

Математичні моделі і їх застосування

Математична модель – це наближений опис довільного класу явищ зовнішнього світу, поданий за допомогою математичної символіки. Математичне моделювання виступає як метод пізнання зовнішнього світу, а також прогнозування і управління. Аналіз математичних моделей дозволяє проникнути в сутність досліджуваних явищ.

Математичне моделювання проходить такі етапи:

- постановка задачі, тобто прийняття рішення про необхідність моделювання і його мету. На цьому етапі слід чітко визначити і сформулювати мету досліджень. З мети досліджень випливатиме сукупність властивостей об'єкта моделювання, які підлягатимуть відбиттю у моделі;

- побудова математичної моделі;

- дослідження системи на моделі, прогнозування й управління оригіналом за результатами цих досліджень.

Моделювання зводиться до дослідження властивостей певного об'єкта вивченням (дослідженням, аналізом) аналогічних властивостей іншого об'єкта, більш зручного для дослідження, який знаходиться з першим у певній відповідності. Перший об'єкт називається в цьому випадку *оригіналом*, а другий – *моделлю*. Як модель, так і оригінал можуть бути матеріальними тілами чи фізичними явищами, або описом цих тіл чи явищ за допомогою тих чи інших засобів. В ролі оригіналу може виступати, наприклад, певна проблема, моделлю якої буде задача меншого рівня складності. Скажімо, так звана *обчислювальна* модель є абстрактною чи конкретною задачею, яка відповідає проблемі чисельного розв'язання певного класу математичних чи прикладних задач. Якщо при переході від оригіналу до моделі використовується заміна оригіналу на матеріальне тіло чи явище, то така модель називається *фізичною*; якщо ж оригінал замінюється його описом, то модель може бути *вербальною*, *математичною* або *графічною*, залежно від використовуваних при описі символів. Реалізована у вигляді макета чи пристрою, чи зафіксована у вигляді словесного опису, рівняння, формули, графіка, креслення, модель є системою наших уявлень про оригінал, його властивості і взаємозв'язки на певному етапі пізнання оригіналу.

До основних характеристик математичних моделей (ММ) належать: ступінь універсальності моделі; точність моделі; адекватність моделі; економічність моделі.

Ступінь універсальності ММ характеризує повноту відображення у моделі властивостей реального об'єкта; кількісно ступінь універсальності може бути описаний співвідношенням потужності множини відображених властивостей до множини наявних властивостей системи.

Точність математичної моделі оцінюється за збіжністю значень параметрів реального об'єкта і значень тих же параметрів, отриманих за допомогою побудованої моделі; при цьому ступінь збіжності розраховують через відхилення цих параметрів.

Економічність математичної моделі характеризується витратами обчислювальних ресурсів на її реалізацію. Чим вони менші, тим модель економічніша. Останнім часом, для характеристики економічності моделі застосовують так звані комбіновані параметри: середня кількість операцій, яка виконується під час одного звертання до моделі, розмірність системи рівнянь, кількість внутрішніх параметрів моделі тощо.

Адекватність ММ – це її здатність відображати задані властивості об'єкта з похибкою, не більше заданої. При цьому адекватність моделі переважно спостерігається виключно в обмеженій області зміни зовнішніх параметрів, яка називається областю адекватності (ОА) математичної моделі. Подібність моделі та оригіналу є невід'ємною умовою адекватності моделювання.

За ступенем відповідності параметрів моделі і оригіналу розрізняють подібності абсолютну і практичну (неабсолютну). Остання, в свою чергу, буває повною, неповною і наближеною. За адекватністю фізичної природи аналогічних явищ подібність поділяють на *математичну* і *фізичну* (електричну, механічну, теплову тощо). *Фізична подібність* досягається за однакової фізичної природи явищ, *математична* – за відповідності схожих параметрів процесів різної фізичної природи.

