-3} = \frac{7}{8}; \quad p_2^* = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8};$$

$$q_1^* = \frac{6-3}{8} = \frac{3}{8}; \quad q_2^* = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8};$$

$$v = \frac{4 \cdot 6 - (-1) \cdot 3}{8} = \frac{27}{8}.$$

Возвращаемся к исходной нумерации стратегий игрока A и записываем решение игры:

$$\langle (7/8,\, 0,\, 0,\, 1/8),\, (3/8,\, 5/8),\, 27/8 \rangle.$$

9. Итеративный метод решения матричной игры

Рассмотрим простейший из итеративных методов – метод Брауна – Робинсон. Метод заключается в мысленном проведении серии партий игры, причем предполагается, что каждый игрок знает стратегию, выбранную противником, и отвечает на нее наилучшей для себя стратегией.

Пусть в первой партии игрок A произвольно выбрал одну из своих стратегий A_i. Игрок B отвечает ему той своей стратегией B_j, которая делает выигрыш A минимальным. Во второй партии игрок A, предполагая, что B применит ту же стратегию B_j, выбирает стратегию A_k, максимизирующую его выигрыш. Игрок B отвечает теперь той стратегией, которая дает минимальный выигрыш при смешанной стратегии игрока A, в которую чистые стратегии входят с относительными частотами их применения в уже проведенных партиях. В следующей партии игрок A выбирает свою стратегию, ориентируясь на смешанную стратегию игрока B в сыгранных партиях, и т. д.

Таким образом, игрок A стремится максимизировать, а игрок B – минимизировать средний выигрыш игрока A в серии партий. Для упрощения расчетов при выборе наивыгоднейшей стратегии в каждой партии можно не вычислять средний выигрыш, а пользоваться так называемым накопленным выигрышем W, т. е. суммой выигрышей в проведенных партиях. Вероятности p_i, q_j в оптимальных стратегиях S_A, S_B принимаем приближенно равными относительным частотам применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j в серии партий.

Введем обозначения: $\underline{W}, \overline{W}$ – нижняя и верхняя оценки накопленных выигрышей; $\underline{v}, \overline{v}$ – нижняя и верхняя оценки цены игры; $v_k = (\overline{v} + \underline{v})/2$ – приближенное значение цены игры после разыгрывания k партий. Доказывается, что рассматриваемый итеративный метод обладает свойством сходимости, т. е. $v_k \to v$ при $k \to \infty$. Вычисления заканчивают, когда разность $\overline{v} - \underline{v}$ станет меньше требуемой точности. Можно использовать также относительную разность $(\overline{v} - \underline{v})/v_k$.

Пример. Найдем решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица не имеет седловых элементов. Следовательно, решений в чистых стратегиях нет.

Упростим игру, исключив стратегию B_2, доминируемую стратегией B_1:

	B_1	B_3
A_1	1	3
A_2	2	1

Решение игры итеративным методом с начальной стратегией A_1 выполняем в табл. 2.

Таблица 2

k	A_i	Накопленный проигрыш B		B_j	Накопленный выигрыш A		$\underline{v} = \frac{\underline{W}}{k}$	$\overline{v} = \frac{\overline{W}}{k}$	v_k
		B_1	B_3		A_1	A_2			
1	A_1	$\underline{1}$	3	B_1	1	$\overline{2}$	1	2	1,5
2	A_2	$\underline{3}$	4	B_1	2	$\overline{4}$	1,5	2	1,75
3	A_2	$\underline{5}$	5	B_1	3	$\overline{6}$	1,67	2	1,83
4	A_2	7	$\underline{6}$	B_3	6	$\overline{7}$	1,5	1,75	1,63
5	A_2	9	$\underline{7}$	B_3	$\overline{9}$	8	1,4	1,8	1,6
6	A_1	$\underline{10}$	10	B_1	$\overline{10}$	10	1,67	1,67	1,67

На шестом шаге нижняя и верхняя цены игры совпали. Следовательно, в данном случае мы находим точное решение игры. В шести разыгранных партиях стратегия A_1 применялась 2 раза, A_2 – 4 раза, B_1 – 4 раза, B_3 – 2 раза, стратегия B_2 не применялась ни разу. Поэтому $p_1 = 1/3$, $p_2 = 2/3$, $q_1 = 2/3$, $q_2 = 0$, $q_3 = 1/3$. Итак, получили решение игры

$$\langle (0{,}33,\ 0{,}67),\ (0{,}67,\ 0,\ 0{,}33),\ 1{,}67 \rangle.$$

10. Пример матричной игры из экономики

Прежде чем перейти к рассмотрению примера, сделаем следующее замечание. Матричная игра – это не обязательно игра с нулевой суммой. Важно то, что результат игры может быть представлен одной матрицей, а таковой будет конечная игра двух игроков с постоянной суммой выигрыша:

$$a_{ij} + b_{ij} = c, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

поскольку в этом случае матрица выигрышей второго игрока выражается через матрицу $(a_{ij})_{m \times n}$: $b_{ij} = c - a_{ij}$. При необходимости можно перейти от такой игры к стратегически эквивалентной игре с нулевой суммой с матрицей $(a_{ij} - c/2)_{m \times n}$.

Пример (планирование выпуска побочной продукции).

В городе имеются два предприятия, которые помимо основной своей продукции могут выпускать для населения города некоторую побочную продукцию одного и того же назначения (скажем, детские игрушки). Будем считать, что затраты на производство игрушек одинаковые и все игрушки реализуются по одной и той же цене. Тогда прибыль предприятия (выигрыш) можно оценить количеством реализованных игрушек. Специалисты по прогнозированию спроса установили, что будет продана 1000 игрушек, и оценили количество игрушек предприятия A, которые будут проданы при наличии на рынке аналогичной продукции предприятия B:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	500	500	500	200
A_2	500	400	100	600
A_3	200	300	100	700
A_4	300	600	300	200

Стратегия A_i здесь состоит в том, что предприятие A выпускает игрушки типа i, а стратегия B_j – в том, что предприятие B выпускает игрушки типа j. Элемент a_{ij} матрицы игры – это ожидаемое количество реализованных игрушек типа i предприятия A при наличии на рынке игрушек типа j предприятия B. Поскольку общее количество проданных игрушек в любом случае равно 1 тыс., имеем матричную игру с постоянной суммой.

С целью упрощения анализа игры разделим матрицу на 100 (найденную цену игры надо будет умножить на 100):

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	5	5	2
A_2	5	4	1	6
A_3	2	3	1	7
A_4	3	6	3	2

Элементы третьего столбца не больше соответствующих элементов первого и второго столбцов, т. е. стратегия B_3 доминирует стратегии B_1 и B_2. Удаляем доминируемые стратегии:

$$\begin{array}{c|cc|} & B_3 & B_4 \\ \cline{2-3} A_1 & 5 & 2 \\ A_2 & 1 & 6 \\ A_3 & 1 & 7 \\ A_4 & 3 & 2 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Теперь стратегия A_1 доминирует стратегию A_4, а A_3 – A_2. Поэтому удаляем стратегии A_4 и A_2:

$$\begin{array}{c|cc|} & B_3 & B_4 \\ \cline{2-3} A_1 & 5 & 2 \\ A_3 & 1 & 7 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Находим решение игры по формулам (7) – (9), полагая, что строки и столбцы в последней матрице имеют номера 1, 2:

$$p_1^* = \frac{7-1}{7-1+5-2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad p_3^* = 1 - p_1^* = \frac{1}{3};$$

$$q_3^* = \frac{7-2}{9} = \frac{5}{9}; \quad q_4^* = 1 - q_3^* = \frac{4}{9};$$

$$v = \frac{7 \cdot 5 - 1 \cdot 2}{9} 100 = \frac{33}{9} 100 = \frac{1100}{3}.$$

Здесь v – выигрыш первого игрока, выигрыш второго равен:

$$w = 1000 - v = 1000 - 1100/3 = 1900/3.$$

Итак, оптимальные стратегии игроков:

$$S_A^* = (2/3,\ 0,\ 1/3,\ 0); \quad S_B^* = (0,\ 0,\ 5/9,\ 4/9).$$

В данной задаче оптимальные смешанные стратегии оказываются практически полезными и без многократного повторения игры. Равновесная ситуация будет иметь место, если предприятие A будет выпускать игрушки типов 1 и 3 в количествах:

$$N_1^A = a_{13} p_1^* q_3^* + a_{14} p_1^* q_4^* = 500 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} + 200 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{6600}{27} \approx 244;$$

$$N_3^A = a_{33} p_3^* q_3^* + a_{34} p_3^* q_4^* = 100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} + 700 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3300}{27} \approx 122,$$

а предприятие B – игрушки типов 3 и 4 в количествах:

$$N_3^B = (1000 - a_{13})p_1^* q_3^* + (1000 - a_{33})p_3^* q_3^* =$$
$$= 500 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} + 900 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{9500}{27} \approx 352;$$
$$N_4^B = (1000 - a_{14})p_1^* q_4^* + (1000 - a_{34})p_3^* q_4^* =$$
$$= 800 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + 300 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{7600}{27} \approx 282.$$

11. Игры с природой

Игрой с природой будем называть парную игру, в которой второй игрок (*природа*) никак не заинтересован в результате игры. Поскольку для природы исходы игры безразличны, функция выигрыша задается только для первого игрока, обычно называемого *статистиком*.

