

УДК 531.3

А.Г. Степанов. **ДИНАМИКА МАШИН.** - Екатеринбург: УрО РАН, 1999. ISBN 5-7691-0877-8.

Рассмотрены эквивалентные схемы и механические характеристики машин и их приводов. Изучены законы движения машин при различных механических характеристиках. Изложены вопросы теории динамики машин с сосредоточенными и распределенными параметрами. Предложены и исследованы способы уменьшения динамических нагрузок. Компьютерный анализ и синтез динамических систем приведен с использованием математического пакета MATHCAD 7.

Книга адресована широкому кругу инженеров, занятых исследованиями, проектированием и эксплуатацией всевозможных машин и механизмов, а также окажется полезной для преподавателей, аспирантов и студентов и послужит основой для изучения последних достижений в области динамики машин.

Ответственный редактор

доктор технических наук, профессор **Н.П. Косарев.**

Рецензент

доктор технических наук, профессор **А.И. Цаплин.**

*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований. **РФФИ**  
по проекту 98-01-14015*

ISBN 5-7691-0877-8

ПРП-1999-129(98)-159

С

ПВ-1999

УрО РАН, 1999 г.

8П6 (03) 1998

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК.....	7
РАЗДЕЛ 1. ЗАДАЧИ НАУКИ О ДИНАМИКЕ МАШИН.....	10
1.1. Эквивалентные схемы машин.....	11
1.2. Эквивалентные массы механической системы.....	15
1.3. Вязкоупругие свойства трансмиссии машины.....	19
1.3.1. Упругие свойства трансмиссии машины.....	21
1.3.2. Вязкие свойства упругих элементов машины.....	24
1.4. Механические характеристики машин.....	25
1.5. Механические характеристики приводных двигателей.....	28
1.5.1. Асинхронные электродвигатели с короткозамкнутым ротором.....	29
1.5.2. Асинхронные электродвигатели с фазным ротором.....	32
1.5.3. Синхронные электродвигатели.....	39
1.5.4. Электродвигатели постоянного тока.....	41
1.5.5. Гидродвигатели.....	45
1.5.6. Гидротрансформаторы и гидромолоты.....	47
1.5.7. Механические тормоза.....	49
РАЗДЕЛ 2. РАБОТА МАШИН БЕЗ УЧЕТА ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ТРАНСМИССИИ.....	53
2.1. Исследование работы машины для закладки выработанного пространства.....	53
2.2. Пуск и торможение машин при постоянном движущем или тормозном усилии.....	58
2.2.1. Сила сопротивления - постоянная величина.....	58
2.2.2. Сила сопротивления уменьшается пропорционально перемещению машины.....	59
2.2.3. Сила сопротивления увеличивается пропорционально перемещению машины.....	61
2.2.4. Сила сопротивления увеличивается пропорционально скорости машины.....	63
2.3. Пуск и торможение машины при изменяющемся движущем или тормозном усилии.....	66
2.3.1. Сила сопротивления - постоянная величина.....	66
2.3.2. Силы сопротивления уменьшаются пропорционально перемещению.....	69
2.3.3. Силы сопротивления увеличиваются пропорционально перемещению машины.....	70
2.3.4. Силы сопротивления увеличиваются пропорционально скорости вращения.....	72
2.4. Динамика машины с кривошипно-шатунным механизмом.....	74
2.4.1. Кинематические характеристики машины.....	75
2.4.2. Действующие силы.....	78
2.4.3. Влияние величины момента инерции машины на динамические процессы.....	84
РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА ОДНОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	90
3.1. Динамические процессы после остановки машины.....	90
3.1.1. Силы сухого (кулонова) трения.....	93
3.1.2. Силы вязкого трения.....	95
3.1.3. Силы вязкого и сухого трения.....	101
3.2. Динамические процессы при постоянной возмущающей силе.....	103
3.3. Частотные свойства одномассовых механических систем.....	105
3.3.1. Механические системы без вязкого демпфирования.....	106
3.3.2. Механические системы с силами вязкого демпфирования.....	108
3.4. Колебания фундаментов.....	115
3.4.1. Колебания без учета сил вязкого демпфирования.....	115
3.5. Колебания и балансировка вращающихся частей машины.....	121

3.5.1. Динамическая балансировка вращающихся частей машины.....	122
3.6. Динамика машин с переменной массой.....	127
3.6.1. Динамические процессы при загрузке подъемного сосуда.....	128
<b>РАЗДЕЛ 4. ДВУХМАССОВЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.....</b>	<b>131</b>
4.1. Динамические процессы при отсутствии диссипативных свойств системы.....	132
4.1.1. Возмущающее воздействие к машине прикладывается ступенью.....	133
4.1.2. Возмущающее воздействие прикладывается к машине по линейной характеристике.....	136
4.1.3. Амплитуда колебательного процесса.....	141
4.1.4. Частотные свойства двухмассовой механической системы.....	143
4.2. Динамические процессы с вязким демпфированием.....	146
4.2.1. Возмущающее воздействие прикладывается к машине ступенью.....	146
4.2.2. Возмущающее воздействие прикладывается к машине по линейной характеристике.....	151
4.2.3. Частотные свойства двухмассовой механической системы с учетом сил вязкого демпфирования.....	153
4.2.4. Возмущающее воздействие на машину характеризуется периодической негармонической функцией.....	154
<b>РАЗДЕЛ 5. ОГРАНИЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК.....</b>	<b>158</b>
5.1. Приложение возмущающего воздействия двумя равными ступенями.....	158
5.2. Изменение интенсивности нарастания возмущающего воздействия.....	162
5.3. Остановка машины за время кратное периоду колебаний.....	165
5.4. Программный выбор величины тормозного усилия.....	166
5.5 Система регулируемого предохранительного торможения (СРПТ), поддерживающая заданное замедление.....	168
5.6. Система автоматического демпфирования колебаний.....	172
5.7. Динамические поглотители колебаний.....	177
<b>РАЗДЕЛ 6. СТАТИКА И ДИНАМИКА ГИБКОЙ ОДНОРОДНОЙ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ.....</b>	<b>183</b>
6.1. Математическая модель траектории гибкой однородной тяжелой нити.....	183
6.2. Укрупненная модель траектории гибкой однородной тяжелой нити.....	193
6.3. Динамика поперечных колебаний гибкой однородной тяжелой нити.....	197
6.3.1. Решение волнового уравнения методом разделения переменных (метод Фурье).....	199
6.3.2. Укрупненный анализ колебательного процесса струны.....	206
<b>РАЗДЕЛ 7. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ МНОГОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>208</b>
7.1. Математическая модель трехмассовой механической системы.....	208
7.2. Процесс разгона машины с асинхронным электродвигателем с фазным ротором.....	213
7.3. Процесс разгона машины с приводом постоянного тока с независимым возбуждением.....	219
7.4. Влияние отклоняющих шкивов на динамические нагрузки в канатах грузоподъемной машины.....	228
7.5. Скольжение канатов по футеровке барабана многоканатной подъемной установки.....	230
<b>РАЗДЕЛ 8. ДИНАМИКА МАШИН С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССЫ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ.....</b>	<b>237</b>
8.1. Математическая модель упругого элемента.....	237
8.2. Решение задачи динамики машин в общем виде.....	240
8.3. Определение собственных функций задач динамики машин.....	242
8.3.1. Ветвь уравновешивающего каната.....	242
8.3.2. Масса, подвешенная на канате.....	243
8.3.3. Масса, соединенная двумя ветвями канатов.....	246

8.3.4. Одноконцевая подъемная установка.....	251
8.3.5. Двухконцевая неуравновешенная подъемная установка.....	253
8.3.6. Двухконцевая уравновешенная подъемная установка.....	255
8.3.7. Многоканатная подъемная установка в режиме скольжения канатов.....	258
8.4. Ортогональность фундаментальных функций.....	261
8.4.1. Ветвь уравнивающего каната.....	261
8.4.2. Масса, подвешенная на канате.....	262
8.4.3. Две массы, соединенные стержнем.....	266
8.4.4. Масса и присоединенные к ней два вязкоупругих стержня.....	266
8.4.5. Двухконцевая неуравновешенная подъемная установка.....	268
8.4.6. Уравновешенная подъемная установка.....	269
8.5. Свободные колебания механических систем.....	272
8.5.1. Ветвь уравнивающего каната.....	273
8.5.2. Масса, подвешенная на канате.....	279
8.5.3. Две массы, соединенные вязкоупругим стержнем.....	283
8.5.4. Масса с присоединением к ней двух канатов.....	284
8.5.5. Двухконцевая неуравновешенная подъемная установка.....	285
8.5.6. Уравновешенная подъемная установка.....	286
8.6. Вынужденные колебания механических систем с распределенными параметрами.....	290
8.7. Эквивалентная масса каната.....	296
8.7.1. Масса, подвешенная на канате.....	297
8.7.2. Масса и присоединенные к ней два каната.....	298
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	301

## ВВЕДЕНИЕ

*Лучше знать мало,  
чем понимать плохо.  
Анатоль Франс.*

*Лучше скажи мало,  
но хорошо.  
Козьма Прутков.*

Горные машины и оборудование, применяемые на шахтах и рудниках, - одни из самых мощных и сложных машин, известных в технике. Так, восьмиканатная подъемная машина ЦШ 5x8 предназначена для транспортирования полезного ископаемого массой до 50 т с глубины 1600 м, со скоростью до  $16 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ . Мощность электропривода такой машины достигает 10 тыс. кВт. Горный комбайн типа "Урал-20 кс" имеет массу 80 т, на нем установлено 13 электродвигателей суммарной мощностью 520 кВт. Ленточные конвейеры транспортируют полезное ископаемое на расстояние до 2900 м, со скоростью 3,15 м/с, при этом масса полезного ископаемого, расположенного на длине конвейера доходит до 290 т, собственная масса ленты достигает 300 т. Шахтные водоотливные и вентиляторные установки могут иметь мощность 3000-4000 кВт [69].

Большие массы машин и механизмов, вращающиеся с высокой частотой и движущиеся с большими скоростями, вызывают сложные динамические процессы не только при пусках и торможениях, но иногда и при установившихся режимах работы (компрессорные, вентиляторные и другие установки). Динамические процессы вызывают чрезмерные нагрузки, прогрессирующие усталостные явления отдельных элементов конструкции, которые приводят к аварийным ситуациям и к катастрофам.

Для увеличения надежности, безопасности и долговечности машин проектирование и изготовление их должно осуществляться с учетом воздействия динамических усилий. Теоретическим фундаментом динамических расчетов является теория механических колебаний. Многие виды колебаний часто называют вибрациями. В то же время, колебания могут оказаться весьма полезными. Такие области техники как радио, акустика, вибротранспорт, ультразвуковая диагностика основаны на колебаниях. Знания законов колебательных процессов позволяют спроектировать рациональные конструкции машин для эффективного разрушения (добычи, дробления и измельчения) горных пород и полезного ископаемого.

К колебательным процессам относятся самые разнообразные явления. Биение сердца, колебание звезд и космических объектов, колебание молекул в твердом теле и климатические изменения на земле, вибрация звучащей струны и землетрясения все это примеры колебательных процессов.

В технике колебательные процессы наблюдаются при работе всех машин и механизмов. Однако некоторые колебательные процессы не могут быть зарегистрированы человеческими органами чувств без специальной аппаратуры. Известно, что колебания в диапазоне частот от 18 до 18000 Гц являются слышимыми. Колебания с частотой менее 18 Гц (инфразвуковые) вызывают головокружение, боль в туловище и нарушение зрительного восприятия. Колебания с ультразвуковой частотой (более 18000 Гц) оказывают тепловое воздействие на живые клетки и могут привести к их разрушению [20].

Большое количество аварий и катастроф связано с разрушительными действиями механических колебаний. Акад. К.В. Фролов отмечает, что 80 % аварий в машинах происходит в результате недопустимых колебаний [86]. Со школьных лет известны исторические примеры, которые описал профессор Лондонского университета Р. Бишоп [20]. Совсем малая переменная сила может вызвать опасные резонансные колебания. Например, если ритм солдатских шагов совпадает с собственной частотой моста, то возможно его разрушение.

Такие случаи имели место в 1831 г. в Манчестере, когда 60 человек разрушили Браунтонский подвесной мост через реку Ирвель. В 1868 г., в Чатоме рухнул мост на опорах при прохождении отряда Британской морской пехоты. Но наиболее трагическая катастрофа произошла в 1850 г., когда Анжерский подвесной мост был разрушен батальоном французской пехоты численностью 500 человек. Разрушенный мост увлек за собой людей в ущелье, при этом погибло 226 человек.

Катастрофа с паромом "Эстония" осенью 1994 г., унесшая более 900 человек и разрушение шлюзовых ворот на плотине Камгэса (октябрь 1994 г.) лишний раз подтверждает важность знаний и учета динамических нагрузок в машинах и сооружениях.

Промышленное производство и технический прогресс немыслимы без такой науки, как механика. Одним из важнейших разделов механики является динамика. Основы механики разработаны Архимедом, который в III веке до новой эры сформулировал учение о равновесии рычага, о центре тяжести, о равновесии тел, плавающих в жидкости. В середине XV века в эпоху Возрождения началось быстрое развитие техники. Замечательному итальянскому художнику, физическому и инженеру Леонардо да Винчи (1452-1519) принадлежат исследования трения в простейших машинах, движения по наклонной плоскости и т. д. [55]. Он изобрел для резки железа машину - ножницы приводимую в действие силой воды [77], предложил использовать гребной винт (1480) и пропеллер (1488) для передвижения, а также разработал проекты парашюта и вертолета. В 1500 г. Леонардо да Винчи сконструировал аппарат для спуска и подъема груза, основанный на использовании трения каната о цилиндр [77] и ставший прообразом для изобретения К. Кепе, который в 1877 г. получил патент на подъемную машину с полным уравниванием каната и улавливающим устройством [91]- прототип современных многоканатных подъемных машин.

Великий английский математик и физик Исаак Ньютон (1643-1727) завершил создание классической механики. Он проанализировал основные понятия механики: массу, количество движения, силу, пространство и время, дал формулировку трех фундаментальных законов движения.

Указом Петра I в России в 1724 г. основывается Петербургская академия наук, ставшая крупнейшим центром научной мысли. Действительный член Академии наук России М.В. Ломоносов (1711-1765), стал основоположником современной гидравлики и аэромеханики. В труде "Первые основания металлургии или рудных тел" (1742) он широко освещает вопросы вентиляции и водоотлива, а в работе "О вольном движении воздуха, в рудниках примеченном" (1745) дал научно обоснованное толкование явления естественной вентиляции в рудниках [55]. Выдающаяся роль в развитии механики принадлежит Петербургскому академику Л. Эйлеру (1707-1783). Швейцарец по происхождению, Эйлер приехал в Россию в 1727 г. двадцатилетним юношей и плодотворно работал до 1741 г. С 1741 по 1766 г. Эйлер находится в Берлинской академии, а в 1766 г. принимает приглашение императрицы Екатерины и возвращается до конца жизни в российскую академию. Гениального Эйлера можно считать основоположником динамики машин. В своих мемуарах "О машинах вообще" Эйлер впервые выделяет силы сопротивления, преодолеваемые машиной в движении, расчленив их на силы инерции и силы трения. Не менее известно достижение Эйлера в области трения. Выведенная им изящная формула "для каната, намотанного на кнехт и удерживающего судно", получившая название формулы Эйлера, широко используется для исследования ленточных транспортеров и многоканатных подъемных машин. Эти соотношения любопытны тем, что были найдены в эпоху, когда научные представления о трении только зарождались [66]. Представитель французской школы механиков Ж. Даламбер (1711-1783) в книге "Трактат по динамике" (1743) попытался дать общую методику решения задач динамики.

Ж. Лагранж (1736-1813) девятнадцати лет от роду стал профессором математики в артиллерийской школе в Турине. В 1766 г. когда Эйлер уехал из Берлина в Петербург, Фридрих II пригласил Лагранжа в Берлин, где он проработал 20 лет. В 1786 г. Лагранж переехал в Париж [75]. В 1788 г. в своей "Аналитической механике" Лагранж развил "принцип Даламбера" и разработал общую методику решения задач динамики и статики аналитическим путем. "Аналитическая механика" Лагранжа благодаря общности полученных в ней результатов сыграла большую роль в развитии науки и техники, т. к. их можно было применять в самых разнообразных областях [55]. Вероятно, не случайно в это время появляются первая паровая машина Ньюкомена (1712 г.), машина Ползунова (1763) и машина двойного действия Д. Уатта, которая в 1785 г. на одном из медных рудников начала работать в качестве привода подъемной машины [90]. Развитие

техники, появление новых машин и механизмов ставят новые теоретические задачи. К ним относятся задачи математической физики и, в частности, задачи теплопроводности и динамики механических систем с распределенной массой. В 1822 г. Фурье (1768-1830) опубликовал свою "Аналитическую теорию теплоты". Эта книга стала источником всех современных методов математической физики, относящихся к интегрированию уравнений в частных производных при заданных граничных условиях. Среди ряда выдающихся ученых XIX столетия следует отметить Джона Уильяма Стретта (Лорд Релей), (1842-1919), автора фундаментального труда по теории колебаний. Его "Теория звука", изданная в последний раз в 1955 г. явилась учебником для нескольких поколений механиков. Лорд Рэйлей с 1873 г. был членом, а с 1905 по 1908 г. президентом Лондонского королевского общества. С 1896 г. он был иностранным членом-корреспондентом Петербургской академии наук, а в 1904 г. стал нобелевским лауреатом [56]. Российский ученый А.М. Ляпунов (1857-1918) в своей докторской диссертации "Общая задача об устойчивости движения" (1892) впервые исследовал в строгой математической постановке проблему устойчивости механических систем с конечным числом степеней свободы [75]. "Отец русской авиации" Н.Е. Жуковский (1847-1921) создал вихревую теорию гребного винта, на основании которой получена формула для определения подъемной силы крыла самолета. Эта теория и теория гидравлического удара широко используются при проектировании вентиляторов и насосов. Создатель теории устойчивости и непотопляемости корабля А.Н. Крылов (1863-1945), исследуя колебания поршня индикатора паровой машины, решил задачу колебания массы груза, прикрепленного к концу стержня. Решения подобного класса задач широко используется при исследовании вязкоупругих систем с распределенными параметрами, представителями которых являются подъемные, конвейерные и другие горные машины и установки. Всемирное признание получил С.П. Тимошенко (1878-1972). В возрасте 28 лет он становится профессором Киевского политехнического института (1906-1911), в 1912-1917 годах работает профессором путейного и политехнического институтов в Петербурге. В 1918-1920 г. С.П. Тимошенко первый директор института механики академии наук Украины. В 1920-1922 г. он работает в Югославии и затем переезжает в США, где вначале был профессором Мичиганского, а затем Стенфордского университетов [57]. С.П. Тимошенко является автором многих трудов по строительной механике, прикладной теории упругости, технической теории колебаний и удара. В 1928 г. он опубликовал замечательную монографию "Колебания в инженерном деле", которая выдержала четыре издания и в 1985 г. вышла в издательстве "Машиностроение" [79]. Эта книга является настольной для нескольких поколений механиков. Всемирное признание С.П. Тимошенко характеризуется хотя бы такими данными. С 1919 г. он академик АН Украины, с 1928 г. - иностранный член-корреспондент АН СССР. Затем избирается членом академии наук Польши (1935), Франции (1939), США (1941), Италии (1948) и Лондонского королевского общества (1944). Исторической датой для развития техники и в частности, горной механики, является 1773 г. В этом году создается Петербургское горное училище, которое стало первым техническим высшим учебным заведением России. Профессор Петербургского горного института И.А. Тиме (1838-1920) является основоположником горнозаводской механики. Академики М.М. Федоров (1867-1945) и А.П. Герман (1874-1953) своими исследованиями в области шахтного подъема, компрессорных, вентиляторных и водоотливных установок создали новую научную дисциплину, которая получила название - горная механика. В дальнейшем, многие отечественные ученые внесли заметный вклад в развитие теории и практики динамики машин. Не претендуя на полноту освещения этого вопроса и принося заранее свои извинения за то, что многие достойные ученые не будут отмечены, автор отмечает только тех, чьи работы, в основном, лежали, на его письменном столе. К таким работам относятся монографии И.М. Бабакова [13], В.Л. Бидермана [18], Я.Г. Пановко [56; 57], А.А. Яблонского [92], Д.Р. Меркина [52] и др. В области динамики горных машин автор отдает должное своим предшественникам, работающим в этой области



техники. Прежде всего, с признательностью отмечаю книги Б.Л. Давыдова [36, 37], Г.Н. Савина [64], В.М. Осецкого [55], В.Н. Потураева [29], Ф.В.Флоринского [84] и др.

Широкое использование персональных компьютеров и современных математических пакетов в научных исследованиях позволили совершенно по новому подойти к решению самых сложных задач динамики машин, многие из которых были отложены до настоящего времени из-за большой трудоемкости вычислительных процедур. К одной из таких программ автор относит инженерно-математический пакет MATHCAD, который содержит мощный вычислитель и простой в применении графический редактор. Обширный набор векторных и матричных операций делают систему MATHCAD удобной для анализа и моделирования различных процессов.

В книге не нашли отражения вопросы нелинейных колебаний, за исключением колебаний в системах с силами сухого трения, автоколебаний, параметрического резонанса и ряда других.

Создание монографии, которая одновременно удовлетворяла бы практическим требованиям и учебным задачам, невозможна без критики предложенной методологии со стороны специалистов, занимающихся динамикой машин. Автор с признательностью встретит все такого рода критические замечания.

Работа выполнена при поддержке грантами по фундаментальным исследованиям в области транспортных наук и горного дела Министерства общего и профессионального образования РФ.

## **1. ЗАДАЧИ НАУКИ О ДИНАМИКЕ МАШИН**

Исторические примеры подтверждают, что незнание или игнорирование динамических нагрузок в конструкциях и машинах приводят к их разрушению. К современным машинам предъявляются достаточно противоречивые требования. С одной стороны, машины должны обладать высокой производительностью, то есть быть высокоскоростными с форсированными процессами разгона и торможения. Реализация этих требований в машинах приводит к повышенным динамическим нагрузкам. С другой стороны, они должны быть безопасными и долговечными в эксплуатации, то есть уровень динамических нагрузок должен соответствовать напряжениям, при которых не происходит прогрессирующее накопление усталости материала. Для рациональной реализации конструкции любой машины необходимо знание полных напряжений в узлах этих машин. Если напряжения от статических нагрузок определяются достаточно точно и просто, то определение напряжений от динамических нагрузок для многих машин представляет значительную сложность и трудоемкость.

Сложность и трудоемкость определяются выбранной эквивалентной схемой и принятым способом математического описания динамических процессов. Например, современную шахтную подъемную установку можно представить системой из восьми сосредоточенных масс, соединенных вязкоупругими элементами. Если канаты представить вязкоупругими стержнями с распределенной по их длине массой, то класс таких задач характеризуется системой уравнений, в которых динамические процессы в канатах описываются уравнениями в частных производных. Сосредоточенные массы и присоединенные к ним вязкоупругие элементы характеризуются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Решение такой задачи заключается в определении, в зависимости от краевых условий, собственных чисел и фундаментальных функций, в определении достаточного количества гармоник, при котором ряд Фурье сходится, и в интегрировании дифференциальных уравнений, количество которых может быть достаточно большим. Для определения собственных чисел задачи необходимо найти корни характеристического уравнения, которое получается из характеристической матрицы коэффициентов. Например, подъемная установка, содержащая четыре ветви каната, характеризуется матрицей девятого порядка [70]. После определения собственных чисел необходимо их запомнить, найти постоянные интегрирования и перенести в специальную программу численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Внедрение в научные исследования современных персональных компьютеров и математических пакетов значительно расширило возможности решения задач динамики машин.

Первой задачей динамики можно назвать задачу анализа. Для решения этой задачи необходима разработка эквивалентной схемы машины, математическое описание динамического процесса и решение уравнений для заданных движущих сил и сил сопротивления.

В промышленности применяется большое количество машин, отличающихся по принципу действия и конструктивным особенностям. Для правильного математического описания динамических процессов необходимы знания не только законов механики, но и знания в области гидравлики и гидропривода, электротехники и электропривода, пневматики и пневмопривода. Например, в качестве электропривода шахтных подъемных машин используются асинхронные электродвигатели с фазным ротором и электродвигатели постоянного тока, механические характеристики которых имеют принципиальные различия. Гидропривод машин состоит из гидродвигателей и аппаратов регулирования гидросистем. В качестве промежуточного звена электропривода ленточного конвейера используется гидромурфта. Компрессорная установка и машины с пневматическими двигателями имеют свою специфику в математическом аппарате при описании динамических процессов.

Если массы вязкоупругих элементов присоединить к сосредоточенным, а количество сосредоточенных масс уменьшить, то задача анализа значительно упростится. Приведение реальной системы к двухмассовой с внешними линейными воздействиями позволяет получить аналитические закономерности, которые применимы для анализа многомассовых сис-

тем. Решение уравнений позволяет определить кинематические закономерности движения отдельных узлов и элементов машины, которые формируют динамические нагрузки.

Второй задачей динамики является задача динамического синтеза, суть которой заключается в оптимизации динамических процессов. В качестве критерия оптимальности может быть выбрана максимальная производительность, малый вес или наибольшая долговечность. Например, для получения максимальной долговечности необходимо обеспечить минимум динамических нагрузок. Решение задачи синтеза чрезвычайно затруднительно для систем, математическая модель которых характеризуется уравнением с порядком выше двух. Однако результаты по оптимизации двухмассовых моделей могут быть распространены на многомассовые системы. Использование компьютерной техники позволяет значительно упростить изучение задачи синтеза динамических систем. Например, теоретически установлено, что приложение возмущающего воздействия к двухмассовой системе по линейному закону за время кратное периоду собственных колебаний формирует в механической системе минимальные динамические нагрузки. Использование этих закономерностей для многомассовых систем также приводит к уменьшению динамических нагрузок.

### 1.1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ МАШИН

При изучении динамических процессов машин важным условием является хорошее знание конструкции машины, механических характеристик привода, внешних и внутренних сил сопротивления. Рассмотрим принципиальную схему шахтной подъемной установки с двухбарabanной подъемной машиной (рис. 1.1).

Предположим, груженный сосуд массой  $m_{cy}$  поднимается, а порожний, имеющий массу  $m_{cz}$ , опускается. Груженная ветвь каната, имеющая жесткость  $c_y$ , перекинута через направляющий шкив массой  $m_{шy}$  и соединена с массой барабана  $m_{1xy}$  посредством струны каната, имеющего жесткость  $c_{cy}$ . Аналогичным образом, порожний сосуд массой  $m_{cz}$  при помощи каната с жесткостью  $c_z$  соединяется со шкивом массой  $m_{шz}$ , который канатом струны, жесткостью  $c_{cz}$ , соединяется со вторым барабаном подъемной машины, имеющим массу  $m_{1xz}$ . Барабаны машины посредством муфты соединяются с редуктором, масса вращающихся зубчатых колес которого  $m_p$ . Жесткость  $c_p$  характеризует упругие свойства муфты и зубчатой передачи. Редуктор и электродвигатель, имеющий вращающуюся массу ротора  $m_{\partial e}$ , соединены при помощи пружинной муфты с жесткостью  $c_{\partial e}$ .

Нижние сечения подъемных сосудов соединены уравновешивающим канатом, который уменьшает статические сопротивления движению подъемной системы в начале подъема. Предположим, подъемная система находится в неподвижном состоянии или равномерно движется. Динамические процессы, связанные с разгоном или торможением, закончены. Мысленно отметим в момент времени  $t = 0$  координаты всех масс, которые можно принять за нулевые.

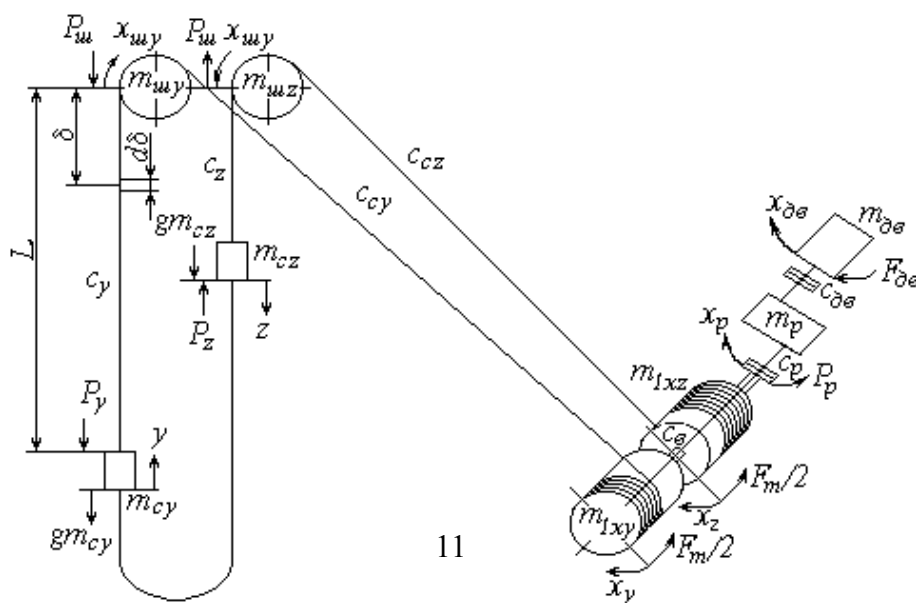


Рис. 1.1. Принципиальная схема шахтной подъемной установки

На схеме показаны силы, действующие на сосредоточенные массы. Силы  $gm_{cy}$  и  $gm_{cz}$  - соответственно силы тяжести грузеного и порожнего сосудов. К массам сосудов приложены силы сопротивления  $P_y$  и  $P_z$ . Эти силы характеризуют сопротивление движению сосудов в проводниках ствола и аэродинамические сопротивления в струе воздуха. Силы  $P_y$  и  $P_z$  направлены против движения, поэтому  $P_y$  и  $gm_{cy}$  совпадают по направлению, а  $P_z$  и  $gm_{cz}$  направлены встречно. Силы  $P_w$  характеризуют вредные сопротивления при вращении шкивов в подшипниках. Тормозная сила  $F_m/2$  приложена к каждому барабану. Сила  $P_p$  характеризует силу вредного сопротивления при вращении колес зубчатой передачи. Двигатель развивает усилие  $F_{\partial\theta}$ . Усилия в канатах, не показанные на схеме, определяются не только вышеперечисленными силами, но и мгновенными значениями координат и скоростей сосредоточенных масс.

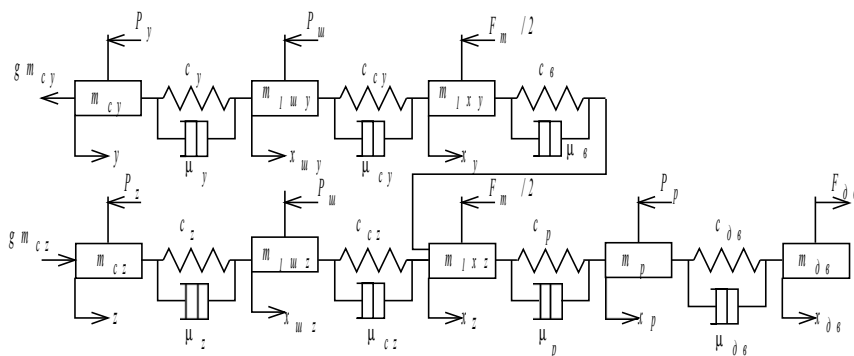


Рис. 1.2. Эквивалентная схема подъемной установки

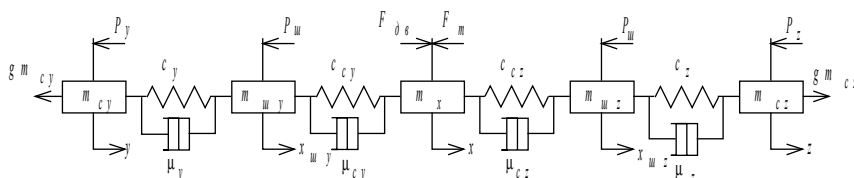


Рис. 1.3.

Эквивалентная схема подъемной установки состоящей из пяти сосредоточенных масс

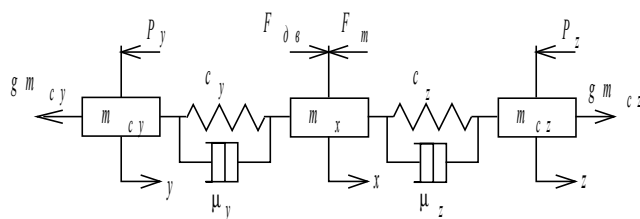


Рис. 1.4. Эквивалентная схема трехмассовой подъемной установки

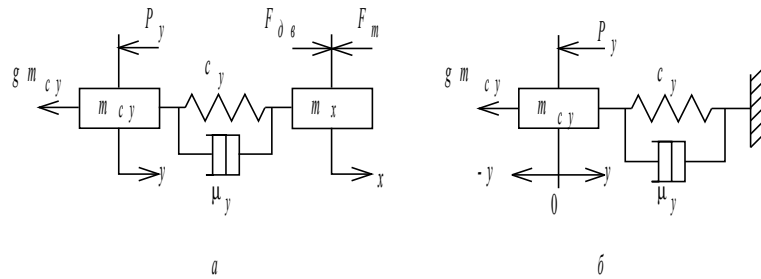


Рис. 1.5. Эквивалентная схема одноконцевой подъемной установки:  
*а* - во время движения; *б* - после остановки машины

Рассмотренную схему шахтной подъемной установки можно заменить эквивалентной, состоящей из восьми сосредоточенных масс, соединенных вязкоупругими связями. Каждый вязкоупругий элемент имеет жесткость  $c_i$  и коэффициент диссипации  $\mu_i$  (рис. 1.2). Индексы характеризуют принадлежность к определенным массам машины. Например,  $\mu_y$  - коэффициент характеризующий силы вязкого сопротивления каната, соединяющего массы машины  $m_{cy}$  и  $m_{шy}$ .

Приняв эту схему за основу, для разработки математической модели следует сделать следующие допущения:

1. Жесткость уравнивающего каната не оказывает влияния на динамический процесс, а массы ветвей канатов сосредоточены у сосудов и барабанов.
2. Подъемные канаты представлены невесомыми вязкоупругими нитями с постоянной жесткостью.

Справедливость первого допущения зависит от длины уравнивающего каната. Исследования динамики, проведенные для многоканатной подъемной установки, работающей в условиях шахты им. 9-той пятилетки в Донбассе, показывают возможность такого допущения [70].

Что касается представления канатов невесомыми вязкоупругими нитями вместо вязкоупругих стержней с распределенной массой по длине, то возможность такого допущения отмечалась акад. Г.И. Савиным и С.П. Тимошенко при условии, если отношение массы каната к массе конечного груза меньше единицы [64, 79]. Автор склонен считать, что принятие или непринятие этого допущения носит чисто научный характер. Практические расчеты для существующих подъемных установок, при принятых допущениях, дают значение частотных и амплитудных величин, которые сравнимы с решением этой задачи в частных производных. В ущерб более строгим представлениям, принятие этого допущения существенно уменьшает трудоемкость решения. Доказательство этого положения будет приведено в разделе 8.

Допущения о том, что жесткость канатов в переходном режиме остается постоянной, объясняется тем, что в процессе торможения или разгона длина каната изменяется несущественно. При численном методе решения этих задач на ЭВМ учет изменения жесткости не представляет практических затруднений.

Таким образом, представив реальную шахтную подъемную установку схемами, показанными на рис. 1.1 и 1.2 и, определив закономерности изменения движущего или тормозного усилий ( $F_{0в} = f(t)$ ,  $F_m = f(t)$ ), можно сформулировать следующие задачи динамики:

1. Определить координаты перемещений, скорости, ускорения и частоты колебаний каждой из восьми сосредоточенных масс.
2. Определить полные и динамические усилия в канатах в местах присоединения их к сосредоточенным массам.
3. Определить полные напряжения в валопроводе подъемная машина - электродвигатель, в том числе в муфтах и зубчатом зацеплении редуктора.

4. Определить влияние направляющих шкивов на формирование динамических нагрузок и возможность проскальзывания канатов по шкивам при резких торможениях.
5. Изучить процессы скольжения канатов по барабану трения многоканатной подъемной машины.
6. Решить задачу синтеза, т. е. найти законы изменения  $F_{\text{де}} = f(t)$  или  $F_m = f(t)$  при которых будут обеспечены минимальные динамические нагрузки при заданном среднем ускорении машины.

Жесткость элементов валопровода ( $c_{\text{в}}$ ,  $c_p$ ,  $c_{\text{де}}$ ) во много раз больше жесткости ветвей канатов, поэтому массы двигателя, редуктора и барабанов будут иметь высокочастотные составляющие колебаний. Если исследователя не интересуют эти высокочастотные колебания, то массы двигателя  $m_{\text{де}}$ , редуктора  $m_p$  и барабанов  $m_{1xy}$  и  $m_{1xz}$  можно заменить одной эквивалентной  $m_x$ . Тогда эквивалентная схема шахтной подъемной установки будет представлена системой с пятью сосредоточенными массами, показанной на рис. 1.3. Эта схема значительно уменьшает трудоемкость решения задачи динамики, исключая исследование высокочастотных колебаний в муфтах и зубчатой передаче.

Если массы шкивов  $m_{1xy}$  и  $m_{1xz}$  присоединить к массе машины  $m_x$ , а длины подъемных канатов увеличить на величину длины струны, то подъемную установку можно представить трехмассовой эквивалентной схемой, приведенной на рис. 1.4.

Эта схема получила наибольшее распространение при исследовании динамических процессов в шахтной подъемной установке и позволяет изучить влияние внешних возмущающих воздействий на формирование динамических нагрузок в вязкоупругих канатах.

В практике эксплуатации шахтного подъема в условиях наклонных стволов нашли применение одноконцевые подъемные установки, у которых концевая масса  $m_{cy}$ , соединена с массой барабана  $m_x$  (рис. 1.5, а).

Следует заметить, что математическая модель двухмассовой механической системы позволяет получить аналитические решения, выявить общие закономерности, что значительно упрощает задачи анализа и синтеза.

После остановки машины масса  $m_{cy}$  совершает свободные колебания (рис. 1.5, б).

Если предположить, что канат является абсолютно жестким, то координаты перемещений и скорости масс  $m_{cy}$  и  $m_x$  будут одинаковыми. Подъемную установку можно представить одномассовой системой, в которой массы всех поступательно движущихся и вращающихся частей заменены одной эквивалентной, называемой приведенной массой. Приведенная масса характеризует материальное тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь. Очевидно, такое допущение позволяет не учитывать взаимное расположение масс, форму тела и, как следствие, исключается изучение колебаний отдельных масс в системе относительно друг друга. Принятие такого допущения ограничивает число задач динамики. В этом случае, как правило, определяются кинематические режимы движения машины, т. е. находятся координаты перемещения, скорости, ускорения машины, а также время разгона или торможения. Динамические усилия в узлах машины можно определить приближенно, принимая ускорение любого узла равным ускорению машины, т. е. при этом допущении процесс представляется квазидинамическим, в котором отсутствуют взаимные колебания масс. Таким образом, на примере шахтной подъемной установки показана возможность замены реальных схем эквивалентными, при этом, количество масс принимается в зависимости от сформулированных задач. Такой подход при построении эквивалентных схем оказывается справедливым для всех других машин, имеющих существенные отличия в принципе действия.

## 1.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАССЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Тело, размерами которого можно пренебречь, называется материальной точкой. Масса является мерой инертности материальной точки при поступательном движении. Согласно

данным специальной теории относительности масса тела увеличивается при увеличении скорости и связана соотношением [26]

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_c^2}}},$$

где  $m_0$  - масса тела в покое;

$m$  - масса движущегося тела;

$v$  - скорость тела;

$v_c$  - скорость света в вакууме.

Скорости узлов и деталей горных машин малы по сравнению со скоростью света и при изучении задач динамики их массы принимаются постоянными. Машин, в которых массы отдельных узлов изменяются по технологическим причинам, формулируют задачи динамики тела с переменной массой и характеризуются уравнением И.В. Мещерского [65, 76]. В разделе 3.6 рассмотрены динамические процессы машин с изменяющимися массами.

Любую машину можно представить соответствующей эквивалентной схемой, в которой каждая масса характеризует определенное звено машины и имеет поступательное или вращательное движение. Например, в рассмотренной схеме шахтной подъемной установки, показанной на рис. 1.1, массы концевых грузов  $m_{cy}$ ,  $m_{cz}$  и соединяющие их вязкоупругие канаты имеют продольные колебания. Массы барабанов  $m_{1xy}$ ,  $m_{1xz}$ , редуктора  $m_p$  и ротора электродвигателя  $m_{об}$  вращаются, поэтому их валы будут иметь крутильные колебания. Кроме сосредоточенных масс в машинах могут быть элементы больших геометрических размеров, масса которых распределена по длине. Примером таких машин являются шахтные подъемные установки и конвейеры. Длины канатов шахтной подъемной установки могут быть более 1000 м и их масса становится соизмеримой с массой концевой груза. Длина ленточного конвейера 2ЛУ120Б достигает 2900 м, при этом масса ленты и груза, расположенного на ней, достигает 590 т. В зависимости от конструкции машины и поставленной задачи эквивалентную схему целесообразно выбирать такой, чтобы все массы имели линейные, или угловые перемещения.

При исследовании динамики шахтного подъема массы целесообразно расположить на одной геометрической оси, например, на оси барабана. Тогда в эквивалентной схеме все узлы подъемной установки будут иметь линейные координаты. Например, линейные величины  $x_y$  и  $x_z$  характеризуют перемещение точки, лежащей на обечайке барабана, а координата  $x_p$  - перемещение условной точки зубчатого колеса, диаметр которого равен диаметру барабана. Координата  $x_{об}$  характеризует перемещение условной точки лежащей на диаметре  $D_{ycl} = D_{б}/i$ , где  $D_{б}$  - диаметр барабана,  $i$  - передаточное отношение редуктора.

При исследовании крутильных колебаний валов машин, удобно пользоваться угловыми координатами.

Для определения масс поступательно движущихся узлов машины достаточно знать их вес. Масса поступательно движущего элемента определяется

$$m_i = \frac{G_i}{g},$$

где  $G_i$  - приведенный вес движущегося элемента машины, Н;

$g$  - ускорение свободного падения, м·с<sup>-2</sup>. Масса системы равна арифметической сумме масс всех тел, участвующих в движении.

Мерой инерции вращающегося тела вокруг данной оси является момент инерции  $J$ . Понятие момента инерции было введено Л. Эйлером [65]. В технических характеристиках многих горных машин вместо момента инерции приведены данные махового момента  $GD^2$ .

Для определения взаимосвязи между этими величинами предположим, что к вращающейся массе с моментом инерции  $J$  и радиусом  $R$  приложен динамический момент  $M$ , который сообщает этой массе угловое ускорение  $\varepsilon$ , т. е.  $M = J\varepsilon$ . Очевидно, это угловое ускорение получит масса, приведенная к радиусу  $R$ , если будет приложена сила  $F = ma$ , где  $a = \varepsilon R$  - линейное ускорение точки лежащей на радиусе  $R$ . Следовательно,  $J\varepsilon = maR$ , или  $J = mR^2$ . Таким образом, моментом инерции тела относительно оси вращения будет величина, равная массе тела, сосредоточенной в точке, умноженной на квадрат расстояния от точки до оси вращения. Если, например, тело массой  $m$  имеет момент инерции  $J$ , то радиус инерции этого тела будет

$$R = \sqrt{\frac{J}{m}}.$$

Формулы для определения момента инерции тел, имеющих простую геометрическую фигуру, известны [30, 55, 76]. Например, для однородного кольца радиуса  $R$  и массы  $m$ ,  $J = mR^2$ ; для тонкого однородного стержня длиной  $l$ ,  $J = 1/3 ml^2$ ; для круглой тонкой пластины (диска),  $J = 1/2 mR^2$ ; для шара  $J = 0,4 mR^2$ . Если вместо приведенной массы рассматривать приведенный вес  $G = gm$  и, полагая  $D = 2R$ , получим

$$J = \frac{GD^2}{4g},$$

или

$$G = \frac{4gJ}{D^2}. \quad (1.1)$$

Значит, количественной мерой инерции тела, вращающегося вокруг данной оси, является момент инерции  $J$ . Из последней формулы получается наглядная и широко используемая в инженерной практике зависимость

$$GD^2 \approx 40J.$$

Таким образом, вместо момента инерции тела  $J$  может быть использовано пропорциональное ему произведение  $GD^2$ , именуемое маховым моментом. Символ  $G$  означает не истинный, а приведенный к любой окружности диаметра  $D$  вес тела. С изменением  $D$  изменяется также и  $G$ , но так, что произведение  $GD^2 \approx 40J$  остается постоянным. Следовательно, выражение махового момента  $GD^2$  является символом, в котором отдельно взятым обозначениям  $G$  и  $D$  не предписывается каких-либо конкретных численных значений [33]. Массы вращающихся узлов машины, приведенные к выбранному диаметру  $D$ , определяются

$$m_{\text{ep}} = \frac{GD_i^2}{gD^2}.$$

В рассмотренной схеме это относится к массам барабана и редуктора.

Если вращающиеся массы имеют разную частоту вращения (предполагается наличие редуктора с передаточным отношением  $i$ ) то, используя положение о том, что эквивалентными в динамическом отношении массами считаются массы, обладающие равными кинетическими энергиями, для ротора двигателя можно записать



$$m_p = \frac{GD_{\text{ог}}^2}{g D^2} i^2,$$

здесь  $GD_{\text{ог}}^2$  - маховый момент ротора электродвигателя,  $\text{Н}\cdot\text{м}^2$ .

Таким образом, суммарная масса всех движущихся частей, приведенная к радиусу вращения исполнительного механизма, определится

$$m = \sum m_{\text{вп}} + \sum m_{\text{пост}},$$

где  $\sum m_{\text{вп}}$  - сумма масс вращающихся частей, кг;

$\sum m_{\text{пост}}$  - сумма масс поступательно движущихся частей, кг.

Например, для шахтной подъемной установки, рассмотренной на рис. 1.1,

$$\begin{aligned} \sum m_{\text{вп}} &= \frac{GD_{\text{он}}^2}{D_{\text{он}}^2} + \frac{GD_{\text{ред}}^2}{D_{\text{он}}^2} + \frac{GD_{\text{ог}}^2}{D_{\text{он}}^2} i^2 + 2 \frac{GD_{\text{шк}}^2}{D_{\text{шк}}^2}; \\ \sum m_{\text{пост}} &= m_{\text{сy}} + m_{\text{cz}} + 2 p L_{\text{зк}} + p' L_{\text{yk}}; \\ m_{\text{сy}} &= m_n + m_m; \\ m_{\text{cz}} &= m_m, \end{aligned}$$

здесь  $GD_{\text{он}}^2$ ,  $GD_{\text{ред}}^2$ ,  $GD_{\text{ог}}^2$ ,  $GD_{\text{шк}}^2$  - маховые моменты соответственно органов навивки, редуктора, двигателя и шкивов,  $\text{Н}\cdot\text{м}^2$ ;  $D_{\text{он}}$  - диаметр органа навивки, м;  $D_{\text{шк}}$  - диаметр направляющих шкивов, м;  $m_n$  - масса полезного груза в сосуде, кг;  $m_m$  - собственная масса подъемного сосуда, кг;  $p$  - линейная плотность головного каната,  $\text{кг}\cdot\text{м}^{-1}$ ;  $p'$  - линейная плотность уравнивающего каната,  $\text{кг}\cdot\text{м}^{-1}$ ;  $L_{\text{зк}}$ ,  $L_{\text{yk}}$  - длины головного и уравнивающего канатов, м.

Массы элементов машины, имеющие большие геометрические размеры и распределенные по длине, могут быть заменены эквивалентными с соблюдением принципа равенства кинетических энергий. Масса груза и ленты конвейеров может достигать нескольких сот тонн и рассредоточена на длине более 2000 м. Масса канатов шахтного подъема достигает нескольких десятков тонн, а их длина более 1500 м.

В практике исследования таких систем широкое применение нашел метод, известный под названием метода Рэлея [37, 74, 79]. В основу принципа Рэлея положено условие, при котором характер деформации упругого звена при динамических нагрузках соответствуют деформациям статического нагружения. Применительно к схеме, показанной на рис. 1.1 это будет соответствовать следующим положениям. Рассмотрим грузеную ветвь каната длиной  $L_y$ . Если в какой то момент времени верхний конец каната имеет координату перемещения  $x_{uy}$ , а нижний  $y$ , то динамическая деформация будет равна  $x_{uy} - y$ . На рис. 1.6 показано распределение деформации каната по его длине в соответствии с принципом Рэлея.

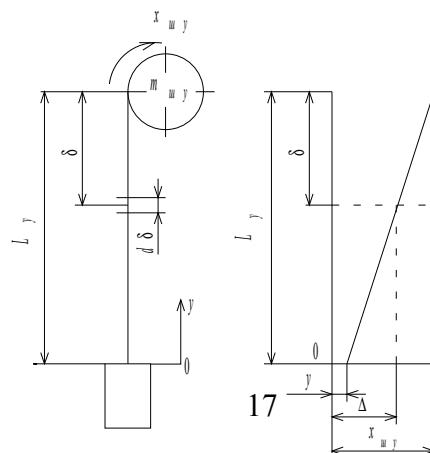


Рис. 1.6. Характеристика деформации каната

Если, на расстоянии  $\delta$  от массы  $m_{uy}$ , выделить элементарный участок  $d\delta$ , то этот участок будет иметь перемещение  $\Delta$ . Из графика видно, что

$$\Delta = x_{uy} - \frac{x_{uy} - y}{L_y} \delta. \quad (1.2)$$

Продифференцировав (1.2), получим скорость элементарного участка  $d\delta$

$$\Delta' = x'_{uy} - \frac{x'_{uy} - y'}{L_y} \delta. \quad (1.3)$$

Кинетическую энергию элементарного участка каната длиной  $d\delta$  можно представить

$$dT_\kappa = \frac{pd\delta}{2} (\Delta')^2. \quad (1.4)$$

Интегрируя (1.4), найдем полную кинетическую энергию каната

$$T_\kappa = \int_0^{L_y} \frac{p}{2} (\Delta')^2 d\delta = \frac{p}{2} \int_0^{L_y} \left( x'_{uy} \frac{x'_{uy}}{L_y} \delta \right)^2 d\delta = \frac{m_{\kappa y}}{2} \left[ \frac{(x'_{uy})^2 + x'_{uy} y' + (y')^2}{3} \right], \quad (1.5)$$

где  $m_{\kappa y} = pL_y$  - масса каната длиной  $L_y$ , кг.

Если массу каната привести к сосуду, скорость которого  $y'$ , то кинетическая энергия эквивалентной массы  $m_{\varepsilon y}$ , будет

$$T_\kappa = \frac{m_{\varepsilon y}}{2} (y')^2.$$

Исходя из равенства кинетических энергий, получим

$$m_{\varepsilon y} = \frac{m_{\kappa y}}{3} \left[ 1 + \frac{x'_{uy}}{y'} + \left( \frac{x'_{uy}}{y'} \right)^2 \right]. \quad (1.6)$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить подобную формулу и для эквивалентной массы каната, движущейся вместе со шкивом

$$m_{\varepsilon uy} = \frac{m_{\kappa y}}{3} \left[ 1 + \frac{y'}{x'_{uy}} + \left( \frac{y'}{x'_{uy}} \right)^2 \right]$$

Предположим, что масса шкива  $m_{uy}$  неподвижна (1.5, б). Такая схема характеризует свободные колебания сосуда после остановки подъемной машины. Характер деформации каната  $\lambda$ , в соответствии с принципом Рэлея, принят линейным

$$\Delta = \frac{y}{l_y} \delta; \quad \Delta' = \frac{y'}{l_y} \delta.$$

Тогда нетрудно получить

$$m_3 = \frac{m_{кy}}{3}.$$

Эта же зависимость получается из уравнения (1.6) при  $x'_{uy} = 0$ .

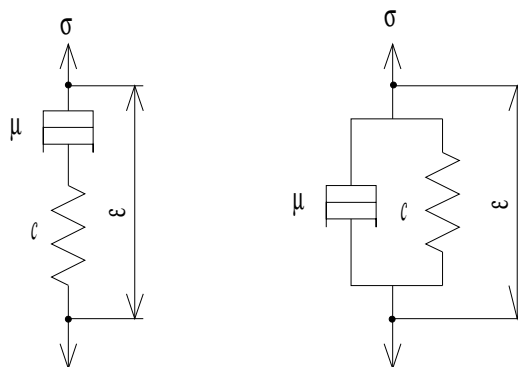
Таким образом, для того чтобы учесть кинетическую энергию каната при его колебаниях достаточно к массе концевой груза добавить одну треть массы каната. Подобное утверждение справедливо и для других механических систем, например, для ленточных конвейеров.

Из зависимости (1.6) видно, что если  $x'_{uy} = y'$ , что возможно при абсолютно жестком канате, получим  $m_3 = m_{кy}$ , т. е. если представить машину системой в которой все массы соединены абсолютно жесткими связями, то масса каната (ленты) входит одной из составляющих в приведенную массу установки.

### 1.3. ВЯЗКОУПРУГИЕ СВОЙСТВА ТРАНСМИССИИ МАШИНЫ

Реальные трансмиссии горных машин состоят из зубчатых редукторов, муфт, валов, канатов, цепей и других элементов. Все эти элементы обладают определенной жесткостью и при работе машины соответствующим образом деформируются. Чтобы деформировать упругий элемент необходимо время, поэтому в реально работающей машине при пуске двигателя исполнительный орган работает с запаздыванием. Изменение нагрузки на исполнительном органе не сразу отражается на приводе. Более того, кратковременные и высокочастотные периодические возмущения могут не проходить по всей трансмиссии машины, т. е. последняя может обладать свойством фильтра. Например, известно, что электромагнитный момент асинхронного электродвигателя имеет высокочастотные колебания [68]. Эти высокочастотные колебания не достигают грузов в шахтных подъемных установках [70]. Случайное включение твердого прослойка небольшой мощности в пласте полезного ископаемого, встреченное органом разрушения горного комбайна, может не отразиться на скорости вращения двигателя и, тем более, на токе, потребляемом электродвигателем из сети.

Поведение материала, которое объединяет в себе свойства упругости и вязкости, называют вязкоупругим. Физическую интерпретацию такого поведения можно дать при помощи механической модели, состоящей из пружин и демпферов (рис. 1.7).



*a**б*Рис. 1.7. Механические модели: *a* - модель Максвелла; *б* - модель Фойхта

Модель, представленная на этих рисунках характеризуется коэффициентом упругости пружины  $c$  и коэффициентом вязкого сопротивления  $\mu$ . Механическую модель, показанную на рис. 1.7, *a*, обычно называют моделью Максвелла.

Математическая зависимость между относительной деформацией  $\varepsilon$  и напряжением  $\sigma$ , характеризуется уравнением [30, 48]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\mu}, \quad (1.7)$$

здесь  $E$  - модуль упругости материала, МПа;

$\mu$  - коэффициент внутреннего трения,  $\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$ .

Если вязкоупругие элементы соединены между собой параллельно, то такая модель получила название Кельвина или Фойхта, а иногда называется моделью Фойхта - Кельвина (рис. 1.7, *б*). Уравнение, устанавливающее связь между элементами

$$\sigma = (E + \mu \frac{\partial}{\partial t}) \varepsilon. \quad (1.8)$$

Следует заметить, что модель Максвелла соответствует упруговязкой жидкости, а модель Фойхта определяет твердое тело.

### 1.3.1. УПРУГИЕ СВОЙСТВА ТРАНСМИССИИ МАШИНЫ

Деформацией твердого тела называется изменение его размеров или объема. В деформированном теле возникают упругие силы, которые уравновешивают внешние силы, вызывающие деформацию.

Мерой деформации является относительная деформация, равная отношению абсолютной деформации  $\Delta l$  к первоначальному значению величины  $l$ , характеризующей форму или размеры тела.

Простейшей деформацией является продольное или одностороннее растяжение (сжатие) - увеличение (уменьшение) длины тела под действием внешней растягивающей (сжимающей) силы.

В соответствии с законом Гука напряжение при простейшей деформации характеризуется [93]

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l},$$

где  $E$  - модуль упругости, называемый модулем Юнга, Па;

Модуль Юнга (упругости) равен нормальному напряжению  $\sigma$ , при котором линейные размеры тела изменяются в два раза, т. е.  $\Delta l = l$ .

Жесткость участков трансмиссии простых узлов машины определяется аналитически, а сложных (зубчатые, цепные передачи и др.) - экспериментально на специальных стендах.

Например, вал круглого поперечного сечения длиной  $L$  и диаметром  $d$  будет иметь жесткость при кручении [30, 79]

$$c_{\kappa} = \frac{G_{c\delta}}{L} J_n,$$

где  $G_{c\delta}$  - модуль упругости материала при сдвиге (модуль сдвига), Па;

$J_n$  - момент сопротивления кручению поперечного сечения вала, который для сечения круглой формы равен полярному моменту инерции, м<sup>4</sup>.

Полярный момент инерции для круглого вала диаметром  $d$  равен

$$J_n = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4.$$

Для полого круглого вала с наружным  $D$  и внутренним  $d$  диаметрами

$$J_n = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4).$$

Тогда угол закручивания вала будет

$$\varphi = \frac{M}{c_{\kappa}},$$

здесь  $M$  - момент, которым нагружен вал, Н·м, Канаты, длинные стержни (штанги) имеют продольную жесткость

$$c_n = \frac{EF}{L},$$

где  $E$  - модуль упругости стержня или каната, Па;  $F$  - площадь поперечного сечения стержня или суммарная площадь всех проволок в канате, м<sup>2</sup>;  $L$  - длина стержня (каната), м.

Модули упругости при продольной нагрузке  $E$  и при сдвиге  $G_{c\delta}$  зависят от материала. Значения этих величин приведены в табл. 1.1. [26]

Таблица 1.1

## Модули упругости

Материал	$E$ , МПа	$G_{c\delta}$ , МПа
Углеродистая сталь	$(20-21) \cdot 10^4$	$8,1 \cdot 10^4$
Хромоникелевая сталь	$21 \cdot 10^4$	$8,1 \cdot 10^4$
Чугун	$(11,5-16) \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^4$

Медь холоднотянутая	$(11-13) \cdot 10^4$	$4,9 \cdot 10^4$
Дерево вдоль волокон	$(9-12) \cdot 10^3$	$(4,5-6,5) \cdot 10^2$
Дерево поперек волокон	$(4-10) \cdot 10^2$	$(4,5-6,5) \cdot 10$
Резина	2-8	0,7-2,5

Модуль упругости каната зависит от конструкции каната, диаметра, материала проволок и многих других факторов. По данным [ 72, 84, 87] модули упругости канатов, определенные экспериментально, равны  $E = (10,9-16,8) \cdot 10^4$  Мпа, т. е. примерно в два раза меньше, чем у углеродистой стали.

В реальной машине упругие элементы могут быть расположены в различных местах трансмиссии. Эквивалентными, с точки зрения динамики, считаются упругие элементы, имеющие равную величину потенциальной энергии деформации. Поэтому при построении эквивалентной схемы пользуются понятием приведенной жесткостью участка, которая определяется абсолютной жесткостью и кинематическими данными этого участка. Например, участок трансмиссии, имеющий жесткость при кручении  $c_1$ , получил крутильную деформацию  $\varphi_1$ . Потенциальная энергия деформации этого элемента

$$П = \frac{c_1}{2} \varphi_1^2 .$$

Приведенный участок жесткости должен иметь такую же потенциальную энергию деформации

$$П = \frac{c_{np}}{2} \varphi_{np}^2 ,$$

здесь  $c_{np}$  - приведенная жесткость участка;

$\varphi_{np}$  - угол поворота центра приведения за счет закручивания первоначального участка на угол  $\varphi$ .

Из этих соотношений получим

$$c_{np} = c_1 \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_{np}} \right)^2 \quad \text{или} \quad c_{np} = \frac{c_1}{i^2} ,$$

где  $i$  - передаточное число между выделенным участком и центром приведения.

Эта формула справедлива для машины с редуктором, который уменьшает частоту вращения исполнительного органа в  $i$  раз, при этом жесткость исполнительного органа  $c_1$  приведена к оси двигателя. Если жесткость элемента  $c_{дв}$ , расположена у двигателя, а исполнительный элемент имеет частоту вращения в  $i$  - раз меньше двигателя, то приведенная жесткость будет  $c_{np} = c_{дв} i^2$ .

В реальной машине участки с одинаковой или различной жесткостью могут иметь последовательное и параллельное соединение. Например, на многоканатном шахтном подъеме сосуд может соединяться с барабаном при помощи двух, четырех, шести и даже, восьми канатов (рис. 1.8, а).

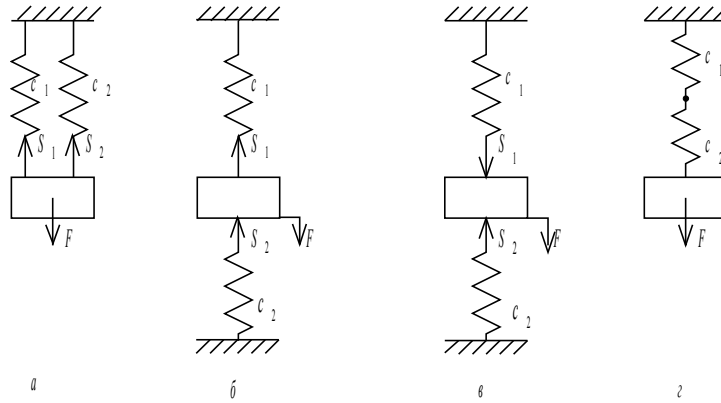


Рис. 1.8. Схемы соединений пружин: а, б, в - параллельное; г - последовательное

Под действием силы  $F$  в канатах возникают силы упругости  $S_1$  и  $S_2$ , которые деформируют оба каната на одинаковую величину  $\lambda$ . Очевидно  $S_1 + S_2 = F = c\lambda$ ;  $S_1 = c_1\lambda$ ;  $S_2 = c_2\lambda$ . Значит, общая жесткость подвески будет  $c = c_1 + c_2$ .

На рис. 1.8, б и 1.8, в приведены также схемы параллельного соединения пружин, при этом схема 1.8, б имитирует шахтный электровоз, находящийся в середине состава вагонов.

Предположим, система находится в состоянии покоя, силы деформации  $S_1$  и  $S_2$  равны нулю. При включении электровоза, развивается тяговое усилие  $F$ , при этом пружина жесткостью  $c_1$  растягивается на величину  $\lambda$  и создает усилие деформации  $S_1 = c_1\lambda$ , а другая пружина сжимается на эту же величину и развивает усилие  $S_2 = c_2\lambda$ .

Очевидно

$$F = S_1 + S_2 = c_1\lambda + c_2\lambda = (c_1 + c_2)\lambda.$$

Следовательно, аналогично первому случаю  $c = c_1 + c_2$ .

На рис. 1.8, в между двумя предварительно сжатыми пружинами силой  $S$  размещен разделительный элемент. Такой схеме соответствуют многие элементы гидропривода горных машин. Например, поршень пружинно-гидравлического привода тормоза шахтных подъемных машин нагружен с одной стороны силой от блока пружин, а с другой - силой от реакции тормозных колодок. Предположим, что весом поршня можно пренебречь и к нему приложена сила  $F$ , которая перемещает его на величину  $\lambda$ . Тогда

$$S_1 = S - c_1\lambda; \quad S_2 = S + c_2\lambda; \quad F = S_2 - S_1 = (c_1 + c_2)\lambda; \quad c = c_1 + c_2.$$

Таким образом, при параллельном соединении упругих элементов результирующая жесткость равна сумме жесткостей отдельных элементов. На рис. 1.8, г показано устройство, в котором к двум последовательно соединенным пружинам подвешен груз. Под действием силы  $F$  пружины растягиваются. При этом общая деформация равна сумме деформаций каждой пружины, т. е.  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ , поэтому при последовательном соединении упругих элементов их жесткость будет

$$\frac{F}{c} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} \quad \text{и} \quad c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

При  $n$  - последовательно соединенных элементах

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}.$$

Если  $c_1 = c_2 = \dots = c_n$ , то  $c = \frac{c_1}{n}$ .

Таким образом, выбрав эквивалентную схему машины, определяются жесткости отдельных участков, которые имитируют реальные узлы установки.

### 1.3.2. ВЯЗКИЕ СВОЙСТВА УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИНЫ

Динамические характеристики машины во многих случаях определяются не только жесткостью упругих элементов, но и их демпфирующей способностью. Рассеивание энергии в циклически деформируемом материале зависит от многих факторов. В первую очередь, к таким факторам относятся характеристика материала и его объем, вид нагружения (растяжение, кручение, изгиб), величина напряжений, температура, наличие магнитных полей и т. д. Например, рассеивание энергии при продольных колебаниях, как правило, существенно выше, чем при поперечных колебаниях.

Интегральной характеристикой демпфирующих свойств материала принято считать логарифмический декремент

$$\delta = \frac{1}{i} \ln \frac{y_n}{y_{n+i}}.$$

При циклическом деформировании реального твердого тела обнаруживается несовпадение зависимостей между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\epsilon$  при нагружении и разгрузке [58]. Вид этого нагружения показан на рис. 1.9 и свидетельствует о неупругом характере деформирования реальных материалов. Это явление, получившее названия гистерезиса, показывает, что материалом тела необратимо поглощается часть работы внешних сил, которая переходит в тепловую энергию, а затем рассеивается.

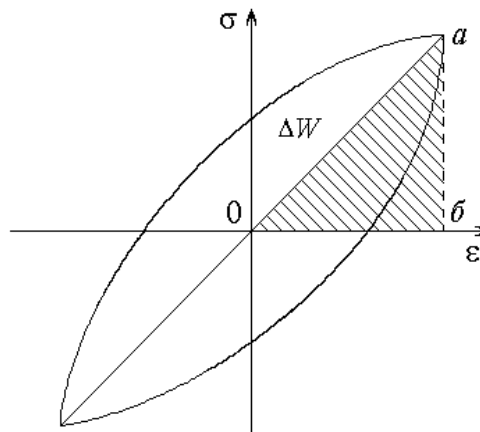


Рис. 1.9. Напряжение и относительная деформация за цикл нагружения

Мерой рассеивания энергии в материале является площадь петли гистерезиса  $\Delta W$ . Независимо от природы источников энергетических потерь характеристикой демпфирующих свойств упругой системы считается относительное рассеивание энергии  $\bar{\Psi}$ , под которым понимается отношение рассеянной энергии  $\Delta W$  за цикл установившихся колебаний к амплитудному значению потенциальной энергии  $W$  упругой системы



$$\bar{\Psi} = \frac{\Delta W}{W}.$$

Потенциальная энергия  $W$  с достаточной степенью точности может характеризоваться площадью заштрихованного треугольника *оаб*.

Относительное рассеивание энергии  $\bar{\Psi}$ , нередко называемое коэффициентом поглощения или диссипации, связано с логарифмическим декрементом колебаний зависимостью [58]

$$\bar{\Psi} = 2\delta.$$

Справочные данные о демпфирующих свойствах материалов (различные сорта сталей, сплавов и неметаллических материалов) приведены в [58]. Для сталей при напряжениях (20 - 100) МПа логарифмические декременты продольных колебаний изменяются в пределах 0,00075 - 0,011, а крутильных - 0,00075 - 0,006. Чем выше прочность материала, тем меньше логарифмический декремент колебаний.

При исследовании крутильных колебаний валов горных машин логарифмический декремент колебаний можно принимать  $\delta = 0,001 - 0,005$ . Для канатов  $\delta = 0,1 - 0,2$ .

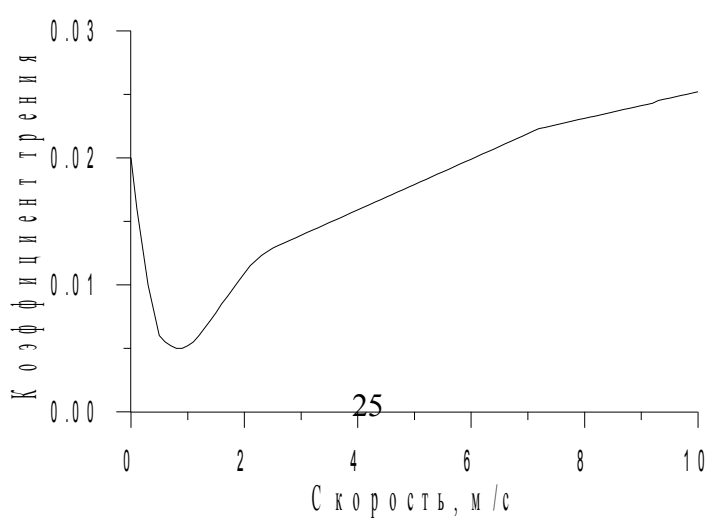
#### 1.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАШИН

Зная конструкцию конкретной машины, в зависимости от постановки задачи исследований, выбирается эквивалентная схема установки, в которой по вышеописанной методике определяются значения отдельных масс и жесткости упругих элементов. Для изучения динамического процесса при пуске или торможении машины необходимо знание зависимостей, характеризующих изменения движущего или тормозного усилия (момента) и статических сопротивлений.

Закономерности изменения статических характеристик, часто называемые механическими, определяются конструкцией машины и изучаются в специальных курсах.

В настоящем разделе рассмотрим общие моменты, касающиеся механических характеристик машин, необходимые для изучения динамики конкретной машины. Механические характеристики рабочих машин, работающих без нагрузки (вхолостую) отражают закон изменения трения в опорах. На рис. 1.10 показана типичная кривая, характеризующая изменение коэффициента трения в опорах в зависимости от скорости на поверхности цапфы.

Высокое значение коэффициента трения при нулевой скорости соответствует сухому трению, которое приходится преодолевать в начале вращения. С ростом скорости увеличивается поступление на вал масла и коэффициент трения резко уменьшается. Затем начинается постепенное его увеличение, что объясняется возрастанием сопротивления с увеличением скорости в самом слое масла. При скорости на поверхности цапфы большей 10 м·с<sup>-1</sup>, величина коэффициента трения стабилизируется и остается практически постоянной. Рассмотренная характеристика относится к подшипникам скользящего трения. Шариковые



и роликовые подшипники имеют более пологую характеристику.

Рис. 1.10. Характеристика изменения коэффициента трения

Полный момент (усилие) сопротивления машины определяется суммой моментов сопротивлений, идущих на выполнение полезной работы и на преодоление сил трения и сопротивлений, связанных с потерями полезной энергии. Например, в насосах, вентиляторах, турбокомпрессорах и в других подобных машинах имеются утечки, на создание которых была затрачена мощность, а, следовательно, был преодолен момент сопротивления. Большое разнообразие конструкций машин предопределяет большое количество механических характеристик этих машин. Тем не менее, механические характеристики машин можно классифицировать. Для некоторых типов машин силы сопротивления удобно представить в функции координаты перемещения машины, а для других - в функции скорости. Итак, можно выделить класс машин, у которых:

1. Момент (сила) статического сопротивления при работе машины постоянный. К таким машинам относятся шахтные подъемные установки с уравновешивающим канатом, конвейерные установки, горные комбайны и др. На рис. 1.11 этим установкам соответствует характеристика 1. Момент статического сопротивления может быть близок к номинальному моменту двигателя (шахтная уравновешенная подъемная установка) или существенно ниже (пуск исполнительного органа комбайна вхолостую).

2. Момент статического сопротивления увеличивается или уменьшается пропорционально координате перемещений (характеристики 2, 3)

$$M_x = A \pm bx,$$

где  $A$  - ордината при  $x = 0$ ;

$b$  - коэффициент пропорциональности.

Прямыми 2, 3 характеризуются зависимости статических моментов сопротивлений шахтных подъемных установок соответственно неуравновешенных и уравновешенных тяжелым хвостовым канатом.

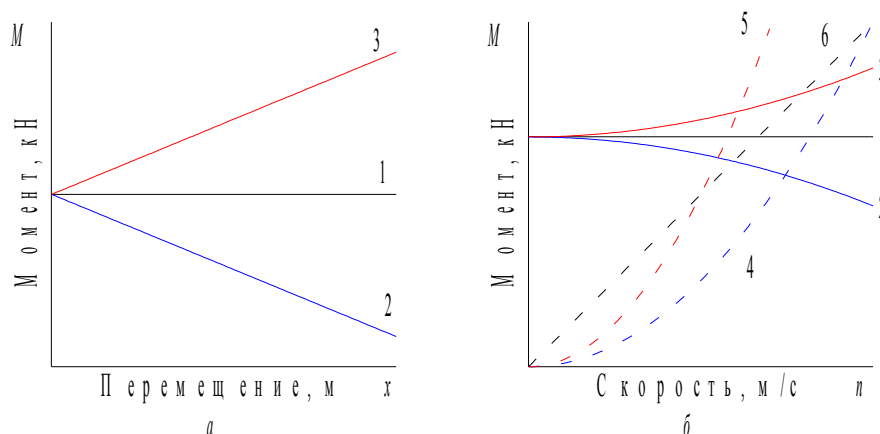


Рис. 1.11. Характеристики моментов статических сопротивлений: а - линейные; б - вентиляторные

3. Момент статического сопротивления пропорционален квадрату частоты вращения  $n$  или скорости движения

$$M_x = b_2 n^2,$$

здесь  $b_2$  - коэффициент пропорциональности.

Кривые 4 и 5 построены по уравнению при разных значениях  $b_2$ . Эти характеристики получили название вентиляторных, так как у такого класса машин момент растет пропорционально квадрату частоты вращения вала. К этим машинам относятся шахтные водоотливные, вентиляторные и турбокомпрессорные установки. Характеристика 4 соответствует закону изменения сопротивлений турбомашин в зависимости от частоты вращения при закрытой задвижке. При этом значительный момент сопротивления при максимальной частоте вращения определяется тем фактором, что турбомашин развивает давление и происходит циркуляция потока в межлопаточном пространстве колеса, следовательно, имеются силы гидравлических сопротивлений, а также утечки жидкости. При пуске турбомашин с открытой задвижкой момент сопротивления (характеристика 5) изменяется более интенсивно. Поэтому для облегчения процесса пуска, турбомашин запускаются при закрытой задвижке.

4. Момент сопротивлений зависит от угла поворота вала. Такие характеристики соответствуют машинам, которые имеют кривошипный механизм. К этим машинам относятся поршневые насосы, поршневые компрессоры, станки-качалки для нефтяных скважин и др. На рис. 1.12 приведена характеристика усилия сопротивления при работе одноступенчатого компрессора простого действия. Эти характеристики могут быть получены путем снятия индикаторных диаграмм, которые характеризует давление в цилиндре в зависимости от положения поршня за один оборот коленчатого вала.

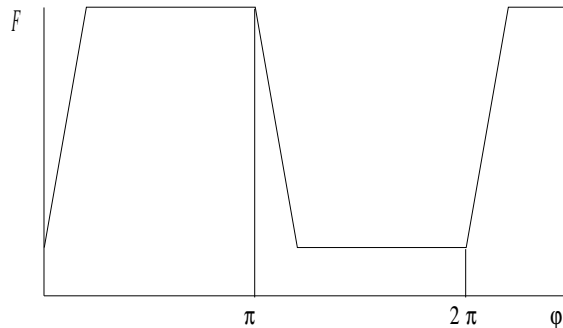


Рис. 1.12. Характеристика сопротивления поршневого компрессора

Для аналитического исследования индикаторные характеристики могут быть представлены по правилу Фурье в виде суммы гармонических колебаний различной частоты [31, 79]

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \dots + a_i \cos i \omega t + b_i \sin i \omega t.$$

Если известен вид функции  $F(t)$ , то коэффициенты определяются

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt; \quad a_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos i \omega t dt; \quad b_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin i \omega t dt.$$

5. Силы сопротивления изменяются по закону случайных чисел.

К классу таких машин, прежде всего, относятся добычные горные машины, для которых силы сопротивления определяются физико-механическими свойствами горного массива.

Экспериментальные исследования [23, 35, 42] показали, что изменчивость физико-механических свойств обусловлена наличием в горном массиве прослоек, твердых включений и трещин. Кроме этого физико-механические свойства горного массива изменяются во времени в зависимости от разупрочнения под влиянием влаги и миграции газов. И, наконец, на процесс разрушения горного массива оказывает влияние ряд факторов, связанных с ведением горных работ. К этим факторам относятся скорость перемещения забоя, тип и жесткость призабойной крепи. Математическая модель, характеризующая силы сопротивления, может быть описана случайной функцией времени [34, 35, 42], параметры которой определяются экспериментальными данными.

## 1.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИВОДНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

При исследовании динамических свойств машины необходимо знание механических характеристик привода. Большое разнообразие машин предопределяет использование двигателей, имеющих различные механические характеристики.

Механическая характеристика, это зависимость момента (усилия) от частоты вращения. Для машины, координата перемещения которой величина  $x$ , движущее или тормозное усилие должно быть задано функцией

$$F_{\partial \varepsilon} = f(x'), \quad F_m = f(x).$$

При исследовании крутильных колебаний, за координату перемещения принимается угол поворота вращающегося узла машины  $\varphi$ . Механическая характеристика двигателя задается в этом случае функцией

$$M_{\partial \varepsilon} = f(\omega) \quad \text{или} \quad M_{\partial \varepsilon} = f(n),$$

где  $\omega = \pi n / 30$  - угловая скорость, рад·с<sup>-1</sup>;

$n \approx 9,55 \omega$  - частота вращения, об·с<sup>-1</sup>.

При этом необходимо помнить известные соотношения

$$x'' = \varepsilon R; \quad x' = \omega R; \quad x = \varphi R,$$

здесь  $\varepsilon$  - угловое ускорение, рад·с<sup>-1</sup>;

$R$  - радиус вращения материальной точки, м.

### 1.5.1. АСИНХРОННЫЕ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛИ С КОРОТКОЗАМКНУТЫМ РОТОРОМ

Наибольшее применение в качестве привода машин нашли электродвигатели. При этом если потребная мощность электродвигателя не превышает 100 - 120 кВт и по технологическим соображениям не требуется глубокое регулирование скорости, используются асинхронные электродвигатели с короткозамкнутым ротором. К таким машинам относятся шахтные насосы, компрессоры, вентиляторы, некоторые типы скребковых и ленточных конвейеров и комбайнов. Электродвигатели переменного тока по массе на 50 % меньше электродвигателей постоянного тока, а расход меди на их изготовление в 4 - 5 раз меньше [41]. На рис. 1.13 показана механическая характеристика асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым нормальным ротором. Аналитическая зависимость момента в функции скольжения определяется известной формулой Клосса [27, 32, 50]

$$M_x = \frac{M_{кр} (2 + \beta s_{кр})}{\frac{s_{кр}}{s_x} + \frac{s_x}{x_{кр}} + \beta s_{кр}},$$

или, введя обозначения  $\gamma_x = \frac{M_x}{M_n}$ ;  $\gamma_{кр} = \frac{M_{кр}}{M_n}$ , можно записать

$$\gamma_x = \frac{\gamma_{кр} (2 + \beta s_{кр})}{\frac{s_{кр}}{s_x} + \frac{s_x}{s_{кр}} + \beta s_{кр}}, \quad (1.9)$$

где  $M_x$  - текущее значение момента, Н·м;

$M_{кр}$  - критический (максимальный) момент, развиваемый двигателем, Н·м;

$s_{кр}$  - критическое скольжение, соответствующее моменту  $M_{кр}$ ;

$s_x$  - текущее скольжение;

$\beta = 2 r_1 / r_2$  - коэффициент;

$r_1$  - активное сопротивление фазы статора, Ом;

$r_2$  - приведенное к статору, активное сопротивление фазы ротора, Ом.

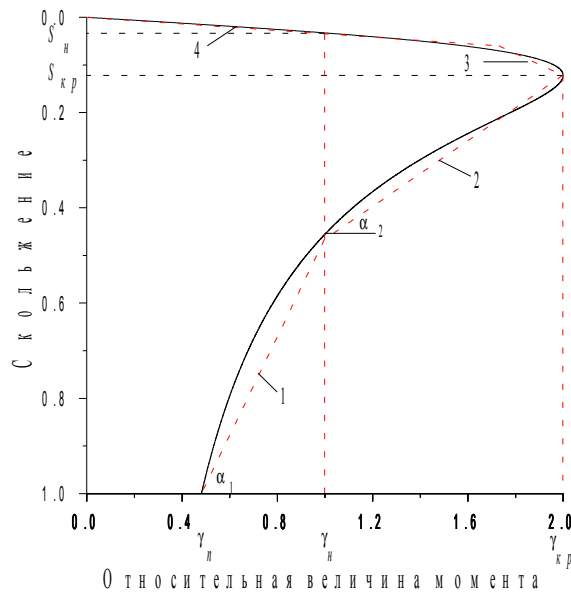


Рис. 1.13. Механическая характеристика короткозамкнутого асинхронного электродвигателя нормального исполнения

Момент, развиваемый электродвигателем при неподвижном роторе ( $s = 1,0$ ) называется пусковым и обозначен  $\gamma_n$ .

В технических характеристиках двигателей даны значения номинальной мощности  $P_n$ , номинального скольжения  $s_n$ , и перегрузочной способности электродвигателя.

Номинальный момент на валу электродвигателя определяется по формуле [32]

$$M_n = 975 g \frac{P_n}{n_n}.$$

Номинальное усилие на радиусе исполнительного органа машины можно определить

$$F_n = 102 g \frac{P_n \eta_{zn}}{v_n}, \quad (1.10)$$

где  $g = 9,81$  - ускорение свободного падения,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ ;

$n_n$  - частота вращения ротора двигателя при номинальном моменте,  $\text{об}\cdot\text{мин}^{-1}$ ;

$v_n = \frac{\pi D n_n}{60i}$  - линейная скорость исполнительного органа машины при номинальной

частоте вращения,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$ ;

$i$  - передаточное отношение редуктора;

$\eta_{zn} = 0,92 \div 0,98$  - коэффициент полезного действия редуктора.

Зная  $M_n$ ,  $s_n$  и  $M_{кр}$  из формулы (1.9) можно определить критическое скольжение  $s_{кр}$

$$s_{кр} = s_n \frac{\gamma_{кр} + \sqrt{\gamma_{кр}^2 - 1 - \beta s_n + \gamma_{кр} \beta s_n}}{1 + \beta s_n - \gamma_{кр} \beta s_n}. \quad (1.11)$$

Текущее скольжение определяется

$$s_x = \frac{n_c - n_x}{n_c} \quad \text{или} \quad s_x = \frac{v_c - x'}{v_c},$$

где  $n_c$  - частота вращения магнитного поля статора,  $\text{об}\cdot\text{мин}^{-1}$ ;

$n_x$  - текущая частота вращения ротора,  $\text{об}\cdot\text{мин}^{-1}$ ;

$v_c = \frac{\pi D n_c}{60i}$  - линейная скорость материальной точки, находящейся на радиусе  $R = D/2$  и

вращающейся с частотой  $n_c/i$ ,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$ ;

$i$  - передаточное отношение редуктора.

Уравнение (1.9) является нелинейным, поэтому дифференциальные уравнения, характеризующие динамический процесс разгона машин, не имеют аналитических решений.

Исследование динамики машин с использованием уравнения Клосса (1.9) возможно с применением персональных компьютеров, используя численные методы решения дифференциальных уравнений. Для аналитической оценки динамического процесса механическую характеристику электродвигателя можно линеаризовать. Так, реальную характеристику, приведенную на рис. 1.13, можно приближенно представить прямыми 1, 2, 3, 4. Если обозначить через  $(\gamma_i)_n$ ,  $(\gamma_i)_k$  и  $(s_i)_n$ ,  $(s_i)_k$  соответственно моменты и скольжения в начале и в конце на  $i$ -характеристике, то можно записать уравнения прямых линий

$$(\gamma_i)_x = (\gamma_i)_n + [(s_i)_n - (s_i)_x] \text{ctg} \alpha_i, \quad (1.12)$$

$$\text{ctg} \alpha_i = \frac{(\gamma_i)_k - (\gamma_i)_n}{(s_i)_n - (s_i)_k}. \quad (1.13)$$

Ряд машин имеют специфичные условия эксплуатации. Например, добычные горные машины (комбайны) требуют повышенного пускового момента, так как после остановки машины рабочий орган не всегда целесообразно и возможно отвести от забоя. Поэтому при включении электродвигателя исполнительного органа, даже при выключенной подаче, будет создаваться большой момент сопротивления. Поэтому для таких машин изго-

тавливаются электродвигатели со специальным ротором, у которых пусковой момент может достигать более двукратной величины от номинального момента. Получение таких характеристик достигается за счет специального конструирования ротора с глубоким пазом или с двойной беличьей клеткой. На рис. 1.14 приведены характеристики электродвигателя, который имеет две обмотки. Характеристика 1 соответствует низкоомной обмотке, а характеристика 2 - обмотке с большим омическим сопротивлением. Результирующая характеристика 3 обеспечивает пуск машины с тяжелым рабочим режимом. Обладая повышенным пусковым моментом, эти электродвигатели тяжелее, имеют меньшие КПД и  $\cos \varphi$  по сравнению с электродвигателями нормального исполнения. Зная параметры обмоток и, используя формулу Клосса, можно построить характеристики 1, 2, и 3. Паспортную или экспериментальную характеристику можно линеаризовать. Например, характеристику 3 можно представить тремя прямыми.

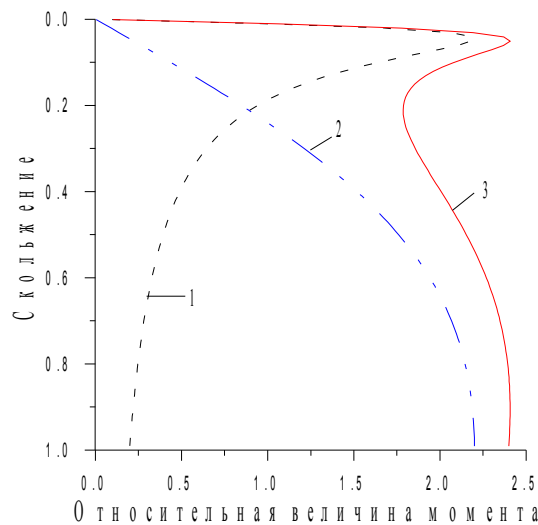


Рис. 1.14. Механическая характеристика электродвигателя, имеющего специальную конструкцию короткозамкнутого ротора

Пример 1.1. Механическую характеристику асинхронного электродвигателя, приведенную на рис 1.13 аппроксимировать прямыми линиями 1, 2, 3, 4.

Координаты начальных и конечных точек этих линий

$$\begin{aligned}
 (\gamma_1)_H = \gamma_H = 0,66; & \quad (\gamma_1)_K = 1,0; & \quad (s_1)_H = 1,0; & \quad (s_1)_K = 0,466; \\
 (\gamma_2)_H = (\gamma_1)_K = 1,0; & \quad (\gamma_2)_K = \gamma_{кр} = 2,0; & \quad (s_2)_H = (s_1)_K = 0,466; & \quad (s_2)_K = s_{кр} = 0,122; \\
 (\gamma_3)_H = (\gamma_2)_K = 2,0; & \quad (\gamma_3)_K = 1,73; & \quad (s_3)_H = s_{кр} = 0,122; & \quad (s_3)_K = 0,06; \\
 (\gamma_4)_H = (\gamma_3)_K = 1,73; & \quad (\gamma_4)_K = 0; & \quad (s_4)_H = (s_3)_K = 0,06; & \quad (s_4)_K = 0.
 \end{aligned}$$

Вычислим значение  $\operatorname{ctg} \alpha_i$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} \alpha_1 &= \frac{1,0 - 0,66}{1,0 - 0,466} = 0,636; & \quad \operatorname{ctg} \alpha_2 &= \frac{2,0 - 1,0}{0,466 - 0,122} = 2,9; \\
 \operatorname{ctg} \alpha_3 &= \frac{1,73 - 2,0}{0,122 - 0,06} = -4,35; & \quad \operatorname{ctg} \alpha_4 &= \frac{0 - 1,73}{0,06 - 0} = -28,8.
 \end{aligned}$$

Тогда используя (1.12) получим уравнения прямых линий 1, 2, 3, 4

$$\begin{aligned}
 0,466 < (s_1)_x < 1; & \quad (\gamma_1)_x = 0,66 + 0,636 [1,0 - (s_1)_x]; \\
 0,122 < (s_2)_x < 0,466; & \quad (\gamma_2)_x = 1,0 + 2,9 [0,466 - (s_2)_x]; \\
 0,06 < (s_3)_x < 0,122; & \quad (\gamma_3)_x = 2,0 + 4,35 [0,122 - (s_3)_x];
 \end{aligned}$$

$$0 < (s_4)_x < 0,06; \quad (\gamma_4)_x = 1,73 + 2,88 [0,06 - (s_4)_x].$$

Прямые 1, 2, 3, 4 на рис 1.13 построены по вышеприведенным линейным уравнениям, которые можно использовать для аналитического исследования процессов пуска горных машин с короткозамкнутым асинхронным электродвигателем.

### 1.5.2. АСИНХРОННЫЕ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛИ С ФАЗНЫМ РОТОРОМ

Горные машины с мощностью привода более 120 кВт, а также машины, у которых требуется регулирование скорости в большом диапазоне, оснащаются асинхронными электродвигателями с фазным ротором. К таким горным машинам относятся шахтные подъемные машины и мощные ленточные конвейеры. Вводя дополнительное сопротивление в цепь ротора, получают искусственные механические характеристики. Используя эти характеристики, можно относительно плавно запустить мощную машину и регулировать ее скорость в широких пределах.

Для двигателей с фазным ротором можно не учитывать сопротивление статора. Тогда уравнение механической характеристики запишется

$$\gamma_x = \frac{2\gamma_{кр}}{\frac{s_{кр}}{s_x} + \frac{s_x}{s_{кр}}}. \quad (1.14)$$

Типичные механические характеристики асинхронного двигателя с фазным ротором для шахтного подъема приведены на рис. 1.15. Значения моментов приведены в безразмерных величинах, где  $\gamma = M_x/M_n$ . Современные подъемные установки с асинхронным электродвигателем имеют восьмиконтакторные станции управления. Поэтому при пуске используются 9 характеристик, из которых - две, предварительные ступени и шесть, пусковые (без учета естественной).

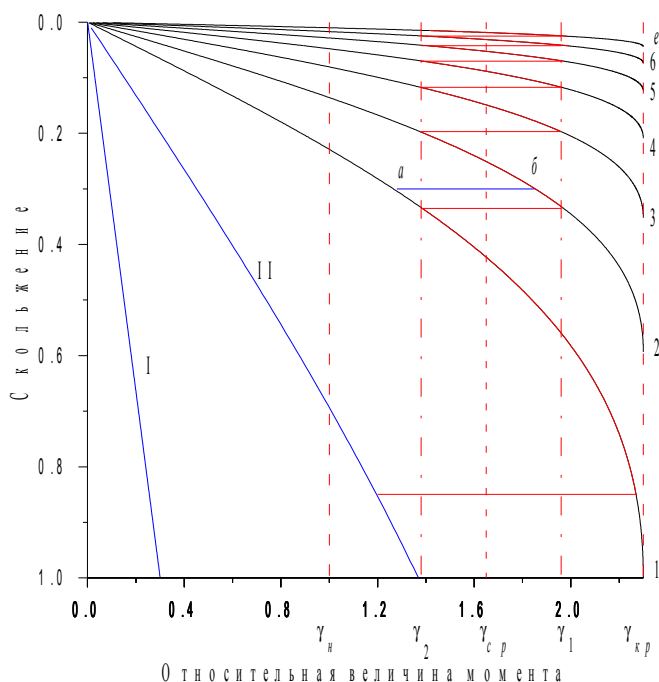


Рис. 1.15. Механические характеристики асинхронного электродвигателя с фазным ротором.

Максимальная величина роторного сопротивления определяет первую предварительную ступень I. Эта ступень, создавая небольшой момент ( $\approx 0,3M_n$ ), ограничивает величину



тока в момент включения и отключения реверсора, тем самым, обеспечивая длительную и бесперебойную работу этого аппарата. Кроме того, первая предварительная ступень позволяет плавно выбрать люфты и зазоры в зубчатой передаче и муфтах. Таким образом, момент на первой предварительной ступени должен быть  $\gamma_1 \geq 0,3$ . Вторая предварительная ступень II, как правило, создает момент, который больше момента сопротивления, и машина начинает разгоняться. Величина пускового момента на этой ступени выбирается из технологических ограничений работы машины. Например, для шахтного подъема пусковой момент на второй предварительной ступени ограничен величиной, которая должна обеспечить трогание машины с ускорением менее  $0,3 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Это позволяет ограничить динамические нагрузки и плавно вывести порожний сосуд из разгрузочных кривых со скоростью менее  $1,5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ . Таким образом, момент на второй предварительной ступени должен быть

$$M_{II} \geq M_{cm} + 0,3m \frac{D}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \gamma_{II} \geq \frac{M_{II}}{M_n}.$$

Закономерности механических характеристик подчиняются формуле Клосса (1.14). Следует иметь в виду, что каждой механической характеристике, в зависимости от величины дополнительного сопротивления ротора, будет соответствовать своя величина критического скольжения. Критическое скольжение на естественной характеристике определяется по формуле (1.11), которая при  $\beta = 0$  будет

$$(s_{кр})_e = s_n (\gamma_{кр} + \sqrt{\gamma_{кр}^2 - 1}). \quad (1.15)$$

На предварительных ступенях при неподвижном роторе ( $s_x = 1$ ) электродвигатель развивает моменты  $\gamma_I$  и  $\gamma_{II}$ .

Критическое скольжение, например, на первой предварительной ступени I, определится

$$(s_{кр})_I = \frac{1}{\gamma_I} (\gamma_{кр} + \sqrt{\gamma_{кр}^2 - \gamma_I^2}). \quad (1.16)$$

Из теории электропривода известно, что у асинхронного электродвигателя с фазным ротором максимальный момент изменяется прямо пропорционально величине полного сопротивления цепи ротора [32]. Собственное сопротивление цепи ротора равно

$$R_{ром} = \frac{U_p}{\sqrt{3}I_p} s_n,$$

где  $U_p$  - номинальное напряжение ротора, В;

$I_p$  - номинальный ток ротора, А.

Так как максимальный момент соответствует критическому скольжению, можно записать соотношение

$$\frac{(s_{кр})_e}{R_{ром}} = \frac{(s_{кр})_i}{R_{ром} + (\Delta R)_i}, \quad (1.16)$$

здесь  $(s_{кр})_e$  - критическое скольжение на естественной характеристике;

$(s_{кр})_i$  - искомая величина критического скольжения на  $i$ -ой характеристике;

$(\Delta R)_i$  - величина добавочного сопротивления ротора при работе на  $i$ -ой характеристике, Ом.

Таким образом, зная моменты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , определяются критические скольжения и дополнительные сопротивления на этих ступенях.

Дальнейший пуск машины осуществляется путем последовательного выключения ступеней роторных сопротивлений. На рис. 1.15 показаны пусковые характеристики 1 - 6 и естественная  $e$ .

Во время пуска электродвигатель должен развивать максимально возможный момент, так как форсированный пуск позволяет увеличить производительность и коэффициент полезного действия подъемной установки.

Так как во время ступенчатого пуска моменты изменяются от верхнего момента переключения  $\gamma_1$  до нижнего  $\gamma_2$ , то средний момент будет

$$\gamma_{cp} = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}.$$

Величину среднего момента рекомендуется принимать  $\gamma_{cp} = \frac{\gamma_{кр} + 1}{2}$  [28].

В результате действия момента  $\gamma_{cp}$  могут быть получены чрезмерные ускорения. В соответствии с требованиями Правил безопасности ускорение для людских подъемов должно быть менее  $0,75 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Для грузовых подъемных установок регламенты на ускорение сняты, однако опыт эксплуатации показывает, что они не должны быть более  $1,0 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Поэтому средний пусковой момент должен быть

$$M_{cp} \leq (M_{cm})_{x=h_0} + (0,75 \div 1,0) m \frac{D}{2} \leq \frac{\gamma_{кр} + 1}{2} M_n. \quad (1.17)$$

Для механических характеристик, приведенных на рис. 1.15, введем обозначение

$$\frac{(s_1)_i}{(s_2)_i} = \sigma,$$

где  $(s_1)_i$  и  $(s_2)_i$  - скольжение на  $i$ -характеристике соответственно при моментах  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Из рисунка видно, что в момент переключения с характеристики  $i$  на характеристику  $i+1$  скольжения равны, т. е.  $(s_2)_i = (s_1)_{i+1}$ , поэтому можно записать

$$\frac{(s_1)_i}{(s_2)_i} = \frac{(s_1)_i}{(s_1)_{i+1}} = \frac{(s_{кр})_i}{(s_{кр})_{i+1}} = \sigma.$$

Из полученных соотношений, для рассматриваемых характеристик, справедливо

$$\frac{(s_{кр})_1}{(s_{кр})_2} \cdot \frac{(s_{кр})_2}{(s_{кр})_3} \cdot \frac{(s_{кр})_3}{(s_{кр})_4} \cdot \frac{(s_{кр})_4}{(s_{кр})_5} \cdot \frac{(s_{кр})_5}{(s_{кр})_6} \cdot \frac{(s_{кр})_6}{(s_{кр})_e} = \sigma^6,$$

или

$$\sigma = \sqrt[6]{\frac{(s_{кр})_1}{(s_{кр})_e}}. \quad (1.18)$$

Очевидно, в этих зависимостях  $\sigma$  является показателем геометрической прогрессии.

Характеристику первой пусковой ступени целесообразно выбирать таким образом, чтобы электродвигатель при неподвижном роторе развивал критический момент, т. е.  $(s_{кр})_1 = 1$ . Соблюдение этого условия может оказаться весьма полезным при выполнении маневровых операций, связанных с заменой сосудов, спуске или подъеме нестандартного оборудования. В данном случае двигатель при неподвижном роторе развивает критический момент.

Таким образом, критические скольжения на каждой характеристике определяются

$$(s_{кр})_{i+1} = \frac{(s_{кр})_i}{\sigma}$$

Используя формулу Клосса (1.14), можно построить механические характеристики пусковых ступеней (рис. 1.15)

Пример 1.2. Рассчитать ступени роторных сопротивлений и построить механические характеристики асинхронного электродвигателя с фазным ротором.

Тип электродвигателя	АКН -2-16-39-12.
Номинальная мощность	$P_n = 500$ кВт.
Частота вращения	$n_n = 495$ об·мин <sup>-1</sup> .
Критический момент	$\gamma_{кр} = 2,3$ .

Два таких однотипных электродвигателя работают в качестве привода подъемной машины 2x4x2,3.

Подъемная установка имеет паспортные данные

Диаметр барабана	$D = 4$ м;
Передаточное отношение редуктора	$i = 10,5$ ;
Статический момент сопротивления в начале подъема	$(M_{cm})_{x=0} = 203000$ Н·м;
Приведенная масса движущихся частей подъемной установки (с учетом вращающихся масс двух роторов электродвигателей)	$m = 101000$ кг.

Подъемная установка должна начать движение с ускорением  $0,3$  м·с<sup>-2</sup>, а после того, как порожний сосуд выйдет из разгрузочных кривых, машина разгоняется с максимально возможным ускорением, но не более  $1,0$  м·с<sup>-2</sup>.

Номинальный момент, развиваемый электродвигателем, приведенный к диаметру барабана подъемной машины

$$M_n = 975 n_{ов} g \frac{P_n}{n_n} i \eta_p,$$

здесь  $n_{ов} = 2$  - количество электродвигателей;

$\eta_p = 0,95$  - КПД редуктора.

Тогда

$$M_n = 975 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot \frac{500}{495} \cdot 10,5 \cdot 0,95 = 192744 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для ограничения тока при включении и отключении электродвигателей, а также для выбора люфтов и зазоров момент должен быть

$$M_I = 0,3 M_n = 0,3 \cdot 192744 = 57823 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

т. е. относительный момент на первой предварительной ступени  $\gamma_1 = 0,3$ .

Движение установки начинается на второй предварительной ступени, Для того, чтобы установка начала движение с ускорением  $0,3$  м·с<sup>-2</sup>, момент электродвигателей должен быть

$$M_{II} = (M_{cm})_{x=0} + 0,3 m \frac{D}{2} = 203000 + 0,3 \cdot 101000 \cdot \frac{4}{2} = 261000 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Относительный момент } \gamma_{II} = \frac{M_{II}}{M_n} = \frac{264000}{192744} = 1,369.$$

Средний пусковой момент, который могут развивать электродвигатели

$$\gamma_{cp} = \frac{\gamma_{кр} + 1}{2} = \frac{2,3 + 1}{2} = 1,65.$$

Из формулы (1.17) определим ускорение машины  $a_1$ , которое электродвигатели могут развить во время пуска при  $M_{cp} = \gamma_{cp} M_n$

$$a_1 = \frac{\gamma_{cp} M_n - (M_{cm})_{x=0}}{m \frac{D}{2}} = \frac{1,65 \cdot 192744 - 203000}{101000 \cdot 2} = 0,566 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

В случае если  $a_1$  более  $1,0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , следует ограничить величину  $\gamma_{cp}$ .

Критическое скольжение на естественной характеристике определяется по формуле

$$(1.15) \text{ при } \gamma_x = \gamma_n = 1 \text{ и } s_x = s_n = \frac{500 - 495}{500} = 0,01.$$

Здесь  $n_c = 500 \text{ об} \cdot \text{мин}^{-1}$  - частота вращения поля статора.

$$(s_{кр})_e = s_n (\gamma_{кр} + \sqrt{\gamma_{кр}^2 - 1}) = 0,01 (2,3 + \sqrt{2,3^2 - 1}) = 0,0437.$$

Показатель геометрической прогрессии определяется по уравнению (1.18) при  $(s_{кр})_1 = 1$

$$\sigma = \sqrt[6]{\frac{(s_{кр})_1}{(s_{кр})_e}} = \sqrt[6]{\frac{1}{0,0437}} = 1,68.$$

Критические скольжения на предварительных ступенях

$$(s_{кр})_I = \frac{1}{\gamma_I} (\gamma_{кр} + \sqrt{\gamma_{кр}^2 - \gamma_I^2}) = \frac{1}{0,3} (2,3 + \sqrt{2,3^2 - 0,3^2}) = 15,26,$$

$$(s_{кр})_{II} = \frac{1}{\gamma_{II}} (\gamma_{кр} + \sqrt{\gamma_{кр}^2 - \gamma_{II}^2}) = \frac{1}{1,369} (2,3 + \sqrt{2,3^2 - 1,369^2}) = 3,03.$$

Критические скольжения на пусковых ступенях определяются по формуле  $(s_{кр})_{i=1} = \frac{(s_{кр})_i}{\sigma}$

$$(s_{кр})_1 = 1,0; \quad (s_{кр})_2 = \frac{1}{1,68} = 0,593; \quad (s_{кр})_3 = \frac{0,593}{1,68} = 0,352; \quad (s_{кр})_4 = \frac{0,352}{1,68} = 0,209;$$

$$(s_{кр})_5 = \frac{0,209}{1,68} = 0,124; \quad (s_{кр})_6 = \frac{0,124}{1,68} = 0,0736; \quad (s_{кр})_7 = (s_{кр})_e = \frac{0,0736}{1,68} = 0,0437.$$

Используя эти данные, по уравнению Клосса (1.14) строятся механические характеристики, которые приведены на рис. 1.15.

Для определения верхнего  $\gamma_1$  и нижнего  $\gamma_2$  моментов переключения, которые обеспечивают средний пусковой момент  $\gamma_{cp} = 1,65$ , предлагается следующий метод.

На графике механических характеристик проводится вертикальная линия, соответствующая  $\gamma_{cp}$ . Вблизи пересечения этой линии с механическими характеристиками проводится произвольная линия параллельная оси абсцисс. Например, линия  $ab$ . Для точек  $a$  и  $b$  определяются  $\gamma_a$  и  $\gamma_b$ . Для рассматриваемого примера  $\gamma_a = 1,3$ ,  $\gamma_b = 1,85$ . Следовательно

$$(\gamma_{cp})_{a\bar{b}} = \sqrt{\gamma_a \gamma_b} = \sqrt{1,3 \cdot 1,85} = 1,55.$$

Делая допущение, что механические характеристики - прямые линии, можно определить  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  из соотношений

$$\gamma_2 = \gamma_a \frac{\gamma_{cp}}{(\gamma_{cp})_{ab}} = 1,3 \frac{1,65}{1,55} = 1,38,$$

$$\gamma_1 = \gamma_b \frac{\gamma_{cp}}{(\gamma_{cp})_{ab}} = 1,85 \frac{1,65}{1,55} = 1,96.$$

Для контроля, проверим  $\gamma_{cp} = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} = \sqrt{1,38 \cdot 1,96} = 1,65$ .