При абсолютній подібності оригінал і модель структурно та фізично подібні; вони відрізняються лише значеннями параметрів, що характеризують елементи і зв'язки між ними. Процеси у моделі і оригіналі в цілому, так само як стани окремих елементів, описуються однаковими функціональними залежностями, що пропорційно відрізняються лише значеннями аргументів. Відтворення процесу на моделі здійснюється без

жодних спотворень щодо оригіналу і відрізняється від нього лише масштабом.

Абсолютна подібність свідчить про тотожність явищ, яка є поняттям доволі абстрактним і реалізується на практиці виключно в геометричних побудовах та в окремих видах математичної подібності. В переважній більшості випадків розв'язання конкретних задач дослідник не має змоги працювати з явищами, схожими абсолютно у всіх деталях. Тому виникає потреба введення поняття *практичної подібності*, в межах якої розрізняють *повну, неповну і наближену* подібності.

Повна подібність – це подібність перебігу у часі та просторі тих процесів, які є суттєвими для цього дослідження і з достатньою повнотою характеризують досліджуване явище стосовно конкретної постановки задачі дослідження.

Неповна подібність – це подібність перебігу процесів лише в просторі чи лише в часі (наприклад, при подібності перебігу перехідних процесів у двох електричних лініях розподіл електричного поля може бути різним внаслідок різної геометрії дроту). *Наближена подібність* характеризується існуванням спрощених допущень, які дозволяють вважати подібними відмінні процеси за рахунок свідомих спотворень деяких їх властивостей.

Побудову математичної моделі, тобто вивчення явища за допомогою математичної моделі, можна умовно розбити на 4 етапи (рис. 12): етап змістовного опису; етап формалізації опису; етап остаточної побудови моделі (ідентифікації параметрів і перевірки адекватності моделі); етап перегляду і вдосконалення моделі за результатами узагальнення емпірично накопичених даних.