Будем обозначать решения, принимаемые статистиком, (его стратегии) через A_i, а состояния природы (ее стратегии) – через Π_j. Результат игры с природой выражается функцией выигрыша статистика, которая в случае конечного числа стратегий статистика и состояний природы задается матрицей выигрышей $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Введенное для матричных игр понятие «оптимальная стратегия» как седловая точка функции выигрыша теряет смысл в играх с природой. Для природы вообще не существует никакой оптимальной стратегии, а оптимальная стратегия статистика может определяться по-разному, с использованием различных критериев. Рассмотрим основные из них.

Критерий Вальда. Этот критерий исходит из того, что природа рассматривается как разумный противник, который стремится к тому, чтобы свести выигрыш статистика к минимуму. Оптимальной считается стратегия, гарантирующая выигрыш не меньший, чем нижняя цена игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Критерий Вальда – это критерий крайнего пессимизма, он ориентируется на наихудшие условия.

Критерий Сэвиджа использует не матрицу выигрышей, а матрицу рисков $(r_{ij})_{m \times n}$. Элементы матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем при состоянии природы $П_j$ и тем выигрышем, который получит игрок в тех же условиях $П_j$, выбрав стратегию A_i:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Оптимальной считается та стратегия, при которой величина риска в наихудших условиях минимальна:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Критерий Сэвиджа – также критерий крайнего пессимизма.

Критерий Гурвица – это критерий взвешенного оптимизма-пессимизма. За оптимальную принимается та стратегия, которая удовлетворяет условию

$$H = \max_i \{\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}\},$$

где λ – коэффициент пессимизма $(0 \le \lambda \le 1)$.

При $\lambda = 1$ критерий H переходит в критерий Вальда α. Если $\lambda = 0$, критерий H превращается в критерий крайнего оптимизма, когда в качестве оптимальной стратегии выбирается строка с наибольшим значением выигрыша, т. е. предполагается, что состояние природы будет наиболее благоприятным для нас.

Значение λ выбирают исходя из опыта или из каких-либо субъективных соображений. Чем меньше мы склонны к риску, тем ближе к единице следует брать значение λ.

Критерий Байеса. Этот критерий используется в том случае, если известны вероятности состояний природы: q_j; $j = \overline{1,n}$. За оптимальную стратегию принимается та, которая максимизирует математическое ожидание выигрыша:

$$\bar{a} = \max_i a_i, \quad \text{где } a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j; \quad i = \overline{1, m}. \qquad (10)$$

Критерий Лапласа. Этот критерий базируется на принципе недостаточного основания, согласно которому, если неизвестны вероятности состояний природы, то все состояния полагаются равновероятными. Следовательно, оптимальная стратегия определяется из соотношения (10), в котором

$$q_1 = q_2 = ... = q_n = 1/n.$$

Обычно находят оптимальные стратегии по разным критериям и окончательный выбор делают на основе всех полученных результатов.

Пример. Планируется строительство горнодобывающего предприятия (рудника). Возможны четыре варианта предприятия, различающиеся мощностью 2, 3, 4 или 5 млн т руды в год, т. е. у нас имеется четыре стратегии. Запасы месторождения известны не точно и оцениваются в пределах от 20 до 80 млн т. Рассмотрены пять вариантов запасов (состояний природы), и для всех ситуаций подсчитаны ожидаемые значения прибыли в млн руб. (табл. 3). По аналогии с другими рудными месторождениями оценены вероятности состояний природы (табл. 4).

Таблица 3

$П_j$ / A_i	1 (20)	2 (30)	3 (40)	4 (60)	5 (80)
1 (2)	–10	50	65	70	72
2 (3)	–40	–20	80	100	105
3 (4)	–65	–45	55	120	150
4 (5)	–85	–65	35	130	165

Таблица 4

$П_j$	1	2	3	4	5
q_j	0,12	0,25	0,30	0,25	0,08

Выберем оптимальные стратегии по разным критериям.

1. *Критерий Вальда*

$$\alpha = \max(-10, -40, -65, -85) = -10; \quad A_1.$$

Наилучшая стратегия по Вальду – A_1, потери здесь минимальные (10 млн руб.).

2. *Критерий Сэвиджа*. Строим матрицу рисков:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 60 & 93 \\ 30 & 70 & 0 & 30 & 60 \\ 55 & 95 & 25 & 10 & 15 \\ 75 & 115 & 45 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

находим $S = \min(93, 70, 95, 115) = 70; \quad A_2.$

Оптимальная стратегия – A_2, при этом потери прибыли из-за ошибки в оценке запасов не превысят 70 млн руб.

3. *Критерий Гурвица*. Примем равными доли оптимизма и пессимизма при выборе оптимальной стратегии, т. е. возьмем $\lambda = 0{,}5$. Вычисляем величину

$$h_i = \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij} = 0{,}5 \cdot (\min_j a_{ij} + \max_j a_{ij})$$

для каждой стратегии:

$$h_1 = 0{,}5(-10 + 72) = 31{,}0;$$

$$h_2 = 0{,}5(-40 + 105) = 32{,}5;$$

$$h_3 = 0{,}5(-65 + 150) = 42{,}5;$$

$$h_4 = 0{,}5(-85 + 165) = 40{,}0.$$

$$H = \max_i h_i = \max(31{,}0,\ 32{,}5,\ 42{,}5,\ 40{,}0) = 42{,}5, \text{ при } i = 3.$$

Оптимальная стратегия – A_3.

4. *Критерий Байеса*. Согласно соотношению (10) вычисляем величины:

$$a_1 = -10 \cdot 0{,}12 + 50 \cdot 0{,}25 + 65 \cdot 0{,}30 + 70 \cdot 0{,}25 + 72 \cdot 0{,}08 = 54{,}06;$$

$$a_2 = -40 \cdot 0{,}12 - 20 \cdot 0{,}25 + 80 \cdot 0{,}30 + 100 \cdot 0{,}25 + 105 \cdot 0{,}08 = 47{,}40;$$
$$a_3 = -65 \cdot 0{,}12 - 45 \cdot 0{,}25 + 55 \cdot 0{,}30 + 120 \cdot 0{,}25 + 150 \cdot 0{,}08 = 39{,}45;$$
$$a_4 = -85 \cdot 0{,}12 - 65 \cdot 0{,}25 + 35 \cdot 0{,}30 + 130 \cdot 0{,}25 + 165 \cdot 0{,}08 = 29{,}75.$$

Оптимальной является стратегия A_1, математическое ожидание прибыли 54,06 млн руб.

Итак, четыре использованные критерия дали в качестве оптимальной три разные стратегии: дважды была названа первая стратегия, один раз – вторая и один раз – третья. Окончательный выбор стратегии является прерогативой лица, принимающего решение (ЛПР).

12. Биматричные игры. Равновесие по Нэшу

Биматричной игрой является конечная парная игра с непостоянной суммой. Такую игру задают матрицами выигрышей игроков *A* и *B*: $(a_{ij})_{m\times n}$, $(b_{ij})_{m\times n}$. Эти две матрицы записывают обычно в виде одной: $(a_{ij}, b_{ij})_{m\times n}$. В качестве решения биматричной игры можно попытаться по аналогии с матричной игрой принять некоторую устойчивую (равновесную) ситуацию.

Определение. Ситуация (A_{i_0}, B_{j_0}) называется *равновесной по Нэшу*, если

$$K_A(A_{i_0}, B_{j_0}) \geq K_A(A_i, B_{j_0}), \quad i = \overline{1, m};$$
$$K_B(A_{i_0}, B_{j_0}) \geq K_B(A_{i_0}, B_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Так же, как и в случае матричной игры, здесь равновесие заключается в том, что никому из игроков невыгодно в одиночку отклоняться от своей равновесной по Нэшу стратегии.

В антагонистической игре ситуация равновесия рассматривалась как решение игры. Она позволяла предсказать поведение рациональных игроков и результат игры. В такой игре у игроков нет стимула обмениваться информацией: игрок, сообщивший, какую стратегию он собирается использовать, оказывается в невыгодном положении (если только это не оптимальная стратегия).