На рис. 1.15 показан процесс разгона подъемной установки с ускорением  $a_1 = 0,566 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Обратим внимание на факт, что в рассматриваемом примере есть резерв по увеличению производительности подъемной установки за счет увеличения среднего момента  $\gamma_{cp}$ .

В практике эксплуатации асинхронных электродвигателей с фазным ротором верхний момент переключения рекомендуется принимать  $\gamma_1 \leq 0,9 \gamma_{xp}$ . Такая величина момента регламентирована опасностью работы двигателя на неустойчивой части характеристики при падении напряжения питающей сети. Этот регламент не бесспорен, так как если электродвигатель на неустойчивой характеристике развивает момент больше статического, то процесс разгона можно осуществить. Справедливости ради, следует заметить, что в этом случае токи будут существенно выше и могут достигнуть недопустимой величины. Кроме того, такой режим работы понизит КПД установки.

Определим среднее ускорение подъемной системы при  $\gamma_1 = 0,9 \gamma_{xp} = 0,9 \cdot 2,3 = 2,076$ .

Используя данные о прямой *ab* можно определить

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{\gamma_a}{\gamma_b} = 2,07 \frac{1,3}{1,87} = 1,45.$$

В этом случае

$$\gamma_{cp} = \sqrt{1,45 \cdot 2,07} = 1,73.$$

Установка будет разгоняться с ускорением

$$a = \frac{1,73 \cdot 192744 - 203000}{101000 \cdot 2} = 0,645 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Следовательно, если подъемная установка имеет максимальную скорость

$$v_m = \frac{\pi D n_n}{60 i} = \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 495}{60 \cdot 10,5} = 9,86 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

то при ускорении  $a = 0,645 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  она разгонится быстрее на  $\frac{9,86}{0,566} - \frac{9,86}{0,645} = 2,13 \text{ с}$ .

Ступени роторных сопротивлений определяются по формуле (1.16).

$$R_{pot} = \frac{U_p}{\sqrt{3} I_p} s_n = \frac{655}{1,73 \cdot 370} 0,01 = 0,0102 \text{ Ом}.$$

Данные расчета приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Расчетные значения роторных сопротивлений

Параметры	Предварительные ступени	Пусковые ступени
-----------	-------------------------	------------------

Критические скольжения ( $S_{кр}$ ) <sub>i</sub>	I	II	1	2	3	4	5	6	е
Добавочное сопротивление ( $\Delta R$ ) <sub>i</sub> , Ом	15,26	3,03	1,0	0,593	0,352	0,209	0,124	0,0736	0,0437
	3,55	0,697	0,223	0,128	0,0719	0,0385	0,0167	0,0069	0

### 1.5.3. СИНХРОННЫЕ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛИ

Мощные вентиляторные и компрессорные установки, не требующие изменения частоты вращения и частых пусков, имеют в качестве привода синхронные электродвигатели. На крупных шахтных подъемных установках, имеющих привод системы генератор-двигатель (Г-Д), синхронный электродвигатель используется в качестве приводного для генератора постоянного тока. У синхронного электродвигателя абсолютно жесткая механическая характеристика. Он стал широко использоваться в качестве привода после того, как была решена проблема его пуска. Применение синхронных электродвигателей обусловлено следующим [32]:

- ◆ синхронный электродвигатель имеет на 1,5 - 3 % выше коэффициент полезного действия, что дает значительную экономию электрической энергии;
- ◆ синхронный электродвигатель может работать с  $\cos \varphi = 1$  и с опережающим  $\cos \varphi$ , разгружая электрическую сеть от реактивной энергии;
- ◆ синхронный электродвигатель имеет большую в 2-4 раза величину воздушного зазора по сравнению с асинхронным, что значительно повышает надежность эксплуатации;
- ◆ синхронные электродвигатели при мощностях выше 200 кВт имеют стоимость меньше, чем асинхронные.

Синхронные электродвигатели пускаются в ход и набирают скорость в асинхронном режиме, аналогично асинхронным двигателям. Для этой цели в полюсах синхронного электродвигателя закладываются стержни пусковой обмотки, которая выполняется короткозамкнутой с глубокими пазами или с двойной беличьей клеткой.

Момент, соответствующий 95 % частоте вращения магнитного поля, называется подсинхронным или входным. Достигнув этой частоты вращения, в обмотку возбуждения синхронного электродвигателя, через вращающиеся кольца, подается постоянный ток и двигатель втягивается в синхронизм.

Пусковые характеристики синхронных электродвигателей аналогичны асинхронным и показаны на рис. 1.16.

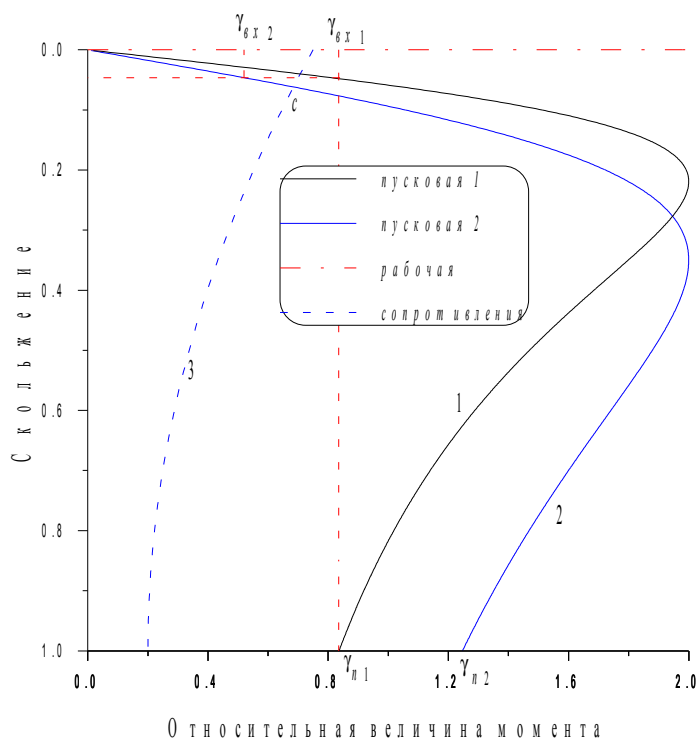


Рис. 1.16.

Характеристика синхронного электродвигателя

Электродвигатель с характеристикой 1 имеет равные пусковой и входной моменты. Двигатель с характеристикой 2 имеет пусковой момент больше чем у двигателя с характеристикой 1, однако, входной момент  $\gamma_{вх2}$  меньше  $\gamma_{вх1}$ . Второй электродвигатель имеет большее сопротивление пусковой обмотки. Допустим, кривая 3 характеризует изменение момента сопротивления машины. Видно, что у электродвигателя с характеристикой 2, в точке с, момент равен моменту сопротивления и он не сможет достигнуть подсинхронной (входной) скорости. Электродвигатель с характеристикой 1 имеет входной момент  $\gamma_{вх}$ , больше момента сопротивления, что позволяет достигнуть подсинхронной скорости и, как следствие, электродвигатель втягивается в синхронизм. Величины пускового и входного моментов определяются величиной сопротивления пусковой обмотки.

Исследование процессов пуска машин с синхронным электродвигателем целесообразно проводить с использованием экспериментальных механических характеристик. Линеаризацию пусковых характеристик можно выполнить аналогично линеаризации характеристик асинхронного электродвигателя.

Для надежной эксплуатации машины с синхронным приводом необходимо, чтобы момент сопротивления во время пуска был меньше пускового и входного моментов. Поэтому вентиляторные и компрессорные установки, оборудованные синхронными электродвигателями, пускаются без нагрузки. Например, у шахтных вентиляторных установок на время пуска закрывается направляющий аппарат. Компрессорные установки имеют устройство при помощи которого, на время пуска, нагнетательный трубопровод соединяется с атмосферой.

Во время работы машины с синхронным электродвигателем частота вращения остается постоянной и зависит только от частоты питающей сети. Ряд машин, в частности, поршневые компрессоры (рис. 1.12) имеют момент сопротивления, который периодически изменяется в зависимости от угла поворота вала.

При определенных условиях, механические колебания могут складываться и, увеличиваясь по амплитуде, привести к резонансу. Если период собственных колебаний машины становится примерно равным, (с точностью  $\pm 20\%$ ) периоду колебаний

возмущений, то возникает опасность выпадения электродвигателя из синхронизма. Поэтому изучение динамических процессов таких машин чрезвычайно важно. Для надежной работы поршневых компрессоров необходимо выбирать частоту вращения таким образом, чтобы частота собственных колебаний существенно отличалась от частоты возмущений, а иногда необходимо увеличивать момент инерции машины за счет установки дополнительного маховика.

#### 1.5.4. ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В горной промышленности электродвигатели постоянного тока нашли применение на крупных шахтных подъемных установках, на экскаваторах и на шахтных электровозах.

В качестве привода шахтных подъемных установок используются двигатели постоянного тока с независимым возбуждением, питающиеся от генератора постоянного тока или от тиристорного преобразователя.

Электродвигатели электровозов получают питание через контактную сеть от преобразовательной подстанции или от аккумуляторных батарей и имеют последовательное возбуждение.

Независимо от способа возбуждения частота вращения электродвигателя постоянного тока определяется [32, 50]

$$n = \frac{U - I_{я} R_{я}}{C_e \Phi}, \quad (1.19)$$

где  $U$  - напряжение на зажимах двигателя, В;

$I_{я}$  - ток в цепи якоря, А;

$R_{я}$  - сопротивление якорной цепи, Ом;

$\Phi$  - магнитный поток двигателя, Вб;

$C_e$  - коэффициент, зависящий от конструктивных параметров электродвигателя, в частности, от числа пар главных полюсов и числа пар параллельных ветвей обмотки якоря.

Произведение коэффициента  $C_e$  и магнитного потока  $\Phi$  в практических исследованиях удобно определять по номинальным данным из технических характеристик

$$C_e \Phi = \frac{U_n - I_n R_{я}}{n_n}.$$

Сопротивление якорной цепи  $R_{я}$ , состоит из сопротивления обмотки якоря, переходного сопротивления щеток, сопротивления последовательной обмотки возбуждения (если последняя имеется), сопротивления компенсационной обмотки и сопротивление обмотки дополнительных полюсов. Из-за отсутствия в каталогах этих данных, сопротивление якорной цепи определяется приближенно [50]

$$R_{я} = 0,5(1 - \eta_n) \frac{U_n}{I_n},$$

где  $\eta_n$  - КПД двигателя при работе в номинальном режиме.

Индекс  $n$ , предписанный  $I$  и  $U$ , характеризует эти величины при работе электродвигателя в номинальном режиме.

Известно, что электромагнитный момент пропорционален току якорной цепи

$$M = C_m \Phi I_{я} \quad \text{или} \quad I_{я} = \frac{M}{C_m \Phi}. \quad (1.20)$$



Коэффициент  $C_m \Phi$  определяется по номинальным параметрам

$$C_m \Phi = \frac{M_n}{I_n}.$$

Подставив это значение в (1.19), получим уравнение механической характеристики

$$n = \frac{U}{C_e \Phi} - \frac{R_\alpha}{C_e \Phi \cdot C_m \Phi} M.$$

Если обозначить  $\gamma_x = \frac{M}{M_n}$ , то число оборотов в зависимости от безразмерной величины момента  $\gamma_x$  запишется

$$n = \frac{U}{C_e \Phi} - \frac{R_\alpha}{C_e \Phi} \cdot \frac{M_n}{C_m \Phi} \gamma_x. \quad (1.21)$$

Для электродвигателей независимого возбуждения величина  $C_e \Phi = \text{const}$ , поэтому при постоянном напряжении  $U$  механические характеристики будут наклонными прямыми линиями (рис. 1.17).

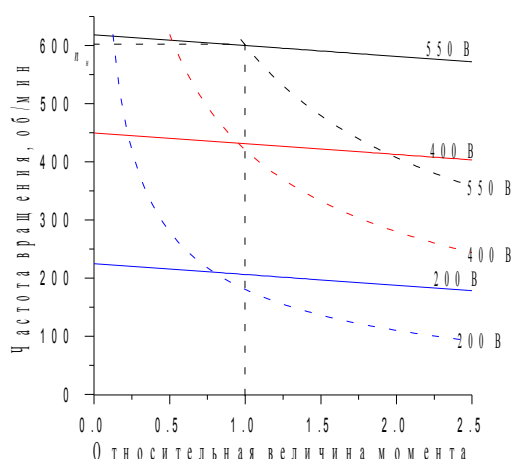


Рис. 1.17. Механические характеристики электродвигателей с независимым (прямые) и последовательным (гиперболы) возбуждением

Для нормальных условий коммутации ток якоря не должен превышать (2 - 3) кратной величины номинального, поэтому максимальный критический момент этих двигателей

$$M_{кр} = (2 - 3) M_n.$$

Современные системы управления электродвигателями постоянного тока имеют устройство плавного регулирования напряжения, что позволяет в широких пределах регулировать скорость машин.

В электродвигателях с обмотками последовательного возбуждения величина магнитного потока пропорциональна току якоря, т. е.  $\Phi = KI_\alpha$ .

Тогда из уравнения (1.19) можно записать

$$n = \frac{U - I_{я} R_{я}}{C_e K I_{я}}.$$

Подставив номинальные значения, определяется произведение коэффициентов  $C_e K$

$$C_e K = \frac{U_n - I_n R_n}{I_n n_n}.$$

Из уравнения (1.20)

$$C_m K = \frac{M_n}{I_{я}^2}; \quad I_{я} = \sqrt{\frac{M}{C_m K}},$$

тогда уравнение механической характеристики будет

$$n = \frac{U}{C_e K \sqrt{\frac{M}{C_m K}}} - \frac{R_{я}}{C_e K}.$$

Относительно безразмерного момента  $\gamma_x$  уравнение можно записать

$$n = \frac{U}{C_e K \sqrt{\frac{M_n}{C_m K} \gamma_x}} - \frac{R_{я}}{C_e K}. \quad (1.22)$$

Характеристики двигателя с последовательным возбуждением представляют гиперболы, которые показывают, что с уменьшением момента  $\gamma_x$  скорость возрастает. При  $\gamma_x = 0$  (холостой ход) скорость якоря стремится к бесконечности (рис. 1.17). Поэтому эти двигатели с ременной, фрикционной или цепной передачами, которые могут быть нарушены, не применяются.

Следует заметить, что полученные выражения справедливы только для двигателей с ненасыщенной магнитной системой. Так как современные двигатели имеют, как правило, значительное насыщение магнитной системы, реальные характеристики отличаются от теоретических. Приведенные зависимости используются для укрупненной оценки динамических свойств механической системы. Для более строгого исследования необходимо воспользоваться либо индивидуальными, либо универсальными характеристиками.

При рассмотрении механических характеристик асинхронного электродвигателя отмечалось, что при использовании уравнения Клосса не учитывается влияние электромагнитного переходного процесса. Такое допущение объясняется тем, что индуктивность обмоток статора и ротора у асинхронных электродвигателей очень мала и правомерность этого допущения показана при исследовании динамики шахтных подъемных установок [70]. Однако влияние электромагнитного переходного процесса заметно сказывается при наличии обмоток, имеющих большую индуктивность. К таким обмоткам относятся обмотки независимого возбуждения электродвигателей постоянного тока. Цепь обмотки возбуждения состоит из индуктивности  $L_в$  и омического сопротивления  $R_в$ . Если на ее зажимы подано напряжение  $U_в$ , то из курса теоретических основ электротехники [22] известно, что такая цепь характеризуется уравнением

$$T \frac{di}{dt} + i = \frac{U_g}{R_g}, \quad (1.23)$$

где  $T = L_g/R_g$  - электромагнитная постоянная времени цепи возбуждения, с.

Уравнение (1.23) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое при нулевых начальных условиях имеет решение

$$i = \frac{U_g}{R_g} (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (1.24)$$

здесь  $t$  - текущее значение времени, с.

Для привода шахтного подъема, работающего по системе генератор-двигатель (Г-Д), ток в обмотке возбуждения электродвигателя в процессе цикла не изменяется. Однако во время пауз для уменьшения нагрева двигателя и снижения потерь величину тока возбуждения уменьшают. Поэтому при исследовании процессов пуска это явление целесообразно учесть. Следует отметить, что подобные процессы происходят в обмотке возбуждения генератора и, как следствие, напряжение генератора будет отставать от заданной величины.

Исследование этих вопросов, как правило, входит в задачи создания систем автоматического регулирования, базисом для которых является принятая математическая модель механической системы.

Пример 1.3. Построить механические характеристики электродвигателя постоянного тока при независимом и при последовательном соединении обмоток возбуждения.

Электродвигатель имеет следующие паспортные данные:

Мощность	$P_n = 1100$ кВт.
Частота вращения	$n_n = 600$ об·мин <sup>-1</sup> .
Напряжение	$U_n = 550$ В.
Ток	$I_n = 2140$ А.
КПД	$\eta_n = 0,94$ .

Для электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением механические характеристики описываются уравнением (1.21)

$$n = \frac{U}{C_e \Phi} - \frac{R_a M_n}{C_m \Phi} \gamma_x,$$

находим

$$R_a = 0,5(1 - \eta_n) \frac{U_n}{I_n} = 0,5(1 - 0,94) \frac{550}{2140} = 0,0077 \text{ Ом},$$

$$C_e \Phi = \frac{U_n - I_n R_a}{n_n} = \frac{550 - 2140 \cdot 0,0077}{600} = 0,889 \text{ В·мин·об}^{-1}.$$

Номинальный момент электродвигателя

$$M_n = 975 g \frac{P_n}{n_n} = 975 \cdot 9,81 \frac{1100}{600} = 17535 \text{ Н·м}.$$

Коэффициент

$$C_m \Phi = \frac{M_n}{I_n} = \frac{17535}{2140} = 8,19 \text{ Н·м·А}^{-1},$$

тогда уравнение механической характеристики запишется

$$n = 1,1246U - 18,54\gamma_x.$$

На рис. 1.17 приведены механические характеристики  $n = f(\gamma_x)$  для  $U_n = 550$  В,  $U_2 = 400$  В и  $U_1 = 200$  В. Скольжение при номинальном моменте равно 0,275.

Если обмотки возбуждения включены последовательно в цепь якоря, то механические характеристики описываются уравнением (1.22)

$$n = \frac{U}{C_e K \sqrt{\frac{M_n}{C_m K} \gamma_x}} - \frac{R_{я}}{C_e K}.$$

Предположим, сопротивление якорной цепи увеличилось в три раза, тогда

$$C_e K = \frac{U_n - I_n R_n}{I_n n_n} = \frac{550 - 2140 \cdot 3 \cdot 0,00775}{2140 \cdot 600} = 0,000389 \text{ Ом} \cdot \text{об}^{-1},$$

$$C_m K = \frac{M_n}{I_n^2} = \frac{17535}{2140^2} = 0,003828 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2}.$$

Тогда

$$n = 1,2 \frac{U}{\sqrt{\gamma_x}} - 59,38.$$

Механические характеристики, построенные по этому уравнению при  $U_n = 550$  В,  $U_2 = 400$  В и  $U_1 = 200$  В показаны на рис. 1.17 пунктирными линиями.

### 1.5.5. ГИДРОДВИГАТЕЛИ

Возможность бесступенчатого регулирования скорости, получения высоких моментов и надежная защита машины от чрезмерных нагрузок предопределили широкое применение гидропривода в машинах. На ряде горных комбайнов для механизма подачи применяется гидропривод. Для плавного пуска мощных конвейерных установок применяются гидромуфты. Следует заметить, что гидропривод широко применяется не только в качестве основного привода машины, но и в качестве вспомогательного. К вспомогательным приводам относятся приводы систем управления положением рабочего органа комбайна, экскаватора, буровой машины и др.

Объемный гидропривод состоит из объемного насоса и двигателя (поршневого, шестеренного, пластинчатого), а гидромуфта - это совокупность центробежного насоса и двигателя, в которой передача момента осуществляется за счет кинетической энергии жидкости.

Механическая характеристика объемного гидродвигателя, т. е. зависимость частоты вращения от величины момента определяется зависимостью [45]

$$n = (n_0)_i - \frac{a}{K_m q_0} M, \quad (1.25)$$

где  $(n_0)_i = Q/q_0$  - частота вращения гидродвигателя без нагрузки, об·с<sup>-1</sup>;

$Q$  - наибольший (теоретический) расход через гидродвигатель, м<sup>3</sup>·с<sup>-1</sup>;

$q_0$  - удельный расход, м<sup>3</sup>·об<sup>-1</sup>;

$a$  - коэффициент, характеризующий утечки в зависимости от давления, м<sup>5</sup>·с<sup>-1</sup>·Па<sup>-1</sup>;

$K_m$  - коэффициент пропорциональности, м<sup>3</sup>;

$M$  - текущее значение момента, Н·м.

Величины  $Q$  и  $q_0$  приведены в технических характеристиках [44, 45]. Коэффициент  $a$  определяется из следующих соображений. Утечки в двигателе пропорциональны давлению  $P$ , т. е.  $\Delta Q = aP$ . С другой стороны, утечки характеризуются объемным КПД -  $\eta_0$ , т. е.  $\Delta Q = Q(1 - \eta_0)$ .

Из этих соотношений коэффициент, характеризующий утечки, будет

$$a = Q \frac{(1 - \eta_0)}{P}.$$

Коэффициент  $K_M$  определяется из аналогичных рассуждений.

Момент, развиваемый двигателем, прямо пропорционален давлению

$$M = K_M P.$$

В некоторых источниках приведены моменты, развиваемые двигателями  $M$  при известном давлении  $P$  [44], в других - дана мощность  $N$  и поэтому, зная соотношение между мощностью и моментом,

$$N_n = M_n \omega_n.$$

Определяются  $K_M = \frac{M_n}{P_n}$ ;  $M_n = \frac{N}{\omega P}$ ;  $\omega_n = \frac{\pi n_n}{30}$ .

Следовательно, формулу (1.25) можно записать уравнением прямой линии

$$n = (n_0)_i - bM,$$

или в относительных величинах момента

$$n = (n_0)_i - b M \gamma_x, \quad (1.26)$$

где  $b = \frac{a}{K_M q_0} - 1$  - коэффициент, характеризующий уменьшение частоты вращения при увеличении момента,  $\text{об} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ .

Таким образом, частота вращения объемного гидропривода определяется производительностью насоса и моментом сопротивления. Графически эти характеристики аналогичны механическим характеристикам электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, получающего питание от регулируемого источника.

На рис. 1.18 показаны приближенные механические характеристики аксиально-поршневого двигателя РМНА 125/320.

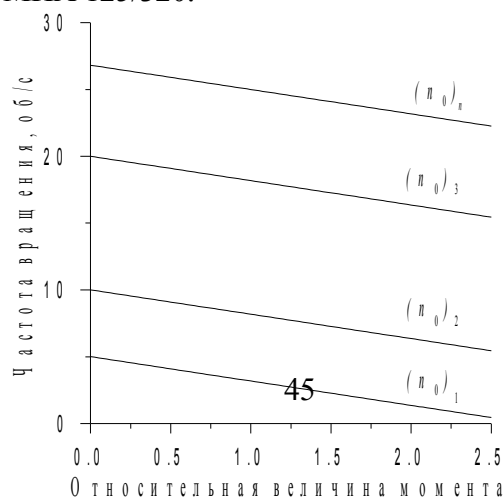


Рис. 1.18. Приближенные механические характеристики аксиально-поршневого двигателя РМНА 125/320

Пример 1.4. Построить механические характеристики аксиально-поршневого гидродвигателя по следующим данным [89]:

Гидродвигатель	РМНА 125/320
Рабочий объем (удельный) $q_0$	$125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot \text{об}^{-1}$ .
Номинальная подача	$10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \text{мин}^{-1}$ .
Давление:	
номинальное $P_n$	25 МПа.
максимальное $P_m$	32 МПа.
Частота вращения $n_n$	$1500 \text{ об} \cdot \text{мин}^{-1}$ .
Крутящий момент $M_n$	646 Н·м.
Номинальная мощность $N_n$	90 кВт.
КПД $\eta$	0,927.

Зависимость числа оборотов от относительной величины момента характеризуется уравнением (1.26)

$$n = (n_0)_i - b M_n \gamma_x.$$

Коэффициенты  $b = \frac{a}{K_m q_0}$ ;  $a = Q \frac{(1 - \eta_0)}{P}$ , тогда

$$Q_n = q_0 n_n; K_m = \frac{M_n}{P_n}; M_n = \frac{N}{\omega P}; \omega_n = \frac{\pi n_n}{30}.$$

Подставив данные технической характеристики, получим

$$\omega_n = \frac{3,14 \cdot 1500}{30} = 157 \text{ с}^{-1}; M_n = \frac{90 \cdot 10^3}{157} = 573 \text{ Н} \cdot \text{м}; K_m = \frac{573}{25 \cdot 10^6} = 22,92 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{Па}^{-1};$$

$$Q_n = 125 \cdot 10^{-6} \frac{1500}{60} = 3125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}; a = \frac{3125 \cdot 10^{-6} (1 - 0,927)}{25 \cdot 10^6} = 9,125 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Па}^{-1};$$

$$b = \frac{9,125 \cdot 10^{-12}}{3125 \cdot 10^{-6} \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = 3,18 \cdot 10^{-3} \text{ об} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}; b M_n = 3,18 \cdot 10^{-3} \cdot 573 = 1,822 \text{ об} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Тогда уравнение механической характеристики будет

$$n = (n_0)_i - 1,822 \gamma_x \text{ об} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$n = (n_0)_i - 109 \gamma_x \text{ об} \cdot \text{мин}^{-1},$$

где  $(n_0)_i$  - частота вращения двигателя при отсутствии нагрузки (холостой ход).

На рис. 1.18 приведены характеристики гидродвигателя при

$$(n_0)_n = 26,82 \text{ об} \cdot \text{с}^{-1}; (n_0)_3 = 20 \text{ об} \cdot \text{с}^{-1}; (n_0)_2 = 10 \text{ об} \cdot \text{с}^{-1}; (n_0)_5 = 5 \text{ об} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Семейство, довольно жестких характеристик, определяется подачей насоса, от которой зависит частота вращения двигателя при холостом ходе  $(n_0)_i$ . При этом  $(n_0)_5 > (n_0)_4 > (n_0)_3 > (n_0)_2 > (n_0)_1$ . Величина максимального момента может значительно превосходить номинальный, однако в реальных гидродвигателях, этот момент не

рекомендуется превышать в 1,5 - 2,0 раза [44]. Для рассмотренного двигателя эта величина равна 1,25 и определяется величиной настройки предохранительного клапана, равной 32 МПа.

С учетом того факта, что в системах объемного гидропривода используется насос регулируемой производительности, позволяющий плавно (по желанию оператора или в зависимости от задания системы автоматического регулирования) изменять подачу, то имеется возможность получить большее количество характеристик, которые обеспечивают заданный режим работы машины. Таким образом, объемный гидропривод имеет хорошие регулировочные характеристики и используется для управления машинами с большим диапазоном регулирования.

### 1.5.6. ГИДРОТРАНСФОРМАТОРЫ И ГИДРОМУФТЫ

Для облегчения пуска машин под нагрузкой и ограничения ускорений при разгоне, а также защиты трансмиссии и исполнительного органа от недопустимых перегрузок применяются гидродинамические передачи. Эти передачи нашли применение в приводах конвейеров, стругов, лебедок, дробилок, опрокидывателей и т. д.

Гидродинамические передачи подразделяются на гидротрансформаторы и гидромуфты, имеющие один и тот же принцип действия.

Гидротрансформатор впервые предложен проф. Г. Фентингером в 1902 г. для передачи больших мощностей от быстроходных судовых двигателей к гребным винтам, требующим сравнительно малых скоростей вращения и больших моментов [16]. Наличие в этом устройстве, кроме насосного и турбинного колес, направляющего аппарата, представляющего собой неподвижные лопасти, позволяет изменять величину момента на ведомом валу и получать больший момент по сравнению с ведущим валом. Таким образом, гидротрансформатор это редуктор с переменным передаточным числом, зависящим от нагрузки. КПД гидротрансформатора равен 0,87 - 0,9.

Во многих машинах требуются передачи, у которых необходимо изменение только передаточного отношения при неизменном передаваемом моменте. Такая передача появилась в 1910 г. на базе гидротрансформатора после исключения из его схемы неподвижного направляющего аппарата [16], получившая название гидромуфты. Из-за отсутствия направляющего аппарата в гидромуфте меньше гидравлические потери и, как следствие, выше КПД (0,95 - 0,97). Изменяя степень заполнения жидкостью рабочей полости, гидромуфта позволяет регулировать частоту вращения ведомого вала.

Передаваемый муфтой крутящий момент представляет собой нелинейную функцию двух независимых переменных. Угловые скорости насосного и турбинного колес зависят от текущего объема жидкости в рабочей полости и других факторов. Получение аналитической зависимости гидравлического момента от угловых скоростей чрезвычайно затруднено, поэтому при исследовании динамики машины с гидравлической передачей аналитическое выражение механической характеристики находят путем аппроксимации экспериментально полученных характеристик [67].

При отсутствии в документации механической характеристики, для укрупненной оценки, можно построить приближенную, по техническим данным.

Пример 1.5. Построить механические характеристики турбомуфты Т-90А привода ленточного конвейера по данным [44].

Тип турбомуфты	Т - 90А.
Номинальная мощность $N_n$	90 кВт.
Номинальная скорость вращения насосного колеса $n_n$	1485 об·мин <sup>-1</sup> .
Номинальный момент $M_n$	578,8 Н·м.
Пусковой момент, $M_p$	1,58 $M_n$ .
Коэффициент перегрузки $M_{кр} / M_n$	1,98.

Пусковой и критический моменты определяются

$$M_n = 1,58 \cdot 578,8 = 914,5 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{кр} = 1,98 \cdot 578,8 = 1146 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Сделаем допущение, механические характеристики аппроксимируются прямыми, соединяющими точки пускового и критического моментов.

Полагая, что при уменьшении степени заполнения гидромфты жидкостью пропорционально уменьшаются моменты, можно построить искусственные характеристики.

На рис. 1.19 приведены приближенные механические характеристики турбомфты Т-90А при заполнении ее жидкостью соответственно на 0,25; 0,5; 0,75 и 1,0 объема.

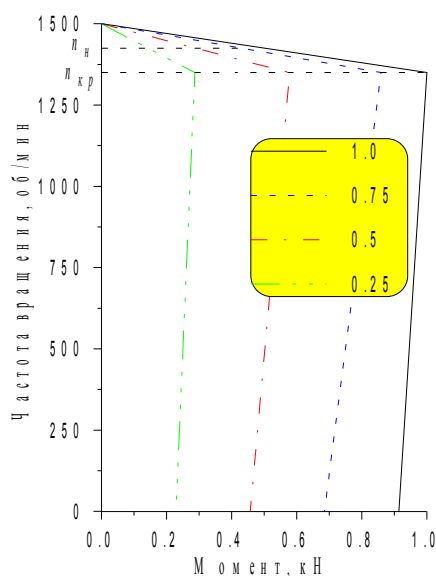


Рис. 1.19. Приближенные механические характеристики турбомфты Т-90А

### 1.5.7. МЕХАНИЧЕСКИЕ ТОРМОЗА

В некоторых горных машинах для выполнения технологического процесса используются тормозные режимы. К таким машинам относятся машины, требующие регулирования скорости движения. Это подъемные машины, электровозы, самоходные вагоны и др.

На многих машинах тормозные режимы могут быть созданы при помощи электрического торможения. Из курса электропривода известно, что способ электрического торможения электродвигателя может быть генераторным, электродинамическим и противоблукением.

Способ генераторного торможения применяется на машинах с отрицательным статическим сопротивлением, при этом скорость выше синхронной. К таким установкам относятся шахтные подъемные машины, работающие в режиме спуска груза, а также шахтные электровозы, движущиеся под уклон. Механические характеристики электродвигателя, работающего в режиме генераторного торможения — зеркальное отражение двигательного режима. Как правило, этот режим не вызывает форсированных процессов в машине, поэтому с точки зрения динамики машин не представляет интереса.

Способ электродинамического торможения, обычно применяемый на шахтном подъеме и на электровозах, позволяет в широких пределах регулировать скорость движения машин. Суть этого способа для асинхронного электродвигателя заключается в том, что в обмотки статора подается напряжение постоянного тока, при этом обмотки ротора замкнуты на сопротивление или даже накоротко. Регулируя величины постоянного тока и сопротивление ротора, получают большое семейство характеристик двигателя в тормозном режиме, которые будут по сравнению с двигательным режимом перевернутыми и зеркально



отраженными. Большое количество характеристик двигателя в режиме электродинамического торможения позволяет обеспечивать плавные переходные процессы и, как правило, не представляют большого интереса при изучении динамики машин.

При способе торможения противовключением ротор электродвигателя вращается в одном направлении, а магнитное поле - в противоположном. Этот режим вызывает большие динамические нагрузки в трансмиссии и в соответствии с требованиями Правил безопасности для подъемных машин, запрещен.

Для выполнения технологических режимов, а также для стопорения и удержания машины в неподвижном состоянии используются механические тормоза. Кроме этого механические тормоза используются для быстрой остановки машины в экстренных случаях для предотвращения аварийных ситуаций. Тормозное устройство развивает усилие, как правило, в 3 раза выше статического. Экстренные торможения большими усилиями создают тяжелые динамические режимы, которые могут быть причинами разрушения отдельных узлов и аварий. Поэтому исследования динамических процессов при торможении машин являются чрезвычайно важными для обеспечения их надежной и безопасной эксплуатации. Например, на многоканатном подъеме резкое торможение может сформировать динамические нагрузки, которые вызовут скольжение канатов по футеровке шкива трения. Изучение динамики процесса торможения позволяет сформулировать условия, выполнение которых обеспечит безопасную эксплуатацию машины.

Рассмотрим характеристики тормоза шахтной многоканатной подъемной машины типа ЦШ 4х4. Максимальное тормозное усилие этой машины 240 кН, которое в три раза больше статического. В соответствии с требованиями Правил безопасности [60] время холостого хода тормоза должно быть менее 0,3 с, а время срабатывания менее 0,8 с. Под временем холостого хода понимается время с момента подачи сигнала на торможение до прикосновения колодок к тормозному ободу. Время срабатывания, это время с момента подачи сигнала на торможение до создания тормозного усилия, равного по величине статическому.

Цикл исследований по тормозным устройствам позволил описать тормозную характеристику шахтного подъема аperiodическим звеном первого порядка [73]. В дальнейшем ряд исследователей подтвердили это положение [81, 82].

Таким образом, тормозное усилие можно характеризовать уравнением

$$\tau F_m' + F_m = F_{max}, \quad (1.27)$$

где  $F_m$  - текущее значение тормозного усилия, Н;

$F_{max}$  - максимальное значение тормозного усилия, Н;

$\tau$  - постоянная времени тормоза, с.

Уравнение (1.27) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с правой частью, у которого переменные легко разделяются. Это уравнение можно записать

$$\frac{dF_m}{F_{max} - F_m} = \frac{dt}{\tau}.$$

Обозначим  $z = F_{max} - F_m$ , откуда  $dF_m = -dz$ , тогда

$$-\frac{dz}{z} = \frac{dt}{\tau}; \quad -\ln z = \frac{t}{\tau} + C; \quad e^{-\left(\frac{t}{\tau} + C\right)} = z,$$

или

$$F_m = F_{\max} - e^{\frac{t}{\tau}} e^{-C}.$$

Здесь  $t$  – текущее значение времени с момента нарастания тормозного усилия, с.  
 Постоянная интегрирования  $C$  определяется из начальных условий: при  $t = 0$ ;  $F_m = 0$ , следовательно,  $e^{-C} = F_{\max}$ .  
 Тогда решение уравнения (1.27) будет

$$F_m = F_{\max} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (1.28)$$

Если учесть время холостого хода тормоза  $t_x$ , то

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq t_x, & \quad F_m = 0, \\ t_x \leq t < t_n, & \quad F_m = F_{\max} (1 - e^{-\frac{t-t_x}{\tau}}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Экспоненциальная характеристика тормоза, построенная по уравнению (1.29), при  $F_{\max} = 240$  кН,  $t_x = 0,3$  с,  $\tau = 1,23$  с, приведена на рис. 1.20.

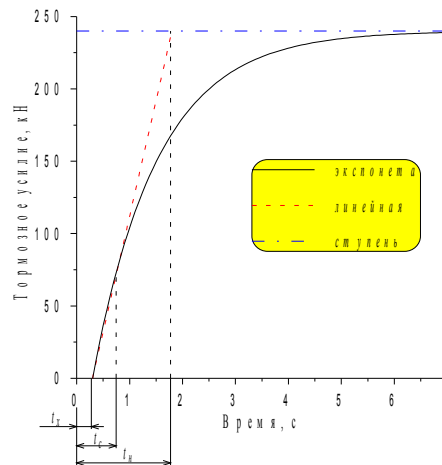


Рис. 1.20. Характеристики тормоза

При линейном законе изменения тормозного усилия можно записать

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq t_x, & \quad F_m = 0; \\ t_x \leq t \leq t_n, & \quad F_m = \frac{F_{\max}}{t_n - t_x} (t - t_x); \\ t > t_n, & \quad F_m = F_{\max} = \text{const.} \end{aligned}$$

где  $t_n$  – время, за которое тормозное усилие при линейном законе вырастет до максимальной величины, с.

На рис. 1.20 по этим зависимостям построена линейная характеристика б. Для того чтобы экспоненциальная и линейная тормозные характеристики отвечали требованиям Правил безопасности, величина статического усилия должна быть достигнута за время срабатывания, т. е. при  $t_c = 0,8$  с и  $F_{\max} = 3F_{ст}$ , тормозное усилие должно быть

$$F_m = \frac{1}{3} F_{\max}.$$

Из этого можно записать

$$F_{\max} (1 - e^{-\frac{t_c - t_x}{\tau}}) = \frac{F_{\max}}{3}.$$

Постоянная времени тормоза определится

$$\tau = -\frac{t_c - t_x}{\ln 0,667}.$$

Если  $t_c = 0,8$  с,  $t_x = 0,3$  с,  $t_n = 1,8$  с, то  $\tau = 1,23$  с.

Исследования динамических процессов при разных законах формирования тормозного или двигательного усилия показали, что амплитудные значения колебаний определяются не только величиной возмущающего воздействия, но и интенсивностью нарастания этого воздействия. Максимальные динамические нагрузки возникают при приложении усилия ступенью. Уменьшение интенсивности нарастания возмущающего воздействия снижает амплитудные значения динамических нагрузок. Однако, широко известное и распространенное положение о том, что чем медленнее прикладывается возмущающее воздействие, тем меньше уровень динамических нагрузок, требует уточнения. В монографии [56] сказано: “Действие силы можно считать статическим при  $t > t^*$ , если длительность возрастания силы  $t^*$  по крайней мере, в 6,4 раза превосходит наибольший период свободных колебаний системы”.

В практике эксплуатации, во-первых, такое большое время существенно снижает производительность установки, а во-вторых, для многих установок (лифты, шахтные подъемные машины и др.) противоречит требованиям правил безопасности в отношении времени нарастания тормозного усилия. Кроме того, может оказаться, что время формирования возмущающего воздействия, например, кратное 1,5; 2,5 и т. д. периодов свободных колебаний может создать динамические нагрузки выше по сравнению со временем кратным одному периоду свободных колебаний. Поэтому для увеличения надежности, безопасности и долговечности машин необходимо проектировать рациональные режимы управления, которые обеспечат минимальные динамические нагрузки в переходных режимах. Для этого необходимо изучить закономерности формирования динамических нагрузок при различных возмущениях. Этим вопросам будут посвящены последующие разделы монографии.

## 2. РАБОТА МАШИН БЕЗ УЧЕТА ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ТРАНСМИССИИ

В практике эксплуатации машин имеется ряд задач, которые могут быть решены без учета вязкоупругих свойств их элементов. К таким задачам относятся задачи динамики, в которых вязкоупругие свойства элементов машины не являются определяющими. Например, закладочные машины, предназначенные для закладки выработанного пространства, работают на принципе использования кинетической энергии закладываемого материала.

При определении производительности машины, ее коэффициента полезного действия достаточно знания кинематических параметров (перемещение, скорость и ускорение) без учета вязкоупругих свойств элементов. При решении этого класса задач трансмиссию машины можно рассматривать абсолютно жесткой, а эквивалентную схему принимать одномассовой.

Для определения максимальных динамических нагрузок, являющихся следствием колебательных процессов при пуске и торможении, необходимо учитывать вязкоупругие свойства машины. Эквивалентные схемы этих машин могут быть представлены одномассовой или многомассовыми системами.

### 2.1. ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ МАШИНЫ ДЛЯ ЗАКЛАДКИ ВЫРАБОТАННОГО ПРОСТРАНСТВА

Для закладки выработанного пространства используются машины, принцип действия которых показан на рис. 2.1.

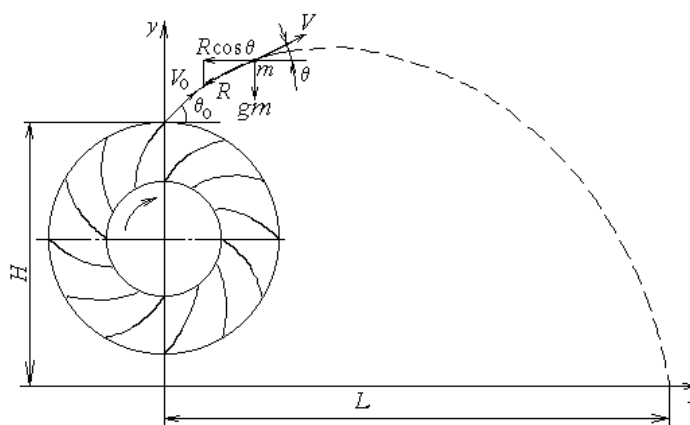


Рис. 2.1. Схема работы закладочной машины

Ротор закладочной машины, имеющий диаметр  $D$ , вращается с частотой  $n$ . Закладочный материал поступает в ковши при помощи транспортера. За счет центробежных сил, закладочный материал, представляющий набор кусков породы, каждый из которых имеет массу  $m$ , вылетает со скоростью  $v_0 = \frac{\pi D n}{60}$  под углом к оси абсцисс.

Рассмотрим элементарную массу  $m$ , которая летит. На нее действуют сила тяжести  $gm$  и сила сопротивления  $R$ . Проекции силы сопротивления на прямоугольные оси координат будут

$$R_x = -R \cos \theta; \quad R_y = -R \sin \theta.$$

Тогда дифференциальные уравнения запишутся

$$\begin{aligned} m x'' &= -R_x \cos \theta, \\ m y'' &= -gm - R \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Сила сопротивления  $R$  зависит от формы и размеров тела, скорости движения и от свойства среды, в которой движется тело. Если скорость движения мала (до  $0,1 \text{ мс}^{-1}$ ), то силу сопротивления, с достаточной точностью, можно считать пропорциональной первой степени скорости [39].

В широком диапазоне скоростей и размеров движущихся тел силу сопротивления принимают пропорциональной квадрату скорости (рис. 1.11, б). При приближении скорости тел к скорости звука ( $330 \text{ мс}^{-1}$ ) сила сопротивления возрастает быстрее, чем квадрат скорости [39].

Для закладочных машин  $v < 330 \text{ мс}^{-1}$ , поэтому

$$R = b_2 v^2,$$

где  $b_2$  - коэффициент пропорциональности,  $\text{Н} \cdot \text{с}^2 \text{м}^{-2}$ .

Коэффициент пропорциональности определяется [76]

$$b_2 = \frac{1}{2} C_x \rho S, \quad (2.2)$$

здесь  $C_x$  - безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела. Например, для шара -  $C_x = 0,5$ , у очень хорошо обтекаемых веретенообразных тел  $C_x$  меньше  $0,03$ . Для тел произвольной формы, в том числе для кусков горных пород  $C_x = 0,5 - 1,0$ .

$\rho$  - плотность среды,  $\text{кг м}^{-3}$ . Для воздуха при температуре  $15^\circ \text{С}$  и при давлении  $760 \text{ мм ртутного столба}$   $\rho = 1,25 \text{ кг м}^{-3}$ .

$S$  - площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения,  $\text{м}^2$ .

Учитывая, что  $\cos \theta = \frac{x'}{v}$ ,  $\sin \theta = \frac{y'}{v}$ , а  $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ , силы сопротивления

будут

$$\begin{aligned} R_x &= -b_2 v^2 \cos \theta = -b_2 x' \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \\ R_y &= -b_2 v^2 \sin \theta = -b_2 y' \sqrt{(x')^2 + (y')^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда дифференциальные уравнения (2.1), характеризующие полет тела массой  $m$ , можно представить

$$\begin{aligned} m x'' &= -b_2 x' \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \\ m y'' &= -g m - b_2 y' \sqrt{(x')^2 + (y')^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начальные условия для интегрирования уравнений (2.4): при  $t = 0$ :  $x = 0$ ;  $y = H$ ;  
 $\dot{x} = v_0 \cos \theta_0$ ;  $\dot{y} = v_0 \sin \theta_0$ , поэтому  $x'_0 = v_0 \cos \theta_0$ ;  $y'_0 = v_0 \sin \theta_0$ .

Уравнения (2.4) являются нелинейными и не могут быть решены аналитически. Для исследования динамики полета массы  $m$  необходимо численное решение задачи.

Для аналитического решения системы уравнений (2.4) предположим, что сила сопротивления  $R$  пропорциональна скорости, т. е.  $R = -b_2 v$ , при этом коэффициент  $b_2$  определяется по формуле (2.2). Тогда систему уравнений (2.4) можно представить

$$\begin{aligned} m x'' &= -b_2 x', \\ m y'' &= -g m - b_2 y'. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Разделив на  $m$ , получим два уравнения

$$\begin{aligned} x'' + \beta x' &= 0, \\ y'' + \beta y' &= -g, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\beta = \frac{b_2}{m}$  - коэффициент,  $c^{-1}$ .

Начальные условия остаются те же, что и для уравнения (2.4). Полученные уравнения являются линейными, при этом первое уравнение - однородное, а второе неоднородное.

Вводя новые переменные  $z = x x'$ ,  $\lambda = y'$  получим

$$\begin{aligned} z' + \beta z &= 0 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dt} = -\beta z, \\ \lambda' + \beta \lambda &= -g \quad \text{или} \quad \frac{d\lambda}{dt} = -(g + \beta \lambda). \end{aligned}$$

Во втором уравнении произведем еще раз замену, обозначив  $\varphi = g + \beta \lambda$ . Тогда

$$d\lambda = \frac{d\varphi}{\beta}; \quad \frac{d\varphi}{\beta dt} = -\varphi.$$

В полученных уравнениях переменные легко разделяются

$$\frac{dz}{z} = -\beta dt; \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = -\beta dt.$$

Интегрируя, получим

$$\ln z = -\beta t + C_1; \quad \ln \varphi = -\beta t + C_2,$$

или

$$\ln x' = -\beta t + C_1; \quad \ln(g + \beta y') = -\beta t + C_2. \quad (2.7)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий. При  $t = 0$ ;  $x' = v_0 \cos \theta_0$ ;  $y' = v_0 \sin \theta_0$ . Найдем  $C_1 = \ln v_0 \cos \theta_0$ ;  $C_2 = \ln(g + \beta v_0 \sin \theta_0)$ . Подставив значение постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (2.7), получим

$$\ln \frac{x'}{v_0 \cos \theta_0} = -\beta t; \quad \ln \frac{g + \beta y'}{g + \beta v_0 \sin \theta_0} = -\beta t.$$

Из последних равенств находим

$$\begin{aligned} x' &= v_0 \cos \theta_0 e^{-\beta t}; \\ y' &= \frac{1}{\beta} [e^{-\beta t} (g + v_0 \beta \sin \theta_0) - g]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интегрируя уравнения (2.8), получим текущие значения координат летящей массы в функции времени

$$\begin{aligned} x &= -\frac{v_0 \cos \theta_0}{\beta} e^{-\beta t} + C_3, \\ y &= \frac{1}{\beta} \left[ -\frac{g + v_0 \beta \sin \theta_0}{\beta} e^{-\beta t} - g t \right] + C_4. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $C_3$ ,  $C_4$  найдем из начальных условий. При  $t = 0$ ;  $x = 0$ ;  $y = H$ ,

$$C_3 = \frac{v_0 \cos \theta_0}{\beta}; \quad C_4 = H + \frac{g + v_0 \beta \sin \theta_0}{\beta^2}.$$

Подставив значения постоянных  $C_3$ ,  $C_4$ , получим

$$x = \frac{v_0 \cos \theta_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}), \quad (2.9)$$

$$y = H + \frac{g + v_0 \beta \sin \theta_0}{\beta^2} (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t. \quad (2.10)$$

Решение задачи должно продолжаться до момента, когда координата  $y$  станет равной нулю. В этот момент времени координата  $x$  определит дальность полета. Уравнение траектории движения массы  $y = f(x)$  можно найти, если выразить из уравнения (2.9)  $t = f(x)$  и подставить эту функцию в (2.10).

Для рассматриваемой задачи эти процедуры затруднительны, так как нахождение  $t = f(x)$  связано с решением трансцендентного уравнения. Поэтому для аналитического решения задачи необходимо поэтапное нахождение искомых функций.

Пример 2.1. Определить траекторию движения куска горной породы, имеющей плотность  $\rho_m = 2000 \text{ кг=м}^3$ . Кусок в форме шара радиусом  $r = 0,025 \text{ м}$  вылетает из ковша ротора закладочной машины, имеющего диаметр  $D = 0,5 \text{ м}$ , вращающегося с частотой  $n = 980 \text{ об мин}^{-1}$ . Высота  $H = 1,0 \text{ м}$ , угол  $\alpha = 30^\circ$ .  
Масса куска породы

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_m = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,025^3 \cdot 2000 = 0,13 \text{ кг.}$$

Здесь  $\frac{4}{3} \pi r^3$  - объем шара.

Скорость, с которой вылетает кусок из закладочной машины

$$v_0 = \frac{\pi D n}{60} = \frac{3,14 \cdot 0,5 \cdot 980}{60} = 25,6 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Для определения коэффициента пропорциональности  $b_2$  примем  $C_x = 1,0$ ;  $\rho = 1,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ . Площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения можно принять равной площади круга радиусом  $r$ , тогда  $S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 0,025^2 = 0,0019 \text{ м}^2$ .

Коэффициенты

$$b_2 = \frac{1}{2} C_x \rho S = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 1,25 \cdot 0,0019 = 0,0012 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1},$$

$$\beta = \frac{b_2}{m} = \frac{0,0012}{0,13} = 0,0092 \text{ с}^{-1}.$$

Дифференциальные уравнения полета массы  $m$  характеризуются уравнениями (2.6), которые для рассматриваемой задачи будут

$$\begin{aligned} x'' + 0,0092 x' &= 0; \\ y'' + 0,0092 y' &= -9,81. \end{aligned}$$

Уравнения, характеризующие перемещения (2.9) и (2.10) запишутся

$$x = \frac{v_0 \cos \theta_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) = \frac{25,6 \cdot \cos 30^\circ}{0,0092} (1 - e^{-0,0092 t}) = 2409 \cdot (1 - e^{-0,0092 t});$$

$$\begin{aligned} y &= H + \frac{g + v_0 \beta \sin \theta_0}{\beta^2} (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t = 1 + \frac{9,81 + 2,56 \cdot 0,0092 \cdot \sin 30^\circ}{0,0092^2} - \frac{9,81}{0,0092} t = \\ &= 1 + 117293 (1 - e^{-0,0092 t}) - 1066 t. \end{aligned}$$

Вычислив  $x = f(t)$  и  $y = f(t)$ , строим траекторию полета куса породы  $y = f(x)$ . На рис. 2.2 показана траектория полета куса породы шарообразной формы радиусом  $r = 0,025 \text{ м}$ , массой  $m = 0,13 \text{ кг}$ .

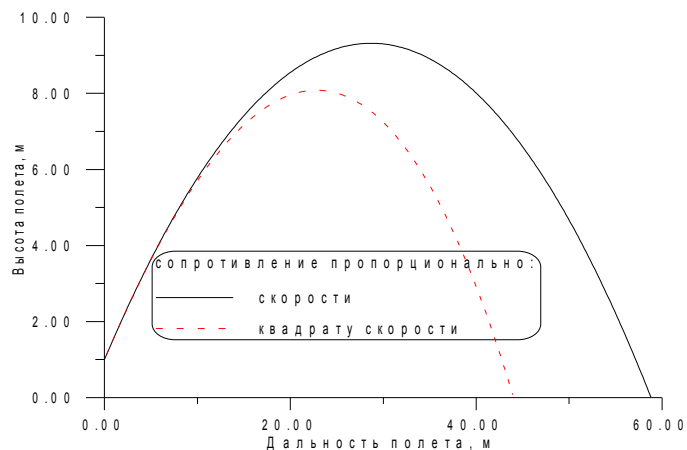


Рис. 2.2. Траектория полета куса породы ( $r = 0,025 \text{ м}$ ;  $m = 0,13 \text{ кг}$ .)



Видно, что для заданных условий задачи дальность полета составляет около 60 м, при этом максимальная высота траектории 9,3 м. Следовательно, такая установка может использоваться для открытых горных работ. Для шахтных условий, где высота горных выработок ограничена, необходимо уменьшить угол  $\rho$ .

На графике пунктирной линией показана траектория полета такой же массы породы при силе сопротивления, характеризующейся квадратичной зависимостью от скорости. Эта характеристика построена путем численного интегрирования уравнения (2.4). Во втором случае дальность полета уменьшилась на 15 м, максимальная высота траектории стала 8 м, т. е. снизилась на 1,3 м.

## 2.2. ПУСК И ТОРМОЖЕНИЕ МАШИН ПРИ ПОСТОЯННОМ ДВИЖУЩЕМ ИЛИ ТОРМОЗНОМ УСИЛИИ

В ряде случаев при пуске и торможении можно считать, что усилие двигателя или тормоза остается постоянным.

Короткозамкнутые специальные асинхронные электродвигатели с повышенным пусковым моментом (рис. 1.14), применяемые в качестве привода машин, имеют механическую характеристику, у которой приближенно можно считать, что при пуске момент, остается постоянным.

При пуске асинхронного электродвигателя с фазным ротором усилие изменяется от  $F_{01}$  до  $F_{02}$  (рис. 1.15). С определенной погрешностью можно положить, что средняя величина усилия остается постоянной, т. е.  $F_{0с} = F_n \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$ .

Электродвигатели постоянного тока независимого возбуждения с регулируемым источником напряжения (рис. 1.17), в силу высоких регулировочных свойств, могут обеспечить постоянное движущее усилие при разгоне.

Этот же вывод можно сделать и относительно объемного гидропривода с насосом регулируемой производительности (рис. 1.18).

Тогда, используя принцип Даламбера [76], заключающийся в том, что если к материальной точке приложить силу инерции и учесть сумму всех внешних и внутренних сил, то материальная точка будет находиться в равновесии, можно записать

$$m x'' = F_{0с} - (F_{cm})_x, \quad (2.11)$$

где  $m$  - суммарная, приведенная к координате  $x$  масса всех движущихся частей машины, кг;  
 $F_{0с}$  - движущее усилие, развиваемое электродвигателем, Н;  
 $(F_{cm})_x$  - сила сопротивления, Н.

### 2.2.1. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ - ПОСТОЯННАЯ ВЕЛИЧИНА

Силу сопротивления, равную постоянной величине, можно принять при пуске шахтной подъемной установки с уравновешивающим канатом, при пуске конвейера и ряда других машин. Тогда  $(F_{cm})_x = F_0 = \text{const}$  и уравнение (2.11) запишется

$$x'' = a,$$

где  $a = \frac{F_{0с} - F_0}{m} = \text{const}$  - ускорение машины,  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Значит, при этих условиях, машина имеет равноускоренное движение.

Соответственно скорость и перемещение будут

$$x' = at, \quad x = \frac{at^2}{2}.$$

Скорость и ускорение процесса разгона показаны на рис. 2.3 прямыми 2.

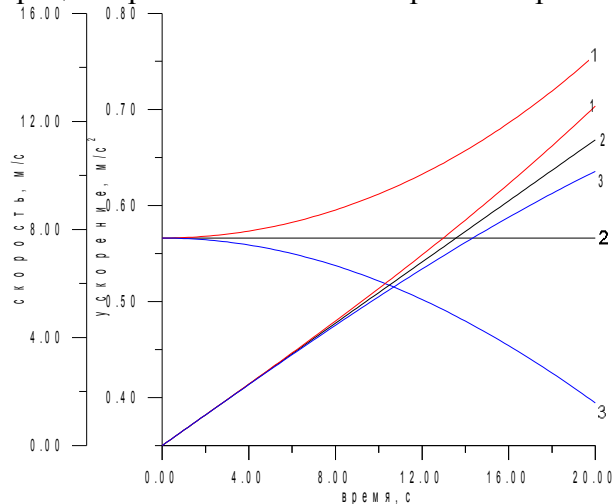


Рис. 2.3. Процесс разгона подъема при постоянном движущем усилии машины

### 2.2.2. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ УМЕНЬШАЕТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ МАШИНЫ

На рис. 1.11, *a* приведена характеристика 2, которая показывает, что по мере перемещения машины сопротивление движению уменьшается. Такой характер изменения статических сопротивлений соответствует подъемным установкам без уравнивающего каната. Уменьшение статических сопротивлений неуравновешенного подъема объясняется тем фактором, что длина каната, к которому подвешен поднимающийся груз, уменьшается, а длина каната, к которому подвешен опускающийся груз — увеличивается. Следовательно, если линейная плотность каната  $p$ , а перемещение сосудов  $x$ , то статическое сопротивление уменьшится на  $2gpx$ . Если силу сопротивления в начале процесса обозначить через  $F_0$ , то уравнение прямой линии (2), показанной на рис. 1.11, *a*, будет

$$F_x = F_0 - 2gpx.$$

Уравнение (2.11) примет вид

$$mx'' = F_{ос} - F_0 + 2gpx.$$

Последнее представим

$$x'' - \beta^2 x = a \quad (2.12)$$

где  $\beta = \sqrt{2g \frac{p}{m}}$  — коэффициент,  $c^{-2}$ ;

$a = \frac{F_{ос} - F_0}{m}$  — ускорение машины в начале разгона,  $m \ c^{-2}$ .

Уравнение (2.12) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с правой частью. Известно, общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения этого уравнения  $x^*$  и общего решения однородного уравнения  $\bar{x}$  [24].

$$x = x^* + \bar{x}.$$

Так как правая часть уравнения (2.12) постоянная величина, то  $x^* = A$ , где  $A$  - постоянный коэффициент, определяемый методом неопределенных коэффициентов [24].

Вторая производная  $(x^*)'' = 0$ . Подставив эти значения в уравнение (2.12), получим

$$A = -\frac{a}{\beta^2}.$$

Для нахождения общего решения однородного уравнения определим корни характеристического уравнения  $r^2 - \beta^2 = 0$ ,  $r_1 = \beta$ ;  $r_2 = -\beta$ . Так как характеристическое уравнение имеет два действительных корня, то общее решение уравнения (2.12) запишется

$$x = C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t} - \frac{a}{\beta^2}. \quad (2.13)$$

Продифференцировав уравнение (2.13), получим зависимость, характеризующую скорость машины

$$x' = \beta(C_1 e^{\beta t} - C_2 e^{-\beta t}). \quad (2.14)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий. Если в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $x = 0$  и  $x' = 0$ , то

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2\beta^2}.$$

Тогда 
$$x = \frac{a}{\beta^2} \left( \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} - 1 \right), \quad x' = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}.$$

Известно [31], что

$$\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} = \text{sh } \beta t, \quad \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} = \text{ch } \beta t.$$

Здесь sh и ch - гиперболический синус и косинус, графики которых показаны на рис. 2.4.

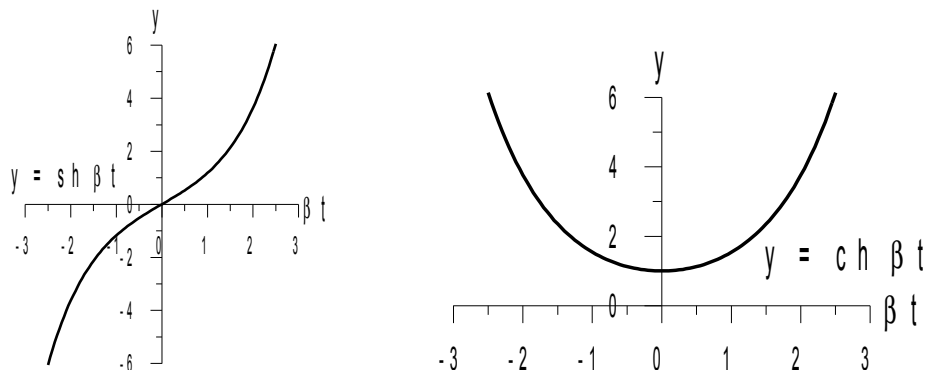


Рис. 2.4. Графики функций  $\text{sh } t$  и  $\text{ch } t$ 

Тогда

$$x = \frac{a}{\beta^2} (\text{ch } \beta t - 1), \quad x' = \frac{a}{\beta} \text{sh } \beta t, \quad x'' = a \text{ch } \beta t, \quad (2.15)$$

### 2.2.3. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ УВЕЛИЧИВАЕТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ МАШИНЫ

У некоторых горных машин статические сопротивления линейно увеличиваются в функции перемещения. Такая характеристика показана на рис. 1.11, а, прямой 3.

Увеличение статических сопротивлений характерно для многоканатных подъемных установок, у которых к нижним сечениям подъемных сосудов подвешены уравновешивающие канаты с линейной плотностью больше чем у головных.

Допустим суммарная линейная плотность уравновешивающих канатов  $p'$ , а головных  $p$ . При этом разность их будет  $q = p' - p$ . Тогда прямая линия 3 на графике 1.11, а, будет характеризоваться

$$F_x = F_0 + 2gqx.$$

Уравнение движения (2.11) запишется

$$mx'' = F_{\text{дв}} - F_0 - 2gqx,$$

или

$$x'' + \beta^2 x = a \quad (2.16)$$

где  $\beta^2 = 2gq/m$  - коэффициент,  $\text{с}^{-2}$ .

Полученное уравнение (2.16) аналогично уравнению (2.12). Различие заключается в том, что перед коэффициентом  $\beta^2$  стоит знак плюс. Общее решение уравнения (2.16) находится аналогично решению уравнения (2.12). Корни характеристического уравнения будут комплексными

$$r_1 = \beta\sqrt{-1}, \quad r_2 = -\beta\sqrt{-1},$$

поэтому по аналогии с (2.15) общее решение будет

$$x = \frac{a}{\beta^2} (1 - \cos \beta t), \quad x' = \frac{a}{\beta} \sin \beta t, \quad x'' = a \cos \beta t. \quad (2.17)$$

Характеристики процесса разгона для этого случая показаны на рис. 2.3 кривыми 3.

Пример 2.2. Построить характеристики процесса разгона подъемной установки имеющей технические данные:

Масса движущихся частей приведенная к органу навивки	$m = 101500$ кг.
Статическое сопротивление в начале подъема	$F_0 = 101500$ Н.
Усилие, развиваемое двигателем во время разгона	$F_{\text{дв}} = 159000$ Н.
Суммарная плотность головных канатов	$p = 8,4$ кг=м <sup>-1</sup> .

Максимальная скорость

$$v_{max} = 9,87 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Ускорение машины во время разгона для уравновешенной подъемной установки

$$a = \frac{F_{\text{ог}} - F_0}{m} = \frac{159000 - 101500}{101500} = 0,566 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Процесс разгона характеризуется зависимостями

$$x'' = 0,566; \quad x' = at - 0,566t; \quad x = \frac{a}{2}t^2 = 0,283t^2.$$

Максимальная скорость  $v_{max} = 9,87 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  будет достигнута за время

$$t = \frac{v_{max}}{a} = \frac{9,87}{0,566} = 17,44 \text{ с},$$

при этом, пройденный путь

$$x = \frac{a}{2}t^2 = 0,283 \cdot 17,44^2 = 86,06 \text{ м}.$$

Прямые 2, приведенные на рис. 2.3, характеризуют скорость и ускорение процесса разгона.

Предположим, подъемная установка не имеет уравновешивающего каната. Статическое сопротивление изменяется по формуле

$$F_x = F_0 - 2gpx = 101500 - 164,8x.$$

Коэффициент

$$\beta = \sqrt{2g \frac{p}{m}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot \frac{8,4}{101500}} = 0,04 \text{ с}^{-1}.$$

Процесс разгона характеризуется зависимостями (2.15)

$$x'' = a \operatorname{ch} \beta t = 0,566 \operatorname{ch} 0,04 t; \quad x' = \frac{a}{\beta} \operatorname{sh} \beta t = 14,15 \operatorname{sh} 0,04 t;$$

$$x = \frac{a}{\beta^2} (\operatorname{ch} \beta t - 1) = 353,7 (\operatorname{ch} 0,04 t - 1).$$

По этим данным на рис. 2.3 построены кривые 1, которые характеризуют процесс разгона неуравновешенной подъемной установки. Максимальная скорость  $v_{max} = 9,87 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  будет достигнута за 16,26 с, при этом путь разгона равен 77,48 м. Ускорение в конце разгона  $x'' = 0,689 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Если подъемная установка уравновешена тяжелым канатом и при этом разность плотностей головного и уравновешивающего канатов  $q = 8,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1}$ , то статические сопротивления будут изменяться по закону

$$F_x = F_0 + 2gqx = 101500 + 164,8x.$$

Ускорение, скорость и перемещение характеризуются уравнениями (2.17)

$$x'' = a \cos \beta t = 0,566 \cos 0,04 t; \quad x' = \frac{a}{\beta} \sin \beta t = 14,15 \sin 0,04 t;$$

$$x = \frac{a}{\beta^2}(1 - \cos\beta t) = 353,7(1 - \cos 0,04 t).$$

Кривые 3, на рис. 2.3, характеризуют процесс разгона подъемной установки с тяжелым уравновешивающим канатом. Максимальная скорость  $v_{max} = 9,87 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$  достигается за время 19,26 с. Путь и ускорение в этот момент равны 99,87 м и  $0,406 \text{ мм}\cdot\text{с}^{-2}$ .

Сравнивая характеристики 1, 2, 3 видим, что скорости, вычисленные по различным формулам, отличаются незначительно. Масштаб графиков ускорения выбран таким образом, чтобы была видна разность изменения ускорения, хотя максимальная величина этого различия не превышает  $0,16 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Время разгона отличается не более чем на 2 с. Такие незначительные изменения кинематических параметров не влияют на точность расчета производительности и КПД подъемной установки. Поэтому в практике проектирования шахтного подъема расчет кинематики, как правило, ведут по закону равноускоренного движения.

#### 2.2.4. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ УВЕЛИЧИВАЕТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО СКОРОСТИ МАШИНЫ

У многих машин силы сопротивления зависят от скорости. Вентиляторные и водоотливные установки имеют квадратичную зависимость момента сопротивления от частоты вращения электродвигателя. Эти характеристики показаны кривыми 4 и 5 на рис. 1.11, б.

Уравнение движения машины, для этих характеристик можно записать

$$mx'' = F_{ог} - b(x')^2. \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) - нелинейное и получило название уравнения Риккати. Это уравнение, за исключением частных случаев, не интегрируется в квадратурах [24].

Широкое внедрение современных персональных компьютеров в практику научных исследований позволило частично изменить подходы к решению задач. Численное решение уравнения (2.18) позволяет получить графики исследуемых режимов. Однако с целью уменьшения трудоемкости вычислительного процесса рекомендуется численное решение не только нелинейных, но и линейных уравнений, которые имеют аналитическое решение. Этот факт, ни в коем случае, не умаляет важность знания соответствующих курсов высшей математики, а только подтверждает необходимость поиска рациональных подходов к исследовательскому процессу. Ценность аналитического решения особенно важна, когда решение позволяет установить общие закономерности и обобщить полученные результаты.

Поэтому для установления общих закономерностей, параболы 4 или 5 заменим прямой линией 6. Прямая 6 существенно отличается от парабол 4 и 5. Для увеличения точности эти кривые можно заменить набором прямых, при этом закономерности, полученные для прямой 6, будут общими и иметь отличие только в значении постоянных интегрирования.

Таким образом, при замене параболы прямой линией уравнение (2.18), будет

$$mx'' = F_{ог} - bx'.$$

Это уравнение можно записать

$$x'' + 2\alpha x' = a, \quad (2.19)$$

где  $\alpha = \frac{b}{2m}$  - коэффициент,  $\text{с}^{-1}$ .

Уравнение (2.19) – линейное, неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, и может быть решено аналогично уравнениям (2.12, 2.16).

Приведем другой метод решения. Если ввести новую переменную  $y = x'$ , то получим уравнение

$$y' + 2\alpha y = a. \quad (2.20)$$

В этом уравнении переменные легко разделяются и решение выражается в квадратурах

$$\frac{dy}{a - 2\alpha y} = dt, \quad -\frac{1}{2\alpha} \ln(a - 2\alpha y) = t + C.$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий. При  $t = 0$ ,  $x' = y = 0$ , определим

$$C = \frac{\ln a}{2\alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}), \\ x'' &= a e^{-2\alpha t}, \\ x &= \int x' dt = \frac{a}{2\alpha} \int (1 - e^{-2\alpha t}) dt = \frac{a}{2\alpha} \left( t + \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \right) + C_1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

П

остоянная интегрирования  $C_1$  определенная из условия:  $t = 0$ ,  $x = 0$ , будет

$$C_1 = -\frac{a}{(2\alpha)^2},$$

тогда перемещение определится

$$x = \frac{a}{2\alpha} \left[ t - \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right]. \quad (2.22)$$

Пример 2.3. Рассчитать процесс пуска вентилятора ВВД-30, имеющего следующую техническую характеристику:

Маховый момент ротора вентилятора	$GD_6^2 = 128 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$
Мощность электродвигателя	$P_n = 1000 \text{ кВт}.$
Частота вращения	$n_n = 500 \text{ об} \cdot \text{мин}^{-1}.$
Момент инерции электродвигателя	$J_{ог} = 2700 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
Пусковой момент	$\Pi_n = 1.1.$

Принимая условие, что электродвигатель во время пуска развивает постоянный момент равный  $M_n = \Pi_n M_n$ , получим

$$M_n = 975 \cdot 9,81 \cdot \frac{1000}{500} = 19,12 \text{ кНкм}, \quad M_n = 1,1 \cdot 19,12 = 21 \text{ кНкм}.$$

Предположим, что после разгона электродвигатель работает в номинальном режиме, следовательно, не учитывая КПД установки можно сказать, что электродвигатель преодолевает момент сопротивления равный

$$M_c = M_n = 19,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В машине отсутствуют поступательно движущиеся массы, поэтому массу заменим моментом инерции, а линейные скорости угловыми. Тогда в уравнении (2.18), умножив правую и левую части на радиус, получим

$$J\varphi'' = M_{\text{дв}} - b\varphi'.$$

Здесь  $J$  - суммарный момент инерции вентилятора и электродвигателя, кгт м<sup>2</sup>;

- угол поворота машины, рад;

$M_{\text{дв}} = M_n$  - момент, развиваемый электродвигателем во время пуска, Н м;

$b = \frac{M_c}{\varphi'_n}$  - коэффициент, Нммс;

$\varphi'_n = \frac{\pi}{30} n_n \approx 0,104 n_n$  - номинальная угловая скорость машины, с<sup>-1</sup>.

В соответствии с формулой (1.1) момент инерции вентилятора

$$J_g = \frac{GD_g^2}{4g} = \frac{128000}{4 \cdot 9,81} = 3200 \text{ кгк}\cdot\text{м}^2,$$

тогда

$$J = J_g + J_{\text{дв}} = 3200 + 2700 = 5900 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Коэффициент  $b = \frac{M_n}{\varphi'_n} = \frac{19120}{0,104 \cdot 500} = 367,7 \text{ Н}\cdot\text{ммс}.$

Таким образом, для решения задачи пуска вентилятора, с наложенными ограничениями, необходимо решить уравнение (2.19), которое для рассматриваемых условий будет

$$\varphi'' + 2\alpha\varphi' = \varepsilon.$$

Здесь

$$2\alpha = \frac{b}{J} = \frac{367,7}{5900} = 0,0623 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{M_{\text{дв}}}{J} = \frac{21000}{5900} = 3,56 \text{ с}^{-2}.$$

В соответствии с формулами (2.21) угловая скорость и ускорение будут

$$\varphi' = \frac{\varepsilon}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) = 57,1 (1 - e^{-0,062t}), \quad \varphi'' = \varepsilon e^{-2\alpha t} = 3,56 e^{-0,062t}.$$

Процесс разгона вентиляторной установки приведен на рис 2.5. Характеристика 1 показывает, что подсинхронная скорость достигается за 35 с.



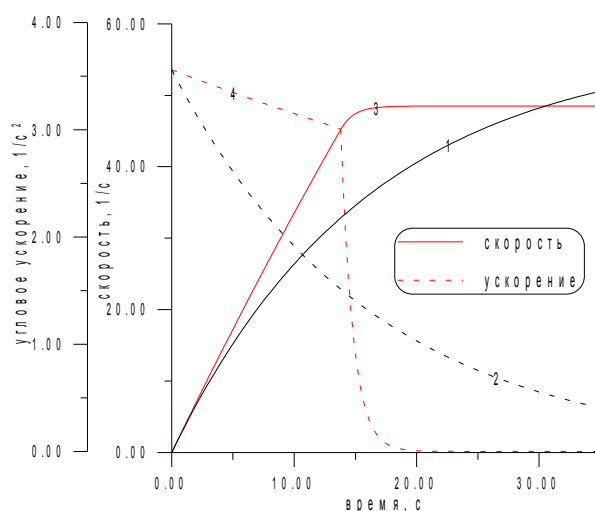


Рис. 2.5. Процесс разгона вентиляторной установки

Ускорение машины в начальный период, равное  $3,56 \text{ с}^{-2}$  (кривая 2), уменьшается по экспоненте. Характеристики 3 и 4 относятся к процессу пуска с учетом изменения момента синхронного двигателя и рассмотрены в примере 2.4.

### 2.3. ПУСК И ТОРМОЖЕНИЕ МАШИНЫ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ДВИЖУЩЕМ\_ ИЛИ ТОРМОЗНОМ УСИЛИЯХ

Принятие положения о том, что движущее усилие во время переходного процесса постоянно оправдано только для тех машин, у которых привод обеспечивает получение постоянного движущего усилия во время разгона. Как было отмечено, к таким приводам можно отнести электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением, которые получают питание от регулируемого источника напряжения и имеют соответствующую систему регулирования, а также объемный гидропривод с насосом регулируемой производительности.

Электропривод машин имеет механические характеристики, у которых момент изменяется в зависимости от частоты вращения.

Процессы торможения определяются типом машины и конструкцией тормозного устройства. Например, при предохранительном торможении шахтной подъемной установки от характеристики нарастания тормозного усилия зависит формирование колебательного процесса и величина динамических нагрузок. С другой стороны, вентиляторные установки, имеющие маломощные тормоза, которые предназначены для стопорения машины, как правило, не формируют тяжелых динамических процессов. Время торможения таких машин много больше времени срабатывания тормоза, поэтому при исследовании процесса торможения подобных машин можно допустить, что тормозное усилие прикладывается к машине мгновенно и остается в процессе торможения постоянным.

#### 2.3.1. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ - ПОСТОЯННАЯ ВЕЛИЧИНА

Синхронные и асинхронные электродвигатели во время разгона изменяют движущее усилие в широких пределах. Момент, развиваемый электродвигателем, определяется формулой Клосса (1.14).

Тогда уравнение, характеризующее процесс разгона будет

$$mx'' = (F_{0e})_x - F_0.$$

Здесь  $(F_{\text{дв}})_x = \frac{2F_{\text{кр}}}{\frac{(s_{\text{кр}})_i}{s_x} + \frac{s_x}{(s_{\text{кр}})_i}}$  - текущее усилие, развиваемое электродвигателем на  $i$ -ой

характеристике, имеющей критическое скольжение  $(s_{\text{кр}})_i$ ;

$F_0$  - усилие, характеризующее сопротивление движению машины, Н.

Подставив значение текущего скольжения  $s_x = \frac{v_c - x'}{v_c}$ , получим дифференциальное уравнение процесса разгона

$$mx'' = \frac{2F_{\text{кр}} \left(1 - \frac{x'}{v_c}\right) (s_{\text{кр}})_i}{(s_{\text{кр}})_i^2 + \left(1 - \frac{x'}{v_c}\right)^2} - F_0, \quad (2.23)$$

где  $v_c = \frac{\pi D n_c}{60i}$  - скорость рабочего органа при синхронной частоте вращения, м- с<sup>-1</sup>.

Уравнение (2.23) нелинейное и процесс пуска можно исследовать по этому уравнению с использованием численных методов интегрирования.

Если допустить, что механические характеристики линейны, то на второй предварительной ступени движущее усилие будет

$$(F_{\text{дв}})_{II} = \gamma_{II} F_n \left(1 - \frac{x'}{v_c}\right).$$

Для пусковых ступеней

$$(F_{\text{дв}})_i = \gamma_1 F_n \frac{v_c - x'}{v_c - (v_1)_i},$$

здесь  $(v_1)_i$  - скорость при усилнии  $\gamma_1$  на  $i$ -ой характеристике.

Подставив значения движущего усилия в уравнение (2.23), получим для второй предварительной ступени

$$mx'' = \gamma_{II} F_n - \frac{\gamma_{II} F_n}{v_c} x' - F_0,$$

для пусковых ступеней

$$mx'' = \frac{\gamma_1 v_c}{v_c - (v_1)_i} F_n - \frac{\gamma_1 F_n}{v_c - (v_1)_i} x' - F_0.$$

Эти уравнения представим в виде

$$x'' + 2\alpha_i x' = a_i, \quad (2.24)$$

где для пусковых ступеней

$$\alpha_i = \frac{\gamma_1 F_n}{2[v_c - (v_1)_i]m}; \quad a_i = \frac{\frac{\gamma_1 v_c F_n}{v_c - (v_1)_i} - F_0}{m}.$$

для второй предварительной ступени

$$\alpha_{II} = \frac{\gamma_{II} F_n}{2v_c m}; \quad a_{II} = \frac{\gamma_{II} F_n - F_0}{m}.$$

Полученное уравнение аналогично уравнению (2.19), которое характеризовало процесс пуска при постоянном движущем усилии и при увеличивающейся пропорционально скорости силе сопротивления. В уравнении (2.19) заменой  $y = x'$  понижался порядок и разделялись переменные, и решение выражалось квадратурами (2.21).

Приведем другой способ решения уравнения (2.24), которое является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Корни характеристического уравнения  $r^2 + 2\alpha_i r = 0$  будут  $r_1 = 0; r_2 = -2\alpha_i$ . Так как однократный корень  $r_1 = 0$  является числом показателя степени ( $e^{\kappa t} = 1$  при  $\kappa = 0$ ), частное решение неоднородного уравнения ищется в виде [31]  $x^* = At$ .

Следовательно:  $x'^* = A; x''^* = 0$  и  $A = \frac{a_i}{2\alpha_i}$ .

Общее решение дифференциального уравнения будет

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{a_i}{2\alpha_i} t = C_1 + C_2 e^{-2\alpha_i t} + \frac{a_i}{2\alpha_i} t, \\ x' &= \frac{a_i}{2\alpha_i} - 2\alpha_i C_2 e^{-2\alpha_i t}, \\ x'' &= 4\alpha_i^2 C_2 e^{-2\alpha_i t}. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий. При  $t = 0, x = x_i, x' = v_i$ , найдем

$$C_1 = x_i - \frac{1}{2\alpha_i} \left( \frac{a_i}{2\alpha_i} - v_i \right), \quad C_2 = \frac{1}{2\alpha_i} \left( \frac{a_i}{2\alpha_i} - v_i \right)$$

Подставив постоянные интегрирования, получим

$$\begin{aligned} x &= x_i + \frac{a_i}{2\alpha_i} t - \frac{1}{2\alpha_i} \left( \frac{a_i}{2\alpha_i} - v_i \right) (1 - e^{-2\alpha_i t}), \\ x' &= \frac{a_i}{2\alpha_i} (1 - e^{-2\alpha_i t}) + v_i e^{-2\alpha_i t}, \\ x'' &= (a_i - 2\alpha_i v_i) e^{-2\alpha_i t}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Если постоянные интегрирования определить из условий:  $t = 0, x = 0$  и  $x' = 0$ , то

$$C_1 = -\frac{a_i}{4\alpha_i^2}; \quad C_2 = \frac{a_i}{4\alpha_i^2}.$$

Перемещение, скорость и ускорение будут характеризоваться зависимостями (2.21-2,22).

### 2.3.2. СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ УМЕНЬШАЮТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ

В качестве примера рассмотрим неуравновешенную подъемную установку. Статические сопротивления такой подъемной установки характеризуются падающей прямой линией 2, показанной на рис. 1.11, а. Сопротивление движению подъемной установки определяется [28]

$$F_x = F_0 - 2 g p x.$$

Подставив значения движущего усилия и усилия сопротивления в уравнение движения, получим

$$x'' + 2\alpha_i x' - \beta^2 x = a_i \quad (2.26)$$

где  $\beta^2 = 2g \frac{p}{m}$  - коэффициент, с<sup>-2</sup>;

$\alpha_i$  и  $a_i$  - коэффициенты, аналогичные коэффициентам уравнения (2.24).

Зависимость (2.26) является линейным, неоднородным дифференциальным уравнением. Характеристическое уравнение будет

$$r^2 + 2\alpha_i r - \beta^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$r_{1,2} = -\alpha_i \pm \sqrt{\alpha_i^2 + \beta^2}.$$

Так как характеристическое уравнение имеет два неравных действительных корня, то общее решение однородного уравнения будет [31].

$$\bar{x} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Правая часть неоднородного уравнения (2.26) равна постоянной величине  $a_i$ , поэтому частное решение этого уравнения будем искать в виде  $x^* = A$ . Подставив значение  $x^*$  в уравнение (2.26), получим

$$A = -\frac{a_i}{\beta^2}$$

Общее решение уравнения (2.26) будет

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} - \frac{a_i}{\beta^2}, \\ x' &= C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t}, \\ x'' &= C_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 r_2^2 e^{r_2 t}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий. Если в начальный момент времени перемещение машины  $x_i$ , а скорость  $v_i$ , то можно записать

$$x_i = C_1 + C_2 - \frac{a_i}{\beta^2}, \quad v_i = C_1 r_1 + C_2 r_2.$$

Из этих уравнений определяются постоянные интегрирования

$$C_1 = x_i + \frac{a_i}{\beta^2} - C_2 \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{r_1 \left( x_i + \frac{a_i}{\beta^2} - \frac{v_i}{r_1} \right)}{r_1 - r_2}.$$

В начале процесса, при работе двигателя на второй предварительной ступени при  $t = 0, x_i = 0, v_i = 0$ , тогда

$$C_1 = -\frac{a_i r_2}{\beta^2 (r_1 - r_2)}, \quad C_2 = \frac{a_i r_1}{\beta^2 (r_1 - r_2)}.$$

Вычислительный процесс для работы двигателя на каждой пусковой характеристике начинается отсчетом времени от нуля. Такой подход позволил несколько упростить полученные выражения.

Таким образом, при переключении на последующую характеристику необходимо вновь определить постоянные интегрирования.

### 2.3.3. СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ УВЕЛИЧИВАЮТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ МАШИНЫ

Увеличение силы сопротивления пропорционально перемещению характерно для подъемных установок уравновешенных тяжелыми канатами. Характер изменения сопротивления движению таких установок показан на рис. 1.11, а прямой 3 и определяется уравнением

$$F_x = F_0 + 2gqx,$$

где  $q = pp - p$  - разность линейных плотностей уравновешивающих и головных канатов, ННм<sup>-1</sup>.

Подставив значения движущего усилия и усилия сопротивления в уравнение движения, и сделав преобразование, получим

$$x'' + 2\alpha_i x' + \beta^2 x = a_i. \quad (2.28)$$

Это уравнение аналогично уравнению (2.26) и отличается только знаком перед коэффициентом  $\beta^2$ . Корни характеристического уравнения будут

$$r_{1,2} = -\alpha_i \pm \sqrt{\alpha_i^2 - \beta^2}.$$

Для подъемных установок значение коэффициента  $\beta_i$  всегда меньше  $\alpha_i$ , поэтому имеется два неравных действительных корня характеристического уравнения. Общее решение однородного уравнения будет

$$\bar{x} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения определяется аналогично уравнению (2.26) и равно

$$x^* = \frac{a_i}{\beta^2}.$$

Тогда общее решение уравнения (2.28) будет

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{a_i}{\beta^2}, \\ x' &= C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t}, \\ x'' &= C_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 r_2^2 e^{r_2 t}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Постоянные интегрирования определяются аналогично постоянным уравнения (2.27), у которых перед коэффициентом  $\frac{a_i}{\beta^2}$  будет противоположный знак.

Если в уравнении (2.28) значение коэффициента  $\beta > \alpha_i$ , тогда корни характеристического уравнения будут комплексными. Обозначив  $\omega_i = \sqrt{\alpha_i^2 - \beta^2}$ , общее решение уравнения (2.28) будет

$$\begin{aligned} x_i &= e^{-\alpha_i t} (C_1 \sin \omega_i t + C_2 \cos \omega_i t) + \frac{a_i}{\beta^2}, \\ x'_i &= e^{-\alpha_i t} (C_3 \sin \omega_i t + C_4 \cos \omega_i t), \\ x''_i &= e^{-\alpha_i t} (C_5 \sin \omega_i t + C_6 \cos \omega_i t), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} C_3 &= -(C_2 \omega_i + C_1 \alpha_i), & C_4 &= C_1 \omega_i - C_2 \alpha_i, \\ C_5 &= -(C_4 \omega_i + C_3 \alpha_i), & C_6 &= C_3 \omega_i - C_4 \alpha_i. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий. Предположим, при  $t = 0$ ;  $x = x_i$ ;  $x' = v_i$ , тогда для каждой пусковой характеристики

$$C_2 = x_i - \frac{a_i}{\beta^2}, \quad C_1 = \frac{v_i + \alpha_i C_2}{\omega_i}.$$

Характеристики процесса пуска асинхронного электродвигателя с фазным ротором шахтной подъемной установки показаны на рис. 2.6. Характерной особенностью этого процесса является ступенчатое изменение момента и, как следствие, ускорения машины.

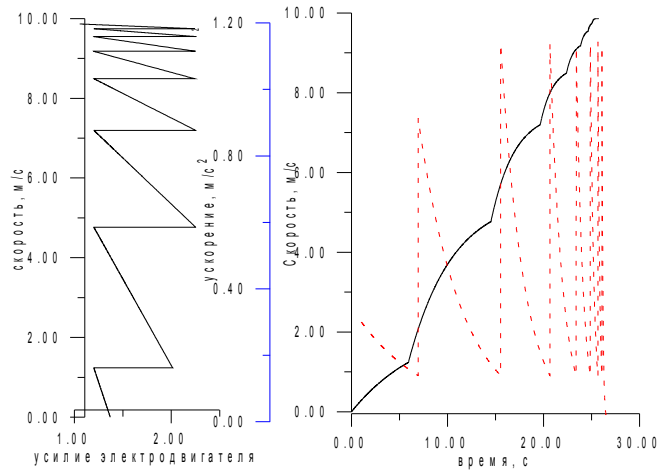


Рис. 2.6. Процесс пуска асинхронного электродвигателя

При увеличении скорости момент электродвигателя уменьшается и, когда достигнет нижнего момента переключения, следует сигнал на отключение ступени роторного сопротивления. Момент и ускорение ступенчато увеличиваются и машина, подчиняясь закономерностям

(2.30) продолжает разгоняться. Различные характеристики сопротивлений, применительно к шахтному подъему не оказывают существенного влияния на процесс разгона.

#### 2.3.4. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ УВЕЛИЧИВАЕТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Механические характеристики 4, 5, приведенные на рис. 1.11, б получили название вентиляторных и характерны для турбомашин, представителями которых являются вентиляторные, насосные и турбокомпрессорные установки. Если параболическую зависимость момента (усилия) сопротивления линеаризовать прямой 6, у которой частоте вращения  $n_i$  соответствует момент  $M_i$ , то текущее значение момента сопротивления запишется

$$M_x = \frac{M_i}{n_i} n_x.$$

Если машина имеет электродвигатель, линеаризованные механические характеристики которого представляют аналитические зависимости (1.12), то текущее значение момента будет

$$M_{\text{ос}} = M_n + \frac{M_{\text{кр}} - M_n}{n_{\text{кр}}} n_x.$$

Используя принцип Даламбера можно записать

$$\text{при } 0 < \varphi' < \varphi'_{\text{кр}}, \quad J\varphi'' = M_n + \frac{M_{\text{кр}} - M_n}{\varphi'_{\text{кр}}} \varphi' - \frac{M_1}{\varphi_1} \varphi',$$

$$\text{при } \varphi'_{\text{кр}} < \varphi' < \varphi'_c, \quad J\varphi'' = M_{\text{кр}} \frac{\varphi'_c}{\varphi'_c - \varphi'_{\text{кр}}} - M_{\text{кр}} \frac{\varphi'}{\varphi'_c - \varphi'_{\text{кр}}} - \frac{M_1}{\varphi_1} \varphi'$$

здесь  $\varphi'_{\text{кр}}$  - угловая скорость, соответствующая критическому моменту,  $\text{с}^{-1}$ ;

$\varphi'_c$  - синхронная скорость,  $\text{с}^{-1}$ .

$$\varphi' = \frac{\pi}{30} n = 0,104 n.$$

Полученные уравнения можно представить в виде

$$\varphi'' + 2\alpha\varphi' = \varepsilon$$

где

при  $0 < \varphi' < \varphi'_{кр}$  :

$$2\alpha = \frac{-\frac{M_{кр} - M_n}{\varphi'_{кр}} + \frac{M_1}{\varphi'_1}}{J}; \quad \varepsilon = \frac{M_n}{J};$$

при  $\varphi'_{кр} < \varphi' < \varphi'_0$  :

$$2\alpha = \frac{\frac{M_{кр}}{\varphi'_c - \varphi'_{кр}} + \frac{M_1}{\varphi'_1}}{J}; \quad \varepsilon = \frac{M_{кр}\varphi'_c}{J(\varphi'_c - \varphi'_{кр})}.$$

Это уравнение аналогично (2.24) и его решения, в соответствие с формулами (2.25) будут

$$\varphi' = \frac{\varepsilon}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}), \quad \varphi'' = \varepsilon e^{-2\alpha t}.$$

Пример 2.4. Уточнить кинематические параметры процесса разгона вентиляторной установки ВОД - 30, рассмотренной в примере 2.3.

В примере 2.3 принималось допущение, что электродвигатель при пуске развивал постоянный момент.

Установка оборудована синхронным электродвигателем, техническая характеристика которого:

Мощность	$P_n = 1000$ кВт;
Частота вращения	$n_n = 500$ об $\text{м}^{-1}$ .
Перегрузочная способность	$\gamma_{кр} = 1,8$ .
Пусковой момент	$n = 1,1$ .
Входной момент	$\varepsilon = 1,2$ .
Момент инерции	$J = 2700$ кг $\text{м}^2$ .

Зная величины критического и входного моментов из уравнения (1.11) определяется критическое скольжение при значении коэффициента  $s = 0$

$$s_{кр} = \frac{s_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} (\gamma_{кр} + \sqrt{\gamma_{кр}^2 - \gamma_\varepsilon^2}) = \frac{0,05}{1,2} \cdot (1,8 + \sqrt{1,8^2 - 1,2^2}) = 0,13.$$

По этим данным можно построить приближенные линеаризованные характеристики и определить коэффициенты уравнения.

Критическому скольжению  $s_{кр} = 0,13$  соответствует:

$$n_{кр} = (1 - s_{кр})n_c = (1 - 0,13) \cdot 500 = 435 \text{ об/мин}^{-1}, \quad \varphi'_{кр} = 45,24 \text{ с}^{-1}, \quad \varphi'_c = 52 \text{ с}^{-1}.$$

Считая, что установка при нормальной частоте вращения имеет номинальный момент сопротивления, определим отношение

$$\frac{M_1}{\varphi'_1} = \frac{M_n}{\varphi'_c} = \frac{19120}{52} = 367,7 \text{ Н ммс.}$$

Тогда при  $0 < \varphi' < 45,24$ ,



$$2\alpha = \frac{-M_n \frac{\gamma_{кр} - \gamma_n}{\varphi'_{кр}} + \frac{M_1}{\varphi'_1}}{J} = \frac{-19120 \cdot \frac{1,8 - 1,1}{45,24} + 367,7}{5900} = 0,0122 \text{ с}^{-1},$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma_n M_n}{J} = \frac{1,1 \cdot 19120}{5900} = 3,56 \text{ с}^{-1}.$$

Процесс разгона характеризуется уравнением

$$\varphi' = \frac{\varepsilon}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad \varphi'' = \varepsilon e^{-2\alpha t}.$$

Расчеты показывают, что скорость  $\varphi'_{кр} = 45,24 \text{ с}^{-1}$ , ( $n_{кр} = 435 \text{ об}=\text{мин}^{-1}$ ) 2 будет достигнута за 13,8 с.

При скоростях  $\varphi'_{кр} < \varphi' < \varphi'_c$  3 процесс разгона подчиняется закономерностям.

При  $45,25 < \Pi < 52$ :

$$\varphi' = \frac{\varepsilon}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) + \varphi'_{кр} e^{-2\alpha t},$$

$$\varphi'' = (\varepsilon - 2\alpha \varphi'_{кр}) e^{-2\alpha t},$$

$$2\alpha = \frac{M_n \frac{\gamma_{кр}}{\varphi'_c - \varphi'_{кр}} - \frac{M_1}{\varphi'_1}}{J} = \frac{19120 \cdot \frac{1,8}{52 - 45,25} - 367,7}{5900} = 0,926 \text{ с}^{-1},$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma_{кр} M_n \varphi'_c}{J(\varphi'_c - \varphi'_{кр})} = \frac{1,8 \cdot 19120 \cdot 52}{5900(52 - 45,25)} = 44,9 \text{ с}^{-2}.$$

На рис. 2.5 показаны характеристики скорости 3 и ускорения 4. Видно, что установка разгоняется более интенсивно по сравнению с первым случаем (кривые 1, 2), когда момент электродвигателя был принят постоянным, и достигает подсинхронной скорости за 15 с. После подачи постоянного тока на обмотку возбуждения синхронного электродвигателя, последний в течение пяти секунд разгоняется до синхронной скорости.

## 2.4. ДИНАМИКА МАШИНЫ С КРИВОШИПНО-ШАТУННЫМ МЕХАНИЗМОМ

Многие горные машины имеют кривошипно-шатунный механизм, который предназначен для преобразования вращательного движения кривошипа в прямолинейное возвратно-поступательное движение поршня или наоборот. К таким машинам относятся поршневые насосы, компрессоры, а также поршневые пневматические двигатели и двигатели внутреннего сгорания.

### 2.4.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАШИНЫ

Принципиальная схема, поясняющая работу компрессора, показана на рис. 2.7.

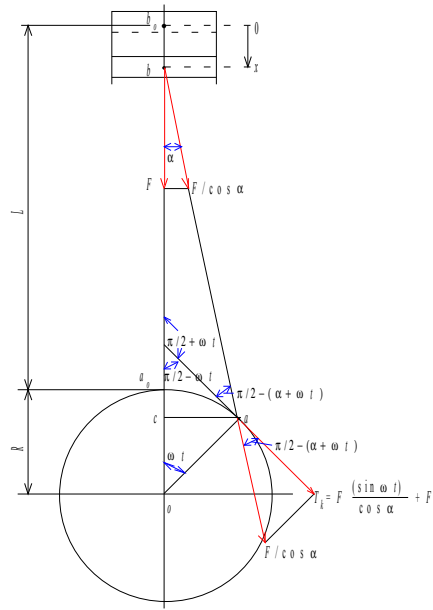


Рис. 2.7. Схема кривошипно-шатунного механизма

Перемещение поршня, его скорость и ускорение зависят от угла поворота кривошипа  $\omega t$  и величины  $\lambda$ , выражающей отношение длины радиуса  $R$  к длине шатуна  $L$  ( $\lambda = \frac{R}{L}$ ). С увеличением длины шатуна  $L$  уменьшается давление на боковую поверхность поршня, однако при этом увеличиваются габаритные размеры машины. Поршневые компрессоры имеют  $\lambda = 0,166 - 0,28$ , т. е. длина шатуна больше радиуса кривошипа в 3,5 - 6 раз.

При  $\omega t = 0$  поршень находится в верхнем положении, а точки, соединяющие кривошип с шатуном и шатун с поршнем, занимают положения в точках  $a_0$  и  $b_0$ . Из схемы видно, что перемещение поршня от верхнего положения равно

$$x = b_0 b = L + R - (L \cos \alpha + R \cos \omega t). \quad (2.31)$$

Общий катет  $ac$  треугольников  $oac$  и  $bac$  равен

$$ac = R \sin \omega t = L \sin \alpha \quad \text{или} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \omega t} = \frac{R}{L} = \lambda.$$

Тогда  $\sin \alpha = \lambda \sin \omega t$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$ .

Если уравнение (2.31) разделить на  $L$ , то, с учетом последнего соотношения, получим перемещение поршня в относительных величинах

$$\frac{x}{L} = \bar{x} = 1 + \lambda - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} - \lambda \cos \omega t, \quad (2.32)$$

Дважды продифференцировав уравнение (2.32), получим скорость и ускорение поршня. Для этого последнее уравнение запишем

$$\bar{x} = 1 + \lambda - y - \lambda \cos \omega t.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= -y' + \lambda\omega \sin \omega t, \\ \bar{x}'' &= -y'' + \lambda\omega^2 \cos \omega t.\end{aligned}$$

Здесь  $y = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$ .

Рассматривая  $y$  как сложную функцию, можно записать

$$y = u^{\frac{1}{2}}; \quad u = 1 - \lambda^2 v; \quad v = \beta^2; \quad \beta = \sin \gamma; \quad \gamma = \omega t.$$

Известно [31], что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{d\beta} \frac{d\beta}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt}.$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{du}{dv} = -\lambda^2; \quad \frac{dv}{d\beta} = 2\beta; \quad \frac{d\beta}{d\gamma} = \cos \gamma; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega.$$

Подставляя полученные производные, получим

$$y' = -\frac{\lambda^2 \omega}{2} \frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}} = -\frac{\lambda^2 \omega \sin 2\omega t}{2y}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}y'' &= -\frac{\lambda^2 \omega}{2} \left( \frac{y 2\omega \cos 2\omega t - y' \sin 2\omega t}{y^2} \right) = \\ &= -\lambda^2 \omega^2 \left( \frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{\lambda^2}{4} \frac{\sin^2 2\omega t}{\sqrt{(1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^3}} \right)\end{aligned} \quad (2.34)$$

Тогда

$$\bar{x}' = \lambda\omega \left( \sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}} \right) \quad (2.35)$$

$$\bar{x}'' = \lambda^2 \omega^2 \left( \frac{\cos \omega t}{\lambda} + \frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{\lambda^2 \sin^2 2\omega t}{4\sqrt{(1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^3}} \right) \quad (2.36)$$

На рис. 2.8 показаны характеристики перемещения  $\bar{x}$ , скорости  $\bar{x}'$  и ускорения  $\bar{x}''$  поршня компрессора в зависимости от угла поворота, выраженного в долях от числа  $\pi$ . Характеристики построены для конструкции, имеющей отношение радиуса кривошипа к длине шатуна равное  $d = 0,28$ . Обратим внимание на наличие участка равнозамедленного движения (примерно 0,4д), величина которого увеличивается с увеличением коэффициента  $\lambda$ . С уменьшением коэффициента  $\lambda$  характер замедления приближается к гармоническому.

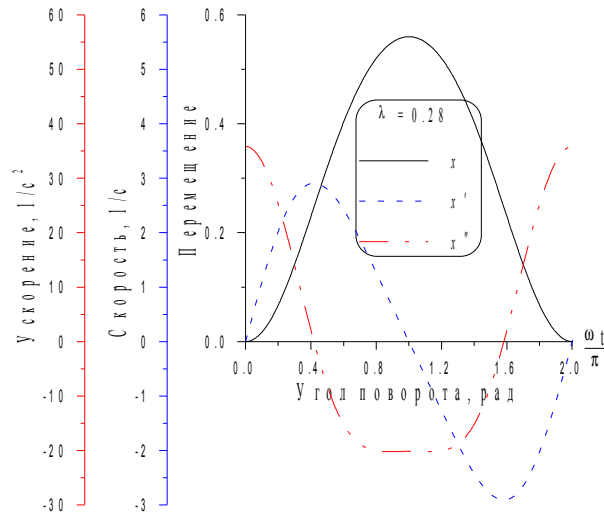


Рис. 2.8. Кинематические характеристики кривошипно - шатунного механизма

С целью упрощения зависимостей (2.32), (2.33) и (2.34) величину  $y = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$  раскладывают в ряд Тейлора и, ограничиваясь двумя членами ряда, получают зависимость кинематических параметров в функции угла поворота [55, 81, 85].

Представим  $\sin^2 \omega t = v$ , тогда

$$y = f(v) = (1 - \lambda^2 v)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{\lambda^2}{2} (1 - \lambda^2 v).$$

Известно, что ряд Тейлора равен [31]

$$f(v) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} v + \frac{f''(0)}{2!} v^2;$$

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = -\frac{\lambda^2}{2}.$$

Следовательно,  $f(v) \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2} v$  или  $y = f(t) \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \omega t$ .

Тогда вместо выражений (2.33), (2.34) получим

$$y' \approx -\frac{\lambda^2 \omega}{2} \sin 2\omega t, \quad (2.37)$$

$$y'' \approx -\lambda^2 \omega^2 \cos 2\omega t. \quad (2.38)$$

Перемещение, скорость и ускорение поршня будут

$$\bar{x} \approx \lambda \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \omega t - \cos \omega t \right), \quad (2.39)$$

$$\bar{x}' \approx \lambda \omega \left( \sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right), \quad (2.40)$$

$$\bar{x}'' \approx \lambda \omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t). \quad (2.41)$$

Кинематические характеристики, построенные по этим уравнениям, приведены на рис. 2.8 для  $p = 0,28$ . Оказалось, что значения кинематических параметров, вычисленных по точным формулам (2.32), (2.35), (2.36) и по приближенным (2.39), (2.40), (2.41) практически дают один и тот же результат.

Отметим, при исследованиях динамических режимов с использованием ПК решение об использовании точных или приближенных зависимостей не имеет принципиального значения.

#### 2.4.2. ДЕЙСТВУЮЩИЕ СИЛЫ

Действующие силы в машине с кривошипно-шатунным механизмом рассмотрим на примере компрессора, схема которого изображена на рис. 2.7.

Давление воздуха в цилиндрах передает поршню силу  $F_x$ . К пальцу, соединяющему шатун с поршнем, кроме создаваемой давлением силы, приложена сила инерции  $F_m$  масс, имеющих возвратно-поступательное движение. Суммарная сила в точке  $b$ , будет  $F = F_x + F_m$ . Составляющая этой силы, направленная вдоль шатуна, приложена в точке  $a$  кривошипа. В этой же точке действует сила инерции вращающейся массы кривошипа  $F_k$ . Сумма всех сил  $T$ , приложенных к точке  $a$  и, направленных перпендикулярно радиусу кривошипа  $R$ , создает момент сопротивления  $M_c = TR$ , который должен компенсироваться моментом, развиваемым электродвигателем.

Сила  $F_x$  зависит от текущего значения давления в цилиндре  $P_x$ , площади поршня  $f$ , и угла поворота  $ut$  кривошипа. При  $\omega t / \pi = 0 - 1; 2 - 3 \dots$  сила положительна (направлена в одном направлении с усилием двигателя), а при  $\omega t / \pi = 1 - 2; 3 - 4 \dots$  - отрицательна.

$$F_x = fP_x.$$

Давление в цилиндре  $P_x$  характеризуется индикаторной диаграммой компрессора. Изменение давления  $P_x$  в зависимости от положения поршня определяется величиной вредного пространства и характера процессов расширения и сжатия. Известны два теоретических процесса сжатия и расширения - изотермический и адиабатный. Показатели изотермы  $n = 1$ , адиабаты  $n = 1,41$ . Реальные процессы сжатия и расширения получили название политропных. Поршневые компрессоры с водяным охлаждением имеют  $n = 1,3 - 1,35$ .

