

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

621.89 621.01
Ш 379



І.А. Шевченко,
Т.О. Васильченко

ДИНАМІКА ТА МІЦНІСТЬ МАШИН
Навчальний посібник
для студентів ЗДІА
за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування»
другого (магістерського) освітньо-кваліфікаційного рівня

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

*Затверджено до друку
рішенням вченої ради ЗДІА
протокол № __ від ____ 2018 р.*

ДИНАМІКА ТА МІЦНІСТЬ МАШИН
Навчальний посібник
для студентів ЗДІА
за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування»
другого (магістерського) освітньо-кваліфікаційного рівня

*Рекомендовано до видання
на засіданні кафедри МО,
протокол № 4 від 23.03.2018 р.*

Запоріжжя
ЗДІА
2018

ББК 621.89
Ш 379

*І.А. Шевченко, к.т.н., доцент,
Т.О.Васильченко, к.т.н., доцент*

Відповідальний за випуск: *зав. кафедри МО,
д.т.н., с.н.с. Й.К.Огинський*

Рецензенти:

*А.С. Кушнар'ов, член-кор. НААНУ, заслужений працівник освіти України,
д.т.н., проф., кафедри «Машиновикористання в землеробстві» Таврійського
державного агротехнологічного університету (ТГАТУ)*

*С.В. Білодієнко, д.т.н., проф., завідуючий кафедрою машин і агрегатів
металургійного виробництва Національної металургійної академії України
(НМетАУ)*

*О.В. Явтушенко, д.т.н., проф., завідуючий кафедрою «Обробка металів
тиском» Запорізької державної інженерної академії (ЗДІА)*

І.А. Шевченко, Т.О.Васильченко

Ш 379 Динаміка та міцність машин: Навчальний посібник для студентів ЗДІА за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування» другого (магістерського) освітньо-кваліфікаційного рівня / Шевченко І.А., Васильченко Т.О.; Запорізька державна інженерна академія – Запоріжжя: ЗДІА, 2018. – 160 с.

Навчальний посібник складений у відповідності до робочої програми з дисципліни «Динаміка та міцність машин» освітньо-професійної програми другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 133 «Галузеве машинобудування». У навчальному посібнику викладено теоретичні та прикладні питання динаміки машин, алгоритм розрахунків на динамічну міцність і методи зменшення динамічних навантажень у елементах машин. Навчальний посібник призначений допомогти студентам в самоорганізації навчальної роботи при вивченні дисципліни «Динаміка та міцність машин»

© Шевченко І.А., Васильченко Т.О., 2018

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА.....	6
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДИНАМІКИ МАШИН.....	7
1.1 Задачі науки про динаміку машин.....	7
1.1.2 Умови експлуатації металургійних машин і характер їх вантаження.....	8
1.1.3 Зниження динамічних навантажень.....	10
1.1.3 Аналіз кінематичних схем і класифікація фізичних моделей.....	11
1.2 Загальні положення динамічного розрахунку.....	12
1.3 Вибір кількості ступенів вільності механічних систем.....	14
1.4 Моделювання динаміки машин.....	16
1.4.1 Побудова динамічних моделей.....	17
1.4.2 Методи синтезу математичних моделей динамічних систем.....	23
1.5 Моделювання приводних зусиль.....	30
1.5.1 Гідравлічний двигун об'ємного регулювання.....	32
1.5.2 Гідродвигун із дросельним регулюванням.....	33
1.5.3 Пневматичний двигун.....	35
1.5.4 Електродвигун постійного струму.....	36
1.5.5 Електродвигун змінного струму.....	38
1.6 Сили опору робочих машин.....	41
1.7 Сухе та в'язке тертя.....	44
1.8 Зв'язки у машинах та їх класифікація.....	46
1.9 Типові елементи машин, що описуються нелінійними залежностями.....	48
1.9.1 Момент інерції (маса).....	49
1.9.2 Жорсткість.....	52
1.9.3 Дисипація.....	54
1.10 Питання для самоперевірки.....	55
РОЗДІЛ 2 КОЛИВАННЯ В МАШИНАХ ТА МЕХАНІЗМАХ.....	56
2.1 Класифікація коливань.....	56
2.2 Фазові траєкторії та фазовий портрет коливань.....	58
2.3 Вимушені коливання механізмів. Механічний резонанс.....	62
2.3.1 Коливна система «двигун-фундамент».....	62
2.3.2 Коливна система «гнучкий вал».....	67
2.4 Коливання в механізмі з пружною муфтою.....	69
2.4.1 Рівняння руху механізму з пружною муфтою.....	69
2.4.2 Коливання в механізмах з лінійною пружною муфтою.....	70
2.4.3 Коливання в механізмах з нелінійною пружною муфтою.....	71
2.5 Віб्रोізоляція при ударному впливі.....	74
2.6 Захист від дії коливань.....	77
2.7 Питання для самоперевірки.....	79
РОЗДІЛ 3 ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ МАШИН.....	80
3.1 Перехідні процеси у машинах при ідеальній характеристиці двигуна.....	80
3.1.2 Виведення рівнянь руху.....	80
3.1.2 Вибір закону руху вихідної ланки двигуна.....	82

3.1.3 Розв'язок рівняння руху.....	83
3.1.4 Дослідження перехідного процесу при дії сил опору.....	87
3.1.5 Методи зменшення динамічної похибки.....	88
3.2 Аналіз режиму пуску механізмів представлених одномасовою моделлю.....	89
3.3 Аналітичний розв'язок руху одно масових механізмів.....	96
3.4 Визначення раціональних законів руху машин.....	102
3.4.1 Двомасова динамічна модель.....	102
3.4.2 Тримасова динамічна модель.....	111
3.5 Питання для самоперевірки.....	115
РОЗДІЛ 4 МІЦНІСТЬ МАШИН.....	119
4.1 Міцність конструкції.....	119
4.2 Несуча здатність і граничний стан елементів металургійних машин...	121
4.3 Статична і циклічна міцність деталей машин.....	123
4.4 Розподіл несучої здатності елементів за умови статичної і циклічної міцності.....	127
4.5 Розрахунки на міцність деталей при проектуванні.....	130
4.5.1 Методи розрахунку на міцність.....	131
4.5.2 Детерміністичні методи розрахунку на міцність.....	132
4.5.2.1 Розрахунки на міцність при статичному навантаженні.....	132
4.5.2.2 Розрахунок по коефіцієнтам запасу міцності при змінних напруженнях.....	135
4.5.3 Розрахунки на витривалість.....	140
4.6 Питання для самоперевірки.....	142
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ТА РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ.....	143
ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК.....	146

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна "Динаміка та міцність машин" відноситься до циклу професійно орієнтованих і фахових дисциплін вільного вибору студента. Дисципліна "Динаміка і міцність" є комплексна наукова дисципліна про принципи і основні підходи до вирішення інженерних задач динаміки і міцності машини та агрегатів металургійного виробництва і однією з основних дисциплін, що забезпечують спеціальну підготовку магістрів.

Метою дисципліни «Динаміка та міцність машин» є поглиблення системи знань, вмінь і навиків професійної підготовки, необхідних для вирішення конкретних прикладних задач динамічної міцності машин. Завданнями дисципліни є набуття студентами навиків з теоретичних основ проектування, вибору і складання математичних моделей складних механічних систем з метою подальшого аналізу їх динамічної поведінки і практичними методами їх застосування до розрахунку металургійного обладнання.

Питання динаміки та міцності машин мають першорядне значення, оскільки у промисловості підсилюються тенденції підвищення продуктивності машин, що тісно пов'язано зі збільшенням навантажень, посиленням темпів їх роботи. Ці питання стають ще більш актуальними у зв'язку з розвитком автоматичних способів виробництва, що пов'язано з підвищенням вимог до міцності, точності виготовлення деталей, вузлів, агрегатів.

Характер динамічних навантажень у виконавчих механізмах машин суттєво залежить від технологічних схем, характеру операцій, типу виконавчих механізмів, їх приводів. Знання дійсного характеру навантаження машин дозволяє створювати зразки з меншими витратами, а при експлуатації досягти найбільшої продуктивності за рахунок обґрунтованого використання резервів міцності та потужності.

Незалежно від призначення та конструктивних особливостей, усі машини мають загальну властивість, яка полягає у наявності інертності та пружності ланок, у здатності за певних умов здійснювати коливання. Тому теоретичні методи дослідження динамічних явищ у машинах є загальними, розходження полягає лише у параметрах машин і режимах їх навантаження, що позначається на інтенсивності збуджених коливань.

Усі машини, як правило, належать до машин циклічного навантаження, іноді близького до ударного, що призводить до появи великих динамічних навантажень. Рівень динамічних навантажень коливального характеру майже на усіх машинах дуже високий, це слід враховувати при розрахунках на міцність, конструюванні.

Динамічні властивості машин визначають стійкість руху робочого органу та їхніх ланок при зовнішніх навантаженнях, які змінюються в часі. Ці властивості залежать від параметрів пружної системи, власних частот коливань, динамічної піддатливості ланок та схем їхнього навантаження.

Основними характеристиками динамічних властивостей машин є: найбільший допустимий режим стійкої роботи машини при можливих відхиленнях його параметрів; амплітуда відносних коливань робочого органу та окремих ланок; швидкодія виконання перехідних процесів; тривалість неперервної роботи машини; шум та коливання ланок.

Динамічні властивості машини забезпечуються шляхом вибору відповідних схем та параметрів системи, а також режимів руху ланок та законів керування.

Курс «Динаміка та міцність машин» поділено на 4 розділи: «Теоретичні питання динаміки машин», «Колівання в машинах і механізмах», «Динамічні розрахунки машин», «Міцність машин».

Складність самостійного вивчення дисципліни «Динаміка та міцність машин» визначається її теоретичною багатокomпонентністю, яка віддзеркалюється у відповідних підручниках, наведених у посібнику.

Навчальний посібник з дисципліни складено з метою надання студентам певних знань і допомоги для самостійного вивчення дисципліни при підготовці до поточного, модульного контролю знань, виконання НДР та магістерської роботи.

РОЗДІЛ 1

1 ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДИНАМІКИ МАШИН

1.1 Задачі науки про динаміку машин

Історичні приклади підтверджують, що незнання або ігнорування динамічних навантажень в конструкціях і машинах призводять до їх руйнування. До сучасних машин висуваються достатньо суперечливі вимоги. З одного боку, машини повинні мати високу продуктивність, тобто бути високошвидкісними з форсованими процесами розгону і гальмування. Реалізація цих вимог в машинах призводить до підвищених динамічних навантажень. З іншого боку, вони мають бути безпечними і довговічними в експлуатації, тобто рівень динамічних навантажень має відповідати напруженням, при яких не відбувається прогресуюче накопичення втоми матеріалу. Для раціональної реалізації конструкції будь-якої машини необхідно знання повних напружень в вузлах цих машин. Якщо напруження від статичних навантажень визначаються достатньо точно просто, то визначення напружень від динамічних навантажень для багатьох машин викликає значну складність і трудомісткість. Складність і трудомісткість визначаються обраною еквівалентною схемою і прийнятим способом математичного опису динамічних процесів.

Першою задачею динаміки можна назвати задачу аналізу. Для рішення цієї задачі необхідна розробка еквівалентної схеми машини, математичний опис динамічного процесу і розв'язання рівнянь для заданих рушійних сил і сил опору. В промисловості застосовується велика кількість машин, відмінних за принципом дії і конструктивним особливостям. Для правильного математичного опису динамічних процесів необхідні знання не тільки законів механіки, но і знання в галузі гідравлики і гідроприводу, електротехніки і електроприводу, пневматики і пневмоприводу. Наприклад, в якості електроприводу під'ємних машин використовують асинхронні електродвигуни з фазним ротором і електродвигуни постійного току, механічні характеристики яких мають принципові відмінності. Гідропривод машин складається з гідродвигунів і обладнання регулювання гідросистем. В якості проміжної ланки електроприводу стрічкового конвеєру використовується гідромуфта. Компресорне обладнання і машини з пневматичними двигунами мають свою специфіку в математичному опису динамічних процесів. Якщо маси в'язкопружних елементів приєднати до зосереджених, а кількість зосереджених мас зменшити, то задача аналізу значно спроститься. Зведення реальної системи до двомасової із зовнішніми лінійними впливами дозволяє отримати аналітичні закономірності, які можуть застосовуватися для аналізу

багатомасових систем. Розв'язання рівнів дозволяє визначити кінематичні закономірності руху окремих вузлів і елементів машини, які формують динамічні навантаження.

Другою задачею динаміки є задача динамічного синтезу, сутність якої заключається в оптимізації динамічних процесів. В якості критерію оптимальності може бути обрана максимальна продуктивність, мала вага або найбільша довговічність. Наприклад, для отримання максимальної довговічності необхідно забезпечити мінімум динамічних навантажень. Рішення задачі синтезу дуже утруднено для систем, математична модель яких характеризується рівнянням з порядком вище двох. Проте результати по оптимізації двох масових моделей можуть бути розповсюджені на багатомасові системи. Використання комп'ютерної техніки дозволяє значно спростити вивчення задачі синтезу динамічних систем. Наприклад, теоретично встановлено, що прикладення збруючої дії до двох масової системи по лінійному закону за час кратне періоду власних коливань формує в механічній системі мінімальні динамічні навантаження. Використання цих закономірностей для багатомасових систем також призводить до зменшення динамічних навантажень.

1.1.2 Умови експлуатації металургійних машин і характер їх навантаження

За величиною діючих зовнішніх навантажень металургійні машини не мають собі рівних серед інших типів машин (гірничих, транспортних та ін.): зусилля прокатки доходять до 20-30 МН, крутні моменти - до 5-7 МН·м, зусилля різання в ножицях - 30 МН. Металургійні машини мають напружений циклічний ритм роботи (число включень в годину деяких машин доходять до 2500), динамічний (і близький до ударного) характер навантажень. Окремі вузли машин зазнають дію високих і швидкозмінних температур, а також інтенсивному зносу фрикційних пар, призводящих до швидко прогресуючих зазорів з великими ударами при їх замиканні. Втрата працездатності металургійних машин відбувається внаслідок зношування деталей і вузлів, раптових поломок від не однократних великих перенавантажень, втомних руйнувань деталей від дії циклічного прикладення навантажень, появи і розвитку мікротріщин.

Зі всіх багато чисельних факторів, що визначають міцність і довговічність машин, найбільш важливим є першопричина навантажень і руйнувань – змінні силові дії на елементи конструкції. Основні причини поломок деталей металургійних машин можна поділити на два види:

- статичні, які відбуваються під дією навантаження, що викликає напруження вище за границю текучості, і втомні, які можуть наступити даже

при напруженнях нижче границі текучості. В першому випадку руйнування, як правило, є наслідком грубих порушень режимів експлуатації і рідко результатів похибок при конструюванні і виготовленні машин; в другому випадку руйнування відбувається під дією циклічних або знакозмінних навантажень, які викликають втому метала. Руйнування деталей від втомних явищ хоча і носять раптовий характер, проте супроводжується помітною пластичною деформацією. По ряду причин в тілі деталі виникають поверхневі мікротріщини, які є локальними концентраторами напружень, котрі під дією циклічних деформацій розвиваються з часом з більшою або меншою швидкістю, залежній від інтенсивності навантажень, розмірів деталі, особливостей матеріалу та інших факторів. Коли переріз ослаблюється до такого ступеня, що матеріал не може протистояти даже статичному навантаженню, відбувається руйнування.

- Динамічні навантаження в приводних лініях, на які впливають тип, характеристика, параметри і система керування двигуна. Так, асинхронні короткозамкнені двигуни при пуску створюють великі динамічні навантаження в лінії передач, як і двигуни з фазовим ротором. Двигуни з м'якою характеристикою викликають меншу інтенсивність коливань, проте двигуни з жорсткою характеристикою мінують більшу дисипативність – коливання швидко згасають. На тривалість перехідних процесів в машинах впливає величина електромеханічної сталої часу привода: в безмаховичних приводах $T_m=0,02\dots0,6$ с, в маховичних $T_m=0,3\dots1,5$ с. Синхронні електродвигуни в металургійних машинах застосовуються рідко, проте на тих агрегатах або механізмах, де вони застосовуються, трапляються випадки поломки деталей привода. Основною причиною поломок є інтенсивні коливальні процеси зі слабким згасанням.

- Технологічні навантаження в машинах за величиною і по фазі незбігаються з такими навантаженнями двигунів. Причому відставання в зростанні струмів двигуна від технологічних навантажень тим більше, чим більше запас кінетичної енергії обертових елементів привода. Зростання струму двигуна не встигає за швидким збільшенням навантажень робочих режимах.

Передчасний вихід з ладу деталей і вузлів машин із-за механічних перенавантажень, термічних і циклічних напружень, а також зношування призводить до великих матеріальних втрат (перевитрати запасних частин, неповне використання потужностей, перевитрати фонду заробітної плати тощо).

Практично в багатьох машинах основними навантаженнями, що визначають міцність і довговічність, є динамічні навантаження коливального характеру. Величина і характер коливальних навантажень залежать від динамічних параметрів пружних елементів трансмісії, зовнішніх характеристик двигунів і

кількості в приводі, закону змвни технологічних навантажень, а також від зазорів в вузлах з'єднань деталей.

1.1.3 Зниження динамічних навантажень

Металургійні машини працюють в дуже важких умовах динамічних навантажень. Якщо врахувати, що багато машин і агрегатів є унікальними і коштовними, то зрозуміло що проблема зниження динамічних загрузок в машинах і підвищення їх надійності і довговічності є дуже актуальна проблема.

Вирішення цієї складної проблеми можна досягнути комплексним шляхом: дослідженням фізичних процесів і загрузок в машинах, вибором оптимальних параметрів конструкцій, поліпшення якості виготовлення машин, встановленням демпфіруючих пристроїв тощо.

Не розглядаючи детально всіх засобів, що призводять до зниження динамічних загрузок, вкажемо на головні з них:

- Вибір раціональних кінематичних схем механізмів без пасивних в'язів;
- Встановлення дійсної картини фізичних процесів, що відбуваються в машинах з урахуванням жорсткостей деталей, зазорів в з'єднаннях і характеристики двигуна в різних режимах експлуатації;
- Визначення оптимальних кінематичних і динамічних параметрів машин ще на стадії проектування шляхом моделювання і розрахунку на ЕОМ;
- Поліпшення динамічних характеристик шляхом розрахунку оптимального співвідношення розподілу мас і жорсткостей системи, які забезпечують мінімальні динамічні загрузки і і швидке їх затухання;
- Підвищення якості матеріалів і технології виготовлення деталей, точності обробки і монтажу машини, зменшення зазорів в з'єднаннях;
- Створення конструкцій машин з раціональним розташуванням приводів в механізмах без довгих і складних трансмісій;
- Застосування індивідуальних приводів на кожний механізм;
- Встановлення в тяжкі машини багатодвигунових приводів, та також безддукторних і гідравлічних приводів, що мають кращі динамічні характеристики;
- Введення в машину демпфіруючих пристроїв, які поглинають енергію коливань – пружньодемпфіруючих муфт з нелінійними характеристиками, гідравлічних амортизаторів з дискретно-змінною характеристикою;
- Створення спеціальних пристроїв для вибору зазорів в з'єднаннях, що виключають ударне замикання механізмів; застосування зрівноважувальних пристроїв в механізмах циклічної дії.

Застосування цього комплексу заходів практично не виключає опарних перенавантажень металургійних машин, особливо при виникненні випадкових загрузок, які не піддаються теоретичним розрахункам. В цих випадках потрібно встановлювати надійні механічні захисні пристрої від аварійних руйнувань машин.

1.1.3 Аналіз кінематичних схем і класифікація фізичних моделей

Результати натурних досліджень всього многовиду механізмів металургійних машин показують, що їх динамічна навантаженість залежить не тільки від типу машин і характеру прикладення технологічних (зовнішніх) навантажень, но і немалому ступені від структури кінематичних схем, розташування і типу приводу. Невдало обрана кінематична схема механізму може бути причиною виникнення великих динамічних навантажень в порівнянні з аналогічною конструкцією машини при дії тих самих технологічних навантажень, но з іншою кінематичною схемою.

Основні тенденції в розвитку кінематичних схем механізмів, забезпечуючи меншу динамічну навантаженість:

- максимально можливе спрощення машин виключенням пасивних в'язів;
- раціональне розташування приводу з мінімальною довжиною передаточних ліній;
- застосування індивідуальних приводів з максимальним виключенням трансмісійних валів і муфт включення, більш широке впровадження компактних приводів;
- застосування без редукторних приводів, особливо для тяжких режимів роботи швидкодіючих механізмів;
- впровадження гідро- і пневмоприводів, маючих менші габарити, масу і велику швидкодію, а також комбінованих приводів;
- застосування багатодвигунних приводів, зменшуючи динамічні навантаження і підвищуючи надійність машин.

Реальні системи металургійних машин в більшості достатньо складні з багатьма степенями вільності, нерідко зі змінними динамічними параметрами, з великими зазорами, зі складними характеристиками. Великий вплив на динаміку машин мають тип двигуна, його характеристика і система керування. Міра впливу двигуна на механічну систему і механічних коливань на електромагнітні процеси в машинах неоднакові. В одних машинах вони незначні і практично ними можна знехтувати, а механічні процеси можна розглядати без урахування електромагнітних явищ в двигуні, а в інших машинах їх розділяти неможна, оскільки це призведе до істотних викривлень

фізичних процесів, які реально відбуваються в машинах, і до помилок в розрахунках.

В деяких технологічних машинах механічні коливання взаємодіють не тільки з джерелом енергії, но і з технологічними процесами на робочих органах машини.

Таким чином, всі металургійні машини можна привести до наступних розрахункових фізичних моделей:

- механічним, в яких враховується тільки пружність ланок;
- електромеханічним, в яких, окрім пружності ланок, враховуються електромагнітні процеси в двигуні;
- електро-механіко-технологічним, в яких враховуються пружність системи, електромагнітні процеси в двигуні і технологічні особливості зовнішньої дії.

1.2 Загальні положення динамічного розрахунку

Металургійні машини працюють в тяжких динамічних режимах, і тому до їх конструкцій висуваються високі вимоги міцності і надійності. Якість цих машин в немалій мірі залежить від того, наскільки точно проведені розрахунки їх основних параметрів. На сучасному етапі розвитку машинобудування виникла нова галузь динаміки – прикладна динаміка машин, яка дозволяє найбільш повно вивчати динамічні процеси в машинах і визначати навантаження, які виникають в їх елементах.

Машину необхідно розглядати такою, якою вона є в дійсності, тобто з урахуванням властивостей матеріалу (пружності), реального характеру навантаження зовнішніми силами, приймаючи до уваги характеристику двигуна, з урахуванням зазорів в приводних лініях і дисипативних властивостей системи.

Машини домених і сталеплавильних цехів піддаються інтенсивній дії динамічних навантажень. Проте найбільш жорсткі динамічні режими притаманні машинам прокатної границі, характер навантаження котрих часто приближається до ударного. Тому знехтування динамічними впливами може потягти за собою великі похибки в розрахунках металургійних машин. Аварії машин можуть виникнути там, де статичні навантаження невеликі, а дія змінних сил є однією з основних причин втомного руйнування деталей. Практично 90% руйнувань деталей машин носять втомний характер в результаті дії динамічних навантажень. Механічні коливання в машинах чинять шкідливий вплив не тільки на їх міцність, вони можуть в значній мірі ускладнювати і даже порушувати нормальний технологічний процес роботи машин, наприклад, коливання електродів дугових електропечей, або валків в

листо- і трубопрокатних станав, призводящих до погіршення якості листів і труб, буксування валків прокатних станів та ін...

Динамічні розрахунки машин передбачають визначення величини амплітуд і частот коливань навантажень в машині і на цій основі проводяться розрахунки деталей на витривалість.

Великий вплив на якість машин має вибір раціональних кінематичних схем з можливо мінімальним числом пар і ланок без пасивних в'зів, забезпечуючих мінімальні динамічні навантаження і велику їх надійність. Невдало обрана кінематична схема механізму і необґрунтований вибір її динамічних параметрів при інших рівних умовах можуть бути причиною виникнення великих перенавантажень і аварій. Тому вже на стадії проектування за допомогою КТ проводити детальний розрахунок і дослідження динаміки машин з різними варіантами кінематичних схем і параметрами для реальних експлуатаційних умов роботи.

Незалежно від призначення і конструктивних особливостей всі машини мають загальні властивості – пружність ланок і здатність при визначених умовах до збруєння в них коливальних процесів. Під дією зовнішніх навантажень (мометів або сил) пружні елементи приводу деформуються, а елементи машин здійснюють, окрім основного робочого процесу, малі крутильні або повздовжні коливання. В результаті цього приводи навантажуються додатковими моментами або силами пружності, які змінюються в часі з частотою власних коливань системи.

Врахування динамічних навантажень коливального характеру в машинах включає наступні основні етапи розрахунку:

- 1 Складання фізичної моделі машини;
- 2 Визначення величини і характеру зміни зовнішніх навантажень, прикладених до системи;
- 3 Складання диференціальних рівнянь руху пружної системи;
- 4 Визначення частот власних коливань;
- 5 Розрахунки пружних сил і моментів в ланках приводів з урахуванням розмірних режимних параметрів руху робочих органів машин.

Привод машин складається з великої кількості зосереджених і розсереджених мас, внаслідок чого теоретичне дослідження такої системи зазнає труднощів. Тому дійсну систему по можливості замінюють спрощеною, так званою зведеною розрахунковою схемою з невеликою кількістю мас, забезпечующу припустиму точність розрахунку.

1.3 Вибір кількості ступенів вільності механічних систем

Одне із завдань динаміки машин полягає у визначенні руху системи. Після цього по відомих формулах опору матеріалів визначаються внутрішні зусилля, напруження й деформації в елементах коливного тіла [1]. Для того, щоб описати рух машини чи механізму необхідно вибрати координати, які будуть відповідати тому чи іншому стану машини.

Числом ступенів вільності механічної системи називається число координат, які однозначно визначають її стан. Усі реальні тіла деформуються і тому мають нескінченне число ступенів вільності. Однак залежно від характеру досліджуваного явища й необхідної точності розрахунків можна обмежити число ступенів вільності, вибираючи в якості розрахункової схеми реальної конструкції систему, яка має декілька або навіть один ступінь вільності.

Обмеження числа ступенів вільності, які враховуються в розрахунках, може бути виконане різними способами. Часто в реальній конструкції можна виділити масивні елементи, деформацією яких можна знехтувати, і пружні елементи, масу яких можна не враховувати. У цьому випадку розрахункова схема являє собою ряд масивних тіл, з'єднаних пружними зв'язками. Так, наприклад, система, представлена на рис. 1.1 а, може розглядатися як система з одним ступенем вільності, якщо маса пружини мала в порівнянні з масою вантажу і якщо нас не цікавить поведінка окремих витків пружини, а вантаж може переміщатися тільки у вертикальному напрямку.

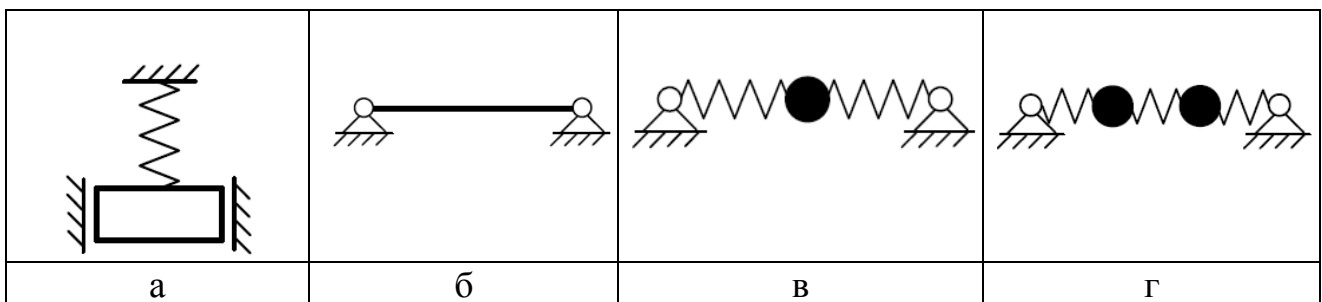


Рисунок 1.1 - Системи із різною кількістю ступенів вільності:
а) маса на пружині (один ступінь вільності); б) балка на опорах;
в) динамічна модель балки на опорах з одним ступенем вільності;
г) динамічна модель балки на опорах з двома ступенями вільності

Інший спосіб полягає в тому, що розподілену по всьому об'єму системи піддатливість (або пружність) зосереджують у кінцевому числі точок або ліній. При цьому система представляється у вигляді сукупності пружно зчленованих абсолютно жорстких елементів. Наприклад, пружна балка із неперервно розподіленою масою та пружністю може бути приблизно замінена рядом

абсолютно жорстких мас, з'єднаних пружними елементами, кількість яких визначається необхідним рівнем точності розв'язування задачі (рис. 1.1, б, в, г)

Вище були розглянуті приклади, у яких обмеження числа ступенів вільності досягалося шляхом нехтування масою одних частин системи (пружин, балок) і жорсткістю інших (вантаж). Третій спосіб визначення числа ступенів вільності системи полягає в тому, що на основі тих або інших міркувань заздалегідь задається форма її руху. Так, наприклад, при згині балки її положення в деякий момент часу визначається безліччю координат.

Однак, використання гіпотези плоских перерізів дозволяє зменшити кількість ступенів вільності балки. Згідно із цією гіпотезою, положення всіх точок балки визначається положенням точок, що лежать на її осі. Завдяки прийняттю гіпотези плоских перерізів задача аналізу руху балки під час її згину суттєво спрощується (стає одномірною), але число ступенів вільності залишається нескінченним. Подальше спрощення досягається на основі припущення, що в процесі руху співвідношення між відхиленнями від положення спокою різних точок балки не змінюються. У цьому випадку приймають, що відхилення ξ точок балки визначаються рівністю:

$$\xi(z, t) = x(t)f(z), \quad (1.1)$$

де $x(t)$ – невідома функція часу,

$f(z)$ – задана функція абсциси z .

Оскільки переміщення будь-якої точки балки визначається тепер єдиною змінною $x(t)$, отримана розрахункова схема має одну ступінь вільності.

Необхідно мати на увазі, що можливість схематизувати реальну динамічну систему й представити її у вигляді системи з однією, двома й більшим числом ступенів вільності залежить не тільки від виду системи, але й від характеру сил, що діють на неї.

Так, наприклад, якщо в системі, зображеній на рис. 1.1, а, відтягнути пружину убік, а потім відпустити, то виникнуть її бічні коливання, при яких не можна знехтувати власною масою пружини, якою б малою вона не була. При дослідженні такого роду коливань систему вже не можна розглядати як систему із одним ступенем вільності.

Існує цілий ряд прикладів, для яких не можна виконувати розрахунки спираючись на моделі із зосередженими параметрами. У цих випадках необхідно використовувати розподілені характеристики елементів машини і будувати динамічні моделі із розподіленими параметрами. Інколи у розрахунках динамічних навантажень в машинах використовують моделі із зосередженими та розподіленими параметрами.

Динамічні моделі із зосередженими параметрами інколи називають дискретними, із розподіленими параметрами – континуальними, а моделі із

зосередженими та розподіленими параметрами – дискретно-континуальними.

Таким чином, вибір тієї або іншої розрахункової схеми може бути зроблений тільки в результаті вивчення фізичної природи розглянутих явищ і залежно від вимог до точності розрахунків.

1.4 Моделювання динаміки машин

Розв'язування задач динаміки машин починається зі збору фактів та даних наукових спостережень. На їх основі проводиться формалізація роботи машини чи механізму і будується її математична модель, тобто виділяються її найбільш суттєві риси та властивості й проводиться їх опис за допомогою рівнянь і формул.

Розглянемо основні етапи моделювання роботи машин (рис. 1.2).

Етап 1. При постановці задачі на фізичному рівні проходить процес схематизації та ідеалізації машини, тобто виділення її суттєвих факторів, що впливають на її функціонування. Деякі риси і фактори машини можуть виявитися важливими, інші – несуттєвими.

Етап 2. Після виявлення суттєвих факторів ставляться задачі моделювання й вибирається схема взаємодії між елементами машини, тобто будується динамічна модель, яка відображає суттєві фактори. Більш детально про побудову динамічних моделей буде сказано у п.п. 1.2.1.

Етап 3. Надалі здійснюється переведення необхідних характеристик на мову математичних понять і величин. Складається система параметрів, які описують основні фактори, й здійснюється формування співвідношень та рівнянь між цими параметрами і величинами (математичне моделювання).

Отже, *математична модель* – це результат формалізації реальної машини. Це найбільш складна й важка стадія процесу моделювання. Тут використовують фундаментальні фізичні закони і принципи. Більш детально про методи математичного моделювання машин буде сказано у п.п. 1.2.2.

Етапи 4. Після побудови моделі (третій етап) необхідно проводити перевірку суперечності моделі реальній машині і конкретності постановки задачі. Тут можна використати досить просте й завжди ефективне правило фізичної розмірності всіх членів рівняння-моделі машини.

Етапи 5, 6. Перевіряється справедливість моделі за результатами розв'язування теоретичної задачі у відповідності з математичною моделлю, які зіставляються з реальними результатами роботи машини. На основі цих результатів перевіряється адекватність математичної моделі реальній машині. Глибина відображення моделлю реальної машини залежить від мети дослідження.



Рисунок 1.2 - Етапи моделювання машини

Відповідно до принципів ієрархії моделей кожна модель нижчого рівня не повинна суперечити моделі вищого рівня.

1.4.1 Побудова динамічних моделей

При переході від реальної механічної системи (машини) до її динамічної моделі нехтують тими фізичними факторами, які несуттєві для даного розрахунку або дослідження. В загальному випадку при складанні динамічної моделі механічної системи необхідно враховувати зосереджені маси, розподілені маси по довжині елементів, пружність елементів, залежності рушійних та гальмівних сил двигунів від частоти обертання ротора, зміну приведених мас тощо. У кожному конкретному випадку одні фізичні фактори є головними, а інші – другорядними. Динамічна модель повинна задовольняти дві головні вимоги:

- 1) бути в необхідній мірі адекватною реальній механічній системі й, наскільки це можливо, відображати основні її фізичні властивості;
- 2) бути не дуже складною, щоб розв'язування не було досить трудомістким.

Усяке ускладнення розрахункової схеми повинне бути виправдане одержанням більш точного розв'язку. У той же час спрощення розрахункової

схеми не повинно приводити до викривлення реального фізичного процесу.

Критерієм вірогідності прийнятої розрахункової схеми (динамічної моделі) є збіг результатів, отриманих теоретичним і експериментальним шляхами. Слід підкреслити, що сам експеримент повинен бути поставлений правильно, тобто відбивати ті умови роботи машини, які вивчаються й порівнюються з результатами теоретичних розрахунків.

Розглянемо процес розробки динамічної моделі механічної системи на прикладі механізму підйому вантажу вантажопідйомного крана, кінематична схема якого показана на рис. 1.3.

За окремі маси механізму приймаємо ротор електродвигуна 1, муфту з гальмівним шківом 2, редуктор 3, барабан 4 та вантаж 5. Тут не враховані окремі маси валів і канатів, оскільки їх маси приводяться до відповідних елементів, які на них закріплено. Наприклад, маси вхідного й вихідного валів редуктора приведені відповідно до маси редуктора, а маса канату – до вантажу 5. У цьому механізмі маси 1, 2, 3 і 4 здійснюють обертальний рух, а маса 5 – поступальний.

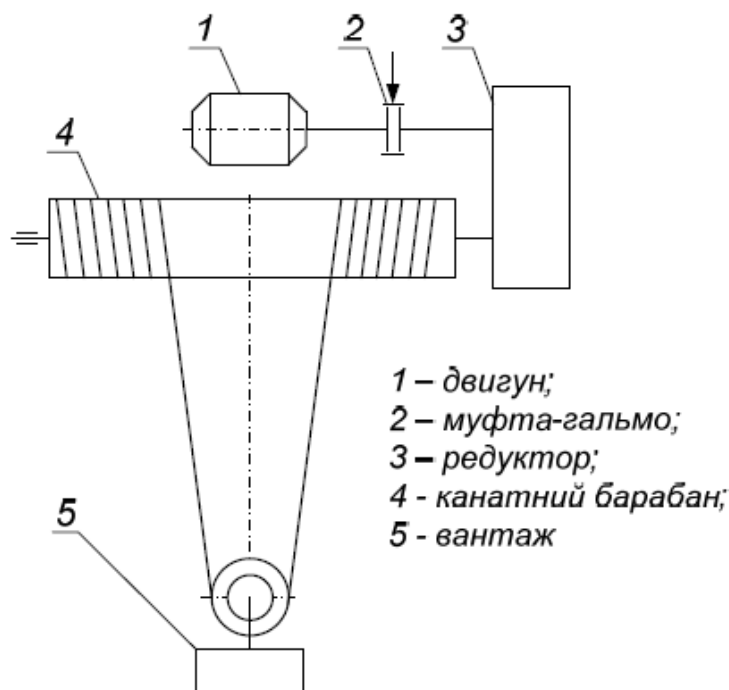


Рисунок 1.3 - Кінематична схема механізму підйому вантажу

Складемо з цих мас динамічну модель, з'єднавши їх між собою інерційними пружними елементами і приклавши діючі навантаження до мас, що розглядаються (рис. 1.4).

Модель складається з трьох ділянок безінерційного вала, кожна з яких обертається з кутовими швидкостями ω_1, ω_2 і ω_3 , а також безінерційного

канату, що намотується на барабан зі швидкістю v . Маса елементів двигуна 1, гальмівного шківів 2, передавального механізму 3 і барабана 4 показані на рис. 1.4 у вигляді умовних дисків з моментами інерції $J_1, J_2, J_{31}, J_{32}, J_{33}, J_{34}$ та J_4 , вантаж 6 – у вигляді матеріальної точки масою m_5 . Умовні диски зв'язані між собою пружними безінерційними ділянками валів із коефіцієнтами крутильної жорсткості $c_1, c_2, c_{31}, c_{32}, c_{34}, c_4$. Диск з моментом інерції J_4 зв'язано з вантажем масою m_6 пружним без інерційним канатом з лінійною жорсткістю $5 c$ через поліспастову систему із кратністю n . Кутові швидкості валів із зубчастими колесами 3.1 і 3.4 зв'язані між собою передаточним відношенням $u = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. На рис. 1.4: M_p – рушійний момент на валу двигуна, $m_5 g$ - вага вантажу.

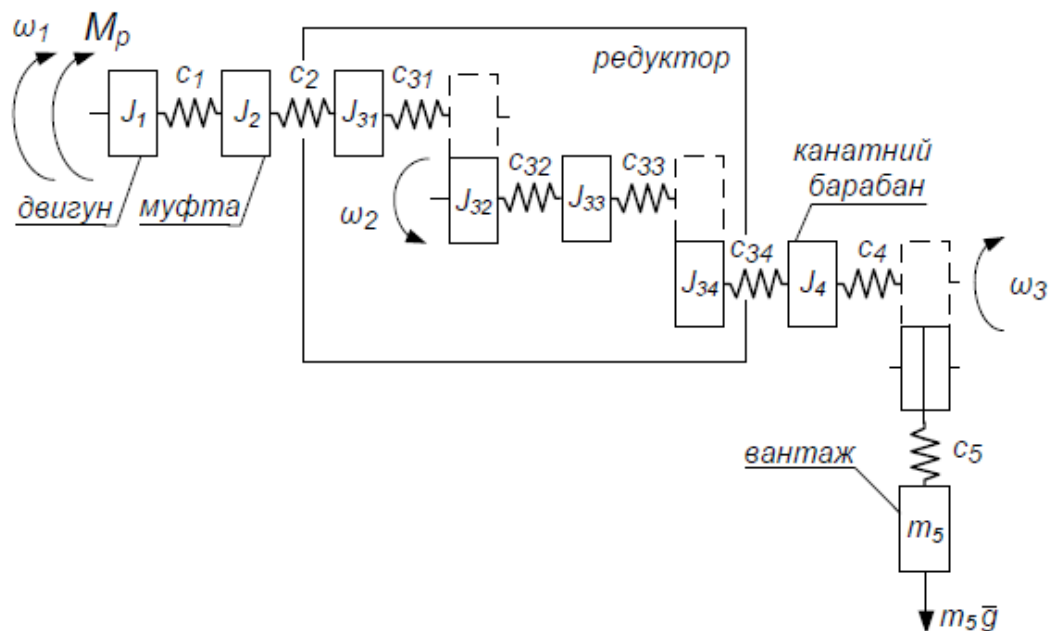


Рисунок 1.4 - Динамічна модель механізму підйому вантажопідйомного крана

За допомогою побудованої динамічної моделі можна створити математичну модель, яка дасть можливість визначити динамічні навантаження в елементах безінерційних пружних валів між двигуном і гальмівним шківом, шківом та зубчастими колесами й барабаном, а також у канаті, який з'єднує барабан із вантажем через поліспастову систему.

Однотимчасне визначення цих навантажень у рамках однієї математичної моделі приводить до значного ускладнення останньої.

У ряді випадків немає потреби розглядати таку складну математичну

модель, її можна замінити рядом простих моделей, кожна з яких враховує тільки одну пружну ділянку вала або канату. Так, якщо виникає потреба визначення динамічних навантажень у пружному канаті, то використовується динамічна модель, у якій усі ділянки валів вважаються жорсткими, а канат – пружним.

При приведенні мас ротора двигуна, гальмівного шківів, зубчастих коліс, барабана і вантажу до гілок канату, які намотуються на барабан, динамічна модель механізму підйому вантажу має вигляд, показаний на рис. 1.5. Тут прийняті такі позначення: m_{n1} – приведена маса ротора двигуна, гальмівного шківів, зубчастих коліс та барабана до гілок канату; m_{n2} – приведена маса вантажу до гілок канату; F_{n1} , F_{n2} – приведені до канату сили від дії відповідно рушійного моменту на валу двигуна й ваги вантажу; c_n – приведена жорсткість гілок канату; x_1 , x_2 – координати центрів мас відповідно m_{n1} і m_{n2} .

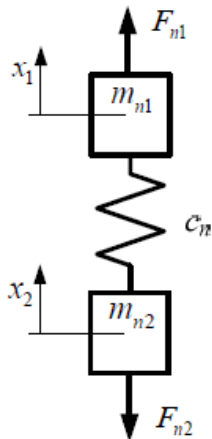


Рисунок 1.5 - Спрощена динамічна модель механізму підйому вантажопідйомного крана

Приведення мас та моментів інерції тіл системи базується на рівності кінетичної енергії заданої й приведеної систем; приведення сил і моментів сил – на рівності робіт (потужностей), які виконують ці сили й моменти та їх приведені величини; приведення жорсткостей – на рівності потенціальних енергій, якими володіють пружні елементи заданої і приведеної систем.

Здійснимо приведення мас, діючих сил та жорсткостей до гілок канату, що намотується на барабан для механізму підйому вантажопідйомного крана (рис. 1.6). Оскільки виникає потреба визначення динамічних навантажень у гілках канату, то приведення здійснюється з двох боків, до верхньої частини канату приводяться всі елементи від двигуна до барабана включно, а до нижньої частини – вантаж і канат (рис. 1.4).

Визначимо кінетичну енергію системи „двигун-барабан” (рис.1.4):

$$T_1 = \frac{\omega_1^2}{2}(J_1 + J_2 + J_{31}) + \frac{\omega_2^2}{2}(J_{32} + J_4) \quad (1.2)$$

де ω_1, ω_3 – кутові швидкості обертання відповідних валів;

$J_1, J_2, J_{31}, J_{32}, J_4$ – моменти інерції відповідних елементів (рис. 1.4).

Кінетична енергія приведеної системи розглянутих елементів має вигляд:

$$T_{n1} = \frac{m_{n1}v^2}{2}, \quad (1.3)$$

де v – швидкість намотування канату на барабан.

Виходячи з умов приведення мас, прирівнюємо праві вирази залежностей (1.2) і (1.3). У результаті отримаємо:

$$\frac{\omega_1^2}{2}(J_1 + J_2 + J_{31}) + \frac{\omega_2^2}{2}(J_{32} + J_4) = \frac{m_{n1}v^2}{2}. \quad (1.4)$$

Враховуючи те, що $\omega_2 = \frac{2v}{D}$ (D - діаметр барабана), а $\omega_1 = u\omega_2$, $\omega_2 = \frac{2vu}{D}$

та проводячи математичні перетворення, знаходимо в кінцевому вигляді вираз приведеної маси системи „двигун-барабан”:

$$m_{n1} = \frac{4}{D^2}((J_1 + J_2 + J_{31})u^2 + J_{32}J_4). \quad (1.5)$$

Аналогічно визначається приведена маса системи „вантаж-канат” (рис. 1.5). У цій системі враховується маса тільки тієї частини канату, яка здійснює рух.

При довжині H рухомих гілок канату від осі блока до осі барабана кінетична енергія системи „вантаж-канат” визначається залежністю:

$$T_2 = \frac{1}{2}2H\rho v^2 + \frac{1}{2}m_5 \frac{v^2}{n^2}, \quad (1.6)$$

де ρ – маса одиниці довжини канату;

n – кратність поліспасової системи.

Кінетична енергія приведеної системи цих елементів визначається наступним виразом:

$$T_{n2} = \frac{1}{2}m_{n2}v^2. \quad (1.7)$$

Прирівнявши праві частини залежностей (1.6) і (1.7), отримаємо:

$$\frac{1}{2}2H\rho v^2 + \frac{1}{2}m_5 \frac{v^2}{n^2} = \frac{1}{2}m_{n2}v^2. \quad (1.8)$$

З одержаного рівняння знаходимо приведену масу системи „вантаж-канат”:

$$m_{n2} = 2H\rho + \frac{m_5}{n^2}. \quad (1.9)$$

Для визначення приведеної сили F_{n1} визначимо її потужність у приведеній системі і прирівняємо її до потужності рушійного моменту M_p на валу двигуна. В результаті будемо мати:

$$F_{n1}v = M_p \omega_3. \quad (1.10)$$

Враховуючи зв'язок між швидкостями v і ω_3 з останнього рівняння отримаємо:

$$F_{n1} = \frac{2M_p u}{D}. \quad (1.11)$$

Аналогічно знаходимо приведену силу F_{n2} , врахувавши рівність її потужності, необхідної для підйому вантажу:

$$F_{n2}v = \frac{m_5 g v}{n}. \quad (1.12)$$

З отриманого рівняння маємо

$$F_{n2} = \frac{m_5 g}{n}. \quad (1.13)$$

Якщо враховувати ККД передачі від двигуна до барабана η_1 і ККД поліспасової системи η_2 , то вирази для приведених сил можна записати у вигляді:

$$F_{n1} = \frac{2M_p u \eta_1}{D}. \quad (1.14)$$

$$F_{n2} = \frac{m_5 g}{n \eta_2}. \quad (1.15)$$

Для визначення приведеної жорсткості c_n скористаємось умовою зведення жорсткості канатно-поліспасової системи c_6 (рис. 1.4) до гілки канату, яка намотується на барабан. Згідно з цією умовою маємо:

$$\frac{1}{2} c_n x_2^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{x_2}{n} \right)^2. \quad (1.16)$$

З отриманого рівняння знаходимо приведену жорсткість канатно-поліспасової системи:

$$c_n = \frac{c}{n}. \quad (1.17)$$

Виходячи з конструкції поліспасової системи (рис. 1.4) і враховуючи те, що жорсткість одиниці довжини канату дорівнює EA (де E – модуль пружності канату, A – площа його поперечного перерізу), можна визначити жорсткість канатно-поліспасової системи:

$$c = 2EA \left(\frac{1}{(n-1)h} + \frac{1}{H} \right), \quad (1.18)$$

де h - відстань між осями рухомих і нерухомих блоків (рис. 1.3).

Динамічна модель, що показана на рис. 1.6, має сім ступенів вільності, а на рис. 1.5 – тільки два. Таке спрощення динамічної моделі механічної системи незначно знижує її точність, але набагато спрощує її математичну

модель. Зниження точності динамічної моделі механізму підйому вантажу для визначення динамічних навантажень у пружному канаті за рахунок значного зменшення кількості ступенів вільності відповідає точності визначення моментів інерції, жорсткостей окремих елементів і рушійного моменту приводного механізму [2].

1.4.2 Методи синтезу математичних моделей динамічних систем

На основі отриманої динамічної моделі формальними методами може бути побудована математична модель будь-якої механічної системи.

Математичні моделі механічних систем становлять, як правило, диференціальні рівняння руху або взаємодії окремих елементів.

Для отримання диференціальних рівнянь руху механічних систем при відомих їх динамічних моделях використовуються три основних методи:

- 1) метод рівноваги з використанням принципу д'Аламбера;
- 2) принцип можливих переміщень;
- 3) принцип Гамільтона-Остроградського (рівняння Лагранжа другого роду).

Розглянемо більш детально кожний із цих методів.

Метод рівноваги. Рівняння руху будь-якої механічної системи при наявності її динамічної моделі – це вираз другого закону Ньютона, який встановлює, що швидкість зміни імпульсу будь-якої маси дорівнює діючій на неї силі. В математичній формі це записується у вигляді наступного диференціального рівняння:

$$\bar{F}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\bar{r}}{dt} \right), \quad (1.19)$$

де $F(t)$ – вектор прикладеної сили;

r – радіус-вектор координат центра мас маси m ;

t – координата часу.

Для більшості задач динаміки машин і механізмів масу можна розглядати незмінною в часі. Тоді рівняння (1.19) приймає вигляд:

$$\bar{F}(t) = m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m \bar{\ddot{r}}. \quad (1.20)$$

Отримане рівняння виражає умову рівності сили добутку маси на прискорення:

$$\bar{F}(t) - m \bar{\ddot{r}} = 0. \quad (1.21)$$

У рівнянні (1.21) другий доданок називають силою інерції, яка здійснює опір прискоренню маси.

Принцип д'Аламбера широко застосовується в задачах динаміки машин, оскільки дає змогу вивести рівняння руху на основі умов динамічної рівноваги. Сила $F(t)$ може включати в себе різні види сил, що прикладені до маси: силу

пружного опору, яка направлена в напрямку протилежному переміщенню; силу затування, яка здійснює опір швидкості переміщення, і незалежні зовнішні сили. Якщо ввести силу інерції, що здійснює опір прискоренню маси, то рівняння руху виражають умову рівноваги всіх сил, які прикладені до маси. Принцип д'Аламбера розглядає рівновагу окремо взятої маси з прикладенням до неї всіх діючих сил, сили інерції та реакцій зв'язку з іншими масами. Для більшості простих динамічних моделей механічних систем указаний метод виводу рівнянь руху найбільш зручний.

Складемо за допомогою цього методу диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.5.