В некооперативной биматричной игре ситуация равновесия не определяет, вообще говоря, ее решения. Она не позволяет предсказать поведение игроков и результат игры.

Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} (6,6) & (0,9) \\ (9,0) & (1,1) \end{pmatrix}.$$

Ситуация A_2B_2, в которой каждый из игроков получает выигрыш 1, является равновесной по Нэшу. Если игрок A или игрок B в одиночку изменит свою стратегию, то его выигрыш станет равным 0, а выигрыш противника – 9. В то же время, если оба игрока выберут свои первые стратегии A_1 и B_1, «неправильные» с точки зрения теории равновесия, то они получают выигрыш по 6 единиц. Ситуация A_1B_1 выгоднее, чем A_2B_2, для обоих игроков, и им следовало бы договориться о совместном использовании первых стратегий. Однако в некооперативных играх, которые мы сейчас рассматриваем, переговоры между игроками запрещены, поэтому у каждого из игроков при выборе первой стратегии есть опасение, что противник выберет вторую стратегию, обеспечив себе больший выигрыш.

Этот пример показывает, что в неантагонистических играх игрокам может оказаться выгодным заключать между собой какие-либо соглашения, т. е. переходить к кооперативным вариантам игры.

Для биматричных игр также вводятся смешанные стратегии как распределения вероятностей на чистых стратегиях:

$$S_A = (p_1,\, p_2, \ldots,\, p_m), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

$$S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Выигрыши игроков на смешанных стратегиях определяются как математические ожидания:

$$K_A(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j; \quad K_B(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j. \quad (11)$$

Определение. Смешанные стратегии S_A^*, S_B^* образуют равновесие по Нэшу (являются равновесными по Нэшу), если

$$K_A(S_A^*, S_B^*) \geq K_A(S_A, S_B^*); \quad (12)$$

$$K_B(S_A^*, S_B^*) \geq K_B(S_A^*, S_B). \quad (13)$$

Для антагонистических (матричных) игр понятия «равновесные по Нэшу» и «оптимальные стратегии» совпадают. Действительно, в матричной игре

$$K_A(S_A^*, S_B^*) = -K_B(S_A^*, S_B^*) = v,$$

и из неравенств (12) – (13) следует

$$K_A(S_A, S_B^*) \leq K_A(S_A^*, S_B^*) \leq K_A(S_A^*, S_B),$$

а это и есть условие (2) оптимальности стратегий S_A^*, S_B^*.

Теорема 1. Каждая биматричная игра имеет, по крайней мере, одну ситуацию равновесия.

Теорема 2. Пусть A^+ и B^+ – множества чистых стратегий, которые игроки A и B используют с положительными вероятностями в смешанных стратегиях S_A и S_B. Ситуация (S_A, S_B) является равновесной по Нэшу тогда и только тогда, когда выполняются соотношения:

$$K_A(A_i, S_B) = K_A(A_k, S_B) \quad \forall A_i, A_k \in A^+; \quad (14)$$

$$K_A(A_i, S_B) \geq K_A(A_k, S_B) \quad \forall A_i \in A^+, \quad A_k \notin A^+; \quad (15)$$

$$K_B(S_A, B_j) = K_B(S_A, B_l) \quad \forall B_j, B_l \in B^+; \quad (16)$$

$$K_B(S_A, B_j) \geq K_B(S_A, B_l) \quad \forall B_j \in B^+, \quad B_l \notin B^+. \quad (17)$$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность соотношений (14) и (15), для соотношений (16) и (17) доказательство выполняется аналогичным образом.

Необходимость. Предположим, что ситуация (S_A, S_B) равновесна по Нэшу, а одно из условий (14), (15) не выполняется, т. е. существуют две стратегии $A_i \in A^+$ и $A_k \in A$ такие, что $K_A(A_i, S_B) < K_A(A_k, S_B)$. Но это означает, что нет равновесия по Нэшу.

Достаточность. Предположим теперь, что условия (14) и (15) выполнены, но (S_A, S_B) – не равновесие по Нэшу. Тогда существует стратегия S'_A такая, что $K_A(S'_A, S_B) > K_A(S_A, S_B)$. Но если это так, то существует чистая стратегия A'_i, которая играется с положительной вероятностью при S'_A и для которой $K_A(A'_i, S_B) > K_A(S_A, S_B)$. Так как $K_A(A_i, S_B) = K_A(S_A, S_B)$ для любой $A_i \in A^+$, то последнее неравенство противоречит соотношениям (14) и (15).

Таким образом, необходимые и достаточные условия того, что ситуация (S_A, S_B) есть равновесие по Нэшу, состоят в следующем: во-первых, каждый игрок при данном распределении стратегий, которые играет его противник, безразличен к выбору чистых стратегий, которые он играет с положительной вероятностью, во-вторых, эти чистые стратегии не хуже тех, которые он играет с нулевой вероятностью.

Теорема 2 дает возможность находить равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Предположим, что игрок A использует смешанную стратегию $(p, 1-p)$, а игрок B – смешанную стратегию $(q, 1-q)$, причем $0 < p, q < 1$. Так как обе стратегии, B_1 и B_2, игрок B использует с положительными вероятностями, то, согласно теореме, в случае равновесной по Нэшу ситуации

$$a_{11}q + a_{12}(1-q) = a_{21}q + a_{22}(1-q).$$

Отсюда находим

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (18)$$

Аналогично имеем в случае равновесия

$$b_{11}p + b_{21}(1-p) = b_{12}p + b_{22}(1-p),$$

откуда получаем

$$p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}. \qquad (19)$$

Если окажется, что вычисленное по формуле (18) или (19) значение не удовлетворяет условию $0 < p, q < 1,$ то это означает, что данная игра не имеет равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Тогда, согласно теореме 1, она обязательно имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в чистых стратегиях.

Пример. Обратимся к игре «Семейный спор»

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Ф} & \text{Б} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Ф} \\ \text{Б} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ситуации ФФ и ББ являются равновесными по Нэшу в чистых стратегиях. Однако, в отличие от матричных игр, эти равновесные ситуации не равноценны для игроков: ситуация ФФ предпочтительнее для мужа, а ситуация ББ – для жены.

Проверим, нет ли в этой игре равновесной ситуации в смешанных стратегиях. По формулам (18), (19) находим:

$$q = \frac{1-0}{2+1-0-0} = \frac{1}{3}; \quad p = \frac{2-0}{1+2-0-0} = \frac{2}{3}.$$

Итак, нашли равновесные смешанные стратегии

$$S_A^* = (2/3,\ 1/3); \quad S_B^* = (1/3,\ 2/3).$$

Согласно этим стратегиям, муж с вероятностью 2/3 выбирает футбол и с вероятностью 1/3 – балет. У жены все наоборот: футбол выбирается с вероятностью 1/3, балет – с вероятностью 2/3. При этом их выигрыши равны:

$$K_A = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; \quad K_B = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Казалось бы такая ситуация должна устроить игроков – выигрыши одинаковые. Однако они меньше, чем в других равновесных по Нэшу ситуациях.

Множество точек (K_A, K_B), соответствующих векторам выигрышей в смешанных стратегиях, можно изобразить графически. На рис. 6 это множество представлено семейством отрезков прямых, задаваемым, согласно (11), уравнениями:

$$K_A = 2pq + (1-p)(1-q); \quad K_B = pq + 2(1-p)(1-q).$$

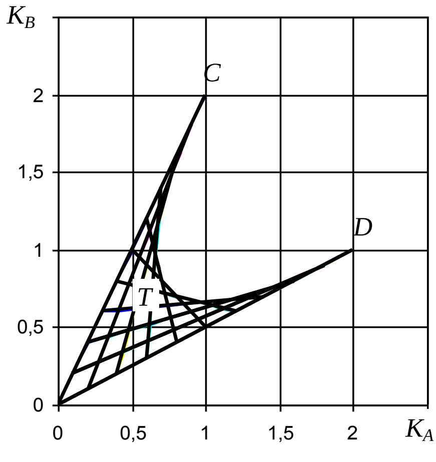

Рис. 6

Каждому отрезку отвечает фиксированное значение $q \in [0, 1]$, а p изменяется в пределах от 0 до 1.

Равновесным по Нэшу ситуациям соответствуют точки C, D (в чистых стратегиях) и T (в смешанных стратегиях).

Посмотрим, что может дать игрокам кооперирование, т. е. согласованный выбор действий.

Пусть p_{ij} – вероятность того, что игроки совместно выбрали ситуацию (A_i, B_j). Распределение этих вероятностей на множестве ситуаций в чистых стратегиях называют *совместной смешанной стратегией*. Очевидно, что

$$\forall\, i, j \quad p_{ij} \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

При этом выигрыши игроков равны, соответственно:

$$K_A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_{ij}; \quad K_B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_{ij}. \tag{20}$$

Множество точек (K_A, K_B), задаваемое этими равенствами, образует выпуклый многоугольник. Для нашего варианта игры «Семейный спор» он изображен на рис. 7.

