

# Оглавление

От издательства .....	7
<b>РАЗДЕЛ I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>9</b>
<b>Глава 1. Виды систем автоматического управления .....</b>	<b>9</b>
§ 1.1. Понятие о замкнутых автоматических системах .....	9
§ 1.2. Классификация автоматических систем по характеру внутренних динамических процессов .....	14
§ 1.3. Примеры непрерывных автоматических систем .....	18
§ 1.4. Примеры дискретных и релейных автоматических систем .....	22
<b>Глава 2. Программы и алгоритмы управления .....</b>	<b>29</b>
§ 2.1. Программы управления .....	29
§ 2.2. Линейные алгоритмы управления .....	32
§ 2.3. Нелинейные алгоритмы управления .....	35
<b>РАЗДЕЛ II. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>40</b>
<b>Глава 3. Линеаризация дифференциальных уравнений систем автоматического управления .....</b>	<b>40</b>
§ 3.1. Линеаризация уравнений .....	40
§ 3.2. О записи линеаризованных уравнений звеньев .....	44
<b>Глава 4. Динамические звенья и их характеристики .....</b>	<b>48</b>
§ 4.1. Общие понятия .....	48
§ 4.2. Временные характеристики .....	50
§ 4.3. Частотная передаточная функция и частотные характеристики .....	53
§ 4.4. Логарифмические частотные характеристики .....	57
§ 4.5. Позиционные звенья .....	60
§ 4.6. Интегрирующие звенья .....	73
§ 4.7. Дифференцирующие звенья .....	78
§ 4.8. Неустойчивые и минимально-фазовые звенья .....	82
<b>Глава 5. Составление исходных дифференциальных уравнений систем автоматического управления .....</b>	<b>85</b>
§ 5.1. Общий метод составления исходных уравнений .....	85
§ 5.2. Передаточные функции систем автоматического управления .....	88
§ 5.3. Использование структурных схем .....	91
§ 5.4. Уравнения следящей системы .....	95
§ 5.5. Уравнения состояния .....	103
§ 5.6. Управляемость и наблюдаемость .....	107
§ 5.7. Многомерные системы управления .....	110

<b>Глава 6. Критерии устойчивости</b> .....	<b>115</b>
§ 6.1. Общие сведения об устойчивости .....	115
§ 6.2. Критерий устойчивости Гурвица .....	123
§ 6.3. Построение областей устойчивости. <i>D</i> -разбиение .....	128
§ 6.4. Критерий устойчивости Пайквиста .....	131
§ 6.5. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам .....	143
§ 6.6. Устойчивость систем с запаздыванием .....	148
§ 6.7. Устойчивость систем с распределенными параметрами .....	154
§ 6.8. Устойчивость двумерных систем с антисимметричными связями .....	162
<b>Глава 7. Построение кривой переходного процесса в системах автоматического управления</b> .....	<b>164</b>
§ 7.1. Общие соображения .....	164
§ 7.2. Непосредственное решение исходного дифференциального уравнения .....	168
§ 7.3. Сведение неоднородного уравнения к однородному .....	169
§ 7.4. Использование преобразований Фурье, Лапласа и Карсона-Хевисайда .....	173
§ 7.5. Использование вычислительных машин .....	181
<b>Глава 8. Оценка качества управления</b> .....	<b>190</b>
§ 8.1. Общие соображения .....	190
§ 8.2. Точность в типовых режимах .....	192
§ 8.3. Коэффициенты ошибок .....	198
§ 8.4. Определение запаса устойчивости и быстродействия по переходной характеристике .....	200
§ 8.5. Корневые методы .....	202
§ 8.6. Диаграмма Вышнеградского .....	208
§ 8.7. Интегральные оценки .....	212
§ 8.8. Частотные критерии качества .....	223
§ 8.9. Чувствительность систем управления .....	231
<b>Глава 9. Повышение точности систем автоматического управления</b> .....	<b>238</b>
§ 9.1. Общие методы .....	238
§ 9.2. Теория инвариантности и комбинированное управление .....	247
§ 9.3. Несединичные обратные связи .....	255
<b>Глава 10. Улучшение качества процесса управления</b> .....	<b>258</b>
§ 10.1. О корректирующих средствах .....	258
§ 10.2. Последовательные корректирующие звенья .....	262
§ 10.3. Параллельные корректирующие звенья .....	267
§ 10.4. Обратные связи .....	269
§ 10.5. Методы повышения запаса устойчивости .....	279
§ 10.6. Примеры .....	286
<b>Глава 11. Случайные процессы в системах автоматического управления</b> .....	<b>291</b>
§ 11.1. Вводные замечания .....	291
§ 11.2. Случайные процессы .....	306
§ 11.3. Стационарные случайные процессы .....	309
§ 11.4. Корреляционная функция .....	311
§ 11.5. Спектральная плотность стационарных процессов .....	316
§ 11.6. Канонические разложения случайных функций .....	328

§ 11.7.	Прохождение случайного сигнала через линейную систему .....	330
§ 11.8.	Расчет установившихся ошибок в автоматических системах .....	335
§ 11.9.	Расчеты по минимуму среднеквадратичной ошибки .....	338
<b>Глава 12.</b>	<b>Методы синтеза систем автоматического управления .....</b>	<b>344</b>
§ 12.1.	Общие соображения .....	344
§ 12.2.	Корневой метод .....	345
§ 12.3.	Метод корневых годографов .....	350
§ 12.4.	Метод стандартных переходных характеристик .....	351
§ 12.5.	Метод логарифмических амплитудных характеристик .....	355
§ 12.6.	Синтез систем автоматического управления на основе частотных критериев качества .....	361
<b>Глава 13.</b>	<b>Системы с переменными параметрами .....</b>	<b>382</b>
§ 13.1.	Основные понятия .....	382
§ 13.2.	Нахождение функции веса и построение переходных процессов .....	387
§ 13.3.	Передаточные функции .....	395
§ 13.4.	Устойчивость и качество управления .....	399
§ 13.5.	О синтезе систем с переменными параметрами .....	402
<b>РАЗДЕЛ III. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>406</b>	
<b>Глава 14.</b>	<b>Импульсные системы .....</b>	<b>406</b>
§ 14.1.	Общие сведения .....	406
§ 14.2.	Разностные уравнения .....	408
§ 14.3.	Использование z-преобразования .....	412
§ 14.4.	Передаточные функции .....	422
§ 14.5.	Уравнения состояния .....	427
§ 14.6.	Устойчивость импульсных систем .....	430
§ 14.7.	Оценка качества импульсных систем .....	436
§ 14.8.	Случайные процессы в импульсных системах .....	441
<b>Глава 15.</b>	<b>Цифровые системы .....</b>	<b>445</b>
§ 15.1.	Общие сведения .....	445
§ 15.2.	Дискретные алгоритмы управления и дискретная коррекция .....	449
§ 15.3.	О синтезе систем управления с ЦВМ .....	460
<b>РАЗДЕЛ IV. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>474</b>	
<b>Глава 16.</b>	<b>Составление уравнений нелинейных систем автоматического управления .....</b>	<b>474</b>
§ 16.1.	Общие понятия .....	474
§ 16.2.	Уравнения систем с нелинейностью релейного типа .....	491
§ 16.3.	Уравнения систем с нелинейностью в виде сухого трения и зазора .....	494
§ 16.4.	Уравнения систем с нелинейностями других видов .....	497
<b>Глава 17.</b>	<b>Точные методы исследования устойчивости и автоколебаний .....</b>	<b>501</b>
§ 17.1.	Фазовые траектории и метод точечных преобразований .....	501
§ 17.2.	Теоремы прямого метода Ляпунова и их применение .....	513
§ 17.3.	Частотный метод В. М. Попова .....	527
§ 17.4.	Исследование систем с переменной структурой .....	531
<b>Глава 18.</b>	<b>Приближенные методы исследования устойчивости и автоколебаний .....</b>	<b>533</b>
§ 18.1.	Гармоническая линеаризация нелинейностей .....	533

§ 18.2.	Алгебраические способы определения автоколебаний и устойчивости в нелинейных системах первого класса .....	543
§ 18.3.	Примеры исследования нелинейных систем первого класса .....	554
§ 18.4.	Нелинейные системы второго класса .....	571
§ 18.5.	Вычисление высших гармоник и уточнение первой гармоники автоколебаний .....	584
§ 18.6.	Частотный метод определения автоколебаний .....	596
<b>Глава 19.</b>	<b>Медленно меняющиеся процессы в автоколебательных системах ...</b>	<b>607</b>
§ 19.1.	Статические и скоростные ошибки автоколебательных систем .....	607
§ 19.2.	Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах .....	618
§ 19.3.	Гармоническая линеаризация нелинейностей при несимметричных колебаниях .....	624
<b>Глава 20.</b>	<b>Оценка качества нелинейных процессов управления .....</b>	<b>631</b>
§ 20.1.	Приближенное исследование колебательных переходных процессов .....	631
§ 20.2.	Примеры исследования колебательных переходных процессов .....	639
<b>Глава 21.</b>	<b>Вынужденные колебания нелинейных систем .....</b>	<b>646</b>
§ 21.1.	Симметричные одночастотные вынужденные колебания .....	646
§ 21.2.	Несимметричные вынужденные колебания с медленно меняющейся составляющей .....	653
§ 21.3.	Зависимость устойчивости и качества нелинейных систем от внешних вибраций .....	660
<b>Глава 22.</b>	<b>Случайные процессы в нелинейных системах .....</b>	<b>667</b>
§ 22.1.	Статистическая линеаризация нелинейностей .....	667
§ 22.2.	Простейшие случайные процессы в нелинейных системах .....	673
§ 22.3.	Пример исследования влияния случайных помех на динамику нелинейной системы .....	678
<b>Глава 23.</b>	<b>Нелинейные дискретные системы .....</b>	<b>683</b>
§ 23.1.	Общие сведения .....	683
§ 23.2.	Системы с амплитудно-импульсной модуляцией .....	685
§ 23.3.	Системы с широтно-импульсной модуляцией .....	695
<b>РАЗДЕЛ V. ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....</b>		<b>703</b>
<b>Глава 24.</b>	<b>Оптимальные системы .....</b>	<b>703</b>
§ 24.1.	Общие положения .....	703
§ 24.2.	Использование классических вариационных методов .....	707
§ 24.3.	Динамическое программирование .....	710
§ 24.4.	Аналитическое конструирование регуляторов .....	713
§ 24.5.	Использование принципа максимума .....	715
<b>Глава 25.</b>	<b>Адаптивные системы .....</b>	<b>723</b>
§ 25.1.	Системы экстремального управления .....	723
§ 25.2.	Самоадаптивные системы .....	733
<b>Приложение .....</b>	<b>741</b>	
<b>Литература .....</b>	<b>744</b>	

*В. А. Бесекерский, Е. П. Попов*

# **ТЕОРИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Санкт-Петербург  
2003**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО**

УДК 62-53.001 (075.8)

ББК 32.965 я73

Б 53

**Б53** Бесекерский В.А., Попов Е. П.  
**Теория систем автоматического управления** / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. --  
Изд. 4-е, перераб. и доп. — СПб, Изд-во «Профессия», 2003. -- 752 с. -- (Серия: Спе-  
циалист)

ISBN 5-93913-035-6

Впервые вышедшая в свет в 1966 г. и выдержавшая два переиздания (второе -- 1972 г. и третье -- 1975 г.) книга В. А. Бесекерского и Е. П. Попова «Теория систем автоматического регулирования» давно стала библиографической редкостью. Несмотря на то что за прошедшее время было издано большое количество учебников и учебных пособий, монографий и статей в научных журналах, эта книга, написанная известными учеными и талантливыми педагогами, до сих пор пользуется большим спросом среди студентов, инженеров и научных работников.

Большинство из изложенных в книге методов в настоящее время принято относить к классическим. В новое издание внесены небольшие изменения и дополнения, цель которых -- приблизить изложение к современным представлениям теории автоматического управления, учитывающим развитие науки и техники. В духе времени изменено и название книги.

Даны общие сведения о системах автоматического управления, их классификация, понятия о программах и алгоритмах управления, изложение теории непрерывных и дискретных линейных систем автоматического управления. Представлены нелинейные системы автоматического управления, точные и приближенные методы исследования устойчивости и автоколебаний, методы анализа качества нелинейных систем в различных режимах и при различных внешних воздействиях. Структура и содержание пятого раздела существенно изменены по сравнению с предыдущим изданием. Глава, посвященная системам управления с ЦВМ, перенесена в третий раздел, а ее место заняла глава «Оптимальные системы», сформированная из параграфов «Классические вариационные методы», «Динамическое программирование» и «Аналитическое конструирование».

Книга может служить хорошим пособием для студентов и аспирантов технических университетов и ценным руководством для преподавателей вузов, научных работников и инженеров, работающих в области теории автоматического управления.

ISBN 5-93913-035-6

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

УДК 62-53.001 (075.8)

ББК 32.965 я73

© Бесекерский В.А., Попов Е. П., 2003

# ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Впервые вышедшая в свет в 1966 г. и выдержавшая два переиздания (второе — 1972 г. и третье — 1975 г.) книга В. А. Бессекерского и Е. П. Попова «Теория систем автоматического регулирования» давно стала библиографической редкостью. Несмотря на то что за прошедшее время было издано большое количество учебников и учебных пособий, монографий и статей в научных журналах, эта книга, написанная известными учеными и талантливыми педагогами, до сих пор пользуется большим спросом среди студентов, инженеров и научных работников. Именно поэтому издательство «Профессия», поддержанное рядом ведущих технических вузов Санкт-Петербурга, подготовило к выпуску это издание.

По обиллию материала и глубине его проработки книга В. А. Бессекерского и Е. П. Попова далеко выходила за рамки обычного учебника и по существу являлась энциклопедией, отражающей уровень развития теории автоматического управления в шестидесятые годы XX века. Большинство из изложенных в книге методов в настоящее время принято относить к классическим (см., например, «Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 3-х т. / под ред. засл. деят. науки РФ, д. т. н., проф. Н. Д. Егупкина). За истекшие годы теория автоматического управления, конечно же, ушла вперед, однако в задачу переиздания не входило дать сколько-нибудь полное изложение современного состояния этой науки. В новое издание внесены небольшие изменения и дополнения, цель которых — лишь слегка приблизить изложение к современным представлениям теории автоматического управления, учитывающим развитие науки и техники. В духе времени изменено и название книги.

С целью сохранения присущих авторам стиля и манеры изложения материала к переработке книги и подготовке ее к изданию был привлечен один из учеников В. А. Бессекерского, д. т. н., проф. Сергей Викторович Лучко. С. В. Лучко — автор более 100 научных трудов по теории автоматического управления и системам управления ракет и космических аппаратов, более двадцати лет возглавлявший созданную в свое время В. А. Бессекерским кафедру автоматики и электроники Военно-космической академии имени А. Ф. Можайского.

Как и предыдущее издание, книга содержит пять разделов.

В первом разделе даны общие сведения о системах автоматического управления, их классификация, понятия о программах и алгоритмах управления. Внесены небольшие изменения и дополнения.

Второй раздел представляет систематическое изложение теории непрерывных линейных систем автоматического управления. Он начинается с рассмотрения таких вопросов, как составление и линеаризация исходных уравнений движения и типовые динамические звенья. Излагаются возможные подходы, которые используются при анализе и синтезе замкнутых систем управления. В раздел перенесены главы, логически примыкающие к обсуждаемым вопросам и посвященные системам с переменными параметрами, а также системам с запаздыванием и распределенными параметрами. В этот же раздел включен материал о математических моделях систем в виде уравнений состояния, на которых базируется ряд положений современной теории автоматического управления.

В раздел III («Линейные дискретные системы») включены с небольшими изменениями и дополнениями главы, посвященные импульсным системам и системам с ЦВМ. Целесообразность такого объединения обусловлена тем, что такие системы имеют единую теоретическую базу. В этот раздел, как и в раздел II, естественным образом включен материал, посвященный уравнениям состояния.

Четвертый раздел содержит сведения о нелинейных системах автоматического управления. Здесь последовательно излагается теория нелинейных систем, которая начинается с рассмотрения методики составления исходных уравнений движения. Далее излагаются точные, а затем приближенные методы исследования устойчивости и автоколебаний, методы анализа качества нелинейных систем в различных режимах и при различных внешних воздействиях. В раздел дополнительно включена новая глава «Нелинейные дискретные системы», в которой кратко рассмотрены особенности нелинейных систем с амплитудно-импульсной и широтно-импульсной модуляцией. Системы такого типа в настоящее время широко применяются на практике.

Структура и содержание пятого раздела существенно изменены по сравнению с предыдущим изданием. Глава, посвященная системам с ЦВМ, перенесена в третий раздел, а ее место заняла глава 24 «Оптимальные системы», сформированная из параграфов «Классические вариационные методы», «Динамическое программирование» и «Аналитическое конструирование», написанных В.А. Бесекерским и написанной Е.П. Поповым главы «Нелинейная оптимизация». Соответственно изменено и название раздела.

Книга может служить хорошим пособием для студентов и аспирантов технических университетов и ценным руководством для преподавателей вузов, научных работников и инженеров, работающих в области теории автоматического управления.



# РАЗДЕЛ I

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

### Глава 1

### ВИДЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### § 1.1. Понятие о замкнутых автоматических системах

Существует чрезвычайно большое разнообразие автоматических систем, выполняющих те или иные функции по управлению самыми различными физическими процессами во всех областях техники. В этих системах сочетаются весьма разнообразные по конструкции механические, электрические и другие устройства, составляя, в общем, сложный комплекс взаимодействующих друг с другом звеньев.

Примерами автоматических систем могут служить:

- а) автомат включения освещения, в котором имеется фотоэлемент, реагирующий на силу дневного света, и специальное устройство для включения освещения, срабатывающее от определенного сигнала фотоэлемента;
- б) автомат, выбрасывающий какие-либо предметы (билеты, шоколад) при опускании в него определенной комбинации монет;
- в) автоматический регулятор скорости вращения двигателя, поддерживающий постоянную угловую скорость двигателя независимо от внешней нагрузки (аналогично — регуляторы температуры, давления, напряжения, частоты и пр.);
- г) автопилот, поддерживающий определенный курс и высоту полета самолета без помощи летчика;
- д) следящая система, на выходе которой с определенной точностью воспроизводится произвольное во времени изменение какой-нибудь величины, поданной на вход;
- е) система самонаведения снаряда на цель и пр.

Все эти и им подобные автоматические системы можно разделить на два больших класса:

- 1) автоматы, выполняющие определенного рода одноразовые или многократные операции; сюда относятся, например, автомат включения освещения, билетный автомат и т. п.;
- 2) автоматические системы, которые в течение длительного времени нужным образом изменяют (или поддерживают неизменными) какие-либо физические величины (координаты движущегося объекта, скорость движения, элект-

рическое напряжение, частоту, температуру, давление, громкость звука и пр.) в том или ином управляемом процессе. Сюда относятся автоматические регуляторы, следящие системы, автопилоты, системы самопаведения и т.п.

В данной книге будут рассматриваться только автоматические системы второго класса. Эти последние делятся в свою очередь на незамкнутые и замкнутые автоматические системы.

Общая схема незамкнутой системы в двух вариантах представлена на рис. 1.1, а и б. Это — простейшие схемы управления: полуавтоматические, когда источником воздействия является человек, и автоматические, если источником воздействия является изменение каких-либо внешних условий, в которых работает данная система (температура или давление окружающей среды, электрический ток, освещенность, изменение частоты и т. п.).

Схема, показанная на рис. 1.1, б, отличается от схемы на рис. 1.1, а тем, что кроме органов управления имеются еще контрольные приборы, которые дают возможность наблюдать за протеканием процесса в управляемом объекте.

Характерным для незамкнутой системы является то, что процесс работы системы не зависит непосредственно от результата ее воздействия на управляемый объект, т. е. в ней отсутствует обратная связь.

Естественным дальнейшим усовершенствованием автоматической системы является замыкание ее выхода со входом таким образом, чтобы контрольные приборы, измерив некоторые величины, характеризующие определенный процесс в управляемом объекте, сами служили бы одновременно и источником воздействия на систему, причем величина этого воздействия зависела бы от того, насколько отличаются измеренные величины на управляемом объекте от требуемых значений.

Таким образом, возникает замкнутая автоматическая система. В наиболее компактной форме она представлена на рис. 1.2. Характерной особенностью этой системы является наличие обратной связи, благодаря которой информация о состоянии управляемого объекта передается в управляющее устройство.

Очевидно, что в замкнутой автоматической системе имеется полная взаимозависимость работы всех звеньев друг от друга. Протекание всех процессов в замкнутой системе коренным образом отличается от процессов в незамкнутой системе. Замкнутая система совершенно по-другому реагирует на внешние возмущающие воздействия. Различные ценные свойства замкнутых автоматических систем делают их

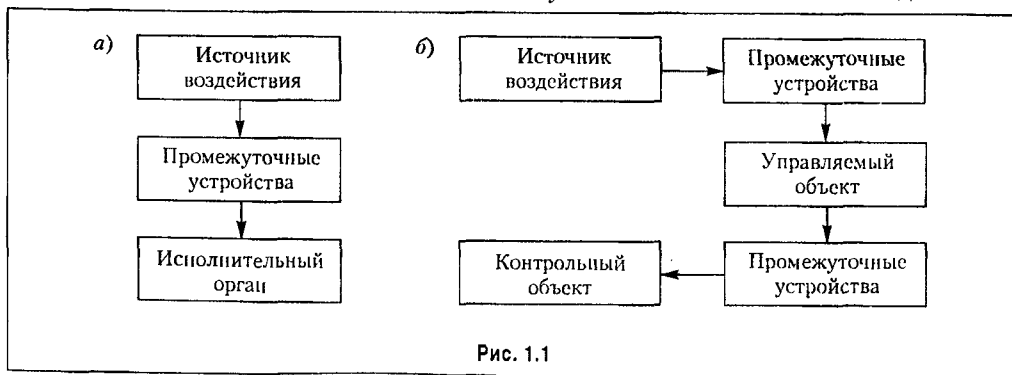


Рис. 1.1

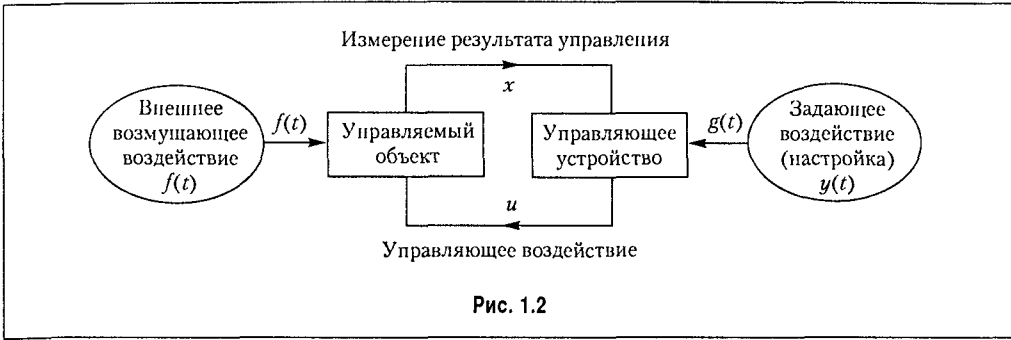


Рис. 1.2

незаменимыми во многих случаях, когда требуется точность и быстродействие управления.

Введем общую терминологию для автоматических систем, изобразив общую схему в виде рис. 1.3.

Агрегат 7, в котором происходит подлежащий управлению процесс, называется *управляемым объектом*. Для краткости будем говорить просто *объект*. Примерами объектов могут служить самолет, ракета, ядерный реактор, холодильник и др. Величина  $y(t)$ , которой необходимо в этом объекте управлять, т. е. поддерживать постоянной или изменять по некоторой программе, называется *управляемой величиной*. Это могут быть углы тангажа, крена и рыскания летательных аппаратов, температура в реакторе или холодильнике, скорость вращения двигателя и т. д. Величина  $g(t)$ , значения которой должна поддерживать или воспроизводить управляемая величина, называется *задающим воздействием*. Разность между заданным и фактическим значениями управляемой величины называется *рассогласованием*, или *ошибкой* системы. Воздействие  $f(t)$ , вызывающее нежелательное изменение управляемой величины, называется *возмущающим воздействием*, или *возмущением* (порывы ветра, изменение температуры окружающей среды и др.).

Устройство, предназначенное для выполнения задачи управления, называется *управляющим устройством*. На рис. 1.3 оно разбито на ряд звеньев. Измерительное устройство 8 измеряет фактическое значение управляемой величины. Результатом измерения является величина  $z(t)$ . Задающее устройство 1 преобразует задающее воздействие  $g(t)$  в величину  $h(t)$  той же физической природы, что и  $z(t)$ . Сравниваю-

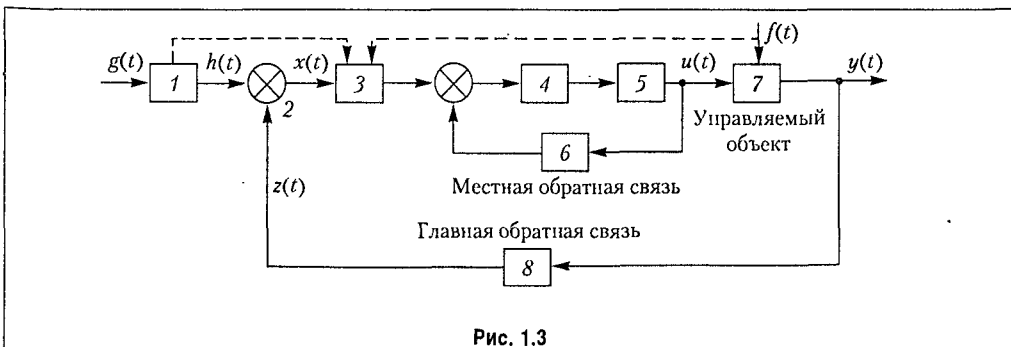


Рис. 1.3

щее устройство, или чувствительный элемент 2 производит вычитание  $x(t) = h(t) - z(t)$  и тем самым выявляет рассогласование, или ошибку системы. Далее ставятся усилительно-преобразовательное 4 и исполнительное 5 устройства. В некоторых случаях вводится дополнительное измерительное устройство 3, а иногда и звено 6, через которое осуществляется местная обратная связь. Управляющее устройство в соответствии с заложенным в него *алгоритмом управления* формирует *управляющее воздействие*  $u(t)$ , направленное на ликвидацию рассогласования  $x(t)$ , независимо от причины, вызвавшей это рассогласование.

Наиболее распространенными задачами, которые решают системы автоматического управления, являются стабилизация, выполнение заданной программы и слежение.

Системы, поддерживающие постоянное значение управляемой величины при изменяющихся возмущающих воздействиях называются *стабилизирующими системами* (стабилизация температуры, давления, напряжения, углового положения летательного аппарата и т. п.). Управляющее устройство таких систем иногда называют регулятором, а сами системы — системами автоматического регулирования.

Системы, изменяющие управляемую величину по заранее заданной программе, называются *программными системами*. Такая задача возникает, например, при выводе ракеты на заданную траекторию, при развороте зеркала телескопа с целью компенсации вращения Земли и в других случаях.

Системы, управляемая величина которых воспроизводит произвольно изменяющееся задающее воздействие, называются *слеящими системами*. Так, антенна радиолокатора должна следить за маневрирующей целью, фреза копировально-фрезерного станка должна воспроизводить движение щупа по копиру и т. д.

В перечисленных выше системах требуемое значение управляемой величины оставалось постоянным, либо изменялось по определенной программе, либо задавалось извне. Однако в ряде случаев сама система в процессе управления должна производить поиск такого требуемого значения, которое необходимо в данный момент времени выдерживать, чтобы режим работы управляемого объекта был наиболее выгодным. Такие системы автоматического управления называются *экстремальными*. Схема экстремальной системы отличается от изображенной на рис. 1.3 тем, что вместо задающего устройства ставится устройство автоматического поиска, которое производит анализ какой-либо характеристики объекта и подает в управляющее устройство такое требуемое значение управляемой величины  $h(t)$ , при котором данная характеристика приобретает экстремальное (максимальное или минимальное) значение. Очевидно, что построение экстремальной системы имеет смысл лишь при изменяющихся возмущающих воздействиях.

Экстремальное управление может применяться, например, для поддержания наиболее экономичной скорости полета самолета, соответствующей минимальному секунднему расходу топлива при изменяющихся высоте полета, массе самолета, скорости и направлении ветра и т. д. При этом будет достигнута и максимальная дальность полета при заданном запасе топлива.

Управляющее устройство системы создается применительно к каждому конкретному управляемому объекту. Если свойства объекта и возмущающие воздействия хорошо известны, то можно заранее уверенно выбирать такие структуру и парамет-

ры управляющего устройства, при которых обеспечивается надлежащее качество процессов в проектируемой автоматической системе. Если же свойства самого объекта известны недостаточно достоверно и если к тому же они могут в процессе работы в некоторых пределах случайным образом меняться, то и параметры управляющего устройства можно подобрать лишь ориентировочно. В этом случае при отклонении параметров объекта от расчетных будет происходить ухудшение качества процессов в системе.

В тех случаях, когда закон изменения параметров объекта во времени заранее хорошо известен, можно рассчитать, как и когда нужно менять параметры управляющего устройства, чтобы качество работы автоматической системы в целом оставалось неизменно хорошим. Так делается, например, в некоторых системах управления ракетами, у которых в процессе полета из-за выгорания топлива изменяется масса, а из-за изменения плотности атмосферы — эффективность исполнительных органов. Если же составление такой программы оказывается невозможным вследствие незнания истинного закона изменения хотя бы некоторых параметров объекта, то прибегают к построению так называемой *самоадаптивной системы*. Для этого в систему вводятся дополнительные автоматические устройства, которые определяют отклонение какого-либо показателя качества от его требуемого значения и изменяют параметры управляющего устройства или даже его структуру с целью минимизации указанного отклонения.

Экстремальные и самоадаптивные системы относятся к так называемым *адаптивным системам* автоматического управления. Образцы для подражания дают процессы адаптации в живой природе. Так, стабилизация температуры тела человека и некоторых животных при низких температурах окружающей среды осуществляется за счет изменения притока крови к поверхностным тканям, а при высоких температурах включаются механизмы потоотделения и дыхания, обеспечивающие интенсивный отвод избытка тепла. Таким образом, имеет место изменение алгоритма управления.

Более детально адаптивные системы рассматриваются в разделе V.

В системе, схема которой изображена на рис. 1.3, имеется лишь одна управляемая величина и одно управляющее воздействие. Такие системы называют одномерными. Но существуют и так называемые связанные или многомерные системы управления. Многомерными называются такие системы, в которых имеется несколько управляемых величин или в единый комплекс связаны *несколько* управляющих устройств на *одном* объекте или *несколько* управляющих устройств и *несколько* объектов с перекрестными связями между ними.

Обратимся, например, к системе автоматического управления полетом самолета (система самолет — автопилот). Автопилот имеет три канала управления: управление движением в вертикальной плоскости (по тангажу), управление движением в горизонтальной плоскости (по курсу) и управление поворотом вокруг собственной оси (по крену). Для примера на рис. 1.4 изображен один канал автопилота — курсовой. Здесь корпус самолета 1 является объектом управления, гироскоп 2 с потенциометрической схемой служит измерительным устройством. Далее идут усилитель 3, приводной двигатель 4 с редуктором 5 (рулевая машинка) и, в качестве исполнительного органа, руль 6.

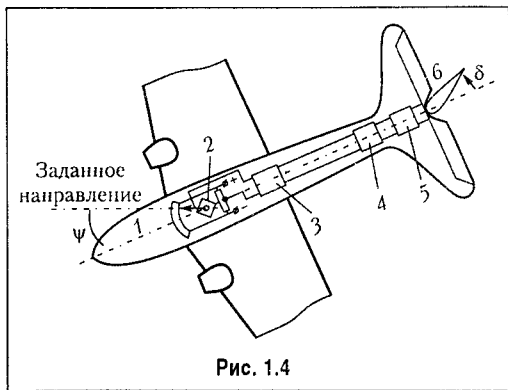


Рис. 1.4

Ось гироскопа обладает свойством сохранять неизменным свое направление в пространстве. Поэтому при отклонении самолета на угол  $\psi$  от заданного курса движок, связанный с осью, смещается с нулевой точки потенциометра. В результате на усилитель-преобразователь подается напряжение, пропорциональное углу отклонения  $\psi$ . Оно приводит в движение исполнительное устройство 3–5. При этом вследствие отклонения руля на угол  $\delta$  самолет возвратится в требуемое положение.

Аналогично устроены и два других канала автопилота.

Очевидно, что если с помощью автопилота требуется поддерживать неизменный курс или необходимо разворачивать самолет по заданной программе, то данная система управления будет работать либо в режиме стабилизации постоянной величины, либо в режиме программного управления. Если же самолет надо наводить на какую-либо цель, причем заданное направление (рис. 1.4) вместо гироскопа (или в дополнение к нему) определяется каким-нибудь визирующим устройством (оптическим или радиолокационным), то данная система управления будет работать как следящая система.

Аналогично обстоит дело и по каналу тангажа. В канале крена обычно имеет место автоматическая стабилизация нулевого угла крена. При этом каждый из трех каналов управления действует на свой руль (руль направления, руль высоты, элероны), т. е. имеется три отдельных управляющих устройств на одном объекте. Однако между ними часто вводятся еще перекрестные связи. Например, для улучшения поворота самолета по курсу полезно самолет несколько накрентить. Поэтому сигнал отклонения курса подается не только на руль направления, но также и в канал крена (так называемый координированный разворот).

## § 1.2. Классификация автоматических систем по характеру внутренних динамических процессов

Каждая автоматическая система состоит из целого ряда блоков или звеньев, различно соединенных между собой (см. рис. 1.3). Каждое отдельно взятое звено имеет вход и выход (рис. 1.5, а) в соответствии со стрелками на рис. 1.3, обозначающими воздействие или передачу информации с одного звена на другое. В общем случае звено может иметь несколько входов и выходов, но сейчас это несущественно. Входная величина  $x_1$  и выходная  $x_2$  могут иметь любую физическую природу (ток, напряжение, перемещение, температура, освещенность и т. п.).

В процессе работы автоматической системы величины  $x_1$  и  $x_2$  изменяются во времени. Динамика процесса

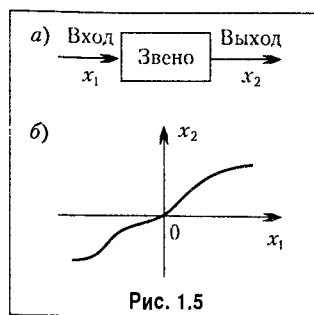


Рис. 1.5

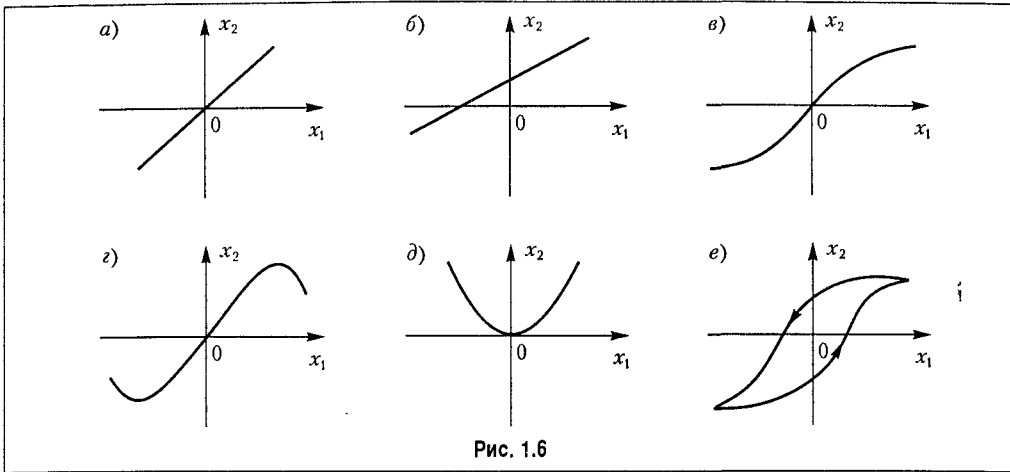


Рис. 1.6

преобразования сигнала в данном звене описывается некоторым уравнением (или экспериментально снятой характеристикой), связывающим выходную переменную  $x_2$  с входной переменной  $x_1$ . Совокупность уравнений и характеристик всех звеньев описывает динамику процессов управления во всей системе в целом. Существуют различные характеристики звеньев: статические, переходные, частотные и др. Далее все они будут изучены.

Основными признаками деления автоматических систем на большие классы по характеру внутренних динамических процессов являются следующие:

- непрерывность или дискретность (прерывистость) динамических процессов во времени;
- линейность или нелинейность уравнений, описывающих динамику процессов управления.

По первому признаку автоматические системы делятся на системы *непрерывного* действия, системы *дискретного* действия (импульсные и цифровые) и системы *релейного* действия.

По второму признаку каждый из указанных классов, кроме релейного, делится на системы *линейные* и *нелинейные*. Системы же релейного действия относятся целиком к категории нелинейных систем.

Дадим определение каждого класса автоматических систем, а затем рассмотрим их примеры.

*Системой непрерывного действия* или непрерывной системой называется такая система, в каждом из звеньев которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. При этом закон изменения выходной величины во времени может быть произвольным, в зависимости от формы изменения входной величины и от вида уравнения динамики (или характеристики) звена.

Чтобы автоматическая система в целом была непрерывной, необходимо прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев системы были непрерывными. Примеры непрерывных статических характеристик показаны на рис. 1.6.

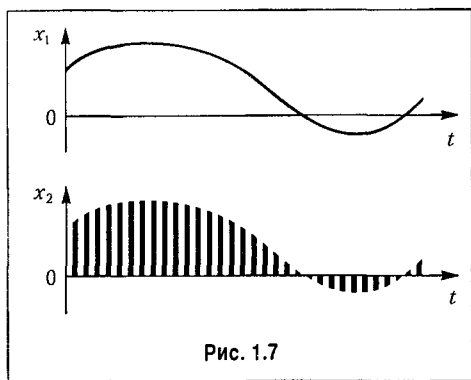


Рис. 1.7

*Системой дискретного действия*, или дискретной системой называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется не непрерывно, а имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени (рис. 1.7). Звено, преобразующее непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, называется импульсным элементом или импульсным модулятором. Если последующее звено системы тоже дискретное, то для него не только выходная, по

и входная величина будет дискретной (импульсной). К дискретным автоматическим системам относятся импульсные системы (т. е. системы с импульсным элементом), а также системы с цифровыми вычислительными устройствами.

*Системой релейного действия* или релейной системой называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина в некоторых точках процесса, зависящих от значения входной величины, изменяется скачком. Такое звено называется релейным звеном. Статическая характеристика релейного звена имеет точки разрыва, как показано в разных вариантах на рис. 1.8.

Обратимся теперь ко второму признаку классификации автоматических систем.

*Линейной системой* называется такая система, поведение всех звеньев которой вполне описывается линейными уравнениями (алгебраическими и дифференциальными или разностными). Для этого необходимо прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев системы были линейными, т. е. имели вид прямой линии (рис. 1.6, а и б).

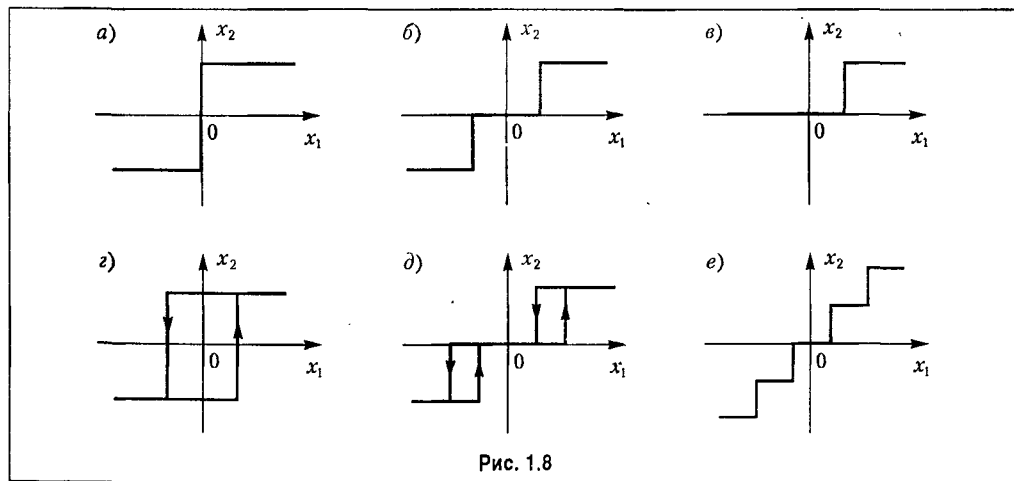


Рис. 1.8



Если динамика всех звеньев системы описывается обыкновенными линейными дифференциальными (и линейными алгебраическими) уравнениями с постоянными коэффициентами, то систему называют *обыкновенной линейной системой*.

Если в уравнении динамики какого-либо звена линейной системы имеется хотя бы один или несколько переменных во времени коэффициентов, то получается *линейная система с переменными параметрами*. Если какое-либо звено описывается линейным уравнением в частных производных

(например, имеют место волновые процессы в трубопроводе или в электрической линии), то система будет *линейной системой с распределенными параметрами*. В отличие от этого обыкновенная линейная система является *системой с сосредоточенными параметрами*. Если динамика какого-либо звена системы описывается линейным уравнением с запаздывающим аргументом (т. е. звено обладает чисто временным запаздыванием или временной задержкой  $\tau$  передачи сигнала (рис. 1.9)), то система называется *линейной системой с запаздыванием*. Динамика *линейных импульсных систем* описывается линейными разностными уравнениями.

*Нелинейной системой* называется такая система, в которой хотя бы в одном звене нарушается линейность статической характеристики или же имеет место любое другое нарушение линейности уравнений динамики звена (произведение переменных или их производных, корень, квадрат или более высокая степень переменной, любая другая нелинейная связь переменных и их производных).

Следовательно, к нелинейным системам относятся, в частности, все системы, в звеньях которых имеются статические характеристики любого из многих видов, показанных на рис. 1.6, в–е. К ним же относятся и все релейные характеристики (рис. 1.8).