Рассмотрим политропные процессы расширения и сжатия воздуха. Уравнение, характеризующее эти процессы

$$P_x(V_0 + V_x)^n = P_2V_0^n \quad \text{или} \quad P_x f^n (x_0 + x)^n = P_2 f^n x_0^n.$$

Тогда для процесса расширения

$$P_x = P_2 \frac{x_0^n}{(x_0 + x)^n} = \frac{P_2}{\left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^n}. \quad (2.42)$$

Для процесса сжатия

$$P_x = P_1 \left( \frac{1 + \frac{s}{x_0}}{1 + \frac{x}{x_0}} \right)^n, \quad (2.43)$$

где  $P_1$  - давление во всасывающей линии, Па;  
 $P_2$  - давление в нагнетательной линии, Па;  
 $x_0$  - ход поршня, соответствующий вредному пространству, м;  
 $s$  - полный ход поршня, м.

На рис. 2.9 показана индикаторная диаграмма при изотермическом и адиабатном процессах поршневого компрессора, имеющего  $x_0 = 0,0086$  м,  $s = 0,6$  м.

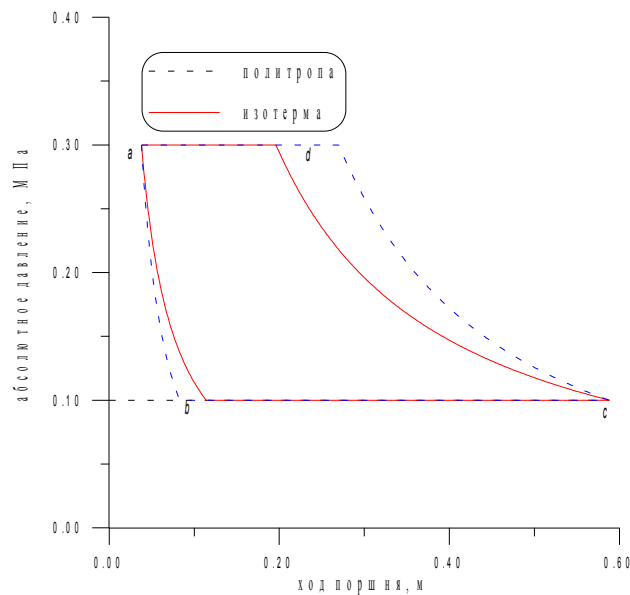


Рис. 2.9. Индикаторные диаграммы поршневого компрессора

Величины хода поршня, соответствующие характерным точкам  $abcd$ , определяются

$$x_a = 0; \quad x_b = \left( \sqrt[n]{\frac{P_2}{P_1}} - 1 \right) x_0; \quad x_c = s = 2R; \quad x_d = \left( \frac{1 + \frac{s}{x_0}}{\sqrt[n]{\frac{P_2}{P_1}} - 1} \right) x_0.$$

Характер изменения давления в зависимости от угла поворота кривошипа определится, если в уравнениях (2.42), (2.43) подставить  $x = \bar{x}L$ . Относительное перемещение определяется по уравнению (2.32) или (2.39).

Для вычисления давления  $P_x$  в зависимости от угла поворота кривошипа по уравнениям (2.42), (2.43) необходимо ввести ограничения

$$\frac{\omega t}{\pi} = 0-1; 2-3... \quad P_x = \frac{P_2}{\left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^n}, \quad \text{при } P_x < P_1, \quad P_x = P_1$$

$$\frac{\omega t}{\pi} = 1-2; 3-4... \quad P_x = P_1 \left( \frac{1 + \frac{s}{x_0}}{1 + \frac{x}{x_0}} \right)^n, \quad \text{при } P_x > P_2, \quad P_x = P_2.$$

Характеристики  $P_x = f\left(\frac{\omega t}{\pi}\right)$  для изотермического и адиабатного процессов показаны на рис. 2.10.

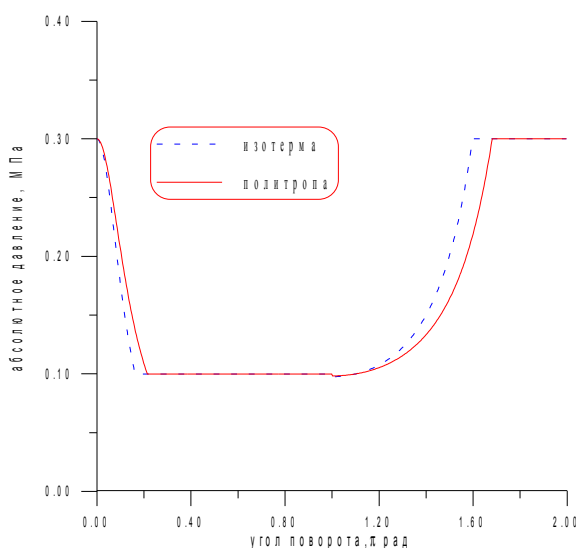


Рис. 2.10. Зависимость давления в цилиндре от угла поворота кривошипа

Ось абсцисс представлена в долях числа  $O$ . Видно, что закономерности изменения давления в цилиндре при изотермическом и адиабатном процессах близки. В то же время, при изотермическом процессе площадь индикаторной диаграммы меньше, чем при адиабатном процессе. Поэтому эти процессы определяют энергетические показатели работы компрессора (КПД, производительность), и надо ожидать, не приведут к существенным различиям в динамических процессах.

Уравнения кривой  $P_x = f(\cdot)$ , характеризующей давление в цилиндре в зависимости от угла поворота кривошипа  $\omega t = \pi$  и, как следствие, сила, создаваемая давлением воздуха  $F_x$  будут

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < \varphi < \varphi_b; & P_x = \frac{P_2}{\left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^n}; \\ \varphi_b < \varphi < \pi; & P_x = P_1; \\ \varphi < \pi; & F_x = -f(P_x - P_{\min}); \\ \pi < \varphi < \varphi_d; & P_x = P_1 \frac{\left(1 + \frac{s}{x_0}\right)^n}{1 + \frac{x}{x_0}}; \\ \varphi_d < \varphi < 2\pi; & P_x = P_2; \\ \pi < \varphi < 2\pi; & F_x = f(P_x - P_{\min}); \\ \varphi = \omega t; & x = L \left(1 + \lambda - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}\right). \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Здесь  $(P_x - P_{\min})$  - избыточное давление в цилиндре компрессора, МПа;

$P_{\min}$  - абсолютное давление во всасывающей линии, МПа.

Сила  $F_x$  зависит от избыточного давления  $(P_x - P_{\min})$  и при  $i < 2$  действует в одном направлении с усилием двигателя, а при  $i > 2$ , эти силы направлены встречно.

График изменения силы  $F_x$ , действующей на поршень, вычисленной по уравнениям (2.44), показан на рис. 2.11.

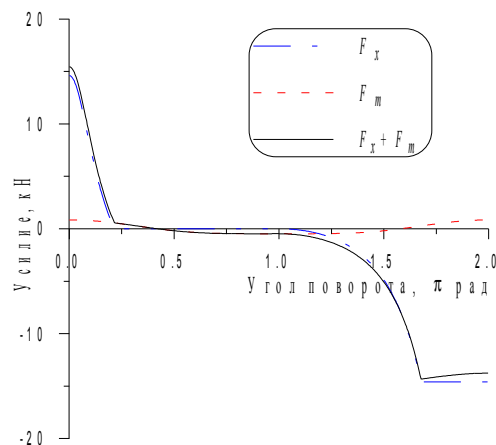


Рис. 2.11. Силы, действующие на поршень компрессора.

Силы инерции масс, имеющих возвратно-поступательное движение, определяются массой поршня и приведенными к поршню массами ползуна, штока, крейцкопфа и части шатуна, умноженных на линейное ускорение  $x\ddot{x}$ . В работе [85] рекомендуется (0,2 - 0,3) массы шатуна приводить к поршню, а (0,7 - 0,8) - к кривошипу. Линейное ускорение определяется по формулам (2.36), (2.41), если их умножить на длину шатуна  $L$ , т. е.

$$F_m = [m_n + (0,2 \div 0,3)m_{ш}] \bar{x}''L. \quad (2.45)$$

Закономерность изменения силы инерции  $F_m$  показана на рис. 2.11 пунктирной линией и равна примерно 0,05 от максимальной величины силы  $F_x$ . Суммарная сила  $F = F_x + F_m$ , приложенная к поршню, представлена сплошной линией. Составляющая этой силы  $F/$



$\cos \alpha$  направлена вдоль шатуна. В точке  $a$  действует сила инерции кривошипа и части шатуна, которая постоянная по величине и направлена по радиусу кривошипа

$$F_k = m_k \omega^2 R.$$

Здесь  $m_k$  - суммарная масса кривошипа и части шатуна, кг.

Из рис. 2.7 видно, что момент сопротивления создается силой  $T_k$ , которая определяется вышеназванными силами. Величина этих сил зависит от положения точки  $a$ . Рассматривая треугольники, приведенные на рис. 2.7, можно записать

$$T_k = F \frac{\sin \omega t}{\cos \alpha} + F_k.$$

Воспользовавшись соотношением  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} = y$ , получим

$$T_k = \frac{F}{y} \sin \omega t + F_k. \quad (2.46)$$

На рис. 2.12 приведены графики результирующей силы  $T_k$ , действующей в точке  $a$  кривошипа, и ее составляющих  $\frac{F}{y} \sin \omega t$  и  $F_k$ .

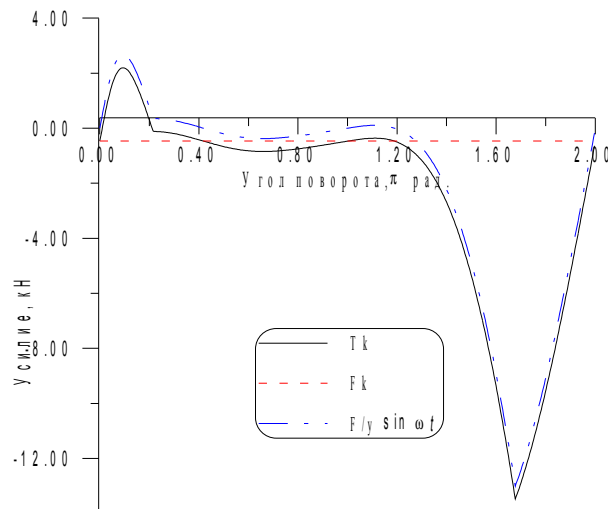


Рис. 2.12. Силы, действующие в точке  $a$  кривошипа.

Видно, что в машине с кривошипно-шатунным механизмом действует результирующая сила сопротивления  $T_k$ , которая периодически изменяется. Знакопеременный характер изменения момента сопротивления вызывает колебания фундамента и тока в электрической сети.

Для уравнивания знакопеременных сил, а следовательно, для уменьшения колебаний, компрессорные машины изготавливаются многоцилиндровыми, двойного действия. Цилиндры могут быть расположены горизонтально, вертикально или под углом. Машины двойного действия имеют аналогичную характеристику сил сопротивления от второй полости цилиндра, сдвинутую на  $\pi$  радиан по отношению к характеристике, приведенной на рис. 2.12. Для двухступенчатых поршневых машин закономерности изменения сил сопротивления, при работе каждого цилиндра, можно принять

аналогичными, но сдвинутыми относительно друг друга на  $a/2$  радиан. Такие конструкции машин значительно уменьшают пульсацию момента сопротивления, что приводит к снижению колебаний фундаментов и улучшению режимов работы электроприводов.

Таким образом, давление в цилиндре  $P_x$  есть периодическая функция от угла поворота  $\varphi$ , которая является одной из главных составляющих момента сопротивления. Функцию  $P_x = f(\varphi)$  можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье [31]:

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\varphi + b_i \sin i\varphi),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi;$$

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos i\varphi d\varphi;$$

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin i\varphi d\varphi.$$

Если известна функция  $f(\varphi)$ , то можно определить коэффициенты  $a_0$ ,  $a_i$  и  $b_i$ . Для рассматриваемого примера коэффициент  $a_0$  будет

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\pi}^{\varphi_b} \frac{P_2 d\varphi}{\left( 1 + \frac{L(1 + \lambda - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi})}{x_0} \right)^n} + \int_{\varphi_b}^{\pi} P_1 d\varphi + \int_{\pi}^{\varphi_d} P_1 \left( \frac{1 + \frac{s}{x_0}}{1 + \frac{L(1 + \lambda - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi})}{x_0}} \right)^n d\varphi + \int_{\varphi_d}^{2\pi} P_2 d\varphi \right]$$

Таким образом система уравнений (2.44) заменяется рядом Фурье.

### 2.4.3. ВЛИЯНИЕ ВЕЛИЧИНЫ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАШИНЫ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Переменный по величине и знаку момент сопротивления вызывает переменную нагрузку электродвигателя.

Колебания момента сопротивления приводят к колебаниям тока и напряжения электрической сети. При значительных пульсациях тока, возникающие в электродвигателе переменные механические нагрузки, могут вызвать разрушение изоляции и крепление полюсов. Колебания тока и напряжения сети нарушают нормальную работу других машин и систем автоматики. Чрезмерные колебания момента приводят к режиму, когда синхронный электродвигатель выпадет из синхронизма.

При асинхронном электродвигателе колебания момента, кроме этого, вызывают колебания скорости машины. Эти колебания скорости во многих машинах неизбежны, однако они не должны превышать величины, соответствующей технологическим условиям работы машины и энергосистемы. Количественной характеристикой такого процесса есть соотношение

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{-p}} \quad (2.47)$$

Величину  $\delta$  принято называть степенью или коэффициентом неравномерности хода машины.

Здесь

$\omega_{\max}$  - максимальная скорость,  $\text{с}^{-1}$ ;

$\omega_{\min}$  - минимальная скорость,  $\text{с}^{-1}$ .

Среднюю скорость  $\omega_{cp}$  определяют как среднюю арифметическую величину от максимального и минимального значения скоростей

$$\omega_{cp} \approx \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$

Из этих соотношений имеем:

$$\omega_{\max} = \omega_{-p} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), \quad \omega_{\min} = \omega_{-p} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right)$$

Степень неравномерности для большинства машин  $\delta \leq 0,1$  [55].

При колебаниях тока разность между наибольшим и наименьшим током, отнесенная к номинальному току, не должна превышать 0,66 [85].

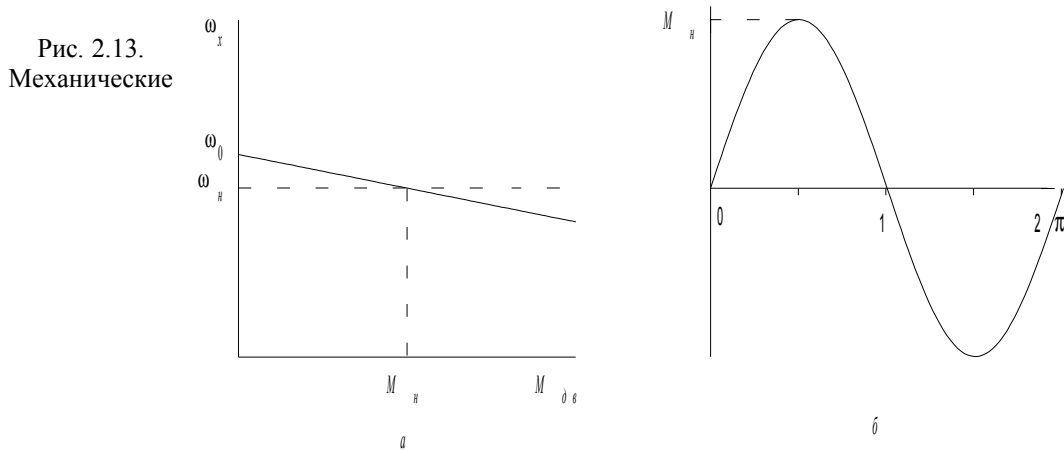
Если эти регламенты не соблюдаются, то необходимо установить дополнительный маховик, который будет аккумулятором энергии. В периоды, когда момент электродвигателя недостаточен, маховик, отдавая кинетическую энергию, компенсирует недостаток движущего момента и наоборот. При математическом моделировании динамического процесса машины с кривошипно-шатунным механизмом, используя уравнение, характеризующее суммарную силу сопротивления (2.46) и уравнение Клосса (1.9), можно определить степень неравномерности хода машины  $\delta$  и коэффициент, характеризующий колебания тока. Эти исследования позволяют решить вопрос о необходимости использования дополнительного маховика для привода машины.

Задачу о влиянии момента инерции машины на динамические процессы можно значительно упростить, если сделать допущения:

1. Механическая характеристика асинхронного электродвигателя в рабочей зоне представлена прямой линией.

2. Момент сопротивления изменяется по гармоническому закону.

Графически эти закономерности показаны на рис. 2.13.



характеристики: *а* - двигателя  $\omega = f(M_{дв})$ ; *б* - машины  $M_c = f(kt)$

Режим работы машины характеризуется уравнением динамики (2.11)

$$J\omega'_x = M_{дв} - M_c.$$

При принятых допущениях текущее значение скорости  $\omega_x$  определяется

$$\omega_x = \omega_0 - \frac{\omega_0 - \omega_n}{M_n} M_{дв}$$

Тогда момент, развиваемый электродвигателем

$$M_{дв} = \frac{\omega_0 - \omega_x}{\omega_0 - \omega_n} M_n,$$

здесь  $\omega_0$  и  $\omega_n$  - соответственно скорости при моментах холостого хода и номинальном,  $c^{-1}$ ;  
 $M_n$  - номинальный момент электродвигателя, Нм.

Гармоническая кривая момента сопротивления, приведенная на рис. 2.13, *б*, характеризуется уравнением

$$M_c = \alpha M_n \sin kt,$$

где  $k$  - частота колебаний момента сопротивления,  $c^{-1}$ ;  
 $\alpha$  - средняя относительная величина момента сопротивления.  
Дифференциальное уравнение процесса будет

$$J\omega'_x = \frac{\omega_0 - \omega_x}{\omega_0 - \omega_n} M_n - \alpha M_n \sin kt.$$

Введя обозначения  $\varepsilon = \frac{M_n}{J}$ ;  $T = \frac{\omega_0 - \omega_n}{\varepsilon}$ , получим

$$\omega'_x + \frac{1}{T} \omega_x = \frac{1}{T} \omega_0 - \alpha \varepsilon \sin kt. \quad (2.48)$$

Физический смысл коэффициента  $\varepsilon$  - это величина ускорения, с которым машина с моментом инерции  $J$  разгоняется под действием момента  $M_n$ . Величина  $T$  характеризует время, в течение которого скорость машины увеличится от номинальной  $\omega_n$  до скорости холостого хода  $\omega_0$ . Уравнение (2.48) можно представить

$$\omega'_x + P(t)\omega_x = Q(t), \quad (2.49)$$

здесь  $P(t) = \frac{1}{T}$ ;  $Q(t) = \frac{\omega_0}{T} - \alpha\varepsilon \sin kt$ .

Общее решение уравнения (2.49) выражается формулой [31]

$$\begin{aligned} \omega_x &= \left[ \int dt Q(t) e^{\int P(t) dt} + C \right] e^{-\int P(t) dt}; \\ \omega_x &= \left[ \int dt \left( \frac{\omega_0}{T} - \alpha\varepsilon \sin \omega t \right) e^{\int \frac{dt}{T}} + C \right] e^{-\int \frac{dt}{T}}. \end{aligned}$$

Полученные определенные интегралы приведены в [38].

После вычисления текущая скорость будет

$$\omega_x = \omega_0 - \frac{\alpha\varepsilon T^2}{1+k^2 T^2} \left( \frac{1}{T} \sin kt - k \cos kt \right) + C e^{-\frac{t}{T}}.$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется из начальных условий: при  $t = 0$ ,  $\omega_x = \omega_n$ , тогда

$$C = -(\omega_0 - \omega_n) - \frac{\alpha\varepsilon k T^2}{1+k^2 T^2}.$$

Подставляя значение постоянной интегрирования  $C$ , получим

$$\omega_x = \omega_0 - \frac{\alpha\varepsilon T^2}{1+k^2 T^2} \left( \frac{1}{T} \sin kt - k \cos kt \right) - \left[ (\omega_0 - \omega_n) + \frac{\alpha\varepsilon k T^2}{1+k^2 T^2} \right] e^{-\frac{t}{T}}. \quad (2.50)$$

Третий член уравнения (2.50) стремится к 0. Очевидно, функция будет иметь максимум при  $kT = (1; 2; 3 \dots)$ , а минимум при  $kT = (0,5; 1,5; 2,5 \dots)\pi$ , тогда

$$\omega_{\max} = \omega_0 + \frac{\alpha\varepsilon k T^2}{1+k^2 T^2}, \quad \omega_{\min} = \omega_0 - \frac{\alpha\varepsilon T}{1+k^2 T^2}. \quad (2.51)$$

Следовательно, колебания машины определяются величинами  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $k$ ,  $T$ .

На рис. 2.14 показаны характеристики  $(\omega_0 - \omega_x) = f(t)$  для машин, имеющих различные значения моментов инерции  $J$  (2,2 и 22 кгм<sup>2</sup>).

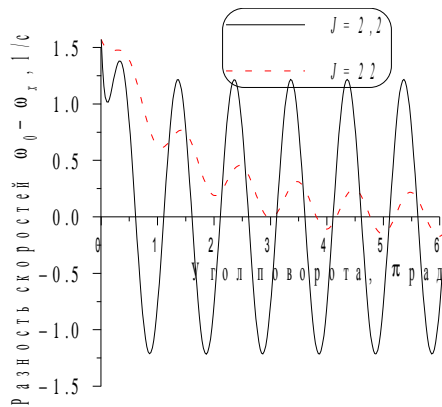


Рис. 2.14. Характеристики  $\omega_0 - \omega_x = f(\phi/k)$

Видно, что у машины без дополнительного маховика наблюдаются периодические колебания скорости. Если машине установить дополнительный маховик с моментом инерции  $J = 20 \text{ кгм}^2$ , то колебания скорости уменьшаться примерно в три раза. Коэффициенты неравномерности хода машины равны соответственно  $\delta = 0,02$  и  $0,006$ .

Таким образом, используя полученную методику можно при заданной неравномерности хода машины решить обратную задачу, т. е. определить целесообразность установки дополнительного маховика и величину его момента инерции.

Пример 2.5. Определить степень неравномерности хода одноступенчатого компрессора двойного действия.

Технические характеристики компрессора:

Диаметр поршня  $D_n = 0,305 \text{ м}$ ;

Ход поршня  $S = 2R = 0,125 \text{ м}$ ;

Давление  $P_2 = 3 \text{ ата}$ ;

Приведенный к коленчатому валу момент инерции компрессора  $J_k = 2 \text{ кгм}^2$ ;

Мощность электродвигателя  $N_{дв} = 50 \text{ кВт}$ ;

Номинальная частота вращения  $n_n = 735 \text{ обмин}^{-1}$ ;

Момент инерции электродвигателя  $J_{дв} = 0,2 \text{ кгм}^2$ .

Укрупненную оценку степени неравномерности хода машины произведем по уравнению (2.47)

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}$$

В соответствии с (2.51)

$$\omega_{max} = \omega_0 + \frac{\alpha \varepsilon k T^2}{1 + k^2 T^2}; \quad \omega_{min} = \omega_0 - \frac{\alpha \varepsilon T}{1 + k^2 T^2}.$$

Примем величину среднего относительного момента сопротивления  $\alpha = 1$

$$\varepsilon = \frac{M_n}{J} = \frac{508}{2,2} = 230,9 \text{ с}^{-2};$$

$$M_n = 9,81 \cdot 975 \frac{N_{дв}}{n_n} = 9,81 \cdot 975 \frac{50}{735} = 508 \text{ Нм};$$

$$J = J_k + J_{дв} = 2 + 0,2 = 2,2 \text{ кгм}^2.$$

Частота, соответствующая номинальной скорости вращения,  $n_n$  двигателя равна

$$\omega_n = \pi \frac{n_n}{30} = 3,14 \frac{735}{30} = 76,93 \text{ с}^{-1}.$$

Так как рассматриваемый компрессор двойного действия, то частота вынужденных колебаний будет

$$k = 2\omega_n = 2 \cdot 76,93 = 153,86 \text{ с}^{-1};$$

$$T = \frac{\omega_0 - \omega_n}{\varepsilon} = \frac{78,5 - 76,93}{230,9} = 0,0068 \text{ с};$$

$$\omega_0 = \pi \frac{n_0}{30} = 3,14 \frac{750}{30} = 78,5 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда

$$\omega_{\max} = 78,5 + \frac{1 \cdot 230,9 \cdot 153,86 \cdot 0,0068^2}{1 + (153,86 \cdot 0,0068)^2} = 79,28 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{\min} = 78,5 - \frac{1 \cdot 230,9 \cdot 0,0068}{1 + (153,86 \cdot 0,0068)^2} = 77,64 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{79,28 + 77,64}{2} = 78,46 \text{ с}^{-1};$$

$$\delta = \frac{79,28 - 77,64}{78,46} = 0,02.$$

Для точной оценки степени неравномерности по уравнению (2.46) определим момент сопротивления компрессора. График момента сопротивления в зависимости от угла поворота кривошипа показан на рис. 2.12.

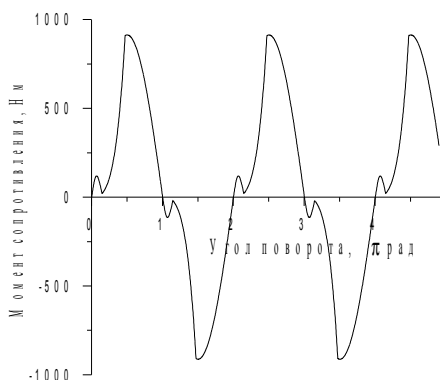


Рис. 2.15. Момент сопротивления компрессора

Так как рассматриваемый компрессор двойного действия, то при работе второй полости цилиндра будут создаваться аналогичные силы, сдвинутые на  $\pi$  радиан по отношению к силам, представленным на рис.2.12. Сумма этих сил создает момент сопротивления, который показан на рис.2.15. Видно, что момент сопротивления компрессора двойного действия имеет знакопеременный характер.

Так как момент сопротивления есть нелинейная функция, решение дифференциального уравнения выполним численно.

На рис. 2.16 показаны характеристики ускорения ротора электродвигателя, при этом, пунктирной линией показана характеристика при наличии дополнительного маховика с моментом инерции  $20 \text{ кгм}^2$ .

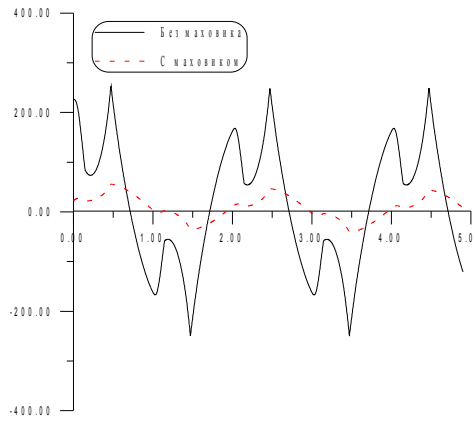


Рис. 2.16. График изменения ускорения ротора электродвигателя.

Характеристики изменения скорости приведены на рис. 2.17. Обработывая эти характеристики, получаем  $\omega_{max} = 80,7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_{in} = 76,2 \text{ с}^{-1}$ .

$$\omega_{cp} = \frac{80,7 + 76,3}{2} = 78,5 \text{ с}^{-1}.$$

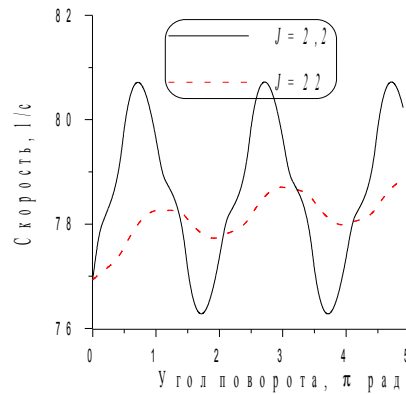


Рис. 2.17. График изменения скорости ротора электродвигателя

Степень неравномерности хода компрессора

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}} = \frac{80,7 - 76,2}{78,5} = 0,05.$$

Таким образом, полученная степень неравномерности хода компрессора меньше регламентированной.

Если установить дополнительный маховик с моментом инерции  $J_m = 20 \text{ кгм}^2$ , то колебания скорости ротора значительно уменьшатся. Кривая изменения скорости в этом случае показана на рис. 2.17 пунктирной линией. Коэффициент неравномерности уменьшится в 3,5 раза и будет равен  $\delta = 0,016$ .



### 3. ДИНАМИКА ОДНОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В разделе 2 были рассмотрены одно-массовые механические системы без вязкоупругих свойств. Такой подход к исследованию процессов пуска и торможения позволяет укрупненно оценить прочностные характеристики машины и достаточно точно - эксплуатационные (время процесса, производительность, КПД и т. д.).

Для оценки прочностных свойств машины необходимо знание динамических нагрузок, которые определяются возмущающими воздействиями и вязкоупругими свойствами механической системы.

Многие машины в зависимости от режима работы изменяют свою эквивалентную схему и, в конечном результате, распадаются на ряд одно-массовых механических систем.

Например, шахтная подъемная установка, рассмотренная в процессе пуска или торможения как трех массовая механическая система после остановки органа навивки (барабанов) превращается в две независимые одно-массовые системы. Первая - ветвь каната с груженным сосудом, вторая - ветвь каната с порожним сосудом. Верхние концы канатов неподвижно закреплены к барабанам. В этих двух механических системах после остановки машины совершаются независимые свободные колебания концевых масс. Характеристики колебательных процессов в системе определяются массами, жесткостью элементов и коэффициентами диссипации, а также начальными условиями в момент остановки машины. Знание этих характеристик чрезвычайно важно, так как во многих установках, максимальные динамические нагрузки возникают как раз после остановки машины, т. е. тогда, когда машина распалась на отдельные одно-массовые механические системы. Величина динамических нагрузок определяется начальными условиями процесса свободных колебаний. Начальные условия, в свою очередь, сформировались воздействиями на машину при разгоне или торможении, а также динамическими свойствами системы.

Следует заметить, что при экспериментальных исследованиях оказывается наиболее просто зарегистрировать динамические процессы при свободных колебаниях отдельных масс, т. е. после остановки машины. Полученные результаты можно распространить и на динамический процесс много массовой системы. Поясним сказанное на примере шахтной подъемной установки. Допустим, необходимо экспериментально исследовать динамический процесс предохранительного торможения установки. Сосуды расположены в середине ствола. Кроме трудностей связанных с установкой датчиков скорости, замедления и усилий на подъемном сосуде, экспериментатор дополнительно сталкивается с такими проблемами, как создание индивидуального источника питания для регистрирующей аппаратуры и трансляция сигналов датчиков в место установки аппаратуры (осциллографов) в здание подъемной установки. Эти проблемы выходят за рамки настоящей работы, поэтому ограничимся только их упоминанием.

И, наконец, в некоторых машинах при разгоне или торможении, а иногда перед этими режимами, отдельные массы изменяют свою величину. Например, в процессе пуска конвейерной установки на ленту грузится полезное ископаемое. Следовательно, масса в процессе пуска изменяется. Другим примером может быть загрузка подъемного сосуда полезным ископаемым. В этот момент барабаны неподвижны и ветвь каната с грузом на конце представляется одномассовой системой, в которой массы изменяются в функции времени.

#### 3.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПОСЛЕ ОСТАНОВКИ МАШИНЫ

На примере шахтной подъемной установки рассмотрим динамические процессы одномассовой механической системы с вязкоупругими элементами. На рис. 3.1 приведена принципиальная схема системы после остановки машины. Масса  $m$  соединена с барабаном при помощи вязкоупругого каната.

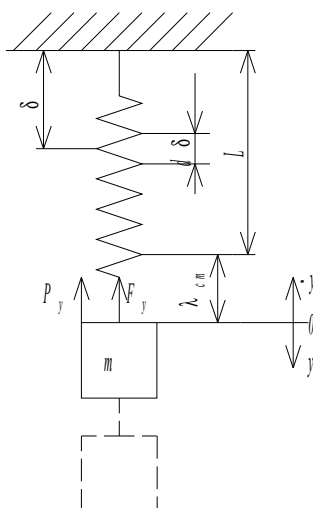


Рис. 3.1. Принципиальная схема системы после остановки машины

После остановки машины верхний конец каната остается неподвижным. Масса  $m$  совершает свободные колебания.

Пусть длина не растянутого каната, лежащего на горизонтальной площадке, равна  $L$ . Продольная жесткость каната определяется по формуле

$$c_y = \frac{EF}{L}.$$

Под действием собственного веса и веса массы  $m$  канат имеет статическое удлинение

$$\lambda_{ст} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Здесь  $\lambda_1$  - статическая деформация каната под действием силы от веса массы  $m$ , м;

$\lambda_2$  - статическая деформация каната под действием силы от его веса, м.

Известно,

$$\lambda_1 = g \frac{m}{c_y}.$$

Для определения статической деформации упругого элемента под действием собственного веса рассмотрим элементарный участок  $d\delta$ , расположенный на расстоянии  $\delta$  от места закрепления.

Если линейная плотность каната  $p$ , то удлинение элементарного участка  $d\delta$  можно записать

$$d\lambda = gp \frac{d\delta}{c_\delta},$$

где  $c_\delta = \frac{EF}{\delta}$  - жесткость каната, длиной  $\delta$ , Н·м<sup>-1</sup>.

Деформация каната, имеющего длину  $L$ , под действием собственного веса будет

$$\lambda_2 = \int_0^L \frac{g p \delta d\delta}{EF} = g \frac{pL}{2EF/L} = g \frac{m_{ky}}{2c_y}, \quad (3.1)$$

полная статическая деформация

$$\lambda_{cm} = \frac{g}{c_y} \left( m + \frac{m_{ky}}{2} \right), \quad (3.2)$$

здесь  $m_{ky}$ - масса вязкоупругого элемента длиной  $L$ , кг.

Таким образом, статическая деформация вертикально подвешенного упругого элемента определяется силами от половины собственного веса элемента и полного веса груза

Если массу  $m$  вывести из состояния равновесия, допустим, переместить на расстояние  $y$  и отпустить, то последняя будет совершать колебания относительно точки 0. Так как точка 0 (начало координат колебательного процесса) выбрана с учетом статической деформации  $\lambda_{cm}$ , действия сил от веса массы и каната не учитываются. Следовательно, на массу  $m$  действуют силы упругости  $F_y$  и силы сопротивления  $P_y$ .

В разделе 1.2 отмечалось, что масса вязкоупругого элемента может быть большой и иметь заметное влияние на динамический процесс. Соблюдая принцип Рэлея, в соответствии с зависимостью (1.6) эквивалентная масса каната, приведенная к массе груза равна  $m_y = \frac{1}{3} m_{ky}$  [79]. Поэтому величина массы, участвующей в динамическом процессе будет

$$m_y = m + \frac{1}{3} m_{ky}.$$

Используя принцип Даламбера [65], уравнение движения эквивалентной массы  $m_y$  запишем

$$m_y y'' = -F_y - P_y \operatorname{sign} y'.$$

Сила упругости

$$F_y = \mu_y y' + c_y y.$$

Сила сопротивления, обусловленная трением при движении сосуда в направляющих и аэродинамическим сопротивлением воздуха, направлена против движения и в уравнении характеризуется функцией Кронеккера, которая показывает, что при изменении знака скорости изменяется направление силы  $P_y$ .\*

При этих условиях дифференциальное уравнение динамического процесса массы  $m_y$  будет

$$y'' + 2\mu_1 y' + \omega_1^2 y = a_1 \operatorname{sign} y', \quad (3.3)$$

\*• Л. Кронеккер рассмотрел функцию  $\operatorname{sign} y$ , которая: [83]

$\operatorname{sign} y = 1$ , если  $y > 0$ ;

$\operatorname{sign} y = -1$ , если  $y < 0$ ;

$\operatorname{sign} 0 = 0$ .

где  $\mu_1 = \frac{1}{2} \frac{c_y}{m_y}$  - коэффициент, характеризующий диссипативные свойства одномассовой системы,  $c^{-1}$ ;

$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_y}{m_y}}$  - частота свободных колебаний одномассовой системы без учета сил вязкого демпфирования,  $c^{-1}$ ;

$a_1 = \frac{P_y}{m_y}$  - замедление массы  $m_y$ , вызванное силой сопротивления  $P_y$ ,  $m \cdot c^{-2}$ .

### 3.1.1. СИЛЫ СУХОГО (КУЛОНОВА) ТРЕНИЯ

Предположим, масса  $m_y$  присоединена к чисто упругому элементу ( $\mu_1 = 0$ ) тогда уравнение (3.3) будет

$$y'' + \omega_1^2 y = a_1 \operatorname{sign} y' . \quad (3.4)$$

В этом уравнении свободный член  $a_1 \operatorname{sign} y'$  обусловлен нелинейной силой  $P_y$ , которая имеет вид, показанный на рис. 3.2. На этом же рисунке показана скорость массы  $m_y$ . Видно, что в момент перехода скорости через нуль, сила кулонова трения изменяет свою величину от  $+P_y$  до  $-P_y$ . Следовательно, в эти моменты ускорение массы  $m_y$  уменьшается на величину  $2a_1$ , а за период колебания, ускорение уменьшится на величину  $4a_1$ . Таким образом, дифференциальное уравнение (3.4) является нелинейным и решение его, при помощи элементарных функций, невозможно. Приближенное решение задачи можно осуществить различными способами. Например, ступенчатую функцию силы аппроксимировать с помощью ряда Фурье или применить численное интегрирование.

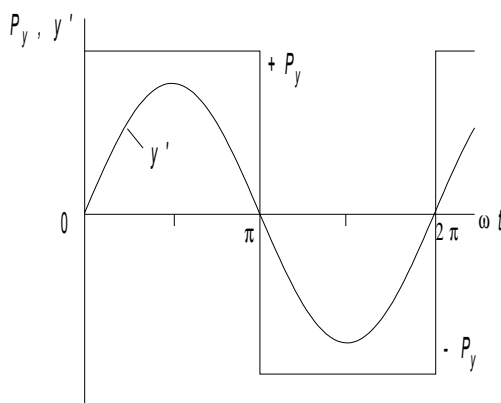


Рис. 3.2. Воздействие сил сухого (кулонова) трения

Приближенное решение задачи можно получить при допущении, что в случае малого сопротивления движение системы в интервале  $0 < \omega t < \pi$  незначительно отклоняется от гармонического. Общее решение уравнения (3.4) будет суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [24]

$$y = \bar{y} + y^* .$$

Так как корни характеристического уравнения комплексные

$$\bar{y} = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t .$$

Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде  $y^* = A$ . Подставив значения  $y^*$  и  $y^{*\prime}$  в уравнение (3.4), определим

$$A = \frac{a_1 \operatorname{sign} y'}{\omega_1^2} .$$

Тогда общее решение уравнения (3.4) будет

$$y = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t + \frac{a_1}{\omega_1^2} \operatorname{sign} y' . \quad (3.5)$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий. Если при  $t = 0$ ;  $y = y_0$ ;  $y' = y'_0$ , то

$$C_1 = \frac{y'_0}{\omega_1}; \quad C_2 = y_0 - \frac{a_1}{\omega_1^2} \operatorname{sign} y' .$$

Представим постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в виде  $C_1 = A_1 \sin \theta_1$ ;  $C_2 = A_1 \cos \theta_1$ , тогда

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2} ,$$

или

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{y'_0}{\omega_1}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a_1}{\omega_1^2} \operatorname{sign} y'\right)^2}; \quad \theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y'_0}{\omega_1 \left(y_0 - \frac{a_1}{\omega_1^2} \operatorname{sign} y'\right)} .$$

Тогда уравнение (3.5) и его производная запишутся

$$y = A_1 \cos (\theta_1 - \omega_1 t) + \frac{a_1}{\omega_1^2} \operatorname{sign} y' , \quad (3.6)$$

$$y' = A_1 \omega_1 \sin (\theta_1 - \omega_1 t) .$$

Таким образом, амплитуда колебаний замедления при наличии кулонова трения (сухого трения) убывает за каждые полпериода на величину  $2a_1$ , т. е. уменьшается по закону арифметической прогрессии.

Пример 3.1. Исследовать колебательный процесс груженого сосуда после остановки многоканатной подъемной машины, имеющей характеристику

Масса концевого груза	$m = 31500$ кг;
Масса полезного ископаемого в сосуде	$m_n = 14000$ кг;
Длина канатов	$L = 900$ м;
Число канатов	$n = 4$ ;
Линейная плотность каната	$p = 6,73$ кг·м <sup>-1</sup> ;
Площадь сечения проволок в канате	$F = 683 \cdot 10^{-6}$ м <sup>2</sup> ;

Модуль упругости каната

$$E = 12 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Определить характеристики исследуемой системы.

Эквивалентная жесткость канатов

$$c_y = n \frac{EF}{L} = 4 \frac{12 \cdot 10^{10} \cdot 683 \cdot 10^6}{900} = 364260 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Масса канатов  $m_{\text{кн}} = n\rho L = 4 \cdot 6,75 \cdot 900 = 24300 \text{ кг}.$

Эквивалентная масса концевого груза

$$m_y = m + \frac{1}{3} m_{\text{кн}} = 31500 + \frac{1}{3} 24300 = 39600 \text{ кг}.$$

Частота свободных колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_y}{m_y}} = \sqrt{\frac{364260}{39600}} = 3,03 \text{ с}^{-1}.$$

Период свободных колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,07 \text{ с}.$

Примем величину силы трения при движении сосуда по направляющим равной  $P_y = 0,075 g m_n$  т. е.

$$P_y = 10300 \text{ Н}.$$

$$\text{Замедление } a_1 = -\frac{P_y}{m_y} = -\frac{10300}{39600} = -0,26 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Замедление концевой массы в процессе торможения машины носит колебательный характер. Амплитуда колебаний формируется характеристикой возмущающего воздействия и уменьшается в зависимости от величины сил вязкого демпфирования. Амплитудное значение замедления может достигать двукратной величины по отношению к квазидинамическому процессу. В момент остановки органов навивки, замедление концевой массы может быть любой величины, находящейся в этих пределах, и определяется максимальной скоростью подъема, периодом колебаний и рядом других факторов.

Предположим замедление сосуда в момент остановки машины (барабана) было равно

$$y_0'' = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

В соответствии с этим условием, из уравнения (3.4) деформация каната в этот момент будет

$$y_0 = \frac{-a_1 - y_0''}{\omega_1^2} = -\frac{0,26 + 5,0}{3,03^2} = -0,573 \text{ м}.$$

Расчет показывает, что натяжение каната, за счет динамической составляющей при торможении машины, меньше статического.

Полное натяжение каната в точке крепления его к барабану определяется

$$F = g(m + m_{\text{кн}}) + F_y = g(m + m_{\text{кн}}) + c_y y.$$

Дальнейшее решение задачи произведем на персональном компьютере с использованием численного интегрирования методом Рунге-Кутты.

Обратим внимание на то обстоятельство, что если скорость концевой массы равна нулю и в этот момент координата  $y < \left| \frac{P_y}{c_y} \right|$ , то движение прекращается. Эта зона, по обе стороны от

точки 0, называется мертвой зоной и характеризует состояние системы при котором реакция канатов в этих положениях по величине меньше или равна силе сухого (кулонова) трения. Для правильного численного интегрирования необходимо учитывать это условие. График переходного процесса для рассматриваемого примера приведен на рис. 3.3.

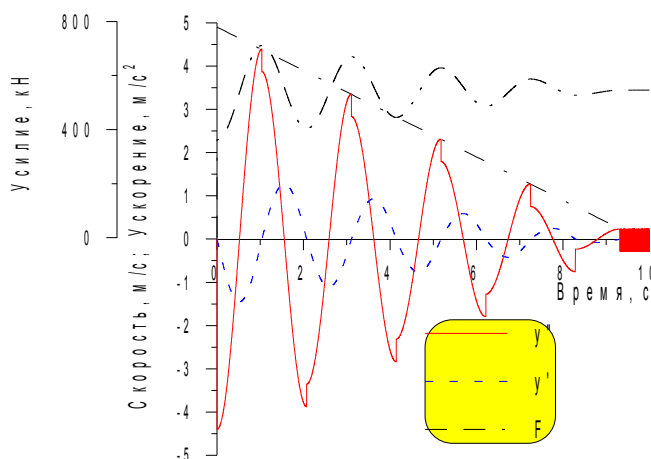


Рис. 3.3. Переходный процесс колебаний системы после остановки машины

Характерные отличия от гармонических колебаний, (резкие перегибы в точках максимума замедления) характеризуют силы кулонова трения. За период замедление уменьшается на  $4 \cdot 0,35 = 1,04 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . За четыре периода колебаний (8,28 с) амплитуда замедления уменьшится до  $-0,84 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Уменьшение амплитуды замедления происходит по арифметической прогрессии.

График, характеризующий полное натяжение каната, показывает, что величина натяжения совершает колебания вокруг значения статического усилия, достигая максимальной величины в первом периоде колебаний.

Мертвая зона соответствует перемещению

$$\frac{P_y}{c_y} = 28,2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Имея подобный график колебательного процесса, можно определить силы вредного сопротивления. Характерный излом амплитуды замедления в момент, когда скорость массы равна нулю, объясняется изменением знака силы сопротивления. Как показано на рис. 3.2, в этот момент усилие изменяет свою величину от  $+P_y$  до  $-P_y$  и ускорение уменьшается на величину  $2a_1$ . Следовательно, замерив изменение замедления в точке характерного излома, определяют величину  $2a_1$  и силу сопротивления  $P_y = m_1 a_1$ .

### 3.1.2. СИЛЫ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

В реальных условиях свободные колебания механических систем всегда затухающие. Затухание колебательного процесса обусловлено не только силами сухого трения, но также наличием сил пропорциональных скорости. Эти силы вызывают рассеивание (диссипацию)

механической энергии системы. В общем случае, зависимость силы сопротивления от скорости может быть достаточно сложной функцией. Коэффициент, характеризующий диссипативные свойства, может быть не постоянным, а показатель степени, в которую возводится величина скорости, не равен единице. Решение таких задач выходит за рамки настоящей работы. Рассмотрим процесс свободных колебаний одномассовой механической системы при наличии только сил вязкого трения, пропорциональных скорости колеблющейся массы.

В этом случае процесс характеризуется уравнением (3.3), в котором правая часть равна нулю

$$y'' + 2\mu_1 y' + \omega_1^2 y = 0, \quad (3.7)$$

Корни характеристического уравнения будут

$$r_1 = -\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - \omega_1^2}, \quad r_2 = -\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \omega_1^2}.$$

Общее решение однородного уравнения (3.7) зависит от значения корней характеристического уравнения. При  $\omega > \mu$  корни  $r_1$  и  $r_2$  - комплексные числа и свободные колебания будут характеризоваться уравнениями [24]

$$y = e^{-\mu_1 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t), \quad (3.8)$$

$$y' = e^{-\mu_1 t} [\omega (C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t) - \mu_1 (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)].$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий. Пусть при  $t = 0$ ;  $y = y_0$ ;  $y' = y'_0$ , тогда

$$C_1 = \frac{y'_0 + \mu_1 y_0}{\omega}; \quad C_2 = y_0.$$

Если ввести новые постоянные  $C_1 = A \sin \theta$  и  $C_2 = A \cos \theta$ , то вышеприведенные уравнения можно записать

$$y = A e^{-\mu_1 t} \cos(\theta - \omega t),$$

$$y' = A e^{-\mu_1 t} [\omega \sin(\theta - \omega t) - \mu_1 \cos(\theta - \omega t)], \quad (3.9)$$

$$y'' = -A e^{-\mu_1 t} [(\omega^2 - 2\mu_1^2) \cos(\theta - \omega t) + 2\mu_1 \omega \sin(\theta - \omega t)],$$

где  $A = \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  - амплитуда колебаний, м;

$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \mu_1^2}$  - частота затухающих колебаний, с<sup>-1</sup>;

$\theta = \arctg \frac{C_1}{C_2}$  - разность фаз колебаний, рад.

Из уравнения (3.9) очевидно, что если амплитуда первого колебания  $y_1 = A e^{-\mu_1 t_1}$ , то следующее максимальное значение  $y_2$ , будет через период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , т. е. отношение этих амплитуд запишется



$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{A e^{-\mu_1 t_1}}{A e^{-\mu_1(t_1+T)}} = e^{\mu_1 T} = e^{\delta},$$

где  $t_1$  - время, в течение которого перемещение достигло своего первого максимума.

Таким образом, уменьшение амплитуды колебаний происходит по закону геометрической прогрессии. Отношение двух последовательных наибольших отклонений от положения статического равновесия называется декрементом колебаний или фактором затухания. Величина натурального логарифма этого отношения называется логарифмическим декрементом колебаний

$$\delta = \ln \frac{y_1}{y_2}.$$

Если взять  $i$  периодов колебаний, то

$$\delta = \frac{1}{i} \ln \frac{y_n}{y_{n+i}} = \mu_1 T, \quad (3.10)$$

где  $y_n$  и  $y_{n+i}$  - амплитуды  $n$  и  $n+i$  колебаний;  
 $i$  - число колебаний.

Коэффициент  $\mu_1$  определяется из соотношения

$$\mu_1 = \frac{\delta}{T} = \frac{\delta \sqrt{\omega_1^2 - \mu_1^2}}{2\pi}.$$

Для большинства реальных систем  $\mu_1 \ll \omega_1$ , поэтому последнее уравнение можно записать

$$\mu_1 = \frac{\delta}{2\pi} \omega_1 = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{\frac{c_y}{m_y}}. \quad (3.11)$$

Коэффициент  $\mu_y$ , характеризующий силы вязкого сопротивления, определится

$$\mu_y = 2\mu_1 m_y.$$

Выясним влияние коэффициента  $\mu_1$  на динамический процесс. Периоды колебаний механических систем без вязкого демпфирования и с демпфированием соответственно равны

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_1 \sqrt{1 - \frac{\mu_1^2}{\omega_1^2}}},$$

тогда

$$\frac{T_1}{T} = \sqrt{1 - \frac{\mu_1^2}{\omega_1^2}}.$$

График функции  $\frac{T_1}{T} = f\left(\frac{\mu_1}{\omega_1}\right)$ , представляющий собой уравнение окружности в первом квадранте, показан на рис. 3.4.

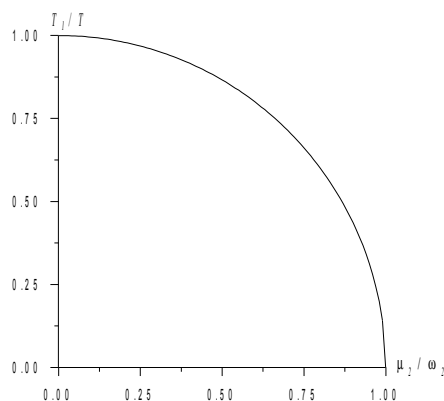


Рис. 3.4. Зависимость

$$\frac{T_1}{T} = f\left(\frac{\mu_1}{\omega_1}\right)$$

При  $\mu_1 = 0$  (механическая система без демпфирования):  $\frac{T_1}{T} = 1$ ; при  $\mu_1 = \omega_1$ :  $\frac{T_1}{T} = 0$ , т. е.  $T = \infty$ . Другими словами, при  $\mu_1 = \omega_1$  переходный процесс будет иметь апериодическое характер. Таким образом, при  $\mu_1 > \omega_1$  характеристическое уравнение (3.7) имеет два разных действительных корня  $r_1$  и  $r_2$ , поэтому общими решениями вместо (3.8) будут

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \\ y' &= C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Постоянные интегрирования определенные из начальных условий  $t = 0$ ;  $y = y_0$ ;  $y' = y'_0$ , равны

$$C_1 = \frac{y'_0 - r_2 y_0}{r_1 - r_2}; \quad C_2 = \frac{r_1 y_0 - y'_0}{r_1 - r_2}.$$

При  $\mu_1 = \omega_1$ , корни характеристического уравнения будут равными,  $r_1 = r_2 = -\mu_1$ . Коэффициент  $\mu_1$ , соответствующий этому условию, назовем критическим коэффициентом вязкого демпфирования. В этом случае общее решение задачи будет

$$\begin{aligned} y &= e^{-\mu_1 t} (C_1 + C_2 t) \\ y' &= e^{-\mu_1 t} [C_2 (1 - \mu_2 t) - C_1 \mu_2]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Постоянные интегрирования, определенные из начальных условий  $t = 0$ ;  $\Delta = \Delta$ ;  $\Delta' = \Delta'_0$ , равны

$$C_1 = y_0; \quad C_2 = y'_0 - \mu_1 y_0.$$

Из характеристики показанной на рис. 3.4 видно, что при  $\mu_1/\omega_1 = 0,2$ , период колебаний с учетом вязкого демпфирования увеличится только на 2 % ( $T_1/T = 0,98$ ), а при  $\mu_1/\omega_1 = 0,5$  период колебаний увеличивается на 12 % ( $T_1/T = 0,88$ ).

Пример 3.2. Исследовать колебательный процесс грузевого сосуда после остановки многоканатной машины с учетом вязкого демпфирования, Силами трения  $P_y$  пренебречь. Техническую характеристику машины принять, приведенную в примере 3.1.

Тогда  $m_y = 39600$  кг;  $c_y = 36426$  Н·м;  $\omega_1 = 3,03$  с<sup>-1</sup>. Если  $y'_0 = -5$  м·с<sup>-2</sup>, то при  $y'_0 = 0$ ;  $y_0 = \frac{y'_0}{\omega_1^2} = -0,544$  м.

Примем логарифмический декремент колебаний  $\delta_1 = 0,15$ , тогда

$$\mu_1 = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{\frac{c_y}{m_y}} = \frac{0,15}{2 \cdot 3,14} 3,03 = 0,0723 \text{ с}^{-1},$$

$$\mu_y = 2\mu_1 m_y = 2 \cdot 0,0723 \cdot 39600 = 5732 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1},$$

$$\omega = \sqrt{3,03^2 - 0,0723^2} = 3,029 \text{ с}^{-1},$$

$$C_1 = \frac{y'_0 + \mu_1 y_0}{\omega} = -\frac{0,0723 \cdot 0,544}{3,029} = -0,0129 \text{ м}, \quad C_2 = -0,544 \text{ м},$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-0,0129)^2 + (-0,544)^2} = 0,5441 \text{ м},$$

$$\theta = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{0,0129}{0,544} = 0,0237 \text{ рад.}$$

Колебательный процесс замедления характеризуется последним уравнением зависимостей (3.9), которое примет вид

$$y'' = -0,544 e^{-0,0723t} [9,17 \cos (0,0237 - \omega t) + 0,438 \sin (0,0237 - \omega t)].$$

График переходного процесса приведен на рис. 3.5.

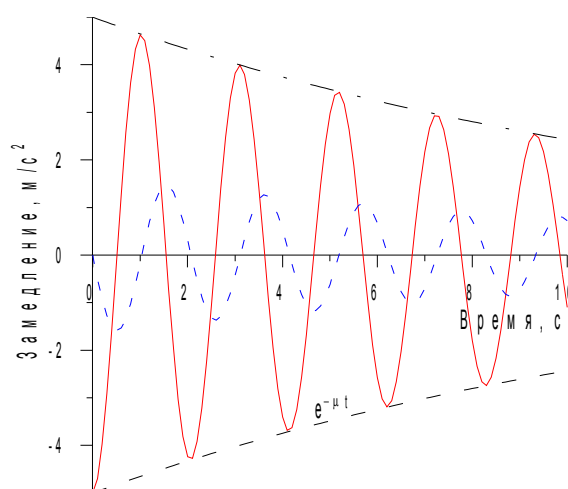


Рис. 3.5. Колебательный процесс грузевого сосуда после остановки машины

Период колебаний равен  $T = 2,07$  с. Амплитуда колебаний уменьшается по закону геометрической прогрессии с показателем  $e^{-0,0723 \cdot 2,07} = 0,86$ , т. е. с логарифмическим декрементом колебаний

$$\delta = \frac{1}{i} \ln \frac{y_1''}{y_{1+i}''} = \frac{1}{4} \ln \frac{4,3}{2,35} = 0,15,$$

здесь  $y_1'' = -4,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  – амплитудное значение замедления в конце первого периода колебаний;  
 $i = 4$  – количество периодов колебаний.

$y_{1+i}'' = -2,35 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  – амплитудное значение замедления в конце пятого периода колебаний;

Замедление достигнет величины  $-1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  за 10 периодов колебаний или за 20,7 с.

### 3.1.3. СИЛЫ ВЯЗКОГО И СУХОГО ТРЕНИЯ

В реальных машинах имеются одновременно силы вязкого и сухого трения, поэтому по сравнению с рассмотренными процессами, колебания затухают более интенсивно.

Если считать, что в течение промежутка времени  $\omega t = \pi$  сила сухого трения постоянная величина, то, используя зависимости (3.8), общее решение уравнения (3.3) запишется

$$y = e^{-\mu t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + \frac{a_1}{\omega_1^2} \text{sign } y', \quad (3.14)$$

$$y' = e^{-\mu t} [\omega (C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t) - \mu_1 (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)].$$

Постоянные интегрирования определенные из начальных условий при  $t = 0$ ;  $y = y_0$ ;  $y' = y_0'$ , равны

$$C_1 = \frac{\mu_1}{\omega_1} x_0 + \frac{x_0'}{\omega_1} - \frac{\mu_1}{\omega_1^3} a_1 \text{sign } y', \quad C_2 = x_0 - \frac{a_1}{\omega_1^2} \text{sign } y'.$$

Введем новые постоянные интегрирования  $C_1 = A \sin \theta$  и  $C_2 = A_2 \cos \theta$ , тогда по аналогии с (3.9) запишем

$$y = A e^{-\mu t} \cos (\theta - \omega t) + \frac{a_1}{\omega_1^2} \text{sign } y'.$$

Дальнейшее решение задачи осуществляется следующим образом. Через промежуток времени  $t = \pi/\omega$ , правая часть уравнения (3.3) изменит знак, а начальные условия определяются значениями  $y$  и  $y'$  (уравнение 3.14) при  $t = \pi/\omega$ .

Характеристики колебательного процесса рассмотрены в примере 3.3, при этом с целью уменьшения трудоемкости уравнение (3.3) решено численным методом.

Пример 3.3. Исследовать колебательный процесс грузевого сосуда после остановки многоканатного подъема с учетом вязкого демпфирования и силы трения сосуда о направляющие. Техническую характеристику машины принять, приведенную в примере 3.1. Тогда  $m_y = 39600$  кг;  $c_y = 364260$  Н·м<sup>-1</sup>;  $\omega_1 = 3,03$  с<sup>-1</sup>.

Принимая логарифмический декремент колебаний  $\delta_1 = 0,15$ , и силу трения  $P_y = 14000$  Н, коэффициент диссипации  $\mu_1$  и замедление  $a_1$  будут:  $\mu_1 = 0,0723$  с<sup>-1</sup>;  $a_1 = -0,35$  м·с<sup>-2</sup>.

Тогда уравнение (3.3) запишется

$$y'' + 0,144 y' + 9,181y = -0,35 \operatorname{sign} y'.$$

Если принять, как в примере 3.1, величину замедления  $y_0'' = -5$  м·с<sup>-2</sup> (при  $t = 0$ ),  $y_0' = 0$ , то

$$y_0 = 0,506 \text{ м}, \quad \left| \frac{P_y}{c_y} \right| = 28,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Таким образом, при решении этого уравнения должны быть соблюдены условия: при  $t = 0$ ;  $y_0' = 0$ ;

$$y_0 = 0,506 \text{ м};$$

$$\text{при } y' \geq 0, \quad \operatorname{sign} y' = +1;$$

$$\text{при } y' \leq 0, \quad \operatorname{sign} y' = -1;$$

при  $y' = 0$ ,  $\operatorname{sign} y' \leq 28,2 \cdot 10^{-3}$  - колебательный процесс прекращается (груз останавливается в мертвой зоне).

График переходного процесса показан на рис 3.6.

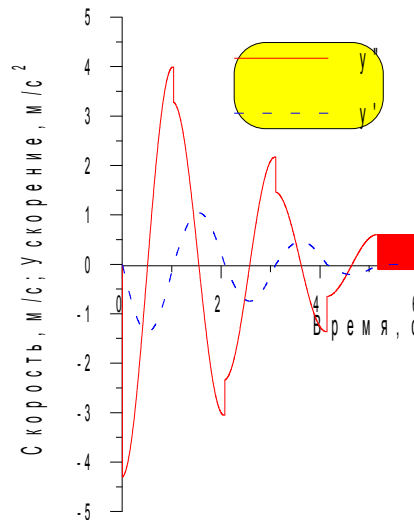


Рис. 3.6. Колебаний грузевого сосуда с учетом сил вязкого трения

Видно, что наличие нелинейной силы сопротивления (кулонова трения) искажает гармонические колебания, которые характерны для процесса ускорения. Интенсивность затухания колебательного процесса значительно выше по сравнению с характеристиками, показанными на рис. 3.3 и 3.5.

### 3.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЕ

Если к системе внезапно прикладывается постоянная сила, то характер нагружения описывается ступенчатой функцией. Характерным примером ступенчатой функции можно считать функцию Кронеккера характеризующую силы сухого трения (рис. 3.2). Однако длительность ступени может быть различной. Рассмотрим случай, когда сила  $P_y$  остается постоянной. В этом случае процесс характеризуется уравнением (3.3) без символа Кронеккера. Если зависимость (3.14) разделить на  $\frac{a_1}{\omega_1^2}$ , то получим относительное перемещение координаты

$$y_{om}(t) = 1 + \frac{\omega_1^2}{a_1} e^{-\mu_1 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t).$$

Графики переходных процессов механических систем, имеющих  $\omega_1 = 20 \text{ с}^{-1}$ ,  $\mu_1 = 0,1\omega_1$  и  $\mu_1 = 0,65\omega_1$  приведены на рис. 3.7. В качестве оси абсцисс принята величина  $\omega t$ , кратная  $\pi$  радиан. Обратим внимание на то, что максимальной координате  $y_{om}(t)$  соответствует  $\omega t = \pi$ . В этот момент  $\sin \omega t = 0$ , а  $\cos \omega t = -1$ . Следовательно, относительное максимальное перемещение будет

$$y_{om} = 1 + e^{-\mu_1 \frac{\pi}{\omega}}$$

При определении  $C_2$ ,  $x_0$  принято равным нулю.

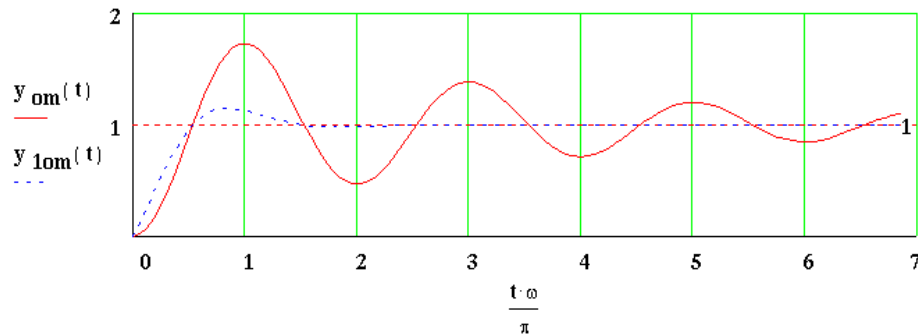


Рис. 3.7. Переходные процессы механических систем

Формула показывает, что в механической системе без вязкого демпфирования ( $\mu_1 = 0$ ) относительная амплитуда достигает двукратной величины.

Выразим коэффициент демпфирования  $\mu_1$  через относительную величину  $\mu_{om} = \frac{\mu_1}{\omega_1}$

и, учитывая, что  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 - (\mu_{om} \omega_1)^2}$  получим

$$y_{\max}(\mu_{om}) = 1 + e^{-\frac{\pi \mu_{om}}{\sqrt{1 - \mu_{om}^2}}} \quad (3.15)$$

На рис. 3.8 по уравнению (3.15) построена характеристика, которая показывает, как изменяется амплитуда колебательного процесса в зависимости от относительной величины коэффициента демпфирования.

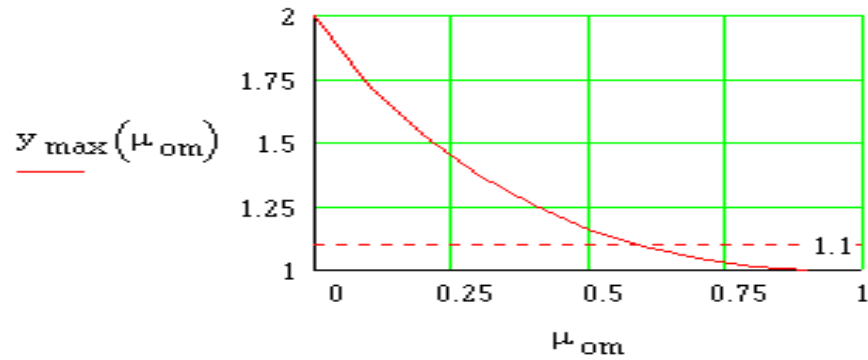


Рис. 3.8. Амплитуда колебательного процесса в зависимости от  $\mu_{om}$

Видно, что при  $\mu_{om} = 0,6$ :  $y_{\max}(\mu_{om}) = 1,1$ . При  $\mu_{om} = 0,8$  процесс близок к аperiodическому.

Время, в течение которого перемещение достигает максимального значения равно половине периода и определяется

$$T(\mu_{om}) = \frac{\pi}{\omega_1 \sqrt{1 - \mu_{om}^2}}.$$

Если эту зависимость разделить на время, соответствующее половине периода колебаний без демпфирования ( $T_1 = \frac{\pi}{\omega_1}$ ), то получим относительную величину, которая показывает, как увеличивается время достижения первого максимума при увеличении коэффициента демпфирования

$$\frac{T(\mu_{om})}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{om}^2}}. \quad (3.16)$$

Характеристика этой зависимости показана на рис. 3.9. Приведенная кривая подтверждает ранее полученную, которая показана на рис. 3.4. Видно, что при увеличении  $\mu_{om}$  от нуля до 0,5 функция  $f(\mu_{om})$  увеличивается только в 1,15, т. е. соответственно этой величине увеличивается длительность достижения амплитудной величины  $y_{\max}(\mu_{om})$ .

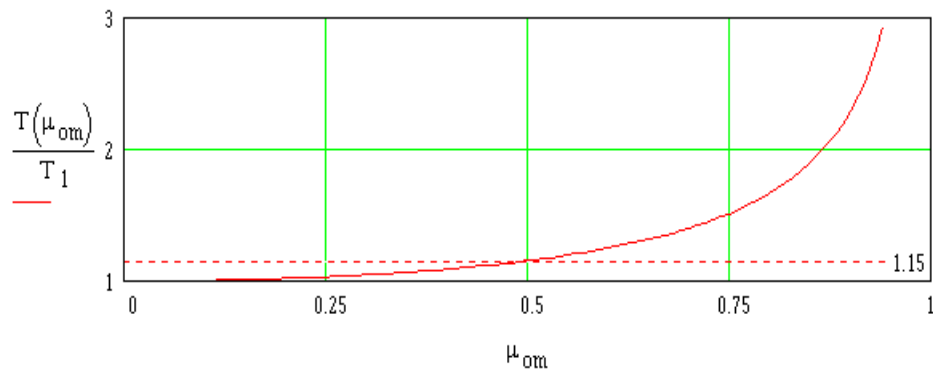


Рис. 3.9. Характеристики  $\frac{T(\mu_{om})}{T_1} = f(\mu_{om})$

Полученные зависимости и характеристики чрезвычайно важны при проектировании систем регулирования и для укрупненной оценки динамических нагрузок, возникающих в механических системах. Отметим, что эти оценочные показатели всегда максимальные. В реальных системах, как правило, уровень динамических нагрузок ниже и полученный результат гарантирует дополнительный запас прочности.

С другой стороны, полученные характеристики необходимы для проектирования и правильного выбора акселерометров (датчиков ускорения), используемых для экспериментальных исследований и в качестве источников обратных связей систем регулирования, способных демпфировать колебания при работе машин. Предлагаемую методику бора и проектирования акселерометра рассмотрим в примере 3.4.

### 3.3. ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При исследовании частотных свойств механических систем предполагается изучение их реакции на гармонический сигнал. Допустим на массу  $m_y$  (рис. 3.1) действует сила  $S \sin kt$ . Здесь  $k$  - частота возмущающей силы,  $c^{-1}$ .

Предполагая, что в системе отсутствуют силы сухого трения, уравнение движения массы  $m_y$  можно записать

$$m_y y'' = S \sin kt - F_y = S \sin kt - \mu_y y' - c_y y,$$

по аналогии с уравнением (3.3) последнюю зависимость представим

$$y'' + 2\mu_1 y' + \omega_1^2 y = a \sin kt \quad (3.17)$$

где  $a = \frac{S}{m_y}$  - ускорение системы под действием силы  $S$ ,  $m \cdot c^{-2}$ .

Аналитические зависимости, полученные в результате решения уравнения (3.17) имеют чрезвычайно важное значение при проектировании и эксплуатации многих машин и механических систем. Например, машины, работающие со знакопеременной нагрузкой (кривошипно - шатунный механизм), передают колебания на фундамент. Амплитудные значения нагрузок будут зависеть от частот свободных и вынужденных колебаний.

В практике эксплуатации часто нарушается балансировка вращающихся частей машины. В результате за счет центробежных сил неуравновешенных масс возникают знакопеременные нагрузки, передающиеся на подшипники и станину машины. При движении транспортных средств по неровной поверхности, вертикальные составляющие возмущающих воздействий с некоторым допущением, можно принять изменяющимися по гармоническому закону.

Закономерности, полученные в результате решения уравнения (3.17), позволяют рационально спроектировать машины, фундаменты, всевозможные поглотители колебаний и правильно выбрать датчики ускорений для экспериментальных исследований.

#### 3.3.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ БЕЗ ВЯЗКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Если в механической системе отсутствуют диссипативные свойства, то уравнение (3.17) будет

$$y'' + \omega_1^2 y = a \sin kt. \quad (3.18)$$



Уравнение (3.18) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общим решением этого уравнения будет сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [31]

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Здесь  $\bar{y}$  - общее решение уравнения (3.18) без правой части;

$y^*$  - частное решение уравнения (3.18).

Характеристическое уравнение  $r^2 + \omega_1^2 = 0$  имеет пару комплексных корней

$$r_{1,2} = \pm \omega_1 \sqrt{-1},$$

поэтому

$$\bar{y} = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t$$

Частное решение  $y^*$  при  $k \neq \omega_1$  будем иметь [31]

$$y^* = C_3 \sin kt; \quad y^{*''} = -C_3 k^2 \sin kt.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3.18), получим

$$C_3 = \frac{a}{\omega_1^2 - k^2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.18) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t + \frac{a}{\omega_1^2 - k^2} \sin kt; \\ y' &= C_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - C_2 \omega_1 \sin \omega_1 t + \frac{ak}{\omega_1^2 - k^2} \cos kt. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Постоянные интегрирования определенные из начальных условий :  $t = 0; y = 0;$   
 $y' = 0,$

$$C_1 = \frac{ak}{\omega_1(\omega_1^2 - k^2)}; \quad C_2 = 0,$$

тогда решения запишутся

$$y = \frac{a}{\omega_1^2 - k^2} \left( \sin kt - \frac{k}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right); \quad (3.20)$$

$$y' = \frac{ak}{\omega_1^2 - k^2} (\cos kt - \cos \omega_1 t). \quad (3.21)$$

Ускорение  $a$  представим

$$a = \frac{S}{m_y} = \frac{S}{m_y} \cdot \frac{c_y}{c_y} = y_{cm} \omega_1^2,$$

тогда зависимость (3.20) можно записать

$$y = \frac{y_{cm}}{1 - \frac{k^2}{\omega_1^2}} \left( \sin k t - \frac{k}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (3.22)$$

Величину  $\lambda = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{\omega_1^2}}$  - принято называть коэффициентом динамичности [39] или коэффициентом усиления [79]. Если в уравнении (3.22) разделить обе части на  $y_{cm}$ , то получим относительную величину

$$y_{om} = \frac{y}{y_{cm}} = \lambda \left( \sin k t - \frac{k}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (3.23)$$

Видно, что амплитуда относительной деформации зависит от величины коэффициента динамичности  $\lambda$ . График  $\lambda = f\left(\frac{k}{\omega_1}\right)$  приведен на рис. 3.10.

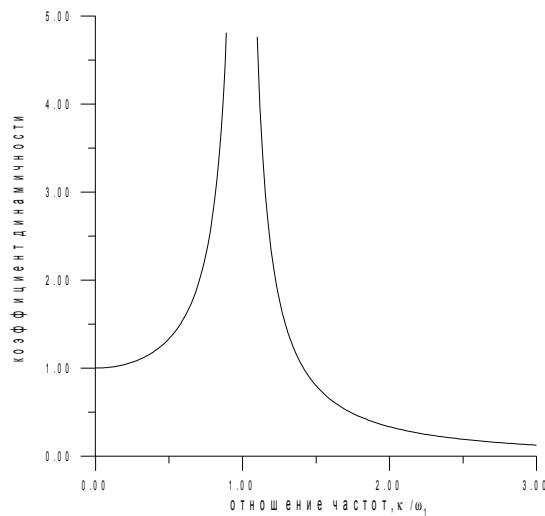


Рис. 3.10. Зависимость коэффициента динамичности от отношения частот

Когда частота возмущающей силы  $k$  мала по сравнению с частотой свободных колебаний, коэффициент динамичности  $\lambda$  близок к единице. При  $k = \omega_1$  амплитуда  $\lambda$  стремится к бесконечности. Такое явление называется резонансом, а частота, соответствующая этому явлению - резонансной частотой. Резонансная кривая показывает, что для уменьшения коэффициента динамичности необходимо, чтобы частота возмущающей силы была в два, три раза больше частоты свободных колебаний системы. Этот вывод справедлив для машин, имеющих знакопеременные нагрузки. Для устройств измерения ускорений, использующих в качестве чувствительного элемента массу и

пружину, необходимо, чтобы частота свободных колебаний датчика была на порядок выше измеряемой частоты колебаний.

### 3.3.2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СИЛАМИ ВЯЗКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Если в механической системе имеются элементы, в которых происходит рассеивание энергии (демпферы, амортизаторы), то при гармоническом возмущении колебательный процесс характеризуется уравнением (3.17).

Общими решениями однородного уравнения будут зависимости (3.8). Частное решение уравнения (3.17) при  $k \neq \omega$ , будем искать в виде

$$y^* = N \sin kt + M \cos kt$$

Для определения этих постоянных найдем  $y^{*'}$  и  $y^{*''}$  где  $N$  и  $M$  - произвольные постоянные.

$$y^{*' } = N k \cos kt - M k \sin kt ,$$

$$y^{*''} = -N k^2 \sin kt - M k^2 \cos kt .$$

Это равенство будет удовлетворяться при любых значениях  $t$  тогда, когда

$$\begin{aligned} -N k^2 - 2M\mu_1 k + N \omega_1^2 &= a , \\ -M k^2 + 2N\mu_1 k + M \omega_1^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Из этих уравнений определяются

$$N = \frac{\omega_1^2 - k^2}{(\omega_1^2 - k^2)^2 + 4(\mu_1 k)^2} a, \quad M = \frac{2\mu_1 k}{(\omega_1^2 - k^2)^2 + 4(\mu_1 k)^2} a .$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения, характеризующего колебательный процесс механической системы с вязким демпфированием, будет

$$y = e^{-\mu_1 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + N \sin kt + M \cos kt ; \quad (3.24)$$

$$y' = -\mu_1 e^{-\mu_1 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + e^{-\mu_1 t} (C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t) + N k \cos kt - M k \sin kt .$$

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий. Если при  $t = 0$ ;  $y = y_0$ ;  $y' = y'_0$ , то

$$C_1 = \frac{1}{\omega} [y'_0 - kN + \mu_1 (y_0 - M)]; \quad C_2 = y_0 - M .$$

Учитывая, что  $y_{cm} = \frac{a}{\omega_1^2}$ , уравнение (3.24) по аналогии с (3.23) можно записать

$$y_{om} = y_{1om} + y_{2om}$$

где

$$y_{1om} = \frac{\omega_1^2}{a} e^{-\mu_1 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t), \quad y_{2om} = \frac{\omega_1^2}{a} (N \sin kt + M \cos kt). \quad (3.25)$$

Эти уравнения характеризуют относительную величину координаты. За базовую величину принята деформация системы при статическом нагружении силой  $S$ .

Первое уравнение характеризует процесс затухающих свободных колебаний, а второе - вынужденные колебания. На рис. 3.11 показаны характеристики переходного процесса механической системы при гармоническом воздействии. Характеристики механической системы:  $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$ ;  $k = 0,1\omega$ ;  $\mu_1 = 0,025\omega$ ;  $a = 2 \text{ м}^{-2}$ .

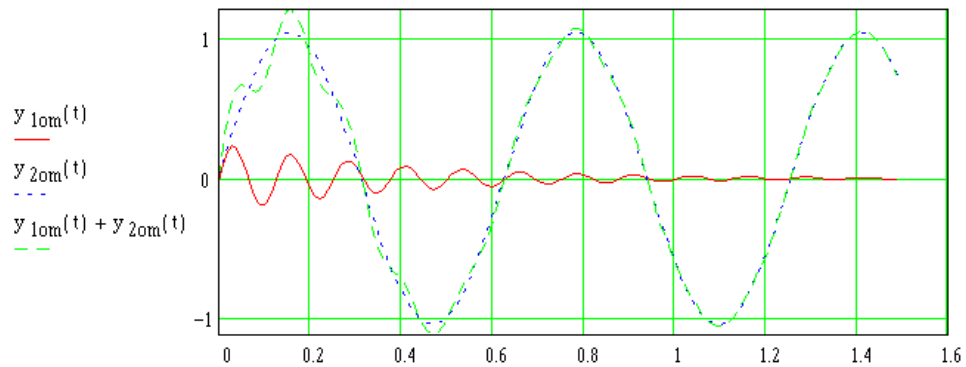


Рис. 3.11. Характеристика колебательного процесса

Благодаря присутствию множителя  $e^{-\mu_1 t}$  свободные колебания затухают и в системе будут присутствовать только вынужденные колебания.

Рассмотрим влияние коэффициента, характеризующего диссипативные свойства системы на вынужденные колебания. Уравнение (3.25) можно записать в эквивалентной форме

$$y_{2om} = \lambda_\mu \cos(\theta - kt), \quad (3.26)$$

где  $\lambda_\mu = \frac{\omega_1^2}{a} \sqrt{N^2 + M^2}$ ;

$$\theta = \arctg \frac{N}{M}.$$

Подставляя  $N$  и  $M$ , получим относительную величину амплитуды вынужденных колебаний

$$\lambda_\mu = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{k}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\mu_1 k}{\omega_1^2}\right)^2}}. \quad (3.27)$$

По аналогии с  $\lambda$ , используемом в уравнении (3.23),  $\lambda_\mu$  характеризует коэффициент динамичности механической системы с вязким демпфированием. Сравнивая  $\lambda$  и  $\lambda_\mu$  видно,

что при  $\mu_1 = 0$ ;  $\lambda_\mu = \lambda$ , т. е. коэффициенты, от которых зависят амплитуды колебаний систем без демпфирования и с демпфированием равны.

Обозначим  $\frac{k}{\omega_1} = n$ , тогда

$$\lambda_\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)^2 + 4\mu_1^2 \frac{n^2}{\omega_1^2}}} = \frac{1}{f(n)}.$$

Выясним, при каких значениях  $n$  коэффициент  $\lambda_\mu$ , а следовательно, и амплитуда, будут иметь наивысшее и наименьшее значения

$$f(n) = (1-n^2)^2 + 4\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2} n^2.$$

Для определения экстремума функции напомним теорему, суть которой заключается: если в точке  $n = b$  первая производная  $f'(n)$  обращается в нуль, при этом, вторая производная  $f''(n)$  отрицательна, то функция  $f(n)$  имеет в точке  $n = b$  максимум, если положительна - то минимум [31].

Исследуя функцию  $f(n)$  при  $\frac{\mu_1}{\omega_1} = \text{const}$ . Приравнявая первую производную от этой функции нулю, имеем

$$f'(n) = 4n(n^2 - 1 + 2\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2}) = 0.$$

Отсюда  $n_1 = 0$ ;  $n_2 = \sqrt{1 - 2\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2}}$ ,

где  $n_2$  - вещественная величина, т. к.  $\mu_2 \ll \omega_2$ .

Для дальнейшего исследования экстремума амплитуды  $\lambda_\mu$  найдем вторую производную

$$f''(n) = 4n(3n^2 - 1 + 2\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2}),$$

при  $n_1 = 0$ ,

$$f''(n) = 4(2\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2} - 1).$$

Функция  $f(n)$  всегда отрицательна при  $2\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2} < 1$ , т. е. при  $\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2} \leq \sqrt{0,5} \leq 0,707$ , что, как правило, соответствует реальным условиям эксплуатации машин. Поэтому функция  $f(n)$  при  $n = 0$  будет иметь максимум, а коэффициент динамичности  $\lambda_\mu$  - минимум.

При  $n_2 = \sqrt{1 - 2\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2}}$ , функция  $f''(n_2) = 8(1 - 2\frac{\mu_1^2}{\omega_1^2})$  - положительна. Следовательно, в

точке  $n = n_2$  функция  $f(n)$  будет иметь минимум, а коэффициент динамичности  $\lambda_\mu$  - максимум. Таким образом, в зависимости от частоты вынужденных колебаний коэффициент  $\lambda_\mu$  изменяется следующим образом. При  $n = 0$  коэффициент  $\lambda_\mu = 1$ . При увеличении частоты вынужденных колебаний до частоты собственных колебаний  $\omega_1$  ( $0 \leq k \leq \omega_1$ ) коэффициент  $\lambda_\mu$  увеличивается. При резонансе ( $k = \omega_1$ ) этот коэффициент, а следовательно, и амплитуда, в отличие от систем без сил вязкого сопротивления, остается конечной величиной

$$\lambda_\mu = \frac{\omega_1}{2\mu_1}. \quad (3.28)$$

При дальнейшем увеличении частоты вынужденных колебаний амплитуда уменьшается и стремится к нулю. Резонансные кривые при различных значениях коэффициента  $\mu_1$  приведены на рис. 3.12. Кривые подтверждают, что наличие в механической системе сил вязкого сопротивления приводит величину коэффициента динамичности при резонансе к конечному значению.

При  $\mu_1 = 0,2\omega_1$ , коэффициент динамичности не превышает 2,5, а при  $\mu_1 = 0,65\omega_1$ , величина  $\lambda_\mu$  не превышает 1,0. При  $\mu_1 = \omega_1$ , коэффициент динамичности может достигнуть  $\lambda_\mu = 1,0$  только при низкочастотном возмущающем воздействии ( $k \ll \omega_1$ ).

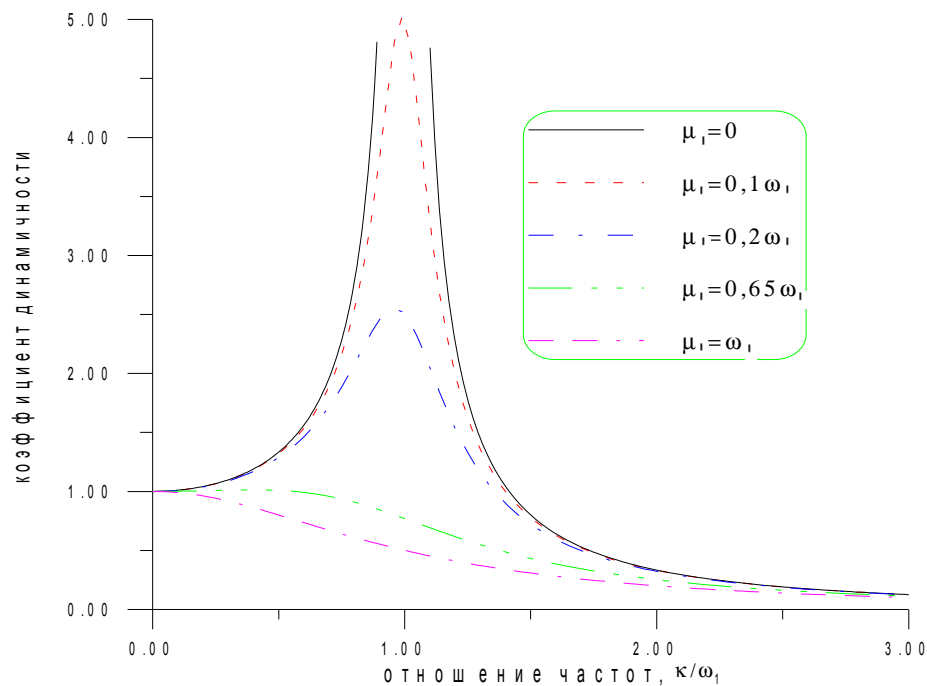


Рис. 3.12. Резонансные кривые при различных коэффициентах вязкого сопротивления

Полученные закономерности оказываются чрезвычайно важными при выборе рациональных размеров фундаментов, при устранении вредных вибраций машин, а также для правильного выбора датчиков ускорения при экспериментальных исследованиях.

Пример 3.4. Спроектировать датчик линейного ускорения отвечающего следующим требованиям:

1. Диапазон измеряемых частот колебаний  $k = 0 - 25 \text{ с}^{-1}$ .

2. При ступенчатом изменении частоты ошибка измерения не должна превышать 10 % от установившейся величины.

3. Запаздывание при ступенчатом изменении ускорения не более 0,025 с.

Датчики линейных ускорений используются при экспериментальных исследованиях, а также в системах автоматического регулирования машин. Принцип действия датчика линейного ускорения основан на использовании силы инерции массы, заключенной между пружинами с демпфером. Если на рис. 3.1 массу  $m$  соединить с дополнительной пружиной, второй конец которой закреплен у измеряемого объекта, то получится устройство способное измерять ускорения. В этом устройстве координата перемещения  $y$  будет пропорциональна ускорению тела, к которому закреплены пружины. Конструктивно датчики могут быть выполнены по различным схемам. С целью увеличения чувствительности датчика необходимо свести к минимуму силы трения поэтому в некоторых конструкциях масса закреплена между двумя плоскими пружинами или на конце консольной пластины [78].. Для получения электрического сигнала перемещение массы преобразуется в электрическую величину с помощью потенциометрического, индуктивного, емкостного или тензометрического преобразователя.

Предположим, при работе машины имеем закон изменения ускорения, который показан на рис. 3.13.

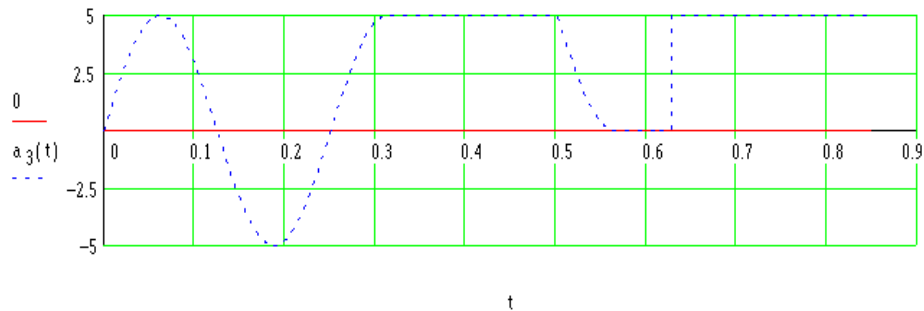


Рис. 3.13. Ускорение машины

В начальный момент действуют силы, которые приводят машину в движение и в течении 0,3 с ускорение изменяется по гармоническому закону с частотой  $k = 5 \text{ с}^{-1}$ , затем в течение 0,2 с ускорение остается постоянным, после чего уменьшается и становится равным нулю в течение 0,1 с. После этого момента ускорение скачком возрастает до величины  $5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Отметим, что рассмотренный закон изменения замедления выбран произвольно, но включает в себя возможные случаи, встречающиеся в практике эксплуатации машин.

Закон изменения ускорения, показанный на рис. 3.13, реализован с помощью пакета Mathcad 7 [51]. Ниже приведена программа реализации.

$$\begin{array}{l}
 k := 25 \quad a := 5 \quad t := 0, .001 .. .85 \\
 a(t) := \begin{cases} a \cdot \sin(k \cdot t) & \text{if } t \cdot k < 2.5 \cdot \pi \\ a & \text{if } 2.5 \cdot \pi < t \cdot k < 4 \cdot \pi \\ a - a \cdot \sin(t \cdot k) & \text{if } 4 \cdot \pi < t \cdot k < 4.5 \cdot \pi \\ 0 & \text{if } 4.5 \cdot \pi < t \cdot k < 5 \cdot \pi \\ a & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{array}$$

Читатель, наверное, обратил внимание, что в книге появились графики, имеющие специфическое оформление. Эти графики получены с помощью пакета Mathcad 7. Автор долго размышлял как приобщить читателя к удивительному пакету

Mathcad 7, появившемуся в России. Этот пакет позволяет решать широкий круг инженерных задач, сопровождая решение графиками. Кроме решения алгебраических и дифференциальных уравнений имеется возможность работы с матрицами и со статическим материалом. Развиты, по сравнению с пакетом Reduce [10], возможности работы с аналитическими (символьными) преобразованиями, при этом

проблемы решения уравнений, интегрирования и дифференцирования для исследователя отодвигаются и уходят в прошлое. Имея всего семь кнопок (операторов) программирования, Mathcad 7 позволяет удивительно просто и быстро решать очень широкий круг задач. Признавая важность и, отдавая дань фундаментальной подготовке инженеров, тем не менее убежден, что наличие современной вычислительной техники и пакетов ставят перед высшей школой вопросы о коренном изменении в изучении фундаментальных, общепрофессиональных и специальных дисциплин. Понимая, что данная работа - не место для дискуссии по этому вопросу, автор решил включить фрагменты используемых программ без особых комментариев. В то же время читателю, знакомому с программированием на языках Фортран, Бейсик, Паскаль приведенные программы будут понятны. Автор считает, что хотя бы таким образом, будет сделан шаг навстречу к приобщению студентов и инженеров к современным пакетам компьютерных программ.

Итак, чтобы при появлении ускорения ступенчато запаздывание датчика не превышало 0,025 с, частота свободных колебаний датчика с учетом демпфирования должна быть  $\omega = \frac{\pi}{0,025} = 125 \text{ c}^{-1}$ . С другой стороны, чтобы амплитуда перемещения координаты у датчика при ступенчатом сигнале не превышала 10 % от установившейся величины, в соответствии с рис. 3.12, относительная величина коэффициента демпфирования должна быть  $\mu_{om} = 0,65$ . Из этого же графика видно, что при таком значении  $\mu_{om}$ , коэффициент динамичности в диапазоне относительных частот  $\frac{k}{\omega_1} = 0-0,6$  постоянен и равен единице. Это говорит о том, что в этом диапазоне частот выход датчика не будет зависеть от частоты колебаний объекта измерений.

При коэффициенте  $\mu_{om} = 0,65$ , частота свободных колебаний, без учета демпфирования, определяется из соотношения  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \mu_{om}^2 \omega_1^2}$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \mu_{om}^2}} = \frac{125}{\sqrt{1 - 0,65^2}} = 165 \text{ c}^{-1},$$

т. е. при максимальной частоте колебаний объекта измерения  $k = 25$ , отношение  $\frac{k}{\omega_1} = \frac{25}{165} = 0,15$ ,

что гарантирует получение сигнала датчика не зависящего от частоты колебаний.

Статическое изменение координаты датчика

$$y_{cm} = \frac{a_3}{\omega^2} = \frac{10}{125^2} = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,64 \text{ мм}.$$

Такое, относительно малое перемещение приводит к заключению, что масса  $m_y$  должна быть закреплена на консольной балке или между двумя плоскими пружинами с тензометрическим преобразователем сигнала. Соотношение жесткости пружин и массы  $m_y$  находится из формулы

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_y}{m_y}}; \text{ или } c_y = \omega_1^2 m_y.$$

Задаваясь величиной  $m_y$  получим  $c_y$

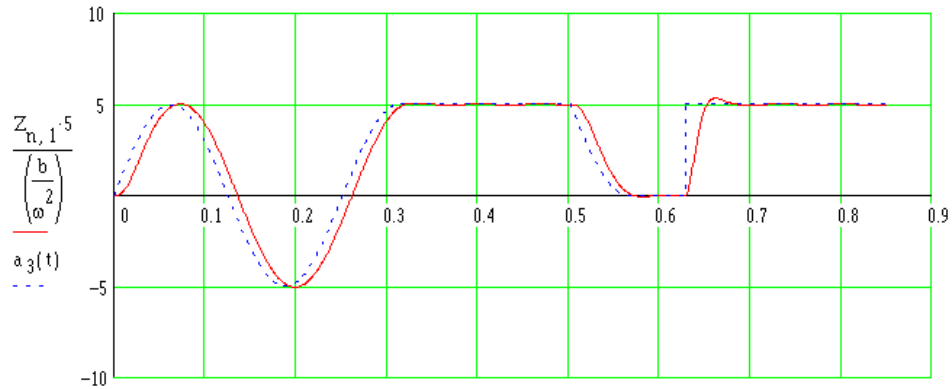
$\omega_1 = 165$	
------------------	--



$m_y, \text{кг} \cdot 10^{-3}$	1	2	3	4	5
$c_y, \text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$	27,2	54,45	81,65	108,9	136

На рис. 3.14, а, на фоне замедления машины  $a_3(t)$  (пунктирная линия), показаны характеристики выходного сигнала датчика ускорения.

а



б

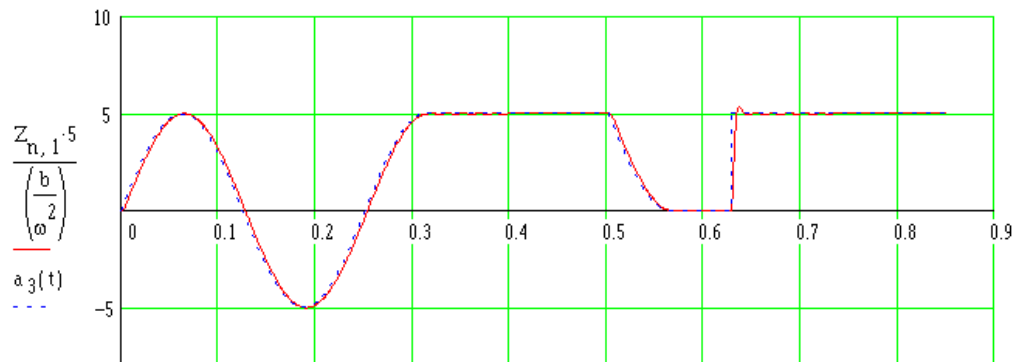


Рис. 3.14. Характеристики ускорения машины и выходного сигнала датчика ускорения:  
 а -  $\omega = 125 \text{ с}^{-1}$ ; б -  $\omega = 20 \text{ к} = 500 \text{ с}^{-1}$

Характеристики получены в результате численного решения дифференциального уравнения (3.17) с ограничениями, приведенными в программе МATHCAD. Видно, что перемещение массы датчика  $m_y$  отстает от ускорения машины. Максимальное запаздывание наблюдается при ступенчатом изменении ускорения. Величина запаздывания не превышает  $0,025 \text{ с}$ .

Наконец, предположим, что параметры датчика выбраны таким образом, что собственная частота колебаний  $\omega = 20 \text{ к} = 500 \text{ с}^{-1}$  (рис.3.14, б). Видно, что датчик практически без видимого запаздывания «отрабатывает» ускорение машины.

### 3.4. КОЛЕБАНИЯ ФУНДАМЕНТОВ

Знакопеременные силы в машинах с кривошипно-шатунным механизмом и не сбалансированные вращающиеся части машин вызывают колебания фундамента.

При равенстве частот собственных колебаний фундамента и возмущающей силы могут наступить опасные явления резонанса. На колебания фундамента расходуется энергия, достигающая иногда 5 % полезной, затраченной на привод машины [85].

Распространяясь через грунт, колебания передаются на корпус машинного помещения, на соседние здания и сооружения, которые могут прийти в катастрофическое состояние. Кроме этого, колебания вредно отражаются на здоровье обслуживающего персонала.

При проектировании следует определить размеры фундамента таким образом, чтобы амплитуда колебаний фундамента не превосходила допустимой величины.

Для фундаментов под машины с кривошипно-шатунным механизмом по техническим условиям строительных норм допускаются предельные величины амплитуды колебаний, приведенные в табл. 3.1 [85].

Таблица 3.1

## Допустимые величины амплитуд колебаний

Частота вращения, рад/с	Допустимая амплитуда колебаний, мм
менее 20	0,25 - 0,30
20 - 40	0,20
более 40	0,15

Во избежание неравномерной осадки общий центр тяжести машины и фундамента должен лежать вблизи вертикали, проходящей через центр тяжести основания.

## 3.4.1. КОЛЕБАНИЯ БЕЗ УЧЕТА СИЛ ВЯЗКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Сила сопротивления одноступенчатого компрессора простого действия характеризуется уравнением (2.46) и показана на рис. 2.12.

Момент сопротивления одноступенчатого компрессора двойного действия приведен на рис. 2.15.

Если сделать допущение, что колебания фундамента обусловлены силой, изменяющейся по гармоническому закону, тогда эквивалентную схему, характеризующую колебания фундамента можно представить схемой, приведенной на рис. 3.15.

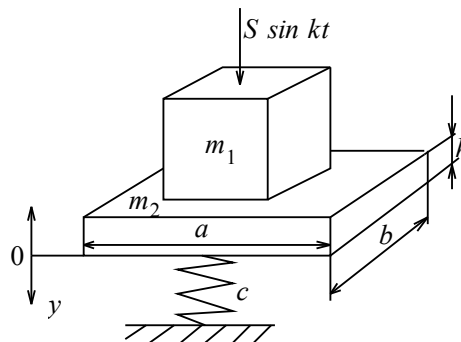


Рис. 3.15. Схема, характеризующая колебания фундамента

Машина, имеющая массу  $m_1$  создает гармоническую силу  $S \sin kt$  с частотой  $k$ . Предположим, что связь машины с фундаментом абсолютно жесткая. Фундамент залегает в грунте, жесткость основания которого  $c$ . Если габариты фундамента  $a$ ,  $b$ ,  $h$ , то масса фундамента  $m_2$  определится

$$m_2 = abh.$$

Здесь  $\gamma = 2200 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$  - плотность бетона.

Жесткость основания фундамента рекомендуется определять [85]

$$c = abc_0 \left[ 1 + \frac{2(a+b)}{\Delta ab} \right] \sqrt{\frac{P}{P_0}}, \quad (3.29)$$

где  $c_0$  - приведенный коэффициент жесткости, соответствующий пробному давлению  $P_0 = 20 \text{ кПа}$ ,  $\text{Н}\cdot\text{м}^{-3}$ .

Значения  $c_0$  для различных грунтов приведены в табл. 3.2.

$P = q \frac{m_1 + m_2}{ab}$  - действительное давление на основание фундамента, кПа;

$\Delta$  - коэффициент, учитывающий соотношение определенных механических свойств грунта. В практических расчетах для всех грунтов  $\Delta = 1 \text{ м}^{-1}$  [85].

Таблица 3.2

Приведенный коэффициент жесткости для различных грунтов\*

Наименование грунта	Коэффициент жесткости $c_0$ , $\text{МН}\cdot\text{м}^{-3}$
Пески:	
пылевидные, очень влажные или насыщенные водой;	8 - 10
мелкие, не зависимо от плотности и влажности;	10 - 12
средней крупности, а также графит и галька, не зависимо от плотности и влажности.	12 - 16
Глины:	
глина, суглинки и супески в пластичном состоянии, близком к границе текучести;	5-10
пластичные глины;	10 - 20
твердые глины.	20 - 30

\*Для насыпных грунтов значения  $c_0$  на 30 - 30 % ниже.

При принятых допущениях, а также при условии отсутствия диссипативных свойств фундамента, его колебания будут характеризоваться уравнением

$$my'' = S \sin kt - F_y, \quad (3.30)$$

Здесь  $m = m_1 + m_2$ , кг;

$F_y = cy$  - сила упругости, Н.

Уравнение (3.30) можно представить

$$y'' + \omega^2 y = a \sin kt.$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$  - частота свободных колебаний,  $\text{с}^{-1}$ ;

$a = \frac{S}{m}$  - ускорение фундамента под действием силы  $S$ ,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ .

Полученное уравнение аналогично уравнению (3.18) и его решения будут аналогичны уравнениям (3.20, 3.21).

Относительная деформация основания фундамента определяется по уравнению (3.23)

$$\frac{y}{y_{cm}} = \lambda \left( \sin kt - \frac{k}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Таким образом, амплитуда относительной деформации основания фундамента, зависит от коэффициента  $\lambda$ . Ранее было показано, что коэффициент  $\lambda$  определяется отношением частот  $\frac{k}{\omega}$ . На рис. 3.10 была представлена зависимость  $\lambda = f\left(\frac{k}{\omega}\right)$ . При низких частотах возмущающей силы коэффициент динамичности  $\lambda$  близок к единице, т. е. основание фундамента будет отклоняться силой  $S$  до положения статического равновесия  $y_{cm}$ . Такую же величину отклонения, очевидно, можно получить при  $1 - \frac{k^2}{\omega^2} = -1$ , т. е.

$k = \sqrt{2} \omega$ . При воздействии на фундамент силы высокой частоты  $\frac{k}{\omega} \gg 1$ , последняя изменяет свое направление столь быстро, что масса  $m_2$  не успевает следовать за ней и, следовательно, амплитуды деформации будут малы. Таким образом, когда на тело действует периодическая сила высокой частоты, она вызывает колебания с малой амплитудой и, во многих случаях, можно считать, что при этом тело сохраняет стационарное положение. Наибольший интерес представляет случай когда  $k = \omega$ . В этом случае амплитуда стремится к бесконечности. При  $k = \omega$  возмущающая сила действует на массу в такт с ее движением, вследствие чего амплитуда может расти безгранично.

Таким образом, при проектировании фундаментов необходимо, чтобы частота свободных колебаний фундамента  $\omega$  была значительно меньше частоты возмущающей силы, иными словами, необходимо стремиться, чтобы жесткость основания фундамента была невысокой, при этом должно соблюдаться условие  $\frac{k}{\omega} \gg 1$ .

Частота свободных колебаний фундамента зависит от свойств грунта, массы фундамента и его габаритов. Из условия закрепления анкерных болтов высота фундамента  $h$  должна быть не менее 0,6 м. Если принять высоту фундамента  $h$ , равную постоянной величине, то используя уравнение (3.29), жесткость основания можно представить как функцию площади фундамента  $c(F)$ . График этой функции приведен на рис. 3.16. При увеличении площади фундамента увеличивается его масса, и как следствие должна уменьшаться частота свободных колебаний. Характеристика частоты свободных колебаний  $\omega(F)$  в зависимости от площади фундамента приведена на рис. 3.17.

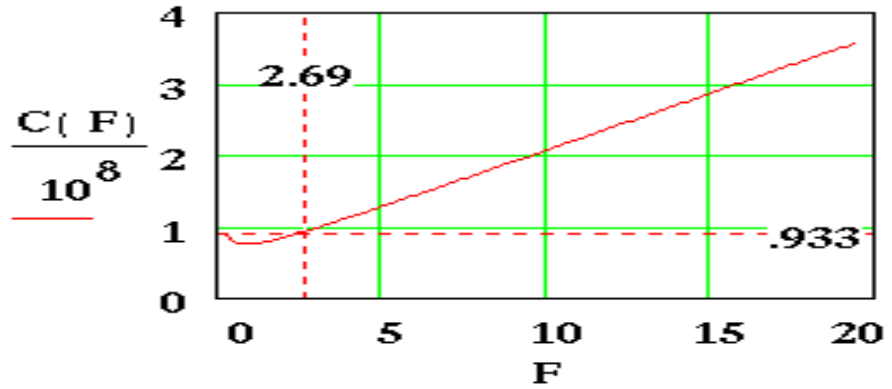


Рис. 3.16. Зависимость жесткости основания фундамента от его площади

Видно, что для рассматриваемого примера при изменении площади фундамента до  $10 \text{ м}^2$  происходит уменьшение частоты свободных колебаний, при дальнейшем увеличении площади частота свободных колебаний изменяется весьма незначительно. Следовательно, увеличение габаритов фундамента, в определенном диапазоне, может не дать положительных результатов по уменьшению амплитуды колебаний.

