Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

В.О. Рибінцев
І.О. Клопов
Т.С. Вакуленко
І.А. Науменко

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчально-методичний посібник

для студентів ЗДІА
спеціальностей
051 «Економіка», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» 071 «Облік і оподаткування» 072 «Фінанси, банківська справа та страхування»
денної і заочної форм навчання

Запоріжжя
2017

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

Рекомендовано до видання
на засіданні Науково-методичної ради ЗДІА,
протокол № _____ від ____________

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчально-методичний посібник

для студентів ЗДІА
спеціальностей 051 «Економіка», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» 071 «Облік і оподаткування» 072 «Фінанси, банківська справа та страхування»
денної і заочної форм навчання

Рекомендовано до видання
на засіданні кафедри ЕтаІТ
протокол № ___ від ________ р.

Запоріжжя
2017

Економіко-математичне моделювання. Навчально-методичний посібник для студентів ЗДІА спеціальностей 051 «Економіка», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» 071 «Облік і оподаткування» 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» / Укл. В.О. Рибінцев, І.О. Клопов, Т.С. Вакуленко, І.А. Науменко Запоріжжя. Видавництво ЗДІА, 2017. 121 с.

Укладачі:
В.О. Рибінцев – доктор економічних наук, професор
І.О. Клопов – кандидат економічних наук, доцент
Т.С. Вакуленко – старший викладач
І.А. Науменко – асистент

Відповідальний за випуск: *зав. кафедри ЕтаІТ,*
д.е.н., професор В.О. Рибінцев

Рецензенти:
Г.Ю. Кучерова, доктор економічних наук, доцент, професор кафедри обліку та оподаткування Класичного приватного університету.
Л.К. Феофанов, кандидат економічних наук, доцент кафедри обліку, аналізу, оподаткування та аудиту ЗДІА.

ЗМІСТ

ВСТУП

Важливим завданням сучасності є управління економічними системами (підприємствами, фірмами, банками, організаціями тощо), оптимізація їх структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. *Економіко-математичне моделювання* – один з головних інструментів вирішення зазначених задач – полягає в розробленні методів розв‘язування оптимізаційних задач та дослідження отриманого розв‘язку.

Задачі економіко-математичного моделювання знаходять широке застосування у різних галузях економіки. Більшість економічних (народногосподарських) задач може бути розв‘язана економіко-математичними методами. Опанування цими методами дозволить майбутнім економістам приймати науково-обґрунтовані ефективні рішення в своїй професіональній діяльності.

Мета дисципліни– формування системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей;

– надання знань про методи оцінки параметрів залежностей, які характеризують кількісні взаємозв’язки між економічними величинами, а також використання економетричних моделей в економічних дослідженнях, у практиці управління економічними процесами на різних ієрархічних рівнях національної економіки.

Завдання дисципліни - вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв’язування та аналізу з метою використання в економіці;

– вивчення основних принципів побудови економетричних моделей, набуття вмінь використання їх у практиці управління економічними процесами на різних ієрархічних рівнях національної економіки.

Предмет дисципліни – методологія та інструментарій побудови і розв’язування детермінованих оптимізаційних задач;

– методологія економетричного моделювання, тобто економіко-математичні методи та засоби для дослідження залежностей та взаємозв’язку економічних явищ і процесів, що відбуваються на макро- та мікрорівнях сучасної економіки.

ТЕМА №1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В даному розділі розглянуто приклад змістовної постановки економічної задачі, побудови математичної моделі та розв'язку задачі графічним методом, з використанням інструмента "Поиск решения", симплексним методом та зроблено висновки в термінах постановки задачі.

Розберемо розв'язок однієї *задачі оптимального виробничого планування (абозадачі про використання ресурсів).*

Для виготовлення взуття двох моделей на фабриці використовується два сорти шкіри. Тижневі ресурси робочої сили і матеріалу, витрати праці і матеріалу для виготовлення кожної пари взуття, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний запас ресурсів
	№1	№2	
Рабочий час (люд.-год)	1	2	900
Шкіра I сорту (шмат.)	3	1	900
Шкіра II сорту (шмат.)	-	3	1200
Прибуток (грн.)	50	70	

Скласти план випуску взуття в асортименті, що максимізує щотижневий прибуток.

*Потрібно п*обудувати математичну модель економічної задачі.

Розв'язати задачу за допомогою побудованої моделі

- графічним методом,
- використанням інструмента "Поиск решения",
- симплексним методом.

Зробити висновки в термінах постановки задачі.

1.1. Побудова математичної моделі

Спочатку складемо <u>*математичну модель*</u> поставленої задачі. Вона містить у собі змінні задачі, цільову функцію і систему обмежень.

Змінні задачі. Оскільки в задачі потрібно скласти тижневий план випуску взуття, то змінними задачі є:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2.

Цільова функція задачі. Оскільки прибуток від випуску 1 пари взуття моделі №1 складає 50 грн., а моделі №2 – 70 грн., то загальний тижневий прибуток від випуску x_1 пар взуття моделі №1 і x_2 пар взуття моделі №2 складатиме $50x_1 + 70x_2$ (грн.). Таким чином, цільова функція задачі, яку необхідно максимізувати, має вигляд

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to \max \ .$$

Система обмежень задачі. З урахуванням наведених у таблиці даних можна скласти такі обмеження у вигляді нерівностей.

Робочий час, затрачуваний на випуск запланованого взуття, складає $x_1 + 2x_2$ (люд.-год.). З урахуванням загального фонду робочого часу в 900 люд.-год., який не можна перевищити, одержимо нерівність:

$$x_1 + 2x_2 \le 900 \ .$$

Витрата шкіри I сорту (у шматках) на виготовлення запланованої партії взуття представиться за аналогією з попередньою нерівністю:

$$3x_1 + x_2 \le 900 \ .$$

Витрата шкіри II сорту (у шматках) – відповідно:

$$3x_2 \le 1200 \ .$$

Якщо обидві частини останньої нерівності поділити на 3, то одержимо:

$$x_2 \le 400 \ .$$

План випуску взуття за смислом не може набувати від’ємних значень, тому останнє *обмеження невід’ємності змінних*:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \ .$$

Таким чином, <u>*математична модель*</u> задачі має вигляд:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 900 \\ 3x_1 + x_2 \leq 900 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Математична модель виражається через дві змінні, тому для розв’язання задачі можна застосовувати графічний метод.

1.2.Розв’язання задач лінійного програмування графічним методом

На координатній площині x_1Ox_2 зобразимо множину точок Ω, координати яких задовольняють системі обмежень. Ця множина називається *областю припустимих розв’язків* (*областю припустимих значень*).

Спочатку зауважимо, що система обмежень містить нерівності $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$, які означають, що шукана область Ω лежить у першій чверті. Далі побудуємо прямі

$$x_1 + 2x_2 = 900, \tag{1}$$

$$3x_1 + x_2 = 900, \tag{2}$$

$$x_2 = 400. \tag{3}$$

Для цього знайдемо по дві пари точок, через які проходить кожна з цих прямих:

1. $x_1 + 2x_2 = 900$: (0, 450), (900, 0);

2. $3x_1 + x_2 = 900$: (0, 900), (300, 0);

3. $x_2 = 400$: (0, 400)

Ці прямі з відповідними мітками зображені на рис. 1.1.

Множина точок, які задовольняють нерівності $x_1 + 2x_2 \le 900$, являє собою півплощину, що обмежена прямою $x_1 + 2x_2 = 900$. Оскільки точка O(0,0) задовольняє нерівності ($0 + 2 \cdot 0 \le 900$ - вірно), то шукана півплощина містить цю точку; це зображено на рис. 1.1 за допомогою стрілок. Аналогічно, точка O(0,0) задовольняє кожній із нерівностей $3x_1 + x_2 \le 900$ і $x_2 \le 400$, тому ця точка міститься у відповідних півплощинах (див. рис. 1.1). З урахуванням розташування в першій чверті область припустимих розв'язків Ω являє собою заштрихований многокутник OABCD.

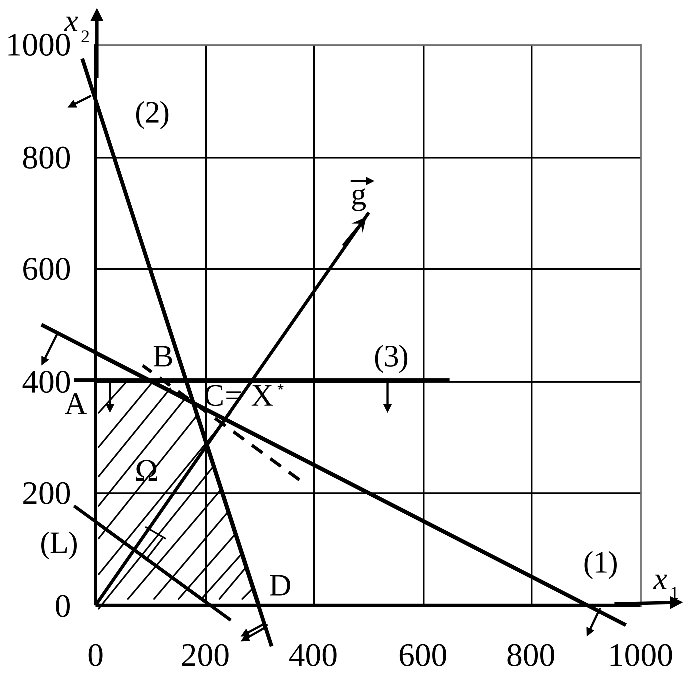


Рис. 1.1. Розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом

Тепер зобразимо вектор $\vec{g}$ найшвидшого росту цільової функції $F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2$, яким є вектор, співспрямований її *градієнту*. Координатами вектора градієнта (для лінійної відносно змінних функції) є коефіцієнти при змінних цільової функції, тобто $\overrightarrow{grad} = (50, 70)$. Як вектор $\vec{g}$ оберемо для зручності побудови вектор

$$\vec{g} = 10 \cdot \overrightarrow{grad} = (500, 700) \ .$$

Для зображення цього вектора з'єднуємо спрямованим відрізком точки з координатами (0, 0) і (500, 700). Довільна *лінія рівня цільової функції* (L) проходить перпендикулярно до вектора $\vec{g}$.

Для пошуку точки області припустимих розв’язків, у якій цільова функція досягає свого максимуму (мінімуму), необхідно лінію рівня пересувати в напрямку вектора градієнта (відповідно у зворотному напрямку). Крайня точка X^* області Ω при такому русі буде відповідати *оптимальному розв’язку*. У даній задачі такою точкою X^* буде точка С. Знайдемо її координати, зауваживши, що вона є точкою перетинання прямих (1) і (2). Тому розв’яжемо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 900 \\ 3x_1 + x_2 = 900 \end{cases}.$$

Із першого рівняння виразимо x_1:

$$x_1 = 900 - 2x_2. \tag{4}$$

Потім підставимо знайдений вираз у друге рівняння:

$$3 \cdot (900 - 2x_2) + x_2 = 900 ,$$

звідки одержимо

$$\begin{aligned} &2700 - 6x_2 + x_2 = 900 \\ &5x_2 = 1800 \\ &x_2 = 360. \end{aligned}$$

Знаючи x_2, за допомогою (4) знаходимо x_1:

$$x_1 = 900 - 2 \cdot 360 = 180 .$$

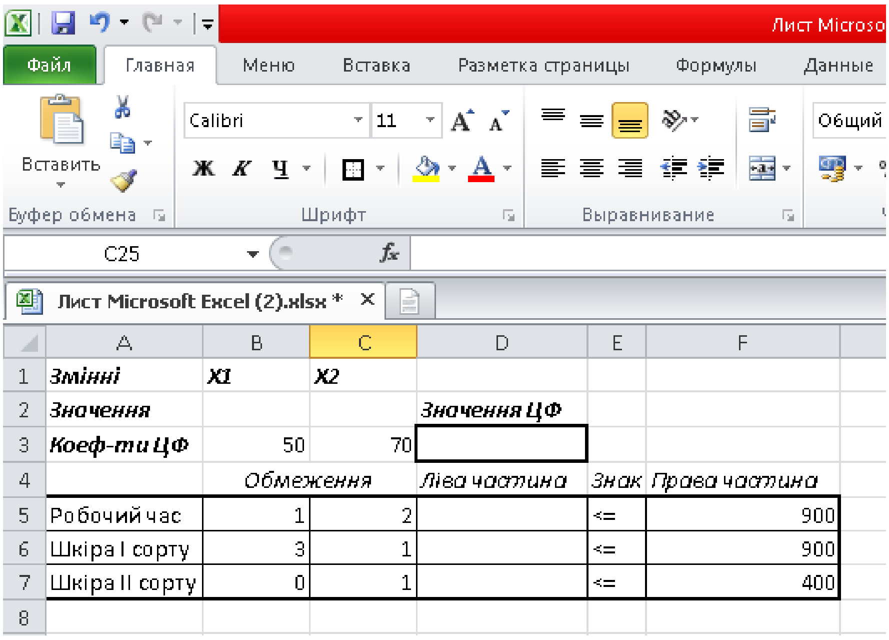
У результаті дійдемо висновку, що $x_1^* = 180, \quad x_2^* = 360$, а точка, яка відповідає оптимальному розв’язку, має координати $X^* = C(180, 360)$. Максимальне значення цільової функції:

$$F_{\max}(X) = F(X^*) = 50x_1^* + 70x_2^* = 50 \cdot 180 + 70 \cdot 360 = 34200 \text{ (грн.)}.$$

<u>Відповідь.</u> Для одержання максимального тижневого прибутку, що складає 34200 грн., фабрика повинна випускати 180 пар взуття моделі №1 і 360 пар взуття моделі №2 за тиждень.

1.3. Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою інструмента "Поиск решения"

Відповідно до математичної моделі поставленої задачі підготуємо аркуш EXCEL для застосування інструмента «Поиск решения» (див. рис. 1.2):



	A	B	C	D	E	F
1	***Змінні***	***X1***	***X2***			
2	***Значення***			***Значення ЦФ***		
3	***Коеф-ти ЦФ***	50	70			
4		*Обмеження*		*Ліва частина*	*Знак*	*Права частина*
5	Робочий час	1	2		<=	900
6	Шкіра І сорту	3	1		<=	900
7	Шкіра ІІ сорту	0	1		<=	400
8						

Рис. 1.2. Представлення вихідних даних на аркуші EXCEL

Внесемо формули, помітивши, що значення цільової функції (комірка D3) дорівнює сумі добутків невідомих значень змінних (комірки B2:C2) на коефіцієнти цільової функції (комірки B3:C3), а значення лівих частин системи обмежень (комірки D5, D6 і D7) дорівнюють сумі добутків невідомих значень змінних (комірки B2:C2) на коефіцієнти лівих частин системи обмежень (комірки B5:C5, B6:C6, B7:C7 відповідно). Після копіювання формул у комірки D5, D6 і D7 вони будуть модифіковані так, як показано на рис. 1.3.

	A	B	C	D	E	F
1	*Змінні*	*X1*	*X2*			
2	*Значення*			*Значення ЦФ*		
3	*Коеф-ти ЦФ*	50	70	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B3:C3)		
4		*Обмеження*		*Ліва частина*	*Знак*	*Права частина*
5	Робочий час	1	2	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B5:C5)	<=	900
6	Шкіра I сорту	3	1	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B6:C6)	<=	900
7	Шкіра II сорту	0	1	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B7:C7)	<=	400

Рис. 1.3. Програмування комірок, що відповідають значенню цільової функції і значенням лівих частин системи обмежень

Вибираємо за допомогою меню **“Сервис”** процедуру **“Поиск решения”** . Зпаовнюємо діалогове вікно «Поиск решения» посиланнями, як представлено на рисунку 1.4.

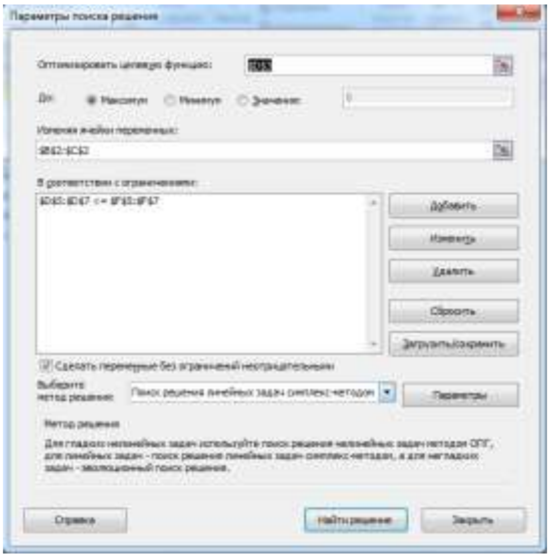


Рис. 1.4. Екранна форма «Поиск решения»

Натискаємо **«Найти решение»,** у результаті чого (рис. 1.5) на аркуші EXEL у комірках B2:C2 висвічуються шукані значення оптимальних змінних (оптимальний план). В екранній формі, що з'явилися, **«Результаты поиска решения»**, пропонується зробити один з видів звіту, з яких вибираємо звіт по стійкості і натискаємо **«ОК».** Аркуш **«Отчет по устойчивости»** представлений на рис. 1.6.

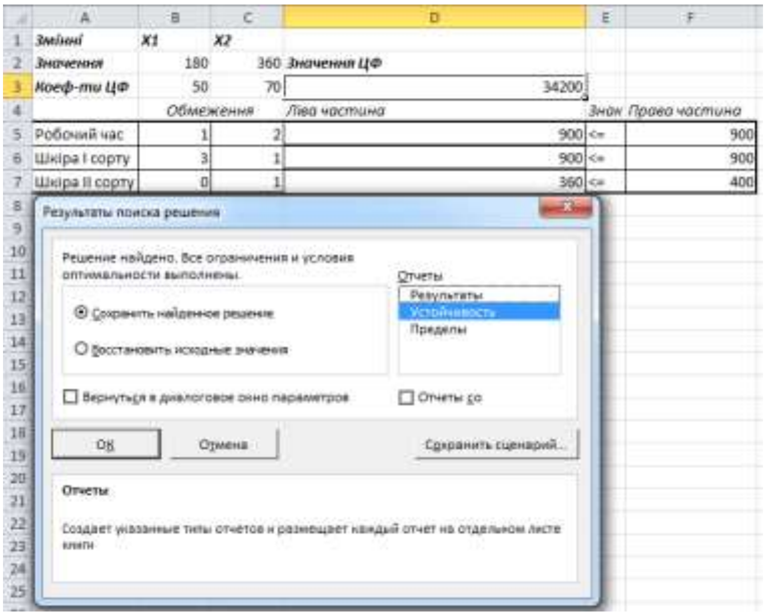


Рис. 1.5. Результати роботи процедури «Поиск решения»

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$2	Значення X1	180	0	50	160	15
\$C\$2	Значення X2	360	0	70	30	53,33333333

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$5	Робочий час Ліва частина	900	32	900	66,66666667	600
\$D\$6	Шкіра I сорту Ліва частина	900	6	900	1800	200
\$D\$7	Шкіра II сорту Ліва частина	360	0	400	1E+30	40

Рис. 1.6. Екранна форма аркуша «Отчет по устойчивости»

2.3. Розв'язання задач лінійного програмування симплексним методом

<u>Крок 1.</u> Випишемо математичну модель вихідної задачі:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 900 \\ 3x_1 + x_2 \le 900 \\ x_2 \le 400 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Крок 2. Зведемо математичну модель вихідної задачі до *канонічного виду*, уводячи додаткові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5. Помітимо, що кількість додаткових змінних відповідає кількості нерівностей у системі обмежень. Оскільки всі нерівності системи обмежень виражаються знаком «≤», то додаткові змінні в систему обмежень увійдуть з коефіцієнтом «+1». У цільову ж функцію вони ввійдуть з коефіцієнтом «0». *Канонічний вид запису даної задачі:*

$$F(x_1, x_2) = 50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 900 \\ x_2 + x_5 = 400 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Крок 3. Побудуємо *первинний базис* системи обмежень (*початковий опорний план задачі*).

По-перше, усі вільні елементи системи (5) – невід'ємні. По-друге, основна матриця системи (5)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

містить одиничну підматрицю, якій відповідають змінні x_3, x_4, x_5. Тому ці змінні є *базисними,* а їхня кількість дорівнює кількості рівнянь системи (5), значить система (5) має первинний базис, який утворено тривимірними одиничними векторами (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), що відповідають базисним змінним x_3, x_4, x_5. У результаті одержано: кількість основних змінних $n = 2$, базисних - $m = 3$.

Крок 4. Складаємо ***першу симплексну таблицю***.

Заносимо вихідні дані в таблицю EXEL (див. першу симплексну таблицю на рис. 1.13 і 1.14):

1) у комірки D3:H3 вносимо найменування змінних;

2) у комірки D2:H2 – коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних;

3) у комірки D4:H6 – основну матрицю системи (5);

4) у комірки A4:A6 – найменування базисних змінних;

5) у комірки B4:B6 – коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

6) у комірки C4:C6 – стовпець вільних елементів.

Знайдемо опорний план, що відповідає побудованій симплексній таблиці. Для цього ставимо у відповідність змінній базису те значення, що знаходиться у стовпці «b_i» того ж рядка. Якщо змінна не входить у базис, то її значення дорівнює нулю. У даному випадку

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 900,\ x_4 = 900,\ x_5 = 400\ ,$$

Заповнюємо комірки C7:H7:

1) комірка C7 повинна містити *значення цільової функції* на зазначеному опорному плані:

$$F(X) = \Delta_0 = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i\, b_i\ ,$$

бачимо результат обчислення за цією формулою, тобто $F(X) = \Delta_0 = 0$ грн.;

2) комірки D7:H7 повинні містити значення *оцінок оптимальності* для зазначеного опорного плану:

$$\Delta_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i a_{ij} - c_j\ , \quad j = 1,\ldots,n+m;$$

тому в комірку D7 вносимо формулу:

СУММПРОИЗВ($B$4:$B$6;D4:D6)-D2,

у який комірки B4:B6 мають абсолютні значення, з тієї причини, що у формулі для Δ_j коефіцієнти цільової функції c_i $(i = \overline{n+1, n+m})$, що містяться в сумі добутків не залежать від j. Потім копіюємо формулу з модифікаціями в комірки E7:H7; результати обчислень у цих комірках показані на рис. 2.7.

Перевірка оптимальності опорного плану. Оцінки оптимальності Δ_j містять від'ємні значення, тому зазначений опорний план не є оптимальним. Вибираємо серед оцінок оптимальності найбільше за модулем від'ємне значення. У даному випадку це «-70». Стовпець, що відповідає цьому значенню оптимальності, є *розв'язувальним стовпцем*; виділимо його.

У комірки I4:I6 вносимо значення *оцінних обмежень.* Для $i^{\underline{\text{го}}}$ рядка оцінне обмеження дорівнює $\frac{b_i}{a_{ik}}$, де b_i - вільний елемент цього рядка, а a_{ik} - елемент матриці, що знаходиться в розв'язувальному стовпці $i^{\underline{\text{го}}}$ рядка (див. рис. 1.14). Якщо a_{ik}=0 або $\frac{b_i}{a_{ik}} \le 0$, то оцінне обмеження такого рядка не розглядаємо. Серед додатних оцінних обмежень вибираємо найменше. У даному випадку – це «400».

Рядок, що відповідає цьому значенню, єрозв'язувальним рядком; виділимо його. Елемент, що стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця, називається *розв'язувальним елементом*.

Крок 5.*Побудова наступної симплексної таблиці*. У загальному випадку, якщо розв'язувальний стовпець має номер k, а розв'язувальний рядок -r, то подальший алгоритм полягає в наступному.

По-перше, змінну x_k вводимо до базису замість змінної x_r.

По-друге, робимо перетворення, за яких нова матриця буде мати $k^{\underline{\text{й}}}$ стовпець, що містить нулі на всіх місцях, окрім $r^{\underline{\text{го}}}$. Для цього елементи нової симплексної таблиці a'_{ij}, b'_i виражаємо через елементи a_{ij}, b_i попередньої симплексної таблиці за формулами:

елементи розв'язувального рядка ділимо на розв'язувальний елемент і записуємо у відповідному за номером рядку нової таблиці:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, \; b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}}, \text{ при } i = r; \qquad (*)$$

усі інші елементи нової таблиці розраховуємо за формулами:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{\boxed{a_{ik}} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}, \; b'_i = b_i - \frac{\boxed{a_{ik}} \cdot b_r}{a_{rk}} \text{ при } i \ne r. \qquad (**)$$

Тут a_{rk}-*розв'язувальний елемент*, він міститься в обох формулах (*) і (**) незалежно від i чи j , тому йому потрібно привласнити абсолютне значення, тобто після його введення натиснути функціональну клавішу F4. Формула (**) містить a_{ik} для усіх j , тому цьому елементу також привласнюється абсолютне значення.

Відповідно до зазначеного алгоритму будуємо ***другу симплексну таблицю***.

Заповнюємо таблицю EXEL (див. другу симплексну таблицю на рис. 1.13 і 1.14):

1) перші два рядки симплексної таблиці не змінюються;

2) змінну x_2 вводимо до базису замість змінної x_5;

3) у комірках B11:B13 поміщаємо коефіцієнти при базисних змінних;

4) для заповнення комірок C11:H13 формулами відповідно до співвідношень (*) і (**) вносимо спочатку формули у комірки C11:C13 і копіюємо їх з модифікаціями.

Зауважимо, що в комірки C14:H14 можна внести як формули, аналогічні коміркам C11:H11 чи C12:H12 , так і формули, аналогічні C7:H7. Результат буде той самий.

Опорний план, що відповідає другій симплекс-таблиці:

$$x_1 = 0, x_2 = 400, x_3 = 100, x_4 = 500, x_5 = 0 \ ,$$

а значення цільової функції на ньому $F(X) = 28000$ грн.

Аналогічно першій симплексній таблиці в другій симплексній таблиці вибираємо розв'язувальний стовпець, що відповідає найбільшій за модулем від'ємній оцінці Δ_j оптимальності. Потім обчислюємо оцінні обмеження, за якими вибираємо розв'язувальний рядок.

Ітераційний процес симплексного методу продовжуємо доти, поки оцінки оптимальності Δ_j ($j = 1,\ldots,n+m$) містять від'ємні елементи. У даному випадку вже четверта симплексна таблиця не містить від'ємних оцінок оптимальності, тому опорний план, що відповідає їй, є оптимальним:

$$x_1^* = 180,\ x_2^* = 360,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 40\ ,$$

а значення цільової функції на ньому $F(X^*) = 34200$ грн. – максимальним.

<u>Відповідь.</u> Для одержання максимального тижневого прибутку, що складає 34200 грн., фабрика повинна випускати 180 пар взуття моделі №1 і 360 пар взуття моделі №2 за тиждень.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				**Перша симплексна таблиця**					
2				50	70	0	0	0	
3	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
4	x3	0	900	1	2	1	0	0	450
5	x4	0	900	3	1	0	1	0	900
6	x5	0	400	0	1	0	0	1	400
7		Δj	0	-50	-70	0	0	0	
8				**Друга симплексна таблиця**					
9				50	70	0	0	0	
10	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
11	x3	0	100	1	0	1	0	-2	100
12	x4	0	500	3	0	0	1	-1	166,6667
13	x2	70	400	0	1	0	0	1	
14		Δj	28000	-50	0	0	0	70	
15				**Третя симплексна таблиця**					
16				50	70	0	0	0	
17	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
18	x1	50	100	1	0	1	0	-2	
19	x4	0	200	0	0	-3	1	5	40
20	x2	70	400	0	1	0	0	1	400
21		Δj	33000	0	0	50	0	-30	
22				**Четверта симплексна таблиця**					
23				50	70	0	0	0	
24	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	
25	x1	50	180	1	0	-0,2	0,4	0	
26	x5	0	40	0	0	-0,6	0,2	1	
27	x2	70	360	0	1	0,6	-0,2	0	
28		Δj	34200	0	0	32	6	0	
29				y4	y5	y1	y2	y3	

Рис. 1.7. Результати розрахунків симплексним методом

Лабораторна робота №1 Методи розв’язування задач лінійного програмування

Завдання:Побудувати математичну модель економічної задачі. Розв’язати задачу за допомогою побудованої моделі

1.1з використанням інструмента “Поиск решения”,
1.2графічним методом,
1.3симплексним методом.

Зробити висновки в термінах постановки задачі.

Індивідуальні завдання – додаток А.

ТЕМА №2. ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В даному розділі розглянуто приклад побудови математичної моделі двоїстої задачі. Розв’язок двоїстої задачі симплексним методом, проведене порівняти отриманого результату із тим, що отримано, виходячи з останньої симплексної таблиці прямої задачі, а також, виходячи зі звіту по стійкості процедури «Поиск решения» прямої задачі. Зроблено економічний аналіз результатів.

2.1. Математична модель двоїстої задачі

Випишемо математичну модель прямої (вихідної) задачі:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 900 \\ 3x_1 + x_2 \le 900 \\ x_2 \le 400 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Складемо математичну модель двоїстої задачі.

1) Дана пряма задача на максимум, у ній усі нерівності системи обмежень мають знак «≤», тому змінювати форму запису математичної моделі прямої задачі немає необхідності.