Нелинейными могут быть, разумеется, также и системы с переменными параметрами, с распределенными параметрами, с запаздыванием, импульсные и цифровые системы, если в них где-либо нарушается линейность уравнений динамики.

При исследовании, расчете и синтезе автоматических систем нужно иметь в виду, что наиболее полно разработаны теория и различные прикладные методы для обыкновенных линейных и линейных дискретных систем. Поэтому в интересах простоты расчета всегда желательно (там, где это допустимо) сводить задачу к такой форме, чтобы максимально использовать методы исследования таких систем. Обычно уравнения динамики всех звеньев системы стараются привести к обыкновенным линейным, и только для некоторых звеньев,

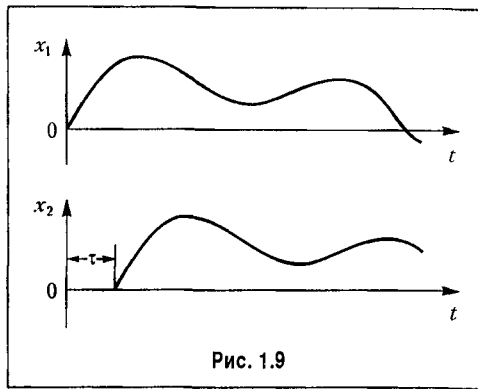


Рис. 1.9

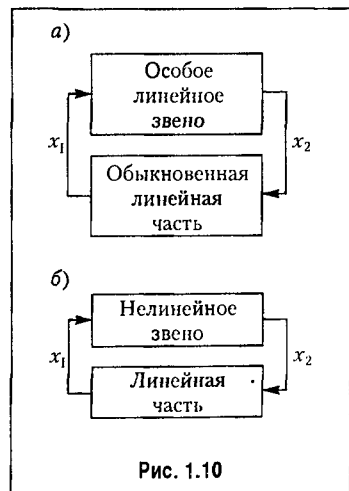


Рис. 1.10

где это недопустимо или где специально вводится особое линейное или нелинейное звено, учитываются эти особые их свойства. Тогда при наличии одного такого звена система при расчете разбивается на два блока (рис. 1.10), в одном из которых объединяется весь комплекс обыкновенных линейных звеньев.

Однако это вовсе не значит, что при проектировании новых автоматических систем нужно стремиться к обыкновенным линейным системам. Наоборот, уже из приведенных выше определений совершенно очевидно, что обыкновенные линейные системы обладают ограниченными возможностями. Введение особых линейных и нелинейных звеньев может придать системе лучшие качества. Особенно богатыми возможностями обладают системы со специально вводимыми нелинейностями и дискретные системы, в том числе с цифровыми вычислительными устройствами, а также адаптивные системы.

### § 1.3. Примеры непрерывных автоматических систем

Одна из первых в истории техники автоматических систем была изобретена И. И. Ползуновым в 1765 г. Это был автоматический регулятор уровня воды в котле его паровой машины (рис. 1.11). Измерительное устройство (поплавок), измеряющее управляемую величину (высоту уровня воды в котле), непосредственно перемещает управляющий орган (клапан питания котла водой). Котел является управляемым объектом.

Изменение величины отбора пара из котла в паровую машину является основным возмущающим воздействием на объект. Если отбор пара увеличится, испарение воды ускорится, уровень воды  $H$  начнет уменьшаться. Тогда поплавок, опускаясь, будет шире открывать клапан, усилится приток питающей воды, и уровень ее будет автоматически восстанавливаться. Кроме изменения отбора пара, возмущающее воздействие на объект будет проявляться также и в изменении условий теплового режима работы котла (интенсивность топки, температура питающей воды и окружающего пространства). Регулятор во всех случаях будет действовать так, чтобы ликви-

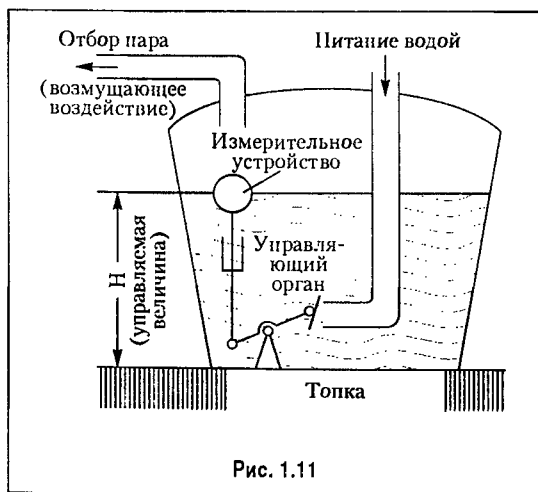


Рис. 1.11

дировать нежелательное отклонение уровня воды, по каким бы причинам оно ни возникало.

Следующим в истории техники автоматическим регулятором, получившим широкое распространение, был центробежный регулятор скорости вращения вала паровой машины, изобретенный Уаттом в 1784 г. (рис. 1.12). Этот регулятор имеет другую конструкцию и другую природу управляемой величины (угловая скорость  $\omega$ ), но совершенно тот же общий принцип действия.

Измерительное устройство (центробежный механизм) реагирует на из-

менение управляемой величины  $\omega$ . Так, если угловая скорость вала  $\omega$  увеличивается, шары центробежного механизма расходятся, муфта поднимается и перемещает непосредственно управляющий орган (например, заслонку в трубе питания машины паром). Это изменяет приток энергии в машину, чем автоматически уничтожается нежелательное отклонение угловой скорости  $\omega$ .

Основным возмущающим воздействием на объект здесь является изменение нагрузки на валу паровой машины. Кроме этого, может иметь место и другое возмущающее воздействие в виде нарушения нормальных параметров пара в трубе питания машины. Регулятор гасит влияние любого воздействия (в определенных пределах), стремясь все время ликвидировать отклонение, по какой бы причине оно ни возникло.

Для иллюстрации общности принципов построения систем автоматического управления относящихся к самым разнообразным техническим объектам, приведем еще несколько конкретных примеров.

На рис. 1.13 изображена схема автоматической стабилизации температуры воды или масла в тепловом двигателе. Нагретая вода из двигателя (управляемый объект) поступает в термостат (измерительное устройство). Если температура воды повышается, то под действием увеличения давления паров специальной легко испаряющейся жидкости, находящейся в сифоне термостата, прикрывается клапан прямого возврата воды в двигатель. Вследствие этого большее количество воды пойдет в обход — через радиатор, где она охлаждается. Таким образом, автоматически под-

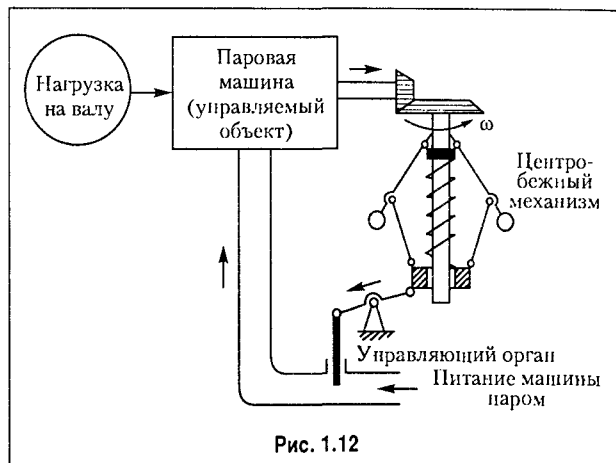


Рис. 1.12

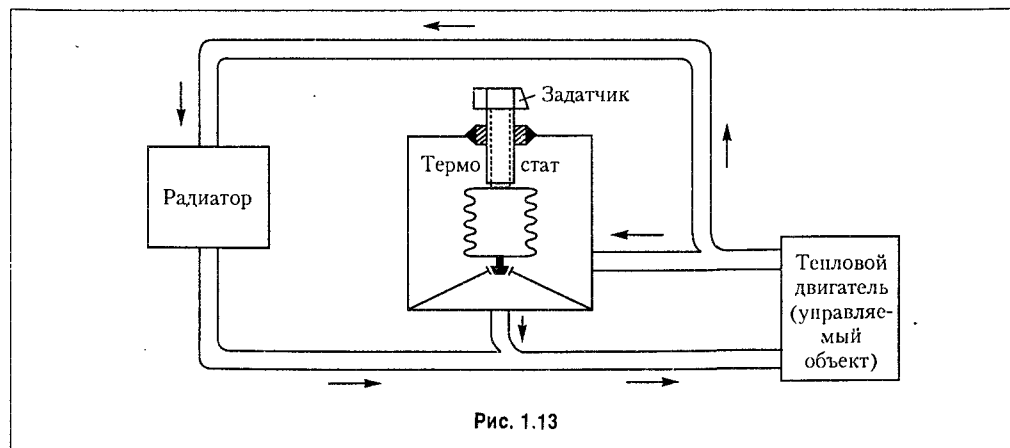


Рис. 1.13

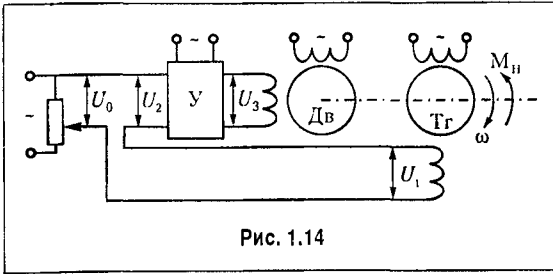


Рис. 1.14

держивается постоянная температура воды в системе охлаждения теплового двигателя (в частности, автомобильного).

На рис. 1.14 показана схема системы стабилизации угловой скорости  $\omega$  вращения вала электрического двигателя Дв. Последний является управляемым объектом. Измерительным устройством является тахогенератор Тг, вырабатывающий напряжение  $U_1$ , пропорциональное управляемой величине  $\omega$ . На потенциометре задающего устройства устанавливается напряжение  $U_0$ , соответствующее требуемому значению угловой скорости  $\omega$ . Рассогласование  $U_2 = U_0 - U_1$  подается на усилитель У. Поступающее с его выхода в обмотку управления двигателя напряжение  $U_3$  является управляющим воздействием, благодаря которому двигатель ликвидирует создавшееся отклонение  $\omega$ . Изменение создаваемого нагрузкой момента  $M_n$  представляет собой возмущающее воздействие.

Примерами связанных систем являются системы стабилизации напряжения и частоты переменного тока, стабилизации скорости и температуры в реактивных двигателях, стабилизации различных величин в энергетической системе, состоящей из нескольких параллельно работающих объектов. Связанная система управления получается и при рассмотрении работы всего автопилота на самолете в целом.

Пример электромеханической следящей системы показан на рис. 1.15. Принцип ее действия следующий.

Пример электромеханической следящей системы показан на рис. 1.15. Принцип ее действия следующий.

На входе вращением командной оси КО извне задается произвольный закон изменения угла поворота во времени:  $\vartheta_1 = \vartheta_1(t)$ . Тот же самый закон должен быть автоматически воспроизведен на управляемом объекте УО, ось которого является исполнительной осью ИО. Сравнение углов поворота командной и исполнительной осей осуществляется датчиком угла рассогласования, состоящим из потенциометров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (чаще вместо потенциометров используются синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы СКВТ или сельсины). Если углы поворота различны, то возникает рассогласование, или ошибка  $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ , а на выходе датчика появляется напряжение, пропорциональное этой ошибке:  $U_1 = k_1 \vartheta$ . Усиленный усилителем У сигнал  $U_2$  поступает на обмотку управления двигателя Дв, который начинает вращаться, поворачивая через редуктор Р исполнительную ось в сторону уменьшения ошибки.

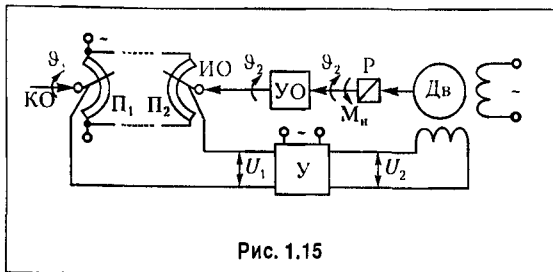


Рис. 1.15

Подобная следящая система позволяет при незначительной мощности, требуемой для вращения командной оси, управлять мощными или тяжелыми объектами (орудийными баннями, антеннами радиолокаторов и т. п.). Кроме того, она может обеспечить дистанционность управления, т. е. командная ось может находиться на некотором удалении от объекта и

силовой части системы. Если же вместо проводной связи используются радиолнии, то удаление может быть значительным, что позволяет, например, управлять с Земли подвижными объектами, находящимися на Луне.

Следует учитывать, что полностью ликвидировать ошибку следящая система, как и любая другая автоматическая система, не может. Во-первых, это обусловлено наличием трения в осях, зонами нечувствительности и т. п., из-за чего двигатель останавливается при несколько отличающемся от нуля напряжении  $U_2$ . Тогда и напряжение  $U_1$  должно отличаться от нуля. Но так как  $U_1 = k_1 \vartheta$ , то должна существовать ошибка  $\vartheta = \vartheta_{и}$ , называемая инструментальной ошибкой.

Во-вторых, если со стороны объекта к двигателю через редуктор прикладывается момент нагрузки  $M_{и}$  (возмущающее воздействие), то для его компенсации сам двигатель должен создать момент противоположного знака. Для этого к его обмотке управления должно быть приложено напряжение  $U_2$ , пропорциональное  $M_{и}$ , для чего опять-таки должна появляться ошибка  $\vartheta_{м}$ , называемая моментной ошибкой. В результате, если повернуть командную ось на некоторый угол  $\vartheta_1 = \vartheta_{10}$ , то исполнительная ось повернется на угол  $\vartheta_2 = \vartheta_{10} - \vartheta_{м} - \vartheta_{и}$ .

В-третьих, если командная ось вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega_1$ , то очевидно и исполнительная ось после завершения переходных процессов должна вращаться с той же скоростью:  $\Omega_2 = \Omega_1$ . Но чтобы исполнительная ось вращалась, к двигателю должно быть приложено напряжение  $U_2$ , пропорциональное угловой скорости. А это возможно только при наличии так называемой скоростной ошибки  $\vartheta_{ск}$ , величина которой пропорциональна  $\Omega_1$ . Полная установившаяся ошибка в этом случае  $\vartheta_{уст} = \vartheta_{ск} + \vartheta_{м} + \vartheta_{и}$ .

Наличие моментной и скоростной ошибок обусловлено самим принципом действия замкнутой системы, которая реагирует не на задающее и возмущающие воздействия, а на отклонение управляемой величины от ее требуемого значения. Более детально ошибки систем рассматриваются в разделе II.

Кроме электромеханических следящих систем, существуют также электрогидравлические, электропневматические и чисто гидравлические или пневматические следящие системы в зависимости от вида применяемых в них усилительных и исполнительных устройств. Общий принцип действия во всех случаях остается тем же самым.

Входная и выходная величины следящей системы могут быть не только механические, как в примере на рис. 1.15; они могут иметь любую физическую природу. В соответствии с этим конструкции тоже могут быть весьма разнообразными.

На рис. 1.16 изображена схема следящей системы, входной величиной у которой является напряжение  $U_0$ , а выходной —  $\omega$ . Принцип действия и основные элементы у нее такие же, как и у системы стабилизации скорости вращения (рис. 1.14), только напряжение  $U_0$  подается извне и может изменяться. Если на выходе дополнительно поставить понижающий редуктор Р и датчик угла ДУ, то получится так называемый ин-

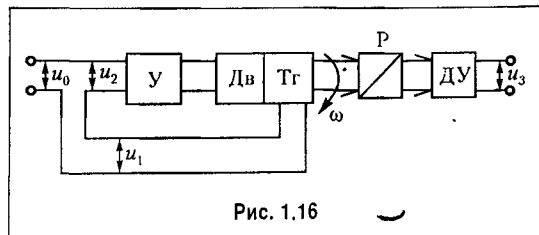


Рис. 1.16

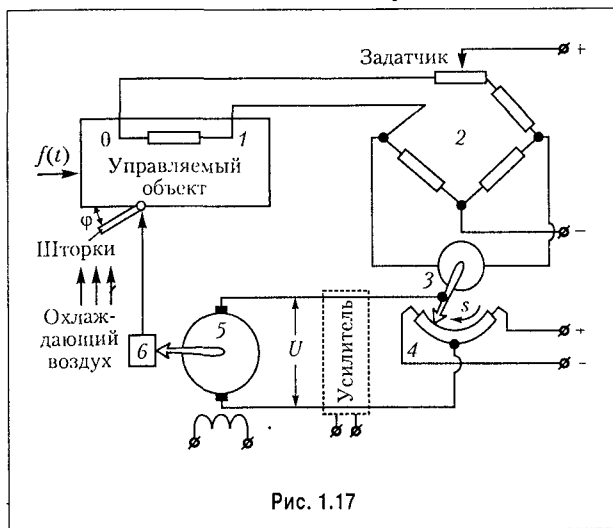


Рис. 1.17

тегрирующий привод, у которого напряжение на выходе  $U_3$  практически пропорционально интегралу от  $U_0$ . Действительно, угловая скорость  $\omega$  изменяется пропорционально напряжению  $U_0$ , сама она представляет собой производную от угла поворота, а угол — интеграл от угловой скорости. Датчик угла измеряет угол поворота и выдает пропорциональное ему напряжение. Высокая точность интегрирования достигается за счет применения малоинерционных электрических двигателей со встроенными в их корпуса тахогенераторами.

В настоящее время во многих областях техники существует необозримое количество самых разнообразных систем автоматического управления, использующих принцип следящих систем. Он применяется почти везде, где нужно добиться высокой точности и надежности автоматического управления.

## § 1.4. Примеры дискретных и релейных автоматических систем

Чтобы наглядно представить себе принцип работы простейшей *импульсной системы*, покажем, как ее можно получить из обыкновенных линейных систем непрерывного действия, т. е. из тех систем, которые рассматривались в предыдущих параграфах.

Возьмем систему стабилизации температуры непрерывного действия (рис. 1.17). Необходимо поддерживать постоянную температуру объекта, охлаждаемого воздухом. Управляющим органом являются шторки, угловое положение которых  $\theta$  определяет собой интенсивность поступления охлаждающего воздуха.

Измерительное устройство состоит из терморезистора 1, включенного в качестве одного из плеч моста 2, и гальванометра 3, измеряющего ток в диагонали моста. Мост 2 настраивается так, что при заданной температуре, которую надо поддерживать неизменной, ток в диагонали моста отсутствует. Таким образом, измерительное устройство (1, 2, 3) даст на выходе перемещение стрелки  $s$ , пропорциональное отклонению температуры  $\theta$ .

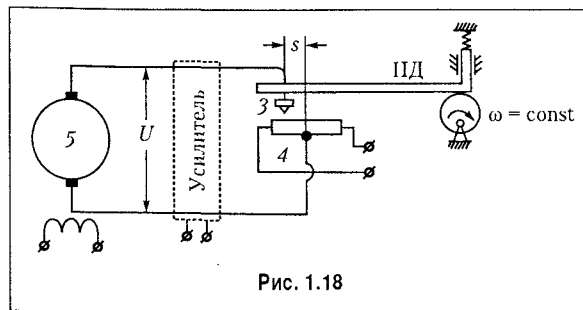


Рис. 1.18

Стрелка скользит по потенциометру 4, управляющему работой двигателя 5. Якорь двигателя питается через потенциометр (иногда дополненный усилителем). Двигатель 5 через редуктор 6 вращает штурки.

Существенным недостатком данной конкретной системы является то, что стрелка гальванометра 3 имеет значительную механическую нагрузку в виде трения об обмотку потенциометра. Это заметно снижает чувствительность измерителя, а значит, и всей системы к малым отклонениям регулируемой величины  $\theta$ . Целесообразно было бы предоставить стрелке гальванометра возможность двигаться свободно без нагрузки. Это делается следующим образом.

На рис. 1.18 изображен вид на стрелку гальванометра 3 с торца (с носика). Носик стрелки движется вправо и влево свободно, не прикасаясь к обмотке потенциометра. Над стрелкой помещена так называемая падающая дужка ПД, опирающаяся на эксцентрик, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Когда падающая дужка приходит в нижнее положение, она прижимает стрелку гальванометра 3 к обмотке потенциометра 4 на короткое время. В течение остального периода колебаний дужки стрелка 3 свободна.

В результате при непрерывном перемещении стрелки с напряжением  $U$ , питающее цепь якоря двигателя, будет подаваться с потенциометра в виде коротких импульсов (рис. 1.19).

Постоянный период чередования импульсов, или период дискретности  $T$  задается системе принудительно извне и определяется величиной угловой скорости  $\omega$  вращения эксцентрика независимым от данной системы приводом. Длительность импульсов  $\tau$  тоже постоянна.

Поскольку перемещение стрелки  $s$  пропорционально отклонению температуры  $\theta$ , а скорость вращения вала электродвигателя  $d\varphi/dt$  примерно пропорциональна питающему напряжению  $U$ , то в первом приближении получается импульсная зависимость скорости вращения привода управляющего органа от отклонения регулируемой величины, показанная на рис. 1.20, б. Там же изображен вытекающий отсюда закон движения самого управляющего органа — перемещение штурков  $\varphi(t)$ . В первом приближении они равномерно движутся во время подачи импульса и затем стоят на месте в промежутке между импульсами.

На самом же деле, конечно, за счет инерционности двигателя при подаче импульса напряжения нарастание и

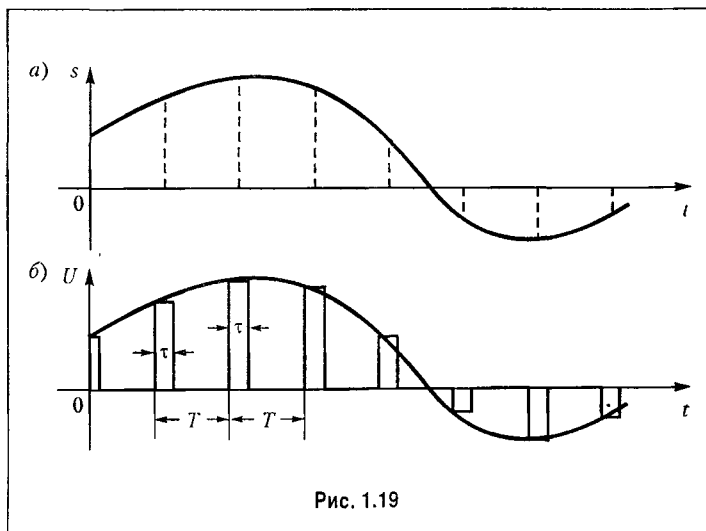


Рис. 1.19

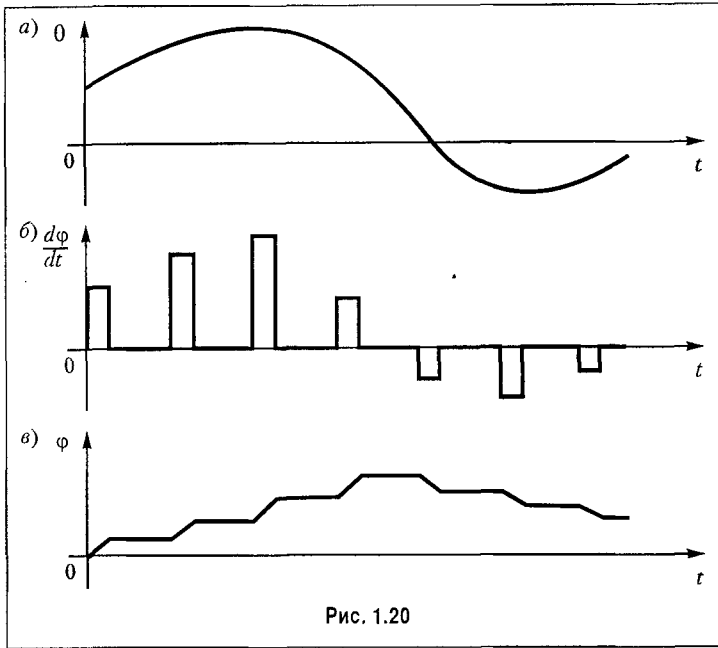


Рис. 1.20

импульсным элементом, или импульсным модулятором, а сам процесс преобразования — импульсной модуляцией. В современных системах автоматического управления используются амплитудно-импульсная, широтно-импульсная и (гораздо реже) частотно-импульсная модуляция.

При амплитудно-импульсной модуляции с изменением входной величины изменяется амплитуда импульсов (рис. 1.19), а их длительность  $\tau$  и период дискретности  $T$  остаются постоянными.

При широтно-импульсной модуляции с изменением входной величины изменяется длительность (ширина) импульсов, а их амплитуда и период дискретности  $T$

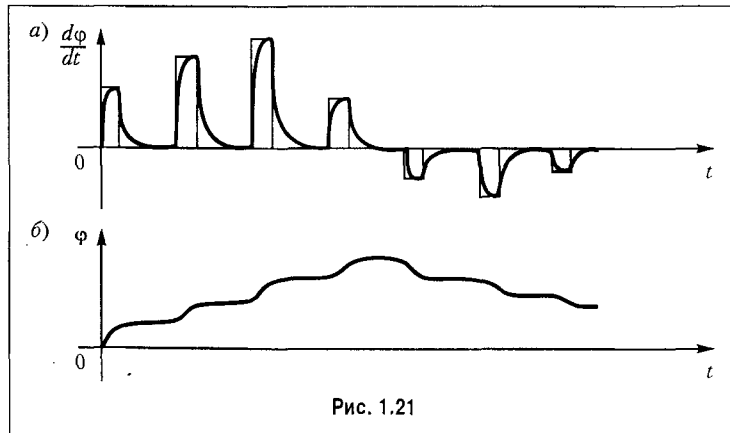


Рис. 1.21

убывание скорости  $d\varphi/dt$  будет происходить не мгновенно, как на рис. 1.20, б, а по некоторой кривой (рис. 1.21, а).

Поэтому регулирующее воздействие  $\varphi(t)$  на объект будет иметь несколько сглаженный вид (рис. 1.21, б). Отсюда видно, что необходимо разумно выбирать величины периода дискретности  $T$  и длительности  $\tau$  импульсов.

Устройство, преобразующее непрерывную входную величину в дискретную, т. е. в последовательность импульсов, называется

остаются постоянными (рис. 1.22).

При частотно-импульсной модуляции с изменением входной величины изменяется частота следования импульсов, а их амплитуда и длительность остаются постоянными.

Первые в истории техники импульсные элементы были элект-



ромеханическими (см. рис. 1.18). Основным смыслом их введения в автоматические системы состояло в освобождении измерительного устройства от нагрузки на его выходе. В современных автоматических системах преимущественно используются электронные и микроэлектронные модуляторы. Они широко применяются для управления электрическими двигателями и приводами летательных аппаратов, для стабилизации напряжения в электрических сетях и в ряде других случаев.

На рис. 1.23, а в качестве примера изображена схема импульсного стабилизатора напряжения. Напряжение первичного источника энергии (например, аккумуляторной или солнечной батареи)  $U_n$  преобразуется ключевым элементом КЭ в последовательность модулированных по ширине импульсов  $U_1$  (рис. 1.23; б). Изменение времени замкнутого состояния ключевого элемента и тем самым ширины импульсов  $\tau$  осуществляется схемой управления, состоящей из широтно-импульсного модулятора (ШИМ) и сравнивающего устройства. Последнее сравнивает фактическое значение сглаженного фильтром  $\Phi$  напряжения на нагрузке  $U_n$  (управляемая величина) с эталонным значением  $U_s$  (задающее воздействие) и определяет ошибку  $\Delta U = U_s - U_n$ . Если  $\Delta U > 0$ , то ширина импульсов на выходе ШИМ увеличивается, в результате чего увеличивается время замкнутого состояния ключевого элемента и тем самым длительности импульсов  $\tau$ . При  $\Delta U < 0$  длительность импульсов  $\tau$ , наоборот, уменьшается. В качестве ключевого элемента может быть использован, например, силовой транзистор.

В отличие от стабилизаторов напряжения непрерывного действия, в которых весь избыток энергии превращается в тепло, здесь от первичного источника отбирается столько энергии, сколько необходимо потребителю. Поэтому и коэффициент полезного действия у импульсных стабилизаторов значительно выше.

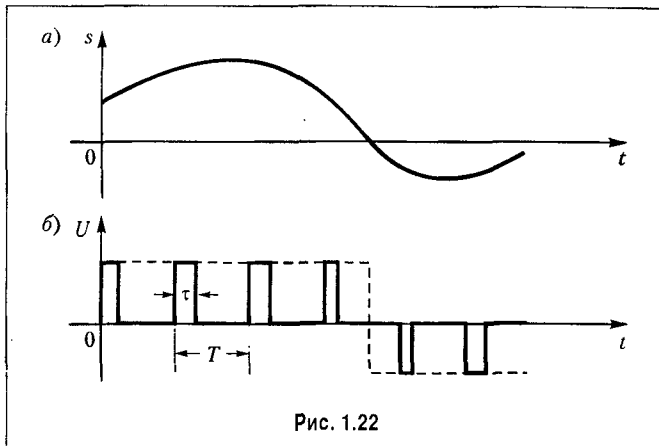


Рис. 1.22

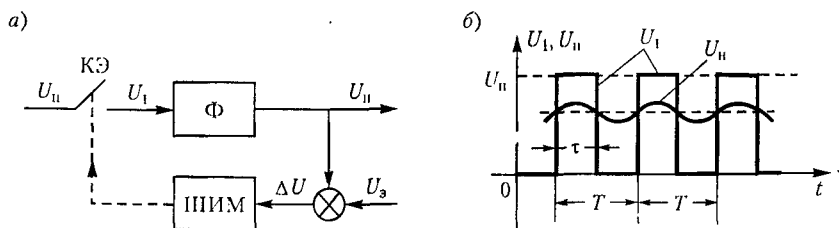


Рис. 1.23

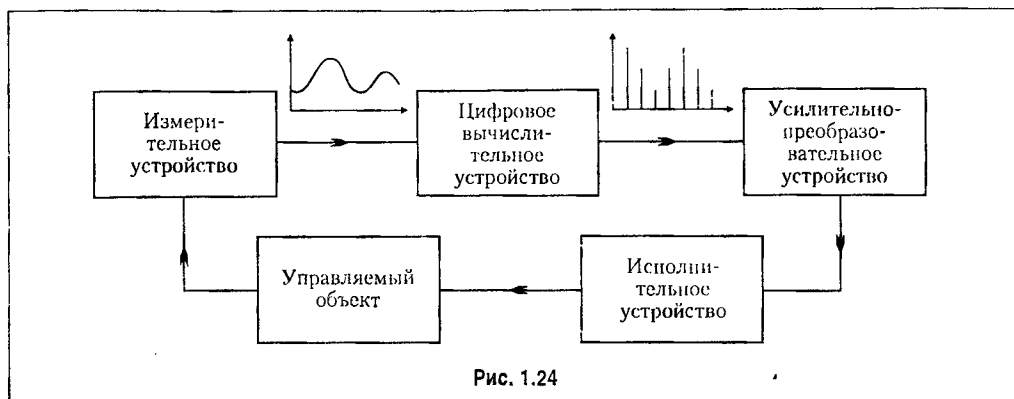


Рис. 1.24

При широтно-импульсном управлении скоростью вращения электрического двигателя не только экономится энергия, но и обеспечивается плавность хода на малых (так называемых «ползучих») скоростях. Это объясняется следующим. При непрерывном управлении для обеспечения малой скорости на двигатель необходимо подавать небольшое напряжение, сопоставимое с напряжением трогания двигателя. Поэтому вращение происходит рывками. При широтно-импульсном управлении на двигатель подается максимальное напряжение, но в течение небольшого промежутка времени  $t$ .

В разделе III будет показано, что широтно-импульсный модулятор в отличие от амплитудно-импульсного модулятора является нелинейным звеном. Поэтому и система с широтно-импульсной модуляцией становится нелинейной дискретной.

К дискретным системам относятся и системы автоматического управления в тех случаях, когда в замкнутый контур системы включается *цифровое вычислительное устройство*. Это устройство бывает необходимо в тех случаях, когда, например, измерительные приборы в системе управления не могут измерить непосредственно отклонение управляемой величины от требуемого (программного) значения, а оно должно вычисляться по определенным формулам через показания измерительных приборов.

В других случаях цифровое устройство может служить для вычисления не только отклонения, но и самого программного значения управляемой величины, по каким-либо критериям наилучшего качества работы данной системы, а также для формирования алгоритма управления. Цифровое устройство может выполнять и другие весьма разнообразные функции.

Система управления в этих случаях будет работать как дискретная, потому что цифровое устройство выдает результат вычисления дискретно, т. е. через некоторые промежутки времени, необходимые для производства вычисления.

Включение цифрового вычислительного устройства в контур системы управления сопряжено с преобразованием непрерывных величин в цифровой код на входе и с обратным преобразованием на выходе (рис. 1.24).

При этом выходная величина из-за удобства технической реализации обычно формируется в виде последовательности импульсов, модулированных по амплитуде или по ширине.

Релейные системы автоматического управления можно отнести, как и импульсные, описанные выше, к категории систем прерывистого действия, но их существенное отличие от импульсных систем заключается в том, что релейные системы по самому принципу своему являются нелинейными. Дело в том, что здесь моменты времени, в которые происходит замыкание и размыкание системы, заранее неизвестны; они не задаются извне, а определяются внутренними свойствами самой системы (ее структурой и величинами ее параметров). Этим обуславливаются и основные специфические особенности динамики процессов управления в релейных системах.

В качестве первого примера релейной системы рассмотрим систему стабилизации температуры примерно той же структуры, как на рис. 1.17, но с тем отличием, что вместо импульсного элемента для управления работой привода шторок в ней поставлено релейное звено — в данном случае поляризованное реле 3 (рис. 1.25). Его средний контакт в зависимости от знака тока в диагонали моста 2, т. е. в зависимости от знака отклонения управляемой величины  $\theta$ , замыкается с нижним или верхним контактом, включая ток либо в одну, либо в другую обмотку возбуждения двигателя, в результате чего получаем либо одно, либо другое направление движения шторок на объекте.

Из сети в управляемую цепь реле (цепь контактов) подается постоянное напряжение  $U = c$ . Напряжение  $U$ , питающее двигатель, изменяется в зависимости от величины тока  $I$  в диагонали моста по одному из законов, изображенных на рис. 1.26. Нейтральному положению среднего контакта реле соответствует значение  $U = 0$  при малых величинах тока  $-b < I < b$  (рис. 1/26, а). При некоторой величине тока  $I = b$  реле срабатывает, включая напряжение  $U = c$  в одну из обмоток двигателя. При обратном направлении тока  $I$ , которое считается отрицательным, будет та же картина срабатывания при  $I = -b$ , причем то же самое напряжение  $U$  включается в другую обмотку двигателя и задает ему другое направление вращения. Это направление будем считать отрицательным и поэтому напряжение в этом случае будем отмечать знаком минус:  $U = -c$ . Интервал  $-b \leq I \leq b$ , где  $U = 0$ , называется зоной нечувствительности реле. Показанная зависимость выходной величины реле  $U$  от входной  $I$  называется статической характеристикой реле.

Как известно, величина тока срабатывания реле не совпадает с величиной тока отпускания. При учете этого обстоятельства получаем петлевую статическую характеристику (рис. 1.26, б), где  $b_2$  — величина тока срабатывания, а  $b_1$  — тока отпускания. Эта петля аналогична той, которая получается при гистерезисных явлениях. Поэтому и в данном случае ее называют гистерезисной петлей. Если петля не широка, то ее часто пренебрегают.

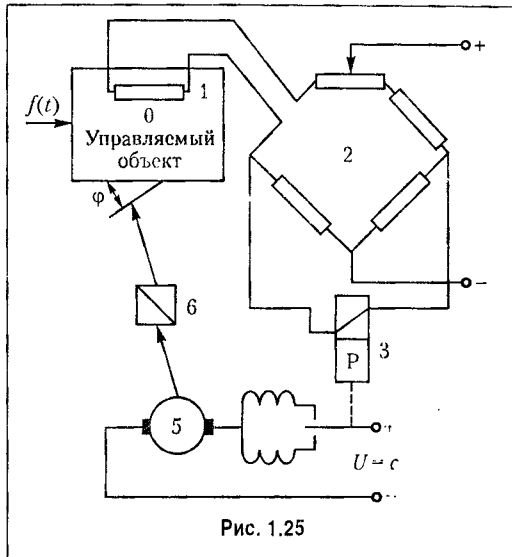


Рис. 1.25

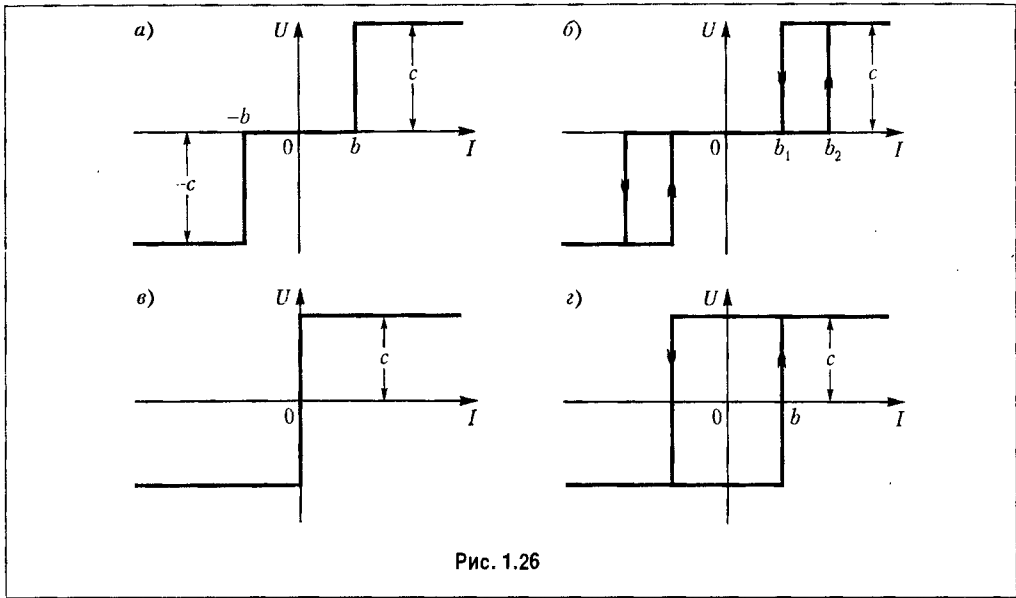


Рис. 1.26

Зона нечувствительности реле, имеющая место в этих двух статических характеристиках, получается в том случае, когда средний контакт поляризованного реле обладает нейтральным положением. Если этого нет, то он будет сразу перескакивать из одного крайнего положения в другое (рис. 1.26, в). Это — идеальная релейная характеристика без зоны нечувствительности и без петли. Реальная характеристика реле и в данном случае тоже будет иметь петлю (рис. 1.26, г), половину ширины которой обозначаем через  $b$ . Это — характеристика реле с петлей без зоны нечувствительности, т. е. без среднего нейтрального положения.

В приведенном примере в релейную систему входило электромагнитное реле, управляющее работой привода двигателя. Однако к релейным системам управления относятся не только системы, содержащие именно реле, а всякие системы, в составе

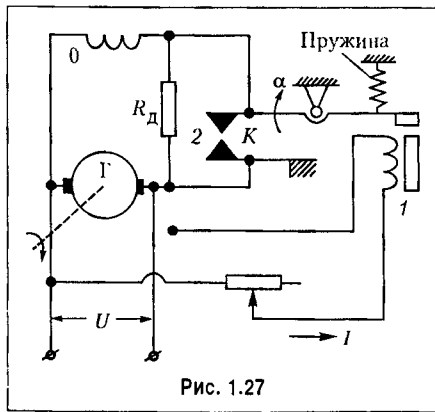


Рис. 1.27

которых есть звенья (любой физической природы), обладающие статическими характеристиками релейного типа, когда выходная величина звена изменяется скачкообразно при непрерывном изменении входной величины.

Приведем типичный пример релейной системы, в которой сам управляющий орган работает в двухпозиционном режиме. Это — вибрационный регулятор напряжения на клеммах генератора постоянного тока. Принципиальная схема показана на рис. 1.27. Управляемая величина — напряжение  $U$ . При отклонении напряжения изменяется ток в обмотке электромагнита. Это создает изменение тяговой силы элект-

ромагнита. При уменьшении последней пружина замыкает контакты К, выключая добавочное сопротивление  $R_d$  из цепи возбуждения генератора. Следовательно, управляющий орган (контакты) здесь будет иметь релейную характеристику, показанную на рис. 1.28.

Релейные системы по сравнению с непрерывными системами обладают тем преимуществом, что не требуют высокой стабильности элементов для соблюдения определенной зависимости между выходной и входной величинами. Они работают по принципу «да-нет», т. е. по наличию или отсутствию входного сигнала и его знаку (с определенным порогом срабатывания).

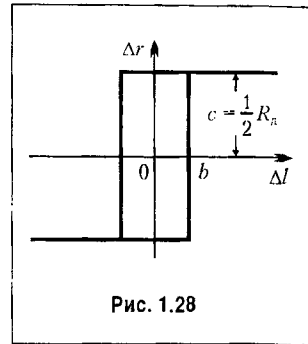


Рис. 1.28

## Глава 2 ПРОГРАММЫ И АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

### § 2.1. Программы управления

Одной из задач системы автоматического управления является, как уже говорилось, поддержание требуемого значения управляемой величины  $y$  или изменение ее по определенной программе, которая либо заранее задается, либо поступает извне во время эксплуатации системы в зависимости от некоторых условий.

Программы могут быть *временными* (задаваемыми во времени):

$$y = y(t),$$

или *параметрическими* (задаваемыми в текущих координатах):

$$y = y(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

где  $s_1, s_2, \dots, s_n$  — какие-либо физические величины, характеризующие текущее состояние объекта в процессе управления.

Примером *временной программы* может служить программа изменения управляемой величины, обеспечивающая правильный режим начального «разгона» объекта при пуске его в ход до наступления режима нормальной эксплуатации, в котором объект затем будет работать длительное время.

Например, система стабилизации угловой скорости мощного двигателя может быть предназначена не только для поддержания постоянной скорости в режиме нормальной эксплуатации, но еще и для обеспечения требуемого режима нарастания скорости во времени (рис. 2.1, где  $y$  — угловая скорость) при пуске двигателя в ход, чтобы избежать каких-либо опасных отклонений.