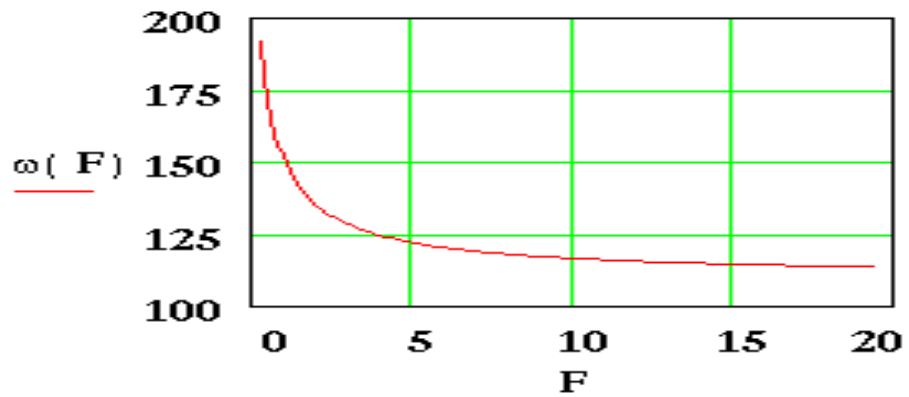


Рис. 3. 17. Зависимость частоты свободных колебаний фундамента от его площади

В рассматриваемом примере, диапазон частот свободных колебаний фундамента равен  $100\text{-}170 \text{ с}^{-1}$ . Частота возмущающей силы компрессорных машин  $40\text{-}160 \text{ с}^{-1}$ . Поэтому, существуют условия, когда проектируемая система может оказаться в резонансе. Следует отметить, что при увеличении высоты фундамента увеличивается его масса и удельное давление на грунт. Однако частота свободных колебаний изменяется мало. Поэтому практика заложения фундаментов большой глубины оказалась порочной и всегда целесообразно иметь фундаменты с большими размерами в плане, но небольшой высоты. Следует отметить, что колебания фундаменты не должно передаваться зданию, поэтому минимальное расстояние между фундаментами компрессора и зданием должно быть  $0,3 - 0,5 \text{ м}$ .

Пример 3.5. Определить размеры фундамента и амплитуду колебаний компрессора, рассмотренного в примере 2.5.

Так как компрессор двойного действия с частотой вращения коленчатого вала  $\omega_n = 76,93 \text{ с}^{-1}$ , частота вынужденных колебаний  $k = 153,86 \text{ с}^{-1}$ . Заменяем действительные силы сопротивления, показанные на рис.2.12 гармонической, при этом, максимальная сила  $S = 14 \text{ кН}$ .

В соответствии с табл. 3.1 допустимая амплитуда колебаний 0,15 мм. Полагая, что основание фундамента переместится на величину статической деформацией  $x_{cm} = 1,5 \cdot 10^{-4}$  м, необходимая жесткость основания должна быть

$$c = \frac{S}{x_{cm}} = \frac{14000}{1,5 \cdot 10^{-4}} = 0,933 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Из рис. 3.16 жесткости  $c = 0,933 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$  соответствует площадь фундамента 2,69 м<sup>2</sup>. Длина машины 2 м, тогда необходимая ширина фундамента будет равна 1,35 м, а масса  $m_2 = 3564$  кг. Дальнейшее увеличение размеров фундамента не эффективно и практически не приведет к уменьшению частоты свободных колебаний, которая для рассматриваемого примера равна  $\omega = 126 \text{ с}^{-1}$ .

Итак, частоты свободных колебаний и возмущающей силы оказались близкими. При равенстве частот  $k$  и  $\omega$  будет наблюдаться явление резонанса, работа установки в этом случае недопустима. При близких частотах ( $k = 153,86 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 126 \text{ с}^{-1}$ ), в системе наблюдаются биения. Характеристика колебаний основания фундамента при биениях, вычисленная по уравнению (3.23) показана на рис. 3.18, а. Относительная амплитуда достигает величины равной 4,57 и не допустима в эксплуатации. Колебания фундамента происходят с частотой возмущающей силы. При приближении частоты возмущающей силы  $k$  к частоте свободных колебаний к амплитуда колебаний будет возрастать, а период увеличиваться  $\left(T = \frac{2\pi}{k - \omega}\right)$ .

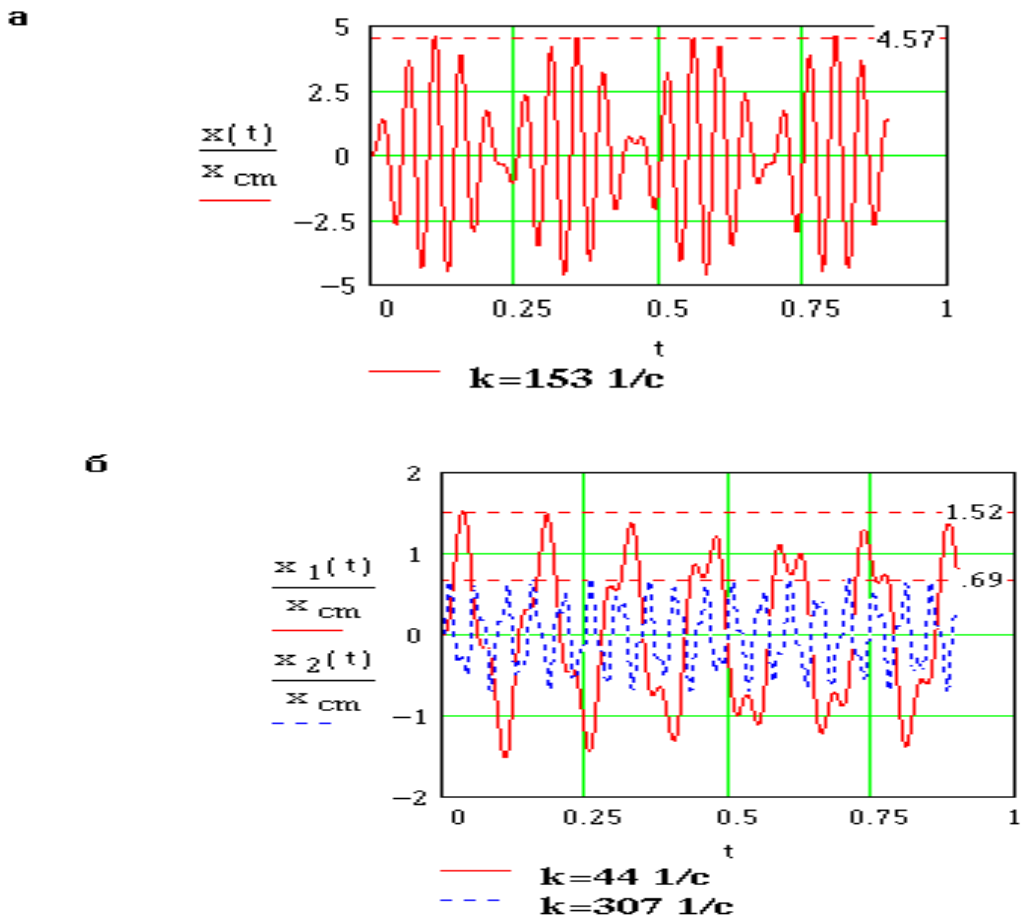


Рис. 3.18. Колебания фундамента при разных частотах возмущающей силы

Для того, чтобы снизить амплитуду вибраций необходимо уменьшить или увеличить частоту возмущающей силы.

Предположим, частоту вращения электродвигателя уменьшили в три раза ( $k = 44 \text{ с}^{-1}$ ). График переходного процесса показан на рис.3.18, б сплошной линией. Относительная амплитуда достигает величины 1,52.

Если рассмотренную машину выполнить двухступенчатым компрессором двойного действия, что в действительности соответствует прототипу (компрессор 2ВП 10/8), то частота вынужденных колебаний увеличиться в два раза и будет равна  $307 \text{ с}^{-1}$ .

График колебаний показан на рис. 3.19, б пунктирной линией. Относительная амплитуда колебаний не превышает 0,69.

Таким образом, для компрессора 2ВП 10/8, фундамент с габаритами  $a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 1,75 \text{ м}$ ,  $h = 0,6 \text{ м}$ , массой  $m_2 = 4620 \text{ кг}$  позволит получить абсолютную амплитуду колебаний  $0,975 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ , которая будет меньше допустимой  $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

Реальные фундаменты обладают силами вязкого сопротивления, поэтому колебания, показанные на рис. 3.18 будут, надо полагать, меньшими.

При выводе формулы (3.15) было введено понятие коэффициента относительного демпфирования  $\mu_{om} = \frac{\mu_1}{\omega_1}$ . Тогда формулу (3.27), характеризующую относительную амплитуду вынужденных колебаний запишем

$$\lambda_m = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{k}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + \left(2\mu_{om} \frac{k}{\omega_1}\right)^2}}$$

Графики функции  $\lambda_m = f\left(\frac{k}{\omega_1}\right)$  для различных значений  $\mu_{om}$  были рассмотрены на рис. 3.12. Некоторые авторы величину  $2\frac{\mu_{om}}{\omega_1}$  называют модулем затухания и обозначают

$\Phi = 2\frac{\mu_{om}}{\omega_1}$  [85]. Модуль затухания для различных грунтов равен  $\Phi = 0,0013 - 0,005 \text{ с}$ .

Нижний предел соответствует сухим грунтам средней жесткости и жестким; верхний предел - грунтам, насыщенным влагой, жестким и малой жесткости. Пески имеют меньший модуль затухания, чем глины и суглинки.

Колебания фундамента с учетом сил вязкого демпфирования характеризуются уравнением (3.17), общим решением которого являются зависимости (3.25). В соответствие с рекомендациями [85] о величине модуля затухания  $\Phi$ , коэффициент относительного демпфирования  $\mu_{om} = \frac{\Phi}{2} \omega_1 = (0,00065 - 0,0025) \omega_1$ . Для рассматриваемого примера  $\omega_1 = 126,51 \text{ с}^{-1}$ , следовательно  $\mu_{om} = 0,082 - 0,36$ . Примем среднее значение  $\mu_{om} = 0,02$ .

На рис. 3.11 было показано, что при наличии сил вязкого демпфирования свободные колебания затухают и в системе присутствуют только вынужденные колебания. Поэтому графики колебаний фундамента при частотах  $k = 44 \text{ с}^{-1}$ ,  $153 \text{ с}^{-1}$  и  $307,72 \text{ с}^{-1}$  будут представлять гармонические кривые с разными амплитудами. Если относительные амплитуды без демпфирования были соответственно равны 1,52; 4,57 и 0,69, то при  $\mu_{om} = 0,02$  они получились равными 1,1; 1,49; 0,19, т. е. уменьшились соответственно в 1,38; 3,06 и 3,6 раза. Биения, которые наблюдались при  $k = 153,86$  (рис. 3.18, б) при наличии сил вязкого сопротивления исчезли.

Следует отметить, что этот вывод можно было сделать из анализа графика резонансных кривых, приведенного на рис. 3.12, имея в виду  $\mu_{om} = 0,02$ , а отношение частот вынужденных к свободным колебаниям равны 0,349; 1,21 и 2,43.

Таким образом показано, что силы вязкого сопротивления существенно демпфируют колебания фундамента.

### 3.5. КОЛЕБАНИЯ И БАЛАНСИРОВКА ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧАСТЕЙ МАШИН

При вращении валов, зубчатых колес, муфт и роторов машин возникают центробежные силы. Если центр тяжести тела лежит на оси вращения, то тело статически сбалансировано и подшипники вала не испытывают динамических нагрузок. Однако, вследствие неточности изготовления и сборки, неоднородности материалов, износа и т. д. балансировка нарушается и, при определенных условиях, начинаются автоколебания. Характерным для этих колебаний является тот факт, что уровень вибраций не связан с величиной передаваемой мощности. Рассмотрим неуравновешенный диск  $m$ , вращающийся с угловой скоростью  $k$  (рис. 3.19). Предположим, что центр тяжести диска имеет радиальное смещение (эксцентриситет)  $e$  по отношению к оси вращения вала. Тогда центробежная сила будет  $F_u = mk^2e$ . Вертикальная составляющая этой силы  $T = mk^2e \sin kt$ , передается на подшипники и фундамент машины. Если допустить, что вал, вращающий массу  $m$ , абсолютно жесткий, то задача виброизоляции и выбора массы (габаритов) фундамента решается аналогично вышерассмотренной при проектировании фундамента компрессора.

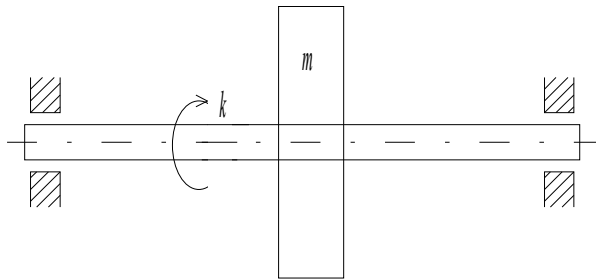


Рис. 3.19. Неуравновешенный вращающийся диск

Скорости, при которых наступают интенсивные колебания (резонанс) называются критическими скоростями. Для того чтобы уменьшить нагрузки от неуравновешенной массы на подшипники и фундамент, производится статическая балансировка вращающихся частей машины. Для этого вал размещают на двух рельсах, установленных на фундаменте. Утяжеленная часть диска займет нижнее положение. Момент за счет эксцентриситета можно уравновесить компенсирующей массой  $m_k$ , расположенной на радиусе  $r$ , т. е.

$$me = m_k r$$

Значит, компенсирующая масса  $m_k$  определится

$$m_k = \frac{e}{r} m.$$

Установив компенсирующую массу  $m_k$  на радиусе  $r$ , добиваются безразличного равновесия, при котором вал не будет перекатываться при любом его положении. Такая балансировка носит название статической и дает положительные результаты только для





$$F_u = m\bar{r}k^2 = \bar{\Psi}k^2,$$

где  $\bar{\Psi} = m\bar{r}$ .

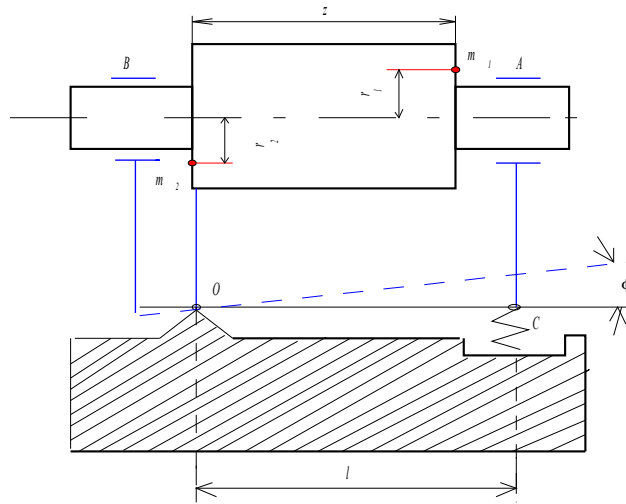


Рис.3.21. Принципиальная схема балансировочного станка

Вектор  $\bar{\Psi}$  - статический момент неуравновешенных масс относительно оси вращения, называется дисбалансом.

Таким образом, задача балансировки заключается в подборе масс  $m_1$  и  $m_2$  и их радиусов-векторов  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  таким образом, чтобы центробежные силы инерции неуравновешенных масс были уравновешены силами инерции  $F_{u1} = m_1\bar{r}_1k^2 = \bar{\Psi}_1k^2$  и  $F_{u2} = m_2\bar{r}_2k^2 = \bar{\Psi}_2k^2$ . Вертикальные составляющие центробежных сил вызывают колебания ротора. Запишем дифференциальное уравнение колебательного процесса ротора

$$J\varphi'' = M_T - M_y,$$

где  $J$  - момент инерции ротора и рамы относительно оси  $O$ , кг, м<sup>2</sup>;

$\varphi$  - угол поворота рамы, рад;

$M_T = z\bar{\Psi}k^2 \sin kt$  - момент, создаваемый центробежной силой  $F_u$ , Н·м;

$M_y$  - момент, создаваемый силой упругости  $F_y$ , Н·м.

Если момент от сил упругости принять согласно гипотезе Фойхта (рис. 1.7, б) равным  $M_y = l(\mu_y\varphi' + c\varphi)$ , то дифференциальное уравнение, характеризующее колебание рамы относительно оси  $O$  при вращении ротора запишется

$$\varphi'' + 2\mu_1\varphi' + \omega_1^2\varphi = a \sin kt, \quad (3.31)$$

где  $\mu_1 = \frac{l\mu_y}{2J}$  - коэффициент, характеризующий диссипативные свойства системы, с<sup>-1</sup>;

$\omega_1^2 = \frac{lc}{J}$  - частота свободных незатухающих колебаний;

$a = \frac{zk^2}{J}\bar{\Psi}$  - угловое ускорение рамы в точке  $C$  под действием дисбаланса  $\bar{\Psi}$ , с<sup>-2</sup>;

$l$  и  $z$  - размеры показанные на рис. 3.21.

Уравнение (3.31) аналогично уравнению (3.17) и было решено при изучении частотных свойств одномассовых механических систем. Решениями этого уравнения являются зависимости (3.24).

В соответствии с резонансной кривой (рис. 3.12), при равенстве частот свободных затухающих колебаний  $\omega$  и частотой  $k$ , амплитуда колебаний будет максимальной. Поэтому ротор разгоняют до скорости выше критической, затем электродвигатель отключают и при сравнении частоты  $k$  с частотой свободных колебаний  $\omega$ , замеряют амплитудное значение угла  $\varphi_{max}$ . С другой стороны, максимальный угол поворота равен

$$\varphi_{max} = \lambda_{\mu} \varphi_{cm}.$$

Здесь  $\lambda_{\mu} = \frac{\omega_1}{2\mu_1}$  - коэффициент динамичности при резонансе, определяемый по формуле (3.28);

$$\varphi_{cm} = \frac{a}{\omega_1^2} = \frac{zk^2}{J\omega_1^2} \bar{\Psi} - \text{угол поворота рамы под действием статической нагрузки.}$$

Из этих соотношений

$$\bar{\Psi} = 2 \frac{J\omega_1\mu_1}{zk^2} \varphi_{max} = \beta \varphi_{max}, \quad (3.32)$$

Следовательно, дисбаланс  $\bar{\Psi}$  прямо пропорционален амплитуде  $\varphi_{max}$ . Коэффициент пропорциональности  $\beta = 2 \frac{J\omega_1\mu_1}{zk^2}$  зависит от параметров балансировочного станка. В этой формуле кроме геометрических размеров балансировочного станка, а также частот  $\omega_1$  и  $k$ , и момента инерции  $J$  присутствует коэффициент  $\mu_1$ , который характеризует диссипативные свойства балансировочного станка. Последние два параметра, а именно, момент инерции  $J$  и коэффициент  $\mu_1$  точно определить трудно. Для экспериментального определения коэффициента пропорциональности  $\beta$ , дисбаланса вращающейся детали, масс  $m_1$  и  $m_2$ , а также их радиус-векторов  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  предлагается следующая методика.

Проиллюстрируем методику схемами, показанными на рис. 3.22.

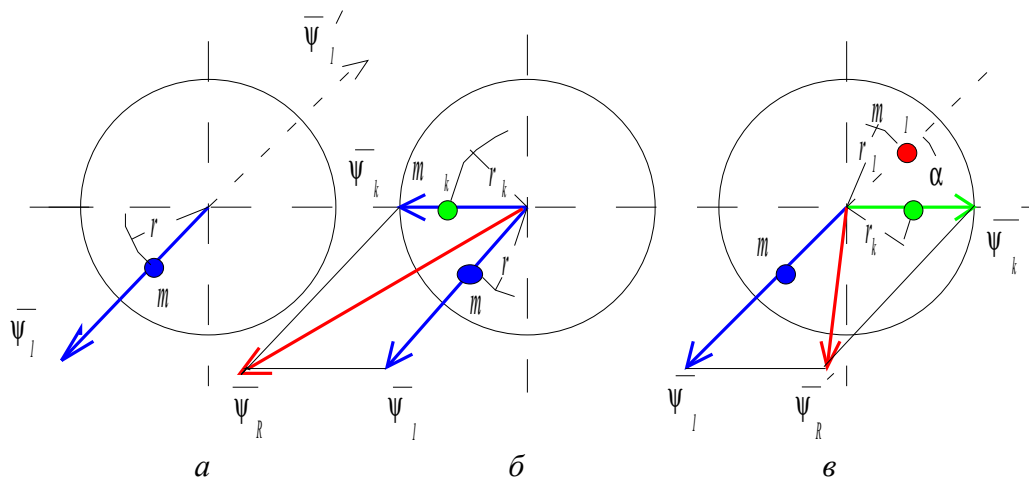


Рис. 3.22. Схемы, поясняющие процесс балансировки ротора машины

В первом эксперименте (рис. 3.22, *a*) ротор машины разгоняется до скорости выше критической, двигатель отключается и на свободном выбеге частота вращения ротора уменьшается. В силу неуравновешенности ротора амплитуда колебаний  $\varphi$  увеличивается и при  $\omega = k$  (резонанс) становится максимальной. Эта амплитуда замеряется и фиксируется как  $\varphi_1$ . Следовательно, можно заключить, эквивалентная несбалансированная масса ротора  $m$ , расположенная на радиусе  $r$  создает дисбаланс  $\bar{\Psi}_1$ , под действием которого амплитуда равна  $\varphi_1$ . На основании вышеприведенных рассуждений можно записать

$$\bar{\Psi}_1 = mr = \beta\varphi_1.$$

Во втором эксперименте (рис.3.22, *б*) на торце ротора на произвольном радиусе  $r_k$  присоединяем корректирующую массу  $m_k$ . Эта масса создает дополнительный дисбаланс  $\bar{\Psi}_k = m_k r_k$ . Под действием этого дисбаланса амплитуда колебаний при резонансе была бы  $\varphi_k$ , т. е.

$$\bar{\Psi}_k = m_k r_k = \beta\varphi_k.$$

Результирующий дисбаланс будет геометрической суммой  $\bar{\Psi}_R^2 = \bar{\Psi}_1^2 + \bar{\Psi}_k^2$ . Замеряется амплитуда  $\varphi_2$ , которая вызвана результирующим дисбалансом  $\bar{\Psi}_R$ . Следовательно

$$\bar{\Psi}_R^2 = \bar{\Psi}_1^2 + \bar{\Psi}_k^2 = \beta^2 \varphi_2^2.$$

В третьем эксперименте корректирующая масса  $m_k$  устанавливается на таком же расстоянии  $r_k$  от центра вращения, но в противоположном направлении последнего опыта (рис. 3.22, *в*). Результирующий дисбаланс  $\bar{\Psi}_{R'}$  и амплитуда  $\varphi_3$  будут связаны соотношением

$$\bar{\Psi}_{R'}^2 = \bar{\Psi}_1^2 - \bar{\Psi}_k^2 = \beta^2 \varphi_3^2.$$

Учитывая, что геометрическая сумма и геометрическая разность двух векторов выражается двумя диагоналями одного и того же параллелограмма, построенного на этих векторах, получим

$$\bar{\Psi}_R^2 + \bar{\Psi}_{R'}^2 = 2\bar{\Psi}_1^2 + 2\bar{\Psi}_k^2.$$

Выразим дисбалансы через амплитуды  $\varphi$  и коэффициент пропорциональности  $\beta$

$$\beta^2 \varphi_2^2 + \beta^2 \varphi_3^2 = 2\beta^2 \varphi_1^2 + 2\beta^2 \varphi_k^2.$$

Из последнего соотношения получим

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{1}{2}(\varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 2\varphi_1^2)}.$$

Так как дисбаланс  $\bar{\Psi}_k$  известен, определяется коэффициент пропорциональности  $\beta$

$$\beta = \frac{\bar{\Psi}_k}{\varphi_k} = \frac{m_k r_k}{\varphi_k}.$$

Теперь определяется модуль дисбаланса ротора

$$\bar{\Psi}_1 = \beta \varphi_1.$$

Модуль статического момента противовеса должен быть равен модулю дисбаланса ротора, поэтому масса  $m_k$  заменяется массой  $m_1$  при соблюдении соотношения  $m_1 r_1 = \bar{\Psi}_1$ , т. е. при известном  $\bar{\Psi}_1$ , задаваясь, например,  $m_1$  находится радиус  $r_1$ .

Для определения направления статического момента противовеса, т. е. угла  $\alpha$  воспользуемся теоремой косинусов. Из рис. 3.22, в имеем

$$\bar{\Psi}_{R'}^2 = \bar{\Psi}_1^2 + \bar{\Psi}_k^2 - 2 \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_k \cos \alpha.$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_k^2 - \varphi_3^2}{2 \varphi_1 \varphi_k}.$$

Так как косинус - четная функция, то последнее соотношение дает два решения, которые отличаются знаком. Таким образом, неизвестно в какую сторону следует откладывать угол  $\alpha$ . В четвертом эксперименте масса  $m_k$  заменяется массой  $m_1$ , которая располагается на радиусе  $r_1$  и под углом  $\alpha$  к ранее установленной массе  $m_k$ . Если получен положительный результат, то направление угла  $\alpha$  выбрано правильно, в противном случае направление угла  $\alpha$  меняется.

Для дальнейшей балансировки ротора необходимо поменять местами его торцевые поверхности (рис. 3.21) и аналогичным образом определить массу  $m_2$  и радиус  $r_2$ .

### 3.6. ДИНАМИКА МАШИН С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Первые научные сообщения об уравнениях движения с переменной массой были сделаны в 1898 г. молодым приват-доцентом Петербургского университета И.В. Мещерским. И.В. Мещерский (1859-1935) создал новый раздел механики - теорию движения тел переменной массы, который стал фундаментом в теории ракет и реактивной технике.

Основной закон движения точки переменной массы формулируется следующим образом: при движении точки в любой момент времени произведение массы этой точки на ее ускорение равно геометрической сумме действующих на точку сил и реактивной силы [65]. Дифференциальное уравнение движения точки переменной массы получило название уравнения И.В. Мещерского и записывается

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F + F_p \quad (3.33)$$

где  $m$  - масса точки в конкретный момент времени, кг;

$v$  - скорость точки, м·с<sup>-1</sup>;

$\sum F$  - геометрическая сумма сил, Н;

$F_p$  - реактивная сила, Н;

$t$  - текущее время, с.

Реактивная сила равна  $F_p = \frac{dm}{dt} v_p$ .

Здесь  $\frac{dm}{dt}$  - скорость изменения массы, кг·с<sup>-1</sup>;

$v_p = u \pm v$  - относительная скорость присоединенной массы, м·с<sup>-1</sup>;

$u$  - абсолютная скорость, с которой присоединяются (отсоединяются) дополнительные массы к точке, м·с<sup>-1</sup>.

Если относительная скорость  $v_p = 0$ , т. е. тело переменной массы не “стреляет” отделяющимися от него частицами, а просто “крошится”, то реактивная сила равна нулю и уравнение движения переменной массы выражается уравнением

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F. \quad (3.34)$$

Это уравнение движения материальной точки, в котором масса  $m$  - заданная функцией времени.

Из-за малой величины относительной скорости  $v_p$ , во многих задачах динамики машин, реактивную силу можно считать равной нулю. При использовании уравнения (3.33) необходимо иметь в виду, что присоединение (отсоединение) массы происходит не мгновенно. В противном случае производная от массы по времени обращается в бесконечность.

Примером мгновенного изменения массы может служить соединение электровоза и вагона, которые двигаются с различными скоростями. Для решения подобного класса задач необходимо пользоваться теорией удара.

Другим примером динамики с мгновенным изменением массы являются процессы скольжения канатов по многоканатному шкиву трения [70]. В практике эксплуатации многоканатного подъема могут возникнуть случаи, когда силы трения канатов о шкив трения будут меньше разности натяжений ветвей канатов. В этом случае от вращающихся масс машины отсоединяются поступательно движущиеся массы сосудов и канатов и установка разделяется на две взаимозависимые системы.

В установках ударно-канатного бурения можно считать, что масса бурового инструмента присоединяется мгновенно.

К классу задач, в которых присоединяемая масса задана какой-либо функцией относится пуск машин с изменяющейся массой в процессе пуска. К таким машинам относятся конвейеры, транспортеры, самоходные вагоны. При работе самоходного вагона масса кабеля изменяется, что отражается на работе привода кабельного барабана.

При решении многих задач шахтного подъема изменения масс ветвей канатов и их жесткостей игнорировались. Этот факт объяснялся незначительным изменением длины канатов в переходном процессе и усложнением математической модели. Использование персональных компьютеров и численных методов снимают эти проблемы.

Другой задачей динамики машин, в которой масса точки изменяются, является исследование формирования динамических нагрузок при загрузке подъемного сосуда полезным ископаемым.

### 3.6.1 ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ЗАГРУЗКЕ ПОДЪЕМНОГО СОСУДА

Принципиальная схема при загрузке подъемного сосуда приведена на рис. 3.23. При подходе скипа к загрузочному устройству скип массой  $m_c$  нажимает на педаль 1, которая с помощью каната 2 связана с приводом затвора дозатора 3 бункера 4. Полезное ископаемое из дозатора загружается в подъемный сосуд. За время, равное  $\theta$ , в скип загружается

полезное ископаемое массой  $m_n$ . В соответствии с зависимостью (1.6) эквивалентная масса собственного веса сосуда равна  $m_m = m_c + \frac{1}{3} m_k$ .

Здесь  $m_k = pL$  - масса каната, кг;

$p$  - линейная плотность каната, кг·м<sup>-1</sup>;

$L$  - длина каната, м.

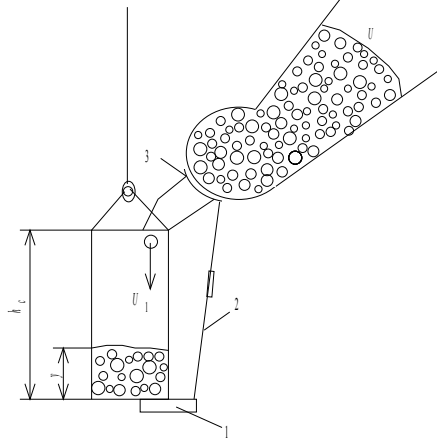


Рис. 3.23. Принципиальная схема загрузочного устройства

Дифференциальное уравнение движения подъемного сосуда массой  $m$  в процессе загрузки, на основании (3.33) будет

$$mx'' = \sum F + F_p,$$

где  $m = m_c + \frac{m_n}{\theta} t$  - текущее значение массы сосуда и полезного ископаемого, кг.

Из схемы, показанной на рис. 3.23 видно, что сила от веса сосуда  $gm$  и усилие в канате  $F_k$  направлены в разные стороны, поэтому

$$\sum F = g(m_c + \frac{m_n}{\theta} t) - F_k.$$

В соответствии с уравнением (1.8) усилие в канате равно

$$F_k = c(x_{cm} + x) + \mu x',$$

где  $c = \frac{EF}{L+x}$  - жесткость каната, Н·м<sup>-1</sup>;

Статическая деформация каната определяется силой тяжести, поэтому

$$\sum F = g \frac{m_n}{\theta} t - cx - \mu x'.$$

Реактивную силу  $F_p$  определим из следующих соображений. Предположим, что полезное ископаемое загружается равномерно. Тогда скорость изменения массы

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_n}{\theta}.$$

Допустим, вертикальная составляющая скорости истечения груза из дозатора равна  $u_1$ . Полезное ископаемое падает с ускорением свободного падения, достигая днища скипа. В первоначальный момент высота падения груза равна высоте сосуда  $h_c$ . В дальнейшем эта высота будет равна

$$h_x = h_c + x - y.$$

Здесь  $y$  - высота слоя полезного ископаемого в скипе, м.

Конструкция загрузочного устройства выполнена таким образом, что при  $y = h_c$  полезное ископаемое закрывает выходное отверстие и загрузка прекращается. Таким образом, если высота заполнения сосуда  $h_c$  осуществляется за время  $\theta$  с, то

$$y = \frac{h_c}{\theta} t, \quad h_x = x + h_c \left(1 - \frac{t}{\theta}\right).$$

При падении с высоты  $h_x$  полезное ископаемое достигнет скорости

$$u = u_1 + \sqrt{2gh_x}.$$

Здесь  $u_1$  - первоначальная скорость, м·с<sup>-1</sup>.

Величина  $u$  характеризует абсолютную скорость, с которой к сосуду присоединяются дополнительные массы. Таким образом относительная скорость присоединенной массы будет  $v_p = u - x'$ . Уравнение, характеризующее динамический процесс загрузки запишется

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt} + \frac{dm}{dt} \left[ u_1 + \sqrt{2g \left( x + h_c \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \right)} \right] - \frac{dx}{dt}. \quad (3.35)$$

Зависимость (3.35) является нелинейным, неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами и может быть решено численными методами.

Для исследования динамического процесса при загрузке подъемного сосуда полезным ископаемым, введя обозначения  $Y(1) = x$ ,  $Y(2) = x'$ ,  $F(2) = x''$ , зависимость (3.35) представим в виде системы уравнений с наложенными ограничениями

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq \theta \quad m &= m_0 + \frac{m_n}{\theta} t, \\ t \geq \theta \quad m &= m_0 + m_n, \quad c = \frac{EF}{L+x}; \\ F(1) &= Y(1), \quad \mu = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}; \\ \sum F &= q \frac{m_n}{\theta} t - cY(1) - \mu Y(2), \quad t \geq \theta \quad \sum F = qm - cx - \mu x; \\ h_x &= Y(1) + h_c \left(1 - \frac{t}{\theta}\right), \quad t \geq \theta \quad h_x = 0; \\ u &= u_1 + \sqrt{2gh_x}, \quad t \geq \theta \quad u = 0; \\ V_p &= u - Y(2), \quad t \geq \theta \quad V_p = 0; \end{aligned}$$



$$F(2) = \frac{\sum F + F_p}{m}, \quad t \geq \theta \quad F_p = 0.$$

Эта система уравнений решена численным методом Рунге-Кутты.

На рис. 3.24. приведены графики изменения координат положения сосуда, усилия в канате и высоты падения груза. Видно, что при загрузке сосуда в канате формируется колебательный процесс, который к концу загрузки практически затухает. Амплитудные значения усилий в канате не превышают 1,1, по сравнению с усилиями, которые получились бы без учета колебаний.

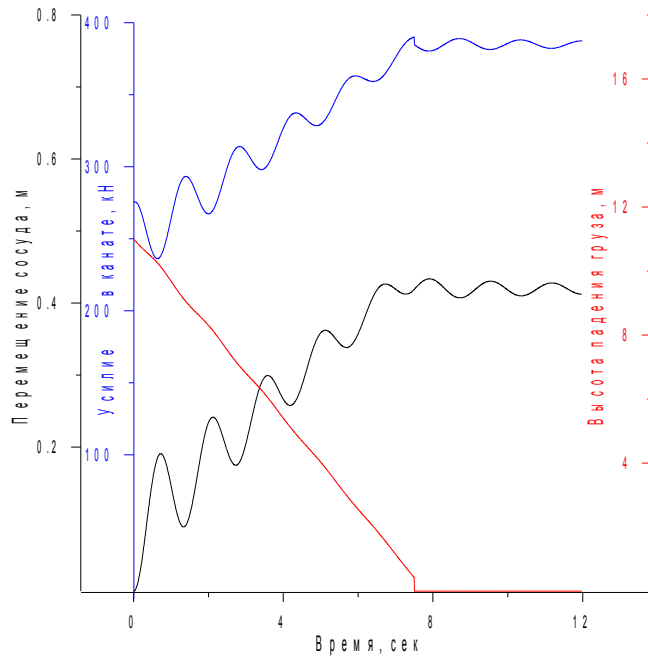


Рис. 3.24. Характеристики динамического процесса при загрузке скипа

Результат моделирования показывает, что изменение массы в динамическом процессе грузоподъемных машин не приводит к формированию опасных динамических нагрузок и не создает дополнительных трудностей для системы автоматического регулирования приводом машины.

#### 4. ДВУХМАССОВЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Сделав определенные допущения, любую машину можно представить двух массовой механической системой. Например, шахтная подъемная установка, у которой барабан соединен с подъемным сосудом канатом, а второй подъемный сосуд отсутствует, может быть представлена эквивалентной схемой, показанной на рис. 4.1.

Используя принцип Даламбера [76], математическую модель двух массовой механической системы можно записать

$$\begin{cases} m_x x'' = F_{\text{об}}(t) - F_y - F_m(t) - F_{\text{cm}}(x), \\ m_y y'' = F_y - P_y \operatorname{sign} y', \\ F_y = \mu_y (x' - y') + c_y (x - y). \end{cases} \quad (4.1)$$

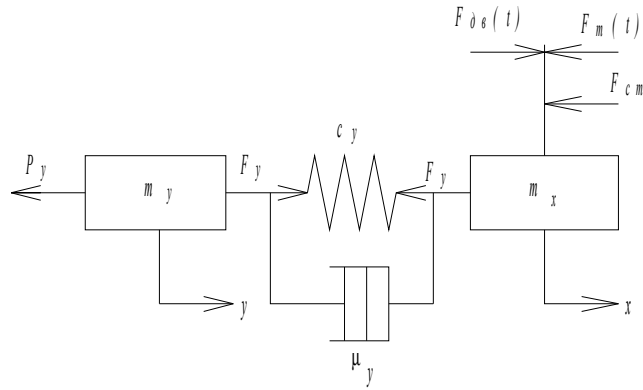


Рис. 4.1. Двух массовая механическая система

Подставив значение силы упругости  $F_y$ , и разделив каждое уравнение соответственно на  $m_x$  и  $m_y$ , получим

$$\begin{cases} x'' + \frac{\mu_y}{m_x} x' - \frac{\mu_y}{m_x} y' + \frac{c_y}{m_x} x - \frac{c_y}{m_x} y = \frac{F_{дс}(t) - F_m(t) - F_{см}(x)}{m_x}, \\ y'' + \frac{\mu_y}{m_y} y' - \frac{\mu_y}{m_y} x' + \frac{c_y}{m_y} y - \frac{c_y}{m_y} x = -P_y \text{ sign } y'. \end{cases} \quad (4.2)$$

Для решения системы уравнений (4.2) вычтем из первого уравнения второе и, обозначив

$$\Delta'' = x'' - y''; \quad \Delta' = x' - y'; \quad \Delta = x - y,$$

получим

$$\Delta'' + 2\mu_2 \Delta' + \omega_2^2 \Delta = a_2(t), \quad (4.3)$$

где  $\mu_2 = \frac{1}{2} \mu_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y}$  - коэффициент, характеризующий диссипативные свойства двух массовой механической системы,  $c^{-1}$ ;

$\omega_2 = \sqrt{c_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y}}$  - частота свободных колебаний системы при отсутствии демпфирования,  $c^{-1}$ ;

$a_2(t) = \frac{F_{дс}(t) - F_m(t) - F_{см}(x)}{m_x} + \frac{P_y}{m_y} \text{ sign } y'$  - замедление машины без учета сил упругости,  $m \cdot c^{-2}$ .

Период колебаний будет  $T = \frac{2\pi}{\omega_2}$ , с.

#### 4.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ

## ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ

Предположим, что в реальной машине отсутствуют силы, связанные с рассеиванием энергии. Тогда коэффициент, характеризующий диссипативные свойства системы,  $\mu_2$  будет равен нулю и уравнение (4.3) примет вид

$$\Delta'' + \omega_2^2 \Delta = a_2(t). \quad (4.4)$$

## 4.1.1. ВОЗМУЩАЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ К МАШИНЕ ПРИКЛАДЫВАЕТСЯ СТУПЕНЬЮ

Если к машине прикладывается возмущающее воздействие ступенью, которое в процессе остается постоянной величиной, то замедление (ускорение)  $a_2(t)$  - постоянно, т. е.  $a_2(t) = a_2 = \text{const}$ . Допущение, что силы, приложенные к массам, остаются постоянными, соответствует реальным условиям эксплуатации многих машин. Например, движущееся усилие асинхронного двигателя с фазным ротором при пуске на каждой ступени изменяется от величины  $F_1$  до  $F_2$  ( $F_2$  и  $F_1$  - верхнее и нижнее усилия переключения). Однако, для некоторых случаев можно допустить, что среднее усилие при пуске  $F_{-p} = \sqrt{F_1 F_2}$  есть величина постоянная. Такое усилие для привода постоянного тока может быть задано системой автоматического регулирования. Для многих машин тормозное усилие можно считать постоянной величиной. Как правило, в этом случае длительность динамического процесса торможения значительно больше времени срабатывания тормоза, так как величина тормозного усилия по отношению к статическому небольшая и тормоз предназначен для остановки и стопорения. Если статическое сопротивление постоянно, то уравнение (4.4) имеет вид

$$\Delta'' + \omega_2^2 \Delta = a_2. \quad (4.5)$$

Эта зависимость является классическим уравнением, характеризующим вынужденные колебания системы при отсутствии демпфирования [13]. Поскольку корни характеристического уравнения комплексные, то общее решение уравнения (4.5) примет вид

$$\Delta = C_1 \sin \omega_2 t + C_2 \cos \omega_2 t + \frac{a_2}{\omega_2^2}, \quad (4.6)$$

$$\Delta' = C_1 \omega_2 \cos \omega_2 t - C_2 \omega_2 \sin \omega_2 t. \quad (4.7)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , определенные из начальных условий т.е. при  $t = 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta' = 0$  равны  $C_1 = 0$ ;  $C_2 = -\frac{a_2}{\omega_2^2}$ . Тогда уравнения (4.6), (4.7) можно записать

$$\Delta = \frac{a_2}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 t), \quad (4.8)$$

$$\Delta' = \frac{a_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t. \quad (4.9)$$

Примем силу вредного сопротивления  $P_y$  равной нулю. Из системы (4.2) видно, что

$$y'' = \frac{c_y}{m_y} \Delta; \quad x'' = a_2 - \frac{c_y}{m_x} \Delta,$$

или

$$y'' = \frac{m_x}{m_x + m_y} a_2 (1 - \cos \omega_2 t), \quad (4.10)$$

$$x'' = \frac{m_x}{m_x + m_y} a_2 \left( 1 + \frac{m_y}{m_x} \cos \omega_2 t \right). \quad (4.11)$$

Обозначим  $\frac{m_x}{m_x + m_y} a_2 = \frac{\sum F}{m_x + m_y} = a$ ,

где  $a$  - замедление (ускорение) машины под воздействием суммы сил  $\sum F$ , при допущении, что все массы сосредоточены в одной материальной точке, т. е. машина представлена системой с одной степенью свободы. Вокруг этой величины совершают колебания массы  $m_y$  и  $m_x$ .

Уравнения (4.10) и (4.11) можно представить в виде

$$y'' = a(1 - \cos \omega_2 t); \quad (4.12)$$

$$x'' = a \left( 1 + \frac{m_y}{m_x} \cos \omega_2 t \right) \quad (4.13)$$

Скорости масс равны:

$$y' = v_0 + at - \frac{a}{\omega_2} \sin \omega_2 t; \quad (4.14)$$

$$x' = v_0 + at + \frac{am_y}{\omega_2 m_x} \sin \omega_2 t \quad (4.15)$$

где  $v_0$  - скорость в начальной момент переходного процесса, м·с<sup>-1</sup>.

На рис 4.2 показаны процессы торможения машины при разных соотношениях  $m_x/m_y$ .

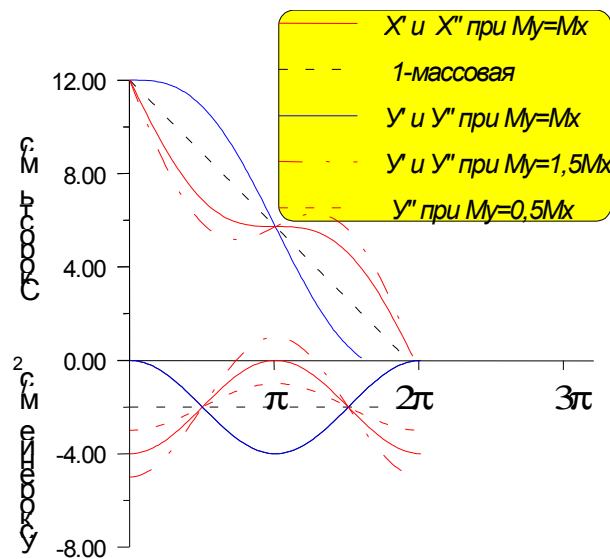


Рис. 4.2. Процесс торможения машины

Допустим, машина представлена одно-массовой системой, а тормозное усилие прикладывается ступенью. Под воздействием этого усилия замедление машины  $a = 2 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Скорость и замедление, характеризующие квазидинамический процесс (все массы сосредоточены в одной материальной точке) показаны прямыми пунктирными линиями.

Замедление массы  $m_y$  изменяется от нуля и через полпериода ( $\omega t = \pi$ ) достигает двукратной величины по отношению к  $a$ . Скорость массы  $m_y$  на отрезке  $0 - \pi$  больше скорости машины.

Замедление массы  $m_y$  колеблется вокруг прямой, соответствующей процессу для одно-массовой системы, при этом амплитуда колебаний зависит от соотношения масс  $m_y$  и  $m_x$ . При  $m_y = m_x$ , в момент приложения к массе  $m_x$  усилия ступенью, замедление ее равно  $2a$ . (кривая 1). Через четверть периода ( $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ) замедления масс  $m_y$  и  $m_x$  равны, а

через полпериода  $x'' = 0$ , а  $y'' = 2a$ . (кривая 3). При уменьшении отношения  $\frac{m_y}{m_x}$

амплитуда колебаний массы  $m_x$  уменьшается. При  $\frac{m_y}{m_x} = 0,5$ , максимальное замедление массы  $m_x$  равно  $1,5a$ . (кривая 5).

Если масса  $m_y > m_x$ , замедление  $y''$  может достигать величины более  $2a$  и в отдельные моменты времени ( $\omega_2 t = \pi; 3\pi$ ) менять знак (кривая 4).

При  $\frac{m_y}{m_x} = 1,5$  замедление  $x''$  изменяется в пределах от  $-2,5a$  до  $+0,5a$

(от  $-5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$  до  $+1,0 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ ) (кривая 4), т. е. при  $\omega t = \pi$  масса  $m_x$  разгоняется с ускорением  $1 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . В момент остановки массы  $m_x$  замедление  $x''$  приобретает нулевое значение, а скорость и замедление массы  $m_y$  имеют значения  $y'_0$  и  $y''_0$ , определяемые начальными условиями.

Пример 4.1. Исследовать процесс пуска вентиляторной установки. Рабочее колесо вентилятора посажено на вал диаметром  $0,3 \text{ м}$ . Длина вала  $4 \text{ м}$ . Момент инерции вентилятора  $6250 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Вентилятор имеет привод мощностью  $500 \text{ кВт}$ , с частотой вращения  $500 \text{ об}\cdot\text{мин}^{-1}$  и моментом инерции  $2150 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Эквивалентная схема такой установки представлена на рис. 4.3. Будем считать, что рабочее колесо вентилятора имеет момент инерции  $J_y$ , а ротор электродвигателя  $J_x$ .

Введем координаты отсчета  $\varphi_y$  и  $\varphi_x$ . На рабочее колесо вентилятора действует момент сопротивления  $M_{ct}$ , равный по величине номинальному моменту электродвигателя. Привод во время пуска развивает постоянный момент  $\gamma M_{об}$ . Перегрузочная способность электродвигателя  $\gamma = 1,8$ . Номинальный момент, развиваемый электродвигателем, определяется  $M_n = 975g \frac{P}{n} = 975 \cdot 9,81 \frac{500}{500} = 9750 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; следовательно,  $M_{ct} = 9750 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $M_{об} = 1,8 \cdot 9750 = 17550 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

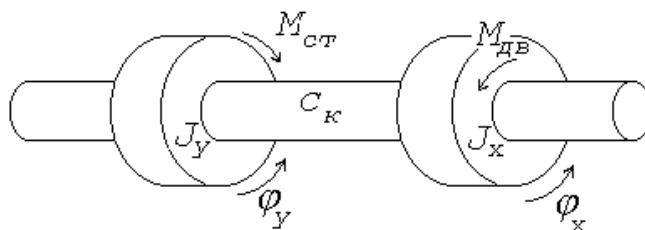


Рис. 4.3. Эквивалентная схема вентиляторной установки

Жесткость вала при кручении  $c_k$

$$c_k = \frac{G_{cd}}{L} J_n = \frac{8,1 \cdot 10^{10}}{4} 0,1 \cdot 0,3^4 = 16,4 \cdot 10^6 \text{ Нм.}$$

Где  $G_{cd} = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$  - модуль упругости углеродистой стали при сдвиге;

$J_n = 0,1 \text{ д}^4$  - полярный момент инерции круглого вала;

$L = 4$  - длина вала, м.

Используя принцип Даламбера, математическую модель рассматриваемой схемы можно записать

$$J_x \varphi_x'' = M_{\text{дв}} - M_y,$$

$$J_y \varphi_y'' = M_y - M_{\text{см}},$$

$$M_y = c_k (\varphi_x - \varphi_n).$$

Эти уравнения аналогичны уравнению (4.1) и приводятся к уравнению (4.5)

$$\Delta'' + \omega_2^2 \Delta = a_2,$$

где 
$$\omega_2 = \sqrt{c_k \frac{J_x + J_y}{J_x J_y}} = \sqrt{16,4 \cdot 10^6 \frac{2150 + 6250}{2150 \cdot 6250}} = 101,2 \text{ с}^{-1},$$

$$a_2 = \frac{M_{\text{дв}}}{J_x} - \frac{M_{\text{см}}}{J_y} = \frac{17550}{2150} - \frac{9750}{6250} = 6,6 \text{ с}^{-2}.$$

Решение этого уравнения есть зависимость (4.8)

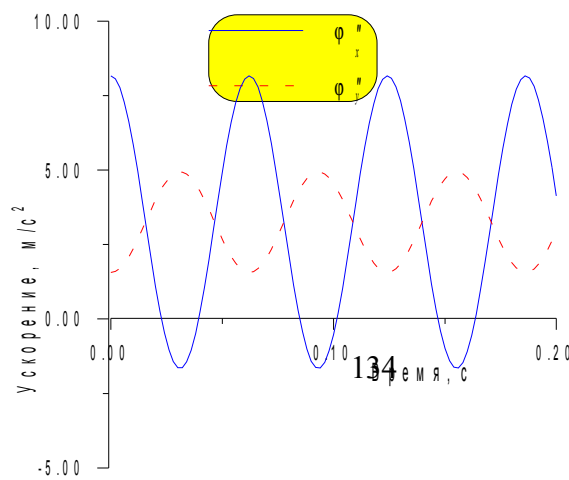
$$\Delta = \frac{a_2}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 t).$$

Ускорения масс  $m_x$  и  $m_y$  определяются

$$\varphi_x'' = \frac{1}{J_x} (M_{\text{дв}} - c_k \Delta),$$

$$\varphi_y'' = \frac{1}{J_y} (M_{\text{см}} + c_k \Delta).$$

Характеристики  
пуска  
4.4.



колебательного процесса при  
вентилятора показаны на рис.

Рис. 4.4. Характеристики колебательного процесса

Видно, что  $\varphi_x''$  и  $\varphi_y''$  имеют высокочастотные колебания  $\omega = 101,2 \text{ с}^{-1}$  с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,062 \text{ с}$ . Угловая скорость, соответствующая максимальной частоте вращения равна  $v_{max} = \frac{\pi n}{30} = 52,3 \text{ с}^{-1}$ , следовательно, время разгона будет  $T_p = \frac{v_{max}}{a_1} = 7,9 \text{ с}$ . Если этот график представить в функции  $\omega_2 t$ , то он будет аналогичен процессу, показанному на рис. 4.2.

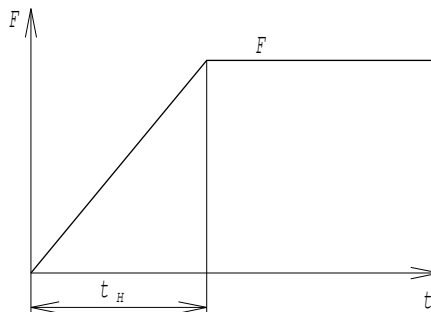
#### 4.1.2. ВОЗМУЩАЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРИКЛАДЫВАЕТСЯ К МАШИНЕ ПО ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

В разделах (1.4), (1.5) были рассмотрены механические характеристики машин и их приводов. Показано, что некоторые машины имеют линейные механические характеристики, а для многих машин, с достаточной точностью для инженерной практики, эти характеристики можно линеаризовать.

Линейная характеристика изменения движущего или тормозного усилия показана на рис. 4.5. Текущее значение усилия  $F(t)$  запишется

$$F(t) = \frac{F}{t_n} t, \quad (4.16)$$

где  $F$  - установившееся значение усилия, Н;  
 $t_n$  - время нарастания усилия, с.

Рис. 4.5. Линейная характеристика  $F(t)$ 

Тогда уравнение (4.4) будет

$$\Delta'' + \omega_2^2 \Delta = \rho_1 t, \quad (4.17)$$

где  $\rho_1 = \frac{F}{t_n m_x} = \frac{a_2}{t_n}$  - рывок, характеризующий скорость изменения ускорения (замедления) массы  $m_x$ ,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-3}$ .

Уравнение (4.17) - неоднородное линейное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение находим аналогично уравнению (3.24).

Общее решение однородного уравнения при комплексных корнях характеристического уравнения будет аналогичным решению уравнения (3.5) без правой части, т. е.

$$\bar{\Delta} = C_1 \sin \omega_2 t + C_2 \cos \omega_2 t.$$

Частное решение уравнения (4.17) будем искать в виде  $\Delta^* = C_3 t$ . Тогда  $\Delta'^* = C_3$ ;  $\Delta''^* = 0$ .

Подставив эти значения в уравнение (4.17), определим  $C_3 = \frac{\rho_1}{\omega_2^2}$ , тогда искомое решение запишем

$$\Delta = C_1 \sin \omega_2 t + C_2 \cos \omega_2 t + \frac{\rho_1}{\omega_2^2} t, \quad (4.18)$$

$$\Delta' = C_1 \omega_2 \cos \omega_2 t - C_2 \omega_2 \sin \omega_2 t + \frac{\rho_1}{\omega_2}. \quad (4.19)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , определенные из начальных условий-  $t = 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta' = 0$  - равны „ $C_1 = -\frac{\rho_1}{\omega_2^3}$ ;  $C_2 = 0$ .

Уравнения (4.18) и (4.19) примут вид

$$\Delta = \frac{\rho_1}{\omega_2^2} \left( t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \quad (4.20)$$

$$\Delta' = \frac{\rho_1}{\omega_2} (1 - \cos \omega_2 t). \quad (4.21)$$

Зная, что  $y'' = \frac{c_y}{m_y} \Delta$  и  $x'' = \rho_1 t - \frac{c_y}{m_x} \Delta$  получим

$$y'' = \rho \left( t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \quad (4.22)$$

$$x'' = \rho \left( t + \frac{m_y}{m_x} \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right). \quad (4.23)$$

Здесь  $\rho = \frac{F}{t_n (m_x + m_y)} = \frac{a}{t_n}$  - рывок, характеризующий скорость изменения ускорения (замедления) машины, представленной одно-массовой механической системой,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-3}$ .

Интегрируя (4.22) и (4.23), получим закономерности изменения скоростей масс  $m_y$  и  $m_x$ .



$$y' = v_0 + \rho \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{\omega_2^2} (\cos \omega_2 t - 1) \right], \quad (4.24)$$

$$x' = v_0 + \rho \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{1}{\omega_2^2} \frac{m_y}{m_x} (\cos \omega_2 t - 1) \right]. \quad (4.25)$$

Где  $v_0$  - скорость масс в начале процесса,  $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

По истечении времени нарастания  $t_n$  усилие достигнет установившейся величины  $F$  и дальнейший процесс будет совершаться при постоянном возмущающем воздействии. Параметры колебательного процесса будут определяться уравнениями (4.20) - (4.25) при значении времени  $t = t_n$ , в частности,

$$\Delta_n = \frac{\rho_1}{\omega_2^2} \left( t_n - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t_n \right),$$

$$\Delta'_n = \frac{\rho_1}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 t_n).$$

Уравнение (4.17) примет вид

$$\Delta'' + \omega_2^2 \Delta = a_2.$$

Полученное уравнение аналогично уравнению (4.5) и его решениями будут зависимости (4.6) и (4.7). Мысленно перенесем начало координат процесса в точку, соответствующую времени  $t_n$ , т. е. в приведенных ниже зависимостях текущее значение времени изменяется от нуля.

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , определенные из начальных условий -  $t = 0$ ,  $\Delta = \Delta_n$ ,  $\Delta' = \Delta'_n$  - равны

$$C_1 = \frac{m_y}{c_y} a \frac{(1 - \cos \omega_2 t_n)}{\omega_2 t_n},$$

$$C_2 = a \frac{m_y}{c_y} \frac{\sin \omega_2 t_n}{\omega_2 t_n} = \frac{m_y}{c_y} a \frac{\sin \omega_2 t_n}{\omega_2 t_n}.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  можно представить в виде

$$C_1 = A_2 \sin \theta_2; \quad C_2 = A_2 \cos \theta_2, \quad \text{тогда, очевидно, } A_2 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \theta_2 = \text{arctg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Подставив значения  $C_1$  и  $C_2$ , получим

$$A_2 = a \frac{m_y}{c_y \omega_2 t_n} \sqrt{2(1 - \cos \omega_2 t_n)}; \quad \text{tg} \theta_2 = \frac{1 - \cos \omega_2 t_n}{\sin \omega_2 t_n}.$$

Обратим внимание на тот факт, что функция  $1 - \cos \omega t_n$  всегда положительная, следовательно, подкоренное выражение также всегда положительная величина.

Известно, что  $1 - \cos \omega t_n = 2 \sin^2 \frac{\omega t_n}{2}$  [24], тогда

$$A_2 = a \frac{m_y}{m_x} \frac{\sin \frac{\omega_2 t}{2}}{\frac{\omega_2 t}{2}}; \theta_2 = \arctg \left( \frac{1}{\sin \omega_2 t} - c \operatorname{tg} \omega_2 t \right)$$

Уравнения (4.6), (4.7) можно записать

$$\Delta = A_2 \sin \theta_2 \sin \omega_2 t + A_2 \cos \theta_2 \cos \omega_2 t + \frac{a_2}{\omega_2},$$

$$\Delta' = A_2 \omega_2 \sin \theta_2 \cos \omega_2 t - A_2 \omega_2 \cos \theta_2 \sin \omega_2 t.$$

Или

$$\Delta = A_2 \cos(\theta_2 - \omega_2 t) + a \frac{m_y}{c_y}, \quad (4.26)$$

$$\Delta' = A_2 \omega_2 \sin(\theta_2 - \omega_2 t). \quad (4.27)$$

В этих уравнениях  $A_2$  - амплитуда колебаний, м;  $\theta_2$  - разность фаз или фазовый угол колебаний, рад.

Если ввести обозначение  $A = \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}}$ , тогда  $A_2 = a \frac{m_y}{c_y} A$ . Запишем уравнения

(4.26), (4.27) в виде

$$\Delta = a \frac{m_y}{c_y} [1 + A \cos(\theta_2 - \omega_2 t)], \quad (4.28)$$

$$\Delta' = a \frac{m_y}{c_y} \omega_2 A \sin(\theta_2 - \omega_2 t). \quad (4.29)$$

Используя известные зависимости  $y'' = \frac{c_y}{m_y} \Delta$  и  $x'' = a_2 - \frac{c_y}{m_x} \Delta$ , получим

$$y'' = a [1 + A \cos(\theta_2 - \omega_2 t)], \quad (4.30)$$

$$x'' = a \left[ 1 - \frac{m_y}{m_x} A \cos(\theta_2 - \omega_2 t) \right]. \quad (4.31)$$

Из уравнений (4.30), (4.31) видно, что колебания замедлений (ускорений) масс совершается вокруг величины  $a$ , при этом амплитуды  $y''$  зависят только от величины  $A$ , а  $x''$  определяется также отношением  $m_y$  и  $m_x$ . Проинтегрировав (4.30) и (4.31) получим

$$y' = v_0 + at + \frac{a}{\omega_2} A \sin(\theta_2 - \omega_2 t), \quad (4.32)$$

$$x' = v_0 + at - \frac{a}{\omega_2} \frac{m_y}{m_x} A \sin(\theta_2 - \omega_2 t). \quad (4.33)$$

Пример 4.2. Построить графики переходных процессов для машины имеющей:  $m_x = 60570$  кг;  $m_y = 18840$  кг;  $c_y = 1,54 \cdot 10^5$  Н·м<sup>-1</sup>;  $F = -79,4$  кН;  $v_0 = 12$  м·с<sup>-1</sup>;  $\omega_2 = 3,27$  с<sup>-1</sup>.

Время нарастания тормозного усилия принять равным соответственно:  $0,5T$ ;  $T$ ;  $1,5T$ ;  $2T$ .

Период колебаний  $T = 2\pi/\omega_2 = 1,92$  с.

Процессы характеризуются уравнениями

$$\text{при } 0 < t < t_n: \quad \begin{aligned} y'' &= \rho \left( t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \\ x'' &= \rho \left( t + \frac{m_y}{m_x} \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \end{aligned}$$

$$\text{при } t > t_n: \quad \begin{aligned} y'' &= a [1 + A \cos(\Theta_2 - \omega_2 t)], \\ x'' &= a \left[ 1 - \frac{m_y}{m_x} A \cos(\Theta_2 - \omega_2 t) \right]. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Расчетные значения параметров

$t_n$ , с	$0,5T = 0,96$	$1T = 1,92$	$2T = 3,84$
$\rho$ , м·с <sup>-3</sup>	1,04	0,52	0,26
$a$ , м·с <sup>-2</sup>	1,0	1,0	1,0
$A$	0,636	0	0
$\theta$ , рад	$0,5\pi$	0	0

Процессы замедлений на фоне тормозных характеристик показаны на рис. 4.6, а и б.

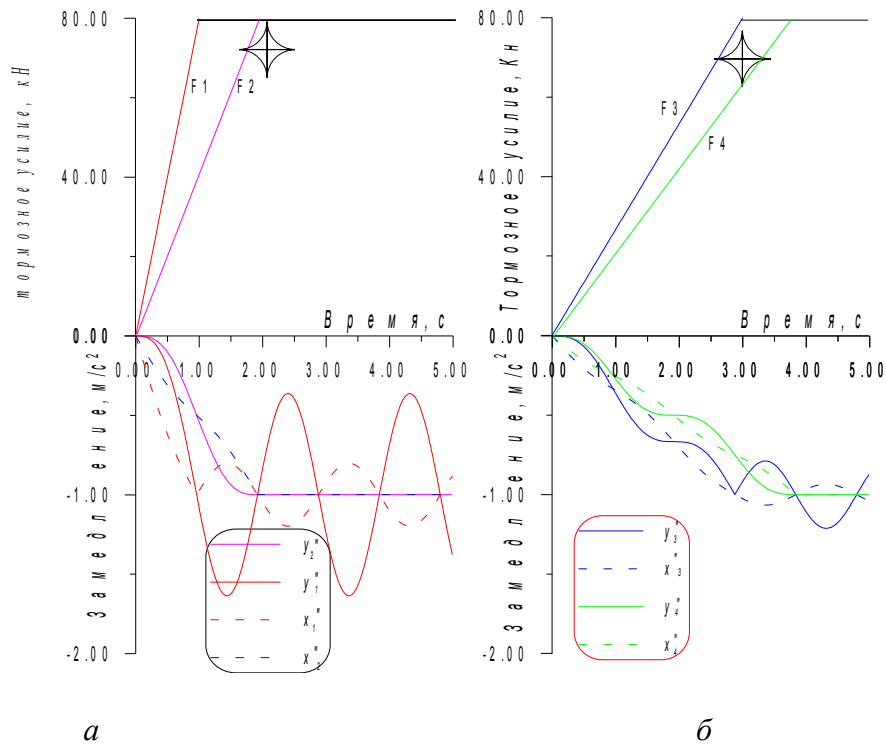


Рис. 4.6. Процессы торможения при линейной тормозной характеристике:  
 а -  $t_n = 0,5T$ ; б -  $t_n = 1,5T$  и  $t_n = 2T$

При времени нарастания тормозного усилия за полпериода ( $t_n = 0,5T$ ) в системе формируются колебания замедления  $y''$  с амплитудой  $(1 + 0,636) \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Колебания  $x''$  совершаются в противофазе  $y''$ , а амплитуда определяется величиной  $A$  и соотношением масс  $m_y/m_x$ . При нарастании тормозного усилия за время кратное периоду колебаний  $t_n = T$  и  $t_n = 2T$  переходный процесс заканчивается без колебаний. При времени нарастания тормозного усилия, отличающемся от времени, которое кратно периоду колебаний в системе снова наблюдается колебательный процесс.

#### 4.1.3. АМПЛИТУДА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Из уравнения (4.12), а также из рис. 4.2 видно, что если к массе  $m_x$  приложить усилие ступеню, то амплитудное значение ускорения достигает двукратной величины по сравнению с ускорением машины, представленной одно-массовой механической системой.

Если же к машине прикладывается усилие по линейному закону (см. рис. 4.5), то амплитудные значения колебательного процесса и сдвиг фаз определяется уравнениями

$$A = \left| \frac{\sin \frac{\omega_2 t_n}{2}}{\frac{\omega_2 t_n}{2}} \right|; \quad \theta_2 = \text{arctg} \left( \frac{1 - \cos \omega_2 t_n}{\sin \omega_2 t_n} \right). \quad (4.34)$$

Было отмечено, что величина  $A$  всегда положительна и зависит только от времени нарастания усилия, т. е. от интенсивности возмущающего воздействия.

Из уравнения (4.34) видно, что при  $\omega_2 t_n = 2\pi, 4\pi, 6\pi \dots$   $A = 0$ , следовательно, при приложении усилия к машине за время кратное периоду колебаний ( $t_n = T, 2T, 3T \dots$ ), амплитуда колебательного процесса будет равна нулю. Этот вывод имеет чрезвычайно большое значение для достижения минимальных динамических нагрузок в машинах.

Например, проф. В.М. Чермалыхом разработаны системы регулирования приводом постоянного тока для шахтного подъема с использованием этого принципа [43]. Для снижения динамических нагрузок при предохранительном торможении шахтных подъемных установок предложено устройство, использующее подобный принцип формирования тормозного усилия [3]. Из первого уравнения (4.34) видно, что при  $t_n = 0$  получается неопределенность вида  $A_{t=0} = \frac{0}{0}$ . Для раскрытия неопределенности воспользуемся правилом Лопиталя [24], по которому для отыскания предела отношения двух функций  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  можно рассматривать отношение их производных  $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ . К этому пределу стремится и отношение  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ . Поэтому

$$\lim_{t_n \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\omega_2 t_n}{2}}{\frac{\omega_2 t_n}{2}} = \frac{\omega_2 \cos \frac{\omega_2 t_n}{2}}{\omega_2} = \cos \frac{\omega_2 t_n}{2}.$$

Таким образом, при  $t_n = 0$ ,  $A_{t_n=0} = 1$ . При дальнейшем увеличении времени нарастания усилия  $t_n$  величина  $A$  уменьшается и при  $\omega_2 t_n = 2\pi, 4\pi, 6\pi \dots$  становится равной нулю. Широко известное и неоспоримое положение о том, что чем медленнее прикладывается возмущающее воздействие, тем меньше уровень динамических нагрузок. Например, в монографии [56] сказано “Действие силы можно считать статическим при  $t > t^*$ , если длительность возрастания силы  $t^*$  по крайней мере в 6,4 раза превосходит наибольший период свободных колебаний системы”.

В практике эксплуатации, во-первых, такое большое время существенно снижает производительность установки, а во-вторых, для многих установок (лифты, шахтные подъемные машины и др.) противоречит требованиям правил безопасности в отношении времени нарастания тормозного усилия. Кроме того, может оказаться, что время формирования возмущающего воздействия, например, кратное 1.5; 2.5 и т. д. периодов свободных колебаний может создать динамические нагрузки выше по сравнению со временем кратным одному периоду свободных колебаний.

На рис.4.7, а и 4.7, б показаны зависимости  $A = f(\omega t_n)$  и  $\Theta = f(\omega t_n)$ , построенные по уравнениям (4.34).

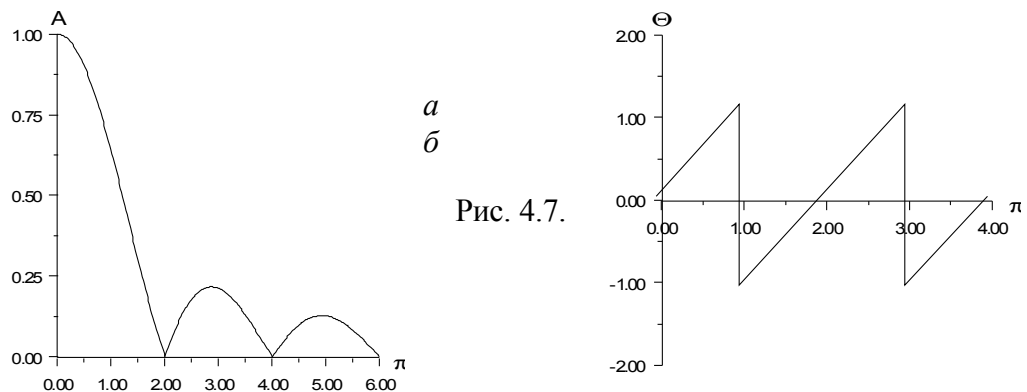


Рис. 4.7.

Зависимости  $A = f(\omega, t_n)$  и  $\theta = f(\omega, t_n)$

Видно, что при времени нарастания усилия, кратном периоду колебаний величина  $A$  равна нулю, т. е. в эти моменты  $y'' = a$ . Дальнейшее увеличение  $t_n$  приводит к увеличению величины  $A$ , максимальные значения которой будут при  $\omega_2 t_n = 3\pi, 5\pi$  и т. д.

Из графика видно, что при  $t_n = 0$  (усилие приложено ступенью) амплитуда колебаний массы  $m_y$  достигает двукратной величины по отношению к  $a$ . При увеличении  $\omega_2 t_n$  от 0 до  $0,5\pi$  (четверть периода) величина  $A$  уменьшится с 1 до 0,9 (на 10 %), а в дальнейшем (до  $2\pi$ ) уменьшается практически пропорционально увеличению времени нарастания усилия. Характеристики, приведенные на рис. 4.6 подтверждают эту закономерность. Сдвиг фаз колебаний характеризуется кривой  $\theta = f(\omega_2 t_n)$ .

#### 4.1.4. ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Предположим, что к массе  $m_x$  (рис. 4.1), приложена возмущающая сила  $S(t) = S \sin kt$ , где  $S$  - амплитудное значение возмущающей силы, Н;  $k$  - частота колебаний возмущающей силы,  $c^{-1}$ .

Уравнение (4.4) примет вид

$$\Delta'' + \omega_2^2 \Delta = a_2 \sin kt, \quad (4.35)$$

где  $a_2 = \frac{S}{m_x}$ ,  $m \cdot c^{-2}$ .

Уравнение (4.35) аналогично уравнению (3.18) и его решениями будут уравнения (3.20), (3.21), которые запишутся как

$$\Delta = \frac{a_2}{\omega_2^2 - k^2} \left( \sin kt - \frac{k}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right),$$

$$\Delta' = \frac{a_2 k}{\omega_2^2 - k^2} (\cos kt - \cos \omega_2 t).$$

Ускорения масс  $m_y$  и  $m_x$  равны

$$y'' = \lambda a \left( \sin kt - \frac{k}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \quad (4.36)$$

$$x'' = \frac{m_y}{m_x} \lambda a \left[ \left( \frac{m_x + m_y}{m_y \lambda} - 1 \right) \sin kt + \frac{k}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right], \quad (4.37)$$

где  $\lambda = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - k^2}$  - коэффициент динамичности, абсолютная величина которого характеризует амплитуду колебаний в зависимости от соотношения частот вынужденных и собственных колебаний. Из последних уравнений видно, что амплитуда вынужденных колебаний определяется соотношением частот вынужденных и собственных колебаний. Характеристика  $\lambda = f\left(\frac{k}{\omega}\right)$  приведена на рис. 3.10.

Для того чтобы исследовать поведение системы в том случае, когда частота вынужденных колебаний  $k$  весьма мало отличается от частоты свободных колебаний  $\omega_2$ , примем следующие допущения

$$k \approx \omega_2; \omega_2 - k = \varepsilon; k + \omega_2 = 2\omega_2; \frac{k}{\omega_2} = 1;$$

$$\omega_2^2 - k^2 = (\omega_2 - k)(\omega_2 + k) = 2\omega_2\varepsilon,$$

тогда уравнение (4.36) можно представить в виде

$$y'' = -\frac{k}{2\varepsilon} a (\sin \omega_2 t - \sin k t).$$

Известно [24], что

$$\sin \omega_2 t - \sin k t = 2 \cos \frac{\omega_2 + k}{2} t \sin \frac{\omega_2 - k}{2} t.$$

Следовательно, замедление будет

$$y'' = -\frac{k}{\varepsilon} a \cos k t \sin \frac{\varepsilon}{2} t. \quad (4.38)$$

Решение (4.38) характеризует поведение системы в области, близкой к резонансу. Видно, что в системе присутствуют два вида колебаний с амплитудой  $\frac{k}{\varepsilon} a$  и частотами  $k$  и  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

Первая частота  $k$  - частота вынужденных колебаний, она имеет период  $T_\varepsilon = \frac{2\pi}{k}$ .

Вторая частота  $\frac{\varepsilon}{2}$  имеет период  $T_\sigma = \frac{4\pi}{\omega_2 - k}$ . Так как частоты  $\omega_2$  и  $k$  близки, то  $T_\sigma \gg T_\varepsilon$  и амплитуда переходного процесса - медленно изменяющейся функцией времени с периодом  $T_\sigma$ . Такие явления в колебательной системе называются биениями [39, 79].

Пример 4.3. Построить графики переходных процессов для машины, имеющей:  $m_x = 60570$  кг;  $m_y = 18840$  кг;  $c_y = 1,54 \cdot 10^5$  Н·м<sup>-1</sup>;  $F = 79,4$  кН;  $\omega_2 = 3,27$  с<sup>-1</sup>.

К массе  $m_x$  приложена гармоническая сила  $F(t) = F \sin kt$ , частоты  $k$  принять равными  $k = 0,1\omega_2$ ;  $k \approx \omega_2 = 3,0$  с<sup>-1</sup>;  $k = 1,3\omega_2$ ;  $k = 5\omega_2$ .

На рис. 4.8 приведены графики, характеризующие изменение ускорений масс  $m_x$  и  $m_y$  при воздействии на массу  $m_x$  силы, изменяющейся по гармоническому закону.

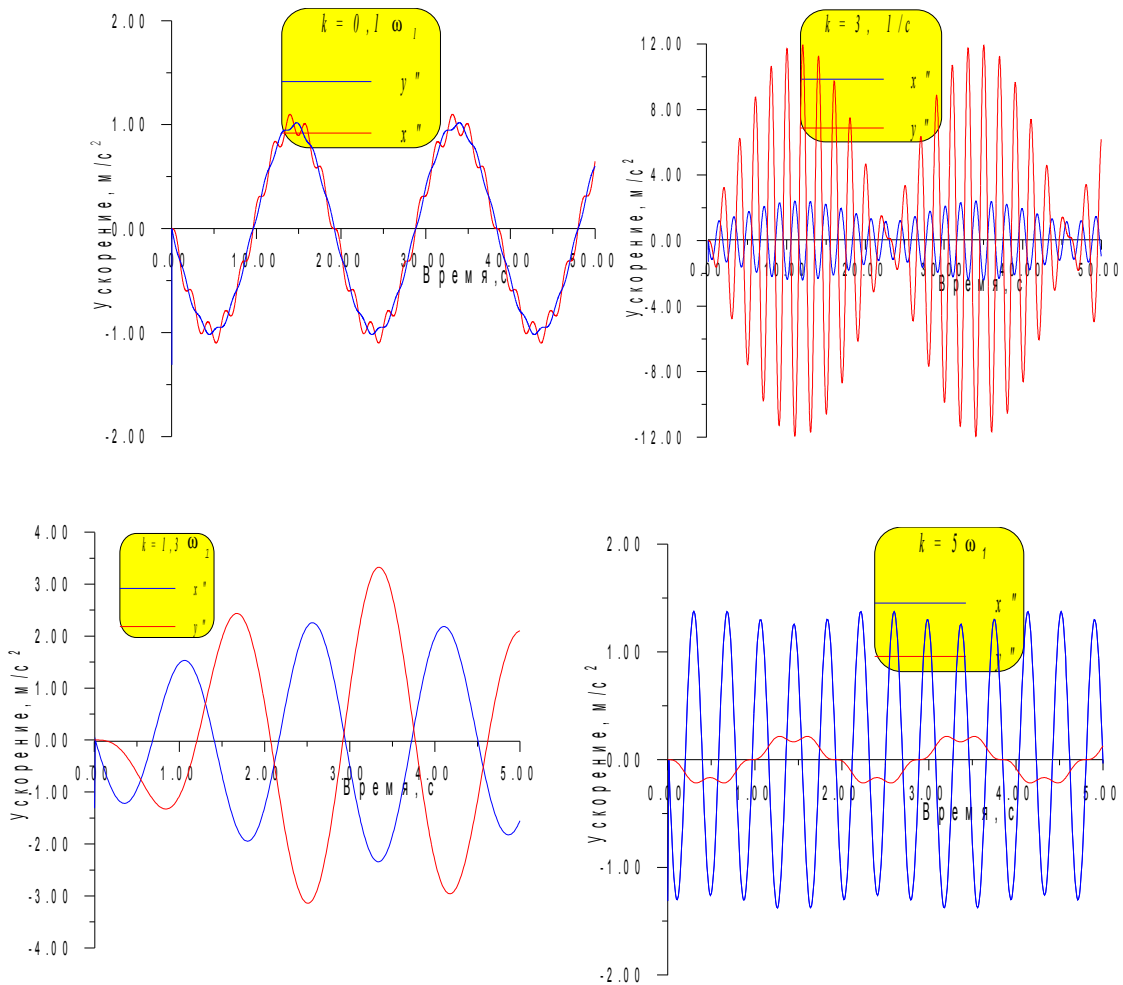


Рис. 4.8. Графики переходных процессов при гармонической возмущающей силе

Видно, что при  $k = 0,1\omega_2$  масса  $m_x$  колеблется очень медленно, масса  $m_y$  при этом почти повторяет движение массы  $m_x$ , т. е. как бы эти массы соединены достаточно жестким соединением. При частоте возмущающей силы близкой к частоте собственных колебаний системы ( $k = 3,0 \text{ c}^{-1}$ ) амплитуда  $y''$  сильно возрастает с последующим убыванием, т. е. в системе начинаются биения. Периоды колебаний следующие

$$T_6 = \frac{2\pi}{k} = 2,09 \text{ c}; \quad T_6 = \frac{4\pi}{\omega_2 - k} = 46,5 \text{ c}.$$

При дальнейшем увеличении частоты вынужденных колебаний ( $k = 1,3 \omega_2$ ) амплитуда колебаний массы  $m_y$  уменьшается и при  $k = 5\omega_2$  ускорение  $y''$  не превышает  $0,25 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Следующее увеличение частоты  $k$  приводит к остановке массы  $m_y$  в положении статического равновесия, т. е. частота колебаний массы  $m_x$  столь велика, что масса  $m_y$  не успевает за ними следовать. Приведенные характеристики подтверждают закономерность, показанную на рис. 3.10.

#### 4.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ВЯЗКИМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Силы сопротивления, которые демпфируют колебания, называются диссипативными и имеют различное происхождение (например, силы трения, силы, вызванные сопротивлением воздуха или жидкости, силы, возникающие из-за внутреннего трения материала и т. д.). Наличие этих сил в реальных механических системах приводит к



затуханию колебаний. Для математического исследования, силы сопротивления, имеющие более сложную природу, заменяются эквивалентным вязким демпфированием. Например, канаты можно рассматривать вязкоупругими элементами, в которых внутреннее трение демпфирует колебания.

Известный механик Я.Г. Поновко в свое время поднял вопрос- есть ли разница между словами “вязкоупругий” и “упруго вязкий” [56]. С помощью лингвистов установил, что вязкоупругий - это в основном упругий, но с некоторой примесью вязких свойств, а упруго вязкий - это вязкий с добавлением второстепенного свойства упругости. Исходя из этого канаты правильно называть вязкоупругими.

Динамический процесс двух массовой механической системы с вязким демпфированием характеризуется системой уравнений (4.2), которую можно заменить уравнением (4.3).

#### 4.2.1 ВОЗМУЩАЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРИКЛАДЫВАЕТСЯ К МАШИНЕ СТУПЕНЬЮ

Если к массе  $m_k$  приложена постоянная сила, то уравнение (4.3) запишем в виде

$$\Delta'' + 2\mu_2\Delta' + \omega_2^2\Delta = a_2, \quad (4.39)$$

Интегрирование этого уравнения производится по общему правилу интегрирования неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [17]. Общее решение однородного уравнения при комплексных корнях характеристического уравнения аналогично выражению (3.8):

$$\bar{\Delta} = e^{-\mu_2 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t).$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_2^2 - \mu_2^2}$  - частота затухающих колебаний,  $\text{с}^{-1}$ .

Частное решение уравнения (4.39) определяется по аналогии с уравнением (4.5) и запишется в виде

$$\Delta^* = \frac{a_2}{\omega_2^2}.$$

Тогда общее решение уравнения (4.39) выглядит следующим образом:

$$\Delta = e^{-\mu_2 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + \frac{a_2}{\omega_2^2}, \quad (4.40)$$

$$\Delta' = e^{-\mu_2 t} (C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t),$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий

$$C_3 = -C_2\omega - C_1\mu_2; \quad C_4 = C_1\omega - C_2\mu_2.$$

При  $t=0$ :  $\Delta = \Delta_0$ ;  $\Delta' = \Delta'_0$ :

$$C_1 = \frac{\Delta'_0 + \mu_2 (\Delta_0 - \frac{a_2}{\omega_2})}{\omega_2}; \quad C_2 = \Delta_0 - \frac{a_2}{\omega_2};$$

$$C_3 = -\omega_2 (\Delta_0 - \frac{a_2}{\omega_2}) - \mu_2 \left[ \frac{\Delta'_0 + \mu_2 (\Delta_0 - \frac{a_2}{\omega_2})}{\omega_2} \right];$$

$$C_4 = \Delta'_0 + \mu_2 (\Delta_0 - \frac{a_2}{\omega_2}) - \mu (\Delta_0 - \frac{a_2}{\omega_2}).$$

Из уравнения (4.2) вычислим

$$y'' = \frac{c_y}{m_y} \Delta + \frac{\mu_y}{m_y} \Delta'.$$

Подставив  $\Delta$  и  $\Delta'$ , получим

$$y'' = a + e^{-\mu_2 t} (C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t), \quad (4.41)$$

Скорость и перемещение определяются

$$y' = C_9 + at + e^{-\mu_2 t} (C_7 \sin \omega t + C_8 \cos \omega t), \quad (4.42)$$

$$y = C_9 t + a \frac{t^2}{2} + C_{10} + e^{-\mu t} (C_{11} \sin \omega t + C_{12} \cos \omega t), \quad (4.43)$$

Параметры движения массы  $m_x$  определяются из соотношений

$$x'' = \Delta'' + y''; \quad x' = \Delta' + y'; \quad x = \Delta + y.$$

$$\Delta'' = a_2 - 2\mu_2 \Delta' - \omega_2^2 \Delta. \quad (4.44)$$

Постоянные интегрирования, определенные из начальных условий -  $t = 0$ ,  $y' = v_0$  - следующие:

$$C_5 = \frac{C_1 C_y + C_3 \mu_y}{m_y}; \quad C_6 = \frac{C_2 C_y + C_4 \mu_y}{m_y};$$

$$C_7 = -(C_6 \omega - C_5 \mu_2); \quad C_8 = C_5 \omega - C_6 \mu_2;$$

$$C_9 = v_0 - C_8; \quad C_{10} = -C_7 \omega + C_8 \mu_2;$$

$$C_{11} = -(C_8 \omega + C_7 \mu_2); \quad C_{12} = -C_{10}. \quad (4.45)$$

Где  $v_0$  - скорость в первый момент переходного процесса.

Уравнения (4.40) отличается от уравнений (4.6), (4.7) только наличием члена  $e^{-\mu_2 t}$ , который с течением времени уменьшается, а поэтому характеризует затухание колебаний.

Пример 4.4. Исследовать процесс торможения машины, имеющей характеристику:  $m_x = 60570$  кг;  $m_y = 18840$  кг;  $c_y = 1,54 \cdot 10^5$  Н·м<sup>-1</sup>;  $\mu_y = 2247$  Н·с·м<sup>-1</sup>;  $\omega_1 = 3,27$  с<sup>-1</sup>;  $F = 79,4$  кН;  $v_0 = 12$  м·с.

Коэффициент, характеризующий диссипативные свойства двух массовой системы

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \mu_y \frac{m_x + m_c}{m_x m_y} = 0,0781 \text{ с}^{-1}.$$

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_2^2 - \mu_2^2} = 3,26 \text{ с}^{-1}.$$

Период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,92 \text{ с}.$

Графики изменения замедления масс  $m_x$  и  $m_y$ , определенные по уравнениям (4.41) и (4.44) показаны на рис. 4.9.

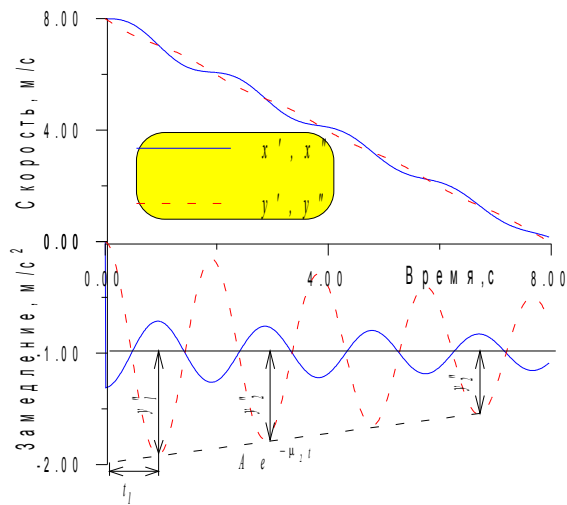


Рис. 4.9. Торможение машины

Видно, что колебательный процесс при торможении машины затухает. Амплитуды колебаний уменьшаются по экспоненциальному закону  $e^{-\mu_2 t}$ . Коэффициент  $\mu_2$  характеризует интенсивность затухания колебаний.

Обратим внимание на тот факт, что в момент остановки машины (масса  $m_x$ ) замедление  $x''$  скачком приобретает нулевое значение, при этом скорость  $y'$  и замедление  $y''$  могут иметь любые величины.

Логарифмический декремент колебаний по аналогии с (3.10)

$$\delta_2 = \frac{1}{i} \ln \frac{y_1''}{y_i''} \text{ или } \delta_2 = \mu_2 T.$$

Подставив значения  $\mu_2 = \frac{1}{2} \mu_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y}$ ;  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , получим

$$\delta_2 = \pi \mu_y \frac{m_x + m_y}{\omega_2 m_x m_y}. \quad (4.46)$$

Так как  $\mu_2 \ll \omega_2$ , принято  $\omega = \omega_2$ . Для вышеприведенного примера  $\mu_2 = 0,0781 \text{ с}^{-1}$ ;  $T = 1,92 \text{ с}$ ;  $\delta_2 = 0,15$ .

Таким образом, коэффициент, характеризующий диссипативные свойства, вызывает уменьшение амплитуд колебаний двух массовой системы по закону геометрической прогрессии.

Если сравнить частоты свободных колебаний двух массовой и одно-массовой систем, то нетрудно заметить, что

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{m_y}{m_x}}.$$

Логарифмический декремент колебаний из (3.11)

$$\delta = \frac{\pi \mu_y}{\omega_1 m_y}.$$

Логарифмические декременты для одномассовой и двухмассовой систем взаимосвязаны соотношением

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(1 + \frac{m_y}{m_x}\right) \text{ или } \frac{\delta_2}{\delta} = \sqrt{1 + \frac{m_y}{m_x}},$$

т. е. декременты колебаний двух массовой системы, также как и частоты колебаний увеличиваются по сравнению со свободными колебаниями одно-массовой системы. Следовательно, затухание колебательного процесса после остановки машины происходит с меньшей интенсивностью.

Таким образом, если эквивалентная схема машины в результате остановки превратилась в одно-массовую, то коэффициент диссипации  $\mu_2$ , частота собственных колебаний  $\omega_2$  и декремент колебаний  $\delta_2$  уменьшаются.

**Пример 4.5.** Исследовать процесс торможения машины, имеющей характеристику:  $m_x = 60570 \text{ кг}$ ;  $m_y = 18840 \text{ кг}$ ;  $c_y = 1,54 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $F = 79,4 \text{ кН}$ ;  $\omega_2 = 3,27 \text{ с}^{-1}$ ;  $a - \mu_2 = 0,95\omega_2$ ;  $b - \mu_2 = 2\omega_2$ ;

При  $\mu_2 = 0,95\omega_2$  корни характеристического уравнения комплексные и процесс характеризуется уравнениями (4.41-4.44). Характеристики переходного процесса показаны на рис. 4.10, а. Видно, что процесс близок к аperiodическому. При  $\mu_2 = 2\omega_2$  характеристическое уравнение имеет два неравных корня и переходный процесс протекает без колебаний (рис.4.10 б)

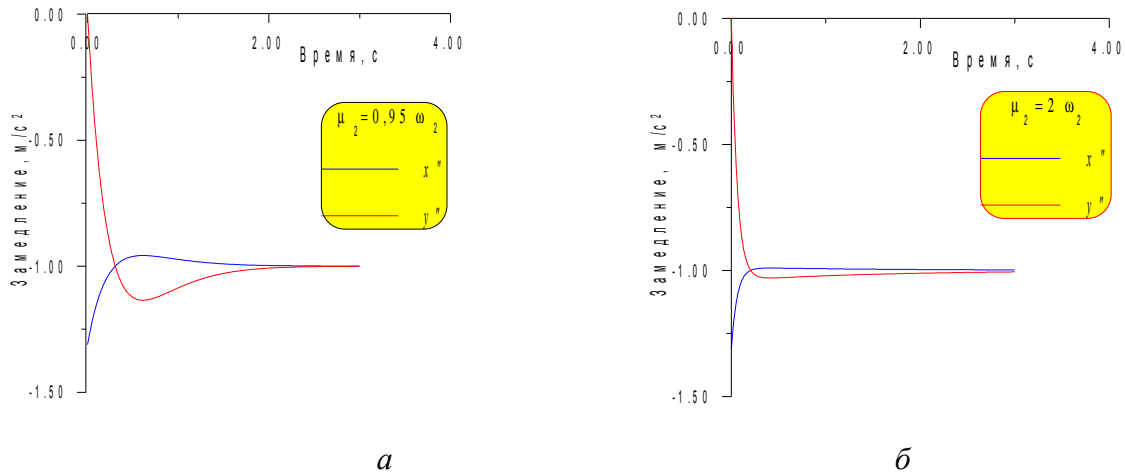


Рис. 4.10. Процессы торможения при: *a* -  $\mu_2 = 0.95 \omega_2$ ; *б* -  $\mu_2 = 2\omega_2$

При  $\mu_2 = \omega_2$  корни характеристического уравнения будут  $r_1 = r_2 = -\mu_2$ . Общее решение задачи строится по уравнениями (3.13).

Постоянные интегрирования, определенные из начальных условий -  $t = 0$ ,  $\Delta = \Delta_0$ ,  $\Delta' = \Delta'_0$ , запишем так:

$$C_1 = -\frac{a_2}{\omega_2^2}; \quad C_2 = -\mu_2 \frac{a_2}{\omega_2^2}.$$

При этих условиях

$$\Delta = \frac{a_2}{\omega_2^2} [1 - (1 + \mu_2 t) e^{-\mu_2 t}],$$

$$\Delta' = a_2 t e^{-\mu_2 t}.$$

$$y'' = (\mu_y \Delta' + c_y \Delta) / m_y$$

Подставив  $\Delta'$  и  $\Delta$  получим

$$y'' = a [1 - (1 - \mu_2 t) e^{-\mu_2 t}],$$

$$x'' = \frac{a_2 - (\mu_y \Delta' + c_y \Delta)}{m_x} = a_2 - a \left\{ \left[ 2\mu_2 \frac{m_y}{m_x} t + (1 + \mu_2 t) \right] e^{-\mu_2 t} - 1 \right\}.$$

Данные зависимости показывают, что при  $t \rightarrow 0$ ,  $\Delta'$  стремится к нулю,  $\Delta$  - к постоянной величине  $a_2 / \omega_2^2$ . При этом, замедления масс  $m_y$  и  $m_x$  стремятся к

$$y''_{t=\infty} = \frac{c_y}{m_y} \Delta = \frac{c_y}{m_y} \frac{a_2}{\omega_2^2} = \frac{c_y \sum F m_x m_y}{m_y m_x c_y (m_x + m_y)} = \frac{\sum F}{m_x + m_y} = a,$$

$$x''_{t=\infty} = a_2 - \frac{c_y}{m_x} \Delta = a_2 - \frac{c_y}{m_x} \frac{a_2}{\omega_2^2} = a_2 \left[ 1 - \frac{c_y m_x m_y}{m_x c_y (m_x + m_y)} \right] =$$

$$= \frac{\sum F}{m_x} \frac{m_x}{m_x + m_y} = \frac{\sum F}{m_x + m_y} = a.$$

Скорости  $y'$  и  $x'$  таковы:

$$y' = \int y'' dt = \frac{\mu_y}{m_y} \int \Delta' dt + \frac{c_y}{m_y} \int \Delta dt,$$

$$\int \Delta' dt = a_2 \int t e^{-\mu_2 t} dt = -\frac{a_2}{\mu_2^2} (\mu_2 t + 1) e^{-\mu_2 t},$$

$$\int \Delta dt = \frac{a_2}{\omega_2^2} \left[ \int dt - \int (\mu_2 t + 1) e^{-\mu_2 t} dt \right] =$$

$$= \frac{a_2}{\omega_2^2} \left[ t + \frac{1}{\mu_2} e^{-\mu_2 t} + \frac{1}{\mu_2} (\mu_2 t + 1) e^{-\mu_2 t} \right].$$

Тогда  $y' = at(1 - e^{-\mu_2 t}) + C$ , где  $C$  - постоянная интегрирования. Если  $t = 0$ ,  $y' = v_0$ , то  $C = v_0$ .

Здесь  $a = \frac{\sum F}{m_x + m_y}$ ;  $\mu_y = 2\mu_2 \frac{m_x m_y}{m_x + m_y}$ . Скорость массы  $x'$  определена из выражения  $x' = \Delta + y'$ .

Таким образом, при  $\mu_2 \geq \omega_2$  переходный процесс носит аperiodический характер (см. рис. 4.10, б). Заметим, что логарифмический декремент колебаний многих реальных вязкоупругих механических систем небольшой ( $\delta = 0,1 - 0,2$ ) поэтому при пуске и торможении этих машин возникают затухающие колебания.

Таким образом, силы вязкого демпфирования имеют незначительное влияние на частоту и период колебаний, однако вызывают быстрое затухание колебаний.

#### 4.2.2. ВОЗМУЩАЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРИКЛАДЫВАЕТСЯ К МАШИНЕ ПО ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Если привод или тормоз машины имеют линейную характеристику, которая показана на рис. 4.5, то систему уравнений (4.2) можно представить уравнением

$$\Delta'' + 2\mu_2 \Delta' + \omega_2^2 \Delta = \rho_1 t, \quad (4.47)$$

Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения, по аналогии с уравнениями (4.18) и (4.40) имеет вид

$$\Delta = e^{-\mu_2 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + \frac{\rho_1}{\omega_2^2} t; \quad (4.48)$$

$$\Delta'' = e^{-\mu_2 t} (C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t) + \frac{\rho_1}{\omega_2^2}. \quad (4.49)$$

Постоянные интегрирования, определенные из начальных условий -  $t = 0$ ;  $\Delta = 0$ ;  $\Delta' = 0$ , таковы:

$$C_1 = -\frac{\rho_1}{\omega_2}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{\mu_2}{\omega_2} \cdot \frac{\rho_1}{\omega_2}.$$

Запишем уравнения (4.48), (4.49) в виде

$$\Delta = \frac{\rho_1}{\omega_2} \left( t - \frac{e^{-\mu_2 t}}{\omega_2} \sin \omega t \right), \quad (4.50)$$

$$\Delta'' = \frac{\rho_1}{\omega_2} \left[ 1 + e^{-\mu_2 t} \left( \frac{\mu_2}{\omega_2} \sin \omega t - \cos \omega t \right) \right], \quad (4.51)$$

Полученные зависимости аналогичны уравнениям (4.20), (4.21) и отличаются наличием члена  $e^{-\mu_2 t}$ , характеризующего затухание колебаний.

Замедление массы  $m_y$  определяется из уравнения (4.2)

$$y'' = \frac{\mu_y}{m_y} \Delta'' + \frac{c_y}{m_y} \Delta.$$

Подставив значение  $\Delta$  и  $\Delta'$ , получим

$$y'' = \rho t + e^{-\mu_2 t} (C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t). \quad (4.52)$$

Проинтегрировав (4.52), запишем

$$y' = C_9 + \rho \frac{t^2}{2} + e^{-\mu_2 t} (C_7 \sin \omega t + C_8 \cos \omega t), \quad (4.53)$$

$$y = C_{10} + C_9 t + \rho \frac{t^3}{6} + e^{-\mu_2 t} (C_{11} \sin \omega t + C_{12} \cos \omega t). \quad (4.54)$$

Постоянные интегрирования определяются соотношениями (4.45).

Предполагая использование персональных компьютеров для построения графиков переходных процессов, тем самым, освобождая исследователя от рутинных вычислений, вывод зависимостей, характеризующих движение массы  $m_x$  считаем нецелесообразным. Решение рекомендуется определять по формулам (4.44).

После того как движущее или тормозное усилие достигнет установившегося значения, переходный процесс будет характеризоваться уравнением, которое можно заменить одним уравнением (4.39). Решениями этого уравнения будут зависимости (4.40).

Пример 4.6. Для условий примера 4.2 построить графики процессов торможения. Логарифмический декремент колебаний принять  $\delta_2 = 0,15$ .

В примере 4.4 определены частота и период затухающих колебаний  $\omega = 3,26 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 1,92 \text{ с}$ .

Согласно зависимости (4.46) коэффициент, характеризующий диссипативные свойства системы, -  $\mu_2 = \delta_2 / T = 0,078$ . Коэффициент вязкости упругой связи

$$\mu_y = 2\mu_2 \frac{m_x m_y}{m_x + m_y} = 2247 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Характеристики процессов торможения с разной интенсивностью нарастания тормозного усилия будут аналогичны характеристикам, показанным на рис. 4.6. Отличие: амплитуды колебаний уменьшаются. При времени нарастания тормозного усилия, кратном периоду колебаний системы, процесс торможения осуществляется без колебаний.

#### 4.2.3. ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ СИЛ ВЯЗКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Если к массе  $m_x$  приложена сила вида  $F \sin kt$ , то систему уравнений (4.2) можно заменить уравнением

$$\Delta'' + 2\mu_2 \Delta' + \omega_2^2 \Delta = a_2 \sin kt. \quad (4.55)$$

Общее решение уравнения (4.55) аналогично (3.24), поэтому

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-\mu_2 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + N \sin kt + M \cos kt, \\ \Delta' &= e^{-\mu_2 t} (C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t) + Nk \cos kt - Mk \sin kt. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий, при этом они связаны соотношениями, определенными в разделах 3.3.1 - 3.3.2.

$$C_3 = -C_2 \omega - C_1 \mu_2; \quad C_4 = C_1 \omega - C_2 \mu_2.$$

Если при  $t = 0$ :  $\Delta = \Delta_0$ ;  $\Delta' = \Delta'_0$  то

$$C_1 = \frac{1}{\omega} [\Delta'_0 - kN + \mu_2 (\Delta_0 - M)];$$

$$C_2 = \Delta_0 - M;$$

$$C_3 = -\omega (\Delta_0 - M) - \frac{\mu_2}{\omega} [\Delta'_0 - kN + \mu_2 (\Delta_0 - M)];$$

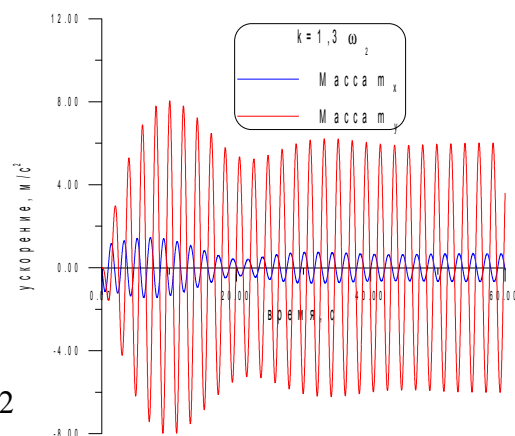
$$C_4 = \Delta'_0 - kN.$$

Кинематические характеристики масс  $m_y$  и  $m_x$  определяются из известных соотношений (уравнение 4.2)

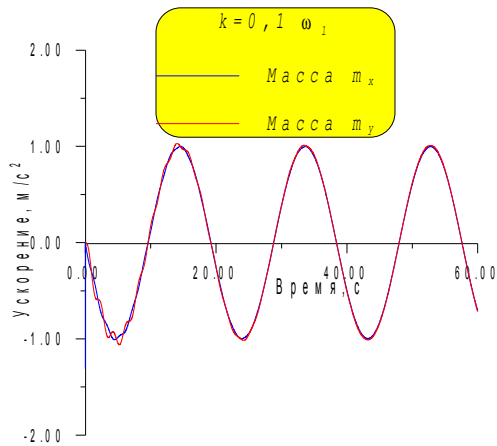
$$y'' = \frac{\mu_y \Delta' + c_y \Delta}{m_y}, \quad x'' = \frac{F \sin kt - (\mu_y \Delta' + c_y \Delta)}{m_x},$$

$\Delta$  и  $\Delta'$  находятся по уравнениям (4.56).

На рис. 4.11 приведены характеристики колебательных процессов системы с двумя степенями свободы при гармоническом воздействии с частотой  $k = 0,1\omega_2$  и  $k = 1,3\omega_2$ .







б

а

Рис. 4.11. Колебания в системе при гармоническом воздействии

$a - k = 0,1\omega_2$ ;  $б - k = 1,3\omega_2$ .

При возмущающем воздействии низкой частоты ( $k = 0,1\omega_2$ ) собственные колебания быстро затухают, массы  $m_x$  и  $m_y$  совершают колебания с частотой возмущающей силы. При близких частотах ( $k = 1,3\omega_2$ ) в системе наблюдаются максимальные колебания, напоминающие биения.

#### 4.2.4. ВОЗМУЩАЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА МАШИНУ ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Возмущающая сила вида  $F \sin kt$  встречается довольно редко. Чаще всего она представляет собой периодическую негармоническую функцию с периодом  $T$ . В этом случае функцию  $F(t)$  представляют в виде ряда Фурье [46]

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_i \sin ikt + b_i \cos ikt), \quad (4.57)$$

здесь коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  определяются по формулам Эйлера

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt, \quad (4.58)$$

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin ikt dt, \quad (4.59)$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos ikt dt, \quad (4.60)$$

где  $i = 1, 2, 3$ .

Подставляя (4.57) в (4.2) получим уравнение

$$\Delta'' + 2\mu_2 \Delta' + \omega_2^2 \Delta = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \sin ikt + b_i \cos ikt), \quad (4.61)$$

Уравнение (4.61) аналогично уравнению (4.55). Частное решение уравнения при  $k \neq \omega_2$  находим по формуле

$$\Delta^* = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \sin ikt + B_i \cos ikt)$$

Коэффициенты  $A_0$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  определяются аналогично коэффициентам  $N$  и  $M$  уравнения (4.56). Общее решение однородного уравнения, есть зависимость (3.8), поэтому общий интеграл уравнения (4.61) запишем

$$\Delta = e^{-\mu_2 t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \sin ikt + B_i \cos ikt), \quad (4.62)$$

Примеры разложения некоторых функций в ряд Фурье можно найти в справочнике [24] и в монографии [79].