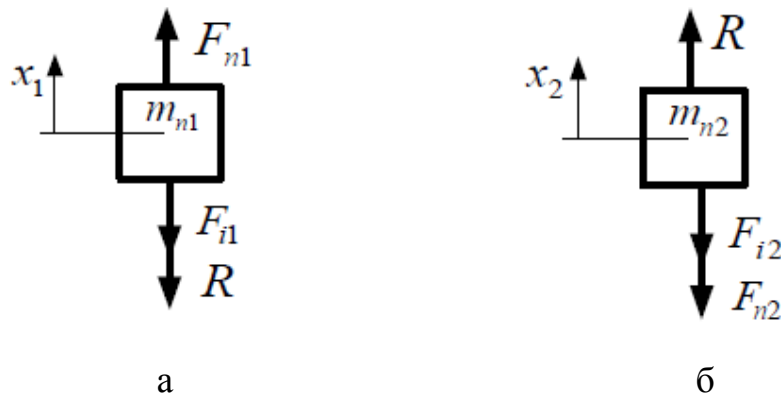


Рис. 1.6. Схеми динамічної рівноваги мас: а) m_{n1} ; б) m_{n2}

На рис.1.6 $R=c_n(x_1-x_2)$ – реакція пружного зв'язку між масами m_{n1} і m_{n2} ; $F_{i1} = m_{n1}\ddot{x}_1$ – сила інерції, що діє на масу m_{n1} ; $F_{i2} = m_{n2}\ddot{x}_2$ – сила інерції, що діє на масу m_{n2} .

Приклад. Розглянемо динамічну рівновагу маси m_{n1} (до неї прикладені сили R та F_{i1} (рис. 1.6, а)) та маси m_{n2} (до неї прикладені сили R та F_{i2} (рис.1.6, б)).

Використовуючи умови рівноваги (1.21) для мас m_{n1} та m_{n2} , отримаємо систему диференціальних рівнянь, які описують рух динамічної моделі, показаної на рис. 1.5:

$$\begin{cases} F_{n1} - (x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1 = 0, \\ c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Запишемо цю систему в іншому вигляді:

$$\begin{cases} m_{n1}\ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2), \\ m_{n2}\ddot{x}_2 = c_n(x_1 - x_2) - F_{n2}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Отримана система диференціальних рівнянь являє собою математичну модель для визначення динамічних навантажень R (реакції пружного зв'язку) у канаті.

Принцип можливих переміщень. Коли конструктивна схема машини чи механізму достатньо складна і містить ряд взаємодіючих тіл кінцевих розмірів, безпосереднє виведення умов рівноваги всіх діючих на систему сил ускладнюється. Змінні сили часто виражаються через переміщення по узагальнюючих координатах, але записати умови їх рівноваги досить складно. В цьому випадку для виведення рівнянь руху замість умов рівноваги використовують принцип можливих (віртуальних) переміщень.

Цей принцип формулюється наступним чином: *якщо система, яка знаходиться в рівновазі під дією декількох сил, отримує можливе переміщення, тобто будь-яке переміщення, яке задовольняє крайовим умовам, то повна робота всіх сил на цьому переміщенні дорівнює нулю.*

Згідно з цим принципом рівність нулю роботи сил на можливому переміщенні системи еквівалентна умові рівноваги. Суттєва перевага цього принципу полягає в тому, що складові робіт сил на можливих переміщеннях – скалярні величини і можуть додаватися алгебраїчно, а сили, які діють на елементи динамічної моделі, є векторами і можуть додаватися тільки за правилами векторного аналізу.

При застосуванні принципу можливих переміщень у випадку руху механічної системи до заданих зовнішніх сил приєднуються сили тертя і сили інерції для кожного тіла. У цьому випадку принцип можливих переміщень можна записати так:

$$\sum_{i=0}^N (\bar{F}_i - m_i \bar{r}_i) \delta \bar{r}_i = 0, \quad (1.24)$$

де N - кількість матеріальних точок системи;

\bar{F}_i - вектор рівнодійної зовнішніх сил і сил тертя, що діють на матеріальну точку;

m_i, \bar{r}_i - маса та вектор координати i -ої точки системи.

Для динамічної моделі, показаної на рис. 1.5, складемо диференціальні рівняння руху за допомогою принципу можливих переміщень. З цією метою визначимо всі діючі на маси m_{n1} та m_{n2} сили, включаючи й сили пружності.

Використавши рівняння (1.24), отримаємо:

$$\left[F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1} \ddot{x}_1 \right] \delta x_1 + \left[c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2} \ddot{x}_2 \right] \delta x_2 = 0. \quad (1.25)$$

Оскільки рівняння (1.25) має місце при будь-яких незалежних одне від одного значеннях варіацій δx_1 і δx_2 , то це можливо лише при умові, що коефіцієнти при кожній із цих варіацій дорівнюють нулю. Тоді будемо мати:

$$\begin{cases} m_{n1} \ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2), \\ m_{n2} \ddot{x}_2 = c_n(x_1 - x_2) - F_{n2}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Отримана система являє собою диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.5, яка збігається з системою (1.23), одержаною за допомогою методу рівноваги.

Принцип Гамільтона-Остроградського (рівняння Лагранжа II роду). Цей метод не вимагає векторних рівнянь рівноваги, бо він використовує скалярні величини енергії у варіаційній постановці. Суть цього методу полягає в тому, що для неконсервативних механічних систем справедливе варіаційне рівняння:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad (1.27)$$

де t_0, t_1 – початковий і кінцевий моменти часу руху системи; δT – варіація кінетичної енергії; δA – елементарна робота сил, прикладених до системи, при переході від прямого до обхідного шляху, який має з прямим шляхом спільні початкові й кінцеві умови.

Якщо система консервативна, то $\delta A = -\delta \Pi$ (де Π – потенціальна енергія системи) і $dT + dA = d(T - \Pi) = dL$. У випадку консервативної системи принцип Гамільтона-Остроградського полягає в тому, що

$$\int_{t_0}^{t_1} dL dt = 0, \quad (1.28)$$

Інтеграл

$$I_L = \int_{t_0}^{t_1} dL dt = 0, \quad (1.29)$$

називається дією за Гамільтоном-Остроградським.

Застосування цього принципу можна здійснювати і в іншій формі

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(T - \Pi) + \delta A_1] dt = 0. \quad (1.30)$$

У цьому випадку консервативні сили (гравітаційні й пружні) входять у вираз потенціальної енергії, а δA_1 становить елементарну роботу неконсервативних сил (рушійних і сил опору при переміщенні системи).

Застосування принципу Гамільтона-Остроградського у формі (1.30) дає можливість спростити врахування консервативних сил, таким чином надати принципу більший формалізм.

Принцип Гамільтона-Остроградського можна покласти в основу наближених методів розв'язування задач динаміки машин, які широко застосовуються в теорії пружності й при розв'язуванні складних задач теорії коливань.

Приведений принцип був опублікований В. Гамільтоном в 1834-1835

роках для випадку стаціонарних, тобто не залежних від часу зв'язків.

Незалежно від нього й у більш загальному вигляді для нестационарних неголономних зв'язків цей принцип був сформульований М.В. Остроградським в 1848 році.

За допомогою принципу Гамільтона-Остроградського складемо диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.5.

Кінетична і потенціальна енергія цієї моделі мають вигляд:

$$T = \frac{1}{2} m_{n1} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_{n2} \dot{x}_2^2, \quad (1.31)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_n (x_1 - x_2)^2. \quad (1.32)$$

Елементарну роботу неконсервативних сил представимо виразом

$$\delta A_1 = F_{n1} \delta x_1 - F_{n2} \delta x_2. \quad (1.33)$$

Варіація $\delta(T - \Pi)$ для розглядуваної моделі має вигляд

$$(T - \Pi) = m_{n1} \dot{x}_1 \delta \dot{x}_1 + m_{n2} \dot{x}_2 \delta \dot{x}_2 - c_n (x_1 - x_2) \delta x_1 + c_n (x_1 - x_2) \delta x_2 \quad (1.34)$$

Після підстановки виразів (1.33) та (1.34) у рівняння (1.30) отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ m_{n1} \dot{x}_1 \delta \ddot{x}_1 + m_{n2} \dot{x}_2 \delta \ddot{x}_2 + [F_{n1} - c_n (x_1 - x_2)] \delta x_1 + [c_n (x_1 - x_2) - F_{n2}] \delta x_2 \} dt = 0. \quad (1.35)$$

Перших два члени рівняння (1.35) проінтегруємо по частинах, у результаті чого будемо мати:

$$\int_{t_0}^{t_1} (m_{n1} \dot{x}_1 \delta \ddot{x}_1 + m_{n2} \dot{x}_2 \delta \ddot{x}_2) dt = m_{n1} \dot{x}_1 \delta \dot{x}_1 \Big|_{t_0}^{t_1} + m_{n2} \dot{x}_2 \delta \dot{x}_2 \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (m_{n1} \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_{n2} \ddot{x}_2 \delta x_2) dt. \quad (1.36)$$

У зв'язку з тим, що на границях інтегрування варіації δx_1 і δx_2 дорівнюють нулю, перших два члени правої частини співвідношення (1.36) дорівнюють нулю. Тому після підстановки виразу (1.36) в рівняння (1.35) отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ [F_{n1} - c_n (x_1 - x_2) - m_{n1} \ddot{x}_1] \delta x_1 + [c_n (x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2} \ddot{x}_2] \delta x_2 \} dt = 0. \quad (1.37)$$

Оскільки варіації δx_1 і δx_2 в середині інтервалу $[t_0, t_1]$ довільні й незалежні між собою, то рівняння (1.36) можливе в загальному випадку лише при умові, що коефіцієнти при варіаціях δx_1 і δx_2 дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} F_{n1} - c_n (x_1 - x_2) - m_{n1} \ddot{x}_1 = 0, \\ c_n (x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2} \ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Отримана система рівнянь є системою диференціальних рівнянь руху динамічної моделі (рис. 1.5).

Із принципу Гамільтона-Остроградського можна отримати відоме рівняння Лагранжа другого роду. Згідно із принципом Гамільтона-

Остроградського, серед можливих траєкторій руху системи дійсною є та, на якій варіація дії (1.29) дорівнює нулю, тобто повинно виконуватись рівняння:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = 0. \quad (1.39)$$

Інакше кажучи, дійсна траєкторія динамічної системи повинна задовольняти рівнянню (1.39).

Отже, для того щоб знайти траєкторію руху механічної системи, яка викликана прикладеними до системи зовнішніми силами, потрібно визначити стаціонарні точки дії (1.29). Аналізуючи отриману задачу неважко впевнитись у тому, що вона є найпростішою задачею варіаційного числення:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \quad (1.40)$$

де x_0, x_1 - відповідно початковий та кінцевий стан (положення) динамічної системи. Для того, щоб знайти екстремум дії (1.29) необхідно скласти рівняння Ейлера:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (1.41)$$

Розв'язок рівняння (1.41) буде мати дві постійні інтегрування, які знаходяться відповідно до крайових умов $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Зазначимо, що рівняння (1.41) справедливе лише для потенціальних сил (сили, робота яких не залежить від форми траєкторії руху системи, а залежить тільки від початкової й кінцевої точки прикладання сили; отже, потенціальні сили – такі сили, робота яких по будь-якій замкненій траєкторії рівна нулю, що означає збереження механічної енергії в системі при дії на неї потенціальних сил; приклади потенціальних сил: сила ваги, сила пружності тощо). Для непотенціальних сил рівняння Лагранжа II роду записується у такому вигляді [3]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1.42)$$

де Q_x - узагальнена сила, яка визначається таким чином:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = Q_{\text{нен}}. \quad (1.43)$$

де $Q_{\text{нен}}$ - непотенціальна сила, що діє на систему.

Кількість рівнянь, які необхідно скласти для побудови математичної моделі руху машини чи механізму рівна кількості її узагальнених координат.

Для прикладу складемо математичну модель руху динамічної системи (рис. 1.5) за допомогою рівняння Лагранжа II роду. На систему представлену на рис. 1.5 діють як потенціальні так і непотенціальні сили. Тому будемо використовувати рівняння (1.42), (1.43).

Крім того, кількість узагальнених координат рівна двом, тому необхідно скласти два рівняння (1.42). Раніше були знайдені кінетична (1.31) та потенціальна (1.32) енергії системи. Надалі запишемо вирази для узагальнених сил:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + Q_{нен1} = -\frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1 - x_2)^2}{\partial x_1} + F_{n1} = F_{n1} - \frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{\partial x_1} = \\ &= F_{n1} - \frac{1}{2}c_n \left(\frac{\partial x_1^2}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial x_1x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1} \right) = F_{n1} - \frac{1}{2}c_n (2x_1 - 2x_2) = F_{n1} - c_n (x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + Q_{нен2} = -\frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1 - x_2)^2}{\partial x_2} + F_{n2} = F_{n2} - \frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{\partial x_2} = \\ &= F_{n2} - \frac{1}{2}c_n \left(\frac{\partial x_1^2}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial x_1x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2} \right) = F_{n2} - \frac{1}{2}c_n (2x_1 - 2x_2) = F_{n2} - c_n (x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (1.45)$$

Надалі знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2 \right)}{\partial x_1} = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2 \right)}{\partial x_2} = 0, \quad (1.47)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2 \right)}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m_{n1}2\dot{x}_1 \right) = \frac{d}{dt} (m_{n1}\dot{x}_1) = m_{n1}\ddot{x}_1, \quad (1.48)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2 \right)}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m_{n2}2\dot{x}_2 \right) = \frac{d}{dt} (m_{n2}\dot{x}_2) = m_{n2}\ddot{x}_2, \quad (1.49)$$

Підставимо вирази (1.44)-(1.49) у формулу (1.41) та отримаємо:

$$\begin{cases} m_{n1}\ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2), \\ m_{n2}\ddot{x}_2 = c_n(x_1 - x_2) - F_{n2}. \end{cases} \quad (1.50)$$

Усі три методи отримання диференціальних рівнянь руху машин та їх механізмів рівнозначні, і, як показує аналіз отриманих рівнянь, ці методи для однієї й тієї ж динамічної моделі приводять до одного і того ж результату.

Звичайно вибір методу для будь-якої конкретної механічної системи залежить від типу динамічної моделі та визначається самим дослідником.

Для отримання необхідних результатів диференціальні рівняння руху механічної системи підлягають інтегруванню з метою визначення характеристик стану (переміщень, швидкостей і прискорень) окремих елементів у функції часу [2].

1.5 Моделювання приводних зусиль

При вивченні фізичних або хімічних процесів, що відбуваються в електричних, гідравлічних або теплових двигунах, розглядають звичайно досить складні фізичні моделі. Однак при розв'язуванні задач динаміки машин нас цікавлять тільки ті властивості двигунів, які визначають характер їх взаємодії з іншими функціональними частинами машини. Ці властивості визначаються механічними характеристиками двигунів, що представляють собою залежності між законами зміни в часі вхідного параметра $u(t)$, узагальненої координати вихідної ланки $x(t)$ і узагальненої рушійної сили $Q(t)$.

Вибравши ту або іншу форму характеристики двигуна, ми тим самим вибираємо його динамічну модель. Залежно від ступеня ідеалізації властивостей двигуна прийнято розрізняти кілька видів його характеристик [4].

Ідеальна кінематична характеристика виходить при припущенні, що узагальнена швидкість вихідної ланки $\dot{x}(t)$ в кожний момент часу залежить тільки від значення вхідного параметра в цей же момент і не залежить від узагальненої сили:

$$\dot{x}(t) = f(u) \quad (1.51)$$

Така характеристика виявляється прийнятною в ряді випадків для опису властивостей „жорстких” двигунів, у яких швидкість вихідної ланки слабо залежить від навантаження або взагалі від нього не залежить (наприклад синхронний електричний двигун) (рис. 1.7, а).

Припускаючи, що узагальнена рушійна сила не залежить від швидкості вихідної ланки й визначається тільки значенням вхідного параметра, одержуємо іншу ідеалізовану модель двигуна, яка називається *ідеальна силова характеристика*. Вона описується таким рівнянням:

$$Q(t) = f(u) \quad (1.52)$$

Ця характеристика може бути прийнята для деяких типів „м'яких” двигунів, у яких узагальнена рушійна сила слабо залежить від швидкості („м'які” характеристики мають, наприклад, двигуни внутрішнього згорання) (рис. 1.7, б).

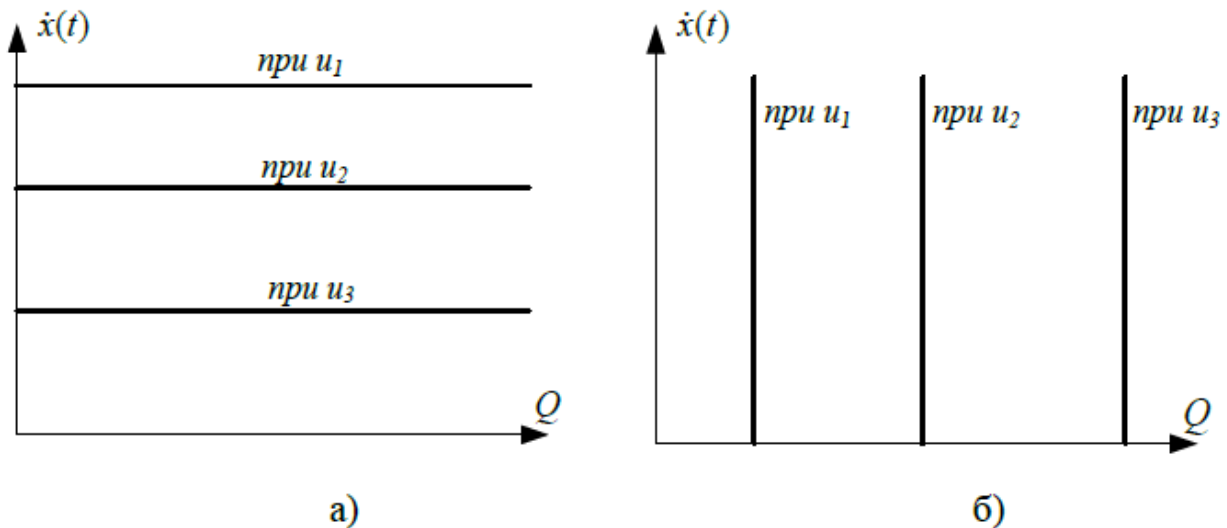


Рис. 1.7. Механічні характеристики двигунів: а) ідеальна кінематична; б) ідеальна силова

При використанні ідеальної кінематичної характеристики часто говорять, що двигун є „джерелом швидкості”, а у випадку ідеальної силової характеристики – „джерелом сили (моменту)”. Ідеальними характеристиками звичайно користуються на перших етапах проектування машини, коли відомий тільки тип двигуна й необхідно оцінити необхідну потужність.

У реальних двигунах узагальнена швидкість вихідної ланки залежить не тільки від значення вхідного параметра, але й від навантаження, яке характеризується величиною узагальненої сили. Як правило, зі збільшенням навантаження швидкість зменшується. Враховуючи цей зв’язок, приходимо до *статичної характеристики двигуна*:

$$\dot{x}(t) = f(Q, u). \quad (1.53)$$

яка також може бути представлена у такій формі:

$$Q = f(u, \dot{x}). \quad (1.54)$$

Існують двигуни, у яких процес перетворення енергії носить циклічний характер. До них відносяться, наприклад, поршневі двигуни внутрішнього згорання. У таких двигунах рушійний момент залежить не тільки від швидкості, але й від координати вихідної ланки, і статична характеристика представляється у формі:

$$Q = f(u, x, \dot{x}). \quad (1.55)$$

або

$$\dot{x} = f(Q, u, x). \quad (1.56)$$

Статичні характеристики двигунів адекватно відображають їхні властивості при статичних режимах роботи, тобто в тих випадках, коли параметри u , Q , \dot{x} є постійними по величині або змінюються досить повільно.

У загальному випадку через інерційність фізико-хімічних процесів, що протікають у двигуні, значення швидкості вихідної ланки в даний момент часу залежить не тільки від миттєвого значення навантаження, але й від значень її похідних за часом. У першому наближенні ця залежність може бути врахована введенням у характеристику двигуна першої похідної за часом від $Q(t)$:

$$Q = f(u, x, \dot{x}, T, \dot{Q}) \quad (1.57)$$

або у іншій формі

$$\dot{x} = f(u, x, T, Q, \dot{Q}) \quad (1.58)$$

Параметр T називається постійною часу двигуна, а вирази (1.57) і (1.58) – його *динамічними характеристиками*.

Характеристики виду (1.57), (1.58) для деяких типів двигунів досить добре описують широкий клас динамічних режимів. Для інших типів двигунів вони виявляються придатними для використання тільки в тих випадках, коли узагальнена швидкість \dot{x} змінюється в порівняно вузьких межах. Динамічні режими, що не задовольняють цій умові, вимагають використання більш складних динамічних моделей.

1.5.1 Гідравлічний двигун об'ємного регулювання

Двигун складається з насоса регульованої продуктивності (рис. 1.8) і гідромотора. Вхідним параметром гідромотора є продуктивність насоса W_n яку в першому наближенні можна вважати не залежною від перепаду тисків p_d [5].

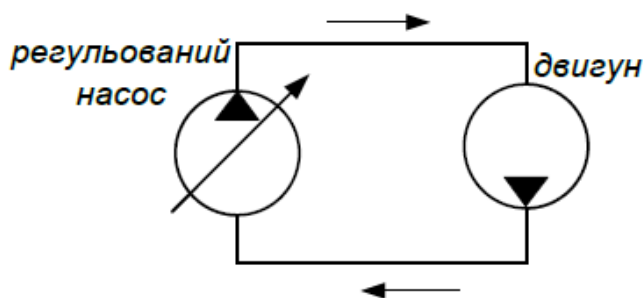


Рис. 1.8. Схема гідравлічного двигуна об'ємного регулювання

При відсутності навантаження ($Q=0$) кутова швидкість гідромотора пропорційна витраті:

$$\dot{x} = \frac{W_n}{k_d} \quad (1.59)$$

Рівняння (1.59) – це ідеальна кінематична характеристика; коефіцієнт k_d називається характеристичним об'ємом гідромотора. При наявності моменту

опору на валу двигуна виникає перепад тисків між входом і виходом гідромотора. При цьому

$$\dot{x} = \frac{W_H}{k_\partial} - \frac{W_H}{g_B k_\partial^2} Q \quad (1.60)$$

де g_∂ - коефіцієнт витoku робочої рідини.

Якщо навантаження змінюється в часі, то механічна характеристика двигуна записується таким чином:

$$\dot{x} = \frac{W_H}{k_\partial} - \frac{W_H}{g_B k_\partial^2} Q - \frac{V_0}{E k_\partial^2} \dot{Q} \quad (1.61)$$

де E - модуль об'ємної пружності робочої рідини;

V_0 - внутрішній об'єм трубопроводу високого тиску з підключеними до нього об'ємами насоса та гідромотора. Рівняння (1.61) можна записати в іншому виді:

$$T \dot{Q} + Q = \frac{k_\partial^2 W_H}{g_B} - \frac{k_\partial^2}{g_B} \dot{x} \quad (1.62)$$

де T - постійна часу двигуна ($T = \frac{V_0}{E g_B}$). Рівняння (1.61) та (1.62) – це динамічні механічні характеристики гідравлічного двигуна об'ємного регулювання.

1.5.2 Гідродвигун із дросельним регулюванням

На рис. 1.9 показана схема найпростішого гідродвигуна із дросельним регулюванням. Тут роль вхідного параметра u виконує положення крана (заслінки) регульованого дроселя. При зміні площі його прохідного перерізу змінюється витрата рідини через дросель, а отже, міняється швидкість вихідної ланки гідродвигуна. Регулятор тиску підтримує постійним тиск живлення перед дроселем, що створюється насосом. Направляючий гідророзподільник (золотник) здійснює реверсування роторного або поршневого гідромотора.

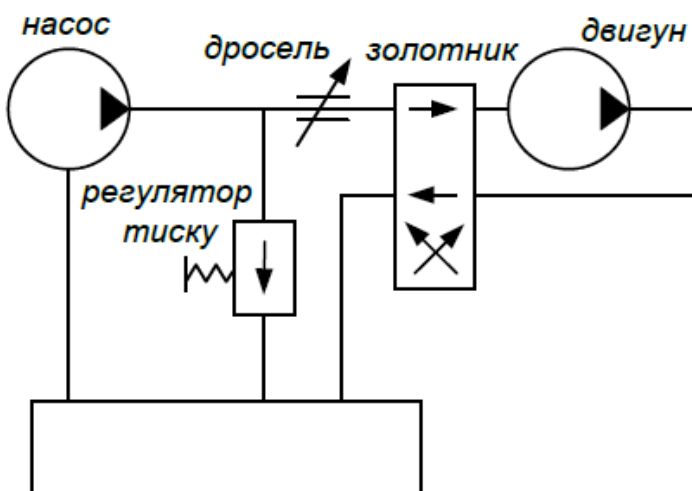


Рисунок 1.9 - Схема гідродвигуна із дросельним регулюванням

Статична характеристика дросельного гідроприводу записується у вигляді:

$$\dot{x} = \mu f(u) \frac{\sqrt{2}}{k_{\delta} \sqrt{\rho}} \sqrt{p_n - \frac{Q}{k_{\delta}} - \frac{g_B}{k_{\delta}^2} Q}, \quad (1.63)$$

де μ – коефіцієнт витрати для дроселя, який залежить від форми його перерізу;
 $f(u)$ – залежність площі отвору від вхідного параметра u тобто від положення крана;

ρ – об'єм робочої рідини;

p_n – тиск на вході у дросель, який вважається постійним.

Для режимів, близьких до статичних ($u = u_0 \approx const$, $Q_0 = Q \approx const$, $\dot{x} = v_0 \approx const$), можна користуватися лінеаризованою динамічною характеристикою:

$$T \frac{d}{dt} (Q - Q_0) + Q - Q_0 = r(u - u_0) - s(\dot{x} - v_0), \quad (1.64)$$

де Q_0 , u_0 , v_0 – відповідно момент на валу двигуна, положення заслінки дроселя та швидкість двигуна, в околі яких здійснена лінеаризація;

T – постійна часу двигуна, яка визначається за формулою

$$T = \frac{\sqrt{2} V_0}{E \mu f(u_0)} \sqrt{\rho \left(p_n - \frac{Q_0}{k_{\delta}} \right)};$$

r та s – коефіцієнти, які визначають за формулами:

$$r = 2k_{\delta} \frac{df}{du} \frac{u_0 \left(p_n - \frac{Q_0}{k_{\delta}} \right)}{f(u_0)}, \quad s = \frac{\sqrt{2} k_{\delta}^2}{\mu f(u_0)} \sqrt{\rho \left(p_n - \frac{Q_0}{k_{\delta}} \right)}$$

Характеристика (1.64) справедлива при значенні сили, що не перевищує деякого граничного значення тиску, обумовленого налаштуванням регулятора. Це граничне значення слабо залежить від \dot{x} . В цілому статичні робочі характеристики мають форму, показану на рис. 1.10, де ділянка BC відповідає формулі (1.63), а ділянка AB визначається налаштуванням регулятора тиску.

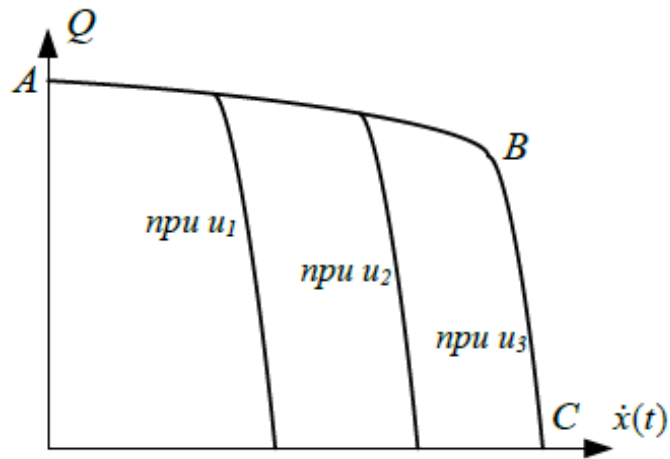


Рисунок 1.10 - Сімейство статичних характеристик двигуна із дросельним регулюванням

1.5.3 Пневматичний двигун

У пневматичних двигунах у якості робочого тіла звичайно використовують стиснене повітря. Найчастіше пневматичні приводи використовують у якості силових: вони забезпечують прикладення до виконавчого органа (наприклад, поршня) заданої сили, величина якої визначається тиском у робочій камері циліндра. На рис. 1.11 схематично показано найпростіший поршневий пневмодвигун із однією робочою камерою. Вхідним параметром є координата органа (золотника, заслінки), який керує надходженням стисненого повітря в робочу камеру.

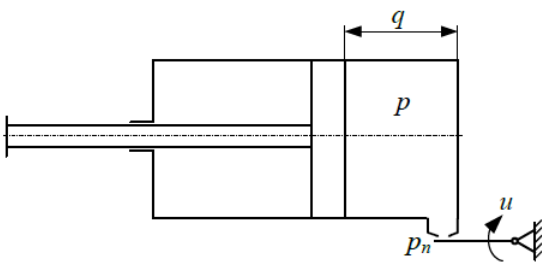


Рисунок 1.11 - Схема поршневого пневмодвигуна

Механічні характеристики

пневматичного двигуна є нелінійними. Якщо прийняти певні припущення, щодо характеру термодинамічних процесів, що відбуваються при заповненні камери, можна одержати вираз лінеаризованої динамічної характеристики пневматичного двигуна, який з точністю до коефіцієнтів збігається з формулою (1.64). Коефіцієнти для динамічної механічної характеристики пневмодвигуна, які входять у вираз (1.64) визначаються так:

$$\begin{cases} T = \frac{Sh_0\mu g}{R\tau} \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0; \\ r = -S \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)_0 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 \right]^{-1}; \\ s = -\frac{S^2 p_0 \mu g}{R\tau} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 \right]^{-1} \end{cases} \quad (1.65)$$

де S – площа поршня;

R – універсальна газова стала;

τ – абсолютна температура;

p – тиск у робочій камері;

h_0 – швидкість руху поршня двигуна, в околі якої лінеаризована механічна характеристика;

μ – коефіцієнт витрати, величина якого залежить від конструкції дроселя і

може змінюватись від 0,75 до 0,9; $\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0$ та $\left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)_0$ визначаються при $u=u_0$

та $p=p_0$ із формули:

$$G = \mu f(u) g \sqrt{2 p_n \rho_n F \left(\frac{p}{p_n} \right)}, \quad (1.66)$$

де p_n – тиск живлення; залежність $F \left(\frac{p}{p_n} \right)$ визначається за формулою:

$$F \left(\frac{p}{p_n} \right) = \begin{cases} \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p}{p_n} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_n} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] \text{ при } \frac{p}{p_n} > 0,528 \text{ (докритична течія повітря),} \\ \frac{k}{k+1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}, \text{ при } \frac{p}{p_n} \leq 0,528 \text{ (надкритична течія повітря)} \end{cases}, \quad (1.67)$$

де k - відношення теплоємкості при постійному тиску до теплоємкості при постійному об'ємі (для повітря $k=1,4$).

1.5.4 Електродвигун постійного струму

До переваг електроприводу можна віднести те, що для нього джерелом енергії слугує мережа постійного або змінного струму. Відсутня необхідність у використанні трубопроводів, а також проблема забруднення навколишнього середовища. Велика кількість машин обладнана електродвигунами постійного струму, на виході котрого крутний момент пропорційний силі струму на вході двигуна. У такому електродвигуні подача струму до ротора здійснюється через

щітки, котрі доволі легко можна пошкодити і тому вони вимагають необхідної уваги при обслуговуванні [7].

Принцип дії двигуна постійного струму ілюструє рис. 1.12, він полягає у взаємодії магнітних полів полюсів статора і провідників ротора, по яких протікає струм.

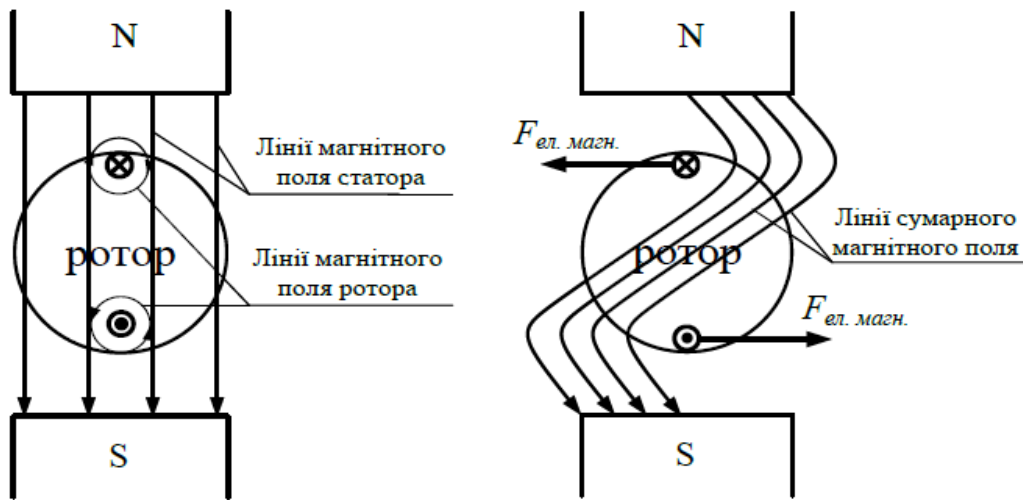


Рисунок 1.12 - Принцип виникнення електромагнітного моменту у двигуні постійного струму

Якщо струм у провіднику йде від нас (на рис. 1.12 провідник по якому струм йде від нас позначений колом із хрестиком), то, за правилом гвинта, магнітні силові лінії навколо провідника спрямовані за годинниковою стрілкою. У результаті додавання магнітних полів полюсів і провідника підсилиться магнітне поле праворуч від провідника ротора й послабиться ліворуч від нього. До провідника буде прикладена сила, яка виштовхує його у бік ослабленого магнітного поля, тобто вліво. Аналогічні процеси відбуваються з провідником, який знаходиться над південним полюсом статора (цей провідник показано колом із точкою – струм по ньому йде до нас).

На рис. 1.13 показано схему вмикання електричного двигуна постійного струму із незалежним збудженням. Електромагнітний момент, що виникає у двигуні виражається формулою:

$$M = k\Phi\Phi_{рот} = k' I_{коло збудж} I_{рот}, \quad (1.68)$$

де k – коефіцієнт, що залежить від конструкції ротора двигуна;

k' – коефіцієнт, що залежить від конструкції ротора та статора двигуна;

Φ – магнітний потік двигуна;

$I_{рот}$ – струм обмотки ротора;

$I_{коло збудж}$ – струм кола збудження двигуна.

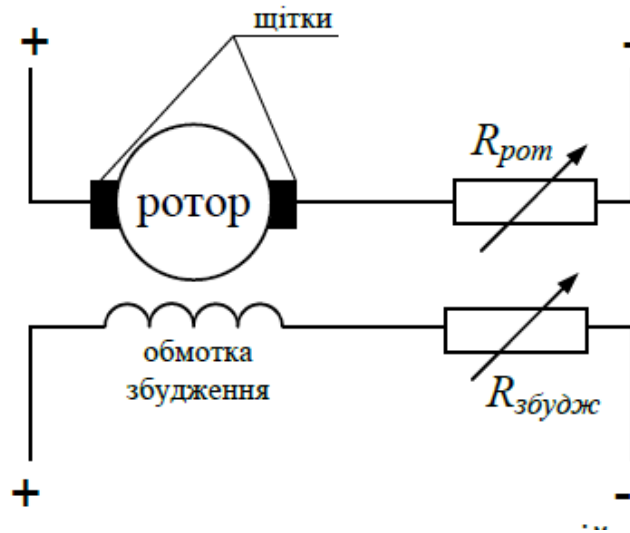


Рисунок 1.13 - Електрична схема вмикання двигуна постійного струму незалежного збудження

Статична механічна характеристика двигуна постійного струму має вигляд:

$$\dot{x} = \frac{U}{k\Phi} - Q \frac{R_{я} + R_{рот}}{k^2\Phi^2}, \quad (1.69)$$

де U – напруга живлення двигуна;

$R_{я}$ і $R_{рот}$ – відповідно опори якоря та додаткового реостату включеного в коло якоря.

Якщо врахувати електромагнітну інерційність електричного двигуна, то можна отримати його динамічну механічну характеристику:

$$T\dot{Q} + Q = \beta \left(\frac{U}{k\Phi} - \dot{x} \right) \quad (1.70)$$

де β – жорсткість механічної характеристики ($\beta = \frac{k^2\Phi^4}{R_{я} + R_{рот}}$);

T – електромеханічна стала часу двигуна ($T = \frac{L_{я}}{R_{я} + R_{рот}}$);

$L_{я}$ - індуктивність якірного електричного кола двигуна.

1.5.5 Електропривод змінного струму

Значна частина машин та механізмів обладнана асинхронним двигуном із короткозамкненим ротором. У пазах статора розміщена обмотка, що утворює фазні зони, зсунуті в просторі на 120 електричних градусів. При підключенні обмотки статора до трифазної мережі, напруги фаз якої зсунуті на 120°, виникає магнітне поле, що обертається у статорі з кутовою швидкістю:

$$\dot{x}_0 = \frac{2\pi f_1}{p}, \quad (1.71)$$

де \dot{x}_0 – швидкість ідеального холостого ходу двигуна;

f_1 – частота мережі;

p – число пар полюсів. У пазах короткозамкненого ротора закладені металеві стержні (обмотка ротора), з'єднані по кінцях, вони утворюють „білячу клітку”.

При обертанні ротора зі швидкістю поля $\dot{x} = \dot{x}_0$ (ідеальний холостий хід) у його стержнях не наводиться ЕРС, не протікає струм, не створюється електромагнітний момент. Прикладена до обмоток напруга, врівноважується ЕРС самоіндукції. Якщо на вал двигуна прикласти зовнішній момент навантаження Q_c ротор починає відставати від обертового поля статора, тобто $\dot{x} \neq \dot{x}_0$, у його стержнях наводиться ЕРС і протікає струм, що, взаємодіючи з магнітним полем статора, створює електромагнітний момент Q , який врівноважує момент навантаження Q_c [8].

Механічна характеристика асинхронного двигуна є нелінійною, вона описується рівнянням Клосса [7]:

$$Q = \frac{2M_{\max}(1 + s_{кр}a)}{\frac{\dot{x}_0 - \dot{x}}{s_{кр}\dot{x}} + \frac{s_{кр}\dot{x}_0}{\dot{x}_0 - \dot{x}} + 2s_{кр}a} \quad (1.72)$$

де M_{\max} – максимальний момент двигуна;

$s_{кр}$ – критичне ковзання, при якому настає максимальний момент;

a – безрозмірний параметр ($a = \frac{R_1}{R_2'}$);

R_1, R_2' – активний опір статора та приведений до статора опір ротора відповідно.

Якщо потужність двигуна більше 5 кВт, то можна прийняти $R_1 \approx 0$ і рівняння (1.72) спрощується:

$$Q = \frac{2M_{\max}}{\frac{\dot{x}_0 - \dot{x}}{s_{кр}\dot{x}} + \frac{s_{кр}\dot{x}_0}{\dot{x}_0 - \dot{x}}} \quad (1.73)$$

На рис. 1.14. суцільною лінією показана механічна характеристика асинхронного двигуна. Штрихова лінія показує провал моменту при ковзанні $s \approx 0$ (це мінімальний момент двигуна). Виникнення провалу функції моменту на графіку (рис. 1.14) є наслідком впливу моментів створюваних вищими непарними гармоніками в магнітному полі обмоток. Якщо прийняти припущення, що двигун працює на лінійній ділянці механічної характеристики, тобто $\dot{x}_0 \geq \dot{x} \geq \dot{x}_0(1 - s_{кр})$, то можна записати динамічну механічну характеристику асинхронного двигуна, яка співпадає із аналогічною характеристикою двигуна

постійного струму з точністю до коефіцієнтів (для асинхронного двигуна справедливі такі рівності $T = \frac{1}{2\pi f_1 s_{кр}}$, $\beta = \frac{2M_{\max} P}{2\pi f_1 s_{кр}}$).

Зображена на рис. 1.14 механічна характеристика є статичною оскільки вона не враховує коливання моменту, які виникають під час електромагнітних перехідних процесів у двигуні. Для того, щоб врахувати електромагнітні перехідні процеси необхідно розглянути математичну модель асинхронного двигуна, на основі якої можна побудувати динамічну механічну характеристику двигуна.

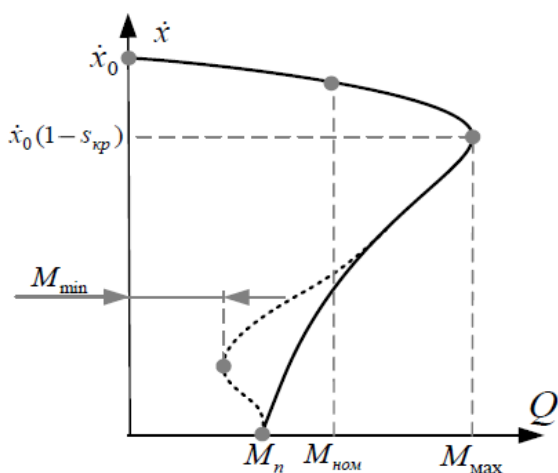


Рисунок 1.14 - Механічна характеристика асинхронного двигуна

Диференціальні рівняння, які описують асинхронний двигун у формі рівнянь Коші представляються у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{1u}}{dt} = -\frac{R_1}{L_1\delta}\psi_{1u} + \frac{R_1 L_m}{L_2 L_2 \delta}\psi_{2u} + 2\pi f_1 \psi_{1v} + U_1; \\ \frac{d\psi_{1v}}{dt} = -\frac{R_1}{L_1\delta}\psi_{1v} + \frac{R_1 L_m}{L_1 L_2 \delta}\psi_{2v} - 2\pi f_1 \psi_{1u}; \\ \frac{d\psi_{2u}}{dt} = -\frac{R_2}{L_2\delta}\psi_{2u} + \frac{R_2 L_m}{L_1 L_2 \delta}\psi_{1u} + (2\pi f_1 - \dot{x})\psi_{2v}; \\ \frac{d\psi_{2v}}{dt} = -\frac{R_2}{L_2\delta}\psi_{2v} + \frac{R_2 L_m}{L_1 L_2 \delta}\psi_{1v} - (2\pi f_1 - \dot{x})\psi_{2u}; \\ Q = \frac{3}{2} P \frac{L_m}{L_1 L_2 \delta} (\psi_{1v}\psi_{2u} - \psi_{1u}\psi_{2v}), \end{cases} \quad (1.74)$$

де ψ_{1u}, ψ_{1v} – потокозчеплення статора у координатах $(u-v)$;

ψ_{2u}, ψ_{2v} – потокозчеплення ротора у координатах $(u-v)$;

R_1, R_2 – активний опір статора та приведений до статора опір ротора;

L_1, L_2 – індуктивності статорної та роторної обмоток;

L_m – взаємоіндукція; σ – коефіцієнт розсіювання; U – напруга, яка підводиться до статора двигуна. На основі системи рівнянь (1.74) побудовано динамічну механічну характеристику асинхронного двигуна (рис. 1.15).

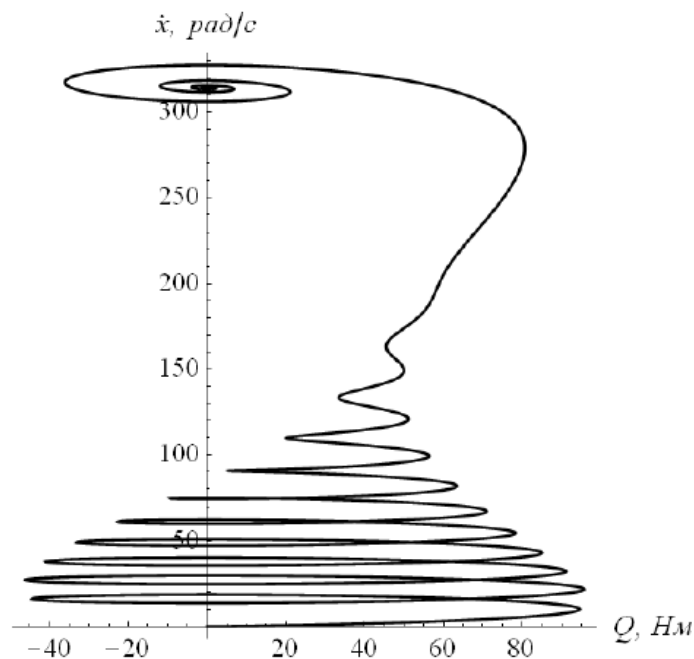


Рисунок 1.15 - Динамічна механічна характеристика асинхронного двигуна

1.6 Сили опору робочих машин

Виконання робочих процесів завжди супроводжується виникненням робочих навантажень – активних сил, що діють на робочі органи машини. Вивчаючи властивості робочих процесів, можна виявити залежності між величиною робочого навантаження і кінематичними параметрами, що визначають координати, швидкості та прискорення точок робочих органів, а в ряді випадків і явну залежність сили від часу. Відповідна функція

$$P_{on} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (1.75)$$

називається *характеристикою робочого процесу*.

Відзначимо, що залежність робочих навантажень від прискорень робочих органів машини виникає в тих випадках, коли машина виконує транспортні операції або коли технологічний процес, що виконується машиною, пов'язаний з переміщенням оброблюваної сировини (наприклад, перемішуванням).

Вивчення робочих процесів і їх характеристик є завданням відповідних спеціальних наукових дисциплін і виходить за рамки загальної теорії динаміки машин. Так, характеристики сил різання, що виникають при обробці металів на верстатах, вивчаються в теорії різання, характеристики сил, що діють на ротор генератора – у теорії електричних машин, характеристики сил, що діють на

поршень компресора – у теорії пневматичних систем тощо. Тому тут обмежимося розглядом лише деяких характерних прикладів.

1 *Постійна сила опору.* Активною силою, що діє на робочий орган підйомника є сила ваги вантажу, що піднімається. Ця сила не залежить ні від швидкості підйому, ні від положення вантажу, ні від часу, тобто вона завжди залишається постійною протягом усього процесу підйому. Таким чином, у цьому випадку

$$P_{on} = const \quad (1.76)$$

Таку характеристику робочого процесу мають механізми підйому вантажу та переміщення вантажопідйомних кранів, ліфти, лебідки тощо.

2 *Сила (момент) опору лінійно залежить від швидкості.* На рис. 1.16 показана схема підключення генератора постійного струму, який працює на незмінне зовнішнє електричне навантаження $R_{нав}$. Момент опору на валу генератора прямопропорційний швидкості його обертання:

$$M_{on} = \frac{R_{я} + R_{нав}}{k^2 \Phi^2} \omega \cdot sign(\omega) \quad (1.77)$$

$sign(\omega)$ - сігнум-функція (функція знаку), яка враховує напрямок обертання робочої машини.

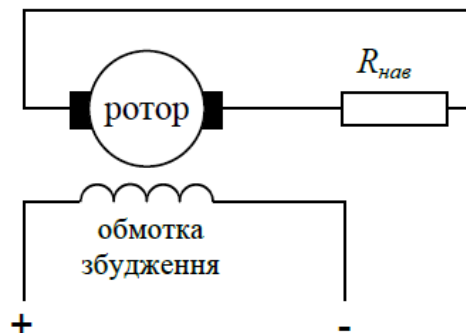


Рисунок 1.16 - Схема підключення генератора постійного струму

3 *Сила (момент) опору квадратично залежить від швидкості.* Активні сили, що діють на ротор обертового вентилятора, мають аеродинамічне походження. Отже, момент опору вентилятора залежить від кутової швидкості ротора. В аналітичній формі ця залежність може бути приблизно представлена в наступному виді:

$$M_{on} = a \omega^2 \cdot sign(\omega) \quad (1.78)$$

де a - коефіцієнт;

ω - кутова швидкість вентилятора.

Характеристику (1.78) мають відцентрові насоси, гребні гвинти та інші машини.

Сила (момент) опору оберненопропорційно залежить від швидкості.

Для деяких металообробних верстатів (токарних, розточних, фрезерних та інших) споживана потужність під час зміни швидкості їх обертання залишається постійною. У цьому випадку момент опору робочої машини можна представити такою формулою:

$$M_{on} = \frac{N_{спож}}{\omega} \omega \cdot \text{sign}(\omega) \quad (1.79)$$

де $N_{спож}$ - споживана робочою машиною потужність ($N_{спож} = const$).

У формулах (1.77)-(1.79) множник $\text{sign}(\omega)$ показує, що при зміні напрямку обертання робочої машини момент опору на її валу також змінює свій знак.

5 **Сила (момент) опору залежна від положення.** Розглянемо робочий процес, що відбувається в циліндрі поршневого компресора (рис. 1.17, а). Тут робочий орган – поршень 1 робить зворотно-поступальний рух. При його робочому ході (вправо) повітря в циліндрі стискується, тиск росте до тих пір, поки не відкривається випускний клапан 2. Потім починається витікання повітря через клапан, при якому тиск у камері залишається близьким до постійного. При зворотному ході відбувається засмоктування повітря через впускний клапан 3; при цьому тиск у циліндрі стає трохи нижчим за атмосферний. Приблизна форма індикаторної діаграми компресора, що виражає залежність тиску, а отже, і активної сили P_{on} , яка рівна добутку тиску на площу поршня, від координати x , показана на рис. 1.17, б.

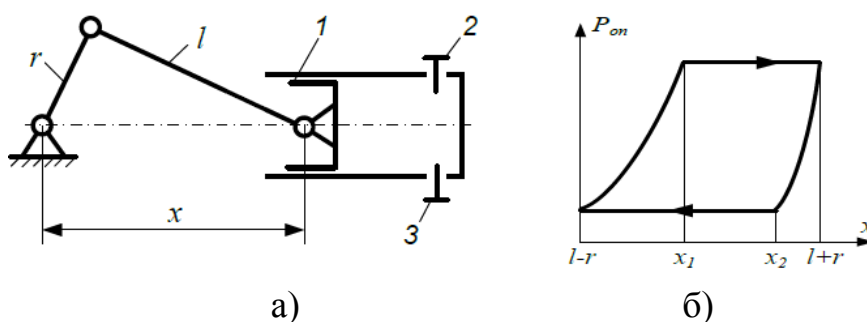


Рисунок 1.17 - Схема поршневого компресора (а)
та його індикаторна діаграма (б)

У ряді машин вплив сил робочого процесу на робочі органи машини є короткочасним і здійснюється лише на малій ділянці траєкторії робочого органа. Це має місце, наприклад, у кувальних пресах, відбійних молотках, машинах для забивання паль тощо. Робочі процеси такого роду називають ударними або імпульсними. Типова характеристика ударного процесу для штампувального верстату показана на рис. 1.18 (тут x_{max} - максимальне

переміщення робочого органу; Δ - положення робочого органу, при якому виникає ударне навантаження).

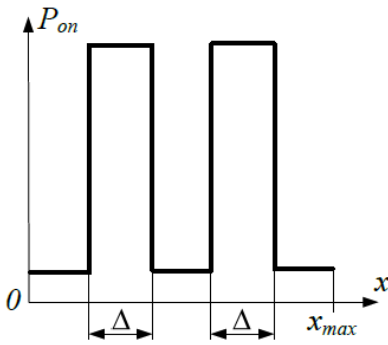


Рисунок 1.18 - Робоча характеристика штампувального верстату

Для обох механізмів (компресора та штампувального верстату) справедливою є рівність:

$$P_{on} = f(x) \quad (1.80)$$

У всіх розглянутих прикладах сили (моменти) опору є постійними або залежать від швидкості або координати робочого органу машини. Явна залежність характеристик робочих процесів від часу й прискорень робочих органів зустрічається порівняно рідко.