Аналогичная программа управления во времени может задаваться при термической обработке металлов, когда требуется определенный режим быстроты нагревания металла (рис. 2.1, где  $y$  — температура в

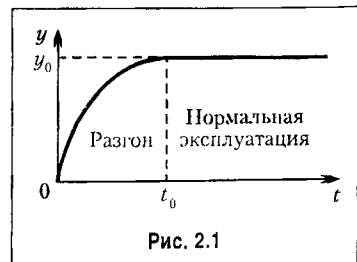


Рис. 2.1

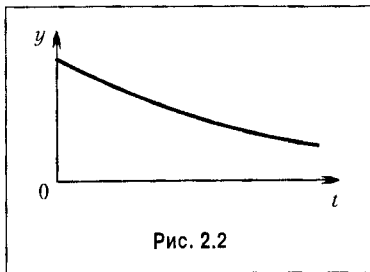


Рис. 2.2

печи) до определенной температуры  $y_0$ , при которой металл затем будет выдерживаться в печи.

В других случаях нормальный режим работы объекта может быть связан с непрерывным программным изменением управляемой величины во времени (рис. 2.2), например угла тангажа вертикально взлетающей ракеты на активном участке ее полета.

Во всех описанных случаях в составе управляющего устройства имеется программный блок, в который заранее заложена требуемая временная программа. В случае же следящей системы требуемый закон изменения управляемой величины  $g(t)$ , может быть в определенных пределах произвольным.

Примером *параметрической программы* может служить задание требуемого переменного значения высоты полета  $y$  (рис. 2.3) при снижении летательного аппарата, но не во времени, а в зависимости от текущего значения пройденного пути  $s$ , чтобы снизиться в определенную точку независимо от времени протекания этого процесса.

Другим примером параметрической программы может быть задание переменного давления в герметической кабине высотного самолета в зависимости от текущего значения высоты полета (рис. 2.3, где  $y$  — давление,  $s$  — высота).

Наконец, типичным примером параметрических программ являются так называемые *законы наведения* в системах телеуправления и самонаведения снарядов. Законом наведения называется особая программа управления, которая задается через текущие значения координат и скоростей управляемого объекта независимо от того, в какой момент времени они имеют место в процессе движения объекта.

Пусть, например, тело  $A$  (рис. 2.4) должно быть сближено с телом  $B$  для мягкого контакта;  $\rho$  — текущее относительное расстояние между ними. Условия, которые должны быть выполнены в процессе сближения, следующие:

$$\dot{\rho} < 0, \quad (2.1)$$

$$\dot{\rho} = 0 \text{ при } \rho = 0, \quad (2.2)$$

$$|\ddot{\rho}| \text{ ограничено,} \quad (2.3)$$

$$T \text{ ограничено,} \quad (2.4)$$

где  $T$  — время сближения; условие (2.2) — условие мягкого контакта в конце сближения; условия (2.1), (2.3) должны выполняться в течение всего процесса сближения,

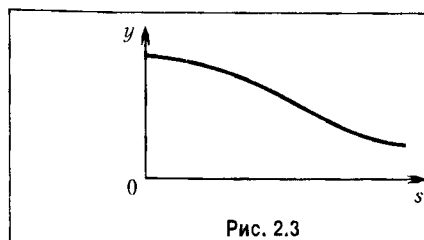


Рис. 2.3

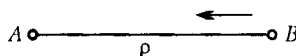


Рис. 2.4

причем ограничение  $|\ddot{\rho}|$  связано с ограничением мощности или силы управляющего воздействия. Представим закон наведения в виде

$$\dot{\rho} + f(\rho) = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, в системе управления должны быть измерители величин  $\rho$  и  $\dot{\rho}$  и устройство формирования сигнала

$$u = \dot{\rho} + f(\rho), \quad (2.6)$$

величина которого должна все время сводиться к нулю. Найдем целесообразное выражение функции  $f(\rho)$ .

Если принять линейный закон наведения, т. е. положить  $f(\rho) = k\rho$ , при котором уравнение (2.5) имеет вид

$$\dot{\rho} + k\rho = 0, \quad (2.7)$$

то окажется, что при этом  $T = \infty$ . Следовательно, линейный закон наведения не годится.

Обратимся к нелинейной функции вида  $f(\rho) = k\rho^b$ . Тогда нелинейный закон наведения (2.5) будет иметь вид

$$\dot{\rho} + k\rho^b = 0. \quad (2.8)$$

Оказывается, что при  $b > 1$  величина  $T = \infty$ , а при  $b < 1/2$  величина  $\dot{\rho} = \infty$  при  $\rho = 0$ . Если же

$$1/2 \leq b \leq 1, \quad (2.9)$$

то  $T$  конечно, причем  $\ddot{\rho} = \text{const}$  при  $b = 1/2$ , а в остальных случаях ( $1/2 < b < 1$ ) величина  $|\ddot{\rho}|$  уменьшается в процессе наведения с уменьшением  $\rho$ .

В результате приемлемым оказывается нелинейный закон наведения (2.8) при значении  $b$  в интервале (2.9). Конкретизация значения  $b$  внутри этого интервала может производиться на основании каких-либо других требований применительно к каждой конкретной технической системе.

Итак, в системах автоматического управления прежде всего задается тем или иным способом программа управления (в описанном выше широком понимании этого термина). Стабилизация неизменного значения управляемой величины будет простейшим частным случаем программы:  $y_{\text{нр}} = \text{const}$ .

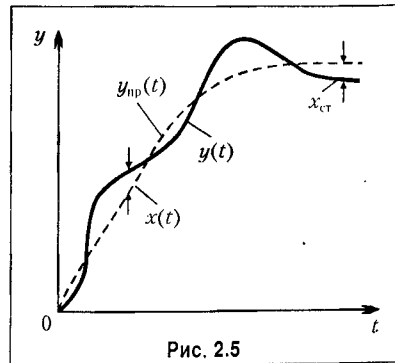


Рис. 2.5

Программа  $y_{\text{пр}}(t)$  будет осуществляться системой управления неизбежно с некоторыми ошибками, как показано на рис. 2.5. Ошибка системы (рассогласование)

$$x(t) = y_{\text{пр}}(t) - y(t)$$

обусловлена как погрешностями реальной аппаратуры, так и самим принципом построения системы. При этом меняющаяся в процессе управления так называемая *динамическая ошибка*  $x(t)$  может перейти в некоторое постоянное отклонение управляемой величины в установившемся режиме при  $y_{\text{пр}} = \text{const}$ , называемое *статической ошибкой*  $x_{\text{ст}}$ .

Понятие «динамическая ошибка» является очень широким. В него включаются все виды ошибок систем автоматического управления, которые имеют место в динамических процессах, т. е. при меняющихся внешних воздействиях (возмущающих или управляющих) и во всех случаях переходных процессов. Различные виды этих ошибок и способы их уменьшения будут предметом изучения во всех дальнейших главах книги.

Величины динамических и статических ошибок управления в очень сильной степени зависят от структуры управляющего устройства, определяющей так называемый алгоритм управления.

## § 2.2. Линейные алгоритмы управления

Система автоматического управления, как уже известно, состоит из взаимосвязанных и взаимодействующих между собой управляемого объекта и управляющего устройства (рис. 2.6). Поэтому и качество протекающих в ней процессов зависит как от свойств самого объекта, так и от того, как управляющее устройство управляет этим объектом.

Управляемый объект — это заданная часть системы (самолет, ракета и т. п.), и его свойства в процессе проектирования автоматической системы можно изменять лишь в небольших пределах. Управляющее устройство искусственно проектируется применительно к каждому конкретному объекту. Функциональная зависимость, в соответствии с которой управляющее устройство формирует управляющее воздействие  $u(t)$ , называется *алгоритмом управления*. Эта зависимость может быть представлена в виде

$$u(t) = F(x, g, f),$$

где  $F$  — некоторая, в общем случае, нелинейная функция от ошибки  $x$ , задающего воздействия  $g$  и возмущающего воздействия  $f$ , а также от их производных и интегралов по времени. Обычно она может быть записана следующим образом:

$$u(t) = F_1(x) + F_2(f) + F_3(g).$$

Первое слагаемое соответствует *управлению по отклонению*, второе и третье — *управлению по внешним*

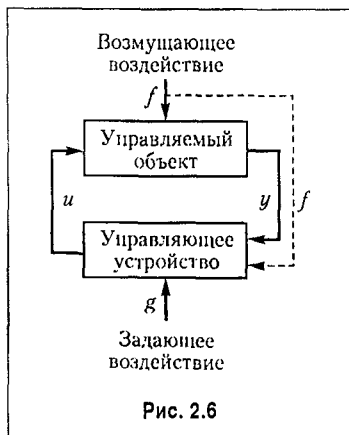


Рис. 2.6



воздействиям (задающему и возмущающему), которое применяется в комбинированных системах.

Здесь мы рассмотрим только линейные алгоритмы, когда управляющее устройство вырабатывает величину  $u(t)$  в функции отклонения, или ошибки  $x(t)$  в соответствии с линейной формой

$$u(t) = k_1 x + k_2 \dot{x} + k_3 \ddot{x} + \dots + k_4 \int x dt + k_5 \iint x dt^2 + \dots$$

**1. Пропорциональное управление.** В случае пропорционального управления алгоритм управления имеет вид

$$u(t) = k_1 x(t).$$

Несмотря на простоту, такой алгоритм используется во многих системах автоматического управления, в том числе и в тех, схемы которых изображены на рис. 1.11–1.16. Однако в ряде случаев при его применении желаемое качество процессов в системе не может быть обеспечено. Это объясняется тем, что пропорциональное управление действует слишком «прямолинейно»: есть отклонение — есть управление (рис. 2.7, а). Из-за инерционности элементов управляющего устройства (усилителей, исполнительных устройств и др.) управляющее воздействие в своем изменении будет запаздывать по отношению к изменению ошибки (пунктирная кривая на рис. 2.7, а). Поэтому в момент времени  $t_1$ , когда ошибка становится равной нулю, управляющее воздействие будет продолжать действовать в прежнем направлении, вынуждая ее вновь увеличиваться, изменив знак. В результате процесс в системе может стать слишком колебательным и даже расходящимся.

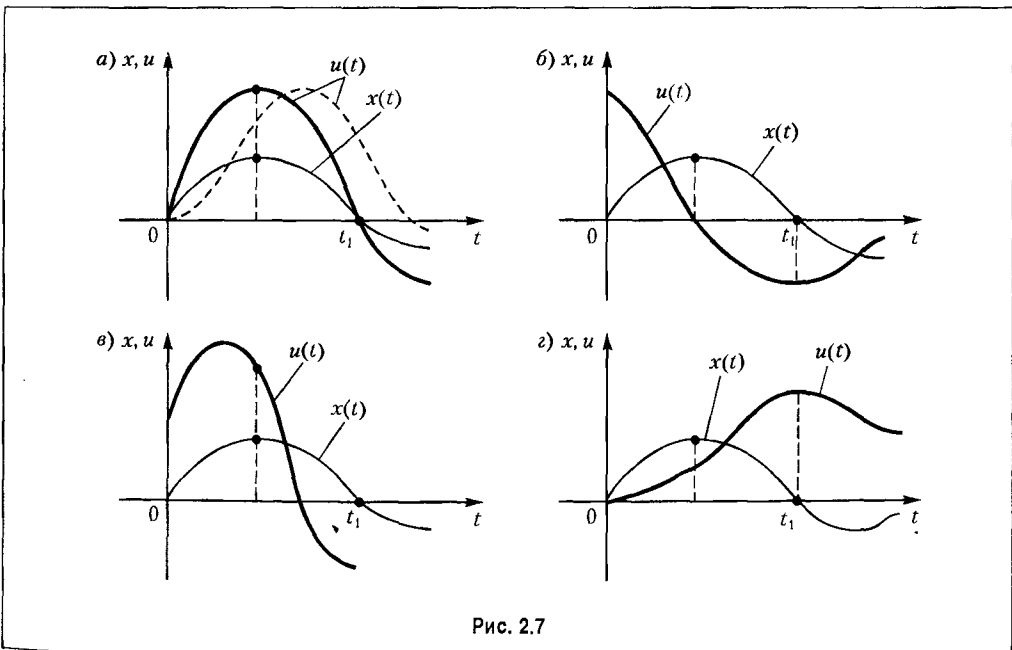


Рис. 2.7

**2. Управление по производным.** При управлении по первой производной от ошибки осуществляется зависимость

$$u(t) = k_2 \dot{x}(t),$$

т. е. управляющее устройство реагирует не на саму ошибку, а на скорость ее изменения (рис. 2.7, б), и поэтому действует с упреждением, стремясь не допустить появления ошибки.

Управление по производной не имеет самостоятельного значения, так как в установившемся состоянии, когда ошибка постоянна, производная от ошибки равна нулю и управление прекращается. Однако оно может играть весьма большую роль в переходных процессах и вообще в динамике в качестве вспомогательного средства, так как такое управление позволяет учитывать не только наличие ошибки, но и тенденцию к росту или уменьшению ошибки. Поэтому управление по производной обычно сочетается с управлением по отклонению:

$$u(t) = k_1 x(t) + k_2 \dot{x}(t).$$

При использовании такого алгоритма управляющее воздействие возникает даже в том случае, когда  $x = 0$ , но  $\dot{x} \neq 0$  (рис. 2.7, в), и существует до тех пор, пока  $x \neq 0$ . Кроме того, оно изменяет свой знак раньше, чем сама ошибка, т. е. действует с упреждением. В результате введения управления по производной от ошибки увеличивает скорость реакции системы управления, повышает ее быстродействие, что приводит к снижению ошибок в динамике.

В некоторых случаях в алгоритм управления могут вводиться производные более высоких порядков — вторая, третья и т. д. Это еще больше улучшает динамические качества системы автоматического управления. Однако в настоящее время техническая реализация производных выше второго порядка встречает значительные трудности.

**3. Интегральное управление.** При интегральном управлении осуществляется пропорциональная зависимость между скоростью изменения управляющего воздействия и ошибкой:

$$\dot{u}(t) = k_3 x(t).$$

При этом управляющее воздействие получается пропорциональным интегралу от ошибки по времени:

$$u(t) = k_3 \int x(t) dt.$$

Этому алгоритму присуще важное и полезное для практики свойство, состоящее в том, что после окончания переходного процесса при  $x(t) = 0$  управляющее воздействие может сохраняться (рис. 2.7, г). Это свойство широко используется для повышения точности автоматических систем. Однако вместе с тем применение интегрального управления делает систему более замедленной в действии, т. е. снижает ее быстродействие, а также приводит к ухудшению устойчивости (последнее будет показано ниже в главе, посвященной устойчивости). Это объясняется тем (рис. 2.7, г), что величина интеграла в некоторый момент времени пропорциональна соответствующей

площади под кривой  $x(t)$ . Поэтому при возникновении ошибки управляющее воздействие накапливается постепенно, запаздывая по отношению к изменению ошибки.

Управление с целью повышения точности системы может осуществляться и по второму интегралу от ошибки по времени:

$$u(t) = k_3 \iint x(t) dt dt.$$

Однако при этом снижение быстродействия станет еще более заметным.

**4. Изодромное управление.** При изодромном управлении осуществляется зависимость

$$u(t) = k_1 x(t) + k_3 \int x(t) dt.$$

Такое управление сочетает в себе высокую точность интегрального управления с большим быстродействием пропорционального управления. В первые моменты времени при появлении ошибки система изодромного управления работает как система пропорционального управления. Это определяется первым слагаемым в правой части алгоритма управления. В дальнейшем система начинает работать как система интегрального управления, так как с течением времени преобладающее значение начинает приобретать второе слагаемое.

В общем случае алгоритм управления может иметь сложный вид и содержать кроме члена, пропорционального ошибке, также интегралы (для улучшения точности) и производные (для улучшения динамических свойств) от ошибки. Так, например, часто используется изодромное управление с введением первой производной

$$u(t) = k_1 x(t) + k_2 \dot{x}(t) + k_3 \int x(t) dt.$$

Для линейных алгоритмов управления детально разработаны многочисленные прикладные методы исследования (анализа и синтеза), различные расчетные и экспериментальные приемы определения устойчивости, точности и качества процесса управления, а также схемы конкретных технических устройств формирования линейных алгоритмов.

### § 2.3. Нелинейные алгоритмы управления

Использование нелинейных алгоритмов управления, определяемых разнообразными нелинейными уравнениями управляющего устройства

$$F_1(u, du/dt, \dots) = F_2(x, dx/dt, \dots; u, f, g),$$

значительно расширяет возможности целесообразного изменения качества процессов управления. Это ясно из общих принципиальных соображений, так как область нелинейных уравнений значительно богаче и разнообразнее, чем линейных.

Несмотря на то, что общей теории нелинейных алгоритмов нет, исследования и опыт применения отдельных частных видов этих алгоритмов говорят об их большой практической эффективности. Отсюда следует актуальность их теоретического изучения.

Введем следующую классификацию нелинейных алгоритмов:

- 1) функциональные нелинейные алгоритмы;
- 2) логические нелинейные алгоритмы;
- 3) оптимизирующие нелинейные алгоритмы;
- 4) параметрические нелинейные алгоритмы.

Важным отличием нелинейных алгоритмов от линейных является то, что они придают системе принципиально новые свойства. Если при линейном алгоритме всегда вырабатывается сигнал, пропорциональный входной переменной или ее производной и т. д., то при нелинейном алгоритме может существенно изменяться сам характер действия системы управления на объект в зависимости от величины входного воздействия. Другими словами, если для линейных систем изменение размера отклонения — это изменение только масштаба, но не формы процессов, то в нелинейной системе при этом может существенно изменяться и форма процессов, вплоть до принципиальных качественных изменений картины процессов. Эти особые свойства нелинейных алгоритмов можно выгодно использовать в технике автоматического управления.

Рассмотрим отдельно каждый из указанных четырех классов нелинейных алгоритмов.

*Функциональные нелинейные алгоритмы управления.* Функциональными будем называть такие нелинейные алгоритмы, при которых управляющее воздействие на объект выражается в виде нелинейной функции от отклонения его величины, представляющей собой входную информацию для системы.

Данный класс может содержать в себе как статические, так и динамические нелинейности. Примеры *статических нелинейностей*:

$$u = k(1 + b |x|)x, \quad u = k(\text{sign } x) \sqrt{1 + b |x|}.$$

В отличие от линейного пропорционального, здесь в первом случае будет более энергичное действие управляющего устройства при больших отклонениях  $x$  и больший запас устойчивости установившегося режима. Во втором случае будет менее энергичное, но более плавное его действие вначале и повышенная точность в установившемся режиме, хотя и с меньшим запасом устойчивости. Однако такого рода рекомендации, как увидим в дальнейшем, справедливы для большинства систем, но все же не для всех. Поэтому они требуют специального обследования для каждого объекта.

Нелинейный алгоритм за счет дополнительных нелинейных обратных связей может включать в себя также нелинейности от выходной величины  $u$ :

$$u = kx + F(u),$$

что расширяет возможности целесообразного изменения качества процесса управления.

Примеры *динамических нелинейностей* в алгоритме управления:

$$u = k(1 \pm b |\dot{x}|)x, \quad u = k(1 \pm b |x|)\dot{x}, \quad u = k(1 \pm |\dot{u}|)\dot{x},$$

где вместо двойного знака подразумевается какой-либо один из них.

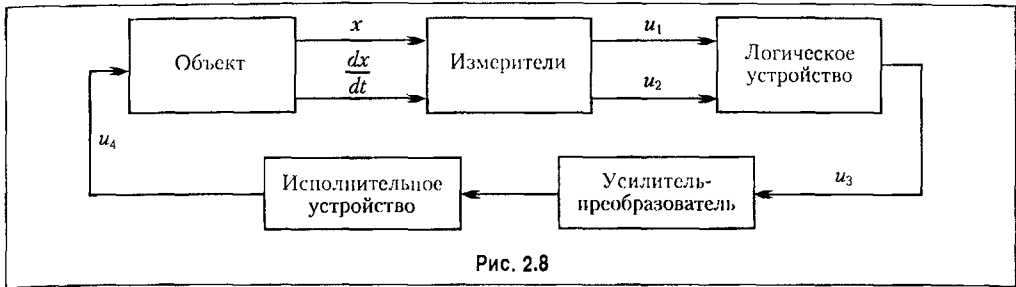


Рис. 2.8

Подобные динамические члены различно влияют на демпфирующие свойства системы в переходных процессах в зависимости от размеров и скорости отклонения. Они же могут существенно улучшать динамическую точность (т. е. уменьшать динамические ошибки) системы в различных режимах вынужденного движения, воспроизведения различных форм задаваемых входных сигналов, а также при случайных воздействиях.

Отметим, что функциональные нелинейные алгоритмы могут быть связаны не только с изменением параметров в зависимости от размеров входных воздействий, но и с изменением структуры. Например, при увеличении отклонения управляемой величины сверх определенного порога  $|x| = c$  в системе может происходить переключение с одного линейного корректирующего устройства на другое.

*Логические нелинейные алгоритмы управления.* Нелинейные законы управления могут иметь иные формы, которые реализуются с помощью не функциональных, а более или менее сложных логических устройств. Будем называть их логическими нелинейными алгоритмами.

Например, в системе на рис. 2.8 логический нелинейный алгоритм может быть применен для экономии управляющих воздействий на объект (а также экономии расхода энергии на нужды управления).

Построение простейшего логического нелинейного алгоритма лучше всего пояснить на плоскости двух входных величин  $u_1, u_2$  (рис. 2.9). Последние с точностью до характеристик неидеальности измерителей соответствуют отклонению  $x$  и скорости отклонения  $dx/dt$  управляемой величины (рис. 2.8).

Предварительно заметим, что если знак скорости  $dx/dt$  совпадает со знаком отклонения  $x$ , то величина отклонения  $x$  по модулю возрастает. В этом случае требуется энергичное действие управляющего устройства для его ликвидации.

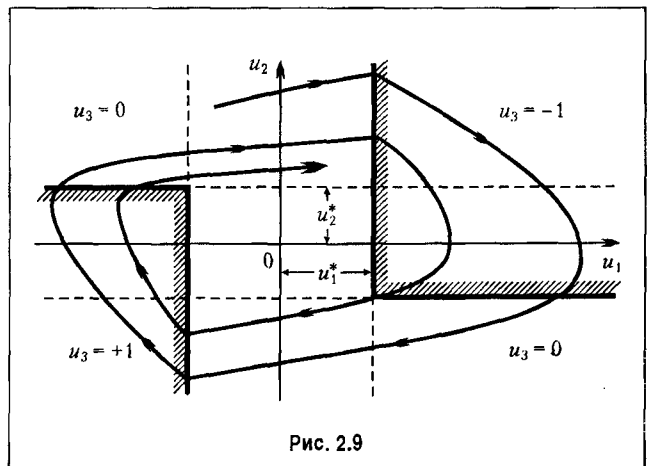


Рис. 2.9

Если же знак скорости  $dx/dt$  противоположен знаку отклонения  $x$ , то величина  $|x|$  уменьшается. В этом случае можно вовсе не подавать на объект управляющего воздействия, если скорость  $dx/dt$  достаточна для необходимой быстроты ликвидации отклонения, или же подавать воздействие при очень малой скорости  $dx/dt$ . Эти рассуждения позволяют считать целесообразным, например, применение следующего логического закона управления.

Управляющее воздействие ( $u_3 = +1$  или  $u_3 = -1$ ) включается только тогда, когда  $|u_1| > u_1^*$  (см. рис. 2.9), т. е. когда отклонение достаточно велико и  $u_2$  имеет знак, одинаковый со знаком  $u_1$  или противоположный, но при малом  $|u_2| < u_2^*$ . Во всех остальных случаях управление выключено ( $u_3 = 0$ ), так как при противоположных знаках  $u_2$  и  $u_1$  и достаточной величине  $|u_2| > u_2^*$  система сама, без управления возвращается к требуемому положению  $x = 0$  (если при этом гарантирована противоположность знаков  $dx/dt$  и  $x$ ). Более подробно эта система будет рассмотрена в разделе IV.

Логические нелинейные алгоритмы управления могут быть связаны также с изменением структуры системы. Например, при помощи логического устройства можно включать и выключать сигналы управления по первой и второй производным и по интегралу, в зависимости от сочетания значений отклонения управляемой величины  $x$  и скорости отклонения ее  $dx/dt$ . Если правильно сформировать логику этих переключений, то можно существенно повысить качество работы системы.

Вместо комбинирования указанных линейных членов могут вводиться также и функциональные нелинейные члены; включение и выключение сигналов, соответствующих этим членам, производится при помощи логического устройства. Тогда получится комбинация функциональных и логических нелинейных алгоритмов.

*Оптимизирующие нелинейные алгоритмы управления.* Оптимальной называется автоматическая система, наилучшая в некотором смысле с учетом ограничений, накладываемых на величину управляющего воздействия, координаты, скорости и т. п. Это может быть, например, система, имеющая максимальное быстродействие, или минимальный расход энергии на управление, или максимальный коэффициент полезного действия.

Как правило, при этом приходят к нелинейным алгоритмам управления, хотя, вообще говоря можно оптимизировать и коэффициенты линейного алгоритма, задав его форму. Часто оптимальный нелинейный алгоритм состоит в переключении управляющего воздействия (при определенных состояниях системы) с одного максимально возможного значения на другие. Моменты переключения в целом определяются сложными комбинациями значений нескольких переменных и их производных.

*Параметрические нелинейные алгоритмы управления.* В предыдущих типах алгоритмов вводились отклонения управляемой величины от некоторых заданных ее программных значений. При параметрической программе управления алгоритм может выражаться в виде нелинейных функций текущих координат, в которых задается параметрическая программа. Например, для рассмотренного в § 2.1 закона наведения как параметрической программы управления алгоритм управления имеет вид (2.6), причем для его формирования берут исходную информацию от измерителей расстояния  $\rho$  и скорости сближения  $\dot{\rho}$ , т. е. тех величин, в которых выражена параметрическая программа.

Нелинейные алгоритмы управления обладают богатыми возможностями во всех случаях, когда требуемый эффект может быть достигнут изменением свойств системы с изменением величин ошибок.

Большие дополнительные возможности улучшения процессов управления дает нелинейное управление работой объекта путем изменения структуры управляющего устройства в зависимости от размеров и знаков входных величин, поступающих от измерительного устройства.

При этом могут использоваться комбинации линейных алгоритмов управления. Например, если известно, что при одном линейном алгоритме получается быстрое начальное изменение управляемой величины, но с большими последующими колебаниями (кривая 1, рис. 2.10), а при другом линейном алгоритме — медленное изменение, но плавный подход к новому установившемуся режиму (кривая 2, рис. 2.10), то можно, включив сначала первый алгоритм, переключить затем систему на второй алгоритм в некоторой точке  $A$ , когда отклонение  $x$  достигнет определенного значения  $x_A$ . В результате процесс изобразится кривой 3 (рис. 2.10), объединяющей оба качества — быстроту и плавность процесса. Для осуществления этого необходимо иметь в системе переключающее устройство, срабатывающее при  $x = x_A$  (рис. 2.11).

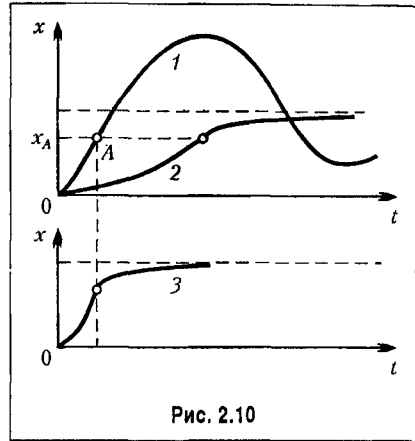


Рис. 2.10

Если в такой системе все звенья линейные, то за счет указанного переключения, происходящего автоматически в процессе управления, система становится нелинейной. Это можно сравнить с тем, как получается нелинейная статическая характеристика из отрезков прямых линий. Но здесь имеет место нелинейная динамическая характеристика, составляемая из последовательности разных линейных дифференциальных уравнений, соответствующих первому и второму алгоритмам управления.

В общем случае срабатывание переключающего устройства в системе с переменной структурой может происходить от нескольких входных величин. При этом кроме основной нелинейности, возникающей за счет переключения структуры, дополнительно могут иметься какие-либо нелинейные свойства в отдельных других звеньях управляющего устройства или объекта.

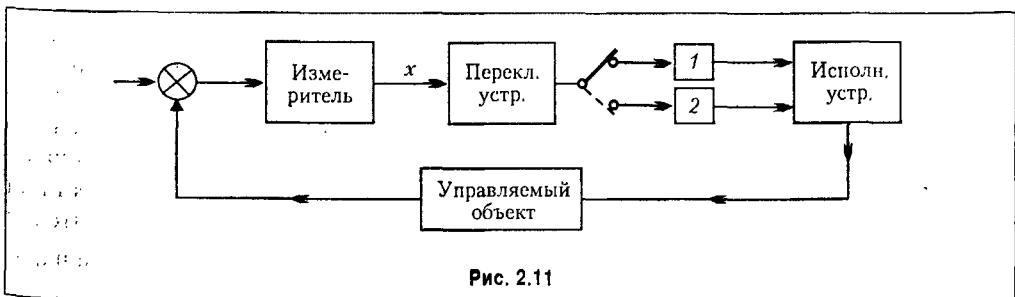


Рис. 2.11

# РАЗДЕЛ II

## НЕПРЕРЫВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

### Глава 3

#### ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

##### § 3.1. Линеаризация уравнений

При составлении дифференциальных уравнений динамики любой автоматической системы последнюю разбивают на отдельные звенья и записывают уравнение каждого звена в отдельности. Уравнения всех звеньев образуют единую систему, которую можно преобразовать к одному уравнению путем исключения промежуточных переменных.

Уравнение звена должно быть составлено так, чтобы оно выражало зависимость (в динамическом процессе) между теми величинами, которые в схеме исследуемой системы указаны на выходе и входе данного звена, т. е. между величинами, представляющими воздействие данного звена на последующее по схеме звено и воздействие предыдущего звена на данное. Динамическое уравнение отдельного звена составляется по правилам соответствующей технической науки (звено может представлять собой тепловой двигатель, электрическую машину, механическую передачу, электрическую цепь и т. п.).

Звено может иметь иногда не одну входную величину, а несколько (например, при наличии дополнительных обратных связей). Кроме входной и выходной величин звена, которые выражают собой внутренние связи между звеньями данной системы, может учитываться также внешнее воздействие.

Пусть, например, звено (рис. 3.1, а) какой-нибудь автоматической системы имеет входные величины  $x_1, x_2$ , выходную —  $x_3$  и внешнее воздействие  $f$ , а динамическое уравнение звена имеет произвольный нелинейный вид

$$F(x_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3, \ddot{x}_3) = \varphi(f, \dot{f}) \quad (3.1)$$

(для примера взят определенный порядок входящих в уравнение производных  $x_2, x_3, \dot{f}$ ; вообще же здесь могут быть любые другие варианты).



Допустим, что установившийся процесс в системе имеет место при некоторых постоянных значениях  $x_1 = x_1^0$ ,  $x_2 = x_2^0$ ,  $x_3 = x_3^0$  и  $f = f^0$ . Тогда уравнение установившегося состояния для данного звена согласно (3.1) будет

$$F(x_1^0, x_2^0, 0, x_2^0, 0, 0, 0) = \varphi(f^0, 0). \quad (3.2)$$

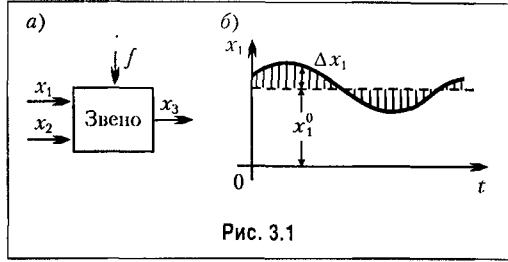


Рис. 3.1

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные (в данном случае  $x_1, x_2, x_3$ ) изменяются так, что их отклонения от установившихся значений  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  остаются все время достаточно малыми (рис. 3.1, б).

Обозначим указанные отклонения через  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ . Тогда в динамическом процессе

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \Delta x_1(t), & x_2(t) &= x_2^0 + \Delta x_2(t), & \dot{x}_2 &= \Delta \dot{x}_2, \\ x_3(t) &= x_3^0 + \Delta x_3(t), & \dot{x}_3 &= \Delta \dot{x}_3, & \ddot{x}_3 &= \Delta \ddot{x}_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы автоматического управления обычно выполняется. Этого требует сама идея работы замкнутой автоматической системы.

Внешнее же воздействие  $f$  не зависит от работы автоматической системы, изменение его может быть произвольным, и поэтому правая часть уравнения (3.1) обычно линеаризации не подлежит (в отдельных случаях и она может быть линеаризована).

**Первый способ линеаризации.** Разложим функцию  $F$ , стоящую в левой части уравнения (3.1), в ряд по степеням указанных выше малых отклонений, рассматривая все производные тоже как самостоятельные переменные. Тогда, уравнение (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} &F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 \Delta x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0 \Delta \dot{x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \Delta \ddot{x}_3 + \\ &+ \text{члены высшего порядка малости} = \varphi(f, \dot{f}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где через  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0$  для краткости обозначена величина  $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ , взятая при  $x_1 = x_1^0$ ,  $x_2 = x_2^0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $x_3 = x_3^0, \dots, \ddot{x}_3 = 0$  (т. е. сперва берется в общем вид частная производная

водная от функции  $F$  по  $x_1$ , после чего в нее вместо всех переменных подставляются их постоянные значения  $x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, \dots, 0$ .

Следовательно, все частные производные в полученном уравнении (3.4) представляют собой некоторые постоянные коэффициенты. Они будут переменными во времени, если функция  $F$  содержит  $t$  в явном виде или если установившийся процесс в системе определяется переменными значениями  $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$ .

Члены высшего порядка малости, указанные в уравнении (3.4), состоят из произведений и степеней малых отклонений  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$  с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции  $F$  по всем переменным.

Вычтя из уравнения (3.4) почленно уравнение установившегося состояния (3.2) и отбросив члены высшего порядка малости, получим искомое линеаризованное уравнение динамики данного звена в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 \Delta x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0 \Delta \dot{x}_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \Delta \ddot{x}_3 + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 \Delta \ddot{x}_3 = \varphi(f, \dot{f}) - \varphi(f^0, 0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Это дифференциальное уравнение, так же как и (3.1), описывает тот же динамический процесс в том же звене автоматической системы. Отличие этого уравнения от прежнего состоит в следующем:

- 1) это уравнение является приближенным, ибо в процессе его вывода были отброшены малые высшего порядка;
- 2) неизвестными функциями времени в этом уравнении являются не прежние полные величины  $x_1, x_2, x_3$ , а их отклонения  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  от некоторых установившихся значений  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ ;
- 3) полученное уравнение является линейным относительно отклонений  $\Delta x_1, \Delta x_2,$

$\Delta \dot{x}_2, \Delta x_3, \dots, \Delta \ddot{x}_3$  с постоянными коэффициентами  $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0, \dots$  (или

с переменными коэффициентами, если  $F$  содержит  $t$  в явном виде, а также когда установившийся процесс определяется переменными величинами  $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$ , например при программном управлении.

Таким образом, цель получения линейного дифференциального уравнения взамен прежнего нелинейного достигнута. Уравнение (3.5) называется дифференциальным уравнением звена в отклонениях. Проредав то же самое для всех звеньев системы, получим в результате линеаризованные уравнения процесса управления в отклонениях (или, как называют еще, уравнения «в вариациях»).

В дальнейшем можно будет проводить линеаризацию нелинейных уравнений непосредственно по аналогии с формулой (3.5), не производя предварительных выкладок.

Приведем геометрическую трактовку этого способа линеаризации. Изобразим графически зависимость  $F$  от  $x_1$  при постоянных значениях всех остальных переменных:

$$x_2 = x_2^0, \dot{x}_2 = 0, x_3 = x_3^0, \dot{x}_3 = \ddot{x}_3 = \ddot{\ddot{x}}_3 = 0.$$

Пусть эта зависимость имеет вид кривой, представленной на рис. 3.2, а. Отметим значение  $x_1^0$  и проведем в точке  $C$  касательную. Тогда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.6)$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной в точке  $C(x_1^0, F^0)$ , для которой

$$x_1 = x_1^0$$

и

$$F = F^0 = F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0). \quad (3.7)$$

Замена  $x_1 = x_1^0 + \Delta x_1$  и сокращение члена (3.7), производившиеся раньше аналитически, здесь эквивалентны переносу начала координат в точку  $C$  (рис. 3.2, а), в результате чего получается график рис. 3.2, б.

Первый член линейного уравнения (3.5) согласно (3.6) означает, что линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой  $CB$  на касательную к ней прямую  $CD$ . Из графика рис. 3.2, б очевидно, что эта замена тем точнее, чем меньшие величины отклонения  $\Delta x_1$  возникают в исследуемом динамическом процессе (основная предпосылка для линеаризации); границы отклонений  $\Delta x_1$ , для которых допустима линеаризация, тем шире, чем ближе кривая  $CB$  к прямой  $CD$ . Последним обстоятельством и определяются практически в каждой задаче те границы, внутри которых отклонения можно считать «достаточно малыми».

В ряде задач отличие от линейности, показанное на рис. 3.2, б, бывает столь незначительным, что даже в сравнительно большом диапазоне отклонений  $\Delta x_1$  можно считать систему линейной. В случае же ярко выраженной нелинейной зависимости линеаризация будет справедлива лишь на соответствующем более узком участке отклонений  $\Delta x_1$ . Линеаризация может быть

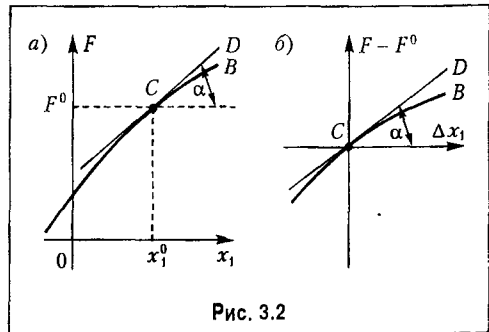


Рис. 3.2

совершенно недопустимой при скачкообразных зависимостях (например, при релейных характеристиках). Такого рода зависимости называются существенно нелинейными.

Важно отметить следующее. Если по указанным причинам не может быть подвергнуто линеаризации уравнение только одного звена системы или даже только часть функции  $F$  для данного звена, то производят линеаризацию всех остальных нелинейных зависимостей, оставляя только одну или несколько существенно нелинейных.

**Второй способ линеаризации.** Из приведенной геометрической иллюстрации вытекает другой способ линеаризации уравнений системы автоматического регулирования, который весьма часто применяется на практике. Этот способ заключается в том, что с самого начала все криволинейные зависимости, используемые при составлении уравнений звеньев, заменяются прямолинейными (по касательной в соответствующей точке кривой). Тогда уравнения звеньев сразу будут получаться линейными.

В последующих главах разделов II и III будут использоваться линеаризованные уравнения динамических звеньев. Однако для упрощения записи значок  $\Delta$  перед переменными  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и т. д. будет опускаться в предположении, что эти переменные представляют собой малые отклонения от некоторого установившегося состояния и линеаризация уравнений уже проделана.

### § 3.2. О записи линеаризованных уравнений звеньев

В теории автоматического управления в настоящее время принято записывать дифференциальные уравнения звеньев в двух стандартных формах.

**Первая форма записи.** Дифференциальные уравнения записываются так, чтобы выходная величина и ее производные находились в левой части уравнения, а входная величина и все остальные члены — в правой части. Кроме того, принято, чтобы сама выходная величина входила в уравнение с коэффициентом единица. Чтобы привести линеаризованное уравнение (3.5) к такому виду, введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0; & k_2 &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0; \\ k_3 &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0; & k_4 &= 1 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0; \\ T_1 &= \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0; & T_2^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0; \\ T_3^3 &= \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3}\right)^0 : \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0; & f_1(t) &= \varphi(f, \dot{f}) - \varphi(f^0, 0). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Тогда уравнение (3.5) примет вид

$$T_3^3 \Delta \ddot{x}_3 + T_2^2 \Delta \ddot{x}_3 + T_1 \Delta \dot{x}_3 + \Delta x_3 = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + k_3 \Delta \dot{x}_2 + k_4 f_1(t). \quad (3.9)$$

В случае, если нелинейная функция  $F$  не содержит величины  $x_3$ , а содержит только ее производные, т. е. если

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0 = 0,$$

в формулах (3.8) необходимо заменить  $\left( \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)$  на  $\left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} \right)$ . В результате получится уравнение

$$T_2^2 \Delta \ddot{x}_3 + T_1 \Delta \ddot{x}_3 + \Delta \dot{x}_3 = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + k_3 \Delta \dot{x}_2 + k_4 f_1(t), \quad (3.10)$$

где

$$T_1 = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} \right)^0 : \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} \right)^0; \quad T_2^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3} \right)^0 : \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} \right)^0, \dots$$

Уравнения (3.9) и (3.10) удобнее записывать в символической форме, введя алгебраизированный оператор дифференцирования  $p = d/dt$ . Тогда уравнение (3.9) примет вид

$$(T_3^3 p^3 + T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \Delta x_3 = k_1 \Delta x_1 + (k_2 + k_3 p) \Delta x_2 + k_4 f_1(t), \quad (3.11)$$

а уравнение (3.10) —

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) p \Delta x_3 = k_1 \Delta x_1 + (k_2 + k_3 p) \Delta x_2 + k_4 f_1(t). \quad (3.12)$$

Эти записи надо рассматривать только как сокращенную форму более полных записей (3.9) и (3.10).

Стандартные формы записи уравнений звеньев автоматических систем (3.9) и (3.10) или их сокращенные виды (3.11) и (3.12) можно использовать как для размерных отклонений реальных величин на входе и выходе звена, так и для любых безразмерных относительных отклонений, специально иногда вводимых для упрощения вида уравнений и удобства их исследования. При записи уравнений в стандартной форме коэффициенты  $k_1, k_2, k_3, k_4$  называются *коэффициентами передачи*, а  $T_1, T_2, T_3$  — *постоянными времени* данного звена.

В случае звеньев, у которых выходная и входная величины имеют одинаковую размерность, для коэффициентов передачи используются также следующие термины:

- 1) *коэффициент усиления* — для звена, представляющего собой усилитель или имеющего в своем составе усилитель;
- 2) *передаточное число* — для редукторов, делителей напряжения, масштабирующих устройств и т. д.