Следует заметить, что современные персональные компьютеры позволяют исследовать динамику подобных систем с меньшей трудоемкостью, используя численные методы решения этих уравнений.

Пример 4.7. Исследовать динамику переходного процесса машины, которая имеет характеристику, приведенную в примере 4.3. К массе  $m_x$  приложена пилообразная сила, которая изменяется в соответствии с графиком, показанном на рис. 4.12, а.

Видно, что рассматриваемая функция в промежутке времени  $(2\pi/k)$  нечетная, поэтому ряд Фурье не будет содержать косинусов и свободного члена. Следовательно, необходимо определить коэффициент  $a_i$ ,  $a_0 = 0$ ;  $b_0 = 0$  [31].

Утверждение, что  $a_0 = 0$  подтверждается графиком. Известно, что  $\int_0^T F(t) dt$  есть площадь, ограниченная характеристикой  $F(t)$  в интервале времени  $0 - 2\pi/k$ . Площадь треугольника выше оси абсцисс равна площади треугольника, расположенного ниже ее.

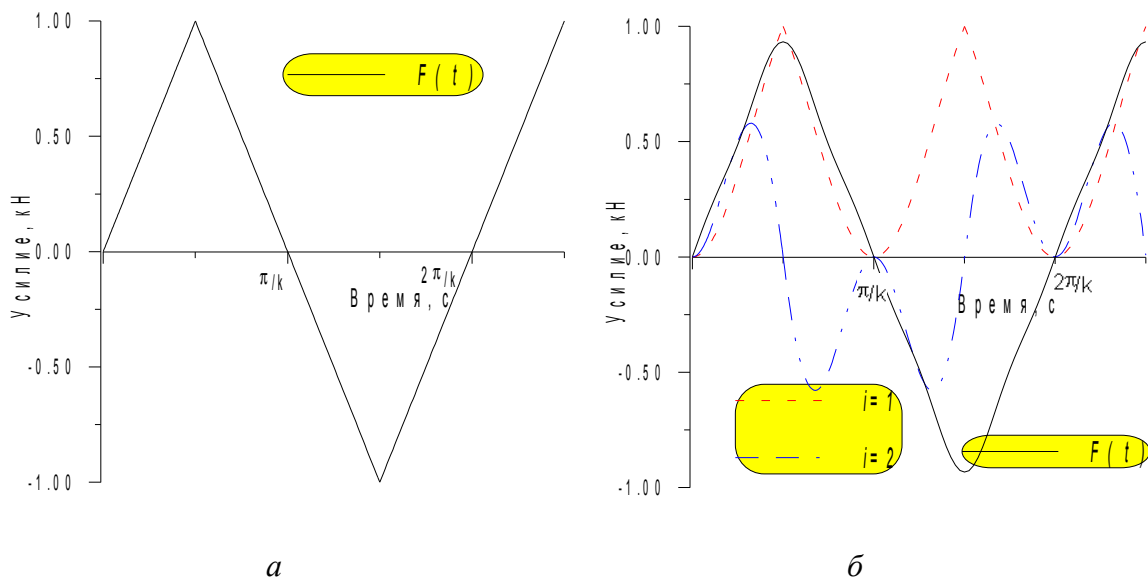


Рис. 4.12. Характеристики возмущающего воздействия:  
а -  $F(t)$  - пилообразная; б -  $F(t)$  - описанная рядом Фурье

Аналогичным образом доказывается, что  $b_i = 0$ . Действительно, если каждую ординату диаграммы 4.12 умножить на  $\cos ikt$ , то получим подынтегральную функцию

зависимости (4.60). Поскольку функция  $F(t)$  нечетная, а функция  $\cos ikt$  - четная, то их произведение будет также нечетной функцией, откуда следует, что интеграл в выражении (4.60) будет равен нулю, т. е.  $b_i = 0$ .

Напомним, что функция  $F(t)$  считается четной, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется. У нечетной функции при изменении знака аргумента меняется только знак функции, а абсолютное значение остается тем же [24].

В практике исследований подобных задач, функция  $F(t)$  не всегда бывает простой, поэтому для примера, приведем вычисление коэффициентов ряда Фурье, рассматриваемой функции.

Запишем аналитическое выражение функции  $F(t)$

$$\begin{aligned} 0 < t < 0,5 \frac{\pi}{k}; F(t) &= 2F_{\max} \frac{k}{\pi} t; \\ 0,5 \frac{\pi}{k} < t < 1,5 \frac{\pi}{k}; F(t) &= F_{\max} - 2F_{\max} \frac{k}{\pi} \left(t - \frac{\pi}{2k}\right); \\ 1,5 \frac{\pi}{k} < t < 2,5 \frac{\pi}{k}; F(t) &= -F_{\max} + 2F_{\max} \frac{k}{\pi} \left(t - 1,5 \frac{\pi}{k}\right). \end{aligned}$$

В соответствии с уравнением (4.59) умножим  $F(t)$  на  $\sin ikt$ . Графики этих функций при  $i = 1$  и  $i = 2$  показаны на рис. 4.12, б. Если  $i$  - четное целое число, то результирующая функция имеет фигуры, суммарная площадь которых на отрезке времени  $2\pi/k$  равна нулю, следовательно при  $i = 2, 4, 6, \dots$  коэффициенты  $b_i = 0$ . При нечетных целых числах  $i$  функция  $F(t) = \sin ikt$  всегда положительна и симметрична относительно ординаты  $t = \pi/k$ , при этом, первая четверть кривой симметрична относительно ординаты  $t = 0,5\pi/k$  второй четверти, а третья - четвертой, в точке  $t = 1,5\pi/k$ . Поэтому при  $i = 1, 3, 5, \dots$

$$a_i = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi/k} F(t) \sin ikt dt = 4 \frac{k}{\pi} \int_0^{0,5\pi/k} F(t) \sin ikt dt.$$

Подставив значение  $F(t) = 2F_{\max} \frac{k}{\pi} t$ , на отрезке времени  $0 < t < 0,5\pi/k$ , получим

$$a_i = 8F_{\max} \frac{k^2}{\pi^2} \int_0^{0,5\pi/k} t \sin ikt dt.$$

Известно: [38], что

$$\int t \sin ikt dt = \frac{1}{(ik)^2} \sin ikt - \frac{t}{ik} \cos ikt.$$

Подставив пределы интегрирования, найдем

$$a_i = \frac{8F_{\max}}{(i\pi)^2} (-1)^{(i-1)/2}.$$

Таким образом тригонометрический ряд (4.57) будет иметь вид

$$F(t) = \frac{8F_{\max}}{\pi^2} \left( \sin kt - \frac{1}{3^2} \sin 3kt + \frac{1}{5^2} \sin 5kt - \dots \right). \quad (4.63)$$

Если  $i$  - четное целое число, то результирующая функция симметрична относительно точек  $t = \pi/k$ . Ряд (4.63) быстро сходится. На рис. 4.12, б показана закономерность изменения

$F(t)$ , построенная по уравнению (4.63) при использовании двух членов ряда.

Характеристики переходных процессов при разных частотах возмущающей силы, аналогичны, приведенным на рис. 4.11. Это объясняется незначительными отличиями пилообразной и гармонической сил.

## 5. ОГРАНИЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Создание современных высокопроизводительных машин связано с повышением скоростей движения рабочих органов. Форсированные режимы разгона и замедления вызывают большие динамические нагрузки. Эти нагрузки создают чрезмерные напряжения, вызывают усталостные явления и, как следствие, уменьшают безопасность и долговечность машин.

В разделах 3, 4 было показано, что развитие динамических нагрузок в узлах современных машин и механизмов происходит за счет упругости их звеньев.

Амплитудные значения нагрузок могут достигать критической величины, при которой возможно разрушение элементов машины. Переменные по величине нагрузки вызывают усталостные явления, которые приводят к преждевременному выходу из строя деталей машин.

В последнее время в теории машин с упругими звеньями разрабатывается весьма важное научное направление, связанное с оптимизацией динамических процессов. Решение этой задачи позволит создать машины с наибольшей производительностью при минимальной их массе.

Рациональные режимы управления, заключающиеся в формировании двигательных и тормозных моментов, обеспечивающих минимальные динамические нагрузки, позволят увеличить долговечность машин.

В разделе 4, на рис. 4.2 и 4.9 приведены динамические процессы в машине при ступенчатом приложении возмущающего воздействия. Было показано, что замедления (ускорения) масс носят колебательный характер, при этом мгновенные значения их могут превышать среднее в два раза. Амплитуда колебательного процесса определяется интенсивностью нарастания возмущающего воздействия (рис. 4.7) и, при времени нарастания кратном периоду свободных колебаний, колебания в механической системе отсутствуют.

Используя эти закономерности, можно за счет применения различных, специально разработанных, способов управления двигателями или тормозными устройствами, уменьшить динамические нагрузки при пуске и торможении машин [70].

### 5.1. ПРИЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ДВУМЯ РАВНЫМИ СТУПЕНЯМИ

В разделе 4 было показано, что если к машине приложить возмущающее воздействие ступеню, то замедление (ускорение) массы  $m_y$  характеризуется уравнением (4.12)

$$y'' = a(1 - \cos \omega_2 t),$$

здесь  $a = \frac{\sum F}{m_x + m_y}$  - средняя величина замедления механической системы, вокруг которой происходят колебания замедлений масс  $m_y$  и  $m_x$ .

Допустим, к машине ступеню приложена сила  $\frac{\sum F}{2}$ , тогда из приведенного уравнения видно, что через полпериода ( $\omega_2 t = \pi$ ) замедление  $y'' = a$  и с этого момента оно должно уменьшаться. Однако, если в этот момент времени к машине приложить ступеню дополнительную силу, равную первой ступени, то в механической системе сформируется еще один колебательный процесс. Этот процесс сдвинут на половину периода по отношению к первому и на основании принципа суперпозиции (сложения колебаний), замедление  $y''$  останется постоянным и равным  $a$ .

Используя это свойство двухмассовой колебательной системы, предложен способ торможения, в котором тормозное усилие прикладывается двумя равными ступенями с интервалом времени, равным половине периода колебаний [2, 70].

При таком способе торможения достигается апериодический переходный процесс. Однако, после остановки машины, в системе возникнут большие колебания.

На рис. 5.1 показан процесс торможения машины, усилие к которой приложено по линейному закону за время равное периоду колебаний.

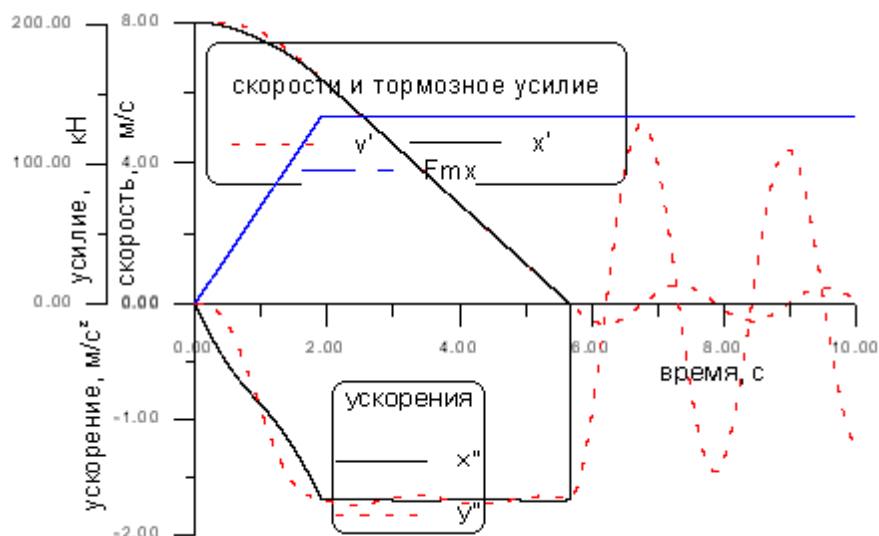


Рис. 5.1. Процесс торможения машины двумя равными ступенями

Видно, что торможение происходит без колебаний, однако, в момент остановки массы  $m_x$ , замедление  $x''$  скачком приобретает нулевое значение, а масса  $m_y$ , совершает свободные колебания вокруг равновесного положения.

В практике эксплуатации грузоподъемных машин тормозные режимы могут быть как при спуске, так и при подъеме груза. В процессе торможения при спуске груза полное натяжение грузовой ветви увеличивается, а при подъеме груза - уменьшается на величину динамической составляющей. Однако, несмотря на это, максимальные нагрузки всегда возникают при торможении в режиме подъема груза. Эти нагрузки появляются в процессе свободных колебаний, т. е. после остановки машины и большинство обрывов канатов происходит, именно, при предохранительном торможении при подъеме груза.

Здесь следует обратить внимание на то, что при испытаниях подъемных установок при ревизиях и наладках, проводимых в соответствии с требованиями Правил безопасности [60], электромеханическая служба шахт и рудников часто предъявляет более жесткие требования к торможению при спуске груза, чем к торможению при подъеме груза. Очевидно, сказывается психологический фактор и наладчиком предлагаются режимы торможения при спуске груза либо с ограничением веса груза, либо с ограничением максимальной скорости. В то же время, процесс торможения в режиме подъема груза вызывает меньшую тревогу и опасения. Отметим, что абсолютное значение замедления машины, а следовательно, и концевой массы при торможении в режиме подъема груза всегда больше, чем при спуске груза. И, несмотря на то, что при спуске груза при торможении динамическая составляющая добавляется к статической, а при подъеме - вычитается, максимальные полные нагрузки наблюдаются после остановки машины при подъеме груза. Действительно, после остановки машины концевая масса совершает свободные колебания. Мгновенные значения замедления могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому в точке положительного максимума замедления  $y''$ , возникают максимальные напряжения в канатах.

Таким образом, демпфирование колебаний в процессе торможения хоть и целесообразно, но не всегда позволяет существенно снизить нагрузки в элементах машины при торможении. Целесообразность демпфирования в переходном процессе поясним кривой  $y''$ , показанной на рис. 5.1. Видно, что амплитуда колебаний замедления концевого груза определяется абсолютным значением  $y''$  в момент остановки машины. Если бы процесс был не задемпфирован, то эта величина могла бы быть больше замедления  $x''$ . Поэтому, для уменьшения динамических нагрузок после стопорения предлагается способ торможения [6, 70], в котором при скорости машины, равной  $v_c$ , тормозное усилие уменьшается ступенью в два раза.

Скорость  $v_c$  определяется следующим образом. В момент подачи сигнала на снижение тормозного усилия замедления масс  $m_x$  и  $m_y$  равны  $y'' = x'' = \frac{\sum F}{m_x + m_y}$ . На основании второго уравнения (4.2) разность координат  $x - y = \Delta = \frac{m_y}{c_y} y''$ . Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  уравнений (4.6) и (4.7) определяются из начальных условий:

$$t = 0; \quad \Delta = \frac{m_y}{c_y} \frac{\sum F}{m_x + m_y}; \quad \Delta' = 0;$$

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{m_y}{c_y} \frac{\sum F}{m_x + m_y} - \frac{a_2}{\omega_2^2} = \frac{a m_y}{2 c_y},$$

тогда,

$$\Delta = \frac{a m_y}{2 c_y} (1 + \cos \omega_2 t).$$

Используя соотношения  $y'' = \frac{c_y}{m_y} \Delta$  и  $x'' = \frac{a_2}{2} - \frac{c_y}{m_x} \Delta$ ,

получим

$$y'' = \frac{a}{2} (1 + \cos \omega_2 t), \quad (5.1)$$

$$x'' = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{m_y}{m_x} \cos \omega_2 t\right). \quad (5.2)$$

Из уравнения (5.1) видно, что через полпериода ( $\omega_2 t = \pi$ )  $y'' = 0$ .

Скорость массы  $m_x$  в этом процессе

$$x' = \int x'' dt = \frac{a}{2} \left(t - \frac{m_y}{m_x \omega_2} \sin \omega_2 t\right) + C_0, \quad (5.3)$$

где  $C_0$  - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий:  $t = 0$ ;  $x' = v_c$ .

Поэтому  $C = v_c$ . Следовательно, скорость, при которой необходимо подать сигнал на уменьшение тормозного усилия определится из уравнения

$$v_c + \frac{a}{2} \left( T - \frac{m_y}{m_x \omega_2} \sin \omega_2 T \right) = 0, \quad \text{или} \quad v_c = -\frac{a}{2} T.$$

Учитывая, что для процесса торможения  $a$  - отрицательная величина, значение скорости  $v_0$  - положительная величина.

Пример 5.1. Исследовать процесс торможения машины, в котором тормозное усилие прикладывается двумя равными ступенями через промежуток времени равный периоду колебаний, а при достижении скорости машины  $v_0$  тормозное усилие уменьшается в два раза.

Подъемная установка имеет следующую характеристику:  $m_x = 60570$  кг;  $m_y = 18840$  кг;  $F_m = -140000$  Н;  $v_{max} = 8$  мс<sup>-1</sup>;  $c_y = 1.54 \cdot 10^5$  Нм<sup>-2</sup>.

$$\text{Тогда} \quad \omega_2 = \sqrt{c_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y}} = 3,273 \text{ с}^{-1}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 1,92 \text{ с}; \quad a = \frac{F_m}{2(m_x + m_y)} = -0,88 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$a_2 = \frac{F_m}{2m_x} = -1,15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

После подачи сигнала на торможение начинается динамический процесс, который описывается уравнениями (4.12 - 4.15). Характеристики этого процесса показаны на рис. 5.2.

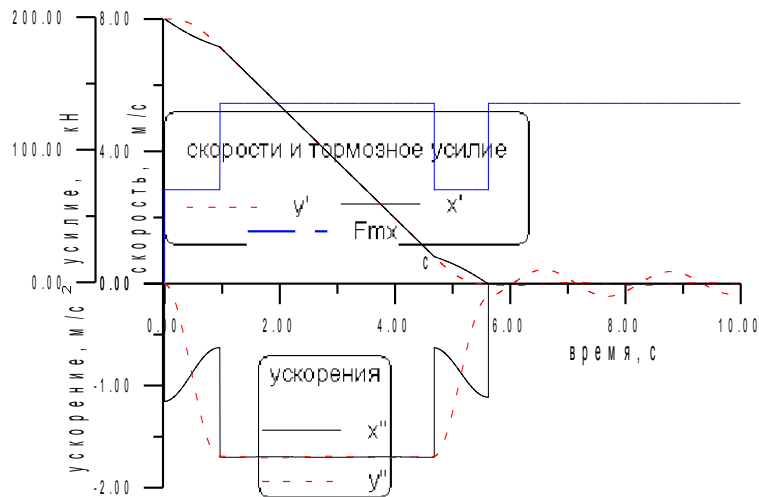


Рис. 5.1. Процесс торможения машины с полным демпфированием

В момент отключения электродвигателя к машине ступеню прикладывается тормозное усилие  $\frac{F_m}{2} = -70$  кН, которое сообщает  $m_x$  замедление  $x'' = a = -1,15$  мс<sup>-2</sup>. В это время масса  $m_y$  имеет замедление  $y'' = 0$ .

Через полпериода ( $\frac{T}{2} \approx 0,96$  с) замедления масс  $m_x$  и  $m_y$  равны:

$$x'' = a \left( 1 + \frac{m_y}{m_x} \cos \omega_2 t \right) = -0,88 \left[ 1 + \frac{18840}{60570} (-1) \right] = -0,606 \text{ мс}^{-2},$$

$$y'' = a (1 - \cos \omega_2 t) = 2a = -1,76 \text{ мс}^{-2}.$$



В этот момент времени, к машине ступенью добавляется величина тормозного усилия  $\frac{F_m}{2} = -70$  кН. Замедление массы  $m_x$  ступенчато увеличивается и сравнивается с замедлением  $y''$ . В системе формируется колебательный процесс, который будет протекать в противофазе по отношению к первому. В силу сложения колебаний, замедления масс  $m_x$  и  $m_y$  останутся постоянными.

При достижении скорости машины  $x' = v_c = 0,5aT = \frac{0,88}{2} \cdot 1,92 = 0,84$  мс<sup>-1</sup>, поступает сигнал на уменьшение ступенью тормозного усилия до величины  $\frac{F_m}{2}$ . Переходный процесс характеризуется уравнениями (5.1 x 5.3). Через промежуток времени равный  $\frac{T}{2}$ , масса  $m_x$  останавливается. В этот момент замедление  $y''$  близко к нулю и после остановки машины в системе практически отсутствуют колебания.

Незначительные колебания массы  $m_y$  после остановки машины объясняются неточностью определения скорости  $v_c$ . При практической реализации этого способа, из-за изменения параметров установки, возможны погрешности в определении периода колебаний. Кроме этого точное дозирование половинной величины тормозного момента затруднительно. Поэтому в механической системе после остановки возможны остаточные колебания. Однако, даже с учетом этих неточностей, предложенный способ дает существенное уменьшение динамических нагрузок.

## 5.2. ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ НАРАСТАНИЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Заключение, полученное в разделе 4.13, о том, что при линейном изменении тормозного или двигательного усилия с интенсивностью, определяемой временем, которое кратно периоду колебаний, переходный процесс будет апериодическим, можно положить в основу способа управления электродвигателем или тормозом. Суть этого способа заключается в том, чтобы при пуске и торможении ускорение и замедление машины изменялось по линейному закону, при этом, величина рывка (и) должна определяться из условия, что время изменения ускорения кратно периоду колебаний.

Реализация такого способа управления требует от электродвигателя и привода тормоза возможности плавного регулирования и высокого быстродействия. Такой способ управления, для привода шахтного подъема с электродвигателем постоянного тока, был осуществлен профессором В. М. Чермалыхом [43].

Для тормозов машин интенсивность нарастания усилия должна зависеть от частоты колебаний, которая определяется жесткостью (длиной) каната и массой концевого груза. При низких частотах колебаний, т. е. при больших длинах канатов, эти требования могут противоречить требованиям Правил безопасности [60].

Нарастание тормозного усилия по линейному закону с интенсивностью, определяемой временем, кратным периоду колебаний, позволяет получить апериодический процесс замедления. Однако по аналогии с рис. 5.1 после остановки массы  $m_x$  в машине возникнут большие колебания.

Для уменьшения динамических нагрузок в элементах грузоподъемных машин после стопорения предлагается устройство предохранительного торможения [3], в котором тормозное усилие перед стопорением уменьшается за время, равное периоду колебаний.

Скорость  $v_c$ , при которой следует подавать сигнал на уменьшение тормозного усилия, определяется из следующих соображений. При снижении тормозного усилия, через промежуток времени, равный периоду колебаний, скорость машины (массы  $m_x$ ) должна стать равной нулю. В этот момент замедление  $y''$  будет минимальным. Считая, что до

этого машина двигалась равнозамедленно и без колебаний, динамический процесс характеризуется уравнениями (4.2), которые после преобразования можно записать

$$\Delta'' + \omega_2^2 \Delta = a_2 - \rho_1 t. \quad (5.4)$$

Это уравнение решается аналогично уравнению (4.17), начальными условиями

$$\text{задачи являются: } t = 0; \quad \Delta' = 0; \quad \Delta = \frac{m_y F_m}{c_y (m_x + m_y)}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (5.4) ищется в виде  $\Delta^* = A - C_3 t$ .

Тогда коэффициенты  $A$ ,  $C_3$  и постоянные интегрирования будут равны

$$A = \frac{a_2}{\omega_2^2}; \quad C_3 = \frac{\rho_1}{\omega_2^2}; \quad C_1 = \frac{\rho_1}{\omega_3^2}; \quad C_2 = -\frac{a_2}{\omega_2^2}.$$

Общее решение уравнения (5.4) будет

$$\Delta = \frac{a_2}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 t) - \frac{\rho_1}{\omega_2^2} \left( t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right). \quad (5.5)$$

Следовательно, ускорения масс  $m_x$  и  $m_y$  определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} x'' &= a_2 - \rho_1 t - \frac{c_y}{m_x} \Delta; \\ y'' &= \frac{c_y}{m_x} \Delta; \\ x'' &= a_2 - \rho_1 t - \frac{c_y}{m_x} \left( \frac{a_2}{\omega_2^2} - \frac{\rho_1}{\omega_2^2} + \frac{\rho_1}{\omega_3^2} \sin \omega_2 t - \frac{a_2}{\omega_2^2} \cos \omega_2 t \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Интегрируя полученное выражение, определим закономерность изменения скорости в этом процессе

$$x' = \left( a_2 t - \rho_1 \frac{t^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{m_y}{m_x + m_y} \right) + \frac{m_y}{m_x + m_y} \left( \frac{\rho_1}{\omega_2^2} \cos \omega_2 t - \frac{a_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) + C.$$

Постоянная интегрирования  $C$ , определенная из условия, что в момент подачи сигнала на уменьшение тормозного усилия скорость была равна  $v_c$ , получим

$$C = v_c - \frac{m_y}{m_x + m_y} \frac{\rho_1}{\omega_2^2}.$$

Тогда уравнение, характеризующее изменение скорости запишется

$$x' = v_c - \frac{m_y}{m_x + m_y} \frac{\rho_1}{\omega_2^2} + \left( a_2 t - \rho_1 \frac{t^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{m_y}{m_x + m_y} \right) + \frac{m_y}{m_x + m_y} \left( \frac{\rho_1}{\omega_2^2} \cos \omega_2 t - \frac{a_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right). \quad (5.7)$$

Если наложить ограничение, что через промежуток времени, равный периоду колебаний  $T$ , скорость  $x'$  должна быть равна нулю, то из этого условия скорость  $v_c$  будет

$$v_c = -\left(a_2 T - \frac{\rho_1}{2} T^2\right) \left(1 - \frac{m_x}{m_x + m_y}\right). \quad (5.8)$$

Процесс торможения машины, у которой тормозное усилие изменяется по линейной характеристике, показан на рис. 5.3.

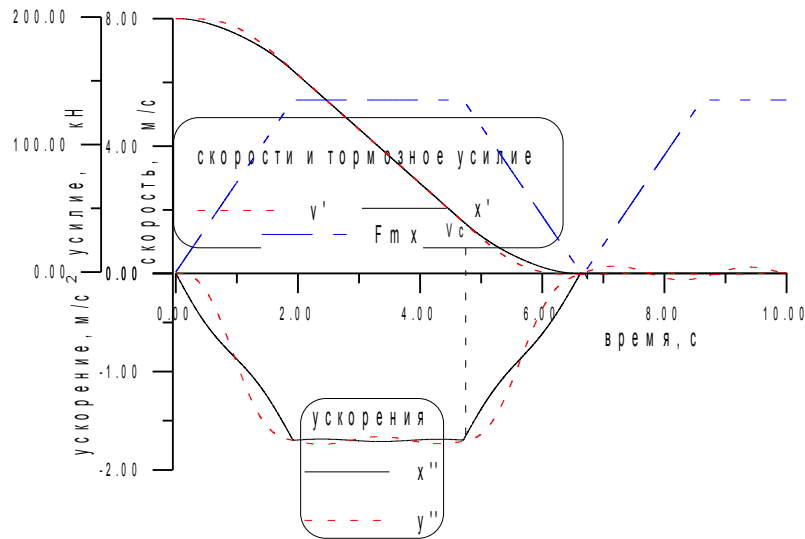


Рис. 5.3. Процесс торможения машины с изменением тормозного усилия по линейному закону

Пример 5.2. Выбрать параметры тормозной характеристики и исследовать динамический процесс машины, которая имеет техническую характеристику, приведенную в примере 5.1.

Тормозное усилие должно изменяться по закону:

$$t < T; F_m(t) = \frac{F_m}{T} t = 72916t;$$

$$t \geq T; F_m(t) = F_m = 140000;$$

$$t < T; F_m(t) = F_m - \frac{F_m}{T}(t - T_c) = 140000 - 72916(t - T_c).$$

Здесь  $T_c$  - время, соответствующее скорости  $v_c$ , при которой следует (поступает) сигнал на уменьшение тормозного усилия, с.

Переходный процесс на участке  $t \leq T$  характеризуется уравнениями (4.22, 4.25), в которых

$$\rho_1 = \frac{a_2}{T} = \frac{1,15}{1,92} = 0,6 \text{ м с}^{-3}.$$

После достижения максимальной величины тормозного усилия, изменения скоростей и ускорений подчиняются зависимостям (4.30, 4.33). Характеристики переходного процесса приведены на рис. 5.3. Видно, что при  $t > T$  переходный процесс имеет апериодический характер. После того, как начнется уменьшение тормозного усилия, кинематические характеристики подчиняются закономерностям (5.5)- (5.7). Скорость, при которой следует начать уменьшение тормозного усилия, определяется по уравнению (5.8) равна  $v_c = 0,84 \text{ мс}^{-1}$ . Видно что такое формирование тормозного усилия приводит к минимальным подать сигнал на уменьшение тормозного усилия, определяется по уравнению (5.8) равна

динамическим нагрузкам. Колебания наблюдаются только на участке, на котором изменяется возмущающее воздействие.

### 5.3. ОСТАНОВКА МАШИНЫ ЗА ВРЕМЯ, КРАТНОЕ ПЕРИОДУ КОЛЕБАНИЙ

Выше было отмечено, что максимальные динамические нагрузки грузоподъемные установки испытывают после остановки машины. Амплитудные характеристики переходного процесса после остановки машины определяются начальными условиями в момент, когда скорость массы  $m_x$  становится равной нулю.

Например, если в период остановки массы  $m_x$ , мгновенное значение замедления  $u$  равно нулю, то в системе будут минимальные динамические нагрузки. Отметим тот факт, что в реальной машине в момент остановки получить замедление  $u_{\text{от}} = 0$ , без предварительного вмешательства в систему регулирования тормоза, не представляется возможным.

Это объясняется тем, что в любой машине присутствуют силы вязкого сопротивления, которые приводят к затуханию колебаний. Следовательно, минимум замедления  $u_{\text{от}}$  удаляется от нуля. Тем не менее, способ торможения, основанный на выборе величины тормозного усилия, которое обеспечит остановку машины за время кратное периоду колебаний [6], позволит снизить динамические нагрузки.

Допустим, для достижения поставленной цели машина должна остановиться за  $n$  периодов колебаний. Следовательно, при равнозамедленном движении

$$nT = \frac{v_{\text{max}}}{a}$$

где  $v_{\text{max}}$  - максимальная скорость,  $\text{мс}^{-1}$ ;

$a$  - замедление,  $\text{мс}^{-2}$ .

С другой стороны, замедление определяется

$$a = \frac{\pm F_{cm} - F_m}{m_x + m_y}.$$

Из этих соотношений необходимая величина тормозного усилия, обеспечивающая остановку машины за  $n$  периодов колебаний, определится

$$F_m = v_{\text{max}} \frac{m_x + m_y}{nT} \pm F_{cm}. \quad (5.9)$$

Здесь знак "+/-" перед статическим сопротивлением ( $F_{cm}$ ) принимается в зависимости от режима спуска или подъема груза. Для реализации такого способа торможения предложено устройство [8], в котором определяется направление движения (подъем или спуск груза), статическое сопротивление движению  $F_{cm}$ , массы  $m_x$  и  $m_y$ , местоположение груза и его скорость. Эти параметры позволяют вычислить жесткость каната, частоту и период колебаний и, как следствие, по формуле (5.9) определить величину тормозного усилия, которое остановит машину за время, кратное периоду колебаний.

Переходный процесс при торможении машины, которая останавливается по истечению времени, равном трем периодам колебаний, приведен на рис. 5.4.

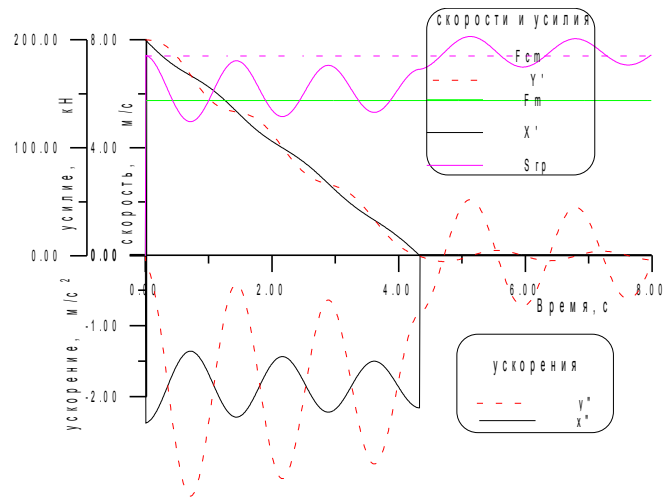


Рис. 5.4. Динамический процесс при остановке машины за три периода колебаний

Техническая характеристика машины соответствует данным, приведенным в примерах 5.1 и 5.2. Тормозное усилие прикладывается мгновенно. з рисунка видно, что после остановки машины величина амплитуды  $y''$  примерно в три раза ниже по сравнению с замедлением, показанным на рис. 5.1. Полное натяжение каната в этот момент незначительно отличается от статического натяжения. Для сравнения, на рис. 5.5 приведены характеристики динамического процесса, в котором величина тормозного усилия выбрана таким образом, что машина останавливается за время, равное 3,5 периодам колебаний.

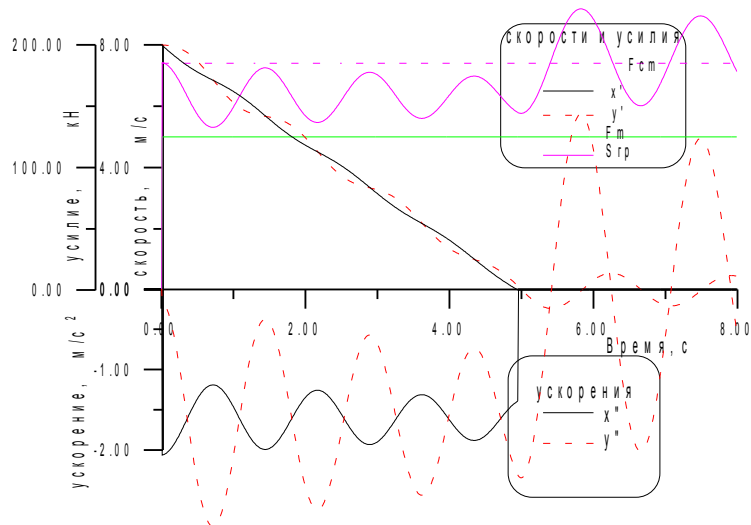


Рис. 5.5. Динамический процесс при остановке машины за 3,5 периода колебаний

Видно, что средний уровень замедлений и их амплитуды в процессе торможения снизились. Однако, замедление  $y''$  и полное натяжение каната  $S_{гр}$  после остановки машины значительно выше по сравнению с аналогичными величинами, показанными на рис. 5.4.

#### 5.4. ПРОГРАММНЫЙ ВЫБОР ВЕЛИЧИНЫ ТОРМОЗНОГО УСИЛИЯ

Уравнения (4.12, 4.13), характеризующие колебательный процесс двухмассовой механической системы показывают, что колебания замедлений в процессе торможения происходит вокруг величины  $a$ , которая определяется суммой сил, приложенных к машине. Таким образом, для тормозного режима

$$a = \frac{\pm F_{cm} - F_m}{m_x + m_y} = \pm a_{cв} - a_m,$$

где  $a_{cв} = \frac{F_{cm}}{m_x + m_y}$  - замедление (ускорение) свободного выбега, осуществляемого за счет статических сопротивлений,  $мс^{-2}$ ;

$a_m$  - замедление машины, создаваемое тормозным усилием,  $мс^{-2}$ .

Тормозные устройства современных грузоподъемных машин имеют нерегулируемую характеристику [11, 69]. Эта характеристика настраивается при наладке и остается неизменной в процессе предохранительного торможения. Следовательно, в зависимости от режима работы замедления машины отличаются на величину  $2 a_{cв}$ . Например, при спуске груза  $a = +a_{cв} - a_m$ , а при подъеме груза  $a = -a_{cв} - a_m$ . Учитывая это обстоятельство, для шахтных подъемных установок, в соответствии с требованиями Правил безопасности [60], замедление машины при спуске груза должно быть более  $1,5 мс^{-2}$ , а при подъеме груза - менее  $5 мс^{-2}$ .

Нижний предел  $1,5 мс^{-2}$  ограничен условиями, которые предотвратят опасный переподъем в случае нарушения нормального режима. Верхний предел  $5 мс^{-2}$  ограничен по причине предотвращения расслабления каната при торможении (набегание сосуда). Это ограничение становится понятным, если обратиться к формуле (4.12), (4.34) и рис. 4.7. Они показывают, что амплитудная величина замедления  $y''$  может достигать двукратного значения по отношению к  $a$ . В этом случае, мгновенное значение замедления  $y''$  будет равно  $10 мс^{-2}$ , что больше величины ускорения свободного падения и, как результат, произойдет расслабление каната. Такое явление, часто наблюдаемое на наклонных подъемных установках, получило название - набегание сосуда на канат.

Очевидно, что в зависимости от того, где находится груз и по какой причине последовал сигнал на предохранительное торможение, с целью снижения динамических нагрузок, машина должна тормозиться с различными замедлениями. Допустим, груз находится в середине ствола, а сигнал на торможение поступил по причине срабатывания ограничителя скорости. В этом случае, независимо от того в каком режиме работала подъемная установка (спуск или подъем груза), целесообразно тормозить машину с замедлением, например,  $1,5 мс^{-2}$ . При подходе к приемной площадке, а также в случае необходимости экстренной остановки, тормозное усилие должно выбираться из условия остановки машины на заданном участке пути. Следовательно, для каждого конкретного случая должна быть выбрана определенная величина тормозного усилия.

Реализация такого торможения может быть осуществлена способом управления предохранительным торможением [1], в котором с целью повышения надежности работы машины и снижения динамических нагрузок имеется программное устройство, которое в зависимости от вида выполняемой операции (спуск - подъем груза), от местоположения сосуда в стволе, от причины подачи сигнала на торможение, формирует определенную величину тормозного усилия. Реконструкция тормозных устройств в этом направлении не вызывает затруднений и выполнена на одном из калийных рудников Урала [9]. В этой схеме первая ступень тормозного усилия выбирается в зависимости от режима работы машины.

Тормозные устройства современных подъемных машин, имеющие электропневматические или электрогидравлические регуляторы давления, позволяют достаточно просто реализовать этот принцип торможения. Система автоматического управления, построенная на этом принципе, будет разомкнутой.

##### 5.5. СИСТЕМА РЕГУЛИРУЕМОГО ПРЕДОХРАНИТЕЛЬНОГО ТОРМОЖЕНИЯ (СРПТ), ПОДДЕРЖИВАЮЩАЯ ЗАДАННОЕ ЗАМЕДЛЕНИЕ

Получение необходимого замедления машины может быть возложено на замкнутую систему автоматического регулирования, на вход которой поступает заданная величина замедления. Эта система регулируемого предохранительного торможения (СРПТ) имеет формирователь задания проще, чем система, рассмотренная в разделе 5.4. В частности, нет необходимости определять вид операции, степень загрузки сосуда и местоположение груза в стволе шахты. Однако, главным достоинством СРПТ является то, что она поддерживает заданное замедление машины при изменении коэффициента трения между колодкой и тормозным ободом. Коэффициент трения тормозной пары зависит от многих факторов: температура, удельное давление, скорость, попадание воды или масла на тормозной обод [66].

К тормозным устройствам, в этом случае предъявляются повышенные требования. Они должны иметь высокое быстродействие, хорошую регулируемость, малый гистерезис.

Следует отметить, что в отечественной и зарубежной практике шахтного подъема, создание СРПТ шло именно, в этом направлении [15, 81, 88,]. На первом этапе создания этих систем были получены положительные результаты. Экспериментальная проверка первых СРПТ проводилась на наклонном подъеме [81]. Отметим особенности применения СРПТ на наклонных подъемных установках. Во - первых, на этих установках, как правило, частота колебаний ниже по сравнению с вертикальным подъемом. Это видно из формулы, определяющей частоту колебаний

$$\omega_2 = \sqrt{c_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y}} = \sqrt{\frac{EF (m_x + m_y)}{l (m_x m_y)}}.$$

Сечение каната  $F$  для наклонного подъема при одной и той же массе  $m_y$  уменьшается примерно на величину  $\sin \alpha$  ( $\alpha$  - угол наклона ствола). Поэтому, например, для наклонного подъема с углом наклона ствола  $\alpha = 30^\circ$ , частота колебаний уменьшается в 1,41 раза ( $\frac{1}{\sqrt{0,5}} = 1,41$ ). Дополнительно к этому, на наклонном подъеме, как правило, больше длина каната.

Во - вторых, для наклонных подъемов соотношение  $\frac{m_y}{m_x}$  значительно меньше, чем для вертикальных подъемов и не превышает 0,1. Это приводит к дополнительному уменьшению частоты колебаний и, как видно из формулы (4.13):  $x'' = a(1 + \frac{m_y}{m_x} \cos \omega_2 t)$ , - к уменьшению амплитуды колебаний массы  $m_x$ . Следовательно, узлы наклонной подъемной установки, по сравнению с вертикальной, имеет меньшую частоту колебаний. При этом относительная амплитуда колебаний массы  $m_x$  не превышает величины 1,1. Поэтому в системе регулирования тормозом наклонной подъемной установки действуют медленно изменяющиеся силы, которые не способны вызвать больших отклонений замедления  $x$  з от средней величины замедления  $a$ . Тормозные системы подъемных машин, эксплуатируемых в СНГ, обеспечивают необходимое быстродействие для получения положительных результатов работы систем регулирования тормозом наклонных подъемов [70].

Однако, основное предназначение систем регулируемого предохранительного торможения - это мощные подъемные установки. В первую очередь, к таким установкам относятся многоканатные подъемные машины, работающие с высокими скоростями и сложными динамическими режимами. Кроме этого, на многоканатном подъеме, из-за больших динамических нагрузок в ветвях канатов, возможно скольжение канатов по футеровке барабана, которое чрезвычайно опасно и недопустимо при эксплуатации машины. Необходимость создания СРПТ для подобных машин была доказана автором еще

в начале семидесятых годов [71]. В конце семидесятых годов усилиями института горной механики им. М.М. Федорова, (Украина), отраслевой лаборатории шахтных стационарных установок Минуглепрома СССР (г. Пермь), машиностроительного завода им. 15 - летия ЛКСМУ (Украина) была создана первая отечественная многоканатная подъемная машина с дисковыми тормозами с тиристорным управлением двигателем.

Эта машина была смонтирована на шахте им. 9 - пятилетки в Донбассе.

Соотношения масс  $\frac{m_y}{m_x} = 1,05$ , при этом, периоды колебаний в начале подъема груза равнялись 2 с, а для противовеса - 0,5 с. В силу этих причин, на органе навивки (масса  $m_x$ ) складывались колебания от груженого сосуда, от противовеса и от переменной (регулируемой) величины тормозного усилия. Учитывая тот факт, что соотношение масс больше единицы, как показано на рис. 4.2, относительная амплитуда замедления массы  $m_x$  может быть больше двух. Следовательно, машина совершает сложные колебания с большой амплитудой. В тоже время, на систему регулируемого предохранительного торможения возлагалась задача получения постоянной величины замедления машины, равной заданной. С этой задачей тормозное устройство, обладая определенным быстродействием и качеством регулирования, не смогло справиться. Наоборот, как будет показано ниже, в системе возникали дополнительные динамические нагрузки, которые отсутствовали при работе без СРПТ.

Для решения этой проблемы, на первом этапе, было естественное желание увеличить быстродействие тормоза. Однако, в силу специфики многоканатного подъема, такие технические мероприятия нельзя признать правильными.

Рассмотрим, на примере одноконцевого подъема, работу систему автоматического регулирования замедления с помощью механического тормоза. Предположим, что тормоз является весьма совершенным исполнительным элементом, который можно представить безынерционным усилителем. Тогда величину тормозного усилия можно записать

$$F_m(t) = \kappa_y (a_3 - x''), \quad (5.10)$$

где  $\kappa_y$  - коэффициент усиления СРПТ, кг;  
 $a_3$  - заданная величина замедления,  $\text{мс}^{-2}$ .

Если (5.10) подставить в систему уравнений (4.2) и сделать преобразование, получим

$$\Delta'' + 2\mu_p \Delta' + \omega_p^2 \Delta = a_p. \quad (5.11)$$

В этом уравнении индекс  $p$  предписывает принадлежность к коэффициентам уравнения, характеризующего систему автоматического регулирования тормозного усилия. По сравнению с уравнением (4.3) коэффициенты запишутся

$$\mu_p = \frac{\mu_y}{2m_p}; \quad \omega_p^2 = \frac{c_y}{m_p}; \quad a_p = \frac{-F_{cm}x + \kappa_y a_3}{m_x + \kappa_y}; \quad m_p = \frac{m_y(m_x + \kappa_y)}{m_y + m_x + \kappa_y}.$$

Графическая зависимость  $m_p = f(\kappa_y)$ , при  $m_y = 18840$  кг,  $m_x = 6570$  кг, показана на рис. 5.6. Видно, что с увеличением коэффициента усиления  $\kappa_y$  величина  $m_p$  увеличивается. Следовательно, в системе автоматического регулирования коэффициент диссипации  $\mu_p$  и частота ( $\omega_p^2$ ) уменьшаются.

Корнями характеристического уравнения (5.11) будут



$$r_{1,2} = -\frac{\mu_y}{2} \frac{m_x + m_y + \kappa_y}{m_y(m_x + \kappa_y)} \pm \sqrt{\left[ \frac{\mu_y}{2} \frac{m_x + m_y + \kappa_y}{m_y(m_x + \kappa_y)} \right]^2 - c_y \frac{m_x + m_y + \kappa_y}{m_y(m_x + \kappa_y)}}. \quad (5.12)$$

Подкоренное выражение формулы (5.12) характеризует частоту колебаний механической системы с учетом коэффициента диссипации  $\mu_y$ . Величина подкоренного выражения, при отсутствии системы автоматического регулирования ( $\kappa_y = 0$ ), всегда комплексная (уравнение 4.3).

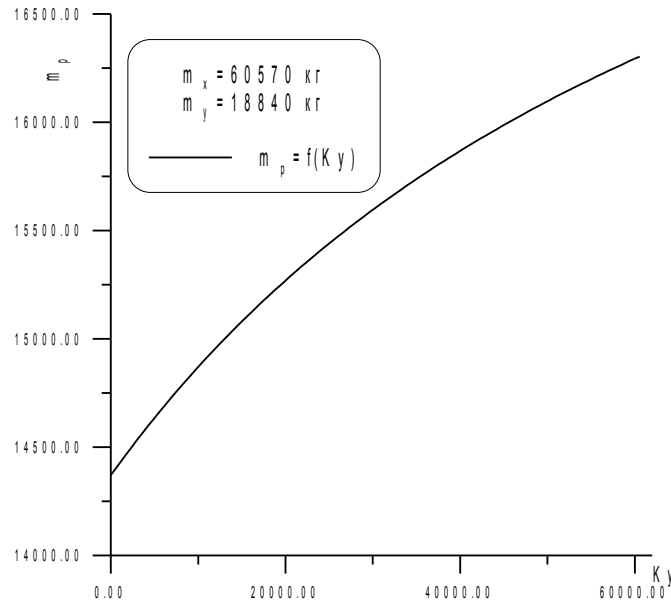


Рис. 5.6. Зависимость  $m_p = f(\kappa_y)$

Введем обозначения

$$\omega_{p\mu}^2 = \left[ \frac{\mu_y}{2} \frac{m_x + m_y + \kappa_y}{m_y(m_x + \kappa_y)} \right]^2 - c_y \frac{m_x + m_y + \kappa_y}{m_y(m_x + \kappa_y)}$$

и исследуем, как будет изменяться величина  $\omega_{p\mu}^2 = f(\kappa_y)$ . Эта характеристика показана на рис. 5.7.

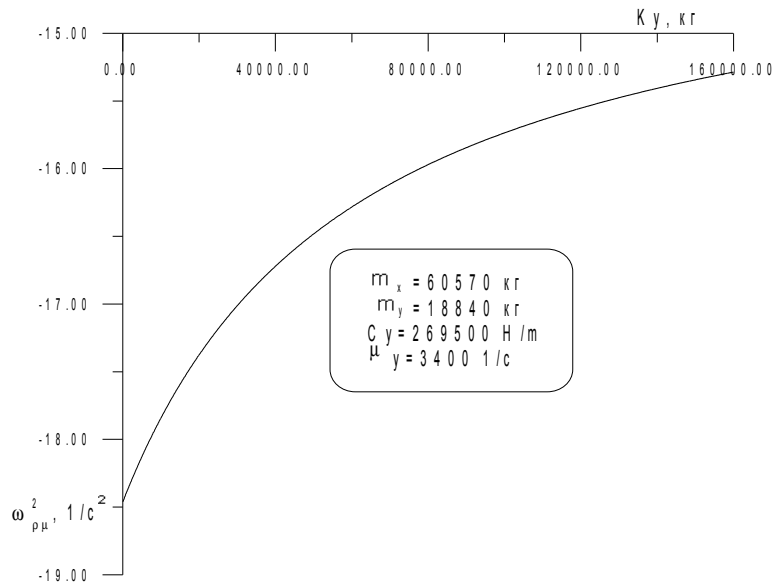


Рис. 5.7. Зависимость  $\omega_{p\mu}^2 = f(\kappa_y)$

Видно, что величина  $\omega_{p\mu}^2$  - отрицательная, следовательно, корни характеристического уравнения (5.11), будут комплексными, а это значит, что в механической системе с автоматическим поддержание заданного замедления органа навивки всегда присутствуют колебания.

На рис. 5.8 показаны характеристики переходного процесса в механической системе с автоматическим регулированием тормозного усилия, поддерживающего заданное замедление машины. Коэффициент усиления СРПТ  $\kappa_y = 60000$  кг. Известно, что с увеличением коэффициента усиления систем автоматического регулирования, ошибка  $a_3 - x''$  уменьшается. Однако, в этом случае, уменьшается устойчивость и возможны автоколебания. Коэффициент усиления  $\kappa_y = 60000$  кг, выбран максимальным из условия сохранения устойчивого переходного процесса, однако в начале процесса регулирования наблюдаются высокочастотные колебания, которые быстро затухают. Величина тормозного усилия  $F_m = f(t)$  колеблется в противофазе с замедлением груза  $u_y$ .

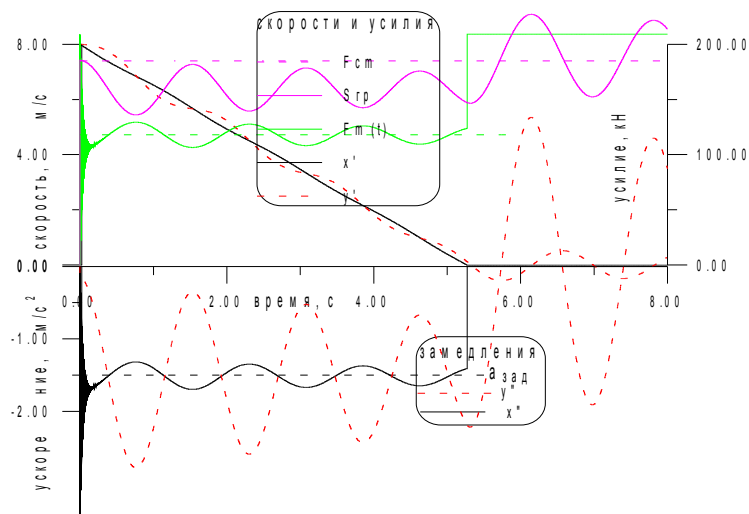


Рис. 5.8. Переходный процесс с системой регулирования, поддерживающей заданное замедление

Если сравнить этот рисунок с рис. 5.4 и 5.5, то видно, что замедление органа навивки  $x$  стало иметь меньшую амплитуду колебаний, однако замедление концевого груза  $y$  колеблется с большей амплитудой.

Таким образом, в системе автоматического регулирования замедления, построенной по такому принципу, не представляется возможным уменьшить колебания концевого груза. Отметим еще раз, что чрезмерные колебания массы  $m_y$  могут вызвать проскальзывание канатов на многоканатном подъеме, или набегание сосуда на канат на наклонном подъеме. Построенная таким образом система автоматического регулирования замедления, предназначенная для устранения опасных режимов на подъемной установке, может стать причиной появления этих недопустимых явлений. В реальной машине, тормозное устройство которой обладает запаздыванием и гистерезисом, могут сформироваться динамические процессы, которые усилят колебания машины и концевого груза.

Этими причинами объясняются неудачные попытки использования СРПТ на многоканатном подъеме. Использование таких СРПТ на наклонных установках, у которых колебания массы  $m_x$  незначительны, позволяет получать замедление машины близкое к заданному и тем самым исключать набегание сосуда на канат при предохранительном торможении. Следует отметить, что автором со своими учениками разработан ряд более простых разомкнутых систем торможения, которые были внедрены на шахтах Инты, Воркуты, Урала и Кузбасса [4, 5, 7].

## 5.6. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим теоретическую возможность демпфирования колебаний за счет применения системы автоматического регулирования. Эта система регулирования должна сформировать двигательное или тормозное усилие по определенному закону.

Если машину представить двухмассовой механической системой, то переходный процесс характеризуется системой уравнений (4.1), которые приводятся к уравнению (4.3)

$$\Delta'' + 2\mu_2\Delta' + \omega_2^2\Delta = a_2(t).$$

Для реальных машин корни характеристического уравнения

$$r_{1,2} = -\mu_2 \pm \sqrt{\mu_2^2 - \omega_2^2},$$

всегда комплексные (т. к.  $\omega_2 \gg \mu_2$ ) и, как следствие, переходные процессы носят колебательный характер.

Для того чтобы переходный процесс был устойчивым и аperiodическим, необходимо чтобы корни  $r_1$  и  $r_2$  были действительными и отрицательными. Это условие может быть выполнено при  $\mu_2 > \omega_2$ , т. е.

$$\frac{1}{2}\mu_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y} > \sqrt{c_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y}}. \quad (5.13)$$

Коэффициент, характеризующий силы вязкого сопротивления,  $K_y$ , можно выразить через логарифмический декремент колебаний  $\lambda_2$  из формулы (4.46)

$$\mu_y = \frac{\delta_2 m_y}{\pi} \sqrt{c_y \frac{m_x + m_y}{m_x m_y}}.$$

Экспериментальные исследования показали, что для шахтных подъемных установок  $\delta_2 \approx 0,15$ , [72].

Если неравенство (5.13) заменить равенством, то можно определить условное значение логарифмического декремента колебаний  $\delta_y$ , при котором процесс будет аperiodическим

$$\delta_y = 2\pi \sqrt{\frac{m_y}{m_x + m_y}}.$$

При  $m_x = m_y$ ,  $\delta_y = 1,41\pi$ , т. е. в 25 раз больше реального  $\delta_2$ .

Этот коэффициент назван условным логарифмическим декрементом колебаний, так как в реальной машине отсутствуют силы вязкого сопротивления, способные задемпфировать колебательный процесс.

Однако если допустить, что такие силы вязкого демпфирования можно ввести в механическую систему, то переходный процесс станет аperiodическим. Создание сил, пропорциональных силам вязкого демпфирования можно возложить на систему автоматического регулирования.

Действительно, на основании первого уравнения системы (4.1) можно записать

$$m_x x'' + c_y (x - y) = -F_{cm} + \sum F(t) - \mu_y (x' - y'). \quad (5.14)$$

Рассмотрим случай торможения машины при отключенном электродвигателе. Для этого случая

$$\sum F(t) = -F_m(t),$$

где  $F_m(t)$  - тормозное усилие, приложенное к массе  $m_x$ , Н.

$\mu_y$  - коэффициент диссипации, соответствующий условному логарифмическому декременту колебаний, Нсм<sup>-1</sup>.

Закон изменения тормозного усилия можно принять экспоненциальным, который характеризуется уравнением (1.28)

$$F_m(t) = F_{\max} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Таким образом, для того чтобы получить переходный процесс без колебаний, на тормозную систему необходимо возложить обязанности создания суммарного регулируемого тормозного усилия

$$F_p(t) = F_m(t) + F_k(t) = F_{\max} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + k_y (x' - y'). \quad (5.15)$$

Здесь  $F_k(t) = k_y (x' - y')$  - корректирующая составляющая тормозного усилия, Н;

$k_y$  - коэффициент усиления системы автоматического регулирования, Н-сс м<sup>-1</sup>.

Возникает вопрос, можно ли в реальных тормозных устройствах реализовать получение корректирующей составляющей  $F_k(t)$  и суммарного регулируемого тормозного усилия  $F_p(t)$ ?

Эта задача решена путем математического моделирования процесса торможения с наложенными ограничениями.

На рис. 5.9, показан процесс торможения машины при подъеме груза. Компьютерная программа позволяет получить ответ на вопрос, как должно изменяться тормозное усилие, чтобы обеспечить аperiodический переходный процесс.

При подаче сигнала на торможение к машине прикладывается ступенчато возмущение, равное статическому сопротивлению  $F_{cm}$ , которое вызывает колебательный процесс. В первоначальный момент замедление массы  $m_y$  ( $y''$ ) обусловлено силой вредного сопротивления -  $R_y$ , а замедление массы  $m_x$  ( $x''$ ) - приложением статического сопротивления -  $F_{cm}$ . На фоне экспоненциальной характеристики  $F_m(t)$  показаны корректирующая  $F_k(t)$  и результирующая  $F_p(t)$  составляющие тормозного усилия. Видно, что через секунду, после начала торможения, замедления  $y''$  и  $x''$  практически равны и процесс до остановки машины совершается без колебаний. На рисунке показаны закономерности изменения скоростей  $x'$  и  $y'$ , а также полное натяжение каната  $S_{cp}$ .

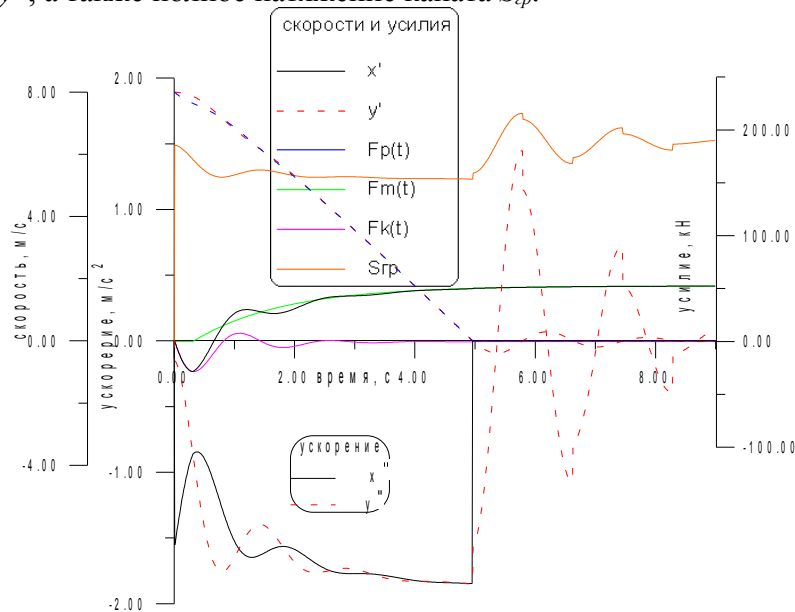


Рис. 5.9. Торможение машины при подъеме груза с регулируемой характеристикой тормоза

Обратим внимание на тот факт, что для получения аperiodического процесса, в период холостого хода тормоза к машине должно быть приложено движущее усилие. Характер нарастания результирующего усилия  $F_p(t)$  не существенно отличается от экспоненциального и вселяет уверенность в возможности реализации синтезированной тормозной характеристики на реальной машине. После остановки органа навивки ( $x' = 0$ ), масса  $m_y$  совершает свободные колебания и в канате возникают максимальные нагрузки.

Так как в реальных машинах при торможении получение движущего усилия в период холостого хода тормоза затруднительно, то для доказательства возможности демпфирования колебательного процесса, при математическом моделировании примем условие, что при  $F_p(t) < 0$ , результирующее тормозное усилие равно нулю. Характеристики процесса торможения при подъеме груза, соответствующие этому условию, показаны на рис. 5.10.

Видно, что по сравнению с рис. 5.9, для демпфирования колебаний после холостого хода, на тормоз возлагаются более сложные задачи. Регулирующее усилие  $F_p(t)$  должно резко возрасти, а затем изменяться по закону, показанному на рис. 5.10. При этом время холостого хода увеличивается. В результате, в процессе торможения колебания замедлений  $x''$  и  $y''$  существенно снижены. После остановки машины, также как для процесса, показанного на рис. 5.1, наблюдаются большие колебания массы  $m_y$ .

Обратим внимание на некоторые искажения характеристик свободных колебаний массы  $m_y$  по сравнению с гармоническими колебаниями. Характерные изломы кривых  $S_{gp}$  и  $y''$  объясняется тем, что во втором уравнении системы (4.1) изменяется знак перед силой трения  $R_y$  при изменении знака скорости  $y'$ . В математической модели это свойство реализовано функцией Кронеккера  $R_y \text{ sign } y'$ .

Рассмотренный пример показывает возможность демпфирования колебаний только в процессе замедления машины и оставляет нерешенной задачу снижения динамических нагрузок, возникающих после остановки машины.

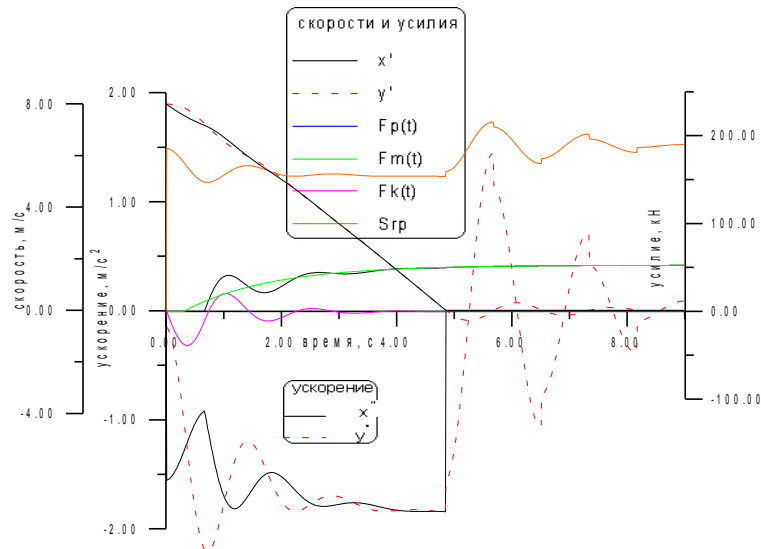


Рис. 5.10. Торможение машины при подъеме груза с учетом холостого хода тормоза

Для того чтобы уменьшить динамические нагрузки после остановки машины целесообразно перед остановкой машины, с интенсивностью пропорциональной периоду колебаний, уменьшить величину тормозного усилия, а после того, как масса  $m_x$  остановится - тормозное усилие увеличить до величины, обеспечивающей надежное стопорение машины [6].

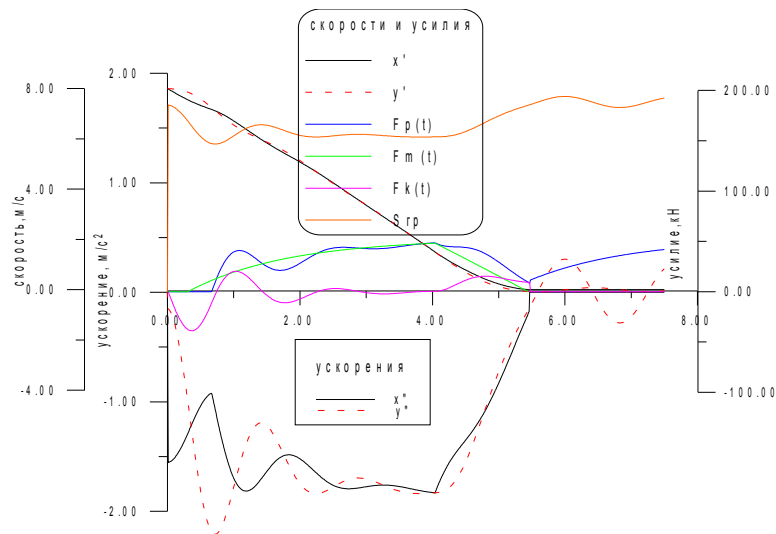


Рис. 5.11. Торможение машины с синтезированной тормозной характеристикой

Характеристика динамического процесса показана на рис. 5.11. Видно, что в первоначальный момент массы  $m_x$  и  $m_y$  начинают разгоняться, совершая большие

колебания. Синтезированное тормозное усилие  $F_p(t)$  демпфирует колебания и процесс приближается к апериодическому. Перед остановкой машины, за время равное периоду колебаний, тормозное усилие уменьшается. После остановки массы  $m_x$  ( $x' = 0$ ), к неподвижной машине прикладывается полное тормозное усилие. В результате, амплитуда свободных колебаний массы  $m_y$  значительно меньше, по сравнению с процессами, показанными на рис. 5.9 и 5.10.

Таким образом, исследования показывают возможность синтеза тормозного усилия, способного задемпфировать колебания в элементах машины. Эти закономерности можно распространить и на процессы разгона. Для достижения поставленной задачи системы автоматического регулирования электроприводом или тормозом должны иметь обратную связь, сигнал которой пропорционален разности скоростей  $(x' - y')$  с коэффициентом усиления  $k_y > \mu_y$ .

Для практической реализации предложенного способа демпфирования колебаний необходимо измерить скорость машины и сосуда. Если для измерения скорости машины нет затруднений, то измерение скорости подъемного сосуда и трансляции этого сигнала в здание, где расположена подъемная машина и система регулирования, представляет определенные трудности.

В принципе, скорость сосуда можно измерить косвенным путем. Например, замерив усилие в канате, можно выделить динамическую составляющую и при известной массе конечного груза определить замедление (ускорение) сосуда, проинтегрировав которое, можно получить скорость сосуда. Такой способ получения информации о поведении конечного груза также нельзя считать надежным и приемлемым. Основная сложность при этом заключается в постоянном контроле за натяжением канатов. Известные датчики и аппараты контроля громоздки и могут использоваться только при экспериментальных исследованиях. О повседневном применении такой аппаратуры не может быть и речи.

Для практической реализации системы предохранительного торможения, способной демпфировать колебания сосуда в канате, может быть использована схема, в которой регулируемая величина тормозного усилия формируется суммой нерегулируемого тормозного усилия  $F_m$  и тормозного усилия, пропорционального сумме сигналов производной замедления органа навивки и производной тормозного усилия. Докажем это положение.

Уравнение (5.14) без учета диссипативных свойств системы ( $\mu_y = 0$ ) будет

$$m_x x'' + c_y (x - y) = -F_{cm} - F_m(t).$$

Продифференцировав по времени последнее уравнение, получим

$$m_x x''' + c_y (x' - y') = -F_m'(t).$$

Из этого уравнения

$$x' - y' = -\frac{m_x}{c_y} x''' - \frac{F_m'(t)}{c_y}.$$

Здесь  $x'''$ - производная ускорения, или рывок, характеризующий скорость изменения ускорения, или скорость изменения возмущающего воздействия, приложенного к машине,  $\text{мс}^{-3}$ .

Обозначим  $x''' = a'_x$ , тогда из уравнения (5.15), для демпфирования колебаний на канате при торможении, тормозное усилие должно формироваться по закону

$$F_p(t) = F_m(t) + \frac{K_y}{C_y}(-m_x a'_x - F'_m(t)). \quad (5.16)$$

Переходный процесс режима торможения с системой автоматического регулирования, построенной по принципу формирования тормозного усилия по закону (5.16), аналогичен процессу, приведенному на рис. 5.11.

Таким образом, взяв в качестве параметров измерения ускорение машины и тормозное усилие, получим надежные сигналы, необходимые для формирования усилия, которое обеспечит демпфирование колебаний сосуда на канате.

Реализация систем автоматического демпфирования колебаний позволит снизить уровень динамических нагрузок и, тем самым, увеличить безопасность и долговечность эксплуатации машин.

### 5.7. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГЛОТИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ

Машины, на которые действуют переменные силы с постоянной частотой, испытывают вредные колебания, особенно вблизи резонанса. В практике эксплуатации таких машин для снижения амплитуды колебаний, как было показано в разделе 3.4, стремятся удалиться от резонанса, путем изменения жесткости и массы (частоты свободных колебаний). Иногда встречаются случаи, когда такое решение оказывается непрактичным. Для решения этой задачи в 1909 г. Фрамом был изобретен динамический поглотитель колебаний [39]. Чтобы пояснить принцип работы поглотителя колебаний, представим механическую систему с двумя степенями свободы схемой, приведенной на рис. 5.12.

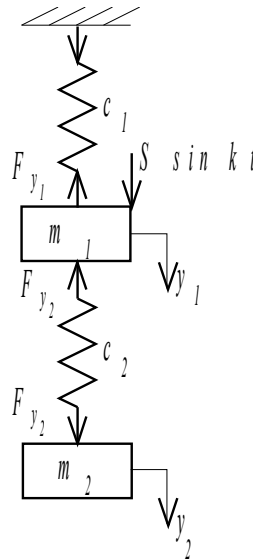


Рис. 5.12 Динамический поглотитель колебаний

Если на массу  $m_1$  действует гармоническая сила  $S \sin kt$  с частотой  $k$ , то оказывается, можно подобрать массу  $m_2$  и жесткость пружины  $c_2$  таким образом, что масса  $m_1$  не будет совершать колебаний. Это, очевидно, можно получить тогда, когда сила упругости  $F_{y_2}$  будет равна и противоположно направлена возмущающей силе  $S \sin kt$ . Практически достигнуть полного поглощения колебаний массы  $m_1$  невозможно. При отсутствии колебаний массы  $m_1$ , последняя не будет передавать усилие пружине жесткостью  $c_2$  и, как следствие, масса  $m_2$  останется неподвижной. Для доказательства работоспособности динамического поглотителя колебаний составим математическую модель, рассматриваемой схемы. Эта схема представляет частный случай схем, приведенных на рис. 3.1 и 4.1.

Поэтому по аналогии с 4.1, принимая пружины чисто упругими элементами, запишем



$$\begin{cases} m_1 y_1'' = S \sin kt - F_{y_1} - F_{y_2}, \\ m_2 y_2'' = F_{y_2}, \\ F_{y_1} = c_1 y_1, \\ F_{y_2} = c_2 (y_1 - y_2). \end{cases}$$

Систему уравнений представим

$$\begin{cases} m_1 y_1'' + (c_1 + c_2) y_1 - c_2 y_2 = S \sin kt, \\ m_2 y_2'' + c_2 (y_2 - y_1) = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

При изучении колебательных процессов механических систем с одной и с двумя степенями свободы при гармонической возмущающей силе было отмечено, что свободные колебания быстро затухают и в системе присутствуют только вынужденные колебания (рис. 3.11 и 4.11, а). Вынужденные колебания характеризуются уравнением (4.56), в котором при отсутствии сил вязкого демпфирования ( $\mu_2 = 0$ ) постоянная  $M = 0$  и, следовательно

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin kt; \\ y_2 &= A_2 \sin kt. \end{aligned}$$

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  - амплитуды колебаний масс  $m_1$  и  $m_2$ .

После двукратного дифференцирования этих выражений и подстановки в уравнение (5.17) получим зависимости, в которых все члены пропорциональны величине  $\sin kt$ . Сократив эту величину, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 - m_1 k^2) A_1 - c_2 A_2 = S, \\ c_2 A_1 + (m_2 k^2 - c_2) A_2 = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Под действием силы  $S$ , пружина жесткостью  $c_1$  будет иметь статическую деформацию

$$y_{cm} = \frac{S}{c_1}, \text{ поэтому, разделив уравнение (5.18) на } c_1 \text{ и, введя обозначения: } \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \text{ и}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}, \text{ получим}$$

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} - \frac{k^2}{\omega_1^2}\right) A_1 - \frac{c_2}{c_1} A_2 = y_{cm}, \\ A_1 = \left(1 - \frac{k^2}{\omega_2^2}\right) A_2. \end{cases}$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - собственные частоты колебаний масс  $m_1$  и  $m_2$ ,  $c^{-1}$ .

Если ввести понятия относительных амплитуд  $\bar{A}_1 = \frac{A_1}{y_{cm}}$  и  $\bar{A}_2 = \frac{A_2}{y_{cm}}$ , то получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{A}_1 = \frac{1 - \frac{k^2}{\omega_2^2}}{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_2^2}\right)\left(1 + \frac{c_2}{c_1} - \frac{k^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{c_2}{c_1}}, \\ \overline{A}_2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_2^2}\right)\left(1 + \frac{c_2}{c_1} - \frac{k^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{c_2}{c_1}}. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Из первого уравнения системы (5.19) видно, что относительная амплитуда колебаний массы  $m_1$  будет равна нулю при условии, если числитель  $1 - \frac{k^2}{\omega_2^2} = 0$ .

Следовательно, если собственная частота колебаний поглотителя равна частоте колебаний возбуждающей силы, то колебания массы  $m_1$  будут отсутствовать. Рассмотренный динамический поглотитель колебаний может быть настроен только на одну частоту и применение его ограничено машинами, работающими с постоянной скоростью.

Подбор параметров поглотителя осуществляется из соотношения

$$\frac{c_2}{m_2} = k^2. \quad (5.20)$$

Аналогичные явления происходят и в крутильной системе, состоящей из двух маховых масс с моментами инерции  $J$  и  $J_1$  (рис. 5.13).

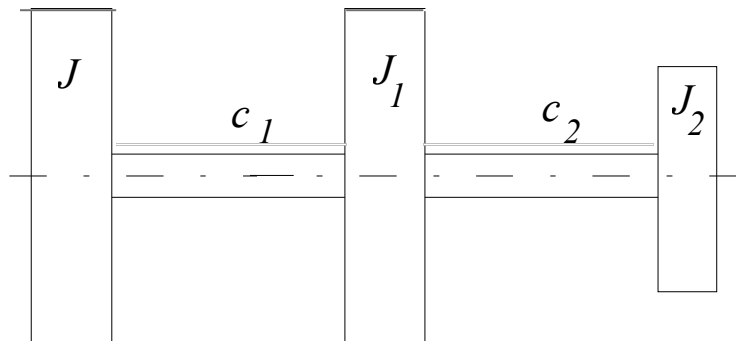


Рис. 5.13. Динамический поглотитель крутильных колебаний

Предположим,  $J$  это момент инерции синхронного электродвигателя, вращающегося с постоянной скоростью. Рабочая машина с моментом инерции  $J_1$  соединена с электродвигателем трансмиссией и имеет крутильную жесткость  $c_1$ . Если момент сопротивления характеризуется гармонической функцией с частотой  $k$ , то в валопроводе жесткостью  $c_1$ , будут наблюдаться колебания. В соответствии с вышерассмотренным, можно подобрать дополнительную массу с моментом инерции  $J_2$  и присоединить ее с помощью валопровода жесткостью  $c_2$  к маховой массе  $J_1$ . Если параметры динамического поглотителя крутильных колебаний выбраны с соблюдением соотношения

$$\frac{c_2}{J_2} = k^2,$$

то машина будет работать без колебаний.

Пример 5.3. На рабочую машину (рис. 5.12), имеющую массу  $m_1 = 1000$  кг, действует гармоническая сила  $S = 1$  кН, с частотой  $k = 10$  с<sup>-1</sup>. Жесткость валопровода  $c_1 = 100$  кН м<sup>-1</sup>. Определить параметры поглотителя и исследовать режим работы механической системы с динамическим поглотителем.

Механическая система без динамического поглотителя эквивалентна схеме, изображенной на рис. 3.1. Частота свободных колебаний массы  $m_1$  равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

На массу  $m_1$  действует гармоническая сила с частотой  $k = 10$  с<sup>-1</sup>. Следовательно, механическая система будет работать в резонансном режиме. Если предположить, что в системе имеются диссипативные силы, соответствующие коэффициенту  $\mu_1 = 0,1\omega_1$ , то согласно рис. 3.12 амплитуда колебаний массы  $m_1$  будет в пять раз больше статической деформации. Статическая деформация пружины с жесткостью  $c_1$  под действием силы  $S$  равна

$$y_{cm} = \frac{S}{c_1} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Из рис. 3.13 видно, что для получения относительной амплитуды равной 0,2 - 0,3 необходимо увеличить частоту возмущающей силы в два - три раза. Этот же результат можно получить за счет применения динамического поглотителя колебаний.

В соответствие с (5.20) жесткость и масса поглотителя связаны соотношением

$$c_2 = k^2 m_2$$

Существует бесконечное количество параметров поглотителя, которые удовлетворяют это соотношение, поэтому при их выборе необходимо руководствоваться конструктивными соображениями. Следует помнить, что при уменьшении массы  $m_2$  уменьшается жесткость и, как следствие, будет увеличиваться перемещение массы  $m_2$ .

Рассмотрим два варианта поглотителя, имеющего массу  $m_2 = 1000$  кг.  $m_2' = 100$  кг. Жесткости пружин, обеспечивающие частоту свободных колебаний  $k = 10$  с<sup>-1</sup> будут

$$c_2 = k^2 m_2 = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}, \quad c_2^* = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Для исследования режима работы динамического поглотителя воспользуемся системой дифференциальных уравнений (5.17).

Предположим, в системе присутствуют силы вязкого сопротивления, которые характеризуются коэффициентами  $\mu_{y_1}$  и  $\mu_{y_2}$ . Связь этих коэффициентов с коэффициентом  $\mu_i = 0,1\omega_i$  выражается соотношением

$\mu_i = \frac{1}{2} \frac{\mu_{y_i}}{m_i}$ . Тогда силы упругости  $F_{y_1}$  и  $F_{y_2}$  запишутся

$$F_{y_1} = c_1 y_1 + \mu_{y_1} y_1', \quad F_{y_2} = c_2 (y_1 - y_2) + \mu_{y_2} (y_1' - y_2').$$

С учетом этого система дифференциальных уравнений (5.17) будет

$$\begin{cases} m_1 y_1'' + (c_1 + c_2) y_1 - c_2 y_2 + (\mu_{y_1} + \mu_{y_2}) y_1' - \mu_{y_2} y_2' = S \sin kt, \\ m_2 y_2'' + c_2 (y_2 - y_1) + \mu_{y_2} (y_2' - y_1') = 0. \end{cases}$$

Полученная система дифференциальных уравнений решена с помощью пакета Mathcad 7.0.

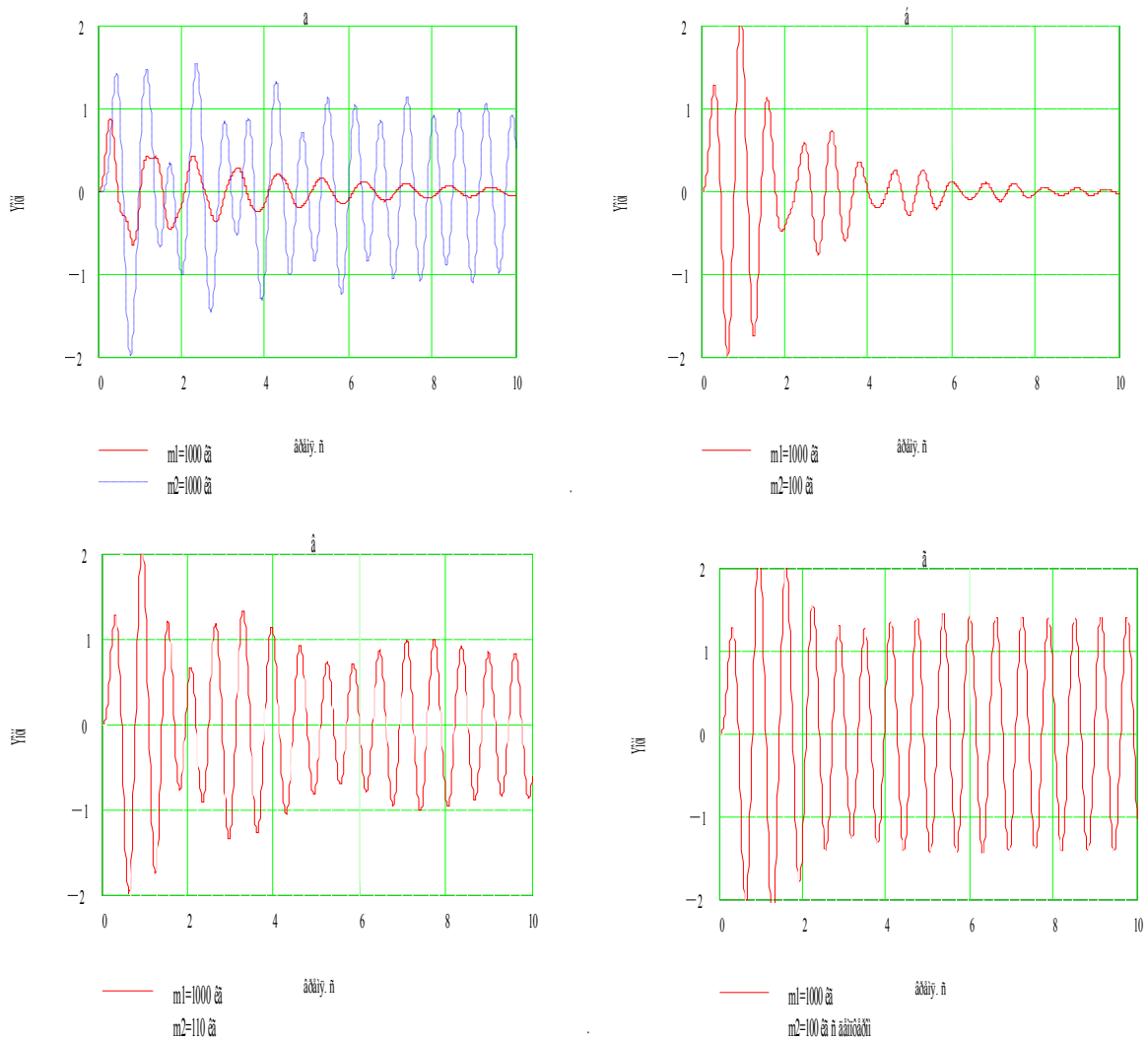


Рис. 5.14. Характеристики переходных процессов с динамическими поглотителями

Подтверждено, что при отсутствии упругой связи между массами  $m_1$  и  $m_2$  система работает в резонансном режиме и относительная амплитуда перемещения ( $y_{cm} = \frac{y_i}{y_{cm}}$ ) равна 5, которая достигает этой величины через 4 с после начала процесса.

На рис. 5.14, а и б показаны динамические процессы при работе машины с поглотителем колебаний. Видно, что при  $m_2 = 1000$  кг, относительное перемещение массы  $m_1$  через 6 с не превышает величины равной 0,2, которое в дальнейшем уменьшается. При этом амплитуда относительного перемещения массы  $m_2$  превышает единицу. Во втором случае ( $m_2 = 100$  кг) снижение амплитуды колебаний до величины 0,2 происходит за такое же время, однако, в первоначальный момент она достигает двух единиц. Амплитуда относительного перемещения массы  $m_2$  равна 5 (на графике не показана). Таким образом, поглотители колебаний с массами 1000 и 100 кг позволяют получить один и тот же результат, поэтому окончательное решение принимается с учетом конструктивных соображений, учитывая то обстоятельство, что с уменьшением массы  $m_2$  увеличивается

перемещение  $y_2$ . В работе [39] показано, что для динамических поглотителей рациональное отношение  $\frac{m_1}{m_2} \approx 10 - 11$ .

Если при выборе параметров динамического поглотителя не выполнено соотношение 5.20, эффект его работы будет снижен. Предположим, масса поглотителя выбрана 110 кг. В этом случае, при жесткости пружины  $c_2 = 10000 \text{ Нм}^{-1}$ , частота свободных колебаний массы  $m_2$  будет  $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} = 9,531 \text{ с}^{-1}$ . Характеристика переходного процесса, для этого случая, показана на рис. 5.14, в. Видно, что в системе наблюдаются незатухающие колебания с относительной амплитудой около единицы. Приведенный пример показывает, что изменение величины массы от расчетной на 10 % приводит к увеличению установившейся величины амплитуды колебаний в  $\frac{1,0}{0,2} = 5$  раз.

Для достижения наилучших результатов упругая связь между массами  $m_1$  и  $m_2$  не должна иметь ни каких амортизирующих устройств ( $d_{y2} = 0$ ). Предположим, в систему включен амортизатор, имеющий коэффициент диссипации  $\mu_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_{y2}}{m_2} = 0,1\omega_2$ . Динамический процесс работы такой системы показан на рис. 5.14, г. Видно, что относительная амплитуда колебаний массы  $m_1$  превышает единицу и эффект демпфирования существенно уменьшается.

## 6. СТАТИКА И ДИНАМИКА ГИБКОЙ ОДНОРОДНОЙ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ

Идеальная, гибкая однородная тяжелая нить это нить, оказывающая сопротивление растяжению, но у которой жесткость на изгиб равна нулю, т. е. нить, не сопротивляющаяся изгибу. При равномерной распределенной нагрузке по длине идеальная нить принимает очертание цепной линии, т. е. подвешенной тонкой цепи с большим числом очень

маленьких звеньев. Под статикой гибкой однородной тяжелой нити будем понимать ее траекторию при постоянной растягивающей силе.

### 6.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАЕКТОРИИ ГИБКОЙ ОДНОРОДНОЙ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ

На рис. 6.1 выделим элемент нити от точки 1 до точки 2 длиной  $dl$ . Линейная плотность нити  $p$ . Вес элемента  $gpdl$ . К элементу нити в точках 1 и 2 приложены силы, которые направлены по касательным к кривой в этих точках под углами  $\alpha$  и  $\alpha + d\alpha$ .

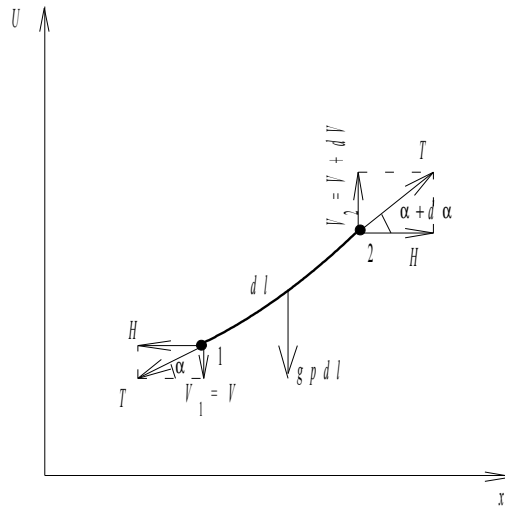


Рис. 6.1. Схема элементарного отрезка гибкой однородной тяжелой нити

Из условия равновесия элемента можно записать, что сумма проекций сил на вертикальную ось равна нулю, т. е.

$$V_1 + gpdl - V_2 = 0. \quad (6.1)$$

Для того чтобы элемент нити находился в неподвижном состоянии, очевидно, растягивающие силы  $H$ , приложенные в точках 1 и 2, должны быть равны.

Подставив  $V_1 = V$ ,  $V_2 = V + dV$  в (6.1), получим

$$V + gpdl - V - dV = 0,$$

отсюда

$$dl = \frac{1}{gp} dV.$$

Но,  $V = HU'$ , тогда  $dV = HdU'$ . Следовательно

$$dl = \frac{H}{gp} dU'. \quad (6.2)$$

Из курса высшей математики известно, что длина дуги плоской линии равна

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + U'^2} dx \quad [31].$$

Следовательно

$$dl = dx\sqrt{1+U'^2}. \quad (6.3)$$

Из уравнений (6.2) и (6.3) можно записать

$$\frac{H}{gp}dU' = \sqrt{1+U'^2} dx; \quad \frac{gp}{H} dx = \frac{dU'}{\sqrt{1+U'^2}},$$

$$x = \frac{H}{gp} \int \frac{dU'}{\sqrt{1+U'^2}} = \frac{H}{gp} \ln(U' + \sqrt{1+U'^2}) = \frac{H}{gp} \operatorname{arsh}(U') + C_1.$$

Из этого уравнения можно записать

$$\frac{gp}{H}(x + C_1) = \ln(U' + \sqrt{1+U'^2}) = \operatorname{arsh} U'.$$

Тогда

$$U' = \operatorname{sh} \frac{gp}{H}(x + C_1), \quad (6.4)$$

$$U = \frac{H}{gp} \operatorname{ch} \frac{gp}{H}(x + C_1) + C_2. \quad (6.5)$$

Если ось ординат направить вниз, то правые части уравнений (6.5) изменят знак. Постоянные интегрирования определяются из начальных условий, которые зависят от схемы закрепления гибкой нити.

Рассмотрим схему, соответствующую порожней ветви ленточного конвейера, расположенного в горизонтальной выработке (рис 6.2). Выберем начало координат в точке  $O$ , соответствующей вершине кривой.

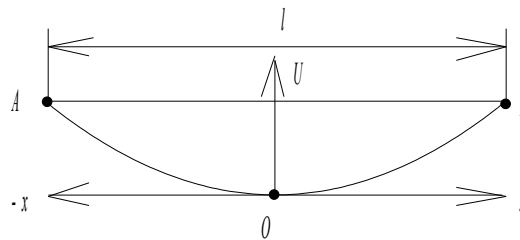


Рис. 6.2. Схема порожней ветви горизонтального ленточного конвейера

Очевидно, при  $x = 0$ ;  $U' = 0$ :  $C_1 = 0$ ; при  $x = 0$ ;  $U = 0$ :  $C_2 = -\frac{H}{gp}$ .

Тогда

$$U = \frac{H}{gp} \left( \operatorname{ch} \frac{gp}{H} x - 1 \right); \quad (6.6)$$

$$U' = \text{sh} \frac{gp}{H} x. \quad (6.7)$$

На рис. 6.3 показаны траектории гибкой нити для каната, имеющего  $p = 16 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-1}$ ,  $l = 600 \text{ м}$ , при натяжениях  $H = 200000 \text{ Н}$  ( $U(x)$ ) и  $H_1 = 400000 \text{ Н}$  ( $U_1(x)$ ). Стрелы провеса равны 36,173 и 18,02 м.

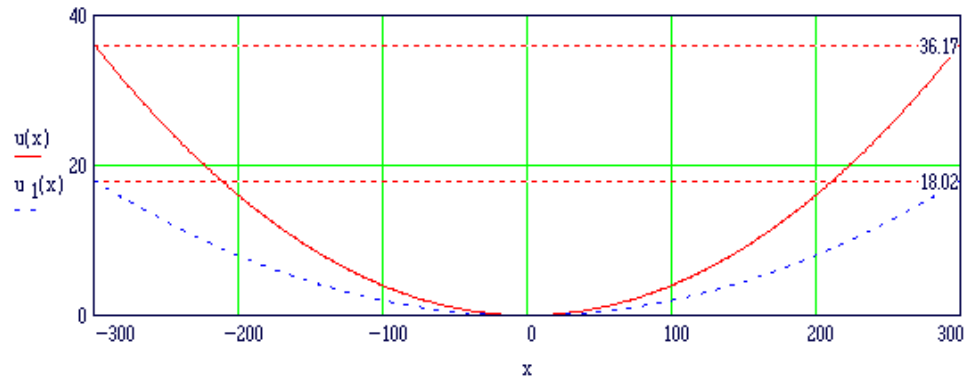


Рис. 6.3. Траектория гибкой нити

Эти характеристики построены по зависимости (6.6), которая была выведена практически одновременно Лейбницем, Гюйгенсом и Иоганном Бернулли и получила название уравнения цепной линии [55].

Рассмотрим случай, когда начало координат расположено в левой точке  $A$ . Очевидно, при  $x = \frac{l}{2}$ ;  $U' = 0$ . Тогда из (6.4):  $0 = \text{sh} \frac{gp}{H} \left( \frac{l}{2} + C_1 \right)$ ;  $C_1 = -\frac{l}{2}$ . При  $x = 0$ ,  $U = 0$  из (6.5) получим

$$0 = \frac{H}{gp} \text{ch} \frac{gp}{H} \left( -\frac{l}{2} \right) + C_2; \quad C_2 = -\frac{H}{gp} \text{ch} - \frac{gpl}{2H}.$$

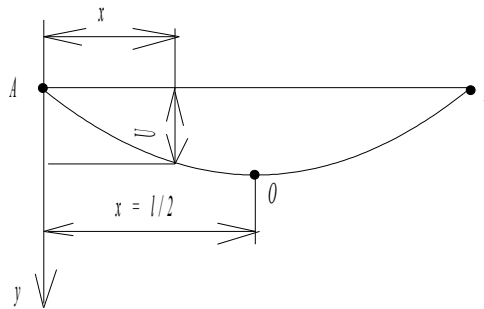


Рис. 6.4. Кривая провисания гибкой нити

Тогда

$$U = -\frac{H}{gp} \left[ \text{ch} \frac{gpl}{2H} - \text{ch} \frac{gp}{H} \left( x - \frac{l}{2} \right) \right], \quad (6.8)$$



$$U' = \operatorname{sh} \frac{gp}{H} \left( x - \frac{l}{2} \right). \quad (6.9)$$

Длина траектории каната определяется

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + U'^2} dx = \frac{1}{2} H \frac{\left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{gp}{H} \left( \frac{2x_2+l}{H} \right)^2} - 1 \right\}}{pe^{\left[ \frac{-gp(-2x_2+l)}{2H} \right]}} - \frac{H e^{\left[ \frac{-gp}{2H} (2x_1+l) \right]^2} - 1}{2 gpe^{\frac{-gp}{2H} (2x_1+l)}}. \quad (6.10)$$

Если максимальное расстояние от кривой провеса до плоскости, соединяющей точки крепления гибкой нити  $A$  и  $B$  назвать стрелой провеса, то она определится величиной  $U = f$  при  $x = \frac{l}{2}$ , т. е.

$$f = -\frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \frac{gpl}{2H} - 1 \right]. \quad (6.11)$$

Стрела провеса - это максимальное расстояние от кривой провеса до плоскости, соединяющей точки крепления гибкой нити (точки  $A$  и  $B$ ).

Для наклонных подъемных установок и ленточных конвейеров, работающих в наклонных выработках, канат или порожняя ветвь конвейера может располагаться по одной из трех ниже рассмотренных схем. Критерием будет расположение точки  $O$ , относительно точек  $A$  и  $B$ , характеризующей самое нижнее положение гибкой нити. На рис. 6.5 приведена траектория гибкой нити при расположении точки  $O$  внутри пролета. Расстояние между точками  $A$  и  $B$  называется длиной пролета  $l$ .

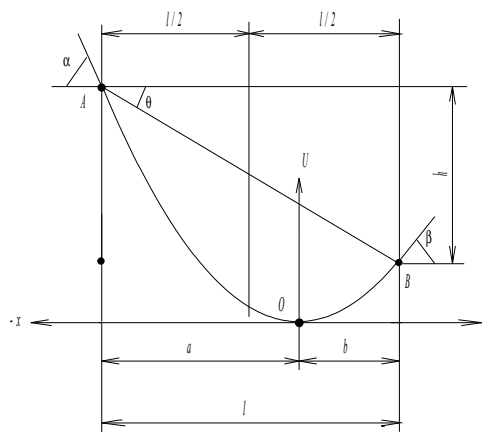


Рис. 6.5. Траектория гибкой нити. Точка  $O$  расположена внутри пролета

При расчете данной схемы известными являются длина пролета  $l$ , угол  $\theta$ , и разность отметок  $A$  и  $B$ , которую обозначим через  $h$ .

Введем обозначения  $a$  и  $b$ , характеризующих положение точки  $O$ . Из схемы видно:  $U_A - U_B = h$ ,  $a + b = l$ .

Из уравнения (6.6) запишем

$$U_A - U_B = \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \frac{gp}{H}(-a) - 1 \right] - \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \frac{gp}{H} b - 1 \right].$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \frac{agp}{H} - \operatorname{ch} \frac{bgp}{H} \right] = h, \\ a + b = l. \end{cases} \quad (6.12)$$

Система уравнений (6.12) получилась трансцендентной. Для приближенного решения, используя формулу разности гиперболических косинусов двух аргументов, представим первое уравнение в виде

$$\begin{aligned} h &= \frac{H}{gp} \left[ 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \left( \frac{agp}{H} + \frac{bgp}{H} \right) \operatorname{sh} \frac{1}{2} \left( \frac{bgp}{H} - \frac{agp}{H} \right) \right] = \\ &= 2 \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{sh} \frac{gp}{2H} (a+b) \operatorname{sh} \frac{gp}{2H} (a-b) \right]. \end{aligned}$$

Так как  $a + b = l$ , первый член  $\operatorname{sh} \frac{gp}{2H} (a+b) = \operatorname{sh} \frac{gpl}{2H}$ .

Значения функций  $x(l) = \operatorname{sh} \frac{gpl}{2H}$  и  $U(l) = \frac{gpl}{2H}$  практически совпадают.

Это подтверждается, если  $\operatorname{sh} \frac{gpl}{2H}$  разложить в ряд Тейлора, то получим

$$\operatorname{sh} \frac{gpl}{2H} \approx \frac{gpl}{2H} + \frac{1}{48} \left( \frac{gpl}{H} \right)^3.$$

Для конкретного примера  $gp = 160$  Н;  $H = 200000$  Н;  $l = 600$  м, первый член равен 0,24, а второй  $6,4 \cdot 10^{-9}$ . Поэтому можно записать

$$h = l \operatorname{sh} \frac{gp}{2H} (a-b).$$

Из последнего соотношения

$$b - a = \frac{2H}{gp} \operatorname{arsh} \frac{h}{l},$$

тогда значения  $a$  и  $b$  найдутся из системы

$$\begin{cases} a - b = \frac{2H}{gp} \operatorname{arsh} \frac{h}{l}; \\ a + b = l. \end{cases} \quad (6.13)$$

Решение этой системы дает

$$a = \frac{l}{2} + \frac{H}{g p} \operatorname{arsh} \frac{h}{l} = \frac{H}{g p} \left( \xi + \operatorname{arsh} \frac{h}{l} \right), \quad (6.14)$$

$$b = \frac{l}{2} - \frac{H}{g p} \operatorname{arsh} \frac{h}{l} = \frac{H}{g p} \left( \xi - \operatorname{arsh} \frac{h}{l} \right). \quad (6.15)$$

Здесь  $\xi = \frac{g p l}{2 H}$  - коэффициент, характеризующий отношение веса гибкой тяжелой однородной нити к ее натяжению.

Из соотношения (6.15) видно:

при  $\xi > \operatorname{arsh} \frac{h}{l}$  - нулевая точка находится в пределах пролета;

при  $\xi = \operatorname{arsh} \frac{h}{l}$  - нулевая точка совпадает с точкой  $B$ ;

при  $\xi < \operatorname{arsh} \frac{h}{l}$  - нулевая линия находится правее точки  $B$ .

Схема, соответствующая случаю, когда нулевая точка совпадает с точкой  $B$  ( $\xi = \operatorname{arsh} \frac{h}{l}$ ), приведена на рис. 6.6.

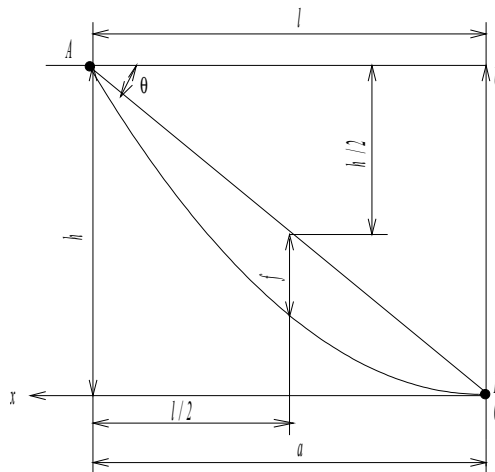


Рис. 6.6. Траектория гибкой нити при совпадении точки  $O$  с точкой  $B$

Разность отметок точек  $A$  и  $B$ , т. е. высоту  $h$ , при которой будет нулевая точка совпадать с точкой  $B$ , можно определить из соотношения  $\operatorname{arsh} \frac{h}{l} = \frac{g p l}{2 H}$ . Откуда  $h = l \operatorname{sh} \frac{g p l}{2 H}$ .

Угол наклона струны должен быть  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{h}{l}$ . Если  $\frac{qgp l}{2H} < \operatorname{arsh} \frac{h}{l}$ , то точка  $O$  лежит правее точки  $B$ , т. е. за пределами пролета (рис. 6.8).

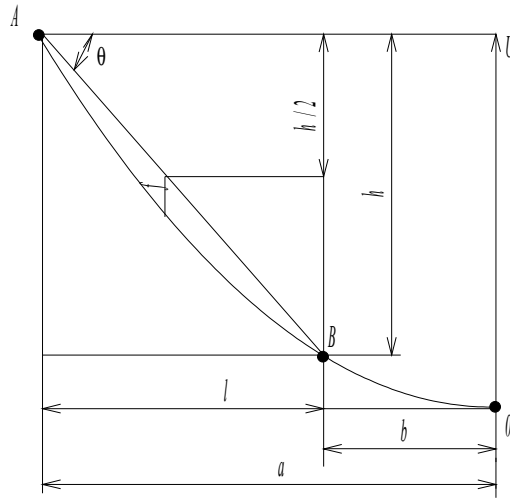


Рис. 6.7. Траектория гибкой нити при положении точки  $O$  за пределами пролета

В соответствие с рис. 6.8 система уравнений (6.13) запишется

$$\begin{cases} a + b = \frac{2H}{gp} \operatorname{arsh} \frac{h}{l}; \\ a - b = l. \end{cases} \quad (6.16)$$

Величины  $a$  и  $b$  определяются

$$\begin{cases} a = \frac{H}{gp} \left( \xi + \operatorname{arsh} \frac{h}{l} \right); \\ b = \frac{H}{gp} \left( \operatorname{arsh} \frac{h}{l} - \xi \right). \end{cases} \quad (6.17)$$

Прямая линия  $AB$ , характеризующая траекторию невесомой нити описывается уравнением  $U_2(x_1) = \frac{h}{l} x_1$ , поэтому траектория цепной линии, построенной относительно этой прямой будет

$$\begin{aligned} U(x_1) &= U_1(x_1) - U_2(x_1) = \frac{H}{gp} \left\{ \operatorname{ch} \left[ \frac{gp}{H} (b + x_1) \right] - 1 \right\} - \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{gp}{H} b \right) - 1 \right] - \frac{h}{l} x_1 = \\ &= \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \frac{gp}{H} (b + x_1) - \operatorname{ch} \frac{gp b}{H} \right] - \frac{h}{l} x_1. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Пример 6.1. Построить траекторию струны каната шахтной подъемной установки, имеющей следующую характеристику. Высота копра  $h = 50$  м, угол наклона струны  $\theta = 45^\circ$ , натяжение каната  $H = 200000$  Н, линейная плотность каната  $p = 16$  кг·м<sup>-1</sup>.

При  $h = 50$  м и  $\theta = 45^\circ$ , длина  $l = \frac{h}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{50}{\operatorname{tg} 45} = 50$  м,  $\xi = \frac{gpl}{2H} = 0,02$ ,  $\operatorname{arsh} \frac{h}{l} = 0,881$ ,

следовательно, точка  $O$  находится вне предела длины  $l$ .

По формулам (6.17) определим

$$a = \frac{200000}{160}(0,02 + 0,881) = 1127;$$

$$b = \frac{200000}{160}(0,881 - 0,02) = 1077.$$

Траектория каната с длиной пролета  $a = 1127$  м, построенная по уравнению (6.6)

$U(x) = \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{gpx}{H} \right) - 1 \right]$  показана на рис. 6.8.

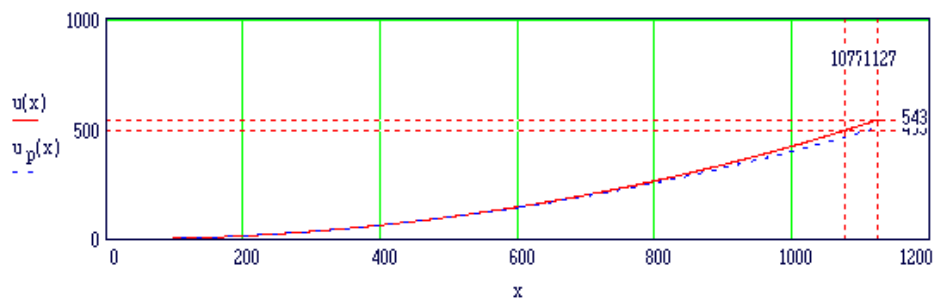


Рис. 6.8. Траектория каната

Интересующий нас участок каната расположен между координатами оси абсцисс, равными 1077 м и 1127 м. Уравнение траектории каната будет

$U_1(x_1) = \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \frac{p}{H}(b + x_1) - 1 \right] - U(b)$ . Этот участок стрелы представлен на рис. 6.9. При

принятом масштабе кривая струны каната незначительно отличается от прямой линии.