2) Випишемо розширену матрицю системи і рядок коефіцієнтів цільової функції

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 900 \\ 3 & 1 & 900 \\ 0 & 1 & 400 \\ \hline 50 & 70 & F \end{array}\right).$$

3) Складаємо транспоновану матрицю

$$A^t=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 70 \\ \hline 900 & 900 & 400 & L \end{array}\right).$$

4) Складаємо математичну модель двоїстої задачі

$$L(y_1, y_2, y_3) = 900y_1 + 900y_2 + 400y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 50 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 70 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Економічний зміст змінних двоїстої задачі визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі. Оскільки першій двоїстій змінній відповідає перше обмеження по витратах робочого часу, другій – по витратах шкіри I сорту, третій – по витратах шкіри II сорту, то y_1 грн. – тіньова ціна 1 люд.-год. робочого часу; y_2 грн. – тіньова ціна 1 шматка шкіри I сорту; y_3 грн. – тіньова ціна 1 шматка шкіри I сорту.

2.2. Метод штучного базису розв’язання задач лінійного програмування

Метод штучного базису розглянемо на прикладі розв’язання двоїстої задачі до задачі про використання ресурсів.

Крок 1. Зведемо математичну модель двоїстої задачі до канонічного вигляду, уводячи додаткові невід'ємні змінні y_4, y_5. Оскільки всі нерівності системи обмежень виражаються знаком «≥», то додаткові змінні ввійдуть у систему обмежень з коефіцієнтом «-1». У цільову функцію додаткові змінні завжди входять з коефіцієнтом «0». Оскільки двоїста задача на мінімум, то складемо допоміжну функцію $Z = -L$. *Канонічний вигляд запису двоїстої задачі:*

$$Z = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \quad - y_4 \qquad = 50 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \qquad - y_5 = 70 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Крок 3. Побудова первинного базису.

Основна матриця системи (6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

містить одиничний двовимірний вектор (0; 1), що відповідає змінній y_3, яка увійде у первинний базис. Ця змінна міститься у другому рівнянні системи (6) з коефіцієнтом «1». Щоб отримати одиничну підматрицю у цій матриці, введемо невід'ємну *штучну базисну змінну* y_6, яку додамо до лівої частини першого рівняння. Штучну змінну y_6, включимо в цільову функцію з коефіцієнтом «-10000». Зазначимо, що абсолютна величина коефіцієнтів при штучних змінних повинна бути на порядок вище за всі абсолютні величини коефіцієнтів цільової функції. У результаті складемо математичну модель *розширеної задачі*:

$$Z_1 = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 - 10000 \cdot y_6 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \quad - y_4 \quad + y_6 = 50 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \quad - y_5 \qquad = 70 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \geq 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Отже, маємо: по-перше, усі вільні елементи системи (7) - невід'ємні; по-друге, основна матриця системи (7)

$$\left(\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

містить одиничну підматрицю, що утворена двовимірними векторами (0; 1) і (1; 0), котрим відповідають базисні змінні y_3, y_6, причому кількість базисних змінних дорівнює кількості рівнянь системи (7), тому система (7) має первинний базис .

<u>Крок 5.</u> Розв'язуємо отриману задачу симплексним методом за алгоритмом, що описано в п. 1.3. Відповідні симплексні таблиці задачі і зразки формул для EXEL наведені на рис. 2.1.

Слід зазначити, що *ітераційний процес симплексного методу продовжується доти, поки оцінки оптимальності Δ_j містять від'ємні елементи.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				**Перша симплексна таблиця двоїстої задачі**						
2				-900	-900	-400	0	0	-10000	
3	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
4	y6	-10000	50	1	3	0	-1	0	1	16,66667
5	y3	-400	70	2	1	1	0	-1	0	70
6		Δj	-528000	-9900	-29500	0	10000	400	0	
7				**Друга симплексна таблиця двоїстої задачі**						
8				-900	-900	-400	0	0	-10000	
9	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
10	y2	-900	16,66667	0,333333	1	0	-0,33333	0	0,333333	50
11	y3	-400	53,33333	1,666667	0	1	0,333333	-1	-0,33333	32
12		Δj	-36333,3	-66,6667	0	0	166,6667	400	9833,333	
13				**Третя симплексна таблиця двоїстої задачі**						
14				-900	-900	-400	0	0	-10000	
15	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
16	y2	-900	6	0	1	-0,2	-0,4	0,2	0,4	
17	y1	-900	32	1	0	0,6	0,2	-0,6	-0,2	
18		Δj	-34200	0	0	40	180	360	9820	
19				x3	x4	x5	x1	x2		

Рис. 2.1. Результати обчислень методом штучного базису

Якщо серед оцінок оптимальності немає від'ємних елементів, однак не всі штучні змінні виключені з базису, то така задача не має розв'язку.

Із третьої симплексної таблиці двоїстої задачі випливає, що всі оцінки оптимальності Δ_j невід'ємні і всі штучні змінні виведені з базису. Це означає, що опорний план третьої ітерації є оптимальним:

$$y_1^* = 32;\ y_2^* = 6;\ y_3^* = 0;\ y_4^* = 0;\ y_5^* = 0;\ y_6^* = 0,$$

а значення функції $Z_1(Y^*) = -34200$ - максимальним. Оскільки $L(Y) = -Z(Y)$, то

$$L_{\min}(Y) = L(Y^*) = -Z(Y^*) = 34200 \text{ грн.}$$

2.3. Економіко-математичний аналіз результатів

Спочатку випишемо результати розв'язання прямої і двоїстої задач симплексним методом.

	Пряма задача	*Двоїста задача*
Цільова функція	$F_{\max}(X) = 34200$	$L_{\min}(Y) = 34200$
Основні змінні	$x_1^* = 180,\ x_2^* = 360$	$y_1^* = 32;\ y_2^* = 6;\ y_3^* = 0$
Додаткові змінні	$x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 40$	$y_4^* = 0;\ y_5^* = 0$

Порівняння результатів, отриманих різними способами.

Звіт по стійкості (рис. 1.6), крім значень оптимальних змінних прямої задачі, містить значення оптимальних основних змінних двоїстої задачі, занесених у стовпчик «Теневые цены»; оптимальні значення додаткових змінних двоїстої задачі можна легко обчислити, якщо підставити оптимальні значення основних змінних в систему рівнянь (6). Результати збігаються з описаними вище.

З останнього рядка симплексної таблиці прямої задачі можна визначити значення двоїстих змінних, а з останньої симплексної таблиці двоїстої задачі -

значення змінних прямої задачі так, як це показано на рис. 1.7 і рис. 2.1 відповідно. Як бачимо, результати відповідають знайденим вище.

Цільові функції прямої і двоїстої задач. Із теорем про зв'язок між розв’язками прямої і двоїстої задач випливає, що мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі $L_{\min}(Y)$ повинно збігатися з максимальним значенням цільової функції прямої задачі $F_{\max}(X)$. У даному випадку

$$L_{\min}(Y) = F_{\max}(X) = 34200 \text{ грн.} \tag{8}$$

Що стосується прямої задачі, то цільова функція в ній характеризувала тижневий прибуток від реалізації продукції, яку виготовлено на фабриці; і цей прибуток повинен бути максимальним. Для з‘ясування економічного змісту цільової функції двоїстої задачі про використання ресурсів розглянемо ситуацію, коли керівництво фабрики стоїть перед альтернативним вибором: чи здійснювати процес виробництва взуття, чи реалізувати на стороні власні виробничі ресурси (продати, здати в оренду тощо) за ринковими цінами. У разі вибору першої альтернативи, оптимальний розв‘язок прямої задачі саме й дає нам оптимальний план виробництва взуття, за яким прибуток (ефект від виробничої діяльності підприємства) фабрики буде найбільшим. Якщо ж керівництво фабрики вирішує задачу реалізації власних ресурсів на стороні, то, з одного боку, воно прагнутиме реалізувати їх якомога дорожче, проте, з іншого боку, ринкова ціна не повинна штучно завищуватися, інакше ресурси за такими цінами не знайдуть покупця. А отже, керівництво фабрики має призначувати об‘єктивні (незавищенні) ціни («тіньові ціни») на виробничі ресурси, виходячи з того, що корисність обох альтернатив повинна бути однаковою, тобто дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими цінами, який мінімізується, дорівнюватиме ефекту від здійснення виробничої діяльності, тобто величині прибутку фабрики, який повинен бути максимальним. Цей принцип саме й відбиває співвідношення (8), яке говорить про те, що максимальний прибуток фабрики збігається з її можливим мінімальним доходом у зв‘язку із відмовою від виробничої діяльності і продажем ресурсів на сторону і складає 34200 грн. за тиждень.

Основні змінні прямої задачі. Для одержання максимального прибутку, фабрика повинна випускати $x_1^* = 180$ пар взуття моделі №1 і $x_2^* = 360$ пар взуття моделі №2 за тиждень.

Додаткові змінні прямої задачі характеризують обсяг невикористаного ресурсу.

1. Третя (додаткова) змінна x_3 відповідає першому обмеженню, причому $x_3^* = 0$ люд.-год., тому ресурс робочого часу використаний цілком, що свідчить про його дефіцитність.

2. Четверта змінна x_4 відповідає другому обмеженню, причому $x_4^* = 0$ шматків, тому ресурс шкіри I сорту використаний цілком, значить і цей ресурс дефіцитний.

3. П'ята змінна x_5 відповідає третьому обмеженню, і $x_5^* = 40$ шматків, тому 40 шматків шкіри II сорти не використані, значить цей ресурс недефіцитний.

Основні змінні двоїстої задачі. Як уже відзначалося вище, економічний зміст основних змінних двоїстої задачі визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі, а саме: їх оптимальні значення кількісно характеризують граничне значення тіньової ціни (об‘єктивної ціни, рівноважної ціни і т.ін.) за одиницю обмеженого ресурсу, вище за яку його залучення (зокрема додаткове залучення) до виробничого процесу буде збитковим для фірми, що втілюється у ситуацію, коли витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, оцінені в грошовому вираженні ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$), перевищуватимуть зовнішню оцінку одиниці продукції – її ринкову ціну (або як в нашому випадку прибуток) c_j. А відтак, оптимальні основні двоїсті змінні надають керівництву фабрики (менеджерам з питань постачання) цінну додаткову інформацію для прийняття рішень в умовах ринкових відношень: додаткове залучення у виробництво дефіцитних ресурсів доцільно лише за умови, коли ринкова ціна за одиницю такого ресурсу не перевищує його тіньову ціну.

Тіньова ціна для першого обмеження (ресурс робочого часу) складає $y_1^* = 32$ грн. за одиницю, для другого обмеження (ресурс шкіри І сорту) – $y_2^* = 6$ грн. за одиницю, для третього (ресурс шкіри ІІ сорту) – $y_4^* = 0$ грн. за одиницю. Із цього випливає, що

1) $y_1^* > 0$, тому ресурс робочого часу дефіцитний, і його збільшення вигідне (рентабельне), а саме: збільшення робочого часу на 1 люд.-год. призведе до збільшення прибутку на 32 грн.;

2) $y_2^* > 0$, тому ресурс шкіри І сорту є дефіцитним, і його збільшення рентабельне, а саме: збільшення запасу шкіри І сорту на 1 шматок дасть підприємству прибуток, що складатиме 6 грн.;

3) $y_4^* = 0$, тому ресурс шкіри ІІ сорту не є дефіцитним, а збільшення його запасу не рентабельно.

Якщо деяка ***додаткова змінна двоїстої задачі*** позитивна, то випуск продукції, що відповідає цій змінній є нерентабельним, а величина цієї змінної характеризує розмір збитку від реалізації одиниці цієї продукції: $\Delta_j = y_{i+n}^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j$. Дана властивість дозволяє оцінити рентабельність нової продукції (з умови $\Delta_j \le 0$), якщо відомі планові норми витрат ресурсів на виготовлення її одиниці, а також визначитися з мінімально допустимою (прийнятною) ціною за одиницю продукції, яку планується виробляти (з умови $\Delta_j = 0$).

У даній задачі змінна y_4 відповідає обсягу випуску взуття моделі №1, а y_5 - моделі №2, причому $y_4^* = 0; y_5^* = 0$, тому випуск обох видів виробів вигідний (рентабельний) – грошова оцінка сумарних витрат ресурсів на одну пару взуття дорівнює розміру прибутку.

Взаємозамінність ресурсів. У наступну таблицю внесемо значення коефіцієнтів $\eta_{ik} = y_k^* / y_i^*$ взаємозамінності ресурсів.

i \ k	1	2	3
1	1	3/16	0
2	5 ⅓	1	0
3	∞	∞	1

Коефіцієнт η_{21} дорівнює 5⅓, це означає, що при зменшенні запасу робочого часу на 1 люд.-год. необхідно додатково збільшити запас шкіри I сорту на 5⅓ шматків, щоб значення цільової функції не змінилося. Ресурс робочого часу більш дефіцитний, ніж ресурс шкіри I сорту, тому коефіцієнт взаємозамінності більш дефіцитного ресурсу менш дефіцитним ресурсом $\eta_{12} = 5⅓$ більше 1. Коефіцієнти η_{31} і η_{32} дорівнюють ∞. Це означає, що замінити зменшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту недефіцитним ресурсом шкіри II сорту не можливо. Коефіцієнти η_{13} і η_{23} дорівнюють 0. Це означає, що при зменшенні недефіцитного ресурсу шкіри II сорту не потрібне збільшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту.

Лабораторна робота №2 Двоїста задача лінійного програмування

Завдання: Побудувати математичну модель двоїстої задачі. Розв'язати двоїсту задачу симплексним методом. Порівняти отриманий результат із тим, що отримано, виходячи з останньої симплексної таблиці прямої задачі, а також, виходячи зі звіту по стійкості процедури «Поиск решения» прямої задачі. Зробити економічний аналіз результатів.

ТЕМА №3 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

В даному розділі розглянуто приклад побудови математичної моделі транспортної задачі та розвязання її методом потенціалів і за допомогою інструмента «Поиск решения».

У трьох пунктах виробництва ***A₁, A₂, A₃*** *зосереджений однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних* ***a₁, a₂, a₃*** *тонн. Даний вантаж споживається в чотирьох пунктах* ***B1, B₂, B₃, B₄,*** *а потреби в ньому в цих пунктах складають* ***b₁, b₂, b₃, b₄,*** *тонн відповідно. Відома матриця тарифів по перевезенню 1 тони вантажу з $i^{\underline{го}}$ пункту виробництва до $j^{\underline{го}}$ пункту споживання:*

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}c_{12}c_{13}c_{14} \\ c_{21}c_{22}c_{23}c_{24} \\ c_{31}c_{32}c_{33}c_{34} \end{bmatrix}.$$

Скласти план перевезень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \\ x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \\ x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \end{bmatrix},$$

при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальними.

Розв'язати поставлену транспортну задачу

3.1 методом потенціалів,

3.2 за допомогою інструмента «Поиск решения».

3.1. Математична модель транспортної задачі

Розглянемо поставлену задачу для таких вихідних даних:

$$a_1 = 30\text{т},\ a_2 = 20\text{т},\ a_3 = 40\text{т},$$

$$b_1 = 20\text{т},\ b_2 = 30\text{т},\ b_3 = 20\text{т},\ b_4 = 30\text{т},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Запишемо їх у вигляді таблиці.

Таблиця 3.1

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
Потреби	20	30	20	30	90 100

До нижнього правого куту цієї таблиці занесемо значення сумарних потреб і сумарних витрат:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 \text{ т}, \ \sum_{j=1}^{4} b_j = 100 \text{ т}.$$

У даному випадку $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, тому модель транспортної задачі є *відкритою*. Відповідно до теореми, для існування в транспортної задачі припустимого плану необхідно і достатньо, щоб її модель була *закритою*, тобто, щоб $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Збалансуємо дану задачу, уводячи фіктивний пункт виробництва A_4 з запасом вантажу $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i$ =100-90=10(т). При цьому вартість перевезень із цього пункту в кожний із пунктів споживання дорівнює 0 (див.табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
A_3	0	0	0	0	10
Потреби	20	30	20	30	90 / 100

Складемо ***математичну модель*** даної задачі.

1. *Змінні задачі*: x_{ij} – планований обсяг перевезення (у тоннах) з $i^{\text{го}}$ пункту виробництва в $j^{\text{й}}$ пункт споживання ($i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4}$). Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$ утворить матрицю

$$X=\begin{bmatrix} x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \\ x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \\ x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \end{bmatrix}.$$

2. *Цільова функція задачі* виражає транспортні витрати, які необхідно мінімізувати:

$$\begin{aligned} F(X)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij} = 3x_{11}+\ 1x_{12}+4x_{13}+2x_{14}+ \\ +1\,x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+3x_{24}+ \\ +2x_{31}+2x_{32}+4x_{33}+4x_{34} \quad \to \min \end{aligned}.$$

3. *Обмеження задачі: на вивіз вантажу*

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=30 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=20 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=40 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=10 \end{aligned}, \qquad (9)$$

на задоволення потреб у вантажі

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=20 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=30 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=20 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=30 \end{aligned}, \qquad (10)$$

невід'ємність змінних:

$$x_{ij} \geq 0 \;\; (i = \overline{1,4}\;, \; j = \overline{1,4}\;). \qquad (11)$$

Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$, що задовольняють обмеженням (9)-(11), утворюють припустимий опорний план. Матриця системи (9) - (10) має ранг на 1 менший кількості рядків цієї системи, тобто на 1 менший від суми кількостей пунктів виробництва і пунктів споживання, у даному випадку це – 7. Це означає, що *кількість базисних змінних повинна дорівнювати 7.*

3.2 Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

Нульова ітерація транспортної задачі. Підготуємо таблицю (табл. 3.3). Другий рядок і другий стовпець зарезервуємо для значень потенціалів. В останній стовпець внесемо відповідні значення запасів, а в останній рядок – потреб. У праві верхні кути комірок $A_i B_j$ ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$) внесемо матрицю транспортних витрат.

Крок 1. Побудову вихідного опорного плану здійснюємо *методом найменшої вартості*. Завантажуючи комірки, відповідні значення обсягів перевезення x_{ij} будемо заносити в нижні ліві кути комірок $A_1 B_j$ ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$).

1. Вибираємо комірку з найменшою вартістю (транспортним тарифом). Найменша вартість дорівнює 0, а комірок, що відповідають цій вартості - чотири: A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, A_4B_4. Завантажимо, наприклад, комірку A_4B_4 так, щоб $x_{44} = \min\{a_4; b_4\} = \min\{10;30\}$. Перерахуємо запаси, що залишилися, $a'_4 = a_4 - x_{44}$ =10-10=0, і потреби, що залишилися, $b'_4 = b_4 - x_{44}$ =30--10=20, а отримані значення запишемо у відповідних комірках таблиці через риску.

Таблиця 3.3

Нульова ітерація транспортної задачі

		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		$v_1=1$	$v_2=1$	$v_3=1$	$v_4=1$	
A_1	$u_1=0$	3 -2	1 **30**	4 -3	2 -1	30|0
A_2	$u_2=0$	1 **20**	4 -3	3 -2	3 -2	20|0
A_3	$u_3=3$	2 ⊕ 2	2 2	4 **20**	4 ϴ **20**	40|20|0
A_4	$u_4=$-1	0 ϴ **0**	0 **0**	0 0	0 ⊕ **10**	10|0
Потреби		20 0	30 0	20 0	30 20 0	

2. Оскільки запаси четвертого пункту виробництва вичерпані, то завантажувати комірки рядка A_4 поки не будемо. Серед комірок, що залишилися, виберемо комірку з найменшою вартістю. Маємо дві комірки з вартістю 1. Завантажимо спочатку, наприклад, комірку A_1B_2 : $x_{12}=\min\{a_1;b_2\}=\min\{30;30\}=30$. Перерахуємо запаси, що $a_1'=a_1-x_{12}=30-30=0$ залишилися, і потреби, що залишилися, $b_2'=b_2-x_{12}$ =30-30=0. Потім завантажимо комірку A_2B_1: $x_{12}=\min\{a_2;b_1\}=\min\{20;20\}=20$, $a_2'=a_2-x_{21}$=20-20=0, $b_1'=b_1-x_{12}$=20--20=0.

3. На даний момент вичерпані запаси пунктів виробництва A_1, A_2 і A_4, а також задоволені потреби споживачів B_1 і B_2. У нашому розпорядженні залишилися дві комірки з однаковими вартостями: A_3B_3 і A_3B_4. Завантажимо, наприклад, комірку A_3B_3 : $x_{33}=\min\{a_3;b_3\}$ $=\min\{40;20\}=20$, $a_3'=a_3-x_{33}=40-20=20$, $b_3'=b_3-x_{33}$ =20-20=0. Тепер завантажимо комірку A_3B_4 : $x_{34}=\min\{a_3';b_4'\}=\min\{20;20\}=20$, $a_3''=a_3'-x_{34}=20-20=0$, $b_4''=b_4'-x_{34}$=20-20=0.

4. Завантажені комірки відповідають базисним змінним транспортної задачі, їхня кількість на даний момент дорівнює 5, однак, як було відзначено вище, повинна дорівнювати 7. Два відсутні елементи поповнюємо, завантажуючи нульовим обсягом перевезення дві вільні комірки з найменшими тарифами. Причому необхідно подбати про те, щоб жодна з цих комірок не *утворювала циклу* з наявними завантаженими комірками. Під *циклом* розуміють замкнуту ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. За такі комірки оберемо A_4B_1 і A_4B_2.

5. Опорний план нульової ітерації утворить матрицю

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Його елементи задовольняють системі обмежень (9)-(11). Значення цільової функції на цьому плані дорівнює

$$F(X_0) = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 210 \text{ (у.о.)}.$$

Чи є цей план оптимальним? Відповідь на це питання дає метод потенціалів.

Крок 2.*Перевірка оптимальності опорного плану.*

1. *Побудова системи потенціалів* $\{u_i, v_j\}$ $(i = \overline{1,4}\ ,\ j = \overline{1,4}\ )$. Кожному постачальнику A_i поставимо у відповідність потенціал u_i, а споживачу B_j - потенціал v_j. При цьому для кожної базисної змінної відповідні їй потенціали u_i і v_j повинні задовольняти рівності

$$u_i + v_j = c_{ij} \ (i = \overline{1,4}\ ,\ j = \overline{1,4}\ ). \tag{12}$$

Оскільки базисних змінних 7, то сукупність рівностей (12) утворить систему з 8 рівнянь із 7 невідомими. Ця система має нескінченну множину розв’язків, знайдемо одне з них:

- для зручності візьмемо $u_1 = 0$;

- у рядку A_1 знаходиться базисна змінна x_{12}, тому згідно з (12) $v_2 = c_{12} - u_1 = 1 - 0 = 1$;
- у стовпці B_2 знаходиться ще одна (крім x_{12}) базисна змінна x_{42}, тому $u_4 = c_{42} - v_2 = 0 - 1 = -1$;
- за базисною змінною x_{41} знайдемо $v_1 = c_{41} - u_4 = 0 - (-1) = 1$,

- за базисною змінною x_{44}- $v_4 = c_{44} - u_4 = 0 - (-1) = 1$;
- за базисною змінною x_{34}- $u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 1 = 3$;
- за базисною змінною x_{33}- $v_3 = c_{33} - u_3 = 4 - 3 = 1$;
- за базисною змінною x_{21}- $u_2 = c_{21} - v_1 = 1 - 1 = 0$.

2. Знайдемо *оцінки оптимальності* Δ_{ij} *для небазисних змінних*. Значення Δ_{ij} будемо обчислювати за формулою

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \ (i = \overline{1,4}\ ,\ j = \overline{1,4}\ ),$$

а результат заносити в нижні ліві кути комірок A_1B_j ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$), відокремлюючи їх у рамку:

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 3 = -2$,

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 4 = -3$,

$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 2 = -1$,

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 0 + 1 - 4 = -3$,

$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 1 - 3 = -2$,

$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 0 + 1 - 3 = -2$,

$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 1 - 2 = 2$,

$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 1 - 2 = 2$,

$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -1 + 1 - 0 = 0$.

3. *Перевірка оптимальності опорного плану*:

- якщо всі оцінки оптимальності небазисних змінних недодатні, тобто $\Delta_{ij} \le 0$, то опорний план є оптимальним, і обчислення більше не проводяться;

- якщо серед оцінок оптимальності є додатні, то опорний план не оптимальний, і його необхідно поліпшувати.

Оскільки для розглянутого плану деякі з оцінок оптимальності є додатними, то вихідний опорний план не є оптимальним.

<u>Крок 3.</u>

1. Визначимо *змінну, що вводиться до базису*. Серед знайдених оцінок оптимальності виберемо найбільше позитивне значення. Таким є 2, що відповідає $\Delta_{31} = \Delta_{32} = 2$. У базис необхідно вводити ту з змінних x_{31} чи x_{32}, якій відповідає менший тариф. У даному випадку $c_{31} = c_{32} = 2$. Тому введемо до базису будь-яку із цих змінних, наприклад, x_{31}.

2. Визначимо *змінну, що виводиться з базису*. Для цього побудуємо цикл, що проходить через деякі з завантажених комірок і комірку A_3B_1 (що відповідає змінній x_{31}, яка вводиться з базису). Нагадаємо, що під *циклом* розуміють замкнену ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. Відомо, що цикл у транспортній задачі можна побудувати єдиним чином. У даному випадку цикл виглядає так, як це показано в табл. 3.3. Вершину циклу в комірці A_3B_1 відзначаємо знаком «+», а далі інші вершини позначаємо знаками, що чергуються: «-» або «+», послідовно пересуваючись циклом у будь-якому напрямку. Серед комірок, уякі потрапив знак «-», вибираємо комірку з найменшим значенням базисної змінної. У даному випадку це значення дорівнює нулю, воно обведене ромбом, а відповідає воно базисній змінній x_{41}, котру будемо виводити з базису.

3. *Побудова нового базису*.

Підготуємо нову таблицю ***першої ітерації*** (див. табл. 3.4).

- Заносимо в неї дані в умові значення транспортних тарифів, запасів і потреб.
- Без зміни необхідно перенести в таблицю значення базисних змінних, не задіяних циклом.

• Оскільки виведена з базису змінна дорівнює 0, то змінна, що вводиться з базису, також дорівнюватиме нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться. Комірка змінної, що виведена з базису, стане в результаті вільною.

4. Побудований опорний план першої ітерації утворить ту ж матрицю, що і для вихідного опорного плану, тому значення цільової функції на цьому плані не зміниться:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_1) = 210\,(\text{у.о}).$$

Таблиця 3.4

Перша ітерація транспортної задачі

	$v_1 = -1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	
$u_1 = 0$	3 -4	1 **30**	4 -3	2 -1	30
$u_2 = 2$	1 **20**	4 -1	3 0	3 0	20
$u_3 = 3$	2 **0**	2 ⊕ 2	4 **20**	4 Θ **20**	40
$u_4 = -1$	0 -2	0 Θ **0**	0 0	0 ⊕ **10**	10
	20	30	20	30	

Чи є новий опорний план оптимальним? Для відповіді на це питання повертаємося до кроку 2 і кроку 3, виконуючи послідовно аналогічні дії. Результати цих дій занесені в табл. 3.4.

• Будуємо систему потенціалів.

• Обчислюємо оцінки оптимальності небазисних змінних.

• Перевіряємо план на оптимальність: серед оцінок оптимальності є позитивна Δ_{32}; тому *план першої ітерації не оптимальний*, і вводиться до базису змінна – x_{32}.

- Будуємо цикл, за допомогою якого визначаємо змінну, що виводиться з базису; такою є x_{42}.

- Будуємо нову таблицю ***другої ітерації*** (табл. 3.5), зберігаючи дані умови і значення базисних змінних, не задіяних циклом. Оскільки $x_{42}=0$, то змінна, що вводиться до базису, також буде дорівнювати нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться.

Таблиця 3.5

Друга ітерація транспортної задачі

	$v_1=1$		$v_2=1$		$v_3=3$		$v_4=3$		
$u_1=0$	-2	3	**30** ⊖	1	-1	4	1 ⊕	2	30
$u_2=0$	**20**	1	-3	4	0	3	0	3	20
$u_3=1$	**0**	2	**0** ⊕	2	**20**	4	$\boxed{20}$ ⊖	4	40
$u_4=$-3	-2	0	-2	0	0	0	**10**	0	10
	20		30		20		30		

Для опорного плану другої ітерації одержимо

$$X_2=\begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_2)=210(\text{у.о.}).$$

Повертаємося до кроку 2 і кроку 3, результати виконаних дій занесені в табл. 3.5. *Опорний план другої ітерації не оптимальний.* У цьому випадку змінна, що вводиться до базису, - x_{14}, а та, яка виводиться з базису, - $x_{34}=20$. Зауважимо, що при побудові таблиці ***третьої ітерації*** (табл.3.6) значення змінних, задіяним циклом, перераховуємо, додаючи до тих із них, що відмічені знаком «+» значення змінної, що виводиться з базису (тобто «20»), а від змінних, відмічених знаком «-», віднімаємо це значення. Змінна, що вводиться до базису, приймає значення 20. Комірка A_3B_4 виявиться вільною.