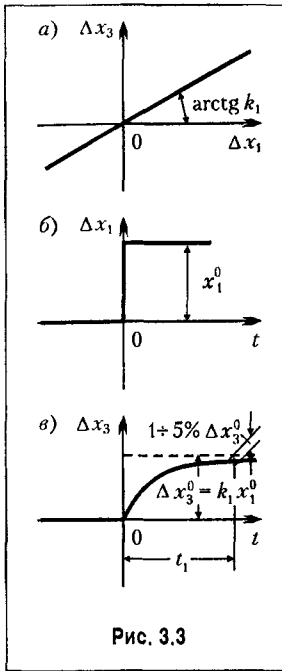


Рис. 3.3

Термин «коэффициент передачи» можно пояснить следующим образом. Если подать на вход звена только постоянное значение  $\Delta x_1^0$  (рис. 3.3, б) и найти установившееся значение выходной величины  $\Delta x_3^0$  (рис. 3.3, в), то из (3.9) получим  $\Delta x_3^0 = k_1 \Delta x_1^0$ . Таким образом, коэффициент  $k_1$  показывает отношение выходной величины звена к входной в установившемся режиме.

Следовательно, коэффициент передачи определяет собой наклон (с учетом масштабов по осям) линейной статической характеристики звена (рис. 3.3, а). Заметим, что нелинейную характеристику звена часто называют характеристикой с переменной по входной величине коэффициентом передачи. Из (3.9) очевидно, что

$$\text{размерность } k_1 = \frac{\text{размерность выходной величины } \Delta x_3}{\text{размерность входной величины } \Delta x_1}$$

В размерность коэффициента передачи может входить также время  $t$ . Так, из уравнения (3.9) следует, что

$$\text{размерность } k_3 = \frac{\text{размерность } \Delta x_3 \times \text{размерность } t}{\text{размерность } \Delta x_2}$$

а из уравнения (3.10) следует, что для такого звена

$$\text{размерность } k_1 = \frac{\text{размерность } \Delta x_3}{\text{размерность } \Delta x_1 \times \text{размерность } t} \cdot \Delta x_1 \times \text{размерность } t.$$

Постоянные времени  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , как следует из уравнений (3.9) и (3.10), имеют размерность времени.

**Вторая форма записи.** Считая условно оператор дифференцирования  $p = d/dt$  алгебраической величиной, решим уравнение (3.11) относительно выходной величины:

$$\Delta x_3(t) = \frac{k_1 \Delta x_1(t)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3} + \frac{(k_2 + k_3 p) \Delta x_2(t)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3} + \frac{k_4 f_1(t)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3}. \quad (3.13)$$

Выражения

$$W_1(p) = \frac{k_1}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3}, \quad (3.14)$$

$$W_2(p) = \frac{k_2 + k_3 p}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3}, \quad (3.15)$$

$$W_f(p) = \frac{k_4}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3} \quad (3.16)$$

называются в теории автоматического управления *передаточными функциями*. Уравнение (3.13) можно представить в виде

$$\Delta x_3(t) = W_1(p) \Delta x_1(t) + W_2(p) \Delta x_2(t) + W_f(p) f_1(t). \quad (3.17)$$

Выражения (3.13) и (3.17) представляют собой символическую запись дифференциального уравнения (3.9).

Передаточные функции, формулы для которых устанавливаются выражениями (3.14)–(3.16), вводятся для сокращения записи дифференциальных уравнений и также представляют собой символическую запись дифференциальных уравнений.

Более строго передаточная функция определяется через изображения Лапласа (см. главу 7). Если ввести изображения по Лапласу входных и выходных величин звена:

$$\Delta X_1(s) = L[\Delta x_1(t)]; \quad \Delta X_2(s) = L[\Delta x_2(t)]; \quad \Delta X_3(s) = L[\Delta x_3(t)]; \quad F_1(s) = L[f_1(t)],$$

где  $s = c + j\omega$  — комплексная величина, то передаточную функцию (3.14) можно строго определить как отношение изображений выходной и входной величин звена:

$$W_1(s) = \frac{\Delta X_3(s)}{\Delta X_1(s)} = \frac{k_1}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3},$$

при нулевых начальных условиях и равных нулю остальных воздействиях на звено;  $\Delta X_2(s) = 0$  и  $F_1(s) = 0$ . Аналогичным образом можно определить передаточные функции (3.15) и (3.16). Поэтому вместо дифференциального уравнения (3.17), куда входят функции времени  $\Delta x_1(t)$ ,  $\Delta x_2(t)$ ,  $\Delta x_3(t)$  и  $f_1(t)$  можно написать при нулевых начальных условиях уравнение для изображений в виде, совпадающем по форме с (3.17):

$$\Delta X_3(s) = W_1(s) \Delta X_1(s) + W_2(s) \Delta X_2(s) + W_f(s) F_1(s), \quad (3.19)$$

или в развернутом виде:

$$\Delta X_3(s) = \frac{k_1 \Delta X_1(s)}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3} + \frac{(k_2 + k_3 s) \Delta X_2(s)}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3} + \frac{k_4 F_1(s)}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3}. \quad (3.20)$$

В двух последних выражениях фигурируют не функции времени, а их изображения:  $\Delta X_1(s)$ ,  $\Delta X_2(s)$ ,  $\Delta X_3(s)$  и  $F_1(s)$ , где  $s = c + j\omega$  — комплексная величина.

В изображениях Лапласа комплексная величина часто обозначается той же буквой  $p$ , что и оператор дифференцирования, причем  $p = c + j\omega$ . В этом случае уравнение (3.19) будет иметь вид

$$\Delta X_3(p) = W_1(p) \Delta X_1(p) + W_2(p) \Delta X_2(p) + W_f(p) F_1(p). \quad (3.21)$$

Здесь, как и в уравнении (3.19), фигурируют изображения функций  $\Delta X_1(p)$ ,  $\Delta X_2(p)$ ,  $\Delta X_3(p)$  и  $F_1(p)$ .

В дальнейшем будет употребляться символ дифференцирования  $p = d/dt$  для символической записи дифференциальных уравнений, куда входят функции времени  $\Delta x_1(t)$ ,  $\Delta x_2(t)$  и т. д., комплексная величина  $p = c + j\omega$  для записи уравнений с изображениями функций времени по Лапласу  $\Delta X_1(p)$ ,  $\Delta X_2(p)$  и т. д. Запись передаточных функций звена и в том и в другом случае совпадают:  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$  и т. д. Однако в передаточных функциях буква  $p$  будет означать символ дифференцирования

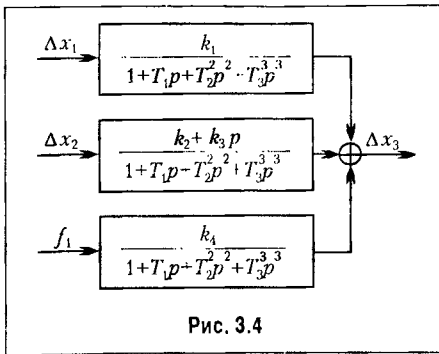


Рис. 3.4

$p = d/dt$  или комплексную величину  $p = c + j\omega$  в зависимости от того, рассматриваются ли функции времени или их изображения.

Понятие передаточной функции весьма удобно при анализе так называемых структурных схем. Так, например, звено, изображенное на рис. 3.1, после линеаризации, которая была проделана в предыдущем параграфе, можно представить в виде структурной схемы, показанной на рис. 3.4. Передаточные функции звеньев или отдельных участков схемы позволяют легко получить общее уравнение всей системы

в виде (3.13) или (3.20), а в дальнейшем в случае необходимости перейти к исходному дифференциальному уравнению вида (3.9). Подобным же образом могут быть получены передаточные функции и структурные схемы и для других дифференциальных уравнений звеньев, например для рассмотренного выше уравнения (3.10). Подробнее этот вопрос изложен в § 5.3.

## Глава 4 ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### § 4.1. Общие понятия

Как уже было сказано, для расчета различных систем автоматического управления они обычно разбиваются на динамические звенья. Под динамическим звеном понимают устройство любой физической природы и конструктивного оформления, но описываемое определенным дифференциальным уравнением.

Классификация звеньев производится именно по виду дифференциального уравнения. Одним и тем же уравнением могут описываться весьма разнообразные устройства (механические, гидравлические, электрические и т. д.). Для теории автоматического управления это будет один и тот же тип звена. Конкретные же элементы автоматических систем, их теория, конструкция и расчеты излагаются в соответствующих учебниках и руководствах.

Обозначим входную величину звена через  $x_1$ , а выходную через  $x_2$  (рис. 4.1). Возмущение, действующее на звено, в соответствии с изложенным выше обозначим  $f(t)$ . Статическая характеристика любого звена может быть изображена прямой линией (рис. 4.2), так как пока будут рассматриваться линейные или, точнее, линеаризованные системы.

В звеньях *позиционного*, или *статического*, типа линейной зависимостью  $x_2 = kx_1$  связаны выходная и входная величины в

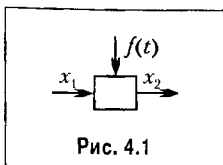
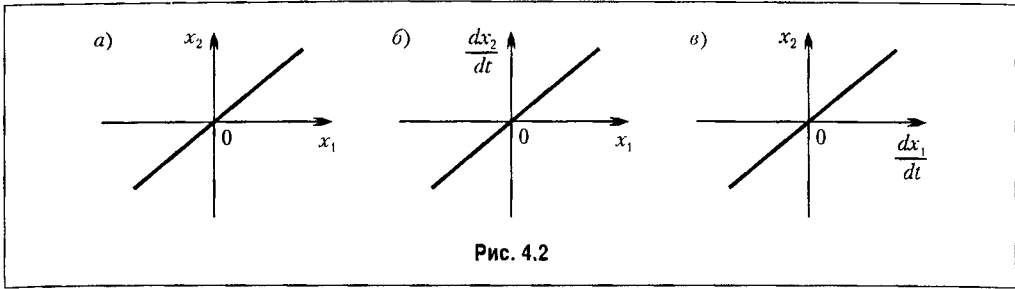


Рис. 4.1





установившемся режиме (рис. 4.2, а). Коэффициент пропорциональности  $k$  между выходной и входной величинами представляет собой коэффициент передачи звена.

В звеньях *интегрирующего* типа линейной зависимостью  $dx_2/dt = kx_1$  связаны производная выходной величины и входная величина в установившемся режиме (рис. 4.2, б). В этом случае для установившегося режима будет справедливым равенство  $x_2 = k \int x_1 dt$ , откуда и произошло название этого типа звеньев. Коэффициент пропорциональности  $k$  в этом случае также является коэффициентом передачи звена. Если входная и выходная величины звена имеют одинаковую размерность, то коэффициенту передачи соответствует размерность  $[c^{-1}]$ .

В звеньях *дифференцирующего* типа линейной зависимостью  $x_2 = k dx_1/dt$  связаны в установившемся режиме выходная величина и производная входной (рис. 4.2, в), откуда и произошло название этого типа звеньев. Коэффициент пропорциональности  $k$  является коэффициентом передачи звена. Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то коэффициенту передачи в этом случае соответствует размерность  $[c]$ .

Классификация звеньев, как уже отмечалось, производится по виду дифференциального уравнения или, что то же самое, по виду передаточной функции звена. Предположим, что звено, изображенное на рис. 4.1, описывается дифференциальным уравнением, представленным в стандартной форме:

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_1 x_1 + k_2 \frac{dx_1}{dt} + k_3 f(t).$$

При нулевых начальных условиях, т. е. в том случае, если для  $t < 0$  входная и выходная величины, а также их производные тождественно равны нулю, и при отсутствии внешнего возмущения ( $f(t) = 0$ ) может быть найдена передаточная функция звена как отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин:

$$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{k_1 + k_2 p}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2} = \frac{k_1 (1 + T_3 p)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2}, \quad (4.1)$$

где  $k_1$  — коэффициент передачи звена,  $T_3 = k_2/k_1$  — постоянная времени.

При известной передаточной функции выходная величина (точнее, ее изображение по Лапласу) может находиться из выражения

$$X_2(p) = W(p) X_1(p).$$

Аналогичным образом может быть найдена передаточная функция звена по возмущению, если положить при нулевых начальных условиях входное воздействие равным нулю ( $x_1 = 0$ ). Тогда искомая передаточная функция будет равна отношению изображений выходной величины и внешнего возмущения:

$$W_F(p) = \frac{X_2(p)}{F(p)} = \frac{k_3}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2}. \quad (4.2)$$

В дальнейшем изложении для характеристики звена будет использоваться в основном передаточная функция, так как именно она дает связь между входной и выходной величинами, что необходимо знать при использовании того или иного звена в автоматической системе.

В соответствии с этим в табл. 4.1 приведены передаточные функции десяти разновидностей так называемых типовых динамических звеньев. Под типовым звеном понимается такое звено, которое описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Характеристики типовых звеньев рассматриваются более подробно ниже.

В табл. 4.1 не приводятся сведения о большой группе так называемых корректирующих звеньев, используемых для улучшения динамических качеств автоматических систем. Эти звенья будут рассмотрены в главе 10.

## § 4.2. Временные характеристики

Динамические свойства звена могут быть определены по его *переходной функции* и *функции веса*.

*Переходная функция*, или *переходная характеристика*,  $h(t)$  описывает переходный процесс на выходе звена, возникающий при подаче на его вход скачкообразного воздействия при величине скачка, равной единице (рис. 4.3). Такое входное воздействие называется *единичной ступенчатой функцией* и обозначается  $x_1(t) = 1(t)$ , что соответствует  $x_1 = 0$  при  $t < 0$  и  $x_1 = 1$  при  $t \geq 0$ . Предполагается, что единица имеет ту же размерность, что и физическая величина на входе звена.

Если входное воздействие представляет собой неединичную ступенчатую функцию  $x_1 = N \cdot 1(t)$ , выходная величина будет равна  $x_2 = Nh(t)$ .

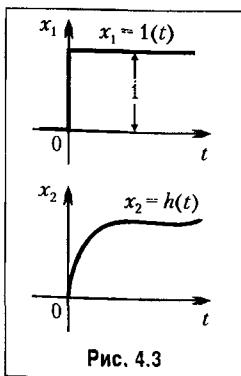


Рис. 4.3

Ступенчатая функция представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот командной оси следящей системы и т. п.

Умножение какой-либо функции времени  $x(t)$  на единичную ступенчатую функцию  $1(t)$  означает, что функция времени  $x(t)$  будет существовать только при  $t \geq 0$ , при  $t < 0$  она обращается в нуль. Это иллюстрируется рис. 4.4.

*Функция веса*  $w(t)$  представляет собой реакцию звена на *единичную импульсную функцию*, поданную на его вход (рис. 4.5).

Таблица 4.1. Типовые звенья

№ п/п	Тип звена		Передаточная функция
	№ п/п	Тип звена	
1		Безынерционное	$W(p) = k$
2		Апериодическое 1-го порядка	$W(p) = k/(1+Tp)$
3		Апериодическое 2-го порядка	$W(p) = \frac{k}{1+T_1p+T_2^2p^2} =$
			$= \frac{k}{(1+T_3p)(1+T_4p)},$ $T_{3,4} = \frac{T_1 \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}}{2} \quad (T_1 > 2T_2)$
4		Колебательное	$W(p) = \frac{k}{1+2\zeta Tp+T^2p^2} = \frac{k}{1+\frac{2\zeta}{q}p+\frac{p^2}{q^2}}$
5		Консервативное	$W(p) = \frac{k}{1+T^2p^2} = \frac{k}{1+\frac{p^2}{k^2}}$
6		Идеальное интегрирующее	$W(p) = k/p$
7		Интегрирующее с замедлением	$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}$
			$W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1+Tp)}{p}, \quad T = \frac{k_1}{k}$
8		Изодромное	$W(p) = kp$
9		Идеальное дифференцирующее	$W(p) = \frac{kp}{1+Tp}$
10		Дифференцирующее с замедлением	

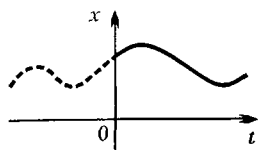


Рис. 4.4

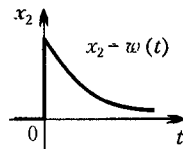
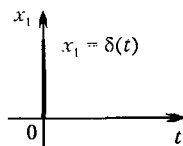


Рис. 4.5

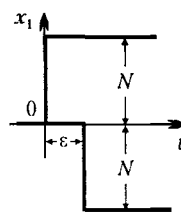
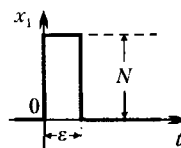


Рис. 4.6

Единичная импульсная функция или *дельта-функция* представляет собой производную от единичной ступенчатой функции:  $\delta(t) = 1'(t)$ . Дельта-функция тождественно равна нулю повсюду, кроме точки  $t = 0$ , где она стремится к бесконечности.

Основное свойство дельта-функции заключается в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (4.3)$$

т. е. она имеет единичную площадь.

Из последнего выражения следует, что размерность дельта-функции равна  $[c^{-1}]$ .

Нетрудно установить связь между переходной функцией и функцией веса. Рассмотрим входное воздействие звена в виде конечного по высоте и ширине импульса с площадью  $N\epsilon = 1$ , прикладываемого при  $t = 0$  (рис. 4.6). Такой импульс может быть заменен двумя ступенчатыми функциями  $N \cdot 1(t)$  и  $-N \cdot 1(t - \epsilon)$ , прикладываемыми ко входу звена со сдвигом во времени  $\epsilon$ . Тогда выходная величина будет равна

$$x_2(t) = N[h(t) - h(t - \epsilon)]. \quad (4.4)$$

Будем теперь увеличивать высоту импульса  $N$ , одновременно уменьшая его ширину  $\epsilon$ , но так, чтобы все время площадь импульса равнялась единице, т. е.  $N\epsilon = 1$ . Помножив и поделив правую часть равенства (4.4) на  $\epsilon$  и перейдя к пределу, получим функцию веса

$$w(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N\epsilon[h(t) - h(t - \epsilon)]}{\epsilon} = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (4.5)$$

Таким образом, функция веса может быть получена дифференцированием по времени переходной функции.

В случае, если на вход звена поступает неединичная импульсная функция  $x_1 = G \delta(t)$ , на выходе звена получится  $x_2 = G w(t)$ .

Импульсная функция также представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду можно свести, например,

кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания генератора, отключаемый плавкими предохранителями, и т. п. В действительности реальные импульсные воздействия на автоматическую систему всегда будут конечными по величине и продолжительности. Однако в случае если их продолжительность весьма мала по сравнению с временем переходного процесса звена или автоматической системы, то с большой степенью точности реальный импульс может быть заменен дельта-функцией с некоторым масштабирующим коэффициентом, что позволяет оценить переходный процесс по виду функции веса.

Функция веса звена связана с его передаточной функцией преобразованием Лапласа, а именно: передаточная функция есть изображение функции веса и связана с ней интегральным преобразованием

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-pt} dt. \quad (4.6)$$

В свою очередь переходная функция звена связана с его передаточной функцией преобразованием Карсона, т. е. имеет место интегральное преобразование

$$W(p) = p \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt. \quad (4.7)$$

Для входного воздействия произвольного типа, прикладываемого в момент  $t = 0$ , переходный процесс на выходе звена при нулевых начальных условиях может быть определен на основании интеграла Дюамеля–Карсона до переходной функции:

$$x_2(t) = x_1(0)h(t) + \int_0^t x_1(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (4.8)$$

или по функции веса

$$x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad (4.9)$$

где  $\tau$  — вспомогательное время интегрирования, изменяющееся в пределах от нуля до рассматриваемого текущего момента времени  $t$ .

Более подробно методика нахождения переходного процесса при произвольном входном воздействии будет рассмотрена в главе 7.

### § 4.3. Частотная передаточная функция и частотные характеристики

Важнейшей характеристикой динамического звена является его *частотная передаточная функция*. Для получения ее рассмотрим динамическое звено (рис. 4.1) в случае, когда возмущение  $f(t) = 0$ , а на входе имеется гармоническое воздействие  $x_1 = X_{1M} \cos \omega t$ , где  $X_{1M}$  — амплитуда, а  $\omega$  — угловая частота этого воздействия.

На выходе линейного звена в установившемся режиме будет также гармоническая функция той же частоты, но в общем случае сдвинутая по фазе относительно входной величины на угол  $\psi$ . Таким образом, для выходной величины можно записать

$$x_2 = X_{2M} \cos(\omega t + \psi).$$

Воспользуемся формулой Эйлера и представим входную и выходную величины в виде суммы экспоненциальных функций:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_{1M}}{2} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] = x_1' + x_1'' \\ x_2 &= \frac{X_{2M}}{2} [e^{j(\omega t + \psi)} + e^{-j(\omega t + \psi)}] = x_2' + x_2'' \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

В линейной системе на основании принципа суперпозиции можно рассмотреть отдельно прохождение составляющих  $x_1'$  и  $x_2''$ . Кроме того, можно легко показать, что достаточно рассмотреть прохождение только составляющей  $x_1'$ , которая в выходной величине дает составляющую  $x_2'$ . Соотношение между составляющими  $x_1''$  и  $x_2''$  получается таким же, как между  $x_1'$  и  $x_2'$ . Поэтому в дальнейшем рассмотрении воспользуемся символической записью<sup>1</sup>  $\cos \omega t = e^{j\omega t}$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_{1M} e^{j\omega t} \\ x_2 &= X_{2M} e^{j(\omega t + \psi)} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Символичность этой сокращенной записи заключается в отбрасывании составляющих с множителем  $e^{-j\omega t}$ .

Для нахождения соотношения между входной и выходной гармоническими величинами звена воспользуемся его дифференциальным уравнением в виде

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_1 x_1 + k_2 \frac{dx_1}{dt}.$$

Из выражений (4.11) определим производные:

$$\frac{dx_1}{dt} = j\omega X_{1M} e^{j\omega t}; \quad \frac{dx_2}{dt} = j\omega X_{2M} e^{j(\omega t + \psi)}; \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = (j\omega)^2 X_{2M} e^{j(\omega t + \psi)}.$$

Подставив значения входной и выходной величин и их производных в дифференциальное уравнение, получим:

$$T_2^2 X_{2M} e^{j(\omega t + \psi)} + T_1 j\omega X_{2M} e^{j(\omega t + \psi)} + X_{2M} e^{j(\omega t + \psi)} = k_1 X_{1M} e^{j\omega t} + k_2 j\omega X_{1M} e^{j\omega t}.$$

После сокращения на общий множитель  $e^{j\omega t}$  найдем:

$$\frac{X_{2M}}{X_{1M}} e^{j\psi} = \frac{k_1 + k_2 j\omega}{1 + T_1 j\omega + T_2^2 (j\omega)^2} = W(j\omega). \quad (4.12)$$

<sup>1</sup> Иногда употребляют символическую запись  $\sin \omega t = e^{j\omega t}$ .

Это выражение называется *частотной передаточной функцией* звена. Таким образом, частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  представляет собой комплексное число, модуль которого равен отношению амплитуды выходной величины к амплитуде входной, а аргумент — сдвигу фаз выходной величины по отношению к входной:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{mod} W(j\omega) &= |W(j\omega)| = \frac{X_{2M}}{X_{1M}}, \\ \arg W(j\omega) &= \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

В более общей формулировке для входного сигнала любого вида частотную передаточную функцию можно представить как отношение изображений (частотных изображений) выходной и входной величин:

$$W(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)} = W(p) \Big|_{p=j\omega}, \quad (4.14)$$

что непосредственно вытекает из формулы (4.1) при переходе от изображения по Лапласу к изображению Фурье; следовательно, частотная передаточная функция легко получается из обычной передаточной функции подстановкой  $p = j\omega$ .

Частотная передаточная функция звена есть изображение Фурье его функции веса, т. е. имеет место интегральное преобразование

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.15)$$

Частотная передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\psi} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4.16)$$

где  $A(\omega)$  — модуль частотной передаточной функции,  $\psi(\omega)$  — аргумент,  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  — вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции.

Модуль частотной передаточной функции находится как отношение модулей числителя и знаменателя. Для рассмотренного выше выражения (4.12)

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 \omega^2}}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}.$$

Аргумент или фаза частотной передаточной функции находится как разность аргументов числителя и знаменателя. Для (4.12) имеем:

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{k_2 \omega}{k_1} - \operatorname{arctg} \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}.$$

Для нахождения вещественной и мнимой частей частотной передаточной функции необходимо освободиться от мнимости в знаменателе путем умножения числителя

теля и знаменателя на комплексную величину, сопряженную знаменателю, и затем произвести деление на вещественную и мнимую части. Для (4.12)

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - T_2^2\omega^2) + k_2T_1\omega^2}{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}, \quad V(\omega) = \frac{k_2\omega(1 - T_2^2\omega^2) - k_1T_1\omega}{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}. \quad (4.17)$$

Для наглядного представления частотных свойств звена используются так называемые частотные характеристики.

*Амплитудно-фазовая частотная характеристика* (а. ф. х.) строится на комплексной плоскости. Она представляет собой геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих частотной передаточной функции  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$  при изменении частоты от нуля до бесконечности (рис. 4.7). По оси абсцисс откладывается вещественная часть  $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$  и по оси ординат — мнимая часть  $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ . Для каждой частоты на комплексной плоскости наносится точка. Полученные точки соединяются затем плавной кривой. Около нанесенных точек можно нанести соответствующие им частоты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и т. д.

Длина вектора, проведенного из начала координат в точку а. ф. х., соответствующую какой-то выбранной частоте, равна модулю частотной передаточной функции. Угол между вектором и положительным направлением вещественной оси, отсчитываемый против часовой стрелки, равен аргументу или фазе частотной передаточной функции. Таким образом, а. ф. х. дает возможность наглядно представить для каждой частоты входного воздействия звена отношение амплитуд выходной и входной величин и сдвиг фаз между ними.

Построение а. ф. х. по вещественной и мнимой частям частотной передаточной функции, как правило, является трудоемкой работой, так как умножение частотной передаточной функции на комплексную величину, сопряженную ее знаменателю, повышает в два раза степень частоты в знаменателе. Обычно гораздо проще строить а. ф. х., используя полярные координаты, т. е. вычисляя непосредственно модуль и фазу. Зная модуль и фазу, можно легко построить соответствующую точку на комплексной плоскости. В случае необходимости при известных модуле и фазе легко вычислить вещественную и мнимую части умножением модуля на направляющий косинус между вектором и соответствующей осью.

Вместо а. ф. х. можно построить отдельно *амплитудно-частотную характеристику* (а. ч. х.) и *фазочастотную характеристику* (ф. ч. х.).

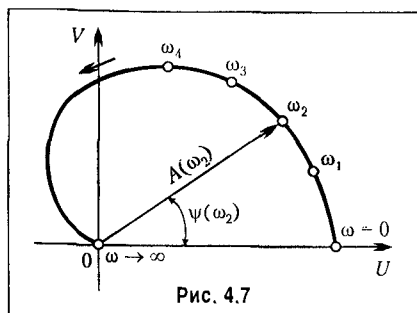


Рис. 4.7

Амплитудно-частотная характеристика показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты. Оценка пропускания делается по отношению амплитуд выходной и входной величин.

Фазочастотная характеристика показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах.

Как следует из сказанного выше, модуль частотной передаточной функции представляет собой четную функцию частоты, а фаза — нечетную функцию частоты.



## § 4.4. Логарифмические частотные характеристики

Логарифмические частотные характеристики (л. ч. х.) включают в себя построенные отдельно на одной плоскости логарифмическую амплитудную характеристику (л. а. х.) и логарифмическую фазовую характеристику (л. ф. х.). Для построения л. а. х. находится величина

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega). \quad (4.18)$$

Эта величина выражается в *децибелах*. Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Один Бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, 2 Бела — в 100 раз, 3 Бела — в 1000 раз и т. д.

Децибел равен одной десятой части Бела. Если бы  $A(\omega)$  было отношением мощностей, то перед логарифмом в правой части (4.19) должен был бы стоять множитель 10. Так как  $A(\omega)$  представляет собой отношение не мощностей, а выходной и входной величин (перемещений, скоростей, напряжений, токов и т. п.), то увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению отношения мощностей в сто раз, что соответствует двум Белам или двадцати децибелам. Поэтому в правой части (4.19) стоит множитель 20.

Необходимость логарифмировать модуль частотной передаточной функции (4.18) приводит к тому, что, строго говоря, л. а. х. может быть построена только для тех звеньев, у которых передаточная функция представляет собой безразмерную ве-

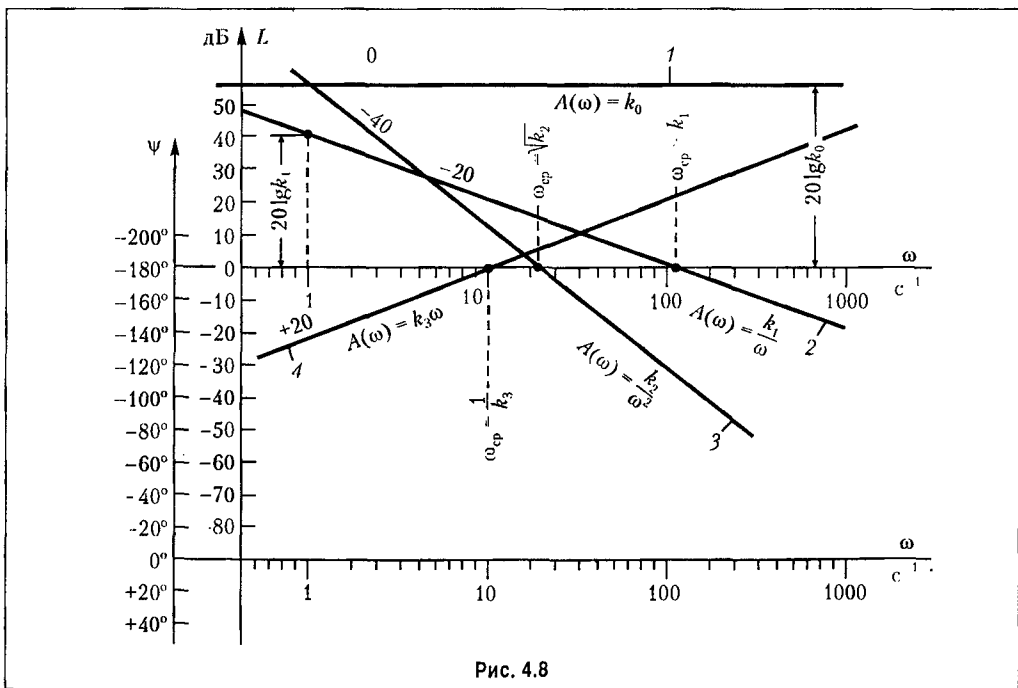


Рис. 4.8

личину. Это возможно при одинаковых размерностях входной и выходной величин звена. В дальнейшем изложении будет подразумеваться именно этот случай.

Однако л. а. х. может условно строиться и для тех звеньев, у которых передаточная функция имеет какую-либо размерность. В этом случае некоторая исходная величина, соответствующая размерности передаточной функции, принимается за единицу (например,  $1 \text{ с}^{-1}$ ,  $1 \text{ рад}$  и т. п.) и под значением  $A(\omega)$  понимается отношение модуля частотной передаточной функции к этой исходной единице.

Это же замечание относится и к угловой частоте  $\omega$ , которая имеет размерность  $[\text{с}^{-1}]$  и которую приходится логарифмировать в соответствии с изложенным.

Для построения л. а. х. и л. ф. х. используется стандартная сетка (рис. 4.8). По оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе, т. е. наносятся отметки, соответствующие  $\lg \omega$ , а около отметок пишется само значение частоты  $\omega$  в рад/с. Для этой цели может использоваться какая-либо шкала счетной логарифмической линейки. При ее отсутствии разметка производится с учетом того, что на логарифмической шкале расстояние между двумя отметками  $\omega = \omega_1$  и  $\omega = \omega_2 > \omega_1$

$$l = l_d (\lg \omega_2 - \lg \omega_1) = l_d \lg \omega_2 / \omega_1, \quad (4.19)$$

где  $l_d$  — желаемая длина одной декады.

Например, если принять, что  $l_d = 60 \text{ мм}$  и  $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$ , то (рис. 4.9) отметка  $\omega_2 = 20 \text{ с}^{-1}$  окажется на расстоянии  $60 \lg 2 \approx 18 \text{ мм}$ , отметка  $\omega_2 = 30 \text{ с}^{-1}$  на расстоянии  $60 \lg 3 \approx 29 \text{ мм}$  и т. д.

По оси ординат откладывается модуль в децибелах (дБ). Для этой цели на ней наносится равномерный масштаб. Ось абсцисс должна проходить через точку 0 дБ, что соответствует значению модуля  $A(\omega) = 1$ , так как логарифм единицы равен нулю.

Ось ординат может пересекать ось абсцисс (ось частот) в произвольном месте. Следует учесть, что точка  $\omega = 0$  лежит на оси частот слева в бесконечности, так как  $\lg 0 = -\infty$ . Поэтому ось ординат проводят так, чтобы справа от нее можно было показать весь ход л. а. х. Как будет показано ниже, для этой цели необходимо провести ось ординат левее самой малой сопрягающей частоты л. а. х.

Для построения л. ф. х. используется та же ось абсцисс (ось частот). По оси ординат откладывается фаза в градусах в линейном масштабе. Для практических расчетов, как это будет ясно ниже, удобно совместить точку нуля децибел с точкой, где фаза равна  $-180^\circ$ . Отрицательный сдвиг по фазе откладывается по оси ординат вверх, а положительный — вниз.

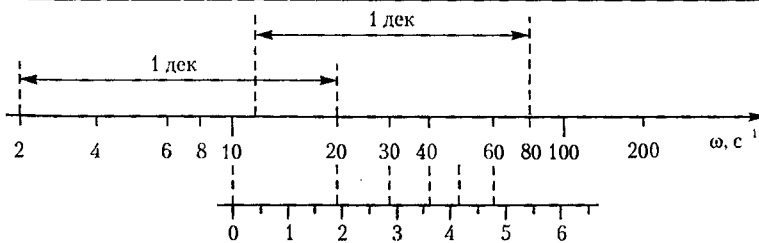


Рис. 4.9

Главным достоинством логарифмических амплитудных частотных характеристик является возможность построения их во многих случаях практически без вычислительной работы. Это особенно проявляется в тех случаях, когда частотная передаточная функция может быть представлена в виде произведения сомножителей. Тогда результирующая л. а. х. может быть приближенно построена в виде так называемой асимптотической л. а. х., представляющей собой совокупность отрезков прямых линий с наклонами, кратными величине 20 дБ/дек. Это будет показано ниже при рассмотрении конкретных звеньев.

Для иллюстрации простоты построения л. а. х. рассмотрим несколько важных примеров.

1. Пусть модуль частотной передаточной функции равен постоянному числу  $A(\omega) = k_0$ ; тогда

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k_0.$$

Л. а. х. представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (прямая 1 на рис. 4.8).

2. Рассмотрим случай, когда  $A(\omega) = k_1/\omega$ . Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg k_1/\omega = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega.$$

Нетрудно видеть, что это — прямая линия, проходящая через точку с координатами  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$  и  $L(\omega) = 20 \lg k_1$  и имеющая отрицательный наклон  $-20$  дБ/дек так как каждое удешагерение частоты вызовет увеличение  $\lg \omega$  на одну единицу, т. е. уменьшение  $L(\omega)$  на 20 дБ (прямая 2 на рис. 4.8).

Точку пересечения прямой с осью нуля децибел (осью частот) можно найти, положив  $L(\omega) = 0$  или, соответственно,  $A(\omega) = 1$ . Отсюда получаем так называемую частоту среза л. а. х., равную в данном случае  $\omega_{\text{ср}} = k_1$ . Очевидно, что размерность коэффициента  $k_1$  должна быть  $[\text{с}^{-1}]$ .

3. Аналогичным образом можно показать, что в случае  $A(\omega) = k_2/\omega^2$  л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном  $-40$  дБ/дек (прямая 3 на рис. 4.10). Вообще для  $A(\omega) = k_n/\omega^n$  л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном  $-n \cdot 20$  дБ/дек. Эта прямая может быть построена по одной какой-либо точке, например по точке  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$  и  $L(\omega) = 20 \lg k_n$  или по частоте среза  $\omega_{\text{ср}} = \sqrt[n]{k_n}$ . Очевидно, что размерность коэффициента  $k_n$  должна быть  $[\text{с}^n]$ .

4. Рассмотрим случай, когда  $A(\omega) = k_3\omega$ . Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg k_3/\omega = 20 \lg k_3 + 20 \lg \omega.$$

Нетрудно видеть, что это — прямая линия, проходящая через точку  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$  и  $L(\omega) = 20 \lg k_3$  и имеющая положительный наклон 20 дБ/дек. Эта прямая может быть построена также по частоте среза  $\omega_{\text{ср}} = 1/k_3$ , полученной приравниванием  $A(\omega) = 1$  (прямая 4 на рис. 4.8).

Аналогичным образом можно показать, что в случае, когда  $A(\omega) = k_m\omega^m$ , л. а. х. представляет собой прямую линию с положительным наклоном  $m \cdot 20$  дБ/дек. Эта прямая также может быть построена по одной какой-либо точке, например по точке

$\omega = 1 \text{ с}^{-1}$  и  $L(\omega) = 20 \lg k_m$  или по частоте среза  $\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{\sqrt[m]{k_m}}$ .

## § 4.5. Позиционные звенья

Характеристики позиционных звеньев сведены в табл. 4.2 и 4.3.

**1. Безынерционное звено.** Это звено не только в статике, но и в динамике описывается алгебраическим уравнением

$$x_2 = kx_1. \quad (4.20)$$

Передаточная функция звена равна постоянной величине:

$$W(p) = W(j\omega) = k. \quad (4.21)$$

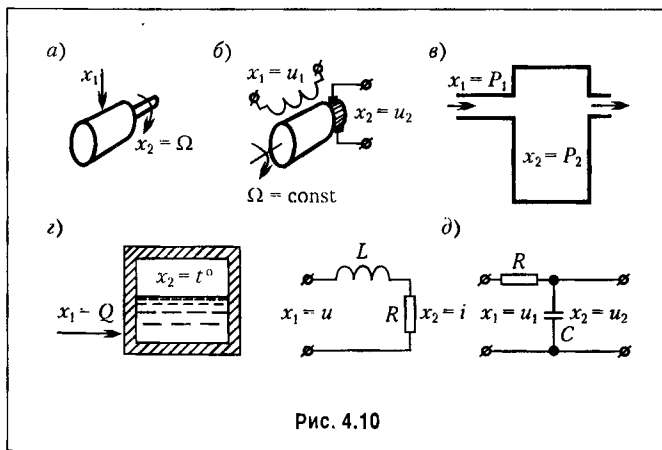
Примером такого звена являются механический редуктор (без учета явления скручивания и люфта), безынерционной (широкополосный) усилитель, делитель напряжения и т. п. Многие датчики сигналов, как, например, потенциометрические датчики, индукционные датчики, вращающиеся трансформаторы и т. п., также могут рассматриваться как безынерционные звенья.

Переходная функция такого звена представляет собой ступенчатую функцию (табл. 4.2), т. е. при  $x_1(t) = 1(t)$ ,  $x_2(t) = h(t) = k \cdot 1(t)$ . Функция веса представляет собой импульсную функцию, площадь которой равна  $k$ , т. е. при  $x(t) = \delta(t)$   $x_2(t) = w(t) = k \delta(t)$ .

А. ф. х. вырождается в точку, расположенную на вещественной оси на расстоянии  $k$  от начала координат (табл. 4.3). Модуль частотной передаточной функции  $A(\omega) = k$  постоянен на всех частотах, а фазовые сдвиги равны нулю ( $\psi = 0$ ).

Безынерционное звено является некоторой идеализацией реальных звеньев. В действительности ни одно звено не в состоянии равномерно пропускать все частоты от 0 до  $\infty$ . Обычно к такому виду звена сводится одно из реальных звеньев, рассматриваемых ниже, например аperiodическое или колебательное, если можно пренебречь влиянием динамических (переходных) процессов в этом звене.

**2. Аperiodическое звено первого порядка.** Звено описывается дифференциальным уравнением



$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1. \quad (4.22)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp}. \quad (4.23)$$

Примеры аperiodических звеньев первого порядка изображены на рис. 4.10.

В качестве первого примера (рис. 4.10, а) рассмат-

ривается двигатель любого типа (электрический, гидравлический, пневматический и т. д.), механические характеристики которого (зависимость вращающего момента от скорости) могут быть представлены в виде параллельных прямых (рис. 4.11). Входной величиной  $x_1$  здесь является управляющее воздействие в двигателе, например подводимое напряжение в электрическом двигателе, расход жидкости в гидравлическом двигателе и т. п. Выходной величиной является скорость вращения  $\Omega$ . Дифференциальное уравнение движения при равенстве нулю момента нагрузки может быть представлено в виде

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k_M x_1 - \frac{M_0}{\Omega_0} \Omega = k_M x_1 - k_1 \Omega,$$

где  $J$  — приведенный к валу двигателя суммарный момент инерции;  $k_M$  — коэффициент пропорциональности между управляющим воздействием  $x_1$  и вращающим моментом;  $k_1 = M_0/\Omega_0$  — наклон механической характеристики, равный отношению пускового момента к скорости холостого хода при некотором значении управляющего воздействия.

Это уравнение приводится к виду

$$T \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k x_1,$$

где  $k = k_M/k_1$  — коэффициент передачи звена,  $T = J \frac{\Omega_0}{M_0} = \frac{J}{k_1}$  — постоянная времени двигателя. Оно полностью совпадает с (4.22).

В качестве второго примера (рис. 4.10, б) приведен электрический генератор постоянного тока, входной величиной которого является напряжение, подводимое к обмотке возбуждения  $u_1$ , а выходной — напряжение якоря  $u_2$ .

Апериодическими звеньями первого порядка являются также резервуар с газом (рис. 4.10, в), у которого входная величина представляет собой давление  $p_1$  перед впускным отверстием, а выходная — давление  $p_2$  в резервуаре, и нагревательная печь (рис. 4.10, г), у которой входная величина — количество поступающего в единицу времени тепла  $Q$ , а выходная — температура в печи  $t_0$ .