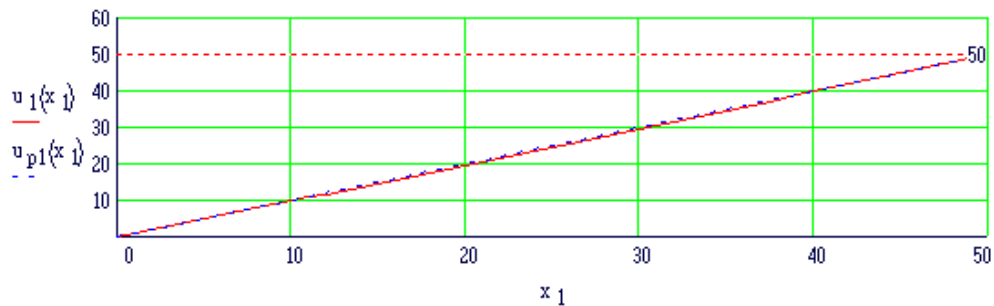


Рис. 6.9. Траектория струны каната

Построим по уравнению (6.18) график разности ординат прямой линии и траектории струны каната, которая показана на рис. 6.10.

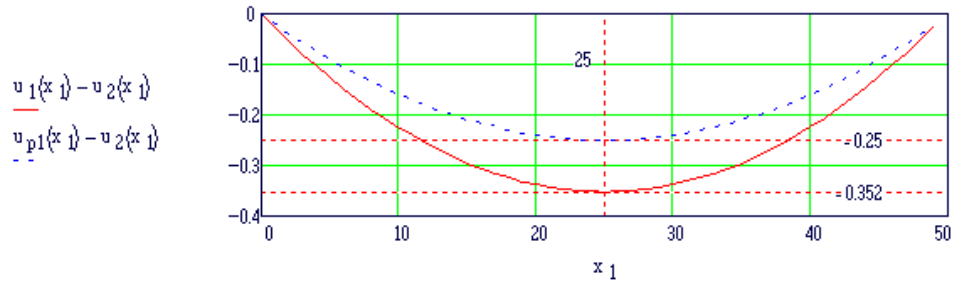


Рис. 6.10. Разность координат прямой линии и траектории струны каната.

Стрела провеса  $U\left(\frac{h}{2}\right) = 0,352$  м.

Длина струны без учета провисания каната  $L_c = \sqrt{h^2 + l^2} = 70,711$  м.

Длина траектории струны каната определяется по уравнению (6.10)

$$L_m = \int_0^l \sqrt{1 + U_1'^2} dx_1 = \int_0^l \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \left[ \frac{gp}{H} (b + x_1) \right]^2} dx =$$

$$= \frac{H}{2p} \left\{ \exp \left[ \frac{gp}{H} (b + l) \right] - \exp \left[ -\frac{gp}{H} (b + l) \right] - \exp \left( \frac{gp}{H} b \right) + \exp \left( \frac{gp}{H} b \right) \right\} = 70,715 \text{ м.}$$

Таким образом, в рассматриваемом примере, за счет провеса каната длина струны увеличилась на  $L_m - L_c = 0,004$  м (4 мм). На эту величину обратим внимание, т. к. при рассмотрении вопросов динамики машин, имеющих струны гибких нитей (канаты, транспортерные ленты) это удлинение будет характеризовать эквивалентную жесткость упругого элемента.

Пример 6.2. Наклонный карьерный подъемник имеет характеристику:  $p = 16 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $H = 200000$  Н, разность отметок направляющего шкива и нижней точки выработки  $h = 200$  м. Угол наклона струны

$\theta = 30^\circ$ . Построить профиль трасы, при котором канат не будет лежать на почве.

Длина каната  $l$  при  $h = 200$  м и  $\theta = 30^\circ$

$$l = \frac{h}{\operatorname{tg} \theta} = 346,41 \text{ м.}$$

Длина струны  $L_c = \sqrt{h^2 + l^2} = 400$  м.

Определим координаты нулевой точки

$$\zeta = \frac{gpl}{2H} = 0,139; \quad \operatorname{arsh} \frac{h}{l} = 0,549.$$

Т. к.  $\operatorname{arsh} \frac{h}{l} > \zeta$ , то нулевая точка находится за пределами пролета (рис. 6.7).

Величины  $a$  и  $b$  определяются по уравнениям (6.17), (6.18)

$$a = \frac{H}{gp} \left( \xi + \operatorname{arsh} \frac{h}{l} \right) = 859,838,$$

$$b = \frac{H}{gp} \left( \operatorname{arsh} \frac{h}{l} - \xi \right) = 513,428.$$

Траектория каната, построенная по уравнению  $U_1(x_1) = \frac{H}{gp} \left[ \operatorname{ch} \frac{gp}{H} (b + x_1) - 1 \right] - U_1(0)$ , показана на рис. 6.11. Пунктирная прямая, проведенная из точки  $O$  под углом  $30^\circ$  характеризует траекторию каната без угла его провисания.

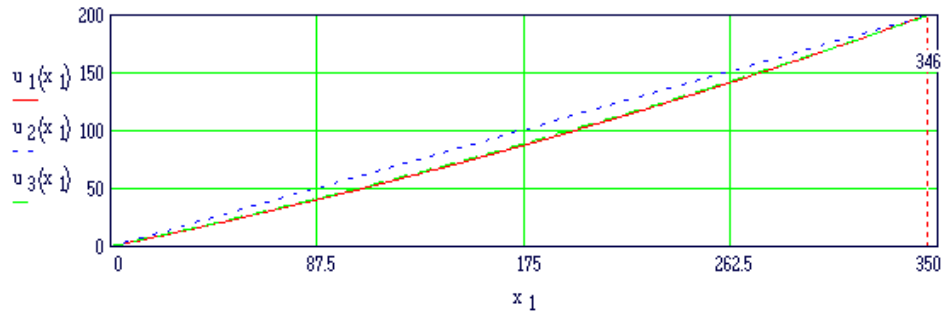


Рис. 6.11 Траектория каната наклонного подъемника

Разность ординат этих характеристик показана на рис. 6.12. Стрела провеса  $f = U_1\left(\frac{l}{2}\right) = 13,6$  м. Угол наклона трассы в этой точке можно определить по уравнению (6.4)

$$U' = \operatorname{sh} \frac{gp}{H} x \quad \text{при} \quad x = b + \frac{l}{2} = 686,6 \text{ м.}$$

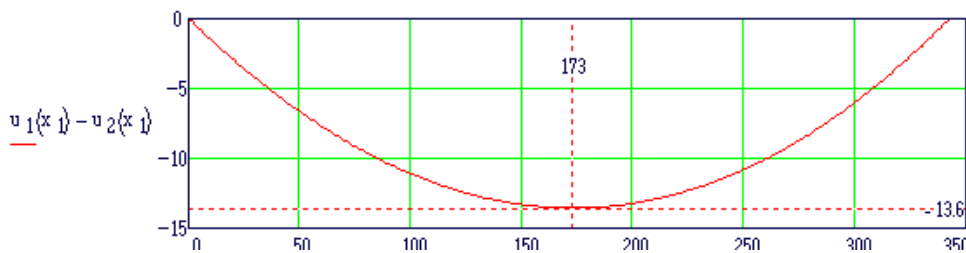


Рис. 6.12. Разность ординат траекторий реального и невесомого канатов

$U' = 0,577$  рад или  $33$  градуса, т. е. для того, чтобы канат не лежал на почве трассы необходимо в середине пролета рельсовый путь прокладывать под углом  $33^\circ$ , который плавно уменьшается до  $30^\circ$  к началу и концу трассы.

Длина струны невесомой нити (пунктирная прямая)  $L_c = 400$  м.

Длина траектории струны каната определяется по уравнению (6.20) и равна

$$L_m = \int_0^a \sqrt{1 + \left( \frac{gp}{H} x \right)^2} dx = 401,281 \text{ м.}$$

Таким образом, длина каната с учетом его провеса по сравнению с траекторией невесомой нити увеличивается на  $\Delta L = L_m - L_c = 1,281\text{м}$ .

Сама по себе эта величина не значительна и не должна сказаться на кинематических режимах работы установки. Однако величина  $\Delta L$  приведет к изменению эквивалентной жесткости каната, которая может оказать влияние на динамические процессы.

## 6.2. УКРУПНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТРАЕКТОРИИ ГИБКОЙ ОДНОРОДНОЙ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ

При исследовании машин, имеющих гибкие нити (шахтные подъемные установки, конвейеры, экскаваторы), часто траектория провеса, характеризующаяся уравнением цепной линии (6.6), заменяется параболой  $U = \frac{gP}{H}x^2$ , [14, 52, 61, 79].

Уравнение параболы получается при допущении, что распределенная нагрузка от веса нити сосредоточена в середине пролета, при этом вес нити определяется как произведение  $p$  на длину пролета  $x$ . Для пояснения отмеченного рассмотрим схему участка гибкой нити, показанную на рис. 6.13.

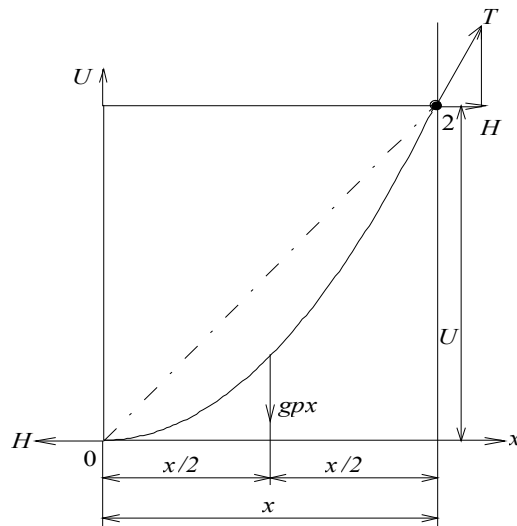


Рис. 6.13. Схема траектории гибкой нити

По аналогии с рис. 6.1 к концам гибкой однородной тяжелой нити приложены растягивающие силы  $H$  и  $T$ . Для того чтобы нить находилась в неподвижном состоянии, проекции силы  $T$  на ось абсцисс должна быть равна  $H$ . Кроме этого для сохранения равновесия отрезка гибкой нити  $0 - 2$  сумма моментов, относительно точки 2, должна быть равна нулю, т. е.

$$\sum M_2 = HU - gpx \frac{x}{2} = 0.$$

Из этого соотношения получим уравнение кривой провисания гибкой тяжелой нити



$$U = \frac{g p}{2 H} x^2. \quad (6.19)$$

Длина дуги определяется из уравнения (6.3)

$$L_m = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+U'^2} dx.$$

Радиус кривизны [31]

$$R = \frac{(1+U'^2)^{\frac{3}{2}}}{|U''|}.$$

Из (6.19)

$$U' = \frac{g p}{H} x, \quad U'' = \frac{g p}{H}.$$

Тогда

$$L_m = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{p}{H} x\right)^2} dx = \frac{1}{2 g p H} \left[ g p x_2 \sqrt{H^2 + g p^2 x_2^2} + H^2 \ln \left( g p x_2 + \sqrt{H^2 + g p^2 x_2^2} \right) - g p x_1 \sqrt{H^2 + g p^2 x_1^2} - H^2 \ln \left( g p x_1 + \sqrt{H^2 + g p^2 x_1^2} \right) \right], \quad (6.20)$$

$$R = \frac{H}{g p} \left[ 1 + \left( \frac{g p}{H} x \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Уравнение параболы (6.19) можно получить также из уравнения цепной линии, если функцию (6.6) разложить в ряд Тейлора и ограничиться первым членом разложения

$$\frac{H}{g p} \left( ch \frac{g p}{H} x - 1 \right) \approx \frac{g p}{2 H} x^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{g p}{H} \right)^3 x^4 + \frac{1}{720} \left( \frac{g p}{H} \right)^5 x^6.$$

Видно, что ошибка приближения зависит от  $x$ . Траектория параболы  $U_3(x_1)$ , показанная на рис. 6.11, практически совпадает с цепной линией. Точка  $O$  по аналогии с рис. 6.2, 6.4, может находиться в середине пролета, а также может располагаться внутри пролета (рис. 6.5, 6.6) и за пределами пролета рис. 6.7.

Если нижняя точка  $O$  расположена внутри пролета, то

$$a + b = l,$$

$$U_A - U_B = h.$$

Используя уравнение параболы (6.19) получим систему

$$\begin{cases} \frac{gP}{2H}(a^2 - b^2) = h; \\ a + b = l. \end{cases}$$

Решая эти уравнения относительно  $a$  и  $b$ , получим

$$\begin{aligned} a &= \frac{l}{2} + \frac{hH}{glP}, \\ b &= \frac{l}{2} - \frac{hH}{glP}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Таким образом, при  $l > \sqrt{2 \frac{hH}{gP}}$  нижняя точка струны лежит в пределах пролета.

При равенстве этого соотношения, точка  $B$  совпадает с нулевой точкой (рис 6.6) и  $b = 0$ ,  $a = l$ . Если  $l < \sqrt{2 \frac{hH}{gP}}$ , то нижняя точка  $O$  лежит за пределами пролета.

Из рис. 6.7 видно

$$\begin{cases} \frac{gP}{2H}(a^2 - b^2) = h, \\ a - b = l. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} a &= \frac{l}{2} + \frac{hH}{glP}, \\ b &= -\frac{l}{2} + \frac{hH}{glP}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Таким образом, для построения траектории гибкой нити необходимо, используя соотношение  $\sqrt{\frac{2hH}{gP}} > l > \sqrt{2 \frac{hH}{gP}}$  определить положение нижней точки  $O$ . Затем в зависимости от положения точки  $O$ , по уравнениям (6.21) или (6.22) определяются  $a$  и  $b$  и вычисляются траектория гибкой нити. Начало координат принимается в точке  $B$ .

$$U(x) = \frac{gP}{2H}(b+x)^2 - \frac{gP}{2H}b^2 = \frac{gP}{2H}x^2 + \frac{gPb}{H}x \quad (6.23)$$

Для наглядности траекторию гибкой нити целесообразно представить как отклонения ее координат от прямой линии, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , т. е.

$$U_3(x) = U(x) - U_2(x) = \frac{gP}{2H}(x^2 + 2bx) - \frac{h}{l}x,$$

$$\frac{gp}{2H}x^2 - \frac{gp}{2H}xl = \frac{gp}{2H}x(x-l). \quad (6.24)$$

Если подставить  $x = \frac{l}{2}$ , то получим величину стрелы провеса  $f = -\frac{1}{8} \frac{gp}{H} l^2$ .

Тогда, если известна величина  $f$ , то формулу (6.24) можно выразить

$$U_3(x) = -\frac{4fx}{l^2}(l-x). \quad (6.25)$$

Для оценки погрешности приближенного решения воспользуемся рисунками 6.10 и 6.12, на которых изображены траектории цепных линий, построенных для примеров 6.1 и 6.2. Повторим эти траектории на рис. 6.14 и 6.15 и добавим траектории парабол, построенных по уравнению (6.24).

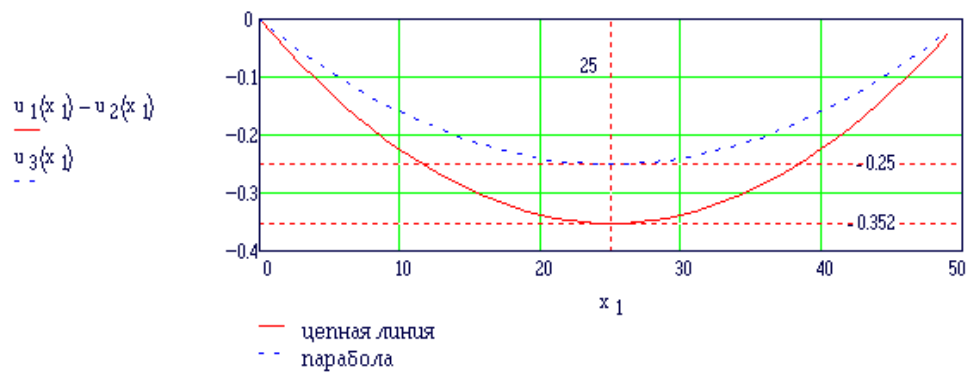


Рис. 6.14 Траектории струны каната вертикального подъема

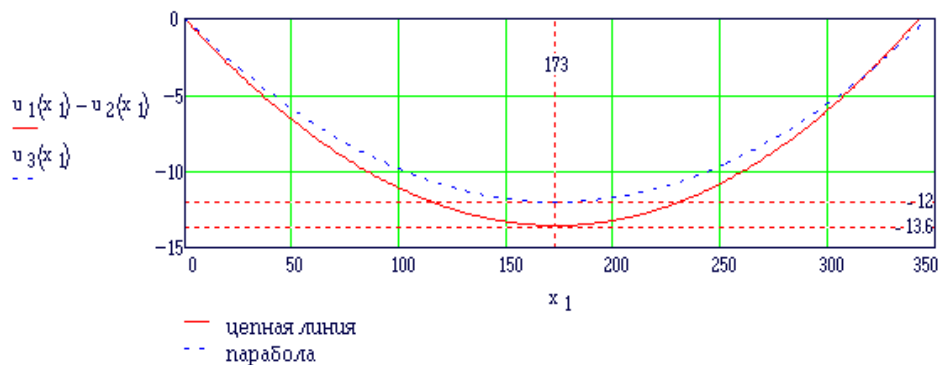


Рис. 6.15 Траектория каната наклонного подъёмника

Видно (рис. 6.14), для шахтной подъемной установки, рассмотренной в примере 6.1, максимальная разность стрел провеса достигает 0,1 м. Для наклонного подъемника, рассмотренного в примере 6.2 (рис. 6.15), эта разность равна 1,6 м. Приближенное решение дает меньшее значение стрелы провеса. Вопрос о целесообразности использования точного или приближенного решения должен приниматься в пользу уравнения цепной линии, так как при использовании персональных компьютеров и современных математических пакетов реализация гиперболических функций не представляет затруднений, а трудоемкость исследований по точным и приближенным зависимостям равнозначна.

### 6.3. ДИНАМИКА ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ОДНОРОДНОЙ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ

Переменные нагрузки в гибких нитях, расположенных под углом к вертикальной плоскости и имеющих значительную длину, вызывают поперечные колебания. Характерным примером таких машин являются шахтные подъемные установки, конвейеры и экскаваторы

Рассмотрим элементарный участок струны 1 - 2 (рис. 6.16). Струна представляет собой предварительно растянутую нить, которая не обладает не обладающую жесткостью при изгибе.

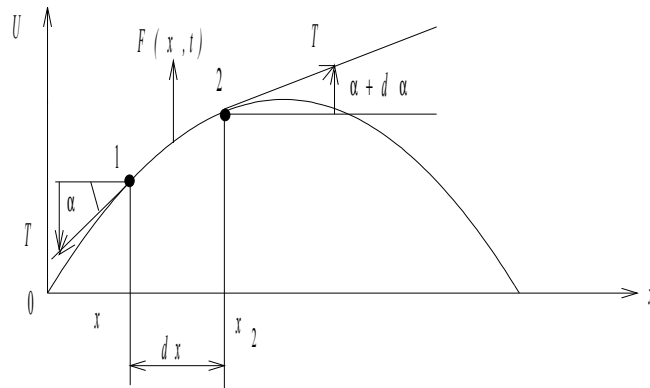


Рис. 6.16. Схема элементарного участка струны

Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом представить самой себе, то она начнет свободно колебаться в поперечном направлении. Если к струне приложена сила  $F(x, t)$ , то струна будет иметь вынужденные колебания.

Пусть в плоскости  $(x, U)$  струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью  $x$ . Величину отклонения струны от положения равновесия в точке  $x$  и в момент времени  $t$  обозначим через  $U(x, t)$ . Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение  $T$ , приложенное к точкам 1 и 2 направлено по касательным к струне в этих точках. Сделаем допущение, что любой участок струны (1-2) после отклонения от положения равновесия не изменит своей длины. В соответствии с (6.3)

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Приближенно  $x_2 - x_1 = dx$ , т. е. в последнем уравнении

пренебрегается величина  $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ , что допустимо при  $1 \gg \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ , а это

возможно при малых углах  $\alpha = \frac{\partial U}{\partial x}$ .

Из этого допущения следует, что в соответствии с законом Гука величина натяжения  $T = U$  и остается постоянной.

Пусть в точке  $x$  в момент времени  $t$  действует плотность внешних сил  $F(x, t)$ , направленная перпендикулярно оси  $x$  в плоскости  $(x, U)$ . Касательные к струне в точках 1 - 2 образуют с осью  $Ox$  углы  $\alpha$  и  $\alpha + d\alpha$ . Составим уравнение движения струны. Проекции на ось  $OU$ , действующих на элемент 1 - 2 будут

$$T \sin(\alpha + d\alpha) - T \sin \alpha + F(x, t) dx.$$

Известно  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$  и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial U}{\partial x}$  [38].

Выше было сделано допущение, что  $1 \gg \operatorname{tg}^2 \alpha$ , поэтому

$$\begin{aligned} & T \operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - T \operatorname{tg} \alpha + F(x, t) dx = \\ & = T \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx \right) - T \frac{\partial U}{\partial x} + F(x, t) dx = T \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx + F(x, t) dx. \end{aligned}$$

Эта сумма сил уравнивается силой инерции  $m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = p dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ , поэтому

$$p dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx + F(x, t) dx.$$

Сокращая на  $dx$  и обозначая  $\frac{T}{p} = a^2$ ,  $\frac{F(x, t)}{p} = F$ , получим уравнение, характеризующее вынужденные колебания струны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F, \quad (6.26)$$

где  $a$  - скорость распространения поперечных волн в продольном направлении, м·с<sup>-1</sup>.

Как видно, скорость  $a$  зависит от натяжения и линейной плотности каната. Эта характеристика широко используется в практике эксплуатации многоканатного подъема для определения разности натяжения канатов с целью последующего выравнивания.

При  $F = 0$ , уравнение (6.26) характеризует свободные колебания и получило название волнового уравнения [59]. С помощью этого уравнения решается широкий класс задач динамики машин. Эти задачи являются типичными для задач математической физики. С помощью этого уравнения решаются задачи о продольных колебаниях грузов шахтного подъема, задачи колебаний транспортных установок, крутильные колебания валов и стержней, а также колебания тока и напряжения в линиях электропередач и др. [59, 70, 79, 84].

Для полного определения поведения струны одного уравнения (6.26) недостаточно. Искомая функция  $U(x, t)$  должна удовлетворять граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны ( $x = 0$  и  $x = l$ ), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент ( $t = 0$ ). Совокупность граничных и начальных условий называется краевыми условиями.

У многих машин (подъемники, конвейеры) концы струн при  $x = 0$  и  $x = l$  неподвижны относительно оси ординат, поэтому граничными условиями задачи будут

$$\begin{cases} U(0,t)=0; \\ U(l,t)=0. \end{cases} \quad (6.27)$$

В начальный момент  $t = 0$  струна имеет определенную форму, которая зависит от натяжения, от ее параметров и определяется уравнением цепной линии (6.5), т. е. известна функция  $f(x)$ .

В начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией  $\varphi(x)$ .

Таким образом, формируются начальные условия

$$\begin{cases} U(x,0) = U|_{t=0} = f(x); \\ \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \quad (6.28)$$

Заметим, что если одновременно  $f(x) = 0$  и  $\varphi(x) = 0$ , то струна находится в покое и, следовательно,  $U(x, t) = 0$ .

### 6.3.1. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОДОМ ФУРЬЕ)

Метод разделения переменных (метод Фурье) является типичным для решения многих задач математической физики [59].

Итак, требуется решить волновое уравнение с граничными (6.27) и начальными (6.28) условиями, т. е. уравнение  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , удовлетворяющее крайевым условиям

$$\begin{aligned} U(0,t) &= 0, \\ U(l,t) &= 0, \\ U(x,0) &= f(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение волнового уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (6.27) в виде произведения двух функций  $X(x)$  и  $T(t)$ , из которых первая зависит только от  $x$ , а вторая только от  $t$ :

$$U(x,t) = X(x) T(t). \quad (6.29)$$

Подставляя в уравнение (6.26) при  $F = 0$ , получим

$$X(x) T''(t) = a^2 X''(x) T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (6.30)$$

В левой части равенства стоит функция, которая не зависит от  $x$ , а в правой - функция, не зависящая от  $t$ .

Равенство (6.30) возможно только тогда, когда левая и правая части равны какому то постоянному числу, например -  $k^2$ , т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2.$$

Из этих равенств получается два уравнения

$$X''(x) + k^2 x(x) = 0, \quad (6.31)$$

$$T''(t) + k^2 a^2 T(t) = 0. \quad (6.32)$$

Уравнения (6.31), (6.32) являются однородными линейными, дифференциальными уравнениями второго порядка, которые при комплексных корнях характеристических уравнений имеют решение [24, 31] (раздел 3)

$$X(x) = A \cos k x + B \sin k x, \quad (6.33)$$

$$T(t) = C \cos k a t + D \sin k a t, \quad (6.34)$$

где  $A, B, C, D$  - произвольные постоянные.

Подставляя  $X(x)$  и  $T(t)$  в (6.29) получим

$$U(x, t) = (A \cos k x + B \sin k x) \cdot (C \cos k a t + D \sin k a t). \quad (6.35)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий (6.27), т. е.

$$U(0, t) = 0,$$

$$U(l, t) = 0.$$

Эти функции могут быть равными нулю при  $T(t) \neq 0$  тогда, когда  $X(0) = 0, X(l) = 0$ .

Таким образом

$$0 = A + B \cdot 0,$$

$$0 = A \cos k l + B \sin k l.$$

Из этих уравнений  $A = 0; B \sin k l = 0. B \neq 0$ , т. к. в противном случае  $X(x)$  было бы всегда равно нулю, поэтому  $\sin k l = 0$ , откуда

$$k = \frac{\pi}{l} j, \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (6.36)$$

Тогда уравнение (6.33) будет

$$X_j(x) = \sin k_j x. \quad (6.37)$$

Функция  $X(x)$  называется собственной или фундаментальной функцией, а значения  $k$  - собственным числом. Зная собственное число  $k$ , уравнение (6.34) запишется

$$T(t) = C \cos a \frac{\pi}{l} j t + D \sin a \frac{\pi}{l} j t, \quad (j=1, 2, \dots). \quad (6.38)$$

Подставляя (6.37) и (6.38) в уравнение (6.35) для каждого значения  $j$ , следовательно, для каждого  $k_j$ , получим решение волнового уравнения

$$U_j(x, t) = \sin k_j x \cdot \left( C_j \cos a \frac{\pi}{l} j t + D_j \sin a \frac{\pi}{l} j t \right). \quad (6.39)$$

Здесь постоянные интегрирования  $C_j$  и  $D_j$  должны определяться из начальных условий (6.28). Отметим, что  $C_j = CB$  и  $D_j = DB$ . Движение струны, характеризующееся уравнением (6.39) называется собственными колебаниями, а также стоячими волнами с собственной частотой  $\omega_j = \frac{a\pi}{l} j$  и амплитудой  $A_j \sin \frac{\pi n}{l} x$ , где  $A_j = \sqrt{C_j^2 + D_j^2}$ .

Гармонические колебания  $U_1(x, t)$  с наименьшей собственной частотой  $\omega_1 = \frac{a\pi}{l}$  - называется основным тоном; остальные гармонические колебания  $U_2(x, t)$ ,  $U_3(x, t)$ ... с собственными частотами  $\omega_2 = \frac{a\pi}{l} 2$ ,  $\omega_3 = \frac{a\pi}{l} 3$  ... образуют ряд последовательных обертонов. Обратим внимание на то, что частоты собственных колебаний не зависят от начальных условий. Физически это означает, что частоты собственных колебаний не зависят от способа возбуждения их. Они характеризуют свойства самой колеблющейся системы и определяются граничными условиями и материальными константами системы (линейная плотность, натяжение струны).

Так как уравнение (6.26) является линейным, то сумма решений (6.39) также является решением, поэтому функция, представленная рядом

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j(x, t),$$

или

$$U_j(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sin k_j x \cdot \left( C_j \cos a \frac{\pi}{l} j t + D_j \sin a \frac{\pi}{l} j t \right), \quad (6.40)$$

также есть решение дифференциального уравнения (6.26), которое будет удовлетворять граничным условиям (6.27). Очевидно, что ряд (6.40) будет решением уравнения (6.26) только в том случае, если коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$  таковы, что этот ряд сходится и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования по  $x$  и по  $t$ . Решение (6.40) должно еще удовлетворять начальным условиям (6.28). Для этого необходимо подобрать постоянные  $C_j$  и  $D_j$ . Подставляя в равенство (6.40)  $t = 0$ , и принимая во внимание начальные условия (6.28) получим

$$U(x, 0) = f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin \frac{\pi}{l} j x. \quad (6.41)$$



Далее, продифференцировав (6.35) по  $t$ , получим

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{l} j x \cdot \frac{a\pi}{l} j \left( -C_j \sin a \frac{\pi}{l} j t + D_j \cos a \frac{\pi}{l} j t \right). \quad (6.42)$$

При  $t = 0$ , это выражение будет

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \frac{a\pi}{l} j x. \quad (6.43)$$

Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  таковы, что в интервале  $(0, l)$  их можно разложить в ряд Фурье [59], то условия (6.42) и (6.43) будут выполняться, если положить

$$C_j = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi}{l} j x dx, \quad (6.44)$$

$$D_j \frac{a\pi}{l} j = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi}{l} j x dx,$$

или

$$D_j = \frac{2}{a\pi j} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi}{l} j x dx. \quad (6.45)$$

Пример 6.3. Исследовать свободные колебания струны шахтной подъемной установки, рассмотренной в примере 6.1.

Траектория струны каната при натяжении  $H = 200000$  Н показана на рис. 6.10. Перенесем кривую  $U(x_1)$  на рис. 6.17 и по уравнению (6.18) построим траекторию  $U_1(x_1)$  для натяжения  $H_1 = 300000$  Н.

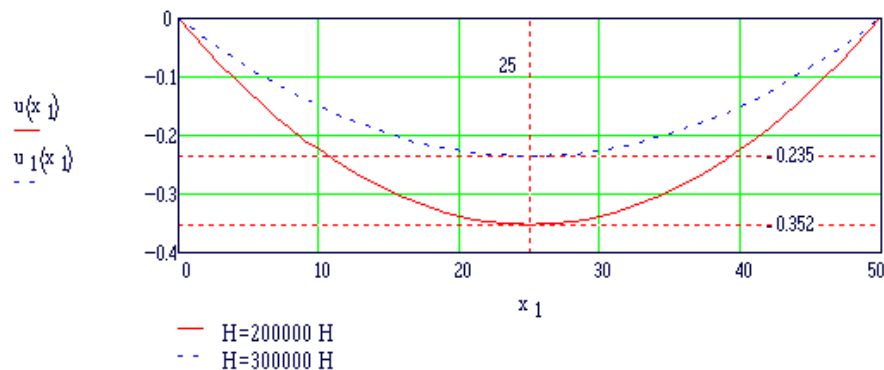


Рис. 6.17. Траектории каната при различных натяжениях

Если из координат первой траектории вычесть координаты второй, то получим траекторию струны относительно ее первоначального положения при увеличении натяжения от  $H$  до  $H_1$ . Характеристика  $f(x_1) = U(x_1) - U_1(x_1)$  показана на рис. 6.18.

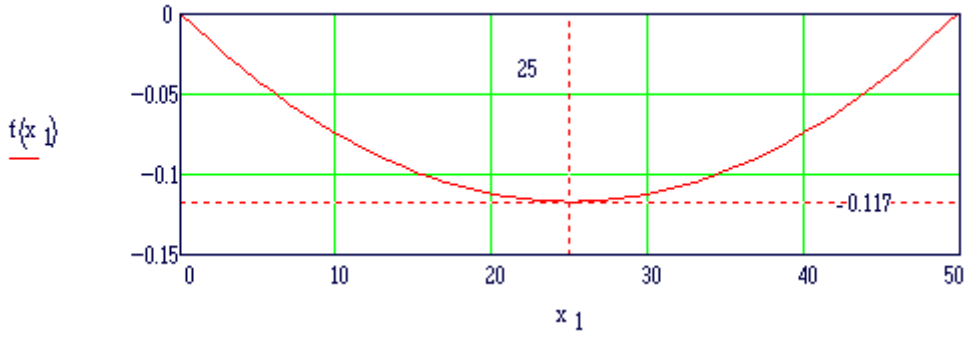


Рис. 6.18. Характеристика  $f(x_1) = U(x_1) - U_1(x_1)$

Следовательно, если дополнительную силу  $\Delta H = H_1 - H_2$  убрать, то струна будет совершать свободные поперечные колебания относительно первоначально траектории при натяжении  $H$ .

Таким образом, для рассматриваемого примера, в котором концы струны закреплены, можно записать краевые условия задачи.

Граничные условия

$$U(0, t) = 0,$$

$$U(l, t) = 0.$$

Начальные условия

$$U(x, 0) = f(x) = U_1(x_1) - U_2(x_1),$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) = 0.$$

Таким образом, для заданных граничных условий, в соответствии с (6.36) собственные числа будут  $k_j = \frac{\pi}{l} j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Коэффициенты разложения в ряд Фурье определяются по зависимостям (6.44), (6.45).

Так как  $\varphi(x) = 0$  то коэффициенты  $D_j = 0$ , а  $C_j = \frac{2}{l} \int_0^l f(x_1) \sin \frac{\pi}{l} j x_1 dx_1$ .

Для оценки свободных колебаний построим характеристики  $U_j(x, t)$ , используя уравнение (6.39).

$$U_j(x, t) = \sin k_j x C_j \cos a k_j t,$$

Здесь  $a = \sqrt{\frac{T}{p}} = \sqrt{\frac{H}{p \cos \alpha}}$  - скорость распространения поперечных волн в продольном направлении при натяжении каната  $T$ .

Если рассматривать поперечные колебания струны в середине пролета  $x = \frac{l}{2}$ , то

$$U_j\left(\frac{l}{2}, t\right) = \sin \frac{\pi}{2} j C_j \cos \omega_j t,$$

здесь  $\omega_j = \pi \frac{a}{l} j$  - частота собственных колебаний,  $\text{с}^{-1}$ .

Из формулы видно, что для всех четных гармоник (тонов)  $U_j\left(\frac{l}{2}, t\right)_{j=2,4,\dots} = 0$ , т. к.

$$\sin \frac{\pi}{2} j \Big|_{j=2,4,\dots} = 0.$$

Для нечетных гармоник  $\sin \frac{\pi}{2} j \Big|_{j=1,3,\dots} = 1$ , поэтому  $U_j\left(\frac{l}{2}, t\right)_{j=1,3,\dots} = C_j \cos \omega_j t$ .

Очевидно, коэффициенты разложения в ряд Фурье  $C_j$  являются амплитудой колебаний. Вычислим значения собственных чисел  $k_j$ , частот  $\omega_j$  и коэффициентов  $C_j$  для первых пяти нечетных гармоник. Результаты вычислений приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Собственные числа  $k_j$ , частоты  $\omega_j$  и коэффициенты  $C_j$ 

$j$	1	3	5	7	9
$k_j$	0,063	0,188	0,314	0,44	0,565
$\omega_j, \text{с}^{-1}$	8,35	25,06	41,77	58,48	75,18
$C_j, \text{м}$	-0,117	-0,0043	-0,00074	-0,00018	-0,000036
$C_j, \text{м}$	-0,-86	-0,003	-0,00068	-0,00025	-0,00018

Интересно посмотреть, как изменится максимальная разность ординат и значения коэффициента  $C_{nj}$  при замене формул цепных линий параболлами. Для этого по уравнению (6.24) вычислим траектории для натяжений  $H$  и  $H_1$  и определим функцию  $f_n(x_1) = U_n(x_1) - U_{n1}(x_1)$ .

Здесь индекс  $n$  говорит о том, что уравнения принадлежат к параболическому закону изменения траекторий. Максимальная разность ординат равна 0,083 м. Значения коэффициентов  $C_{nj}$  приведены в последней строке табл. 6.1.

Предварительно можно заключить, что амплитуда колебаний приближенной траектории (парабола) будет меньше в  $0,117/0,083 = 1,41$  раза.

Графики колебаний первой, третьей и пятой гармоник показаны на рис. 6.19. Амплитуда третьей гармоники в  $0,117/0,0043 = 27$  раз меньше первой и показана на рис. 6.19 пунктирной линией.

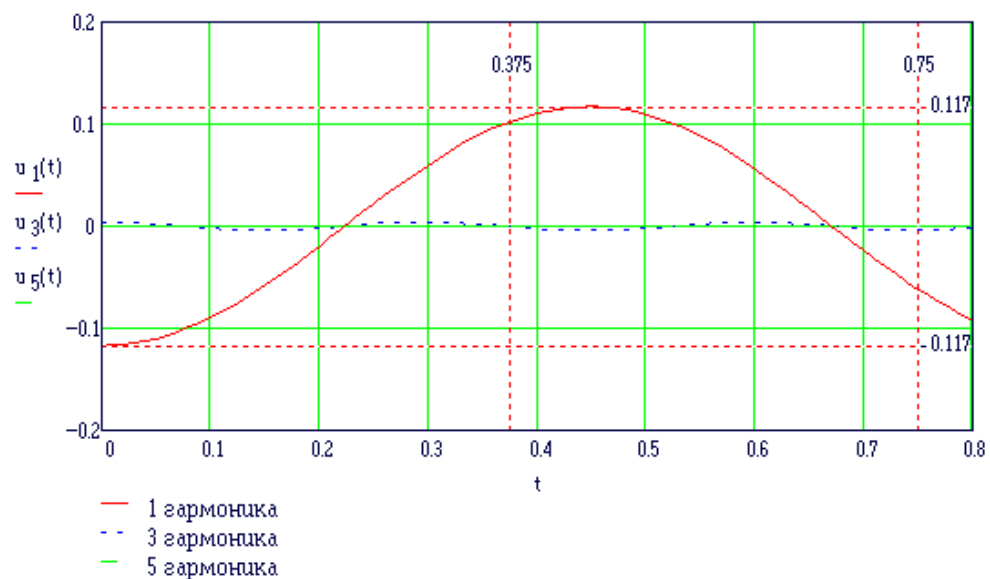


Рис. 6.19. Графики колебаний первой, третьей и пятой гармоник

Пятая гармоника, при принятом масштабе, практически сливается с нулевой линией. Соотношение 3, 5, 7 и 9 гармоник показаны на рис. 6.20. Масштаб оси ординат увеличен в 25 раз.

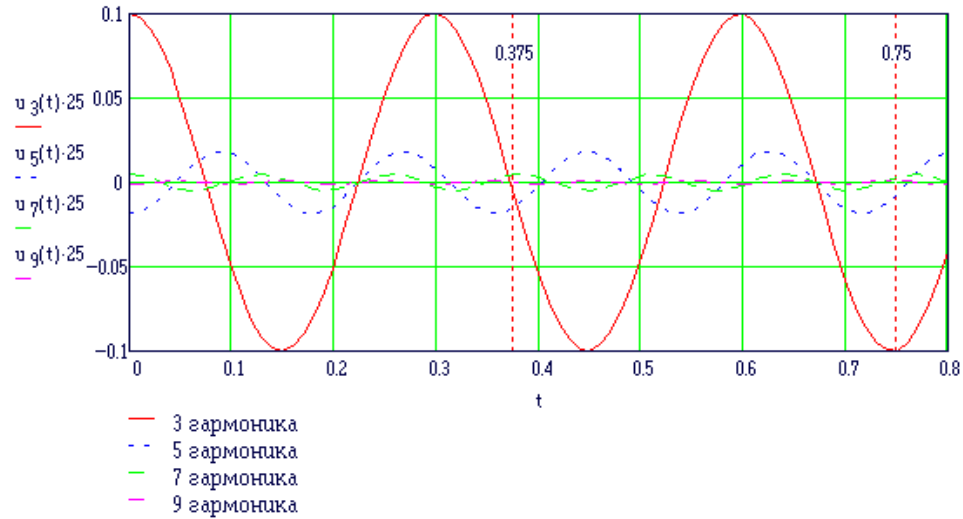


Рис. 6.20. Колебания третьей, пятой, седьмой и девятой гармоник

Из приведенных графиков видно, что для данной задачи переходный процесс определяется, в основном, первой гармоникой. При принятом масштабе графики первой гармоники и суммы всех гармоник практически не отличаются. Такое заключение приводит к мысли, что для исследования поперечных колебаний струны шахтного подъемника, имеющей большое натяжение и малую длину, допустим укрупненный анализ колебательных процессов.

### 6.3.2. УКРУПНЕННЫЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА СТРУНЫ

Уравнение (6.40) характеризует колебательный процесс струны. Перепишем это уравнение для первой гармоники, опуская индекс  $j$ .

$$U(x, t) = \sin kx \left( C \cos a \frac{\pi}{l} t + D \sin a \frac{\pi}{l} t \right).$$

В примере 6.3 было показано, что для начальных условий  $U(x, 0) = f(x)$ ,  $\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x) = 0$

постоянные интегрирования равны  $D = 0$ ;  $C = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi}{l} x dx$ .

Если струну вывести из первоначального положения, придав пролету в сечении  $x = \frac{l}{2}$  величину  $f$ , то при принятых выше допущениях, траектория струны характеризуется уравнением (6.25)

$$U(x,0) = -\frac{4f}{l^2} x(l-x) .$$

Если в эту формулу подставить значение  $f = -\frac{1}{8} \frac{gp}{H} l^2$ , то получим уравнение (6.24)

$$U(x,0) = \frac{gp}{H} x(x-l) ,$$

которое тождественно уравнению (6.25). Подставив значения  $f(x) = U(x,0)$ , получим выражение для коэффициента  $C$

$$C = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{4f}{l^2} x(l-x) \sin \frac{\pi}{l} x dx = -\frac{32}{\pi^3} f = \frac{4}{\pi^3} \frac{gp}{H} l^2 .$$

Тогда

$$U(x,t) = C \sin kx \cos a \frac{\pi}{l} t .$$

Это уравнение можно представить

$$U(x,t) = A(x) \cos \omega t , \tag{6.46}$$

где  $A(x) = C \sin kx = -\frac{32}{\pi^3} f \sin \frac{\pi}{l} x$  - амплитуда колебаний струны в сечении  $x$ ;

$$\omega = \frac{a\pi}{l} - \text{частота колебаний, с}^{-1} .$$

Здесь  $a = \sqrt{\frac{H}{p}}$  - скорость распространения поперечных волн в продольном направлении, м·с<sup>-1</sup>.

Для  $x = \frac{l}{2}$  амплитуда  $A\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{32}{\pi^3} f = 1,032 f$ . Таким образом, можно считать, что

амплитуда колебаний равна стреле провеса  $f$ . С физической точки зрения это понятно, т. к. если к струне приложить возмущающее воздействие, которое вызывает изменение траектории со стрелой провеса  $f$ , а затем возмущающее воздействие убрать, то должны последовать свободные колебания с амплитудой  $A = f = -\frac{1}{8} \frac{gp}{H} l^2$ .

Уравнение (6.46) можно записать

$$U(t) = f \cos \omega t . \tag{6.47}$$

Известно, что уравнение (6.47) есть общее решение уравнения  $U'' + \omega^2 U = 0$  при начальных условиях  $t = 0; U = f; U' = 0$ . В свою очередь последнее дифференциальное уравнение характеризует свободные колебания массы, соединенной упругим элементом жесткостью  $C = m\omega^2$ . Таким образом, для упрощенной оценки поперечных колебаний струны, последнюю можно представить невесомой нитью, масса которой  $m = pl$  сосредоточена в середине пролета  $x = \frac{l}{2}$ . Под действием силы от веса  $gm$ , струна имеет стрелу провеса  $f$ , т. е.  $gm = cf$ . Здесь  $c$  - эквивалентная жесткость струны при перемещении ее в поперечном направлении, Н·м<sup>-1</sup>. Подставив абсолютное значение  $f = \frac{1}{8} \frac{gp}{H} l^2$ , получим  $c = \frac{gm}{f} = 8 \frac{H}{l}$ .

Таким образом, дифференциальное уравнение, характеризующее свободные колебания массы  $m$ , которая соединена с упругим элементом, имеющим жесткость  $c$  будет

$$mU'' - cU = 0,$$

или

$$U'' - \omega^2 U = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\sqrt{8}}{l} \sqrt{\frac{H}{p}}$$

Видно, что при укрупненной оценки частоты поперечных колебаний получится в  $\frac{\pi}{\sqrt{8}} = 1,11$  раз меньше по сравнению с точным методом решения задачи. Амплитуда колебаний первой гармоники при точном методе равна  $1,032 f$ , а при укрупненной оценке - равна  $f$ .

Полученные данные позволяют сделать вывод о возможности укрупненной оценки динамических процессов гибких однородных тяжелых нитей (струны канатов, ленты конвейеров, провода линий электропередач и т. д.), при этом погрешность не будет превышать 11 %.

При таком допущении процессы вынужденных колебаний характеризуются уравнениями, рассмотренными в разделах 3, 4, а полученные результаты могут быть распространены и на вынужденные колебания гибких однородных тяжелых нитей.

## 7. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ МНОГОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В разделе 1.1 было показано, что для изучения динамических процессов в машине, последнюю необходимо представить эквивалентной схемой, в которой  $n$  сосредоточенных масс соединены вязкоупругими элементами (рис. 1.2, 1.3, 1.4). Любая эквивалентная схема, в которой количество масс более двух, характеризуется системой дифференциальных уравнений, которые могут быть решены численными методами.

Для математического описания механической системы, состоящей из  $n$  сосредоточенных масс, соединенных вязкоупругими элементами, применяется принцип Даламбера, который применительно к произвольной системе был предложен Ж. Лагранжем в 1760 г. [75].

Метод Лагранжа основан на понятии обобщенных координат и сил. Под обобщенными координатами  $n(t)$  понимается независимые друг от друга однозначные функции времени, при помощи которых описываются кинематические параметры

механической системы. Первые производные от обобщенных координат по времени  $n'(t)$  называются обобщенными скоростями.

В качестве обобщенных координат могут быть использованы любые независимые параметры: координаты положения масс, углы поворота и т. д.

Для получения математической модели, характеризующей динамику механической системы, в основу положено уравнение Лагранжа [76]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial n'} - \frac{\partial T}{\partial n} = - \frac{\partial \Pi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + P_n,$$

где  $n$  - обобщенная координата, м;

$t$  - текущее время, с;

$T, \Pi$  - кинетическая и потенциальная энергии системы, Н·м;

$\Phi$  - диссипативная функция, характеризующая силы вязкого сопротивления, Н·м·с<sup>-1</sup>;

$P_n$  - обобщенная сила, Н.

Уравнение Лагранжа используют для изучения динамических процессов любой механической системы, независимо от того, сколько масс входит в систему, как движутся эти массы и какое движение рассматривается (абсолютное или относительное). Системы дифференциальных уравнений имеют общие закономерности, которые позволяют в дальнейшем, при наличии эквивалентной схемы машины, записывать математическую модель без вывода, который приведен применительно к трехмассовой механической системы.

### 7.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В качестве эквивалентной схемы механической системы, в которой три массы соединены двумя вязкоупругими элементами, примем схему, показанную на рис. 1.4. Такой эквивалентной схеме могут соответствовать многие машины, в том числе, лифтовые и грузовые подъемники. На этой схеме, в качестве обобщенных координат приняты  $x, y$  и  $z$ , относительно которых перемещаются массы машины  $m_m$ , груженого сосуда  $m_{cy}$ , и порожнего сосуда  $m_{cx}$ . Машина и сосуды соединены канатами с коэффициентами жесткости  $c_y$ , и  $c_z$ , и вязкости  $\mu_y$  и  $\mu_z$ . Обобщенными силами являются силы двигателя  $F_{дв}(x)$ , тормоза  $F_m(t)$  и вредных сопротивлений  $P_y$  и  $P_z$ . Обратим внимание, если обобщенная сила направлена в направлении обобщенной координаты и способствует ее возрастанию, то она имеет знак плюс. В противном случае, ее следует принимать со знаком минус. Полное изменение потенциальной энергии системы можно представить в виде

$$\Pi = \Pi_y - \Pi_z + \Pi_{ky} - \Pi_{kz} + \Pi_{\partial y} + \Pi_{\partial z}, \quad (7.1)$$

здесь  $\Pi_y, \Pi_z$  - изменение потенциальной энергии масс  $m_{cy}$  и  $m_{cz}$  при перемещении их соответственно на величину  $y$  и  $z$ , Н·м;

$\Pi_{ky}, \Pi_{kz}$  - изменение потенциальной энергии массы упругих элементов (канатов), Н·м;

$\Pi_{\partial y}, \Pi_{\partial z}$  - изменение потенциальной энергии деформированных канатов, Н·м.

Если груженный сосуд имеет массу  $m_{cy}$ , а порожний -  $m_{cx}$ , то

$$\Pi_y = gm_{cy}y; \quad \Pi_z = gm_{cz}z,$$

где  $g$  - ускорение свободного падения, м·с<sup>-2</sup>.

Для определения изменения потенциальной энергии массы канатов вернемся к схеме, показанной на рис. 1.6.

Если за единицу времени перемещение верхнего конца каната произошло на величину  $x$ , а нижнего  $y$ , то, в соответствие с зависимостью (1.2), элементарный участок  $d\delta$  будет иметь перемещение

$$\Delta = x - \frac{x-y}{l_y} \delta.$$

Тогда элементарное изменение массы каната

$$d\Pi_{ky} = qpd\delta\Delta = qp\left(x - \frac{x-y}{l_y} \delta\right)d\delta.$$

Следовательно

$$\Pi_{ky} = \int_0^{l_y} qp\left(x - \frac{x-y}{l_y} \delta\right)d\delta = qpl_y \frac{x+y}{2} = gm_{ky} \frac{x+y}{2}.$$

Аналогично рассуждая, можно записать изменение потенциальной энергии массы порожней ветви

$$\Pi_{kz} = gm_{kz} \frac{x+z}{2},$$

здесь  $p$  - линейная плотность каната, кг;

$m_{ky}$  и  $m_{kz}$  - массы канатов грузной и порожней ветвей, кг.

Если упругий элемент имеет жесткость  $c$  и полную деформацию  $\lambda_n$ , то потенциальная энергия этой связи определится [55]

$$\Pi_{\partial} = \frac{c}{2} \lambda_n^2.$$

Для рассматриваемого случая с увеличением  $y$  по сравнению с  $x$  полная деформация грузной ветви  $\lambda_{ny}$  уменьшается, а при увеличении  $z$  по сравнению с  $x$  полная деформация порожней ветви  $\lambda_{nz}$  увеличивается, поэтому

$$\lambda_{ny} = \lambda_y + x - y; \quad \lambda_{nz} = \lambda_z + z - x.$$

Тогда изменение потенциальной энергии деформированных канатов грузной и порожней ветвей

$$\Pi_{\partial y} = \frac{c_y}{2} (\lambda_y + x - y)^2; \quad \Pi_{\partial z} = \frac{c_z}{2} (\lambda_z + z - x)^2.$$

Статическая деформация ветвей канатов  $\lambda_y$  и  $\lambda_z$  в соответствие с (3.2), имеет вид



$$\lambda_y = \frac{q}{c_y} \left( m_{cy} + \frac{m_{ky}}{2} \right); \quad \lambda_z = \frac{q}{c_z} \left( m_{cz} + \frac{m_{kz}}{2} \right).$$

Подставив найденные значения в уравнения (7.1), получим полное изменение потенциальной энергии системы

$$n = g \left( m_{cy} y - m_{cz} z + m_{ky} \frac{x+y}{2} - m_{kz} \frac{x+z}{2} \right) + \frac{c_y}{2} (\lambda_y + x - y)^2 + \frac{c_z}{2} (\lambda_z + z - x)^2. \quad (7.2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_x + T_y + T_z + T_{ky} + T_{kz}, \quad (7.3)$$

где  $T_x, T_y, T_z, T_{ky}, T_{kz}$  - кинетическая энергия, соответственно, органов навивки с приводом, груженого и порожнего сосудов, канатов, поднимающейся и опускающейся ветвей, Н·м.

$$T_x = \frac{m_m}{2} (x')^2; \quad T_y = \frac{m_{cy}}{2} (y')^2; \quad T_z = \frac{m_{cz}}{2} (z')^2.$$

Кинетические энергии канатов определяются по уравнению (1.5)

$$T_{ky} = \frac{p}{2g} \int_0^{l_y} \left( x' - \frac{x' - y'}{l_y} \delta \right)^2 d\delta = \frac{m_{ky}}{2} \left[ \frac{(x')^2 + x'y' + (y')^2}{3} \right],$$

$$T_{kz} = \frac{m_{kz}}{2} \left[ \frac{(x')^2 + x'z' + (z')^2}{3} \right].$$

Подставив полученные значения в уравнение (7.3) найдем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m_m}{2} (x')^2 + \frac{m_{cy}}{2} (y')^2 + \frac{m_{cz}}{2} (z')^2 + \frac{m_{ky}}{2} \left[ \frac{(x')^2 + x'y' + (y')^2}{3} \right] + \frac{m_{kz}}{2} \left[ \frac{(x')^2 + x'z' + (z')^2}{3} \right]. \quad (7.4)$$

Диссипативная функция, или функция рассеивания - понятие которое было введено Рэлеем, представим в виде положительной квадратичной функции [74]

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ \mu_y (y' - x')^2 + \mu_z (z' - x')^2 \right], \quad (7.5)$$

где  $\mu_y, \mu_z$  - коэффициенты диссипации, характеризующие силы вязкого трения груженой и порожней ветвей канатов.

Используя выражение (7.2) и (7.4), определим частные производные по координатам  $x, y, z$ .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = g \left( \frac{m_{ky}}{2} - \frac{m_{kz}}{2} \right) + c_y (\lambda_y + x - y) - c_z (\lambda_z + z - x);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = g \left( m_{cy} + \frac{m_{ky}}{2} \right) - c_y (\lambda_y + x - y);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -g \left( m_{cz} + \frac{m_{kz}}{2} \right) + c_z (\lambda_z + z - x);$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Из уравнений (7.4), (7.5) определяются частные производные по обобщенным скоростям  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m_{..} x' + \frac{m_{ky}}{6} (2x' + y') + \frac{m_{kz}}{6} (2x' + z');$$

$$\frac{\partial T}{\partial y'} = m_{cy} y' + \frac{m_{ky}}{6} (x' + 2y');$$

$$\frac{\partial T}{\partial z'} = m_{cz} z' + \frac{m_{kz}}{6} (x' + 2z');$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} = -[\mu_y (y' - x') + \mu_z (z' - x')];$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \mu_y (y' - x');$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \mu_z (z' - x').$$

Тогда первые члены уравнения Лагранжа запишем как

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} = m_{..} x'' + \frac{m_{ky}}{6} (2x'' + y'') + \frac{m_{kz}}{6} (2x'' + z'');$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y'} = m_{cy} y'' + \frac{m_{ky}}{6} (x'' + 2y'');$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial z'} = m_{cz} z'' + \frac{m_{kz}}{6} (x'' + 2z'').$$

Подставив эти выражения в уравнение Лагранжа и сделав преобразования, получим дифференциальные уравнения, характеризующие динамический процесс трехмассовой механической системы

$$\begin{cases} m_x x'' + m_{nn} y'' + m_{no} z'' + \mu_y (x' - y') + \mu_z (x' - z') + c_y (x - y) + c_z (x - z) = \\ = -F_{cm}(x) - F_m(t) + F_{об}(x'); \\ m_y y'' + m_{nn} x'' + \mu_y (y' - x') + c_y (y - x) = -P_y; \\ m_z z'' + m_{no} x'' + \mu_z (z' - x') + c_z (z - x) = -P. \end{cases} \quad (7.6)$$

где  $m_x = m_m + \frac{m_{ky}}{3} + \frac{m_{kz}}{3}$  - масса, сосредоточенная на окружности органа навивки машины, кг;

$m_y = m_{cy} + \frac{m_{ky}}{3}$  - масса, сосредоточенная в центре тяжести поднимающегося сосуда, кг;

$m_z = m_{cz} + \frac{m_{kz}}{3}$  - масса, сосредоточенная в центре тяжести опускающегося сосуда, кг;

$m_{nn} = \frac{m_{ky}}{6}$ ,  $m_{no} = \frac{m_{kz}}{6}$  - коэффициенты масс канатов, кг;

$F_{cm} = c_y \lambda_y + g \frac{m_{ky}}{2} - c_z \lambda_z - g \frac{m_{kz}}{2}$  - статическое сопротивление движению машины без учета вредных сопротивлений, Н.

Подставив значения  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ , получим

$$F_{cm} = g(m_y + m_{ky} - m_z - m_{kz}).$$

Сделаем допущение, что силы сопротивления движению грузеного  $P_y$  и порожнего сосуда  $P_z$  равны и постоянны. Их величины можно определить через коэффициент вредных сопротивлений  $k \approx (1,15-1,2)$  [33]

$$P_y = P_z = \frac{k-1}{2} Q_n,$$

где  $Q_n$  - вес полезного груза, Н.

В уравнение системы (7.6) присутствуют члены  $m_{nn} y''$ ,  $m_{nn} x''$  и  $m_{noz} z''$ ,  $m_{no} x''$ , которые получились в результате определения кинетической энергии канатов с использованием принципа Рэля (раздел 1.2). Такое допущение позволило учесть влияние масс канатов на динамический процесс. Как видно, этот учет осуществляется путем добавления к массам машины и концевых грузов по  $\frac{1}{3}$  масс канатов грузеной и порожней ветвей. В то же время,

вышеназванные члены уравнений искажают физический смысл переходного процесса. Предположим к машине приложено возмущающее воздействие, а силы сопротивления  $P_y$  и  $P_z$  равны нулю. При  $t = 0$ , замедления масс  $m_y$  и  $m_z$  должны быть равны нулю. Наличие

вышеназванных коэффициентов делает их равными  $y'' = -\frac{m_{nn}}{m_y} x''$ ,  $z'' = -\frac{m_{no}}{m_z} x''$ , что

противоречит физическому смыслу. Поэтому систему уравнений (7.6) запишем так

$$\begin{cases} m_x x'' + \mu_y(x' - y') + \mu_z(x' - z') + c_y(x - y) + c_z(x - z) = -F_{cm}(x) - F_m(t) + F_{ог}(x'); \\ m_y y'' + \mu_y(y' - x') + c_y(y - x) = -P_y; \\ m_z z'' + \mu_z(z' - x') + c_z(z - x) = -P_z. \end{cases} \quad (7.7)$$

Полученная система неоднородных дифференциальных уравнений позволяет проводить анализ и синтез динамических систем, состоящих из трех масс, соединенных вязкоупругими элементами.

## 7.2. ПРОЦЕСС РАЗГОНА МАШИНЫ ИМЕЮЩЕЙ АСИНХРОННЫЙ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЬ С ФАЗНЫМ РОТОРОМ

Процесс разгона машины с асинхронным электродвигателем, представленной одномассовой механической системой, характеризуется уравнением (2.28), решения которого (2.30) позволяют узнать кинематические характеристики процесса разгона. Эти характеристики дают возможность определить производительность и коэффициент полезного действия машины. Прочностные же характеристики в этом случае определяются весьма приближенно, без учета колебательных процессов в машине. Из рис. 2.6 видно, что при пуске асинхронного электродвигателя с фазным ротором, когда выключена ступень роторного сопротивления, усилие, развиваемое электродвигателем изменяется ступенчато, а затем уменьшается по мере увеличения скорости. Закон изменения усилия электродвигателя в зависимости от скорости характеризуется уравнением Клосса (1.14). Если машина представлена трехмассовой механической системой, то для изучения динамического процесса при пуске асинхронного электродвигателя с фазным ротором в основу следует положить систему уравнений (7.7). В этих уравнениях тормозное усилие  $F_m(t)$  принимаем равным нулю, а усилие, развиваемое электродвигателем определим из формулы Клосса

$$F_{ог}(x') = \frac{2\gamma_{кр} S_x (S_{кр})_i}{(S_{кр})_i^2 + S_x^2} F_n.$$

Здесь  $F_n$  - номинальное усилие электродвигателя, Н;

$(S_{кр})_i$  - критическое скольжение, определяемое с помощью соотношения (1.16);

$S_x$  - текущее значение скольжения.

Уравнение Клосса не учитывает электромагнитный переходный процесс в асинхронном электродвигателе. Использование этого уравнения оправдано тем, что из-за малой величины электромагнитной постоянной времени, высокочастотные колебания электромагнитного момента электродвигателя не оказывают влияния на колебания конечных масс. Эти предположения подтверждены исследованиями, приведенными в монографии [70], для шестимассовой механической системы.

Полученная система дифференциальных уравнений, во-первых, нелинейная, во-вторых, имеет высокий порядок. Поэтому для решения задачи используются численные методы, которые в виде стандартных функций размещены в пакете Mathcad 7. Численное решение задачи позволяет учесть ряд других нелинейностей: например, изменение коэффициентов жесткости  $c_y$  и  $c_z$ , связаны с изменением длин канатов в процессе разгона, т. е.

$$c_y = \frac{EF}{l_y - y}; \quad c_z = \frac{EF}{l_z + z}.$$

Несмотря на то, что величины масс  $m_y$  и  $m_z$  в процессе разгона, за счет изменения длин канатов, изменяются не более чем на 1 %, можно без труда учесть это при численном интегрировании

$$m_y = m_{cy} + \frac{1}{3} p(l_y - y); \quad m_z = m_{cz} + \frac{1}{3} p(l_z + z).$$

Подставив значения  $c_y$ ,  $c_z$  и  $m_y$  и  $m_z$  в уравнение (3.11), получим коэффициенты, характеризующие диссипативные свойства системы

$$\mu_y = m_y \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{c_y}{m_y}}; \quad \mu_z = m_z \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{c_z}{m_z}}.$$

Механические характеристики асинхронного электродвигателя с фазным ротором приведены на рис. 1.15.

При включении напряжения на обмотки статора в цепь ротора включены все дополнительные сопротивления и электродвигатель развивает момент, равный моменту первой предварительной ступени; выбираются люфты и зазоры. Так как момент на первой предварительной ступени меньше момента сопротивления, то машина остается в неподвижном состоянии. При включении второй предварительной ступени, момент которой принят из условия обеспечения заданного ускорения в начале процесса, начинается движение машины. Применительно к шахтному подъему, электродвигатель должен работать на этой ступени до момента, пока подъемный сосуд не пройдет путь, равный длине разгрузочных кривых  $h_0$ . После этого, поступает сигнал на выключение очередной ступени роторных сопротивлений. Электродвигатель работает на пусковых характеристиках. С увеличением скорости уменьшается момент, развиваемый электродвигателем. При достижении нижнего момента переключения  $\gamma_2$ , поступает сигнал на выключение очередной ступени роторного сопротивления и процесс повторяется до выхода электродвигателя на естественную характеристику. Эти особенности ступенчатого пуска асинхронного электродвигателя необходимо учесть при программировании вычислительного процесса с использованием численных методов интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Таким образом, при исследовании динамических процессов машин при пуске асинхронного электродвигателя с фазным ротором необходимо решить систему дифференциальных нелинейных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned}
 x'' &= \frac{1}{m_x} \left\{ (y' - x') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_y - y} \left[ m_{cy} + \frac{1}{3} p(l_y - y) \right]} + \right. \\
 &+ (z' - x') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_z + z} \left[ m_{cz} + \frac{1}{3} p(l_z + z) \right]} + (y - x) \frac{EF_k}{l_y - y} + \\
 &\left. + (z - x) \frac{EF_k}{l_z + z} - q(km_n + pH_n - 2px) + 2F_c \frac{\gamma_{\text{бп}} V_c (S_{\text{бп}})_i (V_c - x')}{[V_c (S_{\text{бп}})_i]^2 + (V_c - x')^2} \right\}; \\
 y'' &= \frac{1}{m_{cy} + \frac{1}{3} p(l_y - y)} \left\{ (x' - y') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_y - y} \left[ m_{cy} + \frac{1}{3} p(l_y - y) \right]} + \right. \\
 &\left. + (x - y) \frac{EF_k}{l_y - y} - P_y \right\}; \\
 z'' &= \frac{1}{m_{cz} + \frac{1}{3} p(l_z + z)} \left\{ (x' - z') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_z + z} \left[ m_{cz} + \frac{1}{3} p(l_z + z) \right]} + \right. \\
 &\left. + (x + z) \frac{EF_k}{l_z + z} - P_z \right\}.
 \end{aligned} \right. \quad (7.8)$$

Пример 7.1. Изучить динамический процесс пуска машины, представленной трехмассовой механической системой. Машина имеет асинхронный электродвигатель с фазным ротором. Характеристики машины и электродвигателя принять соответствующими примеру 1.2.

Критические скольжения рассчитаны в примере 1.2 и приведены в табл. 1.2.

Используем следующие дополнительные данные для машины:

Масса вращающихся частей машины, $m_m$	76000 кг;
Масса груженого сосуда, $m_{cy}$	17000
кг;	
Масса порожнего сосуда, $m_{cz}$	8000
кг;	
Линейная плотность каната, $p$	9,045
кг·м <sup>-1</sup> ;	
Длина груженой ветви каната, $l_y$	700
м;	
Длина порожней ветви каната, $l_z$	90
м;	
Площадь проволок в канате, $F_k$	
991,81·10 <sup>-6</sup> м <sup>2</sup> ;	
Модуль упругости каната, $E$	12
·10 <sup>10</sup> Па;	
Логарифмический декремент колебаний, $\delta$	0,15;
Силы вредного сопротивления, $P_y = P_z$	1000
Н;	
Статические сопротивления движению системы, $F_{cm} = q(km_n + pH_n - 2px)$ ;	

Масса полезного груза, $m_n = m_{cy} - m_{cz}$	9000
кг;	
Коэффициент, характеризующий вредные сопротивления, $k$	1,15;
Высота подъема, $H_n$	
610 м;	
Путь в разгрузочных кривых, $h_0$	2,17
м;	
Нижний момент переключения, $\gamma_2$	
1,45;	
$m_x = m_m + \frac{m_{ky}}{3} + \frac{m_{kz}}{3} = 77000$ кг - эквивалентная масса вращающихся частей остается	

постоянной, так как в процессе разгона машины  $m_{ky}$  уменьшается, а  $m_{kz}$  увеличивается на одинаковую величину.

Решение задачи выполнено в пакете Matchcad 7 с использованием стандартной программы rkfixed (Рунге-Кутта).

На вычислительный процесс необходимо наложить ограничения:

При работе на второй предварительной ступени

$$x \leq h_0; \quad (S_{кр})_0 = 3,03.$$

Здесь  $(S_{кр})_0$  - критическое скольжение на второй предварительной ступени (см. табл. 1.2); при работе на пусковых ступенях  $x \geq h_0$ ; при  $\gamma_{06} < \gamma_2$ ; критические скольжения изменяются скачком, например  $(S_{кр})_1 = 1,0$  - (первое переключение);  $(S_{кр})_2 = 0,593$  - (второе переключение) и т. д.

Фрагмент логики выбора критического скольжения и правых частей приведен в программе 7.1. Характеристики переходного процесса при пуске шахтной подъемной машины, оборудованной асинхронным электродвигателем с фазным ротором приведены на рис. 7.1.

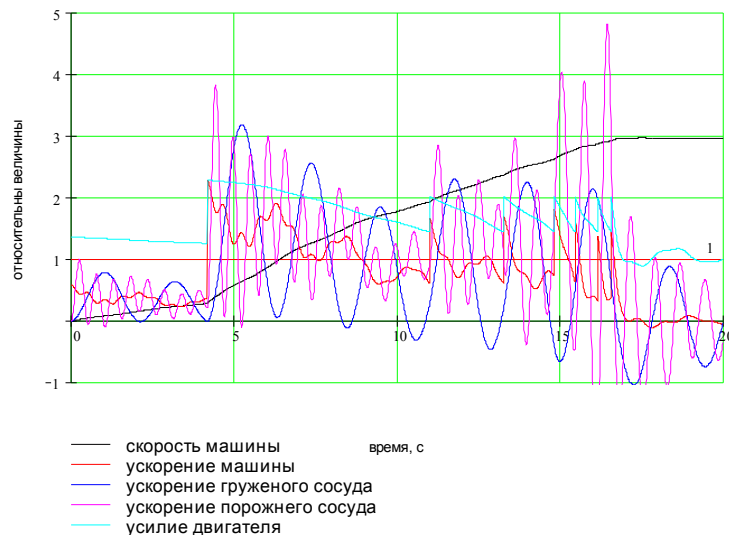


Рис. 7.1. Характеристика переходного процесса при пуске машины

Характеристики построены в относительных единицах. За базовую величину для ускорений принято среднее ускорение  $a = 0,645 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Это ускорение получила бы машина, представленная одномассовой механической системой, при воздействии на нее среднего усилия при пуске, равного  $\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} F_n$  (пример 1.2.). В качестве базовой для скорости принята

величина  $\frac{1}{3}V_m = 3,29 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ , выбранная из условия подбора удобного масштаба величин, откладываемых по оси ординат. Базовой величиной для усилия принято номинальное усилие двигателя  $F_n = 96372 \text{ Н}$ .

В момент включения электродвигателя на вторую предварительную ступень  $((S_{hp})_{II} = 3,03)$  машина начинает разгоняться со средним ускорением  $0,3 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ , постепенно уменьшающимся. В канатах формируются колебательные процессы. Ускорение машины отражает изменение закономерностей усилия двигателя и натяжений грузовой и порожней ветвей канатов. После того, как грузовой сосуд выйдет из разгрузочных кривых ( $x > h_0$ ), выключается очередная ступень роторного сопротивления и электродвигатель переходит работать на первую пусковую характеристику  $((S_{kp})_I = 1)$ . Ступенчатое приращение движущего усилия формирует колебания в канатах, амплитуды замедлений которых для порожней ветви, почти в четыре раза, а для грузовой в три раза, выше, среднего замедления. Частота включения трех последних ступеней близки к частоте свободных колебаний порожней ветви, поэтому в эти моменты наблюдаются резонансные явления. Амплитуда относительного замедления порожнего сосуда достигает 4,8. С изменением координат  $y$  и  $z$ , изменяются жесткости и коэффициенты диссипации ветвей. Однако эти изменения незначительны и приводят к весьма несущественному уменьшению периода колебаний грузовой ветви и к увеличению периода колебаний порожней ветви.

Результаты моделирования показали, что при ступенчатом пуске асинхронного электродвигателя в вязкоупругих элементах машины формируется сложный колебательный процесс. Амплитуды ускорений грузовой ветви, для рассматриваемого примера превышает среднюю величину ускорения в три раза, а порожней ветви в 4,8 раза. Принятая схема включения контакторов ускорения на последних ступенях может инициировать резонансные явления в системе.

Такие большие динамические нагрузки вызывают опасные напряжения в элементах машины, усталостный износ и снижают срок эксплуатации установки.

Разработанная методика позволяет изучить динамические процессы в машине при ступенчатом пуске асинхронного электродвигателя и оценить динамические нагрузки вновь разрабатываемых системы управления асинхронным двигателем.

Программа 7.1



$x_2$

$$\begin{aligned}
 & \text{Skx} \leftarrow \frac{Vc - x_2}{Vc} \\
 i \leftarrow & \begin{cases} 7 & \text{if } \frac{2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_7 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_7}} \\ 6 & \text{if } \frac{2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_6 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_6}} \\ 5 & \text{if } \frac{2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_5 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_5}} \\ 4 & \text{if } \frac{2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_4 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_4}} \\ 3 & \text{if } \frac{2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_3 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_3}} \\ 2 & \text{if } \frac{2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_2 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_2}} \\ 8 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 D(t, x) := & \begin{cases} \frac{-\frac{10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} m_y (x_2 - x_4) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} m_z (x_2 - x_6)}{m_x} - \frac{\left[ \frac{-10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} (x_1 - x_3) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} (x_1 - x_5) \right]}{m_x} - \frac{\frac{F_{\text{дв}} 2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_1 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_1}} - F_{\text{ст}}}{m_x}} & \text{if } \frac{2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_1 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_1}} \\ \frac{-\frac{10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} m_y (x_2 - x_4) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} m_z (x_2 - x_6)}{m_x} - \frac{\left[ \frac{-10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} (x_1 - x_3) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} (x_1 - x_5) \right]}{m_x} - \frac{\frac{F_{\text{дв}} 2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_1 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_1}} - F_{\text{ст}}}{m_x}} & \text{if } x_1 = (h_0) \\ \frac{-\frac{10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} m_y (x_2 - x_4) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} m_z (x_2 - x_6)}{m_x} - \frac{\left[ \frac{-10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} (x_1 - x_3) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} (x_1 - x_5) \right]}{m_x} - \frac{\frac{F_{\text{дв}} 2 \cdot \overline{\text{Kf}}}{S_8 + \frac{\text{Skx}}{\text{Skx} + S_8}} - F_{\text{ст}}}{m_x}} & \text{if } i = 7 \end{cases} \\
 & \begin{aligned} & x_4 \\ & \frac{-\frac{10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} m_y (x_4 - x_2) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3} (x_5 - x_1) - P_y}{m_{cy} + \frac{1}{3} \rho (I_{KY}(x_{\text{ш}}) - x_3)} \\ & x_6 \\ & \frac{-\frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} m_z (x_6 - x_2) - \frac{10^{-4} E F}{I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5} (x_5 - x_1) - P_z}{m_{cz} + \frac{1}{3} \rho (I_{KZ}(x_{\text{ш}}) + x_5)} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Z := rkfixed(x 0 20 2000 D)

Стандартная программа Рунге-Кутты

### 7.3. ПРОЦЕСС РАЗГОНА МАШИНЫ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИВОД ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЗАВИСИМЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Механические характеристики электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением характеризуется уравнением (1.21).

Это уравнение относительно безразмерного момента  $\gamma_x$  можно представить

$$\gamma_x = \frac{1}{R_{я} J_n} \left( U - \frac{60 C_e \Phi}{\pi D} x' \right) \quad (7.9)$$

где  $U$  - напряжение, подводимое к электродвигателю, В;  $D$  - диаметр рабочего органа машины, м;  $x'$  - линейная скорость рабочего органа машины м·с<sup>-1</sup>.

Большое количество жестких механических характеристик электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением позволяет на новом уровне решить задачу кинематики и динамики многих машин и механизмов. В разделе 5.2 на примере двухмассовой механической системы показано, что изменение интенсивности нарастания возмущающего воздействия на машину за время кратное периоду свободных колебаний, позволяет получить минимальные динамические нагрузки. Реализация такого способа формирования движущего усилия может быть осуществлена и для многомассовых механических систем.

Рассмотрим закон формирования движущего усилия на примере шахтной подъемной машины - наиболее мощной и ответственной установки. Для таких установок ускорение в период основного разгона не должно превышать 1,0 м·с<sup>-2</sup>, при этом в начальный момент трогания ускорение должно быть менее 0,3 м·с<sup>-2</sup>. Исходя из условия получения минимальных динамических нагрузок при пуске, эти уровни ускорений должны формироваться за время кратное периоду колебаний грузовой ветви каната. При этом, колебательный процесс в порожней ветви каната не будет минимизирован. Так как уровень нагрузок в порожней ветви примерно в два раза меньше чем в грузовой, вопрос о получении минимальных нагрузок в порожней ветви не ставится. Это возможно при высоком быстродействии системы формирования движущего усилия. Таким образом, при создании системы управления двигателем постоянного тока ставится задача ограничения рывка. Следует заметить, что величина рывка не только формирует динамические нагрузки, но и оказывает влияние на ощущения человека в кабине лифта или клетки. Влияние этого физиологического фактора зависит не от величины скорости, а также не столько от величины ускорения, сколько главным образом от темпа изменения ускорения, т. е. от рывка [32]. Следовательно, ускорение 0,3 м·с<sup>-2</sup> должно быть достигнуто за время, кратное периоду колебаний, оставаясь равным этой величине до тех пор, пока не будет пройден путь, равный длине разгрузочных кривых. После этого ускорение от величины 0,3 м·с<sup>-2</sup> должно возрасти до заданного верхнего предела за время, кратное периоду свободных колебаний. При приближении скорости машины к максимальной ускорение должно уменьшиться до нуля, за время, кратное периоду свободных колебаний. При высоких скоростях движения путь разгона может достигать большой величины. В результате периоды колебаний в начале процесса и в конце разгона могут отличаться. Этот факт необходимо учитывать при формировании программы движущего усилия и при численном интегрировании динамического процесса.

Из уравнения (7.9) видно, что для реализации рассмотренного движущего усилия необходимо сформировать соответствующий закон изменения напряжения  $U$ , подводимого к электродвигателю. Из-за наличия индуктивности обмоток, привод постоянного тока имеет электромагнитную постоянную времени. Влияние постоянной времени необходимо учесть при формировании задания. Электромагнитная постоянная времени электродвигателя определяется в основном индуктивностью и активным сопротивлением обмотки

возбуждения. Для привода шахтного подъема, в рабочем цикле, магнитный поток обмотки возбуждения двигателя - постоянная величина. Следовательно, электромагнитная постоянная времени привода постоянного тока будет определяться в основном постоянной времени источника напряжения. Если в качестве регулируемого источника напряжения применяется генератор постоянного тока, то электромагнитная постоянная времени определится параметрами обмотки возбуждения генератора

$$\tau_v = \frac{L_v}{R_v},$$

где  $L_v$  - индуктивность обмотки возбуждения, Г;  
 $R_v$  - активное сопротивление обмотки возбуждения, Ом.

Величина электромагнитной постоянной времени для мощных машин может достигать 3 с [32]. Если в качестве регулируемого источника напряжения используются тиристорные преобразователи, то постоянная времени значительно уменьшается.

Электромагнитная постоянная времени обмотки якоря во много раз меньше постоянной обмотки возбуждения и, как правило, ей можно пренебречь.

Для практических расчетов оценить величину электромагнитной постоянной времени якорной цепи можно по выражению [32]

$$\tau_y = \frac{L_y}{R_y},$$

где  $L_y \approx (1,2 - 2,0) \frac{U_n}{I_n} \frac{30}{V}$  - индуктивность якорной цепи, Г;

$U_n$  - номинальное напряжение, В;

$I_n$  - номинальный ток, А;

$V$  - линейная скорость на периферии якоря, м·с<sup>-1</sup>.

Для уменьшения электромагнитной постоянной времени обмотки возбуждения в ее цепь включается дополнительное активное сопротивление.

Если на обмотку возбуждения, имеющей индуктивность  $L_v$  и омическое сопротивление  $R_v$ , подано напряжение  $U_v(t)$ , то изменение тока в такой цепи характеризуется уравнением (1.23), которое запишем

$$i' = \frac{1}{\tau R_v} U_v(t) - \frac{1}{\tau} i, \quad (7.10)$$

Между током  $i$  и напряжением генератора  $U$  существует прямая пропорциональность, поэтому

$$U = k_y i,$$

где  $k_y$  - коэффициент усиления, В·А<sup>-1</sup>.

Усилие, развиваемое электродвигателем

$$F_{\text{ос}} = \frac{1}{R_y I_n} \left( k_y i - \frac{60 C_e \Phi}{\pi D} x' \right) F_n,$$

где  $F_n = 2q975 \frac{N_n}{n_n D_\delta}$  - номинальное усилие двигателя, Н.

Таким образом, для изучения динамических процессов пуска машины с приводом постоянного тока с независимым возбуждением необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} i' &= \frac{1}{\tau R_e} U_e(t) - \frac{1}{\tau} i; \\ x'' &= \frac{1}{m_x} \left\{ (y' - x') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_y - y} \left[ m_{cy} + \frac{1}{3} p(l_y - y) \right]} + (z' - x') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_z + z} \left[ m_{cz} + \frac{1}{3} p(l_z + z) \right]} + \right. \\ &\left. + (y - x) \frac{EF_k}{l_y - y} + (z - x) \frac{EF_k}{l_z + z} - g(km_n + pH_n - 2px) + \frac{1}{R_n I} \left( k_y i - \frac{60 C_e \Phi}{\pi D} x' \right) F \right\}; (7.11) \\ y'' &= \frac{1}{m_{cy} + \frac{1}{3} p(l_y - y)} \left\{ (x' - y') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_y - y} \left[ m_{cy} + \frac{1}{3} p(l_y - y) \right]} + (x - y) \frac{EF_k}{l_y - y} - P_y \right\}; \\ z'' &= \frac{1}{m_{cz} + \frac{1}{3} p(l_z + z)} \left\{ (x' - z') \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{EF_k}{l_z + z} \left[ m_{cz} + \frac{1}{3} p(l_z + z) \right]} + (x + z) \frac{EF_k}{l_z + z} - P_z \right\} \end{aligned} \right.$$

В этой системе первое уравнение характеризует изменение тока в обмотке возбуждения при подаче на ее зажимы напряжения  $U_e(t)$ . Второе уравнение характеризует изменение ускорения машины с учетом изменения жесткостей  $c_y$  и  $c_z$ , и коэффициентов диссипации  $\mu_y$  и  $\mu_z$ , а также изменение движущего усилия в зависимости от тока  $i$  и скорости машины  $x'$ . Третье и четвертое уравнения характеризуют изменение ускорений  $y''$  и  $z''$ , при этом учитываются изменения концевых масс, жесткостей и коэффициентов диссипации.

Пример 7.2. Изучить динамические процессы пуска рудничной подъемной установки с приводом постоянного тока.

Характеристика установки:	
Подъемная машина	2Ц5х2,8;
Масса вращающихся частей машины, $m_m$	196540 кг;
Масса груженого сосуда, $m_{cy}$	42000 кг;
Масса порожнего сосуда, $m_{cz}$	17000 кг;
Линейная плотность каната, $p$	17,148 кг·м <sup>-1</sup> ;
Длина груженой ветви каната, $l_y$	509 м;
Длина порожней ветви каната, $l_z$	71 м;
Площадь проволок в канате, $F_k$	18,8·10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup> ;
Модуль упругости каната, $E$	12·10 <sup>10</sup> Па;
Логарифмический декремент колебаний, $\delta$	0,15;
Статическое сопротивление движению системы, $F_{cm}$	356000 Н -;
Масса полезного груза, $m_n = m_{cy} - m_{cz}$	25000 кг;
Коэффициент, характеризующий вредные сопротивления, $K$	1,15;
Высота подъема, $H_n$	440,8 м;
Эквивалентная масса вращающихся частей, $m_x$	199000 кг;

Мощность электродвигателя, $N_n$	3200 кВт;
Частота вращения электродвигателя, $n_n$	40,8 об·мин <sup>-1</sup> ;
Номинальное напряжение двигателя, $U_n$	600 В;
Номинальный ток двигателя, $I_n$	5850 А;
Номинальное усилие, $F_n$	390000 Н;
Коэффициент усиления, $k_y$	2 В·А <sup>-1</sup> ;
Постоянная времени обмотки возбуждения, $\tau$	2 с.
Период свободных колебаний определится по формуле	

$$T_y = 2\pi \sqrt{\frac{m_x m_y}{c_y (m_x + m_y)}}.$$

В начале процесса разгона ( $l_y = 509$  м)  $T_y = 1,808$  с.

Чтобы определить требования к закону формирования движущего усилия, обеспечивающего минимальные динамические нагрузки, рассчитаем кинематические параметры установки в период разгона.

Ускорение машины должно изменяться по характеристикам, показанным на рис. 7.2.

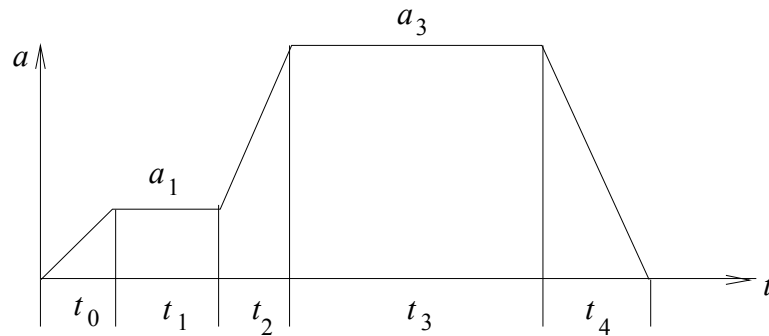


Рис. 7.2. Характеристики изменения ускорения.

Периоды времени  $t_0$ ,  $t_2$  и  $t_4$  должны быть кратными периодам свободных колебаний системы, соответственно в эти моменты времени. Так как перемещение груза на участках  $t_0$  и  $t_1$  равно пути в разгрузочных кривых  $h_0 = 2,17$  м, частоты колебаний практически не изменяются, примем  $t_0 = t_2 = T_y$ .

Ускорение в начале процесса разгона возрастает до величины  $a_0 = 0,3$  м·с<sup>-2</sup> за время  $T_y = 1,808$  с. Текущее значение кинематических параметров на этом отрезке времени

$$x'' = \rho_0 t; \quad x' = \rho_0 \frac{t^2}{2}; \quad x = \rho_0 \frac{t^3}{6},$$

Здесь  $\rho_0 = \frac{a_1}{T_y} = \frac{0,3}{1,808} = 0,166$  м·с<sup>-3</sup> - рывок.

При  $t = T_y$  ускорение, скорость и перемещение приобретают соответственно  $a_1 = 0,3$  м·с<sup>-2</sup>,

$v_0 = 0,271$  м·с<sup>-1</sup>,  $x_0 = 0,327$  м.

Достигнув ускорения  $a_1$ , машина движется равноускоренно до момента, пока подъемный сосуд не выйдет из разгрузочных кривых, т. е.  $y \geq h_0$ . Для укрупненного расчета,

на данном этапе примем  $x \approx y$ . Следовательно, кинематические параметры периода  $t_1$  следующие:

$$x'' = a_1; \quad x' = v_0 + a_1 t; \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{a_1}{2} t^2.$$

Здесь текущее значение времени  $t$  изменяется от нуля, т. е. истинное время, для данного периода, больше на  $T_y$ . Такой подход дает возможность записать нижеприведенные выражения менее громоздко.

В конце периода  $t_1$

$$x_1'' = a_1; \quad x_1' = v_0 + a_1 t_1; \quad x_1 = h_0 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{a_1}{2} t_1^2.$$

Этот период равноускоренного движения должен продолжаться до момента, пока масса  $m_y$  не пройдет путь  $x = h_0$ . Из последнего уравнения

$$t_1 = -\frac{T_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_y}{2}\right)^2 + \frac{2}{a_1(h_0 - x_0)}} = 2,7 \text{ с.}$$

Следовательно скорость выхода из разгрузочных кривых  $v_1 = v_0 + a_1 t_1 = 1,08 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , т. е. меньше допустимой  $1,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

На отрезке времени  $t_2$  кинематические параметры имеют характеристики:

$$\rho_2 = \frac{a_3 - a_1}{T_y}; \quad x'' = a_1 + \rho_2 t; \quad x' = v_1 + a_1 t + \rho_2 \frac{t^2}{2}; \quad x = x_1 + v_1 t + a_1 \frac{t^2}{2} + \rho_2 \frac{t^3}{6}.$$

Подставив времена  $t = t_2 = T_y$ , получим значение кинематических параметров в конце периода  $t_2$ :

$$\rho_2 = 0,36 \text{ м} \cdot \text{с}^{-3}; \quad a_3 = 0,95 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}; \quad v_2 = 2,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}; \quad x_2 = 4,613 \text{ м.}$$

В период  $t_3$  машина должна двигаться равноускоренно с ускорением  $a_3 = 0,95 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Следовательно

$$x'' = a_3; \quad x' = v_2 + a_3 t; \quad x = x_2 + v_2 t + \frac{a_3}{2} t^2.$$

Разгон машины с ускорением  $a_3$  должен осуществляться до скорости  $v_3$ , которая выбирается такой величины, чтобы машина достигла максимальной скорости за время  $t_4 = T_y$  при условии, что за это время ускорение снизится до нуля.

Для определения периода колебаний на этом отрезке времени приближенно можно принять

$$v_3 = v_{\max} = 10,68 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}; \quad t_3 \approx \frac{v_{\max} - v_2}{a_3} = 8,47 \text{ с}; \quad x_3 = x_2 + v_2 t_3 + \frac{a_3}{2} t_3^2 = 62,406 \text{ м};$$

$$T_y = 2\pi \sqrt{\frac{(l_y - x_3) m_x m_y}{EF(m_x + m_y)}} = 1,56 \text{ с.}$$

Таким образом, приняв  $t_4 = 1,56 \text{ с}$ , определим

$$\rho_4 = -\frac{a_3}{t_4}; \quad x'' = a_3 - \rho_4 t; \quad x' = v_3 + a_3 t - \rho_4 \frac{t^2}{2}; \quad x = x_3 + v_3 t + a_3 \frac{t^2}{2} - \rho_4 \frac{t^3}{6}.$$

При  $t = T_y = t_4$ ;  $x' = v_m = v_3 + a_3 t_4 - \rho_4 \frac{t_4^2}{2}$ .

Отсюда, уточняется скорость  $v_3 = v_m - a_3 t_4 + \rho_4 \frac{t_4^2}{2} = 9,938 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Следовательно время  $t_3 = \frac{v_3 - v_2}{a_3} = 7,69 \text{ с}$ ,  $x_3 = 54,23 \text{ м}$ ,  $T_y = 1,6 \text{ с}$ .

Полученные значения ускорений позволяют сформировать требования к движущему усилию привода:

$$F_{об}(t) = F_{cm} + m a_t,$$

здесь  $F_{cm} = g(km_n + pH_n - 2px) = 356000 \text{ Н}$  - статические сопротивления движению механической системы;  $m = m_x + m_{cy} + m_{cz} + p(l_y + l_z) = 264485 \text{ кг}$  - приведенная к органу навивки масса установки.

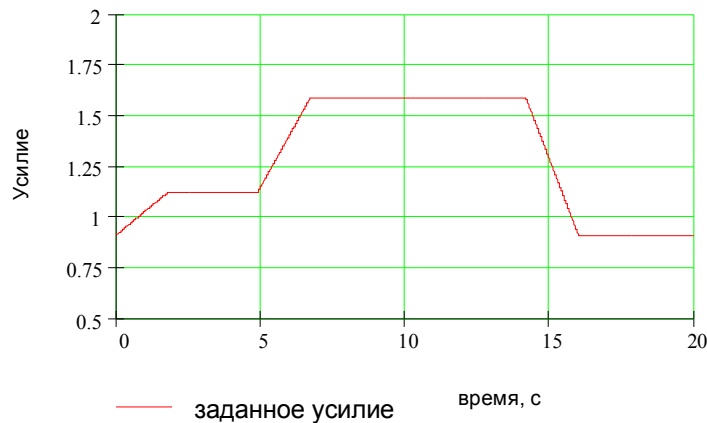


Рис. 7.3. Закон формирования движущего усилия.

На рис.7.3 показана закономерность формирования относительного движущего усилия, которое должна обеспечить минимальные динамические нагрузки при разгоне. Усилия показаны в безразмерных единицах. За базовую величину принято номинальное усилие электродвигателя  $F_n = 487500 \text{ Н}$ .

Такая закономерность изменения движущего усилия создаст изменение скорости машины (рис.7.4).

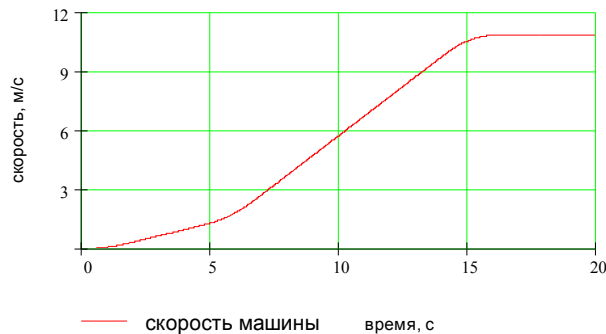


Рис. 7.4. Скорость машины

Если предположить, что система автоматического регулирования приводом постоянного тока безынерционна, то результаты математического моделирования системы дифференциальных уравнений (7.11) показывают, что разгон машины происходит практически без колебаний. Графики изменения ускорений машины, груженого и порожнего сосудов, а также динамические составляющие усилий приведены на рис. 7.5, 7.6.

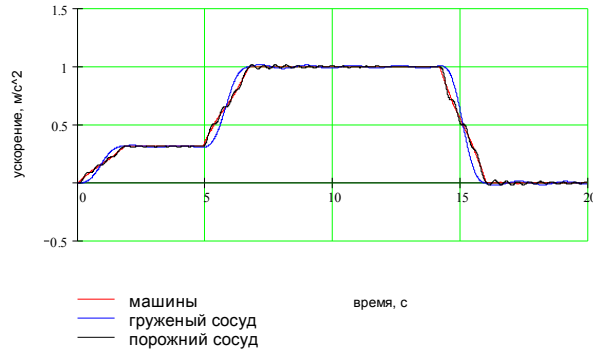
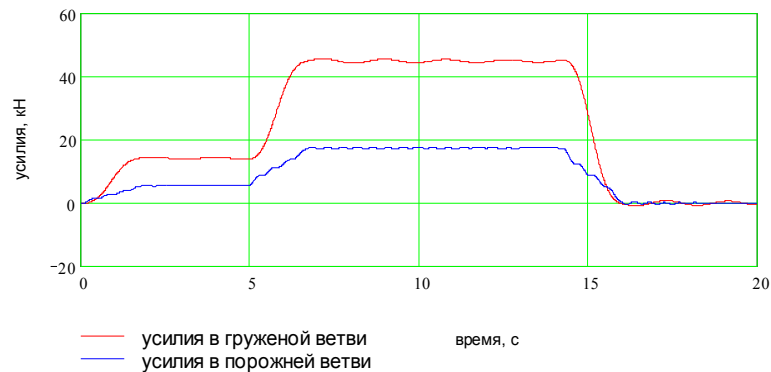
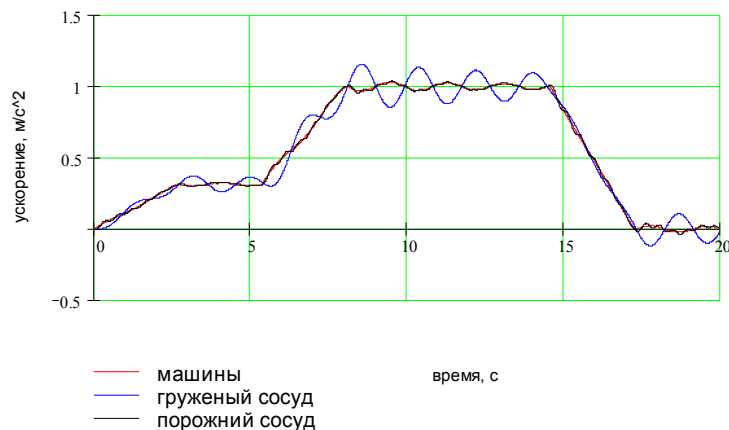
Рис. 7.5. Ускорения элементов установки ( $t_0 = t_2 = T_y$ ).

Рис. 7.6. Динамические составляющие усилий в канатах

Рис. 7.7. Ускорения элементов установки ( $t_0 = t_1 = 1,5T_y$ )



Видно, что весьма незначительные высокочастотные колебания порожнего сосуда быстро затухают, не вызывая дополнительных напряжений в канатах.

Если сформировать движущее усилие таким образом, чтобы интенсивность нарастания определялась временем, равным  $1,5 T_y$ , то, в соответствии с рис. 4.7, следует ожидать увеличения колебаний. На рис. 7.7 показаны ускорения машины и сосудов для этого случая. Сравнивая рис. 7.5 и 7.7 видим, что ускорения сосудов совершают колебания вокруг ускорения машины, при этом мгновенные значения их превышают ускорение машины в 1,25 раза.

Наиболее тяжелый динамический режим будет сформирован при условии, что изменение движущего усилия происходит ступенчато (рис. 7.8)

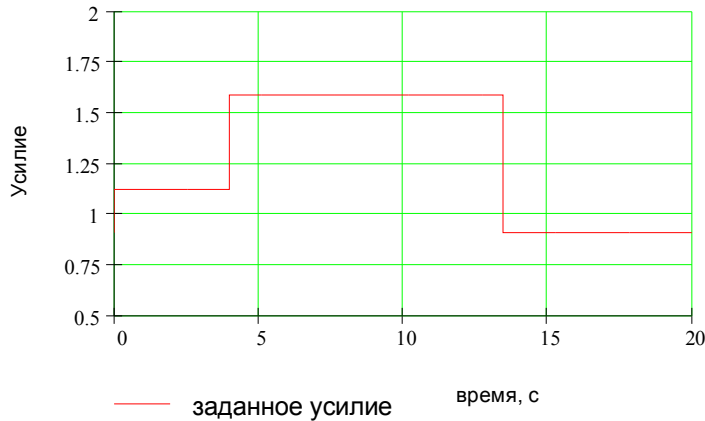


Рис. 7.8. Ступенчатый закон формирования движущего усилия

Графики переходного процесса при ступенчатом изменении движущего усилия показаны на рис. 7.9.

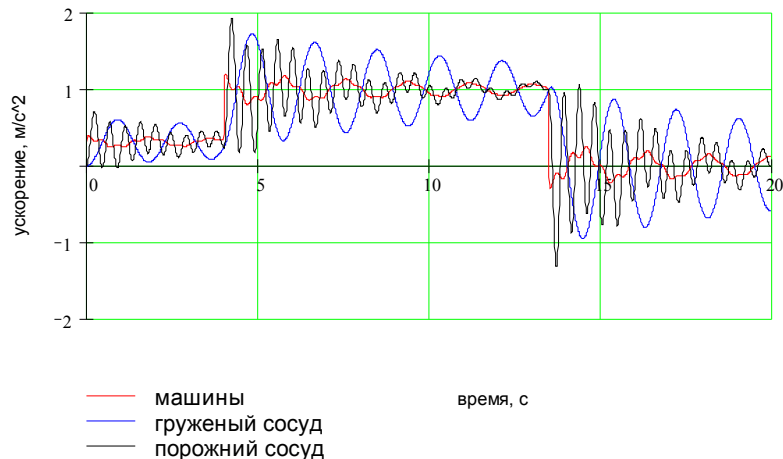


Рис. 7.9. Ускорение элементов установки ( $t_0 = t_2 = t_4 = 0$ ).

Видно, что в системе формируются большие колебания. Амплитудные значения замедлений сосудов превышают замедление машины почти в два раза.

Рассмотренные динамические процессы промоделированы при допущении, что электромагнитная постоянная времени двигателя  $\tau = 0$ .

Если учесть, что электромагнитная постоянная времени электродвигателя  $\tau = 2$  с, то при прежнем задании, усилие электродвигателя будет формироваться с запаздыванием (рис. 7.10). Такое плавное приложение движущего усилия к машине не сформирует

дополнительных динамических нагрузок. Однако, как видно, из рис. 7.11, увеличивает длительность периода разгона, примерно, на 5 с, что приведет к уменьшению производительности установки.

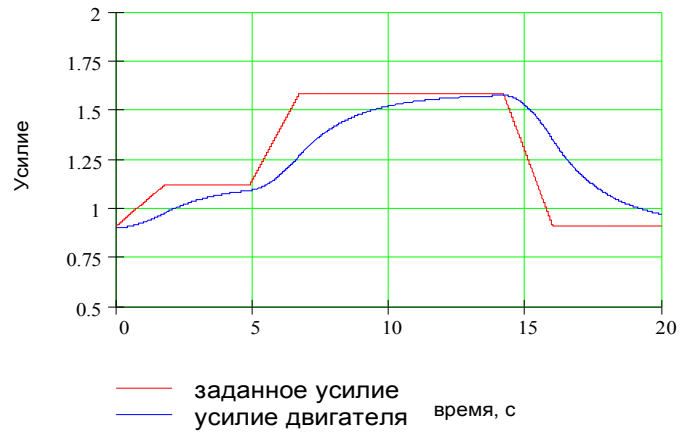


Рис. 7.10. Усилие двигателя с учетом электромагнитной постоянной времени ( $\tau = 2$  с)

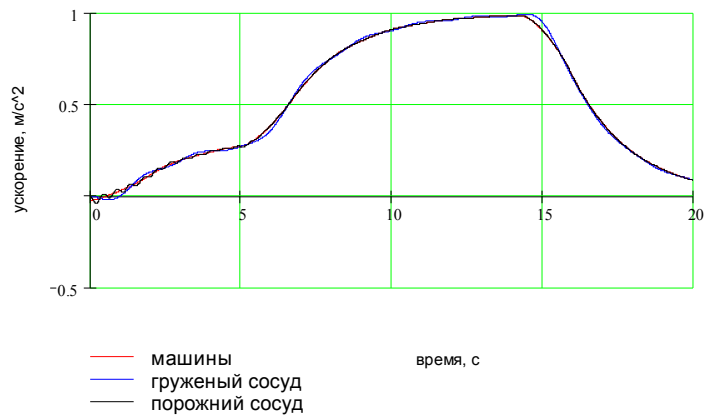


Рис. 7.11. Ускорения элементов установки с учетом электромагнитной постоянной времени

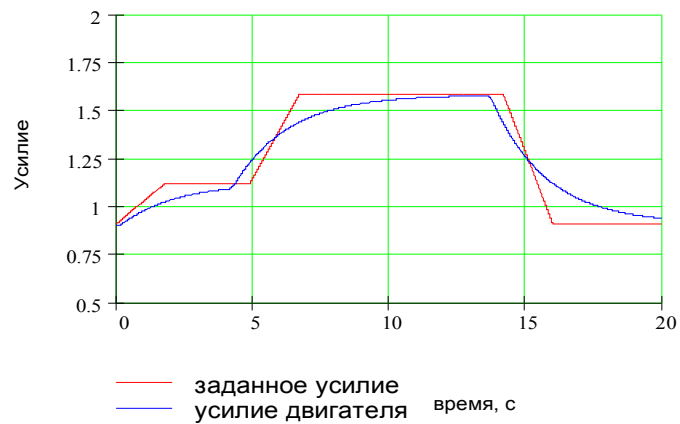


Рис. 7.12. Закон формирования движущего усилия ( $\tau = 2$  с,  $T_y = 0,2$  с)

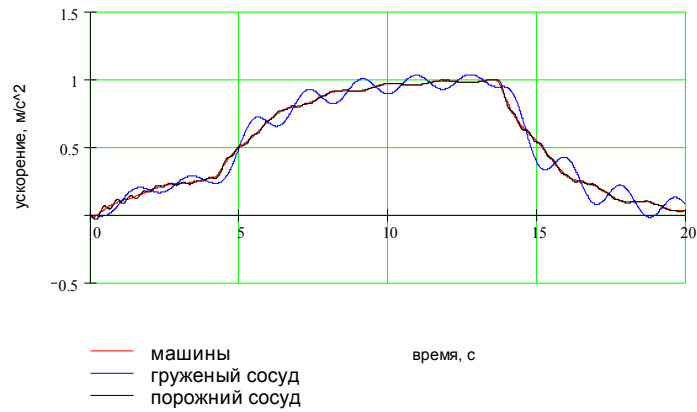


Рис. 7.13. Ускорение элементов установки ( $\tau = 2$  с,  $T_y = 0,2$  с)

Компромиссное предложение - формирование такого движущего усилия, которое с учетом электромагнитной постоянной времени, было бы близким к закону, показанному на рис. 7.3. На рис. 7.12 показаны заданное усилие и усилие двигателя, полученное при  $\tau = 2$  с, а  $T_y = 0,2$  с. В этом случае усилие, развиваемое электродвигателем приближено к заданному. Графики переходного процесса показаны на рис. 7.13. Видно, что при таком законе формирования движущего усилия в груженой ветви появляются незначительные колебания ускорения.

#### 7.4. ВЛИЯНИЕ ОТКЛОНЯЮЩИХ ШКИВОВ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ В КАНАТАХ ГРУЗОПОДЪЕМНОЙ МАШИНЫ

Задачу о влиянии отклоняющих шкивов на динамические нагрузки в канатах грузоподъемных машин рассмотрим на примере шахтной подъемной установки.

Данные шкивы предназначены для увеличения угла обхвата шкива трения многоканатной машины и для рационального расположения сосудов в стволе шахты.

Для одноканатных подъемных установок копровые шкивы выполняют функцию направляющих для канатов.