1.7 Сухе та в'язке тертя

‘Перші дослідження законів тертя проводив Леонардо да Вінчі, який установив, що сила тертя, що виникає при контакті тіл, спрямована проти напрямку руху, пропорційна силі, що стискає поверхні, і не залежить від площі контакту цих поверхонь. Сила сухого тертя F_T пов'язана з нормальною силою, що притискає поверхні P (або рівною їй силою нормальної реакції), і коефіцієнтом тертя μ_1 законом Амонтона - Кулона:

$$F_T \leq \mu_1 P, \quad (1.81)$$

де μ_1 – коефіцієнт сухого тертя;

P – нормальна сила, що притискає поверхні.

Сила тертя направлена завжди проти дії сили, яка намагається зрушити тіло (тертя спокою), або проти сили, яка рухає тіло.

Для того щоб зрозуміти основи трибології (науки про тертя), необхідно звернутися до топографії поверхонь контактуючих між собою частин реальних механізмів. Ці поверхні ніколи не є ідеально плоскими, вони мають мікронерівності. Місця виступів на одній поверхні не збігаються з місцями виступів на іншій. Однак, при стиску „гострі” виступи поверхонь пластично деформуються й площа контакту збільшується пропорційно прикладеній силі. Саме опір відносному зрушенню цих контактних зон і є основним джерелом тертя руху. Сам опір зрушенню при ідеальному контакті визначається міжмолекулярною взаємодією, що залежать від природи

контактуючих матеріалів. Таким чином, пояснюється вплив двох головних факторів, що визначають силу тертя: сили притискання поверхонь P і властивостей матеріалів (враховується коефіцієнтом тертя μ_1). Загалом, після прикладання повздовжньої сили, що прагне зрушити тіла одне відносно одного, можуть виникнути наступні чотири основні режими [9]:

- 1) режим пружних мікропереміщень одного тіла відносно іншого (пружна деформація мікронерівностей на поверхнях тіл);
- 2) режим ковзання по площадках контактів м'якого поверхневого шару (окисних плівок);
- 3) режим, коли при більшій швидкості рідка олива, що видавлюється, створює піднімальну силу, що порушує більшу частину прямих контактів мікронерівностей поверхонь і тим самим знижує силу тертя;
- 4) режим, коли прямі контакти взагалі зникають, одне тіло „пливе” над іншим в шарі оливи і при збільшенні швидкості відносного руху зростає в'язкий опір.

Цим режимам відповідає графік залежності сили тертя від швидкості відносного руху двох тіл $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$, представлений на рис. 1.19.

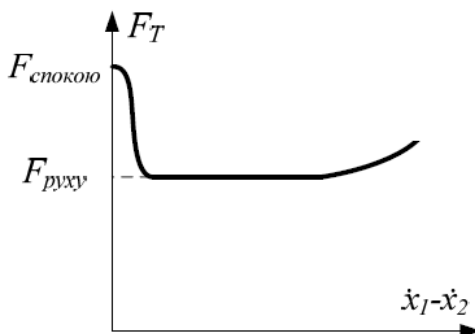


Рисунок 1.19 - Залежність сили тертя від відносної швидкості руху двох тіл

Відмітимо, що зона спадання коефіцієнта тертя (зона штрибек-ефекту) звичайно дуже мала, порядку мм/с. Якщо ж мащення не вводиться штучно, то збільшення тертя з ростом відносної швидкості ($\dot{x}_1 - \dot{x}_2$) майже непомітне й ми повертаємося до закону Амонтона-Кулона (1.81), за винятком зони дуже малих швидкостей.

Серед багатьох нових моделей тертя одна відрізняється найбільшою простотою, дозволяючи при цьому пояснити основні експериментальні факти. Основна ідея цієї моделі [10] проста: сила тертя визначається пружнов'язким опором деформації виступів на нерівностях поверхонь, а сама середня швидкість деформації нерівностей залежить від швидкості їх відносного руху. Формально це записується у такому вигляді:

$$F_T = -c_0 x + c_1 \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \frac{c_0 x}{F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)} |\dot{x}_1 - \dot{x}_2| \right), \quad (1.82)$$

де $F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ - залежність, яка відповідає графіку на рис. 1.19;

c_0 – жорсткість мікроступів на поверхнях;

z – величина деформації мікроступів на поверхнях.

Загалом у задачах динаміки машин найчастіше користуються законом Амонтона – Кулона (1.81) при відсутності відносного переміщення тіл (тертя спокою) і наступною прощеною формулою при наявності відносного переміщення тіл:

$$F_T = \mu_1 P + \mu_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (1.83)$$

де μ_2 - коефіцієнт в'язкого тертя.

Другий доданок у правій частині виразу (1.83) визначає в'язке тертя. Тертя називається в'язким, якщо воно існує між поверхнею твердого тіла й рідиною або газоподібним середовищем, яке його оточує і в якому воно рухається. Крім того, в'язке тертя виникає між різними шарами такого середовища. Зазначимо, що при великій швидкості відносного руху $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ лінійна залежність в'язкого тертя перетворюється у квадратичну.

Сили тертя призводять до дисипації (втрати) енергії у механічній системі. Вони можуть бути як корисними (наприклад, призводять до зменшення амплітуди коливання при резонансі), так і шкідливими (виникнення фрикційних автоколивань), тому їх необхідно враховувати при динамічних розрахунках машин та механізмів.

1.8 Зв'язки у машинах та їх класифікація

Зв'язками називаються обмеження, що накладаються на положення й швидкості окремих точок або системи матеріальних точок, якими моделюється машина чи механізм. Нагадаємо, що фізично зв'язок здійснюється у вигляді різних тіл - поверхонь, стержнів, шарнірів, балок тощо. З іншої сторони будь-який зв'язок можна описати математичними виразом.

Класифікація зв'язків проводиться по виду математичних виразів, що описують зв'язки, причому, матеріальні системи називають по виду зв'язків у системі.

Зв'язки розділяються на *утримуючі* й *неутримуючі*. Якщо зв'язок описується нерівністю, то він називається неутримуючим. Приведемо приклад: приймемо, що у першому наближенні канат, який з'єднує маси візків (рис. 1.20) має нескінченну жорсткість.

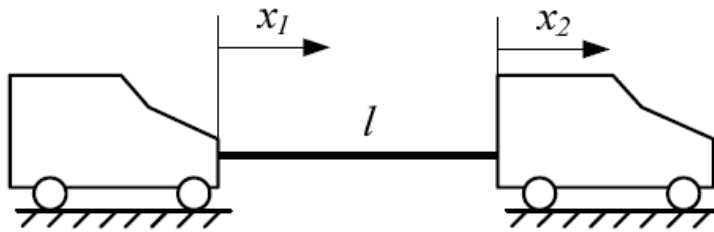


Рисунок 1.20 - Динамічна модель транспортного поїзду

У цьому випадку справедлива рівність:

$$x_1 - x_2 \leq l \quad (1.84)$$

де l – довжина гнучкого канату;
 x_1 та x_2 – положення візків.

Візки не можуть віддалитись один від одного більше аніж довжина канату. Однак вони можуть наблизитись, при цьому канат буде провисати. Якщо гнучкий канат замінити на жорстке зчеплення, то нерівність у виразі (1.84) перетворюється у рівність і зв'язок буде вже утримуючим. Необхідно зробити певне зауваження: утримуючі та неутримуючі зв'язки можна використовувати при аналізі динаміки машин лише у першому наближенні. Дійсно, не існує матеріалів які б мали нескінченну жорсткість і тому нерівність (1.84) може порушуватись.

Математичне вираз, що описує утримуючий зв'язок, є рівнянням зв'язку. У загальному випадку рівняння зв'язку, що накладається на деяку точку системи, записується у вигляді:

$$f(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (1.85)$$

Залежно від виду рівняння (1.85) зв'язки класифікуються так:

- 1) геометричні й кінематичні (диференціальні);
- 2) стаціонарні (склерономні) й нестаціонарні (реономні);
- 3) голономні й неголономні.

До *геометричних* відносяться зв'язки, у рівняннях яких входять тільки координати точки й, можливо час, тобто: $f(x, t) = 0$.

Кінематичними або *диференціальними* називаються зв'язки, рівняння яких крім координат містять і перші похідні від цих координат і, можливо, час. Прикладом такого зв'язку може бути зв'язок, накладений на колесо, яке котиться без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 1.21).

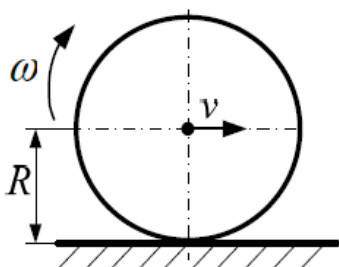


Рисунок 1.21 - Колесо, що котиться по нерухомій поверхні

У цьому випадку швидкість геометричного центра колеса і його кутова швидкість зв'язані між собою залежністю, що є рівнянням цьому зв'язку:

$$v - R\omega = 0 \quad (1.86)$$

де v – лінійна швидкість переміщення геометричного центра колеса;

R – радіус колеса;

ω – кутова швидкість колеса.

Зв'язки, у рівняння яких явно не входить час, називаються *стаціонарними (склерономними)*. Розглянуті вище зв'язки є стаціонарними. Якщо час явно входить у рівняння зв'язку, то такий зв'язок називається *нестационарним (реономним)*.

Механічна система називається склерономною, якщо на неї накладені тільки стаціонарні зв'язки, в іншому випадку вона називається реономною.

До *голономних* відносяться всі геометричні зв'язки, а також ті кінематичні (диференціальні) зв'язки, які шляхом інтегрування рівняння зв'язку можуть бути зведені до геометричних. Так, наприклад, кінематичний зв'язок, накладний на колесо (рис. 1.21) є голономним оскільки рівняння (1.86), яким він описується, можна проінтегрувати і звести до геометричного:

$$v - R\omega = \frac{dx}{dt} - R \frac{d\varphi}{dt} = dx - R d\varphi = \int dx - R \int d\varphi = x - R\varphi + C = 0, \quad (1.87)$$

де x – лінійна координата геометричного центра колеса;

φ – кут повороту колеса;

C – постійна інтегрування.

Кінематичні або диференціальні зв'язки, рівняння яких не можуть бути проінтегровані, називаються *неголономними*. Механічна система називається голономною, якщо всі її зв'язки голономні, і неголономною, якщо хоча б один з її зв'язків є неголономним.

1.9 Типові елементи машин, що описуються нелінійними залежностями

При розв'язуванні задач динаміки машин часто виявляється, що елементи, які входять у конструкцію машини мають динамічні характеристики, що описуються нелінійними залежностями. Це ускладнює проведення динамічного аналізу. У деяких випадках вдається знайти аналітичний розв'язок задачі, в інших – лише наближений або чисельний. Складність досліджень нелінійних механічних систем полягає у тому, що в них не виконується принцип суперпозиції (у цьому головна відмінність властивостей нелінійних систем від властивостей лінійних). Наприклад, результат (відгук) одночасної дії двох збурюючих сил не дорівнює сумі результатів (відгуків) дії цих сил, які викликані кожною з них окремо. Крім

того, зміна величини збурення (величини сили) не приводить до пропорційної зміни величини відгуку (переміщення чи швидкості механізму або машини). Цю властивість можна використовувати в якості критерію при експериментальній перевірці лінійності конкретної механічної системи. Найбільш істотні особливості нелінійних коливних систем такі: можливість існування декількох положень рівноваги; неізохронність вільних коливань; неоднозначність залежності амплітуди вимушених коливань від частоти гармонічної збурюючої сили; виникнення супер- і субгармонійних коливань; можливість існування автоколивальних режимів тощо [11].

1.9.1 Момент інерції (маса)

Розглянемо машину, яка складається із механізмів із жорсткими ланками, яка приводиться в рух одним двигуном. Її механічна система має одну ступінь вільності. У якості узагальненої координати вибираємо координату вихідної ланки двигуна φ . Кінетична енергія машини, яка складається із N точок із масами $m_1, \dots, m_k, \dots, m_N$, на рух яких накладені голономні стаціонарні зв'язки (вони обумовлені жорсткістю ланок і наявністю кінематичних пар) знаходиться за формулою:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) \quad (1.88)$$

де x_k, y_k, z_k – декартові координати k -тої матеріальної точки.

В системі з одним ступенем вільності координати всіх точок можуть бути представлені як функції узагальненої координати:

$$\begin{cases} x_k = x_k(\varphi); \\ y_k = y_k(\varphi); \\ z_k = z_k(\varphi). \end{cases} \quad (1.89)$$

Диференціюючи вирази (1.89) за часом, знаходимо:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \frac{dx_k(\varphi)}{dt} = \frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}; \\ \dot{y}_k = \frac{dy_k(\varphi)}{dt} = \frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}; \\ \dot{z}_k = \frac{dz_k(\varphi)}{dt} = \frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (1.90)$$

Підставляючи вирази (1.89) та (1.90) у формулу (1.88) отримаємо

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\left(\frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 \right) = \\ &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\left(\frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \right) = A(\varphi) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

де $A(\varphi)$ – приведена маса (у випадку лінійної узагальненої координати) або приведений момент інерції (для кутової узагальненої координати).

Як видно із виразу (1.91) приведена маса залежить від узагальненої координати, яка в свою чергу змінюється в часі відповідно до прикладеної сили та приведеної маси. Таким чином, рівняння руху механізму є нелінійним.

Для прикладу знайдемо приведений момент інерції кривошипно-повзунного механізму, який показано на рис. 1.22.

Для цього запишемо вираз його кінетичної енергії:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 \dot{x}_2^2 + J_2 \dot{\psi}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2, \quad (1.92)$$

де T_1, T_2, T_3 – кінетичні енергії кривошипа 1, шатуна 2 та повзуна 3 відповідно;

φ_1 – кутова координата повороту кривошипа;

x_2, ψ_2 – лінійна координата центра мас шатуна та кутова координата його повороту;

x_3 – лінійна координата повзуна;

J_1 – момент інерції кривошипа відносно осіобертання;

J_2 – момент інерції шатуна відносно осі, яка проходить через його цент мас;

m_2 – маса шатуна;

m_3 – маса повзуна.

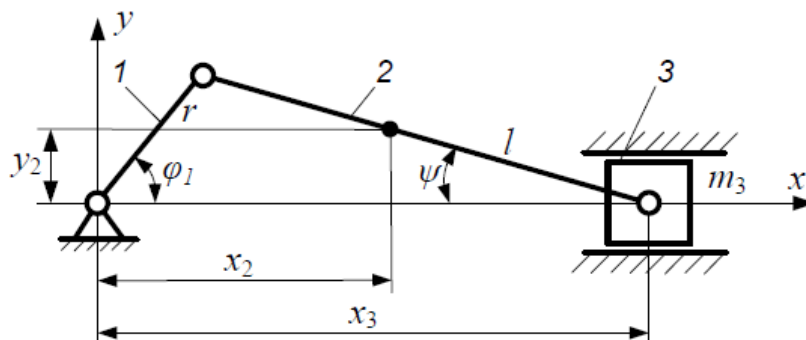


Рисунок 1.22 - Схема кривошипно-повзунного механізму

Для того, щоб записати остаточно вираз для кінетичної енергії необхідно знайти виразити, які дають змогу перейти від швидкостей $\dot{x}_2, \dot{\psi}_2$ та \dot{x}_3 до кутової швидкості кривошипа $\dot{\varphi}_1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_2^2 = \dot{\varphi}_1^2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right]; \\ \dot{\psi}_1^2 = \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} \right)^2; \\ x_3^2 = \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} \right)^2. \end{cases} \quad (1.93)$$

Підставивши вирази (1.92) у формулу (1.91), остаточно знаходимо:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 \dot{\varphi}_1^2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right] + J_2 \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} m_3 \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 = \\ &= \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \left(J_1 + m_2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right] + J_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right) = J(\varphi_1) \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Похідні по φ від функцій положення можна знайти, використовуючи при цьому певні геометричні співвідношення:

$$\begin{cases} x_3 = r \cos \varphi_1 + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}; \\ \psi_2 = ar \sin \left(\frac{r}{l} \sin \varphi_1 \right); \\ x_2 = r \cos \varphi_1 + \frac{a}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}; \\ y_2 = r \sin \varphi_1 \left(1 - \frac{a}{l} \right), \end{cases} \quad (1.95)$$

де a – відстань між центром мас шатуна та шарніром, що поєднує шатун і кривошип.

Знайдемо частинні похідні (передаточні функції першого порядку):

$$\begin{cases} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} = -r \sin \varphi_1 \left(1 + \frac{r \cos \varphi_1}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}} \right); \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi_1} = \frac{r \cos \varphi_1}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}}; \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} = -r \sin \varphi_1 \left(1 + \frac{ar}{l} \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}} \right); \\ \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} = r \sin \varphi_1 \left(1 - \frac{a}{l} \right). \end{cases} \quad (1.96)$$

На рис. 1.23 побудований графік залежності $J(\varphi_1)$ для таких параметрів механізму: $r=0,065$ м; $l=0,26$ м; $a_2=0,091$ м; $J_1=0,5$ кгм²; $J_2=0,0138$ кгм²; $m_2=1,8$ кг; $m_3=15$ кг.

Аналізуючи вираз для ($J(\varphi_1)$) можемо вказати, що у загальному випадку

момент інерції має постійну та періодичну складові:

$$J = J_{const} + J(\varphi_1) \quad (1.97)$$

де J_{const} – постійна складова моменту інерції;

$J(\varphi_1)$ – складова моменту інерції, яка залежить від узагальненої координати машини чи механізму (вона, наприклад, може бути періодичною функцією із періодом 2π) [6].

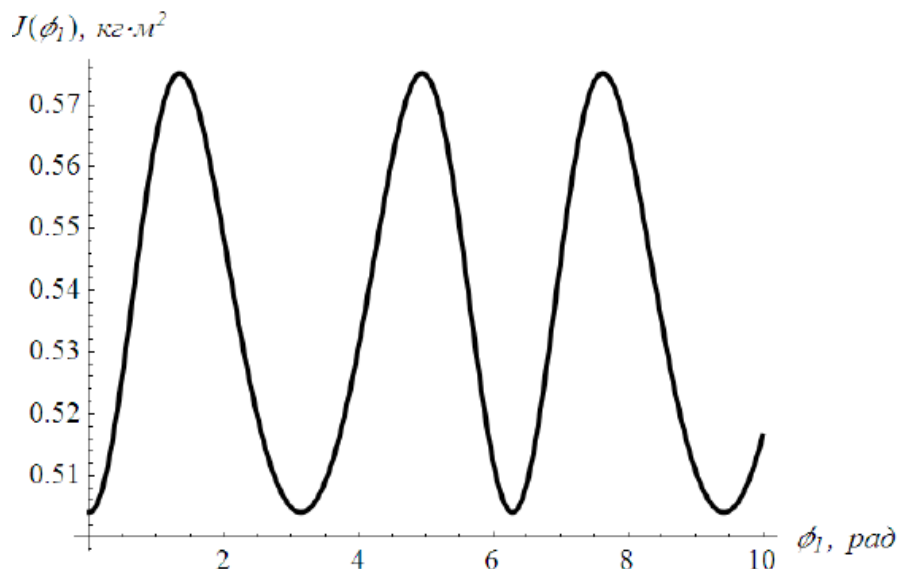


Рисунок 1.23 - Залежність моменту інерції кривошипно-повзунного механізму від узагальненої координати механізму (кута повороту кривошипа)

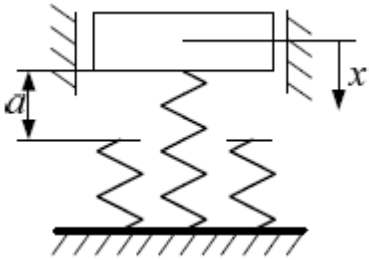
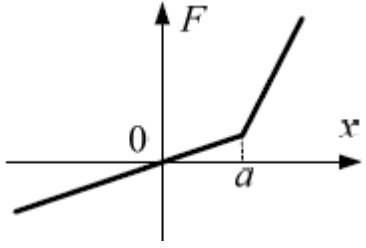
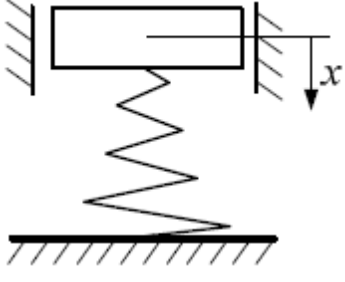
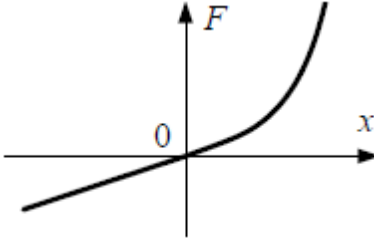

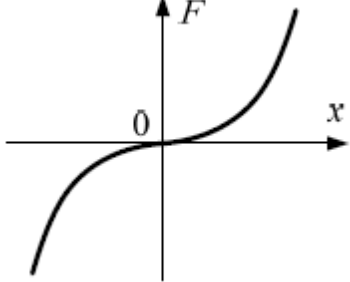
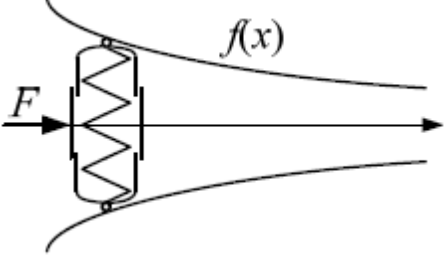

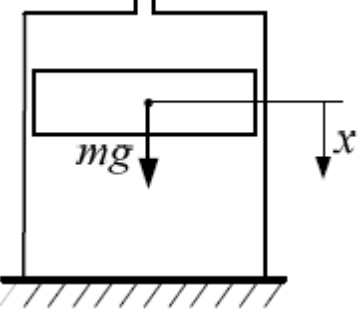
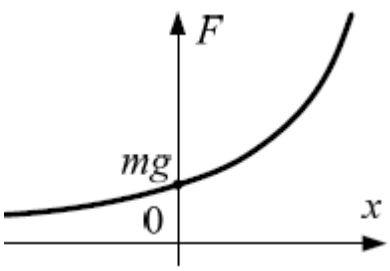
1.9.2 Жорсткість

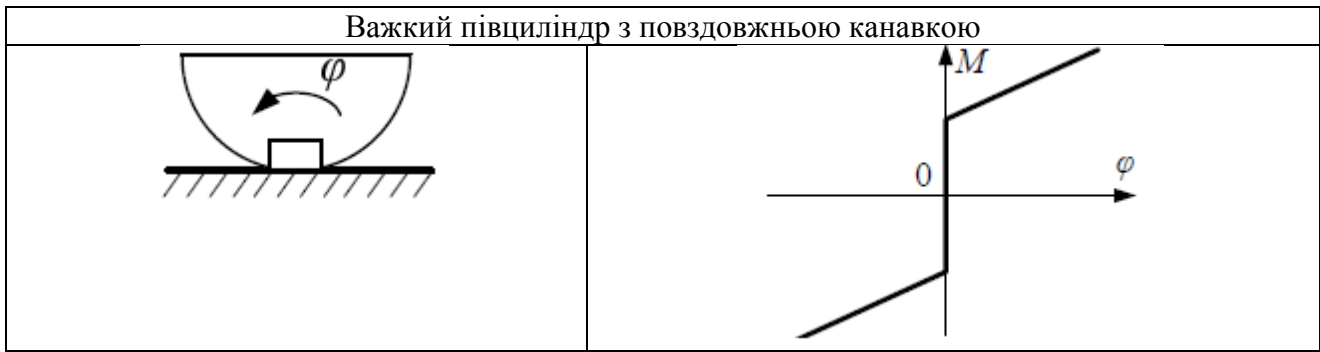
Механічну систему називають нелінійною, якщо співвідношення, що описують процеси її руху, є нелінійними, зокрема, якщо хоча б одна з узагальнених сил нелінійно пов'язана з узагальненими координатами y (або) узагальненими швидкостями. Хоча всяка реальна механічна система тією чи іншою мірою нелінійна, у ряді випадків впливом нелінійності можна знехтувати, тоді для опису таких систем можна користуватися спрощеними лінійними моделями й відповідними їм лінійними теоріями.

У найпростіших випадках нелінійність механічної системи пов'язана з нелінійними залежностями позиційних сил від узагальнених координат або сил опору від узагальнених швидкостей (1.83).

Для прикладу приведемо таблицю 1.1, в яку занесемо найбільш поширені нелінійні жорсткості та їх характеристики.

Таблиця 1.1 - Характеристики найпоширеніших нелінійних жорсткостей

Схема системи	Графічна залежність $F(x)$
Вантаж на ресорі з підресорником	
	
Вантаж на конічній пружині	
	
Гнучка пружна балка	
	
Пружний поршень в каналі, що звужується	
	 $F = 4c \int_0^x [f(x)]^2 dx,$ <p>де c – коефіцієнт жорсткості лінійної пружини</p>
Вантаж, який підтримується газом у замкнутому циліндрі	
	



Похідну $\frac{dF}{dx}$ називають квазіпружним коефіцієнтом, або, якщо F – це сила пружності, то коефіцієнтом жорсткості. У нелінійних системах цей коефіцієнт залежить від узагальненої координати. Якщо зі зростанням координати x він збільшується при $x > 0$ (або зменшується при $x < 0$), то характеристику називають жорсткою. У протилежному випадку характеристику називають м'якою. Характеристики можуть бути твердими в одних проміжках значень x і м'якими в інших.

В усіх наведених випадках нелінійність жорсткості проявляється лише при великих відхиленнях системи від положення рівноваги; при малих відхиленнях ці системи можна вважати лінійними (межі таких відхилень встановлюються додатковим дослідженням, вони залежать від характеру досліджуваної задачі й вимог точності). Можливі також протилежні випадки: нелінійність у механічній системі проявляється при як завгодно малих відхиленнях системи від положення рівноваги; часто нелінійні властивості таких систем особливо помітні саме при малих відхиленнях [11].

1.9.3 Дисипація

Найчастіше сили опору, що є дисипативними силами у машинах та механізмах, описуються нелінійними функціями швидкостей, однак у практичних розрахунках ці функції іноді можна лінеаризувати, вважаючи опір лінійно-в'язким. Звичайно, підставою для лінеаризації сил опору служить не стільки слабка нелінійність дійсних залежностей (у дійсності вона може бути сильною), оскільки малий вплив сил опору на деякі динамічні (наприклад, коливні) властивості й процеси. Так, у більшості випадків для розрахунків частот вільних коливань досить використовувати лінеаризовані характеристики сил тертя, а іноді навіть повністю знехтувати опорами. Силами тертя часто можна знехтувати й при обчисленні амплітуд вимушених коливань у режимах, які знаходяться далеко від резонансу.

Лінеаризація сил опору й тим більше нехтування ними не завжди є правомірним. Можливу нелінійність сил опору слід враховувати при аналізі

вільних загасаючих коливань і при обчисленні резонансних амплітуд вимушених коливань (при відсутності опору амплітуда коливань в резонансному режимі збільшується необмежено). Особливо важливо враховувати нелінійні дисипативні сили при знаходженні стаціонарних режимів автоколивань і кінцевих амплітуд коливань при параметричному резонансі, а також при дослідженні перехідних процесів в авто коливних системах [11].

1.10 Питання та завдання для самоперевірки

- 1 Що таке ступінь вільності механічної системи?
- 2 Які є способи вибору кількості ступенів вільності реальних механічних систем?
- 3 Прокоментуйте кожний етап у процесі моделювання машини.
- 4 Яким вимогам повинна задовольняти динамічна модель машини?
- 5 За якими умовами виконується приведення мас (моментів інерції), жорсткостей та сил (моментів)?
- 6 Які три методи синтезу математичних моделей машин вам відомі?
- 7 За методами рівноваги і можливих переміщень синтезуйте математичну модель динамічної системи, що показана на рис. 1.24, а.
- 8 Використовуючи принцип Гамільнона-Остроградського і рівняння Лагранжа другого роду, побудуйте математичну модель руху для системи на рис. 1.24, а, б.

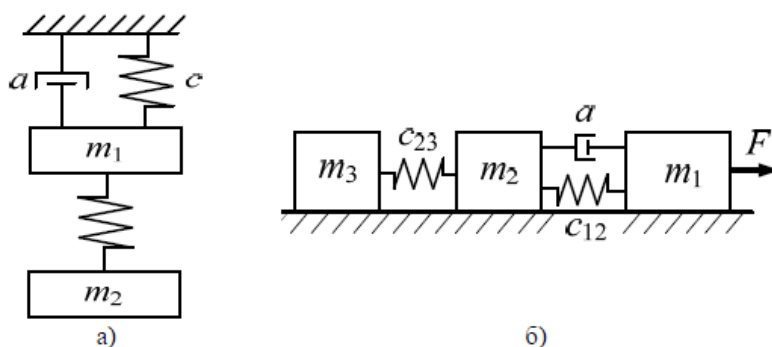


Рисунок 1.24 - Динамічні моделі: а) двомасова; б) тримасова

- 9 Які методи зниження динамічних навантажень пов'язані з кінематикою механізмів?
- 10 Які засоби зниження динамічних навантажень пов'язані з елементами приводних станцій?

РОЗДІЛ 2

КОЛИВАННЯ В МАШИНАХ ТА МЕХАНІЗМАХ

При вивченні динаміки машин та механізмів виявляється, що положення їх елементів змінюються з часом, отже, координати елементів є функціями часу. *Основна задача динаміки* полягає у визначенні цих функцій або, як кажуть, у визначенні законів руху системи. Після цього по відомих формулах опору матеріалів визначаються внутрішні зусилля, напруження й деформації в елементах механізмів та машин [1]. Дуже часто рух елементів механізмів та машин є коливним, тому при вивченні динаміки машин необхідно знати основні положення теорії коливань та методи їх дослідження.

2.1 Класифікація коливань

За способом збудження коливань розрізняють коливання: вільні, вимушені, параметричні та автоколивання.

- *Вільні (власні) коливання* обумовлені початковими відхиленнями елементів коливної системи від положення рівноваги. Один з багатьох прикладів (рис. 2.1, а) - маятник, який характеризується тим, що кут відхилення φ або/і кутова швидкість $\dot{\varphi}$ у початковий момент часу $t=0$ не рівні нулю.
- *Вимушені коливання* обумовлені дією зовнішньої (наприклад, періодичної) сили (рис. 2.1, б).
- *Параметричні коливання* обумовлені зміною яких-небудь параметрів системи. Приклад наведено на рис. 2.1, в. Зміна довжини гнучкого підвісу, призводить до зміни частоти власних коливань системи (маятника). Параметричні коливання, як і вимушені, пов'язані з дією на систему зовнішньої сили. Однак параметричні коливання виникають тоді, коли дія зовнішньої сили веде до зміни параметрів системи, а не до безпосередніх відхилень від положення рівноваги.
- *Автоколивання* відбуваються в нелінійних неконсервативних автономних системах. Їхнє існування, амплітуда, період і форма визначаються конструкцією установки, її параметрами, але не початковими умовами. На рис. 2.1, г представлений приклад автоколивань, коли енергія до коливної системи (вантаж на пружині) підводиться через гнучку стрічку. Коливання виникають внаслідок тертя між поверхнями стрічки та вантажу.

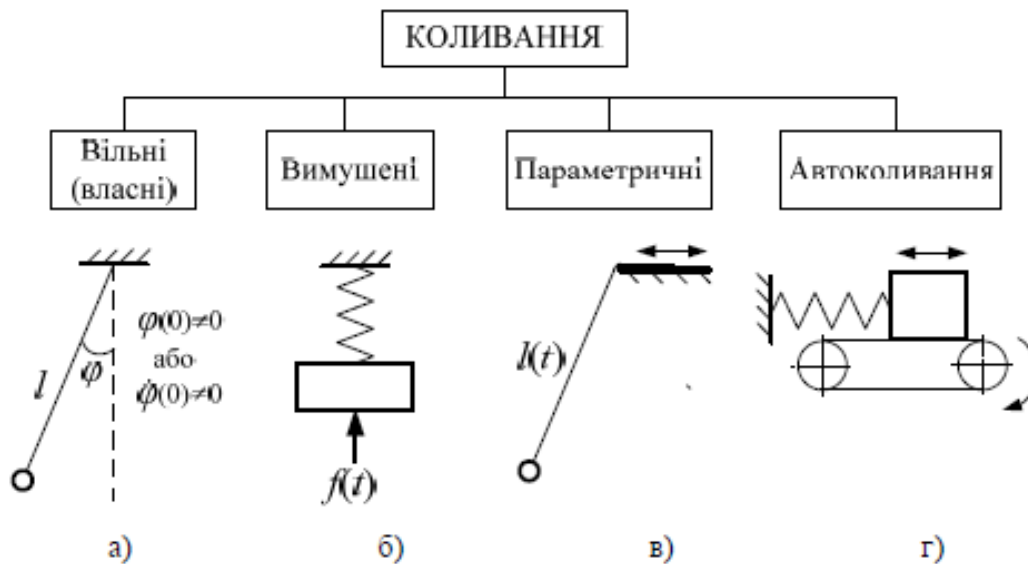


Рисунок 2.1 - Класифікація коливань

У практичних задачах динаміки становлять інтерес комбінації різних типів коливань. Приведемо деякі з таких комбінацій:

4 + 2 - на автоколивну систему діє періодична зовнішня сила;

4 + 4 - відбуваються коливання у взаємозалежних автоколивних системах;

3 + 4 - в автоколивній системі за періодичним законом змінюються один або кілька параметрів;

3 + 2 - на систему зі змінними параметрами діють періодичні зовнішні сили;

2 + 3 + 4 - на автоколивну систему діють безпосередньо періодичні зовнішні сили й одночасно відбувається періодична зміна її параметрів [12].

Класифікацію коливань проводять також за видом деформації, що виникає в елементах коливної системи. Зокрема, стосовно до стержневих систем розрізняють *поздовжні*, *поперечні (згинні)* і *крутильні* коливання. Відповідно до закону, за яким величина, що характеризує коливальний процес, змінюється в часі, розрізняють *періодичні* й *неперіодичні* коливання. Періодичні коливання підкоряються закону:

$$f(t+T) = f(t) \quad (2.1)$$

де T – період коливань. Крім того, є широкий проміжний клас *майже періодичних коливань*, для яких

$$|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| \leq \varepsilon, \quad (2.2)$$

де τ – майже період; ε – мала величина.

Найпростішими та найпоширенішими є *гармонічні коливання*, які описуються рівнянням:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.3)$$

де A – амплітуда коливань; ω – кругова (циклічна або кутова) частота

$(\omega = \frac{2\pi}{T})$ коливань; $\omega t + \varphi$ – фаза коливань; φ – зміщення фази.

Часто зустрічаються періодичні, але негармонічні коливання (рис. 2.2). Їх завжди можна розглядати як суму простих гармонічних коливань. Процес розкладання періодичних негармонічних коливань на прості гармонічні складові (гармоніки) називається *гармонічним аналізом* і виконується за допомогою рядів Фур'є.

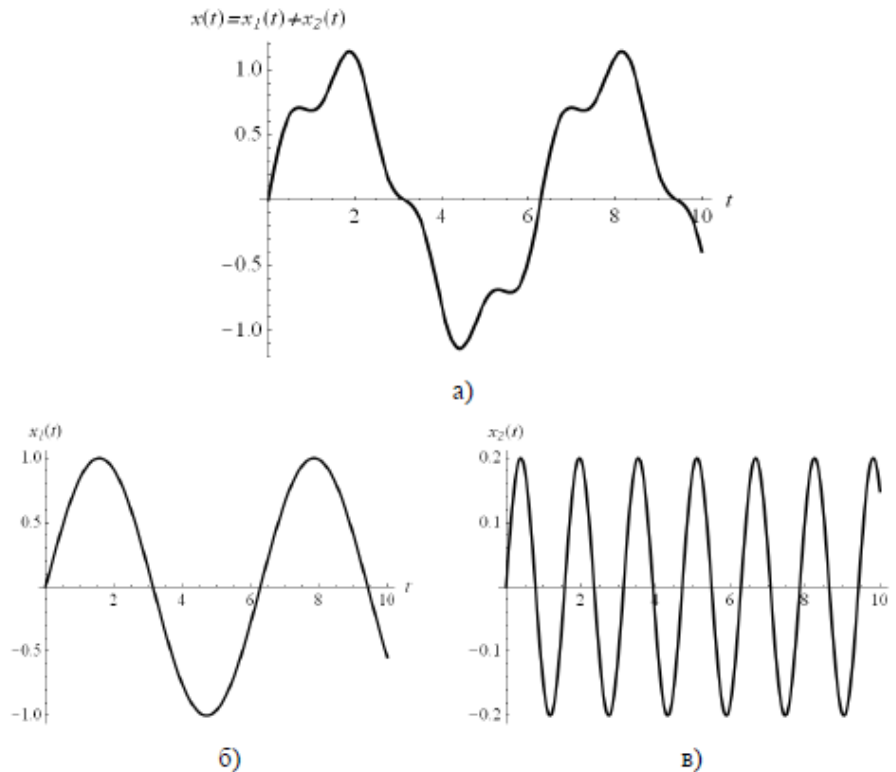


Рисунок 2.2 - Представлення періодичного негармонічного коливання у вигляді суми двох гармонік:

- а) періодичне негармонічне коливання;
- б) перша гармоніка; в) друга гармоніка

Крім того, часто зустрічаються наступні види коливань: *загасаючі* (їх амплітуда поступово зменшується), *наростаючі* (амплітуда цих коливань поступово збільшується). Можливі також коливання зі змінною частотою й постійною амплітудою або змінними частотою й амплітудою [1].

2.2 Фазові траєкторії та фазовий портрет коливань

Одним із методів дослідження коливань (і взагалі руху динамічної системи) є аналіз її фазового портрету. Фазовий портрет коливання будують таким чином: швидкість руху \dot{x} відкладається по осі ординат, а відхилення x – по осі абсцис фазової площини. Кожному руху в момент часу t відповідає зображуючи точка на вказаній площині координат $\dot{x} - x$, що однозначно

відповідає миттєвим значенням координати x та швидкості \dot{x} . Зображуюча точка з плином часу переміщується, описуючи фазову траєкторію. Час відіграє роль параметра оскільки рівняння фазової траєкторії задане залежністю між координатою й швидкістю $\dot{x} = f(x)$.

Недоліком фазового портрета є неможливість безпосереднього представлення процесу в часі, але цей недолік компенсується великою перевагою: тут із чисто геометричного представлення фазової траєкторії або сімейства фазових траєкторій можна зробити важливі висновки про властивості коливань. Це насамперед відноситься до коливань, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Для таких коливань може виявитися, що єдино можливим методом їх дослідження є метод фазової площини.

Розглянемо насамперед простий приклад: визначимо фазову траєкторію гармонічного коливання, яке описується рівнянням (2.3).

Виконаємо певні математичні перетворення цього виразу. Спочатку знайдемо його першу похідну за часом:

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.4)$$

Вирази (2.3) та (2.4) піднесемо до квадрату та поділимо на певні коефіцієнти (вираз (2.3) на коефіцієнт A^2 , а вираз (2.4) на коефіцієнт $A^2\omega^2$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} = \sin^2(\omega t - \varphi), \\ \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \cos^2(\omega t - \varphi). \end{cases} \quad (2.5)$$

Додамо обидва рівняння із системи рівнянь (2.5) в результаті чого отримаємо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \sin^2(\omega t - \varphi) + \cos^2(\omega t - \varphi) \quad (2.6)$$

або

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1 \quad (2.7)$$

На фазовій площині таке рівняння описує еліпс із півосями A та $A\omega$ (рис. 2.3). У випадку $\omega=1$ цей еліпс перетворюється в коло. Однак коло можна одержати й для будь-якої частоти ω , змінивши масштаб по осі ординат і

відкладаючи по ній не \dot{x} , а $\frac{\dot{x}}{\omega}$.

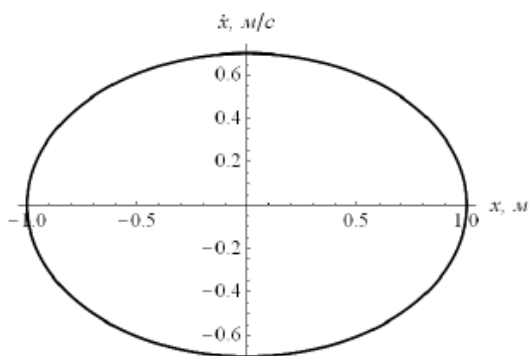


Рисунок 2.3 - Фазова траєкторія гармонічного коливання

Розглянемо тепер деякі загальні властивості фазових траєкторій. Безпосередньо видно, що кожна зображуюча точка рухається за годинниковою стрілкою. У точках, в яких фазова траєкторія перетинає вісь абсцис усі фазові траєкторії мають вертикальні дотичні. Це впливає з того, що точка перетину з віссю абсцис характеризується значенням швидкості, рівним нулю. Крім того, у цих же точках значення положення приймають амплітудні значення. У точці перетину із віссю ординат навпаки: положення є нульовим, а швидкість приймає амплітудне значення. Звідси впливає, що в жодній точці верхньої або нижньої півплощини фазова траєкторія не може мати вертикальну дотичну, оскільки в кожній точці, де дотична є вертикальною, швидкість повинна бути рівною нулю. Можливі виключення, коли певні вироджені фазові траєкторії перетинають абсцису не вертикально, але тоді точка перетину завжди є так званою особливою точкою. Докладніше про це буде сказано нижче.

Окрема фазова траєкторія представляє окремі визначені коливання.

Якщо потрібне загальне представлення про всі можливі рухи коливної системи, то зображується сімейство фазових траєкторій. Таке сімейство траєкторій називається фазовим портретом системи. Подібно тому як портрет людини дозволяє скласти певне уявлення про неї, фазовий портрет показує фахівцеві важливі властивості динамічної системи.

Положення рівноваги коливної системи завжди представляється особливою точкою фазової площини. Легко бачити, що така точка може лежати тільки на осі x , оскільки лише в цьому випадку можливий стан спокою. По виду фазових траєкторій, що оточують особливі точки, розрізняють наступні типи цих точок: *центр*, *фокус*, *вузол і сідло*. Ці поняття, запозичені з теорії диференціальних рівнянь [13], виявилися дуже корисними для опису поведінки коливної системи.

На рис. 2.4, а показана особлива точка типу центр. Вона характерна для незатухаючих коливань, які проходять поблизу положення рівноваги (на рис. 2.4, а чи більший еліпс, тим більшою є енергія коливань). При наявності демпфування кожний еліпс переходить у спіраль (рис. 2.4, б), а особлива точка на початку координат стає фокусом. Якщо демпфування слабке, то спіраль складається з великого числа близько розташованих витків. Чим сильніше демпфування, тем далі витки знаходяться один від одного.

При дуже сильному демпфуванні фазовий портрет якісно змінюється, приймаючи вид, показаний на рис. 2.4, в. Тут початок координат є вузлом. В особливій точці всі фазові траєкторії дотикаються до прямої $a-a$ (штрихова лінія), яка проходить через початок координат.

Вздовж цієї прямої фазові траєкторії стягуються в особливу точку (на рис. 2.4, в показані лише дві фазові траєкторії чорного та сірого кольору).

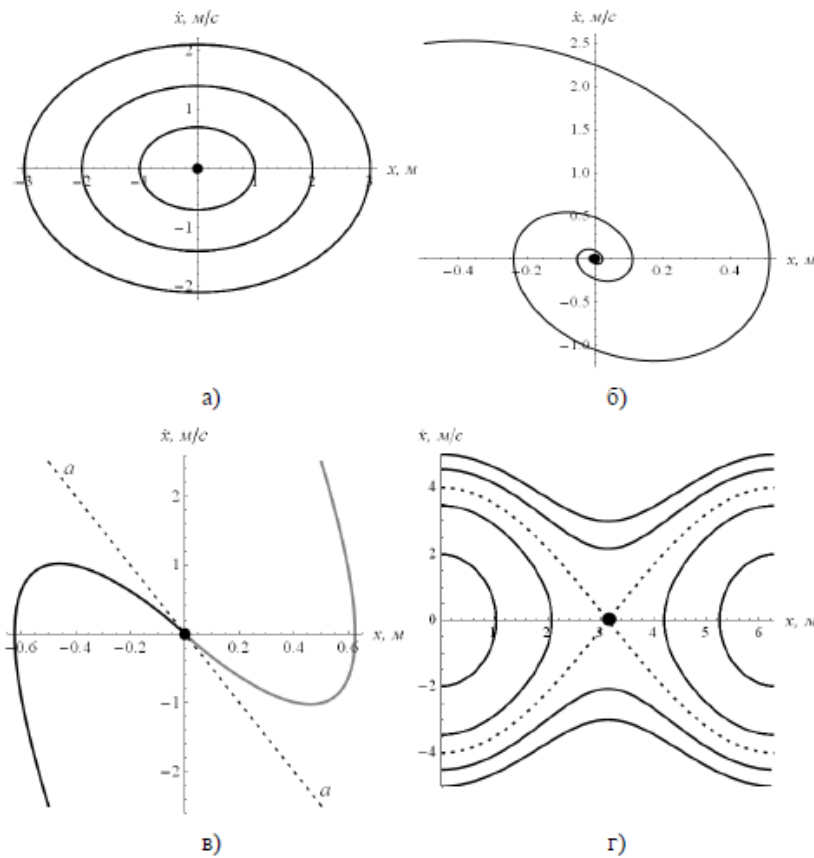


Рисунок 2.4 - Фазові траєкторії різних коливних систем:
 а) гармонічна коливна система;
 б) гармонічна коливна система із демпфуванням;
 в) гармонічна коливна система із сильним демпфуванням;
 г) фазовий портрет з особливою точкою типу сідло

На рис. 2.4, г представлений фазовий портрет системи з особливою точкою типу сідло. Він характеризується тим, що через особливу точку проходять дві вироджені фазові траєкторії – сепаратиси (показані штриховими лініями), а інші траєкторії схожі на гіперболи. Особлива точка такого типу відповідає нестійкому положенню рівноваги коливної системи (наприклад, для математичного маятника це верхнє положення).

Наведені тут фазові портрети є „стандартними блоками”, з яких будуються фазові портрети реальних коливних систем, якими є механізми та машини [14]. Слід також відмітити, що можна застосовувати модифіковані фазові площини. Щоб одержати фазові траєкторії більш простого виду, іноді доцільно відкладати по осі ординат замість швидкості її деяку функцію, а по осі абсцис – деяку функцію від x відповідно. Крім того, використовуються тривимірні (некласичні) фазові портрети, які мають більшу загальність у порівнянні із розглянутими та дають змогу оцінювати зміну одночасно трьох фазових координат протягом руху системи. На рис. 2.5 показана некласична

фазова траєкторія руху фазової точки у тривимірному просторі, яка побудована для коливної системи, що описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} - 0,01\dot{x} + \sin(x) = -0,5\cos(t)$ (сіра точка на рис. 2.5 показує початок координат).

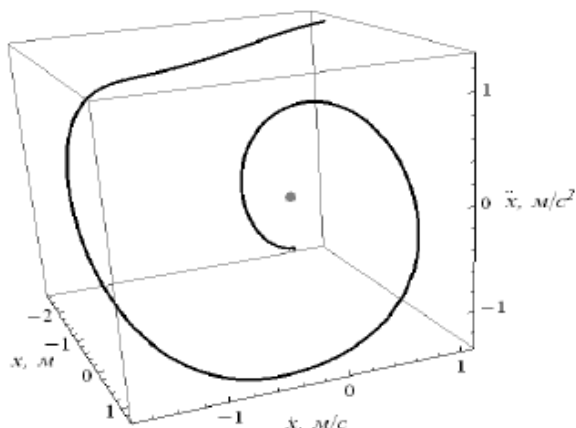


Рисунок 2.5 - Некласична фазова траєкторія у тривимірному просторі

2.3 Вимушені коливання механізмів. Механічний резонанс

2.4.1 Коливна система „двигун-фундамент”

Розглянемо коливну систему, що складається з двигуна і має незбалансований ротор, який закріплений на фундаменті (рис. 2.6, а). Ротор двигуна обертається із постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = \text{const}$. Якщо не враховувати горизонтальну складову відцентрової сили, то дана коливна система може бути представлена у вигляді динамічної моделі, яка показана на рис. 2.6, б.

Математична модель динаміки руху наведеної на рис. 2.6, б моделі представляється у вигляді диференціального рівняння:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t) \quad (2.8)$$

де F – вертикальна складова відцентрової сили, що діє на фундамент двигуна ($F = F_{\text{max}} \sin(\omega_0 t)$); F_{max} - амплітуда вертикальної складової відцентрової сили, що діє на фундамент.

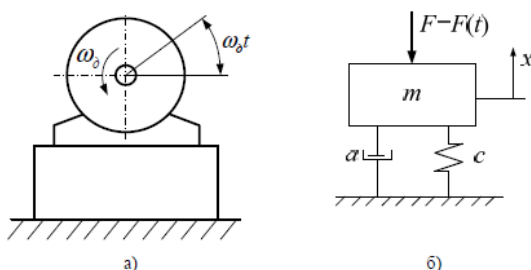


Рисунок 2.6 - Коливна система: а) двигун із незбалансованим ротором на фундаменті; б) динамічна модель приведеної коливної системи

Розділивши праву і ліву частину рівняння (2.8) на приведену масу двигуна m та ввівши позначення $\lambda = \frac{k}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $f_{\max} = \frac{F_{\max}}{m}$ отримаємо рівняння:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{\max}(\omega_\partial t) \quad (2.9)$$

де λ – логарифмічний декремент згасання коливань;

ω_0 – частота власних коливань динамічної системи „двигун-фундамент”.

Частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (2.9) має такий вигляд [15]:

$$x = x_A \sin(\omega_\partial t - \gamma), \quad (2.10)$$

де x_A – амплітуда вимушених коливань; γ – кут зсуву фаз збурюючої дії та вимушених коливань. Величина x_A знаходиться таким чином:

$$x_A = \frac{F_{\max}}{c \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_\partial^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega_\partial^2 \lambda^2}{\omega_0^2}}} \quad (2.11)$$

Величина γ визначається залежністю:

$$\gamma = \arctg\left(\frac{2\omega_\partial \lambda}{\omega_0^2 - \omega_\partial^2}\right) \quad (2.12)$$

Залежність амплітуди коливань від частоти збурюючої дії являє собою амплітудно-частотну характеристику системи. Введемо показник - *коефіцієнт динамічності*, який буде визначати наскільки амплітуда вимушених коливань більша за статичне відхилення маси m від положення рівноваги під дією постійної сили F_{\max} :

$$\mu = \frac{a}{x_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_\partial^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega_\partial^2 \lambda^2}{\omega_0^2}}} \quad (2.13)$$

Відмітимо, що величина показника μ не перетворюється в нескінченність ні при яких значеннях частоти збурення. Цим знайдений результат суттєво відрізняється від розв’язку для коливної системи (2.9) без врахування

демпфування ($\lambda=0$). На рис. 2.7 показані графічні залежності $\mu = \mu\left(\frac{\omega_\partial}{\omega_0}\right)$ при

різних значеннях коефіцієнта λ . Максимум коефіцієнта динамічності трохи зміщений убік від абсциси $\frac{\omega_\partial}{\omega_0} = 1$, але цей зсув малий і можна приблизно

прийняти $\mu_{\max} = \frac{\omega_0}{2\lambda}$, підставляючи у формулу (2.13) вираз $\omega_\partial = \omega_0$. Таким чином,

максимум коефіцієнта динамічності обернено пропорційний коефіцієнту λ . Із графіків приведених на рис. 2.7 видно, що сили в’язкого опору мають помітний вплив лише в білярезонансній області. Це дозволяє в режимах коливань, які

далекі від резонансу приймати для μ криву, побудовану без врахування в'язкого опору, а у всій білярезонансній області приймати $\mu = \mu_{\max}$.