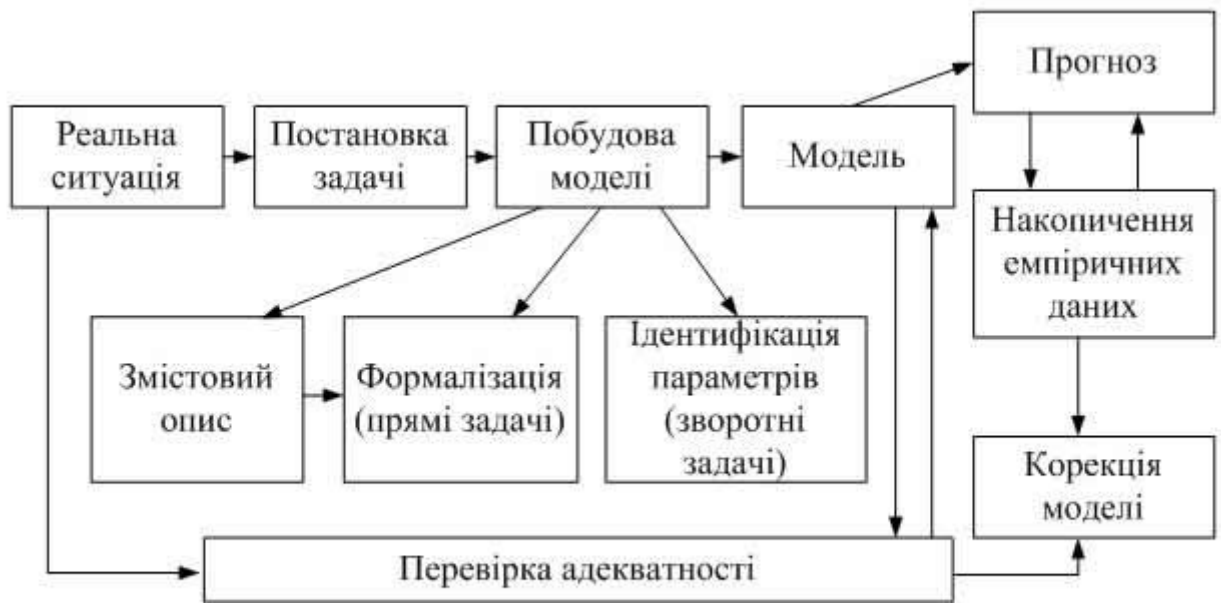


Рисунок 12 – Алгоритм побудови математичної моделі

1 етап – це формулювання законів, що пов'язують між собою об'єкти моделі. На цьому етапі визначаються об'єкти моделі і накопичуються факти, що стосуються досліджуваних явищ і дозволяють виявити їх взаємозв'язки. Цей етап закінчується записом в математичних термінах сформульованих якісних уявлень про зв'язки між об'єктами моделі з визначенням граничних умов. Визначення об'єктів моделі і їх взаємозв'язків є вихідними положеннями гіпотетичної моделі, тому можна сказати, що на етапі змістовного опису формується аксіоматика моделі і синтезується її структура; остання може бути подана як описово-аналітично, у вигляді опису зв'язків, так і графічно.

2 етап – це етап формалізації, суть якого – виявлення математичних співвідношень, що характеризують оригінал з точки зору мети моделювання, аксіоматики моделі. Ці співвідношення розробляються на основі матеріальних та енергетичних балансів, фізики процесів. На цьому етапі визначається форма подання математичної моделі і проводиться дослідження математичних задач, які впливають з математичних моделей. Серед них основним є розв'язання прямої задачі, тобто отримання в результаті аналізу моделі вихідних даних (у вигляді теоретичних наслідків) для подальшого їх зіставлення з результатами спостережень досліджуваних явищ. На цьому етапі важливого значення набувають математичний апарат, необхідний для аналізу математичної моделі, і обчислювальна техніка як засіб отримання

кількісної вихідної інформації в результаті розв'язання складних математичних задач. Часто математичні задачі, що виникають на базі різних математичних моделей, бувають однаковими, що дає підставу розглядати такі типові математичні задачі як самостійний об'єкт, абстрагуючись від конкретних явищ, що вивчаються.

3 етап – це етап виявлення того чи задовольняє прийнята (гіпотетична) модель критерію практики, чи узгоджуються результати спостережень з теоретичними наслідками моделі в межах точності спостережень тощо. Якщо модель була повністю визначена, тобто всі її параметри були задані, то виявлення відхилень теоретичних наслідків від результатів спостережень дає розв'язок прямої задачі з наступною оцінкою відхилень. Якщо відхилення виходять за межі точності спостережень, то модель не може бути прийнята і потребує корегування. Досить часто при побудові моделі деякі її характеристики лишаються невизначеними. Якщо математична модель є такою, що при жодному наборі характеристик ці умови неможливо задовольнити, то модель є непридатною для дослідження явищ, що розглядаються. Застосування критерію практики до оцінювання математичних моделей дозволяє робити висновок про правильність положень, що лежать в основі гіпотетичної моделі, яка підлягає вивченню. Цей метод є єдино можливим для вивчення безпосередньо недоступних нам явищ макро- і мікросвіту.

4 етап – наступний аналіз моделі в процесі накопичення даних про досліджувані явища і модернізація моделі. В ході розвитку науки та техніки дані про об'єктивні явища уточнюються і доповнюються, і надходить момент, коли висновки, що отримуються на основі прийнятої моделі, не відповідають нашим знанням про явище. Таким чином, виникає потреба в побудові нової, більш досконалої моделі (рис. 13).

Метод математичного моделювання, який зводить дослідження явищ зовнішнього світу до математичних задач, посідає провідне місце серед інших методів досліджень, особливо завдяки наявності обчислювальної техніки. Він дозволяє проектувати нові технічні засоби, що працюють в оптимальних режимах, для розв'язання складних задач науки і техніки та передбачати нові явища. Математичні моделі зарекомендували себе важливим засобом управління. Вони застосовуються у різних галузях знань, стали необхідним апаратом економічного планування і важливим елементом автоматизованих систем управління [37].