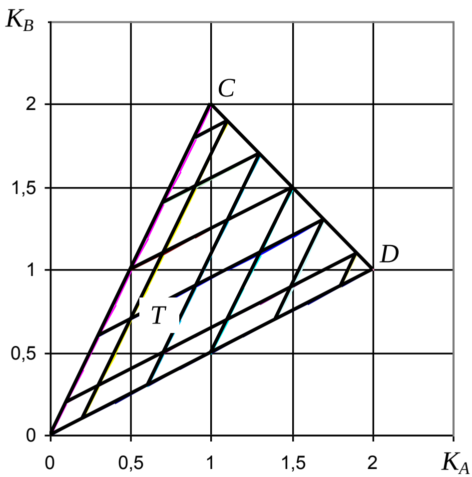

Рис. 7

Сравнивая рис. 6 и 7, видим, что множество значений функций выигрыша в кооперативном варианте шире. Например, совместная смешанная стратегия

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

дает игрокам выигрыши:

$$K_A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$K_B = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

большие, чем те, которые они могли получить в некооперативном варианте игры.

13. Оптимальность по Парето

Определение. Пара стратегий (S_A^*, S_B^*) называется *оптимальной по Парето*, если не существует другой пары стратегий (S_A, S_B), такой, что

$$K_A(S_A, S_B^*) \geq K_A(S_A^*, S_B^*); \quad K_B(S_A^*, S_B) \geq K_B(S_A^*, S_B^*),$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим.

Это определение означает следующее: нет другой ситуации (в смешанных, вообще говоря, стратегиях), которая была бы строго предпочтительнее для обоих игроков.

Формальное различие между ситуацией равновесия и ситуацией, оптимальной по Парето, заключается в следующем: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша, а во второй оба игрока, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого. Выбор Парето-оптимальной пары стратегий может приводить к ситуациям более выгодным для обоих участников, чем ситуации равновесия.

Для матричных игр ситуация равновесия и Парето-оптимальность – равносильные понятия.

Множество векторов выигрышей, соответствующих ситуациям, оптимальным по Парето, называют *множеством Парето*. Нетрудно видеть, что оно образует верхнюю правую (северо-восточную) границу множества векторов (K_A, K_B) (ломаная *CEG* на рис. 8).

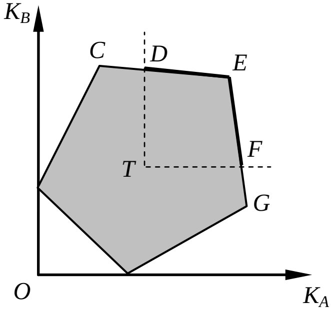

Рис. 8

Одна из концепций решения игры рассматривает множество Парето в качестве решения биматричной игры. Какая именно точка этого множества будет принята, т. е. какая совместная смешанная стратегия будет применяться, решается в ходе переговоров между игроками. Введем понятие «переговорное множество» – множество векторов выигрышей, из которого будет выбрано решение.

Точка *T* с координатами (K_A^T, K_B^T) (см. рис. 8) определяет значения выигрышей, которые игроки могут получить, не заключая никаких соглашений друг с другом. Эту точку называют *точкой угрозы*. Она соответствует максиминным смешанным стратегиям игроков. Очевидно, что ни один из игроков не согласится на совместную игру, которая дает ему меньший выигрыш, чем максиминная стратегия. Поэтому в качестве переговорного множества выступает та часть множества Парето, для которой $K_A \geq K_A^T$, $K_B \geq K_B^T$ (ломаная *DEF*).

Точки переговорного множества не равноценны для игроков: увеличение выигрыша одного игрока сопровождается уменьшением выигрыша другого. Какая именно точка будет взята в качестве решения, – остается предметом переговоров. Достаточно разумным решением является выбор *точки решения Нэша*. Это такая точка переговорного множества, в которой достигается максимум

$$\max\{(K_A - K_A^T)(K_B - K_B^T)\}.$$

Снова вернемся к игре «Семейный спор». Множество Парето здесь – это отрезок прямой с границами в точках (1, 2), (2, 1) (см. рис. 7). Точка угроз T, соответствующая максиминным стратегиям, имеет координаты (2/3, 2/3). Следовательно, переговорное множество совпадает с множеством Парето. Найдем на этом множестве решение Нэша. Ищем точку максимума функции

$$f(K_A, K_B) = \left(K_A - \frac{2}{3}\right)\left(K_B - \frac{2}{3}\right); \quad 1 \le K_A,\ K_B \le 2$$

на прямой, проходящей через точки (1, 2) и (2, 1):

$$K_B = -K_A + 3.$$

Таким образом, надо найти максимум функции

$$f(K_A) = \left(K_A - \frac{2}{3}\right)\left(-K_A + \frac{7}{3}\right)$$

на отрезке [1, 2]. Это классическая задача математического анализа, решая которую, находим, что максимум достигается в точке $K_A = 3/2$. При этом $K_B = -3/2 + 3 = 3/2$. Итак, решение Нэша – это точка на плоскости $K_A K_B$ с координатами $(3/2, 3/2)$. Подставляя найденные значения K_A и K_B в равенства (20), получаем систему уравнений для компонент совместной смешанной стратегии:

$$\begin{cases} 3/2 = 2p_{11} + 0p_{12} + 0p_{21} + 1p_{22}, \\ 3/2 = 1p_{11} + 0p_{12} + 0p_{21} + 2p_{22}, \\ p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим: $p_{11} = p_{22} = 1/2,\quad p_{12} = p_{21} = 0.$ Совместная смешанная стратегия, дающая решение Нэша,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

14. Непрерывные игры

Игру называют непрерывной, если функции выигрышей игроков $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ непрерывны, а множества стратегий X, Y образуют континуум (обычно отрезок или интервал числовой оси).

Для непрерывных игр сохраняется понятие «равновесная по Нэшу ситуация» (x^*, y^*):

$$K_1(x^*, y^*) \geq K_1(x, y^*) \quad \forall x \in X;$$

$$K_2(x^*, y^*) \geq K_2(x^*, y) \quad \forall y \in Y,$$

и понятие «Парето-оптимальность».

Смешанные стратегии по-прежнему вводятся как распределения вероятностей на множествах чистых стратегий X и Y. Если $F(x)$ и $G(y)$ – соответствующие функции распределения, то выигрыши определяются так:

$$K_1(F, G) = \int_Y \int_X K_1(x, y) dF(x) dG(y);$$

$$K_2(F, G) = \int_Y \int_X K_2(x, y) dF(x) dG(y).$$

15. Модель дуополии по Курно

Рассмотрим модель рынка, на котором две фирмы конкурируют между собой за объем выпускаемой продукции. Анализ проведем при следующих предпосылках:

1. Фирмы производят одинаковый продукт в количествах Q_1 и Q_2, соответственно.

2. Обратная функция рыночного спроса имеет вид

$$P(Q) = a - bQ,$$

где $Q = Q_1 + Q_2$, $Q < a$.

3. Фирмы имеют одинаковые функции затрат:

$$C_1(Q_1) = cQ_1; \quad C_2(Q_2) = cQ_2.$$

4. Решение об объеме выпуска продукции фирмы принимают одновременно и независимо друг от друга.

Таким образом, имеем парную некооперативную игру в нормальной форме. Суть игры состоит в том, что ни одна из фирм не знает, каким будет объем продукции конкурента и может лишь предполагать его величину. Каждая фирма выбирает единственный оптимальный объем выпуска (оптимальную стратегию), максимизирующий ее прибыль при любом ожидаемом выпуске конкурента.

Каждый из игроков располагает непрерывным множеством стратегий

$$Q_i = [0, +\infty), \quad i = 1, 2.$$

Функции выигрышей игроков также являются непрерывными функциями:

$$K_1(Q_1, Q_2) = Q_1[P(Q) - c] = Q_1[a - b \cdot (Q_1 + Q_2) - c];$$

$$K_2(Q_1, Q_2) = Q_2[P(Q) - c] = Q_2[a - b \cdot (Q_1 + Q_2) - c].$$

Если предположить, что выпуск второй фирмы Q_2 известен, то оптимальный выпуск первой фирмы, максимизирующий ее прибыль, определяется из условия

$$\frac{dK_1(Q_1, Q_2)}{dQ_1} = 0.$$

Отсюда находим

$$Q_1 = \frac{a-c}{2b} - 0{,}5Q_2. \qquad (21)$$

Зависимость оптимального выпуска одной фирмы от ожидаемого выпуска другой фирмы называется *функцией количественной реакции*.