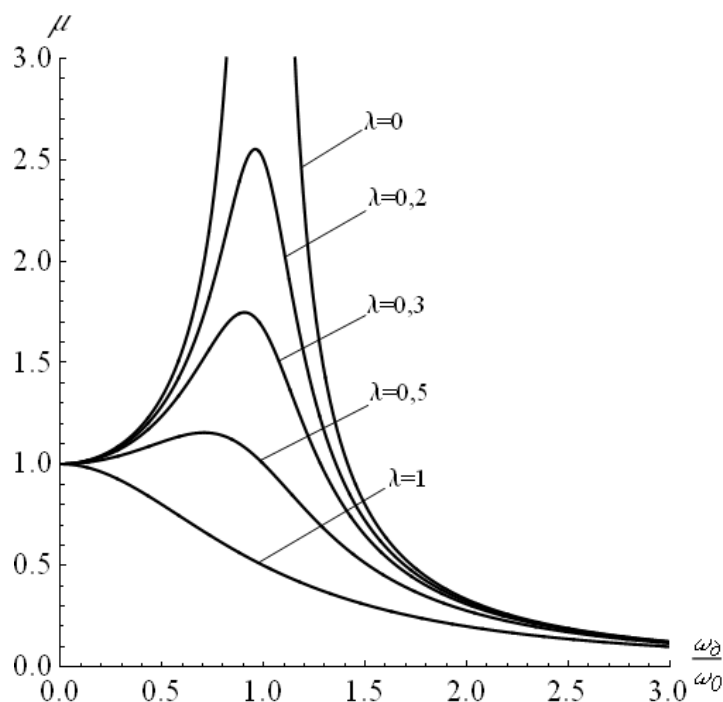


Рисунок 2.7 - Графічні залежності $\mu = \mu\left(\frac{\omega_\delta}{\omega_0}\right)$ при різних значеннях декременту затухання коливань

З виразу (2.10) видно, що переміщення коливної системи відбувається із частотою збудовуючої сили, але вони відстають від зміни сили по фазі. Це відставання характеризується кутом γ , який визначається формулою 2.12 і залежить від відношення частот $\frac{\omega_\delta}{\omega_0}$: при малих частотах ω_δ кут γ невеликий; при резонансі ($\omega_\delta = \omega_0$) фазовий кут рівний $\pi/2$, тобто в ті моменти, коли сила максимальна, переміщення дорівнює нулю; при досить високих частотах фазовий кут близький до π , тобто максимуму сили відповідає мінімум переміщення.

В'язкий опір істотно впливає на загальну силу, що передається від коливної системи „двигун-фундамент” на підлогу. Ця сила складається із двох доданків, що відповідають пружному та в'язкому зв'язкам:

$$N = cx + k\dot{x} \quad (2.14)$$

де N - сила, що передається підлозі. Підставляючи у вираз (2.14) значення переміщення та швидкості приведеної маси:

$$x = \mu x_{cm} \sin(\omega_\delta t - \gamma) \quad (2.15)$$

$$\dot{x} = \mu x_{cm} \omega_\delta \cos(\omega_\delta t - \gamma) \quad (2.16)$$

отримаємо

$$N = c\mu x_{cm} \left[\sin(\omega_\delta t - \gamma) + \frac{2\lambda\omega_\delta}{\omega_0^2} \cos(\omega_\delta t - \gamma) \right] \quad (2.17)$$

Для максимального значення N знайдемо:

$$N_{\max} = \mu F_{\max} \sqrt{1 + \left(\frac{2\lambda\omega_\delta}{\omega_0^2} \right)^2} = F_{\max} \tilde{\mu} \quad (2.18)$$

де $\tilde{\mu}$ - коефіцієнт підсилення ($\tilde{\mu} = \mu \sqrt{1 + \left(\frac{2\lambda\omega_\delta}{\omega_0^2} \right)^2}$).

На рис. 2.8 показана зміна цього коефіцієнта залежно від відношення частот $\frac{\omega_\delta}{\omega_0}$ при різних значеннях λ . Усі криві проходять через ту саму точку, абсциса якої рівна $\sqrt{2}$, а ордината 1. В області $\frac{\omega_\delta}{\omega_0} < \sqrt{2}$ загасання корисне, оскільки знижує передачу сили на підлогу; в області $\frac{\omega_\delta}{\omega_0} > \sqrt{2}$ зі збільшенням демпфування збільшується сила, що діє на підлогу. Тому, у випадках, коли режим роботи знаходиться в зарезонансній області, сила, що передається підлозі, зростає внаслідок демпфування. Фізичний зміст цього явища пов'язаний з тим, що при коливаннях підлозі передаються дві сили – через пружний та в'язкий елементи. При високій частоті збурюючої сили мають місце відносно великі швидкості й відповідно виникає більша сила в'язкого опору.

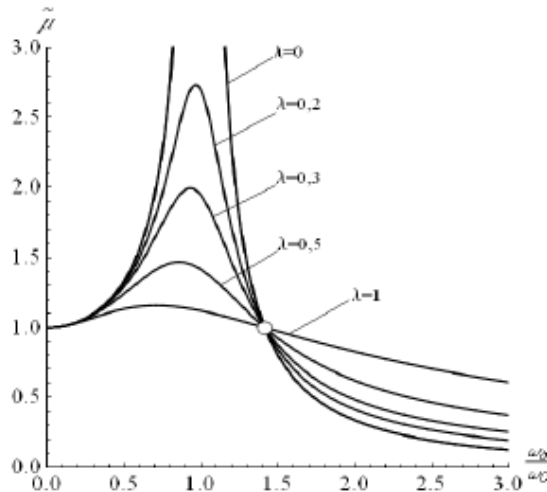


Рисунок. 2.7 - Графічні залежності $\tilde{\mu} = \tilde{\mu} \left(\frac{\omega_\delta}{\omega_0} \right)$ при різних значеннях декременту затухання коливань

З'ясуємо, який вплив на динамічну систему „двигун-фундамент” справляє збурення, яке описується такою функцією:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{\max} \text{sign}[(\omega_0 t)] \quad (2.19)$$

Проведемо аналіз вимушених коливань динамічної системи „двигун-фундамент”, використовуючи метод фазової площини. На рис. 2.9 показані графіки різних збуджуючих функцій (2.9), (2.19) та відповідні їм фазові траєкторії.

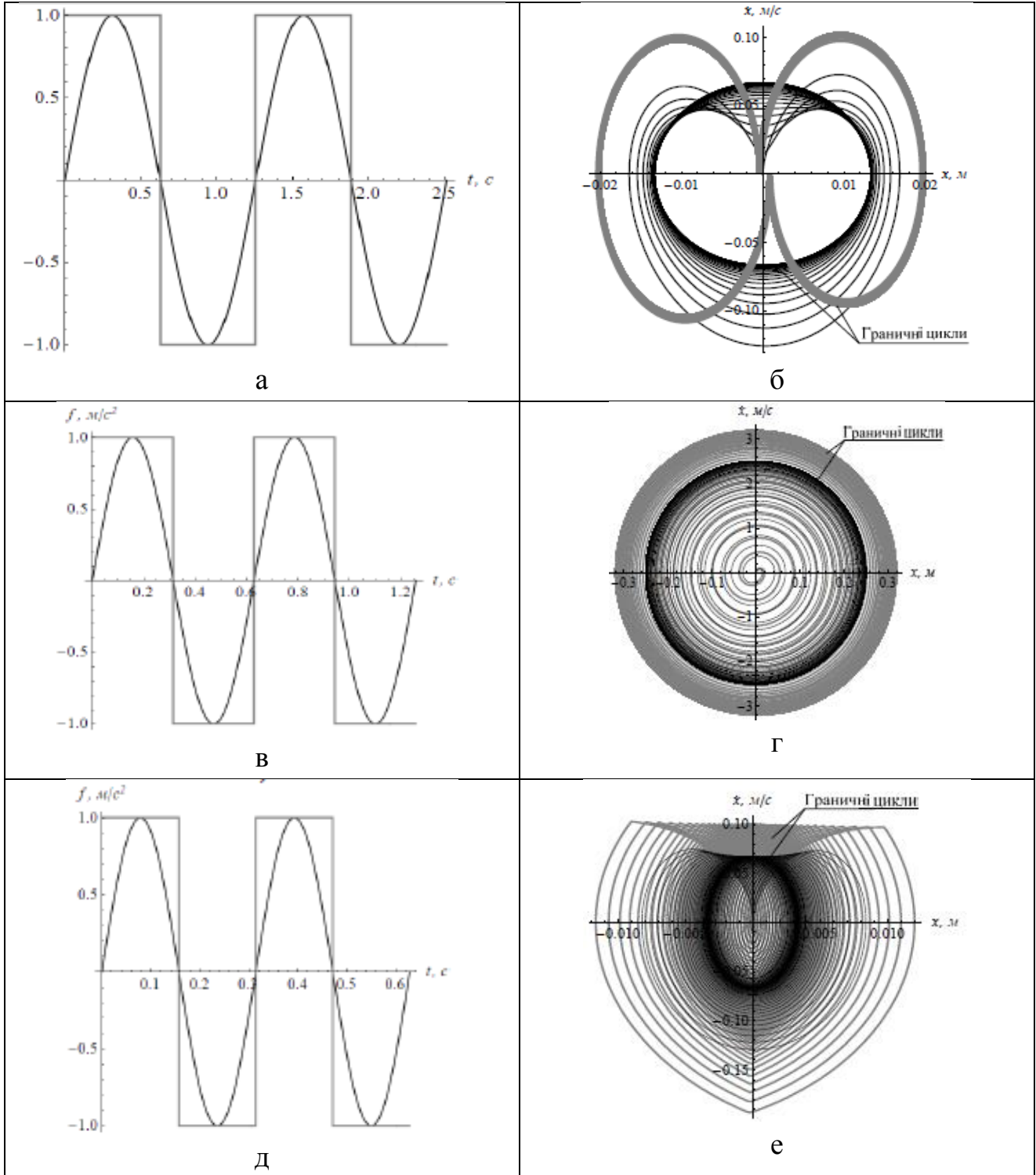


Рисунок 2.9 - Графіки функцій, що характеризують коливання динамічної системи „двигун-фундамент”:

- а) збурюючі дії при $\omega_\delta = 0,5\omega_0$ (до резонансний режим);
- б) фазові портрети дорезонансного режиму коливань;
- в) збурюючі дії при $\omega_\delta = \omega_0$ (резонансний режим);
- г) фазові портрети резонансного режиму коливань;
- д) збурюючі дії при $\omega_\delta = 2\omega_0$ (зарезонансний режим);
- е) фазові портрети зарезонансного режиму коливань

Приведені графіки побудовані при наступних параметрах: $\lambda = 0,2$; $f_{max} = 1$; $\omega_0 = 10$. На рис. 2.9 сірою лінією показані характеристики, які відносяться до збурення (2.9).

Для того, щоб провести аналіз графіків приведених на рис. 2.9 необхідно ввести поняття граничного циклу. Граничний цикл – це замкнена фазова траєкторія, до якої асимптотично ($t \rightarrow +\infty$) наближаються всі інші фазові траєкторії [16]. Це означає, що при будь-яких початкових умовах у коливній системі виникнуть незатухаючі періодичні коливання.

Із приведених графіків видно, що для всіх режимів коливань при дії збурення (2.19) віддаленість кривої граничного циклу від початку координат є більшою ніж при тих самих умовах коли діє збурення (2.9). Це означає, що енергія коливань при дії збурення (2.19) є більшою.

2.3.2 Коливна система „гнучкий вал”

Якщо відстань між опорами вала значно більша його діаметра, то при визначенні допустимих дисбалансів необхідно враховувати деформацію (прогин) вала. Для встановлення основних співвідношень між деформацією вала й дисбалансом розглянемо найпростіший випадок вертикального вала, на якому закріплений диск масою m (рис. 2.10).

Центр мас S зміщений від осі вала на величину e . Масою вала нехтуємо. При обертанні вала з кутовою швидкістю ω відцентрова сила інерції диска викликає деформацію (прогин) вала. Позначимо через y прогин вала в перерізі, де закріплений диск. Цей прогин пов'язаний з модулем сили інерції

$F_i = m(e + y)\omega^2$ співвідношенням:

$$y = \delta_1 m (e + y) \omega^2 \quad (2.20)$$

де δ_1 – прогин вала від одиничної сили в даному перерізі. Звідси:

$$y = \frac{\omega^2 e}{\frac{1}{\delta_1 m} - \omega} \quad (2.21)$$

Кутова швидкість вала, при якій знаменник виразу (2.21) перетворюється в нуль, а отже, прогин $y \rightarrow \infty$, називається *критичною кутовою швидкістю*:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{\delta_1 m}} \quad (2.22)$$

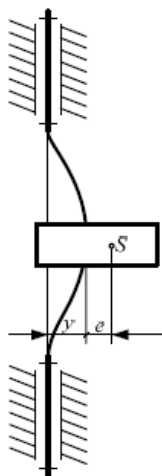


Рисунок 2.10 - Динамічна модель вертикального гнучкого вала з дисбалансом

Критичну кутову швидкість обертання вала можна розглядати, як власну частоту системи „вал – диск”, а стан вала при $\omega = \omega_k$ вважати резонансним. Якщо врахувати сили опору, то при критичній кутовій швидкості прогин y не прямує до нескінченності, а має хоча й велику, але скінченну величину. Поділивши чисельник і знаменник правої частини виразу (2.20) на ω^2 будемо мати:

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (2.23)$$

Звідси видно, що при $\omega < \omega_k$ (докритичний або дорезонансний режим) $y > 0$, а при $\omega > \omega_k$ (закритичний або зарезонансний режим) $y < 0$, тобто в закритичному режимі прогин y є від’ємним. Отже, зсув фаз між збудовуючою силою і власними коливаннями рівний π . У закритичному режимі прогин y зменшується зі збільшенням кутової швидкості ω й при $\omega \rightarrow \infty$ вона перетворюється у величину зсуву e . Відцентрова сила інерції в закритичному режимі визначається співвідношенням:

$$F_i = m(e - y)\omega^2, \quad (2.24)$$

тобто дисбаланс зменшується зі збільшенням кутової швидкості.

Вал, що працює при кутовій швидкості, яка менша за критичну, прийнято називати *жорстким*, а при кутовій швидкості, яка більша ніж критична – *гнучким*. Якщо на валу закріплено кілька дисків, то коливна система „вал – диски” має кілька ступенів вільності і тоді повинно бути декілька критичних (резонансних) кутових швидкостей. Найменша із цих швидкостей називається першою резонансною.

2.4 Коливання в механізмі з пружною муфтою

2.4.1 Рівняння руху механізму з пружною муфтою

На рис. 2.11, а показана одна з конструкцій пружної муфти, у якій напівмуфти 1 і 2 з'єднані пружними елементами 3, що допускають відносний кутовий зсув напівмуфт. У першому наближенні характеристику сил пружності в муфті можна вважати лінійною:

$$M_\varphi = c\varphi \quad (2.25)$$

де M_φ – момент сил пружності;

c – коефіцієнт жорсткості,

φ – кутовий зсув напівмуфт ($\varphi = \varphi_\delta - \varphi_m$).

При деформації пружних елементів відбувається розсіювання (дисипація) енергії в муфті, яке залежить від швидкості деформації. Для малих кутових зсувів момент дисипативних сил M_m пропорційний величині $\dot{\varphi}$:

$$M_m = -b\dot{\varphi} \quad (2.26)$$

де b – коефіцієнт дисипації.

На рис. 2.11, б із застосуванням умовних позначень пружної муфти показана динамічна модель механізму.

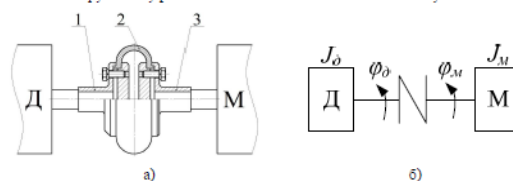


Рисунок 2.11 - Механізм із пружною муфтою: а) креслення муфти; б) динамічна модель механізму із пружною муфтою

На рис. 2.11, а показано, що вал двигуна Д з'єднаний через пружну муфту з валом робочої машини М. Кути повороту вала двигуна й вала машини позначені відповідно через φ_δ і φ_m . Приведений до вала робочої машини момент інерції J_m і момент інерції рухомих частин двигуна J_δ вважаємо постійними. Число ступенів вільності механізму рівно двом, тому що кожна пружна ланка збільшує загальне число ступенів вільності механізму на одиницю.

Позначимо через M_δ приведенний до вала двигуна момент рушійних сил і через M_c – модуль моменту сил опору, приведенних до вхідного вала машини.

Тоді рівняння руху при узагальнених координатах φ_δ і φ_m мають вигляд:

$$\begin{cases} J_\delta \ddot{\varphi}_\delta = M_\delta - c\varphi - b\dot{\varphi}; \\ J_m \ddot{\varphi}_m = c\varphi + b\dot{\varphi} - M_c \end{cases} \quad (2.27)$$

При досить великій потужності двигуна закон руху його ротора $\varphi_\delta(t)$ може вважатися не залежним від зміни M_c і J_m . Тоді при відомій залежності $\varphi_\delta(t)$ рівняння (2.27) записується у вигляді

$$J_m \ddot{\varphi} + b \dot{\varphi} + c \varphi = M_c + J_c \ddot{\varphi}_c \quad (2.28)$$

тобто може бути розв'язане відносно кутового зсуву φ незалежно від першого рівняння системи (2.27), яке в цьому випадку служить для визначення рушійного моменту M_c , відповідно до прийнятої залежності $\varphi_c(t)$.

Для двигунів із жорсткою механічною характеристикою, у яких кутова швидкість ротора мало змінюється при зміні навантаження, часто вважають кутову швидкість $\dot{\varphi}_c$ постійною. Тоді рівняння руху механізму з лінійною пружною муфтою має вигляд:

$$J_m \ddot{\varphi} + b \dot{\varphi} + c \varphi = M_c \quad (2.29)$$

У цьому випадку рух ланки з приведеним моментом інерції J_m можна розглядати як суму рухів: основного з постійною кутовою швидкістю $\dot{\varphi}_c$ і додаткового руху зі швидкістю $\dot{\varphi}$, яка, звичайно, має коливний характер.

Іноді говорять, що динамічна модель має один коливний ступінь вільності, оскільки другий ступінь вільності визначає рух усіх частин системи з однією і тією ж кутовою швидкістю.

2.4.2 Коливання в механізмах з лінійною пружною муфтою

Припустимо, що модуль приведенного моменту сил опору змінюється за законом:

$$M_c = M_1 + H \sin(\omega t), \quad (2.30)$$

де M_1 – середнє значення M_c ,

H – амплітуда його коливань відносно середнього значення.

Для загального випадку зміни приведенного моменту сил вираз (2.30) можна розглядати як наближений, що отриманий при врахуванні лише перших двох членів розкладу в ряд Фур'є.

Підставимо M_c у рівняння руху (2.29) і зробимо заміну змінних $\varphi = y + \frac{M_1}{c}$.

Тоді рівняння руху (2.29) перетвориться до виду рівняння коливного типу:

$$\ddot{y} + 2\lambda \dot{y} + \omega_0^2 y = k_1 \sin(\omega t) \quad (2.31)$$

де $\lambda = \frac{b}{2J_m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{J_m}$, $k_1 = \frac{H}{J_m}$.

Рівняння (2.31) з точністю до позначень співпадає із відомим рівнянням (2.9). Отже всі відомі результати, що отримані у п.п. 2.4.1 можуть бути використані для коливань лінійної пружної муфти. Різниця полягає лише у тому, при постійній кутовій швидкості двигуна $\dot{\varphi}_c$ кут повороту вхідного вала машини φ_m представляється різницею $\varphi_m = \dot{\varphi}_c t - \varphi$, де кутовий зсув напівмуфт характеризується коливаннями відносно положення $\varphi_c = \frac{M_1}{c}$. У режимі розгону

крім вимушених коливань із кутовою частотою ω спостерігаються вільні коливання з кутовою частотою $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ які із часом загасають. У режимі усталеного руху залишаються тільки вимушені коливання, що називаються стаціонарними, оскільки їх амплітуда і кутова частота не залежать від часу:

$$\varphi = \frac{M_1}{c} + A \sin(\omega t - \gamma^*) \quad (2.32)$$

де γ^* - кут зсуву між вимушеними коливаннями напівмуфт та частотою збурення, яке у даному випадку є силою опору; показник γ^* за фізичною сутністю є аналогом показника з виразу (2.10).

2.4.3 Коливання в механізмах з нелінійною пружною муфтою

Особливості динаміки механізму з нелінійною пружною муфтою пояснимо на прикладі дослідження муфти, для якої коефіцієнт жорсткості представлений виразом:

$$c = c_0 + c_1 \varphi^2 \quad (2.33)$$

Тоді рівняння руху (2.29) при $b = 0$ і $M_c = M_1 + H \sin(\omega t)$ має вигляд:

$$J_m \ddot{\varphi} + (c_0 + c_1 \varphi^2) \varphi = M_1 + H \sin(\omega t) \quad (2.34)$$

Лінеаризацію виразу (2.34) на відрізку $(-A; A)$ виконаємо по методу Чебишева з умови рівності граничних відхилень зі знаками, що чергуються (рис. 2.12).

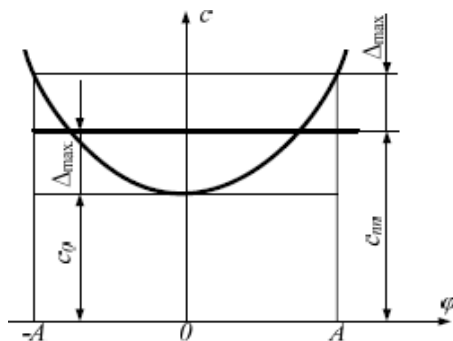


Рисунок 2.12 - Графічна інтерпретація лінеаризації виразу (2.34)

Тоді ордината шуканої прямої c_m і відхилення Δ_{\max} можуть бути знайдені із системи рівнянь:

$$\begin{cases} c_m = c_0 + \Delta_{\max}; \\ c_m + \Delta_{\max} = c_0 + c_1 A^2. \end{cases} \quad (2.35)$$

Звідси

$$c_m = c_0 + 0,5c_1 A^2. \quad (2.36)$$

Підстановка наближеного виразу коефіцієнта жорсткості (2.36) у рівняння руху (2.34) дає:

$$J_m \ddot{\varphi} + (c_0 + 0,5c_1 A^2) \varphi = M_1 + H \sin(\omega t) \quad (2.37)$$

Після заміни змінних за умовою $\kappa = y + \frac{M_1}{c_m}$ приводимо рівняння руху

(2.37) до виду лінійного рівняння:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \frac{H}{J_m} \sin(\omega t) \quad (2.38)$$

де

$$\omega_n^2 = \frac{c_0 + 0,5c_1 A^2}{J_m} \quad (2.39)$$

Амплітуда вимушених коливань, що описуються рівнянням (2.38) при $\omega \neq \omega_n$, має такий вигляд:

$$A = \frac{H}{J_m |\omega_n^2 - \omega^2|} \quad (2.40)$$

Підстановка значення ω (2.39) при $\omega < \omega_n$ приводить до алгебраїчного рівняння третього степеня для визначення амплітуди A :

$$A(c_0 + 0,5c_1 A^2 - \omega^2 J_m) = H. \quad (2.41)$$

Отже, якщо шукати розв'язок рівняння (2.38) у вигляді $y = A \sin(\omega t)$ то можливе одержання трьох різних амплітуд при одній і тій же частоті ω .

Можливість виникнення декількох періодичних режимів при одній і тій збурювальній силі є характерною рисою нелінійних систем.

На рис. 2.13, а показана залежність амплітуди A від частоти ω , або амплітудно-частотна характеристика для випадку, коли коефіцієнт жорсткості збільшується при збільшенні сили. Штриховою лінією показана *кістякова крива* – графік залежності між частотою й амплітудою вільних коливань. Порівняння отриманої амплітудно-частотної характеристики з тією ж характеристикою при лінійній пружній ланці показує, що нелінійність пружної ланки приводить до виникнення коливань із великою амплітудою при частотах збурюючої сили, що перевищують власну частоту (затягування резонансу в область високих частот).

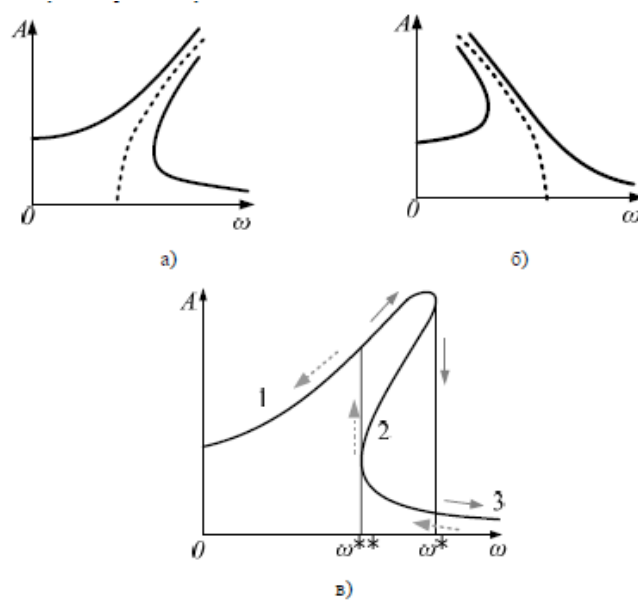


Рисунок 2.13 - Амплітудно-частотні характеристики нелінійної пружної муфти:
 а) коефіцієнт жорсткості збільшується при збільшенні сили;
 б) коефіцієнт жорсткості зменшується при збільшенні сили;
 в) враховується тертя в кінематичних парах

Якщо коефіцієнт жорсткості зменшується зі збільшенням сили, то нахил кістякової кривої і амплітудно-частотної характеристики направлений до осі A (рис. 2.13, б), що приводить до затягування резонансу в область низьких частот. При врахуванні тертя в кінематичних парах амплітуда коливань при резонансі має скінченну величину й обидві вітки амплітудно-частотної характеристики замикаються (рис. 2.12, в).

З нахилом амплітудно-частотної характеристики й можливістю існування декількох режимів руху пов'язана інша особливість нелінійних систем – зрив амплітуди. Представимо, що частота ω збільшується починаючи від деякого значення, розташованого на вітці 1 (рис. 2.12, в).

Частота може збільшуватися до значення $\omega = \omega^*$. При цьому значенні частоти відбувається зрив амплітуди й перехід на вітку 3. Якщо частота ω зменшується від деякого значення, що відповідає вітці 3, то зрив амплітуди й перехід на гілку 1 відбуваються при значенні $\omega = \omega^{**}$. Звідси випливає, що вітка 2 відповідає нестійким режимам.

Крім розглянутих коливних режимів із частотою, що рівна частоті збудовуючої сили ω , у нелінійних системах можливе виникнення режимів із частотами, кратними ω . Коливання з вищими частотами ($2\omega, 3\omega, \dots$) називаються *супергармонійними*, коливання з нижчими частотами ($2/\omega, 3/\omega, \dots$) – *субгармонійними*, коливання із частотою ω – *основними*.

Дослідження супергармонійних і субгармонійних коливань проводиться звичайно із застосуванням наближених методів, заснованих на розкладанні

періодичних функцій у ряд Фур'є.

2.7 Віб्रोізоляція при ударному впливі

У загальному випадку під ударним впливом розуміється вплив нескінченно великої сили протягом нескінченно малого інтервалу часу. При цьому кількість руху (імпульс) системи змінюється на деяку скінченну величину. Мірою ударного впливу вважається миттєвий імпульс сили:

$$S = \lim_{t_y \rightarrow 0} Ft_y \quad (2.42)$$

де t_y – тривалість удару.

При дослідженні ударних впливів на віброізолятор в першому наближенні нехтують демпфуванням, а коефіцієнт жорсткості вважають постійним. Динамічна модель, яка представляє об'єкт, що підлягає захисту від вібрацій разом із віброізолятором зображена на рис. 2.5, а із врахуванням того, що сила F змінюється не за періодичним законом, а має імпульсний характер.

Рівняння руху об'єкта, що підлягає захисту від вібрації, можна представити у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \quad (2.43)$$

Нехай у момент $t=\xi$ до системи, яка знаходиться у стані спокою прикладений миттєвий імпульс S .

Після прикладання імпульсу система здійснює вільні коливання, які описуються рівнянням:

$$x = C_1 \sin(\omega_0(t - \xi)) + C_2 \cos(\omega_0(t - \xi)), \quad (2.44)$$

де C_1, C_2 – постійні інтегрування.

У початковий момент часу переміщення $x=0$, а швидкість \dot{x} знаходиться по теоремі про зміну кількості руху $m\dot{x} = S$. З врахуванням початкових умов отримаємо: $C_2=0, C_1=S/(m\omega_0)$. Отже, вільні коливання об'єкта, що підлягає захисту від вібрації, після ударного впливу в розглянутому випадку відбуваються за гармонійним законом

$$x = \frac{S}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - \xi)) = R(t, \xi)S, \quad (2.45)$$

де $R(t, \xi)$ – функція, яка описує рух, що викликаний одиничним імпульсом (імпульсна реакція системи).

Максимальна величина сили, яка передається на підлогу:

$$Q_{\max} = c \frac{S}{m\omega_0} = \omega_0 S, \quad (2.46)$$

тобто для зменшення Q_{\max} треба зменшувати власну частоту. Однак при

цьому згідно виразу (2.45) збільшується амплітуда коливань.

Ударним впливом при розрахунках віброізоляторів вважається не тільки миттєвий імпульс, але й вплив порівняно великої сили за кінцевий проміжок часу t_y , який називається *тривалістю удару*. Залежність сили F , яка діє на об'єкт, що підлягає захисту від вібрації, від часу t , при ударі називають *формою удару*. Цю залежність можна представити як нескінченну послідовність елементарних імпульсів $F(\xi)d\xi$. Підставивши у вираз (2.45) $dS=F(\xi)d\xi$, одержимо переміщення, яке викликане дією одного елементарного імпульсу:

$$dx = \frac{F(\xi)}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi. \quad (2.47)$$

Підсумовуючи вплив усіх елементарних імпульсів на ділянці від 0 до t , одержуємо:

$$x = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi. \quad (2.48)$$

Усі основні особливості динаміки віброізолятора проявляються при найпростішій формі удару, яка називається *прямокутною формою*:

$$F = \begin{cases} F_m = \text{const}, & \text{при } t \leq t_y; \\ 0, & \text{при } t > t_y. \end{cases} \quad (2.49)$$

При $t \leq t_y$ інтегрування виразу (2.48) дає:

$$x = \frac{F_m}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi = \frac{F_m}{m\omega_0^2} \sin(\omega_0(t - \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=t}. \quad (2.50)$$

Звідси:

$$x = \frac{F_m}{c} (1 - \cos(\omega_0 t)). \quad (2.51)$$

При $t > t_y$ розбиваючи проміжок часу на дві частини, одержимо:

$$x = \frac{F_m}{m\omega_0} \int_0^{t_y} \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi + \frac{1}{m\omega_0^2} \int_{t_y}^t F(\xi) \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi. \quad (2.52)$$

Другий інтеграл перетворюється в нуль, оскільки $F(t)=0$ при $t > t_y$, перший інтеграл дає:

$$x = \frac{F_m}{m\omega_0} \cos(\omega_0(t - \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=t_y}. \quad (2.53)$$

Звідси

$$x = \frac{F_m}{c} (\cos \omega_0(t - t_y) - \cos(\omega_0 t)). \quad (2.54)$$

Силу пружності віброізолятора, яка передається на підлогу, отримаємо після множення на коефіцієнт жорсткості c переміщення x , яке визначено за формулами (2.51) та (2.54):

$$Q = \begin{cases} F_m (1 - \cos(\omega_0 t)), & \text{при } t \leq t_y; \\ F_m (\cos(\omega_0 (t - \xi)) - \cos(\omega_0 t)), & \text{при } t > t_y. \end{cases} \quad (2.55)$$

Якщо $\omega_0 t_y \geq \pi$, то максимум сили Q , рівний $2F_m$, досягається при

$$\omega_0 t_y = \pi. \text{ Якщо ж } \omega_0 t_y < \pi, \text{ то максимум сили } Q \text{ досягається при } \omega_0 t = \frac{\pi + \omega_0 t_y}{2}$$

і його величина знаходиться за виразом:

$$Q_{\max} = 2F_m \sin \frac{\omega_0 t_y}{2} \quad (2.56)$$

Відношення максимального значення сили, яка передається на підлогу, до максимального значення сили удару F_{\max} називається коефіцієнтом динамічності при ударі:

$$K_y = \frac{Q_{\max}}{F_{\max}} \quad (2.57)$$

Для удару прямокутної форми:

$$K_y = \begin{cases} 2, & \text{при } \omega_0 t_y \geq \pi; \\ 2 \sin \frac{\omega_0 t_y}{2}, & \text{при } \omega_0 t_y < \pi. \end{cases} \quad (2.58)$$

Параметри віброізолятора повинні бути підібрані так, щоб коефіцієнт динамічності при ударі був менше одиниці. З (2.58) випливає, що ця умова забезпечується при $\omega_0 t_y < \frac{\pi}{3}$, тобто власну частоту ω_0 для зменшення сили Q_{\max} треба зменшувати, як і при дії миттєвого імпульсу.

На рис. 2.14, а показані графіки сил F (чорна пряма) і Q (сіра крива) для випадку, коли $\omega_0 t_y \geq \pi$ (тривалий удар) і максимум сили пружності досягається при $\omega_0 t_y = \pi$. На рис. 2.14, б ті ж графіки показані для випадку, коли $\omega_0 t_y < \pi$ (короткий удар), але коефіцієнт динамічності все-таки залишається більше одиниці. Нарешті, на рис. 2.14, в показані графіки F і Q для випадку $\omega_0 t_y < \frac{\pi}{3}$ і коефіцієнт динамічності менше одиниці.

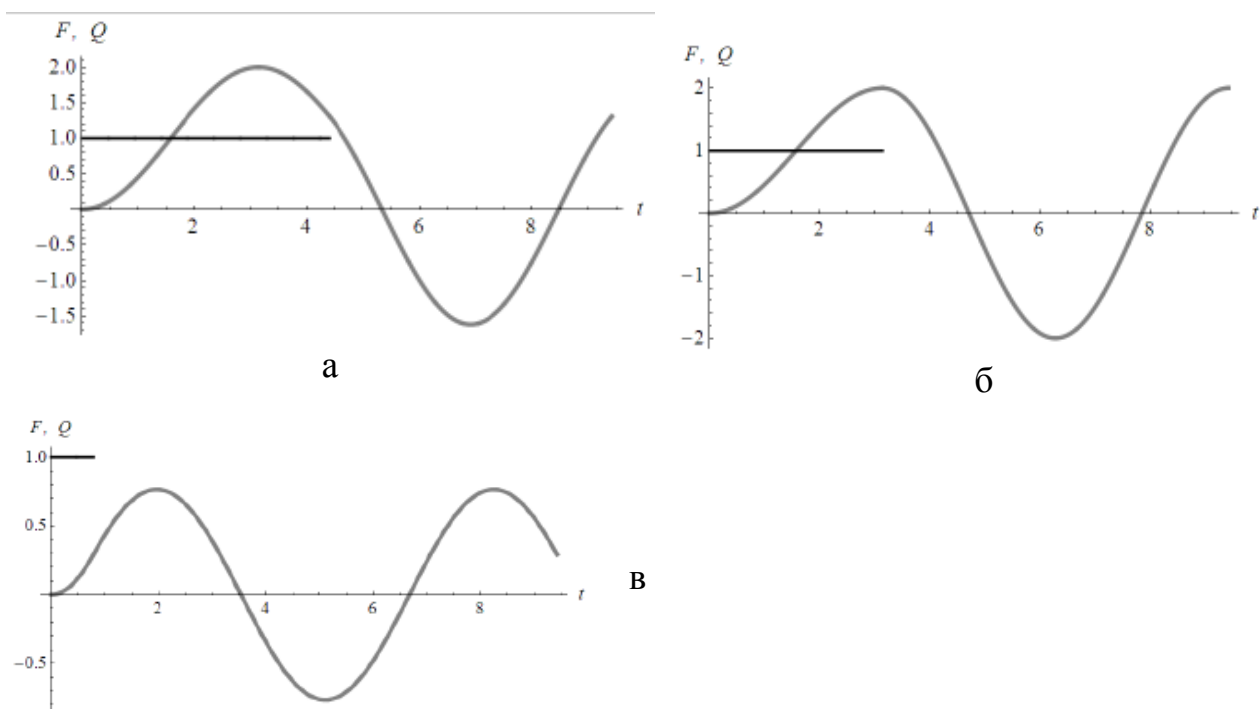


Рисунок 2.14 - Графіки прикладання імпульсної сили та сили, що передається на підлогу: а) при $\omega_0 t_y = \pi$; б) при $\omega_0 t_y < \pi$; в) при $\omega_0 t_y < \frac{\pi}{3}$

2.6 Захист від дії коливань

Розглянемо задачу дослідження режиму вимушених коливань механічного осцилятора з двома пружно-з'єднаними масами. Нехай розглядається коливання маси m під дією вимушеної сили $F(t) = F_{\max} \sin(\omega t)$ (рис. 2.15).

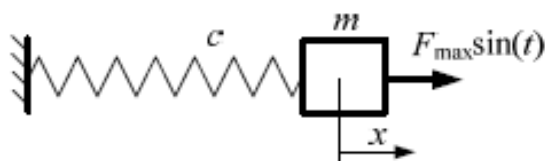


Рисунок 2.1 - Динамічна модель пружних коливань одномасової системи

Неважко показати, що математична модель руху маси m без врахування впливу тертя являє собою диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} + cx = F_{\max} \sin(\omega t), \quad (2.59)$$

де x - координата маси m ;

c – коефіцієнт жорсткості пружного елемента;

F_{\max} – амплітуда вимушеної сили, яка збуджується з частотою ω .

Зазначимо, що рівняння (2.59) можна отримати з відомого рівняння (2.8), якщо покласти $k=0$, тобто розглядувана динамічна система не враховує дисипацію енергії під час коливань.

Для усталеного режиму коливань розв'язок рівняння (2.59) має вигляд:

$$x = \frac{F_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t), \quad (2.60)$$

де ω_0 - власна частота коливань одномасового осцилятора ($\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$). Із залежності (2.60) знаходимо, що амплітуда коливань визначається із співвідношення:

$$x_{\max} = \frac{F_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.61)$$

Тепер розглянемо, як впливає на процес коливань маси m приєднання до неї іншої маси m_1 через пружний елемент із жорсткістю c_1 (рис. 2.16).

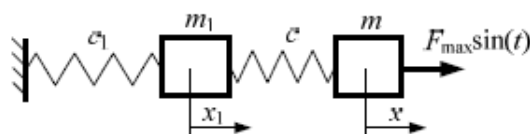


Рисунок 2.16 - Динамічна модель пружних коливань двомасової системи

Диференціальні рівняння коливань цієї системи без урахування сили тертя можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c(x - x_1) = F_{\max} \sin(\omega t); \\ m_1\ddot{x}_1 + c(x - x_1) + cx_1 = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо амплітуди сталих коливань для кожної з мас:

для маси m

$$x_{\max.2mac} = \frac{F_{\max}}{m \left| \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega^2 c_1}{\omega_{10}^2 - \omega_0^2} \right|} \quad (2.63)$$

для маси m_1

$$x_{1\max.2mac} = \frac{F_{\max}}{m \left| (\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_{10}^2 - \omega^2) \frac{m}{c_1} - \omega^2 \right|} \quad (2.64)$$

де ω_{10} - власна частота коливань приєднаного одномасового осцилятора

$$\left(\omega_{10} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \right).$$

Порівнюючи значення амплітуд коливань $x_{\max.2mac}$ та $x_{1\max.2mac}$ (до і після приєднання маси m_1), можна показати, що при виборі певних значень параметрів c_1 і m_1 приєднаної маси можна добитися значного зменшення амплітуди $x_{\max.2mac}$.

Знайдемо умову, при якій $x_{\max.2mac} < x_{\max}$, тобто в результаті приєднання маси m_1 , амплітуда коливань маси m зменшиться. Ця умова запишеться у вигляді:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_{10}^2 - \omega_0^2) < 0. \quad (2.65)$$

Умову (2.65) отримано в результаті аналізу залежностей (2.61) і (2.63).

Нерівність (2.65) означає, якщо власна частота ω_0 початкового (одномасового) осцилятора більша вимушеної частоти, то власна частота ω_{10} приєданого осцилятора повинна бути менша ніж ω і навпаки. Більше того, амплітуда $x_{\max.2mac}$ може бути шляхом відповідного підбору значень c_1 і m_1 як завгодно зменшена, а при $\omega_{10} - \omega \rightarrow 0$ вона прямує до нуля.

Таким чином, приходимо до висновку, який на перший погляд зовсім неочевидний і навіть може бути сприйнятий як парадоксальний: при певних співвідношеннях параметрів приєданого осцилятора (його власна частота повинна дорівнювати частоті ω) маса, до якої прикладена вимушена сила, залишається в спокої, а розкачується інша маса, до якої сила безпосередньо не прикладена. Аналогічний висновок можна отримати й для осцилятора з демпфуванням, однак умова, при якій $x_{\max.2mac} < x_{\max}$, буде знаходитися з моделі процесу з урахуванням впливу тертя.

Цей результат підказує ідею конструкції пристроїв для гасіння вимушених коливань (динамічних погашувачів коливань), які базуються на пружному приєднанні до коливальної системи допоміжних мас, що сприймають розкачування на себе. Галузь застосування таких пристроїв досить широка – це машини, в яких необхідно усунути шкідливі коливання. Однак приєднана маса m_1 не повинна бути досить малою, бо із залежності (2.78) для амплітуди її коливання $x_{1\max.2mac}$ випливає, що при

$\omega_{10} = \omega$ величина $x_{1\max.2mac} = \frac{F_{\max}}{m_1 \omega^2}$ буде значно зростати при малих m_1 .

Крім того, коливання мас m і m_1 обмежені розмірами конструкції.

2.7 Питання та завдання для самоперевірки

- 1 За якими показниками класифікують механічні коливання?
- 2 Який метод дає змогу аналізувати періодичні негармонічні коливання?
- 3 Що таке фазовий портрет динамічної системи та які переваги під час динамічного аналізу він дає?
- 4 Що таке особливі точки фазової траєкторії?
- 5 Які переваги дає використання некласичного фазового портрету динамічної системи у тривимірному просторі?
- 6 Що таке сепаратриса?
- 7 Побудуйте фазові траєкторії для таких математичних моделей

($m=150$ кг; $a=90$ Нс/м; $c=100$ Н/м; $A=30$ Н; $x(0)=1$ м; $\dot{x}(0)=-1,2$ м/с):

- 1) $m\ddot{x} + a\dot{x} + cx = 0$; 2) $m\ddot{x} + a\dot{x}^2 + cx = 0$; 3) $m\ddot{x} + a\dot{x} + cx^3 = 0$;
4) $m\ddot{x} + t\dot{x} + cx = 0$; 5) $m\ddot{x} + a\dot{x} + c \cdot \sin(x) = 0$; 6) $m\ddot{x} + a\dot{x} + cx = A \sin\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right)$;
7) $m\ddot{x} + a\dot{x} + cx = A \operatorname{sign}\left[\sin\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right)\right]$; 8) $m\ddot{x} + a\dot{x} + cx = A \sin\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right) + A \sin\left(20t\sqrt{\frac{c}{m}}\right)$.

8 Прокоментуйте характер зміни коефіцієнта динамічності в залежності від співвідношення частоти зовнішнього періодичного збурення та частоти власних коливань динамічної системи.

9 Що таке граничний цикл коливань?

10 Розрахуйте критичну швидкість обертання гнучкого вала для таких параметрів системи:

- 1) $m=10$ кг, $\delta_1=0,01$ м; 2) $m=20$ кг, $\delta_1=0,02$ м; 3) $m=100$ кг, $\delta_1=0,1$ м;
4) $m=1000$ кг, $\delta_1=0,01$ м; 5) $m=510$ кг, $\delta_1=0,015$ м; 6) $m=320$ кг, $\delta_1=0,05$ м;
7) $m=2100$ кг, $\delta_1=0,01$ м; 8) $m=1000$ кг, $\delta_1=0,001$ м

11 Як називається вал, що працює при кутовій швидкості більшій, ніж критична?

12 Запишіть та прокоментуйте рівняння, що описує рух пружної муфти.

13 Які коливання виникають у пружній лінійній муфті при розгоні двигуна?

14 Які коливання муфти залишаються після закінчення перехідного процесу розгону системи „двигун-робоча машина”.

15 Який метод дає можливість виконати лінеаризацію нелінійних характеристик пружних муфт?

16 Що таке зрив амплітуди при нелінійних коливаннях?

17 Що таке тривалість та форма удару?

18 При якій тривалості удару у коливній системі досягається максимальне значення сили, яка передається на підлогу?

19 Яка умова повинна виконуватись для того, щоб досягти погашення небажаних коливань у коливній системі, яка зображена на рис. 2.16?

РОЗДІЛ 3

ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ МАШИН

3.1 Перехідні процеси у машині при ідеальній характеристиці двигуна

3.1.1 Виведення рівнянь руху

Перехідні процеси в машині із пружним передавальним механізмом будемо досліджувати при наступних припущеннях:

- закон руху ротора двигуна вважаємо заданим, що відповідає ідеальній механічній характеристиці двигуна;
- приведений момент інерції вважаємо постійним.

При цих припущеннях приходимо до динамічної моделі агрегату, яка показана на рис. 3.1.

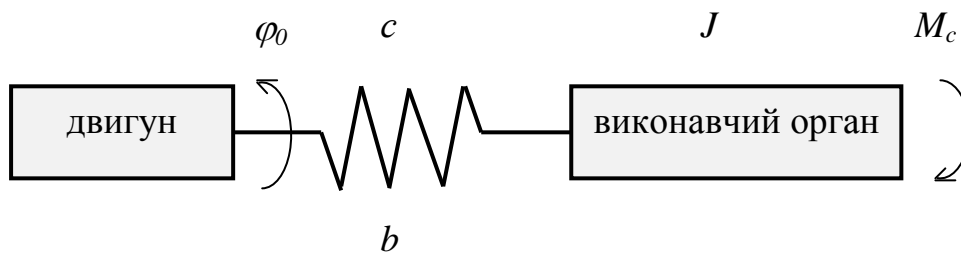


Рисунок 3.1- Динамічна модель машини для дослідження перехідних процесів

Рівняння руху системи може бути записане у вигляді:

$$J\ddot{\varphi}_1 = -b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) - c(\varphi_1 - \varphi_0) + M_c(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \quad (3.1)$$

де J – момент інерції робочої машини;

b – коефіцієнт демпфування передавального механізму;

c – жорсткість передавального механізму;

φ_0 та φ_1 – кутові координати руху вала двигуна та виконавчого органу відповідно.

Введемо нову функцію $\theta = \varphi_1 - \varphi_0$. Тоді рівняння (3.1) запишеться у формі:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta = -J\ddot{\varphi}_0 + M_c(\varphi_0(t) + \theta, \dot{\varphi}_0(t) + \dot{\theta}). \quad (3.2)$$

Розглянемо спочатку перехідні процеси при відсутності сил опору, тобто при $M_c=0$. Рівняння руху в цьому випадку

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + k^2\theta = -\ddot{\varphi}_0, \quad (3.3)$$

де $k^2 = \frac{c}{J}$, $2n = \frac{b}{J}$.

3.1.2 Вибір закону руху вихідної ланки двигуна

Закон зміни кутового прискорення ротора двигуна залежить від характеру

перехідного процесу. При розгоні машини закон руху ротора повинен задовольняти умовам:

$$\begin{cases} \varphi_0(0) = 0, & \dot{\varphi}_0(0) = 0; \\ \dot{\varphi}_0(t_p) = \omega_{ном}, \end{cases} \quad (3.4)$$

де $\omega_{ном}$ – кутова швидкість усталеного руху;

t_p – час розгону.

На рис. 3.2 показано два можливі варіанти закону зміни кутового прискорення, що задовольняють сформульованим умовам. Закон, показаний на рис. 3.2, а, відповідає розгону ротора з постійним кутовим прискоренням

$$\ddot{\varphi}_0(t_p) = \varepsilon = \frac{\omega_{уст}}{t_p}. \text{ При синусоїдальному законі } \ddot{\varphi}_0(t_p) = \varepsilon \cdot \sin \frac{\pi t}{t_p} \text{ (рис. 3.2, б)}$$

максимальне кутове прискорення визначається з умови:

$$\int_0^{t_p} \varepsilon \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) dt = -\frac{t_p}{\pi} \varepsilon \cdot \cos\left(\frac{\pi}{t_p}\right) t \Big|_{t=0}^{t=t_p} = \frac{2t_p \varepsilon}{\pi} = \omega_{уст}. \quad (3.5)$$

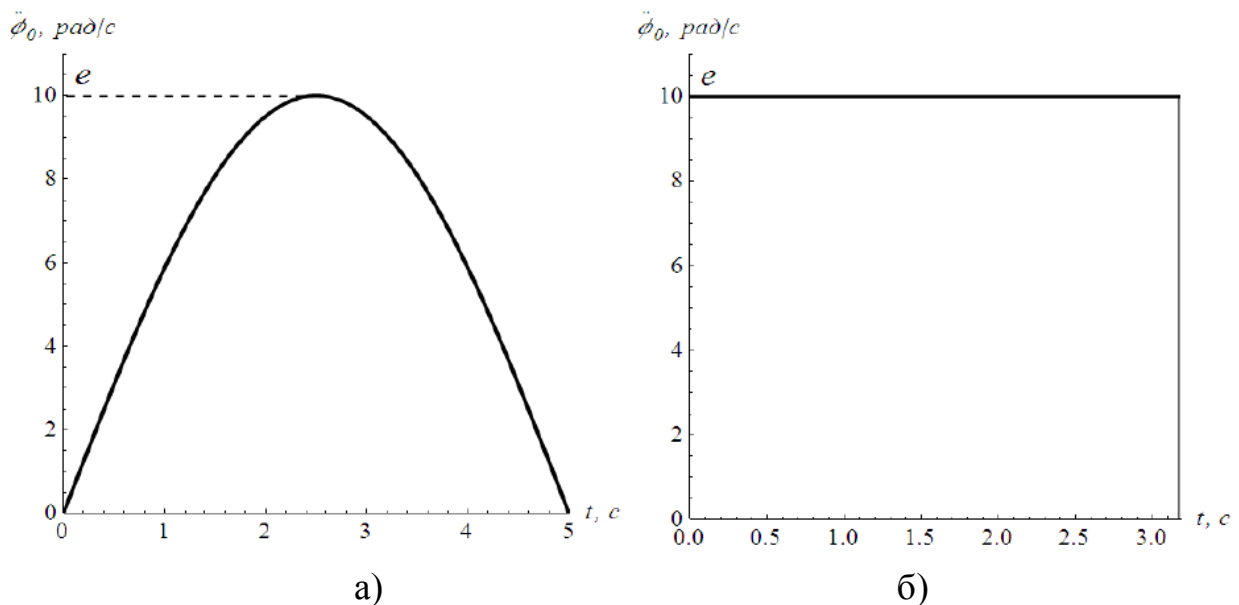


Рисунок 3.2 - Закони зміни кутового прискорення при розгоні:
а) синусоїдальний (половина періоду); б) постійний

У випадку позиціонування закон руху ротора повинен задовольняти умовам:

$$\begin{cases} \varphi_0(0) = 0, & \dot{\varphi}_0(0) = 0; \\ \dot{\varphi}_0(t_n) = \omega_{кин}, \end{cases} \quad (3.6)$$

де $\varphi_{кин}$ – кут повороту ротора за час позиціонування;

t_n – час позиціонування.