В переходных режимах массы шкивов могут сформировать динамический процесс, который вызывает проскальзывание канатов по этим шкивам, а на многоканатных подъемных установках - скольжение канатов по футеровке канатопроводящего шкива. Многие отклоняющие шкивы выполняются без футеровки, поэтому скольжение канатов вызывает дополнительный их износ. При исследовании влияния отклоняющих шкивов на динамику машины шахтную подъемную установку можно представить механической системой с пятью сосредоточенными массами, соединенными вязкоупругими канатами. Принципиальная схема такой установки приведена на рис. 1.3. Силы упругости, обусловленные динамической деформацией канатов определяются [70]

$$\begin{cases} F_{\partial y} = \mu_y (x'_{uy} - y') + c_y (x_{uy} - y); \\ F_{\partial uy} = \mu_{cy} (x' - x'_{uy}) + c_{cy} (x - x_{uy}); \\ F_{\partial uz} = \mu_{cz} (x'_{uz} - x) + c_{cz} (x_{uz} - x); \\ F_{\partial z} = \mu_z (z' - x'_{uz}) + c_z (z - x_{uz}). \end{cases} \quad (7.12)$$

По аналогии с (7.7) можно записать систему дифференциальных уравнений, характеризующих динамический процесс шахтной подъемной установки

$$\begin{cases} m_y y'' = F_{\partial y} - P_y \operatorname{sign} y'; \\ m_{uy} x''_{uy} = F_{\partial uy} - F_{\partial y} - P_{uu} \operatorname{sign} x'_{uy}; \\ m_x x'' = F_{\partial uz} - F_{\partial uy} + F_{\partial \delta} - F_{cm} - F_m; \\ m_{uz} x''_{uz} = F_{\partial z} - F_{\partial uz} - P_{uu} \operatorname{sign} x'_{uz}; \\ m_z z'' = -F_z - P_z \operatorname{sign} z'. \end{cases} \quad (7.13)$$

Силы вредного сопротивления  $P_y$ ,  $P_{uu}$  и  $P_z$  принимаются постоянными и характеризуются функцией Кронеккера, учитывающей изменение знака этой силы при изменении скорости.

На рис. 7.14 показаны процессы предохранительного торможения при подъеме груза подъемной установки, одного из калийных рудников Урала. На фоне тормозного усилия  $F_m$ , скорости машины  $x'$  приведены замедления сосуда  $y''$  и шкива  $x''_{uy}$  (см. рис. 7.14, а). При подаче сигнала на торможение замедление шкива колеблется с высокой частотой. Собственная частота колебаний шкива зафиксирована после остановки органа навивки. Показаны скорость груженого сосуда  $y'$  и динамические составляющие усилий в канатах груженой и порожней ветвей у сосудов  $F_{\partial y}$ ,  $F_{\partial z}$  и в канатах струн  $F_{\partial uy}$ ,  $F_{\partial uz}$ , т. е. у барабанов (см. рис. 7.14, б).

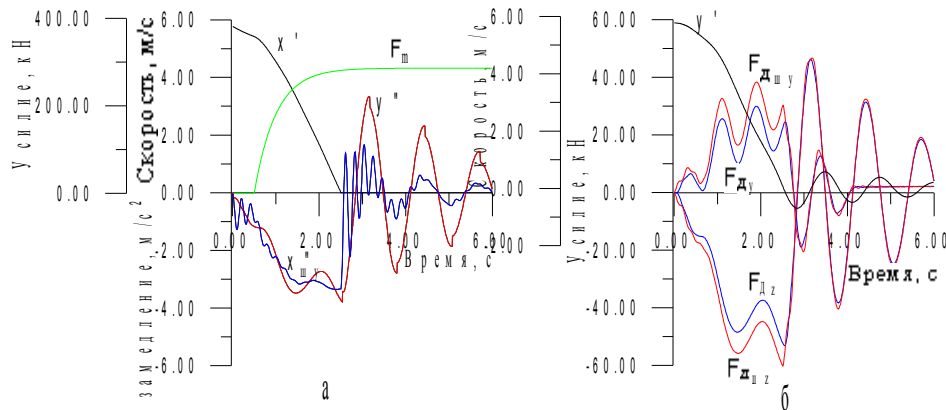


Рис. 7.14. Процесс предохранительного торможения при подъеме груза

Динамические составляющие у органов навивки больше таковых у сосудов на величину  $m_{uy}x''_{uy}$  и  $m_{uz}x''_{uz}$ .

Укрупненную оценку возможности проскальзывания канатов по отклоняющим шкивам можно произвести из следующих рассуждений. Сила, вызывающая скольжение канатов и равная разности полных натяжений каната до и после шкива

$$F_{ck} = m_{uy}y''.$$

Из рис. 7.14, а видно, что замедление сосуда  $y''$  и шкива  $x''_{uy}$  можно принять равными. Тогда, используя соотношение Эйлера [66], условие нескольжения каната по шкиву можно записать

$$\left[ qm_y + (m_y + m_{uy})y'' \right] (e^{\alpha f} - 1) \geq m_{uy}y''$$

или

$$\frac{m_{uy}}{m_y} \leq \left[ \left( \frac{q}{y''} - 1 \right) (1 - e^{-\alpha f}) \right].$$

При угле обхвата  $\alpha = 0,75\pi$  и коэффициенте трения каната по шкиву  $f = 0,2$ , при  $y'' = 5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$  для того, чтобы не было скольжения каната по шкиву необходимо  $\frac{m_{uy}}{m_y} \leq 0,376$ .

Предельное значение мгновенного замедления  $[a]$ , при котором отсутствует проскальзывание каната по шкиву, будет

$$[a] \leq q \frac{m_y (1 - e^{-\alpha f})}{m_{uy} + m_y (1 - e^{-\alpha f})}.$$

Для установки, характеристики динамического процесса которой приведены на рис. 7.14, отношение масс  $\frac{m_{uy}}{m_y} = 0,314$ , при этом предельное замедление  $[a] = 5,34 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ .

Численное моделирование динамических процессов предохранительного торможения шахтных подъемных установок показывает, что скольжение канатов по шкиву, в принципе, возможно. Для предотвращения этого нежелательного процесса необходимо уменьшить амплитуды колебаний замедлений.

#### 7.5. СКОЛЬЖЕНИЕ КАНАТОВ ПО ФУТЕРОВКЕ БАРАБАНА МНОГОКАНАТНОЙ ПОДЪЕМНОЙ УСТАНОВКИ

Современные многоканатные подъемные установки рассчитаны для подъема полезного груза массой 50 т с глубины до 1600 м [69]. Эти установки являются практически единственным транспортным средством для подъема полезного ископаемого с больших глубин.

При их эксплуатации, хотя они и обладают несомненными достоинствами, возникает ряд сложных проблем, одна из которых - скольжение канатов по футеровке.

Различают два вида скольжения канатов.

1. Скольжение за счет упругих сил. Этот вид скольжения обусловлен тем, что по дуге обхвата шкива натяжение каната изменяется от  $F_1$  до  $F_2$ . Здесь  $F_1$  и  $F_2$  - натяжения грузовой и порожней ветвей, Н.

2. Скольжение за счет большой разности полных натяжений грузовой и порожней ветвей, а также за счет недостаточной силы трения. Причинами этого вида скольжения могут быть динамические процессы при разгоне и торможении машины.

Первый вид скольжения - естественный, обусловленный качеством свивки и конструкцией канатов и присутствует всегда. Второй вид, для безопасной эксплуатации шахтного подъема, недопустим.

В основу оценки возможности скольжения канатов по футеровке барабана положена формула Эйлера, полученная для каната, намотанного на кнехт, для удержания судна [66]. По этой формуле скольжение канатов в сторону большего натяжения не произойдет, если соблюдается условие

$$F_1 \leq F_2 e^{\alpha f},$$

где  $\alpha$  - угол обхвата канатами барабана трения, рад;  $f$  - коэффициент трения канатов по футеровке.

Соотношение Эйлера любопытно тем, что было получено в эпоху, когда научные представления о трении только зарождались.

Из формулы Эйлера определяется максимальная разность натяжений, при которой не будет скольжения

$$F_1 - F_2 \leq F_2 (e^{\alpha f} - 1).$$

Обычно полное натяжение грузовой ветви  $F_1$  больше полного натяжения порожней ветви  $F_2$ . Однако при интенсивном торможении при подъеме груза могут быть случаи, когда за счет динамических нагрузок порожняя ветвь имеет натяжение больше, чем грузевая. Поэтому при моделировании процессов скольжения по футеровке барабана необходимо определять максимальное и минимальное натяжения ветвей. Тогда условие нескольжения канатов по футеровке можно записать

$$F_{\max} - F_{\min} \leq F_{\min} (e^{\alpha f} - 1), \tag{7.14}$$

Отношение этих величин характеризует коэффициент безопасности противоскольжения

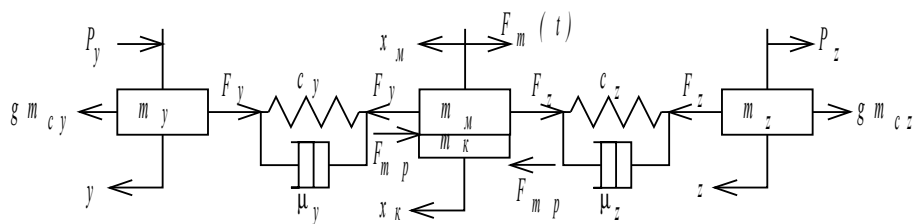
$$\sigma = \frac{F_{\min} (e^{\alpha f} - 1)}{F_{\max} - F_{\min}}, \tag{7.15}$$

В этом уравнении скольжение наступает тогда, когда сила трения становится меньше разности натяжений, т. е. при  $\sigma \leq 1$ .

В соответствии с требованиями правил безопасности коэффициент противоскольжения при статических нагрузках  $\sigma_{cm} \geq 1,25$ , а с учетом динамических нагрузок  $\sigma_{din} \geq 1,75$  [60].

При отсутствии скольжения канатов массы машины и канатов, лежащих на футеровке барабана трения, перемещаются как одна материальная точка. Эквивалентную схему многоканатной подъемной установки, в этом случае, можно представить следующим образом (рис. 7.15).

Рис. 7.15.



Эквивалентная схема при торможении многоканатной подъемной установки

- На этом рисунке дополнительно к схеме, показанной на рис. 1.3, обозначены:
- $m_y$  - эквивалентная масса, сосредоточенная у грузевого сосуда, кг;
- $m_m$  - приведенная к барабану масса вращающихся частей машины, кг;
- $m_k$  - масса канатов, сосредоточенная на барабане кг;
- $m_z$  - эквивалентная масса, сосредоточенная у порожнего сосуда, кг;
- $F_m(t)$  - тормозное усилие, Н;
- $F_{mp}$  - сила трения канатов по футеровке барабана, Н;
- $F_y$  - полное натяжение грузовой ветви, Н;
- $F_z$  - полное натяжение порожней ветви, Н.

Используя принцип Даламбера, механическую систему, показанную на рис. 7.15, можно характеризовать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m_y y'' = -F_y + gm_{cy} - P_y; \\ (m_m + m_k)x'' = F_y - F_z - F_m(t); \\ m_z z'' = F_z - gm_{cz} - P_z. \end{cases} \quad (7.16)$$

Силы упругости с учетом статических нагрузок равны:

$$\begin{aligned} F_y &= gm_{cy} - c_y(x - y) - \mu_y(x' - y'); \\ F_z &= gm_{cz} + c_z(x - z) + \mu_z(x' - z'). \end{aligned}$$

До момента начала скольжения силы трения, приложенные к массе канатов и к массе машины, направлены встречно и уравновешивают друг друга.

При нарушении условия (7.14) разность натяжений ветвей канатов больше силы трения, поэтому начинается процесс скольжения.

Рассмотрим схему, показанную на рис. 7.16. Допустим, до точки 0 массы канатов и барабана двигались как одно материальное тело.

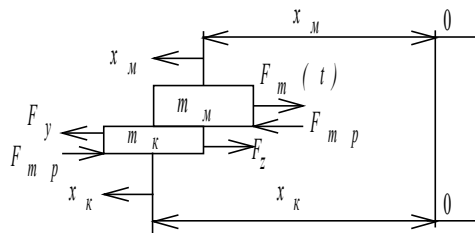


Рис. 7.16. Схема, характеризующая скольжение канатов.

В точке 0 начался процесс скольжения в направлении большего натяжения канатов  $F_y$ . За какой-то промежуток времени точка, в которой сосредоточена масса  $m_m$ , переместится на величину  $x_m$ . За это время, точка в которой сосредоточена эквивалентная масса канатов  $m_k$  переместится на расстояние  $x_k$ . Следовательно, масса  $m_k$  переместится относительно массы  $m_m$  на величину  $x_k - x_m$ , поэтому движение масс необходимо рассматривать как сложное: движение массы канатов относительно массы машины – относительное, массы машины относительно нулевой координаты – переносное, массы каната относительно нулевой координаты - абсолютное.

Механическая система будет характеризоваться уравнениями

$$\begin{cases} m_y y'' = -F_y + gm_{cy} - P_y; \\ m_m x_m'' = F_{mp} - F_m(t); \\ m_k x_k'' = -F_z + F_y - F_{mp}; \\ m_z z'' = -F_z + gm_{cz} - P_z. \end{cases} \quad (7.17)$$

Если второе и третье уравнения системы сложить, то в правой части получим величину  $F_y - F_z - F_m(t)$ , поэтому

$$x'' = \frac{m_k}{m_m} x_k'' + \frac{m_m}{m_x} x_m''.$$

В момент наступления скольжения нарушается кинематическая связь между канатами и футеровкой барабана. Скорости витков канатов  $x'_k$  и машины  $x'_m$  отличаются, т. е. появляется относительная скорость скольжения  $\Delta x' = x'_k - x'_m$ .

Известно, что коэффициент трения  $f$  зависит от многих факторов, в том числе от скорости скольжения  $\Delta x'$ , температуры, удельного давления, влажности и др. [66]. В настоящих исследованиях принимались:

$$f = 0,25 = \text{const}; \quad f = 0,25 - 0,1(1 - e^{-\Delta x'}); \quad f = 0,25 - 0,05\Delta x'.$$

Для численного моделирования системы уравнений (7.16) и (7.17) решены методом Рунге-Кутты.

При появлении скольжения массы канатов отсоединяются от барабана. частоты колебаний канатов увеличиваются. Поэтому для численного решения процесса, с этого момента, следует уменьшить шаг интегрирования.

Условие нескольжения (7.14) является необходимым, но недостаточным. В процессе скольжения разность натяжений канатов может стать меньше силы трения. Коэффициент безопасности противоскольжения  $\sigma$ , определяемый уравнением (7.15) станет больше единицы. Однако скорости витков канатов  $x'_k$  могут быть больше скорости машины  $x'_m$  и процесс скольжения будет продолжаться до момента, пока эти скорости не сравняются.

В качестве объекта исследований принята многоканатная установка, имеющая массу сосуда  $m_{cy} = 31,5$  т; массу противовеса  $m_{cz} = 24$  т; массу машины  $m_m = 30$  т и высоту подъема 920 м.

На рис. 7.17 показан процесс предохранительного торможения машины при спуске груза. Сосуды находятся в середине ствола, поэтому частоты колебаний грузовой ветви и ветви противовеса примерно равны. Амплитудные значения замедлений в процессе торможения равны  $4 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ , а после остановки машины мгновенное замедление витков канатов достигает  $8 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ .

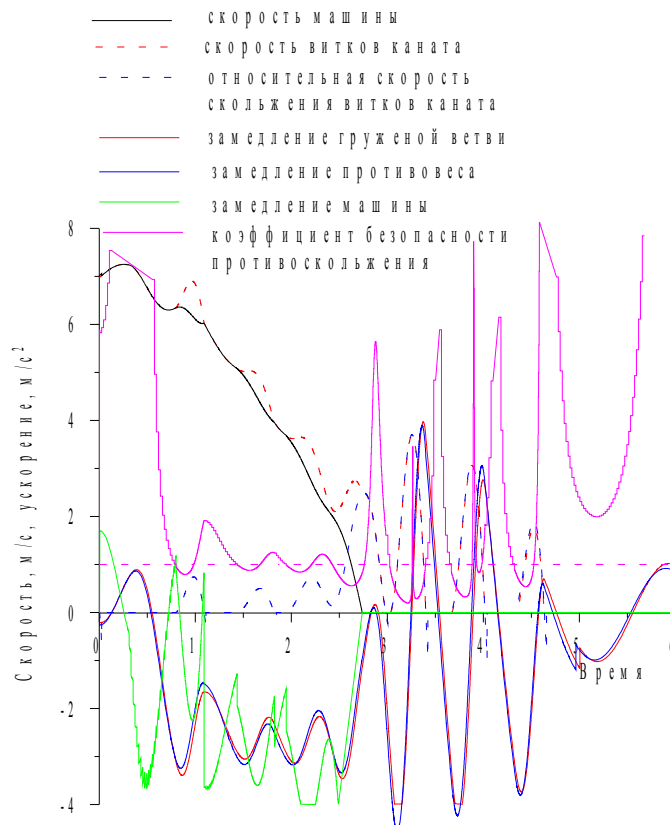




Рис. 7.17. Скорости, замедления и коэффициент безопасности

В эти моменты появляется скольжение канатов по футеровке барабана. Скорости витков канатов становятся больше скорости машины. Масса машины отделяется от системы канаты-сосуды, вследствие этого витки канатов имеют колебания высокой частоты. При проскальзывании канатов натяжение грузовой ветви уменьшается, а натяжение ветви противовеса увеличивается, это приводит к увеличению силы трения (коэффициента безопасности противоскольжения). Фрикционная связь между канатами и футеровкой машины восстанавливается. Затем процесс повторяется. После остановки машины витки канатов периодически проскальзывают по футеровке машины.

На рис. 7.18 показаны характеристики нарастания тормозного усилия и натяжения грузовой ветви и ветви противовеса. Рассмотренный процесс показывает, что при предохранительном торможении в ветвях канатов формируется колебательный процесс в результате которого появляется скольжение канатов по футеровке машины.

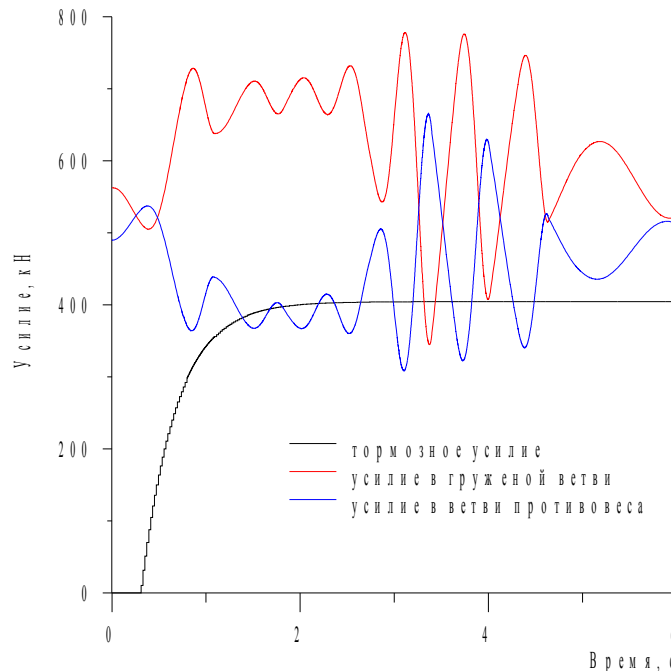


Рис. 7.18. Тормозное усилие и натяжения ветвей канатов

Для предотвращения возможного скольжения канатов в практике эксплуатации многоканатных подъемных установок используется ряд известных мероприятий [70].

Одним из возможных путей предотвращения скольжения является демпфирование колебаний в процессе торможения машины.

В разделе 5.6 была рассмотрена система автоматического регулирования, способная задемпфировать колебания при торможении машины. Суть ее - формирование закона нарастания тормозного усилия с сигналом, пропорциональным разности скоростей машины и сосуда ( $x' - y'$ ). Математическое моделирование динамических процессов позволяет выполнить компьютерный синтез закона управления тормозом, реализация которого демпфирует колебания сосудов и предотвращает возможность проскальзывания канатов по футеровке барабана.

На рис. 7.19 приведены динамические характеристики процесса предохранительного торможения подъемной установки, оборудованной системой регулирования, способной задемпфировать колебания. Из этих характеристик видно, что регулируемое тормозное

усилие, получаемое в результате компьютерного синтеза, не существенно отличается от нерегулируемого, но практически, полностью демпфирует колебания конечных масс. В результате, максимальные значения замедлений не превышают  $2,5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Уровень динамических нагрузок уменьшается, что приводит к предотвращению скольжения витков канатов по футеровке барабана. Надежность сцепления канатов с футеровкой барабана характеризуется коэффициентом безопасности противоскольжения.

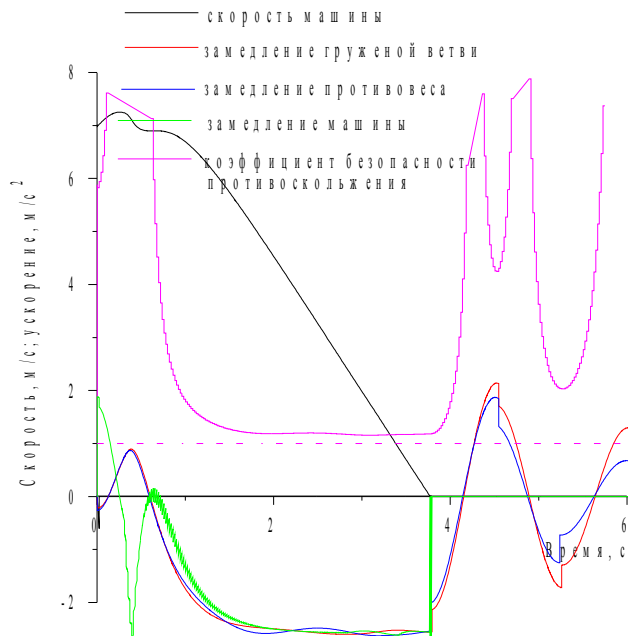


Рис. 7.19. Скорости, замедление и коэффициент безопасности при регулируемом предохранительном торможении

После остановки машины концевые массы совершают свободные колебания. Характерные изломы замедлений объясняются силами трения. Характеристики тормозных усилий и натяжений канатов показаны на рис. 7.20.

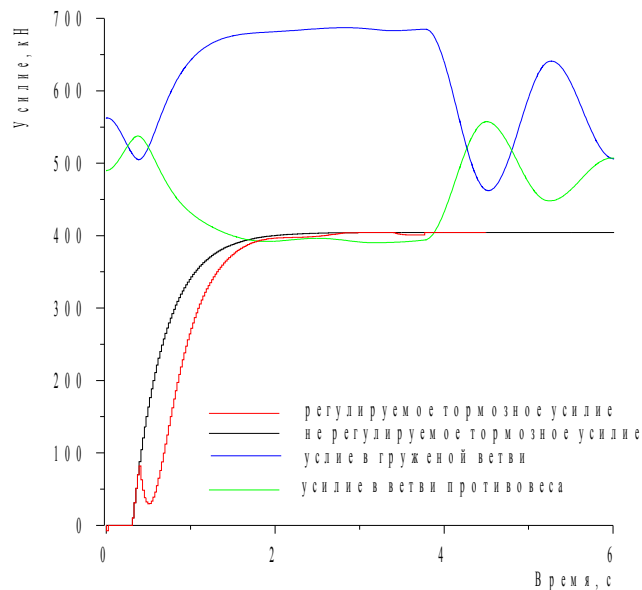


Рис. 7.20. Тормозные усилия и натяжения канатов при регулируемом предохранительном торможении

Следует отметить, что регулируемая тормозная характеристика может быть реализована на действующих машинах. Время процесса увеличилось на 0,8 с. Таким образом, реализация систем регулируемого предохранительного торможения позволит задемпфировать колебательный процесс, что приведет к предотвращению возможного скольжения канатов по футеровке барабана и тем самым - к повышению надежности и безопасности эксплуатации машин.

## 8. ДИНАМИКА МАШИН С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССЫ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

В рассмотренных ранее задачах подъемные канаты принимались упругими невесомыми элементами, массы которых с помощью метода Рэлея приводились к сосредоточенным. Скорость распространения упругой волны в канате приблизительно равна  $4000 \text{ мс}^{-1}$ . При малых длинах канатов упругая волна достигает противоположного конца в течение малого промежутка времени. Это обосновывает одно из основных допущений, принятых при решении задач динамики системы с сосредоточенными массами, в которых считается, что упругая волна распространяется мгновенно вдоль каната (стержня).

У современных шахтных подъемов высота подъема более 1000 м, а длины ленточных конвейеров достигают 2900 м, поэтому время распространения упругих волн существенно и пренебрегать им нельзя. Движение отдельных сечений следует рассматривать более строго, а именно, учитывать, что массовые и деформационные характеристики распределены по длине упругого элемента.

В настоящем разделе рассматривается класс задач, в которых исследуются только продольные колебания. Для многоканатного подъема все канаты заменены - одним эквивалентным, деформация которого подчиняется закону Гука, и, в соответствии с гипотезой Фойгта, напряжение, возникающее в канате, характеризуется уравнением (1.8) [30, 48]. Начало решения подобного класса задач положено в работах академиков А.Н. Крылова [49], С.П. Тимошенко [79]. основополагающими исследованиями динамики подъемного каната являются работы академиков А.Д. Динника [40], Г.Н. Савина [62, 64] и профессора Ф.В. Флоринского [84].

### 8.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 8.1. Канат длиной  $l$  жестко закреплен в верхнем сечении, а нижнем - к канату подвешен груз массой  $m$ . Выделим на расстоянии  $x$

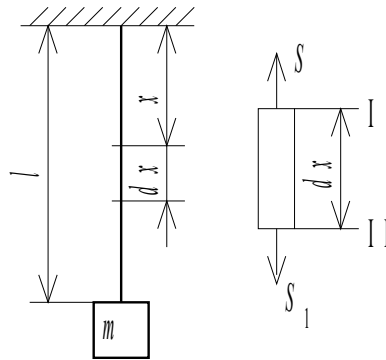


Рис. 8.1. Расчетная схема массы подвешенной на канате

элементарный участок каната  $dx$ . Допустим, что к сечениям каната I и II приложены силы упругости  $S$  и  $S_1$ . Тогда  $\partial S = S_1 - S$ . Разность усилий  $S$  и  $S_1$  обусловлена, с одной стороны, весом элементарного участка  $gp dx$ , а с другой - волновым процессом, характеризующим распределение усилий вдоль каната, поэтому

$$S_1 = S + gpdx + \frac{\partial S}{\partial x} dx, \quad (8.1)$$

здесь  $p$ - линейная плотность каната,  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1}$ .

Если обозначить через  $v$  перемещение сечения  $dx$  и допустить, что верхний конец каната имеет ускорение  $j(t)$ , то величина  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  будет относительным ускорением участка, а абсолютное ускорение участка с координатой  $x$  равно  $j(t) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ .

Используя принцип Даламбера - Лагранжа [76], дифференциальное уравнение, характеризующее движение элементарного участка, запишем

$$p dx [j(t) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}] = S_1 - S. \quad (8.2)$$

Представим канат как вязкоупругий элемент, в котором полное напряжение равно сумме напряжений от упругой деформации и от сил вязкого сопротивления. В соответствии с гипотезой Фойхта [30] упругая деформация подчиняется закону Гука, а напряжение от сил вязкого сопротивления пропорционально скорости деформации, поэтому полное напряжение в соответствии с уравнением (1.8) можно представить

$$\sigma = E\varepsilon + E\mu_\kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

где  $\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x}$  - относительное удлинение каната (относительная деформация);

$\mu_\kappa$  - коэффициент, характеризующий диссипативные свойства каната, с. Параметры  $E$  и  $\mu$  характеризуют физико-механические свойства каната и рассмотрены в разделах 1.3.1 и 1.3.2.

Если умножить правую и левую части последнего равенства на  $F$  (площадь поперечного сечения всех проволок в канате), получим

$$S = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.3)$$

Продифференцируем это уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial x} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Подставив значение  $\frac{\partial S}{\partial x}$  в (8.1), уравнение (8.2) запишем как

$$p dx [j(t) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}] = g p dx + EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

Разделив все члены уравнения на  $p dx$ , получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = g - j(t), \quad (8.4)$$

где  $a^2 = \frac{EF}{\rho}$  - квадрат скорости распространения упругой волны,  $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ .

Как было отмечено, величина  $v$  характеризует перемещение элементарного участка каната с координатой  $x$ , которое равно сумме удлинений от статических и динамических нагрузок, т. е.

$$v = v_0 + u, \quad (8.5)$$

где  $v_0$  - деформация каната под действием статических нагрузок, м;

$u$  - деформация каната под действием динамических нагрузок, м.

Если рассматривать свободно висющий канат, то статическое удлинение элементарного участка каната  $dx$  будет происходить под действием силы от веса каната длиной  $l-x$ , поэтому

$$dv_0 = \frac{gp(l-x)}{EF/dx}$$

или

$$v_0 = g \frac{p}{EF} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

при  $x = l$ ,  $v_0 = g \frac{m_{\kappa}}{2 \frac{EF}{l}}$ ,

где  $m_{\kappa} = \rho l$  - масса каната, кг;

$$\frac{EF}{l} = c - \text{жесткость каната, Н} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Последнее уравнение показывает, что статическое удлинение каната можно получить из следующей идеализированной схемы:

◆ Канат можно представить невесомой пружиной, к концу которой приложена сила, равная половине веса каната.

◆ Канат можно представить невесомой пружиной, к середине которой приложена сила, равная полному весу каната.

Если на конце каната висит сосредоточенная масса  $m$ , то статическое удлинение каната равно

$$v_0 = g \left[ \frac{p}{EF} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{m}{EF} x \right]. \quad (8.6)$$

Подставив (8.6) в (8.5) и дважды продифференцировав по  $t$  и по  $x$ , получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{gp}{EF}.$$

Тогда уравнение (8.4) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -j(t). \quad (8.7)$$

Если канат представить упругим элементом ( $\mu_\kappa = 0$ ), верхний конец которого неподвижен, то получим классическое волновое уравнение [47, 59]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8.8)$$

Задачи динамики шахтного подъемного каната являются типичными для задач математической физики, решение которых зависит от краевых условий. Краевыми условиями называется совокупность начальных и граничных условий [59]. Начальные условия характеризуют состояние системы в заданный момент времени, например при  $t = 0$ . Граничные условия указывают значение кинематических или силовых параметров в заданных сечениях каната.

Таким образом краевые условия определяются физической постановкой задачи и могут иметь разнообразный характер, в частности они могут быть и нелинейными.

## 8.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАШИН В ОБЩЕМ ВИДЕ

Рассмотрим свободные колебания каната. Уравнением, характеризующим свободные колебания каната, будет зависимость (8.7) при  $j(t) = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8.9)$$

Уравнение (8.9) решается методом разделения переменных (метод Фурье), являющимся типичным для решения задач математической физики [59]. Существо метода состоит в представлении искомого решения в виде ряда Фурье по некоторой ортогональной системе функций, связанных с рассматриваемой задачей.

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение уравнения (8.9) в виде произведения двух функций  $X(x)$  и  $T(t)$ , из которых первая зависит только от  $x$ , а вторая только от  $t$ .

В этой интерпретации

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (8.10)$$

Подставляя (8.10) в (8.9), получим

$$X(x)\ddot{T}(t) = a^2 \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) T(t)X''(x).$$

Или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{a^2 \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) T(t)}. \quad (8.11)$$

В левой части выражения (8.11) стоит функция, независящая от  $t$ , а в правой –

независящая от  $x$ . Это равенство возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т. е. равны постоянному числу. Обозначим это число через  $-\kappa^2$  ( $\kappa^2 > 0$ ), тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{a^2(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t})T(t)} = -\kappa^2. \quad (8.12)$$

Из этих равенств получаются два уравнения:

$$\begin{cases} X''(x) + \kappa^2 X(x) = 0; \\ \ddot{T}(t) + \kappa^2 a^2 \mu_\kappa \dot{T}(t) + \kappa^2 a^2 T(t) = 0. \end{cases}$$

Обозначив  $\kappa^2 a^2 = b^2$ ;  $\kappa^2 a^2 \mu_\kappa = b^2 \mu_\kappa = 2\mu$ , получим

$$\begin{cases} X''(x) + \kappa^2 X(x) = 0; \\ \ddot{T}(t) + 2\mu \dot{T}(t) + b^2 T(t) = 0. \end{cases} \quad (8.13)$$

Корни характеристических уравнений (8.13)

$$r_x = \pm \kappa \sqrt{-1}; \quad r_t = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - b^2}.$$

Для реальных канатов  $b > \mu$  всегда, поэтому корни уравнений комплексные, и, следовательно, общими решениями однородных уравнений (8.13) будут [31]

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos \kappa x + B \sin \kappa x; \\ T(t) &= e^{-\mu t} (C \cos \omega t + D \sin \omega t), \end{aligned} \quad (8.14)$$

где  $\omega = \sqrt{b^2 - \mu^2}$  – частота затухающих колебаний,  $\text{с}^{-1}$ .

Коэффициент  $\mu$ , характеризующий затухание колебаний, в соответствии с (3.10) связан с логарифмическим декрементом колебаний соотношением  $\mu = \frac{\delta}{2\pi} b$ .

Постоянные интегрирования  $A, B$  определяются из граничных условий, т. е. из значений кинематических или силовых параметров в заданных сечениях каната. Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определяются из начальных условий, т. е. из условий, которые характеризуют состояние системы в заданный момент времени.

Ниже будет показано, что значения  $\kappa$  являются корнями трансцендентного уравнения, при этом, каждая гармоника  $j$  имеет свое значение  $\kappa_j$ , а, следовательно, и определенные коэффициенты  $\mu_j$  и  $\omega_j$ .

Поэтому уравнение (8.10) следует записать

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) T_j(t). \quad (8.15)$$

С учетом (8.14) последнее уравнение будет



$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos \kappa_j x + B_j \sin \kappa_j x) e^{-\mu_j t} (C_j \cos \omega_j t + D_j \sin \omega_j t). \quad (8.16)$$

Ряд (8.16) будет решением уравнения (8.9) только в том случае, если коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$  таковы, что этот ряд сходится и сходятся ряды, получающиеся после двукратного по членному дифференцирования по  $x$  и по  $t$  [59].

### 8.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ МАШИН

Было отмечено, что значения  $\kappa_j$ , это корни трансцендентного уравнения, которое получается из граничных условий. В свою очередь, граничные условия формулируются в зависимости от конструкции машины и режима ее работы. Для упрощения решения задачи примем, что канаты одинакового типоразмера, поэтому для всех канатов модуль упругости  $E$ , линейная плотность  $p$  и площадь сечения  $F$  одинаковы.

#### 8.3.1. ВЕТВЬ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕГО КАНАТА

Ветвь уравнивающего каната может быть представлена эквивалентной схемой, показанной на рис. 8.2. Верхний конец уравнивающего каната присоединен к сосуду, а точка  $M$ , соответствующая нижнему положению петли, находится в свободном состоянии.

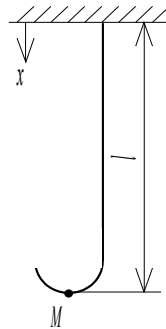


Рис. 8.2. Эквивалентная схема уравнивающего каната

Для этой схемы можно сформулировать граничные условия:

♦ Деформация в верхнем сечении уравнивающего каната под действием динамических нагрузок в любой момент времени равна нулю, т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad u(0, t) = 0.$$

♦ Сила упругости  $S$  в нижнем сечении каната всегда равна нулю. На основании уравнения (8.3) можно записать

$$\text{при } x = l; \quad S = EF(1 + \mu_{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Первое граничное условие, на основании уравнения (8.15) может быть выполнено только при  $X_j(0) = 0$ . Подставив это значение в первое уравнение системы (8.14), получим  $A_j = 0$ .

Второе граничное условие может быть выполнено при  $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$ .

Так как  $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = X'(l)T(t)$ , то для того, чтобы сила упругости в нижнем сечении всегда была равна нулю, необходимо чтобы  $X'(l) = 0$ , т. е.

$$-A_j \kappa_j \sin \kappa_j l + B_j \kappa_j \cos \kappa_j l = 0,$$

значит  $B_j \kappa_j \cos \kappa_j l = 0$ . Введем обозначение  $\kappa_j l = \lambda_j$ , тогда  $B_j \kappa_j \cos \lambda_j = 0$ . Это соотношение справедливо при  $\cos \lambda_j = 0$ , ( $B_j \neq 0$ ,  $\kappa_j \neq 0$ ) т. е. при

$$\lambda_j = \frac{\pi}{2}(2j-1), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Величина  $\lambda_j$  - собственное число, а функция

$$X_j(x) = A_j \cos \lambda_j \frac{x}{l} + B_j \sin \lambda_j \frac{x}{l}$$

является фундаментальной функцией задачи. Для рассмотренного примера фундаментальная функция

$$X_j(x) = B_j \sin \lambda_j \frac{x}{l}. \quad (8.17)$$

Пример 8.1. Определить фундаментальные функции для ветви уравнивающего каната. В соответствие с уравнением (8.17) фундаментальные функции задачи будут

$$X_1(x) = \sin 0,5 \frac{\pi}{l} x; \quad X_2(x) = \sin 1,5 \frac{\pi}{l} x; \quad X_j(x) = \sin 0,5 \pi \frac{2j-1}{l} x.$$

Коэффициент  $B_j$  принят равным единице, так как согласно уравнению (8.16) произведения  $B_j C_j$  и  $B_j D_j$  дадут новые значения постоянных, величины которых определяются из начальных условий задачи.

### 8.3.2. МАССА, ПОДВЕШЕННАЯ НА КАНАТЕ

Эквивалентная схема массы, подвешенной на канате, показана на рис. 8.1. Эта схема соответствует режиму работы неуравновешенной подъемной установки после остановки органов навивки, т. е. условию, когда барабан подъемной машины застопорен, а сосуд, подвешенный на канате, совершает свободные колебания.

Граничные условия можно сформулировать следующим образом:

♦ Динамическая деформация в верхнем сечении каната равна нулю, т. е. при  $x = 0$ ;  $u(0, t) = 0$ ;

♦ Если масса  $m$  имеет ускорение  $\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2}$ , то динамическая составляющая силы в точке крепления каната к массе равна силе упругости и на основании уравнения (8.3) будет

$$\text{при } x = l \quad m \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} = -EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}.$$

По аналогии с рис. 8.2, первое граничное условие ( $x = 0$ ) дает значение  $A_j = 0$ .

Представляя  $\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} = \ddot{T}(t)X(l)$ ,  $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = X'(l)T(t)$ , последнее уравнение запишем

$$m\ddot{T}(t)X(l) = -EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t})X'(l)T(t).$$

Представим это уравнение в виде

$$-\frac{mp}{pEF(1+\mu_{\kappa}\frac{\partial}{\partial t})}\cdot\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=\frac{X'(l)}{X(l)}.$$

Из уравнения (8.12) нетрудно заметить, что первый член последней зависимости можно представить

$$\frac{m}{p}\kappa_j^2=\frac{X'(l)}{X(l)}. \quad (8.18)$$

Продифференцировав первое уравнение (8.14) и, имея в виду, что  $A_j=0$ , подставив в (8.18), получим

$$\frac{ml}{pl}\kappa_j^2=\frac{B_j\kappa_j\cos\kappa_jl}{B_j\sin\kappa_jl}.$$

Если ввести обозначение  $\alpha=\frac{m_{\kappa}}{m}$ , характеризующее соотношение масс каната и концевого груза, то получим хорошо известное трансцендентное уравнение [13]

$$\lambda_j\operatorname{tg}\lambda_j=\alpha. \quad (8.19)$$

Собственные числа задачи  $\lambda_j$  можно определить численным или графическим методом. На рис. 8.3 показана графическая зависимость  $\alpha=f\left(\frac{\lambda_j}{\pi}\right)$ , построенная по уравнению (8.19).

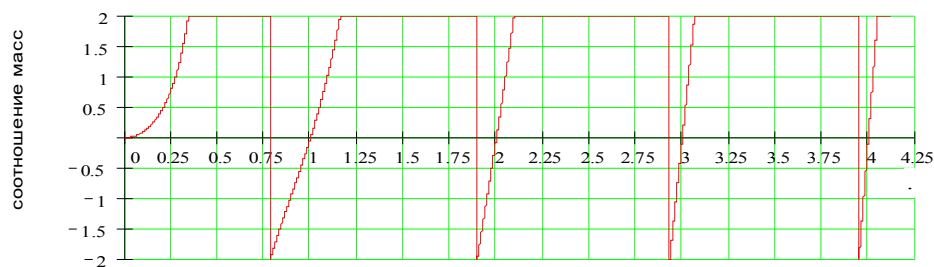


Рис. 8.3. Характеристики  $\alpha=f\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)$

Так как в этой зависимости присутствует тангенс, то, очевидно при значениях  $\lambda_j=0,5\pi; 1,5\pi; 2,5\pi\dots$  коэффициенты  $\alpha(\lambda_j)$  будут равны бесконечности.

Выясним значения коэффициента  $\alpha$ , которые соответствуют реальным машинам. Например, для шахтных подъемных установок, линейная плотность каната  $p$  определяется известным соотношением [33]

$$p = \frac{m}{h_{np} - h},$$

где  $h_{np}$  - прочная длина каната, м;

$h$  - максимальная длина отвеса каната, м.

Прочной длиной каната названа такая длина, при которой свободно подвешенный канат, не несущий никакой нагрузки, (кроме собственного веса), обладает в верхнем сечении запасом прочности, регламентируемым правилами безопасности. Эта величина зависит от качества материала проволок и допустимой величины статического запаса прочности. Для современных подъемных установок прочная длина каната равна 3000 - 4000 м. Так как величина  $ph = m_k$ , то из последнего уравнения получаем

$$\alpha = \frac{h}{h_{np} - h}. \quad (8.20)$$

На рис. 8.4 показана характеристика  $\alpha = f(h)$  при  $h_{np} = 3000$  м. Видно, что глубине  $h = 2000$  м соответствует коэффициент  $\alpha = 2$ .

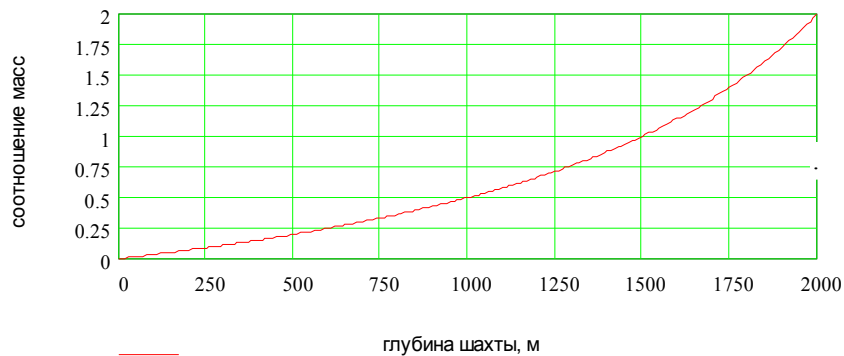


Рис. 8.4. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от глубины шахты

Современные многоканатные подъемные машины рассчитаны на подъем груза с глубины до 1600 м [69]. Этим объясняются ограничения  $-2,0 < \alpha < 2,0$ , введенные при построении зависимости, показанной на рис. 8.3. Соотношение  $\alpha = \infty$  соответствует установке, у которой масса концевого груза отсутствует (ветвь каната уравновешенного подъема), собственные числа при этом  $\lambda_j = \frac{\pi}{2}(2j - 1)$ .

График, характеризующий зависимость собственных чисел  $\lambda_1$  от соотношения масс  $\alpha$ , в более крупном масштабе приведен на рис. 8.5.

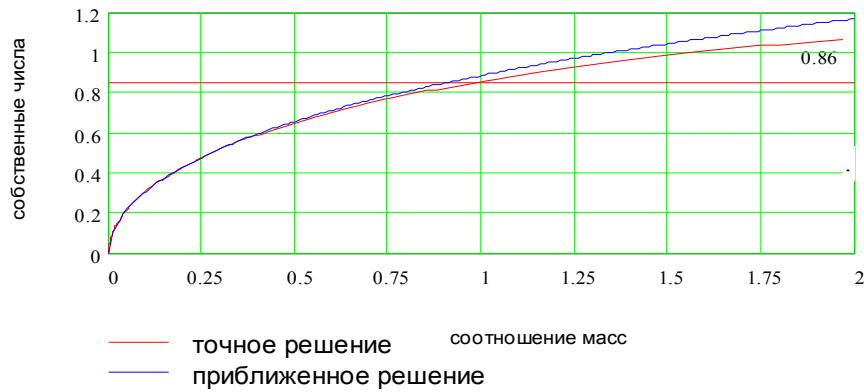


Рис. 8.5. Значения собственных чисел  $\lambda_1$  в зависимости от коэффициента  $\alpha$

Приближенно собственные числа первой гармоники можно определить, если  $\text{tg } \lambda_1$  разложить в ряд Тейлора [31]

$$\text{tg } \lambda_1 = \lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_1^3 + \frac{1}{5}\lambda_1^5 + \dots$$

Ограничиваясь двумя членами ряда, определяется приближенное значение

$$\lambda_1 = \sqrt{-1,5 + \sqrt{2,25 + 3\alpha}} \tag{8.21}$$

Эта характеристика показана на рис. 8.5 голубой линией. Видно, что при  $\alpha \leq 1,0$  значение собственных чисел для первой гармоники, вычисленные по точной и приближенной формулам, практически совпадают.

Так как коэффициент  $A_j = 0$ , то фундаментальная функция задачи будет такой же, как и для схемы, характеризующей динамику уравнивающего каната (уравнение 8.17)

$$X_j(x) = B_j \sin \lambda_j \frac{x}{l}$$

Пример 8.2. Определить фундаментальные функции системы "масса, подвешенная на канате", с коэффициентом  $\alpha = 1$ .

Из графика, приведенного на рис. 8.3 определяются приближенные значения  $\lambda_j$ . С помощью пакета Mathcad 7 задавая точностью, например, 0,001 организуется цикл с шагом 0,001 по вычислению функции  $f(\lambda_j) = 1 - \lambda_j \text{tg } \lambda_j$ . В момент изменения знака функции (исключая точки  $\pm \infty$ ), происходит остановка и запись величины  $\lambda_j$ , которая будет приближенным значением собственного числа. Приведем значения собственных чисел для  $\alpha = 0,74$  и  $\alpha = 1,0$

Собственные числа задачи

Наименование	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\alpha = 0,74$	0,7795	3,3665	6,4029	9,5056	12,6273
$\alpha = 1,0$	0,86	3,425	6,437	9,529	12,645

По аналогии с примером 8.1, принимая коэффициент  $B_j = 1$ , записываются фундаментальные функции.

### 8.3.3. МАССА, СОЕДИНЕННАЯ ДВУМЯ ВЕТВЯМИ КАНАТОВ

Схема, в которой масса соединена двумя ветвями канатов, характерна для уравновешенной подъемной установки. Эквивалентная схема при неподвижном органе навивки приведены на рис. 8.6.

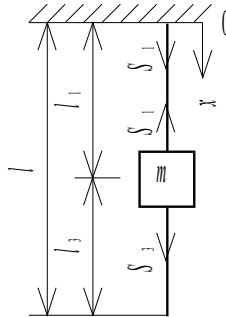


Рис. 8.6. Эквивалентная схема канатов уравновешенного подъема

Граничные условия для рассматриваемой задачи. Деформация в верхнем сечении головного каната в любой момент времени равна нулю, т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad u_1(0, t) = 0.$$

На массу  $m$  действует динамическая сила, которая уравновешена силами упругости  $S_1$  головного и  $S_3$  уравновешивающего канатов. При этом, если сила упругости головного каната увеличивается, то сила упругости уравновешивающего каната уменьшается. Поэтому

$$\text{при } x = l_1; \quad m \frac{\partial^2 u_3(l_1, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_3(l_1, t)}{\partial x} - EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x}.$$

Координаты перемещения канатов, прикрепленных к массе  $m$  равны, т. е.

$$\text{при } x = l; \quad u_1(l_1, t) = u_3(l_1, t).$$

Сила упругости в нижнем сечении уравновешивающего каната равна нулю,

$$\text{при } x = l_1 + l_3 = l; \quad S = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial x} = 0.$$

На основании первого граничного условия и первого уравнения системы (8.14), запишем:

при  $x = 0$ ;  $X_1(0, t) = 0$ ;  $A_1 = 0$ .

Используя соотношение (8.10), из которого

$$\frac{\partial^2 u_3(l_1, t)}{\partial t^2} = \ddot{T}(t) X_3(l_1); \quad \frac{\partial u_3(l_1, t)}{\partial x} = X_3'(l_1) T(t),$$

второе граничное условие дает

$$m \ddot{T}(t) X_3(l_1) = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) [X_3'(l_1) T(t) - X_1'(l_1) T(t)].$$

По аналогии с (8.18) получим

$$\frac{m}{p} (-\kappa_j^2) = \frac{X_3'(l_1) - X_1'(l_1)}{X_3(l_1)}.$$

Подставив функции  $X_1(l_1)$ ,  $X_1'(l_1)$ ,  $X_3'(l_1)$  (уравнение 8.14) и, учитывая, что  $A_1 = 0$ , последняя зависимость примет вид

$$\frac{m}{p} (-\kappa_j^2) = \frac{-A_3 \kappa_j \sin \kappa_j l_1 + B_3 \kappa_j \cos \kappa_j l_1 + A_1 \kappa_j \sin \kappa_j l_1 - B_1 \kappa_j \cos \kappa_j l_1}{A_3 \cos \kappa_j l_1 + B_3 \sin \kappa_j l_1}.$$

Вводя обозначения  $\frac{pl_1}{m} = \alpha_1$ ;  $\frac{pl_3}{m} = \alpha_3$ ;  $\kappa_j l_1 = \lambda_j$ , получим

$$-B_1 \frac{\alpha_1}{\lambda_j} + A_3 (1 - \frac{\alpha_1}{\lambda_j} \operatorname{tg} \lambda_j) + B_3 (\operatorname{tg} \lambda_j + \frac{\alpha_1}{\lambda_j}) = 0. \quad (8.22)$$

На основании третьего граничного условия можно записать

$$X_1(l_1) T(t) = X_3(l_1) T(t),$$

следовательно  $X_1(l_1) = X_3(l_1)$ .

Поэтому при  $A_1 = 0$ ;

$$B_1 \operatorname{tg} \lambda_j - A_3 - B_3 \operatorname{tg} \lambda_j = 0. \quad (8.23)$$

Из четвертого граничного условия сила упругости  $S$  может быть равна нулю, только при

$\frac{\partial u_3(l, t)}{\partial x} = 0$ . Эта величина равна  $X_3'(l) T(t) = 0$ . Так как для данной задачи сила упругости

всегда должна быть равна нулю, то  $X_3'(l) = 0$ , поэтому

$$-A_3 \operatorname{tg} (1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}) + B_3 = 0. \quad (8.24)$$

Таким образом, получены три алгебраических уравнения (8.22 ÷ 8.24), в которых для каждой гармоники имеется три неизвестных постоянных  $B_1$ ,  $A_3$ ,  $B_3$  и собственное число  $\lambda_j$ . Индекс  $j$ , при постоянных, для упрощения записи опущен.

Условием, при котором не все коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  одновременно равны нулю, является обращение в нуль определителя, полученного из уравнений (8.22 ÷ 8.24)

$$\begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{\lambda_j} & 1 - \frac{\alpha_1}{\lambda_j} \operatorname{tg} \lambda_j & \operatorname{tg} \lambda_j + \frac{\alpha_1}{\lambda_j} \\ \operatorname{tg} \lambda_j & -1 & -\operatorname{tg} \lambda_j \\ 0 & -\operatorname{tg} (1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}) \lambda_j & 1 \end{vmatrix} \quad (8.25)$$

Известно, что собственные числа определяются из характеристического уравнения, которое получается из характеристического определителя [13]. Если раскрыть характеристический определитель (8.25), то получим трансцендентное уравнение

$$\operatorname{ctg} \lambda_j - \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \lambda_j = \frac{\lambda_j}{\alpha_1}.$$

Это трансцендентное уравнение определяет значения собственных чисел  $\lambda_j$  в зависимости от параметров исследуемой системы. Для определения собственных чисел представим уравнение в виде

$$f(\lambda_j) = \operatorname{ctg} \lambda_j - \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \lambda_j - \frac{\lambda_j}{\alpha_1}. \quad (8.26)$$

Известно, что корни этого уравнения – это значения  $\lambda_j$ , при которых  $f(\lambda_j) = 0$ . Для заданных  $j$  и значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  с помощью пакета Mathcad 7 определяются значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$ .

Если в качестве второго граничного условия принять

$$\text{при } x = l_1; \quad m \frac{\partial^2 u_1(l_1, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_3(l_1, t)}{\partial x} - EF(1 + \mu_\kappa) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x},$$

то получим определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_j}{\alpha_1} \sin \lambda_j - \cos \lambda_j & -\sin \lambda_j & \cos \lambda_j \\ \sin \lambda_j & -\cos \lambda_j & -\sin \lambda_j \\ 0 & -\sin[(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}) \lambda_j] & \cos[(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}) \lambda_j] \end{vmatrix}.$$

Раскрытие этого определителя приводит к трансцендентному уравнению, корни которого имеют одинаковые значения, полученные при раскрытии определителя (8.25). Это



подтверждает правильность решения задачи. На рис. 8.7 показаны графики изменения функции  $f(\lambda_j)$  (первый вариант) и  $f_1(\lambda_j)$  (второй вариант). Видно, что эти функции равнозначны.

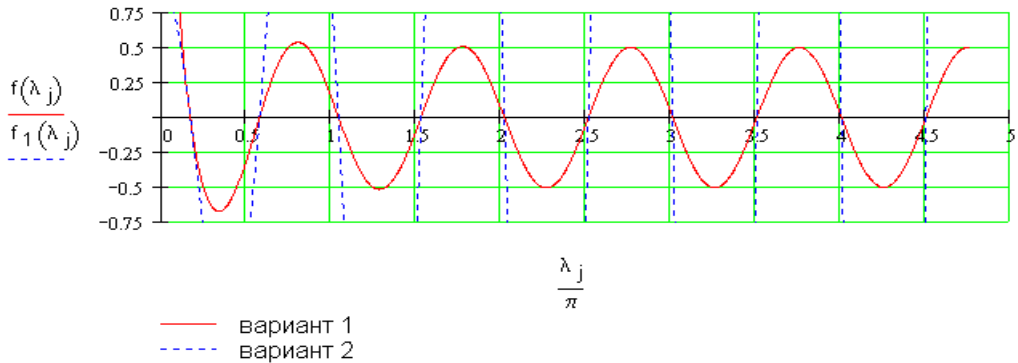


Рис. 8.7. Графики изменения функций  $f(\lambda_j)$  и  $f_1(\lambda_j)$  для ветвей канатов уравновешенного подъема  
 Таким образом, фундаментальными функциями для ветвей канатов уравновешенного подъема будут

$$\text{при } 0 \leq x \leq l_1 \quad X_{1j}(x) = B_{1j} \sin \lambda_j \frac{x}{l_1}, \quad (8.28)$$

$$\text{при } l_1 \leq x \leq l \quad X_{3j}(x) = A_{3j} \cos \lambda_j \frac{x}{l_1} + B_{3j} \sin \lambda_j \frac{x}{l_1}. \quad (8.29)$$

Пример 8.3. Определить фундаментальные функции задачи "ветвь канатов уравновешенного подъема", с данными, соответствующими многоканатной подъемной установки шахты им. 9 Пятилетки в Донбассе. Расчетная схема с данными установки приведены на рис. 8.12.

Пакет Mathcad 7 позволяет построить графическую характеристику значения определителей в зависимости от числа  $\lambda_j$ . Возможности пакета позволяют построить эти характеристики в любом желаемом масштабе и определить значения  $\lambda_j$  при которых определитель равен нулю. Точность  $\lambda_j$  может быть практически достигнута  $10^{-10}$ . Опуская процедуры вычислительных процессов приведем значения  $\lambda_j$  и коэффициентов  $A_{3j}$  и  $B_{3j}$  при  $B_{1j}$ . В табл. 8.1 приведены эти данные соответственно для начала, середины и конца подъема.

Таблица 8.1

Собственные числа  $\lambda_j$  и коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  ( $B_{1j} = 1$ )

Наименование		$A_{3j}$	$B_{3j}$
Начало подъема $l_1 = 945 \text{ м}, \alpha_1 = 0,78$ $l_2 = 15 \text{ м}, \alpha_3 = 0,012$	$\lambda_1 = 0,779$	0,494	0,5
	$\lambda_2 = 3,366$	0,215	0,061
	$\lambda_3 = 6,403$	0,117	0,026
	$\lambda_4 = 9,506$	0,08	0,019
	$\lambda_5 = 12,627$	0,06	0,016
Встреча сосудов $l_1 = 485 \text{ м}, \alpha_1 = 0,4$ $l_2 = 245 \text{ м}, \alpha_3 = 0,392$	$\lambda_1 = 0,506$	0,297	0,464
	$\lambda_2 = 3,263$	0,119	0,021
	$\lambda_3 = 6,346$	0,006	- 0,0002
	$\lambda_4 = 9,647$	0,043	- 0,005
	$\lambda_5 = 12,588$	0,032	- 0,006
Конец подъема $l_1 = 25 \text{ м}, \alpha_1 = 0,21$ $l_2 = 935 \text{ м}, \alpha_3 = 0,771$	$\lambda_1 = 0,151$	0,165	0,087
	$\lambda_2 = 3,151$	0,012	- 0,379
	$\lambda_3 = 6,286$	0,003	- 0,002
	$\lambda_4 = 9,427$	0,002	0,002

	$\lambda_5 = 12,568$	0,002	- 0,004
--	----------------------	-------	---------

Подставив значения  $\lambda_{j1}$ ,  $B_{1j}$ ,  $A_{3j}$  и  $B_{3j}$  в уравнения (8.28), (8.29), получим фундаментальные функции задачи.

### 8.3.4. ОДНОКОНЦЕВАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА

Одноконцевую подъемную установку можно представить эквивалентной схемой, в которой массы  $m_1$  и  $m_2$  соединены канатом длиной  $l$  (рис. 8.8).

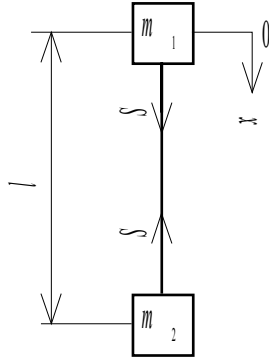


Рис. 8.8. Эквивалентная схема одноконцевой подъемной установки

Граничными условиями для рассматриваемой задачи будут:

Динамическая составляющая силы массы  $m_1$  уравновешивается силой упругости  $S$  каната, прикрепленного к этой массе, т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad m_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = EF \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}.$$

Динамическая составляющая силы массы  $m_2$  уравновешивается силой упругости  $S$  каната, прикрепленного к этой массе, т. е.

$$\text{при } x = l; \quad m_2 \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = -EF \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

Из граничных условий можно записать

$$m_1 \ddot{T}(t) X(0) = EF \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) X'(0) T(t),$$

$$m_2 \ddot{T}(t) X(l) = -EF \left(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}\right) X'(l) T(t).$$

По аналогии с (8.18) эти уравнения представим

$$\frac{m_1}{p} (-\kappa_j^2) = \frac{X'(0)}{X(0)}; \quad \frac{m_2}{p} \kappa_j^2 = -\frac{X'(l)}{X(l)}.$$

Подставив функции  $X$ ,  $X'$ , и вводя обозначения  $\alpha_1 = \frac{pl}{m_1}$ ;  $\alpha_2 = \frac{pl}{m_2}$ , получим

$$\begin{cases} A\lambda_j + B\alpha_1 = 0, \\ A(\lambda_j + \alpha_2 \operatorname{tg} \lambda_j) + B(\lambda_j \operatorname{tg} \lambda_j - \alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (8.30)$$

Для нахождения значения собственных чисел  $\lambda_j$  из системы (8.30) составлен определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda_j & \alpha_1 \\ \lambda_j + \alpha_2 \operatorname{tg} \lambda_j & \lambda_j \operatorname{tg} \lambda_j - \alpha_2 \end{vmatrix}$$

Раскрытие этого определителя дает трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} \lambda_j = \lambda_j \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda_j^2 - \alpha_1 \alpha_2}. \quad (8.31)$$

Численные значения собственных чисел  $\lambda_j$  определяются с помощью пакета Mathcad 7. Для этого уравнение (8.31) представляется в виде

$$f(\lambda_j) = \operatorname{tg} \lambda_j - \lambda_j \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda_j^2 - \alpha_1 \alpha_2}. \quad (8.32)$$

Для заданных значений, например,  $\alpha_1 = 0,5$ ;  $\alpha_2 = 0,5$  строим искомую функцию (рис. 8.9) и по методике, описанной выше, определяются собственные числа задачи  $\lambda_j$ .

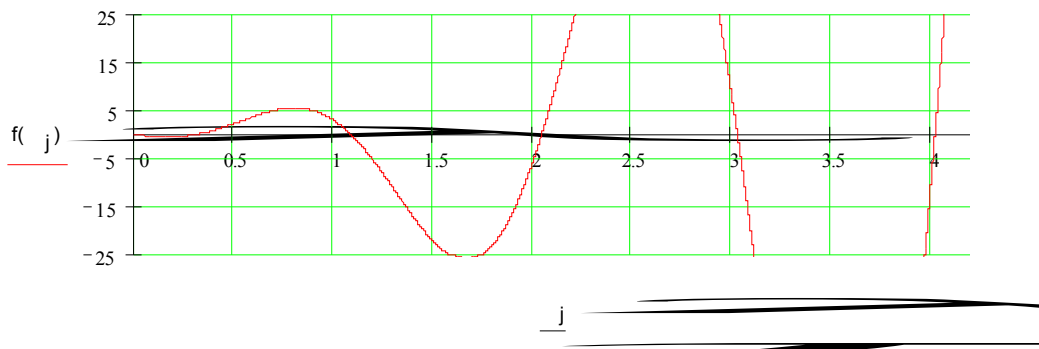


Рис. 8.9. График изменения функции  $f(\lambda_j)$  для одноконцевого подъема

Из уравнений (8.30) определяется взаимосвязь постоянных интегрирования  $A_j$  и  $B_j$ . Приняв один из них равным единице, определяется значение другого и записываются фундаментальные функции задачи

$$X_j(x) = A_j \cos \lambda_j \frac{x}{l} + B_j \sin \lambda_j \frac{x}{l}.$$

Пример 8.4. Определить фундаментальные функции задачи "одноконцевая подъемная установка", с данными  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = 0,5$ .

Из рис. 8.9 определяются приближенные значения собственных чисел  $\lambda_j$ . Далее организуется цикл вычисления функции (8.32) с шагом, равным заданной точности. При изменении знака функции вычислительный процесс останавливается и определяются величины  $\lambda_j$ .

$$\lambda_1 = 0,962; \lambda_2 = 3,431; \lambda_3 = 6,44; \lambda_4 = 9,53; \lambda_5 = 12,64.$$

Если принять, например  $B = 1$ , то из первого уравнения (8.30)  $A_j = -\frac{\alpha_j}{\lambda_j}$ , т. е.

$$A_1 = -0,52; \quad A_2 = -0,146; \quad A_3 = -0,078; \quad A_4 = -0,052; \quad A_5 = -0,04,$$

Такие же результаты получаются, если использовать второе уравнение (8.30). Фундаментальные функции задачи характеризуются первым уравнением системы (8.14). Например, для первой гармоники

$$X_1(x) = -0,5186 \cos 0,964 \frac{x}{l} + \sin 0,964 \frac{x}{l}.$$

### 8.3.5. ДВУХКОНЦЕВАЯ НЕУРАВНОВЕШЕННАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА

Двухконцевую неуровновешенную подъемную установку можно представить эквивалентной схемой, показанной на рис. 8.10. В данной задаче имеется три массы, соединенные двумя канатами, имеющими длины  $l_1$  и  $l_2$ . Так как в каждом уравнении фундаментальной функции, характеризующего динамическое состояние каната две постоянных интегрирования, то для их определения необходимо четыре уравнения.

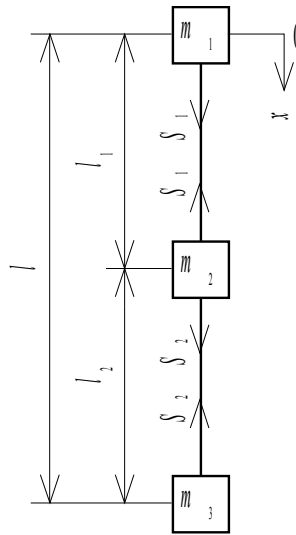


Рис. 8.10. Эквивалентная схема двухконцевой неуровновешенной подъемной установки

Сформулируем граничные условия задачи:

Динамическая составляющая силы массы  $m_1$  уравнивается силой упругости  $S_1$ , т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad m_1 \frac{\partial^2 u_1(0, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x}.$$

Динамическая составляющая силы массы  $m_2$  уравнивается силами упругости  $S_1$  и  $S_2$ , т. е.

$$\text{при } x = l_1; \quad m_2 \frac{\partial^2 u_1(l_1, t)}{\partial t^2} = -EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} + EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}.$$

Координаты перемещения канатов прикрепленных к массе  $m_2$  равны, т. е.

$$\text{при } x = l_1; \quad u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t).$$

Динамическая составляющая силы массы  $m_3$  уравнивается силой упругости  $S_2$ , т. е.

$$\text{при } x = l_1 + l_2 = l; \quad m_3 \frac{\partial^2 u_2(l, t)}{\partial t^2} = -EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_2(l, t)}{\partial x}.$$

Первые граничные условия рассматриваемой задачи и задачи одноконцевой подъемной установки (рис. 8.8) одинаковы. Поэтому зависимость будет аналогична первому уравнению системы (8.30)

$$A_1 \lambda_j + B_1 \alpha_1 = 0.$$

Вторые граничные условия рассматриваемой задачи и задачи ветвей канатов уравновешенного подъема (см. рис. 8.6) одинаковы, поэтому зависимость аналогична уравнению (8.22). На основании второго граничного условия, по аналогии с решением задачи для ветвей канатов уравновешенного подъема получим

$$\frac{m_2}{p} (-\kappa_j^2) = \frac{X_1'(l_1) - X_2'(l_1)}{X_1(l_1)},$$

или

$$A_1 \left( \frac{\lambda_j}{\alpha_2} \cos \lambda_j - \sin \lambda_j \right) + B_1 \left( \frac{\lambda_j}{\alpha_2} \sin \lambda_j + \cos \lambda_j \right) + A_2 \sin \lambda_j - B_2 \cos \lambda_j = 0,$$

Разделив все члены уравнения на  $\cos \lambda_j$ , имеем

$$A_1 \left( \frac{\lambda_j}{\alpha_2} - \operatorname{tg} \lambda_j \right) + B_1 \left( \frac{\lambda_j}{\alpha_2} \operatorname{tg} \lambda_j + 1 \right) + A_2 \operatorname{tg} \lambda_j - B_2 = 0, \quad (8.33)$$

где  $\alpha_2 = \frac{pl_1}{m_2}$ .

Третье граничное условие по аналогии с (8.23) дает уравнение

$$A_1 + B_1 \operatorname{tg} \lambda_j - A_2 - B_2 \operatorname{tg} \lambda_j = 0. \quad (8.34)$$

Четвертое граничное условие дает уравнение

$$A_2 \left[ \frac{\lambda_j}{\alpha_3} - \operatorname{tg} \lambda_j \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \right] + B_2 \left[ \frac{\lambda_j}{\alpha_3} \operatorname{tg} \lambda_j \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + 1 \right] = 0, \quad (8.35)$$

где  $\alpha_3 = \frac{pl_1}{m_3}$ .

На основании полученных уравнений можно составить определитель

$$\begin{vmatrix}
 \lambda_j & \alpha_1 & 0 & 0 \\
 \frac{\lambda_j}{\alpha_2} - \operatorname{tg} \lambda_j & \frac{\lambda_j}{\alpha_2} \operatorname{tg} \lambda_j + 1 & \operatorname{tg} \lambda_j & -1 \\
 1 & \operatorname{tg} \lambda_j & -1 & -\operatorname{tg} \lambda_j \\
 0 & 0 & \frac{\lambda_j}{\alpha_3} - \operatorname{tg} \lambda_j \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) & \frac{\lambda_j}{\alpha_3} \operatorname{tg} \lambda_j \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) + 1
 \end{vmatrix} \quad (8.36)$$

Раскрывая определитель, и приравнявая функцию  $f(\lambda_j)$  к нулю определяются собственные числа задачи. Постоянные интегрирования определяются так же, как в выше рассмотренных задачах.

Пример 8.5. Определить фундаментальные функции задачи "динамика двухконцевой неуровновешенной подъемной установки".

Данные установки:  $m_1 = 13900$  кг;  $m_2 = 86000$  кг;  $m_3 = 6800$  кг;  $p = 7,79$  кг·м<sup>-1</sup>.

Используя пакет Mathcad 7 строим зависимость значения определителя (8.36) от  $\lambda_j$  и находим собственные числа задачи. По уравнениям (8.30), (8.33 ÷ 8.35) составляется система однородных алгебраических уравнений. Принимая значения коэффициента, например  $A_1$  равным единице, система уравнений превращается в неоднородную, из которой определяются для каждой гармонике коэффициенты  $B_1, A_2, B_2$ . В табл. 8.2 приведены собственные числа  $\lambda_j$  и коэффициенты фундаментальных функций  $A_i$  и  $B_i$ .

Таблица 8.2

Собственные числа  $\lambda_j$  и коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$ , ( $A_1 = 1$ ).

Наименование		$B_1$	$A_2$	$B_2$
Начало подъема $l_1 = 420$ м, $l_2 = 70$ м; $\alpha_1 = 0,235$ ; $\alpha_2 = 0,038$ ; $\alpha_3 = 0,481$ .	$\lambda_1 = 0,423$	- 1,799	0,211	- 0,049
	$\lambda_2 = 3,203$	-13,609	0,172	- 0,186
	$\lambda_3 = 6,314$	- 26,826	0,164	- 0,071
	$\lambda_4 = 9,445$	- 40,129	0,161	0,012
	$\lambda_5 = 12,582$	- 53,454	0,160	0,105
Встреча сосудов $l_1 = 245$ м, $l_2 = 245$ м; $\alpha_1 = 0,137$ ; $\alpha_2 = 0,022$ ; $\alpha_3 = 0,281$ .	$\lambda_1 = 0,330$	- 2,402	0,191	- 0,040
	$\lambda_2 = 3,178$	-23,147	0,198	-1,217
	$\lambda_3 = 6,302$	- 45,895	0,198	- 2,426
	$\lambda_4 = 9,437$	- 68,73	0,198	-3,636
	$\lambda_5 = 12,575$	- 91588	0,198	- 4,850
Конец подъема $l_1 = 70$ м, $l_2 = 490$ м; $\alpha_1 = 0,0392$ ; $\alpha_2 = 0,063$ ; $\alpha_3 = 0,082$ .	$\lambda_1 = 0,18$	- 4,58	0,160	0,005
	$\lambda_2 = 3,152$	- 80,346	0,191	- 2,6
	$\lambda_3 = 6,288$	- 160,29	0,145	0,635
	$\lambda_4 = 9,428$	-240	0,089	10,9
	$\lambda_5 = 12,566$	- 320	2,535	- 12000

### 8.3.6. ДВУХКОНЦЕВАЯ УРАВНОВЕШЕННАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА

Эквивалентная схема, которая характеризует двухконцевую уравновешенную подъемную установку, показана на рис. 8.11. Массы  $m_1, m_2$  и  $m_3$  соединены канатами, имеющими длины  $l_1$  и  $l_2$ . К массам  $m_1$  и  $m_3$  присоединяются уравновешивающие канаты с длинами  $l_3$  и  $l_4$ . В качестве начала координат выберем точку 0, расположенную в центре массы  $m_2$ . Начало координат может быть выбрано в любой точке системы, при этом

уравнения, характеризующие граничные условия и определитель, будут разными. Однако, собственные числа задачи останутся, для всех случаев, одинаковыми [70].

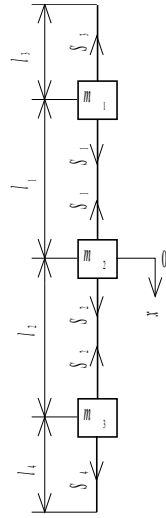


Рис. 8.11. Эквивалентная схема двухконцевой уравновешенной подъемной установки

Граничные условия задачи формулируются следующим образом:

♦ Сила упругости в нижнем сечении уравновешивающего каната, имеющего длину  $l_3$ , равна нулю, т. е.

$$\text{при } x = -(l_1 + l_3); \quad EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_3(-l_1 - l_3, t)}{\partial x} = 0.$$

♦ Динамическая составляющая силы массы  $m_1$  уравновешена силами упругости  $S_1$  и  $S_3$ , т. е.

$$\text{при } x = -l_1; \quad m_1 \frac{\partial^2 u_1(-l_1, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \left[ \frac{\partial u_1(-l_1, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_3(-l_1, t)}{\partial x} \right].$$

♦ Координаты перемещений точек канатов, которые прикреплены к массе  $m_1$  равны, т. е.

$$\text{при } x = -l_1; \quad u_3(-l_1, t) = u_1(-l_1, t).$$

♦ Динамическая составляющая силы массы  $m_2$  уравновешена силами упругости  $S_1$  и  $S_2$ , т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad m_2 \frac{\partial^2 u_2(0, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \left[ \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} \right].$$

♦ Координаты перемещений точек канатов, которые прикреплены к массе  $m_2$  равны, т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad u_1(0, t) = u_2(0, t).$$

♦ Динамическая составляющая силы массы  $m_3$  уравновешена силами упругости  $S_2$  и  $S_4$ , т. е.

$$\text{при } x = l_2; \quad m_3 \frac{\partial^2 u_2(l_2, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \left[ \frac{\partial u_4(l_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_2(l_2, t)}{\partial x} \right].$$

♦ Координаты перемещений точек канатов, которые прикреплены к массе  $m_3$  равны, т. е.

$$\text{при } x = l_2; \quad u_2(l_2, t) = u_4(l_2, t).$$

♦ Сила упругости в нижнем сечении уравновешивающего каната  $l_4$ , равна нулю, т. е.

$$\text{при } x = l_2 + l_4; \quad EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_4(l_2 + l_4, t)}{\partial x} = 0.$$

Выполнив преобразования, сделанные при выводе формул (8.22 ÷ 8.24), получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 \operatorname{tg} \lambda_j (1 + \frac{l_3}{l_1}) + B_3 = 0; \\ A_1 (\frac{\lambda_j}{\alpha_1} + \operatorname{tg} \lambda_j) + B_1 (1 - \frac{\lambda_j}{\alpha_1} \operatorname{tg} \lambda_j) - A_3 \operatorname{tg} \lambda_j + B_3 = 0; \\ A_3 - B_3 \operatorname{tg} \lambda_j - A_1 + B_1 \operatorname{tg} \lambda_j = 0; \\ -B_1 + A_2 \frac{\lambda_j}{\alpha_2} + B_2 = 0; \\ A_1 - A_2 = 0; \\ A_2 (\frac{\lambda_j}{\alpha_3} + \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1}) + B_2 (\frac{\lambda_j}{\alpha_3} \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} - 1) - A_4 \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} + B_4 = 0; \\ A_2 + B_2 \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} - A_4 - B_4 \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} = 0; \\ -A_4 \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2 + l_4}{l_1} + B_4 = 0. \end{array} \right. \quad (8.37)$$

Здесь  $\alpha_1 = \frac{pl_1}{m_1}$ ;  $\alpha_2 = \frac{pl_1}{m_2}$ ;  $\alpha_3 = \frac{pl_1}{m_3}$ .

Система уравнений (8.37) позволяет составить характеристический определитель

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{tg} \lambda_j (1 + \frac{l_3}{l_1}) & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_j}{\alpha_1} + \operatorname{tg} \lambda_j & 1 - \frac{\lambda_j}{\alpha_1} \operatorname{tg} \lambda_j & 0 & 0 & -\operatorname{tg} \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \operatorname{tg} \lambda_j & 0 & 0 & 1 & -\operatorname{tg} \lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{\lambda_j}{\alpha_2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_j}{\alpha_3} + \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} & \frac{\lambda_j}{\alpha_3} \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} - 1 & 0 & 0 & -\operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} & 0 & 0 & -1 & \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2}{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_2 + l_4}{l_1} & 1 \end{array} \right| \quad (8.38)$$

Приравняв значения определителя (8.38) нулю, находим собственные числа задачи  $\lambda_j$ .

Так как система уравнений (8.37) является однородной, поэтому она не имеет решений [24]. Приняв значение коэффициента  $A_1$ , равным единице, система уравнений (8.37) становится неоднородной и появляется возможность определения всех неизвестных коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$ .

Пример 8.6. Определить фундаментальные функции механической системы, характерной для многоканатной подъемной установки. Характеристика установки соответствует условиям шахты им. 9 Пятилетки в Донбассе. На этой шахте была смонтирована первая отечественная четырехканатная подъемная машина с дисковыми тормозами и тиристорным приводом. Расчетные схемы со взаимным расположением масс, соответствующие началу подъема, встрече сосудов и концу подъема приведены на рис. 8.12. Суммарная плотность канатов  $p = 26 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1}$



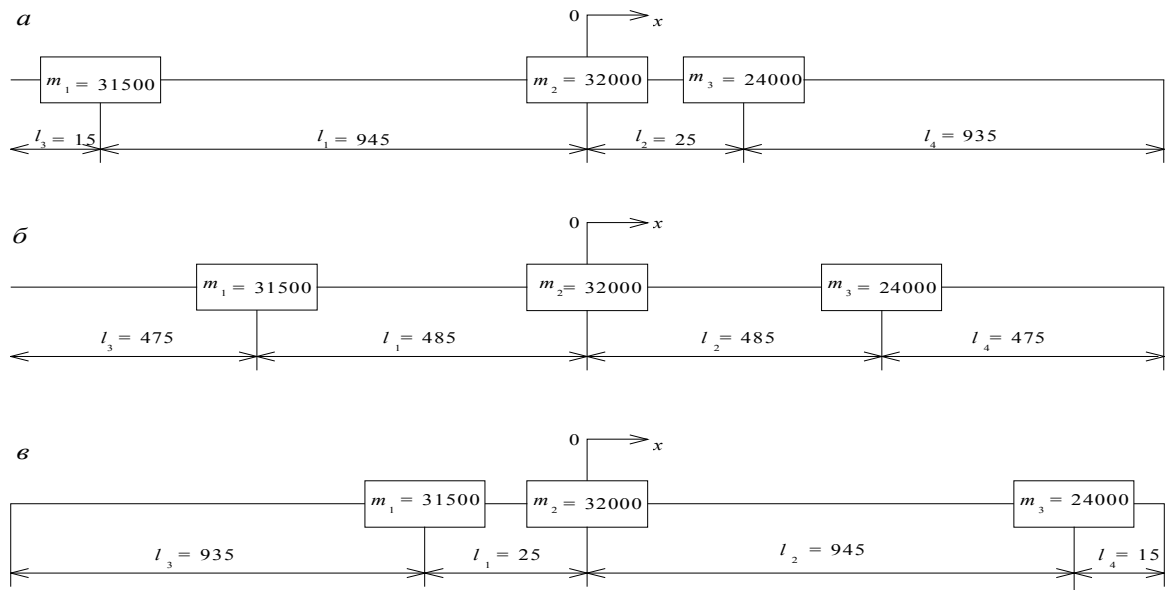


Рис. 8.12. Расчетные схемы многоканатной подъемной установки:

*a* - начало подъема; *б* - встреча сосудов; *в* - конец подъема

С помощью пакета Mathcad 7 определяются необходимые характеристики динамической системы. В табл. 8.3 приведены собственные числа и коэффициенты  $A_j$  и  $B_j$  для пяти гармоник задачи.

Таблица 8.3

Собственные числа и коэффициенты  $A_j$  и  $B_j$  ( $A_1 = 1, A_2 = 1$ ).

Наименование		$B_1$	$B_2$	$A_3$	$B_3$	$A_4$	$B_4$
Начало подъема $l_1 = 945$ м, $\alpha_1 = 0,78$ $l_2 = 25$ м, $\alpha_2 = 0,763$ $l_3 = 15$ м, $\alpha_3 = 1,024$ $l_4 = 935$ м	$\lambda_1 = 1,141$	5,109	3,614	- 1,691	3,877	1,037	2,378
	$\lambda_2 = 3,495$	10,452	5,871	- 2,462	1,067	1,485	0,643
	$\lambda_3 = 6,396$	-77,428	- 85,811	9,578	- 2,091	- 13,17	- 2,875
	$\lambda_4 = 8,561$	- 0,719	-11,938	0,077	0,069	- 2,204	1,965
	$\lambda_5 = 9,671$	6,144	- 6,53	- 0,49	0,207	- 0,638	- 0,269
Встреча сосудов $l_1 = 485$ м, $\alpha_1 = 0,4$ $l_2 = 485$ м, $\alpha_2 = 0,392$ $l_3 = 475$ м, $\alpha_3 = 0,525$ $l_4 = 475$ м	$\lambda_1 = 0,680$	- 2,489	- 4,226	0,663	- 2,906	- 0,532	- 2,333
	$\lambda_2 = 1,011$	1,463	- 1,12	0,54	1,174	0,318	- 0,693
	$\lambda_3 = 1,789$	5,371	0,801	-27,811	11,774	2,879	1,219
	$\lambda_4 = 1,876$	0,113	- 4,677	- 1,304	0,838	- 15,215	- 9,783
	$\lambda_5 = 3,282$	70,62	62,238	- 8,743	1,9	9,531	2,071
Конец подъема $l_1 = 25$ м, $\alpha_1 = 0,021$ $l_2 = 945$ м, $\alpha_2 = 0,01$ $l_3 = 935$ м, $\alpha_3 = 0,027$ $l_4 = 15$ м	$\lambda_1 = 0,093$	- 6,467	-11,068	1,538	- 0,696	- 2,796	- 1,266
	$\lambda_2 = 0,169$	24,086	15,73	-3,001	0,591	2,426	0,478
	$\lambda_3 = 0,255$	5,783	- 6,893	- 0,462	0,196	- 0,672	- 0,285
	$\lambda_4 = 0,336$	3,574	-13,098	- 0,221	0,083	- 0,991	- 0,37
	$\lambda_5 = 0,419$	2,596	- 18,145	- 0,221	0,051	-1,111	- 0,431

Данные этой таблицы будут использованы при исследовании свободных и вынужденных колебаний многоканатной подъемной установки.

Подставив значения коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$  в первое уравнение (8.14) и, имея в виду, что  $\lambda_j = k_j l_j$ , получим фундаментальные функции задачи.

### 8.3.7. МНОГОКАНАТНАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА В РЕЖИМЕ СКОЛЬЖЕНИЯ КАНАТОВ

Многоканатная подъемная установка передает тяговое усилие от машины к канатам за счет фрикционных сил между канатами и барабаном трения. В режиме предохранительного торможения, при больших динамических нагрузках, разность натяжений канатов, имеющих

длины  $l_1$  и  $l_2$ , может стать больше силы трения между канатами и барабаном. В этом случае наступает процесс скольжения. Масса  $m_2$  отсоединяется от канатов и эквивалентная схема, показанная на рис. 8.11, преобразуется в схему, изображенную на рис. 8.13. Отметим, что длина канатов  $l$  остается постоянной величиной независимо от местоположения подъемных сосудов.

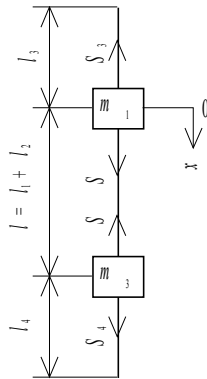


Рис. 8.13. Эквивалентная схема многоканатной подъемной установки при скольжении канатов

Граничные условия задачи формулируются следующим образом:

Сила упругости в нижнем сечении уравновешивающего каната, имеющего длину  $l_3$ , равна нулю, т. е.

$$\text{при } x = -l_3; \quad EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_3(-l_3, t)}{\partial x} = 0.$$

Динамическая составляющая силы массы  $m_1$  уравновешена силами упругости  $S$  и  $S_3$ , т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad m_1 \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \left[ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_3(0, t)}{\partial x} \right].$$

Координаты перемещений точек канатов, прикрепленных к массе  $m_1$  равны, т. е.

$$\text{при } x = 0; \quad u_3(0, t) = u(0, t).$$

Динамическая составляющая силы массы  $m_3$  уравновешена силами упругости  $S_4$  и  $S$ , т. е.

$$\text{при } x = l; \quad m_3 \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} = EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \left[ \frac{\partial u_4(l, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \right].$$

Координаты перемещений точек канатов, прикрепленных к массе  $m_3$  равны, т. е.

$$\text{при } x = l; \quad u(l, t) = u_4(l, t).$$

Сила упругости в нижнем сечении уравновешивающего каната, имеющего длину  $l_4$ , равна нулю, т. е.

$$\text{при } x = l + l_4; \quad EF(1 + \mu_\kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_4(l + l_4, t)}{\partial x} = 0.$$

Эти граничные условия позволяют получить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_3}{l} + B_3 = 0, \\ A \frac{\lambda_j}{\alpha_1} + B - B_3 = 0, \\ -A + A_3 = 0, \\ A \left( \frac{\lambda_j}{\alpha_3} + \operatorname{tg} \lambda_j \right) + B \left( \frac{\lambda_j}{\alpha_3} \operatorname{tg} \lambda_j - 1 \right) - A_4 \operatorname{tg} \lambda_j + B_4 = 0, \\ A + B \operatorname{tg} \lambda_j - A_4 - B_4 \operatorname{tg} \lambda_j = 0, \\ -A_4 \operatorname{tg} \lambda_j \left( 1 + \frac{l_4}{l} \right) + B_4 = 0. \end{array} \right. \quad (8.39)$$

здесь  $\alpha_1 = \frac{pl}{m_1}$ ;  $\alpha_3 = \frac{pl}{m_3}$ ;  $\lambda_j = \kappa l$ .

Характеристический определитель:

$$\left| \begin{array}{cccccc} \operatorname{tg} \lambda_j \frac{l_3}{l} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{\lambda_j}{\alpha_1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_j}{\alpha_3} + \operatorname{tg} \lambda_j & \frac{\lambda_j}{\alpha_3} \operatorname{tg} \lambda_j - 1 & -\operatorname{tg} \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \operatorname{tg} \lambda_j & -1 & -\operatorname{tg} \lambda_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\operatorname{tg} \lambda_j \left( 1 + \frac{l_4}{l} \right) & 1 \end{array} \right| \quad (8.40)$$

Определитель (8.40) и система уравнений (8.39) позволяют найти собственные числа и фундаментальные функции задачи.

Пример 8.7. Определить фундаментальные функции механической системы, характерной для многоканатной подъемной установки при скольжении канатов. Характеристика установки соответствует таковой в примере 8.6.

Рассмотрим динамический процесс скольжения канатов по канатоведущему барабану для случая соответствующего встрече сосудов (рис. 8.12, б). Расчетная схема многоканатной подъемной установки в режиме скольжения канатов показана на рис. 8.13.

Характеристический определитель и система уравнений (8.39) позволяют найти собственные числа и коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$ , которые для пяти гармоник приведены в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Собственные числа и коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$ . ( $A = 1$ ;  $A_3 = 1$ )

Наименование		$B$	$B_3$	$A_4$	$B_4$
Встреча сосудов	$\lambda_1 = 1,051$	- 1,892	- 0,58	$6,85 \cdot 10^{-3}$	- 1,323
$l = 970$ м	$\lambda_2 = 3,602$	- 0,238	4,262	2,204	- 2663
$l_3 = 485$ м	$\lambda_3 = 4,015$	- 2,871	2,144	- 3,558	0,952
$l_4 = 485$ м	$\lambda_4 = 6,558$	- 8,33	- 0,139	- 1,201	- 0,526
	$\lambda_5 = 9,608$	- 1,153	- 10,848	2,291	- 8,097

Подставив значения  $A_j, B_j$  в первое уравнение (8.14) и, имея в виду, что  $\lambda_j = \kappa l$ , получим фундаментальные функции задачи.

#### 8.4. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

При исследовании свободных и вынужденных колебаний механических систем с распределенными параметрами для определения постоянных интегрирования уравнения (8.16) знание свойств ортогональных функций, упрощает процедуры нахождения  $C_j$  и  $D_j$ .

Известно [17, 59], что для системы функций ортогональных на отрезке  $[0, l]$  выполняются условия

$$n \neq j; \quad \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx = 0, \quad (8.41)$$

$$n = j; \quad \int_0^l X_j^2(x) dx \neq 0, \quad (8.42)$$

где  $n$  и  $j$  - соответствующие номера гармоник. Величину  $\int_0^l [X_j(x)]^2 dx = \|X_j\|_1^2$  принято называть квадратом нормы функции  $X_j(x)$  [46, 59].

Все задачи по определению фундаментальных функций, рассмотренные в разделе 8.3, относились к двум принципиально различным схемам.

Первая схема, показанная на рис. 8.2, характеризует динамическое состояние уравнивающего каната, т. е. вязкоупругого стержня без массы. Все другие схемы относятся к системам, в которых вязкоупругие стержни соединяют сосредоточенные массы. При определении фундаментальных функций различных механических систем было принято допущение о том, что все канаты имеют одну конструкцию, поэтому такие характеристики, как модуль упругости  $E$ , площадь проволок  $F$ , линейная плотность  $p$  для всех канатов одинаковы. Такое допущение освобождает от чрезмерной громоздкости записи доказательств. В случае необходимости учета различных характеристик вязкоупругих стержней методология нижеприведенных рассуждений не изменится.

##### 8.4.1. ВЕТВЬ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕГО КАНАТА

На основании уравнения (8.17) фундаментальную функцию можно записать

$$X_j(x) = \sin \frac{\pi}{2} (2j - 1) \frac{x}{l}.$$

Рассмотрим две гармоники  $j = 1$  и  $n = 2$ , тогда  $X_1(x) = \sin 0,5 \frac{\pi}{l} x = \sin \alpha x$ ;

$X_2(x) = \sin 1,5 \frac{\pi}{l} x = \sin \beta x$ . Подставив значения  $X_1(x)$  и  $X_2(x)$  в (8.41), и воспользовавшись таблицами интегралов, получим [38]

$$\begin{aligned}
 j \neq n; \int_0^l \sin 0,5 \frac{\pi}{l} x \sin 1,5 \frac{\pi}{l} x dx &= \int_0^l \sin \alpha x \sin \beta x dx = \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} \Big|_0^l = \\
 &= \frac{\sin \frac{\pi}{l}(-1)x}{-2 \frac{\pi}{l}} - \frac{\sin \frac{\pi}{l} 2x}{4 \frac{\pi}{l}} \Big|_0^l = 0, \\
 j = n; \int_0^l \sin^2 0,5 \frac{\pi}{l} x dx &= \frac{1}{2} l.
 \end{aligned}$$

Таким образом, подтверждены зависимости (8.41) и (8.42). Следовательно, фундаментальные функции ветвей уравнивающего каната ортогональны на участке  $[0, l]$ .

#### 8.4.2. МАССА, ПОДВЕШЕННАЯ НА КАНАТЕ

Фундаментальные функции, рассматриваемой задачи, определены в примере 8.2. Воспользуемся функциями  $X_1(x) = \sin \frac{0,86}{l} x = \sin \alpha x$  и  $X_2(x) = \sin \frac{3,425}{l} x = \sin \beta x$ . Подставим их в (8.41)

$$\int_0^l \sin \alpha x \sin \beta x dx = \frac{\sin \frac{0,86 - 3,425}{l} x}{\frac{2}{l}(0,86 - 3,425)} - \frac{\sin \frac{0,86 + 3,425}{l} x}{\frac{2}{l}(0,86 + 3,425)} \Big|_0^l = \frac{\sin(-2,565)}{\frac{2}{l}(-2,565)} - \frac{\sin 4,285}{\frac{2}{l}4,285}.$$

Если предположить, что функции ортогональны, то для того, чтобы полученное выражение равнялось нулю, необходимо, чтобы  $\frac{\sin \gamma}{\gamma} = \frac{\sin \theta}{\theta}$ .

Здесь  $\gamma = (-2,565)$ ;  $\theta = 4,285$ .

Полученное соотношение может быть справедливым только при  $\gamma = \theta$ , или при  $\gamma$  и  $\theta$  кратных  $\pi$ . Эти условия для рассматриваемой задачи не выполняются, поэтому выражение (8.41) для массы, подвешенной на канате, не справедливо.

Этот вывод, касающийся задач математической физики, в которых наряду с непрерывно распределенными величинами необходимо иметь дело с сосредоточенными (точечная масса, сосредоточенный импульс, точечный источник тепла и т. д.), известен [79, 80].

Докажем условие ортогональности для массы, подвешенной на канате. Рассмотрим две гармоники  $j$  и  $n$ . На основании (8.12) можно записать

$$X_j''(x) = -k_j^2 X_j(x); \quad X_n''(x) = -k_n^2 X_n(x).$$

Умножим первое из этих соотношений на  $X_n(x)$ , а второе - на  $X_j(x)$  и, интегрируя в пределах  $[c - d]$ , получим

$$\begin{cases} \int_c^d X_j''(x) X_n(x) dx = -k_j^2 \int_c^d X_j(x) X_n(x) dx, \\ \int_c^d X_n''(x) X_j(x) dx = -k_n^2 \int_c^d X_n(x) X_j(x) dx. \end{cases} \quad (8.43)$$

Разность этих выражений равна

$$\int_c^d X_j''(x) X_n(x) dx - \int_c^d X_n''(x) X_j(x) dx = (k_n^2 - k_j^2) \int_c^d X_j(x) X_n(x) dx, \quad (8.44)$$

Интегралы, стоящие в левой части выражения, интегрируем по частям. Тогда получим [24]

$$\begin{cases} \int_c^d X_j''(x) X_n(x) dx = X_j'(x) X_n(x) \Big|_c^d - \int_c^d X_j'(x) X_n'(x) dx, \\ \int_c^d X_n''(x) X_j(x) dx = X_n'(x) X_j(x) \Big|_c^d - \int_c^d X_n'(x) X_j'(x) dx. \end{cases} \quad (8.45)$$

Уравнение (8.44) запишем

$$X_j'(x) X_n(x) \Big|_c^d - X_n'(x) X_j(x) \Big|_c^d = (k_n^2 - k_j^2) \int_c^d X_j(x) X_n(x) dx.$$

Подставив значение функций в точках  $[c, d]$ , получим

$$X_j'(d) X_n(d) - X_j'(c) X_n(c) - X_n'(d) X_j(d) + X_n'(c) X_j(c) = (k_n^2 - k_j^2) \int_c^d X_j(x) X_n(x) dx. \quad (8.46)$$

Напомним, что для системы “масса, подвешенная на канате” фундаментальная функция для любых  $j$  и  $n$   $X(x) = \sin \lambda \frac{x}{l}$ , поэтому, если  $c = 0$ , а  $d = l$ , то

$X(c) = X(0) = 0$ . На этом основании (8.46) имеет вид

$$X_j'(l) X_n(l) - X_n'(l) X_j(l) = (k_n^2 - k_j^2) \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx. \quad (8.47)$$

Граничные условия для массы  $m$ , прикрепленной к канату длиной  $l$ , характеризуется уравнением (8.18). Для гармоник  $j$  и  $n$  они будут

$$X_j'(l) = k_j^2 \frac{m}{p} X_j(l); \quad X_n'(l) = k_n^2 \frac{m}{p} X_n(l).$$

Подставив эти значения в (8.47), получим

$$-(k_n^2 - k_j^2) \frac{m}{p} X_j(l) X_n(l) = (k_n^2 - k_j^2) \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx.$$

Следовательно

$$\begin{cases} j \neq n; & \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx + \frac{m}{p} X_j(l) X_n(l) = 0, \\ j = n; & \int_0^l X_n^2(x) dx + \frac{m}{p} X_n^2(l) \neq 0. \end{cases} \quad (8.48)$$

Таким образом, уравнение (8.48) характеризует ортогональность функций механической системы “масса, подвешенная на канате”.

Первое соотношение (8.48) можно записать

$$\int_0^l p X_j(x) X_n(x) dx = -m X_j(l) X_n(l). \quad (8.49)$$

При решении задач математической физики, в которых наряду с распределенными параметрами присутствуют сосредоточенные, широко используется импульсная функция первого порядка или дельта-функция. Эта функция часто называется функцией Дирака [46, 59]. Дельта функция  $\delta(x)$  действительной переменной  $x$  определяется

$$\int_a^b \varphi(\zeta) \delta(\zeta - x) d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b; \\ \frac{1}{2} \varphi(x) & \text{при } x = a \text{ и } x = b; \\ \varphi(x) & \text{при } a < x < b. \end{cases}$$

Поэтому правый член уравнения (8.49) имеет вид

$$-m X_j(l) X_n(l) = \int_0^l m \delta(x - l) X_j(x) X_n(x) dx.$$

Тогда уравнение (8.49) запишем

$$j \neq n; \quad \int_0^l p X_j(x) X_n(x) dx + \int_0^l m \delta(x - l) X_j(x) X_n(x) dx = 0.$$

Величину  $p + m\delta(x - l) = q$  называют весовой функцией [80]. С учетом этого получим еще одну зависимость, которая характеризует ортогональность фундаментальных функций задачи

$$j \neq n; \quad \int_0^l [p + m\delta(x - l)] X_j(x) X_n(x) dx = 0.$$

Таким образом получено известное в математике свойство, которое говорит о том, что фундаментальные функции  $X_j(x)$  и  $X_n(x)$ , отвечающие различным собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ортогональны с весом  $P(m)$ , [12] т. е.

$$\begin{cases} j \neq n; & \int_0^l q X_j(x) X_n(x) dx = 0; \\ j = n; & \int_0^l q X_n^2(x) dx \neq 0. \end{cases} \quad (8.50)$$

$\|X_n\|_2^2 = \int_0^l q X_n^2(x) dx = \int_0^l X_n^2(x) dx + \frac{m}{p} X_n^2(l)$  - квадрат нормы весовой и фундаментальной функций рассматриваемой задачи.

Эти свойства фундаментальных функций будут использоваться при определении постоянных интегрирования  $C_j$  и  $D_j$  уравнения (8.16). В ряде случаев (а это относится ко всем ниже рассмотренным задачам) удобнее использовать свойства, характеризующие ортогональность фундаментальных функций.

Подставив (8.45) в (8.43), и разделив соответственно на  $\kappa_j$ ,  $\kappa_n$  получим

$$\begin{cases} -\frac{1}{\kappa_j^2} X_j'(x) X_n(x) \Big|_c^d + \frac{1}{\kappa_j^2} \int_c^d X_j'(x) X_n'(x) dx = \int_c^d X_j(x) X_n(x) dx, \\ -\frac{1}{\kappa_n^2} X_n'(x) X_j(x) \Big|_c^d + \frac{1}{\kappa_n^2} \int_c^d X_n'(x) X_j'(x) dx = \int_c^d X_n(x) X_j(x) dx. \end{cases}$$

Подставим пределы интегрирования, обратим внимание на тот факт, что правые части этих выражений равнозначны, поэтому разность имеет вид

$$-\frac{1}{\kappa_j^2} X_j'(x) X_n(x) \Big|_0^l + \frac{1}{\kappa_n^2} X_n'(l) X_j(l) \Big|_0^l + \left( \frac{1}{\kappa_j^2} - \frac{1}{\kappa_n^2} \right) \int_0^l X_j'(x) X_n'(x) dx = 0.$$

Учитывая, что для рассматриваемой системы  $X(0) = 0$  и  $X'(l) = \kappa^2 \frac{m}{p} X(l)$ , получим

$$-\frac{1}{\kappa_j^2} \kappa_j^2 \frac{m}{p} X_j(l) X_n(l) + \frac{1}{\kappa_n^2} \kappa_n^2 \frac{m}{p} X_n(l) X_j(l) + \frac{\kappa_n^2 - \kappa_j^2}{\kappa_j^2 \kappa_n^2} \int_0^l X_j'(x) X_n'(x) dx = 0.$$

Следовательно

$$\begin{cases} j \neq n; & \int_0^l X_j'(x) X_n'(x) dx = 0, \\ j = n; & \int_0^l (X_n'(x))^2 dx \neq 0. \end{cases} \quad (8.51)$$

Выражение (8.51) говорит о том, что если в механической системе с распределенными параметрами присутствуют сосредоточенные массы, то для такой системы производные фундаментальных функций ортогональны.



### 8.4.3. ДВЕ МАССЫ, СОЕДИНЕННЫЕ СТЕРЖНЕМ

Для системы, показанной на рис. 8.8 граничные условия характеризуются уравнениями (8.30), которые для  $j$  и  $n$  гармоник можно записать

$$\begin{aligned} X_j'(0) &= -k_j^2 \frac{m_1}{p} X_j(0); & X_j'(l) &= k_j^2 \frac{m_2}{p} X_j(l), \\ X_n'(0) &= -k_n^2 \frac{m_1}{p} X_n(0); & X_n'(l) &= k_n^2 \frac{m_2}{p} X_n(l). \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (8.46), по аналогии с (8.48) и (8.51), получим

$$\frac{\kappa_n^2 - \kappa_j^2}{\kappa_n^2 \kappa_j^2} \int_0^l X_j'(x) X_n'(x) dx = 0.$$

Следовательно

$$\left\{ \begin{array}{l} j \neq n; \quad \int_0^l X_j'(x) X_n'(x) dx = 0, \\ j = n; \quad \int_0^l (X_n'(x))^2 dx \neq 0. \end{array} \right. \quad (8.52)$$

Таким образом выражение (8.52) характеризует ортогональность производных фундаментальных функций системы “две массы, соединенные стержнем” (одноконцевая подъемная установка).

По аналогии с (8.50) запишем выражения, характеризующие ортогональность фундаментальных функций рассматриваемой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} j \neq n; \quad \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx + \frac{m_1}{p} X_j(0) X_n(0) + \frac{m_2}{p} X_j(l) X_n(l) = 0; \\ j = n; \quad \int_0^l X_n^2(x) dx + \frac{m_1}{p} X_n^2(0) + \frac{m_2}{p} X_n^2(l) \neq 0. \end{array} \right. \quad (8.53)$$

Квадрат нормы фундаментальной и весовых функций:

$$\|X_n\|_3^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx + \frac{m_1}{p} X_n^2(0) + \frac{m_2}{p} X_n^2(l).$$

### 8.4.4. МАССА И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НЕЙ ДВА ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЯ

Расчетная схема, характерная для уравновешенного подъема после остановки органа навивки, приведена на рис. 8.6. В данной задаче имеется два каната, соединенные с одной массой  $m$ . Для каждого каната справедливо выражение (8.12). Канату длиной  $l_1$  предпишем

индекс 1, а канату длиной  $l_3$  - индекс 3. Перепишем выражение (8.12) для гармоник  $j$  и  $n$  канатов 1 и 2.

$$\begin{aligned} X''_{1j}(x) &= -k_j^2 X_{1j}(x); & X''_{1n}(x) &= -k_n^2 X_{1n}(x); \\ X''_{3j}(x) &= -k_j^2 X_{3j}(x); & X''_{3n}(x) &= -k_n^2 X_{3n}(x). \end{aligned}$$

Умножим первое и третье из этих соотношений соответственно на  $X_{1n}$  и  $X_{3n}$ , а второе и четвертое - на  $X_{1j}$  и  $X_{3j}$ , и проинтегрируем в пределах  $[c - d]$ . Затем интеграл, в котором имеется вторая производная  $X''(x)$ , интегрируем по частям. Для каната с индексом 1 получим

$$\begin{cases} X'_{1j}(x) X_{1n}(x) \Big|_c^d - \int_c^d X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx = -k_j^2 X_{1j}(x) X_{1n}(x), \\ X'_{1n}(x) X_{1j}(x) \Big|_c^d - \int_c^d X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx = -k_n^2 X_{1n}(x) X_{1j}(x) \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на  $k_j^2$ , а второе - на  $k_n^2$ , запишем разность выражений

$$\frac{1}{k_j^2} X'_{1j}(x) X_{1n}(x) \Big|_c^d - \frac{1}{k_n^2} X'_{1n}(x) X_{1j}(x) \Big|_c^d - \frac{k_j^2 - k_n^2}{k_j^2 k_n^2} \int_c^d X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx = 0. \quad (8.54)$$

Аналогичное выражение будет для каната с индексом 3.