Электрические  $RC$ - и  $LR$ -цепи в соответствии со схемами, изображенными на рис. 4.10, д, также представляют собой апериодические звенья первого порядка.

Во всех приведенных примерах дифференциальное уравнение движения совпадает с (4.22).

Переходная функция представляет собой экспоненту (табл. 4.2). Множитель  $1(t)$  указывает, что экспонента рассматривается, начиная с момента  $t = 0$ ,

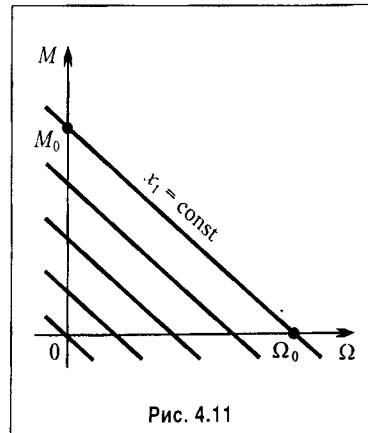


Рис. 4.11

Таблица 4.2. Временные характеристики позиционных звеньев

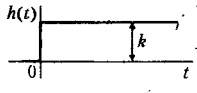
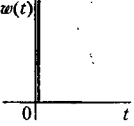
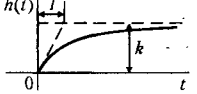
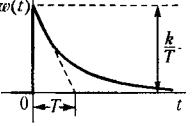
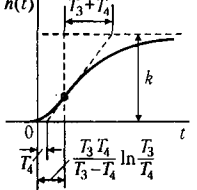
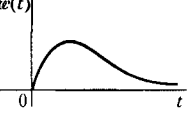
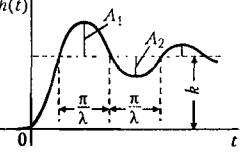
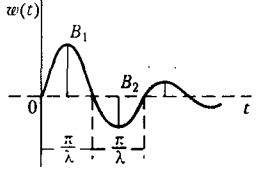
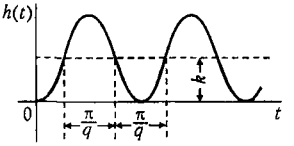
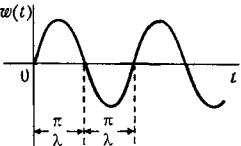
Тип звена и его передаточная функция	Переходная функция $h(t)$	Функция веса $w(t)$
Безынерционное $W(p) = k$	 $h(t) = k \cdot 1(t)$	 $w(t) = k \delta(t)$
Аperiodическое 1-го порядка $W(p) = k / (1 + T_p p)$	 $h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$
Аperiodическое 2-го порядка $W(p) = \frac{k}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2} = \frac{k}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)}$ $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$ $(T_1 > 2T_2; T_3 > T_4)$	 $h(t) = k \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left( e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t)$
Колебательное $W(p) = \frac{k}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{2\zeta}{q} p + \frac{p^2}{q^2}}$ $q = \frac{1}{T}$	 $\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}$ $\gamma = \zeta q, \quad \lambda = q \sqrt{1 - \zeta^2}$ $h(t) = k \left[ 1 - e^{-\gamma t} \left( \cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right] \cdot 1(t)$	 $\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{B_1}{B_2}, \quad q = \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}$ $\zeta = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}}$ $w(t) = \frac{k q^2}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t \cdot 1(t)$

Таблица 4.2. (Окончание)

Тип звена и его передаточная функция	Переходная функция $h(t)$	Функция веса $w(t)$
Консервативное $W(p) = \frac{k}{1+T^2 p^2} = \frac{k}{1+\frac{p^2}{q^2}}$ $q = \frac{1}{T}$	 $h(t) = k(1 - \cos qt) 1(t)$	 $w(t) = kq \sin qt 1(t)$

т. е. для положительного времени. Во многих случаях этот множитель опускается, но указанное обстоятельство необходимо иметь в виду.

Отрезок, отсекаемый на асимптоте касательной, проведенной к кривой в любой точке, равен постоянной времени  $T$ . Чем больше постоянная времени звена, тем дольше длится переходный процесс, т. е. медленнее устанавливается значение  $x_2 = kx_1$  на выходе звена. Строго говоря, экспонента приближается к этому значению асимптотически, т. е. в бесконечности. Практически переходный процесс считается закончившимся через промежуток времени  $t_{\pi} = 3T$ . Иногда принимают  $t_{\pi} = (4 \div 5)T$ .

Постоянная времени характеризует «инерционность» или «инерционное запаздывание» аperiodического звена. Выходное значение  $x_2 - kx_1$  в аperiodическом звене устанавливается только спустя некоторое время ( $t_{\pi}$ ) после подачи входного воздействия.

Функция веса  $w(t)$  может быть найдена дифференцированием переходной функции  $h(t)$ , и она также приводится в табл. 4.2.

Частотные характеристики приведены в табл. 4.3. Амплитудно-фазовая характеристика для положительных частот имеет вид полуокружности с диаметром, равным коэффициенту передачи  $k$ . Величина постоянной времени звена определяет распределение отметок частоты вдоль кривой. На а. ф. х. показаны три характерные отметки ( $\omega = 0$ ,  $\omega = 1/T$  и  $\omega = \infty$ ).

Из амплитудной характеристики видно, что колебания малых частот ( $\omega < 1/T$ ) «пропускаются» данным звеном с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к статическому коэффициенту передачи звена  $k$ . Колебания больших частот ( $\omega > 1/T$ ) проходят с сильным ослаблением амплитуды, т. е. «плохо пропускаются» или практически совсем «не пропускаются» звеном. Чем меньше постоянная времени  $T$ , т. е. чем меньше инерционность звена, тем более вытянута амплитудная характеристика  $A(\omega)$  вдоль оси частот, или, как говорят, тем шире полоса пропускания частот у данного звена.

Логарифмические частотные характеристики приведены в табл. 4.3. Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \tag{4.24}$$

Таблица 4.3. Частотные характеристики позиционных звеньев

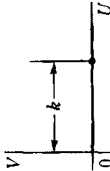
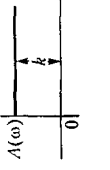
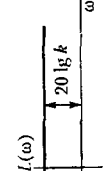
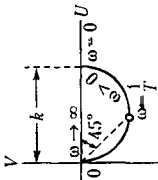
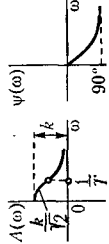
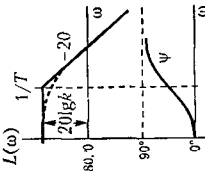
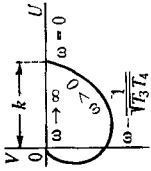
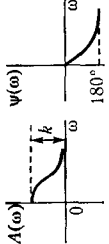
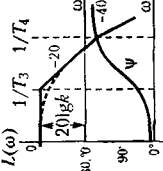
Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Безынерционное $W(j\omega) = k$		 $A(\omega) = k, \psi = 0$	
Анеридическое 1-го порядка $W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$		 $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \psi(\omega) = -\arctg \omega T$	
Анеридическое 2-го порядка $W(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}$		 $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}, \psi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4$	



Таблица 4.3. (Окончание)

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Колебательное $W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega 2\zeta T - \omega^2 T^2} =$ $= \frac{k}{1 + j \frac{\omega^2 \zeta}{q} - \frac{\omega^2}{q^2}}$		$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}}$ $\Psi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$	
Консервативные $W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2} = \frac{k}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}$		$A(\omega) = \frac{k}{ 1 - \omega^2 T^2 }$ $\Psi = 0^\circ \text{ при } 0 < \omega < q;$ $\Psi = -180^\circ \text{ при } \omega > q$	

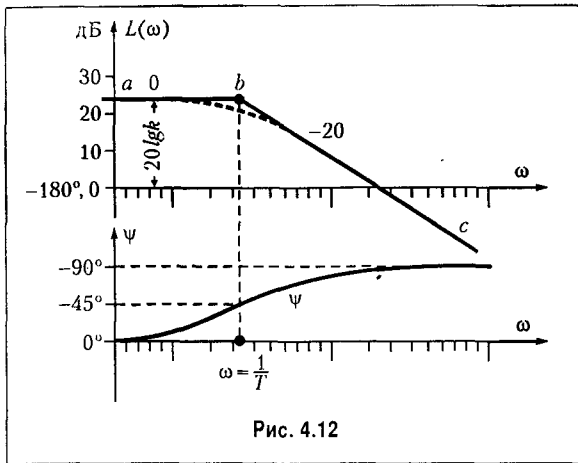


Рис. 4.12

Наиболее просто, практически без вычислительной работы, строится так называемая асимптотическая л. а. х. Ее построение показано на рис. 4.12. На стандартной сетке проводится вертикальная прямая через точку с частотой, называемой сопрягающей частотой  $\omega = 1/T$ . Для частот меньших, чем сопрягающая, т. е. при  $\omega < 1/T$ , можно пренебречь вторым слагаемым под корнем в выражении (4.24). Тогда левее сопрягающей частоты (рис. 4.12) можно заменить (4.24) приближенным выражением  $L(\omega) \approx 20 \lg k$  (при  $\omega < 1/T$ ), которому соответ-

ствует прямая линия, параллельная оси; частот (прямая  $ab$ ) и являющаяся первой асимптотой.

Для частот больших, чем сопрягающая ( $\omega > 1/T$ ) в выражении (4.24) можно пренебречь под корнем единицей по сравнению с  $\omega^2 T^2$ . Тогда вместо (4.24) будем иметь приближенное значение

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega T} \quad (\text{при } \omega > 1/T),$$

которому соответствует, согласно § 4.4, прямая с отрицательным наклоном  $-20$  дБ/дек (прямая  $bc$ ), являющаяся второй асимптотой.

Ломаная линия  $abc$  и называется асимптотической л. а. х. Действительная л. а. х. (показана на рис. 4.12 пунктиром) будет несколько отличаться от асимптотической, причем наибольшее отклонение будет в точке  $b$ . Оно равно приблизительно 3 дБ, так как

$$L\left(\frac{1}{T}\right) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{2}} = 20 \lg k - 3,03 \text{ дБ},$$

что в линейном масштабе соответствует отклонению в  $\sqrt{2}$  раз. На всем остальном протяжении влево и вправо от сопрягающей частоты действительная л. а. х. будет отличаться от асимптотической менее чем на 3 дБ. Поэтому во многих практических расчетах достаточно ограничиться построением асимптотической л. а. х. На том же рис. 4.12 показана логарифмическая фазовая характеристика. Характерными ее особенностями являются сдвиг по фазе  $\psi = -45^\circ$  на сопрягающей частоте (так как  $\text{arctg } \omega T = \text{arctg } 1 = 45^\circ$ ) и симметрия л. ф. х. относительно сопрягающей частоты.

**3. Аперриодическое звено второго порядка.** Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1. \quad (4.25)$$

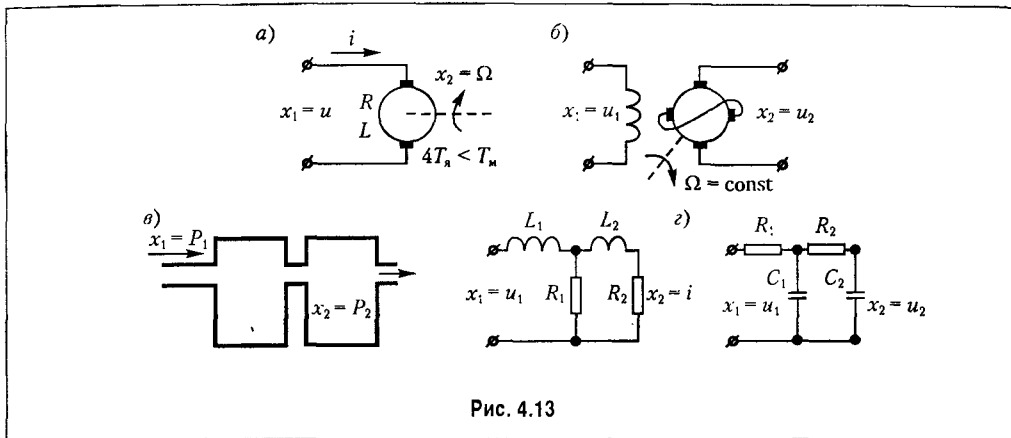


Рис. 4.13

При этом корни характеристического уравнения  $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$  должны быть вещественными, что будет выполняться при условии  $T_1 \geq 2T_2$ . В операторной записи уравнение (4.25) приобретает вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_2 = kx_1. \tag{4.26}$$

Левая часть последнего выражения разбивается на множители:

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)x_2 = kx_1, \tag{4.27}$$

где

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)}. \tag{4.28}$$

Апериодическое звено второго порядка эквивалентно двум апериодическим звеньям первого порядка, включенным последовательно друг за другом, с общим коэффициентом передачи  $k$  и постоянными времени  $T_3$  и  $T_4$ .

Примеры апериодических звеньев второго порядка приведены на рис. 4.13. Рассмотрим подробно случай двигателя постоянного тока (рис. 4.13, а). При отсутствии момента нагрузки на валу и при учете переходных процессов в цепи якоря динамика двигателя описывается двумя уравнениями, определяющими равновесие э. д. с. в цепи якоря:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + C_E \Omega = u,$$

и равновесие моментов на валу двигателя:

$$C_M i - J \frac{d\Omega}{dt} = 0,$$

где  $u$  — напряжение, прикладываемое к якору,  $C_E$  и  $C_M$  — коэффициенты пропорциональности между обратной э. д. с. и скоростью вращения  $\Omega$  и между вращающим моментом и током якоря  $i$ ,  $J$  — приведенный момент инерции,  $L$  и  $R$  — индуктивность и сопротивление цепи якоря.

Переходя в обоих уравнениях к операторной форме записи и решая их совместно, получим передаточную функцию двигателя постоянного тока при управлении напряжением якоря как отношение изображений скорости двигателя и напряжения якоря:

$$W(p) = \frac{1}{C_E} \frac{1}{1 + T_M p + T_Y T_M p^2}, \quad (4.29)$$

где  $T_M = \frac{JR}{C_E C_M} = J \frac{\Omega_0}{M_0}$  — электромеханическая постоянная времени двигателя,  $T_Y = R/L$  — электромагнитная постоянная времени якорной цепи,  $\Omega_0$  и  $M_0$  — скорость холостого хода и пусковой момент двигателя.

Для того чтобы корни знаменателя выражения (4.29) были вещественными и передаточную функцию можно было бы представить в форме (4.28), необходимо выполнение условия  $4T_Y \leq T_M$ .

Переходная функция и функция веса звена приведены в табл. 4.2.

Частотные характеристики приведены в табл. 4.3. Построение асимптотической л. а. х. производится аналогично тому, как это было сделано для апериодического звена первого порядка. Вначале проводятся вспомогательные вертикальные линии через сопрягающие частоты  $\omega = 1/T_3$  и  $\omega = 1/T_4$ .

Для определенности построения принято, что  $T_3 > T_4$ .

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}. \quad (4.30)$$

Левее первой сопрягающей частоты ( $\omega < 1/T_3$ ), это выражение заменяется приближенным

$$L(\omega) \approx 20 \lg k,$$

которому соответствует прямая с нулевым наклоном (первая асимптота л. а. х.). Для частот  $\frac{1}{T_3} < \omega < \frac{1}{T_4}$  выражение (4.30) заменяется приближенным

$$L(\omega) \approx 20 \lg k / \omega T_3,$$

которому соответствует прямая с отрицательным наклоном  $-20$  дБ/дек (вторая асимптота). Для частот  $\omega > 1/T_4$  выражение (4.30) заменяется приближенным

$$L(\omega) \approx 20 \lg k / \omega^2 T_3 T_4,$$

которому соответствует прямая с отрицательным наклоном  $-40$  дБ/дек (третья асимптота). Действительная л. а. х. показана в табл. 4.3 пунктиром. Она отличается от асимптотической в точках излома на 3 дБ.

**4. Колебательное звено.** Звено описывается тем же дифференциальным уравнением (4.25), что и аperiodическое звено второго порядка. Однако корни характеристического уравнения  $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$  должны быть комплексными, что будет выполняться при  $T_1 < 2T^2$ .

Левая часть дифференциального уравнения обычно представляется в виде

$$(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1) x_2 = k x_1 \tag{4.31}$$

или

$$\left( \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\zeta p}{q} + 1 \right) x_2 = k x_1, \tag{4.32}$$

где  $q = 1/T$  — угловая частота свободных колебаний (при отсутствии затухания), а  $\zeta$  — параметр затухания, лежащий в пределах  $0 < \zeta < 1$ .

Передаточная функция колебательного звена

$$W(p) = \frac{k}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{2\zeta p}{q} + \frac{p^2}{q^2}}. \tag{4.33}$$

Примеры колебательных звеньев приведены на рис. 4.14. К ним относятся колебательные RLC-цепи (рис. 4.14, а), управляемые двигатели постоянного тока при выполнении условия  $4T_{я} > T_M$  (рис. 4.14, б), упругие механические передачи, например для передачи вращательного движения (рис. 4.14, в), с упругостью  $C$ , моментом инерции  $J$  и коэффициентом скоростного трения  $S$ , гироскопические элементы (рис. 4.14, з) и др.

Рассмотрим для иллюстрации гироскопический элемент (рис. 4.14, з). В качестве входной величины примем момент  $M$ , прикладываемый к оси  $\alpha$ , а в качестве выходной — угол поворота этой же оси.

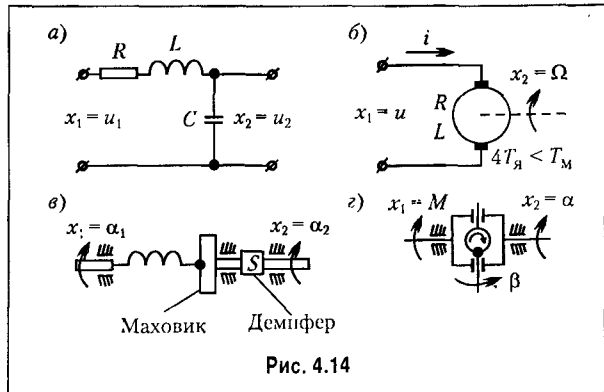
Уравнение равновесия моментов на оси

$$A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + F \frac{d\alpha}{dt} - H \frac{d\beta}{dt} = M.$$

Будем считать, что на оси  $\beta$  (оси прецессии) не действуют никакие внешние моменты. Тогда для этой оси уравнение равновесия моментов запишется так:

$$B \frac{d^2 \beta}{dt^2} + H \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

В этих формулах  $A$  и  $B$  — моменты инерции относительно осей  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $H$  — кинетический мо-



мент гироскопа, равный его полярному моменту инерции  $J$ , умноженному на угловую скорость собственного вращения  $\Omega$  и  $F$  — коэффициент скоростного сопротивления на оси  $\alpha$ .

Переходя к операторным выражениям и решая оба уравнения совместно, получаем:

$$\left( \frac{AB}{H^2} p^2 + \frac{FB}{H^2} p + 1 \right) \alpha = \frac{B}{H^2} M.$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\left( \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\zeta}{q} p + 1 \right) \alpha = \frac{B}{H^2} M,$$

где  $q^2 = H^2/AB$  — квадрат угловой частоты нутационных колебаний, а  $\zeta = \frac{1}{2} \frac{F}{H} \sqrt{\frac{B}{A}}$  — параметр затухания, определяемый действием сил скоростного трения на оси  $\alpha$ . Это уравнение совпадает с выражением (4.32).

Для решения дифференциального уравнения (4.31) или (4.32) необходимо найти корни характеристического уравнения

$$T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\zeta p}{q} + 1 = 0.$$

Решение даст

$$p_{1,2} = -\gamma \pm j\lambda = -\frac{\zeta}{T} \pm j \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta q \pm jq \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (4.34)$$

Вещественная часть корня  $\gamma$  представляет собой коэффициент затухания переходного процесса, а  $\lambda$  — частоту затухающих колебаний.

Временные характеристики звена приведены в табл. 4.2, а частотные характеристики — в табл. 4.3.

Амплитудно-частотная характеристика может иметь резонансный пик. Исследование модуля частотной передаточной функции на максимум показывает, что пик будет существовать при  $\zeta < 0,707$ . Высота пика будет тем больше, чем меньше параметр затухания:

$$A(\omega_M) = \frac{k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (4.35)$$

Максимуму а. ч. х. соответствует частота

$$\omega_M = q \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (4.36)$$

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{q^2}}}. \quad (4.37)$$

Однако построение л. а. х. не может быть сделано так просто, как это было для предыдущих звеньев. Для построения используются так называемые нормированные л. а. х. Постоянный множитель под знаком логарифма в выражении (4.37) может быть выделен в отдельное слагаемое:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{q^2}}}. \quad (4.38)$$

Построение первого слагаемого (4.38) не представляет никакого труда. Второе слагаемое может быть построено в функции относительной частоты  $\omega/q$  для различных значений параметра затухания  $\zeta$  в виде универсальных (нормированных) кривых (рис. 4.15). Для построения истинной л. а. х. необходимо выбрать нормированную л. а. х., соответствующую данному значению  $\zeta$ , поднять ее параллельно самой себе на  $20 \lg k$  и по оси частот от относительной частоты перейти к действительной умножением на  $q$ .

В функции той же относительной частоты на рис. 4.15 нанесены нормированные л. ф. х., построенные по выражению

$$\psi = -\arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{q}}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}. \quad (4.39)$$

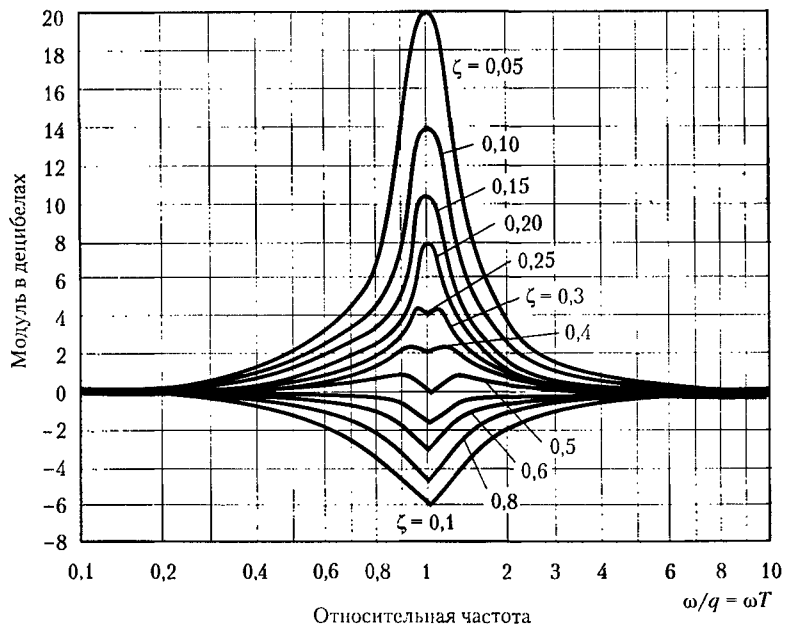
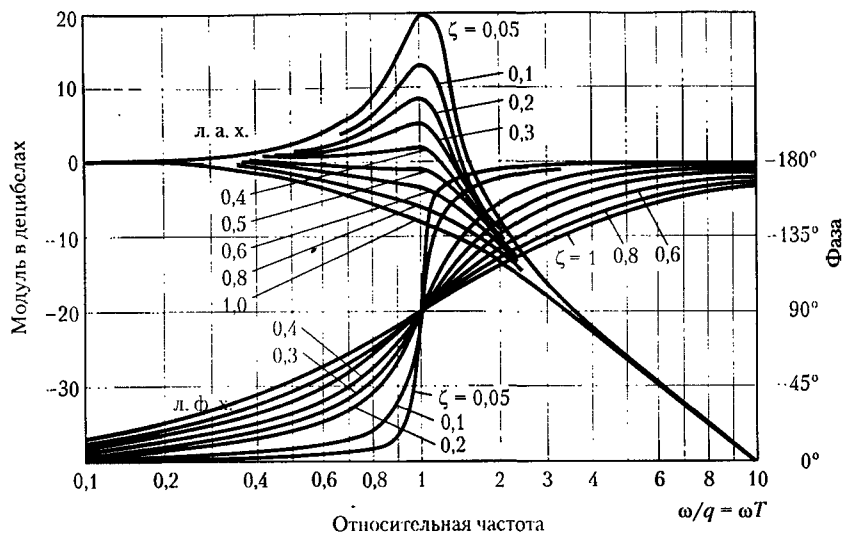
Построение л. а. х. колебательного звена можно делать также посредством проведения двух асимптот с наклонами  $0$  и  $-40$  дБ/дек, пересекающихся в точке  $\omega = 1/q$ , с последующим введением поправки, которая приведена на рис. 4.16.

Нормированные переходные характеристики колебательного звена для случая  $k = 1$  приведены на рис. 4.17 в функции относительного времени  $qt$ .

Сравнение рис. 4.15 и 4.17 показывает, что снижение параметра затухания  $\zeta$  приводит к повышению колебательности переходного процесса и росту резонансного пика амплитудной частотной характеристики.

**5. Консервативное звено.** Консервативное звено является частным случаем колебательного при  $\zeta = 0$ . Тогда передаточная функция (4.33) будет иметь вид

$$W(p) = \frac{k}{1 + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + \frac{p^2}{q^2}}. \quad (4.40)$$





Консервативное звено представляет собой идеализированный случай, когда можно пренебречь влиянием рассеяния энергии в звене. Для изображенных на рис. 4.14 примеров мы получим консервативные звенья, если в случаях *a*) и *б*) положить  $R = 0$ , в случае *в*) положить  $S = 0$  и в случае *г*) положить  $F = 0$ .

Временные характеристики соответствуют незатухающим колебаниям (табл. 4.2) с угловой частотой  $q$ .

Частотные характеристики приведены в табл. 4.3. При частоте  $\omega = q$  модуль частотной передаточной функции обращается в бесконечность, а фаза делает скачок на  $180^\circ$ .

Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с вещественной осью. При  $0 < \omega < q$  характеристика совпадает с положительной полуосью.

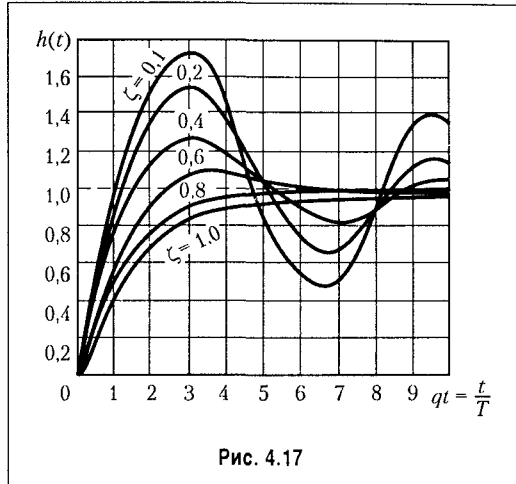


Рис. 4.17

## § 4.6. Интегрирующие звенья

1. Идеальное интегрирующее звено. Звено описывается дифференциальным уравнением

$$dx_2/dt = kx_1. \quad (4.41)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = k/p. \quad (4.42)$$

Такое звено является идеализацией реальных интегрирующих звеньев, часть которых будет рассмотрена ниже. Примеры интегрирующих звеньев приведены на рис. 4.18. Часто в качестве такого звена используется операционный усилитель в режиме интегрирования (рис. 4.18, *a*). Интегрирующим звеном является также обычный гидравлический демпфер (рис. 4.18, *б*). Входной величиной здесь является сила  $F$ , действующая на поршень, а выходной — перемещение поршня  $x_2$ . Так как скорость движения поршня пропорциональна приложенной силе (без учета инерционных сил):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{S},$$

где  $S$  — коэффициент скоростного сопротивления; его перемещение будет пропорциональным интегралом от приложенной силы:

$$x = \int v dt = \frac{1}{S} \int F dt.$$

Часто в качестве интегрирующего звена используется интегрирующий привод (рис. 4.18, *г*). Это особенно удобно делать при необходимости длительного интегри-

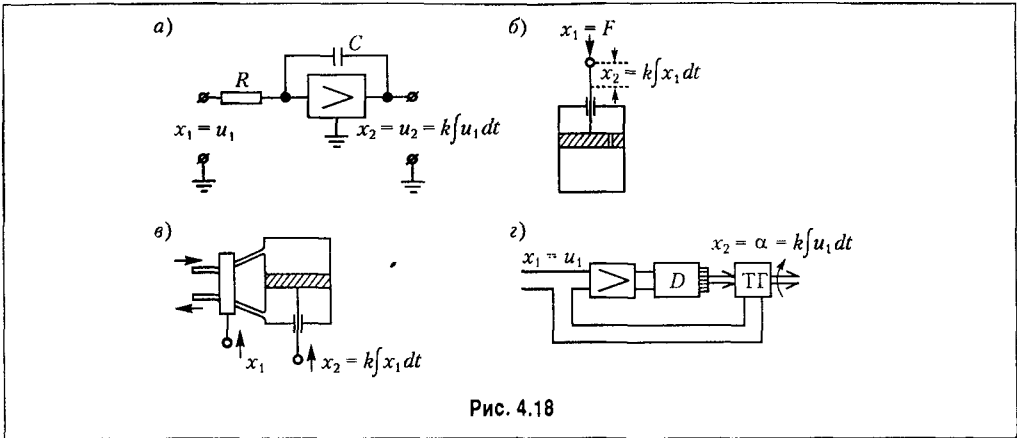


Рис. 4.18

рования (часы, дни и даже месяцы), например в автоматических путепрокладчиках и навигационных системах.

Интегрирующим звеном является также гироскоп (рис. 4.14, з), если в качестве входной величины рассматривать момент  $M$  на оси  $\alpha$ , а в качестве выходной — угол поворота оси прецессии  $\beta$  (в зоне линейности).

Из уравнений гироскопа, приведенных в предыдущем параграфе, можно получить:

$$\left( \frac{AB}{H^2} p^2 + \frac{FB}{H} p + 1 \right) p \beta = -\frac{M}{H},$$

откуда передаточная функция для угла прецессии

$$W(p) = -\frac{1}{Hp} \frac{1}{1 + \frac{FB}{H} p + \frac{AB}{H^2} p^2}.$$

В случае пренебрежения влиянием пугационных колебаний передаточная функция гироскопа будет равна

$$W(p) = 1/Hp = k/p.$$

Временные характеристики звена приведены в табл. 4.4, а частотные — в табл. 4.5.

Амплитудно-частотная характеристика показывает, что звено пропускает сигнал тем сильнее, чем меньше его частота. При  $\omega = 0$  модуль частотной передаточной функции стремится к бесконечности, а при  $\omega \rightarrow \infty$  модуль  $A(\infty) \rightarrow 0$ .

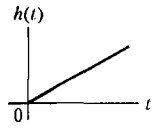
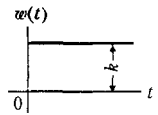
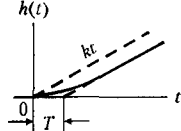
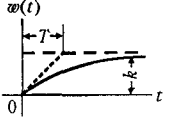
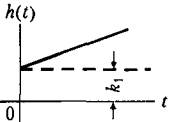
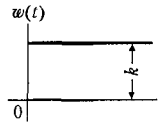
Амплитудно-фазовая характеристика сливается с отрицательной частью мнимой оси.

Построение л. а. х. делается по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg k/\omega. \tag{4.43}$$

Л. а. х. представляет собой прямую с отрицательным наклоном  $-20$  дБ/дек, пересекающую вещественную ось при частоте среза  $\omega_{ср} = k$ . Л. ф. х. представляет собой прямую  $\psi = -90^\circ$ , параллельную вещественной оси.

Таблица 4.4. Временные характеристики интегрирующих звеньев

Тип звена и передаточная функция	Переходная функция	Функция веса
Идеальное $W(p) = \frac{k}{p}$	 $h(t) = kt \cdot \mathbf{1}(t)$	 $w(t) = k \cdot \mathbf{1}(t)$
С замедлением $W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}$	 $h(t) = k[t - T(1 - e^{-t/T})] \cdot \mathbf{1}(t)$	 $w(t) = k(1 - e^{-t/T}) \cdot \mathbf{1}(t)$
Изодромное $W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1+Tp)}{p}$ , $T = \frac{k_1}{k}$	 $h(t) = (kt + k_1) \cdot \mathbf{1}(t)$	 $w(t) = k \cdot \mathbf{1}(t) + k_1 \delta(t)$

2. Интегрирующее звено с замедлением. Звено описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_2}{dt} = kx_1. \tag{4.44}$$

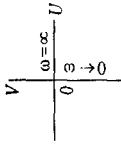
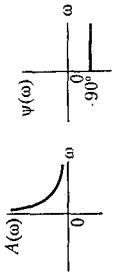
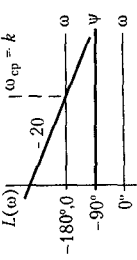
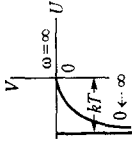
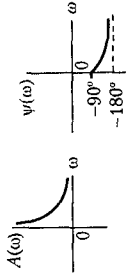
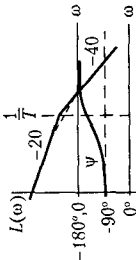
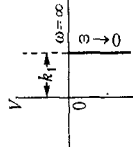
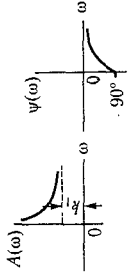
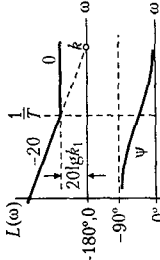
Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}, \tag{4.45}$$

Примером такого звена является двигатель (рис. 4.10, а), если в качестве выходной величины рассматривать не угловую скорость, а угол поворота, являющийся интегралом от угловой скорости. К такому же типу звена сводятся демифер (рис. 4.18, б), серводвигатель (рис. 4.18, в), интегрирующий привод (рис. 4.18, г), если более точно рассматривать их уравнения движения, и др.

Интегрирующее звено с замедлением можно представить как совокупность двух включенных последовательно звеньев — идеального интегрирующего и апериодического первого порядка.

Таблица 4.5. Частотные характеристики интегрирующих звеньев

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Идеальное $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$			
Интегрирующее с замедлением $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)}$			
Изолетромнос $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} + k_1 = \frac{k(1+j\omega T)}{j\omega}$ $T = \frac{k_1}{k}$			

Для нахождения временных характеристик удобно передаточную функцию представить в виде алгебраической суммы

$$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)} = \frac{k}{p} - \frac{kT}{1+Tp},$$

что позволяет представить решение дифференциального уравнения (4.44) в виде суммы решений для идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка.

Временные характеристики приведены в табл. 4.4, а частотные — в табл. 4.5.

Л.а.х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (4.46)$$

Асимптотическая л. а. х. представляет собой две прямые с отрицательными наклонами  $-20$  дБ/дек (при  $\omega < 1/T$ ) и  $-40$  дБ/дек (при  $\omega > 1/T$ ).

**3. Изодромное звено.** Звено описывается уравнением

$$dx_2/dt = kx_1 + k_1 dx_1/dt. \quad (4.47)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1+Tp)}{p}, \quad (4.48)$$

где  $T = k_1/k$  — постоянная времени изодромного звена.

Из этих выражений видно, что звено можно условно представить в виде совокупности двух звеньев, действующих параллельно, — идеального интегрирующего с коэффициентом передачи  $k$  и безынерционного с коэффициентом передачи  $k_1$ .

Примеры изодромных звеньев изображены на рис. 4.19. Таким звеном может быть комбинация пружины с демпфером (рис. 4.19, б). В качестве входной величины здесь рассматривается прикладываемая сила  $F$ , а в качестве выходной — перемещение  $x$  точки  $a$ , в которой приложена сила. Это перемещение складывается из деформации пружины

$$F/c,$$

где  $c$  — жесткость пружины, и перемещения поршня

$$1/S \int F dt,$$

где  $S$  — коэффициент скоростного сопротивления демпфера.

Результирующее перемещение точки

$$x = F/c + 1/S \int F dt.$$

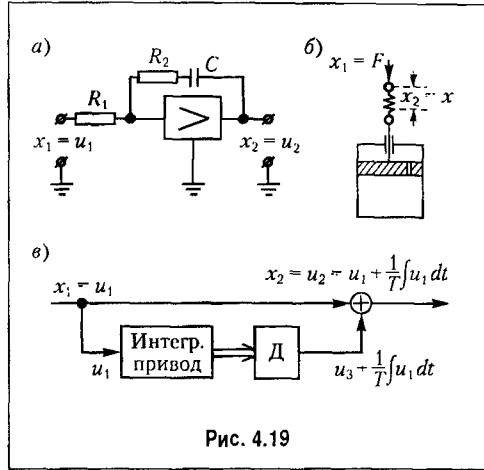


Рис. 4.19

При использовании операционного усилителя (рис. 4.19, а) изодромное звено может быть получено посредством применения  $RC$ -цепи в обратной связи.

В системах управления часто находят применение изодромные звенья, построенные на базе интегрирующего привода (рис. 4.19, в). В этом случае входное напряжение  $u_1$  поступает непосредственно на выход. Кроме того, это же напряжение поступает на вход интегрирующего привода. Угол поворота валика последнего, в соответствии с изложенным выше, пропорционален интегралу от входного напряжения  $u_1$ . На выходном валике устанавливается какой-либо датчик (Д) представляющий собой линейный преобразователь угла поворота в напряжение, например потенциометр или линейный вращающийся трансформатор. Напряжение этого преобразователя  $u_3$  суммируется с напряжением  $u_1$ . Эта сумма и представляет собой выходное напряжение  $u_2$ .

Таким образом, для схемы, изображенной на рис. 4.19, в,

$$U_2(p) = \left(1 + \frac{1}{Tp}\right) U_1(p) = \frac{1+Tp}{Tp} U_1(p),$$

где  $T$  — коэффициент пропорциональности между скоростью изменения выходного напряжения датчика интегрирующего привода и напряжением на его входе. Коэффициент передачи идеального интегрирующего звена в этом случае равен  $k = 1/T$ .

Временные характеристики звена представлены в табл. 4.4, а частотные — в табл. 4.5.

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k\sqrt{1+\omega^2 T^2}}{\omega}.$$

Асимптотическая л. а. х. представляет собой две прямые: с отрицательным наклоном  $-20$  дБ/дек (при  $\omega < 1/T$ ) и параллельную оси частот (при  $\omega > 1/T$ ).

Из рассмотрения л. а. х. и л. ф. х. видно, что в области малых частот (меньших, чем сопрягающая частота) звено ведет себя как идеальное интегрирующее и тем точнее, чем меньше частота.

В области больших частот (больших, чем сопрягающая частота) звено ведет себя как безынерционное с коэффициентом передачи  $k_1$ .

Свойство звена вводить интегрирующее действие в области малых частот используется для улучшения качественных показателей систем автоматического регулирования (см. главу 9).

## § 4.7. Дифференцирующие звенья

1. Идеальное дифференцирующее звено. Звено описывается уравнением

$$x_2 = k dx_1/dt. \quad (4.49)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = kp. \quad (4.50)$$

Примеры идеальных дифференцирующих звеньев изображены на рис. 4.20. Единственным идеальным дифференцирующим звеном, которое точно описывается уравнением (4.49), является тахогенератор постоянного тока (рис. 4.49, а), если в качестве входной величины рассматривать угол поворота его ротора  $\alpha$ , а в качестве выходной — э. д. с. якоря  $e$ . В тахогенераторе постоянного тока при неизменном потоке возбуждения э. д. с. в якоре пропорциональна скорости вращения:  $e = k\Omega$ . Скорость вращения есть производная по времени от угла поворота:  $\Omega = d\alpha/dt$ . Следовательно,  $e = k d\alpha/dt$ . В режиме, близком к холостому ходу (сопротивление нагрузки велико), можно считать, что напряжение якоря равно э. д. с.:  $u = e$ . Тогда  $u = k d\alpha/dt$ .

Приближенно в качестве идеального дифференцирующего звена может рассматриваться операционный усилитель в режиме дифференцирования (рис. 4.20, б).

Временные характеристики приведены в табл. 4.6, а частотные — в табл. 4.7.

**2. Дифференцирующее звено с замедлением.** Звено описывается уравнением

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k \frac{dx_1}{dt}. \quad (4.51)$$

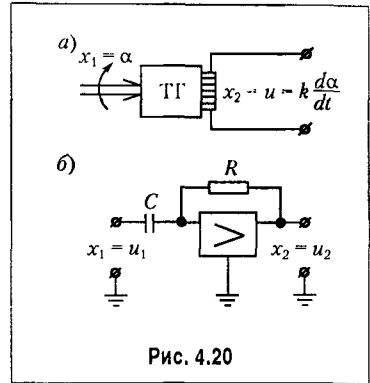


Таблица 4.6. Временные характеристики дифференцирующих звеньев

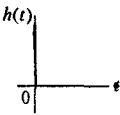
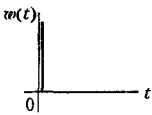
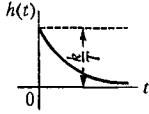
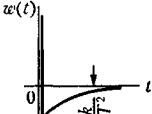
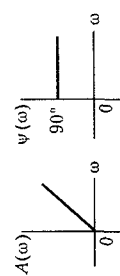
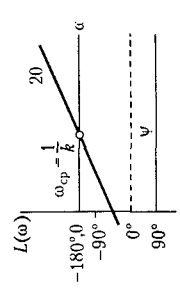
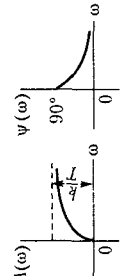
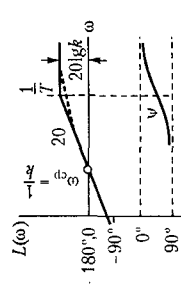
Тип звена и его передаточная функция	Переходная функция	Функция веса
Идеальное дифференцирующее $W(p) = kp$	 $h(t) = k\delta(t)$	 $w(t) = k\dot{\delta}(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}$
Дифференцирующее с замедлением $W(p) = \frac{kp}{1+Tp}$	 $h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$

Таблица 4.7. Частотные характеристики дифференцирующих звеньев

Тип звена и его частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Идеальное дифференцирующее $W(j\omega) = kj\omega$			
Дифференцирующее с замедлением $W(j\omega) = \frac{kj\omega}{1 + j\omega T}$			



Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{kp}{1+Tp} \quad (4.52)$$

Звено условно можно представить в виде двух включенных последовательно звеньев — идеального дифференцирующего и апериодического первого порядка.