Два можливі закони зміни кутового $\ddot{\varphi}_0$ показані на рис. 3.2.

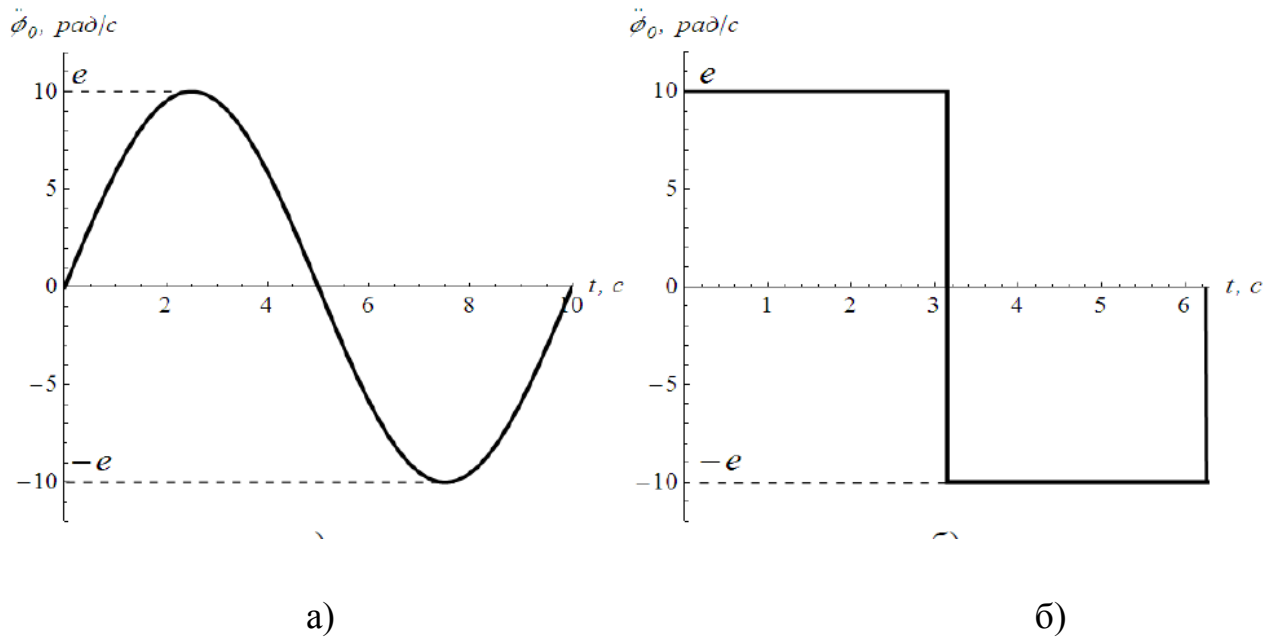


Рисунок 3.3 - Закони зміни кутового прискорення при позиціюванні:
а) синусоїдальний; б) релейний

Для першого закону (рис. 3.3, а) очевидно, що $\varepsilon = \frac{4\varphi_{кин}}{t_n^2}$, а для другого,

синусоїдального закону (рис. 3.3, б) $\ddot{\varphi}_0(t_p) = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi t}{t_n}\right)$. Тоді:

$$\dot{\varphi}_0(t) = \int_0^{t_p} \ddot{\varphi}_0(t) dt = -\frac{\varepsilon t_n}{2\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{t_n} t\right)\right); \quad (3.7)$$

$$\varphi_0(t) = \int_0^{t_p} \dot{\varphi}_0(t) dt = -\frac{\varepsilon t_n}{2\pi} \left(t - \frac{t_n}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{t_n} t\right)\right). \quad (3.8)$$

Звідси $\varphi_{кин} = \frac{\varepsilon t_n^2}{2\pi}$, $\varepsilon = \frac{2\pi\varphi_{кин}}{t_n^2}$.

3.1.3 Розв'язок рівняння руху

Перейдемо тепер до інтегрування рівняння (3.3). Його розв'язок, що відповідає початковим умовам $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, може бути представлений, як відомо, у вигляді інтеграла Дюамеля [18]:

$$\theta(t) = -\int_0^t \exp[-n(t-\psi)] \sin(k_1)(t-\tau) \ddot{\varphi}_0(\tau) d\tau, \quad (3.9)$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Однак дослідження розв'язку, представленого у вигляді (3.9),

виявляється складним. Спробуємо шукати розв'язок $\theta(t)$ у вигляді:

$$\theta = \frac{-\ddot{\varphi}_0(t)}{k^2} + \eta, \quad (3.10)$$

де η – нова невідома функція. Підставляючи (3.10) в (3.3), маємо:

$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\eta} + k^2\eta = \frac{\varphi_0^{IV}(t) + 2n\ddot{\varphi}_0(t)}{k^2}. \quad (3.11)$$

Зміст перетворення (3.10) полягає у виділенні „квазістатичної” компоненти розв'язку. Справа в тому, що час перехідного процесу звичайно суттєво перевищує період вільних коливань $2\pi k_1$, тому прискорення $\ddot{\varphi}_0(t)$, що стоїть в правій частині рівняння (3.3), „повільно” змінюється і його вплив на коливальну систему носить квазістатичний характер.

Розв'язок рівняння (3.11) потрібно шукати при початкових умовах:

$$\begin{cases} \eta(0) = \theta(0) + \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2} = \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2}; \\ \dot{\eta}(0) = \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2}, \end{cases} \quad (3.13)$$

що впливає із (3.10) при початкових $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

Знайдемо розв'язок рівняння (3.11) у випадку розгону машини зі сталим кутовим прискоренням ротора двигуна. При цьому $\ddot{\varphi}_0(t) = \varepsilon = const$, $\dot{\varphi}_0(t) = 0$ і права частина рівняння (3.11) перетворюється в нуль. Загальний розв'язок однорідного рівняння, яке при цьому отримане, записується у вигляді:

$$\begin{cases} \eta = A \exp(-nt) \sin(k_1 t + \alpha); \\ \dot{\eta} = A \exp(-nt) [-n \sin(k_1 t + \alpha) + k_1 \cos(k_1 t + \alpha)], \end{cases} \quad (3.14)$$

де A і α – деякі коефіцієнти, що повинні визначатися з початкових умов

$$\eta(0) = \frac{\varepsilon}{k^2}, \quad \dot{\eta}(0) = 0.$$

Підставляючи ці умови в (3.14), одержуємо:

$$\begin{cases} A = \frac{\varepsilon}{kk_1}; \\ \alpha = \arctg \frac{k_1}{n}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Якщо підставити знайдений розв'язок в (3.10), то при $0 < t < t_p$ будемо мати:

$$\theta(t) = -\frac{\varepsilon}{k^2} + \frac{\varepsilon}{kk_1} \sin(k_1 t + \alpha) \exp(-nt). \quad (3.16)$$

Таким чином, розгін супроводжується загасаючим коливним процесом. Швидкість загасання коливань визначається множителем $\exp(-nt)$. Легко

бачити, що зменшення амплітуди в 20 разів відбувається за час $t_* = \frac{3}{n}$ (оскільки $\ln(0,05) = -3$). Звичайно в механічній системі відношення $\frac{n}{k_1}$ лежить у межах 0,03-0,1 і час загасання $t_* = \frac{30 \dots 100}{k_1}$, що відповідає 16-5 періодам вільних коливань.

Коливний процес у системі не закінчується після завершення розгону. Стрибок кутового прискорення при $t=t_p$ знову збуджує коливання. Якщо вважати, що до моменту $t=t_p$ вільні коливання, викликані стрибком прискорення при $t=0$, встигнули загаснути, то наприкінці розгону маємо $\theta(t_p) = \frac{-\varepsilon}{k^2}$, $\dot{\theta}(t_p) = 0$ оскільки після закінчення розгону $\ddot{\varphi}_0(t_p) = 0$, можна безпосередньо визначити $\theta(t)$, інтегруючи рівняння (3.3). Отриманий при цьому розв'язок буде лише знаком і початком відліку часу відрізнятися від (3.16). Таким чином, при $t < t_p$ можемо отримати:

$$\theta(t) = -\frac{\varepsilon}{kk_1} \sin(k_1(t - t_p) + \alpha) \exp(-n(t - t_p)) \quad (3.17)$$

акон зміни деформації $\theta(t)$ у процесі розгону показаний на рис. 3.3, а.

Дослідимо тепер розгін при синусоїдальному законі зміни прискорення, показаному на рис. 3.4, а. Визначаючи праву частину рівняння (3.11), маємо:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_0(t) = \frac{\varepsilon \pi}{t_p} \cos \frac{\pi t}{t_p}; \\ \varphi_0^{IV}(t) = -\frac{\varepsilon \pi^2}{t_p^2} \sin \frac{\pi t}{t_p}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Рівняння для η набуває наступного виду:

$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\eta} + k^2\eta = \frac{\varepsilon}{k^2 t_p} \left(-\frac{\pi}{t_p^2} \sin \frac{\pi t}{t_p} + 2n\pi \cos \frac{\pi t}{t_p} \right). \quad (3.19)$$

Як ми вже відзначали, час розгону t_p звичайно значно перевершує період вільних коливань $\frac{2\pi}{k}$. Вважаючи, що $t_p \geq \frac{20\pi}{k}$, тоді маємо:

$$\left(\frac{\pi}{kt_p} \right)^2 \leq 0,0025; \quad \frac{\pi}{kt_p} \leq 0,05. \quad (3.20)$$

Оскільки в механічній системі зі слабкою дисипацією звичайно $\frac{2n}{k} \leq 0,2$ легко бачити, що амплітуди прискорень (права частина виразу (3.19)) в 100...400 раз менше, ніж ε . Звідси випливає, що квазістатична добавка, виклика на „дією”

правої частини, буде настільки малою, що нею можна знехтувати, а η шукати з однорідного рівняння:

$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\eta} + k^2\eta = 0. \quad (3.21)$$

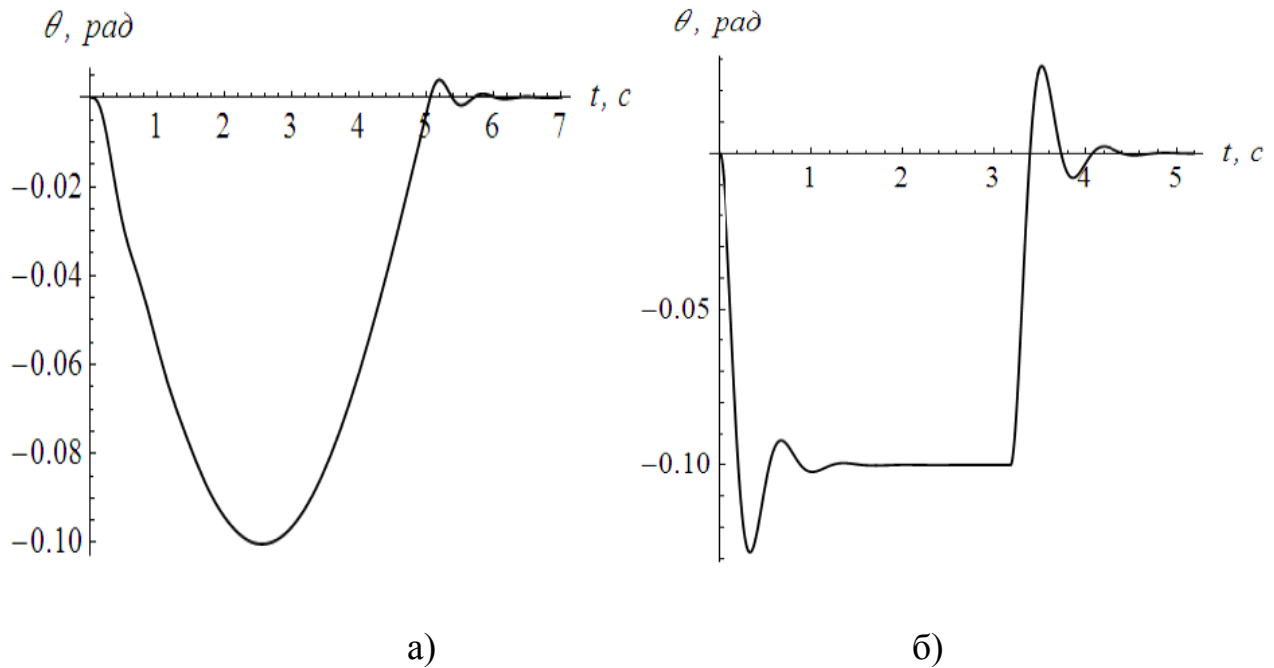


Рисунок 3.4 - Коливання, що виникають в машині при розгоні для законів $\ddot{\varphi}_0(t)$:
а) синусоїдального (половина періоду коливань); б) релейного

Початкові умови (3.13) у цьому випадку такі:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}(0) = \frac{\varphi_0(0)}{k^2} = 0; \\ \dot{\eta}(0) = -\frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2} = \frac{\pi\varepsilon}{k^2 t_p}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Відшукуючи розв'язок цього рівняння у вигляді (3.14), отримаємо:

$$\eta(t) = \frac{\pi\varepsilon}{k^2 k_2 t_p} \sin(k_1 t) \exp(-nt) \quad (3.33)$$

і отже

$$\theta = -\frac{\varepsilon}{k^2} \sin\left(\frac{k_1 t}{t_p}\right) + \frac{\pi\varepsilon}{k^2 k_2 t_p} \sin(k_1 t) \exp(-nt). \quad (3.34)$$

Порівнюючи вирази (3.17) та (3.34) і враховуючи, що в другому випадку значення ε в $\pi/2$ раз більше, ніж у першому, зауважимо, що амплітуда коливань із частотою k_1 при синусоїдальному законі зміни прискорення в $\frac{2kt_p}{\pi^2} = 13$ раз менше, ніж при постійному прискоренні. Це – наслідок відсутності стрибка прискорення при $t=0$. Коливання такої ж малої амплітуди, викликані стрибком

третьої похідної кута повороту ротора, виникнуть і після закінчення процесу розгону (рис. 3.4, б).

Аналогічно можна визначити коливання, що виникають у системі при позиціонуванні. У цьому випадку при релейному законі зміни $\ddot{\varphi}_0(t)$ будуть виникати загасаючі коливання з частотою k_1 у початковий момент, у момент $t = \frac{t_n}{2}$ (при стрибку прискорення від ε до $-\varepsilon$) і після закінчення процесу позиціонування. При синусоїдальному законі зміни прискорення коливання, що виникають на початку й кінці процесу, мають суттєво меншу амплітуду.

Таким чином, вибір програмного закону руху, що відпрацьовується двигуном, може досить суттєво впливати на точність позиціонування.

3.1.4 Дослідження перехідного процесу при дії сил опору

Припустимо тепер, що перехідний процес відбувається при дії на систему моменту сил опору, що лінійно залежить від кутової швидкості робочого органу:

$$M_c = -M_0 - v\dot{\varphi}_1, \quad (3.35)$$

де M_0 - момент сухого тертя (початковий момент опору);

v - деякий коефіцієнт;

$\dot{\varphi}_1$ - кутова швидкість руху робочого органу машини.

Підставляючи (3.35) в (3.2), одержуємо:

$$J\ddot{\theta} + (b + v)\dot{\theta} + c\theta = -J\ddot{\varphi}_0 - M_0 - v\dot{\varphi}_1, \quad (3.36)$$

або

$$\ddot{\theta} + (n + n_1)\dot{\theta} + k^2\theta = -\ddot{\varphi}_0(t) - 2n_1\dot{\varphi}_0(t) - \frac{M_0}{J}, \quad (3.37)$$

де $2n_1 = \frac{v}{J}$.

В цьому випадку також можна виділити повільну квазістатичну компоненту в процесі $\theta(t)$, поклавши:

$$\theta = -\frac{\ddot{\varphi}_0(t)}{k^2} - \frac{\dot{\varphi}_0(t)}{v/c} - \frac{M_0}{c} + (t) = \theta_*(t) + \eta, \quad (3.38)$$

де $\theta_*(t)$ - квазістатична складова.

Для змінної η одержуємо рівняння:

$$\ddot{\eta} + 2(n + n_1)\dot{\eta} + k^2\eta = k^{-2} \left[\overset{IV}{\varphi}_0 + 2(n + 2n_1)\ddot{\varphi}_0 + 4(n + 2n_1)n_1\dot{\varphi}_0 \right]. \quad (3.39)$$

При малих значеннях виразів $\frac{n}{k}$ та $\frac{n_1}{k}$ частинний розв'язок цього неоднорідного рівняння дає незначну добавку до квазістатичної компоненти й тому в більшості випадків може не враховуватися. Знайдемо загальний

розв'язок однорідного рівняння:

$$\ddot{\eta} + 2(n + n_1)\dot{\eta} + k^2\eta = 0, \quad (3.40)$$

що визначає високочастотні коливання.

Розглянемо випадок розгону машини при синусоїдальному законі зміни $\dot{\varphi}_0$. Початкові умови визначаємо з (3.38). Враховуючи, що $\dot{\varphi}_0(0) = \ddot{\varphi}_0(0) = 0$, маємо:

$$\begin{cases} \eta(0) = -\theta_*(0) = \frac{M_0}{c}; \\ \dot{\eta}(0) = -\dot{\theta}_*(0) = \frac{\pi\varepsilon}{k_2 t_p}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$\begin{cases} \eta = A \exp(-(n + n_1)t) \sin(k_* t + \alpha); \\ \dot{\eta} = A \exp(-(n + n_1)t) [-(n + n_1) \sin(k_* t + \alpha) + k_* \cos(k_* t + \alpha)], \end{cases} \quad (3.42)$$

де $k_* = \sqrt{k^2 - (n + n_1)^2}$.

Підставляючи цей розв'язок в (3.41) отримаємо:

$$\begin{cases} A \sin(\alpha) = \frac{M_0}{c}; \\ -(n + n_1)A \sin(\alpha) + k_* A \cos(\alpha) = \frac{\pi\varepsilon}{k^2 t_p}, \end{cases} \quad (3.43)$$

звідки

$$\begin{cases} A = \sqrt{\left(\frac{M_0}{c}\right)^2 (1 + (n + n_1)^2) + 2 \frac{\pi\varepsilon M_0}{k^2 t_p c} + \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{k^4 t_p^2}}; \\ \alpha = \arctg \left(\frac{M_0}{c} \left(\frac{\pi\varepsilon}{k^2 t_p} + (n + n_1) \frac{M_0}{c} \right)^{-1} \right). \end{cases} \quad (3.44)$$

На відміну від раніше розглянутого розгону при відсутності сили опору, тут амплітуда коливань зростає приблизно на величину M_0/c . Ця добавка викликана тим, що в момент $t=0$ пружний елемент є недеформованим і повинен у процесі розгону одержати статичну деформацію, рівну M_0/c .

3.1.5 Методи зменшення динамічної похибки

Звернувшись знову до формул (3.17) та (3.34), зауважимо, що амплітуда коливної компоненти динамічної похибки пропорційна величині $\frac{\varepsilon}{kk_1}$. При слабкій дисипації можна вважати, що $k \approx k_1$ і тоді вираз для амплітуди представляється у такому вигляді:

$$A = \frac{\xi\varepsilon}{k^2}, \quad (3.45)$$

де ξ – коефіцієнт, величина якого залежить від форми закону програмного прискорення.

У свою чергу, для ε справедливі співвідношення:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\beta\omega_{ном}}{t_p}, & \text{при розгоні;} \\ \frac{\gamma\varphi_{кін}}{t_n^2}, & \text{при позиціюванні,} \end{cases} \quad (3.46)$$

де β, γ – коефіцієнти, обумовлені видом закону зміни програмного прискорення.

З (3.45) і (3.46) одержуємо у випадку розгону:

$$A = \frac{\xi\beta\omega_{ном}}{k^2 t_p}, \quad (3.47)$$

для позиціонування:

$$A = \frac{\xi\gamma\omega_{кін}}{(k t_n)^2}. \quad (3.48)$$

Із формул (3.47) та (3.48) видно, що існують три способи зменшення динамічної похибки при перехідному процесі [4]:

- зміна закону програмного прискорення (бажано вибирати плавні закони прискорень, без стрибків);
- збільшення часу перехідного процесу (чим більше t_p або t_n , тем менше похибка; таким чином, збільшення продуктивності машини за рахунок зменшення часу перехідних процесів приводить до збільшення динамічних похибок);
- збільшення власної частоти системи (цей шлях є найбільш раціональним; щоб збільшити власну частоту, потрібно або збільшити жорсткість передавального механізму, або зменшити приведений момент інерції рухомих частин системи).

3.2 Аналіз режиму пуску механізмів представлених одномасовою моделлю

Розглянемо процес пуску на прикладі механізму пересування вантажопідйомного крана. Прийmemo одномасову динамічну модель механізму, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m\ddot{x} = F - W, \quad (3.49)$$

де m – приведена до поступального руху маса кранового механізму;

x – узагальнена координата кранового механізму;

F – сила, що створюється приводним двигуном (рушійна сила);

W – сила опору переміщенню маси m (у тому числі технологічного характеру), яка у даному дослідженні є незмінною (наприклад, у випадку

підйому вантажу вантажопідйомним механізмом це сила опору переміщенню, яка рівна вазі вантажу). Точка над символом означає диференціювання за часом.

Розглянемо випадок, коли приводним двигуном механізму є асинхронний із короткозамкненим ротором. Для отримання аналітичного розв'язку задачі апроксимуємо механічну характеристику прямою, яка проходить через дві точки: точку, яка відповідає пусковому моменту (точка 1) та точку із нульовим моментом (точка 3) (рис. 3.4). На рис. 3.4 показані вказані точки та точка 2 із координатами, які відповідають номінальному моменту та номінальній кутовій швидкості двигуна. Дана апроксимація не досить коректно відображає реальну статичну механічну характеристику двигуна, тому її можна використовувати лише у першому наближенні. У приведених розрахунках використані дані для двигуна МТКФ011-6: $P_{ном} = 1,7 \text{ кВт}$, $n_{ном} = 835 \text{ об/хв}$, $\frac{M_{пуск}}{M_{ном}} = \frac{M_{max}}{M_{ном}} = 2,3$ [19].

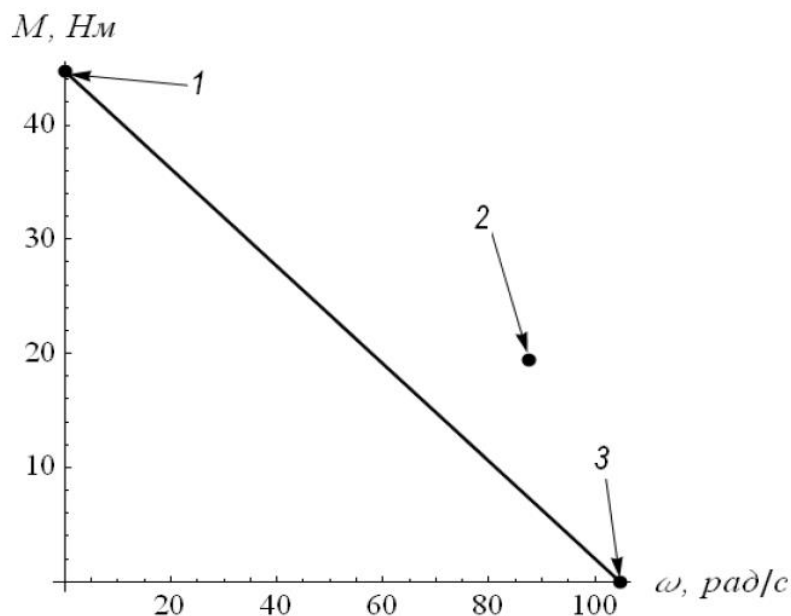


Рисунок 3.4 - Апроксимація механічної характеристики двигуна прямою

Підставляючи відповідні значення, можемо сформулювати задачу Коші - знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + \dot{x} \frac{M_{пуск} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} - \frac{M_{пуск} i \eta}{m r} + \frac{W}{m} = 0, \quad (3.50)$$

де ω_0 - швидкість ідеального холостого ходу електродвигуна; при початкових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Розв'язок даної задачі Коші представляється у такому вигляді:

$$x = \frac{\omega_0^2 m^2 r^4}{M_{\text{нук}}^2 i^4 \eta^2} \left(\frac{M_{\text{нук}} i \eta}{mr} - \frac{W}{m} \right) \left(e^{-t \left(\frac{M_{\text{нук}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} \right)} + t \frac{M_{\text{нук}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} - 1 \right). \quad (3.52)$$

Диференціюючи вираз за часом, отримаємо функцію швидкості системи:

$$\dot{x} = \left(\frac{r}{ri} - \frac{Wr^2}{i^2 \eta M_{\text{нук}}} \right) \left(1 - e^{-t \left(\frac{M_{\text{нук}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} \right)} \right). \quad (3.53)$$

Для знаходження тривалості розгону системи до деякої швидкості необхідно розв'язати наступне рівняння:

$$\dot{x} = v^* \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}, \quad (3.54)$$

де v^* – відносна швидкість усталеного руху.

Розв'язок рівняння (3.54) представляється таким чином:

$$t = \frac{\lg \frac{1}{1-v^*}}{M_{\text{нук}} i^2 \eta} m r^2 \omega_0. \quad (3.55)$$

Побудуємо графіки функцій (3.52), (3.53), які представлені на рис. 3.5 та рис. 3.6.

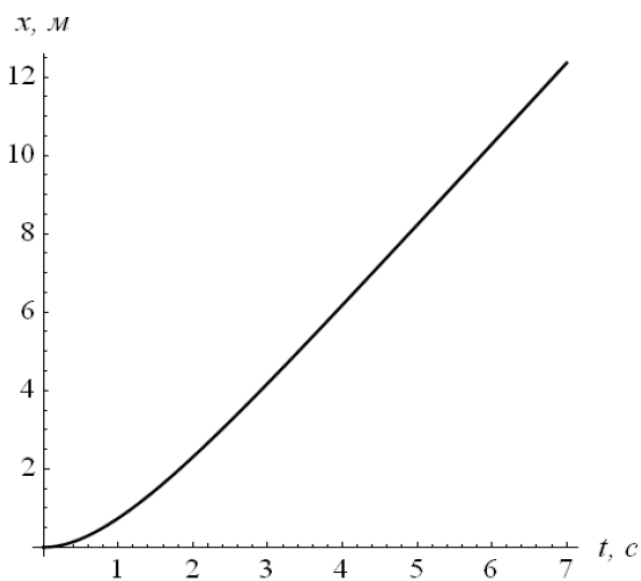


Рисунок 3.5 - Графік функції переміщення механізму

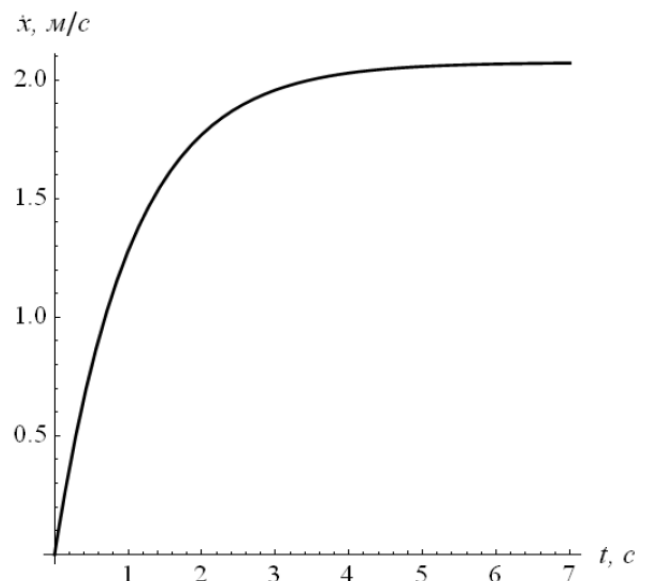


Рисунок 3.6 - Графік функції швидкості механізму

Крім того, приведемо графік функції прискорення механізму (рис. 3.7).

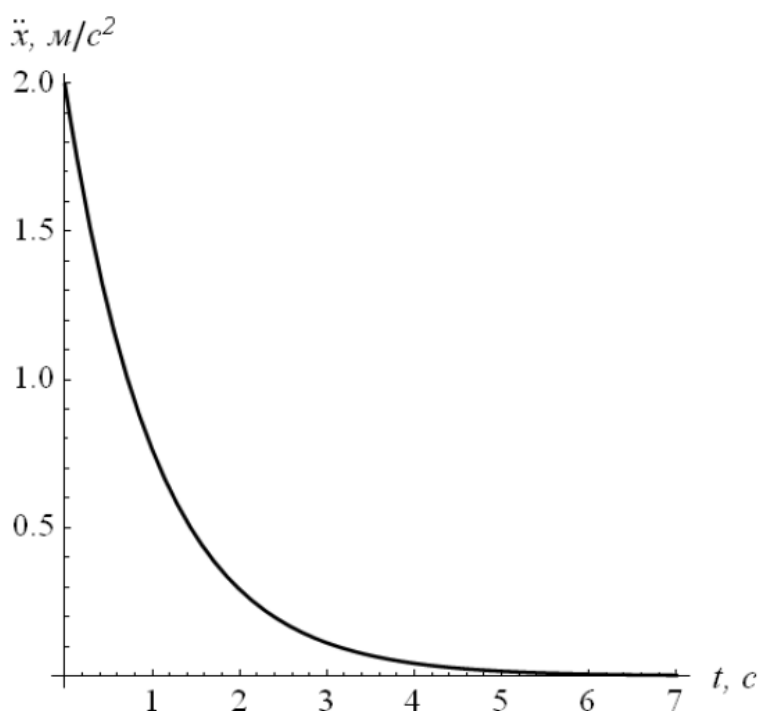


Рисунок 3.7 - Графік функції прискорення механізму

Для того, щоб врахувати всі заявлені виробником дані двигуна, використаємо апроксимацію його механічної характеристики у вигляді полінома:

$$M = \sum_{i=0}^n A_i \omega^i, \quad (3.56)$$

де A_i – невідомі коефіцієнти, які необхідно певним чином підібрати;

ω – кутова швидкість електродвигуна;

n – степінь полінома. Поліном (3.56) повинен задовольняти наступні умови:

$$\begin{cases} M(0) = M_{\text{пуск}}; \\ \frac{\partial M}{\partial \omega}(0) = 0; \\ M(\omega_{\text{ном}}) = M_{\text{ном}}; \\ M(\omega_0) = 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

де $\omega_{\text{ном}}$ – номінальна швидкість руху електроприводу;

$M_{\text{ном}}$ – номінальний момент на валу двигуна.

Оскільки умов чотири, то $n=3$. Із системи (3.57) можна знайти невідомі коефіцієнти A_i . Для цього сформуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} A_0 = M_{\text{пуск}}; \\ A_1 = 0; \\ A_0 + A_1 \omega_{\text{ном}} + A_2 \omega_{\text{ном}}^2 + A_3 \omega_{\text{ном}}^3 = M_{\text{ном}}; \\ A_0 + A_1 \omega_0 + A_2 \omega_0^2 + A_3 \omega_0^3 = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Запишемо вирази для коефіцієнтів A_2 та A_3 :

$$A_2 = \frac{(M_{ном} - M_{пуск})\omega_0^3 + M_{пуск}\omega_{ном}^3}{\omega_0^2(\omega_0 - \omega_{ном})\omega_{ном}^2}; \quad (3.59)$$

$$A_3 = \frac{-M_{ном}\omega_0^2 + M_{пуск}(\omega_0^2 - \omega_{ном}^2)}{\omega_0^2(\omega_0 - \omega_{ном})\omega_{ном}^2}. \quad (3.60)$$

Підставляючи знайдені залежності у формулу (3.56), отримаємо вираз, який описує статичну механічну характеристику асинхронного електродвигуна. Побудуємо графік цієї характеристики (рис. 3.8).

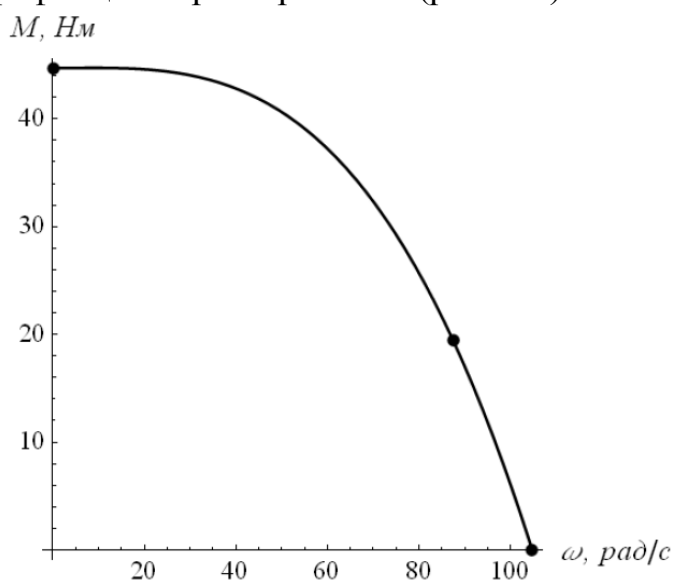


Рисунок 3.8. Графік апроксимованої механічної характеристики асинхронного двигуна МТКФ011-6

Враховуючи вирази (3.59)-(3.60), рівняння руху (3.49) можна переписати таким чином:

$$\ddot{x} = \frac{F - W}{m} = N_3\dot{x}^3 + N_2\dot{x}^2 + N_1\dot{x} + N_0, \quad (3.61)$$

де N_3, N_2, N_1, N_0 – певні коефіцієнти, які визначаються із наступних виразів:

$$N_3 = \frac{A_3 i^4 \eta}{mr^4}, \quad N_2 = \frac{A_2 i^3 \eta}{mr^3}, \quad N_1 = \frac{A_1 i^2 \eta}{mr^2}, \quad N_0 = \frac{A_0 i \eta}{mr} - \frac{W}{m}.$$

Вводячи позначення: $\dot{x} = v$, рівняння (3.61) запишемо таким чином:

$$\dot{v} = N_3 v^3 + N_2 v^2 + N_0. \quad (3.62)$$

Рівняння (3.62) є нелінійним диференціальним рівнянням Абеля зі сталими коефіцієнтними [20]. Для знаходження розв'язку рівняння (3.62) необхідно знайти розв'язки кубічного алгебраїчного рівняння:

$$v^3 + \frac{N_2}{N_3}v^2 + \frac{N_0}{N_3} = 0. \quad (3.63)$$

Для визначення коренів рівняння (3.63) його необхідно звести до „неповного” виду [21]. Це робиться шляхом введення заміни: $\gamma = v + \frac{N_2}{3N_3}$. У

результаті рівняння (3.63) представляється у такому виді:

$$\gamma^3 + \gamma \frac{N_2^2}{3N_3^2} + \left(\frac{2N_2^3}{27N_3^3} + \frac{N_0}{N_3} \right) = 0. \quad (3.64)$$

Корені „неповного” кубічного рівняння (3.64) знаходяться за такими виразами:

$$\begin{cases} \gamma_1 = A + B; \\ \gamma_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad i^2 = -1, \end{cases} \quad (3.65)$$

де $A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}}$, $B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}}$, $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2$, $p = \frac{N_2^2}{3N_3^2}$, $q = \frac{2N_2^3}{27N_3^3} + \frac{N_0}{N_3}$.

Для подальшого аналізу необхідно встановити знак дискримінанта D .

Враховуючи введені вище позначення можемо записати вираз для дискримінанту:

$$D = \frac{r^6 \omega_{ном}^4 \omega_0^4 (rW - iM_{ном} \eta \lambda)^2 (\omega_0 - \omega_{ном})^2}{4iM_{ном}^2 \eta^2 (\omega_0^2 (\lambda - 1) - \lambda \omega_{ном}^2)^2}. \quad (3.66)$$

Аналіз виразу (3.66) показує, що завжди $D > 0$. Отже, рівняння (3.66) буде мати один дійсний корінь та два комплексно-спряжені.

Тепер можемо записати розв’язок рівняння (3.64) у неявному вигляді:

$$\int \frac{dv}{\left(v - \gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3}\right) \left(v - \gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3}\right) \left(v - \gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3}\right)} = tN_3 + \lg C_1, \quad (3.67)$$

де C_1 – постійна інтегрування.

Після інтегрування лівої частини виразу (3.67) його можна переписати у такому вигляді:

$$\lg \left(v - \gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3} \right)^{G_1} + \lg \left(v - \gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3} \right)^{G_2} + \lg \left(v - \gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3} \right)^{G_3} = tN_3 + \lg C_1, \quad (3.68)$$

де $G_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}$, $G_2 = \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}$,

$$G_3 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}.$$

Надалі необхідно знайти постійну інтегрування C_1 , яка входить у вираз

(3.68). Для цього потрібно задатись початковою умовою: $v(0) = 0$. Із врахуванням цієї умови можемо знайти вираз для постійної інтегрування C_1 :

$$C_1 = \left(-\gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_1} \left(-\gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_2} \left(-\gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_3}. \quad (3.69)$$

Таким чином, ми знайшли залежність $t = f(v)$. Цю залежність також можна трактувати як неявну залежність $v = f(t)$. Для знаходження явної залежності

$v = f(t)$ необхідно розв'язати рівняння (3.69), причому представляє інтерес саме аналітичний розв'язок, який знайти досить складно.

Можна шукати розв'язок рівняння (3.69) при відомих параметрах, які в нього входять. Але навіть при умові, що всі параметри відомі розв'язування рівняння (3.69) може бути досить складним. Звичайно використання наближених (наприклад, ітераційних) методів розв'язку дозволяє знаходити певні наближення до точного розв'язку. Це не універсальний результат, тому він не представляє інтересу з точки зору проведення загального аналізу процесу розгону механізму. Однак, для даних параметрів механізму можна отримати графічну залежність швидкості від часу. Для цього побудуємо графік функції $t = f(v)$ та „повернемо” його на 90 градусів. Отриманий графік показаний на рис. 3.9 штриховою лінією. Для перевірки правильності проведених розрахунків проведемо чисельне інтегрування диференціального рівняння (3.61). У результаті отримаємо інтерполяційну функцію $x = f(t)$.

Графіки вищих похідних інтерполяційної функції $x = f(t)$ показано на рис.3.9 та рис.3.10.

На рис. 3.9 побудовано графіки при чисельному інтегруванні рівняння (3.61) та функція $t = f(v)$ повернута на 90 градусів. Графіки даних функцій мають абсолютний збіг, що свідчить про правильність проведених аналітичних розрахунків.

Причиною складнощів при розв'язуванні задачі знаходження аналітичного виразу, що описує рух механізму, є вид диференціального рівняння (3.62), яке у свою чергу є „продуктом” апроксимаційної функції (3.56). Тому доцільно апроксимаційну функцію представляти у іншому вигляді, наприклад, у вигляді квадратичного полінома (при $n=2$). Однак, при цьому не виконуються усі умови (3.58). Тому механічну характеристику асинхронного двигуна необхідно шукати у вигляді сплайна [22], який складається з двох квадратичних поліномів і які „зшиваються” у точці з координатами $(M_{ном}, \omega_{ном})$.

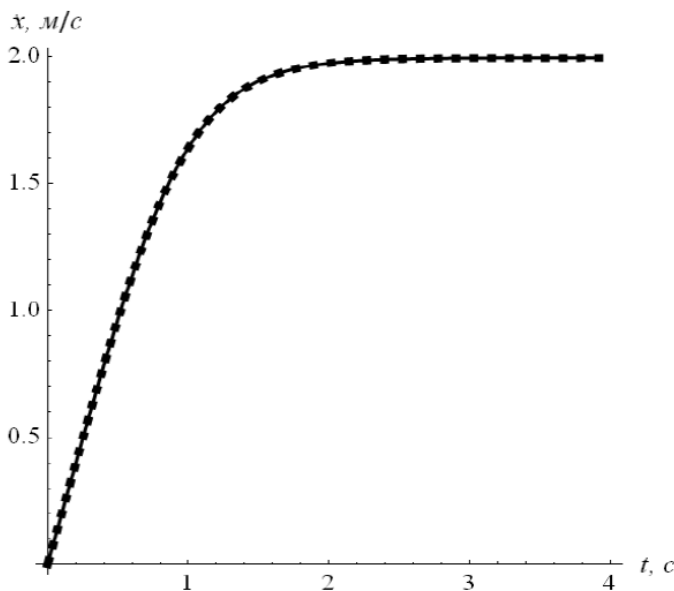


Рисунок 3.9 - Графік функції швидкості механізму

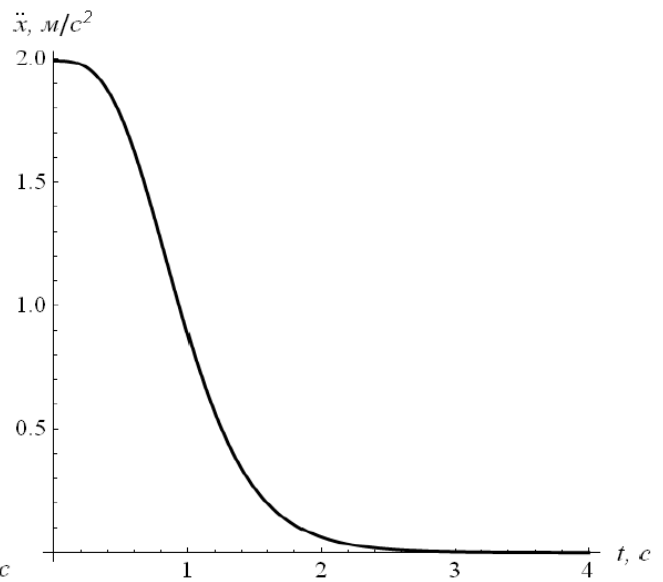


Рисунок 3.10 - Графік функції прискорення механізму

3.3 Аналітичний розв’язок рівнянь руху одномасових механізмів

Велика кількість механізмів може бути представлена у вигляді одномасової динамічної моделі. Таке представлення базується на певних припущеннях: маса механізму вважається зосередженою, жорсткість та демпфування у рухомих елементах механізму не враховуються тощо.

Необхідно зробити таке зауваження: вже перше наближення (одномасова модель) для вивчення та аналізу процесів у багатьох механізмах може бути достатньо точним. У цьому випадку отримані результати аналітичного характеру можуть бути цінним матеріалом для використання у практичних цілях.

У приведених нижче розрахунках використані дані для двигуна

МТКФ011-6: $P_{ном} = 1,7$ кВт, $n_{ном} = 835$ об/хв, $\frac{M_{пуск}}{M_{ном}} = \frac{M_{max}}{M_{ном}} = 2,3$ [19]. Таким чином,

можна сформулювати вимоги до апроксимаційної функції, яка описує механічну характеристику асинхронного двигуна (3.58). У попередньому пункті встановлено, що у випадку апроксимації механічної характеристики асинхронного двигуна поліномом необхідно обрати кубічний поліном. Однак при цьому диференціальне рівняння (3.62), яке дає змогу отримати кінематичні функції руху механізму, перетворюється у нелінійне рівняння Абеля зі сталими коефіцієнтами, яке неможливо розв’язати аналітично [23]. Тому приймемо для апроксимації механічної характеристики сплайново-квадратичну функцію [22]:

$$M = \begin{cases} A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ B_0 + B_1\omega + B_2\omega^2, & \text{при } \omega \in [\omega_{ном}, \omega_0]; \end{cases} \quad (3.70)$$

де $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити.

Таким чином, можна записати умови для знаходження невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ з урахуванням умов (3.70):

$$\begin{cases} A_0 = M_{пуск}; \\ A_1 = 0; \\ A_0 + A_1\omega_{ном} + A_2\omega_{ном}^2 = M_{ном}; \\ B_0 + B_1\omega_{ном} + B_2\omega_{ном}^2 = M_{ном}; \\ B_0 + B_1\omega_0 + B_2\omega_0^2 = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Система (3.71) дозволяє знайти невідомі коефіцієнти окрім одного – це один із коефіцієнтів B_0, B_1, B_2 . Для того, щоб усі коефіцієнти були визначені необхідно задатись ще однією умовою – умовою плавного сполучення квадратичних поліномів у точці $\omega = \omega_{ном}$, що еквівалентно рівнянню:

$$\left. \frac{\partial(A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2)}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_{ном}} = \left. \frac{\partial(B_0 + B_1\omega + B_2\omega^2)}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_{ном}}. \quad (3.72)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (3.71) та (3.72), отримаємо всі невідомі коефіцієнти:

$$\begin{cases} A_2 = \frac{M_{ном} - M_{пуск}}{\omega_{ном}^2}; \\ B_0 = \frac{\omega_0(M_{ном}\omega_0 + 2M_{пуск}(\omega_{ном} - \omega_0))}{(\omega_0 - \omega_{ном})^2}; \\ B_1 = \frac{2(M_{ном} - M_{пуск})\omega_0^2 + 2M_{пуск}\omega_{ном}^2}{(\omega_0\omega_{ном})^2\omega_{ном}}; \\ B_2 = \frac{2M_{пуск}(\omega_0 - \omega_{ном}) + M_{ном}(\omega_{ном} - 2\omega_0)}{(\omega_0 - \omega_{ном})^2\omega_{ном}}. \end{cases} \quad (3.73)$$

Побудуємо графіки, які відповідають виразу (3.70) та рівнянню Клосса для прийнятого двигуна (рис. 3.11).

На рис. 3.11 штриховою лінією показано графік, який відповідає формулі Клосса. Як видно із приведених графіків (рис. 3.11) вираз (3.70) краще описує механічну характеристику двигуна, оскільки його графік проходить через всі точки 1, 2 та 3. Ці точки характеризують заявлені виробником електродвигуна дані: точка 1 має координати $(0, M_{пуск})$, точка 2 – $(\omega_{ном}, M_{ном})$, точка 3 – $(\omega_0, 0)$. Із рис. 3.11 видно, що графік побудований за формулою Клосса не містить точку 2, тобто тут присутнє деяке розходження із практичними даними.

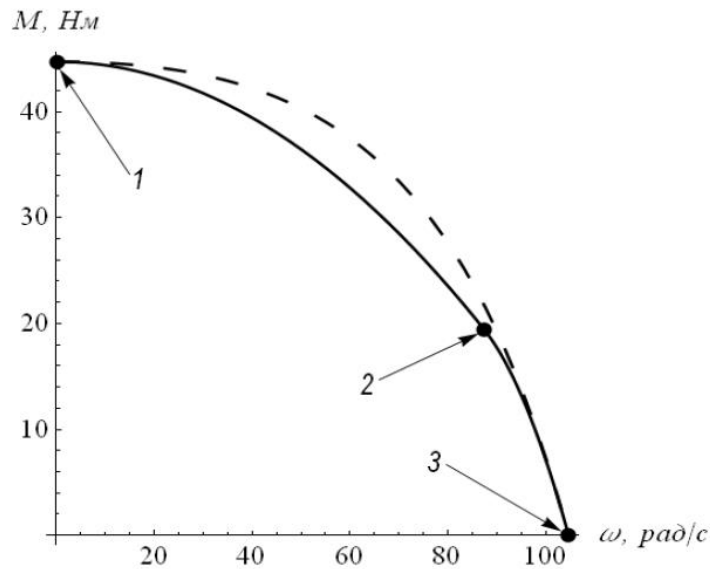


Рисунок 3.11 - Графіки механічних характеристик побудовані за виразом (3.70) і за формулою Клосса

Із врахуванням виразів (3.70) та (3.73) рівняння руху механізму можна представити у такому вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{F - W}{m} = N_2 \dot{x}^2 + N_1 \dot{x} + N_0, \quad (3.74)$$

де N_2, N_1, N_0 – певні коефіцієнти, які визначаються із наступних виразів:

$$N_2 = \begin{cases} \frac{A_2 i^3 \eta}{mr^3}, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ \frac{B_2 i^3 \eta}{mr^3} & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{ном}]; \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ \frac{B_1 i^2 \eta}{mr^2} & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{ном}]; \end{cases} \quad (3.75)$$

$$N_0 = \begin{cases} \frac{A_0 i \eta}{mr} - \frac{W}{m}, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ \frac{B_0 i \eta}{mr} - \frac{W}{m} & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{ном}]; \end{cases}$$

Вводячи позначення: $\dot{x} = v$, рівняння (3.75) запишемо таким чином:

$$\dot{v} = N_2 v^2 + N_1 v + N_0. \quad (3.76)$$

Рівняння (3.76) є нелінійним диференціальним рівнянням Рікатті зі сталими коефіцієнтними [23]. Розв'язок даного виду рівняння Рікатті знаходиться із такого співвідношення [23]:

$$\frac{v - v_1}{v - v_2} = \frac{v_1 - v_0}{v_2 - v_0} e^{N_2(t-t_0)}, \quad (3.77)$$

де v_0 – початкова швидкість руху кранового механізму;

t_0 – початковий момент часу, який відповідає початковій швидкості v_0
(початкова умова така $v(t_0) = v_0$);

v_1 та v_2 – корені квадратного рівняння:

$$N_2 v^2 + N_1 v + N_0 = 0. \quad (3.78)$$

Із виразу (3.78) можемо виразити шукане v . У результаті отримаємо:

$$v = \frac{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1) \cdot v_2 + v_1(v_2 - v_0)}{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1) + v_2 - v_0}. \quad (3.79)$$

Тепер знайдемо корені квадратного рівняння (3.78):

$$v_{1,2} = \frac{-N_1 \pm \sqrt{N_1^2 - 4N_0N_2}}{2N_2}. \quad (3.80)$$

Таким чином, отримана перша похідна розв'язку рівняння (3.74) за часом, тобто функція зміни швидкості механізму. Диференціювання виразу (3.79) за часом дає функцію прискорення механізму:

$$\dot{v} = \ddot{x} = \frac{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} N_2 (v_1 - v_0) \cdot (v_1 - v_2)^2 (v_2 - v_0)}{(e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1) + v_2 - v_0)^2}. \quad (3.81)$$

Для того, щоб знайти функцію переміщення механізму у часі необхідно проінтегрувати вираз (3.79). У результаті отримаємо:

$$\int v dt = x = \frac{\lg(v_2 - v_0 + e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1))}{N_2} + t v_1 + C_1. \quad (3.82)$$

де C_1 – постійна інтегрування.