Для опорного плану третьої ітерації одержимо

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$F(X_3) = 10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 0 = 190 \text{ (у.о.).}$$

Таблиця 3.6

Третя ітерація транспортної задачі

	$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 0$	3 -4	1 θ **10**	4 -1	2 ⊕ **20**	30
$u_2 = 0$	1 **20**	4 -3	3 0	3 -1	20
$u_3 = 1$	2 **0**	2 ⊕ **20**	4 θ **20**	4 -1	40
$u_4 = -2$	0 -1	0 -1	0 ⊕ 1	0 θ **10**	10
	20	30	20	30	

Із табл. 3.6 бачимо, що *опорний план третьої ітерації не оптимальний.* Змінна в цьому випадку, що вводиться до базису, - x_{43} , а змінна, що виводиться з базису, - $x_{12} = 10$. Проводимо перерахування базисних змінних. Результати обчислень у четвертій ітерації занесені в табл. 3.7. Для опорного плану цієї ітерації виконана умова оптимальності: всі оцінки оптимальності недодатні.

Урезультаті маємо

$$X^* = X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{\min}(X) = F(X^*) = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 180 \text{ (у.о.).}$$

Таблиця 3.7

Четверта ітерація транспортної задачі

	$v_1=0$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=2$	
$u_1=0$	3 -3	1 -1	4 -2	2 **30**	30
$u_2=1$	1 **20**	4 -3	3 0	3 0	20
$u_3=2$	2 **0**	2 **30**	4 **10**	4 0	40
$u_4=$-2	0 -2	0 -2	0 **10**	0 **0**	10
	20	30	20	30	

Зауважимо, що серед оцінок оптимальності останньої ітерації є такі, значення яких дорівнює нулю, тому побудований ***опорний план не єдиний***, для якого цільова функція приймає мінімальне значення 180 у.о.

Відповідь. Найменші сумарні транспортні витрати, що складають 180 у.о., будуть відповідати такому плану перевезень:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4;
- з пункту виробництва A_2 - 20 т вантажу до пункту споживання B_1;
- з пункту виробництва A_3 - 30 т вантажу до пункту споживання B_2 і 10 т – в B_3.

Оскільки пункт A_4 є фіктивним, то споживач B_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Результат обчислень можна оформити також у вигляді схеми, показуючи, з якого пункту виробництва в який пункт споживання перевозиться вантаж:

$$\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{\text{30ò}} B_4 \\ A_2 \xrightarrow{\text{20ò}} B_1 \\ A_3 \xrightarrow{\text{30ò}} B_2 \\ \downarrow \xrightarrow{\text{10ò}} B_3 \end{array} .$$

3.3 Розв'язання транспортної задачі з використанням інструмента "Поиск решения"

Транспортна задача вже була зведена до закритої моделі. Результат внесений у табл. 3.2. Відповідно до цієї таблиці підготуємо аркуш EXCEL для застосування інструмента «Поиск решения» (див. рис. 3.1).

1. Комірки B4:E7 заповнюємо матрицею транспортних тарифів транспортної задачі, зведеної до закритого вигляду.

2. У комірках F4:F7 записуємо обсяги запасів a_i на підприємстві A_i ($i = \overline{1,4}$).

3. У комірки B8:E8 вносимо обсяги потреб b_j споживача B_j ($j = \overline{1,4}$).

4. Комірки B11:E14 резервуємо для значень змінних моделі, що будуть знайдені після виконання процедури «Поиск решения».

5. Комірка F15 (цільова комірка) резервується для обчислення оптимального значення цільової функції моделі.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
4	**A1**	3	1	4	2	30	
5	**A2**	1	4	3	3	20	
6	**A3**	2	2	4	4	40	
7	**A4**	0	0	0	0	10	
8	**Потреби**	20	30	20	30	**Сума=100**	
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
11	**A1**						
12	**A2**						
13	**A3**						
14	**A4**						
15	**Потреби**						**ЦФ**

Рис. 3.1. Представлення вихідних даних у таблиці EXEL

Після заповнення вихідних даних у цільову комірку F15 вносимо формули СУММПРОИЗВ(B4:E7; B11:E14), у комірку F11 – СУМ(B11:E11), що копіюємо з модифікаціями в комірки F12:F14, і в комірку B15 – СУМ(B11:B14), що копіюємо з модифікаціями в комірки C15:E15. Результат представлений на рис. 3.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
4	**A1**	3	1	4	2	30	
5	**A2**	1	4	3	3	20	
6	**A3**	2	2	4	4	40	
7	**A4**	0	0	0	0	10	
8	**Потреби**	20	30	20	30	**Сума=100**	
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
11	**A1**					=СУММ(B11:E11)	
12	**A2**					=СУММ(B12:E12)	
13	**A3**					=СУММ(B13:E13)	
14	**A4**					=СУММ(B14:E14)	
15	**Потреби**	=СУММ(B11:B14)	=СУММ(C11:C14)	=СУММ(D11:D14)	=СУММ(E11:E14)	=СУММПРОИЗВ(B4:E7;B11:E14)	**ЦФ**

Рис. 3.2 . Формули розрахунку в таблиці EXEL

Таким чином, усі підготовчі процедури закінчені, тому вибираємо в «Сервис» інструмент «Поиск решения». Заповнюємо екранну форму, що з'явилася, так, як це показано на рис. 3.3, виконуючи дії, аналогічні описаним.

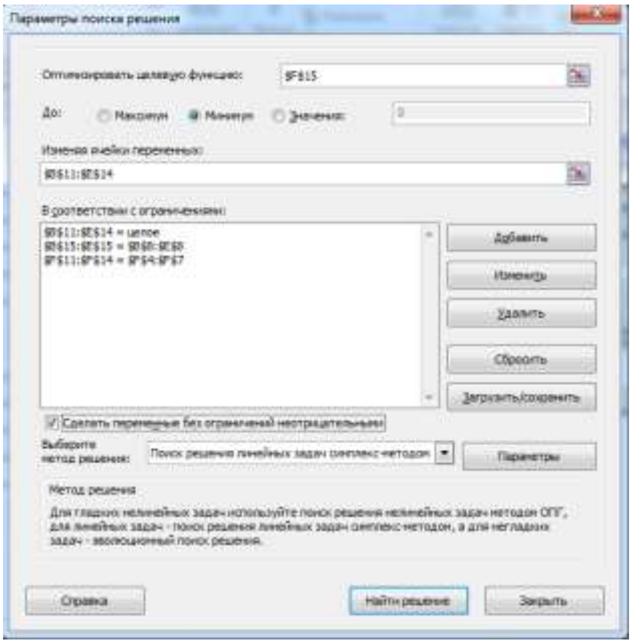


Рис. 3.3. Екранна форма «Поиск решения»

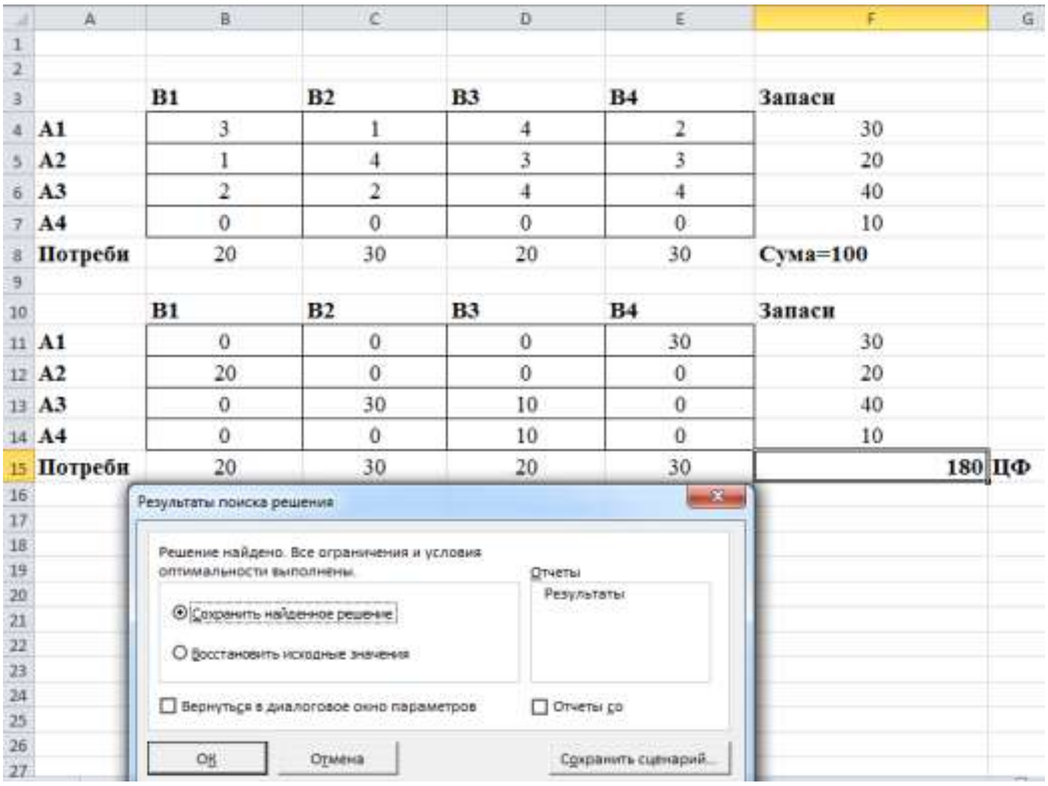


Рис. 3.4. Результати роботи процедури «Поиск решения»

Результат розв'язання транспортної задачі з використанням інструмента «Поиск решения» представлений на рис. 3.4. Оптимальний розв'язок транспортної задачі в цьому випадку можна представити матрицею

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

а мінімальне значення цільової функції на цьому плані дорівнює

$$F_{\min}(X) = F(X^*) = 180 \text{ (у.о.)}.$$

Як було зауважено вище (перед остаточним записом результатів методу потенціалів), розв'язок даної задачі не єдиний. Другий варіант розв'язку представлено на рис. 3.5. Оптимальний розв'язок транспортної задачі в цьому випадку можна представити матрицею

$$X^{**} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

Мінімальне значення цільової функції при цьому не зміниться, а саме:

$$F_{\min}(X) = F(X^{**}) = 180 \text{(у.о)}.$$

Зауважимо, що для отримання різних варіантів розв'язку транспортної задачі (якщо розв'язок не єдиний) потрібно повторно запускати на виконання процедуру «Поиск решения» без зміни вхідних даних.

	A	B	C	D	E	F	
1							
2							
3		B1	B2	B3	B4	Запаси	
4	A1	3	1	4	2	30	
5	A2	1	4	3	3	20	
6	A3	2	2	4	4	40	
7	A4	0	0	0	0	10	
8	Потреби	20	30	20	30	Сума=100	
9							
10		B1	B2	B3	B4	Запаси	
11	A1	0	0	0	30	30	
12	A2	10	0	10	0	20	
13	A3	10	30	0	0	40	
14	A4	0	0	10	0	10	
15	Потреби	20	30	20	30	180	ЦФ

Рис. 3.5. Результати роботи процедури «Поиск решения» (другий варіант)

<u>**Відповідь.**</u> Найменші сумарні транспортні витрати складають 180 у.о. Це відповідає двом варіантам плану перевезень. *Перший варіант:*

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4;
- з пункту виробництва A_2 - 20 т вантажу до пункту споживання B_1;
- з пункту виробництва A_3- 30 т вантажу до пункту споживання B_2 і 10 т – в. B_3;
- при цьому плані споживач B_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Другий варіант:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту
споживання B_4;
- з пункту виробництва A_2- 10 т вантажу до пункту споживання B_1 і 10 т – в B_3;
- з пункту виробництва A_3- 10 т вантажу до пункту споживання B_1 і 30 т – в. B_2;
- при цьому плані споживач B_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Лабораторна робота №3 Методи розв'язання транспортної задачі

Завдання: У трьох пунктах виробництва $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$зосереджений однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ тонн. Даний вантаж споживається в чотирьох пунктах **B1**, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{B_4}$, а потреби в ньому в цих пунктах складають $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, $\mathbf{b_4}$, тонн відповідно. Відома матриця тарифів по перевезенню 1 тони вантажу з $i^{\underline{\text{го}}}$ пункту виробництва до $j^{\underline{\text{го}}}$ пункту споживання:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}c_{12}c_{13}c_{14} \\ c_{21}c_{22}c_{23}c_{24} \\ c_{31}c_{32}c_{33}c_{34} \end{bmatrix}.$$

Скласти план перевезень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \\ x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \\ x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \end{bmatrix},$$

при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальними.

Розв’язати поставлену транспортну задачу

3.1 методом потенціалів,

3.2 за допомогою інструмента «Поиск решения».

Індивідуальні завдання – додаток Б.

ТЕМА №4 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

4.1. Основні поняття теорії графів

Звичайним графом (мережею)*G = (V, E)* називається впорядкована пара множин, рисунок. 4.1: кінцевої непорожньої безлічі *V*, елементи якого називаються ***вершинами графа*** *G*, і довільної підмножини $E \subseteq \langle VV \rangle$, елементи якого називаються ***ребрами*** цього графа (мережі).

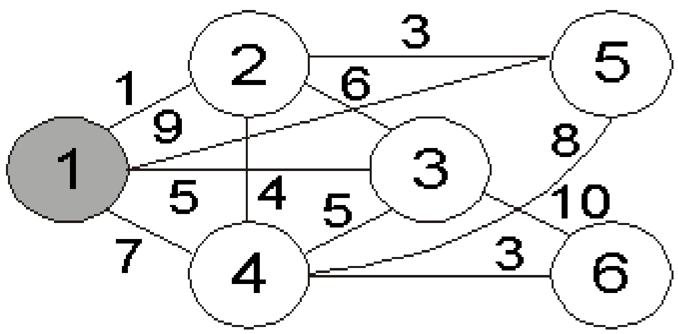


Рис. 4.1. Приклад звичайного графа (мережі)

Основні властивості звичайного графа:

1) безліч ребер звичайно;

2) ребра графа неорієнтовані;

3) в графі відсутні петлі, тобто ребра виду $l = (v1, v1)$;

4) в графі G відсутні кратні ребра, (тобто $(v1, v2) = (u1, u2)$, якщо $v1 = u1$ і $v2 = u2$, або $v1 = u2$ і $v2 = u1$).

Два крайніх випадки звичайних n-вершинних графів:

1) безреберний граф On; $E = \varnothing$;

2) повний граф Kn; $E = <V\ V>$, тобто будь-які дві його вершини суміжні.

Дамо основні поняття і визначення, проілюструвавши їх на основі рисунка 4.1.

Чергується послідовність $v0\ (v0, v1)\ v1\ (v1, v2)\ v2\ \ldots\ (vl\text{-}1, vl)\ vl$ вершин і ребер графа називається ***маршрутом***, що з'єднує вершини *v0 i vl*.

Маршрут називається ***ланцюгом***, якщо всі його ребра різні:

1 (1, 2) 2 (2, 3) 3 (3, 4) 4 (4, 2) 2 (2, 5) 5.

Ланцюг називається ***простий***, якщо всі її вершини різні:

1 (1, 4) 4 (4, 5) 5.

Ланцюг, у якій *v0* збігається з *vl* і все ребра різні, називається ***циклом***:

1 (1, 2) 2 (2, 3) 3 (3, 4) 4 (4, 2) 2 (2, 5) 5 (5, 1) 1.

Цикл є ***простим***, якщо всі його вершини різні крім початкової *v0* і кінцевої *vl*, які збігаються:

1 (1, 4) 4 (4, 2) 2 (2, 5) 5 (5, 1) 1.

Граф (мережа) називається ***зв'язковим***, якщо будь-які дві його неспівпадаючі вершини з'єднані маршрутом, граф на рис. 4.1 - зв'язний. В іншому випадку - ***незв'язним,*** рисунок 4.2:

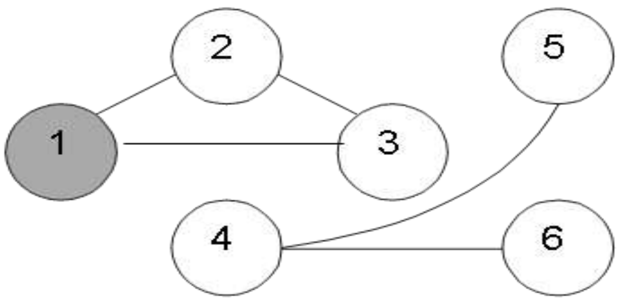


Рис. 4.2 Приклад незв’язного графу.

Граф називається ***зваженим***, якщо кожному його ребру поставлено у відповідність деяке число $\omega(l)$, зване ***вагою ребра***.

Тоді під ***вагою графа*** розуміють суму ваг усіх його ребер, тобто

$$\omega(G) = \sum_{e \in E} \omega(e).$$

Зв'язаний граф, що не містить циклів, називається ***деревом***:

Граф $H = (V', E')$ називається ***остовним підграфом*** графа $G = (V, E)$, якщо безліч його вершин V' збігається з безліччю вершин графа G, а безліч його ребер E' є підмножиною множини ребер G, т.е. $V' = V$, $E' \subseteq E$.

Якщо остовний підграф H графа G є деревом, то H називається ***остовним деревом*** графа G, рисунок 4.3:

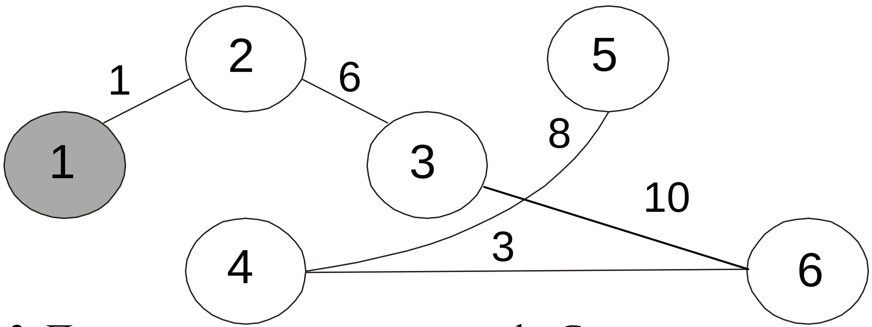


Рис. 4.3. Приклад остового дерева графа G

Орієнтований граф - це пара множин (V, A), де V- безліч вершин, A - безліч орієнтованих ребер, які називаються ***дугами***. Якщо $a = (v1, v2)$ - дуга, то вершини $v1$ і $v2$ називаються її ***початком*** і ***кінцем*** відповідно, рисунок 4.4.

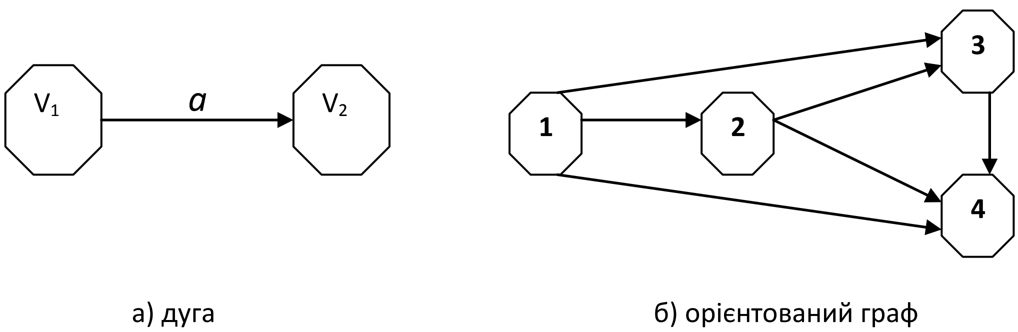


Рис. 4.4. Приклад орієнтованого графа

Якщо кожній дузі орієнтованого графа поставлено у відповідність деяке невід'ємне число $\omega(l)$,тобто $\omega(l) \geq 0, \forall l \in A$, називається ***вагою дуги***, то орієнтований граф називається ***зваженим***.

4.2. Завдання мінімізації мережі

Задача мінімізації мережі полягає в знаходженні ребер, що з'єднують всі вузли мережі (тобто кожна пара вузлів з'єднана ланцюгом) і мають мінімальну сумарну довжину (або вага).

Очевидно, що рішення задачі не повинно містити циклів. Відсутність циклів в мінімальної мережі природним чином призводить до поняття – ***мінімальне остовне дерево*** , тобто остовне дерево з мінімальною вагою.

Дане завдання може бути сформульовано таким чином:

У зв'язковому зваженому графі (G,ω) порядку n знайти остовне дерево мінімальної ваги, де $\omega = \omega(e)$ - вектор ваг ребер графа G, n-число вершин графа G.

Для її вирішення є ефективні алгоритми, що застосовуються до довільного зв'язного графу, необов'язково повного.

Алгоритм Краскала

1. Будуємо граф $T_1 = On + l_1$, приєднуючи до порожнього графу On на множині вершин V графа G ребро мінімальної ваги. Якщо таких ребер кілька, тобто $\omega(l_1) = \omega(l_2) = min\,\omega(l)$, то береться будь-яке з цих ребер. Цей вибір ребра вказує на неоднозначність мінімального остовного дерева.

2. Якщо граф T_i вже побудований і $i < n-1$, то будуємо граф $T_{i+1} = T_i + l_{i+1}$, де l_{i+1} - ребро графа G, що має мінімальну вагу серед ребер, що не входять в T_i і не становлять циклів з ребрами з T_i.

3. В іншому випадку, якщо $i = n\text{-}1$, алгоритм закінчує свою роботу, тобто остовне дерево мінімальної ваги побудовано. Граф T_i - шукане остовне дерево мінімальної ваги.

Даний алгоритм на кожному кроці будує *ациклічний граф, необов'язково зв'язний на кожному кроці*, крім останнього.

Розглянемо ще один алгоритм рішення задачі про мінімальне остовне дерево графа.

Алгоритм Прима

1. Вибираємо ребро $l_1=ab$ мінімальної ваги і будуємо дерево T_1, вважаючи $V_1= \{a, b\}$, $E_1 = \{l1\}$.

2. Якщо дерево T_i порядку $i+1$ вже побудовано і $i < n\text{-}1$, то серед ребер, що з'єднують вершини цього дерева з вершинами графа G, що не входять в T_i, вибираємо ребро l_{i+1} разом з його не входящим в T_i кінцем.

3. Якщо $i = n\text{-}1$, алгоритм закінчує роботу, тобто побудовано остовне дерево мінімальної ваги. Граф T_i - шукане остовне дерево мінімальної ваги.

Даний алгоритм на кожному кроці будує *зв'язний ациклічний граф*.

Примітка

У деяких ситуаціях потрібно побудувати остовное дерево не мінімальної, а максимальної ваги. До цієї задачі також застосовуються алгоритми Краскала і Прима. Слід тільки всюди замінити мінімальну вагу на максимальну.

Приклад 4.1

Телевізійна фірма планує створення кабельної мережі для обслуговування п'яти районів-новобудов (див. Рис. 4.5). Числа на ребрах вказують довжину кабелю, що з'єднує відповідні вузли (вершини). Вузол 1 представляє телевізійний центр, а інші вузли (2-6) відповідають п'яти новобудовам. Відсутність ребра між двома вузлами означає, що з'єднання відповідних новобудов або пов'язане із занадто великими витратами, або фізично неможливо.

Потрібно знайти такі ребра, які зажадають кабель мінімальної довжини для зв'язку (прямий або через інші пункти) усіх районів з телевізійним
центром.

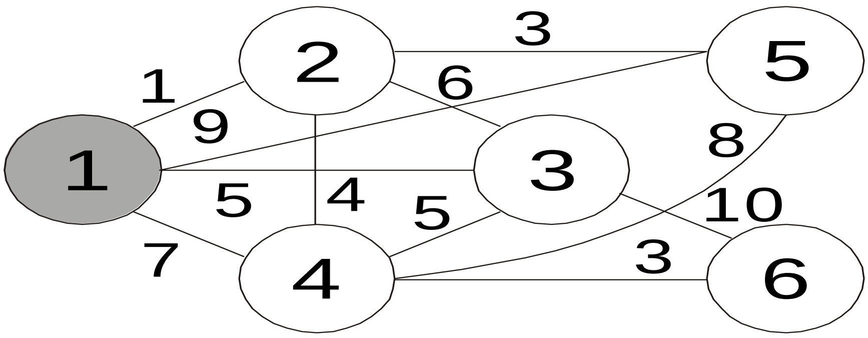


Рис. 4.5 Схема прокладки кабелю

Рішення

Алгоритм Краскала

а) впорядкуємо ребра графа в порядку зменшення їх ваг:

ω(l)		***E***
1	+	(1,2)
3	+	(4,6)
3	+	(2,5)
4	+	(2,4)
5	+ (-)	(1,3)
5	- (+)	(3,4)
6	-	(2,3)
7	-	(1,4)
8	-	(4,5)
9	-	(1,5)
10	-	(3,6)

// знаком «+» відзначені ті ребра, які включаються в остовне дерево; в дане остовне дерево можна включити або ребро (1, 3), або ребро (3, 4) //

б) мінімальна довжина кабелю, що з'єднує телестанцію з районами-новобудовами, дорівнює ω= 1 + 3 + 3 + 4 + 5 = 16 (км).

Алгоритм Прима:

В даному прикладі логічно починати з вершини «1», що відповідає телецентру.

T_1: $V_1=\{1,2\}$, $E_1=\{(1,2)\}$;

$T_2= T_1\cup(2,5)$: $V_2 =\{1,2,5\}$, $E_2=\{(1,2), (2,5)\}$;

$T_3= T_2\cup(2,4)$: $V_3 =\{1,2,4,5\}$, $E_3=\{(1,2), (2,5), (2,4)\}$;

$T_4= T_3\cup(4,6)$: $V_4 =\{1,2,4,5,6\}$, $E_2=\{(1,2), (2,5), (2,4), (4,6)\}$;

$$T_5 = \begin{cases} T_4 \cup (1,3) : V_5 = \{1,2,3,4,5,6\},\ E_5 = \{(1,2),(2,5),(2,4),(4,6),(1,3)\} \\ T_4 \cup (3,4) : V_5 = \{1,2,3,4,5,6\},\ E_5 = \{(1,2),(2,5),(2,4),(4,6),(3,4)\} \end{cases}$$

Так як $i = n\text{-}1$ = 6-1 = 5, то остовне дерево мінімальної ваги побудовано, рисунок 4.6, тобто T_5: ω_{min} = 16 (км).

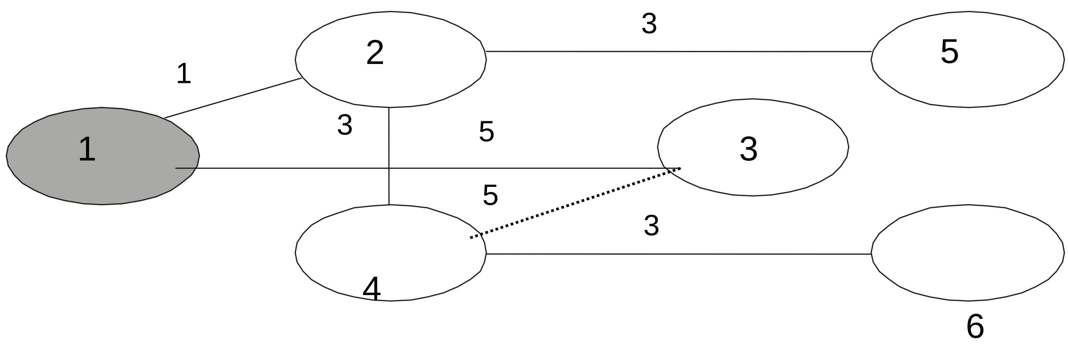


Рис. 4.6. Оптимальна схема прокладки кабеля (остовне дерево мінімальної ваги)

Відповідь:

Оптимальна схема підключення районів новобудов до телевізійного центру показана на рис. 4.6. Її практична реалізація вимагатиме кабель мінімальної довжини - 16 км.

4.3 Завдання про максимальний потік

Нехай *G = (V, A)* - орієнтований граф (мережа).

S′ϵV називається ***витоком***, якщо не існує дуг, що закінчуються в S′.

S″ϵV називається ***стоком***, якщо не існує дуг, що починаються в S″.

Нехай в *G* існує рівно один витік S′ і один стік S″.

Функція φ: $A \to R_+$ - ***пропускна здатність***, тобто $\varphi(l)$ - пропускна спроможність дуги *l*, яка визначає максимальну кількість потоку, що проходить по дузі *l*.

Потоком в графі називається функція μ: $A \to R_+$, що володіє властивостями:

1) $\forall l \in A$: $0 \le \mu(l) \le \varphi(l)$, де $\mu(l)$ - потік через дугу *l*;

2) $\forall u \in V$: $u \ne s'$ и $u \ne s''$: $\sum\limits_{e\,вх.в\,u} \mu(\ell) = \sum\limits_{e\,исх.из\,u} \mu(\ell)$.

Величиною потоку називається число $\rho(\mu) = \sum\limits_{e\,исх.из\,s'} \mu(\ell)$.

Теорема 4.1

У графі *G = (V, A)* сумарний потік по всім дугам, які вийшли з витоку, дорівнює сумарному потоку по всім дугам, які увійшли в стік, тобто: $\sum\limits_{e\,исх.из\,s'} \mu(\ell) = \sum\limits_{e\,вх.в\,s''} \mu(\ell)$

Постановка задачі про максимальний потік:

Нехай *G = (V, A)* має один витік і один стік. φ: $A \to R_+$- пропускна спроможність дуг цього графа. $M=\{\mu\}$- безліч всіх потоків через граф *G*, $\rho(\mu)$- величина потоку.