Из рис. 8.6 видно, что пределы интегрирования  $[c - d]$  для каната 1 -  $[0 - l_1]$ , а для каната 2 -  $[l_1 - l]$ . Подставив эти пределы в (8.54), получим

$$\begin{cases} \frac{1}{k_j^2} [X'_{1j}(l_1) X_{1n}(l_1) - X'_{1j}(0) X_{1n}(0)] - \frac{1}{k_n^2} [X'_{1n}(l_1) X_{1j}(l_1) - X'_{1n}(0) X_{1j}(0)] - \\ - \frac{k_j^2 - k_n^2}{k_j^2 k_n^2} \int_0^{l_1} X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx = 0, \\ \frac{1}{k_j^2} [X'_{3j}(l) X_{3n}(l) - X'_{3j}(l_1) X_{3n}(l_1)] - \frac{1}{k_n^2} [X'_{3n}(l) X_{3j}(l) - X'_{3n}(l_1) X_{3j}(l_1)] - \\ - \frac{k_j^2 - k_n^2}{k_j^2 k_n^2} \int_{l_1}^l X'_{3j}(x) X'_{3n}(x) dx = 0. \end{cases} \quad (8.55)$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи, сформулированные в разделе 8.3.3:

$$\begin{aligned} x = 0; & \quad X_1(0) = 0; \\ x = l_1; & \quad X'_1(l_1) = X'_3(l_1) + k^2 \frac{m}{p} X_1(l_1); \\ x = l_1; & \quad X_1(l_1) = X_3(l_1); \\ x = l; & \quad X'_3(l) = 0. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (8.55), и сложив последние, получим

$$-\frac{k_j^2 - k_n^2}{k_j^2 k_n^2} \left[ \int_0^{l_1} X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l X'_{3j}(x) X'_{3n}(x) dx \right] = 0.$$

Следовательно

$$\begin{cases} j \neq 0; & \int_0^{l_1} X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l X'_{3j}(x) X'_{3n}(x) dx = 0, \\ j = 0; & \int_0^{l_1} (X'_{1j}(x))^2 dx + \int_{l_1}^l (X'_{3j}(x))^2 dx \neq 0. \end{cases} \quad (8.56)$$

Из первого выражения (8.56) видно, что для механической системы, состоящей из массы и присоединенных к ней двух вязкоупругих стержней, сумма производных фундаментальных функций ортогональна.

Выражение, характеризующее ортогональность фундаментальных функций рассматриваемой задачи можно получить по аналогии с (8.50)

$$\begin{cases} j \neq n; & \int_0^{l_1} X_{1j}(x) X_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l X_{3j}(x) X_{3n}(x) dx + \frac{m}{p} X_{1j}(l_1) X_{1n}(l_1) = 0; \\ j = n; & \int_0^{l_1} X_{1j}^2(x) dx + \int_{l_1}^l X_{3j}^2(x) dx + \frac{m}{p} X_{1j}^2(l_1) \neq 0. \end{cases} \quad (8.57)$$

Квадрат нормы весовой и фундаментальных функций будет

$$\|X_{jn}\|_4^2 = \int_0^{l_1} X_{1n}^2(x) dx + \int_{l_1}^l X_{3n}^2(x) dx + \frac{m}{p} X_{1n}^2(l_1).$$

#### 8.4.5. ДВУХКОНЦЕВАЯ НЕУРАВНОВЕШЕННАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА

Двухконцевая неуравновешенная подъемная установка представляет механическую систему, в которой три массы соединены двумя канатами. Расчетная схема такой системы показана на рис. 8.10.

Выполняя процедуры, аналогичные использованным при выводе выражения (8.54), получим такие же уравнения. Во втором уравнении должен стоять индекс 2, указывающий на принадлежность уравнения к канату длиной  $l_2$ .

В соответствии с рис. 8.10 пределы интегрирования  $[c - d]$  следующие: для каната 1 -  $[0 - l_1]$ , для каната 2 -  $[l_1 - l]$ . Видно, что пределы интегрирования для канатов 1 и 2 такие же как и при рассмотрении аналогичного вопроса в разделе 8.4.4. Тогда для данной задачи будут справедливыми зависимости (8.55) (индекс 3 необходимо заменить на 2).

Запишем граничные условия данной задачи, сформулированные в разделе 8.3.5.

$$\begin{aligned}
x = 0; & \quad X_1'(0) = -k^2 \frac{m_1}{p} X_1(0); \\
x = l_1; & \quad X_1(l_1) = X_2(l_1); \\
& \quad X_1'(l_1) = X_2'(l_1) + k^2 \frac{m_2}{p} X_1(l_1); \\
x = l; & \quad X_2'(l) = k^2 \frac{m_3}{p} X_2(l).
\end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в (8.55) и выполнив преобразования, получим

$$-\frac{k_j^2 - k_n^2}{k_j^2 k_n^2} \left[ \int_0^{l_1} X_{1j}'(x) X_{1n}'(x) dx + \int_{l_1}^l X_{2j}'(x) X_{2n}'(x) dx \right] = 0.$$

Следовательно

$$\begin{cases}
j \neq n; & \int_0^{l_1} X_{1j}'(x) X_{1n}'(x) dx + \int_{l_1}^l X_{2j}'(x) X_{2n}'(x) dx = 0, \\
j = n; & \int_0^{l_1} (X_{1j}'(x))^2 dx + \int_{l_1}^l (X_{2j}'(x))^2 dx \neq 0.
\end{cases} \quad (8.58)$$

Выражение (8.58) подтверждает ортогональность производных фундаментальных функций механической системы, характеризующих двухконцевую, неуравновешенную подъемную установку.

По аналогии с (8.50) ортогональность фундаментальных функций будет характеризоваться уравнениями

$$\begin{cases}
j \neq n; & \int_0^{l_1} X_{1j}(x) X_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l X_{2j}(x) X_{2n}(x) dx + \frac{m_1}{p} X_{1j}(0) X_{1n}(0) + \\
& + \frac{m_2}{p} X_{1j}(l_1) X_{1n}(l_1) + \frac{m_3}{p} X_{2j}(l) X_{2n}(l) = 0; \\
j = n; & \int_0^{l_1} X_{1j}^2(x) dx + \int_{l_1}^l X_{2j}^2(x) dx + \frac{m_1}{p} X_{1j}^2(0) + \frac{m_2}{p} X_{1j}^2(l_1) + \frac{m_3}{p} X_{2j}^2(l) \neq 0.
\end{cases} \quad (8.59)$$

Квадрат нормы весовых и фундаментальных функций  $X_{1j}(x), X_{2j}(x)$  рассматриваемой задачи

$$\|X_j\|_5^2 = \int_0^{l_1} X_{1j}^2(x) dx + \int_{l_1}^l X_{2j}^2(x) dx + \frac{m_1}{p} X_{1j}^2(0) + \frac{m_2}{p} X_{1j}^2(l_1) + \frac{m_3}{p} X_{2j}^2(l).$$

#### 8.4.6. УРАВНОВЕШЕННАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА

Эквивалентная схема, показанная на рис. 8.11, характерна для уравновешенных подъемных установок, в частности – многоканатных. В этой схеме три массы связаны

четырьмя канатами. В соответствии с рис. 8.11 пределы интегрирования следующие: для каната 3 -  $[-(l_3 + l_1) - (-l_1)]$ , для каната 1 -  $[(-l_1) - 0]$ , для каната 2 -  $[0 - l_2]$ , для каната 4 -  $[l_2 - (l_2 + l_4)]$ .

Рассуждая аналогично с вышеприведенным можно установить, что для каждого каната справедливо выражение (8.54). Подставив в это выражение пределы интегрирования получим

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_j^2} \left[ X'_{3j}(-l_1) X_{3n}(-l_1) - X'_{3j}(-l_1 - l_3) X_{3n}(-l_1 - l_3) \right] - \frac{1}{\kappa_n^2} \left[ X'_{3n}(-l_1) X_{3j}(-l_1) + \right. \\ & \left. + X'_{3n}(-l_1 - l_3) X_{3j}(-l_1 - l_3) \right] = \frac{\kappa_j^2 - \kappa_n^2}{\kappa_j^2 \kappa_n^2} \int_{-l_1 - l_3}^{-l_1} X'_{3j}(x) X'_{3n}(x) dx, \\ & \frac{1}{\kappa_j^2} \left[ X'_{1j}(0) X_{1n}(0) - X'_{1j}(-l_1) X'_{1n}(-l_1) \right] - \frac{1}{\kappa_n^2} \left[ X'_{1n}(0) X_{1j}(0) + X'_{1n}(-l_1) X_{1j}(-l_1) \right] = \\ & = \frac{\kappa_j^2 - \kappa_n^2}{\kappa_j^2 \kappa_n^2} \int_{-l_1}^0 X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx, \\ & \frac{1}{\kappa_j^2} \left[ X'_{2j}(l_2) X_{2n}(l_2) - X'_{2j}(0) X_{2n}(0) \right] - \frac{1}{\kappa_n^2} \left[ X'_{2n}(l_2) X_{2j}(l_2) + X'_{2n}(0) X_{2j}(0) \right] = \\ & = \frac{\kappa_j^2 - \kappa_n^2}{\kappa_j^2 \kappa_n^2} \int_0^{l_2} X'_{2j}(x) X'_{2n}(x) dx, \\ & \frac{1}{\kappa_j^2} \left[ X'_{4j}(l_2 + l_4) X_{4n}(l_2 + l_4) - X'_{4j}(l_2) X_{4n}(l_2) \right] - \frac{1}{\kappa_n^2} \left[ X'_{4n}(l_2 + l_4) X_{4j}(l_2 + l_4) + X'_{4n}(l_2) X_{4j}(l_2) \right] = \\ & = \frac{\kappa_j^2 - \kappa_n^2}{\kappa_j^2 \kappa_n^2} \int_{l_2}^{l_2 + l_4} X'_{4j}(x) X'_{4n}(x) dx. \end{aligned} \right. \quad (8.60)$$

Запишем граничные условия для данной задачи, сформулированные в разделе 8.3.6:

$$\begin{aligned} x = -(l_1 + l_3); & \quad X'_3(-l_1 - l_3) = 0; \\ x = -l_1; & \quad X'_3(-l_1) = X'_1(-l_1) + k^2 \frac{m_1}{p} X_3(-l_1); \\ & \quad X_3(-l_1) = X_1(-l_1); \\ x = 0; & \quad X'_1(0) = X'_2(0) + k^2 \frac{m_2}{p} X_1(0); \\ & \quad X_1(0) = X_2(0); \\ x = l_2; & \quad X'_2(l_2) = X'_4(l_2) + k^2 \frac{m_3}{p} X_2(l_2); \\ & \quad X_2(l_2) = X_4(l_2); \\ x = l_2 + l_4; & \quad X'_4(l_2 + l_4) = 0. \end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в (8.60) и сложив последние, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} j \neq n; \quad \int_{-l_1-l_3}^{-l_1} X'_{3j}(x) X'_{3n}(x) dx + \int_{-l_1}^0 X'_{1j}(x) X'_{1n}(x) dx + \int_0^{l_2} X'_{2j}(x) X'_{2n}(x) dx + \\ + \int_{l_2}^{l_2+l_4} X'_{4j}(x) X'_{4n}(x) dx = 0, \\ j = n; \quad \int_{-l_1-l_3}^{-l_1} (X'_{3j}(x))^2 dx + \int_{-l_1}^0 (X'_{1j}(x))^2 dx + \int_0^{l_2} (X'_{2j}(x))^2 dx + \int_{l_2}^{l_2+l_4} (X'_{4j}(x))^2 dx \neq 0. \end{array} \right. \quad (8.61)$$

Для фундаментальных функций уравнения, характеризующие условие ортогональности имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} j \neq n; \quad \int_{-l_1-l_3}^{-l_1} X_{3j}(x) X_{3n}(x) dx + \int_{-l_1}^0 X_{1j}(x) X_{1n}(x) dx + \int_0^{l_2} X_{2j}(x) X_{2n}(x) dx + \\ + \int_{l_2}^{l_2+l_4} X_{4j}(x) X_{4n}(x) dx + \frac{m_1}{p} X_{3j}(-l_1) X_{3n}(-l_1) + \frac{m_2}{p} X_{1j}(0) X_{1n}(0) + \\ + \frac{m_3}{p} X_{2j}(l_2) X_{2n}(l_2) = 0; \\ j = n; \quad \int_{-l_1-l_3}^{-l_1} X_{3j}^2(x) dx + \int_{-l_1}^0 X_{1j}^2(x) dx + \int_0^{l_2} X_{2j}^2(x) dx + \int_{l_2}^{l_2+l_4} X_{4j}^2(x) dx + \\ + \frac{m_1}{p} X_{3j}^2(-l_1) + \frac{m_2}{p} X_{1j}^2(0) + \frac{m_3}{p} X_{2j}^2(l_2) \neq 0. \end{array} \right. \quad (8.62)$$

Квадрат нормы весовых и фундаментальных функций рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} \|X_j\|_6^2 &= \int_{-l_1-l_3}^{-l_1} X_{3j}^2(x) dx + \int_{-l_1}^0 X_{1j}^2(x) dx + \int_0^{l_2} X_{2j}^2(x) dx + \int_{l_2}^{l_2+l_4} X_{4j}^2(x) dx + \\ &+ \frac{m_1}{p} X_{3j}^2(-l_1) + \frac{m_2}{p} X_{1j}^2(0) + \frac{m_3}{p} X_{2j}^2(l_2). \end{aligned}$$

Анализируя вышеприведенные выражения, заметим, что уравнения характеризующие ортогональность фундаментальных функций различных механических систем, имеют общие закономерности. При наличии определенного опыта решения подобного класса задач выражения, подтверждающие ортогональность фундаментальных функций и их производных различных механических систем, можно записывать без громоздких, вышеприведенных выводов.

Например, для многоканатной подъемной установки, работающей в режиме скольжения канатов по футеровке барабана (см. рис. 8.13), выражения, характеризующие ортогональность можно получить по аналогии с приведенными выше

$$\left\{ \begin{array}{l} j \neq n; \quad \int_{-l_3}^0 X'_{1j}(x) X'_{3n}(x) dx + \int_0^l X'_{2j}(x) X'_{2n}(x) dx + \int_l^{l+l_4} X'_{4j}(x) X'_{4n}(x) dx = 0, \\ j = n; \quad \int_{-l_3}^0 (X'_{3j}(x))^2 dx + \int_0^l (X'_{2j}(x))^2 dx + \int_l^{l+l_4} (X'_{4j}(x))^2 dx \neq 0. \end{array} \right.$$

Для фундаментальных функций уравнения, характеризующие условие ортогональности, имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} j \neq n; \\ j = n; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \int_{-l_3}^0 X_{3j}(x) X_{3n}(x) dx + \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx + \int_l^{l+l_4} X_{4j}(x) X_{4n}(x) dx + \\ + \frac{m_1}{p} X_{3j}(x) X_{3n}(x) + \frac{m_3}{p} X_j(x) X_n(x) = 0; \\ \int_{-l_3}^0 X_{3j}^2(x) dx + \int_0^l X_j^2(x) dx + \int_l^{l+l_4} X_{4j}^2(x) dx + \frac{m_1}{p} X_{3j}^2(0) + \frac{m_3}{p} X_j^2(l) \neq 0. \end{array} \right. \quad (8.63)$$

Квадрат нормы весовых и фундаментальных функций задачи

$$\|X_j\|_7^2 = \int_{-l_3}^0 X_{3j}^2(x) dx + \int_0^l X_j^2(x) dx + \int_l^{l+l_4} X_{4j}^2(x) dx + \frac{m_1}{p} X_{3j}^2(0) + \frac{m_3}{p} X_j^2(l).$$

В заключение, еще раз отметим, что полученные выражения позволяют определить постоянные интегрирования уравнения (8.16).

## 8.5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Если вязкоупругую механическую систему вывести из состояния равновесия, а затем возмущающее воздействие убрать, то в системе возникнут колебания относительно положения равновесия.

Процесс свободных колебаний описывается уравнением (8.9). Приняв в качестве решения уравнения (8.15), запишем

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) T_j(t); \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \dot{T}(t). \quad (8.64)$$

где  $X_j(x)$  - фундаментальная функция вязкоупругого элемента;

$T_j(t)$  - функция времени.

Эти функции в общем виде определяются по уравнениям (8.14). Запишем функцию  $T_j(t)$  и ее производную

$$\left\{ \begin{array}{l} T_j(t) = e^{-\mu_j t} (C_j \cos \omega_j t + D_j \sin \omega_j t), \\ \dot{T}(t) = e^{-\mu_j t} \left[ (D_j \omega_j - C_j \mu_j) \cos \omega_j t - (C_j \omega_j + D_j \mu_j) \sin \omega_j t \right]. \end{array} \right. \quad (8.65)$$

В разделе 8.3. для различных механических систем определены собственные числа  $\lambda_j = k_j l$ , коэффициенты  $A_j$  и  $B_j$ , следовательно, и фундаментальная функция  $X_j(x) = A_j \cos k_j x + B_j \sin k_j x$ .

Ряды (8.64) будут решением задачи только в том случае, если коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$  для каждой гармоники таковы, что эти ряды сходятся и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования первого соотношения по  $x$  и по  $t$ .

Решения (8.64) должны еще удовлетворять начальным условиям. Для этого подбираются постоянные  $C_j$  и  $D_j$ . Подставим в равенство (8.65)  $t = 0$ , зависимости (8.64) будут

$$\begin{cases} f(x) = u(x, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(x), \\ \varphi(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(x). \end{cases} \quad (8.66)$$

Умножим обе части равенства (8.66) на  $X_n(x)$  и проинтегрируем в пределах от  $c$  до  $d$ , получим

$$\begin{cases} \int_c^d f(x) X_n(x) dx = \int_c^d \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(x) X_n(x) dx, \\ \int_c^d \varphi(x) X_n(x) dx = \int_c^d \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(x) X_n(x) dx. \end{cases} \quad (8.67)$$

Из соотношений (8.67) определяются постоянные  $C_j$  и  $D_j$ .

Ранее было отмечено, что с целью уменьшения трудоемкости вычислительных процессов по определению заданных функций даже при условии, что последние имеют аналитические выражения, иногда целесообразно использовать численные методы.

При исследовании вынужденных колебаний правая часть волнового уравнения может быть нелинейной. В этом случае частное решение неоднородного уравнения не может быть выражено в квадратурах и необходимо перейти к численным методам решения задачи, в которой в которых общее решение однородного уравнения определяется коэффициентами  $C_j$  и  $D_j$  или начальными условиями функции  $T_j(t)$ . Поэтому, для того, чтобы получить значения  $T_j(t)$  и  $\dot{T}_j(t)$  при численном интегрировании необходимо ввести начальные условия для второго уравнения (8.13)

$$\ddot{T}_j(t) + 2\mu_j \dot{T}_j(t) + b_j^2 T_j(t) = 0.$$

Так как это уравнение имеет решения (8.65) то, очевидно, при  $t = 0$

$$T_j(0) = C_j; \quad \dot{T}_j(0) = D_j \omega_j - C_j \mu_j.$$

Для определения этих коэффициентов необходимо воспользоваться соотношениями (8.41), (8.42), (8.48), (8.52), (8.56), (8.58), (8.61), (8.62), которые характеризуют ортогональность фундаментальных функций исследуемых механических систем.

### 8.5.1. ВЕТВЬ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕГО КАНАТА

Расчетная схема этой задачи приведена на рис. 8.2. Фундаментальная функция определяется уравнением (8.17)

$$X_j(x) = \sin \frac{\pi}{2} (2j - 1) \frac{x}{l}.$$



Коэффициент  $B_j$  принят равным единице.

В разделе 8.4.1 показано, что для механической системы, представляющей ветвь уравнивающего каната и характеризующейся системой функций, ортогональной на отрезке  $[0, l]$ , справедливы приведенные ниже зависимости

$$\begin{aligned} n \neq j; & \quad \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx = 0, \\ n = j; & \quad \int_0^l X_j^2(x) dx \neq 0. \end{aligned}$$

Поэтому из (8.67) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l C_j X_j^2(x) dx &= \int_0^l f(x) X_j(x) dx, \\ \int_0^l (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j^2(x) dx &= \int_0^l \varphi(x) X_j(x) dx. \end{aligned}$$

Из этих выражений определяются  $C_j$  и  $D_j$

$$C_j = \frac{\int_0^l f(x) X_j(x) dx}{\|X_j\|_1^2}; \quad D_j = \frac{1}{\omega_j} \left[ \mu_j C_j + \frac{\int_0^l \varphi(x) X_j(x) dx}{\|X_j\|_1^2} \right], \quad (8.68)$$

где  $\|X_j\|_1^2$  - квадрат нормы функции  $X_j(x)$ , определенной из уравнения (8.42).

Коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$ , вычисленные по формулам (8.68) называются коэффициентами Фурье функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  по системе ортогональных функций [59].

Для определения начальных условий, т. е. функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , предположим, что к нижнему сечению уравнивающего каната (рис. 8.2) приложена сила  $S$ , а затем, при начальной скорости  $v_0$ , эта сила убирается. Начинаются свободные колебания. Под действием силы  $S$  канат длиной  $l$  удлинится на величину

$$u(l, 0) = \frac{S}{c},$$

где  $c = \frac{EF}{l}$  - жесткость каната, Н·м<sup>-1</sup>.

Так как деформация  $u(l, 0)$  распределится равномерно по всей длине каната, то, очевидно, можно записать

$$\begin{cases} f(x) = \frac{S}{EF}x, \\ \varphi(x) = \frac{v_0}{l}x. \end{cases} \quad (8.69)$$

Подставив значения  $X_j(x)$ ,  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в (8.68) получим

$$C_j = \frac{\int_0^l \frac{S}{EF}x \sin \frac{\pi}{2l}(2j-1)x dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{2l}(2j-1)x dx}.$$

$$\frac{S}{EF} \int_0^l x \sin \frac{\pi}{2l}(2j-1)x dx = \frac{S}{EF} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{2}(2j-1) \cdot l \cos \frac{\pi}{2}(2j-1)}{\left[ \frac{\pi}{2l}(2j-1) \right]^2} - \frac{\pi}{2l}(2j-1) \right\}$$

$$\sin \frac{\pi}{2}(2j-1) = +1 - \text{для нечетного } j = 1, 3, 5, \dots;$$

$$\sin \frac{\pi}{2}(2j-1) = -1 - \text{для четного } j = 2, 4, 6, \dots;$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(2j-1) = 0 \quad - \text{для всех } j, \text{ поэтому}$$

$$\int_0^l x \sin \frac{\pi}{2l}(2j-1)x dx = \frac{4l^2}{\pi^2(2j-1)^2}(-1)^{j-1}.$$

Знаменатель равен

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{2l}(2j-1)x dx = \frac{1}{2}l - \frac{l}{2\pi(2j-1)} \sin \pi(2j-1) = \frac{1}{2}l.$$

Тогда

$$C_j = 8 \frac{S}{c \pi^2(2j-1)^2}(-1)^{j-1}. \quad (8.70)$$

Для определения коэффициента  $D_j$  найдем значение интеграла, стоящего в числителе второго выражения (8.68)

$$\int_0^l v_0 \sin \frac{\pi}{2l}(2j-1)x dx = 2 \frac{v_0 l}{\pi(2j-1)}.$$

Тогда

$$D_j = \frac{1}{\omega_j} \left[ \frac{4v_0}{\pi(2j-1)} + \mu_j C_j \right]. \quad (8.71)$$

Если усилие  $S$  было снято в момент, когда скорость  $v_0 = 0$ , коэффициент  $D_j = \frac{\mu_j}{\omega_j} C_j$ .

Если представить канат упругим элементом, то  $\mu_j = 0$ , и при  $v_0 = 0$ ,  $D_j = 0$ .

Таким образом, процесс свободных колебаний ветви уравновешивающего каната описывается уравнениями

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) X_j(x); \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{\infty} \dot{T}_j(t) X_j(x); \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \ddot{T}_j(t) X_j(x); \\ T_j(t) &= e^{-\mu_j t} (C_j \cos \omega_j t + D_j \sin \omega_j t); \\ \dot{T}_j(t) &= e^{-\mu_j t} (M_j \cos \omega_j t + N_j \sin \omega_j t); \\ \ddot{T}_j(t) &= e^{-\mu_j t} (P_j \cos \omega_j t + Q_j \sin \omega_j t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_j &= D_j \omega_j - C_j \mu_j; & N_j &= -(C_j \omega_j + D_j \mu_j); \\ P_j &= N_j \omega_j - M_j \mu_j; & Q_j &= -(M_j \omega_j + N_j \mu_j). \end{aligned}$$

Сила упругости каната определится из уравнения (8.3), которое можно представить

$$S_j(x, t) = EF \left[ T_j(t) + \mu_{\kappa j} \dot{T}_j(t) \right] X_j'(x). \quad (8.72)$$

Полученные уравнения показывают, что ветвь уравновешивающего каната совершает гармонические колебания.

Для того чтобы оценить влияние каждой гармоники на амплитуды колебаний предположим, что канат - упругий элемент,  $\mu_{\kappa}$  и  $\mu_j$  равны нулю, а усилие  $S$  убирается при скорости  $v_0 = 0$ , тогда из уравнения (8.71)  $D_j = 0$ , а из уравнения (8.70)

$$C_j = \frac{8S(-1)^{j-1}}{c\pi^2(2j-1)^2}.$$

Если в качестве критерия выбрать амплитудное значение силы упругости, то последняя при принятых допущениях определится как

$$S_j(x, t) = EFC_j \left[ \frac{\pi}{2l} (2j-1) \cos \frac{\pi}{2} (2j-1) \frac{x}{l} \right] \cos \omega_j t.$$

Амплитудные значения будут при  $t = 0, \frac{\pi}{\omega_j}, 2\frac{\pi}{\omega_j} \dots$ .

Например, для верхнего сечения каната ( $x = 0$ ) амплитудные значения усилий будут

$$S_j(0, 0) = 4S \frac{(-1)^{j-1}}{\pi(2j-1)}.$$

Таким образом, для 1 ÷ 6 гармоник

$$\frac{S_1}{S} = 1,274; \frac{S_2}{S} = -0,424; \frac{S_3}{S} = 0,255; \frac{S_4}{S} = -0,182; \frac{S_5}{S} = 0,14; \frac{S_6}{S} = -0,115.$$

Отношение, суммы усилий шести гармоник к статической силе равно  $\sum_{j=1}^6 \frac{S_j}{S} = 0,94991$ .

Если проанализировать сходимость ряда для закономерности, характеризующей координату, то максимальное значение деформации будет при  $t = 0$  и  $x = l$ , поэтому при  $v_0 = 0$  и  $h_j = 0$

$$u_j(l, 0) = C_j \sin \frac{\pi}{2} (2j-1) = \frac{S}{c} \frac{8}{\pi^2 (2j-1)^2}.$$

Величина  $\frac{S}{c} = u_{cm}$  - статическая деформация каната, имеющего жесткость  $c$ , под действием силы  $S$ .

Тогда

$$\frac{u_j(l, 0)}{u_{cm}} = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2}.$$

Эти величины соответственно для шести гармоник равны 0,811; 0,09; 0,032; 0,0165; 0,01; 0,0067. Сумма шести гармоник

$$\sum_{j=1}^6 \frac{u_j(l, 0)}{u_{cm}} = 0,966.$$

Таким образом, при исследовании динамических процессов ветви уравнивающего каната сумма шести гармоник характеризует искомый результат с точностью 4 - 5 %.

Пример 8.8. Исследовать закономерности формирования усилия в верхнем и среднем сечениях уравнивающего каната при свободных колебаниях.

Предположим, к нижнему сечению уравнивающего каната приложена статическая сила  $S = 1$  кН и при скорости  $v = 0$  эта сила снимается. Начинается процесс свободных колебаний.

Исследования выполнены с помощью пакета Mathcad 7. Ниже приведена программа реализации вычислительного процесса и построения графических зависимостей.

Εααίοεεεαδιδού:

n -εñεί έαίαδία; E -ίάοεü όιδόαίñδè έαίαδία;

F<sub>k</sub> -ίειüαü άñάδ ίδίαίει+άέ á έαίαδ; l -άέείά έαίαδ;

p -ñóììäðíäý έείάείäý ίετόίñδó έαίαδία; S<sub>k</sub> -óñέέέá á έαίαδ;

δ<sub>k</sub> -είάαδèδìè+άñέέé ááèδèíäíò έίεάάίέé;

Ίñδäéüíüά ίάίçíä+áíéý ññδäáðñδáðò ίάίçíä+áíéýì, ίδèíýðüì á δαçááéá 8.3.8.  
 ίάέíðìðüá íδèéíáíéý ñäýçáíü ñí ñíäòèδèééé ίδίαδäììèδíäáíéý á íäéáðä Mathcad 7.

n := 4      F<sub>k</sub> := 7.163 10<sup>-4</sup>      E := 12.8 10<sup>10</sup>      p := 26      l := 900      v<sub>0</sub> := 0      δ<sub>k</sub> := .15

$$a := \sqrt{E \cdot \frac{F_k}{p} \cdot n} \quad a = 3.756 \times 10^3 \quad S_{cm} := 9.81 \cdot n \cdot p \cdot l \quad S_{cm} = 9.182 \times 10^5 \quad S_k := S_{cm}$$

$$\lambda(j) := \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot j - 1) \quad k(j) := \frac{\lambda(j)}{l} \quad b(j) := k(j) \cdot a \quad \mu(j) := \frac{\delta_k}{2 \cdot \pi} \cdot b(j) \quad \mu(1) = 0.156$$

$$\mu_k(j) := \frac{2 \cdot \mu(j)}{(b(j))^2} \quad \omega(j) := \sqrt{b(j)^2 - \mu(j)^2} \quad \omega(1) = 6.553$$

$$f(x) := \frac{S_k}{E \cdot F_k} \cdot x \quad \phi(x) := v_0 \quad X(j, x) := \sin(k(j) \cdot x) \quad X1(j, x) := k(j) \cdot \cos(k(j) \cdot x)$$

Ίδίαά δèì, äüñéíýáðñý èè óñéíäéá ίδòíäíäéüíñδè?

$$\int_0^l X(1, x) \cdot X(2, x) dx \quad \text{yields} \quad 0$$

Ñéäáíääðäéüíí έίýðèèèáíðü C<sub>k</sub>(j) è D<sub>k</sub>(j) ίñéíí ñδäáäéýðü ñ ðíðìóèàì:

$$C_k(j) := \frac{\int_0^l f(x) \cdot X(j, x) dx}{\int_0^l (X(j, x))^2 dx} \quad D_k(j) := \frac{1}{\omega(j)} \left[ \frac{\int_0^l \phi(x) \cdot X(j, x) dx}{\int_0^l (X(j, x))^2 dx} + \mu(j) \cdot C_k(j) \right]$$

C<sub>k</sub>(1) = 7.306      D<sub>k</sub>(1) = 0.174

$$T_k(j, t) := \exp(-\mu(j) \cdot t) \cdot (C_k(j) \cdot \cos(\omega(j) \cdot t) + D_k(j) \cdot \sin(\omega(j) \cdot t))$$

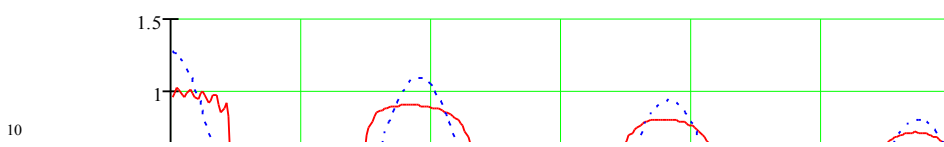
$$M_k(j) := D_k(j) \cdot \omega(j) - C_k(j) \cdot \mu(j) \quad N_k(j) := -(C_k(j) \cdot \omega(j) + D_k(j) \cdot \mu(j))$$

$$T1_k(j, t) := \exp(-\mu(j) \cdot t) \cdot (M_k(j) \cdot \cos(\omega(j) \cdot t) + N_k(j) \cdot \sin(\omega(j) \cdot t))$$

$$S_{dk}(j, t) := \frac{[E \cdot F_k \cdot (T_k(j, t) + \mu_k(j) \cdot T1_k(j, t)) \cdot X1(j, 0)]}{S_{cm}}$$

t := 0, 0.1..3

$$\sum_{j=1}^{10} S_{dk}(j, t)$$



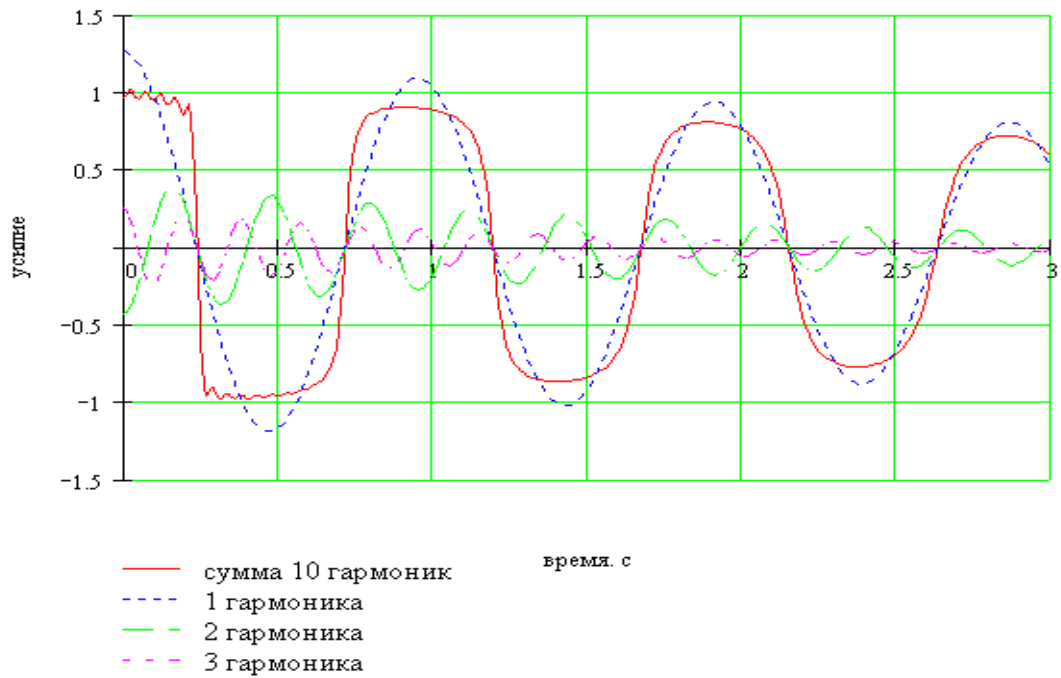


Рис. 8.14. Относительная величина усилия в верхнем сечении каната

Видно, что в начале процесса свободных колебаний в течение  $1/4$  периода динамическая составляющая усилия остается постоянной, а затем резко уменьшается. Высокочастотные составляющие суммарной кривой объясняются сложением 10 гармоник. Очевидно, если количество гармоник увеличить, то суммарная характеристика усилий, на протяжении этого времени, будет постоянной, а ее величина равна единице. Высшие гармоники быстро затухают и колебательный процесс становится гармоническим.

Для сечения каната, расположенного на середине ( $x = \frac{l}{2} = 450$  м), фундаментальная функция

$X_1(j, 450) = \kappa(j) \cos\left(\frac{\lambda(j) l}{l} \frac{l}{2}\right) = \kappa(j) \cos\left[\frac{\pi}{4}(2j-1)\right]$ . Характеристика колебательного процесса будет абсолютно аналогична характеристике, показанной на рис. 8.14. Амплитудная величина уменьшается в  $\cos \frac{\pi}{4} \approx 0,7$  раза.

### 8.5.2. МАССА, ПОДВЕШЕННАЯ НА КАНАТЕ.

Эквивалентная схема этой задачи показана на рис. 8.1. Если в качестве начальной координаты принять точку крепления каната к верхнему основанию  $x = c = 0$ , а точка крепления к массе имеет координату  $x = l = d$ , то выражения (8.67) имеют вид

$$\begin{cases} \int_0^l f(x) X_n(x) dx = \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(x) X_n(x) dx, \\ \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(x) X_n(x) dx. \end{cases}$$

Используя выражение, характеризующее ортогональность фундаментальных функций задачи (8.48), нетрудно заметить, что из этих выражений можно записать

$$\text{при } j \neq n; \quad \begin{cases} \int_0^l f(x) X_n(x) dx = -\sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{m}{p} X_j(l) X_n(l), \\ \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} [D_j \omega_j - C_j \mu_j] \left[ -\frac{m}{p} X_j(l) X_n(l) \right], \end{cases} \quad (8.73)$$

$$\text{при } j=n; \quad \begin{cases} \int_0^l f(x) X_n(x) dx = C_n \int_0^l X_n^2(x) dx, \\ \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = (D_n \omega_n - C_n \mu_n) \int_0^l X_n^2(x) dx. \end{cases}$$

В первом выражении сумма распространяется на все значения  $j$  от 1 до  $\infty$ , кроме  $j = n$ .

Таким образом, выражения, в которых есть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , можно записать

$$\begin{cases} \int_0^l f(x) X_n(x) dx = -\sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{m}{p} X_j(l) X_n(l) + C_n \int_0^l X_n^2(x) dx, \\ \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} [D_j \omega_j - C_j \mu_j] \left[ -\frac{m}{p} X_j(l) X_n(l) \right] + (D_n \omega_n - C_n \mu_n) \int_0^l X_n^2(x) dx. \end{cases} \quad (8.74)$$

В этих уравнениях неизвестны величины  $C_j$ ,  $C_n$  и  $D_j$ ,  $D_n$ . Для того чтобы установить взаимосвязь между ними, воспользуемся начальными условиями (8.69). Для координаты  $x = l$  запишем

$$\begin{aligned} f(l) &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(l); & \varphi(l) &= \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(l); \\ f(l) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(l); & \varphi(l) &= \sum_{j=1}^{\infty} (D_n \omega_n - C_n \mu_n) X_n(l). \end{aligned}$$

Умножим обе части этих равенств на  $X_n(l)$  и  $X_j(l)$ , а затем проинтегрируем в пределах от 0 до  $l$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^l f(l) X_n(l) dx &= \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(l) X_n(l) dx; \\ \int_0^l \varphi(l) X_j(l) dx &= \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(l) X_n(l) dx; \\ \int_0^l \varphi(l) X_n(l) dx &= \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(l) X_n(l) dx; \\ \int_0^l \varphi(l) X_j(l) dx &= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \omega_n - C_n \mu_n) X_n(l) X_j(l) dx. \end{aligned}$$

В этих выражениях в отличие от (8.67) все подынтегральные выражения - суть постоянные величины, поэтому

$$\begin{aligned}
 j \neq n; \quad f(l) X_n(l) l &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(l) X_n(l) l; & f(l) &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(l); \\
 j = n; \quad f(l) X_j(l) l &= C_n X_n^2(l) l; & f(l) &= C_n X_n(l). \\
 j \neq n; \quad \varphi(l) X_n(l) l &= \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(l) X_n(l) l; & \varphi(l) &= \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j(l); \\
 j = n; \quad \varphi(l) X_j(l) l &= (D_n \omega_n - C_n \mu_n) X_n^2(l) l; & \varphi(l) &= (D_n \omega_n - C_n \mu_n) X_n(l).
 \end{aligned}$$

Еще раз напомним, что сумма  $\sum_{j=1}^{\infty} C_j$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} D_j$  распространяется на все значения  $j$  от 0 до  $\infty$ , кроме  $j = n$ , поэтому можно записать

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j(l) = f(l) - C_n X_n(l), \\ \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \omega_j - C_j \mu_j) X_j l = \varphi(l) - (D_n \omega_n - C_n \mu_n) X_n(l). \end{cases} \quad (8.75)$$

Подставив выражения (8.75) в (8.74), определим

$$C_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx + \frac{m}{p} f(l) X_n(l)}{\|X_n\|_2^2}, \quad (8.76)$$

$$D_n = \frac{1}{\omega_n} \left[ C_n \mu_n + \frac{\int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx + \frac{m}{p} \varphi(l) X_n(l)}{\|X_n\|_2^2} \right],$$

где  $\|X_j\|_2^2$  - квадрат нормы фундаментальной и весовой функций, определенной из уравнения (8.50).

Значительно проще коэффициенты  $C_n$  и  $D_n$  определяются если использовать свойства механической системы, которые говорят о том, что если к упругим связям присоединены сосредоточенные массы, то тогда производные фундаментальных функций ортогональны.

Для этого продифференцируем выражения (8.66) и умножим обе части на  $X_n'(x)$ , а затем проинтегрировав, получим

$$\int_0^l f'(x) X_n'(x) dx = \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j'(x) X_n'(x) dx.$$



Учитывая ортогональность производных фундаментальных функций, определим

$$C_j = \frac{\int_0^l f'(x) X_j'(x) dx}{\int_0^l (X_j'(x))^2 dx},$$

$$D_j = \frac{1}{\omega_j} \left[ C_j \mu_j + \frac{\int_0^l \varphi'(x) X_j'(x) dx}{\int_0^l (X_j'(x))^2 dx} \right]. \quad (8.77)$$

Подставив значения начальных условий (8.69)  $f(x) = \frac{S}{EF}x$  и  $X_n(x) = \sin \lambda_n \frac{x}{l}$  и выполнив преобразования, получим

$$C_j = \frac{4Sl \sin \lambda_n}{EF \lambda_n (2\lambda_n + \sin 2\lambda_n)}. \quad (8.78)$$

Отметим, что использование пакета Mathcad 7 освобождает от процедуры преобразований формул к виду подобному формуле (8.78). Вычисление значений коэффициентов

$C_j$  и  $D_j$  осуществляется по формулам в общем виде (8.76), (8.77).

Таким образом, подставив значения  $C_j$  и  $D_j$  в уравнения (8.65), с помощью выражений (8.64) определяются относительная деформация  $u(x,t)$  и скорость деформации  $\dot{u}(x,t)$  вязкоупругого элемента в заданном сечении  $x$ . Усилие определяется по уравнению (8.72).

Пример 8.9. Определить усилие в верхнем сечении каната при свободных колебаниях массы, подвешенной на канате. Условия приложения и снятия усилия аналогичны таковым в примере 8.8.

Коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$  определяются по уравнениям (8.77). Вычислив  $u(x,t)$  и  $\dot{u}(x,t)$  с помощью выражения (8.72) определяется усилие в верхнем сечении каната. Реализация вычислительного процесса и построения графиков аналогична приведенным в примере 8.8.

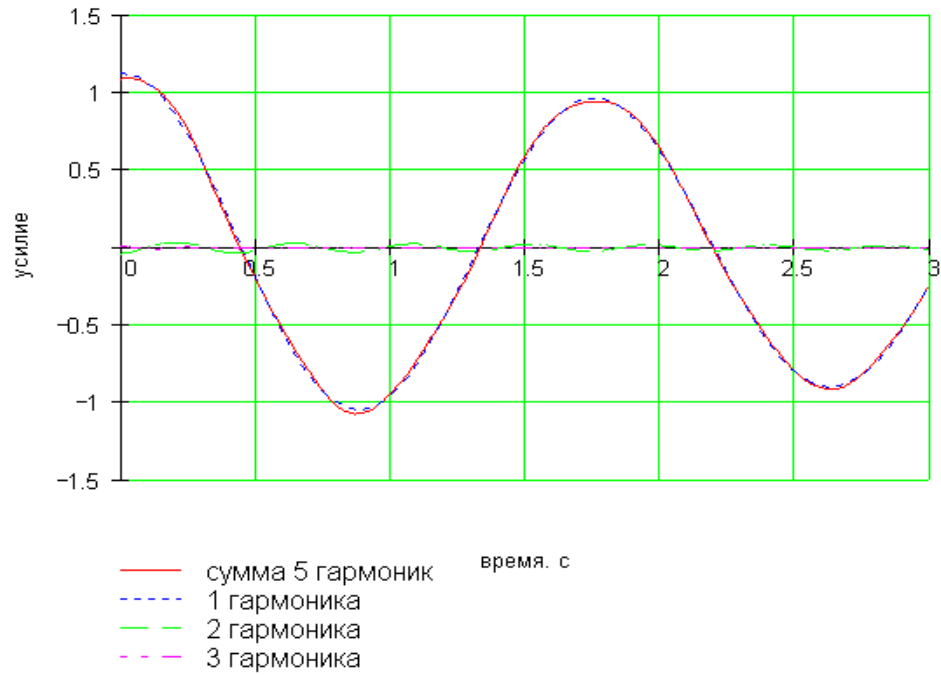


Рис. 8.15. Относительная величина усилия в верхнем сечении каната

На рис. 8.15 показаны кривые, характеризующие изменение усилия, соответствующие первой, второй, третьей и сумме пяти гармоник. При  $t = 0$  значение ординаты кривой первой гармоники превышает соответствующую величину суммарной кривой в 1,03 раза. Ордината второй гармоники составляет 0,034 от суммарной, а третьей - 0,0057. Поэтому кривая третьей гармоники на рис. 8.15 практически сливается с осью абсцисс. Эти результаты говорят о том, что при исследовании данной задачи достаточно учитывать три гармоники, при этом их сумма будет отличаться от реальной кривой не более чем в  $(1,03 - 0,034) = 0,996$  раза. Отметим, что здесь под реальной кривой понимается теоретическая кривая, полученная при учете бесконечного числа гармоник. Из рисунка видно, что высокочастотные гармоники быстро затухают и усилие колеблется по гармоническому закону.

### 8.5.3. ДВЕ МАССЫ, СОЕДИНЕННЫЕ ВЯЗКОУПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

Схема, показанная на рис. 8.8 соответствует работе многих машин, в том числе конвейеров и одноконцевых подъемных установок.

По аналогии с вышерассмотренными задачами продифференцируем уравнение (8.66), а затем умножим на  $X_n'(x)$  и проинтегрируем в пределах  $[c - d]$ , получим для первого уравнения

$$\int_c^d f'(x) X_n'(x) dx = \int_c^d \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_j'(x) X_n'(x) dx.$$

Используя свойство ортогональности производных фундаментальных функций задачи, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{\int_0^l f'(x) X'_n(x) dx}{\int_0^l (X'_n(x))^2 dx}, \\ D_n = \frac{1}{\omega_n} \left[ C_n \mu_n + \frac{\int_0^l \varphi'(x) X'_n(x) dx}{\int_0^l (X'_n(x))^2 dx} \right]. \end{array} \right. \quad (8.79)$$

Для определения динамических составляющих сил упругости в канате при свободных колебаниях можно воспользоваться данными, приведенными в примере 8.4.

Начальные условия характеризуются функциями (8.69). Вычисления постоянных  $C_n$  и  $D_n$  осуществляются по уравнению (8.79). Динамические составляющие усилий в точках крепления канатов определяются по зависимостям (8.72).

Колебания механической системы имеют гармонический характер, Первая гармоника составляет 96 % от суммы амплитудного значения [70]. Для достижения инженерной точности достаточно учитывать три гармоники.

#### 8.5.4. МАССА С ПРИСОЕДИНЕНИЕМ К НЕЙ ДВУХ КАНАТОВ

Данная задача имеет практический интерес. Примером такой механической системы является уравновешенная подъемная установка после остановки органа навивки. Эквивалентная схема для ветвей канатов уравновешенного подъема приведена на рис. 8.6. В этой схеме в колебательном процессе участвуют два каната, каждый из которых подчиняется закономерностям (8.64), (8.65).

Запишем эти выражения для канатов, имеющих длины  $l_1$  и  $l_3$

$$u_1(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_{1j}(x) T_j(t); \quad u_3(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_{3j}(x) T_j(t).$$

Если использовать начальные условия, сформулированные зависимостями (8.69), то для  $t = 0$  можно записать

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_{1j}(x); \quad f_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j X_{3j}(x).$$

Выполнив вычислительные процедуры аналогичные тем, которые использованы при выводе выражений (8.79), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{\int_0^{l_1} f_1'(x) X'_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l f_3'(x) X'_{3n}(x) dx}{\int_0^{l_1} (X'_{1n}(x))^2 dx + \int_{l_1}^l (X'_{3n}(x))^2 dx}, \\ D_n = \frac{1}{\omega_n} \left[ C_n \mu_n + \frac{\int_0^{l_1} \varphi_1'(x) X'_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l \varphi_3'(x) X'_{3n}(x) dx}{\int_0^{l_1} (X'_{1n}(x))^2 dx + \int_{l_1}^l (X'_{3n}(x))^2 dx} \right]. \end{array} \right. \quad (8.80)$$

Отметим еще раз, что при численном интегрировании функции  $T(t)$  в качестве начальных условий принимаются  $T(0) = C_n$ ;  $\dot{T}(0) = D_n \omega_n - C_n \mu_n$ .

Используя уравнения (8.64), (8.72) определяются кинематические и динамические параметры при свободных колебаниях механической системы "масса, с присоединенными к ней двумя канатами". Характеристики процесса имеют гармонический характер.

#### 8.5.5. ДВУХКОНЦЕВАЯ НЕУРАВНОВЕШЕННАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА

Эквивалентная схема двухконцевой подъемной установки приведена на рис. 8.10. Анализируя выражения (8.77), (8.79) и (8.80), определяющие значения  $C_n$  и  $D_n$  для различных механических систем, можно заметить общие закономерности. Используя эти закономерности, запишем значения коэффициентов  $C_n$  и  $D_n$ .

Итак, эквивалентная схема рассматриваемой задачи состоит из двух канатов и трех масс, поэтому по аналогии с (8.79) и (8.80) можно сразу записать

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{\int_0^{l_1} f_1'(x) X'_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l f_2'(x) X'_{2n}(x) dx}{\int_0^{l_1} (X'_{1n}(x))^2 dx + \int_{l_1}^l (X'_{2n}(x))^2 dx}, \\ D_n = \frac{1}{\omega_n} \left[ C_n \mu_n + \frac{\int_0^{l_1} \varphi_1'(x) X'_{1n}(x) dx + \int_{l_1}^l \varphi_2'(x) X'_{2n}(x) dx}{\int_0^{l_1} (X'_{1n}(x))^2 dx + \int_{l_1}^l (X'_{2n}(x))^2 dx} \right]. \end{array} \right. \quad (8.81)$$

Динамический процесс при свободных колебаниях носит гармонический характер. Первая гармоника имеет преобладающее влияние. Высшие гармоники искажают гармонический процесс, затем быстро затухают и не влияют на результирующую кривую [70].

## 8.5.6. УРАВНОВЕШЕННАЯ ПОДЪЕМНАЯ УСТАНОВКА

Эквивалентная схема уравновешенной подъемной установки, состоящей из трех масс и четырех канатов, приведена на рис. 8.11. Отличительная особенность этой схемы от вышерассмотренных состоит в том, что начало оси координат принято в середине массы  $m_2$ . В разделе 8.3.6 было отмечено, что в любой механической системе значения собственных чисел и фундаментальные функции не зависят от выбора точки начала отсчета системы координат, поэтому, несмотря на это отличие, при определении коэффициентов  $C_n$  и  $D_n$ , можно использовать общие закономерности.

На этом основании, принимая за основу схему, приведенную на рис. 8.11, запишем значения постоянных интегрирования

$$C_n = \frac{\int_{-l_1-l_3}^{-l_1} f'(x) X'_{3n}(x) dx + \int_{-l_1}^0 f'(x) X'_{1n}(x) dx + \int_0^{l_2} f'(x) X'_{2n}(x) dx + \int_{l_2}^{l_2+l_4} f'(x) X'_{4n}(x) dx}{\sum_{i=1}^4 \int_c^d (X'_i(x))^2 dx} \quad (8.82)$$

$$D_n = \frac{1}{\omega_n} \left[ C_n \mu_n + \frac{\int_{-l_1-l_3}^{-l_1} \varphi'_3(x) X'_{3n}(x) dx + \int_{-l_1}^0 \varphi'_1(x) X'_{1n}(x) dx + \int_0^{l_2} \varphi'_2(x) X'_{2n}(x) dx}{\sum_{i=1}^4 \int_c^d (X'_i(x))^2 dx} + \frac{\int_{l_2}^{l_2+l_4} \varphi'(x) X'_{4n}(x) dx}{\sum_{i=1}^4 \int_c^d (X'_i(x))^2 dx} \right],$$

$$\text{где } \sum_{i=1}^4 \int_c^d (X'_i(x))^2 dx = \int_{-l_1-l_3}^{-l_1} (X'_{3n}(x))^2 dx + \int_{-l_1}^0 (X'_{1n}(x))^2 dx + \int_0^{l_2} (X'_{2n}(x))^2 dx + \int_{l_2}^{l_2+l_4} (X'_{4n}(x))^2 dx.$$

По аналогии, для многоканатной подъемной установки, работающей в режиме скольжения канатов по футеровке барабанов (рис. 8.13), можно записать

$$C_n = \frac{\int_{-l_3}^0 f'_3(x) X'_{3n}(x) dx + \int_0^l f'(x) X'_n(x) dx + \int_l^{l_4+l} f'_4(x) X'_{4n}(x) dx}{\int_{-l_3}^0 (X'_{3n}(x))^2 dx + \int_0^l (X'_n(x))^2 dx + \int_l^{l_4+l} (X'_{4n}(x))^2 dx}, \quad (8.83)$$

$$D_n = \frac{1}{\omega_n} \left[ C_n \mu_n + \frac{\int_{-l_3}^0 \varphi'_3(x) X'_{3n}(x) dx + \int_0^l \varphi'(x) X'_n(x) dx + \int_l^{l_4+l} \varphi'_4(x) X'_{4n}(x) dx}{\int_{-l_3}^0 (X'_{3n}(x))^2 dx + \int_0^l (X'_n(x))^2 dx + \int_l^{l_4+l} (X'_{4n}(x))^2 dx} \right].$$

Таким образом, определив постоянные интегрирования  $C_n$  и  $D_n$ , зная фундаментальные функции из уравнений (8.64) и (8.72) определяются кинематические и динамические параметры механических систем.

Пример 8.10. исследовать закономерности формирования усилия в канатах многоканатной подъемной установки. Эквивалентную схему установки см. рис. 8.11. Расположение масс  $m_1$  и  $m_3$  соответствует встрече сосудов в стволе (см. рис. 8.12, б). Определим усилия в канатах 1 ( $x=0$ ); 2 ( $x=0$ ); 3 ( $x = -l_1$ ); 4 ( $x = l_2$ ).

Для исследования процесса свободных колебаний механической системы, показанной на рис. 8.11, предположим к канату 4 в координате  $x = l_2 + l_4$ , приложена статическая сила  $S_{cm}$ , скорость  $v_0 = 0$ , при этом масса  $m_2$  закреплена. В момент снятия силы  $S_{cm}$ , масса  $m_2$  освобождается и под действием сил упругости в канатах совершает свободные колебания. Закономерности формирования усилий в канатах определить в относительных единицах, т. е. результаты, полученные по формуле (8.72) разделить на  $S_{cm}$ .

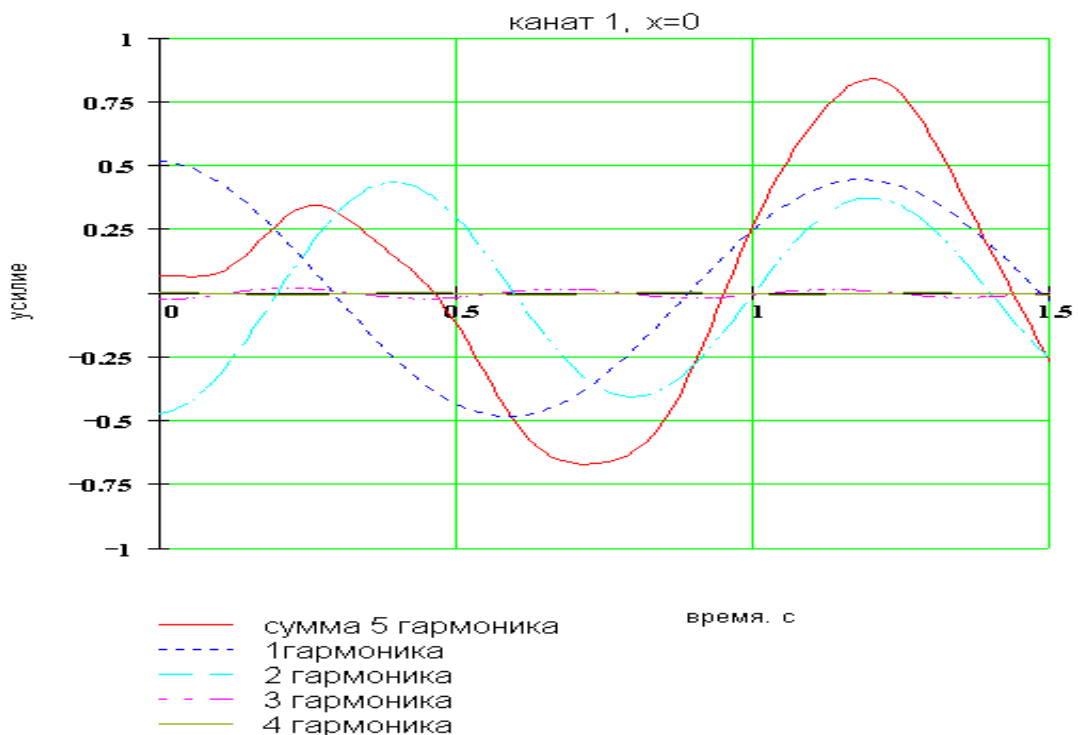
Для определения расчетных коэффициентов воспользуемся результатами, приведенными в табл. 8.3. Эти данные позволяют определить фундаментальные функции каждого каната для пяти гармоник. Для определения функций  $T(t)$  и  $\dot{T}(t)$  (уравнения (8.65)) находятся коэффициенты  $\omega_n$ ,  $\mu_n$ ,  $C_n$  и  $D_n$ , которые приведены в табл. 8.5. Вычислительный процесс и построение графиков выполнены в математическом пакете Mathcad 7.

Таблица 8.5

Значения коэффициентов  $C_n$  и  $D_n$ 

Номер гармоники	1	2	3	4	5
$\lambda_n$	0,68	1,011	1,7894	1,8758	3,282
$\omega_n$	5,264	7,8267	13,8497	14,5232	25,408
$\mu_n$	0,125	0,1868	0,3307	0,3468	0,6067
$C_n$	- 0,803	0,8303	- $6,27 \cdot 10^{-3}$	0,065	$4,537 \cdot 10^{-4}$
$D_n$	- 0,0192	- 0,0198	- $1,49 \cdot 10^{-4}$	$1,54 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-5}$

На рис. 8.16 показаны характеристики формирования усилия в канате 1 в точке крепления этого каната к массе  $m_2$  ( $x = 0$ ). Видно, что на результирующее усилие определяющее влияние оказывают 1 и 2 гармоники. Третья и последующие гармоники не превышают относительной величины 0,02.

Рис. 8.16. Усилия в канате 1 ( $x = 0$ ) в точке крепления его к массе  $m_2$

На рис. 8.17 приведены характеристики формирования усилия в канате 2 в точке крепления этого каната к массе  $m_2$  ( $x = 0$ ). Определяющее влияние на результирующее усилие оказывают 1, 2 и 3 гармоники. Так как длины канатов  $l_1$  и  $l_2$  равны, а масса  $m_3 > m_1$ , то частота колебаний во втором случае несколько выше по сравнению с первым. Четвертая и пятая гармоники практически не оказывают влияния.

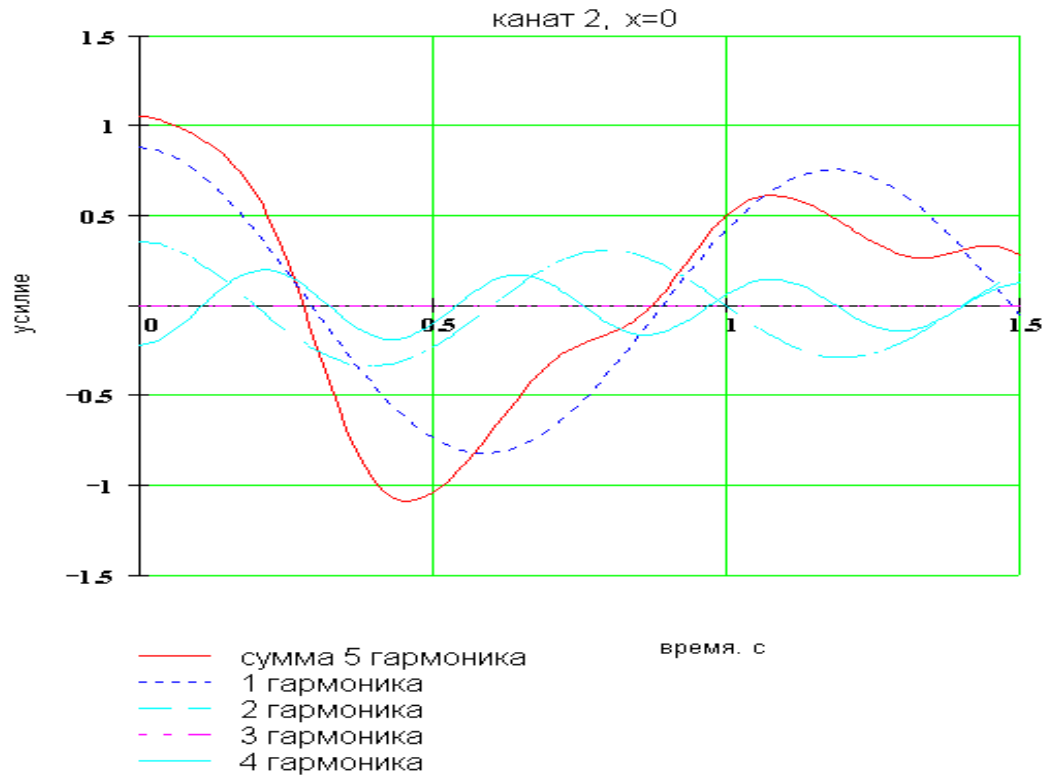


Рис. 8.17. Усилия в канате 2 ( $x = 0$ ) в точке крепления его к массе  $m_2$

На рис. 8.18 показаны характеристики формирования усилия в уравновешивающем канате 3 в точке крепления его к массе  $m_1$  ( $x = -l_1$ ). Для данного случая на результирующую величину оказывают существенное влияние четыре первых гармоники.

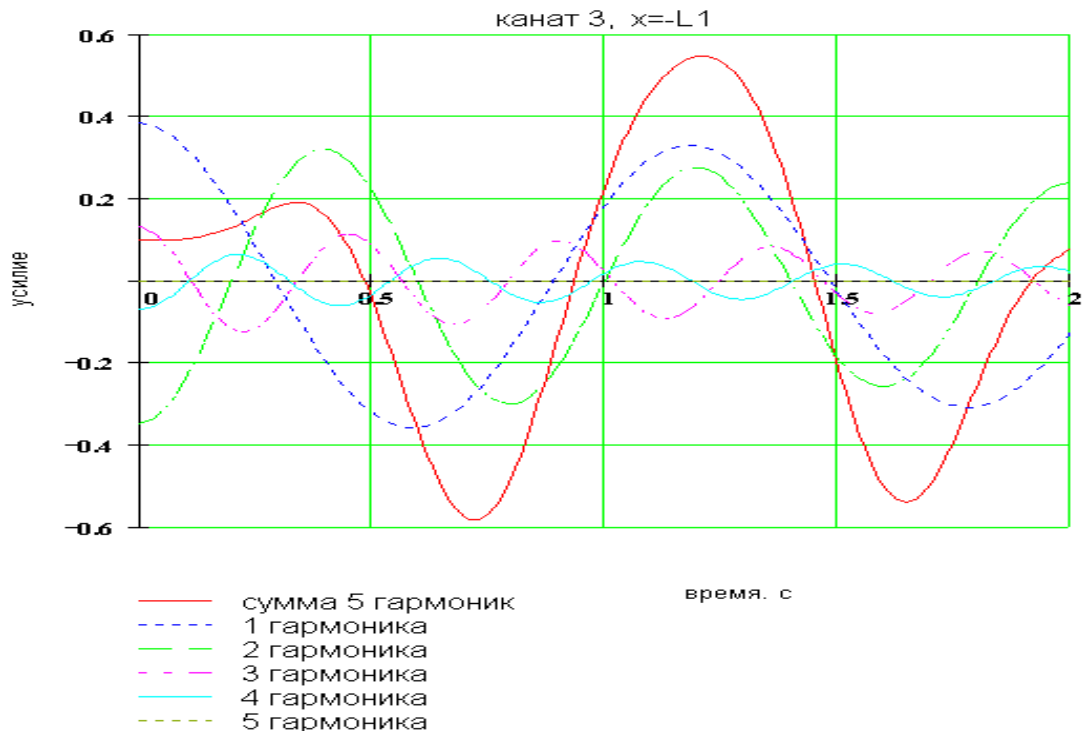


Рис. 8.18. Усилия в уравновешивающем канате 3 ( $x = -l_1$ ) в точке крепления его к массе  $m_1$

На рис. 8.19 приведены характеристики формирования усилия в уравновешивающем канате 4 в точке крепления его к массе  $m_3$ . Видно, что результирующая кривая повторяет закономерности четвертой гармоники, так как ее влияние оказалось определяющим.

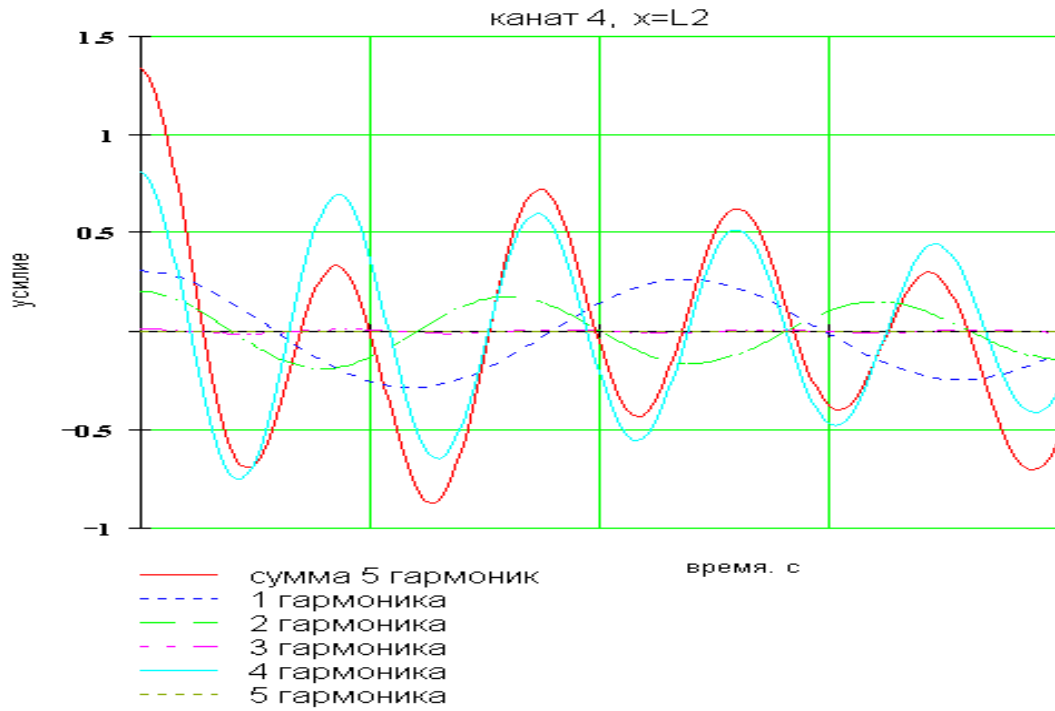


Рис. 8.19. Усилия в уравновешивающем канате 4 ( $x = l_2$ ) в точке крепления его к массе  $m_3$ .  
 На рис. 8.20 показаны результирующие кривые, характеризующие динамический процесс в головных и уравновешивающих канатах многоканатной подъемной установки при свободных колебаниях.

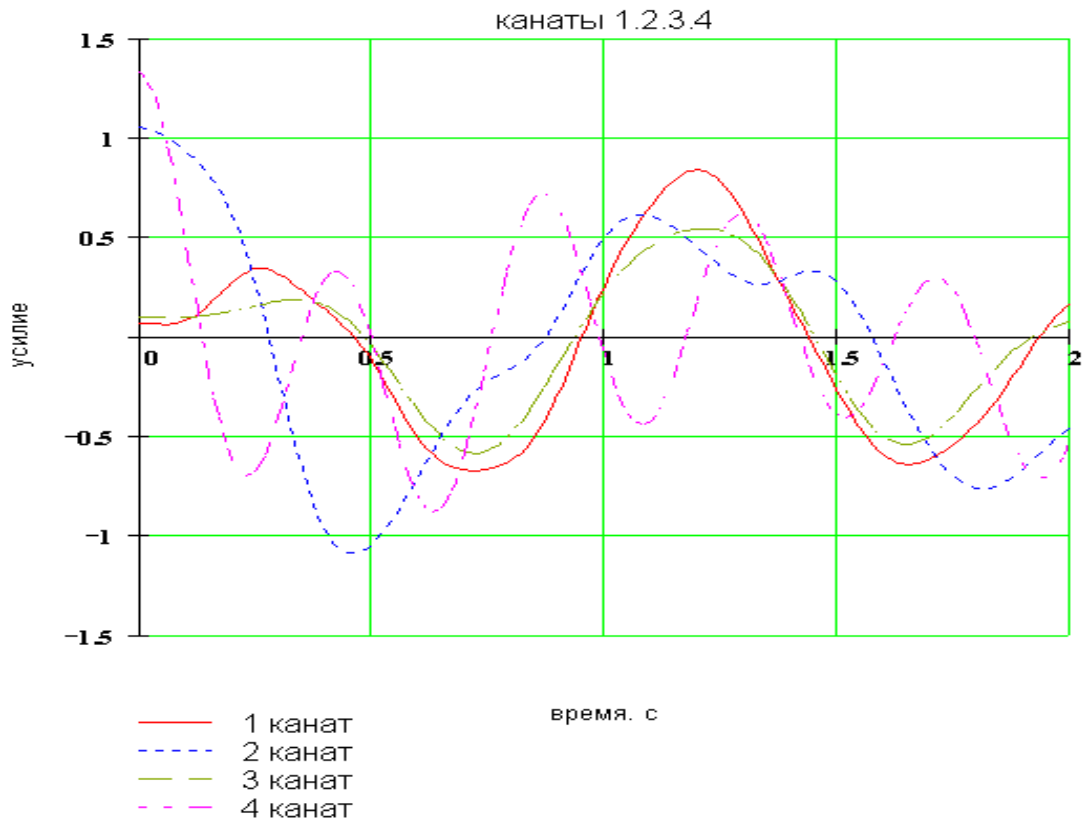


Рис. 8.20. Усилия в канатах (1 - 4) многоканатной подъемной установки

Полученные результаты показывают, что в сложных механических системах, состоящих из нескольких вязкоупругих стержней и сосредоточенных масс, формируются динамические процессы в которых колебания усилий могут иметь не гармонический характер. В зависимости от соотношения масс и длин стержней определяющими могут быть не первые гармоники.

## 8.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ



## С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Методику исследований вынужденных колебаний рассмотрим на примере механической системы, показанной на рис. 8.11. Эта схема выбрана по той причине, что она отражает все возможные случаи, встречающиеся на шахтных подъемных установках. Схема соответствует двухконцевой уравновешенной подъемной установке.

Представим эту схему на рис. 8.21, на котором показаны номер каната и внешние силы, действующие на механическую систему. Например, для подъемной установки массы  $m_1$  и  $m_3$  соответствуют грузенному и порожнему сосудам, на которые действуют силы вредного сопротивления  $F_1$  и  $F_3$ . Если  $m_2$  - масса машины, то к ней приложены силы двигателя  $F_{об}(t)$  или тормоза  $F_m(t)$ . Как правило, действует одна из этих сил, но встречаются режимы работы в которых на машину оказывает влияние сумма сил  $\Sigma F_{об}(t) - F_m(t)$ .

Таким образом, представленную систему можно рассматривать как систему, которая состоит из четырех отдельных рассмотренных выше схем. Все канаты представлены стержнями, к которым прикреплены массы. Динамическое состояние каждого каната характеризуется уравнением (8.7).

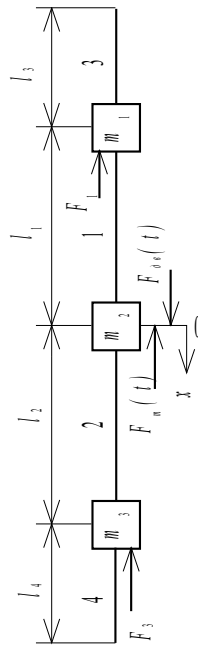


Рис. 8.21. Эквивалентная схема двухконцевой уравновешенной подъемной установки

Если канат  $i$  имеет ускорение  $j_i(x, t)$ , а к массе  $m_i$  приложена сила  $F_i(x, t)$ , то уравнение запишется так:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - a^2 \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} = j_i(x, t) + \frac{F_i(x, t)}{m_i}, \quad (8.84)$$

где  $\frac{F_i(x, t)}{m_i}$  - ускорение, которое получила бы масса  $m_i$  с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$ , если бы на нее не действовали никакие силы, кроме вынуждающей силы  $F_i(x, t)$ .

Уравнение (8.84) является неоднородным уравнением гиперболического типа, для решения которого можно также использовать метод разделения переменных (метод Фурье) [19].

Отметим, что уравнение (8.84) справедливо для любого каната, показанного на рис. 8.17. Краевые условия сформулированы в разделе 8.3.6.

Сделаем допущение, что функции  $j_i$ , и  $F_i$  не зависят от  $x$ . Принимая в качестве решения уравнение (8.15)

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) T_j(t),$$

подставив которое в уравнение (8.84), получим

$$\sum \ddot{T}_j(t) X_{ij}(x) - a^2 \mu_b \sum_{j=1}^{\infty} \dot{T}_j(t) X_j''(x) - a^2 \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) X_{ij}''(x) = j_i(t) + \frac{F_i(t)}{m_i}.$$

Здесь, как и раньше, производные по времени обозначены точками, а производные по координате - штрихами.

Умножим обе части равенства на  $X_{in}(x)$  и с учетом того, что  $X_i''(x) = -k^2 X_i(x)$ , запишем

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\ddot{T}_j(t) + 2\mu_j \dot{T}_j(t) + b^2 T_j(t)] X_{ij}(x) X_{in}(x) = \left[ j(t) + \frac{F_i(t)}{m_i} \right] X_{in}(x) \sigma(x-l).$$

Проинтегрировав это выражение в пределах  $[c-d]$ , получим

$$\ddot{T}_j(t) + 2\mu_j \dot{T}_j(t) + b^2 T_j(t) \sum_{j=1}^{\infty} \int_c^d X_j(x) X_n(x) dx = \int_c^d \left[ j(t) + \frac{F(t)}{m} \right] \sigma(x-l) X_n(x) dx.$$

Здесь  $c$  и  $d$  - координаты  $i$ -каната. Индекс  $i$  для упрощения записи опущен.

Полученное выражение справедливо для любого  $i$ -каната. Используя выражения (8.62), характеризующие ортогональность фундаментальных функций, получим [29]

$$\ddot{T}_j(t) + 2\mu_j \dot{T}_j(t) + b^2 T_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(t) \sum_{i=1}^i \frac{EF}{b^2} [X_i'(c) - X_i'(d)] + \sum_{i=1}^i \frac{F_i(t)}{p} X_i(d)}{\|X_j\|^2}. \quad (8.85)$$

Например, для рассматриваемой механической системы, в которой четыре каната ( $i = 4$ ) и три массы ( $i-1 = 3$ ) при  $j(t) = 0$ , уравнение (8.85) для процесса торможения можно записать

$$\begin{aligned} & \ddot{T}(t) + 2\mu_j \dot{T}_j(t) + b^2 T_j(t) = \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{p} (F_1 X_1(-l_1) + F_{\square}(t) X_2(0) + F_3 X_4(l_2))}{\int_{-l_1-l_3}^{-l_1} X_3^2(x) dx + \int_{-l_1}^0 X_1^2(x) dx + \int_0^{l_2} X_2^2(x) dx + \int_{l_2}^{l_2+l_4} X_4^2(x) dx + \frac{m_1}{p} X_3^2(-l_1) + \frac{m_2}{p} X_1^2(0) + \frac{m_3}{p} X_2^2(l_2)}}{dx}. \end{aligned} \quad (8.86)$$

Таким образом, для решения задачи о вынужденных колебаниях необходимо дополнительно к знаниям фундаментальных функций, определить общее решение неоднородного, линейного дифференциального уравнения второго порядка (8.86). Решение его при различных правых частях, рассмотрено в разделах 3 и 4.

При исследовании динамических процессов при торможении машин в разделе 1.6 отмечалось, что характер изменения тормозного усилия можно принять по экспоненциальному закону, т. е. в соответствии с (1.28)

$$F_m = F_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Решим уравнение (8.86) при условии, что  $j(t) = 0$ , а  $F(t) = F_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ , тогда это уравнение запишется

$$\ddot{T}(t) + 2\mu_j \dot{T}(t) + b^2 T(t) = a_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (8.87)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{F_{\max}}{m_i} \sum_{i=1}^4 \frac{\int_c^d X'_{ij}(x) dx}{\int_c^d (X'_{ij}(x))^2 dx}.$$

Правую часть уравнения (8.87) можно представить как

$$P(t) e^{kt} = P(t) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $P(t)$  - какой либо многочлен степени  $n$ , а  $k$  - не является корнем характеристического уравнения.

Поэтому частное решение неоднородного уравнения (8.87) можно записать в виде

$$T^*(t) = A + B e^{-\frac{t}{\tau}},$$

тогда

$$T'^*(t) = -\frac{B}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad T''^*(t) = \frac{B}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Подставив эти значения в уравнение (8.87), получим

$$A = \frac{a_1}{b^2}; \quad B = -\frac{a_1}{b^2 - 2\frac{\mu_j}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}}.$$

При комплексных корнях характеристического уравнения общее решение задачи будет

$$\begin{cases} T_j(t) = e^{-\mu_j t} \left( C_j \cos \omega_j t + D_j \sin \omega_j t \right) + \frac{a_1}{b^2} - \frac{a_1 e^{-\frac{t}{\tau}}}{b^2 - 2\frac{\mu_j}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}}; \\ \dot{T}_j(t) = e^{-\mu_j t} \left[ \left( D_j \omega_j - C_j \mu_j \right) \cos \omega_j t - \left( C_j \omega_j + D_j \mu_j \right) \sin \omega_j t \right] + \frac{a_1 e^{-\frac{t}{\tau}}}{b^2 \tau - 2\mu_j - \frac{1}{\tau}}. \end{cases} \quad (8.88)$$

При  $T_j(0) = 0$  и  $\dot{T}_j(t) = 0$

$$C_j = \frac{a_1}{b^2 - 2\frac{\mu_j}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}} - \frac{a_1}{b^2}; \quad D_j = \frac{1}{\omega_j} \left[ C_j \mu_j - \frac{a_1}{b^2 \tau - 2\mu_j - \frac{1}{\tau^2}} \right].$$

Подставив эти значения в (8.88), определяются функции  $T_j(t)$  и  $\dot{T}_j(t)$  и с помощью уравнений (8.15) и (8.68) находим динамические характеристики переходного процесса машины с экспоненциальной характеристикой тормоза.

Отмечалось, что современные пакеты математических программ, например, Mathcad 7, позволяют с меньшими трудозатратами использовать численные методы решения уравнений, в том числе задач, имеющих аналитическое решение.

Например, при численном решении уравнения (8.86) необходимо в программу ввести начальные условия, т. е.  $T(0)$  и  $\dot{T}(0)$ . Эти величины определяются из начальных условий задачи. Пусть начальные условия задачи характеризуются зависимостями (8.65)

$$\begin{aligned} U(x,0) = f(x) &= \frac{S}{EF} x; & 0 < x < l_2 + l_4; \\ U(x,0) = f(x) &= \frac{S}{EF} [(l_1 + l_3) - x]; & -(l_1 + l_3) < x < 0; \\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} &= \varphi(x) = \frac{v_0}{l} x. \end{aligned}$$

На основании (8.15), по аналогии с (8.86) можно записать

$$\begin{aligned} \int_c^d f'(x) X_j'(x) dx &= T(0) \sum_{j=1}^{\infty} \int_c^d X_j'(x) X_n'(x) dx; \\ \int_c^d \varphi'(x) X_j'(x) dx &= \dot{T}(0) \sum_{j=1}^{\infty} \int_c^d X_j'(x) X_n'(x) dx. \end{aligned}$$

Используя доказательство, что для рассматриваемой системы ортогональны производные фундаментальных функций, получим

$$T(0) = \sum_{i=1}^4 \frac{\int_c^d f'(x) X_j'(x) dx}{\int_c^d (X_j'(x))^2 dx}; \quad \dot{T}(0) = \sum_{i=1}^4 \frac{\int_c^d \varphi'(x) X_j'(x) dx}{\int_c^d (X_j'(x))^2 dx}. \quad (8.89)$$

Рассмотрим задачу определения динамических нагрузок в канатах при предохранительном торможении многоканатной подъемной установки. Предположим, что к массам приложены ступеню силы, которые в процессе остаются постоянны. Система двигалась равномерно, поэтому  $j_i(x, t) = 0$ .

При этих условиях правая часть уравнения (8.86) - постоянная величина, обозначим ее через  $a_1$ :

$$a_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{m_i} \sum_{j=1}^4 \frac{\int_c^d X_{ij}'(x) dx}{\int_c^d (X_{ij}'(x))^2 dx}.$$

Получим уравнение, аналогичное (3.3), общим решением которого будет (3.14).

Постоянные интегрирования уравнения, характеризующего вынужденные колебания,  $(C_n)_\epsilon$  и  $(D_n)_\epsilon$  определяются из начальных условий и с учетом (8.78) будут

$$(C_n)_\epsilon = C_n - \frac{\mu_n}{\omega_n} a_1; \quad (D_n)_\epsilon = D_n - \frac{a_1}{\omega_n^2}.$$

Здесь  $C_n$  и  $D_n$  - постоянные интегрирования для уравнения, характеризующего свободные колебания.

Колебания, возникающие в стержне от возмущения, приложенного к свободному концу, можно формально отнести к категории вынужденных колебаний.

Рассмотрим поведение механической системы при условии, что на стержень в точке  $x = l$  действует гармоническое возмущение. Предположим, в системе отсутствуют силы вязкого сопротивления. Переходный процесс характеризуется волновым уравнением (8.8)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

с краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0; & u(l, t) &= A \sin kt; \\ u(x, 0) &= f(x); & \frac{\partial u}{\partial t} &= \varphi(x); \end{aligned} \right\} \quad (8.90)$$

Здесь  $A$  - амплитуда колебания координаты  $x = l$  с частотой  $k$ , м.

Решение задачи ищется в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t),$$

Здесь  $v(x, t)$  - частное решение неоднородной задачи,

$\omega(x, t)$  - общее решение однородной задачи.

Среди функций  $F(x) \sin kt$  нетрудно найти решение волнового уравнения  $v(x, t)$ , удовлетворяющее краевым условиям (8.90). Действительно, подставляя такую функцию в волновое уравнение и деля обе части равенства на  $\sin kt$ , получим уравнение для  $F(x)$

$$a^2 F'' + \omega^2 F = 0.$$

Из краевых условий (8.90) находим, что

$$F(0) = 0; \quad F(l) = A.$$

Тогда, очевидно,

$$F(x) = A \frac{\sin \frac{k}{a} x}{\sin \frac{k}{a} l} \sin kt.$$

Следовательно

$$v(x, t) = A \frac{\sin \frac{k}{a} x}{\sin \frac{k}{a} l} \sin kt.$$

Общее решение однородной задачи  $\omega(x, t)$  находится для уравнения

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0.$$

С краевыми условиями

$$\begin{aligned} \omega(0, t) &= 0; & \omega(l, t) &= 0; \\ \omega(x, 0) &= f(x); & \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \varphi(x) - A \frac{\sin \frac{k}{a} x}{\sin \frac{k}{a} l} \sin kt. \end{aligned}$$

Эта задача соответствует свободным колебаниям и соответствует условиям, рассмотренным в разделе (8.5).

### 8.7. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МАССА КАНАТА

В разделе 1.2 отмечалось, что эквивалентная масса каната, участвующая в динамическом процессе, равна

$$m_s = \frac{m_{ky}}{3}.$$

В ряде исследований [37, 74, 79] утверждается, что эта зависимость, полученная на основе использования принципа Рэлея, дает удовлетворительные результаты при  $\alpha \leq 1,0$ , т. е. для тех установок у которых масса каната меньше массы концевого груза.

Исследуем этот вопрос с использованием современных средств вычислительных процессов.

Частоты колебаний, полученные в результате решения дифференциальных уравнений (3.3), (4.1) с эквивалентной массой каната, очевидно, должны быть равны частотам, полученным в результате решения второго уравнения системы (8.13), которое учитывает распределенную по длине массу каната.

Отметим, что при решении этой задачи рассматривается только первая гармоника колебаний.

Запишем формулы для определения частоты колебаний  $\omega_1$  и  $b$ , которые принадлежат к уравнениям (3.3) и (8.13)

$$\omega_1^2 = \frac{C_y}{m + \frac{1}{3}m_k}; \quad b^2 = k^2 a^2 = k^2 \frac{EF}{p} \frac{l^2}{l^2} \lambda^2 \frac{C_y}{m_k}.$$

В первом уравнении величину  $\frac{1}{3}$  заменим коэффициентом эквивалентности  $k_s$ . Приравняв оба выражения, получим

$$k_s = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{m}{m_k}. \quad (8.91)$$

Коэффициент эквивалентности определяет какая часть массы каната должна учитываться при определении  $\omega_1$ . Из уравнения (8.91) видно, что этот коэффициент зависит от значения собственного числа  $\lambda$  и соотношения масс каната и концевого груза.

В разделе 8.3 показано, что собственные числа зависят от схемы механической системы и граничных условий.

Из рассмотренных в разделе 8.3 схем выделим две, которые характерны для всех исследуемых механических систем. Первая - это механическая система "масса, подвешенная на канате", вторая - "масса, соединенная двумя канатами".

### 8.7.1. МАССА, ПОДВЕШЕННАЯ НА КАНАТЕ

Для механической системы "масса, подвешенная на канате" введено соотношение  $\alpha = \frac{m_k}{m}$  (раздел 8.3.2).

Запишем уравнение (8.91),

$$k_s = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\alpha}.$$

Если в этом уравнении вместо  $\alpha$  подставить зависимость (8.19), то получим  $k_s = f(\lambda)$ . Однако, практический интерес представляет зависимость  $k_s = f(\alpha)$ , которая определяет значение коэффициента эквивалентности для конкретной установки, имеющей известное отношение  $\alpha = \frac{m_k}{m}$ . Уравнение (8.19) является трансцендентным, поэтому функция  $\lambda = f(\alpha)$  отсутствует. Несмотря на это математический пакет Mathcad 7 позволяет, используя трансцендентное уравнение (8.19), иметь массив данных, по которым можно построить зависимость  $k_s = f(\alpha)$ . Эта характеристика приведена на рис. 8.22.

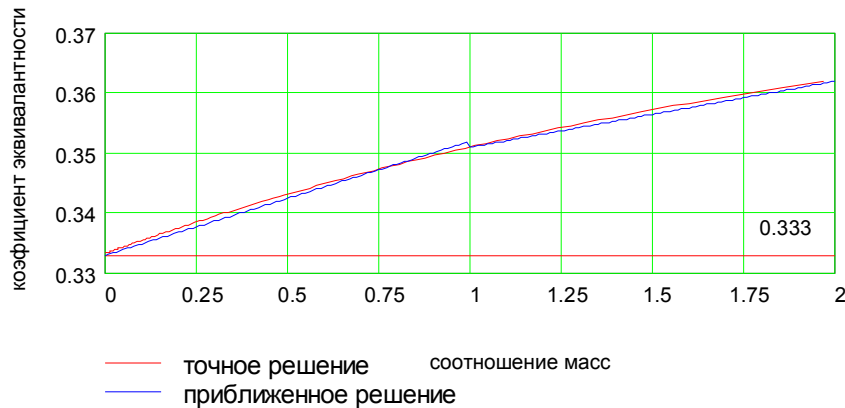


Рис. 8. 22. Зависимость коэффициента эквивалентности от соотношения масс канатов и конечного груза

Видно, что с увеличением коэффициента  $\alpha$ , коэффициент эквивалентности увеличивается. При  $\lambda = 0$ ,  $k_s = 0,333$ . При отсутствии конечного груза (ветвь уравновешивающего каната)  $\alpha = \infty$ , собственное число  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , а  $k_s = 0,405$ . При  $\alpha = 2$ ,  $\lambda = 1,076$ ,  $k_s = 0,362$ . Из рис. 8.22 видно, что характеристика  $k_s = f(\alpha)$ , в пределах  $\alpha < 2$ , близка к линейной.

Разбив кривую на два прямолинейных участка, можно получить уравнение, которое будет характеризовать приближенную характеристику

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1; & \quad k_s = 0,333 + 0,019\alpha; \\ 1 < \alpha < 2; & \quad k_s = 0,351 + 0,011(\alpha - 1). \end{aligned} \quad (8.92)$$

Рис. 8.22 показывает, что результаты точного и приближенного решения достаточно близки.

Таким образом, данная методика позволяет, в зависимости от соотношения массы упругого элемента к сосредоточенной массе, определить значение коэффициента эквивалентности. Используя, вместо коэффициента  $\frac{1}{3}$ , значение коэффициента эквивалентности, определенного по уравнениям (8.92), получим эквивалентную массу. При такой эквивалентной массе частоты колебаний механической системы, описанной обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных будут одинаковыми.

## 8.7.2. МАССА И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НЕЙ ДВА КАНАТА



При исследовании динамических процессов механической системы, характерной для уравновешенного подъема, с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений (без учета распределенной массы каната) в качестве эквивалентной массы каната принимают сумму полной массы уравновешивающего каната и  $\frac{1}{3}$  массы головного каната [53]. При такой интерпретации задачи, применительно к грузовой ветви, показанной на рис. 8.12, эквивалентная масса будет

$$m_3 = m_1 + p \left( l - \frac{2}{3} x \right),$$

где  $l = l_1 + l_2$  - полная длина головных и уравновешивающих канатов, м;

$x$  - координата перемещения с началом отсчета от верхнего положения грузевого сосуда, м.

Частота свободных колебаний, вычисленная по уравнению

$$\omega = \sqrt{\frac{EF}{x \left[ m_1 + p \left( l - \frac{2}{3} x \right) \right]}}, \quad (8.93)$$

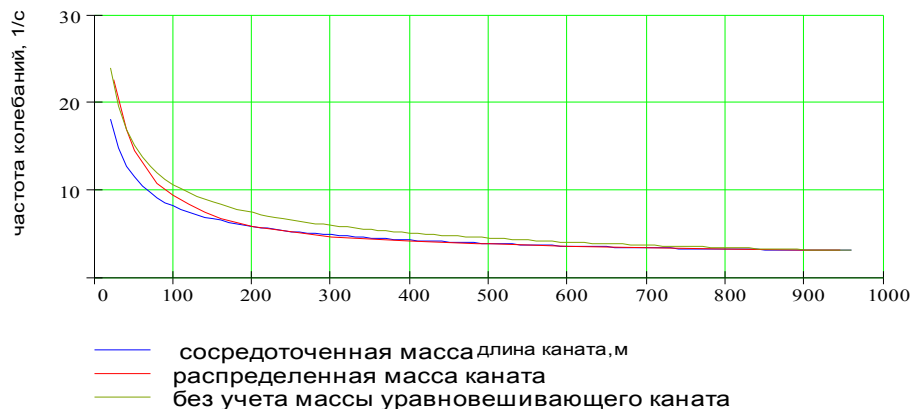


Рис. 8.23. Зависимость частоты колебаний от длины каната

показана на рис. 8.23. Здесь же даны частоты  $b$  и  $\omega_1$ , вычисленные по уравнениям

$$b = \lambda \frac{a}{l_1}; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{EF}{x \left( m_1 + \frac{1}{3} x \right)}}.$$

Первое уравнение характеризует частоту колебаний при решении задачи с учетом распределенной массы каната, а второе уравнение характеризует частоту колебаний при условии, что эквивалентная сосредоточенная масса каната равна  $\frac{1}{3}$  массы всего каната, т. е. второе уравнение не учитывает влияние массы уравновешивающего каната.

Обратим внимание, что в этом выражении  $\lambda = f(x)$ , поэтому для каждого значения  $x$  следует определить  $\lambda$ . Три значения  $\lambda = f(x)$  возьмем из табл. 8.1, а остальные определим и поместим в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Собственные числа в зависимости от расположения массы

$x, \text{ м}$	25	40	50	60	80	100	120	140	160	180
$\lambda$	0,1509	0,18	0,193	0,21	0,23	0,25	0,27	0,28	0,29	0,3
$x, \text{ м}$	200	300	400	485	500	600	700	800	900	945
$\lambda$	0,31	0,37	0,44	0,50	0,51	0,58	0,64	0,69	0,75	0,78

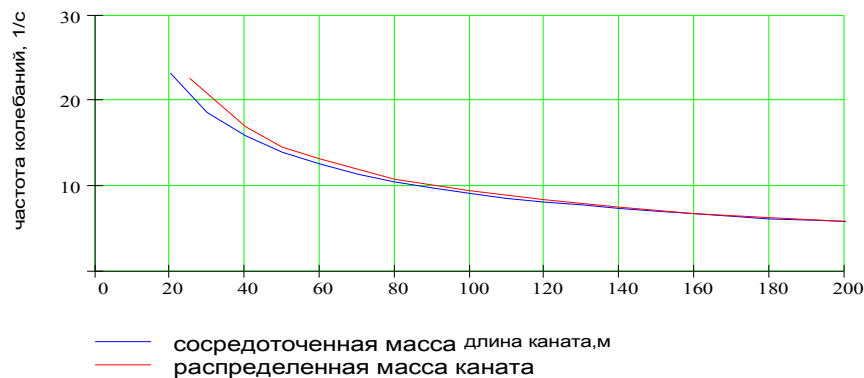
Из рис. 8.23 видно, что для рассматриваемого примера, при длине каната более 180 м, частоты  $b$  и  $\omega$  практически совпадают. В то же время, при длине каната 25 м, совпадают частоты  $b$  и  $\omega_1$ . Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что при длине канатов менее 180 м массу уравновешивающего каната в формуле (8.93) можно учитывать коэффициентом влияния  $k_b$ , который равен

$$\begin{aligned} x \leq 180; & \quad k_b = \frac{x}{180}; \\ x \geq 180; & \quad k_b = 1. \end{aligned}$$

Тогда формула (8.93) при  $x \leq 180$  запишется

$$\omega = \sqrt{\frac{EF}{x \left[ m_1 + p \left( k_b l - \frac{2}{3} x \right) \right]}}. \quad (8.94)$$

Графики  $\omega = f(x)$ , построенные по этой формуле и  $b = f(x)$  показаны на рис. 8.24. Видно, что эти характеристики при  $x > 40$  м практически совпадают.

Рис. 8.24. Частота колебаний с учетом влияния  $k_b$ 

Таким образом, в рассматриваемых задачах распределенную массу можно заменить сосредоточенной, представляя эквивалентную схему машины многомассовой механической системой. В этом случае изучение динамических процессов будет связано с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. с. 350744. Способ управления аварийным торможением / Степанов А.Г. и др. Бюл. № 27, 1972.
2. А. с. 716960. Способ торможения подъемных машин / Найдено И.С. Бюл. № 7, 1980.
3. А. с. 753761. Устройство для управления предохранительным торможением подъемной установки / Степанов А.Г., Озорнин М.С. Бюл. N 29, 1980.
4. А. с. 800122. Система управления пружинно - гидравлическим приводом тормоза шахтных подъемных машин / Степанов А.Г. и др. Бюл. № 4, 1981.
5. А. с. 948869. Система управления тормозом шахтной подъемной машины / Степанов А.Г. и др. Бюл. № 29, 1982.
6. А. с. 1054284. Способ торможения подъемной машины / Степанов А.Г. и др. Бюл. № 42, 1983.
7. А. с. 1180350. Система управления тормозом шахтной подъемной машины / Степанов А.Г. и др. Бюл. № 35, 1985.
8. А. с. 1229158. Устройство для выбора величины тормозного усилия канатного подъемника / Степанов А.Г. и др. Бюл. № 17, 1986.

9. А. с. 1245536. Устройство управления пневмо-грузовым приводом тормоза шахтной подъемной машины / Степанов А.Г. и др. Бюл. № 27, 1986.
10. Аладьев В.З., Тупало В.Г. Алгебраические вычисления на компьютере. М.: изд. нет. 1993. 248 с.
11. Александров М.П. Тормоза подъемно - транспортных машин. М.: Машиностроение, 1985. 283 с.
12. Арсенин В.Я. Методы математической физики. М.: Наука, 1984. 383 с.
13. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
14. Башнякович А.Д. Механический расчет проводов и тросов линий электропередач. Ленинград.: Энергия, 1971. 294 с.
15. Белобров В.И., Абрамовский В.Ф., Самуся В.И. Тормозные системы шахтных подъемных машин. Киев: Наукова думка, 1990. 174 с.
16. Берман В.М., Верескунов В.Н., Цетнарский И.А. Системы гидропривода выемочных и проходческих машин. М.: Недра, 1982, 206 с.
17. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М.: Физматгиз, 1969. 736 с.
18. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980, 408 с.
19. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985, 310 с.
20. Бишоп Р. Колебания. М.: Наука, 1979, 159 с.
21. Блехман И.И. Что может вибрация? М.: Наука, 1988, 208 с.
22. Борисов Ю.М., Липатов Д.Н., Зорин Ю.Н. Электротехника. М.: Энергоатомиздат, 1985, 552 с.
23. Бренер В.А. и др. Динамика проходческих комбайнов. М.: Машиностроение, 1977. 224 с.
24. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1967, 608 с.
25. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 687 с.
26. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики. т. 2. М.: Наука, 1971. 461 с.
27. Василевский М.Н. Асинхронный привод шахтных подъемных машин. М.: Недра, 1964. 447 с.
28. Верстаков Г.В., Степанов А.Г. Рудничный подъемные установки. Ч. II. 1971, 139 с.
29. Вертикальный транспорт на горных предприятиях. / Под общей ред. В.Н. Потураева. М.: Недра, 1975. 357 с.
30. Вибрация в технике. Справочник. Т. I. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
31. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Физматгиз, 1953. 783 с.
32. Гейлер Л.Б. Электропривод в тяжелом машиностроении. М.: Машгиз, 1958. 587 с.
33. Герман А.П. и Шклярский Ф.Н. Рудничные подъемные установки. М.: Углетехиздат, 1947. 534 с.
34. Глушко В.В. Характеристики режимов работы горных машин и их автоматическое управление. М.: Недра, 1973. 237 с.
35. Гончаревич И.Ф. Докукин А.В. Динамика горных машин с упругими связями. М.: Наука, 1975. 210 с.
36. Давыдов Б.А. Статика и динамика машин. М.: Машиностроение, 1967. 413 с.
37. Давыдов Б.А. Скоморохов Б.Л. Динамика горных машин, М.: Госнаучтехиздат, 1961. 334 с.
38. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические функции. М.: Наука, 1983. 171 с.
39. Дж. П. Ден - Гартог. Механические колебания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 579 с.
40. Динник А.Н. Приближенная формула для модуля упругости проволочных канатов./ В кн.: Статьи по горному делу. Углетехиздат, 1957.
41. Длоугий В.В. Приводы машин. Справочник. Л.: Машиностроение, 1982. 383 с.

42. Докукин А.В. и др. Динамические процессы горных машин. М.: Наука, 1972. 149 с.
43. Киричок Ю.Г., Чермалых В.М. Привод шахтных подъемных установок большой мощности. М.: Недра, 1972. 336 с.
44. Ковалевский В.Ф., Железняков Н.Т., Бейлин Ю.Е. Справочник по гидроприводам горных машин. М.: Недра, 1973. 502 с.
45. Коваль П.В. Гидравлика и гидропривод горных машин. М.: Машиностроение, 1979. 319 с.
46. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. М.: Наука, 1968. 831 с.
47. Крауфорд Ф. Волны. Курс физики. Т. III. М.: Наука, 1974. 527 с.
48. Кристенсен Р. Введение в теорию упругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
49. Крылов А.Н. Вибрация судов. // Собрание трудов. Т.Х.М. 1948. 278 с.
50. Мартынов М.В., Переслегин Н.Г. Автоматизированный электропривод в горной промышленности. М.: Недра, 1969. 413 с.
51. MATHCAD 6.0 Plus. Руководство пользователя. Перевод с английского. Информационно-издательский дом «Филинь», 1996. 712 с.
52. Меркин Д.Р. Введение в технику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
53. Найдено И.С., Белый В.Д. Шахтные многоканатные подъемные установки. М.: Недра, 1979. 391 с.
54. Нестеров П.П. К вопросу о модуле упругости проволочных канатов. / В кн.: Многоканатный подъем. - Углетехиздат, 1958. С. 100-105.
55. Осецкий В.М. Техническая механика. М.: Госгортехиздат, 1962. 471 с.
56. Пановко Я.Г. Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
57. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1980. 270 с.
58. Писаренко Г.С. и др. Вибропоглощающие свойства конструктивных материалов. Справочник. Киев: Наукова Думка, 1971. 375 с.
59. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985. 560 с.
60. Правила безопасности в угольных и сланцевых шахтах. М.: Недра, 1986. 447 с.
61. Проектирование и конструирование транспортных машин и комплексов. Под ред. Штокмана И.Г. М.: Наука, 1985. 560 с.
62. Савин Г.Н. Современное состояние и задачи исследований по динамике шахтных подъемных канатов. В кн.: //Стальные канаты. Киев: Техника, 1965. № 2. С. 7 - 14.
63. Савин Г.Н., Бессонов В.Г. Скорость распространения упругих волн в стальных проволочных канатах. // Доповіді АН УРСР, 1951. № 6.
64. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев: АН УССР, 1962. 332 с.
65. Савин Г.Н., Кильчевский Н.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. Киев: 1963. 609с
66. Силин А.А. Трение и его роль в развитии техники. М.: Наука, 1976. 174 с.
67. Скородумов Б.А. Статические и динамические характеристики электродвигателей и гидромффт забойных машин. / В сб. Прочность и долговечность горных машин. Вып. 5, М.: Недра, 1979. 303 с.
68. Соколов М.М. и др. Электромагнитные переходные процессы в асинхронном электродвигателе. М.: 1967. 201 с.
69. Стационарные установки шахт. / Под ред. Б.Ф. Братченко. М.: Недра, 1977. 440 с.
70. Степанов А.Г. Динамика шахтных подъемных установок. Наука, 1994. 203 с.
71. Степанов А.Г., Попов В.А. Подъемным машинам - программное предохранительное торможение. Уголь. 1972. № 2. С. 65 - 66.

72. Степанов А.Г., Ольховиков Ю.П., Трифанов Г.Д. Экспериментальные исследования динамики скипового подъема. // Изв. вузов. Горный журнал. 1982, № 3. С. 82 - 84.
73. Степанов А.Г., Саралев В.Г. К вопросу линеаризации быстродействующего малоинерционного гидрогрузового тормозного привода как исполнительного элемента систем программного регулирования.// Изв. Вузов. Горный журнал. 1970, № 3, С. 111 - 115.
74. Стретт Дж. В. /Лорд Рэлей/. Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 318 с.
75. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984. 283 с.
76. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1968. 478 с.
77. Техника в ее историческом развитии. М.: Наука, 1979. 412 с.
78. Техническая кибернетика. Книга 1. Измерительные устройства, преобразующие элементы и устройства. Под редакцией В.В. Солодовникова, М.: Машиностроение, 1973. 679 с.
79. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
80. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
81. Траубе Е.С., Найдено И.С. Тормозные устройства и безопасность шахтных подъемных машин. М.: Недра, 1980. 230 с.
82. Федоров М.М. Шахтные подъемные установки. М.: Недра, 1979. 305 с.
83. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962. 607 с.
84. Флоринский Ф.В. Динамика шахтного подъемного каната. М.: Углетехиздат, 1955. 239 с.
85. Френкель М.И. Поршневые компрессоры. Л.: Машиностроение, 1969. 743 с.
86. Фролов К.В. Вибрация друг или враг? М.: Наука, 1984. 144с.
87. Hankus J. Mechanical properties of wire ropes. Deliberations and calculations with the modulus of elasticity. Wireworld 4 - 89. S. 9 - 19.
88. Хойшен А. Совершенствование подъемных установок для главных шахтных стволов. Глюкауф. 1988. № 23/24. С. 10 - 13.
89. Хорин В.Н. Объемный гидропривод забойного оборудования. М.: Недра, 1980. 415 с.
90. Шееле З. Признание новой техники и электронного управления в горной промышленности. - Глюкауф. 1984. № 5.
91. Шульц З. 100-летие подъемной машины системы Кепе. - Глюкауф. 1977. № 18.
92. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. М.: Высшая школа, 1975. 288 с.
93. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1985. 512 с.