Поставимо початкову умову:

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.83)$$

яка дасть змогу знайти невідому постійну інтегрування C_1 . Умова (3.83) у розгорнутому вигляді представляється у вигляді рівняння, з якого просто виразити шукану постійну інтегрування:

$$C_1 = x_0 - t_0 v_1 + \frac{\lg(v_2 - v_1)}{N_2}. \quad (3.84)$$

Розв'язок (3.84) є універсальним результатом, який описує рух механізму на обох ділянках механічної характеристики двигуна: від точки 1 до 2 ($\omega \in [0, \omega_{ном}]$) та від точки 2 до 3 ($\omega \in [\omega_{ном}, \omega_0]$). Вирази для ділянок механічної характеристики двигуна 1-2 та 2-3 відрізняються лише початковими умовами: кінцеві умови для розв'язку на ділянці 1-2 будуть початковими для розв'язку на ділянці 2-3.

Крім того, необхідно зазначити, що у випадку коли виконується умова $W \geq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$ електропривод працює лише на ділянці 1-2 механічної характеристики і виконувати сполучення розв'язків для ділянок механічних характеристик 1-2 та 2-3 не потрібно.

Прийmemo, що $W \leq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$, тоді необхідно знайти момент часу, при якому розв'язки сполучаються. Це такий момент часу, при якому виконується умова:

$$v = \mu_{ном}, \quad (3.85)$$

або у розгорнутому вигляді:

$$v_2 + \frac{v_2(v_2 - v_1)}{e^{N_2 t(v_1 - v_2)} v_1 - v_2} = \frac{\omega_{ном} r}{i}. \quad (3.86)$$

Запишемо вираз для шуканого моменту часу:

$$t_{ном} = \frac{\lg \left(\frac{v_2(v_2 - v_1)i}{(\omega_{ном} r - v_2 i) v_1} + \frac{v_2}{v_1} \right)}{N_2(v_1 - v_2)}. \quad (3.87)$$

Приведемо графічну інтерпретацію отриманих результатів. Для цього подубуємо графіки переміщення (рис. 3.12), швидкості (рис. 3.13) та прискорення (рис. 3.14) механізму. Графіки побудовані при таких параметрах: $i=5$, $\eta=0,85$, $m=1000$ кг, $W=0,8M_{ном}$.

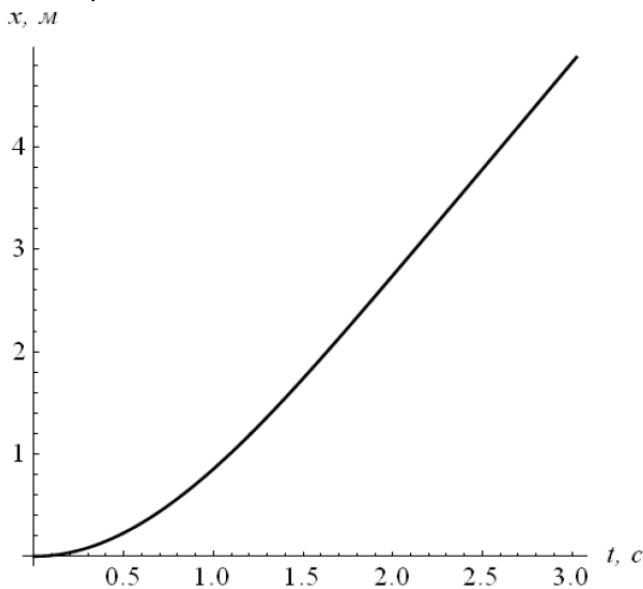


Рисунок 3.12 - Графік функції переміщення механізму

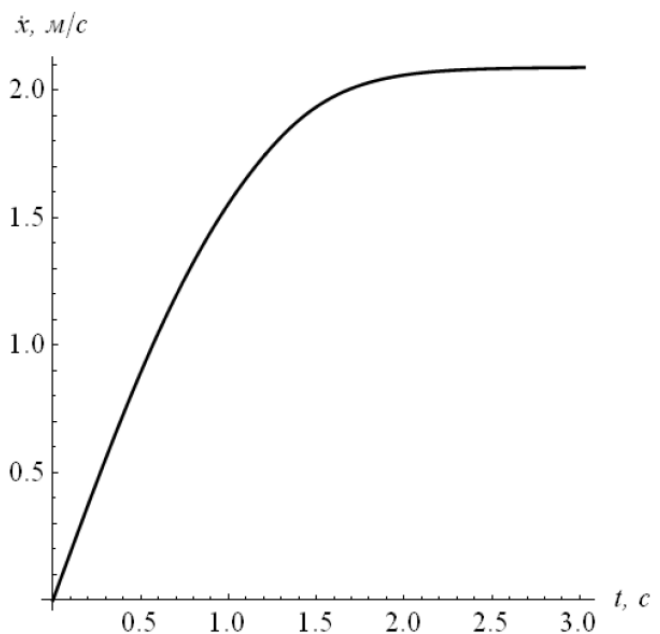


Рисунок 3.13 - Графік функції швидкості механізму

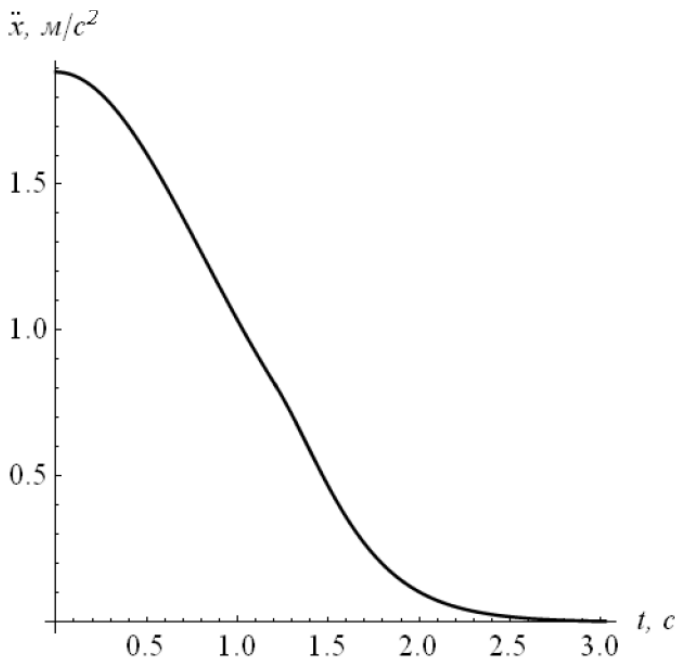


Рисунок 3.14 - Графік функції прискорення механізму

Виконаємо дослідження отриманого результату для знаходження додаткових кінематичних параметрів, які можуть бути використані у практичних розрахунках механізмів. Передусім встановимо максимальне прискорення механізму. Очевидно, максимальне прискорення механізму буде у початковий момент, тобто при $t=0$, оскільки максимальний момент рівний пусковому. Запишемо вираз максимального прискорення:

$$x_{\max} = \frac{F_{\max} - W}{m} = \frac{\frac{M_{\max} i \eta}{r} - W}{m} = \frac{\frac{M_{\text{пуск}} i \eta}{r} - W}{m}. \quad (3.88)$$

Надалі знайдемо усталену швидкість при умові $W \geq \frac{M_{\text{ном}} i \eta}{r}$, для цього необхідно виконати дослідження швидкості на граничне значення:

$$v_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{x}) = v_1. \quad (3.89)$$

Дана рівність впливає з аналізу формули (3.81). Справді, вираз $N_2(v_1 - v_2)$, який входить у показник степеня числа Ейлера завжди від'ємний, тому при $t \rightarrow \infty$ вираз $e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} \rightarrow 0$. Для прийнятих параметрів механізму та його приводу маємо $v_{\text{уст}}=2,092$ м/с (при $W = \frac{1,1M_{\text{ном}} i \eta}{r}$). Таке чисельне значення $v_{\text{уст}}$ можна отримати підставивши всі параметри у формулу:

$$v_{\text{уст}} = [-r(i^2 M_{\text{ном}} \eta (\omega_0^2 (\lambda - 1) + \lambda \omega_{\text{ном}}^2) + m r^2 (\omega_0 - \omega_{\text{ном}})^2 \omega_{\text{ном}} (i^3 M_{\text{ном}} \eta (r W \omega_{\text{ном}} \times \\ \times (2(\lambda - 1)\omega_0 + \omega_{\text{ном}} - 2\lambda \omega_{\text{ном}}) + i M_{\text{ном}} \eta (\omega_0 - \lambda \omega_0 + \lambda \omega_{\text{ном}})^2))^{1/2} (m r^2 (\omega_0 - \omega_{\text{ном}}) \times \\ \times \omega_{\text{ном}})^{-1})] \cdot [i^3 M_{\text{ном}} \eta (2(\lambda - 1)\omega_0 + \omega_{\text{ном}} - 2\lambda \omega_{\text{ном}})] \quad (3.90)$$

де λ – перевантажувальна здатність двигуна ($\lambda = \frac{M_{\max}}{M_{\text{ном}}}$).

Знайдемо вираз для тривалості руху, при якому швидкість механізму досягає певного значення, яке виражене у відносних одиницях. Для цього знайдемо розв’язок рівняння:

$$v(t_\gamma) = v_{\text{уст}} \gamma, \quad (3.91)$$

де γ – відносна швидкість руху механізму ($\lambda = \frac{\dot{x}}{v_{\text{уст}}}$). Таким чином, формула

(3.91) показує тривалість руху, при якому швидкість механізму досягає $\gamma v_{\text{уст}}$.

У практичних розрахунках механізмів можна прийняти $\gamma = 0,95$.

Запишемо розв’язок рівняння (3.91):

$$t_{\gamma(1-2)} = \frac{\lg\left(-\frac{v_2(\gamma-1)}{v_2-\gamma}\right)}{N_2(v_1-v_2)}. \quad (3.92)$$

Приведені вище залежності (3.90), (3.92) справедливі для випадку

$W \geq \frac{M_{\text{ном}} i \eta}{r}$. Якщо ж $W \leq \frac{M_{\text{ном}} i \eta}{r}$, то необхідно шукати відповідні залежності

із врахуванням зміни крутного моменту двигуна на ділянці 2-3 його механічної характеристики (рис. 3.11). Із рівняння, аналогічного (3.91), але складеного для нових умов руху механізму отримаємо тривалість розгону до швидкості $\gamma v_{\text{уст}}$:

$$t_{\gamma(1-3)} = \frac{\lg\left(-\frac{\gamma v_1 v_2 - \gamma v_0 v_1 - v_1(v_2 - v_0)}{(v_0 - v_1)v_2 - \gamma v_1(v_0 - v_1)}\right)}{N_2(v_1 - v_2)} + t_{\text{ном}}. \quad (3.93)$$

Зазначимо, що при умові $v_0 = 0$ вираз (3.93) перетворюється у формулу (3.92). Для отриманого виразу початкове значення швидкості рівне номінальній швидкості, тобто швидкості, яка відповідає номінальному моменту двигуна.

Отже,

$$v_0 = v_{\text{ном}} = \frac{\omega_{\text{ном}} r}{i}$$

3.4 Визначення раціональних законів руху машин

3.4.1 Двомасова динамічна модель

Велику кількість машин та механізмів можна представити у вигляді двомасової динамічної моделі [24-27]. Таке представлення необхідне для того, щоб провести динамічний аналіз руху цих машин, що дає змогу оцінити величину та характер зміни динамічних навантажень у їх ланках. Це, у свою чергу, дозволяє розрахувати елементи машини чи механізму за діючими навантаженнями.

Виникнення та еволюція динамічних навантажень пов'язана із структурою машини, її параметрами (коефіцієнти жорсткості та дисипації, маси та моменти інерції окремих елементів тощо) та зовнішніми впливами.

Під зовнішніми впливами слід розуміти всі діючі на машину зусилля та моменти. Джерелами зовнішніх впливів є зовнішнє (технологічне) середовище та приводні сили (моменти) від їх двигунів. Вибір раціональних шляхів зміни зовнішніх впливів від приводного механізму є актуальною задачею, оскільки дозволяє значно зменшити динамічні навантаження у елементах машини, що, у свою чергу, підвищує її надійність та довговічність.

Для зменшення динамічних навантажень у механізмах машин природно використати потужний математичний апарат оптимального керування [28-35]. Такий підхід є науково обґрунтованим, оскільки дозволяє оптимально, найвигідніше із деяких позицій, синтезувати режим руху системи. Якщо критерій оптимальності відображає динамічні показники руху системи, то при цьому її рух відбувається із якнайменшими динамічними навантаженнями. Проте, для проведення процедури оптимізації необхідно мати детерміновану математичну модель машини. Це вимагає параметричної ідентифікації об'єкта дослідження (машини чи механізму) із наступним дослідженням адекватності математичної моделі [36, 37]. Звичайно, такі дослідження не можуть бути проведені для всіх машин, оскільки вимагають значних ресурсів та часу. Крім того, навіть незначне вдосконалення машини змінює параметри моделі, яка їй відповідає. У практичних розрахунках можна лише приблизно оцінити параметри моделі, тобто встановити деякий інтервал, в який величини параметрів входять із заданою вірогідністю. Зазначимо, що відомі розрахунки [38], які подібні приведеним у даному підпункті. Проте, на відміну від роботи [38] у даному підпункті використовуються суто „кінематичне” задання зовнішнього збурення, тобто задається швидкість веденої маси (у роботі [38] зовнішнім збуренням виступає момент прикладений до ведучого колеса). Таке задання швидкості можна здійснити шляхом керування приводом машини.

Для досліджень приймемо динамічну модель, яка показана на рис. 3.15.

Якщо прийняти, що $c = \frac{m_2 g}{l}$ (тут m_2 – маса вантажу, g – прискорення

вільного падіння, l – довжина гнучкого підвісу, на якому закріплена маса вантажу), то приведена на рис. 3.15 схема описує рух математичного рухомого маятника [39].

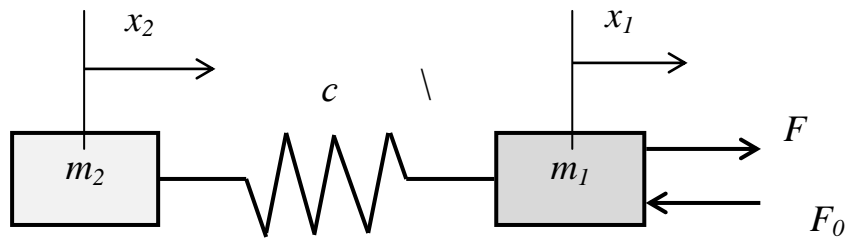


Рисунок 3.15 - Двомасова динамічна модель руху машини

Прийнята динамічна модель описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = F - F_0; \\ m_2 \ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (3.94)$$

де m_1 – ведуча маса; m_2 – ведена маса;

x_1, x_2 – координати центрів відповідних мас,

F – приводне (тягове або гальмівне) зусилля, що діє на ведучу масу;

F_0 – сила опору переміщенню, що діє на ведучу масу,

c – жорсткість зв’язку, який поєднує ведену і ведучу маси.

Друге рівняння системи рівнянь (3.94) можна подати у такому вигляді:

$$x_1 = x_2 + \Omega_0^{-2} \ddot{x}_2, \quad (3.95)$$

де Ω_0 - частота власних коливань динамічної системи ($\Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$).

Будемо розглядати режим розгону машини. Крім того, прийемо для подальших досліджень такі основні (базові) закони зміни швидкості руху машини (рис. 3.16). Необхідно зробити таке зауваження: у даному дослідженні прийнято припущення щодо „ідеальності” відпрацювання швидкості веденої маси. У першому наближенні таке припущення можна використовувати. Для більш точного аналізу динаміки руху динамічної системи це припущення потребує обґрунтування. Сучасні приводи машин дозволяють достатньо точно відпрацьовувати задання швидкості, однак якщо для динамічної системи справедлива $m_2 \gg m_1$ і динамічні характеристики приводу невисокі, то відпрацювання законів швидкості приведених на рис. 3.16 може мати певні похибки.

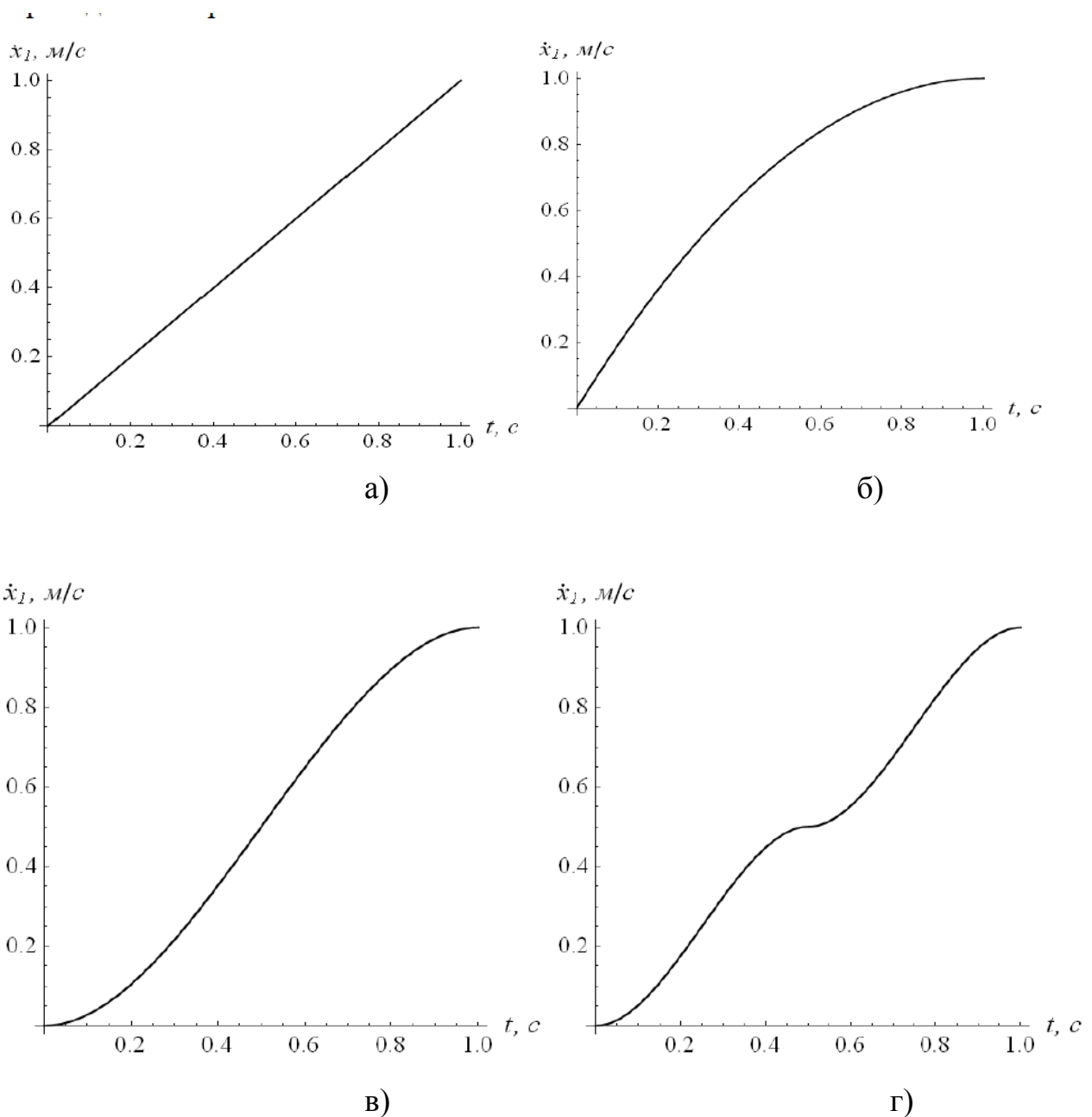


Рисунок 3.16 - Базові закони зміни швидкості ведучої маси при її розгоні:
 а) лінійний, б) U -подібний, в) S – подібний, г) подвійний S – подібний

Приведені на рис. 3.6 закони зміни швидкості ведучої маси при розгоні динамічної системи описуються такими функціями:

- для лінійного закону:
$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{T} ; \quad (3.96)$$
- для U -подібного закону:
$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{T^2}(2T - t); \quad (3.97)$$
- для S – подібного закону:
$$\dot{x}_1 = \frac{vt^2}{T^3}(3T - 2t); \quad (3.98)$$
- для подвійного S – подібного закону:

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} \frac{v_1 t^2}{T_1^3} (3T_1 - 2t), & t \in [0, T_1]; \\ \frac{v_1 (2t - 2T_1 + T)(T_1 + T - t)^2 - v(t - T_1)^2 (2t - 2T_1 - 3T)}{T^3}, & \text{при } t \in [T_1, T] \end{cases} \quad (3.99)$$

тут T – тривалість процесу розгону до швидкості v ;
 T_1 – тривалість розгону до швидкості v_1 ;
 v – усталена швидкість руху ведучої маси;
 v_1 – „проміжна” швидкість руху ведучої маси;
 t – час.

Оцінку „раціональності” того чи іншого закону руху динамічної системи будемо виконувати за показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси, яка визначається таким чином:

$$\tilde{E}(T) = \frac{E_{\text{кін}}(T) + E_{\text{ном}}(T)}{E_{\text{кін.уст.}m_2}}, \quad (3.100)$$

де $E_{\text{кін}}(T)$ - кінетична енергія коливань маси m_2 в момент часу T ;
 $E_{\text{ном}}(T)$ - потенціальна енергія пружного елемента c в момент часу T ;
 $E_{\text{кін.уст.}m_2}$ - кінетична енергія руху маси m_2 при її усталеній швидкості v .

Вирази для $E_{\text{кін}}(T)$, $E_{\text{ном}}(T)$ та $E_{\text{кін.уст.}m_2}$ мають такий вигляд:

$$E_{\text{кін}}(T) = \frac{m_2 (v - \dot{x}_2(T))^2}{2}; \quad (3.101)$$

$$E_{\text{ном}}(T) = \frac{c(x_1(T) - x_2(T))^2}{2}; \quad (3.102)$$

$$E_{\text{кін.уст.}m_2} = \frac{m_2 v^2}{2}. \quad (3.103)$$

Пояснимо вибір показника (3.100) для оцінки якості того чи іншого закону руху динамічної системи. Величину залишкових коливань необхідно оцінювати за їх енергією або положенням зображуючої точки у фазовому просторі. Перший показник дає змогу оцінити кількісну картину коливань, а другий – якісну. Використаємо енергетичну характеристику для оцінки величини залишкових коливань веденої маси.

Чисельник правої частини виразу (3.100) показує повну енергію коливань маси m_2 у момент часу T : вона є різницею повної енергії руху маси m_2 та її кінетичної енергії при швидкості v або це сума потенціальної та кінетичної енергій коливань. Знаменник правої частини виразу (3.100) дає змогу привести енергетичну оцінку до безрозмірного вигляду, оскільки для всіх законів руху динамічної системи справедлива рівність:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \tilde{E}(T) = E_{\text{кін.уст.}m_2}. \quad (3.104)$$

Для того, щоб знайти показник (3.100) для кожного із законів руху

(3.96)-(3.99) необхідно розв'язати задачу Коші (неоднорідне диференціальне рівняння (3.95) із початковими умовами). Ліва частина рівняння (3.95) змінюється для кожного закону. Початкові умови для розв'язування задачі Коші приймаємо нульовими. Для кусочного закону (3.99) розв'язувати рівняння (3.95) необхідно двічі: для проміжку $t \in [0, T_1]$ та для проміжку $t \in [T_1, T]$, причому для другого проміжку $t \in [T_1, T]$ початкові умови є $t \in [T_1, T]$ ненульовими – це кінцеві умови для проміжку $t \in [0, T_1]$ (таким чином відбувається „зшивка” розв'язків).

Не будемо зупинятись на методиці розв'язання. Запишемо отримані результати. Для лінійного закону (рис. 3.16, а) показник (3.100) рівний:

$$\tilde{E}_{lin}(T) = \frac{m_2(\cos(T\Omega_0) - 1)}{cT^2} \quad (3.105)$$

Для U -подібного закону (рис. 3.16, б) цей показник визначається залежністю:

$$\tilde{E}_U(T) = \frac{2m_2 + cT^2 - 2m_2(\cos(T\Omega_0) + \Omega_0 T \sin(T\Omega_0))}{c^2 T^4} \quad (3.106)$$

Для S -подібного закону (рис. 3.16, в) маємо:

$$\tilde{E}_S(T) = \frac{72m_2^2 \left(\sqrt{cT} \cos\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) - 2\sqrt{m_2} \sin\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) \right)^2}{c^3 T^6} \quad (3.107)$$

Для подвійного S -подібного закону (рис. 3.16, г) вираз для показника (3.55) досить громіздкий, тому не будемо його приводити.

Вирази (3.105)-(3.107) та вираз показника (3.100) для подвійного S -подібного закону необхідно проаналізувати для того, щоб встановити раціональний параметр T , який можна налаштовувати при реалізації руху машини. Для цього побудуємо графіки отриманих функцій у одній площині (рис. 3.17).

На рис. 3.17: закону (3.96) відповідає штрихова товста лінія, закону (3.97) – штрихова тонка лінія, закону (3.98) – суцільна тонка лінія, закону (3.99) – суцільна сіра товста лінія (для побудови цього графіка прийнято, що $T_1 = 0,5T$ і $v_1 = 0,5v$). Точками на рис. 3.17 позначені величини часу T , які є кратними до тривалості періоду власних коливань динамічної системи.

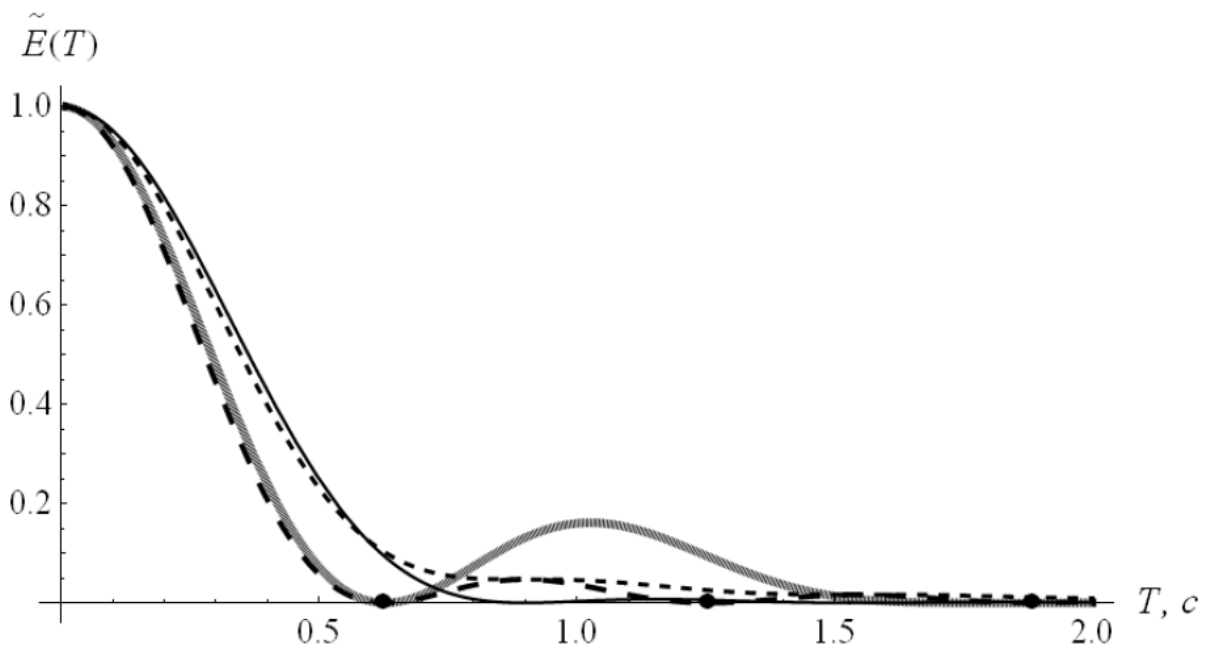


Рисунок 3.17 - Графіки енергії залишкових коливань веденої маси m_2 при різних законах зміни швидкості ведучої маси m_1

Тепер почерзі проведемо аналіз графічних залежностей на рис. 3.17. Величина питомої енергії залишкових коливань для закону (3.96) стає рівною нулю у моменти часу, які кратні періоду власних коливань динамічної системи. Цей висновок вже відомий у науковій літературі [26]. Якщо прийняти $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{4\pi}{\Omega_0}$, то коливання веденої маси залишаються, але амплітуда цих коливань є невеликою. При подальшому збільшенні тривалості розгону маси $\frac{4\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання продовжують зменшуватись. Однак, надмірне збільшення тривалості перехідного процесу може викликати зменшення продуктивності роботи машини та перевантаження приводу. Якщо невідома величина частоти власних коливань динамічної системи, то використання цього закону є небажаним, за винятком тих випадків, коли тривалість перехідного процесу не є визначальним фактором якості технологічного процесу.

Для закону (3.97) відсутність коливань досягається при $T \rightarrow \infty$, що, звичайно, не є фізичним. Однак, при збільшенні тривалості перехідного процесу залишкові коливання зменшуються значно. Можна зробити висновок: використовувати закон (3.97) для розгону двомасової динамічної системи не рекомендується. Виняток може становити лише випадок значної тривалості розгону.

Закон розгону динамічної двомасової системи (3.98) має цінні властивості з позицій зниження коливань веденої маси у кінці розгону. У моменти часу:

$$T_i = \frac{2\pi\sqrt{2i}}{\Omega_0}, \quad i = 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots \quad (3.108)$$

коливання веденої маси взагалі усуваються. Після моменту часу $T > \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_0}$

коливання веденої маси залишаються, але їх енергія є дуже малою. Таким чином, можна зробити висновок: для динамічних систем, власна частота коливань яких не може бути визначена точно, а лише є приблизна їх оцінка, їх розгін і гальмування необхідно виконувати за законом зміни швидкості (3.98). При цьому тривалість розгону та гальмування необхідно апріорі встановлювати згідно виразу:

$$T \geq \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_{0\min}}, \quad (3.109)$$

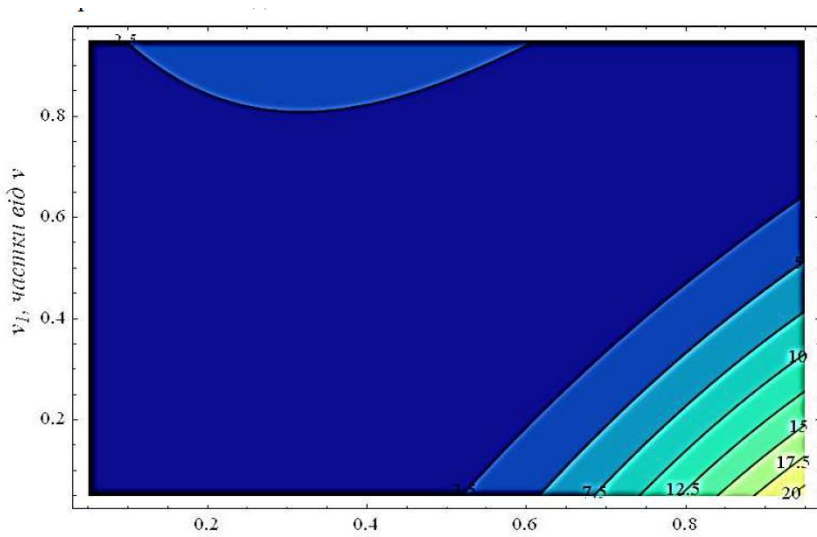
де $\Omega_{0\min}$ - найменше значення оцінки частоти власних коливань динамічної системи. Таке налаштування буде гарантувати значне зменшення залишкових коливань веденої маси у кінці розгону та гальмування.

Закон руху динамічної системи, який відповідає подвійному S-подібному характеру зміни швидкості ведучої маси має такі властивості: коливання веденої маси припиняються у моменти часу:

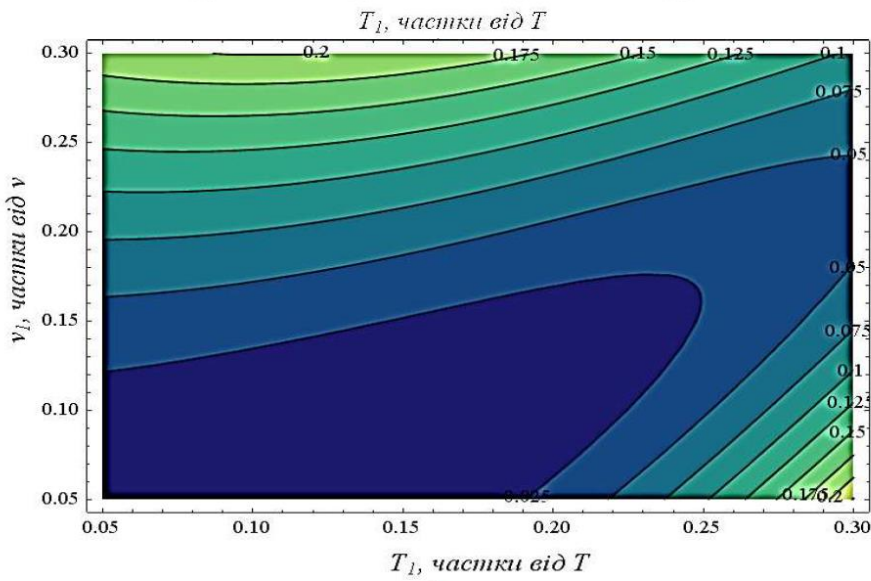
$$T_i = \frac{j\pi}{\Omega_0}, \quad j = 2, 6, 10, 14, \dots \quad (3.110)$$

Зазначимо, що при $j = 2$ коливання веденої маси усуваються – в цьому цей закон подібний до лінійного закону зміни швидкості (3.96). Однак, при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання веденої маси мають значну енергію. Це є серйозним недоліком цього закону, тому його використання потребує обґрунтування, наприклад, виходячи із деяких технологічних аспектів. Однак, необхідно пам'ятати про те, що графік побудований на рис. 3.17 справедливий для випадку коли $T_1=0,5T$ і $v_1=0,5v$. Якщо ж змінити коефіцієнти біля величин T та v відповідно зміняться і властивості закону. На рис. 3.18 показано, як змінюється залишкова питома енергія коливань веденої маси в залежності від тривалості першого етапу T_1 та від величини проміжної швидкості v_1 .

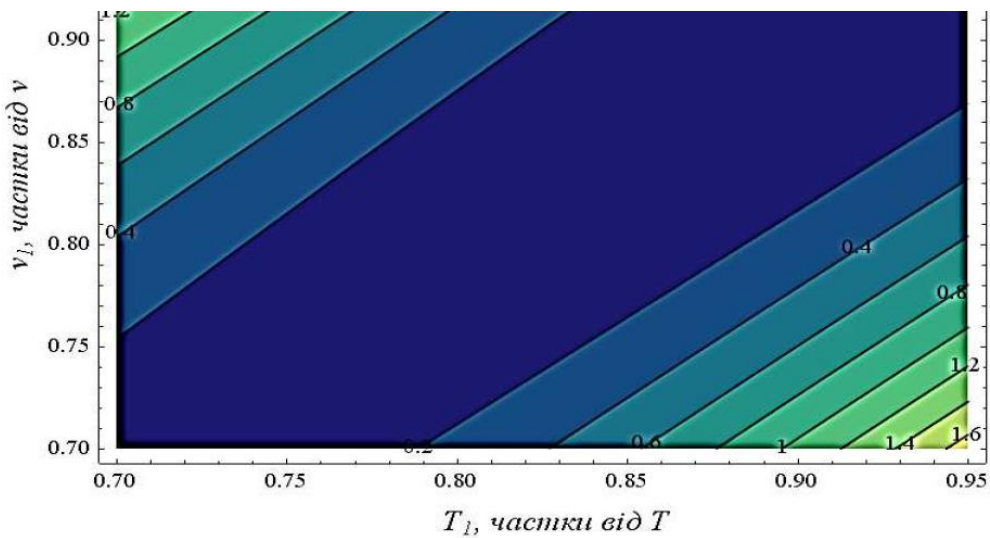
Лінії на рис. 3.18 із відповідними числовими позначками показують енергію залишкових коливань веденої маси. Аналізуючи отримані графіки, можна прийти до висновку про те, що існують певні комбінації T_1 та v_1 , за яких енергія коливань веденої маси є невеликою.



а



б



в

Рисунок 3.18 - Графіки функції залишкової питомої енергії коливань веденої маси в залежності від параметрів T_1 і ν_1 :

а) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,05T; 0,95T]$ та $\nu_1 \in [0,05\nu; 0,95\nu]$;

б) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,05T; 0,5T]$ та $\nu_1 \in [0,05\nu; 0,5\nu]$;

в) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,07T; 0,95T]$ та $v_1 \in [0,07v; 0,95v]$

Таким чином, попередній висновок щодо значної величини енергії залишкових коливань веденої маси при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ є лише частинним.

Отже, дати однозначну відповідь про те, які параметри необхідно налаштувати для даного закону руху досить важко. Можна порекомендувати скористатись графічними залежностями приведеними на рис. 3.18.

3.4.2. Тримасова динамічна модель

Для досліджень приймемо динамічну модель руху машини, яка показана на рис. 3.19.

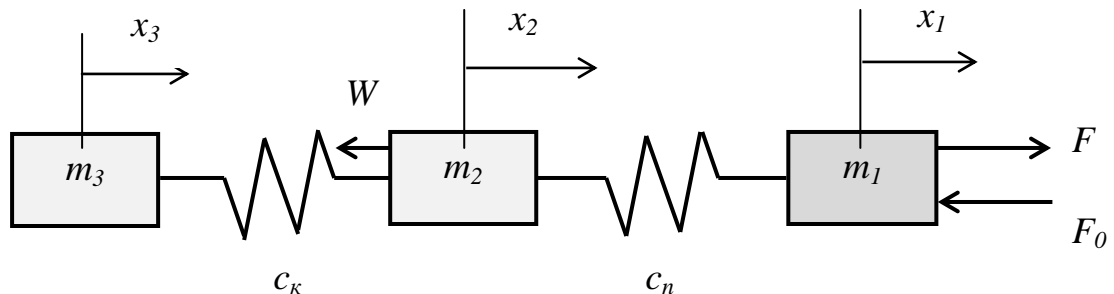


Рисунок 3.19 - тримасова динамічна модель руху машини

Така динамічна модель представляє рух машини із врахуванням динамічних процесів, які виникають у механічній частині її приводу.

Прийнята динамічна модель описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_n(x_1 - x_2) + F_0 = F; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_k(x_2 - x_3) + W = c_n(x_1 - x_2); \\ m_3 \ddot{x}_3 = c_k(x_2 - x_3), \end{cases} \quad (3.111)$$

де m_1 – приведена до поступального руху маса ротора двигуна;

m_2 – приведена до поступального руху маса передавального механізму;

m_3 – приведена до поступального руху маса робочого органу машини;

x_1, x_2, x_3 – координати центрів відповідних мас,

F – приведені приводне (тягове або гальмівне) зусилля двигуна;

F_0 – приведена сила сухого тертя у двигуні;

W – сила опору переміщенню робочого органу машини;

c_n – приведена жорсткість муфти, яка з'єднує вали двигуна і передавального механізму;

c_k – приведена жорсткість муфти, яка з'єднує вали передавального механізму і робочого органу.

Параметром, який задає рух у системі є зусилля F . Однак, будемо досліджувати динаміку системи при заданні швидкості маси m_1 .

Для оцінки руху машини необхідно знайти вираз $x_3 = x_3(x_1)$. Пояснимо чому саме таку функцію необхідно шукати. Якщо буде відома функція x_3 , то функцію x_2 неважко буде знайти із третього рівняння системи (3.111). Для цього подамо третє рівняння системи (3.111) у такому вигляді:

$$x_2 = x_3 + \frac{m_3}{c_k} \ddot{x}_3. \quad (3.112)$$

Отже, знайшовши залежність $x_3 = x_3(x_1)$, можна легко записати всі функції x_1 , x_2 та x_3 . Залежність $x_3 = x_3(x_1)$ представляється у вигляді диференціального рівняння, яке можна отримати із системи рівнянь (3.111):

$$x_3^{IV} + \ddot{x}_3 A_1 + x_3 A_2 = x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3, \quad (3.113)$$

де A_1, A_2, A_3 - коефіцієнти, що залежать від параметрів системи

$$\left(A_1 \frac{\left(\frac{m_3}{c_k} + \frac{m_3}{c_n} + \frac{m_2}{c_n} \right) c_n c_k}{m_2 m_3}, A_2 = \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}, A_3 = -W \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} \right).$$

Диференціальне рівняння (3.113) є неоднорідним. Його розв'язок є сумою загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Перший доданок завжди буде один і той самий:

$$x_3^* = C_1 e^{t \sqrt{\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_2 e^{-t \sqrt{\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_3 e^{t \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_4 e^{-t \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}}, \quad (3.114)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – постійні інтегрування. Другий доданок буде залежати від виду функції x_1 : $x_3^{**} = x_3^{**}(x_1)$. Будемо задавати базові закони руху машини (3.96)-(3.99).

Крім того, оцінимо динаміку руху машини для такого закону:

$$\dot{x}_1 = \frac{t^3}{T_1^5} v (6t^2 - 15Tt + 10T^2). \quad (3.115)$$

Закон (3.115) умовно назвемо S -подібним плавним. На рис. 3.20 показано графік функції (3.115) при $v = 1m/s$ та $T = 1c$.

Розв'язок диференціального рівняння (3.113) включає чотири постійні інтегрування. Для їх знаходження необхідно задати початкові умови.

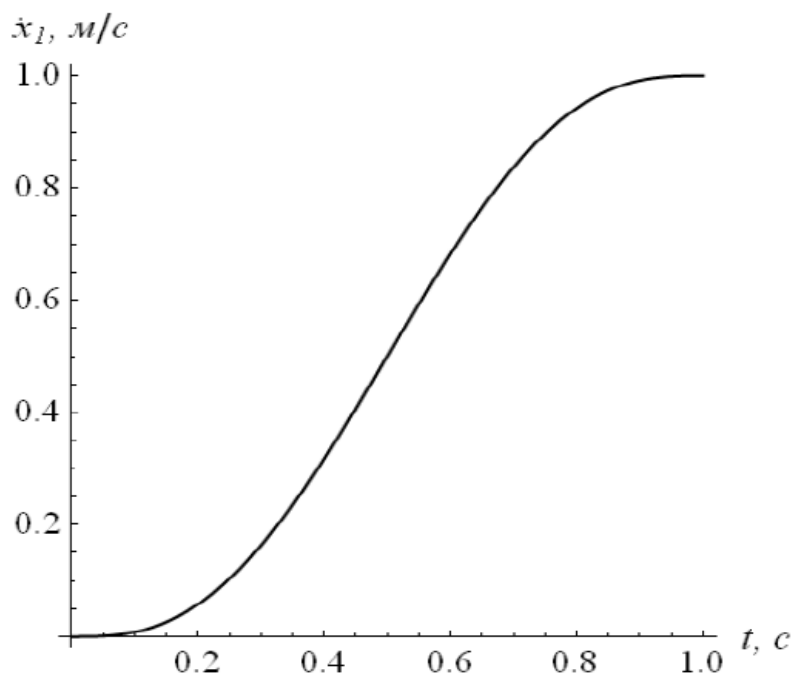


Рисунок 3.20 - Графік S – подібного плавного закону зміни швидкості маси m_1 при розгоні

Будемо розглядати рух машини протягом розгону. Тоді початковими умовами для всіх фазових координат є нульові:

$$\begin{cases} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0; \\ x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0; \\ x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0. \end{cases} \quad (3.116)$$

Із умов (3.116) можна записати початкові умови руху маси m_3 :

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = \ddot{x}_3(0) = \dddot{x}_3(0) = 0. \quad (3.117)$$

Тепер запишемо праві частини диференціального рівняння (3.113) для законів руху (3.96)-(3.99), (3.115). Для лінійного закону (3.96):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^2 B_1 + A_3, \quad (3.118)$$

де B_1 – коефіцієнт ($B_1 = \frac{v}{2T} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$).

Для U -подібного закону (3.97):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^3 D_1 + t^2 D_2 + A_3, \quad (3.119)$$

де D_1, D_2 – коефіцієнти ($D_1 = \frac{-v}{3T^2} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $D_2 = \frac{v}{T} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$).

Для S -подібного закону (3.98):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^4 E_1 + t^3 E_2 + A_3, \quad (3.120)$$

де E_1, E_2 – коефіцієнти ($E_1 = \frac{-v}{3T^3} \frac{c_n c_\kappa}{m_2 m_3}$, $E_2 = \frac{v}{T^2} \frac{c_n c_\kappa}{m_2 m_3}$).

Для S -подібного плавного закону (3.99):

$$x_1 \frac{c_n c_\kappa}{m_2 m_3} + A_3 = t^6 G_1 + t^5 G_2 + t^4 G_3 + A_3, \quad (3.121)$$

де G_1, G_2, G_3 – коефіцієнти ($G_1 = \frac{v}{T^5} \frac{c_n c_\kappa}{m_2 m_3}$, $G_2 = \frac{-3v}{T^4} \frac{c_n c_\kappa}{m_2 m_3}$, $G_3 = \frac{5v}{2T^3} \frac{c_n c_\kappa}{m_2 m_3}$).

Тепер необхідно задатись показником, за яким будемо проводити оцінку динаміки руху машини. Таким показником оберемо відносну енергію залишкових коливань елементів машини, який аналогічний тому, що використовувався у попередньому підпункті (3.100). Залишкова потенціальна енергія у машині, при якій небажані коливання його елементів будуть присутні, знаходиться за таким виразом:

$$E_{nom}(T) = \frac{c_n}{2} \left(x_1(T) - x_2(T) - \frac{W}{c_n} \right)^2 + \frac{c_\kappa}{2} (x_2(T) - x_3(T))^2. \quad (3.122)$$

Такий вираз означає суму потенціальних енергій у пружних елементах c_n та c_κ , причому для подолання опору руху W пружний зв'язок c_n повинен бути навантажений, а отже повинен мати певну енергію. Ця енергія повинна залишатись при усталеному русі, тобто коли коливання елементів машини відсутні, тому у виразі (3.122) у перших дужках міститься доданок $-\frac{W}{c_n}$.

Залишкова кінетична енергія у машині, при якій небажані коливання його елементів будуть присутні, знаходиться за таким виразом:

$$E_{kin}(T) = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2(T) - v)^2 + \frac{m_3}{2} (\dot{x}_3(T) - v)^2. \quad (3.123)$$

Вираз (3.123) означає суму кінетичних енергій коливань мас m_2 та m_3 відносно маси m_1 у кінці розгону машини.

Подальший аналіз показує, що для всіх законів справедлива рівність:

$$E(T)_{T \rightarrow 0} = \lim_{T \rightarrow 0} (E_{nom}(T) + E_{kin}(T)) = \frac{1}{2} \left((m_2 + m_3) v^2 + \frac{W^2}{c_n} \right). \quad (3.124)$$

Тому будемо проводити оцінку динаміки руху машини за таким показником:

$$\tilde{E}(T) = \frac{E_{kin}(T) + E_{nom}(T)}{E(T)_{T \rightarrow 0}}. \quad (3.125)$$

Таким чином, показник (3.125) дає змогу оцінити відносну енергію залишкових небажаних коливань у приводі машини та коливань робочого органа в залежності від тривалості розгону машини. Даний показник є безрозмірним, оскільки чисельник і знаменник мають однакові розмірності

(Джоуль). Надалі для кожної правої частини (3.118)-(3.121) диференціального рівняння (3.113) необхідно знайти частинний розв'язок.

Сумуючи загальний розв'язок (3.113) однорідного диференціального рівняння та знайдені частинні неоднорідні розв'язки, отримаємо функції переміщення маси m_3 для різних законів руху маси m_1 (3.96)-(3.99), (3.115). Не будемо зупинятись на описі вказаних розрахунків та не будемо приводити остаточні результати для показника (3.125), оскільки вони мають значний об'єм. Приведемо лише графічну інтерпретацію отриманих результатів (рис.3.21). На рис. 3.21: закону (3.96) відповідає штрихова товста лінія, закону (3.97) – суцільна тонка лінія, закону (3.98) – штрихова тонка лінія, закону (3.115) – суцільна сіра товста лінія. Точками на рис. 3.21 позначені величини часу T , які є кратними до тривалості періоду власних коливань динамічної двомасової системи:

$$T = i\pi \sqrt{\frac{m_3}{c_k}}, \quad i = 2, 4, 6, \dots \quad (3.126)$$

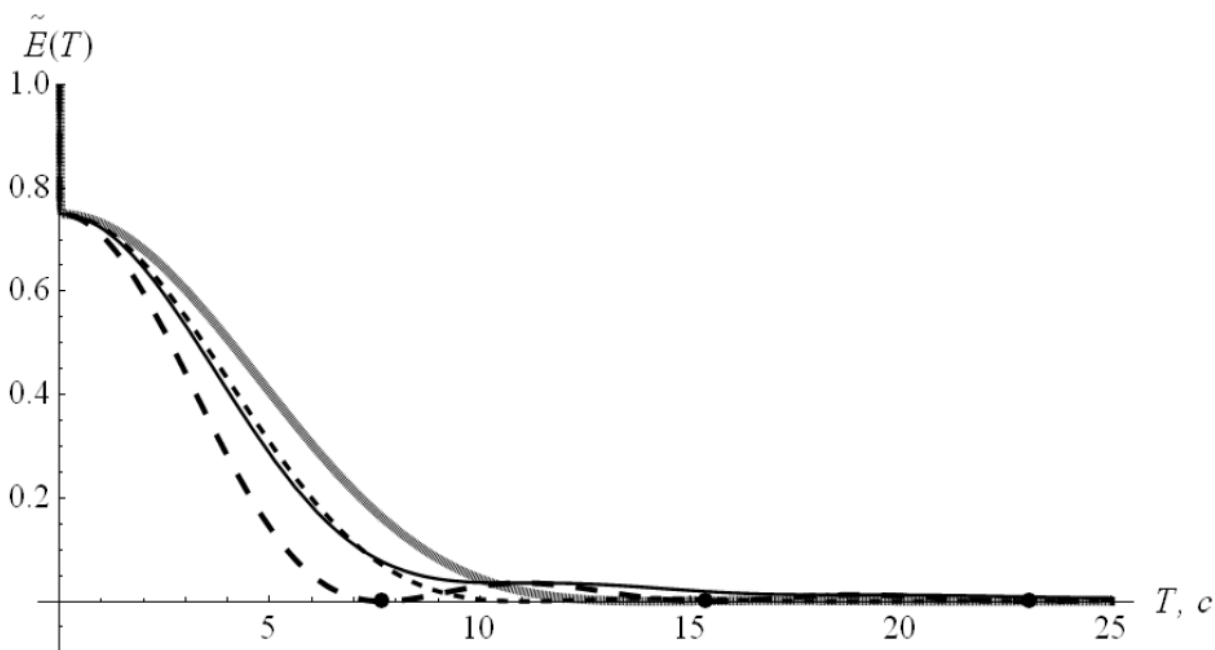


Рис. 3.20. Графіки відносної залишкової енергії коливань елементів машини при різних законах зміни швидкості маси m_1

Із графіків на рис. 3.21 видно, що енергія залишкових коливань зі збільшенням тривалості перехідного процесу зменшується. Цікавим є те, що на початку графіків йде стрибок відносної енергії (показника (3.125)). Для з'ясування природи цього стрибка графіка приведемо аналогічний рисунок, але для значно меншої тривалості розгону (рис. 3.22).