Серед всіх потоків через граф *G* знайти потік максимальної величини, тобто: $\rho(\mu) \to \max, \quad где\ \mu \in M$

Алгоритм Форда-Фалкерсона (відшукання max потоку)

1. Нехай $\varphi(l)>0$, $\forall l\in A$; $\mu_0(l)=0$; $k = 1$.

2. Знаходимо довільний орієнтований шлях з $S^/$ в $S^{//}$ в графі $G=(V_k,A_k,\varphi_k)$і будуємо μ_k: $A\to R_+$за таким правилом.

Вибираємо число $\alpha_k = \min\limits_{\ell\in пути} \varphi_k(\ell)$ і будуємо потік, пропущений на даній ітерації по дугам обраного шляху:

$$\mu_\kappa(\ell)=\begin{cases}\mu_{k-1}(\ell)+\alpha_\kappa, & если \quad \ell\in пути,\\ \mu_{\kappa-1}(\ell), & если \quad \ell\notin пути.\end{cases}$$

Після чого перераховуємо пропускні спроможності дуг, що залишилися:

$$\varphi_{\kappa+1}(\ell)=\begin{cases}\varphi_\kappa(\ell)-\alpha_\kappa, & если \quad \ell\in пути,\\ \varphi_\kappa(\ell), & если \quad \ell\notin пути.\end{cases}$$

3. Дуги, для яких $\varphi_{\kappa+1}(\ell)=\varnothing$,видаляються з $G_{\kappa+1}=(V,A_{k+1},\varphi_{k+1})$.

4. Якщо на кроці k в графі G не можна знайти орієнтований шлях з $S^/$в $S^{//}$, то зупинка. Таким чином, $\mu_\kappa(\ell)$ - шуканий потік, а

$$\rho_{\max}=\mu_0(\ell)+\sum\alpha_k - величина \quad потока.$$

Інакше, переходимо до кроку 2.

ЗАУВАЖЕННЯ

Якщо в графі $G = (V, A, \varphi)$існують два джерела $S^/_1$і $S^/_2$, тоді додаємо до безлічі вершин графа фіктивну вершину $S^/$ і дуги $(S^/, S^/_1)$ і $(S^/, S^/_2)$; вважаємо:

$$\varphi(S^/,S_1^/)=\sum_{e\, исх.\, из\, S_1^{'}}\varphi(\ell)\ , \quad \varphi(S^/,S_1^{//})=\sum_{e\, исх.\, из\, S_2^/}\varphi(\ell)\,.$$

Аналогічно для двох стоків $S^{//}_1$і $S^{//}_2$. Для перетвореного графа застосуємо алгоритм Форда-Фалкерсона відшукування максимального потоку в мережі.

З поняттям потоку пов'язане поняття розрізу мережі. Під ***розрізом мережі*** розуміється безліч дуг мережі *P(A),* що володіють наступною властивістю: будь-який шлях від джерела до стоку пройде хоча б по одній дузі розрізу. При видаленні дуг розрізу мережа стає незв'язною, тобто мережа якби розрізається.

Величиною розрізу*C(P)* називається сума пропускних спроможностей дуг, які входять до нього: $C(P) = \sum_{e \in P(A)} \varphi(\ell)$. Природно необхідно знайти розріз мінімальної величини. У мережі величина максимального потоку дорівнює величині мінімального розрізу, тобто $\max \rho(\mu) = \min C(P)$.

ПРИКЛАД 4.2

Змістовна постановка задачі

Два користувача мережі «Інтернет» обмінюються один з одним деякою інформацією. Їх робочі станції пов'язані між собою через мережу серверів. Причому передача інформації можлива через різні комбінації серверів і каналів зв'язку, які їх з'єднують. Який максимально можливий обсяг інформації в одиницю часу може бути переданий по даній мережі від одного користувача до іншого, якщо відомий обсяг інформації, який здатний пропустити кожен канал зв'язку.

Побудова математичної моделі

Математичну модель даної задачі будуємо у вигляді мережі. Нехай користувачі ($S^{/}$, $S^{//}$) пов'язані через 5 серверів (вузли мережі) каналами зв'язку (дуги). Нехай також відомий обсяг інформації, який кожен канал здатний пропускати в одиницю часу (пропускні спроможності - числа над дугами).

Тоді вихідна задача може бути формалізована у вигляді мережної моделі, представленої на рисунку 4.8:

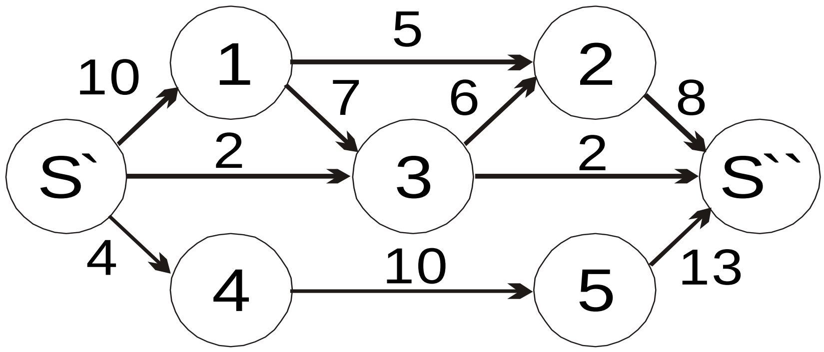


Рис. 4.8. Математична модель задачі про інформаційний потік в мережі Internet

Умовно приймемо вимогу односпрямованості інформаційного потоку в заданій мережі, наприклад $S^{/}\rightarrow S^{//}$ (оптимальна схема передачі інформації $S^{//}\rightarrow S^{/}$, очевидно, буде така ж).

Дана задача може бути вирішена як задача про максимальний потік. Скористаємося алгоритмом Форда-Фалкерсона відшукування максимального потоку в мережі.

Рішення:

Знаходимо довільний орієнтований шлях, що з'єднує вузли $S^{/}\rightarrow S^{//}$.

1) $S^{/}\rightarrow 1\rightarrow 3\rightarrow 2\rightarrow S^{//}$.

Вибираємо мінімальну пропускну здатність з усіх пропускних спроможностей дуг, що входять в обраний шлях: $\alpha_1 = \min\{10, 7, 6, 8\} = 6$.

Це і є величина потоку, пропущеного по даному шляху. Записуємо $\alpha_1=6$ над дугами, що входять в цей шлях, в дужках, а за дужками записуємо пропускну здатність, яка залишилася, як різниця між пропускною спроможністю на попередньому кроці і величиною пропущеного потоку $\alpha_1=6$.

Дуга, що отримала нульову залишкову пропускну здатність з розгляду виключається. Далі відшукуємо будь-який інший шлях, який з’єднує $S^{/}$ и $S^{//}$і т.д. до тих пір, поки неможливо буде знайти орієнтирний шлях з $S^{/}$ и $S^{//}$.

Процес вирішення даної задачі представлений нижче, а ілюстрований на рисунку 4.9.

2) $S^{'}\to4\to5\to S^{''}$, $\alpha_2 = \min\{4, 10, 13\} = 4$;

3) $S^{'}\to1\to2\to S^{''}$, $\alpha_3 = \min\{4, 5, 2\} = 2$;

4) $S^{'}\to3\to S^{''}$, $\alpha_4 = \min\{2, 2\} = 2$.

Після четвертого кроку алгоритм закінчує свою роботу, так як більше немає шляхів, що зв'язують вузли $S^{/}$ и $S^{//}$.

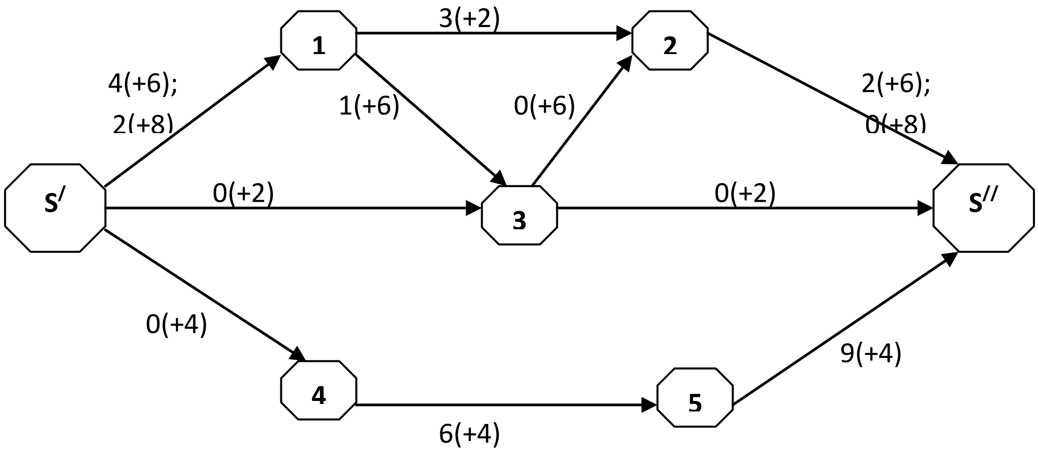


Рис. 4.9. Рішення задачі про максимальний потік

Величина максимального потоку:

$\rho_{max}= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4= 6+4+2+2= 14$,

а сам максимальний потік (оптимальне рішення задачі) представлений на рисунку 4.10:

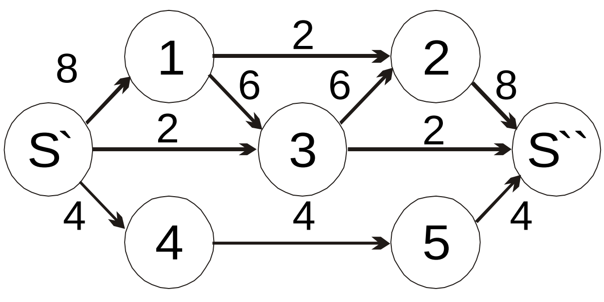


Рис. 4.10 Оптимальне рішення задачі про інформаційний потік в мережі Internet

Над дугами записані величини потоку, пропущеного по кожній з них.

Таким чином, аналізуючи оптимальне рішення даної задачі, робимо наступний висновок: *максимальний обсяг інформації, який може бути* *переданий в одиницю часу через дану інформаційну мережу з робочої станції* S' *на робочу станцію* S'' *(або в зворотному напрямку), дорівнює 14 одиницям обсягу інформації.*

• зробити висновки в термінах постановки техніко-економічної задачі.

Лабораторна робота №4 Основні поняття і визначення теорії графів

Завдання:

1. Побудувати довільний зв'язний неорієнтований граф G=(V,E), | V |= 10, | E |= 20 (десять вершин і двадцять ребер), у якого ребра e = *(u, v)* зважити довільним чином. Для побудованого графа (мережевої моделі):

• скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі мінімізації (або максимізації) мережі;

• знайти в побудованому графі мінімальне (або максимальне) остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала;

• зробити висновки в термінах постановки задачі.

2. Заданий зважений орієнтований граф (мережева модель). Для заданої мережі (див. Індивідуальні варіанти):

• скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі про максимальний потік;

• знайти потік, що має максимальну величину, з допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона і з використанням процедури «Пошук рішення» Microsoft Excel.

Індивідуальні завдання – додаток В

ТЕМА №5 ЛІНІЙНА ПАРНА РЕГРЕСІЯ

5.1. Теоретичні відомості

Найпростішою залежністю між двома послідовностями є ***лінійна парна регресія***. У цьому випадку ***рівняння регресії*** матиме вигляд

$$y = b_0 + b_1 x \tag{5.1}$$

Лінійний парний регресійний аналіз полягає у визначенні параметрів b_0 *і* b_1 емпіричної лінійної функції (5.1), яка описує зв'язок між деяким числом N пар значень *(* x_i *,* y_i *)* і забезпечує найменшу середньоквадратичну похибку.

Графічно цю задачу можна представити так: у полі розсіювання точок*(* x_i, y_i *)* площини $x0y$ необхідно провести пряму так, щоб величина всіх відхилень задовольняла умову (5.2):

$$F(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (b_0 + b_1 x) \right]^2 \to \min \tag{5.2}$$

Тому цей метод регресійного аналізу називається ***методом найменших квадратів (МНК).***

Для знаходження коефіцієнтів b_0 *і* b_1 рівняння регресії (5.1)необхідно знайти часткові похідні по b_0 *і* b_1 від функції (5.2) і прирівняти їх до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b_1} &= \sum_{i=1}^{n} \left[-2x_i y_i + 2b_1 x_i^2 y_i + 2b_0 x_i \right] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b_0} &= \sum_{i=1}^{n} \left[-2y_i + 2b_1 x_i + 2b_0 \right] = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Після простих перетворень отримаємо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} b_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b_0\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ b_1\sum_{i=1}^{n} x_i + b_0 n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (5.4)$$

Коли розв’яжемо систему (5.4), то отримаємо коефіцієнти b_0 і b_1 рівняння регресії (5.1).

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad (5.5)$$

Про тісноту зв’язку між множинами X та Y може свідчити ***коефіцієнт кореляціїr***, який приймає значення з інтервалу [-1; 1]:

1) $r_{xy} = 0$ – зв’язок відсутній;

2) $0 < \left|r_{xy}\right| \le \frac{1}{3}$ – зв’язок слабкий;

3) $\frac{1}{3} \le \left|r_{xy}\right| \le \frac{2}{3}$ – зв’язок середній;

4) $\frac{2}{3} \le \left|r_{xy}\right| < 1$ – зв’язок сильний;

5) $\left|r_{xy}\right| = 1$ – зв’язок повний.

Якщо $0 < r_{xy} \le 1$, то зв’язок між множинами X та Y***прямий***, тобто при зростанні X зростають Y; якщо $-1 \le r_{xy} < 0$, то зв’язок між множинами X та Y***обернений***, тобто при зростанні X спадають Y.

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{s_x \cdot s_y} \qquad (5.6)$$

де $s_x = \sqrt{\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2}$ $\qquad s_y = \sqrt{\overline{y}^2 - \left(\overline{y}\right)^2}$

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$; $\qquad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$; $\qquad \overline{y}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$;

Оцінки для дисперсій коефіцієнтів b_0, b_1 визначаються формулами

$$s_{b_0}^2 = s^2 \cdot \frac{\overline{x^2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad s_{b_1}^2 = s^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (5.7)$$

де $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$ - оцінка дисперсії s^2 .

Для розрахунків можна використовувати функції Excel.

Функція ***ОТРЕЗОК.*** Розраховує коефіцієнт b_0 і звернення має вигляд:

ОТРЕЗОК(*діапазон_значень_* y *; діапазон_значень_* x).

Функція ***НАКЛОН.*** Розраховує коефіцієнт b_1 і звернення має вигляд:

НАКЛОН(*діапазон_значень_* y *; діапазон_значень_* x).

Функція ***ПРЕДСКАЗ.*** Розраховує значення лінійної парної регресії для заданого значення незалежної невідомої (обозначена через x_i) і звернення має вигляд:

ПРЕДСКАЗ(x_i *;диапазон_значений_* y *;диапазон_значений_* x).

Функція ***СТОШYX.*** Розраховує оцінку s^2 для средньоквадратичного відхилення s збурень ε_i і звернення має вигляд:

СТОШYX(*діапазон_значень_* y *; діапазон_значень_* x).

Інтервальна оцінка (довірчий інтервал) для $f(x) = M(Y \mid x)$ (при заданому значенні x) з надійністю γ (довірчою ймовірністю) визначається виразом:

$$\left[\ \hat{y}(x_i) - t(\gamma, n-2) \cdot s_{\hat{y}_i}(x_i),\ \ \hat{y}(x_i) + t(\gamma, n-2) \cdot s_{\hat{y}_i}(x_i)\right] \qquad (5.8)$$

Оцінка $s_{\hat{y}}^2(x)$ для дисперсії функції $\hat{y}(x)$ має вигляд

$$s_{\hat{y}_i}^2(x) = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right] \tag{5.9}$$

де $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$ - оцінка дисперсії. Таким чином, в (5.8) входять дві величини $s_{\hat{y}}(x) = \sqrt{s_{\hat{y}}^2(x)}$ (залежить від x) і $t(\gamma, n-2)$, які розраховуються з допомогою функціїExcel:

$t(\gamma, n-2)$=СТЬЮДРАСПОБР($1-\gamma; n-2$).

Рівняння парної регресії значимо з рівнем значущості α, якщо виконується наступна нерівність

$$F_r = \frac{Q_r \cdot (n-2)}{Q_e} > F_{кр}\left(1-\gamma; 1; n-2\right), \tag{5.10}$$

Де $F_{кр}\left(1-\gamma; 1; n-2\right)$ – значення квантиля рівня γF-розподілу с числами ступеней свободи $k_1 = 1$ и $k_2 = n - 2$. Для розрахунку квантиля можна використовувати наступний вираз:

$F_{кр}(1-\gamma;1;n-2)$= FРАСПОБР($1-\gamma;1;n-2$) (5.11)

Суми Q_r, Q_e, що входять в (5.10) визначаються виразами:

$$Q_r = Q - Q_e,\ Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2,\ Q_e = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2 \tag{5.12}$$

Критерий (5.12) часто називають *критерієм Фішера* або *F-критерієм.* Якщо нерівність (5.10) виконується, то можна стверджувати, що рівняння парної лінійної регресії значимо з заданим рівнем значущості $\alpha = 1-\gamma$

Лабораторна робота №5 Лінійна парна регресія

Дано: величина X - ціна одиниці імпортованого товару за 10 років за умовними даними національних рахунків однієї з країн (тис.гр.), величина Y - обсяг виробництва цього виробу в країні за цей час (млн. т.).

X	1,3	1,4	1,8	1,9	2,3	2,4	2,6	2,9	3,1	3,4
Y	1,1	0,9	1,6	0,8	1,7	2,5	2,1	1,8	2,6	2,8

Необхідно:

1. Розрахувати коефіцієнти рівняння парної лінійної регресії.
2. Розрахувати вибірковий коефіцієнт кореляції.
3. Розрахувати оцінки дисперсій коефіцієнтів парної лінійної регресії.
4. Побудувати інтервальну оцінку для функції парної лінійної регресії з надійністю $\gamma = 0,95$ (довірча ймовірність).
5. Виконати перевірку значущості рівняння лінійної регресії за критерієм Фішера.

Розв'язання:

1. Загальний вигляд прямої лінії регресії Y на Xмає вигляд:

$$y = b_0 + b_1 x$$

Для визначення невідомих параметрів b_0 і b_1 застосовуємо формули (5.5) та метод найменших квадратів.

$$\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 2,31; \qquad \overline{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 1,79; \qquad \overline{xy} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 4,526$$

$$\overline{x}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 5,789; \qquad \overline{y}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 3,661;$$

Розраховуємо коефіцієнт регресії **Y** на **X**

$b_0 = -0,2048$ $\qquad$ $b_1 = 0,8635$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії має вид:

$$\overline{y}_x = 0,8635x - 0,2048. \qquad \text{(A)}$$

2. Коефіцієнт кореляції розраховується за формулою (5.6):

$$s_x = \sqrt{5,789 - 2,31^2} = 0,673; \qquad s_y = \sqrt{3,661 - 1,79^2} = 0,676$$

$$r_{xy} = \frac{4,526 - 2,31 \cdot 1,79}{0,673 \cdot 0,676} = 0,8598.$$

Зв'язок між X - ціною одиниці імпортованого товару (тис. т) та Y - обсягом виробництва цього виробу (млн. т.) має пряму лінійну залежність (рис.5.1). Коефіцієнти лінії тренду відповідають коефіцієнтам, розрахованим за формулами (5.5), а значення величин достовірності апроксимації R^2 дорівнює квадрату розрахованого коефіцієнта кореляції: $0,8598^2 = 0,7392$

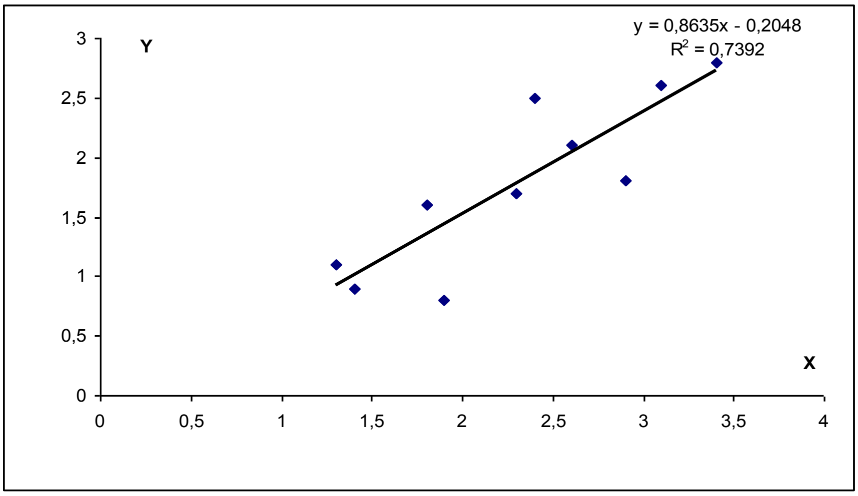


Рис.5.1.Лінія регресії **Y** на **X**

Використовуючи рівняння прямої лінії регресії (А) визначити обсяг виробництва, якщо ціна одиниці імпортованого товару дорівнює: а) 2,5 тис. гр. (інтерполяція даних); б) 4,7 тис. гр. (екстраполяція даних).

a) $x = 2,5 \quad y = 0,8635 \cdot 2,5 - 0,2048 = 1,95$

b) $x = 4,7 \quad y = 0,8635 \cdot 4,7 - 0,2048 = 3,85$

3. Оцінки дисперсій коефіцієнтів парної лінійної регресії:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{4,529}{10-2} = 0,149$$

$$s_{b_0}^2 = s^2 \cdot \frac{\overline{x^2}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = 0,149 \cdot \frac{5,789}{0,4529} = 0,1904$$

$$s_{b_1}^2 = s^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = 0,149 \cdot \frac{1}{0,4529} = 0,0329$$

Виконані розрахунки перевіряємо вбудованими функціями EXCEL: ***ОТРЕЗОК, НАКЛОН, СТОШУХ.***

4. Інтервальна оцінка для функції парної лінійної регресії.

Коефіцієнт $t(\gamma, n-2)$ визначаємо за допомогою функції EXCEL СТЬЮДРАСПОБР($1-\gamma; n-2$)=СТЬЮДРАСПОБР(0,95;8).

Значення лінійної парної регресії $\hat{y}_i$ розраховуємо за допомогою функції EXCEL***ПРЕДСКАЗ(*** z *;диапазон_значений_* y *;диапазон_значений_* x *)* де z - поточне значення змінної x.

Розраховуємо оцінку $s^2_{\hat{y}}(x)$ для дисперсії функції $\hat{y}(x)$ для поточного значення змінної x за формулою (5.9).

Верхню і нижню межі для $\hat{y}(x)$ розраховуємо за формулами (5.8).

5. Критичне значення критерію Фішера визначаємо допомогою функції EXCEL
FРАСПОБР.

$$F_{кр}(1-\alpha;1;n-2) = \text{FРАСПОБР(0,05;1;8)=5,318}$$

Розрахункове значення критерію Фішера

$$F_r = \frac{Q_r \cdot (n-2)}{Q_e} = \frac{3,378 \cdot 8}{1,191} = 22,673$$

Умова (5.10) виконується ($F_r > F_{кр}$), тобто з ймовірністю 95% ($\gamma = 0,95$) отримане рівняння $\bar{y}_x = 0.8635x - 0.2048$ значимо.

Приклад розрахунку в EXCEL надано в додатку Г. Варіанти завдань надано в додатку Д.

ТЕМА №6 ПАРНА НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

6.1 Теоретичні відомості

За методикою оцінок параметрів парні нелінійні регресії розглядають двох видів: 1) нелінійні за факторами, але лінійні за невідомими параметрами, які підлягають оцінці; 2) нелінійні за факторами і параметрами. Регресії, нелінійні за факторами, але лінійні за оцінюваними параметрами, називаються ***квазілінійними.***

Парну квазілінійну регресію можна записати в загальному вигляді: $\tilde{Y} = b_1\varphi(X) + b_0$. Заміною $z = \varphi(x)$ парна нелінійних регресія приводиться до лінійної парної регресії: $\tilde{Y} = b_0 + b_1 \cdot z$.

Формули для оцінок параметрів набувають вигляду:

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} z_i y_i - \sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}, \; b_0 = \bar{y} - b_1\bar{z}. \tag{6.1}$$

Для знаходження параметрів нелінійної парної моделі як за факторами, так і за параметрами для деяких моделей спочатку або логарифмуванням, або зворотними діями приводять модель до лінійного вигляду, а потім знаходять параметри моделі за методом найменших квадратів як для звичайної лінійної моделі.

Рівняння нелінійної регресії, також як і у випадку лінійної залежності доповнюється показником кореляції, а саме ***коефіцієнтом кореляції***, який розраховується за формулою

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \tilde{Y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}}, \tag{6.2}$$

де Y_i – статистичні дані;

$\tilde{Y}_i$ – відповідні розрахункові дані, які знаходяться за допомогою регресійної формули при відповідних значеннях X_i;

$\bar{Y}$ – середнє значення $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ (n – об’єм вибірки).

Індекс кореляції показує рівень кореляції (зв’язку) між спостережуваними Y_i і розрахунковими значеннями $\tilde{Y}_i$.

Слід відмітити, що для квазілінійних моделей значення індексу кореляції співпаде зі значення лінійного коефіцієнту кореляції міжY та z, що є перетвореною величиною ознаки-фактору, тобто z= φ(X).

Для оцінки адекватності парної нелінійної регресії спостережуваним даним можна використовувати критерій Фішера, як і для парної лінійної моделі:

$$F = \frac{R^2}{\left(1 - R^2\right)} \cdot \frac{n-2}{1}, \qquad (6.3)$$

R – індекс кореляції;

n – число спостережень або об'єм вибірки.

Довірча зона базисних даних для квазілінійної регресії знаходиться за тими ж формулами, що і для лінійної, лише замість X береться Z. Довірча зона отримується сполученням відповідно верхніх і нижніх меж довірчих інтервалів за формулою:

$$\tilde{Y}_i - \Delta_{M_i} \le M(Y_i) \le \tilde{Y}_i + \Delta_{M_i}, \qquad (6.4)$$

де $\Delta_{M_i} = t_{(p,\, n-2)} \cdot \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(z_i - \bar{z})^2}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}}$, $\tilde{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{y}_i\right)^2}{n-2}}$,

$t_{(p,n-2)}$ – табличне значення t – критерію, яке знаходиться при відповідному рівні значущості $\alpha = 1 - p$ і ступені вільності $n-2$;

z_i– відповідні статистичні значення $z_i = \varphi\left(x_i\right)$;

$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$ – середнє значення для z_i.

Якщо встановлено, що із заданою надійністю p математична модель адекватна спостережуваним даним і соціально-економічні умови на період прогнозування змінюються за закономірностями, що мають місце і в базисному періоді то точкова оцінка прогнозу знаходиться за формулою:

$$\tilde{y}_{pr} = b_1 z_{pr} + b_0, \quad \text{де} \quad z_{pr} = \varphi\left(x_{pr}\right).$$

Інтервал довіри для окремого значення $\tilde{y}_{pr}$:

$$\tilde{Y}_{pr} - \Delta_{pr} \le Y_{pr} \le \tilde{Y}_{pr} + \Delta_{pr}, \tag{6.5}$$

де $$\Delta_{pr} = t_{(p,\,n-2)} \cdot \tilde{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(z_{pr} - \bar{z})^2}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}}.$$

Інтервал довіри для математичного сподівання окремого значення $\tilde{y}_{pr}$:

$$\tilde{Y}_{pr} - \Delta_{M_{pr}} \le M(Y_{pr}) \le \tilde{Y}_{pr} + \Delta_{M_{pri}} \tag{6.6}$$

де $$\Delta_{M_{pr}} = t_{(p,\,n-2)} \cdot \tilde{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(z_{pr} - \bar{z})^2}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}}.$$

***Зауваження*:** *У тих випадках, коли нелінійна регресія перетворюється в лінійну шляхом логарифмування і заміни величини, довірча зона спочатку знаходиться для лінійної регресії, потім, використовуючи зворотні перетворення для меж надійних інтервалів лінійної регресії, знаходяться межі надійних інтервалів нелінійної регресії.*

Лабораторна робота №6 Парна нелінійна регресія

Розглянемо показникову регресію $\tilde{Y} = b_1^x b_0$. Для приведення цієї регресії до лінійної вона логарифмується $\ln \tilde{Y} = x \ln b_1 + \ln b_0$ і проводиться замінавеличин $a_1 = \ln b_1$, $a_0 = \ln b_0$, $\tilde{Y}_{1ine} = \ln \tilde{Y}$,тобто отримуємо наступну лінійну модель $\tilde{Y}_{1ine} = a_1 x + a_0$.