На рис. 4.21 изображены примеры дифференцирующих звеньев с замедлением. Наиболее часто употребляются электрические цепи (рис. 4.21, а, б и в).

В некоторых случаях используются дифференцирующие устройства, состоящие из гидравлического демпфера и пружины (рис. 4.21, з).

Составим, например, уравнение для дифференцирующего конденсатора (рис. 4.21, а). Ток в рассматриваемой цепи определяется уравнением

$$Ri + \frac{1}{C} \int idt = u_1.$$

Переходя к изображениям и решая это уравнение относительно тока, получаем:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{pC}{1 + RCp} U_1(p).$$

Напряжение на выходе цепи

$$U_2(p) = RI(p) = \frac{Tp}{1+Tp} U_1(p),$$

где  $T = RC$  — постоянная времени цепи.

Временные характеристики звена приведены в табл. 4.6, а частотные — в табл. 4.7.

Амплитудно-частотная характеристика имеет иной вид, чем у идеального звена. Характеристики совпадают в области низких частот. В области высоких частот реальное звено пропускает сигнал хуже, чем идеальное звено. Коэффициент передачи стремится к значению  $k/T$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Для звеньев, представляющих собой  $RC$ - или  $RL$ -цепь (рис. 4.21, а и б),  $k = T$  и на высоких частотах коэффициент передачи стремится к единице.

Фазовые сдвиги, вносимые звеном, являются наибольшими при низких частотах. На высоких частотах фазовый сдвиг постепенно уменьшается, стремясь в пределе к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ . Здесь также видно, что это звено ведет себя подобно идеальному только в области низких частот.

Л. а. х. строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad (4.53)$$

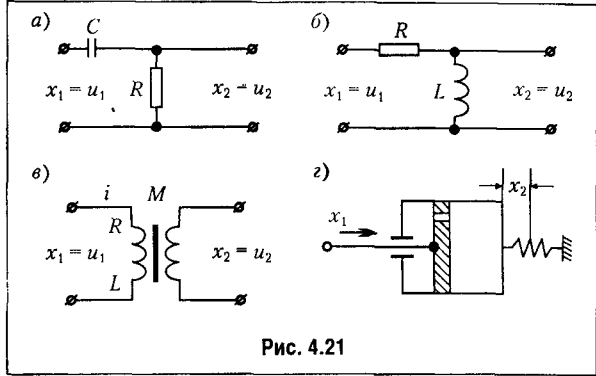


Рис. 4.21

Асимптотическая л. а. х. может быть представлена в виде двух прямых. Одна из них имеет положительный наклон 20 дБ/дек (при  $\omega < 1/T$ ), а вторая — параллельна оси частот (при  $\omega > 1/T$ ).

## § 4.8. Неустойчивые и минимально-фазовые звенья

Рассмотренные выше звенья позиционного типа относятся к *устойчивым* звеньям, или к звеньям с *самовыравниванием*. Под самовыравниванием понимается способность звена самопроизвольно приходить к новому установившемуся состоянию при ограниченном изменении входной величины или возмущающего воздействия. Термин *самовыравнивание* обычно применяется для звеньев, представляющих собой объекты управления.

Существуют звенья, у которых ограниченное изменение входной величины или возмущающего воздействия не вызывает прихода звена к новому установившемуся состоянию, а выходная величина имеет тенденцию неограниченного возрастания во времени. К таким звеньям относятся, например, звенья интегрирующего типа. Они были рассмотрены выше.

Существуют звенья, у которых этот процесс выражен еще заметнее. Это объясняется наличием положительных вещественных корней или комплексных корней с положительной вещественной частью в характеристическом уравнении, в результате чего звено будет относиться к категории *неустойчивых* звеньев. Вопрос устойчивости будет изложен подробно в главе 6. Рассмотрим в качестве примера звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$T dx_2/dt - x_2 = kx_1, \quad (4.54)$$

которому соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{-1 + Tp}. \quad (4.55)$$

Переходная функция такого звена представляет собой показательную функцию с положительным показателем степени:

$$h(t) = k(e^{t/T} - 1) \cdot 1(t). \quad (4.56)$$

Эта функция изображена на рис. 4.22.

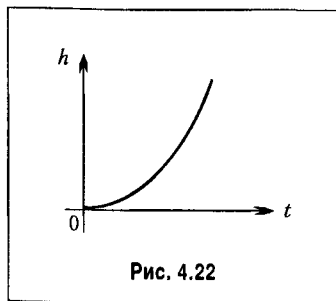


Рис. 4.22

Таким звеном может быть, например, двигатель любого типа (рис. 4.10, а) если его механическая характеристика, т. е. зависимость вращающего момента от скорости вращения  $M = f(\Omega)$ , имеет положительный наклон. На рис. 4.23 изображены разновидности механических характеристик двигателя. В случае, соответствующем кривой 1, двигатель представляет собой устойчивое апериодическое звено первого порядка, уравнения движения которого были рассмотрены в § 4.5. Это звено имеет положительное самовыравнивание.

В случае, соответствующем кривой 2, когда вращающий момент не зависит от скорости вращения, уравнение движения двигателя, записанное для угловой скорости, приобретает вид

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k_M x_1,$$

где  $J$  — суммарный приведенный момент инерции двигателя,  $k_M$  — коэффициент пропорциональности между управляющим воздействием  $x_1$  и вращающим моментом. Здесь скорость двигателя связана с управляющим воздействием передаточной функцией, соответствующей интегрирующему звену

$$W(p) = \frac{k_M}{Jp} = \frac{k}{p}.$$

Это звено не имеет самовыравнивания. В случае, соответствующем кривой 3, дифференциальное уравнение движения будет

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k_M x_1 + k_1 \Omega,$$

где  $k_1$  — наклон механической характеристики в точке, где производится линейризация.

Это уравнение приводится к следующему виду:

$$T \frac{d\Omega}{dt} - \Omega = kx_1,$$

где  $T = J/k_1$  — постоянная времени двигателя.

Уравнение совпадает с выражением (4.54). Звено имеет отрицательное самовыравнивание.

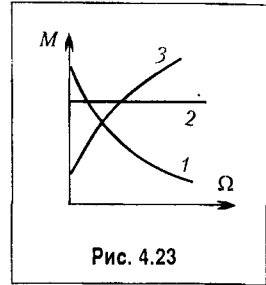
Признаком отрицательного самовыравнивания является отрицательный знак перед самой выходной величиной в левой части дифференциального уравнения (см., например, формулу (4.54)) или появление отрицательного знака у свободного члена знаменателя передаточной функции (см., например, формулу (4.55)).

Существенной особенностью неустойчивых звеньев является наличие больших по сравнению с устойчивыми звеньями фазовых сдвигов. Так, для рассматриваемого апериодического звена с отрицательным самовыравниванием (неустойчивого) частотная передаточная функция на основании (4.55) будет равна

$$W(j\omega) = \frac{k}{-1 + j\omega T}. \quad (4.57)$$

Модуль ее не отличается от модуля частотной передаточной функции устойчивого апериодического звена (табл. 4.3):

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$



Поэтому а. ч. х. и л. а. х. этих двух звеньев (устойчивого и неустойчивого) совпадают и по одной амплитудной характеристике нельзя определить, к какому звену она относится.

Фазовый сдвиг, соответствующий неустойчивому аperiodическому звену

$$\psi = -\arctg \frac{\omega T}{-1} = -180^\circ + \arctg \omega T$$

имеет большие абсолютные значения по сравнению с фазовым сдвигом устойчивого аperiodического звена первого порядка (табл. 4.3):  $\psi = -\arctg \omega T$ .

В связи с этим неустойчивые звенья относятся к группе так называемых *неминимально-фазовых* звеньев, поскольку минимальные по абсолютному значению фазовые сдвиги при одинаковых амплитудных характеристиках будут у устойчивых звеньев. К неминимально-фазовым звеньям относятся также устойчивые звенья, имеющие в числителе передаточной функции (в правой части дифференциального уравнения) вещественные положительные корни или комплексные корни с положительной вещественной частью. Например, звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1 - T_1 p}{1 + T_2 p}$$

относится к группе неминимально-фазовых звеньев. Действительно, по сравнению со звеном, имеющим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p},$$

оно будет иметь большие по абсолютной величине фазовые сдвиги, так как

$$|-\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2| > |\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2|$$

при одинаковом виде амплитудно-частотной характеристики.

Напомним, что к минимально-фазовым звеньям относятся такие, у которых корни числителя и знаменателя передаточной функции находятся в левой полуплоскости (см. § 4.3).

К неустойчивым звеньям, кроме рассмотренного выше звена, относятся также следующие звенья с соответствующими передаточными функциями:

квазиконсервативное звено —

$$W(p) = \frac{k}{-1 + T^2 p^2} - \frac{k}{(-1 + Tp)(1 + Tp)}, \quad (4.58)$$

квазиколебательное звено —

$$W(p) = \frac{k}{-1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2}, \quad (4.59)$$

колебательное звено с отрицательным затуханием –

$$W(p) = \frac{k}{1 - 2\zeta T p + T^2 p^2}, \quad (4.60)$$

квазиколебательное звено с отрицательным затуханием –

$$W(p) = \frac{k}{-1 - 2\zeta T p + T^2 p^2}, \quad (4.61)$$

неустойчивое интегрирующее звено –

$$W(p) = \frac{k}{p(-1 + T p)} \quad (4.62)$$

и ряд других звеньев.

Наличие в автоматической системе неустойчивых звеньев вызывает некоторые особенности расчета, которые будут рассмотрены ниже (см. главу 6).

## Глава 5

# СОСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 5.1. Общий метод составления исходных уравнений

Система автоматического управления состоит из взаимосвязанных и взаимодействующих между собой управляемого объекта и управляющего устройства (см. рис. 1.2). Поэтому для получения дифференциального уравнения всей системы необходимо составить уравнения для каждого из них.

При составлении дифференциального уравнения объекта необходимо прежде всего выявить физический закон (или совокупность законов), определяющий его поведение. Таким законом может быть, например, закон сохранения энергии, закон равновесия электродвижущих сил и другие основные законы физики. Математическое выражение соответствующего физического закона и является исходным дифференциальным уравнением управляемого объекта.

Например, для составления дифференциального уравнения электродвигателя, являющегося управляемым объектом для системы стабилизации скорости вращения (рис. 1.14), используется закон равновесия моментов на его валу, который может быть записан в следующем виде:

$$J d\Omega/dt = M_B - M_T,$$

где  $J$  и  $\Omega$  — приведенный момент инерции и угловая скорость двигателя,  $M_B$  — вращающий момент двигателя,  $M_T$  — тормозной момент внешних сил (момент нагрузки), являющийся для данного объекта возмущающим воздействием.

После записи дифференциального уравнения необходимо определить факторы, от которых зависят переменные, входящие в это уравнение. Так для приведенного выше примера необходимо установить, от каких величин зависят и какими выражениями определяются вращающий момент  $M_B$  и тормозной момент  $M_T$ . Нужно также выяснить, является ли приведенный момент инерции постоянной величиной или он изменяется в функции какой-либо переменной.

Дальнейшим шагом является линеаризация полученного уравнения в соответствии с главой 3, если линеаризация вообще допустима. В результате линеаризации получается линейное дифференциальное уравнение управляемого объекта, которое после введения оператора дифференцирования  $p = d/dt$  можно представить в виде

$$C_0(p) y(t) = B_0(p) u(t) + N_0(p) f(t), \quad (5.1)$$

где  $y(t)$  — управляемая величина,  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $f(t)$  — возмущающее воздействие. Здесь без потери общности учтено только одно воздействие  $f(t)$ .

Полином  $C_0(p)$  представляет собой *характеристический полином управляемого объекта*. Он характеризует свободное движение объекта, т. е. его движение при  $u(t) = 0$  и  $f(t) = 0$  под влиянием ненулевых начальных значений  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$ ,  $\ddot{y}(0)$ , ..., вызванных, например, исчезнувшим к моменту времени  $t = 0$  возмущающим воздействием  $f(t)$ . В зависимости от знаков вещественных частей корней этого полинома объект может быть устойчивым или неустойчивым (см. § 4.8).

Полином  $B_0(p)$  определяет влияние управляющего воздействия  $u(t)$  на характер изменения управляемой величины  $y(t)$ .

Полином  $N_0(p)$  определяет влияние возмущающего воздействия  $f(t)$  на характер изменения управляемой величины.

Управляющее устройство, как показано на рис. 1.3; состоит из различных элементов или звеньев. Уравнения некоторых из них известны заранее. Например, для следящей системы (рис. 1.15) датчик угла рассогласования может быть представлен безынерционным звеном, т. е.

$$u_1 = k_1 \vartheta = k_1(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

усилитель — аperiodическим звеном первого порядка, т. е.

$$T_y \dot{u}_2 + u_2 = k_2 u_1$$

и т. д.

Для другой группы элементов дифференциальные уравнения составляются аналогично тому, как это делалось для управляемого объекта.

Совокупность уравнений элементов после введения оператора дифференцирования решается относительно выходной величины управляющего устройства  $u(t)$ . В результате получается дифференциальное уравнение управляющего устройства

$$C_y(p) u(t) = B_y(p) x(t), \quad (5.2)$$

где

$$x(t) = g(t) - y(t) \quad (5.3)$$

— ошибка системы.

Для получения дифференциального уравнения всей системы уравнения (5.1) -- (5.3) решаются относительно ее выходной величины, в качестве которой можно рассматривать как управляемую величину  $y(t)$ , так и ошибку  $x(t)$ .

В первом случае получается дифференциальное уравнение

$$D(p) y(t) = B(p) g(t) + N(p) f(t), \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} D(p) &= B(p) + C(p); & B(p) &= B_0(p) B_y(p); \\ C(p) &= C_0(p) C_y(p); & N(p) &= C_y(p) N_0(p). \end{aligned}$$

Полином  $D(p)$   $n$ -го порядка характеризует свободное движение системы автоматического управления. Он называется *характеристическим полиномом замкнутой системы* и может быть представлен в виде

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad (5.5)$$

где  $a_0, \dots, a_n$  в линеаризованной системе представляют собой постоянные коэффициенты.

Как видно из (5.4), полином  $D(p)$  отличается от характеристического полинома объекта  $C_0(p)$ . Это означает, что и свободное движение системы может существенно отличаться от свободного движения объекта. В частности, если управляемый объект неустойчив, то при правильно выбранных алгоритме управления и параметрах управляющего устройства система в целом будет устойчивой. Наоборот, при неправильном выборе система автоматического управления устойчивым объектом может стать неустойчивой.

Полином  $B(p)$  в уравнении (5.4) определяет влияние задающего воздействия  $g(t)$  на характер изменения управляемой величины  $y(t)$ , причем последняя должна как можно более точно воспроизводить задающее воздействие, т. е. ошибка системы (5.3) должна быть минимальной.

Полином  $N(p)$  определяет влияние возмущающего воздействия  $f(t)$  на характер изменения управляемой величины  $y(t)$ . В уравнении (5.4) учтено только одно возмущение  $f(t)$ . В принципе таких возмущений может быть несколько. Однако вследствие линейности уравнения действует принцип суперпозиции, согласно которому реакция на сумму воздействий равна сумме реакций. Поэтому достаточно рассмотреть методику учета только одного возмущения, а при наличии нескольких возмущений необходимо лишь просуммировать результат.

Во втором случае, когда в качестве выходной величины рассматривается ошибка  $x(t)$ , дифференциальное уравнение системы может быть получено подстановкой в (5.4) выражения для ошибки (5.3):

$$D(p) x(t) = C(p) g(t) - N(p) f(t). \quad (5.6)$$

Из (5.6) вытекает, что ошибка системы автоматического управления может быть представлена в виде суммы двух составляющих. Первая составляющая определяет

ся паличием задающего воздействия  $g(t)$ , а вторая — паличием возмущающего воздействия (в общем случае — возмущающих воздействий). Первая составляющая не равна нулю только в программных и следящих системах. В стабилизирующих системах  $g(t) = \text{const}$ . Поэтому всегда можно выбрать начало отсчета так, чтобы  $g(t) = 0$ .

Согласно (5.4)  $N(p) = C_y(p) N_0(p)$ . Это означает, что выбором структуры и параметров управляющего устройства можно уменьшить вторую составляющую ошибки и тем самым ослабить влияние возмущающего воздействия на объект. Если для какого-либо возмущающего воздействия полином  $N(p) = 0$ , то говорят, что система автоматического управления является инвариантной относительно этого воздействия. Равным образом в программных и следящих системах равенство  $C(p) = 0$  означает, что система инвариантна относительно задающего воздействия.

Уравнения (5.1), (5.4) и (5.6) могут быть также представлены в виде совокупности уравнений первого порядка, называемых уравнениями состояния. Они рассматриваются в § 5.5.

## § 5.2. Передаточные функции систем автоматического управления

Записанные выше дифференциальные уравнения системы автоматического управления (5.4) и (5.6) могут быть получены также на основании понятия передаточной функции, которое было введено в главе 3. Рассмотрим рис. 5.1, где изображена замкнутая система автоматического управления.

Предположим вначале, что чувствительный элемент (ЧЭ) отсоединен от управляемого объекта (УО), и рассмотрим так называемую разомкнутую систему автоматического управления.

Управляющее воздействие, которое прикладывается к управляемому объекту, определяется выражением

$$u(t) = W_y(p) x(t), \quad (5.7)$$

где  $x$  — рассогласование на выходе чувствительного элемента,  $W_y(p)$  — передаточная функция управляющего устройства, которая определяется из дифференциального уравнения управляющего устройства (5.2):

$$W_y(p) = \frac{U(p)}{X(p)} = \frac{B_y(p)}{C_y(p)}. \quad (5.8)$$

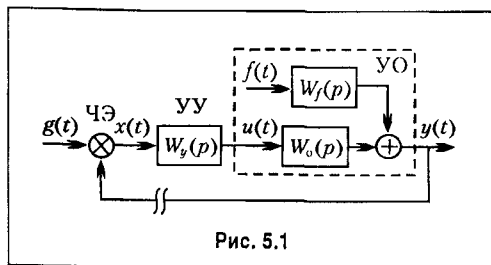


Рис. 5.1

Управляемая величина может быть найдена из выражения

$$y(t) = W_0(p) u(t) + W_f(p) f(t), \quad (5.9)$$

где  $W_0(p)$  — передаточная функция объекта по управляющему воздействию,  $W_f(p)$  — передаточная функция объекта по возмущающему воздействию  $f(t)$ .



Первая из них определяется из дифференциального уравнения объекта (5.1) при  $f(t) = 0$ :

$$W_0(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{B_0(p)}{C_0(p)}, \quad (5.10)$$

а вторая — из того же уравнения при  $u(t) = 0$ :

$$W_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{N_0(p)}{C_0(p)}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.7) в (5.9), получаем

$$y(t) = W(p)x(t) + W_f(p)f(t). \quad (5.12)$$

Здесь введена так называемая *передаточная функция разомкнутой системы*

$$W(p) = W_0(p)W_y(p) = \frac{B_0(p)B_y(p)}{C_0(p)C_y(p)} = \frac{B(p)}{C(p)}. \quad (5.13)$$

Передаточную функцию разомкнутой системы можно определить как отношение изображений управляемой величины и ошибки при нулевых начальных значениях и возмущающих воздействиях, равных нулю:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad (5.14)$$

где  $p = s + j\omega$  — комплексная величина.

Применительно к функциям времени, которые использовались в формулах (5.7), (5.9) и (5.12), передаточная функция разомкнутой системы дает возможность в символической или операторной форме записать дифференциальное уравнение, связывающее управляемую величину  $y(t)$  с ошибкой  $x(t)$  в разомкнутой системе:

$$y(t) = W(p)x(t), \quad (5.15)$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования.

Учитывая (5.13), формулу (5.15) можно также записать в виде

$$C(p)y(t) = B(p)x(t). \quad (5.16)$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет весьма большое значение в теории автоматического управления, так как многие методы анализа и синтеза основаны на использовании именно этой функции.

Рассмотрим теперь замкнутую систему, т. е. предположим, что чувствительный элемент соединен с объектом. При этом можно использовать так называемое уравнение замыкания (5.3):

$$x(t) = g(t) - y(t). \quad (5.17)$$

Решая (5.12) и (5.17) совместно, получаем для управляемой величины

$$y(t) = \frac{W(p)}{1+W(p)}g(t) + \frac{W_f(p)}{1+W(p)}f(t) \quad (5.18)$$

и для ошибки

$$x(t) = \frac{g(t)}{1+W(p)} - \frac{W_f(p)}{1+W(p)} f(t). \quad (5.19)$$

Выражение

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{B(p)}{B(p)+C(p)} \quad (5.20)$$

называется *передаточной функцией замкнутой системы*. Она устанавливает связь между управляемой величиной и задающим воздействием при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$y(t) = \Phi(p)g(t) = \frac{W(p)}{1+W(p)} g(t). \quad (5.21)$$

Выражение

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{C(p)}{B(p)+C(p)} \quad (5.22)$$

называют *передаточной функцией замкнутой системы по ошибке*. Оно дает связь между ошибкой и задающим воздействием в замкнутой системе при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$x(t) = \Phi_x(p)g(t) = \frac{g(t)}{1+W(p)}. \quad (5.23)$$

Как и ранее, формулы (5.18), (5.19), (5.21) и (5.23) представляют собой символическую (операторную) запись дифференциальных уравнений. Более строго передаточную функцию замкнутой системы можно определить как отношение изображений управляемой величины  $Y(p)$  и задающего воздействия  $G(p)$  при нулевых начальных условиях и отсутствии внешних возмущений:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)},$$

а передаточную функцию по ошибке — как отношение изображений ошибки  $X(p)$  и управляющего воздействия  $G(p)$ :

$$\Phi_x(p) = \frac{X(p)}{G(p)},$$

также при нулевых начальных условиях и отсутствии внешних возмущений.

Из формул (5.18) и (5.19) видно, что введение автоматического управления «уменьшает» отклонение управляемой величины под действием возмущающих воз-

действий в  $[1 + W(p)]$  раз по сравнению с отклонением в разомкнутой системе (5.12), когда цепь управления разорвана и автоматическое управление отсутствует.

В результате сравнения формул (5.4), (5.20) и (5.22) видно, что характеристический полином замкнутой системы  $D(p)$  представляет собой полином знаменателя передаточной функции замкнутой системы:

$$D(p) = B(p) + C(p). \quad (5.24)$$

Он равен сумме полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы (5.13).

Приравнивание нулю характеристического полинома (5.24) дает *характеристическое уравнение* замкнутой системы:

$$D(p) = B(p) + C(p) = 0.$$

Оно может быть записано в более удобной форме, которая непосредственно получается из (5.18) или (5.19):

$$1 + W(p) = 0. \quad (5.25)$$

Полином знаменателя передаточной функции разомкнутой системы  $C(p)$  представляет собой характеристический полином разомкнутой системы.

Из рассмотренного видно, что знание передаточной функции разомкнутой системы позволяет найти выражение для ошибки и управляемой величины в функции задающего и возмущающих воздействий, а также характеристическое уравнение системы.

Передаточная функция разомкнутой системы может находиться непосредственно по структурной схеме и передаточным функциям входящих в нее звеньев (см. ниже, § 5.3).

### § 5.3. Использование структурных схем

Составление основных уравнений системы автоматического управления (5.18) и (5.19) во многих случаях может быть значительно облегчено использованием понятия динамических звеньев. Динамические звенья были подробно рассмотрены в главе 4. Часто систему автоматического управления можно рассматривать как комбинацию динамических звеньев с определенными типовыми или не типовыми передаточными функциями. Изображение системы регулирования в виде совокупности динамических звеньев с указанием связей между ними носит название *структурной схемы*. Структурная схема может быть составлена на основе известных уравнений системы, и, наоборот, уравнения системы могут быть получены из структурной схемы. Однако первая задача может иметь различные варианты решения (различные структурные схемы), тогда как вторая задача имеет всегда единственное решение.

Элементы структурных схем приведены в табл. 5.1.

Рассмотрим вначале простейшие сочетания звеньев.

**Последовательное соединение звеньев.** Такое соединение показано на рис. 5.2.

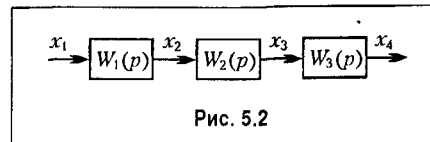

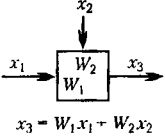
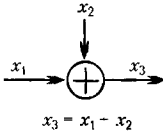
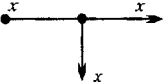
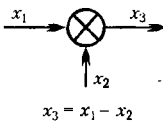


Рис. 5.2

Таблица 5.1

Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение
Звено с одним входом			
Звено с двумя входами	 $x_3 = W_1 x_1 + W_2 x_2$	Сумматор	 $x_3 = x_1 + x_2$
Узел (разветвление)		Элемент сравнения (для отрицательных обратных связей)	 $x_3 = x_1 - x_2$

Нетрудно показать, что результирующая передаточная функция равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W_p(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p), \quad (5.26)$$

или

$$W_p(p) = \frac{B_p(p)}{C_p(p)} = \frac{B_1(p) B_2(p) B_3(p)}{C_1(p) C_2(p) C_3(p)}. \quad (5.27)$$

Следует подчеркнуть, что это справедливо только в том случае, если соединение выхода предыдущего звена со входом последующего не меняет исходных уравнений каждого звена и, следовательно, его передаточной функции. В подобной последовательной цепи звеньев сигнал проходит только в одном направлении.

Если при соединении двух звеньев наблюдается влияние одного звена на другое, в результате чего меняются исходные уравнения какого-либо звена, то такое соединение двух звеньев должно рассматриваться как новое самостоятельное звено со своей передаточной функцией.

**Параллельное соединение звеньев.** Такое соединение звеньев изображено на рис. 5.3.

Так как сигналы на выходе всех звеньев складываются, то результирующая передаточная функция равна сумме передаточных функций:

$$W_p(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p) = \frac{B_1(p)}{C_1(p)} + \frac{B_2(p)}{C_2(p)} + \frac{B_3(p)}{C_3(p)}. \quad (5.28)$$

Здесь остаются справедливыми замечания, сделанные выше относительно взаимного влияния звеньев.

**Обратные связи.** Такое соедипение звеньев изображено на рис. 5.4. Обратная связь может быть положительной, если сигнал  $x_3$ , снимаемый с выхода второго звена, суммируется с сигналом  $x_1$  на входе, и отрицательной, если  $x_3$  вычитается.

Для определения результирующей передаточной функции такой комбинации звеньев запишем следующие очевидные соотношения:

$$x_2 = W_1(p) [x_1 \pm x_3]; \quad x_3 = W_2(p) x_2,$$

где знак плюс относится к положительной, а знак минус — к отрицательной обратной связи.

Решая эти уравнения совместно относительно  $x_2$ , можно найти результирующую передаточную функцию:

$$W_p(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)} \tag{5.29}$$

или

$$W_p(p) = \frac{B_1(p)C_2(p)}{C_1(p)C_2(p) \mp B_1(p)B_2(p)}. \tag{5.30}$$

Здесь знак минус относится к положительной, а знак плюс — к отрицательной обратной связи.

Обратные связи будут рассмотрены подробно в главе, посвященной методам улучшения динамических свойств системы автоматического управления.

При использовании динамических звеньев обычно наиболее просто находится передаточная функция разомкнутой системы (рис. 5.1). Затем по формулам, приведенным в § 5.2, легко паходятся все уравнения системы автоматического управления.

При анализе системы автоматического управления необходимо составить ее так называемую структурную схему, представляющую собой совокупность динамических звеньев со связями между звеньями. Такая структурная схема часто является весьма простой и ее составление не представляет особого труда. Однако в некоторых случаях составление структурной схемы сопряжено с большими трудностями и может быть сделано только на основании детального анализа исходных дифференциальных уравнений системы. В этом случае структурная схема не облегчает нахождения основных уравнений системы, однако и в этом случае она остается весьма ценной, так как на ней в наглядной форме представлены все узлы исследуемой системы и все существующие между ними связи. Это может оказаться полезным во всех дальнейших исследованиях.

На рис. 5.5 в качестве примера приведена структурная схема разомкнутой системы в том случае, когда цепь управления представляет собой простую цепь последо-

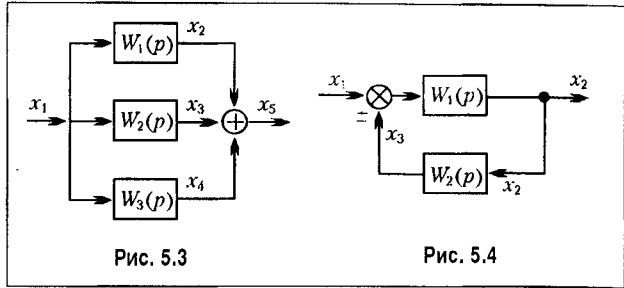


Рис. 5.3

Рис. 5.4

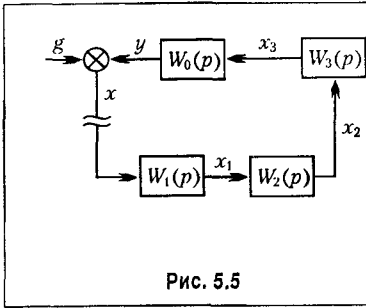


Рис. 5.5

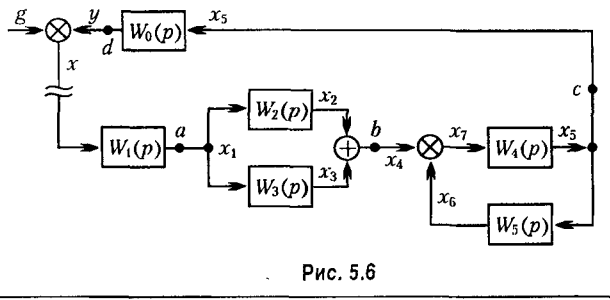


Рис. 5.6

вательно включенных звеньев. В этом случае передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_0(p). \tag{5.31}$$

Здесь  $W_0(p)$ ,  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$  и  $W_3(p)$  представляют собой заданные передаточные функции объекта и отдельных звеньев, входящих в систему управления.

Нетрудно видеть, что для нахождения передаточной функции разомкнутой системы можно разомкнуть систему не обязательно так, как это показано на рис. 5.5, а в произвольном месте.

На рис. 5.6 изображен более сложный пример системы автоматического управления. Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае

$$W(p) = W_1(p)[W_2(p) + W_3(p)] \frac{W_4(p)}{1 + W_4(p)W_5(p)} W_0(p). \tag{5.32}$$

И в этом случае для нахождения передаточной функции разомкнутой системы можно разомкнуть систему в другом месте, например в точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$  или  $d$ .

Для рассмотренных на рис. 5.5 и 5.6 систем, зная передаточную функцию разомкнутой системы  $W(p)$ , легко найти по формулам (5.18) и (5.19) дифференциальные уравнения для управляемой величины и ошибки; записанные в символической форме:

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} g(t), \quad x(t) = \frac{g(t)}{1 + W(p)},$$

где  $g(t)$  — задающее воздействие.

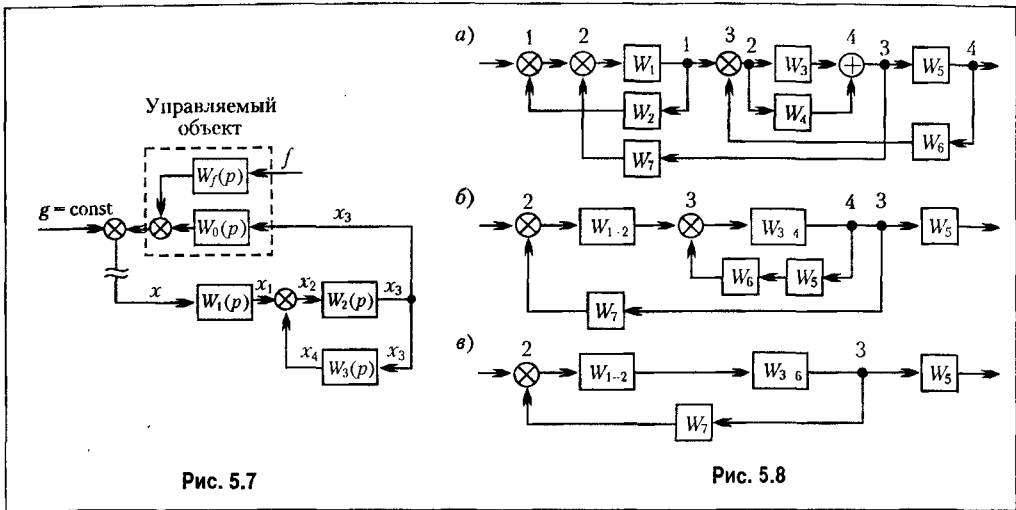
На рис. 5.7 изображена структурная схема системы стабилизации. В этом случае задающее воздействие  $g(t) = \text{const}$ .

Определив передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)} W_0(p), \tag{5.33}$$

можно по формулам (5.18) и (5.19) получить символические записи дифференциальных уравнений для управляемой величины:

$$y(t) = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} f(t),$$



и ошибки:

$$x(t) = -\frac{W_f(p)}{1 + W(p)} f(t),$$

где  $f(t)$  — возмущение, действующее на объект, а  $W_f(p)$  — передаточная функция объекта по возмущению.

В тех случаях, когда структурная схема оказывается сложной и содержит много различных перекрестных связей, можно попытаться ее упростить и свести к простейшему виду, например к изображенной на рис. 5.5. Преобразование структурных схем линейных систем делается на основе некоторых правил, которые даны в табл. 5.2.

На рис. 5.8 изображены этапы упрощения сложной структурной схемы на основе приведенных выше правил. При упрощении введены дополнительные передаточные функции, определяемые выражениями

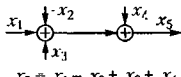
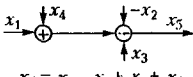
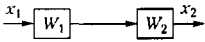
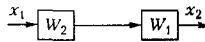
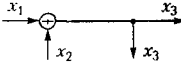
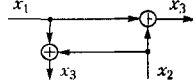
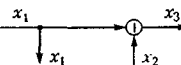
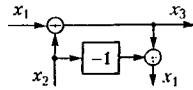
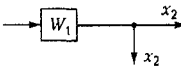
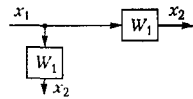
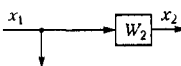
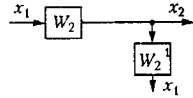
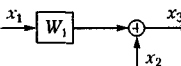
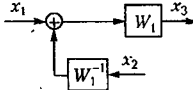
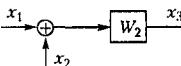
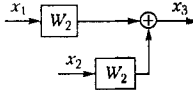
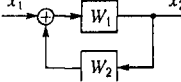
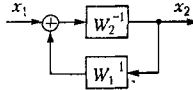
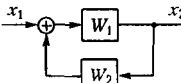
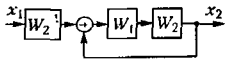
$$W_{1-2} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}; \quad W_{3-4} = W_3 + W_4; \quad W_{3-6} = \frac{W_3 + W_4}{1 + (W_3 + W_4) W_5 W_6}.$$

Полученная в результате преобразования схема (рис. 5.8, в) уже относится к простейшим.

### § 5.4. Уравнения следящей системы

Рассмотрим следящую систему, принципиальная схема которой изображена на рис. 5.9. Задающим устройством является командная ось КО, вращаемая извне по произвольному закону  $\vartheta_1 = \vartheta_1(t)$ . Этот угол должен повторяться на управляемом объекте УО, ось которого является исполнительной осью ИО. Мощность, требуемая для вращения КО, ничтожна, так как с КО сцеплен только движок потенциометра П<sub>1</sub>. Мощность, которую может потреблять для своего вращения управляемый объект,

Таблица 5.2. Правила преобразования структурных и линейных систем

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перестановка сумматоров или элементов срабатывания	 $x_5 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$	 $x_5 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$
Перестановка звеньев		
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перенос узла с входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход звена		
Перенос узла с входа на выход звена		
Перенос сумматора с выхода на вход звена		
Перенос сумматора с входа на выход звена		
Замена звеньев прямой и обратной цепей		
Переход к единичной обратной связи		



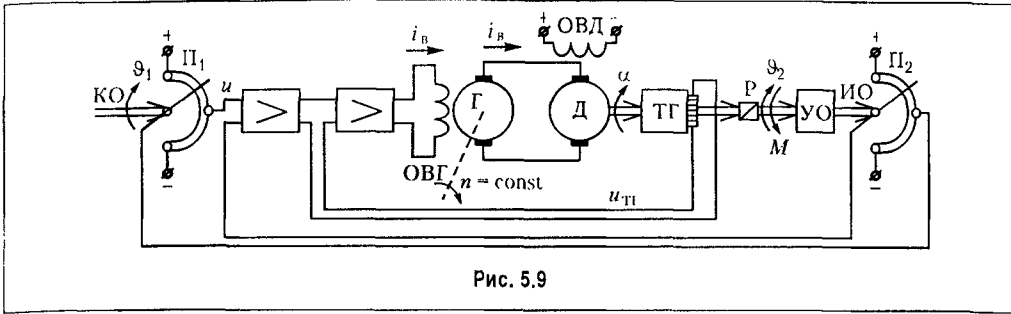


Рис. 5.9

значительно выше и обеспечивается установкой двигателя Д соответствующей номинальной мощности. В этом, а также в дистанционности управления заключается смысл использования подобной следящей системы воспроизведения угла поворота.

Сравнение углов поворота командной и исполнительной осей осуществляется при помощи двух потенциометров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Если углы поворота командной и исполнительной осей не равны  $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$ , то возникает напряжение рассогласования  $u$ , которое поступает на вход первого электронного усилителя. Далее усиленный сигнал после прохождения через два электронных усилителя подводится к обмотке возбуждения генератора ОВГ, привод которого не показан на схеме. Якорь генератора Г соединен с якорем двигателя Д, обмотка которого (ОВД) подключена к постоянному напряжению. В результате при появлении рассогласования  $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$  двигатель начинает вращаться в сторону уменьшения ошибки до согласования двух осей. Задающим воздействием здесь является угол поворота  $\vartheta_1(t)$ . В качестве возмущающего воздействия рассмотрим момент нагрузки  $M(t)$  на ось управляемого объекта.

Для улучшения динамических качеств следящей системы в ней предусмотрена отрицательная обратная связь по напряжению тахогенератора (ТГ).

Будем считать, что все звенья системы линейны, за исключением электромашиного усилителя (генератора), у которого электродвижущая сила  $e$  связана с током возбуждения  $i_B$  пелнейной кривой намагничивания генератора. Однако и здесь при сравнительно небольших напряжениях якоря (примерно до половины номинального) можно зависимость между  $e$  и  $i_B$  считать также линейной.

Таким образом, в рассматриваемой системе отпадает необходимость линеаризации и можно сразу приступить к составлению уравнений. Для этой цели разобьем систему на динамические звенья и найдем их передаточные функции.

**Чувствительный элемент.** Напряжение на выходе первого потенциометра будет  $u_1 = k_1 \vartheta_1$  и на выходе второго  $u_2 = k_1 \vartheta_2$ , где  $k_1$  [ В/рад ] — крутизна, или коэффициент передачи потенциометра. Напряжение на выходе чувствительного элемента равно разности

$$u = u_1 - u_2 = k_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2) = k_1 \vartheta. \quad (5.34)$$

Это дает передаточную функцию чувствительного элемента

$$W_1(p) = k_1. \quad (5.35)$$

**Электронные усилители.** Считая усилители безынерционными, можно записать их передаточные функции в виде

$$W_2(p) = k_2, \quad (5.36)$$

$$W_3(p) = k_3, \quad (5.37)$$

где  $k_2$  и  $k_3$  — коэффициенты усиления по напряжению первого и второго усилителей.

**Обмотка возбуждения генератора.** Дифференциальное уравнение можно записать на основе второго закона Кирхгофа:

$$L_B \frac{di_B}{dt} + r_B i_B = u_{\text{вых}}, \quad (5.38)$$

где  $r_B$  и  $L_B$  — суммарные сопротивление и индуктивность цепи возбуждения с учетом выходного каскада усилителя.

Приведем это уравнение к стандартному виду:

$$(T_B p + 1) i_B = \frac{u_{\text{вых}}}{r_B} = k_4 u_{\text{вых}}, \quad (5.39)$$

где  $T_B = L_B / r_B$  — постоянная времени цепи возбуждения.

Отсюда находим передаточную функцию обмотки возбуждения:

$$W_4(p) = \frac{k_4}{1 + T_B p}. \quad (5.40)$$

**Генератор.** Для прямолинейной части характеристики намагничивания можно положить

$$e = k_5 i_B, \quad (5.41)$$

где  $k_5$  — коэффициент пропорциональности между э. д. с. генератора и током возбуждения в линейной части характеристики. Отсюда получаем передаточную функцию генератора:

$$W_5(p) = k_5. \quad (5.42)$$

**Двигатель.** Так как при фиксированном возбуждении двигатель имеет две степени свободы, то необходимо иметь для него два исходных дифференциальных уравнения. Первое уравнение может быть получено, если записать второй закон Кирхгофа для цепи якоря:

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + r_{\text{я}} i_{\text{я}} + C'_E \Phi \Omega = e. \quad (5.43)$$

Второе уравнение представляет собой закон равновесия моментов на валу двигателя:

$$C'_M \Phi i_{\text{я}} - M = J \frac{d\Omega}{dt}. \quad (5.44)$$

В этих уравнениях  $L_{я}$  и  $r_{я}$  — индуктивность и сопротивление цепи якоря (суммарные),  $C'_E$  и  $C'_M$  — коэффициенты пропорциональности,  $J$  — приведенный к оси двигателя суммарный момент инерции,  $\Omega$  — угловая скорость двигателя,  $\Phi$  — поток возбуждения,  $M$  — момент нагрузки, приведенный к валу двигателя.

Так как поток возбуждения двигателя  $\Phi = \text{const}$ , то можно положить  $C'_E \Phi = C_E$  и  $C'_M \Phi = C_M$ .