Через значні осциляції графік функції (3.125) для S -подібного плавного

закону ми не приводимо. Аналіз приведених графіків показує, що вже незначна (фізично нереалізована) тривалість розгону дає значне зменшення енергії коливань. Це відбувається за рахунок зменшення енергії коливань маси m_2 , яка становить частину $\frac{m_2}{m_2 + m_3}$ від всієї енергії коливань.

Для побудови графіків використовувались такі параметри: $m_1 = 100 \text{ кг}$, $m_2 = 500 \text{ кг}$, $m_3 = 1500 \text{ кг}$, $c_n = 5 \times 10^6 \text{ Н/м}$, $c_k = 10^3 \text{ Н/м}$, $W = 0,2 \times m_2 g$ (при таких параметрах частота коливань у приводі рівна 100 Гц, а робочого органу відносно точки його закріплення 0,8 Гц). Тому одна четверта енергії коливань елементів системи „зникає” вже при незначній тривалості розгону машини.

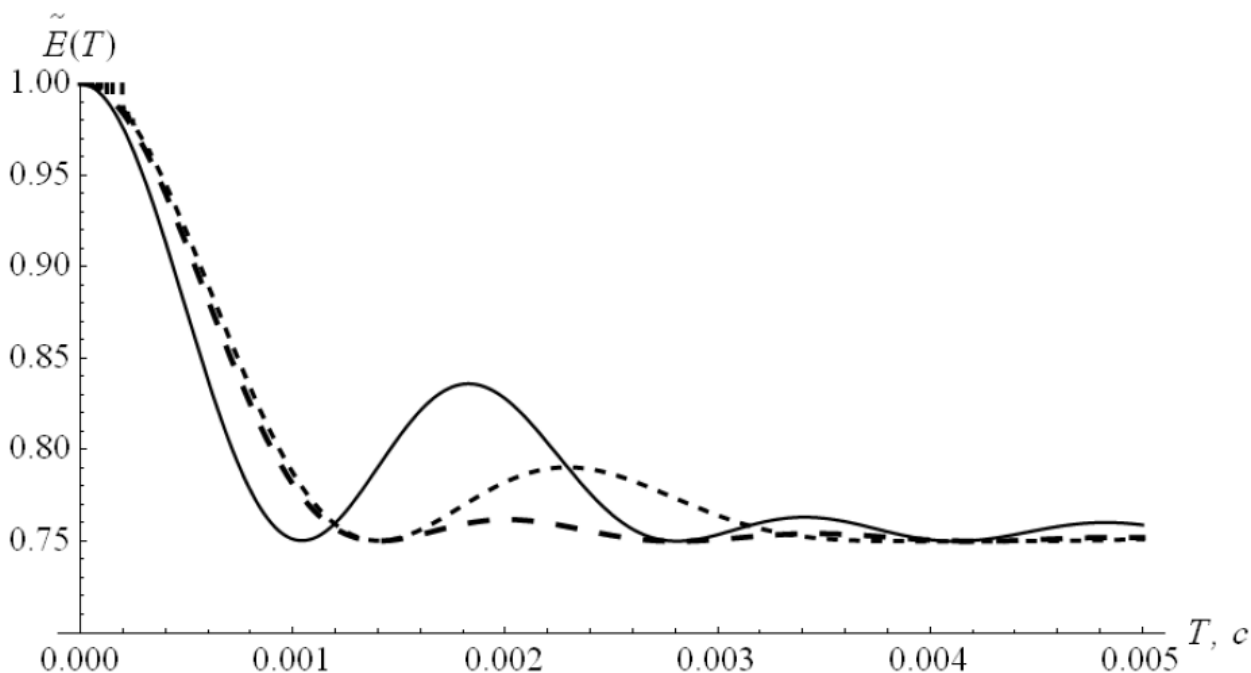


Рисунок 3.22 - Графіки енергії залишкових коливань елементів машини при різних законах зміни швидкості маси m_1 для невеликої тривалості розгону цієї маси

Отже, фізично реалізовані тривалості перехідних процесів (одиниці секунд) машини дають змогу усунути високочастотні коливання у його приводі. Даний висновок також можна „підкріпити” таким чином: у моделі (3.111) не враховане в’язке тертя у приводі. Якщо його врахувати, то отримаємо ще швидше затухання енергії коливань. Аналіз графіка для закону (3.96) на рис. 3.22 показує, що енергія коливань перетворюється у нуль при (3.126). Якщо наперед невідомі значення m_3 та c_k , то використовувати цей закон не рекомендується. При такій ситуації (m_1 та c_k невідомі) варто використовувати закон (3.98) або (3.115). В останньому випадку необхідно збільшувати тривалість перехідного процесу, щоб досягти значного

зменшення енергії коливань. Закон (3.97) також не рекомендується використовувати, оскільки енергія залишкових коливань є відносно значною навіть при значній тривалості розгону.

Загалом, висновки щодо отриманих графіків (рис. 3.21) можна перенести із дослідження двомасової динамічної машини, в якій не враховується приведена пружність приводу. Приведемо графіки на рис. 3.23 у іншому масштабі – це дозволить проаналізувати залишкову величину показника (3.125) для значної тривалості перехідного процесу.

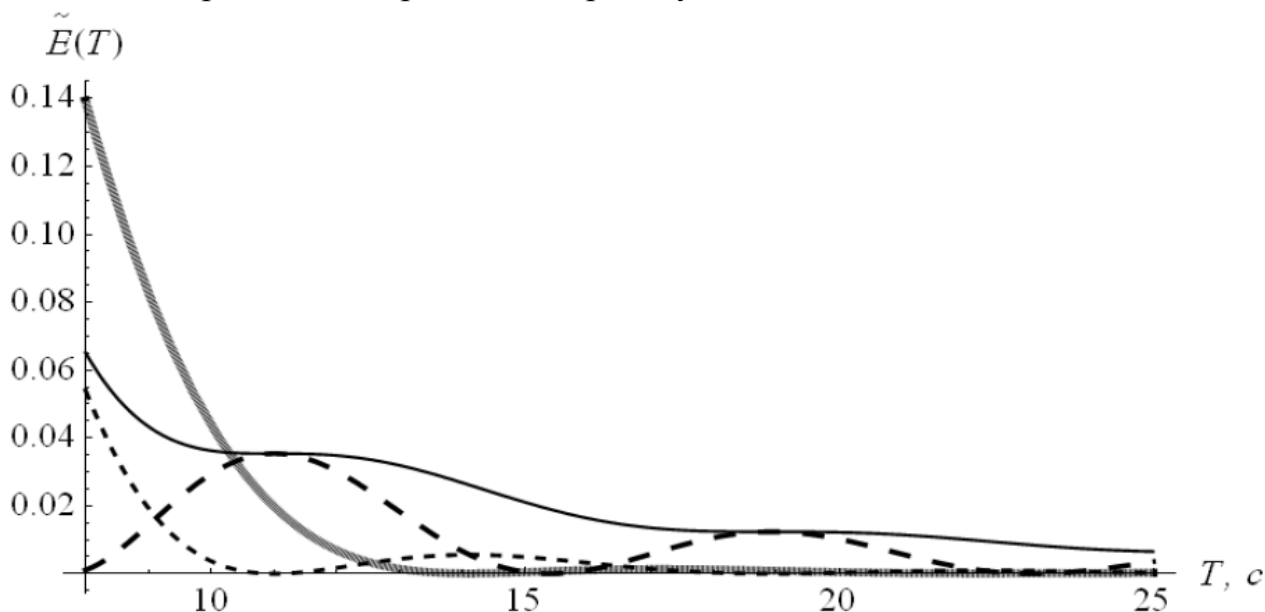


Рисунок 3.23. Графіки енергії залишкових коливань елементів машини при різних законах зміни швидкості маси m_I для значної тривалості розгону

Із рис. 3.23 можна зробити висновок: збільшення тривалості перехідного процесу дозволяє зменшити показник (3.125) – для всіх законів (3.96)-(3.99), (3.115). Крім того, збільшення плавності руху приводу зумовлює певні зміни у динаміці машини. Ці зміни полягають у тому, що зі збільшенням плавності руху необхідно збільшувати тривалість перехідного процесу для досягнення практичної відсутності енергії залишкових коливань елементів машини.

3.5 Питання та завдання для самоперевірки

- 1 У чому полягає зміст перетворення (3.10), яке виконано для розв'язування диференціального рівняння (3.3)?
- 2 Прокоментуйте графіки, які показані на рис. 3.4 та поясніть, чому у першому випадку (рис. 3.4, а) амплітуда коливань менша ніж у другому (рис. 3.4, б).
- 3 Вкажіть основні методи зменшення динамічної похибки при виконанні руху динамічної системи (рис. 3.1).
- 4 Якою функцією описується швидкість руху одномасової динамічної системи при лінійній механічній характеристиці приводного двигуна?

- 5 Назвіть переваги та недоліки поліноміальної апроксимації механічної характеристики асинхронного двигуна.
- 6 Яку головну перевагу при динамічних розрахунках машин дає використання сплайнової апроксимації механічної характеристики двигуна?
- 7 Як називається рівняння, до якого зводиться інтегрування рівняння руху одномасової динамічної системи при використанні сплайнової моделі механічної характеристики приводного двигуна?
- 8 Вкажіть показник, за яким проведена оцінка „базових” законів руху двомасової динамічної системи.
- 9 Використовуючи графіки, що приведені на рис. 3.17 та приймаючи значення тривалостей розгону двомасової динамічної системи рівними $\frac{\pi}{\Omega_0}$, $\frac{2\pi}{\Omega_0}$, $\frac{2,5\pi}{\Omega_0}$ та $\frac{4\pi}{\Omega_0}$, вкажіть найкращий за показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси „базовий” закон руху.
- 10 Використовуючи динамічну модель представлену на рис. 3.19, поясніть форму запису диференціальних рівнянь, які їй відповідають.
- 11 На яку частку зменшується енергія коливань тримасової динамічної системи навіть при незначній тривалості її розгону?

РОЗДІЛ 4

МІЦНІСТЬ МАШИН

4.1 Міцність конструкції

Це здатність конструкції, деталі машини не руйнуватися під час сприймання навантаження в визначених режимах навантаження.

Великий вплив на міцність мають матеріали, способи зміцнення, розміри геометричної форми конструкції. Питання міцності приймають особливе значення у зв'язку з зростаючими вимогами до підвищення надійності і довговічності, зниженню маси конструкції. В забезпеченні міцності важливу роль відіграють методи міцностних розрахунків. Розрахунки будь-якої конструкції або елементів металургійного обладнання ведуться по умовно прийнятним величинам навантажень, тривалості і характеру їх дії.

Навантаженням називається зовнішня силова дія, яка викликає напружено-деформований стан конструкції або окремих її деталей.

Діючі навантаження класифікують наступним чином: за характером дії статичні і динамічні; за характером робочого процесу стаціонарні і нестаціонарні.

Статичні навантаження характеризуються тим, що їх значення і місце прикладення постійні або змінюються незначно, що при розрахунку конструкції знехтують впливом сил інерції. В свою чергу вони поділяються на постійні і тимчасові.

До постійних відносяться навантаження, значення яких для даної конструкції приймаються незмінними. Прикладом постійного статичного навантаження є власна вага конструкції. Постійні навантаження можуть викликати в деталях конструкції змінні напруження. Так, в результаті вигину з обертанням в перерізах валу за один оберт відбувається зміна розтягаючих і стискуючих напружень. Аналогічно в результаті періодичного входу в зачеплення зубці зубчастих передач зазнають тимчасові напруження при постійному робочому навантаженню, діючому на виконавчий орган машини.

До тимчасових статичних відносяться навантаження, діючі протягом довготривалого циклу роботи (наприклад, початкова затяжка різьбових з'єднань, тиск рідини або газу в різному обладнанні, попередній натяг тягових органів та ін.).

Динамічні навантаження характеризуються швидкою зміною значення, напрямку або точки прикладення, що викликає в елементах конструкції значні сили інерції. Причини появи динамічних навантажень – нерівномірність робочого процесу; прискорення при пусках, гальмуваннях і реверсуваннях; невірноваженість деталей, які швидко обертаються; надмірний знос зубчастих і ланцюгових передач; зазори в рухомих з'єднаннях та ін.. Динамічні

навантаження викликані нерівномірністю робочого процесу характерні для поршневих машин (насосів і двигунів) і особливо для машин і інструментів ударної і вібраційної дії (молотів, копрів, вібросит та ін.).

Стаціонарним називають навантаження з постійними характеристиками робочого процесу. Навантаження зі змінними характеристиками робочого процесу відносять до нестаціонарного. До машин, які зазнають стаціонарне навантаження, відносять вентилятори, машини центральних насосних станцій і деякі інші. Більшість машин зазнає нестаціонарне навантаження.

Зміна рівня навантажень і частота повторення навантажень визначеного рівня залежить від технологічного процесу, який виконує машина, і передаточного числа від виконавчого органу до деталі, яка розглядається.

Під дією експлуатаційних навантажень виникають відмови деталей машин і обладнання, які за прийнятими критеріями міцності відносяться до втомних і крихких руйнувань, пластичним деформаціям, повзучості і порушенням зчеплення. Види відмов за критеріями міцності та причини їх виникнення і характерні приклади наведені в табл.4.1.

Таблиця 4.1 – Види відмов за критеріями міцності

Вид	Причини виникнення	Характерні приклади
Втомне руйнування	1 Змінні напруження, рівень яких перевищує границю витривалості. Руйнуванню передують поступовий розвиток втомних тріщин 2 Термічна втома, яка розвивається під дією повторних температурних напружень	1 Різьбові з'єднання 2 Тормозні шківни лебідок
Пластична деформація	Перенавантаження деталей, виготовлених з незагартованих і високо відпущених сталей	Викривлення валів, осадка пружин, подовження болтів при зайвих затяжках, зминання труб, шпонок та їх канавок і ін.
Повзучість	Тривала силова дія в поєднанні з нагрівом	Появляється в пластмасових деталях
Крихкі	Ударні і статичні навантаження, зайві напруження при посадках з натягом (в деталях з чавуна і низько відпущених сталей)	Маточини коліс дисків, пластини втулко-роликів ланцюгів і т.д.
Відмови, викликані порушеннями зчеплення		Провороти і осьові зміщення в пресових з'єднаннях, відносно проковзування в

		фрикційних муфтах і пасових передачах, самовідкручування різьбових з'єднань
--	--	---

В частині математичного опису навантаження поділяються на:

- навантаження, що є випадкові величини;
- навантаження, що є випадкові функції часу;
- навантаження, що змінюються не тільки за часом, але і в просторі за випадковим або детермінованим законам.

4.2 Несуча здатність і граничний стан елементів металургійних машин

Надійність металургійних машин залежить від надійності окремих елементів (деталей). Надійність деталей механізму і металоконструкцій за умовами міцності і циклічної міцності залежать не тільки від навантажень, але й від несучої здатності цих елементів.

Під несучою здатність розуміють таке навантаження, під дією якого деталь досягає граничного стану. Граничним називається такий стан деталі, при якому її подальша експлуатація припиняється.

Граничний стан за умови статичної міцності виникає коли під дією граничних навантажень відбувається руйнування або втрачається форма деталі в наслідок виникнення пластичних деформацій або втрата стійкості, як наприклад, руйнування чавунного корпусу редуктора або вигін сталевого валу внаслідок виникнення значних навантажень в механізмі.

Граничний стан за умовою циклічної міцності настає коли під дією змінних напружень викликаних відповідними навантаженнями, утворюються тріщини втоми, які досягають граничної величини. Можливий випадок, коли внаслідок утворення цих тріщин відбувається руйнування деталі. Прикладом може бути припинення експлуатації ливарного крану в зв'язку з виявленням в металоконструкції моста тріщин граничної довжини або внаслідок раптового руйнування валу, спостереження за розвитком тріщин в якому утруднюється, оскільки він знаходиться в редукторі.

Граничний стан за умовами зношування настає коли в результаті тертя між деталями, які знаходяться під дією зовнішніх навантажень, при певних температурах, швидкостях, умовах мащення і забруднення поверхонь тертя, виникає граничний знос деталі. Наприклад, знос відкритих зубчастих передач механізму стаціонарного роторного вагонопрокидувача. Можливі і інші граничні стани.

Несуча здатність елементів металургійних машин залежить від міцностних розмірів і конфігурацій деталей, механічних характеристик матеріалу, з якого вони виготовлені, термічної і холодної обробки поверхні і внутрішніх шарів матеріалу. Навколишнє середовище впливає на несучу здатність через температуру, вологість, різні особливості, що роблять його агресивним. При низьких температурах багато матеріалів переходять з в'язкого стану в крихкий.

У ряду конструкційних сталей при низьких температурах t різко знижується ударна в'язкість, що приводить до хладоламкості a_5 (рис.4.1). На хладоламкість сталевих деталей окрім температури охолодження впливають хімічний склад і структура сталі, наявність концентраторів напруг, швидкість прикладення зовнішньої загрузки, технологія виробництва сталі та інші фактори. Процес крихкого руйнування починається з зародження тріщини, яка розповсюджується з різною швидкістю, що призводить до руйнування елемента. За критерієм хладоламкості найбільш небезпечні вуглецеві киплячі сталі марок БСтЗ, БСтЗкп та інші. Низькі температури знижують надійність також багатьох неметалічних деталей [39].

Несуча здатність деталей машин залежить від часу. Під дією навантажень матеріали виявляють в тій чи іншій мірі повільну текучість. Це явище називається повзучістю. При повзучості руйнуюче напруження залежить від тривалості роботи. Зі збільшенням часу роботи міцність падає. При цьому замість звичайних характеристик міцності застосовують границю тривалої міцності, рівній напруженню, яке при визначеній температурі призводить до відмови за проміжок часу t . Корозія металів, якщо не прийняті спеціальні заходи, розвивається достатньо швидко. Особливо помітно відбуваються ці процеси в воді і різноманітних агресивних середовищах. Корозія знижує границі втоми, змінюючи таким чином несучу здатність за часом.

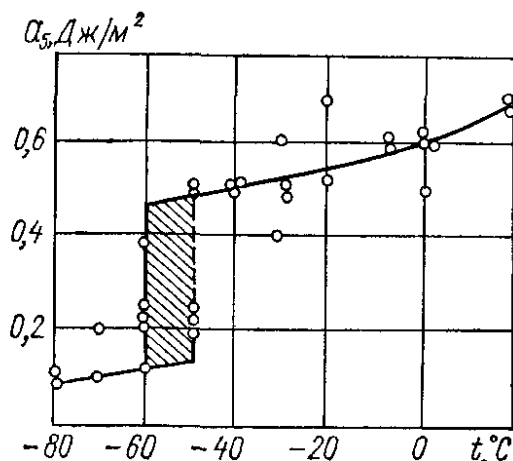


Рисунок 4.1 - Залежність ударної в'язкості a_5 сталі марки 15ХСНД від температури t при радіусі надрізу на зразку 1 мм [42]

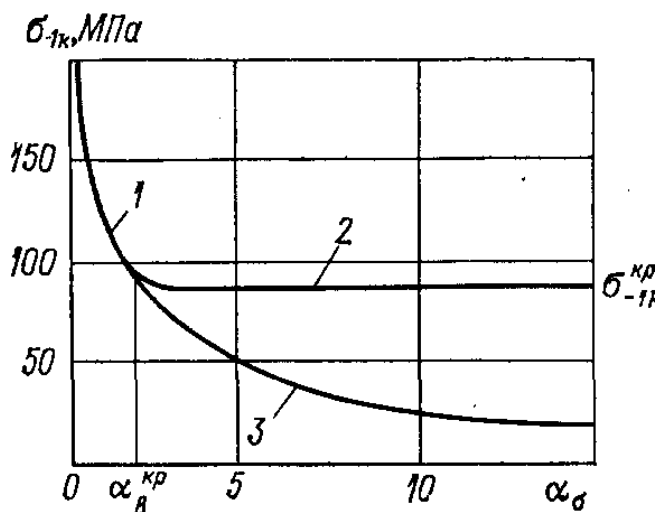
4.3 Статична і циклічна міцність деталей машин

При появі граничних навантажень і відповідних напруг в елементах машин можуть виникати залишкові деформації або руйнування. Матеріали, з яких виготовлені деталі, можуть знаходитися у в'язкому або крихкому стані. У в'язкому стані їхньому руйнуванню передують істотна пластична деформація. Для визначення несучої здатності деталей з пластичних матеріалів звичайно розглядаються їх поведінка при невеликому ступені пластичного деформування. Тут істотне значення набуває визначення границі текучості, яка при розрахунках в пружно-пластичній області приймається рівною границі пропорціональності на кривій деформування [38]. Розрізняють дійсну і умовну діаграму деформування. В умовній діаграмі на вісі ординат відкладають напруження $\sigma = \frac{S}{F_0}$, а на вісі абсцис – деформації $l = \frac{\Delta l}{l_0}$. Тут S - сила, що діє на зразок, що розтягається; F_0 , l_0 - початкова площа перетину і довжина зразка; Δl - абсолютна деформація зразка.

На цій діаграмі границя текучості відповідає залишковій деформації зразка, рівній 0,2 %. Значення цієї умовної границі текучості приводиться в довідковій літературі. Слід враховувати, що після виникнення пластичних деформацій в будь-якій частині перерізу деталі має місце збільшення несучої здатності. Це відбувається за рахунок перерозподілу напружень по перерізу (наприклад, при вигині вісі чи балки і за рахунок зміцнення матеріалу деталі при пластичному деформуванні). В крихкому стані руйнуванню передують істотна пластична деформація. При цьому виникають умови для швидкого розвитку тріщин як раніше утворених так і нових. Зі швидким розвитком тріщин, утворенню яких супроводжують малі пластичні деформації, пов'язаний механізм крихкого руйнування. Крихке руйнування має місце в високоміцних сталях, чавунах, м'яких вуглецевих сталях, працюючих при низьких температурах, а також в конструкціях великих габаритних розмірів і товщини, в зварних і литих виробах. Причиною утворення крихкої тріщини є місцеве вичерпання пластичності. В лінійній механіці руйнування показано, що зусилля, прикладені перпендикулярно наявній тріщині, викликають на її кінцях напружений стан, що може викликати руйнування при номінальних напруженнях нижче границі текучості [40]. Під дією змінних напружень в деталях механізмів і металоконструкцій відбувається поступове накопичення пошкоджень. Цей процес називається втомою, а здатність деталей опиратися втомі – циклічною міцністю або витривалістю. В початковій стадії накопичення циклічних пошкоджень відбуваються пластичні деформації окремих кристалів, з яких складається метал. Ці пластичні деформації викликають перерозподіл напруг, і на поверхні ряду кристалів виникають лінії зрушень. Пластичне деформування

супроводжується зміцненням окремих зон кристалів і одночасно розпушенням структури в області внутрішніх кристалічних дефектів. Під дією змінних напруг, які перевищують визначений рівень, починають утворюватися із ліній зрушення мікротріщини. При розвитку мікротріщини переходять в макротріщини. Останні призводять до зменшення міцностного перерізу деталі, і після того як розмір тріщини досягне граничного значення, настає крихке руйнування деталі. Таким чином, процес втомного руйнування можна поділити на дві стадії [40].

Перша стадія - до початку утворення макротріщини, друга – від моменту її утворення до руйнування деталі. На цей час ще немає достатньо апробованих загальних оцінок закономірностей розповсюдження тріщин в деталях машин складної конфігурації. В зв'язку з цим розрахунки циклічної міцності як до утворення макротріщин, так і до повного руйнування носять ідентичний характер [38]. Відомо, що границі витривалості, визначені за умови утворення тріщини і за умови кінцевого руйнування, збігаються при коефіцієнтах концентрації $\alpha_\sigma < 2...3$. При великих коефіцієнтах концентрації кількість циклів, при яких відбувається розвиток макротріщини з моменту її утворення до руйнування перерізу, складає 70-80% від загального ресурсу деталі. Розвиток втомної тріщини відбувається в результаті циклічних деформацій в області вершини тріщини. Встановлено, що в загальному випадку розповсюдження макротріщини від появи до повного руйнування деталі можна поділити на три етапи [40]. Перший етап характеризується малою швидкістю розповсюдження тріщини уздовж смуг ковзання. На другому (основному) етапі тріщина зростає приблизно зі сталою швидкістю. На третьому етапі, коли тріщина має вже великі розміри, швидкість зносу збільшується і відбувається крихке руйнування (доламання) деталі. В цей же час експериментальні і теоретичні дослідження також, як і експлуатаційні спостереження, свідчать про те, що не завжди поява тріщини втоми призводить до руйнування деталі (зразка) [40]. В ряді випадків виникають тріщини, які не розповсюджуються або з дуже малою швидкістю зросту. Очевидно, що розробка і використання можливостей зменшення швидкості зростання тріщин є значним резервом збільшення довговічності машин.



1,2 – границі витривалості по руйнуванню;
3 – границі витривалості по утворенню тріщин

Рисунок 4.2 - Залежність границі втоми σ_{-lk} від теоретичного коефіцієнта концентрації α_σ при випробуваннях зразків з низьковуглецевої сталі на згин по симетричному циклу навантаження

З рисунку 4.1 видно, що після критичного теоретичного коефіцієнта концентрації α_σ^{kp} відбувається розподіл границь витривалості. В надрізах $\alpha_\sigma > \alpha_\sigma^{kp}$ з'являються втомні тріщини, які не розповсюджуються. Розвиток тріщини зупиняється внаслідок зміни напруженого стану матеріалу у вершини, зміцнення матеріалу в області високих концентрацій напруг і ряду інших причин. Теоретичні дослідження цього питання не є вичерпні, проте в ряді випадків вже зараз можна розраховувати критичні значення теоретичних коефіцієнтів концентрації і границі витривалості по руйнуванню і тріщиноутворенню. Можливе розрахункове визначення граничної довжини тріщини при відомому рівні діючих напруг [40].

Основною характеристикою циклічної міцності є крива втоми, яка пов'язує максимальне напруження σ_{max} (рис.4.3) в циклі навантаження з кількістю циклів, які витримує деталь до утворення тріщин або руйнування.

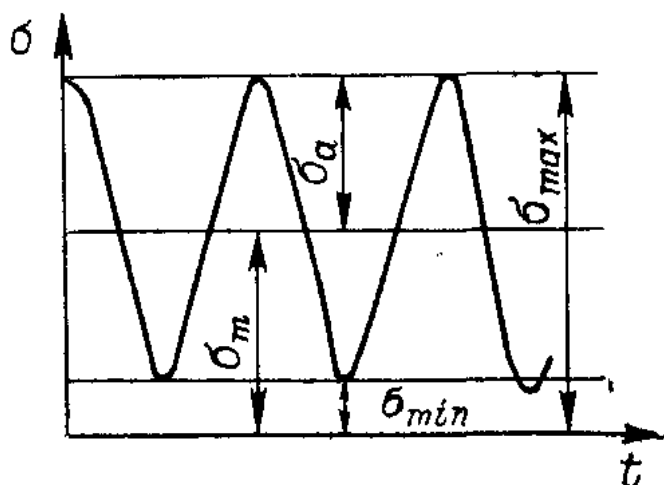


Рисунок 4.3 - Асиметричний процес зміни напружень в перерізі деталі

При експериментальній побудові кривих втоми спостерігається розкидання результатів, що пояснюється випадковою відмінністю в структурі металу деталі, її обробки та іншими обставинами. Зробивши значне число випробувань, можна визначити закон розподілу кількості циклів N до утворення тріщини або руйнування деталі $f_1(N)$ при визначеному рівні максимальних напружень σ^1 . Можливе також визначення закону розподілу границі витривалості $f(\sigma_{rk\delta})$ (рис. 4.4,а).

Через експериментально отримані точки можуть бути проведені криві втоми з різною імовірністю не руйнування P_n деталей чи зразків, що випробуються.

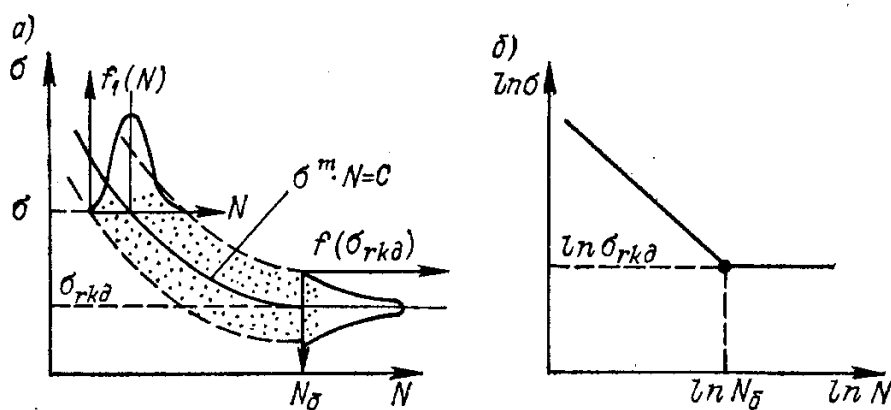


Рисунок 4.4 - Криві втоми: а) – в системі координат $\sigma - N$; б) – в логарифмічній системі координат

Рівняння кривої втоми

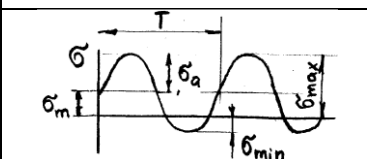
$$\sigma^m N = C, \quad (4.1)$$

де m – показник степеня кривої втоми; C - константа.

Показник степені m кривої втоми, яка побудована за умови утворення тріщини, вище за m , визначений за умови руйнування.

Рівняння кривої втоми (4.1) відповідає певним характеристикам циклу зміни напружень. До їх числа відносяться максимальне σ_{\max} і мінімальне σ_{\min} напруження, амплітуда σ_a , середнє напруження σ_m (рис. 4.4), коефіцієнт асиметрії циклу r , що визначаються по залежностям з табл. 4.2.

Таблиця 4.2 - Характеристика циклів навантаження

Цикл	Закон періодичного навантаження	Характеристика циклу навантаження		
		амплітуда	середнє напруження	коефіцієнт асиметрії
Асиметричний		$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$	$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$	$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$
Симетричний		$\sigma_a = \sigma_{\max}$	$\sigma_m = 0$	$R_\sigma = -1$
Отнулевий		$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2}$	$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max}}{2}$	$R_\sigma = 0$

Криву втоми можна побудувати в логарифмічній системі координат (рис. 4.4, б). Для більшості сталей, що застосовуються в металургійному машинобудуванні, точка перелому з координатами σ_{rk0} і N_σ відповідає переходу на ділянку кривою втоми, паралельної вісі абсцис. Тут σ_{rk0} - границя витривалості, а N_σ - базове число циклів.

Границя витривалості дорівнює такому максимальному напруженню циклу, дія якого при практично необмеженому числі циклів не викликає руйнування деталі. Обмежена границя витривалості відповідає такому максимальному напруженню циклу ($\sigma = \sigma_{\max}$) при якому відбувається руйнування деталі в області лівої гілки кривої витривалості, (рис. 4.4,б).

В металоконструкціях металургійних машин іноді виникають тріщини при малому числі циклів напруження ($N < 10^5$). Звичайно це пов'язано з не проваром, підрізами швів та іншими дефектами виготовлення, а також систематичними перенавантаженнями. При якісному виготовлення і нормальній експлуатації при малому числі циклів не виникають втомні тріщини [8].

4.4 Розподіл несучої здатності елементів за умови статичної і циклічної міцності

Для визначення несучої здатності елементів застосовують механічні характеристики матеріалів, з яких вони виготовлені. Так, в багатьох випадках несуча здатність деталі визначається за залежністю

$$S_0 = \sigma_{np} F,$$

де σ_{np} - граничне напруження (границя текучості, часовий опір, границя втоми т.д.);

F - геометричний фактор розрахункового перерізу (момент опору, площа перерізу деталі).

Експериментальні дослідження границь текучості, міцності, втоми та інших характеристик зразків і деталей свідчать про істотне їх розкидання [38, 42]. Важливішими причинами цього розкидання є:

- структурна неоднорідність металів однієї плавки, обумовлена викривленнями кристалічної решітці, випадковими включеннями, порами і т.і.;
- міжплавочне розсіювання механічних характеристик, випадкові зміни режимів механічної і термічної обробки, зварювання і т.і.;
- розкидання розмірів, які впливають на механічні характеристики (радіуси галтелей, діаметри в зонах посадок, катети зварних швів і т.і.);
- випадкові відхилення від проектних форм (не прямолінійність стрижнів, місцевий вигін листових поверхонь і т. і.).

Несуча здатність елементів може змінюватися з часом під впливом зношування, корозії, тріщинах, що розвиваються, та інших явищ.

На теперішній час ще не накопичені дані для визначення в повному обсязі вірогідних характеристик несучої здатності елементів машин, проте по ряду механічних характеристик зроблено багато.

Відомо, що закон розподілу границі витривалості може бути отримано в результаті випробувань великої кількості зразків. Так, випробувавши біля 200 зразків, можна отримати всього 4-5 точок емпіричного розподілу. Відносно мала кількість застосування експериментальних точок пояснюються задовільною апроксимацією статистичних розподілів законами Вейбула, нормальним і нормально-логарифмічним [38]. Найбільш зручний для розрахунків нормальний закон. Відомо, що він двох параметричний. Одним з параметрів є математичне очікування (МО) $\sigma_{-lk\hat{\sigma}}$, другий параметр – середнє квадратичне відхилення (СКВ) $S_{-lk\hat{\sigma}}$. Часто застосовується коефіцієнт варіації

$$g_{-lk\hat{\sigma}} = \frac{S_{-lk\hat{\sigma}}}{\sigma_{-lk\hat{\sigma}}}.$$

Знаючи МО і $g_{-lk\hat{\sigma}}$, можна легко визначити СКВ.

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{-1k\delta} \rangle &= \langle \sigma_{-1} \rangle / k_{\sigma\delta}; \\
k_{\sigma\delta} &= \frac{k_{\sigma} / \varepsilon_{\sigma} + 1 / \beta}{\beta_y} - 1; \\
\langle \tau_{-1k\delta} \rangle &= \frac{\langle \tau_{-1} \rangle}{k_{\tau\delta}}; \\
k_{\tau\delta} &= \frac{k_{\tau} / \varepsilon_{\tau} + 1 / \beta - 1}{\beta_y},
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

де $\langle \sigma_{-1} \rangle$ - середнє за сукупнїстю всїх плавок значення границї витривалостї при вигинї з обертанням гладкого зразка;

$\langle \tau_{-1} \rangle$ - теж саме,, але при крученї;

k_{σ} , k_{τ} - ефективнї коефіцієнти концентрації деталї;

ε - коефіцієнт впливу абсолютних розмірів поперечного перерїзу;

β - коефіцієнт впливу якостї обробки поверхнї;

β_y - коефіцієнт впливу змїцнення поверхнї.

В таблицї 4.3 наведенї середнї значення границь витривалостї деяких розповсюджених сталей :

Таблиця 4.3 – Статистичнї данї границь витривалостї сталей

Марка сталї	Товщина заготовки, мм	Вигїн $\langle \sigma_{-1} \rangle$, МПа	Кручення $\langle \tau_{-1} \rangle$, МПа
Ст3сп	будь-яка	190	110
СТ5	16	220	130
45	до 80	380	230
	80-120	350	210
	бїльш за 120	250	150
40Х	до 120	410	240
	120-200	360	210
	бїльш за 200	320	200
4-ХН	до 200	420	250
	бїльш за 200	360	210
34ХН3М	бїльш за 160	400	240

Дослїдження свїдчать про те, що такї механїчнї характеристики, як границя мїцностї, границя текучостї, вїдносне подовження, вїдносне звуження, ударна в'язкїсть, розподїляються по нормальним законам [42].

В роботї [40] наведенї статистичнї данї по стальним зразкам, що вирїзанї з листової і стрїчкової сталї рїзних плавок на рїзних заводах. Деякї вїдомостї по характеристикам ряду сталей зведенї в таблицї 4.4.

Таблиця 4.4 - Статистичні характеристики границь текучості

Марка сталі	Діаметр заготовки, мм	$\langle \sigma_{\tau} \rangle$, МПа	ϱ_{τ}	$\langle \sigma_{\epsilon} \rangle$, МПа	ϱ_{ϵ}
СтЗсп	4-26	290	0,09	550	0,09
	10-40	280		510	
	40-60	270		480	
Стбсп	будь-який (190НВ)	330	0,07	600	0,07
45	80 (270 НВ)	760	0,07	1050	0,07
	120 (240 НВ)	640		930	
	будь-який (200 НВ)	530		850	
40Х	120 (270 НВ)	850	0,05	1020	0,05
	120-200 (240 НВ)	740		910	
	будь-який (200 НВ)	570		830	
40ХН	200 (240 НВ)	740	0,06	930	0,06

4.5 Розрахунки на міцність деталей при проектуванні

При проектуванні необхідно виконати наступні основні розрахунки: на міцність об'ємну і (або) поверхневу, жорсткість власну і (або) контактну, зносостійкість, теплостійкість, вібростійкість. Будь-який розрахунок повинен виконуватися за такою схемою:

- вихідні дані для розрахунку;
- складання розрахункової схеми;
- виявлення основних критеріїв працездатності;
- проведення безпосереднього розрахунку;
- висновки.

Умова міцності - це порівняння в аналітичному вигляді стану матеріалу з відповідним показником його граничного стану. Стан матеріалу оцінюється за допомогою рівняння стану. У випадку руйнування внаслідок активного пластичного деформування, втомленості і повзучості (показником граничного стану є відповідне напруження) рівняння стану дозволяють оцінити вплив співвідношення головних напружень на досягнення граничного стану і розрахувати так звані еквівалентні напруження, що інваріантні до діючого виду напружено-деформованого стану. Таким чином, у загальному випадку умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\text{екв}} \leq \sigma_{\text{гр.ст}} / \eta = [\sigma]$$

У випадку крихкого руйнування умова міцності записується у вигляді

$$K_I \leq K_{Ic} / \eta = [K_{Ic}]$$

де K_I - коефіцієнт інтенсивності напружень в області навколо вершини тріщини

η - коефіцієнт запасу міцності.

Еквівалентні напруження визначаються за допомогою теорій міцності, побудованих на механічних моделях граничного стану. Розглядають такі основні чотири моделі (теорії).

Для забезпечення нормальної працездатності конструкції необхідно, щоб максимальні напруження не перевищували граничних, при яких конструкція досягає відповідного граничного стану.

4.5.1 Методи розрахунку на міцність

Виконуються з метою визначення розмірів і форми деталей той чи іншої конструкції, для унеможливлення їх руйнування і неприпустимих деформацій в умовах нормальної експлуатації. Сутність і ефективність існуючих методів зведені в табл.4.5.

Таблиця 4.5 - Сутність і ефективність методів розрахунку на міцність

Методи		Сутність	Ефективність
Детерміністичні	проектні	Визначаються найбільш характерні розміри, необхідні для початку конструювання	Результат кінцевий в простих випадках, розміри і форма деталей змінюються при подальшому їх узгодженню з вимогами і діючими стандартами
	перевірочні	Оцінюються конструкційна міцність шляхом спів поставлення розрахункових запасів міцності з припустимими	Якщо $S_{розр.} < [S]$ вносяться необхідні конструктивні і технологічні зміни, які підвищують розрахункову міцність
Імовірності		Навантаження і міцності властивості задаються законами і розподілами, отриманими на основі статистичної інформації. Запаси міцності встановлюються в залежності від планованого рівня безвідмовної роботи	Використання ускладнюється із-за відмови або недостатнього об'єму статистичної інформації, необхідної для виявлення законів розподілу навантажень і міцності деталей конструкції

4.5.2 Детерміністичні методи розрахунку на міцність

При проектуванні деталей виконують розрахунки на статистична міцність і на опір втоми як всього деформованого об'єму (на об'ємну міцність). Так і поверхневих шарів (на поверхневу міцність).

4.5.2.1 Розрахунки на міцність при статичному навантаженні

Умова міцності має вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &\leq [\sigma], \\ \tau_{\max} &\leq [\tau],\end{aligned}\quad (4.3)$$

або

$$n \geq n, \quad (4.4)$$

де σ_{\max} і τ_{\max} - максимальні розрахункові нормальне і дотичне напруження;

$[\sigma]$ і $[\tau]$ - припустимі напруження;

n - розрахунковий коефіцієнт запасу міцності при розрахунку по нормальним напруженням n_σ , по дотичним n_τ і загальний (сумарний) n_Σ ;

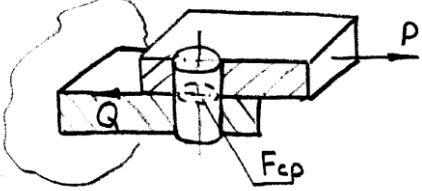
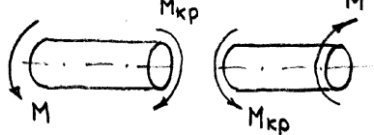
$[n]$ - припустимий (нормований) коефіцієнт запасу міцності.

Під розрахунковим коефіцієнтом запасу міцності розуміють відношення граничних напружень для деталі (а не для зразка) до максимальних розрахункових, а припустимий коефіцієнт запасу міцності – це відношення граничних напружень до припустимих.

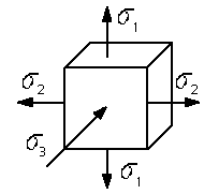
Максимальні розрахункові напруження при простих видах опору треба визначати по відомим формулам [41] в залежності від напружено-деформованого стану деталі, що проектується (табл.4.6).

Таблиця 4.6 - Умови міцності і формули для простих видів статичного навантаження

Вид навантаження	Схема навантаження	Умова міцності
Розтяг		$\sigma_p = \frac{N}{F_p} \leq [\sigma]_p$
Стиск		$\sigma_{cm} = \frac{N}{F_{cm}} \leq [\sigma]_{cm}$
Вигін		$\sigma_\epsilon = \frac{M_\epsilon}{W_{X,Y}} \leq [\sigma]_\epsilon$

Зрізування		$\tau_{зр} = \frac{Q}{F_{зр}} \leq [\tau]_{зр}$
Кручення		$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_{\nu}} \leq [\tau]_{кр}$ $\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_0} \leq [\tau]_{кр}$
Зминання		$\sigma_{з.м} = \frac{P}{F_{з.м}} \leq [\sigma]_{з.м}$

При складному опорі (при спільній дії нормальних і дотичних напружень) розрахунок треба проводити по еквівалентному напруженню $\sigma_{ек}$ у відповідності з гіпотезами міцності.



Для пластичних матеріалів найбільш розповсюдженими гіпотезами є [41]:

- гіпотеза найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності): *небезпечний стан (руйнування або виникнення пластичних деформацій) настає тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає граничного значення; умова міцності*

$$\sigma_{ек} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (4.5)$$

Недолік теорії – не враховує вплив на міцність σ_2 .

- гіпотеза питомої потенційної енергії формозміни (четверта теорія міцності): *небезпечний стан (руйнування або виникнення пластичних деформацій) настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми досягає граничного значення; умова міцності*

$$\sigma_{ек} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma] \quad (4.6)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - відповідно найбільше, середнє і найменше головні напруження.

Розрахункові формули для $\sigma_{ек}$ плоского напруженого стану:

- по гіпотезі найбільших дотичних напружень

$$\sigma_{ек} = \sqrt{\sigma_{\Sigma}^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (4.7)$$

- по гіпотезі потенціальної енергії формозміни

$$\sigma_{ек} = \sqrt{\sigma_{\Sigma}^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (4.8)$$

$$\text{де } \sigma_{\Sigma} = \sigma_{p(cm)} \pm \sigma_e = \pm \frac{F_z}{S} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y};$$

тут M_x і M_y – вигинаючі моменти в розрахунковому перерізі;

W_x і W_y - осьові моменти опору цього перерізу.

Зокрема, при $F_z = 0$ для брусів круглого перерізу умова міцності з врахуванням (4.8) і (4.9) набуває вигляду

$$\sigma_{ек} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_e} \leq [\sigma] \quad (4.9)$$

і

$$\sigma_{ек} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}}{W_e} \leq [\sigma], \quad (4.10)$$

де $M_z = M_k$.

Припустиме напруження для пластичних матеріалів

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{TP}}{[n]_T}, \quad (4.11)$$

де σ_{TP} – границя текучості при розтягу; звичайно $[n]_T = 1,2 \pm 2,5$.

Для крихких матеріалів у відповідності з гіпотезою Мора

$$\sigma_{ек} = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad (4.12)$$

де $k = \frac{\sigma_{ep}}{\sigma_{ec}}$, (σ_{ep} і σ_{ec} - границі міцності відповідно при розтягу і стиску), для

чавунів в середньому $k = 0,3$; для сталей с твердістю $\leq \text{HRC } 60$ - $k = 0,5$.

При плоскому напруженому стані

$$\sigma_{ек} = \frac{\sigma_{\Sigma}}{2}(1-k) + \frac{1}{2}(1+k)\sqrt{\sigma_{\Sigma}^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (4.14)$$

де

$$\sigma_{\Sigma} = \pm \frac{F_z}{S} \pm \frac{\sqrt{M_x + M_y + M_z^2}}{W_e}; \quad \tau = \frac{M_z}{W_p};$$

тут W_u і W_p - осьовий і полярний моменти опору круглого перерізу.

Для волокон, що зазнають розтяг, припустимі напруження

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{ep}}{[n]_e} \quad (4.15)$$

і для стиснутих волокон

$$[\sigma]_{cm} = \frac{\sigma_{всм}}{[n]_в} . \quad (4.16)$$

При розрахунках на контактну міцність у відповідності з гіпотезою найбільших контактних напружень

$$\sigma_{ек} = 0,6p_0 \leq [\sigma]_H , \quad (4.17)$$

де p_0 – найбільший тиск в межах деформованого об'єму;

$[\sigma]_H$ – припустиме контактне напруження.

У випадку дотику двох циліндрів з паралельним вісями (лінійним первісним контактом)

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{\sum k}{\eta}} q , \quad (4.18)$$

де $\sum k$ - сума головних кривин поверхонь в місці первісного контакту тіл, що дотикаються;

$$\sum k = \frac{1}{\rho_{зв}} , \quad (\rho_{зв} - \text{зведений радіус кривини});$$

$$q = \frac{F}{l} - \text{лінійна інтенсивність (} F - \text{стискаюча сила; } l - \text{довжина лінії контакту);}$$

$$\eta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} ;$$

Тут μ_1, μ_2 і E_1, E_2 - коефіцієнти Пуассона і модулі пружності матеріалів.

При круговій площі контакту (точковим первісним контакті)

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta} \right) F} . \quad (4.19)$$

Розміри площі контакту, величини найбільшого тиску і зближення дотикаючихся тіл при різній формі цих тіл та їх взаємному розташуванні можна визначити по формулам, наведеним в роботах по контактній міцності.

4.5.2.2 Розрахунок по коефіцієнтам запасу міцності при змінних напруженнях

Розрахунок треба виконувати як перевірочний після конструювання збиральної одиниці, до складу якої входить дана деталь. При цьому необхідно оцінити запас опору втомі деталі з урахуванням її абсолютних розмірів, конструктивної форми, стану поверхні і інших факторів.

Розрахунковий коефіцієнт запасу міцності потрібно визначати у відповідності з характером зміни напружень в часі і типом напруженого стану.

При регулярному навантаженні можливі наступні розрахункові випадки.

1 Якщо напружений стан лінійний і напруження змінюються по симетричному циклу, то для нормальних напружень

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\partial}}{\sigma_a} \quad (4.20)$$

і для дотичних напружень

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1\partial}}{\tau_a}, \quad (4.21)$$

де $\sigma_{-1\partial}$ і $\tau_{-1\partial}$ - границі витривалості натурної деталі;

σ_a і τ_a - амплітуди напружень, визначаються в залежності від виду деформованого стану.

Границя витривалості деталі

$$\sigma_{-1\partial} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\partial}}, \quad (4.22)$$

де σ_{-1} - границя витривалості матеріалу при симетричному циклі;

$K_{\sigma\partial}$ - коефіцієнт, який характеризує зниження границі витривалості деталі;

$$K_{\sigma\partial} = \left(\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_v}. \quad (4.23)$$

де K_{σ} - ефективний коефіцієнт концентрації напружень;

$K_{d\sigma}$ - коефіцієнт впливу абсолютних розмірів поперечного перерізу (масштабний фактор);

K_F - коефіцієнт впливу стану поверхні;

K_v - коефіцієнт впливу поверхневого зміцнення.

У випадку корозії K_F треба замінити коефіцієнтом впливу корозії $K_{кор}$.

Згідно теорії подібності втомного руйнування

$$\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_{\sigma}}{1 + \left(\frac{1}{88,3} \cdot \frac{L}{\bar{G}} \right)^{-\nu_{\sigma}}}, \quad (4.24)$$

де α_{σ} - теоретичний коефіцієнт концентрації напружень;

$\frac{L}{\bar{G}}$ - критерій подібності;

ν_{σ} - параметр рівняння подібності втомного руйнування, який характеризує чутливість до концентрації напружень і масштабному фактору;

\bar{G} - відносний градієнт першого головного напруження σ_1 , 1/мм;

L - периметр або частина периметру зразка.

Величини, що входять в формулу (2.38), можна визначати згідно рекомендаціям, наведеним в роботі [38].

2 Якщо напружений стан лінійний і напруження змінюється по асиметричному циклу, то

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\delta}}{\sigma_{ек}}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1\delta}}{\tau_{ек}}, \quad (4.25)$$

де $\sigma_{ек} = \sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m$; $\tau_{ек} = \tau_a + \psi_{\tau}\tau_m$ - еквівалентні амплітуди симетричного циклу,

рівноцінні за своєму руйнівній дії асиметричному циклу з параметрами σ_a, τ_a і σ_m, τ_m (σ_m і τ_m – середні напруження циклу),

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad \text{і} \quad \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} - \text{коєфіцієнти чутливості до асиметрії циклу}$$

напружень;

σ_0 і τ_0 – границі витривалості при отнульовому циклі напружень [38].

3 Якщо напружений стан складний, то

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (4.26)$$

Для отримання кількісних характеристик завантаженості деталей, необхідних для виконання розрахунків на опір втоми при нерегулярному навантаженні, реальний випадковий процес треба замінити схематизованим процесом, який за рівнем втомного пошкодження має бути еквівалентний реальному.

При нерегулярному навантаженні коєфіцієнт запасу міцності по нормальним напруженням

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\delta}}{\sigma_e}, \quad (4.27)$$

де

$$\sigma_e = m_{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda v_{\delta\sigma}}{N_{0\sigma} a_{p\sigma}} \sum \sigma_{ai}^{m_{\sigma}} \frac{v_{i\delta\sigma}}{v_{\delta\sigma}}}; \quad (4.28)$$

$$\sigma_{ai} \geq \frac{\sigma_{-1\delta}}{n_{\sigma}}, \quad (4.29)$$

а по дотичним

$$\tau_e = m_{\tau} \sqrt{\frac{\lambda v_{\delta\tau}}{N_{0\tau} a_{p\tau}} \sum \sigma_{ai}^{m_{\tau}} \frac{v_{i\delta\tau}}{v_{\delta\tau}}}; \quad (4.30)$$

$$\tau_{ai} \geq \frac{\tau_{-1\delta}}{n_{\tau}}.$$

В виразах(4.27)-(4.30) m_{σ} і m_{τ} – показники степенів кривих втоми; λ – число блоків навантаження; $v_{\delta\sigma}$ і $v_{\delta\tau}$ – загальне число циклів в блоку; $v_{i\delta\sigma}$ і $v_{i\delta\tau}$ – число циклів повторення амплітуд σ_{ai} , τ_{ai} в блоці; $N_{0\sigma}$ і $N_{0\tau}$ – бази випробувань; $a_{p\sigma}$ і $a_{p\tau}$ – коректуючи значення сум відносної довговічності.