За вище наведеними формулами знаходяться межі надійних інтервалів базисних даних лінійної регресії, а потім шляхом зворотних перетворень меж довірчих інтервалів лінійної регресії знаходяться межі надійних інтервалів показникової регресії: $\tilde{Y}_i \pm \Delta_{M_i} = e^{\left(\tilde{Y}_{1ine_i} \pm \Delta_{M\,line\,i}\right)}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$

В економічних задачах для оцінки впливу на показник будь-якого фактору часто використовують ***коефіцієнт еластичності***. Він показує на скільки відсотків зміниться показник, якщо фактор зміниться на один відсоток. Для парної регресії коефіцієнт еластичності знаходиться за формулою:

$$K_{x_i} = \frac{\tilde{Y}_i' X_i}{\tilde{Y}_i}, \tag{6.7}$$

де X_i – відповідне значення фактору,

$\tilde{Y}_i'$ – значення першої похідної від отриманого рівняння регресії,

$\tilde{Y}_i$ – теоретичне значення , що знаходиться за отриманим рівнянням регресії при відповідному значенні X_i.

Завдання.

Наведені значення незалежної змінної X(дохід американської сім'ї в тисяч доларів) і значення залежної змінної Y(частка витрат на товари тривалого користування в процентах від загальної суми витрат).

Параметри	Початкові дані									
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	13,4	15,4	16,5	18,6	19,1	21,3	21,7	22,4	22,6

Кожне значення Y студент повинен збільшити на $N/10$, де N - порядковий номер у груповому журналі.

Необхідно:

1. Побудувати рівняння нелінійної регресії заданої функції (додаток Е).
2. Розрахувати коефіцієнти рівняння нелінійної регресії.
3. Розрахувати вибірковий коефіцієнт кореляції і коефіцієнт еластичності.
4. Розрахувати оцінки дисперсій коефіцієнтів нелінійної регресії.
5. Побудувати інтервальну оцінку для функції парної лінійної регресії з надійністю $\gamma = 0,95$ (довірча ймовірність).
6. Виконати перевірку значущості рівняння нелінійної регресії за критерієм Фішера.

Методика розрахунку параметрів нелінійної регресії відповідає методиці розрахунку параметрів лінійної регресії.

ТЕМА№7 БАГАТОФАКТОРНА РЕГРЕСІЯ

7.1. Теоретичні відомості

На практиці економічний процес змінюється під впливом багатьох різноманітних факторів, які треба вміти виявити та оцінити. Саме багатофакторний регресійний аналіз допомагає знайти явний вигляд залежності досліджуваного показника від численних факторів, що впливають на його зміну, а також кількісно оцінити їхній вплив.

Узагальнена багатофакторна лінійна модель має наступний вигляд:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m \qquad (7.1)$$

Процес побудови багатофакторної моделі більш складний, ніж процес побудови простої лінійної регресії. Він складається з багатьох етапів.

Етап математико-статистичного аналізу є найважливішим підготовчим етапом для побудови регресійної багатофакторної моделі. На цьому етапі проводиться перевірка основних припущень класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюється перевірка факторів на ***мультиколінеарність***. Термін ***"мультиколінеарність"*** означає, що в багатофакторній регресійній моделі дві або більш незалежних змінних (факторів) пов'язані між собою лінійною або майже лінійною залежністю або, іншими словами, мають високий ступінь кореляції ($r_{x_i x_j} \to 1, i \neq j$).

Наслідки мультиколінеарності:

– велика дисперсія і коваріації оцінок параметрів, обчислених за методом найменших квадратів:

– збільшення інтервалу довіри;

– не значимість t – статистики.

Інформацію про парну залежність може дати симетрична кореляційна матриця, яка має наступний вигляд:

$$r = \begin{array}{c|ccccc} & y & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \hline y & r_{y^2} & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_k} \\ x_1 & r_{yx_1} & r_{x_1^2} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_k} \\ x_2 & r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & r_{x_2^2} & \dots & r_{x_2x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k & r_{yx_k} & r_{x_1x_k} & r_{x_kx_2} & \dots & r_{x_k^2} \end{array}$$

$r_{x_ix_j}$ - коефіцієнти парної кореляції між і-м та j-м факторами;

r_{yx_j} - коефіцієнт парної кореляції між залежною змінною (показником) у та j-м фактором (незалежним).

$$r_{11} = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ \hline x_1 & r_{x_1^2} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \dots & r_{x_1x_k} \\ x_2 & r_{x_2x_1} & r_{x_2^2} & r_{x_2x_3} & \dots & r_{x_2x_k} \\ x_3 & r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3^2} & \dots & r_{x_3x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k & r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & r_{x_kx_3} & \dots & r_{x_k^2} \end{array}$$ - кореляційна матриця

Кореляційну матрицю можливо побудувати використовуючи наступний алгоритм:

Крок 1. Нормалізувати змінні.

Позначимо вектори змінних економетричної моделі через $x_1, x_2, \dots, x_m$. Елементи нормалізованих векторів обчислимо за формулами:

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{\sigma_{x_k}^2 n}}, \ (k=\overline{1,m}) \qquad (7.\ 2)$$

де n- число спостережень ($i=\overline{1,n}$);m- число змінних; $\bar{x}_k$ - середнє арифметичне значення k-ї пояснювальної змінної; $\sigma_{x_k}^2$ - дисперсія k-змінної.

Крок 2. Знаходження кореляційної матриці:

$$r = X^T X \qquad (7.3)$$

де X -матриця стандартизованих (нормалізованих) змінних, X^T - матриця транспонована до матриці X.

Якщо значення деяких з елементів кореляційної матриці близьке до 1, це вказує на щільний зв’язок між ними або на мультиколінеарність. Тоді саме один з факторів необхідно залишити, а інший вилучити із подальшого розгляду. Найчастіше залишають той фактор, який з економічної точки зору більш вагомий для аналізу впливу на залежну змінну. Можна також залишити фактор, який має більший коефіцієнт кореляції із залежною змінною.

Найповніше дослідити мультиколінеарність можна за допомогою алгоритму Фаррада-Глобера. Цей алгоритм має три види статистичних критеріїв, згідно з якими перевіряється

– мультиколінеарність усього масиву незалежних змінних - загальна мультиколінеарність (критерій - χ^2);

– кожної незалежної змінної з рештою змінних (F- критерій);

– кожної пари незалежних змінних (t- критерій).

1. Для визначення загальної мультиколінеарності використовується χ^2-критерій, значення якого розраховується за формулою:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}\left(2(m-1)+5\right)\right] \cdot \ln|r|, \qquad (7.4)$$

де $|r|$ - визначник кореляційної матриці.

Значення цього критерію порівнюється з табличним при $\frac{1}{2}(m-1)m$ ступенях вільності і рівні значущості α. Критичне значення знаходимо за допомогою спеціальної функції ХИ2ОБР(). Якщо $\chi^2_{роз} > \chi^2_{кр}$, то в масиві пояснювальних змінних існує загальна мультиколінеарність.

2. Перевірка залежності фактору X_i від всіх інших незалежних факторів виконується за допомогою F – критерію.

Крок 1: Побудувати обернену матрицю до кореляційної: $C=r^{-1}$.

Крок 2: Розрахувати F- критерії за формулою

$$F_k = (c_{kk} - 1)\frac{n-m}{m-1}, \qquad (7.5)$$

де c_{kk} – діагональні елементи матриці С; n – число спостережень; m – число незалежних змінних. Фактичні значення критеріїв F_k порівнюються з табличними, коли маємо (m) і (n-m-1) ступенів вільності і рівень значущості α. Якщо $F_{k\ факт} > F_{табл}$, відповідна змінна мультиколінеарна з іншими.

Коефіцієнт детермінації для кожної змінної обчислюється за формулою $R^2_{X_k} = 1 - \frac{1}{c_{kk}}$ і показує залежність k –го фактору від всіх останніх факторів.

3. Для виявлення пар факторів, між якими існує мультиколінеарність необхідно:

Крок 1: Побудувати обернену матрицю до кореляційної: $C=r^{-1}$.

Крок 2: Знайти часткові коефіцієнти кореляції за формулою

$$r_{X_k X_j} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} c_{jj}}}, \tag{7.6}$$

де c_{kj}- елемент матриці C, що міститься в її k-му рядку і j-му стовпці. Частков коефіцієнти кореляції так само, як і парні, характеризують щільність зв'язку між двома змінними. Але на відміну від парних, частинні коефіцієнти характеризують щільність зв'язку за умови, що інші незалежні змінні сталі.

Крок 3: Обчислити t-критерії:

$$t = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}} \tag{7.7}$$

Фактичні значення критеріїв t_{kj} порівнюються з табличними при n-m ступенях вільності і рівні значущості α. Якщо $t_{kj}>t_{кр}$, то між незалежними змінними x_jі x_kіснує мультиколінеарність.

Для усунення мультиколінеарності, якщо між факторами X_i і X_jіснує мультиколінеарність, необхідно один з цих факторів виключити з розгляду. З розгляду виключається той фактор, для якого вибірковий коефіцієнт кореляції між ним і залежною змінною має менше значення.

Для знаходження оцінок параметрів узагальненої багатофакторної лінійної регресії використовується метод найменших квадратів, який у матричному вигляді буде мати наступний вигляд $\tilde{B} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$, де X - матриця значень незалежних факторів, X^T - транспонована матриця X, У – матриця значень залежного фактору.

Коефіцієнт множинної кореляціїє оцінкою близькості математичної форми зв'язку до вибіркових даних і вплив всіх незалежних факторів X_k на результативний фактор Y.

Формула для визначення коефіцієнта множинної кореляції :

$$R_{YX_1X_2...X_m} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widetilde{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}} \tag{7.8}$$

або у матричному вигляді $R_{YX_1X_2...X_m} = \sqrt{\frac{\widetilde{B}X^TY}{Y^TY} \cdot \frac{n-1}{m-1}}$,

де X – матриця значень незалежних факторів моделі, X^T - транспонована матриця X, $\widetilde{B}$ - матриця - стовпець значень параметрів моделі, Y – матриця - значень залежного фактору, Y^T - транспонована матриця - стовпець Y.

При лінійній залежності коефіцієнт множинної кореляції можна визначити через кореляційну матрицю:

$$R_{YX_1X_2...X_m} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}, \tag{7.9}$$

де Δr – визначник кореляційної матриці, Δr_{11} – визначние матриці міжфакторної кореляції.

Якість побудованої моделі в цілому оцінює коефіцієнт (індекс) детермінаціїї. ***Коефіцієнт (індекс) множинної детермінації*** розраховується як квадрат коефіцієнта множинної кореляції.

Скорегований коефіцієнт (індекс) множинної детермінації містить поправку на число ступенів вільності і розраховується за формулою:

$$\widetilde{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n-1}{n-m-1}, \tag{7.10}$$

де R^2 – коефіцієнт множинної детермінації, n – число спостережень, m – число незалежних факторів.

Статистичну значущість коефіцієнта детермінації і адекватність моделі можна перевірити за допомогою F – критерію:

$$F_R = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}, \tag{7.11}$$

де R^2 – коефіцієнт детермінації, n –об'єм вибірки, m – число незалежних факторів.

Для заданої надійності і ступенів вільності $k_1=m$, $k_2=n-m-1$ знаходимо F – критичне значення. Якщо розраховане значення F_R буде більш ніж критичне (табличне), то з надійністю p можна вважати модель адекватною і коефіцієнт множинної детермінації статистично значущим.

Довірчий інтервал для прогнозних значень математичного сподівання розраховується за формулою:

$$\tilde{Y}_{n+1} - t_\alpha \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{n+1}\left(X^T X\right)^{-1} X^T_{n+1}} \le M(Y_{n+1}) \le \tilde{Y}_{n+1} + t_\alpha \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{n+1}\left(X' X\right)^{-1} X^T_{n+1}}, \tag{7.12}$$

де t_α – критичне значення t – критерію при n-m-1 ступенях вільності і рівні значущості α; $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ - незміщена оцінка дисперсії залишків; m – кількість незалежних факторів моделі; X_{n+1} – вектор значень незалежних факторів, для яких розраховується прогноз. Величина $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ обчислюється за формулою:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{Y^T Y - \tilde{B}(X'Y)}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \tilde{Y}_i\right)^2}{n-m-1}} \tag{7.13}$$

Інтервальний прогноз індивідуального значення визначається за формулою

$$\tilde{Y}_{n+1} - t_\alpha \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{1 + X_{n+1}\left(X^T X\right)^{-1} X^T_{n+1}} \le Y_{n+1} \le \tilde{Y}_{n+1} + t_\alpha \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{1 + X_{n+1}\left(X' X\right)^{-1} X^T_{n+1}} \tag{7.14}$$

Відомо, що для характеристики випадкових змінних $\tilde{b}_i$, поряд з математичним сподіванням, застосовуються також дисперсія $\sigma^2_{b_i}$ і коваріація $\sigma_{b_j b_k}$ (i≠k). Істинні (справжні) значення цих параметрів класичної економетричної моделі утворюють ***дисперсійно – коваріаційну*** матрицю:

$$\operatorname{var}(\widetilde{B}) = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{b_0}^2 & \widetilde{\sigma}_{b_0 b_1} & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_0 b_i} & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_0 b_m} \\ \widetilde{\sigma}_{b_1 b_0} & \widetilde{\sigma}_{b_1}^2 & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_1 b_i} & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_1 b_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{\sigma}_{b_i b_1} & \widetilde{\sigma}_{b_i b_2} & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_i}^2 & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_i b_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{\sigma}_{b_m b_0} & \widetilde{\sigma}_{b_m b_1} & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_m b_i} & \dots & \widetilde{\sigma}_{b_m}^2 \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

Оцінки коваріаційної матриці $\operatorname{var}(\widetilde{B}) = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1}$ використовуються для знаходження стандартних помилок, обчислення довірчих інтервалів оцінок параметрів $\tilde{b}_i$ й при перевірці їх статистичної значущості:

$$t_{b_i} = \frac{b_i}{\widetilde{\sigma}_{b_i}} = \sqrt{F_{X_i}}\,, \tag{7.16}$$

де σ_{b_i} – середня квадратична помилка коефіцієнта регресії b_i, F_{X_i} – частковий F – критерій.

На головній діагоналі матриці $\operatorname{var}(\tilde{B})$ містяться оцінки дисперсії $\tilde{\sigma}_{b_i}^2$ і -ої оцінки параметра, що ж до елементів $\tilde{\sigma}_{b_i b_k}$ (i≠k), які розміщенні поза головною діагоналлю, то вони є оцінками коваріації між $\tilde{b}_i$ і $\tilde{b}_k$.

Для багатофакторної регресії ***частковий коефіцієнт еластичності*** показує, на скільки відсотків зміниться показник, якщо один із факторів зміниться на один відсоток при умові, що інші фактори не змінюються.

Частковий коефіцієнт еластичності багатофакторної регресії для фактора X_i ($i=\overline{1,m}$) знаходиться за формулою:

$$K_{X_i} = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{\tilde{Y}} \tag{7.17}$$

Лабораторна робота № 7 Багатофакторна регресія

На основі статистичних даних показника Y і факторів X_1, X_2, X_3 знайти:

1) кореляційну матрицю і розрахувати визначник для факторної кореляційної матриці;

2) використовуючи □^{2}-критерій, з надійністю P=0,95 оцінити наявність загальної мультиколінеарності. Якщо існує загальна мультиколінеарність, то, використовуючи t-статистику, з надійністю P=0,95 виявити пари факторів, між якими існує мультиколінеарність. Якщо такі пари існують, то один із факторів цієї пари виключити із розгляду;

3) оцінки параметрів лінійної залежності між показником У та залишившимися факторами X_i;

4) множинний коефіцієнт кореляції та скорегований індекс множинної детермінації;

5) використовуючи F- критерій, з надійністю P=0,95 перевірити статистичну значущість коефіцієнта детермінації (оцінити адекватність прийнятої математичної моделі статистичним даним на основі критерію Фішера);

6) якщо математична модель із заданою надійністю адекватна експериментальним даним, то використовуючи t-статистику, з надійністю P=0,95 оцінити значущість параметрів регресії; знайти значення прогнозу показника для заданих значень факторів; з надійністю P=0,95 обчислити його довірчий інтервал; обчислити частинні коефіцієнти еластичності для точки прогнозу.

На основі отриманих розрахунків зробити економічний аналіз.

Задана статистична сукупність спостережень надана в табл. 7.1**.**

Таблиця 7.1.

Місяць	Прибуток на місяць Y, грн..	Фондовіддача X_1, грн	Продуктивність праці X_2, грн	Питомі інвестиції X_3, грн.
1	40	12	5	15
2	45	17	7	18
3	40	13	6	16
4	43	14	7	17
5	48	16	6	20
6	39	15	5	15
7	42	14	6	16
8	45	17	9	18
9	38	12	5	19

10	48	18	10	20
11	50	20	11	22
12	48	17	10	21
13	49	18	12	21
14	45	19	8	20
15	49	20	9	22
16	52	22	14	23
17	54	24	15	24
18	51	21	13	20
19	55	25	16	24
20	56	27	18	25
21	?	19,855	10,56	21,78

1. Для побудови кореляційної матриці в Excel будемо використовувати інструмент аналізу даних **Корреляция**, (***Сервис – Анализ данных – Корреляция)*** рис. 7.1.

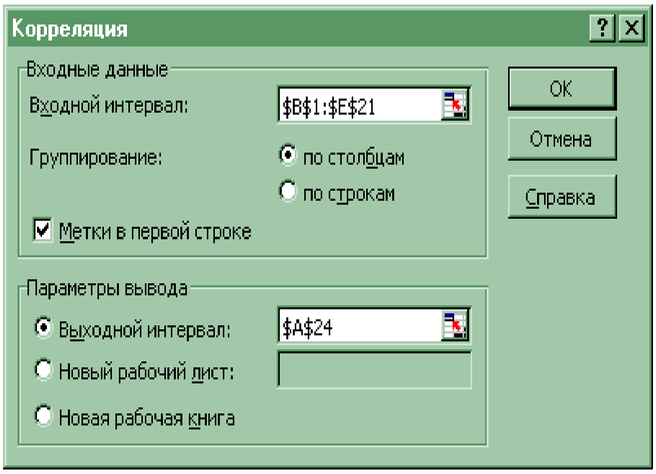


Рис.7.1. Діалогове вікно аналізу даних **Корреляция**

Де *Входной интервал* – вказується вся область, яка містить початкові статистичні дані, *Метки в первой строке* – прапорець вказує, що в першому рядку даних знаходяться пояснювальні заголовки, *Выходной интервал* – вказується адрес комірки, починаючи з якої будуть показані результати (рис.7.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Прибуток на місяць Y, грн.	Фондовіддача X_1, грн	Продуктивність праці X_2, грн	Питомі інвестиції X_3, грн.	Y_r	$(Y_i-Y_{sr})^2$	$(Y_i-Y_r)^2$
2		40	12	5	15	39,638933	46,9225	0,130369
3		45	17	7	18	45,598493	3,4225	0,358193
4		40	13	6	16	40,830845	46,9225	0,690303
5		43	14	7	17	42,022757	14,8225	0,955004
6		48	16	6	20	44,406581	1,3225	12,91266
7		39	15	5	15	43,214669	61,6225	17,76343
8		42	14	6	16	42,022757	23,5225	0,000518
9		45	17	9	18	45,598493	3,4225	0,358193
10		38	12	5	19	39,638933	78,3225	2,686102
11		48	18	10	20	46,790404	1,3225	1,463121
12		50	20	11	22	49,174228	9,9225	0,681899
13		48	17	10	21	45,598493	1,3225	5,767238
14		49	18	12	21	46,790404	4,6225	4,882313
15		45	19	8	20	47,982316	3,4225	8,89421
16		49	20	9	22	49,174228	4,6225	0,030355
17		52	22	14	23	51,558052	26,5225	0,195318
18		54	24	15	24	53,941876	51,1225	0,003378
19		51	21	13	20	50,36614	17,2225	0,401778
20		55	25	16	24	55,133788	66,4225	0,017899
21		56	27	18	25	57,517611	83,7225	2,303144
22	прогноз	?	19,855	10,56	21,78	49,001401		
23	Разом						550,55	60,49543

Рис.7.2. Розрахунки в Excel

Для проведення розрахунків кореляційну матрицю необхідно добудувати: виділити необхідні комірки – ***Правка*** – ***Копировать*** – виділити необхідну комірку, починаючи з якої будуть вставлені дані – ***Правка*** – ***Специальнаявставка*** – флажок ***Транспонировать*** – ***Ок***(рис. 7.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
24	Кореляційна матриця						Факторна кореляційна матриця для факторів X_1, X_2,				Матриця обернена до факторної кореляційної С		
25		Y	X_1	X_2	X_3								
26	Y	1	0,943460748	0,93394498	0,91572307		1	0,941919	0,891652		10,6712	-7,37597	-3,0546
27	X_1	0,943461	1	0,94191869	0,89165207		0,941919	1	0,875871		-7,37597	9,392918	-1,65019
28	X_2	0,933945	0,941918693	1	0,87587145		0,891652	0,875871	1		-3,0546	-1,65019	5,168995
29	X_3	0,915723	0,891652074	0,87587145	1								
30						det r_{11}=	0,02182	F_1=	82,20524	r_{12}=	0,736736	t_{12}=	4,492357
31						n=	20	F_2=	71,33981	r_{13}=	0,411287	t_{13}=	1,860414
32						m=	3	F_3=	35,43646	r_{23}=	0,236827	t_{23}=	1,005053
33						χ^2=	65,66101	F_{kr}=	3,591538			t_{kr}=	2,109819
34						χ^2_{kr}=	7,814725						
35													
36							Факторна кореляційна матриця для факторів X_1, X_3				Матриця обернена до факторної кореляційної С		
37													
38							1	0,891652			4,879082	-4,35044	
39							0,891652	1			-4,35044	4,879082	
40							det r_{11}=	0,204957	χ^2_{kr}=	3,841455	r_{13}=	0,891652	
41							m=	2	F_1=	69,82348	90	8,356045	
42							n=	20	F_3=	69,82348	t_{kr}=	2,100924	
43							χ^2=	27,73675	F_{kr}=	4,413863			

Рис. 7.3. Розрахунки кореляційних матриць.

Кореляційна матриця матиме наступний вигляд:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,943 & 0,934 & 0,916 \\ 0,943 & 1 & 0,942 & 0,892 \\ 0,934 & 0,942 & 1 & 0,876 \\ 0,916 & 0,892 & 0,876 & 1 \end{pmatrix}.$$

Факторна кореляційна матриця:

$$r_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0,942 & 0,892 \\ 0,942 & 1 & 0,876 \\ 0,892 & 0,876 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент цієї матриці характеризує щільність зв'язку однієї незалежної змінної з іншою. Оскільки діагональні елементи характеризують щільність зв'язку кожної незалежної змінної з самою **собою, то вони дорівнюють одиниці.**

Визначник факторної кореляційної матриці (функція МОПРЕД()), дорівнює:

$\Delta r_{11} = 0,02182.$

2. Користуючись елементами факторної кореляційної матриці можна зробити висновок, що між факторами X_1, X_2, X_3 існує зв'язок. Перевіримо, чи є цей зв'язок виявленням мультиколінеарності.

Визначник кореляційної матриці r : Δr_{11} = $\det r_{11}$=0,022. Оскільки він наближається до 0, то в масиві пояснюючих змінних може існувати мультиколінеарність.

Обчислимо $\chi^2 = -[20 - 1 - (2 \cdot 3 + 5)/6] \cdot Ln(0,022) = 65,66$

При ступені свободи $\frac{1}{2} m \cdot (m-1) = 3$ і рівні значущості $\alpha = 0,05$ знаходимо критичне значення критерію, використовуючи функцію ХИ2ОБР() $\chi^2_{кр}$=7,8. Оскільки $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то в масиві пояснювальних змінних (продуктивність праці, питомі інвестиції та фондовіддача) існує мультиколінеарність.

Матрицю, обернену до факторної кореляційної матриці, знаходимо використовуючи функцію МОБР().

$$C = \begin{pmatrix} 10,671 & -7,376 & -3,055 \\ -7,376 & 9,393 & -1.65 \\ -3,055 & -1,65 & 5,169 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи діагональні елементи матриці C обчислимо F – критерії:

$$F_1 = (c_{11} - 1)\frac{n-m}{m-1} = (10,67 - 1)\frac{17}{2} = 82,21$$

$$F_2 = (c_{22} - 1)\frac{n-m}{m-1} = (9,39 - 1)\frac{17}{2} = 71,34$$

$$F_3 = (c_{33} - 1)\frac{n-m}{m-1} = (5,169 - 1)\frac{17}{2} = 35,44$$

Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і ступені вільності $m - 1 = 2$ і $n - m = 17$ критичне (табличне) значення критерію (функція FРАСПОБР()) $F_{кр.}$=3,59. Оскільки кожне з розрахованих значень F_i більше ніж критичне, то кожна з пояснювальних змінних мультиколінеарна з іншими.

Використовуючи елементи матриці C, обчислимо часткові коефіцієнти кореляції (рис.3):

$$r_{12} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{22}}} = \frac{7,376}{\sqrt{10,671 \cdot 9,393}} = 0,737$$

$$r_{13} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{33}}} = \frac{3,055}{\sqrt{10,671 \cdot 5,169}} = 0,411$$

$$r_{23} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{33} \cdot c_{22}}} = \frac{1,65}{\sqrt{5,169 \cdot 9,393}} = 0,237$$

Порівнявши часткові коефіцієнти кореляції з парними (кореляційна матриця), можна помітити, що частинні коефіцієнти значно менш за парні. Це ще раз показує, що на підставі парних коефіцієнтів кореляції не можна зробити висновків про наявність або відсутність мультиколінеарності.

Визначимо t – критерії на основі частинних коефіцієнтів кореляції:

$$t_{12} = \frac{r_{12}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}} = \frac{0,737\sqrt{17}}{\sqrt{1 - 0,737^2}} = 4,49$$

$$t_{13}=\frac{r_{13}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{13}^2}}=\frac{0,411\sqrt{17}}{\sqrt{1-0,411^2}}=1,86$$

$$t_{23}=\frac{r_{23}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}=\frac{0,237\sqrt{17}}{\sqrt{1-0,237^2}}=1,005$$

Табличне значення критерію $t(0,05;17)=2,12$ (функція СТЬЮДРАСПОБР()). Звідси виходить, що лише для пари факторів X_1 і X_2 існує мультиколінеарність. Розрахував вибіркові коефіцієнти кореляції, що пов'язують пояснювальні фактори з залежним Y, знайдемо r_{x_1y} =0,944, r_{x_2y} =0,934, оскільки $r_{x_1y} > r_{x_2y}$, з моделі виключаємо фактор X_2.

Знайдемо кореляційну матрицю факторів X_1 і X_3:

$$r=\begin{pmatrix}1 & 0,892\\ 0,892 & 1\end{pmatrix}.$$

Обернена матриця:

$$C=\begin{pmatrix}4,879 & -4,35\\ -4,35 & 4,879\end{pmatrix}.$$

Значення χ^2=27,74 більше ніж $\chi^2_{кр}$ = 3,8. Це значить, що між факторами X_1 і X_3 існує мультиколінеарність. Це підтверджує і значення t – статистики:

$$r_{13}=0,8917,\qquad t_{13}=8,356$$

$$t(0,05;17)<t_{13}$$

Тобто з моделі необхідно виключити ще один з факторів. Оскільки r_{x_3y} =0,916< r_{x_1y} =0,944, то таким фактором є фактор X_3.

Отже з моделі виключили два фактори X_2 і X_3.

Зауваження: Якщо при перевірці наявності мультиколінеарності визначається зв'язок, наприклад, між парами факторів X_1 і X_2 та X_2 і X_3, то з розгляду виключається той фактор, який приймає участь одночасно в першій та другій парах. Так для нашого приклада таким фактором є X_2.

3. Припустимо, що між показником Y і фактором X_1 існує лінійна залежність: $\tilde{Y}=b_0+b_1X_1$.

Знайдемо оцінки параметрів, використовуючи матричні операції: $\widetilde{\mathrm{B}} = \left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$. Перш ніж проводити розрахунки добавимо до залишившихся факторних значень стовпчик, який містить одиниці. Їх кількість повинна дорівнювати обсягу вибірки n (рис. 7.4).

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
25				Розрахунки параметрів моделі							матриця		
26			X_1		Y						Y	X1	
27		1	12		40	$X^TX=$	20	361		Y	1	0,9434607	
28		1	17		45		361	6861		X1	0,94346	1	
29		1	13		40						Остаточна матриця, оберенена до		
30		1	14		43						кореляційна матриця		
31		1	16		48	$(X^TX)^{-1}=$	0,99449	-0,05233			9,10069	-8,586141	
32		1	15		39		-0,05233	0,0029			-8,5861	9,1006868	
33		1	14		42					n=	20	m=	1
34		1	17		45	$X^TY=$	937			$R^2=$	0,89012	перевірка	0,89012
35		1	12		38		17324			R=	0,94346	F=	145,812
36	X=	1	18	Y=	48					$R^2_{скор}=$	0,88401	$F_{kr}=$	4,41386
37		1	20		50	B=	25,336						
38		1	17		48		1,19191						
39		1	18		49								
40		1	19		45		$Yr_{n-1}=$	49,0014					
41		1	20		49	$X_{n-1}=$	1	19,855	Δ=	3,96437			
42		1	22		52					45,037	$<=Y_{n-1}<=$	52,965774	
43		1	24		54	$X_{n-1}(X^TX)^{-1}=$	-0,04445	0,00523	$K_{X1}=$	0,48295			
44		1	21		51								
45		1	25		55	$X_{n-1}(X^TX)^{-1}X^T_{n-1}=$		0,05944					
46		1	27		56								

Рис. 7.4. Розрахунки параметрів моделі.