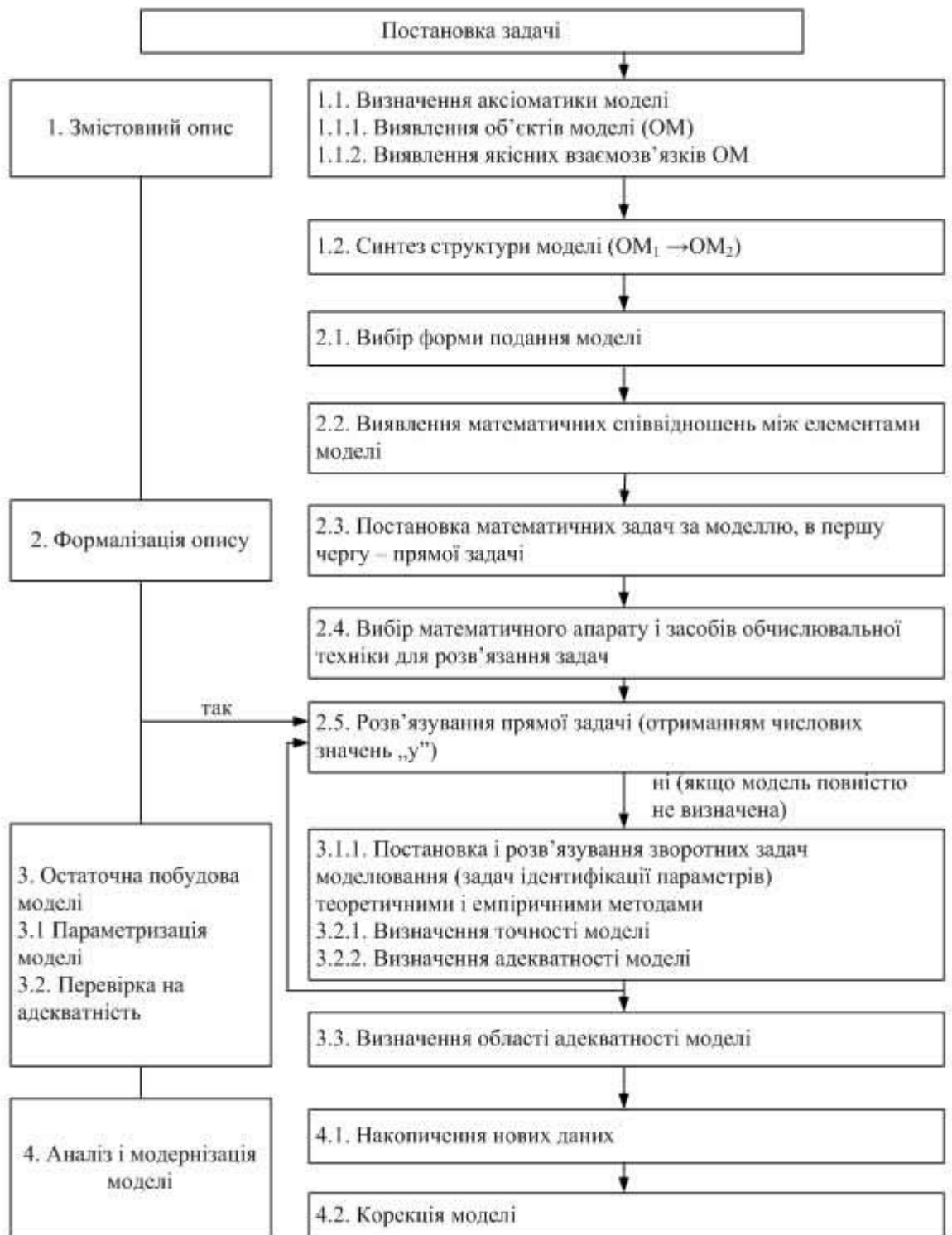


Рисунок 13 – Етапи побудови математичної моделі