Вводя оператор дифференцирования и решая уравнения (5.43) и (5.44) совместно, получаем

$$(T_{я} T_M p^2 + T_M p + 1) \Omega = \frac{e}{C_E} - \frac{r_{я} (1 + T_{я} p) M}{C_E C_M}. \quad (5.45)$$

Здесь введены две постоянные времени двигателя: электромеханическая постоянная времени

$$T_M = \frac{r_{я} J}{C_E C_M} \quad (5.46)$$

и постоянная времени якорной цепи

$$T_{я} = \frac{L_{я}}{r_{я}}. \quad (5.47)$$

Коэффициенты пропорциональности  $C_E$  и  $C_M$  могут быть найдены из соотношений

$$C'_E \Phi = C_E = \frac{U_{\text{ном}}}{\Omega_{\text{хх}}};$$

$$C'_M \Phi = C_M = \frac{M_{\text{ном}}}{I_{я, \text{ном}}},$$

где  $U_{\text{ном}}$  и  $I_{я, \text{ном}}$  — номинальные значения напряжения и якорного тока двигателя,  $M_{\text{ном}}$  и  $\Omega_{\text{хх}}$  — номинальный вращающий момент и скорость идеального холостого хода двигателя.

Учитывая эти соотношения, электромеханическую постоянную времени можно представить в другом виде:

$$T_M = \frac{r_{я}}{r_{\text{ном}}} \frac{\Omega_{\text{хх}}}{M_{\text{ном}}} J = \frac{\Omega_{\text{хх}}}{M_{\text{кз}}} J, \quad (5.48)$$

где  $r_{\text{ном}} = \frac{U_{\text{ном}}}{I_{я, \text{ном}}}$  — номинальное сопротивление якоря двигателя,  $M_{\text{кз}}$  — момент короткого замыкания двигателя (вращающий момент заторможенного двигателя).

В формуле (5.48) перейдем к углу поворота двигателя  $\alpha$ , который связан с угловой скоростью  $\Omega$  зависимостью  $\Omega = p\alpha$ :

$$(T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2 + T_{\text{М}}p + 1)p\alpha = \frac{e}{C_{\text{Е}}} - \frac{r_{\text{я}}(1 + T_{\text{я}}p)M}{C_{\text{Е}}C_{\text{М}}}. \quad (5.49)$$

Из последнего выражения, сравнивая его с формулой (5.12), можно получить передаточную функцию двигателя, связывающую его угол поворота с э. д. с. генератора:

$$W_6(p) = \frac{1}{C_{\text{Е}}} \frac{1}{(1 + T_{\text{М}}p + T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2)}, \quad (5.50)$$

и передаточную функцию по возмущению, связывающую угол поворота  $\alpha$  с моментом  $M$ , приложенным к его оси:

$$W_f'(p) = \frac{r_{\text{я}}}{C_{\text{Е}}C_{\text{М}}} \frac{-(1 + T_{\text{я}}p)}{p(1 + T_{\text{М}}p + T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2)}. \quad (5.51)$$

**Редуктор.** Считая редуктор линейным безынерционным звеном, запишем его передаточную функцию в виде

$$W_7(p) = \frac{1}{i}, \quad (5.52)$$

где  $i > 1$  — передаточное отношение редуктора.

**Тахогенератор.** Передаточная функция тахогенератора, в согласии с § 4.7, соответствует идеальному дифференцирующему звену:

$$W_8(p) = k_8 p, \quad (5.53)$$

где  $k_8$  — коэффициент пропорциональности между э. д. с. генератора и скоростью его вращения.

Все звенья рассматриваемой системы, кроме тахогенератора, включены последовательно. Это отображено на структурной схеме рис. 5.10. Тахогенератор включен в цепь местной обратной связи.

Размыкая главную цепь системы, как показано на рис. 5.10 (так, чтобы не нарушать включения местной обратной связи), получаем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) \frac{W_3(p)W_4(p)W_5(p)W_6(p)}{1 + W_3(p)W_4(p)W_5(p)W_6(p)W_8(p)} W_7(p).$$

После подстановки выражений для передаточных функций звеньев получаем

$$W(p) = \frac{K'}{p[(1 + T_{\text{В}}p)(1 + T_{\text{М}}p + T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2) + k_{\text{сх}}]}. \quad (5.55)$$

Здесь введен общий коэффициент усиления цепи регулирования без учета действия местной обратной связи

$$K' = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{i C_E} \left[ \frac{1}{c} \right] \quad (5.56)$$

и коэффициент усиления по цепи местной обратной связи

$$k_{oc} = \frac{k_3 k_4 k_5 k_8}{C_E} \quad (5.57)$$

Выражение (5.55) можно переписать в ином виде:

$$W(p) = \frac{K}{p(1+ap+bp^2+cp^3)}, \quad (5.58)$$

где

$$a = \frac{T_M + T_B}{1 + k_{oc}}; \quad b = \frac{T_M(T_\gamma + T_B)}{1 + k_{oc}}; \quad c = \frac{T_\gamma T_M T_B}{1 + k_{oc}} \quad (5.59)$$

Результирующий коэффициент усиления основной цепи с учетом действия местной обратной связи, называемый также добротностью по скорости, будет

$$K = \frac{K'}{1 + k_{oc}} = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{i C_E (1 + k_{oc})} \left[ \frac{1}{c} \right] \quad (5.60)$$

Найдем операторные выражения для управляемой величины  $\vartheta_2$  и ошибки  $\vartheta$  по общим формулам (5.8) и (5.9). Для этого необходимо найти передаточную функцию по возмущению  $W_f(p)$ , связывающую угол поворота  $\vartheta_2$  с возмущением  $M$  при разомкнутой главной цепи, по замкнутой цепи местной обратной связи. Из структурной

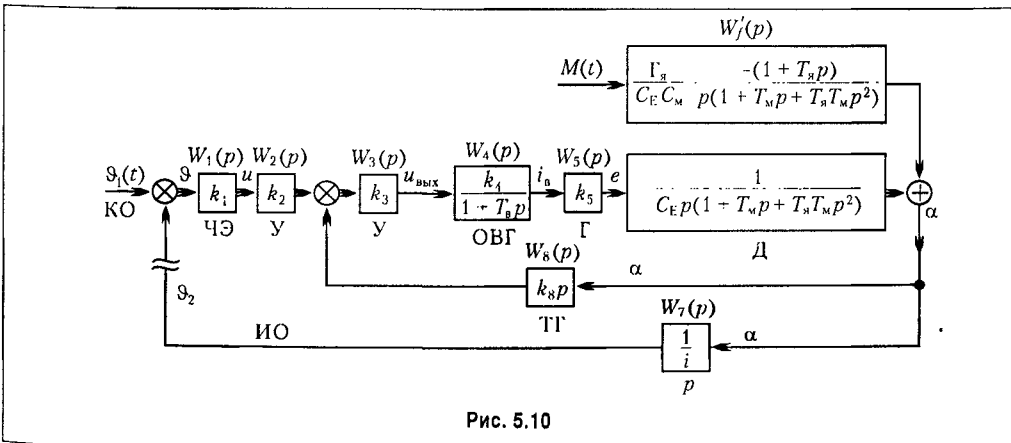


Рис. 5.10

схемы (рис. 5.10) при разомкнутой главной обратной связи и при разомкнутой местной обратной связи

$$\vartheta_2 = \frac{W_f'(p)}{i} M, \quad (5.61)$$

где  $i$  — передаточное отношение редуктора.

При замыкании местной обратной связи в соответствии с формулой (5.29) получаем

$$\vartheta_2 = \frac{W_f'(p)}{i} \frac{1}{1 + W_3(p)W_4(p)W_5(p)W_6(p)W_8(p)} M, \quad (5.62)$$

откуда искомая передаточная функция по возмущению

$$\begin{aligned} W_f(p) &= \frac{W_f'(p)}{i} \frac{1}{1 + W_3(p)W_4(p)W_5(p)W_6(p)W_8(p)} = \\ &= \frac{r_{\text{я}}}{iC_E C_M} \frac{(1 + T_{\text{я}}p)(1 + T_{\text{В}}p)}{[(1 + T_{\text{В}}p)(1 + T_{\text{М}}p + T_{\text{я}}T_{\text{М}}p^2) + k_{\text{ос}}]} = \\ &= \frac{r_{\text{я}}}{iC_E C_M (1 + k_{\text{ос}})} \frac{(1 + T_{\text{я}}p)(1 + T_{\text{В}}p)}{p(1 + ap + bp^2 + cp^3)}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

где  $k_{\text{ос}}$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются формулами (5.57) и (5.59).

Имея теперь значения передаточных функций  $W(p)$  и  $W_f(p)$ , по общим формулам (5.8) и (5.9) находим операторное выражение для управляемой величины

$$\vartheta_2 = \frac{K\vartheta_1}{p(1 + ap + bp^2 + cp^3) + K} - \frac{r_{\text{я}}}{iC_M C_E (1 + k_{\text{ос}})} \frac{(1 + T_{\text{я}}p)(1 + T_{\text{В}}p)M}{p(1 + ap + bp^2 + cp^3) + K} \quad (5.65)$$

и для ошибки

$$\vartheta = \frac{p(1 + ap + bp^2 + cp^3)\vartheta_1}{p(1 + ap + bp^2 + cp^3) + K} + \frac{r_{\text{я}}}{iC_M C_E (1 + k_{\text{ос}})} \frac{(1 + T_{\text{я}}p)(1 + T_{\text{В}}p)M}{p(1 + ap + bp^2 + cp^3) + K}. \quad (5.66)$$

Из (5.66) можно, в частности, получить установившуюся ошибку в неподвижном положении при  $\vartheta_1(t) = \text{const}$  и  $M(t) = M_0 = \text{const}$ . Для этого необходимо положить  $p = 0$ :

$$\vartheta_{\text{ст}} = \frac{r_{\text{я}}M_0}{iC_E C_M (1 + k_{\text{ос}})K} = \frac{r_{\text{я}}M_0}{C_M k_1 k_2 k_3 k_4 k_5} = \frac{M_0}{K_M}. \quad (5.67)$$

Здесь введено понятие так называемой добротности по моменту (или крутизны по моменту), которая равна отношению приведенного к оси двигателя момента нагрузки к возникающей при этом статической (моментной) ошибке:

$$K_M = \frac{M_0}{\vartheta_{\text{ст}}} = \frac{C_M k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{r_{\text{я}}}. \quad (5.68)$$



Обычно уравнения (5.71) и (5.72) записываются в векторно-матричной форме:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u + \bar{m}f; \quad (5.73)$$

$$y = \bar{c}^T \bar{x}, \quad (5.74)$$

где  $\bar{A}$  – матрица размером  $n \times n$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{c}$  – матрицы-столбцы. Матрицу-столбец  $\bar{x}$  называют вектором состояния, хотя в общем случае  $\bar{x}$  не является вектором, так как его компоненты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  могут иметь неодинаковые размерности.

В выборе переменных состояния имеется определенная свобода. Важно только, чтобы они были независимыми. От того, как выбраны переменные, зависит форма уравнений (5.73) и (5.74), т. е. вид входящих в них матриц.

При *нормальной форме* уравнений состояния в качестве переменных состояния выбираются сама управляемая величина и  $n - 1$  ее производные:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad x_3 = \ddot{y}; \dots; \quad x_n = y^{(n-1)}. \quad (5.75)$$

Эту форму можно использовать лишь при отсутствии в правой части уравнения (5.70) производных от  $u$  и  $f$ , т. е. когда оно имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u + m_0 f. \quad (5.76)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n; \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + b_0 u + m_0 f, \end{aligned} \quad (5.77)$$

т. е.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}; \quad \bar{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ m_0 \end{bmatrix}. \quad (5.78)$$

Из (5.75) следует, что  $y = x_1$ . Поэтому в уравнении (5.74)

$$\bar{c}^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (5.79)$$

Достоинством нормальной формы является то, что переменные состояния имеют ясный физический смысл, а некоторые из них (например,  $x_1, x_2$  и  $x_3$ ) могут быть непосредственно измерены датчиками различных типов.



Для получения уравнений состояния в *канонической форме* уравнение объекта (5.70) представляется в виде

$$y = \frac{B_0(p)}{C_0(p)}u + \frac{N_0(p)}{C_0(p)}f. \quad (5.80)$$

Если корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  полинома  $C_0(p)$  действительные однократные, то правая часть (5.80) может быть представлена в виде суммы элементарных дробей:

$$y = \sum_{i=1}^n \frac{R_i u + Q_i f}{p - p_i}, \quad (5.81)$$

где  $R_i$  и  $Q_i$  — коэффициенты разложения.

В качестве переменных состояния выбираются слагаемые суммы (5.81):

$$x_i = \frac{R_i u + Q_i f}{p - p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.82)$$

Отсюда

$$(p - p_i)x_i = R_i u + Q_i f, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\dot{x}_i = p_i x_i + R_i u + Q_i f, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.83)$$

При этом согласно (5.81) и (5.82)

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (5.84)$$

Таким образом, в уравнениях (5.73) и (5.74)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}; \quad \bar{m} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

$$\bar{c}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

Большим достоинством канонической формы является диагональность матрицы  $\bar{A}$ , что существенно упрощает решение уравнения (5.73). Основной недостаток ее состоит в том, что переменные состояния не имеют ясного физического смысла, в результате чего возникает проблема их непосредственного измерения.

Существуют и другие способы выбора переменных состояния, которые здесь не рассматриваются.

Решение векторно-матричного уравнения (5.73) может быть представлено в виде

$$\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{b} u(\tau) d\tau + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{m} f(\tau) d\tau. \quad (5.86)$$

Здесь оно без строгого доказательства построено по аналогии с решением линейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\dot{x} = ax + bu + mf,$$

общий интеграл которого, как известно, определяется по формуле

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + \int_0^t e^{a(t-\tau)}mf(\tau)d\tau.$$

Матричная функция  $e^{\bar{A}t}$  называется *переходной* или *фундаментальной матрицей*. Если уравнения состояния представлены в канонической форме, то матрица  $\bar{A}$  диагональная и имеет вид (5.85). Тогда

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{p_n t} \end{bmatrix}. \quad (5.87)$$

При других формах уравнений состояния для определения фундаментальной матрицы можно использовать известные способы нахождения матричных функций, например, теоремы Кели–Гамильтона или Сильвестра. Можно также использовать формулу

$$e^{\bar{A}t} = L^{-1} \left\{ (p\bar{E} - \bar{A})^{-1} \right\}, \quad (5.88)$$

где  $L^{-1}$  — обратное преобразование Лапласа,  $\bar{E}$  — единичная матрица,  $(p\bar{E} - \bar{A})^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $(p\bar{E} - \bar{A})$ .

При необходимости можно осуществить обратный переход от уравнений состояния к передаточным функциям объекта. Для этого уравнение (5.73) запишем в изображениях по Лапласу:

$$p\bar{X}(p) - \bar{x}(0) = \bar{A}\bar{X}(p) + \bar{b}U(p) + \bar{m}F(p).$$

Отсюда

$$\bar{X}(p) = (p\bar{E} - \bar{A})^{-1} [\bar{x}(0) + \bar{b}U(p) + \bar{m}F(p)]. \quad (5.89)$$

Из (5.89), в частности, при  $u = 0$  и  $f = 0$  получается формула (5.88). Из уравнения (5.74) с учетом (5.89) найдем изображение управляемой величины при нулевых начальных значениях:

$$Y(p) = [\bar{c}^T (p\bar{E} - \bar{A})^{-1} \bar{b}]U(p) + [\bar{c}^T (p\bar{E} - \bar{A})^{-1} \bar{m}]F(p). \quad (5.90)$$

Выражение (5.90) аналогично выражению (5.9). Следовательно, в первых квадратных скобках записана передаточная функция  $W_0(p)$ , а во вторых - передаточная функция  $W_f(p)$ .

При описании свойств объекта уравнениями состояния возникают две проблемы, нетипичные для случая, когда используется одно дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Эти проблемы рассматриваются в следующем параграфе.

## § 5.6. Управляемость и наблюдаемость

Объект называется *полностью управляемым*, если существует такое управляющее воздействие  $u(t)$ , определенное на конечном интервале времени  $t_0 \leq t \leq t_K$ , которое переводит его из любого начального состояния  $\bar{x}(t_0)$  в любое заданное конечное состояние  $\bar{x}(t_K)$ . Очевидно, чтобы осуществить такой перевод, управляющее воздействие должно прямо или косвенно влиять на все переменные состояния.

В тех случаях, когда уравнения состояния представлены в нормальной форме, объект всегда полностью управляемый. Это видно из уравнений (5.77). Управляющее воздействие прямо входит только в последнее уравнение, влияя на переменную  $x_n$ . Но она, в свою очередь, влияет на  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-1}$  — на  $x_{n-2}$  и т. д. В результате переменные  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  косвенно тоже оказываются управляемыми. Однако, как отмечалось выше, нормальная форма существует только при отсутствии в правой части дифференциального уравнения (5.70) производных от  $u$  и  $f$ .

При канонической форме матрица  $A$  диагональная, в результате чего уравнения (5.83) независимы. Поэтому для обеспечения полной управляемости управляющее воздействие должно входить в каждое из этих уравнений, т. е. должно выполняться условие  $R_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Если хотя бы один из этих коэффициентов, например  $R_K$ , равен нулю, то при  $Q_K f = 0$  переменная  $x_K$  будет изменяться по закону

$$x_K(t) = e^{P_K t} x_K(t_0), \quad (5.91)$$

принимая в момент времени  $t_K$  значение

$$x_K(t_K) = e^{P_K t_K} x_K(t_0),$$

в общем случае отличающееся от требуемого значения.

При других формах уравнений состояния, если в них матрица  $\bar{A}$  диагональная, условия полной управляемости получаются столь же просто, как и при канонической форме. В противном случае можно попытаться произвести диагонализацию следующим образом.

Положим, что существует невырожденная матрица  $\bar{S}$  порядка  $n$  такая, что

$$\bar{\xi} = \bar{S}^{-1} \bar{x},$$

где  $\bar{\xi}$  — собственный вектор.

Тогда уравнения (5.73) и (5.74) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}} &= \bar{S}^{-1} \bar{A} \bar{S} \bar{\xi} + \bar{S}^{-1} \bar{b} u + \bar{S}^{-1} \bar{m} f; \\ y &= \bar{c}^T \bar{S} \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

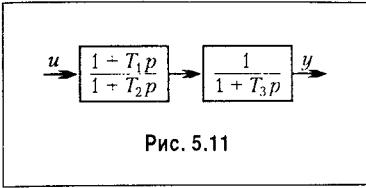


Рис. 5.11

Если собственные значения матрицы  $\bar{A}$ , т. е.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , различны, то матрица  $\bar{S}^{-1}\bar{A}\bar{S}$  будет диагональной. Собственные векторы определяются из уравнений

$$[\bar{A} - \lambda_i \bar{E}] \bar{\xi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Однако диагонализация представляет собой трудоемкую операцию и возможна не всегда. Гораздо удобнее использовать предложенный Р. Калманом критерий управляемости. Применительно к одномерному объекту он гласит, что объект полностью управляемый, если матрица

$$\bar{K}_y = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \bar{A}^2\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}], \quad (5.93)$$

является невырожденной, т. е. если ее ранг равен  $n$ .

На рис. 5.11 в качестве примера изображена структурная схема объекта. Ей соответствует дифференциальное уравнение (5.70)

$$[T_2 T_3 p^2 + (T_2 + T_3)p + 1]y = (T_1 p + 1)u. \quad (5.94)$$

В правой части этого уравнения есть производная от  $u$ . Поэтому нормальная форма уравнений состояния не существует. При использовании канонической формы уравнения (5.83) и (5.84) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{T_2}x_1 + \frac{T_2 - T_1}{T_2(T_2 - T_3)}u; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_3}x_2 + \frac{T_3 - T_1}{T_3(T_3 - T_2)}u; \\ y &= x_1 + x_2. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Соответствующая им схема изображена на рис. 5.12, а.

Если окажется, что  $T_1 = T_3$ , то переменная  $x_2$  станет неуправляемой (рис. 5.12, б). Применительно к исходной схеме (рис. 5.11) равенство  $T_1 = T_3$  означает, что порядок объекта понижается на единицу. Однако это справедливо лишь при нулевых начальных условиях, так как именно при таких условиях определяются передаточные функции. При ненулевых начальных условиях переменная  $x_2$  «не исчезает», а изменяет-

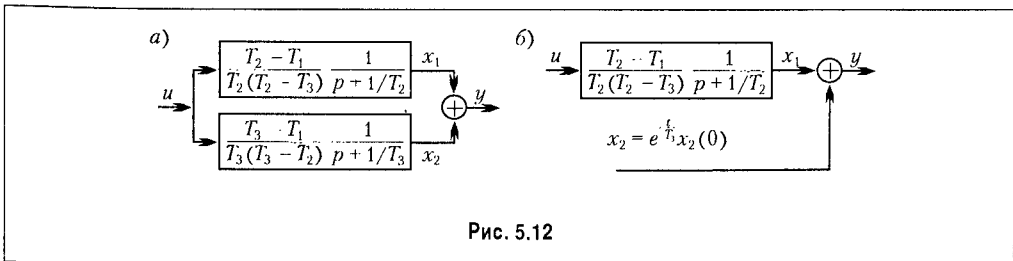


Рис. 5.12

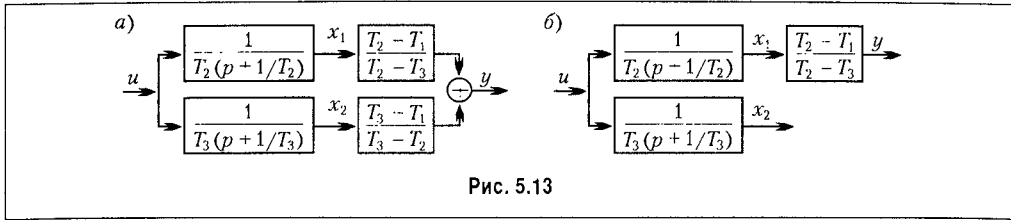


Рис. 5.13

ся по закону (5.91), участвуя в формировании управляемой величины так, как показано на рис. 5.12, б. Следовательно, и порядок объекта остается прежним.

Выбор переменных состояния в виде (5.82) и (5.84) не является единственно возможным. Например, вместо выражения (5.81) можно использовать следующее:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i \frac{R_i c_i^{-1} u + Q_i c_i^{-1} f}{p - p_i}, \quad (5.96)$$

где  $c$  — постоянные коэффициенты.

Тогда вместо (5.83) и (5.84) получим:

$$\dot{x}_i = p_i x_i + R_i c_i^{-1} u + Q_i c_i^{-1} f, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.97)$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \bar{c}^T \bar{x}. \quad (5.98)$$

Один из вариантов выбора коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$  для рассматриваемого примера представлен на рис. 5.13, а, откуда следует, что при любых значениях постоянных времени объект остается полностью управляемым. Однако при  $T_1 = T_3$  переменная  $x_2$  не участвует в формировании управляемой величины  $y$  (рис. 5.13, б), т. е. не наблюдается на выходе объекта.

Управляемый объект (или автоматическая система) называется *полностью наблюдаемым*, если все переменные состояния входят в выражение для управляемой величины. Нетрудно убедиться, что при нормальной форме уравнений состояния это условие выполняется всегда, а при канонической форме — если все коэффициенты  $c_i$  в уравнениях (5.72) или (5.98) отличны от нуля. В общем случае объект является полностью наблюдаемым, если матрица Калмана

$$\bar{K}_{II} = \begin{bmatrix} \bar{c}, & \bar{A}^T \bar{c}, & (\bar{A}^T)^2 \bar{c}, & \dots, & (\bar{A}^T)^{n-1} \bar{c} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

является невырожденной.

Рассмотренный выше пример следует рассматривать лишь как иллюстративный, так как практически добиться идеального совпадения постоянных времени  $T_1$  и  $T_3$  невозможно. Однако он позволяет сделать вывод о том, что управляемость и наблюдаемость — это свойство не самого объекта (или системы), а его математической модели в виде уравнений состояния. При одном выборе переменных состояния обеспечивается полная управляемость, а при другом — полная наблюдаемость. Эти проблемы не возникают, если модель объекта представлена дифференциальным уравнением (5.70).

Понятия управляемости и наблюдаемости важны, например, тогда, когда алгоритм управления формируется не в зависимости от ошибки системы (см. гл.2), а в функции переменных состояния:

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{5.100}$$

Однако в изложенном выше смысле они не всегда совпадают с практическими представлениями. Даже если какая-либо переменная состояния и может быть вычислена по доступным для измерения выходным величинам, обработка этих величин, особенно при наличии помех, может быть сложной. Поэтому практически наблюдаемыми переменными обычно считаются те из них, которые могут быть непосредственно измерены теми или иными датчиками.

### § 5.7. Многомерные системы управления

К *многомерным* относятся системы управления, имеющие несколько управляемых величин  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Это имеет место во многих современных сложных системах. К ним относятся, например, системы стабилизации напряжения и частоты синхронных генераторов, системы управления подвижных объектов, многие системы управления технологическими процессами и др.

Многомерная система предполагает наличие *многомерного объекта управления* (рис. 5.14), который характеризуется существованием нескольких входов (точек приложения управляющих и возмущающих воздействий) и нескольких выходов, определяемых управляемыми величинами.

Многомерный объект описывается системой уравнений, которую удобно представлять в матричной форме.

Введем одностробцовую  $m$ -мерную матрицу управляемых величин

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]^T, \tag{5.101}$$

одностробцовую  $k$ -мерную матрицу управляющих воздействий

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_k]^T, \tag{5.102}$$

и одностробцовую  $l$ -мерную матрицу возмущающих воздействий

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{bmatrix} = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_l]^T, \tag{5.103}$$

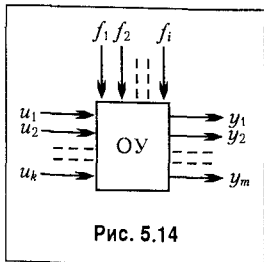


Рис. 5.14

Здесь индексом «Т» обозначена операция транспонирования матрицы.

Если управляемые величины имеют одинаковую физическую размерность и могут трактоваться как проекции некоторого вектора на оси координат, матрица-столбец может отождествляться с этим вектором. Тогда можно говорить о векторе управляемых величин.

Если управляемые величины имеют разную физическую размерность, то переход от матрицы-столбца к вектору в принципе может быть сделан и в этом случае, если ввести в матрицу-столбец весовые коэффициенты, уравнивающие размерности отдельных составляющих. Однако такой переход не является единственным, а имеет бесчисленное количество вариантов.

Аналогичным образом при равенстве физических размерностей отдельных составляющих матриц-столбцов управляющих воздействий и возмущений может быть введен *вектор управления* и *вектор возмущения*. При разных физических размерностях отдельных составляющих матриц-столбцов переход к вектору возможен, но не будет единственным.

Линейаризованные уравнения движения многомерного объекта могут быть записаны в матричном виде:

$$\bar{q}(p)\bar{y} = \bar{r}(p)\bar{u} + \bar{s}(p)\bar{f}. \quad (5.104)$$

Здесь введена квадратная матрица операторных коэффициентов размером  $m \times m$

$$\bar{q}(p) = \begin{bmatrix} q_{11}(p) & q_{12}(p) & \dots & q_{1m}(p) \\ q_{21}(p) & q_{22}(p) & \dots & q_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1}(p) & q_{m2}(p) & \dots & q_{mm}(p) \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

и прямоугольные матрицы операторных коэффициентов размером  $m \times k$  и  $m \times l$

$$\bar{r}(p) = \begin{bmatrix} r_{11}(p) & r_{12}(p) & \dots & r_{1k}(p) \\ r_{21}(p) & r_{22}(p) & \dots & r_{2k}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1}(p) & r_{m2}(p) & \dots & r_{mk}(p) \end{bmatrix}; \quad (5.106)$$

$$\bar{s}(p) = \begin{bmatrix} s_{11}(p) & s_{12}(p) & \dots & s_{1l}(p) \\ s_{21}(p) & s_{22}(p) & \dots & s_{2l}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1}(p) & s_{m2}(p) & \dots & s_{ml}(p) \end{bmatrix}. \quad (5.107)$$

Если в выражениях (5.101) – (5.107) перейти к изображениям Лапласа при нулевых начальных условиях, то матричное уравнение (5.104) может быть записано для изображений в следующем виде:

$$\bar{Q}(p)\bar{Y}(p) = \bar{R}(p)\bar{U}(p) + \bar{S}(p)\bar{F}(p). \quad (5.108)$$

Здесь  $\bar{Y}(p)$ ,  $\bar{U}(p)$  и  $\bar{F}(p)$  — матрицы-столбцы изображений управляемых величин, управляющих воздействий и возмущений.

В уравнение (5.108) входят также квадратная матрица  $\bar{Q}(p)$  и прямоугольные матрицы  $\bar{R}(p)$  и  $\bar{S}(p)$  размерами  $m \times m$ ,  $m \times k$  и  $m \times l$  соответственно.

Если матрица  $\bar{Q}(p)$  неособая, т.е. определитель  $\bar{Q}(p) \neq 0$ , то, умножив левую и правую части (5.108) слева на обратную матрицу  $\bar{Q}^{-1}(p)$  получим

$$\bar{Y}(p) = \bar{W}(p)\bar{U}(p) + \bar{W}_f(p)\bar{F}(p). \quad (5.109)$$

Здесь введены матрицы передаточных функций объекта для управляющих воздействий

$$\bar{W}_0(p) = \frac{\bar{Q}(p)}{|\bar{Q}(p)|} \bar{R}(p) \quad (5.110)$$

и для возмущений

$$\bar{W}_f(p) = \frac{\bar{Q}(p)}{|\bar{Q}(p)|} \bar{S}(p). \quad (5.111)$$

В (5.111) символом  $\bar{Q}(p)$  обозначена матрица, присоединенная для матрицы  $\bar{Q}(p)$ . Формулы (5.109)–(5.111) позволяют получить связь между управляемыми величинами и управляющими и возмущающими воздействиями. Так, например, если  $m = 3$ ,  $k = 2$  и  $l = 0$ , то из (5.109) и (5.110) можно получить для изображений

$$\left. \begin{aligned} Y_1(p) &= W_{11}^0(p)U_1(p) + W_{12}^0(p)U_2(p), \\ Y_2(p) &= W_{21}^0(p)U_1(p) + W_{22}^0(p)U_2(p), \\ Y_3(p) &= W_{31}^0(p)U_1(p) + W_{32}^0(p)U_2(p). \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

На рис. 5.15 изображена условная структурная схема замкнутой многомерной системы. На схеме все указанные символы соответствуют матрицам:  $\bar{g}(t)$  — задающих воздействий,  $\bar{y}(t)$  — управляемых величин,  $\bar{x}(t)$  — ошибок для каждой управляемой величины,  $\bar{u}(t)$  — управляющих воздействий,  $\bar{f}(t)$  — возмущений,  $\bar{W}_0(p)$  — передаточных функций для управлений,  $\bar{W}_f(p)$  — передаточных функций для возмущений. Кроме того, введена прямоугольная матрица передаточных функций управляющего устройства  $\bar{W}_y(p)$ , которая определяет используемые алгоритмы управления. Она дает связь между изображениями управляющих воздействий и ошибок:

$$\bar{U}(p) = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ \vdots \\ U_k(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}(p) & k_{12}(p) & \dots & k_{1m}(p) \\ k_{21}(p) & k_{22}(p) & \dots & k_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{k1}(p) & k_{k2}(p) & \dots & k_{km}(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \vdots \\ X_m(p) \end{bmatrix}. \quad (5.113)$$



Уравнения многомерной системы (рис. 5.15) могут быть получены действиями, аналогичными одномерному случаю (§ 5.2).

Матрица передаточных функций разомкнутой по всем каналам системы

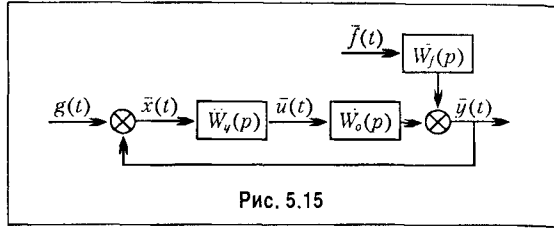


Рис. 5.15

$$\bar{W}(p) = \bar{W}_0(p)\bar{W}_g(p). \quad (5.114)$$

Характеристическая матрица системы представляет собой квадратную матрицу размером  $m \times m$ :

$$\bar{D}(p) = \bar{E} + \bar{W}(p). \quad (5.115)$$

Здесь  $\bar{E}$  — единичная матрица размером  $m \times m$ , т. е. квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а остальные — нулю.

Характеристическое уравнение системы получается приравнением нулю определителя характеристической матрицы:

$$|\bar{D}(p)| = |\bar{E} + \bar{W}(p)| = 0. \quad (5.116)$$

Заметим, что в случае, когда многомерная система представляет совокупность  $m$  независимых одномерных систем, характеристическая матрица будет диагональной и определитель системы тогда равен произведению частных определителей каждой из систем, т. е.  $|\bar{D}(p)| = |D_1(p)| \times \dots \times |D_m(p)|$ . В этом случае общее характеристическое уравнение распадается на  $m$  независимых характеристических уравнений  $|D_i(p)| = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Матрицы передаточных функций замкнутой системы, замкнутой системы по ошибке и замкнутой системы по возмущениям при условии, что матрица  $\bar{D}(p)$  неособая, что означает независимость исходных дифференциальных уравнений, могут быть определены из выражений

$$\bar{\Phi}(p) = \bar{D}^{-1}(p)\bar{W}(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{|\bar{D}(p)|}\bar{W}(p), \quad (5.117)$$

$$\bar{\Phi}_x(p) = \bar{D}^{-1}(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{|\bar{D}(p)|}, \quad (5.118)$$

$$\bar{\Phi}_f(p) = \bar{D}^{-1}(p)\bar{W}_f(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{|\bar{D}(p)|}\bar{W}_f(p). \quad (5.119)$$

Здесь  $\tilde{D}(p)$  — матрица, присоединенная для матрицы  $\bar{D}(p)$ .

Полученные выражения для матриц передаточных функций замкнутой системы позволяют использовать формулы, аналогичные формулам § 5.2, но записанные уже для матриц-столбцов ошибок и управляемых величин. Так, например, для матрицы изображений ошибок имеем

$$\bar{X}(p) = \begin{bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \vdots \\ X_m(p) \end{bmatrix} = \bar{\Phi}_x(p)\bar{G}(p) - \bar{\Phi}_f(p)\bar{F}(p). \quad (5.120)$$

Исходные дифференциальные уравнения многомерной системы могут быть также представлены в виде уравнений состояния:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} + \bar{M}\bar{f}; \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x}; \\ \bar{u} &= \bar{D}\bar{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.121)$$

В этих выражениях  $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  — матрица-столбец переменных состояния,  $n$  — порядок дифференциального уравнения.

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (5.121), имеет вид

$$|\bar{E}p - \bar{A} - \bar{B}\bar{D}| = 0, \quad (5.122)$$

где  $\bar{E}$  — единичная матрица  $n \times n$ .

Выбор переменных состояния для многомерных систем (в отличие от одномерных) представляет собой сложную задачу и здесь не рассматривается.

Условием полной управляемости многомерной системы является невырожденность матрицы Калмана

$$\bar{K}_y = \begin{bmatrix} \bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}^2\bar{B}, \dots, (\bar{A})^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}, \quad (5.123)$$

а условием полной наблюдаемости — невырожденность матрицы

$$\bar{K}_H = \begin{bmatrix} \bar{C}^T, \bar{A}^T\bar{C}^T, (\bar{A}^T)^2\bar{C}^T, \dots, (\bar{A}^T)^{n-1}\bar{C}^T \end{bmatrix}. \quad (5.124)$$

Матрицы (5.93) и (5.99) представляют собой частные случаи матриц (5.123) и (5.124).

## Глава 6

# КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

### § 6.1. Общие сведения об устойчивости

Устойчивость является одним из главных требований, предъявляемых к автоматическим системам.

Для иллюстрации понятия устойчивости обычно приводится следующий пример (рис. 6.1). Состояние равновесия шара в точке  $A_0$  на рис. 6.1, а устойчиво, так как если какие-либо внешние силы выведут шар из этого состояния (например, в точку  $A_1$  или  $A_2$ ), то он возвратится к точке  $A_0$ . Состояние равновесия в точке  $A_0$  на рис. 6.1, б неустойчиво.

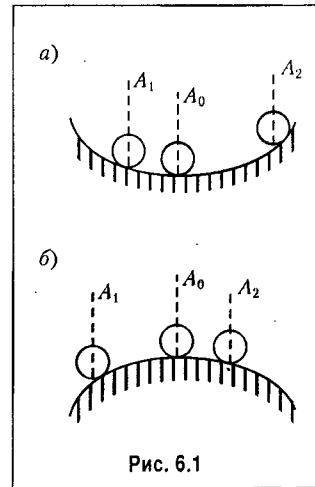
В этом примере, как и в теории устойчивости, полагается, что внешние силы или *возмущения* прекращают свое действие к некоторому моменту времени, который можно принять за начальный момент  $t = 0$ . Такие возмущения часто называют *исчезающими*.

Применительно к системам автоматического управления такое понятие устойчивости можно использовать лишь частично для характеристики свойств их объектов, которые сами по себе могут быть устойчивыми или неустойчивыми. К последним относятся, например, некоторые ракеты.

Автоматические системы отличаются тем, что в них, во-первых, осуществляется специально организованное управление объектом. Благодаря ему система с неустойчивым объектом может стать устойчивой, а система с устойчивым объектом (при неправильном управлении) — неустойчивой. Так, неустойчивое состояние равновесия шара на рис. 6.1, б легкими прикосновениями можно сделать устойчивым, а шар на рис. 6.1, а тем же способом можно раскачать так, что амплитуда колебаний будет увеличиваться.

Во-вторых, при наличии исчезающих задающего и возмущающих воздействий система может иметь много состояний равновесия. Так, система стабилизации напряжения в электрической сети при номинальном токе нагрузки (возмущающем воздействии) поддерживает заданное значение напряжения, а при увеличении тока нагрузки из-за подключения дополнительных потребителей переходит в другое состояние равновесия, отличающееся пониженным значением напряжения.

В-третьих, для ряда систем типичным режимом работы является движение. Так, исполнительная ось следящей системы в процессе слежения движется с постоянной или переменной угловой скоростью, закон изменения которой в общем случае может быть случайным. Состояние равновесия можно рассматривать как простейший частный случай движения.



В классической теории устойчивости исследуется не устойчивость системы как таковой, а устойчивость ее так называемого *невозмущенного движения*.

Ниже будет показано, что для линейных систем с точки зрения устойчивости не имеет значения, какое их движение принимается в качестве невозмущенного. Это может быть, например, состояние равновесия системы стабилизации напряжения при любом (даже не заданном) токе нагрузки или движение исполнительской оси следящей системы по случайному закону. Однако для нелинейных систем это имеет существенное значение, так как одно конкретно заданное невозмущенное движение может оказаться устойчивым, а другое — неустойчивым.

Исчезнувшие к моменту времени  $t = 0$  возмущения вызывают отклонение движения системы от ее невозмущенного движения. Это новое движение называется *возмущенным*.

Строгая математическая теория устойчивости была создана А. И. Ляпуновым и изложена им в работе «Общая задача об устойчивости движения», опубликованной в 1892 г. В ней было определено понятие устойчивости и разработаны методы устойчивости нелинейных систем.

Отправные положения, на которых базируется понятие устойчивости по Ляпунову, рассмотрим на примере системы второго порядка. Для характеристики движения этой системы используем переменные состояния (см. гл. 5)  $x_1$  и  $x_2$ . На плоскости (рис. 6.2) они определяют положение некоторой точки  $M$ . В процессе движения системы  $x_1$  и  $x_2$  изменяются, а точка  $M$  прочерчивает некоторую траекторию.

Положим, что невозмущенному движению соответствует траектория 1, на которой  $x_1(t) = x_1^0(t)$ ,  $x_2(t) = x_2^0(t)$ . Начальными значениями для нее будут  $x_1^0(0) = x_{10}^0$ ,  $x_2^0(0) = x_{20}^0$  (точка  $M_0^0$ ). Пусть исчезнувшие к моменту времени  $t = 0$  возмущения изменили начальное состояние системы и начальными значениями стали  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ , которым соответствует точка  $M_0$ . В результате движение стало возмущенным (кривые 2 или 3). Отклонения начальных значений обозначим  $\Delta x_{10} = x_1(0) - x_{10}^0$ ,

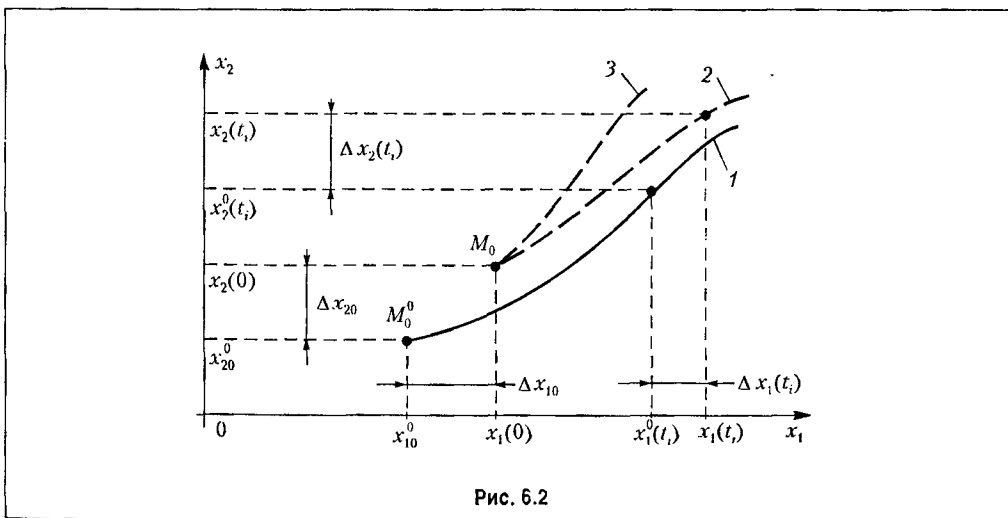


Рис. 6.2

$\Delta x_{20} = x_2(0) - x_{20}^0$ , а текущие отклонения —  $\Delta x_1(t) = x_1(t) - x_1^0(t)$ ,  $\Delta x_2(t) = x_2(t) - x_2^0(t)$ . Последние показаны на рис. 6.2 для некоторого момента времени  $t = t_i$ .