Для розрахунків викоритсовуються функціїї: розрахунок зворотньої матриці МОБР(); добуток матриць МУМНОЖ().

Для матричних розрахунків вExcel використовувались наступні формули (додаток 3):

$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$ =МУМНОЖ(ТРАНСП(P27:Q46);P27:Q46);

$\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}$ =МОБР(U27:V28);

$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$ =МУМНОЖ(ТРАНСП(P27:Q46);S27:S46);

B=МУМНОЖ(U31:V32;U34:U35).

Економетрична модель має вигляд: $\tilde{\hat{Y}} = 25,336 + 1,192 X_1$.

4. Коефіцієнт детермінації знайдемо на основі матриці оберненої до розширеної кореляційної матриці, вона містить парні вибіркові коефіцієнти кореляції не тільки між пояснювальними змінними, але й Y (рис. 4).

$$R^2_{YX_1} = 1 - \frac{1}{c_{11}} = 1 - \frac{1}{9,1} = 0,89.$$

Для розрахунку множинного коефіцієнта детермінації можна використовувати формулу:

$$R^2_{YX_1} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \tilde{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{60,4954}{550,55} = 0,89$$

Множиний коефіцієнт кореляції $R_{YX_1} = \sqrt{0,89} = 0,943$.

Скорегований коефіцієнт (індекс) множинної детермінації розраховується за формулою:

$$\tilde{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0,89) \cdot \frac{20-1}{20-1-1} = 0,884$$

5. Розрахуємо значення F – критерію:

$$F_R = \left(c_{11} - 1\right)\frac{n-m-1}{m} = \left(9,1 - 1\right)\frac{20-2}{1} = 146 \text{ або}$$

$$\mathrm{F_R} = \frac{\mathrm{R}^2}{1 - \mathrm{R}^2} \cdot \frac{\mathrm{n - m - 1}}{\mathrm{m}} = \frac{0,89}{1 - 0,89} \cdot \frac{20 - 1 - 1}{1} = 146.$$

Побудована модель є адекватною, оскільки обчислене за F – критерієм значення більш ніж критичне $F\left(0,05;1;18\right) = 4,41$. Це означає також, що коефіцієнт множинної детермінації значущий.

6. Розрахуємо значення незміщеної оцінки дисперсії залишків у матричному вигляді:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{Y^TY - \tilde{B}(X'Y)}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \tilde{Y}_i\right)^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{60,4954}{20-1-1}} = 1,833.$$

Обчислимо дисперсійно – коваріаційну матрицю (рис. 7.5):

$$\mathrm{var}\left(\tilde{B}\right) = \sigma^2_\varepsilon (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 3,34235 & -0,17586 \\ -0,17586 & 0,00974 \end{pmatrix}.$$

	AB	AC	AD	AE	AF
29		Дисперсійно-коваріаційна матриця			
30					
31	$\sigma^2_{\varepsilon}(X^TX)^{-1}=$		3,34235	-0,17586	
32			-0,17586	0,00974	
33		$\sigma_{\varepsilon}=$	1,83326		
34		$t_{b0}=$	13,8584		
35		$t_{b1}=$	12,0753		
36		$t_{кр}=$	2,10092		
37					

Рис. 7.5. Розрахунок дисперсійно-коваріаційної матриці.

Стандартні помилки оцінок параметрів моделі $\tilde{\hat{\sigma}}_{b_0} = 1,828$, $\tilde{\hat{\sigma}}_{b_1} = 0,0987$, знайдено обчисливши квадратні корні від чисел 3,34235 і 0,00974 відповідно.

Знайдемо значення t статистики:

$t_{b_0} = \dfrac{b_0}{\sigma_{b_0}} = \dfrac{25,33}{1,828} = 13,8584$, $t_{b_1} = \dfrac{b_1}{\sigma_{b_1}} = \dfrac{1,192}{0,09871} = 12,0753$, тобто параметри є статистично значущими, оскільки ці значення більш ніж $t_{кр}$=2,101, яке знайдено при рівні значущості α=0,05 і ступені вільності n-m-1=18, де n – обсяг вибірки, m – кількість незалежних факторів.

Знайдемо точкове значення прогнозу для $X_{1_{n+1}}$, що дорівнює 19,85, для цього це значення підставимо в рівняння отриманої моделі:

$$\tilde{Y}_{n+1} = 25,336 + 1,192 \cdot 19,85 \approx 49.$$

Щоб отримати інтервальний прогноз необхідно розрахувати стандартну помилку прогнозу індивідуального значення:

$$\Delta = t_{(\alpha,k)} \cdot \tilde{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 + X_{n+1}\left(X^T X\right)^{-1} X_{n+1}^T} = 2,1 \cdot 1,83 \cdot \sqrt{1 + 0,0594} = 3,964$$

Звідси $49 - 3,964 \le Y_{n+1} \le 49 + 3,964$, тобто $45,04 \le Y_{n+1} \le 52,96$.

У нас залишився тільки один незалежний фактор X_1. Значення часткового коефіцієнта еластичності для точки прогнозу знаходиться за формулою (додаток 3):

$$K_{X_1} = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial X_{1_{n+1}}} \cdot \frac{X_{1_{n+1}}}{\tilde{Y}} = \frac{b_1}{b_0 + b_1 \cdot X_{1_{n+1}}} X_{1_{n+1}} = \frac{1,192 \cdot 19,85}{49} = 0,48.$$

ВИСНОВКИ

1. Використовуючи можливості пакету Excel, була побудована кореляційна матриця:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,943 & 0,934 & 0,916 \\ 0,943 & 1 & 0,942 & 0,892 \\ 0,934 & 0,942 & 1 & 0,876 \\ 0,916 & 0,892 & 0,876 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елементами цієї матриці є парні лінійні коефіцієнти кореляці. Починаючи з другого рядка і другого стовпчика вони попарно характеризують парний лінійний зв’язок між умовно незалежними факторами економетричної моделі X_i. Як видно з цих значень можливо припустити, що в моделі існує таке явище, як мультиколінеарність. Скоріш за все, в моделі залишиться лише один з незалежних факторів. Це підтверджує і розрахунок визначника факторної кореляційної матриці $\Delta r_{11} = 0,02182$. Оскільки воно наближується до 0, то в моделі може існувати загальна мультиколінеарність.

2. В результаті розрахунків і перевірки моделі на мультиколінеарність було виявлено, що між факторами X_1 і X_2, а потім і X_1 і X_3 існує залежність, тому на основі аналізу розрахунків в моделі залишився лише один фактор X_1.

3. Економетрична модель прибутка на місяць має вигляд:

$$\tilde{\hat{Y}} = 25,336 + 1,192 X_1$$

Зауваження: Коефіцієнти регресії при і-му факторі показують, як буде змінюватись результат, при зміні відповідного фактора на 1 при умові, що інші фактори незмінні.

4. Коефіцієнт множинної детермінації:

$$R^2_{YX_1} = 0,89$$

Він показує, що прибуток на місяць Y на 89% визначається досліджуваними чинниками (для задачи, що розглядалась фондовіддачею X_1).

Множиний коефіцієнт кореляції $R_{YX_1} = 0,943$. На підставі цього коефіцієнта можна стверджувати, що зв'язок між прибутком та досліджуваними чинникам – тісний.

5. Критерій Фішера $F_R = 146$. Табличне (критичне) його значення $F(0,05;1;18) = 4,41$. Оскільки розрахункове значення цього критерію більш ніж табличне, то з надійністю 0,95 можна зробити висновок про адекватність побудованої моделі, а також про підтведження гіпотези про статистичну значущість зв'язку на основі економетричної моделі.

6. Перевірка достовірності кожної оцінки параметрів моделі наоснові t – критерію показала, що кожна з оцінок отриманих параметрів b_0 і b_1 є статистично значущими з надійністю 0,95. Таким чином, достовірность моделі в цілому досягається за рахунок параметрів b_0 і b_1.

Зауваження. При перевірці значимості оцінок параметрів моделі інколи виникає ситуація, коли не всі оцінки параметрів є статистично значущими. Наприклад, в економетричній моделі залишилось чотири фактора і тільки для останніх трьох оцінки параметрів виявились статистично значущими, тоді роблять висновок, що достовірність моделі в цілому досягається за рахунок останніх трьох параметрів.

7. Точковий та інтервальний прогнози згідно з отриманою економетричною моделлю:

$\tilde{Y}_{n+1} = 49$ і $45,04 \le Y_{n+1} \le 52,96$

8. Частковий коефіцієнт еластичності показує на скільки відсотків зміниться показник, якщо один із факторів зміниться на один відсоток при умові, що інші фактори не змінюються. Еластичність першого чинника для точки прогнозу показала, що при зростанні фондоввідачі на 1% прибуток збільшиться на 0,48%.

Зауваження. Якщо модель буде мати декілька чинників, то в цьому випадку аналізуючи еластичність чинника необхідно робити наступний висновок, що при зростанні певного чинника на 1% і незміні інших, результат збільшиться на стільки-то відсотків.

Варіанти індивідуальних завдань надано в додатку Ж.

ТЕМА №8 ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ ДЛЯ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА

8.1. Теоретичні відомості

Виробнича функція — це економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники. До основних показників можна віднести дохід, прибуток, рентабельність, продуктивність праці, собівартість та інше.

Перше поняття виробничої функції пов'язане з математичним моделюванням технологічної залежності між обсягом продукції, що випускається, і кількісними характеристиками витрат ресурсів. Звідси і назва функції «виробнича». Уперше така функція була побудована американськими дослідниками Коббом і Дугласом ще в 30-ті роки XX ст. за даними про функціонування обробної промисловості США протягом двадцяти років і є класичним прикладом економетричного моделювання.

Функція Кобба — Дугласа (CDPF) належить до найвідоміших виробничих функцій, що набули широкого застосування в економічних дослідженнях, особливо на макрорівні. Класична виробнича функція Кобба — Дугласа має вигляд:

$$Q = A \cdot K^{\beta_1} \cdot L^{\beta_2} \tag{8.1}$$

де Q - обсяг продукції;

K - основний капітал;

L - робоча сила;

A - довільна стала.

У цій функції параметри β_1 і β_2 є невід'ємними.

Сума параметрів або степінь однорідності, класичної функції Кобба — Дугласа дорівнює одиниці ($\beta_1 + \beta_2 = 1$). А це означає, що при збільшенні обох виробничих ресурсів на одиницю обсяг продукції також збільшиться на одиницю. Отже, ефективність ресурсів у такому разі стала.

Практичні дослідження функції Кобба — Дугласа показали, що припущення про лінійну однорідність на практиці виконується рідко. Тому була запропонована виробнича функція загальнішого вигляду:

$$Q = a \cdot K^{\alpha} L^{b} \qquad (8.2)$$

Сума параметрів $(\alpha + b)$на відміну від попереднього випадку може бути як меншою, так і більшою від одиниці. Якщо$(\alpha + b) > 1$, то темпи росту обсягу продукції вищі за темпи росту виробничих ресурсів, а якщо $(\alpha + b) < 1$ темпи росту продукції нижчі за темпи росту ресурсів.

Граничний приріст продукції за рахунок приросту кожного ресурсу визначається як добуток коефіцієнта еластичності на середню ефективність ресурсу. Параметр a у функції Кобба — Дугласа залежить од вибраних одиниць вимірюванняQ,K,L; водночас числове значення цього параметра визначається також ефективністю виробничого процесу. Для фіксованих значеньKіL тій функції, в якої більше числове значення параметра a , відповідає більше значенняY. Отже, і виробничий процес, який описується цією функцією, буде ефективнішим.

Враховуючи, що $0 < a < 1$і $0 < b < 1$, $Y_{FF} < 0$ і $Y_{LL} < 0$ дійдемо висновку: при збільшенні ресурсів граничний приріст обсягу продукції зменшуватиметься.

Степінь однорідності цієї функції дорівнює $a + b$. Якщо $a + b = 1$, то рівень ефективності ресурсів не залежить від масштабів виробництва. Якщо $a + b < 1$, то з розширенням масштабів виробництва середні витрати в розрахунку на одиницю продукції зменшуються, а при $a + b > 1$ — збільшуються. Причому ці властивості не залежать від числових значеньKіLі зберігають силу в кожній точці виробничої функції.

Лабораторна робота №8 Обчислення коефіцієнтів нелінійної регресії для виробничої функції Кобба-Дугласа

Для наданих даних потрібно розрахувати оцінки B, b_1, b_2 для коефіцієнтів A, β_1, β_2 нелінійної моделі (8.1) вирішенням наступного завдання умовної мінімізації:

$$\min\left[\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - B\cdot K_i^{b_1}\cdot L_i^{b_2}\right)^2\right] \tag{8.3}$$

при обмеженні $b_1 + b_2 = 1$ та побудувати нелінійну множинну регресію для виробничої функції Кобба-Дугласа.

Q	657	1200	2427	4257	8095	9849
L	162	245	452	714	1083	1564
K	279	1167	3069	5585	9119	13989

Початкові («стартові») значення шуканих коефіцієнтів задаються довільно: $B = 2;\ b_1 = 0{,}5;\ b_2 = 0{,}5$.

Далі за допомогою команди «***Поиск решения»*** отримуємо значення коефіцієнтів $B = 3{,}197 \quad b_1 = 0{,}332 \quad b_2 = 0{,}668$, які задовольняють обмеження (3).

Розрахунки надані на рис. 1.

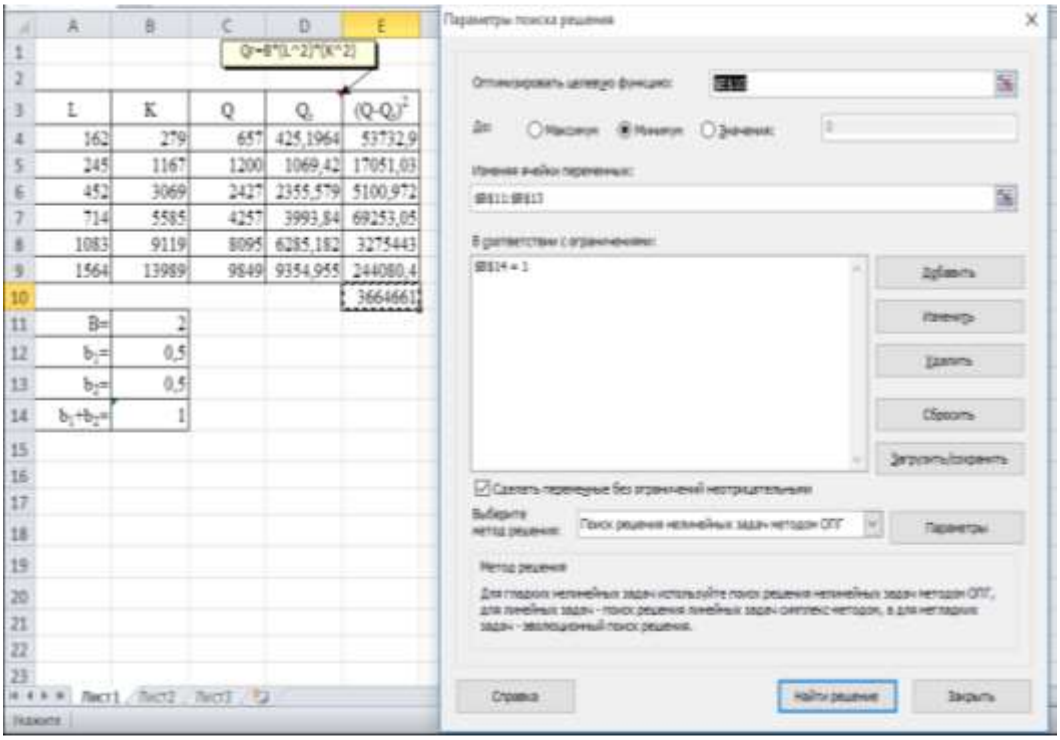
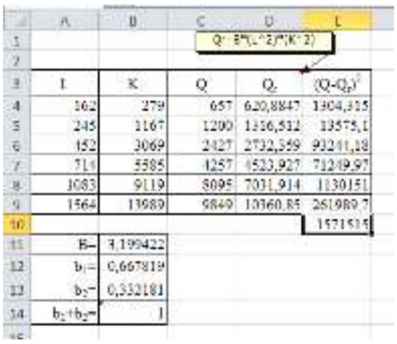


Рис.8.1.Завдання параметрів команди«Поиск решения»

Таким чином отримано наступне рівняння регресії (рис. 8.2)

$$\hat{Q}(K,L) = 3{,}199 \cdot K^{0{,}332} \cdot L^{0{,}668}$$



L	K	Q	Q_r	$(Q-Q_r)^2$
162	279	657	620,8847	1304,315
245	1167	1200	1316,512	13575,1
452	3069	2427	2732,359	93241,18
714	5585	4257	4523,927	71249,97
1083	9119	8095	7031,914	1130151
1564	13989	9849	10360,85	261989,7
				1571515
B=	3,199422			
b_1=	0,667819			
b_2=	0,332181			
b_1+b_2=	1			

Рис. 8.2. Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії

Економетрична модель дає змогу досить широко проаналізувати виробничу діяльність, визначити шляхи її вдосконалення з метою підвищення ефективності. Обгрунтованість такого аналізу повністю залежить од вірогідності економетричної моделі, від того, наскільки вона адекватна реальному процесу.

Варіанти індивідуальних завдань надано в додатку З.

ПЕРЕЛІК ЕКЗАМЕНАЦІЙНИХ ПИТАННЬ

1. Класифікація задач математичного програмування. Поняття оптимізаційної задачі.

2. Метод найменших квадратів як метод знаходження параметрів регресії.

3. Поняття базисної змінної. Знаходження початкового розв’язку задачі лінійного програмування.

4. Симплексний метод.

5. Симплексні таблиці. Економічна інтерпретація елементів симплексної таблиці.

6. Критерій оптимальності опорного плану.

7. Додаткові та штучні змінні, їх економічний зміст.

8. Двоїстість задач лінійного програмування. Правила побудови двоїстих задач.

9. Загальна постановка транспортної задачі. Збалансованість транспортної задачі.

10. Методи побудови початкових розв’язків транспортної задачі.

11. Метод потенціалів.

12. Потенціали та їх економічний зміст.

13. Транспортні задачі. Правила побудови циклу.

14. Економічна система та її основні характеристики. Система як об’єкт управління. Поняття моделі, математична модель, класифікація моделей.

15. Параметри регресії і їх оцінка. Економічний зміст одно факторної регресійної моделі.

16. Поняття еластичності. Її оцінка за допомогою коефіцієнтів еластичності.

17. Багатофакторна регресія. Визначення параметрів. Економічний зміст багатофакторної регресійної моделі.

18. Коефіцієнт кореляції. Правила оцінки тісноти зв’язку між економічними характеристиками.

19. Поняття ступенів свободи.

20. Коефіцієнт детермінації. Його зв'язок з коефіцієнтом кореляції.

21. Адекватність моделі. Критерій Фішера при оцінці адекватності моделі.

22. Загальний вигляд линійної моделі, умови застосування методу найменших квадратів (МНК-1).

23. Довірчі інтервали регресії. Критерій Стьюдента для оцінки параметрів моделі.

24. Поняття про мультиколінеарність та її вплив на параметри регресії.

25. Методи визначення наявності мультиколінеарності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Економіко-математичне моделювання (частина 1 – Математичне програмування); методичні вказівки до виконання лабораторного практикуму і контрольних робіт для студентів ЗДІА економічних спеціальностей (галузь знань 0305 – «Економіка та підприємництво») та спеціальності «Менеджмент» (Галузь знань 0306 – Менеджмент») денної та заочної форм навчання / Сост. В.В.Глущевський, Н.М.Д'яченко. – Запоріжжя: ЗДІА, 2003. – 52 с.

2. Математическое программирование. Конспект лекций для студентов экономических специальностей дневного и заочного отделений / Глущевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 150с.

3. Методические указания и индивидуальные задания по курсу «Математическое программирование (Линейное программирование)» для студентов экономических специальностей всех форм обучения / Сост. Глущевский В.В., Исаенко А.Н., - Запорожье: ЗГИА, 2002. – 66с.

4. Методы исследования операций. Методические указания к выполнению практических и лабораторных заданий (тема: «Решение задач линейного программирования с использованием Microsoft Excel for Windows») для студентов ЗГИА экономических специальностей дневного и заочного отделений / Сост. Глущевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 42с.

5. Калініченко Л.Ю., Вакуленко Т.С., Методичні вказівки для тестування з дисципліни Економетрія.-ЗДІА-2008.- 48с.

6. Нікітін Г.Ф., Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з курсу Економетрія.-ЗДІА.-2002- 60с

7. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов.- М.: Высшая школа, 1986. – 319с., ил. – 7 прим.

8. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248с. – 2 прим.

9. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. – Львів: Світ, 1995. – 216с. – 37 прим.

10. Білоусова С.В., Лугінін О.Є. Економетрія: Навч.посібник. - Київ:. - ЦНЛ, 2005.- 252 с. – 1 прим.

11. Клебанова Т.С., Дубровина Н.А., Раевнева Е.В.,Эконометрия.: Учебное пособие.-2-е узд.,испр.-Х.:ИД «Инжэк», 2005.-1609 с. – 1 прим.

12. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів / Харк. нац. аграр. ун-т ім. В.В. Докучаєва. – Харків: Гриф, 2002. – 580с.

13.Сакович В.А. Исследование операций (детерминированные методы и модели): Справочное пособие.: - Мн.: Выш. шк., 1984. – 256с. – 5 прим.

14. Грешилов А.А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях – М.: Радио и связь, 1991. – 320с.: ил. – 2 прим.

15. Таха Х. Введение в исследование операций: В двух книгах. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 479с., ил. – 3 прим.

16. Таха Х. Введение в исследование операций: В двух книгах. Кн. 2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 496с., ил. – 3 прим.

17. Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384с. – 27 прим.

18. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. - М.: Мир, 1981. – 323с.

19. Машина Н.І. Математичні методи в економіці: Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2003. – 148с. – 6 прим.

20. Катренко А.В. Дослідження операцій: Підручник. – 2-е вид. стереотипне. – Львів: «Магнолія Плюс», 2005, - 549с. – 5 прим.

21. Вітлінський В.В., Верченко П.І. Економічний ризик: Монографія. – К. КНЕУ, 2002. – 442с. – 7 прим.

22. Вітлінський В.В. Моделювання економіки; Навч. посібник.-К.: КНЕУ, 2003.-408 с. – 15 прим.

23. Й. Грубер. Економетрія, том 1. Вступ до множинної регресії та економетрії. – Київ: «Нічлава», 1998. - 384 с. – 2 прим.

24. Й. Грубер. Економетрія, том 2. Економетричні прогнози та оптимізаційні моделі. - Київ: «Нічлава», 1999. - 296 с. – 2 прим.

25. Корольов О.А., Рязанцева В.В. Практикум з економетрії: завдання з практичними рекомендаціями, алгоритмами та прикладом їх наскрізного виконання. Ч.1. Регресійний аналіз: Навч. Посібник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2002.-250 с.

26. Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О. Економетрія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – Л.: МАУП, 2003.-208 с. – 6 прим.

27. Лондар С.Л., Кюринець Р.В., Економетрія засобами MS EXCEL: Навч.посіб. для студ. вищ. навч. закл. – К.: Євр.ун-т, 2004.-242 с.

28. Лук'яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навчальний посібник.-К.: Літера ЛТД, 2002.-352 с.

29. Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Економетрія: Навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц.-К.:КНЕУ,2001.-192 с.

30. Толбатов Ю.А. Економетрика: підручник для студентів екон. спеціальностей вищого навчального закладу. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.

31.Елисеева И.И., Курышева С.В., Практикум по эконометрике: Учебн.пособ.-М.Финансы и статистика, 2003.-192 с.

ДОДАТОК А

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

1. Фірма виготовляє дві моделі А і В книжкових полиць. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів (дощок і машинного часу) на одну полицю кожної моделі. У ній же зазначено прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний запас ресурсів, який може використовувати фірма протягом тижня. Скільки виробів кожної моделі фірмі необхідно випускати за тиждень для одержання максимального прибутку від їхньої реалізації?

Ресурси	Норми витрат ресурсівна один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	А	В	
Дошки (м^2) Машинний час (год.)	3 0,2	4 0,5	1700 160
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	20	40	

2. Фірма виготовляє два продукти А і В, ринок збуту яких необмежений. Кожен продукт повинний бути оброблений кожною з машин I, II й III. Час обробки в годинах для кожного з виробів А і В, загальний запас машинного часу за тиждень і прибуток від реалізації виробів наведені нижче в таблиці:

Машина виду	Час обробки одиниці виробу (год.)		Загальний обсяг машинного часу (год.)
	А	В	
I II III	0,5 0,4 0,2	0,25 0,3 0,4	40 36 36
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	50	30	

Фірмі треба визначити план випуску виробів А і В, при якому прибуток від їхньої реалізації буде максимальною.

3. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальний обсяг наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсівна один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина (м^3):			
I виду	0,2	0.1	40
II виду	0.1	0,3	60
Трудомісткість (люд.-год.)	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	120	160	

Визначити, скільки столів і шаф фабриці варто виготовляти, щоб прибуток від їхньої реалізації був максимальним.

4. На промисловому комплексі по виробництву м'яса відгодовують свиней двох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Види корму	Потрібна кількість корму (ц) для породи свиней		Запаси корму, ц
	I	II	
Грубі (сінне борошно, трав'яні)	2	3	1000
Соковиті (коренеплоди, картопля)	4	2	1200
Комбікорми	1	1	380
Продуктивність, ц	3	2,5	

Потрібно знайти таке поголів'я свиней кожної породи, щоб продуктивність 1 ц м'яса була максимальною.

5. Для виробництва двох видів виробів А і В використовується токарське, фрезерне і шліфувальне устаткування. Норми витрат часу для кожного з типів устаткування на один виріб даного виду наведені втаблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу. Визначити план випуску виробів А і В, що забезпечує максимальний прибуток від їхньої реалізації.

Тип устаткування	Витрати часу (верст.-год.) на обробку одного виробу виду:		Загальний фонд робочого часу устаткування (год.)
	А	В	
Фрезерне	1	0,8	168
Токарне	0,5	0,1	180
Шліфувальне	0,6	1,2	144
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	140	180	

6. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний обсяг сировини даного виду, що може бути використано підприємством.

З огляду на те, що вироби А і В можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їхнього випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним.

Ресурси	Норми витрат ресурсів (кг) на один виріб		Загальний обсяг ресурсів (кг)
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

7. У цеху по виробництву консервованих фруктів виготовляються два види компотів із трьох видів фруктів (яблука, груші і сливи). Перед відправленням у торгову мережу компоти розливають у банки: компот I виду – у 5-літрові, II виду – у 3-літрові. Усі дані, необхідні для розв'язання задачі, наведені в таблиці.

Фрукти	Витрати фруктів (кг) для компоту виду		Запас, кг
	I	II	
Яблука Груші Сливи	1 0,3 0,75	0,5 0,25 1	200 65 200
Прибуток від реалізації 1 банки компоту, грн.	3	2	

Потрібно скласти такий план виробництва двох видів компоту, для якого прибуток був би найбільшим.

8. Компанія виготовляє полиці двох розмірів — А і В. Агенти в справах продажу вважають, що за тиждень на ринку може бути реалізовано до 550 полиць. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів (дощок і машинного часу) на одну полицю відповідного розміру. У ній же зазначено прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний запас ресурсів, який може використовувати фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсівна один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	А	В	
Дошки ($м^2$) Машинний час (год.)	2 0,2	3 0,5	1200 160
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

Скільки полиць кожного типу варто випускати протягом тижня, щоб прибуток від їхньої реалізації був найбільшим?

9. На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовують три види кормів. Кількість кормів кожного виду, які повинні щодня одержувати лисиці і песці, наведено в таблиці. У ній же зазначені загальний обсяг корму кожного виду, що може бути використано звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця. Визначити, скільки лисиць і песців варто вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їхніх шкурок був максимальним.

Вид корму	Кількість одиниць корму, що повинна отримувати		Загальний обсяг корму
	лисиця	песець	
I II III	2 4 6	3 1 7	180 240 426
Прибуток від реалізації однієї шкурки (грн.)	320	240	

10. Металургійний цех випускає два види продукції А і Б. Цех має у своєму розпорядженні три види устаткування, кожне з яких має свій фонд

робочого часу і продуктивність, наведені нижче в таблиці. У ній же наведений прибуток від реалізації 1 тонни продукції кожного виду. Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Тип устаткування	Продуктивність (т/год.) виду продукції		Фонд часу (год.)
	А	Б	
Плавильна піч	7	6	4200
Травильний агрегат	6	4	3000
Прокатний стан	2	1	900
Прибуток від реалізації 1 т продукції (тис.грн.)	4	3	

11. У цеху підприємства вирішено встановити додаткове устаткування двох видів – I і II. Площа, необхідна для установки одного комплекту устаткування відповідного виду, ціна такого комплекту, а також загальний обсяг ресурсів (виробничих площ і грошових ресурсів), що виділяються підприємством, наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсівна один комплект устаткування виду		Загальний обсяг ресурсів за день
	I	II	
Виробничі площі (м^2)	2	1,5	7
Грошові ресурси (тис.грн.)	2	3	10

Придбання одного комплекту устаткування 1$^{\underline{го}}$ виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 3 одиниці, а одного комплекту устаткування 2$^{\underline{го}}$ виду – на 4 одиниці. Визначити такий набір додаткового устаткування, що дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

12. Підприємство має у своєму розпорядженні виробничі потужності чотирьох видів. Норми витрат потужностей (у год.) кожного виду на одиницю продукції кожного із двох типів, загальний запас таких потужностей і прибуток від реалізації одиниці продукції №1 і №2 наведені в таблиці. Скласти план виробництва продукції двох видів, при якому доход підприємства від реалізації всієї продукції виявився б максимальним.