Для второй фирмы функция количественной реакции имеет следующий вид:

$$Q_2 = \frac{a-c}{2b} - 0{,}5Q_1. \qquad (22)$$

Графики этих функций называют *кривыми реагирования*. В данном случае кривые реагирования – это отрезки прямых. Равновесная по Нэшу ситуация (Q_1^*, Q_2^*) должна, очевидно, принадлежать обеим кривым реагирования, т. е. это точка их пересечения. Решая совместно уравнения (21) и (22), находим

$$Q_1^* = Q_2^* = \frac{a-c}{3b}.$$

Прибыли фирм при этом равны:

$$K_1(Q_1^*, Q_2^*) = K_2(Q_1^*, Q_2^*) = \frac{1}{9} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}.$$

Предположим теперь, что фирмы-конкуренты могут заключить неофициальное соглашение о совместном принятии решений, т. е. вступить в сговор относительно объемов поставок товара на рынок. В этом случае фирмы будут вести себя как одна монополия, полностью контролирующая рынок и стремящаяся максимизировать суммарную прибыль:

$$K(Q) = Q \cdot [a - bQ - c].$$

Из условия $dK(Q)/dQ = 0$ находим, что максимум достигается при

$$Q^* = \frac{a-c}{2b},$$

а суммарная прибыль равна:

$$K(Q^*) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}.$$

В случае дуополии по Курно объем производимой продукции больше, чем при сговоре:

$$Q_1^* + Q_2^* = 2\frac{a-c}{3b} > Q^*.$$

Если прибыль распределяется поровну, то каждая фирма при сговоре получает прибыль

$$K_1 = K_2 = \frac{K(Q^*)}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-c)^2}{b},$$

бо́льшую, чем при дуополии.

Итак, монополизация рынка приводит к снижению объема производимой продукции и росту ее цены по сравнению с дуополией Курно.

16. Некооперативные игры *n* лиц

Теория некооперативных (бескоалиционных) игр n лиц не содержит принципиально новых идей по сравнению с теорией некооперативных игр двух лиц. Здесь также вводятся смешанные стратегии, и основным вопросом является существование ситуаций равновесия. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Любая конечная бескоалиционная игра n лиц имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Заметим, что все проблемы, связанные с ситуациями равновесия в биматричных играх (множественность точек равновесия, их неравноценность для игроков), остаются и здесь. Кроме того, нахождение равновесных ситуаций в играх n лиц $(n \geq 3)$ значительно сложнее, чем в биматричных играх. В целом же существенной разницы между теорией некооперативных игр n лиц и теорией биматричных игр нет.

17. Кооперативные игры *n* лиц

В кооперативных играх основной идеей является идея коалиции – объединения игроков. В случае двух игроков возможна только одна коалиция, которой к тому же никто не противостоит. В случае n игроков возможных коалиций много, и для того, чтобы какая-либо из них могла образоваться, члены этой коалиции должны оказаться в некотором устойчивом состоянии. Именно анализ устойчивости коалиций составляет сущность теории кооперативных игр.

Мы будем рассматривать игры с побочными платежами, т. е. такие игры, в которых члены коалиции могут передавать друг другу часть своего выигрыша.

Анализ кооперативных игр в нормальной форме (т. е. заданных функциями выигрышей всех игроков на множестве ситуаций) оказывается в высшей степени затруднительным. Поэтому здесь используется другой способ задания игры – *в форме характеристической функции*.

Дадим теперь строгие определения основным понятиям теории кооперативных игр.

Определение 1. Для игры n лиц обозначим множество всех игроков через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Любое непустое подмножество S множества N (включая само N и все его одноэлементные подмножества) называется *коалицией*.

Определение 2. Характеристической функцией игры n лиц называют вещественную функцию v, определенную на подмножествах S множества N и ставящую в соответствие любому $S \subset N$ максиминное значение (для S) игры, двух лиц, которую разыграли бы S и $N \setminus S$, если бы эти две коалиции действительно возникли.

Таким образом, $v(S)$ представляет собой максимальный выигрыш, который коалиция S может получить независимо от действий остальных игроков. Естественно считать, что

$$v(\varnothing) = 0. \tag{23}$$

Полагаем также, что характеристическая функция обладает свойством *супераддитивности*:

$$v(S \cup T) \geq V(S) + v(T), \text{ если } S \cap T = \varnothing. \tag{24}$$

Это свойство означает, что, объединив свои усилия, две непересекающиеся коалиции получат суммарный выигрыш не меньше того, что они получили бы, оставаясь разделенными.

Определение 3. *Игрой n лиц в форме характеристической функции* называют вещественную функцию v, определенную на подмножествах множества N и удовлетворяющую условиям (23) и (24).

Заметим, что построение характеристической функции не является, вообще говоря, задачей теории игр. Теория игр анализирует игру, уже заданную своей характеристической функцией. Построение этой функции – задача той предметной области, для которой создается игровая модель.

Определение 4. Игра в форме характеристической функции называется игрой с постоянной суммой, если для любого $S \subset N$ $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$.

Предположим теперь, что игра разыграна, каждая коалиция получила свой выигрыш и возникает вопрос, как разделить этот выигрыш между членами коалиции. Понятно, что никто из игроков не согласится получить меньше того выигрыша, который он может сам себе обеспечить, не вступая ни в какие коалиции.

Определение 5. Дележом для игры n лиц с характеристической функцией v называется вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N); \tag{25}$$

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N. \tag{26}$$

Множество всех дележей игры v будем обозначать через $E(v)$.

Дележ является возможным распределением выигрыша $v(N)$ коалиции, состоящей из всех игроков.

Из соотношений (25) и (26) следует, что

$$v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}). \tag{27}$$

Если в соотношении (27) имеет место равенство, то это означает, что объединение игроков в коалицию не дает никаких преимуществ – выигрыш коалиции равен суммарному выигрышу коалиций, каждая из которых состоит из одного игрока, т. е. суммарному выигрышу отдельных, не связанных никакими обязательствами игроков.

Определение 6. Игра v называется *существенной*, если

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

В противном случае игра называется *несущественной*.

Создание коалиций имеет смысл только в существенных играх, поэтому предметом нашего дальнейшего рассмотрения будут существенные игры.

18. Доминирование дележей. Эквивалентные игры

Анализ кооперативных игр проводится с использованием понятия «доминирование дележей».

Определение 1. Пусть x и y – два дележа, а S – некоторая коалиция. Говорят, что x доминирует y по коалиции S ($x \succ_S y$), если выполняются условия:

$$x_i > y_i, \quad i \in S; \tag{28}$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S). \tag{29}$$

Условие (28) означает, что дележ x лучше дележа y для всех членов коалиции S, а условие (29) выражает реализуемость дележа x коалицией S (сумма платежей членам коалиции не превосходит значения характеристической функции $v(S)$, т. е. выигрыша коалиции S).

Определение 2. Говорят, что дележ x доминирует дележ y $(x \succ y)$, если существует коалиция S, для которой $x \succ_S y$.

Замечание. Доминирование невозможно по одноэлементной коалиции и по коалиции из всех игроков. Действительно, из $x \succ_i y$ следовало бы $y_i < x_i \leq v(\{i\})$, что противоречит условию (26). А из $x \succ_N y$ следовало бы, что $x_i > y_i$ для всех $i \in N,$ и поэтому $\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i = v(N),$ что противоречит условию (25).

Если дележи x и y разные, то поскольку суммы их компонент одинаковые, равные $v(N)$, среди игроков есть такие, которые предпочтут x (для которых $x_i > y_i$), и такие, которые предпочтут y. Возникает вопрос, какой же из дележей будет реализован в результате игры? Ответ на этот вопрос будет зависеть от принятой концепции решения, от того, что следует понимать под решением игры.

Анализ кооперативных игр можно существенно упростить, объединив их в те или иные классы. В качестве таких классов рассматривают классы эквивалентных игр.

Определение 3. Две игры n лиц u и v называются *S-эквивалентными,* если существует положительное число r и n таких вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n,$ что для любой коалиции $S \subset N$

$$v(S) = r \cdot u(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i. \tag{30}$$

Таким образом, если две игры S-эквивалентны, то можно получить одну из другой путем линейного преобразования характеристической функции.

Определение 4. Игра v n лиц называется игрой в (0, 1)-*редуцированной форме*, если для всех $i \in N$

$$v(\{i\}) = 0, \quad v(N) = 1.$$

Теорема. Каждая существенная игра S-эквивалентна некоторой игре в (0, 1)-редуцированной форме.