Коефіцієнти запасу міцності n_σ і n_τ по формулам (4.28) і (4.29) потрібно знаходити методом послідовних з наближень, оскільки вони входять також в вирази (4.30).

Розрахунки на витривалість треба проводити в тих випадках, коли

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_m} = const \text{ або } \frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_m} = const .$$

Якщо не дотримуватися цих умов (наприклад, при виниканні пружних коливань в деталі σ_m залишається сталим, а σ_a змінюється), то розрахунковий коефіцієнт запасу міцності по нормальним і дотичним напруженням можна визначати по формулам (4.20) і (4.21).

При асиметричному циклі напружень замість σ_a треба підставити $\sigma_{a\text{ЭК}}$, а при нерегулярному навантаженні $\sigma_{\text{ЭК}}$.

При складному напруженому стані загальний запас міцності потрібно визначати по формулі (4.28).

При виконанні розрахунків особливу увагу потрібно приділяти вибору величини $[n]$.

Припустиме значення коефіцієнту запасу міцності потрібно призначати в залежності від точності визначення навантажень і характеристик матеріалу по опору втомному руйнуванню, від рівня технології виготовлення і контролю дефектності, відповідальності конструкції і однорідності матеріалу (табл.4.7, 4.8).

Таблиця 4.7 - Орієнтовні значення коефіцієнтів запасу міцності n_σ

Умови виготовлення	Умови міцності	Вимоги до надійності		
		знижені	середні	підвищені
Підвищені	підвищені	1-1,1	1-1,2	1,2-1,4
	середні	1,2-1,4	1,4-1,6	1,5-1,8
	знижені	1,4-1,7	1,6-2	1,8-2,3
Середні	підвищені	1,8-2	1,8-2,4	2,1-2,8
	середні	1,8-2,3	2,1-2,8	2,4-3,2
	знижені	2,0-2,6	2,4-3,2	2,6-3,6
Знижені	підвищені	2,2-2,9	2,6-3,5	3,0-4,0
	середні	2,4-3,2	2,8-3,9	3,3-4,5
	знижені	2,6-3,5	3,1-4,2	3,6-5,0

Таблиця 4.8 - Рекомендовані значення припустимих напружень при різних видах статичного навантаження

Вид навантаження	Матеріал	
	пластичний	крихкий
Розтяг	$[\sigma]_p = \frac{\sigma_t}{n_\sigma}$	$[\sigma]_p = \frac{\sigma_t}{n_\sigma}$
Стиск	$[\sigma]_{cm} = [\sigma]_p$	$[\sigma]_{cm} = 3[\sigma]_p$
Зминання	$[\sigma]_{zm} = 1,5[\sigma]_p$	-
Вигін	$[\sigma]_g = [\sigma]_p$	$[\sigma]_g = [\sigma]_p$
Зрізування	$\tau_{зр} = 0,75[\sigma]_p$	$\tau_{зр} = [\sigma]_p$
Кручення	$\tau_{кр} = 0,5[\sigma]_p$	$\tau_{кр} = 0,7[\sigma]_p$

При виборі $[n]$ необхідно враховувати опит конструювання, розрахунки і співставлення результатів розрахунку з даними про відмови в умовах експлуатації.

Припустиме значення коефіцієнту запасу міцності в машинобудуванні в більшості випадків рекомендується приймати рівним 1,5–2,5. Зі збільшенням габаритів і відповідальності конструкції, особливо при загрозі для життя людей, пов'язаної з руйнуванням деталі, значення $[n]$ потрібно збільшувати у зрівнянні з вказаним вище інтервалом. При достовірних даних про експлуатаційні навантаження, розподілу напружень і характеристик опору втомному руйнуванню, отриманих в результаті фундаментальних досліджень, при високому рівні технологій виготовлення і застосування відповідних засобів дефектоскопії допускаються невеликі значення $[n]=1,3\div 1,5$ навіть для деталей відповідальних конструкцій, наприклад деталей поршневих авіаційних двигунів, за умови суворого обмеження ресурсу експлуатації і поточного контролю за станом деталі. Якщо виявиться, що $n \gg [n]$ і розміри деталі зумовлені міцністю, а не жорсткістю або іншими факторами (конструктивними, технологічними), то потрібно зменшити її розміри.

Окрім розрахунку на опір втоми, необхідно перевірити також виконання умови статичної міцності, яке для пластичних матеріалів визначається величиною

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m} \geq [n]_T = 1,2 - 1,5,$$

і для крихких –

$$n_g = \frac{\sigma_g}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m} \geq [n]_g = 4,5 - 6,0.$$

При дії τ формули мають аналогічний вигляд.

4.5.3 Розрахунки на витривалість

Ці розрахунки треба проводити при дуже напружених режимах навантаження, тобто у випадках, коли амплітуда напружень циклу σ_a перевищує границю витривалості $\sigma_{-1\partial}$ натурної деталі, і строк її служби обмежений.

В основу розрахунку покладено рівняння нахиленої гілки кривої втоми у вигляді

$$\left(\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{-1\partial}} \right)^{m_\sigma} = \frac{N_{0\sigma}}{N_i}, \quad (4.31)$$

де σ_{ai} - амплітудне значення напруження симетричного циклу, при якому деталь руйнується через N_i число циклів навантаження;

$\sigma_{-1\partial}$ - границя витривалості натурної деталі, визначається по формулі (4.22);

$N_{0\sigma}$ - база випробувань. Звичайно $N_{0\sigma} = 10^6 \div 3 \cdot 10^6$; якщо не має експериментальних даних по натурній деталі, то приймають $N_{0\sigma} = 2 \cdot 10^6$;

m_σ - показник степеня кривої втомної міцності; $m_\sigma = \frac{C}{K_{\sigma\partial}}$,

причому $C=12$ – для зварних з'єднань; $C=12 \div 20$ – для вуглецевих сталей.; $C=20 \div 30$ – для легованих сталей.

При регулярному навантаженні можливі наступні розрахункові випадки:

1 Якщо напружений стан простий і напруження змінюється по симетричному циклу із заданою сталою амплітудою σ_a або τ_a , то циклічна довговічність деталі N_σ або N_τ , у відповідності (4.31)

$$N_\sigma = \left(\frac{\sigma_{-1\partial}}{\sigma_a} \right)^{m_\sigma} N_{0\sigma} \quad (4.32)$$

або

$$N_\tau = \left(\frac{\tau_{-1\partial}}{\tau_a} \right)^{m_\tau} N_{0\tau}$$

2 Якщо напружений стан простий і напруження змінюється по асиметричному циклу зі сталими σ_a (τ_a) і σ_m (τ_m), то

$$N_\sigma = \left(\frac{\sigma_{-1\partial}}{\sigma_{aек}} \right)^{m_\sigma} N_{0\sigma} \quad (4.33)$$

або

$$N_\tau = \left(\frac{\tau_{-1\partial}}{\tau_{aек}} \right)^{m_\tau} N_{0\tau},$$

де $\sigma_{aек}$ і $\tau_{aек}$ – еквівалентні амплітуди напружень;

3 Якщо напружений стан складний, то циклічна довговічність

$$N = \frac{N_{\sigma} N_{\tau}}{\left(N_{\sigma}^{\frac{2}{m}} + N_{\tau}^{\frac{2}{m}} \right)^{\frac{m}{2}}}. \quad (4.34)$$

Вираз (4.34) можна застосовувати в тих випадках, коли $m_{\sigma}=m_{\tau}=m$.

В реальних умовах експлуатації виробів (наприклад, автомобілів, верстатів) напруження в їх деталях носить, як правило, випадковий характер, причому можливе різке перенавантаження, тобто з часом змінюються і середні навантаження і амплітуда циклу. В цьому випадку довговічність деталі, виражена к км пробігу, годинах, циклах і т.д.

$$L = l_{\sigma} \lambda ,$$

де l_{σ} - тривалість блока навантаження (БН), вимірюється в к км, годинах, циклах і т.д; БН - це сукупність (наприклад, осцилограма) напружень, діючих на деталь за деякий достатньо тривалий період її роботи;

λ - довговічність деталі, виражена в кількості БН. При дії нормальних напружень

$$\lambda_{\sigma} = \frac{a_p N_0 \omega_{-1\sigma}^m}{\sum \sigma_{ai}^m v_{\sigma i}}; \quad \sigma_{ai} \geq \sigma_{-1\sigma} , \quad (4.35)$$

де a_p – сума відносних довговічностей;

$v_{\sigma i}$ – число циклів повторення амплітуди σ_{ai} в блоці.

Тут додавання робиться для всіх $\sigma_{ai} \geq \sigma_{-1\sigma}$.

Суму відносних довговічностей визначають по формулі

$$a_p = \frac{\sigma_{a \max} \xi - 0,5\sigma_{-1\sigma}}{\sigma_{a \max} - 0,5\sigma_{-1\sigma}},$$

де

$$\xi = \sum \frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{a \max}} \cdot \frac{v_{\sigma i}}{v_{\sigma}}; \quad (4.36)$$

$$\sigma_{ai} \geq 0,5\sigma_{-1\sigma}$$

де σ_{amax} – максимальна амплітуда програмного блока;

v_{σ} – загальне число циклів в блоці навантаження.

Формулою (4.36) рекомендується користатися в тих випадках, коли в спектрі амплітуд присутні значні перенавантаження. Додавання тут проводиться тільки для амплітуд, причому якщо виявиться, що $a_p < 0,1$, то треба приймати $a_p = 0,1$. Якщо в спектрі переважають в середньому близькі амплітуди, при чому , то можна приймати $a_p = 1$, тобто використовувати гіпотезу про лінійність накопичення пошкоджень.

При дії дотичних напружень розрахункові формули для визначення λ_{τ} будуть аналогічні наведеним вище.

При складному напруженому стані довговічність деталі, виражена в кількості БН, при $m_{\sigma}=m_{\tau}=m$

$$\lambda = \frac{\lambda_{\sigma} \lambda_{\tau}}{\left(\lambda_{\sigma}^{\frac{2}{m}} + \lambda_{\tau}^{\frac{2}{m}} \right)^{\frac{m}{2}}}. \quad (4.37)$$

Формулу (4.37) можна застосовувати в тих випадках, коли $m_{\sigma}=m_{\tau}=m$. При $m_{\sigma} \neq m_{\tau}$ величину λ потрібно знаходити з співвідношення

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\sigma}} \right)^{\frac{2}{m_{\sigma}}} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\tau}} \right)^{\frac{2}{m_{\tau}}} = 1.$$

Якщо різниця між m_{σ} і m_{τ} складає не більш 30 – 50 %, то допускається користуватися формулою (4.37), прийняв $m=0,5(m_{\sigma}+m_{\tau})$.

2.5 Питання для самоперевірки

- 1 Що розуміється під несучою здатністю елементів?
- 2 Які умови настання граничного стану елементів?
- 3 Від чого залежить несуча здатність елементів?
- 4 Умови настання крихкого руйнування?
- 5 Яким чином будується крива втоми?
- 6 Як записується рівняння кривої втоми?
- 7 В чому сутність детерміністичних методів розрахунку на міцність?
- 8 Наведите умови міцності на розтяг і стиск.
- 9 Наведите умови міцності при вигині і крученні.
- 10 Наведите умови міцності зрізування і зминання.
- 11 Які умови міцності при складному напруженому стані?
- 12 Які розрахункові випадки можливі при регулярному навантаженні?
- 13 В чому сутність розрахунку на довговічність?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ТА РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

- 1 Суриянов Н.Г. Теоретические основы динамики машин [Текст] : учебное пособие / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А. Белоус - О.: ОГПУ, 2000. - 302 с.
- 2 Ловейкін В.С. Теорія технічних систем [Текст] / В.С. Ловейкін, І.І. Назаренко, О.Г. Онищенко. – К. - Полтава: ІЗМН-ПДТУ, 1998. -175 с.
- 3 Зоммерфельд А. Механика [Текст] / А. Зоммерфельд [пер. с нем.]. - Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 368 с.
- 4 Коловский М.З. Динамика машин [Текст] / М.З. Коловский. - Л.: Машиностроение, 1989. - 265 с.
- 5 Бередняков В.В. Основы теории машин авиационной техники [Текст] / В.В. Бередняков. – Казань: Казанский авиационный институт, 1981.
- 6 Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами [Текст] / М.З. Коловский. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
- 7 Чиликин М.Г. Общий курс электропривода: учебник [для студ. вузов] [Текст] / М.Г. Чиликин, А.С. Сандлер. – [6-е изд., доп. и перераб.]. - М.: Энергоиздат, 1981. - 576 с.
- 8 Лавріненко Ю.М. Електропривод [Текст] : підручник / Ю.М. Лавріненко, О.С. Марченко, П.І. Савченко, О.Ю. Синявський, Д.Г. Войтюк, В.П. Лисенко (за ред. Лавріненка Ю.М.). - К.: вид-во Лір-К., 2009. - 504 с.
- 9 Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов [Текст] / Н.А. Лобов. - М.: Машиностроение, 1987. - 160 с.
- 10 Давыдов Б.Л. Статика и динамика машин [Текст] / Б.Л. Давыдов - М.: Машиностроение, 1967.- 432с.
- 11 Вибрации в технике: справочник. В 6-ти т. [Текст] / ред. совет: В.Н. Челомей. - М.: Машиностроение, 1979. - Т.2. Колебания нелинейных механических систем / Под. ред. И.И. Блехмана. 1979. - 351 с.
- 12 Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: учебное пособие для студентов вузов / В.Д. Горяченко [изд. 2-е перераб. и доп.]. - М.: Высшая школа, 2001. - 395 с.
- 13 Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. - 720 с.
- 14 Магнус К. Колебания: введение в исследование колебательных систем [Текст] / К. Магнус [пер. с нем.]. - М.: Мир, 1982. - 302 с.
- 15 Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний [Текст] / Я.Г. Пановко. - Л.: Машиностроение, 1976. - 320 с.
- 16 Андронов А.А. Теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. - Л.: Государственное издание физико-математической литературы, 1959. - 916 с.
- 17 Кузнецов А.П. Нелинейные колебания [Текст] : учебн. пособие для вузов / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. - М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002. - 292 с.

18. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики [Текст] / А.И. Лурье. - М.; Л.: Гос. Узд-во техн.-теорет. лит., 1950. - 431 с.
- 19 Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе [Текст] / С.Н. Вешеневский. – М. : Энергия, 1977. - 432 с.
- 20 Прокопеня А.Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. - Мн.: БГУ, 1999. – 265 с.
- 21 Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. - 832 с.
- 22 Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения [Текст] / Н.П. Корнейчук. - М.: Наука, 1984. - 352 с.
- 23 Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями [Текст] / А.И. Егоров. - М.: Физматлит, 2005. - 384 с.
- 24 Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых Механизмов [Текст] : дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / Григоров Отто Владимирович. - Х., 1995. – 386 с.
- 25 Мельникова Л.В. Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами микропроцессорного управления [Текст] : дисс. на соиск. степ. канд техн. наук: 05.09.03 / Мельникова Любовь Васильевна. - Одесса, 2000. - 116 с.
- 26 Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин [Текст] / Комаров М.С.- М.: Машиностроение, 1969. - 206 с.
- 27 Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин [Текст] / Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.- Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. - 286 с.
28. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтнянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. - М.: Физматгиз, 1961. - 392 с.
- 35 Красовский И.И. Теория управления движением (линейные системы) [Текст] / И.И. Красовский. - М.: Наука, 1968. - 476 с.
- 36 Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем [Текст] : учебник для вузов / В.П. Тарасик. - Мн: ДизайнПРО, 2004. – 640 с.
- 37 Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры [Текст] / А.А. Самарский, А.П. Михайлов – 2-е изд., испр. - М.: Физматлит. 2001. - 320 с.
- 38 Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во Времени [Текст] / В. П. Когаев - М.: Машиностроение, 1977. - 232 с.
- 39 Кох П. И. Климат и надежность машин [Текст] / П.И Кох - М.: Машиностроение, 1981. - 175с.
- 40 Кудрявцев П. И. Нераспространяющиеся усталостные трещины [Текст] / П. И. Кудрявцев - М.: Машиностроение, 1982. - 174 с.
- 41 Справочник по авиационным материалам [Текст] /Под ред. П.Александрова. - М.: Транспорт, 1972. - 328 с.
- 42 Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций [Текст] / В.В.

- Болотин. - М.: Машиностроение, 1984. - 402 с.
- 43 Цупров А.Н. Сборник задач по динамике машин [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Цупров. - Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2014. - 121 с.
- 44 Маслов, Г.С. Расчеты колебаний валов [Текст]: справочное пособие / Г.С. Маслов. - Москва: Машиностроение, 1980. - 271 с.
- 45 Романов В.А., Слива О.К. Аналитическая динамика и теория колебаний валов [Текст] : Учебное пособие / В.А. Романов . - Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2003. - 116 с.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Термін	Позначення	Визначення терміна
1	2	3
Автоколивання		Автоколивальні або самозбудливі процеси
Амплітуда циклу		Відхилення напружень від їх середнього значення при циклічному навантаженні
Амплітудно-частотна характеристика		Залежність між амплітудою і частотою коливань заданої точки конструкції
Анізотропія		Властивість матеріалу, яка полягає в неоднаковості фізико-механічних характеристик по різних напрямках
База випробувань на витривалість		$N=10^7$ - циклів – для сплавів заліза, $N=10^8$ - циклів – для кольорових металів
Балка		Брус, який працює переважно на згин
Брус		Об'єкт, довжина якого на один або два порядки більша за розміри його поперечного перерізу
Вал		Стержень, який працює переважно на кручення
Варіаційний принцип Кастільяно		Якщо деформація системи узгоджується з усіма внутрішніми і зовнішніми в'язями, то сума робіт, виконаними можливими змінами всіх внутрішніх і зовнішніх сил на дійсних переміщеннях тіла, дорівнює нулю: $\int_V \delta \sigma^T \varepsilon dV - \int_S \delta F^T u dS = 0;$ δ – знак варіації, $\delta, \varepsilon, F, u$ – вектори напружень, деформацій, зовнішніх сил і переміщень, V – об'єм, S – площа, на якій діють сили F
Варіаційний принцип Лагранжа		Сума робіт усіх внутрішніх і зовнішніх сил, які діють на тіло, що перебуває в рівновазі, на довільній системі можливих переміщень дорівнює нулю: $\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV - \int_S \delta u^T F dS = 0;$ δ – знак варіації, $\delta, \varepsilon, F, u$ – вектори напружень, деформацій, зовнішніх сил і переміщень, V – об'єм, S – площа, на якій діють сили F
Відносне звуження при розриві	ψ	$\psi = \frac{d_k - d_0}{d_0} \cdot 100\% ,$ $(d_0, d_k$ – діаметр зразка до деформації і після неї відповідно)
Вектор деформацій	ε	$\varepsilon = \left(\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right)^T$
Вектор напружень	σ	$\sigma = \left(\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right)^T$
Власна частота коливань		Частота, на якій прагнуть здійснювати коливання всі системи
Випадкова функція		Функція, яка в результаті досліду приймає той чи інший наперед непередбачений вигляд
Вироджений оператор		Залежності (оператори), які містять тільки кінцеві величини

Втома матеріалу		Явище накопичення мікротріщин, а потім поступового перетворення їх у макротріщини у матеріалі і, як наслідок, руйнування під дією періодичних навантажень, які не перевищують границі текучості
Втома малоциклова		Руйнування матеріалу у випадку змінних напружень, коли найбільші напруження перевищують границю текучості
В'язкість ударна	a_k	Відношення роботи, витраченої на руйнування зразка спеціальної форми до площі руйнування $a_k = \frac{A_k}{S}$
Геометричні характеристики площі	$I_{yz}^{(nm)}$	Інтеграли виду $\int_A y^n z^m dydz$. Моменти площі A відносно осей y, z порядку $m \times n$. При $n = 0, m = 0$ $\int_A dydz = A$ – площа поперечного перерізу
Гіпотези опору матеріалів: а) суцільності (гіпотеза Коші) б) однорідності в) малості деформацій г) пружності матеріалу д) лінійності		Припускається, що об'єм тіла повністю (без пустот) заповнюється матеріалом; Фізико-механічні характеристики матеріалу в будь-якому елементарному об'ємі тіла однакові; Деформації тіла при навантаженні мізерно малі порівняно з початковими розмірами тіла; Деформації до певних меж є пружними, тобто повністю зникають після зняття сил, які викликали деформацію; Припущення про існування лінійної залежності між напруженнями і деформаціями до певних величин навантажень
Гістерезис		Розбіжність кривих деформації при навантаженні і розвантаженні об'єкта
Граничний стан		Стан деталі, при якому її подальша експлуатація припиняється
Границя міцності (тимчасовий опір)	σ_u (σ_e)	Умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню перед руйнуванням
Границя пропорційності (умовна)	σ_{pr}	Напруження, при якому відхилення від лінійної залежності між напруженнями і деформаціями досягає величини, встановленої технічними умовами (наприклад, зменшення модуля пружності на 10 %)
Границя пружності	σ_e	Напруження, при якому залишкові деформації досягають значення, яке встановлюється спеціальними технічними умовами (наприклад, 0.001, 0.008, 0.005 %)
Границя текучості	σ_y (σ_T)	Напруження, яке відповідає положенню площадки текучості на діаграмі розтягу для пластичних матеріалів
Границя текучості (умовна)	$\sigma_{0,2}$	Напруження, при якому залишкова деформація досягає встановленої технічними умовами величини (наприклад, 0.2 %)
Декремент логарифмічний	Δ	$\Delta = \ln \frac{a_{i+1}}{a_i}$; a_{i+1}, a_i - дві суміжні амплітуди коливань об'єкта
Деформація	ε	Зміна форми і розмірів навантаженого об'єкта без зміни його маси

Деформація залишкова	γ_{xy} γ_{yz} γ_{zx}	Деформація, яка залишається в тілі після зняття навантаження
Деформація лінійна	ε_x ε_y ε_z	Границя відношення приросту елементарного відрізка до його початкової довжини за даним напрямом при стягненні відрізка в точку (індекс показує напрям деформації)
Деформація об'ємна	ε_V	$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$
Деформація однорідна		Деформований стан, однаковий в усіх точках об'єму, який займає навантажене тіло
Деформація плоска		Деформація, при якій переміщення всіх точок об'єкта паралельні одній площині
Деформація пластична		Необоротна деформація, яка виникає при напруженнях, що перевищують границю текучості
Деформація поперечна		Деформація в напрямі, перпендикулярному до діючої сили при розтягу-стиску стержнів
Деформація пружна		Деформація, яка зникає зі зняттям навантаження, що викликало цю деформацію
Деформація пружно-пластична		Деформація, яка виникає при напруженнях, що перевищують границю текучості (сума пружної і пластичної деформацій)
Деформації головні	ε_1 ε_2 ε_3	Лінійні деформації в напрямках головних осей 1, 2, 3 (у системі головних осей кутові деформації відсутні, а лінійні набувають екстремальних значень). Вважається, що $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$
Деформування		Процес зміни форми та розмірів об'єкта при навантаженні
Динамічна система		Математична абстракція, призначена для опису і вивчення систем, що еволюціонують з часом
Дисипація		Перехідний процес, який збуджується в пружних ланках різних машин, як правило, супроводжується загасаннями коливань
Диференціальне рівняння згину балки		$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y},$ (w – прогин, M_y – згинаючий момент, E – модуль пружності, I_y – осьовий момент інерції)
Диференціальне рівняння кручення вала		$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_\rho},$ (φ – кут закручування, M_x – момент кручення, G – модуль зсуву, I_ρ – полярний момент інерції)
Диференціальне рівняння розтягу-стиску бруса		$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA},$ (u – переміщення вздовж осі x , N_x – поздовжня сила, E – модуль пружності, A – площа поперечного перерізу)
Диференціальне рівняння стійкості стержня		$\frac{d^2 w}{dx^2} \pm \frac{F}{EI} w = 0,$ (w – прогин, F – поздовжня зовнішня сила, EI – жорсткість на згин, E – модуль пружності, I – осьовий момент інерції)
Диференціальне рівняння системи з n ступенями вільності		$M\ddot{w} + Kw = F(t),$ (M – матриця мас, K – матриця жорсткості, $F(t)$ – вектор зовнішніх сил, w – вектор переміщень,

		\ddot{w} – вектор прискорень)
Допустиме напруження в статисти	σ_{adm}	$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_p}{K_0}$, (σ_p – руйнівне напруження, $\sigma_p = \sigma_y$ - для пластичних матеріалів, $\sigma_p = \sigma_u$ - для крихких матеріалів; K_0 – загальний коефіцієнт запасу)
Допустимий коефіцієнт запасу	n_{adm}	Коефіцієнт запасу міцності, що регламентується нормативами для конкретної конструкції.
Еквівалентні напруження за теоріями міцності: третьою четвертою п'ятою (теорією Мора)		$\sigma_{ekv}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3$, $\sigma_{ekv}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}$, $\sigma_{ekv}^V = \sigma_1 - \frac{\sigma_u^+}{\sigma_u^-} \sigma_3$, ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження, σ_u^+, σ_u^- – границі міцності відповідно при розтягу і стиску)
Енергія деформації потенціальна	U	Енергія, яка накопичується в тілі при його пружному деформуванні $U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV$
Ефективний коефіцієнт концентрації	K_σ	Відношення границі витривалості стандартного зразка до границі витривалості зразка з концентратором
Жорсткість системи		Властивість системи зберігати початкову форму при зовнішніх збуреннях
Жорсткість поперечного перерізу стержня при згині	EI_y EI_z	EI_y - при згині у площині XOZ ; EI_z – при згині у площині XOY ; (E – модуль пружності, I_y, I_z – осьові моменти інерції),
Жорсткість поперечного перерізу при крученні	GI_ρ	GI_ρ (G – модуль зсуву, I_ρ – полярний момент інерції)
Жорсткість поперечного перерізу стержня при розтягу-стиску	EA	EA (E – модуль пружності, A – площа перерізу)
Задача Ляме		Задача про розподілення напружень у товстостінному циліндрі під дією внутрішнього і зовнішнього тиску
Закон Гука		Залежність між напруженнями і деформаціями в лінійній зоні кривої “напруження-деформація” (від 0 до границі пропорційності) $\sigma = E\varepsilon$ – залежність між нормальними напруженнями і лінійними деформаціями; E – модуль пружності; ε – лінійна деформація; $\tau = G\gamma$ – залежність між дотичними напруженнями і кутовими деформаціями; G – модуль зсуву; γ – кутова деформація.

Закон Гука при складному напруженому стані		Залежність між векторами напружень і деформацій: $\sigma = C\varepsilon$, C – матриця модулів пружності
Закон парності дотичних напружень		$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$
Зминання		Явище виникнення пластичної деформації на поверхні контакту двох об'єктів
Запас міцності при повторно-змінних навантаженнях: а) при симетричних циклах б) при складному напруженому стані в) при асиметричних циклах		$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}, \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a};$ $n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}};$ $n_\sigma = \frac{\sigma_1}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}, \quad n_\tau = \frac{\tau_1}{K_\tau \tau_a + \psi_\tau \tau_m},$ <p>(σ_{-1}, τ_{-1} - границя витривалості; σ_a, τ_a – амплітудні напруження; K, ψ – коефіцієнти, які залежать від границі міцності матеріалу)</p>
Згин		Деформація стержня (балки), при якій змінюється кривизна осьової лінії стержня
Зовнішнє навантаження машини		Сили і моменти, які чинять опір пересуванню, а також рушійні сили і моменти
Ізотропія		Властивість матеріалу, яка полягає в однаковості фізико-механічних характеристик в усіх напрямках у кожній точці
Інтеграл Мора		<p>Формула для визначення переміщень за методом Мора при згині</p> $\Delta = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{yi} \bar{M}_{yi}}{E_i I_{yi}} dx,$ <p>n – кількість ділянок, M_{yi} – функції згинаючих моментів від зовнішнього навантаження, \bar{M}_{yi} – функції згинаючих моментів від одиничного навантаження, прикладеного в тій точці і в тому напрямку, де треба визначити переміщення. Аналогічні інтеграли записують від п'яти інших внутрішніх зусиль, які можуть бути в поперечному перерізі стержня в загальному випадку дії сил</p>
Ергодичний процес		Процес (реалізація навантажень). Для якого математичне очікування, дисперсія, кореляційна функція, отримані в результаті статистичної обробки множини реалізації і однієї тривалої реалізації, рівні
Коефіцієнт асиметрії циклу	r	Відношення найменшого напруження до найбільшого, взяте з відповідним знаком (“+” для знакопостійного, “-” для знакоперемінного циклу)
Коефіцієнт динамічності		Відношення максимального значення динамічного навантаження до постійного (або статичного) навантаження
Коефіцієнт концентрації	K_σ K_τ	Відношення номінального напруження до напруження з урахуванням концентрації у зразку

напружень		
Коефіцієнт Пуассона	ν	Відношення абсолютних значень поперечної лінійної деформації до поздовжньої при лінійному напруженому стані $\nu = \left \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right $
Коефіцієнт запасу міцності		Відношення граничного напруження (граничного навантаження) до розрахункового напруження (навантаження)
Коефіцієнт динамічності при ударі	K_σ	$K_\sigma = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}$ (H – висота падіння вантажу, δ_c – переміщення в точці падіння вантажу від його ваги)
Коефіцієнт запасу загальний	K_0	Враховує неточність методів розрахунку, розбіжність характеристик матеріалу і неточність даних про навантаження. Як правило, $K_0=1,5$ щодо границі текучості для пластичних матеріалів і $K_0=2-3$ щодо границі міцності для крихких матеріалів
Кореляційна функція		Функція, яка характеризує внутрішню структуру випадкового процесу і вірогідний зв'язок різних його перерізів
Критичне напруження при стиску стержня для сталі Ст.3	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, (\lambda \geq 100)$ – формула Ейлера; $\sigma_{кр} = a - b\lambda, \text{ МПа}, (40 \leq \lambda \leq 100)$ – формула Ясинського, $a = 310, b = 1,14$; $\sigma_{кр} = \sigma_T, (\lambda \leq 40)$; λ - гнучкість стержня
Лінійний (одновісний) напружений стан		Напружений стан, при якому два з трьох головних напружень дорівнюють нулю
Логарифмічний декремент		Коефіцієнт, який характеризує темп загасання коливань
Математична модель динамічного процесу		Система нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливальні процеси динамічної системи
Метод Рітца		Наближений метод розв'язування варіаційних рівнянь, при якому розв'язок подається у вигляді ряду $w = \sum_{k=0}^{\infty} N_k q_k$, де q_k – невідомі коефіцієнти; N_k – задані, так звані пробні, функції, що задовольняють спеціальні умови
Метод скінченних елементів (МСЕ)		Варіант методу Рітца, при якому пробними функціями вибираються кусково-неперервні функції
Метод початкових параметрів		Метод розв'язання диференціального рівняння плоского згину бруса, при якому довільними сталими інтегрування є значення прогинів, кутів повороту і зусиль у початковому перерізі бруса
Метод перерізів		Метод визначення внутрішніх зусиль у поперечних перерізах стержнів, який полягає у використанні рівнянь рівноваги частини стержня по один бік від перерізу
Метод переміщень		Метод, що використовується для розкриття статичної

		невизначеності і характерний тим, що невідомими є узагальнені переміщення. Розрахункова схема рівнянь має вигляд $K \cdot u = F$, де K - матриця жорсткостей, u – вектор невідомих переміщень, F – вектор навантажень
Метод сил		Метод, що використовується для розкриття статичної невизначеності і характерний тим, що невідомими є узагальнені сили. Розрахункова схема рівнянь має вигляд: $\Delta \cdot X = \Delta_F$, де Δ – матриця податливостей, X – вектор невідомих сил, Δ_F – вектор навантажень
Метод трьох моментів		Варіант методу сил, при якому невідомими є реактивні моменти на проміжних опорах при встановленні на цих опорах шарнірів
Міцність		Властивість матеріалу витримувати навантаження не руйнуючись
Міцність тривала		Властивість матеріалу зберігати міцність протягом заданого проміжку часу при заданих сталих навантаженнях
Механіка деформівного твердого тіла		Частина механіки, де вивчається поведінка матеріалів і конструкцій при збуреннях довільної природи
Механіка руйнування		Частина механіки деформівного твердого тіла, яка вивчає закони розвитку, розповсюдження тріщин і розділення твердих тіл на частини під дією напружень
Механічні характеристики		Кількісні показники механічних властивостей матеріалів, які визначаються з механічних випробувань. Основними механічними характеристиками є: σ_u (σ_s) – границя міцності; σ_T (σ_y) – границя текучості; σ_{pr} – границя пропорційності; σ_e – границя пружності; σ_{-1} – границя витривалості; E - модуль пружності (модуль юнга); ν – коефіцієнт Пуассона; $\delta = \frac{l_k - l_0}{l_k} \cdot 100\%$ – відносне подовження; $\psi = \frac{A_k - A_0}{A_k} \cdot 100\%$ – відносне звуження; G – модуль зсуву; a_k – ударна в'язкість
Модуль зсуву	G	Відношення дотичного напруження до відповідної кутової деформації при напруженому стані чистого зсуву $G = \frac{\tau}{\gamma}$
Момент згинальний відносно осей y, z	M_y M_z	Проекція на відповідну вісь головного моменту внутрішніх зусиль (напружень) у перерізі (осі y, z лежать у площині перерізу)
Момент кручення	M_x	Проекція головного моменту системи внутрішніх зусиль у

	(T)	перерізі на вісь x , нормальну до площини перерізу
Моменти інерції головні		Моменти інерції площі поперечного перерізу відносно головних осей перерізу
Момент інерції відцентровий відносно осей y, z	I_{yz}	$I_{yz} = \int_A yz dA$, dA – елемент площі перерізу
Момент площі перерізу відносно осей y, z (осьовий момент інерції)	I_y I_z	$I_y = \int_A z^2 dA$, $I_z = \int_A y^2 dA$ dA – елемент площі перерізу
Момент інерції полярний	I_ρ	$I_\rho = \int_A \rho^2 dA$, ($\rho^2 = y^2 + z^2$)
Моменти опору: а) осьові б) полярний	W_y W_z W_ρ	$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}$, $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$, $W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}$
Модуль об'ємної деформації	K	$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$; (E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона)
Модуль поздовжньої пружності (модуль Юнга)	E	Відношення нормального напруження до відповідної лінійної деформації при лінійному напруженому стані в межах пружної деформації $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
Моменти площі статичні відносно осей y, z		$S_y = \int_A z dA$, $S_z = \int_A y dA$
Навантаження		Якісно-кількісна характеристика дії на об'єкт зовнішніх причин, що приводять до появи напружень і деформацій
Навантаження граничне		Навантаження, при якому конструкція стає непрацездатною з точки зору якогось характерного параметра (міцності, стійкості тощо)
Навантаження зосереджене		Навантаження, яке діє на невеликій ділянці площі об'єкта, тому при побудові розрахункової схеми конструкції замінюється рівнодійною, прикладеною до центра ваги ділянки. Розрізняють зосереджену силу і зосереджений момент (пару сил)
Навантаження короткочасне		Навантаження, яке діє протягом невеликого проміжку часу. Якщо при цьому виникають значні прискорення, навантаження називається динамічним (імпульсним, ударним, випадковим, періодичним, залежно від форми залежності функції навантаження від часу)
Навантаження критичне		Навантаження, при якому істотно змінюється стан навантажуваного об'єкта (найчастіше вживається у розділі “Стійкість конструкцій”)

Навантаження позацентрове		Навантаження на брус, паралельне його осі, при якому рівнодійна сил не збігається з віссю
Навантаження рівномірне (стале)		Навантаження, рівномірно прикладене до якоїсь поверхні (стале щодо просторових координат, пов'язаних з поверхнею)
Навантаження розрахункове		Навантаження, яке береться як еквівалент багатьох діючих навантажень для розрахунків на міцність та стійкість за якимось умовним критерієм
Навантаження рухоме		Навантаження, яке переміщується по конструкції
Навантажування випадкове		Навантажування яке змінюється з часом за випадковим законом
Навантажування динамічне		Навантажування, при якому виникають істотні прискорення точок об'єкта
Навантажування імпульсне		Навантажування, що змінюється з часом дуже швидко і триває протягом невеликого проміжку часу
Навантажування ударне		Імпульсне навантажування при контакті двох тіл
Навантажування циклічне (періодичне)		Навантажування, що змінюється з часом за періодичним законом
Напруження		Умовні сили взаємодії між елементами об'єму, які виникають при дії зовнішніх і внутрішніх збурень
Напруження в площадці		Границя відношення головного вектора внутрішніх сил, які діють на елементарну площадку, до площі цієї площадки при стягуванні її в точку $\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{d\bar{F}}{dA}$
Напруження головні	σ_1 σ_2 σ_3	Нормальні напруження, які діють у трьох взаємно перпендикулярних площадках, де відсутні дотичні напруження. Як правило, напруження позначають так: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Площинки, де діють головні напруження, називаються головними площадками
Напруження допустиме	σ_{adm} [σ]	Найбільше напруження, яке можна допустити в конструкції з точки зору міцності $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_T}{K_0} \text{ або } \sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{K_0}$ (K_0 – коефіцієнт запасу)
Напруження дотичне	τ	Проекція вектора напруження на площину перерізу, де діє напруження
Напруження дотичне максимальне при складному напруженому стані		$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$
Напруження дотичні при плоскому згині (формула Журавського)		$\tau = \frac{N_z S_y}{I_y b}$, (N_z – поперечна сила, S_y – статичний момент частини площі перерізу, яка лежить вище рівня, де визначається напруження, I_y – осьовий момент площі перерізу, b – ширина поперечного перерізу на рівні, де визначається напруження)
Напруження нормальне	σ	Проекція напруження на нормаль до площадки, де діє це напруження

Напруження номінальне		Напруження в перерізі без урахування концентрації
Напруження в поперечному перерізі при розтягу-стиску		$\sigma = \frac{N_x}{A}$, (N_x – сила в перерізі; A – площа поперечного перерізу)
Напруження при плоскому згині		$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$, (z – відстань від осі y до точки, де визначається напруження)
Напруження при неплоскому згині		$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$, (z, y – координати точки, де визначається напруження)
Напруження при крученні		$\tau = \frac{M_x}{I_\rho} \rho$, (ρ – відстань від центра перерізу до точки, де визначається напруження)
Напруження при згині з розтягом-стиском		$\sigma = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$, (z, y – координати точки, де визначається напруження)
Напруження розрахункове при згині з крученням бруса кругового перерізу		$\sigma = \frac{M_p}{W_0}$, (M_p – розрахунковий момент, за III теорією міцності $M_p = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2}$; W_0 – осьовий момент опору)
Напруження в похилих перерізах стержня при розтягу-стиску		$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha$, $\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha$, ($\sigma_x = \frac{N_x}{A}$)
Напруження в довільній похилій площадці: а) нормальне б) дотичне	σ_n τ_n	$\sigma_n = n^T \cdot T_\sigma \cdot n$; $\tau_n = \sqrt{n^T \cdot T_\sigma \cdot T_\sigma^T \cdot n - \sigma_n^2}$ n - вектор нормалі до похилої площадки; T_σ - матриця тензора напружень
Напруження контактне		Напруження, яке виникає при взаємному стиску двох тіл на поверхні контакту і в об'ємі навколо цієї поверхні
Напруження октаедричне		Напруження в площадці, рівнонахилений до трьох головних площадок: $\sigma_{okt} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ $\psi_{okt} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$
Напружений стан у точці		Сукупність усіх векторів напружень для елементарних площадок, які містять у собі дану точку (тензор напружень)
Напружений стан – чистий зсув		Напружений стан, при якому $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\max}$, $\sigma_2 = 0$

Нейтральна лінія		Лінія в поперечному перерізі, де напруження дорівнюють нулю
Несуча здатність		Навантаження, під дією якого деталь досягає граничного стану
Об'ємний (тривісний) напружений стан		Напружений стан, при якому жодне з трьох головних напружень не дорівнює нулю
Однорідний напружений стан		Напружений стан, однаковий для всіх точок об'єму
Ортотропія		Властивість матеріалу, яка полягає в наявності двох взаємно перпендикулярних площин симетрії відносно механічних характеристик
Осі головні		Взаємно перпендикулярні осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти інерції набувають екстремальних значень
Осі головні і центральні		Головні осі, які проходять через центр ваги перерізу
Основна система		Статично-визначена система, одержана із статично-невизначуваної відкиданням додаткових реакцій
Параметричні коливання		Коливання, що виникають в машинах при періодичній зміні їх параметрів – жорсткостей і мас
Піддатливість		Величина зворотна жорсткості
Плоский напружений стан		Напружений стан, при якому одне з трьох головних напружень дорівнює нулю
Пластичність		Властивість матеріалу деформуватись необоротно при сталому значенні тензора напружень
Площа поперечного перерізу		Площа перерізу, перпендикулярного до осі бруса
Повзучість (післядія пластична)		Неперервне збільшення пластичної деформації при незмінному навантаженні
Податливість		Переміщення в точці і конструкції від одиничної сили, прикладеної в точці
Подовження		Різниця між кінцевою та початковою довжиною відрізка в об'ємі, що деформується
Подовження залишкове		Подовження, що залишилось після зняття зовнішніх навантажень
Подовження відносно залишкове		$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%$, (l_0 – початкова довжина зразка, l_k – залишкова довжина зразка)
Подовження відносно (середнє в точці)		$\varepsilon_c = \frac{l_1 - l}{l}, \quad \varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{l_1 - l}{l}$
Подовження при розтягу-стиску стержня довжиною l		$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, (N – подовжня сила в поперечних перерізах стержня довжиною l і з площею поперечного перерізу A ; E – модуль пружності матеріалу)
Принцип незалежності дії сил		Ефект від дії кількох сил дорівнює сумі ефектів від кожної сили окремо
Принцип Сен-Венана		Особливості розподілення навантаження по конструкції впливають на напружений стан лише в безпосередній близькості від місця його прикладання

Принцип суперпозиції		Принцип незалежності дії сил: ефект від дії системи сил не залежить від послідовності їх прикладення
Радіус інерції площі відносно осі	i_y i_z	$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ I_y, I_z – осьові моменти інерції площі; A – площа поперечного перерізу
Релаксація		Зміна напружень при незмінній деформації
Резонанс		Явище зростання амплітуди коливань об'єкта, коли частота зовнішньої сили збігається з однією з власних частот коливань об'єкта
Рівноміцність		Рівність розрахункових напружень по об'єму конструкції
Рівнодійна розподіленого навантаження а) по площі б) по лінії		$P = \int_A p dA,$ $Q = \int_A q dl$
Рівняння Лапласа		$\frac{\sigma_t}{R_t} + \frac{\sigma_m}{R_m} = \frac{p}{\delta},$ (σ_t, σ_m – тангенціальне і меридіональне напруження в оболонці, R_t, R_m – радіуси кривизни, p – тиск, δ – товщина оболонки)
Рівняння для визначення головних напружень (характеристичне рівняння матриці тензора напружень)		$\sigma^3 - \sum_1 \sigma^2 + \sum_2 \sigma - \sum_3 = 0,$ (\sum_1, \sum_2, \sum_3 – інваріанти напруженого стану)
Рівняння для визначення положення головних площадок		$(T_\sigma - \sigma_i E)n = 0,$ $n^T n = 1$ (σ_i – головні напруження, E – одинична матриця, T_σ – матриця тензора напружень, n – розшукуваний вектор косинусів кутів між нормаллю до головної площадки та осями початкової системи координат)
Розрахунки на зріз		Розрахунки на міцність за найбільшим дотичним напруженням, що діє по площі умовного руйнування. Використовується для розрахунку зварних з'єднань
Розрахунки на міцність		Визначення розмірів конструкції за умовою міцності для відповідного напруженого стану у найбільш небезпечному перерізі конструкції (порівняння максимального еквівалентного напруження в конструкції з допустимим напруженням для даного матеріалу)
Розрахунки на жорсткість		Визначення розмірів конструкції на основі порівняння максимальних переміщень, які виникають в конструкції при дії зовнішнього навантаження, з допустимими для даних умов експлуатації конструкції

Розривне напруження		Нормальне напруження в поперечному перерізі зразка, де відбувається руйнування, в момент руйнування
Розсіяння енергії		Часткове перетворення енергії деформації в інші види енергії
Руйнування		Процес появи та розвитку тріщин в матеріалі, що приводить до поділу об'єму матеріалу на частини
Руйнування від втоми		Руйнування матеріалу об'єкта від появи тріщин втоми при циклічному навантаженні
Руйнування в'язке		Руйнування, яке супроводжується пластичною деформацією
Руйнування крихке		Руйнування без слідів макропластичних деформацій матеріалу
Сила зосереджена		Рівнодіюча сил, діючих на невеликій порівняно з усією поверхнею об'єкта площадці, прикладена в одній із точок, що належать цій площадці
Сили внутрішні		Додаткові сили взаємодії між атомами, які виникають при деформуванні або навантаженні об'єкта
Сили зовнішні		Результат дії на об'єкт з боку суміжних об'єктів чи полів
Сили об'ємні		Результат дії на об'єкт гравітаційного, теплового чи інших полів
Сили поверхневі		Результат взаємодії окремих об'єктів по поверхні контакту
Сили погонні		Результат зведення поверхневих сил до якоїсь лінії, що лежить в цій поверхні
Сила поздовжня	N_x	Проекція головного вектора системи сил, які діють в поперечному перерізі стержня, на вісь стержня x
Сили поперечні	N_y N_z	Проекція головного вектора системи сил, діючих у поперечному перерізі стержня на осі y, z , що лежать у площині поперечного перерізу. (Як правило, хоча і не обов'язково, осі є головними центральними осями площі перерізу)
Спектр випадкового процесу		Розподіл дисперсії амплітуд по різним частотам
Спосіб Верещагіна		Графоаналітичний варіант обчислення інтеграла Мора для випадку, коли хоча б одна з епюр, що перемножуються, лінійна: $\frac{1}{EI_y} \int_0^l M_y \bar{M}_y dx = \frac{\Omega \bar{m}_c}{EI_y},$ (Ω – площа епюри на відрізку [0,1]; \bar{m}_c – ордината одиничної епюри під центром ваги площі Ω; EI_y – жорсткість на згин)
Старіння		Зміна фізико-механічних властивостей матеріалу з часом під дією навантаження або без нього
Статистична динаміка		Наука про поведінку різних систем при випадкових зовнішніх впливів.
Статичне навантаження		Процес навантаження, при якому не виникають суттєві прискорення точок об'єкта
Статично невизначувана система		Система, в якій невідомі зусилля неможливо визначити, користуючись тільки рівняннями статички
Стержень		Об'єкт, довжина якого на один чи два порядки більша від розмірів його поперечного перерізу

Стержнева система		Конструкція, яка складається зі стержнів
Стійкість		Властивість об'єкта зберігати свій початковий стан (форму) при невеликих зовнішніх збудженнях
Схема навантаження		Сукупність зусиль, що діють на об'єкт
Схема розрахункова		Реальний об'єкт розрахунку, звільнений від несуттєвих особливостей з точки зору розрахунку на міцність
Тензометр		Прилад для вимірювання деформацій
Тензорезистор		Датчик, виготовлений зі спеціальних матеріалів з високим омичним опором і пов'язаний з об'єктом таким чином, що деформації об'єкта передаються йому і приводять до зміни електричного опору, яка фіксується спеціальними приладами
Тензор напружень	\vec{T}_σ $T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$	<p>Математичний об'єкт, що визначається трьома векторами напружень, які діють у трьох взаємно перпендикулярних площадках, проведених через дану точку.</p> <p>Тензор напружень є ортогональним симетричним тензором другого рангу і зображується у вигляді матриці</p> <p>Компонентами матриці є напруження (нормальні σ і дотичні τ) у трьох взаємно перпендикулярних площадках проведених через задану точку</p>
Теорема Кастільяно		<p>Частинна похідна потенціальної енергії деформації за узагальненою силою, яка діє в деякій точці, дорівнює переміщенню цієї точки у напрямі дії сили</p> $\frac{dU}{dF_i} = q_i$
Теорема Лагранжа		<p>Частинна похідна потенціальної енергії деформації за незалежним переміщенням системи дорівнює силі, що діє в напрямі цього переміщення</p> $\frac{dU}{dF_i} = F_i$
Теорії міцності (гіпотези міцності, критерії міцності)		<p>Припущення відносно впливу компонент тензора напружень на міцність при їх спільній дії, за допомогою яких записують вирази для еквівалентних напружень, які відповідають за міцність матеріалу у заданій точці. Еквівалентні напруження порівнюються відповідним напруженнями при одновісному напруженому стані:</p> <p>Умова руйнування $\sigma_{екв} \leq \sigma_p$;</p> <p>Умова міцності – $\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm}$.</p> <p>(σ_p – руйнівне напруження, σ_{adm} – допустиме напруження)</p>
Теорія пружності		Розділ механіки деформівного твердого тіла, де розглядаються математичні методи аналізу ідеально-пружного тіла в загальному випадку навантаження
Узагальнені переміщення	q	<p>Коефіцієнти у виразі для потенціальної енергії деформації об'єкта</p> $U = \frac{1}{2} q^T \cdot K \cdot q,$

		(K – матриця жорсткості; q – вектор узагальнених переміщень)
Узагальнені сили	F	Коефіцієнти у виразі для потенціальної енергії деформації об'єкта $U = \frac{1}{2} F^T \cdot D \cdot F$ (D – матриця податливості; F – вектор узагальнених сил)
Умова жорсткості при крученні		$\theta_{\max} \leq \theta_{adm}$, (θ_{\max} – найбільший відносний кут закручування, θ_{adm} – допустимий кут закручування)
Умова міцності		$\sigma_{розр} \leq \sigma_{adm}$ ($\sigma_{розр}$ – розрахункове напруження, σ_{adm} – допустиме напруження)
Умови міцності для стержнів при а) розтягу-стиску б) згині в) крученні г) неплоскому згині д) згині з розтягом-стиском е) згині з крученням		$\frac{N_x}{A} \leq \sigma_{adm};$ $\frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm};$ $\frac{M_x}{W_p} \leq \sigma_{adm};$ $\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{adm};$ $\frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \leq \sigma_{adm};$ $\frac{M_p}{W_0} \leq \sigma_{adm}, \text{ де } M_p^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$ $M_p^{IV} = \sqrt{0,75 M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ (N_x, M_x, M_y, M_z – внутрішні зусилля, W_x, W_y, I_y, I_z – моменти відповідно опору і інерції)
Формула Нав'є		Залежність між напруженням та згинаючими моментами при плоскому згині $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$
Формула Максвела		$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_i}{E_i A_i} J_i,$ (Δ – переміщення в заданій точці ферми; N_i – зусилля в i -му стержні ферми від зовнішнього навантаження; Δ i \bar{N}_i – зусилля в i -му стержні ферми від одиничної сили, прикладеної у вузлі в напрямі, де визначається переміщення; E_i, A_i – жорсткість на розтяг-стиск)
Цикл напружень		Зміна напружень за один повний період при періодичному навантаженні