Потужності (у год.)	Норми витрат потужностей (у год.) на одиницю продукції типу		Загальний запас потужностей (год.)
	№1	№2	
M1	2	1	16
M2	1	1	10
M3	-	1	6
M4	1	-	7
Прибуток від реалізації одиниці продукції (грн.)	30	40	

13. На промисловому комплексі по виробництву м'яса відгодовують свиней двох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Види корму	Потрібна кількість корму (ц) для породи свиней	Запаси корму, ц

	I	II	
Грубі (сінне борошно, трав'яні)	2	5	900
Соковиті (коренеплоди, картопля)	**4,5**	**2**	1150
Комбікорми	**1**	**1,5**	340
Продуктивність, ц	4	5	

Потрібно знайти таке поголів'я свиней кожної породи, щоб продуктивність 1 ц м'яса була максимальною.

14. Підприємство випускає два види продукції і використовує три типи основного устаткування: токарське, фрезерне і шліфувальне устаткування. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів устаткування наведені втаблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду. Визначити такий обсяг випуску виробів, при якому загальний прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

Тип устаткування	Витрати часу (верст.-год.) на обробку одиниці продукції виду:		Загальний фонд робочого часу устаткування (год.)
	1	2	
Фрезерне	1	-	100
Токарне	2	1	280
Шліфувальне	1	2	320
Прибуток від реалізації 1 т продукції (тис.грн.)	80	60	

15. Кондитерська фабрика для виробництва двох видів карамелі A і B використовує три види вихідної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі кожного виду наведені втаблиці. У ній же наведені загальні запаси сировини і прибуток від реалізації 1 т продукції. Знайти план випуску карамелі, що забезпечує максимальний прибуток.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі		Загальний обсяг сировини (т)
	A	B	
Цукровий пісок	0,8	0,6	80
Патока	0,5	0,8	60
Фруктове пюре	-	0,1	8
Прибуток від реалізації 1 т карамелі (тис.грн.)	1,5	2	

16. Для виробництва двох видів виробів A і B використовуються три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного виду наведені в таблиці. У ній же наведені загальні запаси сировини і прибуток від реалізації одного виробу.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальний обсяг сировини (кг)
	A	B	

I II III	5 2 2	2 2 5	300 150 300
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

Фірмі треба визначити план випуску виробів А і В, при якому прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

17. Трикотажна фабрика для виготовлення светрів і кофточок використовує чисту вовну, силон і нітрон, запаси якого складають відповідно 190, 120 і 80 кг. Кількість пряжі кожного виду (у кг), необхідної для виготовлення 10 виробів, а також прибуток від їхньої реалізації наведені в таблиці.

Вид сировини	Витрати пряжі на 10 шт.	
	Светри	Кофточки
Вовна Силон Нітрон	3 2 1	2 1 1
Прибуток (у.о.)	50	30

Установити план випуску виробів, що максимізує прибуток.

18. Завод-виробник високоточних елементів для автомобілів випускає два різні типи деталей: X і V. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на одну деталь кожного типу. У ній же зазначені прибуток від реалізації однієї деталі кожного типу і загальний запас ресурсів, який може витратити фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсівна один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	X	V	
Металеві стрижні (кг) Листовий метал (кг) Робочий час (люд.-год.)	2 5 1	5 2 2	10 000 10 000 4 000
Прибуток від реалізації однієї деталі (грн.)	90	120	

Скільки деталей кожного типу варто робити, щоб максимізувати загальний прибуток за тиждень?

19. Фірма виготовляє дві моделі А і В письмових столів. Їхнє виробництво обмежене наявністю сировини (дошки) і часом машинної обробки. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на один стіл відповідної моделі. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу і загальний запас ресурсів, які має в розпорядженні фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсівна один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	А	В	
Дошки ($м^2$) Машинний час (год.)	6 0,25	4 0,5	2000 180
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	100	160	

Скільки столів кожної моделі фірмі необхідно випускати за тиждень для одержання максимального прибутку від їхньої реалізації?

20. Цех випускає два види виробів. Представлена нижче таблиця містить інформацію про витрати ресурсів на одиницю виробу, про загальний запас ресурсів, про ціни продажу одного виробу.

Ресурси	Норми витрат ресурсівна один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	1	2	
Устаткування (верст.-год.)	0,2	0,3	78
Сировина (кг)	1	4	850
Електроенергія (кВт/год.)	2	4	880
Ціна одного виробу (грн.)	30	100	

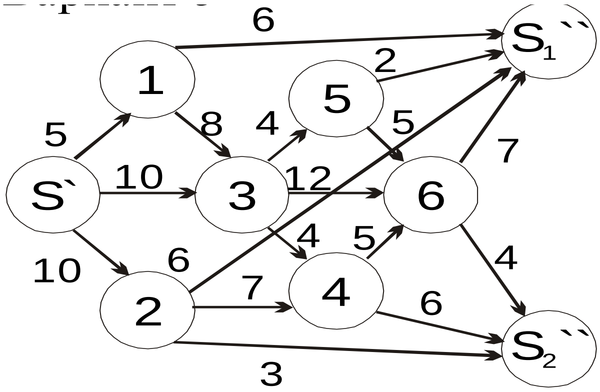
Скільки необхідно виготовляти виробів кожного виду, щоб вартість продукції була максимальною?

ДОДАТОК Б

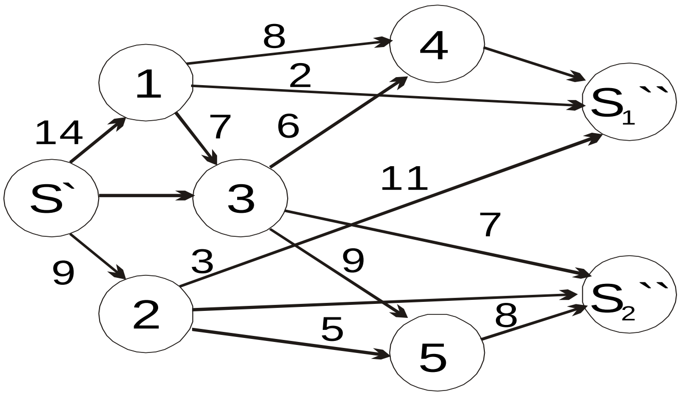
№ вар	*Параметри моделі*																		
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
1	25	50	20	15	15	40	30	1	8	2	3	4	7	5	1	5	3	4	4
2	46	30	35	20	30	16	10	1	2	6	3	4	8	1	5	9	7	3	4
3	60	70	20	30	30	30	50	2	4	5	1	2	3	9	4	3	4	22	5
4	30	20	40	50	20	20	15	5	2	4	1	3	5	6	7	11	5	3	1
5	45	15	20	30	25	25	10	9	4	1	4	5	6	7	10	2	1	4	3
6	60	65	70	40	60	70	30	2	4	3	2	3	1	2	3	5	4	1	5
7	50	40	20	30	25	25	20	3	2	4	1	2	3	1	5	3	2	7	4
8	20	10	40	35	25	10	15	4	1	2	6	5	3	4	8	2	5	1	4
9	50	10	10	25	25	20	10	5	6	4	2	1	5	3	8	1	2	4	1
10	45	25	20	30	15	30	40	2	1	5	1	4	2	6	3	1	5	2	4
11	60	70	10	40	25	35	20	5	4	1	2	6	3	1	2	4	5	3	2
12	25	25	30	20	25	25	15	4	8	6	7	2	1	5	1	1	3	5	4
13	20	20	40	30	25	15	20	6	4	1	2	5	8	3	1	5	4	2	6
14	60	10	40	30	40	20	10	1	2	4	5	6	8	2	3	2	5	7	1
15	30	50	20	15	10	40	30	3	1	5	6	4	2	1	5	3	7	4	5
16	45	35	70	20	60	55	55	6	1	4	5	2	3	2	1	4	5	2	3
17	30	70	50	10	40	20	60	5	1	4	2	6	3	8	2	4	5	1	3
18	70	10	20	45	10	35	20	6	1	5	4	2	3	2	5	4	7	9	2
19	20	50	40	45	20	45	5	4	5	3	2	8	4	1	6	2	5	4	1
20	30	20	45	25	25	30	20	1	5	3	4	2	1	5	7	4	2	1	4

ДОДАТОК В

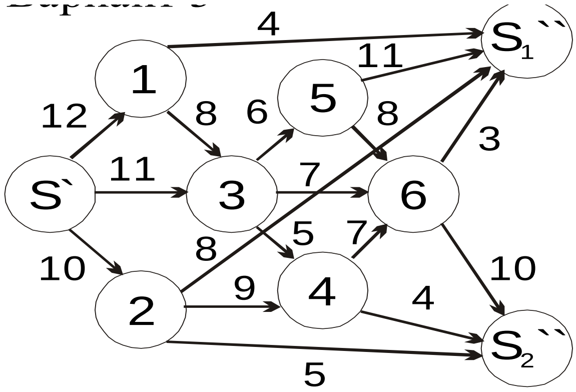
Варіант 1



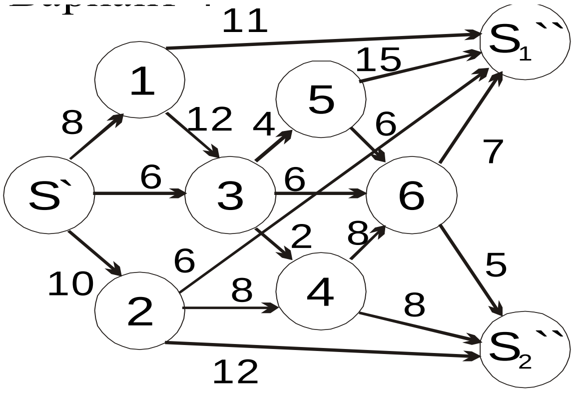
Варіант 2



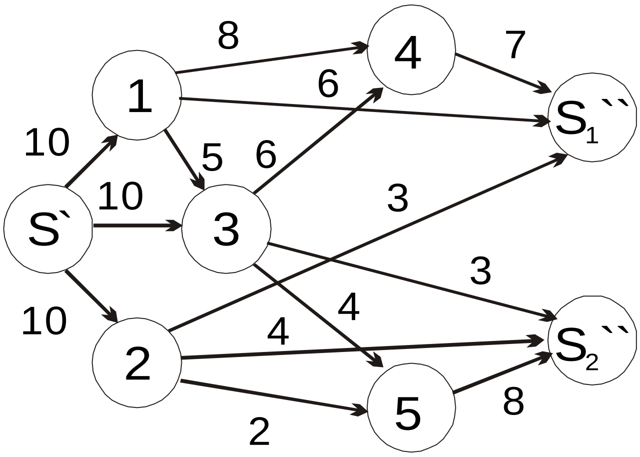
Варіант 3



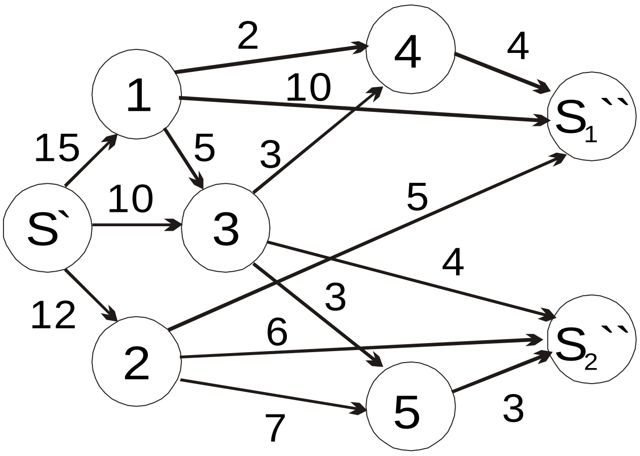
Варіант 4



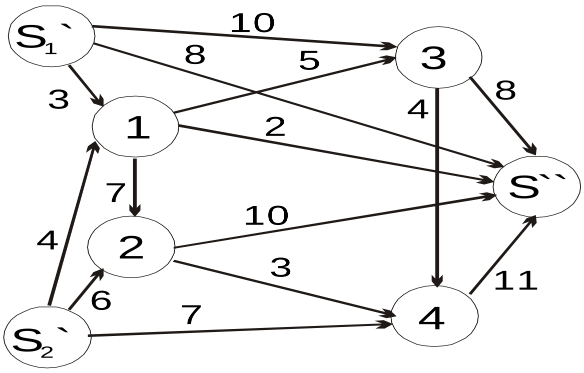
Варіант 5



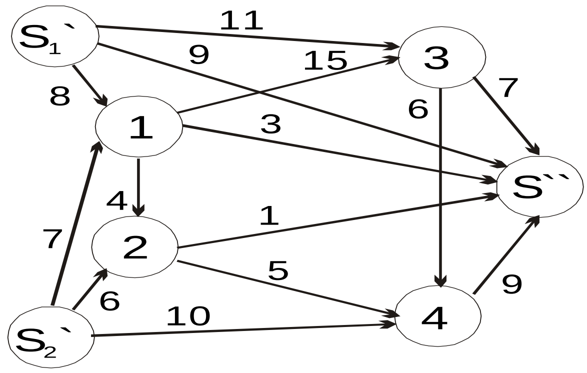
Варіант 6



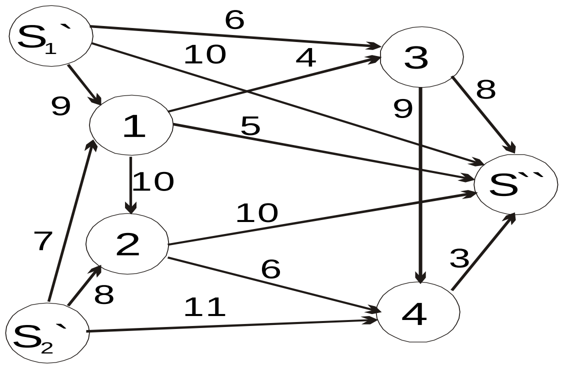
Варіант 7



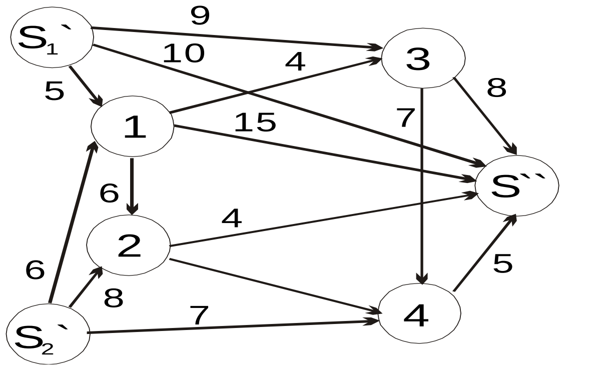
Варіант 8



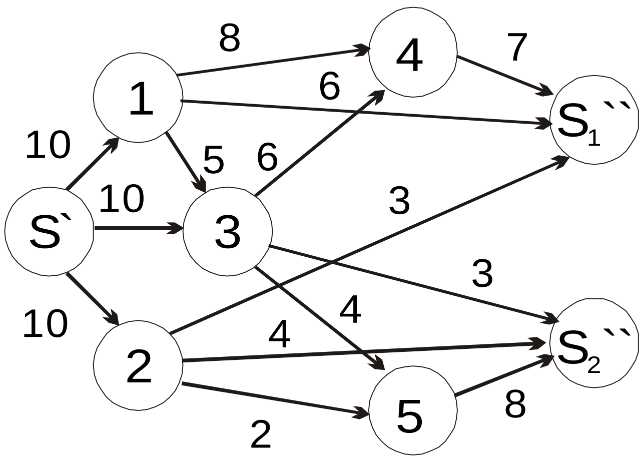
Варіант 9



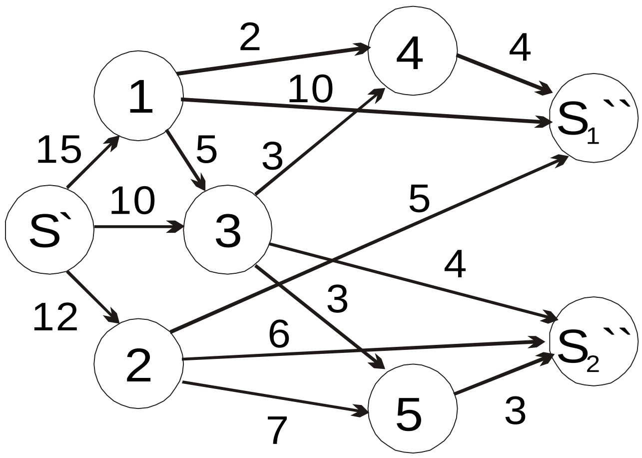
Варіант 10



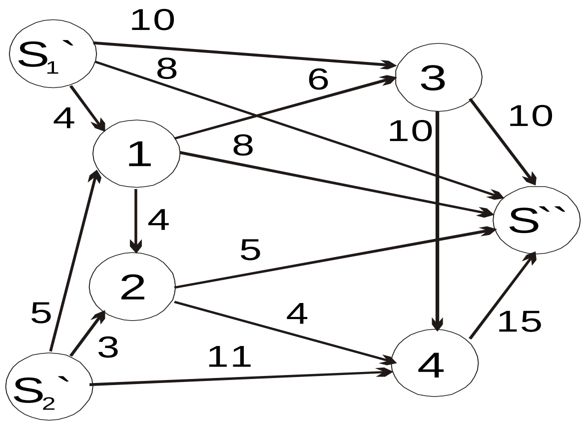
Варіант 11



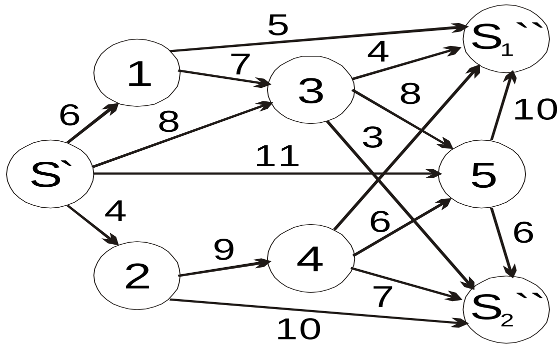
Варіант 12



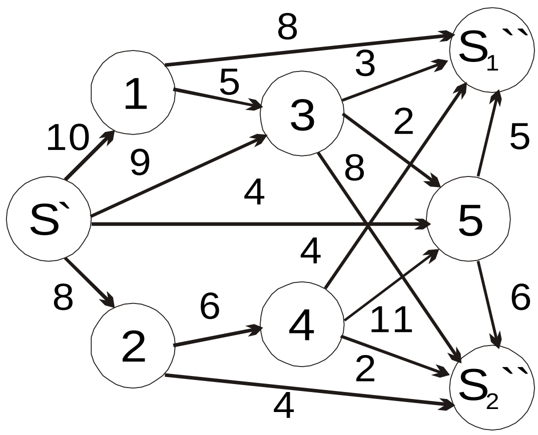
Варіант 13



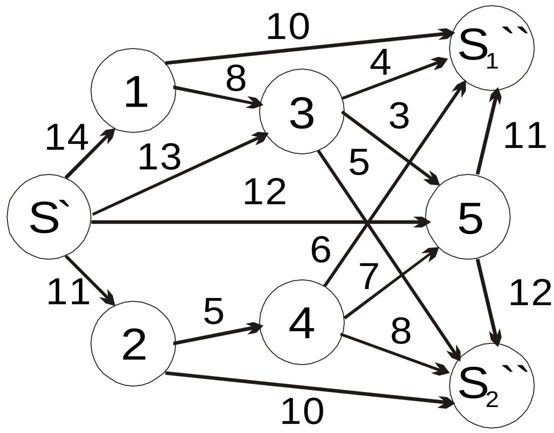
Варіант 14



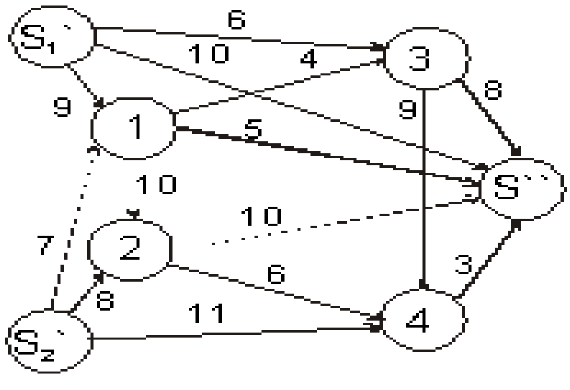
Варіант 15



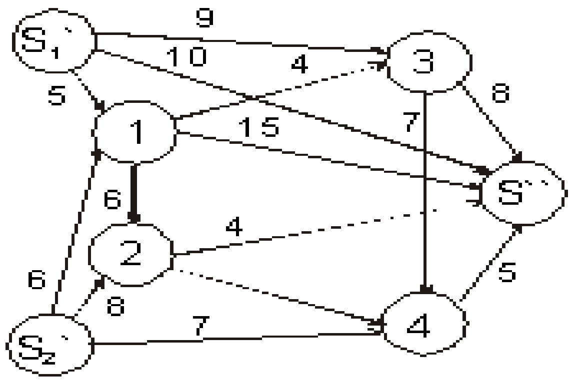
Варіант 16



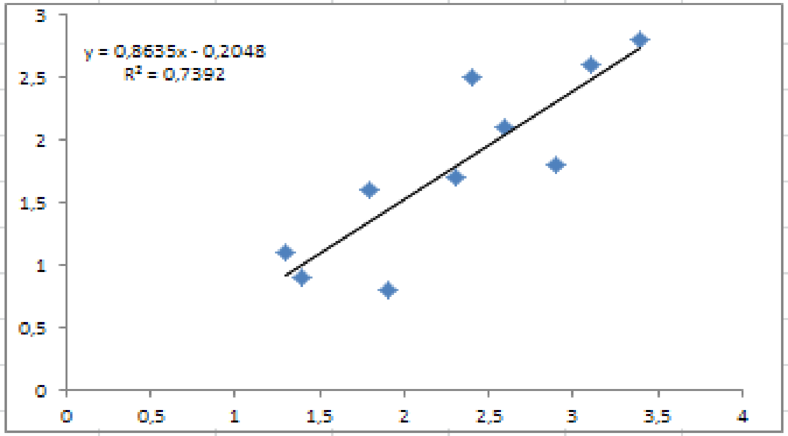
Варіант 17



Варіант 18



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	X	1,3	1,4	1,8	1,9	2,3	2,4	2,6	2,9	3,1	3,4				
2	Y	1,1	0,9	1,6	0,8	1,7	2,5	2,1	1,8	2,6	2,8				
4	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i-y_i)^2$	Предсказ	$s_{\hat{y}}^2$	$\hat{y}_i^{н}$	$\hat{y}_i^{в}$		
5	1,3	1,1	1,69	1,21	1,43	1,0201	0,4761	0,91782	0,03319	0,91782	0,04845	0,41025	1,42539		
6	1,4	0,9	1,96	0,81	1,26	0,8281	0,7921	1,00417	0,01085	1,00417	0,04213	0,53084	1,47751		
7	1,8	1,6	3,24	2,56	2,88	0,2601	0,0361	1,34959	0,0627	1,34959	0,02345	0,99646	1,70272		
8	1,9	0,8	3,61	0,64	1,52	0,1681	0,9801	1,43595	0,40443	1,43595	0,02042	1,10638	1,76551		
9	2,3	1,7	5,29	2,89	3,91	1E-04	0,0081	1,78136	0,00662	1,78136	0,0149	1,49989	2,06284		
10	2,4	2,5	5,76	6,25	6	0,0081	0,5041	1,86772	0,39978	1,86772	0,01516	1,58377	2,15167		
11	2,6	2,1	6,76	4,41	5,46	0,0841	0,0961	2,04043	0,00355	2,04043	0,01766	1,73396	2,34689		
12	2,9	1,8	8,41	3,24	5,22	0,3481	1E-04	2,29949	0,24949	2,29949	0,02634	1,9252	2,67378		
13	3,1	2,6	9,61	6,76	8,06	0,6241	0,6561	2,4722	0,01633	2,4722	0,03542	2,03819	2,90621		
14	3,4	2,8	11,56	7,84	9,52	1,1881	1,0201	2,73127	0,00472	2,73127	0,05397	2,19553	3,267		
15	23,1	17,9	57,89	36,61	45,26	4,529	4,569		1,19167						
16			5,789	3,661	4,526	0,4529	0,4569								
17	n=	10													
18	$\bar{x}=$	2,31		$t(\gamma,n-2)=t(0.95,10-2)=$			2,306	Стьюдраспобр							
19	$\bar{y}=$	1,79		$Q_e=$	1,1917										
20	$s_x=$	0,673		$Q_r=$	3,3773										
21	$s_y=$	0,676		F=	22,673	$F_{1-\alpha,1,n-2}=$		5,31766							
22	$s^2=$	0,149	0,386	СтошXY	$\sqrt{s^2}=\sqrt{0.149}=0386$										
23	$b_0=$	-0,2	-0,205	Отрезок											
24	$b_1=$	0,864	0,8635	Наклон											
25	$s_{b_0}^2=$	0,19													
26	$s_{b_1}^2=$	0,033		x=	2,5	y=	1,9541								
27	$r_{xy}=$	0,86		x=	4,7	y=	3,8539								
28	$R^2=$	0,739													



ДОДАТОК Д

№	*Вхідні дані*										
1	X	2,1	2,5	3,4	3,6	3,7	4,2	4,5	4,8	5,1	6,4
	Y	0,9	1,6	0,8	2,4	1,6	2,7	2,3	3,4	4,1	3,7
2	X	1,0	2,6	2,8	3,7	4,1	4,6	5,2	6,0	7,0	7,7
	Y	0,3	1,9	1,6	0,9	2,5	3,6	2,8	1,7	3,6	4,5
3	X	1,2	1,5	1,6	2,2	2,7	2,8	3,1	3,4	4,0	4,6
	Y	2,5	1,9	2,6	2,8	3,4	3,8	2,7	4,1	4,6	3,5
4	X	0,1	0,9	1,3	1,9	2,2	2,7	3,4	3,6	4,2	4,9
	Y	1,1	1,5	2,3	2,1	3,5	2,9	3,6	3,4	4,2	5,1
5	X	2,1	2,5	3,4	3,6	3,7	4,2	4,5	4,8	5,1	6,4
	Y	0,9	0,7	1,2	1,6	0,9	1,7	2,6	2,8	3,1	2,9
6	X	1,3	1,8	3,0	4,3	6,4	6,8	7,9	8,8	9,3	10,1
	Y	1,5	1,8	2,7	1,9	3,6	4,5	3,9	5,1	6,4	7,1
7	X	2,3	3,4	3,8	4,1	4,3	4,6	5,2	5,8	6,1	7,3
	Y	2,2	3,5	3,6	2,4	3,8	2,9	4,6	5,7	4,9	5,1
8	X	0,2	0,6	0,9	1,1	1,4	1,8	1,9	2,2	2,4	2,7
	Y	3,4	2,6	3,7	2,6	4,5	6,4	5,4	3,1	5,2	5,4
9	X	1,2	1,4	1,7	2,3	2,5	2,9	3,1	3,4	3,6	4,3
	Y	0,9	1,6	0,8	2,4	1,6	2,7	2,3	3,4	4,1	3,7
10	X	2,2	2,5	2,6	3,1	3,7	4,2	4,6	4,8	5,1	5,3
	Y	1,3	2,5	1,9	2,8	3,4	4,1	2,8	3,6	2,7	3,4
11	X	1,5	2,3	2,7	2,9	3,2	3,5	4,1	4,6	5,8	6,1
	Y	2,3	3,5	4,5	4,8	3,6	5,5	4,6	6,2	6,4	7,1
12	X	3,4	3,6	3,8	4,2	4,5	4,9	5,1	5,7	6,2	6,3
	Y	2,8	3,9	2,4	3,1	2,8	4,8	4,2	4,6	4,8	5,3
13	X	3,1	3,4	3,7	4,2	4,6	4,8	5,2	5,4	6,3	7,1
	Y	1,1	2,6	1,9	2,4	3,5	4,6	4,2	4,8	5,1	6,4
14	X	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,4	1,6
	Y	0,5	0,6	0,9	2,1	1,4	1,3	2,6	3,4	4,5	3,8
15	X	1,3	1,8	2,6	2,8	3,1	3,4	3,7	4,2	5,1	5,8
	Y	1,2	1,5	0,8	2,4	3,1	4,6	3,4	4,8	5,1	5,7
16	X	2,3	2,5	2,8	3,1	3,4	3,9	4,2	4,6	5,1	5,8
	Y	1,2	1,8	0,8	2,4	1,7	2,5	2,9	3,1	2,4	3,7
17	X	1,0	2,6	2,8	3,7	4,1	4,6	5,2	6,0	7,0	7,7
	Y	1,5	2,3	3,4	3,8	3,9	4,1	4,6	5,2	4,8	6,1
18	X	1,5	2,3	2,7	2,9	3,2	3,5	4,1	4,6	5,8	6,1
	Y	1,2	1,5	0,8	2,4	3,1	4,6	3,4	4,8	5,1	5,7
19	X	1,3	1,8	3,0	4,3	6,4	6,8	7,9	8,8	9,3	10,1
	Y	1,1	2,6	1,9	2,4	3,5	4,6	4,2	4,8	5,1	6,4
20	X	3,4	3,6	3,8	4,2	4,5	4,9	5,1	5,7	6,2	6,3
	Y	2,3	3,5	4,5	4,8	3,6	5,5	4,6	6,2	6,4	7,1
21	X	1,2	1,5	1,6	2,2	2,7	2,8	3,1	3,4	4,0	4,6
	Y	0,5	0,6	0,9	2,1	1,4	1,3	2,6	3,4	4,5	3,8
22	X	3,1	3,4	3,7	4,2	4,6	4,8	5,2	5,4	6,3	7,1
	Y	1,1	1,5	2,3	2,1	3,5	2,9	3,6	3,4	4,2	5,1
23	X	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,4	1,6
	Y	1,3	2,5	1,9	2,8	3,4	4,1	2,8	3,6	2,7	3,4
24	X	2,3	3,4	3,8	4,1	4,3	4,6	5,2	5,8	6,1	7,3
	Y	3,4	2,6	3,7	2,6	4,5	6,4	5,4	3,1	5,2	5,4
25	X	3,1	3,4	3,7	4,2	4,6	4,8	5,2	5,4	6,3	7,1
	Y	0,3	1,9	1,6	0,9	2,5	3,6	2,8	1,7	3,6	4,5