Доказательство. Пусть u – существенная игра n лиц. Перейдем к S-эквивалентной игре по формуле (30), взяв

$$r = \frac{1}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})} > 0; \quad \alpha_i = -\frac{u(\{i\})}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})}.$$

Тогда получаем для всех $i \in N$

$$v(\{i\}) = \frac{1}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})} \cdot u(\{i\}) - \frac{u(\{i\})}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})} = 0;$$

$$v(N) = \frac{1}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})} \cdot u(N) - \frac{\sum\limits_{i \in N} u(\{i\})}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})} = 1.$$

Получили (0, 1)-редуцированную игру, S-эквивалентную произвольной существенной игре u. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что свойства игр, связанные с понятием доминирования, можно изучать на играх в (0, 1)-редуцированной форме. Произвольная существенная игра $u(S)$ преобразованием

$$v(S) = \frac{u(S) - \sum\limits_{i \in S} u(\{i\})}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})}, \quad S \subset N \tag{31}$$

приводится к (0, 1)-редуцированной форме. При этом дележом оказывается любой вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, компоненты которого удовлетворяют условиям:

$$x_i \geq 0, \quad i \in N; \quad \sum_{i \in N} x_i = 1,$$

т. е. дележи можно рассматривать как точки (n – 1)-мерного симплекса, порожденного ортами

$$e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ j = \overline{1, n}$$

пространства R^n.

При $n = 3$ этот 2-мерный симплекс представляет собой треугольник с вершинами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), лежащий в плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (рис. 9).

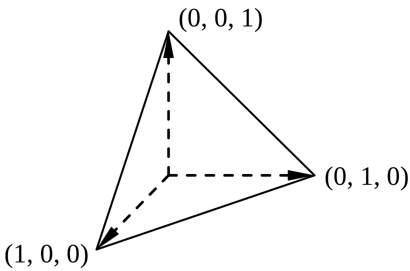

Рис. 9

Заметим, что в (0, 1)-редуцированной форме значение $v(S)$ равно дополнительной прибыли, которую получают члены коалиции S, образовав ее.

В теории кооперативных игр выделяют два частных типа игр, представляющих определенный интерес.

Определение 5. Игра v называется *симметричной*, если значение $v(S)$ определяется только числом элементов в S.

Определение 6. Игра v в (0, 1)-редуцированной форме называется *простой*, если для всех $S \subset N$ либо $v(S) = 0$, либо $v(S) = 1$.

Таким образом, в простой игре каждая коалиция S является либо выигрывающей ($v(S)=1$), либо проигрывающей ($v(S)=0$), без каких-либо промежуточных вариантов.

19. *C*-ядро

Как уже отмечалось, в теории кооперативных игр существуют разные концепции решения. Одна из них рассматривает в качестве решения игры множество ее недоминируемых дележей.

Определение 1. Множество недоминируемых дележей кооперативной игры v называется ее C-ядром ($C(v)$).

Любой дележ из C-ядра устойчив в том смысле, что ни одна из потенциально возможных коалиций не будет иметь желания изменить исход игры.

Теорема. Дележ $x=(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит C-ядру в том и только том случае, если для всех $S \subset N$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S); \tag{32}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \tag{33}$$

Из теоремы следует, что $C(v)$ представляет собой замкнутое выпуклое подмножество (как множество решений системы нестрогих линейных неравенств (32)).

Пример. Директор клуба обещает заплатить 100 усл. ед. певцу, пианисту и ударнику за их совместное выступление. Дуэт певца и пианиста он оценивает в 80 усл. ед., ударника и пианиста – в 65 усл. ед., одного пианиста – в 30 усл. ед. Варианты без пианино им отвергаются. В другом месте дуэт певец и ударник может заработать 50 усл. ед., один певец – 20 усл. ед., а ударник один ничего не может заработать.

Выбор разумного поведения каждым из артистов рассматриваем как кооперативную игру трех лиц. Присвоим номера игрокам: 1 – певец, 2 – пианист, 3 – ударник. Составим характеристическую функцию:

$$v(1) = 20,\ \ v(2) = 30,\ \ v(3) = 0,\ \ v(1, 2) = 80,\ \ v(1, 3) = 50,$$
$$v(2, 3) = 65,\ \ v(1, 2, 3) = 100.$$

Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда принадлежит ядру, когда выполняются соотношения (32) и (33):

$$\begin{cases} x_1 \geq 20,\ \ x_2 \geq 30,\ \ x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 80,\ \ x_1 + x_3 \geq 50,\ \ x_2 + x_3 \geq 65, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 100. \end{cases}$$

Выразив компоненту x_3 через x_1 и x_2, $x_3 = 100 - x_1 - x_2$, получаем систему неравенств:

$$x_1 \geq 20,\ \ x_2 \geq 30,\ \ x_1 + x_2 \leq 100,\ \ x_1 + x_2 \geq 80,\ \ x_1 \leq 35,\ \ x_2 \leq 50.$$

Решение этой системы несложно получить графическим методом. Решением является треугольник с вершинами в точках (30, 50), (35, 50), (35, 45), который представляет собой проекцию C-ядра на плоскость Ox_1x_2. Само C-ядро – это треугольник с вершинами (30, 50, 20), (35, 50, 15) и (35, 45, 20), лежащий в плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 100$. Любая точка этого треугольника является недоминируемым дележом. Представляется разумным выбрать дележ, соответствующий центру ядра (среднеарифметическому его угловых точек):

$$x^* = (33{,}3,\ \ 48{,}3,\ \ 18{,}3).$$

При таком дележе все двухэлементные коалиции имеют за счет кооперирования одинаковый дополнительный доход:

$$x_1 + x_2 - v(1, 2) = 33{,}3 + 48{,}3 - 80 = 1{,}6;$$
$$x_1 + x_3 - v(1, 3) = 33{,}3 + 18{,}3 - 50 = 1{,}6;$$
$$x_2 + x_3 - v(2, 3) = 48{,}3 + 18{,}3 - 65 = 1{,}6.$$

Существенным недостатком концепции C-ядра является то, что ядро может быть пустым: $C(v) = \varnothing$.

20. НМ-решения

Понятие «НМ-решения» было введено Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном. Они предложили рассматривать в качестве решений игры не отдельный дележ, и даже не множество дележей, как в концепции C-ядра, а множество подмножеств множества дележей, обладающих определенными свойствами. НМ-решением называется каждое из этих подмножеств.

В основе НМ-решений лежат понятия внутренней и внешней устойчивости. Внутренняя устойчивость гарантирует равноправность дележей одного НМ-решения, т. е. в НМ-решении нельзя найти такую пару дележей, чтобы один из них доминировал другой. Внешняя устойчивость состоит в том, что для любого произвольного дележа, не принадлежащего данному НМ-решению, найдется доминирующий его дележ в этом НМ-решении.

Определение. Множество $V \subset E(v)$ называется НМ-решением, если:

1) не существует такой пары $x, y \in V$, что $x \succ y$;
2) если $y \notin V$, то найдется такой $x \in V$, что $x \succ y$.

Между НМ-решениями и C-ядром существует определенная связь. Так, если C-ядро не пусто и существует НМ-решение, то оно содержит в себе C-ядро.

Обычно игра имеет огромное множество НМ-решений, что очень ограничивает практическое применение этого понятия. Многие авторы полагают, что НМ-решения представляют собой скорее философскую категорию, чем практически применимую концепцию решения.

Заметим еще, что понятие «НМ-решение» оперирует дележом как выигрышем максимальной коалиции, т. е. в определении предполагается, что максимальная коалиция все-таки образовалась. Чтобы определить, каким образом будет распределен выигрыш между игроками, они должны сначала определить, из какого НМ-решения будут выбирать дележ, а потом выбирать дележ из множества дележей, принадлежащих этому НМ-решению.

Пример. Рассмотрим симметричную игру трех лиц, заданную характеристической функцией

$$u(S)=\begin{cases}-2, & S \text{ состоит из одного игрока;}\\ 2, & S \text{ состоит из двух игроков;}\\ 0, & S \text{ состоит из трех игроков.}\end{cases}$$

Перейдем к (0, 1)-редуцированной форме, пользуясь формулой (31):

$$v(1)=v(2)=v(3)=0,$$

$$v(1,2)=v(1,3)=v(2,3)=\frac{2-[(-2)+(-2)]}{0-(-6)}=1,$$

$$v(1,2,3)=1.$$

В (0, 1)-редуцированной форме игра становится простой, в которой коалиции, состоящие из двух или трех игроков, выигрывают, а коалиция, включающая только одного игрока, проигрывает.

Покажем, что множество дележей

$$V_S=\{(1/2,\ 1/2,\ 0),(1/2,\ 0,\ 1/2),(0,\ 1/2,\ 1/2)\}$$

является НМ-решением. Для этого надо доказать, что оно обладает внутренней и внешней устойчивостью.

Внутренняя устойчивость очевидна – ни один из этих трех дележей не доминирует никакого другого из них. Докажем внешнюю устойчивость, т. е. то, что любой дележ $x\notin V_S$ доминируется одним из дележей V_S. Так как мы рассматриваем игру в (0, 1)-редуцированной форме, то для любого дележа $x=(x_1,x_2,x_3)$ $x_i\ge 0$ и $x_1+x_2+x_3=1$. Следовательно, не более двух компонент вектора x могут быть не меньше 1/2. Если их действительно две, то каждая из них равна 1/2, в то время как третья равна 0. Но это означает, что вектор x совпадает с одним из дележей V_S. Если же x – какой-либо иной дележ, то у него не более одной компоненты, не меньшей чем 1/2. Значит, по крайней мере две компоненты меньше 1/2. Не снижая общности рассуждений, будем считать, что это x_1 и x_2. Но в таком случае дележ x доминируется по коалиции $\{1, 2\}$ первым дележом из V_S.

Множество V_S изображается тремя точками на стандартном симплексе (рис. 10).

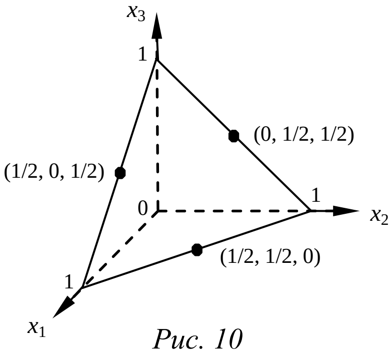

Рис. 10

Найдем еще одно НМ-решение. Пусть $c \in [0, 1/2)$. Покажем, что множество

$$V_{3,c} = \{(x_1,\ 1-c-x_1,\ c) \mid 0 \le x_1 \le 1-c\}$$

также является НМ-решением. В это множество входят дележи, при которых игрок 3 получает постоянный выигрыш c, а игроки 1 и 2 делят остаток во всевозможных пропорциях.

Внутренняя устойчивость следует из того, что для любых дележей x и y из этого множества, если $x_1 > y_1$, то $x_2 < y_2$, т. е. доминирования по коалиции $\{1, 2\}$ нет. По коалициям $\{1, 3\}$ или $\{2, 3\}$ доминирование невозможно, так как $x_3 = y_3 = c$. Невозможно также, как отмечалось, доминирование по коалициям, состоящим из одного или всех игроков.

Для доказательства внешней устойчивости НМ-решения $V_{3,c}$ возьмем какой-либо дележ $y \notin V_{3,c}$. Это означает, что либо $y_3 > c$, либо $y_3 < c$.

Пусть $y_3 > c$, возьмем $y_3 = c + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Определим дележ x следующим образом:

$$x_1 = y_1 + \varepsilon / 2, \quad x_2 = y_2 + \varepsilon / 2, \quad x_3 = c.$$

Очевидно, что $x \in V_{3,c}$ и $x \succ y$ по коалиции $\{1, 2\}$.

Пусть теперь $y_3 < c$. По крайней мере одна из компонент y_1 или y_2 не больше 1/2 (иначе их сумма была бы больше 1). Пусть $y_1 \le 1/2$. Положим $x = (1-c,\ 0,\ c)$. Так как $1-c >$ $> 1/2 \ge y_1$, то $x \succ y$ по коалиции $\{1, 3\}$. Очевидно, что $x \in V_{3,c}$. Если же $y_2 \le 1/2$, можно показать аналогично, что $x \succ y$, где $x = (0,\ 1-c,\ c)$.

Множество $V_{3,c}$ изображается отрезком прямой на стандартном симплексе (пересечение плоскости $x_3 = c$ с плоскостью симплекса $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) (рис. 11).

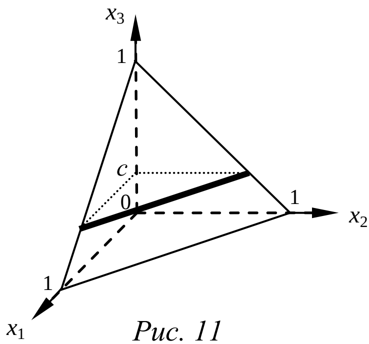

Рис. 11

Очевидно, что помимо множества НМ-решений $V_{3,c}$ можно построить аналогичные множества $V_{1,c}$ и $V_{2,c}$, где фиксированы соответственно выигрыши первого или второго игрока. Таким образом, как видно из приведенного примера, множество всех НМ-решений может быть чрезвычайно обширным.

21. Вектор Шепли

Рассмотренные выше концепции решения игры обладают двумя недостатками: во-первых, решение может не существовать (C-ядро), во-вторых, если решение существует, оно, как правило, не единственное, и множество решений может быть очень большим (НМ-решения). В то же время в действительности результатом игры является вполне определенное распределение выигрыша между игроками. Поэтому представляет интерес построение концепции решения, которое бы всегда существовало и было единственным. Одной из таких концепций решения является вектор Шепли (вектор значений игры).

Определение 1. *Носителем игры* v называется такая коалиция T, что $v(S) = v(S \cap T)$ для любой коалиции S.

Это означает, что любой игрок, не принадлежащий носителю, ничего не может внести ни в какую коалицию. Такого игрока в теории игр называют «болваном».

Определение 2. Пусть v – игра n лиц, а π – любая перестановка множества N. Тогда через πv обозначаем такую игру u, что для любой коалиции $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$

$$u(\{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_s)\}) = v(S).$$

По существу это означает, что при перенумерации игроков соответственно перенумеруются компоненты вектора дележа.

Понятие «вектор Шепли» основывается на трех аксиомах. Заметим предварительно, что так как игры у нас отождествляются с функциями, то можно говорить о сумме игр и о произведении игры на число.

Аксиомы Шепли. Под вектором значений игры v будем понимать n-мерный вектор $\varphi[v]$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. Если S – любой носитель v, то

$$\sum_{i \in S} \varphi_i[v] = v(S).$$

2. Для любой перестановки π и любого $i \in N$

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v].$$

3. Если u и v – две любые игры, то

$$\varphi_i[u + v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v].$$

Этих аксиом оказывается достаточно для определения единственным образом значения φ для любой игры.

Теорема. Для каждой игры существует единственная функция φ, удовлетворяющая аксиомам 1–3.

Следующая формула дает вектор Шепли в явном виде:

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!} \left[v(T) - v(T \setminus \{i\}) \right]. \tag{34}$$

Здесь t – число элементов в T.

Вектору Шепли можно дать наглядную вероятностную интерпретацию. Предположим, что проводится следующая игра. Игроки (элементы множества N) должны встретиться в определенное время в определенном месте. Вследствие влияния различных случайных факторов они будут приходить в разные моменты времени. Допустим, что все варианты порядка прибытия игроков равновероятны. Тогда вероятность того, что игрок i присоединяется к коалиции $T \setminus \{i\}$, состоящей из $t-1$ игроков, согласно классическому определению вероятности, равна:

$$p_i = \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!}.$$

Прибывший игрок i получает выигрыш, равный тому вкладу, который он вносит в коалицию T:

$$v[T] - v[T \setminus \{i\}].$$

Тогда компоненты вектора Шепли (34) представляют собой математические ожидания выигрышей игроков в рассмотренной игре. Другими словами, $\varphi_i[v]$ – это средний выигрыш игрока i на множестве всех коалиций из N.

В случае, когда игра v простая, формула для компонент вектора Шепли становится более простой. Действительно, величина $v(T)-v(T\setminus\{i\})$ будет равна либо 0, либо 1, причем она равна 1, если T – выигрывающая коалиция, а коалиция $T\setminus\{i\}$ не является выигрывающей. Следовательно, имеем

$$\varphi_i[v]=\sum_T (t-1)!(n-t)!/n!, \tag{35}$$

где суммирование распространяется на все такие выигрывающие коалиции T, для которых коалиция $T\setminus\{i\}$ не является выигрывающей.

Пример. Рассмотрим корпорацию из четырех акционеров, обладающих, соответственно, 10, 20, 30 и 40 акциями. Предполагается, что любое решение может быть принято акционерами, имеющими простое большинство акций. Эта ситуация может рассматриваться как простая игра четырех лиц, в которой выигрывающими являются коалиции: {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}. Найдем вектор Шепли для этой игры.

Для того чтобы найти φ_1, заметим, что единственная выигрывающая коалиция T, такая, что коалиция $T\setminus\{1\}$ не является выигрывающей, есть коалиция $\{1, 2, 3\}$. Следовательно, так как $t=3$, по формуле (35) получаем

$$\varphi_1=(3-1)!\,(4-3)!/4!=2!\cdot 1!/4!=2/24=1/12.$$

Аналогично находим, что каждая из выигрывающих коалиций {2, 4}, {1, 2, 3}, {2, 3, 4} перестает быть таковой, если из нее устраняется игрок 2. Поэтому

$$\varphi_2=(2-1)!\,(4-2)!/4!+(3-1)!\,(4-3)!/4!+$$
$$+(3-1)!\,(4-3)!/4!=1/12+1/12+1/12=1/4.$$

Точно таким же образом находим две остальные компоненты: $\varphi_3 = 1/4$, $\varphi_4 = 5/12$. Итак, вектор Шепли для данной игры имеет вид: (1/12, 1/4, 1/4, 5/12).