ДОДАТОК Е

№ варіанту	Функція	Заміна	Рівняння регресії	Оцінки параметрів	Коефіцієнт еластичності
1, 7	$\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{b}_1}{\mathrm{x}}+\mathrm{b}_0$	$\frac{1}{\mathrm{x}}=\mathrm{z}$	$\tilde{Y}=b_1Z+b_0$	$b_1=\frac{n\sum_{i=1}^{n}z_iy_i-\sum_{i=1}^{n}z_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}z_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}=$ $=\frac{n\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^2},$ $b_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}.$	$K=-\frac{b_1}{b_1+b_0X}$
2, 8	$\tilde{\mathrm{Y}}=\mathrm{b}_1\ln\mathrm{X}+\mathrm{b}_0$	$\ln x=z$	$\tilde{Y}=b_1Z+b_0$	$b_1=\frac{n\sum_{1}^{n}z_iy_i-\sum_{i=1}^{n}z_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}z_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}=$ $=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_i\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i-\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2},$ $b_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}-b_1\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$	$K=\frac{b_1}{b_1\ln\mathrm{X}+b_0}$

№ варіанту	Функція	Заміна	Рівняння регресії	Оцінки параметрів	Коефіцієнт еластичності
3, 9	$\tilde{Y}=b_1e^X+b_0$	$e^x=z$	$\tilde{Y}=b_1Z+b_0$	$b_1=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}y_ie^{X_i}-\sum\limits_{i=1}^{n}e^{X_i}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}e^{2X_i}-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}e^{X_i}\right)^2}$ $b_0=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n}-b_1\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}e^{X_i}}{n}.$	$K=\dfrac{b_1Xe^X}{b_1e^X+b_0}$
4, 10	$\tilde{Y}=b_1\sqrt{X}+b_0$	$\sqrt{x}=z$	$\tilde{Y}=b_1Z+b_0$	$b_1=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\sqrt{x_i}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2}$ $b_0=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n}-b_1\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{n}.$	$K=\dfrac{b_1X}{2b_1X+2b_0\sqrt{X}}$
5, 11	$\tilde{Y}=b_1X^2+b_0$	$x^2=z$	$\tilde{Y}=b_1Z+b_0$	$b_1=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2}$ $b_0=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n}-b_1\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}.$	$K=\dfrac{2b_1X}{b_1X+b_0}$

6, 12	$\tilde{Y}=\dfrac{1}{b_1X+b_0}$	$\tilde{Y}=\dfrac{1}{b_1X+b_0}$	$\tilde{Y}_1=b_1X+b_0$	$b_1=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{y_i}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y_i}}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$ $b_0=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y_i}}{n}-b_1\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}.$	$K=\dfrac{-b_1X}{b_1X+b_0}$

Варіант 1				Варіант2				Варіант 3				Варіант 4			
X1	X2	X3	Y	X1	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y
2,31	10,1	6,32	7,63	2,12	9,97	6,28	7,45	2,41	10,3	6,32	7,73	2,37	10,3	6,4	7,73
4,67	11,7	7,73	10,7	4,4	11,4	7,64	10,5	4,78	12	7,79	10,9	4,77	11,9	7,88	10,9
6,17	13,9	8,48	11,5	6,16	13,6	8,25	11,3	6,26	13,9	8,57	11,8	6,24	13,9	8,5	11,5
8,7	14,4	8,69	13,4	8,69	14,2	8,61	13,3	8,95	14,5	8,83	13,6	8,7	14,6	8,86	13,5
10,7	15,1	10,5	17	10,5	14,9	10,2	16,9	10,8	15,2	10,6	17,2	10,8	15,3	10,5	17,1
13,5	17,1	10,5	18,8	13,4	17	10,4	18,6	13,6	17,4	10,6	18,8	13,6	17,3	10,5	18,8
16,2	18,9	11,6	21,1	16	18,8	11,5	20,9	16,4	19	11,8	21,3	16,3	19	11,7	21,2
18,3	20,3	13,8	23,4	18,2	20,3	13,7	23,3	18,6	20,5	13,8	23,4	18,4	20,5	14	23,5
21,2	21,7	13,7	27,5	20,9	21,5	13,6	27,2	21,5	22	14	27,6	21,3	21,9	13,9	27,5
22,7	22,4	14,4	27,1	22,7	22,2	14,4	27	22,8	22,5	14,6	27,2	22,7	22,6	14,6	27,2
25,1	22,5	14,1	29,6	24,9	22,4	14	29,6	25,2	22,6	14,2	29,9	25,2	22,6	14,2	29,7
26,1	24,7	16,5	32,5	26	24,5	16,5	32,2	26,3	24,9	16,6	32,6	26,3	24,8	16,6	32,7
27,5	24,8	15	31,8	27,3	24,8	14,8	31,7	27,6	25	15,1	32	27,7	24,8	15	31,8
29,9	25	15,3	35,2	29,7	24,9	15,1	35,1	30,2	25,2	15,4	35,3	30	25,1	15,3	35,2
33,7	27,4	17,2	38,9	33,7	27,3	17,1	38,7	33,9	27,6	17,3	39	33,9	27,6	17,3	39
35,8	28,9	17,5	?	35,6	28,8	17,4	?	36	29	17,6	?	36	29,1	17,5	?

Варіант 5				Варіант 6				Варіант 7				Варіант 8			
XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y
2,25	9,9	6,09	7,49	2,61	10,4	6,61	7,72	2,61	10,3	6,71	7,95	2,4	11,3	6,78	8,61
4,42	11,5	7,49	10,6	4,89	11,8	7,74	10,8	4,97	12	8,14	10,8	5,66	12,5	8,49	11,3
6,08	13,7	8,46	11,4	6,24	14,1	8,62	1186	6,55	14	8,95	11,7	6,87	14,1	9,46	12,5
8,65	14,3	8,59	13,2	9,01	14,6	8,83	13,7	9,16	14,6	8,83	13,5	9,52	14,6	9,44	14,4
10,6	14,9	10,4	17	10,8	15,2	10,7	17	10,7	15,2	11	17,4	11,6	16,2	10,8	17,4
13,3	17	10,5	18,6	13,5	17,4	10,7	18,8	13,9	17,3	10,9	19,1	13,7	17,5	11	19,5
16	18,8	11,7	21,1	16,3	19,2	11,8	21,3	16,3	19,2	11,8	21,4	16,9	19,9	12,2	21,2
18,3	20,1	13,6	23,2	18,6	20,6	13,8	23,7	18,7	20,4	14,1	23,9	18,7	21,4	14,5	23,8
21,1	21,7	13,7	27,4	21,5	22	13,7	27,6	21,3	22,2	14,1	27,9	22,2	22,1	14	27,8
22,7	22,3	14,3	27,1	23	22,7	14,6	27,5	22,9	22,8	14,6	27,3	23,3	23	14,7	27,8
25	22,4	14	29,4	25,2	22,7	14,1	29,7	25,1	22,6	14,4	30	25,8	22,6	14,6	30
26	24,5	16,3	32,4	26,4	24,8	16,7	32,8	26,3	24,9	16,6	32,8	26,7	25	17,1	33,3
27,3	24,8	14,8	31,7	27,6	24,8	15,1	3181	27,7	24,9	15,5	31,7	27,8	25,2	15,4	31,9
29,8	25	15,1	35,2	30,2	25,2	15,4	35,2	30	25,3	15,4	35,2	30,9	26,1	16	35,4
31,9	25,9	15,5	37,1	32,3	26,2	15,8	37,3	32,1	26,2	16	37,3	32,9	26,4	16,4	37,5
33,6	27,4	17	38,7	33,8	27,7	17,4	39,2	33,7	27,6	17,6	39	34,7	28,1	17,9	39,9
35,7	28,8	17,3	?	36	29,2	17,8	?	36,3	29,2	18	?	36,3	29,8	18,4	?

Варіант 9				Варіант 10				Варіант 11				Варіант 12			
XI	X2	X3	Y	X1	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	X1	X2	X3	Y
1,43	9,18	6,17	7,29	3,18	10,9	6,94	8,5	1,49	10,1	5,97	7,54	0,95	8,71	4,67	5,94
3,92	10,9	7,7	9,79	5,76	12,7	8,2	11,7	3,65	10,5	6,62	10,4	2,82	10,9	6,16	10,2
5,49	13,3	8,43	11,3	7,26	14,4	9,03	12,1	6,11	13,1	7,92	11,5	6,09	13,5	7,18	10,2
8,17	13,9	8,12	12,4	8,95	15	9,37	14,1	3,59	14	8,17	12,4	7,36	12,6	6,81	12,4
9,68	14,5	10,4	16	11,4	16,2	10,6	18	9,73	15,1	10	15,9	10,3	13,5	9,87	15,6
13,4	16,7	10,4	18,3	14,6	18,1	10,6	19,2	12,5	16,5	10	18,2	12	16,7	8,58	18,2
15,9	18	1136	20,9	16,9	19,7	12,2	21,3	15,6	17,7	11,6	20,3	15,1	18,8	10,2	19,3
18	19,5	13,3	22,7	18,4	21,1	14	23,5	18	19,8	13,4	23,3	16,4	19,6	12,7	23,3
20,7	21,5	12,7	27,1	21,8	22,5	13,8	27,7	20,4	20,6	13,3	27,3	19,6	20,2	12,4	25,8
22,7	21,6	14,2	26,4	23,9	22,6	15	27,2	21,7	22,1	13,8	26,3	22,4	20,8	13,1	25,5
24,3	21,6	13,5	29,4	26	22,7	14,5	30,3	23,9	22,4	13,6	29,5	24,5	20,6	12,6	27,7
25,6	24,5	15,8	32,4	26,9	25,8	17,6	33,1	26	23,8	15,5	32,3	24,6	23,3	16,2	31,4
27,1	24	14,5	31,5	28,7	25,6	15,6	32,2	26,5	24,3	14,5	31,8	27,4	24,5	13,3	31,7
29,2	24,4	15,1	34,9	30,4	25	16,2	35,4	29,3	24,3	14,8	34,7	29,4	23	14,7	33,7
31,1	26	15,3	36,3	32,7	26,4	16,6	37,2	31,6	25,7	14,6	36	31,8	24,9	14,9	37
33,3	27,1	16,7	38,4	33,9	28,5	17,3	39,6	32,6	27,4	17	38,3	33,1	26,2	16,8	37,2
35,6	28,1	16,6	?	36,5	29,1	18,6	?	35,7	28,1	16,5	?	35,2	28,3	16,6	?

Варіант 13				Варіант14				Варіант 15				Варіант 16			
X1	X2	X3	Y	X1	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y
5,79	13,6	9,795	11,11	5,6	13,5	9,76	10,93	5,89	13,7	9,8	11,2	5,85	13,8	9,88	11,2
8,15	15,2	11,21	14,18	7,88	14,9	11,1	13,96	8,26	15,4	11,3	14,4	8,25	15,4	11,4	14,3
9,65	17,4	11,96	15,01	9,64	17,1	11,7	14,73	9,74	17,4	12,1	15,3	9,72	17,3	12	15
12,18	17,9	12,17	16,88	12,2	17,7	12,1	16,81	12,4	18	12,3	17,1	12,2	18,1	12,3	17
14,18	18,6	13,98	20,5	14	18,4	13,7	20,38	14,2	18,7	14	20,6	14,3	18,7	14	20,6
16,98	20,6	14	22,23	16,9	20,5	13,9	22,05	17,1	20,9	14,1	22,3	17,1	20,8	14	22,2
19,68	22,4	15,06	24,62	19,5	22,3	15	24,39	19,9	22,5	15,3	24,7	19,8	22,5	15,2	24,6
21,78	23,8	17,25	26,85	21,7	23,8	17,2	26,8	22	24	17,3	26,9	21,9	23,9	17,4	27
24,68	25,2	17,18	30,93	24,4	25	17,1	30,64	24,9	25,5	17,5	31,1	24,7	25,4	17,3	31
26,18	25,9	17,91	30,61	26,1	25,7	17,9	30,48	26,2	26	18	30,7	26,2	26	18,1	30,6
28,58	26	17,55	33,09	28,4	25,9	17,5	33,07	28,7	26,1	17,7	33,4	28,6	26	17,7	33,2
29,58	28,2	19,94	36	29,5	27,9	19,9	35,72	29,7	28,4	20,1	36,1	29,8	28,3	20,1	36,2
30,98	28,3	18,5	35,28	30,7	28,2	18,3	35,19	31,1	28,5	18,6	35,5	31,2	28,3	18,5	35,3
33,38	28,5	18,75	38,66	33,2	28,4	18,5	38,58	33,6	28,7	18,9	38,7	33,5	28,6	18,8	38,7
35,58	29,5	19,06	40,55	35,3	29,4	19,1	40,25	35,7	29,6	19,2	40,6	35,7	29,6	19,3	40,6
37,18	30,9	20,69	42,33	37,1	30,8	20,6	42,18	37,4	31,1	20,8	42,4	37,3	31,1	20,8	42,5
39,28	32,4	20,95	?	39,1	32,3	20,9	?	39,5	32,5	21	?	39,4	32,6	21	?

Варіант 17				Варіант 18				Варіант 19				Варіант 20			
XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y
5,73	13,4	9,57	10,97	6,09	13,8	10,1	11,2	6,09	13,8	10,2	11,4	5,88	14,8	10,3	12,1
7,9	15	10,97	14,12	8,37	15,3	11,2	14,25	8,45	15,4	11,6	14,2	9,14	16	12	14,8
9,56	17,2	11,94	14,92	9,72	17,6	12,1	1189,5	10	17,4	12,4	15,1	10,4	17,6	12,9	16
12,13	17,7	12,07	16,72	12,5	18,1	12,3	17,21	12,6	18,1	12,3	17	13	18,1	12,9	17,9
14,12	18,4	13,91	20,47	14,3	18,7	14,2	20,52	14,2	18,7	14,4	20,9	15,1	19,7	14,3	20,9
16,77	20,5	14	22,05	17	20,9	14,1	22,28	17,4	20,8	14,4	22,5	17,2	21	14,5	23
19,43	22,3	15,13	24,55	19,8	22,7	15,3	24,76	19,8	22,7	15,2	24,9	20,4	23,3	15,6	24,7
21,73	23,5	17,03	26,71	22,1	24,1	17,3	27,18	22,2	23,8	17,5	27,3	22,2	24,9	17,9	27,3
24,58	25,2	17,15	30,85	25	25,5	17,2	31,11	24,8	25,7	17,6	31,4	25,6	25,6	17,5	31,3
26,15	25,8	17,81	30,6	26,5	26,2	18	30,93	26,4	26,3	18,1	30,8	26,8	26,5	18,2	31,3
28,47	25,9	17,43	32,9	28,7	26,1	17,6	33,19	28,6	26,1	17,9	33,5	29,3	26,1	18,1	33,5
29,48	28	19,82	35,91	29,9	28,3	20,1	36,28	29,8	28,4	20,1	36,3	30,2	28,5	20,6	36,8
30,82	28,2	18,29	35,22	31,1	28,3	18,6	3184,5	31,2	28,4	19	35,2	31,3	28,6	18,9	35,4
33,23	28,5	18,61	38,64	33,7	28,7	18,9	38,7	33,5	28,8	18,9	38,7	34,3	29,5	19,4	38,8
35,35	29,4	18,94	40,55	35,7	29,7	19,3	40,74	35,6	29,7	19,5	40,8	36,4	29,9	19,9	41
37,03	30,8	20,44	42,22	37,2	31,2	20,9	42,68	37,2	31,1	21,1	42,5	38,1	31,6	21,4	43,4
39,19	32,3	20,73	?	39,5	32,6	21,3	?	39,8	32,7	21,5	?	39,7	33,2	21,9	?

ДОДАТОК 3

1	L K Q	21.1 52.1 69.5	23.6 57.0 75.9	24.4 60.7 79.9	24.8 65.7 84.6	27.0 69.9 89.0	28.6 74.6 95.6	31.0 77.8 99.8	33.1 78.0 103.1	33.7 83.0 107.5	34.9 86.9 111.9	35.2 89.2 114.5	36.4 94.6 120.9	39.3 100.4 ?
2	L K Q	30.1 52.1 78.2	32.6 53.5 82.5	33.7 53.1 83.8	35.1 56.5 86.7	36.4 54.1 87.0	39.4 58.2 92.8	41.8 55.1 91.5	43.3 57.2 95.3	44.2 56.1 94.7	46.0 56.1 96.7	47.8 57.1 99.5	49.5 58.7 102.9	49.9 58.1 ?
3	L K Q	26.9 52.1 75.2	28.7 56.7 81.4	29.8 60.9 84.9	31.5 62.9 90.0	34.4 67.2 96.3	35.5 67.5 97.2	35.9 72.7 102.2	37.3 76.9 107.1	40.1 81.0 114.0	42.7 84.4 118.5	44.6 85.8 123.1	44.8 89.8 126.2	47.2 95.9 ?
4	L K Q	23.8 42.7 63.4	23.8 46.6 67.2	24.2 49.3 70.9	24.8 51.8 72.2	24.9 53.3 74.2	25.9 55.5 76.2	26.7 58.6 81.2	27.8 59.0 81.4	30.3 64.4 88.8	31.5 65.7 92.7	33.4 68.8 96.5	35.6 69.2 99.1	39.8 74.7 ?
5	L K Q	43.1 32.4 68.7	45.2 34.6 73.3	45.5 38.0 77.6	47.8 40.3 80.1	49.5 45.7 88.1	50.3 48.2 91.0	53.3 53.3 100.4	53.7 55.4 102.2	53.7 55.5 101.1	55.5 56.7 103.9	57.4 62.2 112.1	59.2 65.9 118.3	61.8 73.0 ?
6	L K Q	55.0 32.5 74.9	55.4 36.7 81.7	55.6 40.6 86.0	56.8 45.0 93.1	58.3 49.4 99.4	59.7 52.2 102.3	60.8 52.4 103.2	63.6 55.3 109.2	65.6 59.7 115.9	68.0 60.4 117.4	70.7 62.3 120.6	71.4 65.6 124.7	74.2 69.5 ?
7	L K Q	46.0 32.8 69.9	46.6 34.3 72.4	48.7 38.9 80.3	49.2 42.8 85.4	49.3 48.4 92.3	51.7 48.4 92.3	54.3 48.7 94.9	54.7 52.5 99.4	55.7 56.9 104.1	58.6 59.7 110.2	61.5 62.1 115.8	64.1 66.3 121.6	67.3 69.2 ?
8	L K Q	45.9 52.1 92.3	46.2 55.5 97.2	47.4 55.9 98.6	49.8 56.6 100.9	53.8 63.2 111.2	53.8 63.2 111.2	55.3 63.7 111.8	56.5 64.3 114.1	59.5 65.4 117.5	60.7 69.5 121.9	61.4 73.1 126.5	63.3 74.8 129.6	65.4 84.1 ?
9	L K Q	32.1 44.1 74.2	34.3 45.4 76.2	36.3 46.4 78.5	38.4 50.9 85.9	42.1 57.9 95.6	42.1 57.9 95.6	43.5 63.4 102.4	45.8 63.8 104.4	48.7 66.5 108.3	51.6 66.9 111.3	53.7 68.3 114.6	54.4 71.5 119.4	58.5 80.5 ?

10	L	33.1	34.2	36.3	38.4	43.7	43.7	44.3	46.0	47.0	49.3	50.1	51.6	56.8
	K	25.1	25.4	30.2	32.7	41.1	41.1	43.5	47.9	53.3	56.8	62.2	64.2	69.9
	Q	54.1	54.9	62.0	66.3	79.3	79.3	81.3	88.0	94.8	99.7	106.2	110.4	?
11	L	43.2	44.9	46.2	46.8	51.7	51.7	52.5	54.8	57.3	57.9	60.2	60.6	63.0
	K	35.2	36.4	41.7	47.3	52.2	52.2	52.6	57.6	62.8	67.9	71.5	75.7	79.1
	Q	71.1	75.1	82.4	88.9	96.8	96.8	97.6	104.5	112.7	117.7	124.0	127.9	?
12	L	54.2	56.8	59.7	61.4	63.5	64.7	64.8	67.4	69.0	70.7	71.3	73.7	77.5
	K	33.6	39.1	40.4	42.9	44.0	46.8	51.9	56.3	56.6	58.7	59.6	62.4	67.2
	Q	75.4	85.4	88.5	92.7	95.2	99.5	106.2	113.2	114.5	118.1	118.7	123.0	?
13	L	34.8	35.8	38.7	40.7	41.9	42.3	44.3	46.6	48.4	48.8	51.7	53.3	56.0
	K	32.4	36.4	39.9	43.4	47.9	51.6	56.0	60.7	61.9	66.9	70.6	72.3	79.6
	Q	62.4	67.5	74.0	79.5	85.9	88.9	95.3	101.9	104.7	110.1	116.6	118.1	?
14	L	43.6	44.0	44.8	46.3	47.6	47.9	50.1	50.5	51.1	52.9	53.1	54.0	57.6
	K	34.7	37.7	40.4	42.8	44.7	49.5	51.8	53.8	57.6	60.4	63.3	63.6	66.7
	Q	71.9	75.1	78.1	83.1	86.7	92.3	94.9	97.5	102.0	106.4	110.0	110.0	?
15	L	43.4	45.5	46.3	46.8	49.8	51.3	53.8	55.1	56.2	56.9	59.6	60.3	62.6
	K	32.3	37.2	42.5	47.7	50.2	54.6	57.2	60.4	62.7	64.0	68.4	71.6	76.9
	Q	69.3	75.4	82.4	88.1	93.8	99.3	104.9	108.8	111.6	114.4	120.5	123.3	?
16	L	45.3	45.6	45.9	48.4	51.0	51.6	52.1	52.6	55.5	56.7	57.3	57.8	60.9
	K	36.6	38.5	42.5	47.7	53.2	57.7	60.7	64.8	64.9	69.4	74.6	77.9	84.3
	Q	75.4	77.7	81.3	89.2	97.7	103.1	105.4	111.7	114.2	118.3	124.8	127.4	?
17	L	33.3	33.6	33.8	34.5	36.8	39.4	40.3	42.7	44.7	44.9	45.7	48.0	51.1
	K	47.5	52.2	55.1	58.7	62.3	67.9	73.1	75.4	78.5	81.4	81.5	81.7	87.5
	Q	77.6	82.8	85.0	89.2	95.0	102.3	107.7	112.2	115.7	120.2	119.3	123.3	?
18	L	44.4	47.3	48.2	49.8	52.2	54.3	54.4	56.9	58.7	61.5	63.8	64.2	65.4
	K	33.3	38.5	40.4	45.8	46.2	50.0	52.1	56.7	57.9	60.5	63.0	65.1	67.2
	Q	70.1	78.6	81.7	88.7	90.8	96.4	99.7	106.1	109.2	112.8	117.1	119.1	?
19	L	31.1	33.6	34.4	34.8	37.0	38.6	41.0	43.1	43.7	44.9	45.2	46.4	49.3
	K	62.1	67.0	70.7	75.7	79.9	84.6	87.8	88.0	93.0	96.9	99.2	104.6	110.4
	Q	79.5	85.9	89.9	94.6	99.0	105.6	109.8	113.1	117.5	121.9	124.5	130.9	?

20	L K Q	40.1 62.1 88.2	42.6 63.5 92.5	43.7 63.1 93.8	45.1 66.5 96.7	46.4 64.1 97.0	49.4 68.2 102.8	51.8 65.1 101.5	53.3 67.2 105.3	54.2 66.1 104.7	56.0 66.1 106.7	57.8 67.1 109.5	59.5 68.7 112.9	59.9 68.1 ?
21	L K Q	36.9 62.1 85.2	38.7 66.7 91.4	39.8 70.9 94.9	41.5 72.9 100.0	44.4 77.2 106.3	45.5 77.5 107.2	45.9 82.7 112.2	47.3 86.9 117.1	50.1 91.0 124.0	52.7 94.4 128.5	54.6 95.8 133.1	54.8 99.8 136.2	57.2 105.9 ?
22	L K Q	33.8 52.7 73.4	33.8 56.6 77.2	34.2 59.3 80.9	34.8 61.8 82.2	34.9 63.3 84.2	35.9 65.5 86.2	36.7 68.6 91.2	37.8 69.0 91.4	40.3 74.4 98.8	41.5 75.7 102.7	43.4 78.8 106.5	45.6 79.2 109.1	49.8 84.7 ?
23	L K Q	53.1 42.4 78.7	55.2 44.6 83.3	55.5 48.0 87.6	57.8 50.3 90.1	59.5 55.7 98.1	60.3 58.2 101.0	63.3 63.3 110.4	63.7 65.4 112.2	63.7 65.5 111.1	65.5 66.7 113.9	67.4 72.2 122.1	69.2 75.9 128.3	71.8 83.0 ?
24	L K Q	65.0 42.5 84.9	65.4 46.7 91.7	65.6 50.6 96.0	66.8 55.0 103.1	68.3 59.4 109.4	69.7 62.2 112.3	70.8 62.4 113.2	73.6 65.3 119.2	75.6 69.7 125.9	78.0 70.4 127.4	80.7 72.3 130.6	81.4 75.6 134.7	84.2 79.5 ?
25	L K Q	56.0 42.8 79.9	56.6 44.3 82.4	58.7 48.9 90.3	59.2 52.8 95.4	59.3 58.4 102.3	61.7 58.4 102.3	64.3 58.7 104.9	64.7 62.5 109.4	65.7 66.9 114.1	68.6 69.7 120.2	71.5 72.1 125.8	74.1 76.3 131.6	77.3 79.2 ?
26	L K Q	55.9 62.1 102.3	56.2 65.5 107.2	57.4 65.9 108.6	59.8 66.6 110.9	63.8 73.2 121.2	63.8 73.2 121.2	65.3 73.7 121.8	66.5 74.3 124.1	69.5 75.4 127.5	70.7 79.5 131.9	71.4 83.1 136.5	73.3 84.6 139.6	75.4 94.1 ?
27	L K Q	42.1 54.1 84.2	44.3 55.4 86.2	46.3 56.4 88.5	48.4 60.9 95.9	52.1 67.9 105.6	52.1 67.9 105.6	53.5 73.4 112.4	55.8 73.8 114.4	58.7 76.5 118.3	61.6 76.9 121.3	63.7 78.3 124.6	64.4 81.5 129.4	68.5 90.5 ?
28	L K Q	43.1 35.1 64.1	44.2 35.4 64.9	46.3 40.2 72.0	48.4 42.7 76.3	53.7 51.1 89.3	53.7 51.1 89.3	54.3 53.5 91.3	56.0 57.9 98.0	57.0 63.3 104.8	59.3 66.8 109.7	60.1 72.2 116.2	61.6 74.2 120.4	66.8 79.9 ?
29	L K Q	53.2 45.2 81.1	54.9 46.4 85.1	56.2 51.7 92.4	56.8 57.3 98.9	61.7 62.2 106.8	61.7 62.2 106.8	62.5 62.6 107.6	64.8 67.6 114.5	67.3 72.8 122.7	67.9 77.9 127.7	70.2 81.5 134.0	70.6 85.7 137.9	73.0 89.1 ?

30	L K Q	64.2 43.6 85.4	66.8 49.1 95.4	69.7 50.4 98.5	71.4 52.9 102.7	73.5 54.0 105.2	74.7 56.8 109.5	74.8 61.9 116.2	77.4 66.3 123.2	79.0 66.6 124.5	80.7 68.7 128.1	81.3 69.6 128.7	83.7 72.4 133.0	87.5 77.2 ?