Компоненты вектора Шепли характеризуют возможность участия каждого из акционеров в принятии решений. Эта возможность определяется отнюдь не числом акций. Так, у игроков 2 и 3 эти возможности одинаковые, поскольку имеется одинаковое число выигрывающих коалиций, в которых они могут участвовать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решением игры в самом общем смысле можно назвать любое описание того, как должны вести себя игроки в той или иной игровой ситуации. Хотелось бы, чтобы это был набор рекомендаций для каждого игрока. Однако, как мы видели, так бывает далеко не всегда. Решением может быть, например, набор исходов игры. Такое решение можно интерпретировать как набор ситуаций, рациональных относительно некоторых предположений о поведении игроков, т. е. при рациональном поведении игроков должны реализовываться только ситуации, принадлежащие решению. Решением игры может быть и набор смешанных стратегий, если одних только чистых стратегий недостаточно.

В настоящее время в теории игр не существует единой концепции решения, одинаково подходящей для всех классов игр. Связано это, во-первых, с тем, что формальное описание игры представляет собой лишь очень грубую модель чрезвычайно сложных реальных процессов, происходящих в ходе игры: обмена информацией, возможных договоров между игроками, самостоятельных действий игроков по увеличению своей информированности. Нельзя исключать и возможности иррационального поведения игроков, которое на сегодняшний день практически не поддается формализации.

Если попытаться включить все подобные детали в описание игры, то оно может стать слишком сложным для конструктивного анализа.

Другая сложность состоит в том, что само понимание того, что такое рациональное поведение, различно у разных людей. То, что кажется рациональным одним, может показаться нерациональным другим, и современная наука зачастую не знает объективных причин, лежащих за этими различиями в оценке.

В связи с этим теория игр не всегда может точно предсказать поведение игроков в реальной игровой ситуации или дать однозначную рекомендацию по принятию решения. Это общая проблема всех формальных, модельных исследований не только в теории игр, но и в физике, экономике и т. д. Тем не менее, ценность модельных исследований конфликта бесспорна, поскольку они дают возможность, исследуя достаточно простые модели, выяснять основные закономерности, которые лежат в основе рационального поведения в конфликтных ситуациях.

Задачей теории игр на современном этапе ее развития является не поиск единственного решения игры, т. е. полного предсказания поведения игроков, а, скорее, отсечение ситуаций и способов поведения игроков, которые нельзя назвать рациональными и разумными.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1

Графоаналитическим методом найти решения матричных игр.

1. а) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \\ 4 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

5. а) $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

8. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

9. а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 2 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 5 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

10. а) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \\ 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 2

Найти решение матричной игры двумя методами: а) итеративным методом с относительной ошибкой цены игры 0,05; б) сведением к паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ **2.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$ **4.** $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ **6.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ **10.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Задание 3

Планируется строительство горного предприятия. Горно-геологические условия, цены на готовую продукцию и объемы сбыта на перспективу точно не определены. Имеется четыре варианта технологических решений (стратегий): A_1, A_2, A_3, A_4, рассматриваются четыре возможных состояния природы: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Элементами матрицы игры являются доходы предприятия. Требуется выбрать оптимальные стратегии по критериям: а) Вальда; б) Сэвиджа; в) Гурвица при коэффициенте пессимизма 0,3, 0,5, 0,7; г) Байеса при вероятностях состояний $q=(0{,}4,\ 0{,}3,\ 0{,}2,\ 0{,}1)$; д) Лапласа.

1.

	П1	П2	П3	П4
A_1	7	6	8	5
A_2	5	9	6	7
A_3	6	7	9	8
A_4	8	9	7	6

2.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	6	8	5	9
A_2	9	6	7	7
A_3	7	9	8	6
A_4	9	7	6	10

3.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	8	5	9	11
A_2	6	7	7	8
A_3	9	8	6	9
A_4	7	6	10	11

4.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	5	9	11	8
A_2	7	7	8	10
A_3	8	6	9	8
A_4	6	10	11	9

5.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	9	11	8	10
A_2	7	8	10	9
A_3	6	9	8	7
A_4	10	11	9	12

6.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	11	8	10	12
A_2	8	10	9	11
A_3	9	8	7	10
A_4	11	9	12	8

7.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	5	9	6	7
A_2	6	7	9	8
A_3	8	9	7	6
A_4	10	8	9	7

8.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	9	6	7	7
A_2	7	9	8	6
A_3	9	7	6	10
A_4	8	9	7	9

9.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	6	7	7	8
A_2	9	8	6	9
A_3	7	6	10	11
A_4	9	7	9	8

10.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	7	8	10	9
A_2	6	9	8	7
A_3	10	11	9	12
A_4	9	8	10	11

Задание 4

Найти все ситуации равновесия в биматричной игре и выигрыши игроков в этих ситуациях.

1. $\begin{pmatrix} (4,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} (3,2) & (1,1) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} (3,4) & (1,0) \\ (0,2) & (2,3) \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} (5,0) & (2,5) \\ (2,1) & (1,4) \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} (1,2) & (3,1) \\ (2,1) & (1,2) \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} (6,2) & (2,6) \\ (1,0) & (0,1) \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} (3,1) & (1,4) \\ (1,3) & (4,0) \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} (1,7) & (5,1) \\ (3,1) & (2,4) \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} (8,2) & (0,6) \\ (3,6) & (5,2) \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} (4,1) & (1,2) \\ (0,6) & (5,4) \end{pmatrix}$.

Задание 5

Найти *C*-ядро в кооперативной игре трех лиц, заданной характеристической функцией.

1. $v(1)=1,\ v(2)=1,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=1,\ v(2,3)=1,$
$v(1,2,3)=9.$

2. $v(1)=2,\ v(2)=2,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=2,\ v(2,3)=2,$
$v(1,2,3)=9.$

3. $v(1)=3,\ v(2)=3,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=2,\ v(2,3)=2,$
$v(1,2,3)=9.$

4. $v(1)=1,\ v(2)=1,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=3,\ v(2,3)=3,$
$v(1,2,3)=9.$

5. $v(1)=2,\ v(2)=2,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=3,\ v(2,3)=3,$
$v(1,2,3)=9.$

6. $v(1)=3,\ v(2)=3,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=3,\ v(2,3)=3,$
$v(1,2,3)=9.$

7. $v(1)=1,\ v(2)=1,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=5,\ v(2,3)=5,$
$v(1,2,3)=9.$

8. $v(1)=2,\ v(2)=2,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=4{,}5,\ v(2,3)=4{,}5,$
$v(1,2,3)=9.$

9. $v(1)=3,\ v(2)=3,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=4{,}5,\ v(2,3)=4{,}5,$
$v(1,2,3)=9.$

10. $v(1)=2,\ v(2)=2,\ v(3)=0,\ v(1,2)=4,\ v(1,3)=2,\ v(2,3)=5,$
$v(1,2,3)=9.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. *Воробьев, Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьев. – М . : Наука, 1985. – 272 с.
2. *Губко, М.В.* Теория игр в управлении организационными системами / М.В. Губко, Д.А. Новиков. – М. : РАН Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова, 2005. – 138 с.
3. *Идрисов, Ф.Ф.* Программные и игровые модели в экономике : учебное пособие / Ф.Ф. Идрисов. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2010. – 164 с.
4. *Оуэн, Г.* Теория игр / Г. Оуэн. – М. : Мир, 1971. – 230 с.

Дополнительная

5. *Дюбин, Г.Н.* Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. – М. : Наука, 1981. – 336 с.
6. *Крушевский, А.В.* Теория игр / А.В. Крушевский. – Киев : Вища школа, 1977. – 216 с.
7. *Льюис, Р.* Игры и решения. Введение и критический обзор / Р. Льюис, Х. Райфа. – М. : ИЛ, 1961. – 642 с.
8. *Петросян, Л.А.* Теория игр : учебное пособие для ун-тов / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М. : Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.
9. *Печерский, С.Л.* Теория игр для экономистов. Вводный курс : учебное пособие / С.Л. Печерский, А.А. Беляева. – СПб. : Изд-во Европ. ун-та в Санкт-Петербурге, 2001. – 342 с.

Учебное издание

Александр Викторович Григорьев

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Редактор М.В. Пересторонина
Оригинал-макет подготовлен автором

Подписано в печать 08.04.2014.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,21. Тираж 60 экз. Заказ № 99.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.