Невозмущенное движение называется устойчивым, если при любых достаточно малых отклонениях  $\Delta x_{10}$  и  $\Delta x_{20}$  текущие отклонения  $\Delta x_1(t)$  и  $\Delta x_2(t)$  при  $t \geq 0$  остаются малыми (кривая 2).

Невозмущенное движение называется неустойчивым, если даже при сколь угодно малых начальных отклонениях хотя бы одно из текущих отклонений при  $t > 0$  не останется малым (кривая 3).

В частном случае, когда в качестве невозмущенного движения принимается состояние равновесия, траектория 1 вырождается в точку  $M_0^0$ , а текущими отклонениями будут  $\Delta x_1(t) = x_1(t) - x_{10}^0$ ,  $\Delta x_2(t) = x_2(t) - x_{20}^0$ .

Для системы  $n$ -го порядка используется  $n$  переменных состояния  $x_i$ , соответственно, столько же начальных и текущих отклонений.

Определим теперь понятие устойчивости более четко.

*Невозмущенное движение называется устойчивым по Ляпунову, если для каждого заранее заданного положительного числа  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), как бы мало оно ни было, можно подобрать другое положительное число  $\eta_i$ , зависящее от  $\varepsilon_i$ , такое, что при любых начальных отклонениях, удовлетворяющих условиям*

$$|\Delta x_{i0}| \leq \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.1)$$

*все отклонения от невозмущенного движения при  $t \geq 0$  удовлетворяют условиям*

$$|\Delta x_i(t)| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

Смысл условий (6.1) рассмотрим на примере системы второго порядка.

Условия (6.2) должны выполняться при  $t \geq 0$ , т. е. относятся и к начальным отклонениям  $\Delta x_{10}$ ,  $\Delta x_{20}$ . Если переменная  $x_2$  не входит в уравнение для  $x_1$  (и наоборот), то отклонение  $\Delta x_1(t)$  зависит только от  $\Delta x_{10}$ , а  $\Delta x_2(t)$  — только от  $\Delta x_{20}$  и для определения устойчивости достаточно использовать только условия (6.2). Однако в общем случае (например, при нормальной форме уравнений состояния) переменная  $x_2$  входит в уравнение для  $x_1$ , а  $x_1$  — в уравнение для  $x_2$ . Поэтому отклонения  $\Delta x_1(t)$  и  $\Delta x_2(t)$  зависят как от  $\Delta x_{10}$ , так и от  $\Delta x_{20}$ . Следовательно, возможно такое сочетание начальных отклонений при  $|\Delta x_{10}| \leq \varepsilon_1$  и  $|\Delta x_{20}| \leq \varepsilon_2$ , что  $|\Delta x_1(t)| > \varepsilon_1$  или  $|\Delta x_2(t)| > \varepsilon_2$ . Условия (6.1), таким образом, устанавливают, что необходимо найти такое сочетание начальных отклонений и их предельных значений, при которых условия (6.2) выполняются.

Понятие устойчивости по Ляпунову широко используется при исследовании нелинейных систем (см. гл. 16 и 17). Для линейных систем имеет смысл, как будет показано ниже, только понятие асимптотической устойчивости.

Уравнения состояния линейной системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{\dot{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}g(t) + \bar{m}f(t); \\ y(t) &= \bar{c}^T \bar{x}(t). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Они по форме аналогичны уравнениям состояния объекта (см. гл. 5), но отличаются от последних структурой матриц, а также тем, что в них вместо управляющего воздействия  $u(t)$  входит задающее воздействие  $g(t)$ . Аналогичным будет и решение этих уравнений:

$$\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} [\bar{b}g(\tau) + \bar{m}f(\tau)] d\tau.$$

Представим его в виде суммы

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_n(t) + \bar{x}_b(t). \quad (6.5)$$

Первое слагаемое

$$\bar{x}_n(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}(0) \quad (6.6)$$

представляет собой общее решение однородного уравнения

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t)$$

и называется *переходной составляющей*. Она характеризует *свободное движение системы*, вызванное ненулевыми начальными значениями переменных состояния  $x_i$  при отсутствии задающего  $g(t)$  и возмущающего  $f(t)$  воздействий.

Второе слагаемое

$$\bar{x}_b(t) = \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} [\bar{b}g(\tau) + \bar{m}f(\tau)] d\tau$$

представляет собой частное решение неоднородного уравнения (6.4) и называется *вынужденной составляющей*. Она характеризует то движение системы, которое ее «вынуждает» совершать задающее и возмущающее воздействия.

Примем в качестве невозмущенного движения (6.5) при  $\bar{x}^0(0) = \bar{x}_0^0$ :

$$\bar{x}^0(t) = \bar{x}_n^0(t) + \bar{x}_b(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}_0^0 + \bar{x}_b(t).$$

По отношению к нему движение (6.5) является возмущенным. Введем, как это уже делалось ранее, отклонения  $\Delta\bar{x}_0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0^0$ ,  $\Delta\bar{x}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}^0(t)$ . Заменяя в (6.5) с учетом (6.6)  $\bar{x}(0)$  и  $\bar{x}(t)$  отклонениями, получим:

$$\Delta\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \Delta\bar{x}_0 + \bar{x}^0(t). \quad (6.7)$$

Таким образом, невозмущенное движение  $\bar{x}^0(t)$  будет устойчивым, если устойчиво свободное движение

$$\Delta\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \Delta\bar{x}_0.$$

Примем теперь в качестве невозмущенного только вынужденное движение  $\bar{x}_в(t)$ . В этом случае из (6.5) сразу следует, что оно устойчиво, если устойчиво свободное движение (6.6).

Сделаем теперь общие для всех линейных систем (замкнутых, разомкнутых или только управляемых объектов) выводы.

1. Устойчивость невозмущенного движения не зависит от того, какое движение системы принято в качестве невозмущенного.
2. Невозмущенное движение системы устойчиво, если устойчиво ее свободное движение.
3. Устойчивость невозмущенного движения не зависит от вида и характера изменения внешних (задающего и возмущающих) воздействий. Этот вывод базируется на двух предыдущих.

В дальнейшем для краткости устойчивость невозмущенного движения будем называть просто устойчивостью системы.

Для получения условий устойчивости удобнее использовать не уравнения состояния (6.4), а дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка (см. гл. 5). Его решение также можно представить в виде суммы переходной  $y_п(t)$  и вынужденной  $y_в(t)$ . С точки зрения устойчивости, как показано выше, нас интересует только переходная составляющая, т. е. общее решение дифференциального уравнения

$$D(p)y(t) = (a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n)y(t) = 0, \quad (6.8)$$

где  $p$  — оператор дифференцирования, а  $D(p)$  — *характеристический полином замкнутой системы*. Для разомкнутой системы (см. гл. 5) характеристическим полиномом будет  $C(p)$ , а для объекта —  $C_0(p)$ .

Решение уравнения (6.8), как известно, представляется в виде

$$y(t) = y_п(t) = C_1e^{p_1t} + C_2e^{p_2t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (6.9)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, зависящие от начальных значений управляемой величины  $y(t)$  и ее производных, а  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — некрратные корни *характеристического уравнения*

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0.$$

Согласно (6.4)  $y(t) = \bar{c}^T \bar{x}(t)$ . Поэтому в соответствии с (6.3) система будет *асимптотически устойчивой*, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_п(t) = 0. \quad (6.10)$$

Это условие выполняется, если каждая из составляющих решения (6.9) с течением времени стремится к нулю.

Вещественным корням  $p_i = \alpha_i$  соответствуют составляющие  $C_i e^{\alpha_i t}$ . При  $\alpha_i < 0$  они затухают, а при  $\alpha_i > 0$  непрерывно нарастают.

Комплексным корням (они могут быть только попарно сопряженными)  $p_{i, i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  соответствует пара составляющих, сумму которых, как известно, можно представить в виде

$$C_i e^{p_i t} + C_{i+1} e^{p_{i+1} t} = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \psi_i),$$

где  $A_i$  и  $\psi_i$  — новые произвольные постоянные. Вызванный этими корнями колебательный процесс затухает при  $\alpha_i < 0$  и расходится при  $\alpha_i > 0$ .

Таким образом, затухание или незатухание переходной составляющей (6.9) зависит *только от знаков* вещественных корней и знаков вещественных частей комплексных корней характеристического уравнения.

*Для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней были отрицательными:*

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом вещественные корни рассматриваются как частный случай комплексных корней, у которых мнимая часть равна нулю.

Нетрудно убедиться, что в этом случае параду с (6.10) выполняются и условия (6.1) и (6.2).

*Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то система неустойчива.*

Представим корни в виде точек на комплексной плоскости  $p_i$  (рис. 6.3). Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни находились на левой полуплоскости (рис. 6.3, а). Если хотя бы один вещественный корень или хотя бы

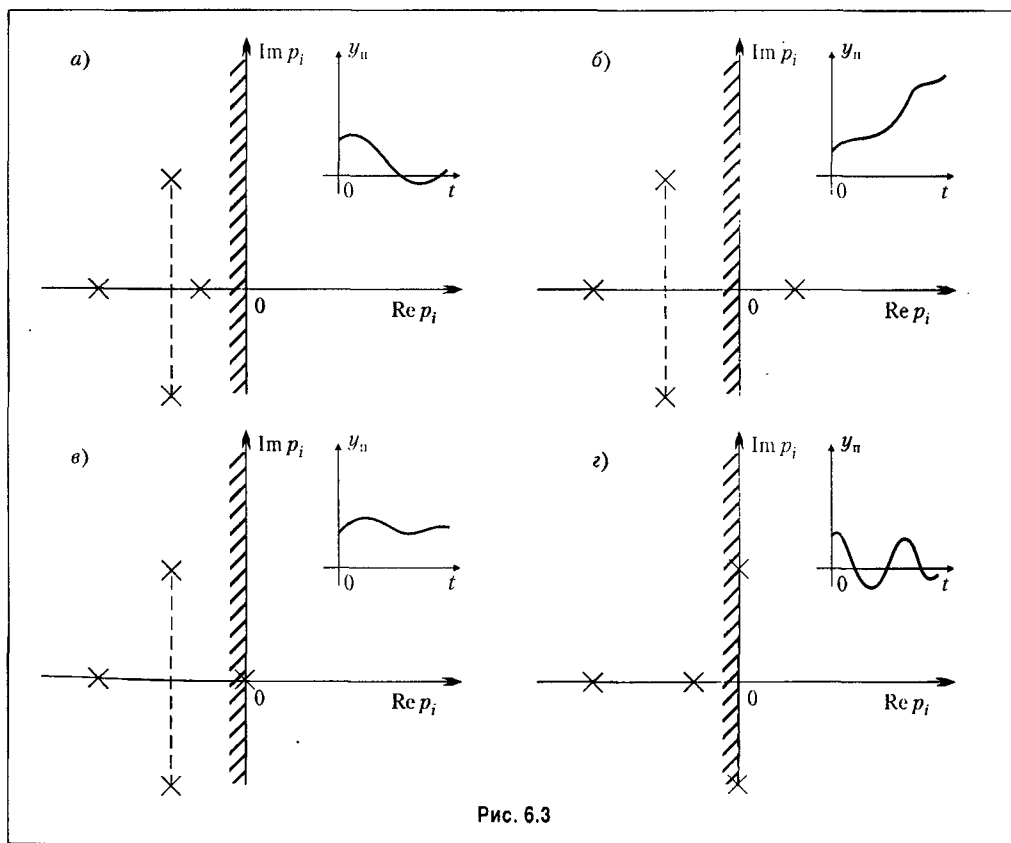


Рис. 6.3



одна пара комплексных корней окажутся на правой полуплоскости (рис. 6.3, б), то система будет неустойчивой. Таким образом, левая полуплоскость является областью устойчивости, а мнимая ось представляет собой ее границу.

В тех случаях, когда на эту границу попадает хотя бы один корень, а все остальные остаются на левой полуплоскости, система оказывается в некотором промежуточном состоянии между устойчивостью и неустойчивостью. Для характеристики этого состояния вводится понятие *границы устойчивости*.

При наличии одного нулевого корня  $p_k = 0$  граница устойчивости называется *апериодической* (рис. 6.3, в). Соответствующая этому корню составляющая решения (6.9)  $C_k e^{p_k t} = C_k$ , т. е. переходная составляющая с течением времени стремится не к нулю, а к  $C_k$ .

В характеристическом уравнении нулевой корень появляется при  $a_n = 0$ . Но чтобы это условие соответствовало аperiодической границе устойчивости, все корни уравнения

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-2} p + a_{n-1} = 0$$

должны находиться на левой полуплоскости.

При наличии пары чисто мнимых корней  $p_{k, k+1} = \pm j\beta_k$  (рис. 6.3, г) граница устойчивости называется *колебательной*. В системе в этом случае устанавливаются незатухающие гармонические колебания с амплитудой  $A_k$  и частотой  $\beta_k$ .

При наличии двух (кратных) нулевых корней  $p_k = p_{k+1} = 0$  соответствующая им сумма составляющих решения (6.9), как известно, представляется в виде

$$(C_k + C_{k+1} t) e^{p_k t} = C_k + C_{k+1} t,$$

т. е. при  $C_{k+1} \neq 0$  она неограниченно увеличивается. Поэтому в данном случае системе следует рассматривать как неустойчивую.

Все сделанные выше выводы об устойчивости относятся к линейным системам. Однако реальные системы практически никогда не бывают строго линейными. Линейные дифференциальные уравнения получаются путем линеаризации (см. гл. 3), в процессе которой малые нелинейные члены отбрасываются.

Линеаризованными уравнениями, или уравнениями первого приближения стали пользоваться еще в середине XIX века, предполагая, что по ним можно судить об устойчивости реальных систем. Строгое доказательство такой возможности было дано Ляпуновым.

Ляпунов показал, что если в характеристическом уравнении нет нулевых и чисто мнимых корней (см. рис. 6.3, а и рис. 6.3, б), то вопрос об устойчивости или неустойчивости реальной системы полностью решается на основе этого уравнения. Однако при наличии таких корней (см. рис. 6.3, в и рис. 6.3, г) поведение реальной системы становится неопределенным, т. е. в зависимости от отброшенных при линеаризации малых нелинейных членов она может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

Примечательно к рис. 6.3, в и рис. 6.3, г это означает, что изображенные на них процессы относятся только к строго линейным системам. Тем не менее само понятие границы устойчивости оказывается полезным и будет использоваться в дальнейшем.

Следует учитывать, что выводы Ляпунова относятся только к описанному в гл. 3 способу линеаризации и справедливы при сделанных там допущениях. Для исследо-

вания устойчивости нелинейных систем общего вида Ляпунов разработал другие методы, которые будут рассмотрены в гл. 16 и гл. 17.

Задача вычисления корней характеристического уравнения любого порядка при помощи средств вычислительной техники решается достаточно просто, если параметры элементов системы (коэффициенты передачи, постоянные времени) и тем самым коэффициенты этого уравнения заданы численно. На практике, однако, обычно пользуются так называемыми *критериями устойчивости*, т. е. правилами, которые позволяют судить об устойчивости без вычисления корней. Ценность этих критериев состоит не только и даже не столько в том, что устраняется необходимость вычисления корней. Они дают возможность установить, как тот или иной параметр и структура системы в целом влияют на устойчивость и как их следует изменить, чтобы система стала устойчивой.

Наиболее простым, хотя и ограниченным по своим возможностям критерием является необходимое условие устойчивости.

*Необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы является положительность коэффициентов ее характеристического уравнения.*

Это значит, что при положительности всех коэффициентов система *может быть устойчивой*, но не исключается возможность ее неустойчивости. Окончательный вывод можно сделать применив, например, критерий Гурвица (см. § 6.2). Если же не все коэффициенты положительны, то система наверняка не может быть устойчивой и никаких дополнительных исследований не требуется.

Необходимость положительности всех коэффициентов характеристического уравнения системы любого порядка устанавливает критерий Гурвица. Для систем первого и второго порядков необходимое условие является и достаточным, в чем нетрудно убедиться прямым нахождением корней уравнения.

Исследование устойчивости любой системы всегда полезно начинать с проверки выполнения необходимого условия. В качестве иллюстрации рассмотрим три примера.

Система второго порядка, характеристическое уравнение которой

$$T_1^2 p^2 + kT_2 p + k - 1 = 0,$$

всегда устойчива при  $k > 1$ .

Система третьего порядка, характеристическое уравнение которой

$$T_1^2 T_3 p^3 + T_1^2 p^2 + (kT_2 - T_3)p + k - 1 = 0,$$

может быть устойчивой, если  $k > 1$ ,  $kT_1 > T_3$ .

Система, характеристическое уравнение которой

$$T_1 T_2 p^4 + (T_1 + T_2)p^3 + p^2 + k = 0,$$

*структурно неустойчива*, так как коэффициент  $a_3 = 0$  и не может стать положительным ни при каких значениях параметров. Для обеспечения устойчивости такой системы необходимо изменить ее структуру, например, за счет введения корректирующих звеньев (см. гл. 10), что приведет к изменению характеристического уравнения.

## § 6.2. Критерий устойчивости Гурвица

Задача отыскания критерия устойчивости для систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, была сформулирована Максвеллом в 1868 году. Эта задача была впервые решена в алгебраической форме Раусом в 1873 году для уравнений четвертой и пятой степени и в 1877 году — полностью.

Поскольку критерий Рауса дан в форме алгоритма, определяющего последовательность математических операций, необходимых для решения задачи, использование его в практике является неудобным. Поэтому большее распространение получил алгебраический критерий устойчивости, сформулированный в 1895 году математиком А. Гурвицем. Этот критерий был найден Гурвицем по просьбе словацкого профессора Стодолы, занимавшегося исследованием процесса регулирования турбин.

Ниже критерий Гурвица приводится без доказательства.

Для характеристического уравнения (6.9) составим квадратную матрицу (таблицу) коэффициентов, содержащую  $n$  строк и  $n$  столбцов:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Эта таблица составляется следующим образом.

По диагонали от левого верхнего до правого нижнего углов выписываются все коэффициенты по порядку от  $a_1$  до  $a_n$ . Каждая строка дополняется коэффициентами с нарастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами. В случае отсутствия данного коэффициента, а также если индекс его меньше нуля или больше  $n$ , на месте его пишется нуль.

Критерий устойчивости сводится к тому, что при  $a_0 > 0$  должны быть больше нуля все  $n$  определители Гурвица, получаемых из квадратной матрицы коэффициентов.

Определители Гурвица составляются по следующему правилу (см. (6.11)):

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad (6.12)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad (6.13)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad (6.14)$$

.....

Последний определитель включает в себя всю матрицу. Но так как в последнем столбце матрицы все элементы, кроме нижнего, равны нулю, то последний определитель Гурвица выражается через предпоследний следующим образом:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (6.15)$$

Однако в устойчивой системе предпоследний определитель тоже должен быть положительным. Поэтому условие положительности последнего определителя сводится к условию  $a_n > 0$ , т. е. к положительности свободного члена характеристического уравнения.

Условия нахождения системы на границе устойчивости можно получить, приравняв нулю последний определитель:  $\Delta_n = 0$ , при положительности всех остальных определителей. Как следует из (6.15), это условие распадается на два условия:  $a_n = 0$  и  $\Delta_{n-1} = 0$ . Первое условие соответствует границе устойчивости первого типа (апериодическая граница устойчивости) и второе — границе устойчивости второго типа (колебательная граница устойчивости).

Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия устойчивости Гурвица, можно получить в виде частных случаев критерии устойчивости для системы первого, второго, третьего, четвертого и более высоких порядков.

### 1. Уравнение первого порядка

$$a_0 p + a_1 = 0.$$

Для этого уравнения критерий Гурвица дает

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0,$$

т. е. коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительными.

### 2. Уравнение второго порядка

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Для этого уравнения критерий Гурвица требует

$$a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0.$$

Последний определитель, как отмечалось выше, сводится к условию положительности последнего коэффициента:  $a_2 > 0$ .

Таким образом, и для уравнения второго порядка необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

### 3. Уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Для этого уравнения получаем условия

$$a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Третий (последний) определитель  $\Delta_3$  дает условие  $a_3 > 0$ . Условие  $\Delta_2 > 0$  при  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$  и  $a_3 > 0$  может выполняться только при  $a_2 > 0$ .

Следовательно, для уравнения третьего порядка уже недостаточно положительности всех коэффициентов характеристического уравнения. Требуется еще выполнение определенного соотношения между коэффициентами:  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ .

## 4. Уравнение четвертого порядка

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

На основании критерия Гурвица можно получить, что для уравнения четвертого порядка, кроме положительности всех коэффициентов, требуется выполнение условия

$$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0.$$

## 5. Уравнение пятого порядка

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0.$$

Для уравнения пятого порядка, кроме положительности всех коэффициентов, должны выполняться еще два условия:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \quad (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0.$$

Как видно, уже для уравнения пятой степени условия устойчивости по критерию Гурвица получаются достаточно громоздкими. Поэтому использование этого критерия практически ограничивается уравнениями четвертого порядка.

Существенным недостатком критерия Гурвица является также то, что для уравнений высоких порядков в лучшем случае можно получить ответ о том, устойчива или неустойчива система автоматического управления. При этом в случае неустойчивости системы критерий не дает ответа на то, каким образом надо изменить параметры системы, чтобы сделать ее устойчивой. Это обстоятельство привело к поискам других критериев, которые были бы более удобными в инженерной практике.

Для иллюстрации применения критерия Гурвица рассмотрим пример на определение устойчивости дистанционной следящей системы. Принципиальная и структурная схемы изображены на рис. 6.4. В качестве чувствительного элемента использованы два сельсина (СД и СП), включенные по трансформаторной схеме. Передаточная функция сельсинов равна коэффициенту передачи схемы:

$$W_1(p) = k_1 = \frac{U_1}{\vartheta} \left[ \frac{B}{\text{рад}} \right],$$

где  $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$  — ошибка, равная разности углов поворота командной и исполнительной осей.

Передаточная функция усилителя:

$$W_2(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{k_2}{1 + T_y p},$$

где  $k_2$  — коэффициент усиления и  $T_y$  — постоянная времени усилителя.

Передаточная функция двигателя (Д):

$$W_3(p) = \frac{\vartheta_D}{U_2} = \frac{k_3}{p(1 + T_M p)},$$

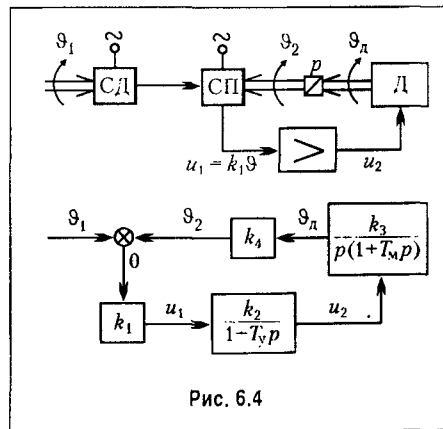


Рис. 6.4

где  $k_3 \left[ \frac{\text{рад}}{\text{В} \cdot \text{с}} \right]$  — коэффициент передачи двигателя по скорости, а  $T_m$  — электро-механическая постоянная времени двигателя совместно с оконечным каскадом усилителя.

Передающая функция редуктора ( $P$ ) равна его коэффициенту передачи, определяемому передаточным отношением:

$$W_4(p) = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = k_4.$$

Так как цепь управления состоит из включенных последовательно звеньев, то передаточная функция разомкнутой цепи будет равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)},$$

где  $K = k_1 k_2 k_3 k_4 \left[ \frac{1}{\text{с}} \right]$  — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи.

Характеристическое уравнение:

$$1 + W(p) = 0.$$

Послед подстановки  $W(p)$  получаем

$$T_y T_m p^3 + (T_y + T_m) p^2 + p + K = 0.$$

В данном случае характеристическое уравнение имеет третий порядок. Нетрудно видеть, что условие положительности всех коэффициентов выполняется всегда, если выполнено условие  $K > 0$ , что будет при правильном согласовании направления вращения двигателя со знаком рассогласования.

Дополнительное условие  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ , накладываемое на коэффициенты характеристического уравнения, сводится при подстановке значений коэффициентов ( $a_0 = T_y T_m$ ;  $a_1 = T_y + T_m$ ;  $a_2 = 1$  и  $a_3 = K$ ), к неравенству

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m},$$

которое и является условием устойчивости рассматриваемой системы.

Из этого неравенства, в частности, можно заметить, что увеличение каждой постоянной времени сказывается отрицательно на устойчивости системы, так как при

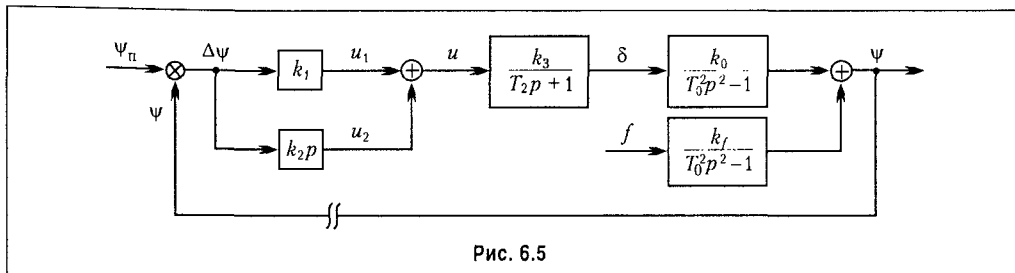


Рис. 6.5

этом снижается предельное значение общего коэффициента усиления  $k$ , при котором система еще остается устойчивой.

В качестве еще одного примера рассмотрим один из каналов системы угловой стабилизации ракеты, структурная схема которого изображена на рис. 6.5. Отклонение угла рыскания  $\psi$  (управляемой величины) от его заданного (программного) значения  $\psi_n$  измеряется датчиком угла (потенциометрическим, индукционным или др.), установленным на гиросtabilизированной платформе. Передаточная функция датчика

$$W_1(p) = \frac{U_1}{\Delta\psi} = k_1.$$

Для формирования алгоритма управления дополнительно устанавливается датчик угловой скорости (ДУС). Напряжение на его выходе пропорционально производной от отклонения. Передаточная функция ДУС в идеальном случае

$$W_2(p) = \frac{U_2}{\Delta\dot{\psi}} = k_2 p.$$

В усилительно-преобразовательном устройстве напряжения  $u_1$  и  $u_2$  суммируются:

$$u = u_1 + u_2 = (k_1 + k_2 p)\Delta\psi.$$

Таким образом, в данной системе осуществляется управление по отклонению  $\Delta\psi$  и производной от отклонения (см. § 2.2). Передаточная функция усилительно-преобразовательного устройства

$$W_3(p) = \frac{U}{\Delta\psi} = k_1 + k_2 p = k_1(T_1 p + 1),$$

где  $T_1 = k_2/k_1$ .

Усиленное до необходимого уровня (усилитель на схеме не показан) напряжение  $u$  подается на рулевой привод. Его передаточная функция

$$W_4(p) = \frac{\delta}{U} = \frac{k_3}{T_2 p + 1},$$

где  $\delta$  — угол отклонения управляющих органов ракеты.

Передаточная функция управляемого объекта (ракеты) по управляющему воздействию в простейшем случае может быть, например, такой:

$$W_0(p) = \frac{\psi}{\delta} = \frac{k_0}{T_0^2 p^2 - 1}.$$

Передаточная функция объекта по возмущению

$$W_f(p) = \frac{\psi}{F} = \frac{k_f}{T_0^2 p^2 - 1}.$$

Корни характеристического уравнения объекта

$$\begin{aligned} T_0^2 p^2 - 1 &= 0 \\ p_{1,2} &= \pm 1/T_0. \end{aligned}$$

Наличие положительного корня  $p_1 = +1/T_0$  свидетельствует о том, что сам объект неустойчив, или, как говорят, статически неустойчив. Он ведет себя подобно паре на рис. 6.1, б. Иными словами, при малейшем отклонении, вызванном, например, возмущающим воздействием, стартующая вертикально ракета без системы автоматического управления опрокидывается.

Передаточная функция разомкнутой системы равна произведению передаточных функций, входящих в контур от точки размыкания до точки замыкания (см. рис. 6.5):

$$W(p) = W_3(p)W_4(p)W_0(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_0^2 p^2 - 1)} = \frac{B(p)}{C(p)},$$

где  $K = k_1 k_3 k_0$  — коэффициент передачи разомкнутой системы. Передаточная функция  $W_f(p)$  в указанный контур не входит.

В характеристическом полиноме разомкнутой системы  $C(p)$  благодаря объекту также имеется положительный корень  $p_1 = +1/T_0$ , т. е. разомкнутая система неустойчива.

Характеристическое уравнение замкнутой системы можно получить, приравняв нулю сумму полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы:

$$D(p) = B(p) + C(p) = T_0^2 T_2 p^3 + T_0^2 p^2 + (k T_1 - T_2) p + K - 1 = 0.$$

Коэффициенты  $a_0 = T_0^2 T_2$  и  $a_1 = T_0^2$  всегда положительны. Положительность коэффициентов  $a_2 = k T_1 - T_2$  и  $a_3 = K - 1$  обеспечивается, если  $k T_1 > T_2$ ,  $K > 1$ . Это и есть необходимые условия устойчивости. Для системы третьего порядка должно выполняться дополнительное условие  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ , которое сводится к неравенству  $T_1 > T_2$ . Таким образом, необходимыми и достаточными условиями устойчивости замкнутой системы будут:

$$k T_1 > T_2; \quad K > 1; \quad T_1 > T_2.$$

Первое из них при выполнении двух других всегда выполняется. Следует обратить внимание на то, что если бы управление осуществлялось только по отклонению ( $K_2 = 0$ ), то  $T_1 = 0$ , а коэффициент  $a_2 = -T_2 < 0$ . В этом случае замкнутая система была бы неустойчивой при любых значениях  $K$ ,  $T_2$  и  $T_0$ , т. е. являлась бы *структурно неустойчивой*.

При  $K = 1$  и  $k T_1 > T_2$  система находится на апериодической границе устойчивости, а при  $T_1 = T_2$  и  $K > 1$  — на колебательной границе.

### § 6.3. Построение областей устойчивости. D-разбиение

При расчете и проектировании системы автоматического управления иногда бывает необходимым исследовать влияние ее различных параметров на устойчивость. Для решения этой задачи служит построение областей устойчивости, т. е. определение таких областей значений параметров, при которых система оказывается устойчивой.

Различают построение областей устойчивости в плоскости одного параметра и в плоскости двух параметров. Ниже будет рассматриваться только построение обла-



тей устойчивости в плоскости двух параметров. Для построения таких областей на плоскости двух параметров  $A$  и  $B$  необходимо нанести линии, соответствующие границе устойчивости. Тогда область, ограниченная этими линиями, будет представлять собой область устойчивости. Для того чтобы окончательно убедиться в этом необходимо для любой точки, лежащей внутри полученной области, по какому-либо критерию проверить устойчивость. Если устойчивость для этой точки будет иметь место, то она будет выполняться и для всех других точек, лежащих в этой области.

Для построения границ области устойчивости используются все три признака существующих типов границы устойчивости. Для границы устойчивости первого типа это будет равенство  $a_n = 0$ . Для границы устойчивости третьего типа — равенство  $a_0 = 0$ .

Для получения условия, соответствующего границе устойчивости второго типа (колебательной), можно использовать различные критерии устойчивости.

Для систем, описываемых уравнением не выше четвертого порядка, может применяться критерий Гурвица. В этом случае колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица:  $\Delta_{n-1} = 0$ .

Для уравнений высокого порядка условия, соответствующие колебательной границе устойчивости, могут быть получены следующим образом.

Рассмотрим отдельно левую часть характеристического уравнения (6.9), которая представляет собой характеристический полином замкнутой системы:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

Если система находится на колебательной границе устойчивости, то, как было показано выше, два корня этого полинома попадают на ось мнимых:  $p_{1,2} = \pm j\omega$ , где  $\omega$  — угловая частота колебаний, соответствующая чисто мнимому корню. Тогда *характеристический комплекс*

$$D(j\omega) = 1 + W(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = 0. \quad (6.16)$$

Предположим, что два рассматриваемых параметра системы управления  $A$  и  $B$  входят линейно в характеристический комплекс. Тогда для границы устойчивости колебательного типа уравнение  $D(j\omega, A, B) = 0$  распадается на два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega, A, B) &= 0; \\ Y(\omega, A, B) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Два последних выражения представляют собой параметрические уравнения границы устойчивости при соблюдении дополнительного условия отрицательности вещественных частей всех остальных корней, кроме чисто мнимых. Полная же совокупность всех кривых на плоскости параметров, разбивающая всю плоскость на области с определенным распределением корней, называется *D-разбиением* плоскости параметров. Обычно практическое значение имеет лишь часть кривых *D-разбиения*, соответствующая границе устойчивости.

Для упрощения выделения границ области устойчивости из всего комплекса кривых *D-разбиения* на плоскости двух параметров вводится штриховка этих кривых, производимая по правилу, которое будет приведено без доказательства. Перемеща-

ясь вдоль кривой в сторону увеличения  $\omega$ , надо штриховать ее с левой стороны, если будет положительным определитель, составленный из частных производных (6.17):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial A} & \frac{\partial X}{\partial B} \\ \frac{\partial Y}{\partial A} & \frac{\partial Y}{\partial B} \end{vmatrix} \quad (6.18)$$

Если же определитель отрицателен, то кривую надо штриховать справа. При соблюдении этого правила штриховка будет направлена внутрь области устойчивости, если параметр  $A$  отложен по оси абсцисс вправо, а параметр  $B$  — по оси ординат вверх.

В качестве иллюстрации рассмотрим следящую систему, схема которой изображена на рис. 6.4. Для этой системы было получено характеристическое уравнение

$$T_y T_M p^3 + (T_y + T_M) p^2 + p + K = 0.$$

Предположим, что электромеханическая постоянная времени двигателя  $T_M$  является заданной величиной и требуется построить область устойчивости в плоскости двух параметров: общего коэффициента усиления  $k$  и постоянной времени усилителя  $T_y$ .

Характеристический комплекс

$$D(j\omega) = K + j\omega - \omega^2 (T_y + T_M) - j\omega^3 T_y T_M.$$

Уравнения, определяющие границу устойчивости,

$$X = K - \omega^2 (T_y + T_M) = 0; \quad Y = \omega - \omega^3 T_y T_M = 0.$$

Решая их совместно относительно параметров  $K$  и  $T_y$ , получим

$$T_y = \frac{1}{T_M \omega^2}; \quad K = \frac{1}{T_M} + T_M \omega^2.$$

По полученным данным строим кривую  $D$ -разбиения (рис. 6.6). Кривая имеет гиперболический вид с асимптотами  $K = \frac{1}{T_M}$  при  $\omega = 0$  и  $T_y = 0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Для нанесения штриховки найдем знак определителя (6.18). Необходимые для этого частные производные будут при  $A = K$  и  $B = T_y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial K} &= 1; & \frac{\partial X}{\partial T_y} &= -\omega^2; \\ \frac{\partial Y}{\partial K} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial T_y} &= -\omega^3 T_M. \end{aligned}$$

Определитель получается равным

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & -\omega^3 T_M \end{vmatrix} = -\omega^3 T_M.$$

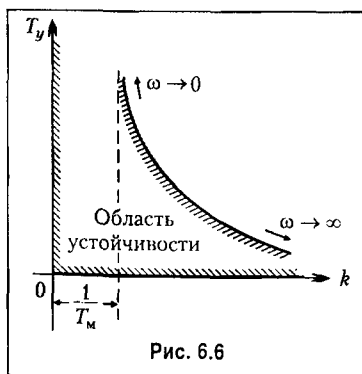


Рис. 6.6

При изменении частоты в пределах от 0 до  $\infty$  определитель будет отрицательным. Поэтому при движении по полученной кривой сверху вниз (от 0 до  $\infty$ ) необходимо штриховать область, лежащую справа от кривой.

Область устойчивости практически уже сформировалась. Так как параметры  $K$  и  $T_y$  должны быть положительными, область устойчивости будет ограничиваться полученной кривой и положительными направлениями осей  $K$  и  $T_y$ .

Это можно показать и на основе использования двух оставшихся условий устойчивости. Граница устойчивости первого типа будет получена, если приравнять нулю свободный член,  $a_n = 0$ , что дает условие  $K = 0$ . Это условие выполняется на оси ординат. Граница устойчивости третьего типа получается при  $a_0 = 0$ , что дает условие  $T_y = 0$ . Это условие выполняется на оси абсцисс.

Таким образом, область устойчивости в плоскости параметров  $K$  и  $T_y$  получена окончательно. Для любых значений  $K$  и  $T_y$  можно сразу ответить, устойчива или неустойчива система, смотря по тому, попадает или не попадает точка, определяемая этими значениями параметров, в область устойчивости.

Для системы угловой стабилизации, структурная схема которой изображена на рис. 6.5, область устойчивости представлена на рис. 6.7.

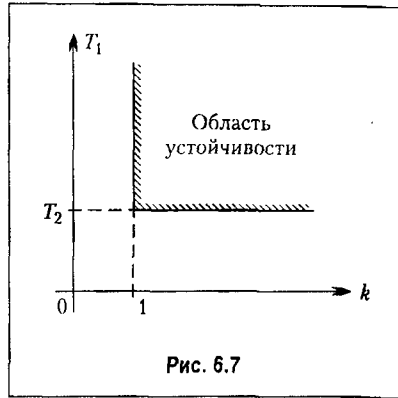


Рис. 6.7

## § 6.4. Критерий устойчивости Найквиста

В 1932 году Найквист предложил принципиально новый критерий устойчивости. В отличие от критерия Гурвица, который устанавливает принадлежность корней к левой полуплоскости для *любого* полинома или алгебраического уравнения, критерий Найквиста предназначен для исследования устойчивости только *замкнутых систем*.

Критерий Найквиста — это графоаналитический критерий. Характерной его особенностью является то, что вывод об устойчивости или неустойчивости *замкнутой системы* делается в зависимости от вида амплитудно-фазовой (а. ф. х.) или логарифмических частотных характеристик (л. ч. х.) *разомкнутой системы*.

Помимо исследования устойчивости по виду указанных характеристик можно оценить и некоторые качественные показатели замкнутой системы, например, запас устойчивости. Более того, появляется возможность указать, как и за счет каких средств неустойчивая замкнутая система может быть сделана устойчивой и как можно повысить качество устойчивой замкнутой системы.

В главе 5 было введено понятие передаточной функции разомкнутой системы. Эта функция может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n}, \quad (6.19)$$

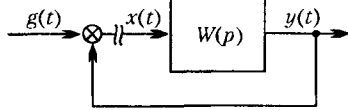


Рис. 6.8

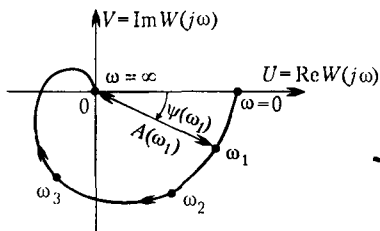


Рис. 6.9

причем степень числителя не может быть выше степени знаменателя,  $m \leq n$ . При подстановке  $p = j\omega$  получается *частотная передаточная функция разомкнутой системы*

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{C(j\omega)} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (6.20)$$

Частотная передаточная функция разомкнутой системы представляет собой комплексное число. На основании рассмотренных в главе 4 частотных характеристик смысл ее можно объяснить следующим образом (рис. 6.8). Представим себе систему управления в разомкнутом состоянии в виде некоторого звена с передаточной функцией  $W(p)$ . Если на вход этого звена подавать сигнал ошибки в виде гармонических колебаний  $x = X_{\max} \sin \omega t$  с амплитудой  $X_{\max}$  и частотой  $\omega$ , то в установившемся режиме на выходе управляемая величина будет изменяться также по гармоническому закону  $y = Y_{\max} \sin(\omega t + \psi)$  с амплитудой  $Y_{\max}$ , той же частотой и фазовым сдвигом  $\psi$ . Модуль частотной передаточной функции представляет собой отношение амплитуд выходной и входной величин:

$$A(\omega) = \frac{Y_{\max}}{X_{\max}}, \quad (6.21)$$

а аргумент — сдвиг фаз  $\psi$ . При постоянном значении  $X_{\max}$  амплитуда  $Y_{\max}$  зависит от частоты входного сигнала:  $Y_{\max} = Y_{\max}(\omega)$ . От частоты зависит и сдвиг фаз, или фаза:  $\psi = \psi(\omega)$ .

Если изменять частоту входного воздействия от 0 до  $\infty$  и откладывать на комплексной плоскости точки, соответствующие получающимся комплексным числам, то геометрическое место этих точек образует амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы (рис. 6.9).

На амплитудно-фазовой характеристике для удобства могут отмечаться точки, соответствующие определенным частотам, например  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и т. д. Вдоль кривой иногда рисуют стрелки, которые показывают направление возрастания частоты  $\omega$  (рис. 6.9).

В реальных системах всегда удовлетворяется условие  $m < n$ . Поэтому при частоте, стремящейся к бесконечности, модуль частотной передаточной функции стремится к нулю и точка с частотой  $\omega \rightarrow \infty$  попадает в начало координат.

Для построения а. ф. х. в выражении (6.20) можно выделить вещественную  $U(\omega)$  и мнимую  $V(\omega)$  части. Однако, если порядок системы  $n > 2$ , удобнее использовать

Таблица 6.1

Сомножитель	$A(\omega)$	$\psi(\omega)$
$k$	$k$	0
$p$	$\omega$	$\frac{\pi}{2}$
$p^2$	$\omega^2$	$\pi$
$Tp + 1$	$\sqrt{1+T^2\omega^2}$	$\arctg \omega T$
$Tp - 1$	$\sqrt{1+T^2\omega^2}$	$\pi - \arctg \omega T$
$1 - Tp$	$\sqrt{1+T^2\omega^2}$	$-\arctg \omega T$
$T^2p^2 + 1$	$ 1 - T^2\omega^2 $	0, $\omega < \frac{1}{T}$ ; $\pi$ , $\omega > \frac{1}{T}$
$T^2p^2 + 2\xi Tp + 1$	$\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$	$\arctg \frac{2\xi\omega T}{1 - T^2\omega^2}$ , $\omega < \frac{1}{T}$ ; $\pi - \arctg \frac{2\xi\omega T}{T^2\omega^2 - 1}$ , $\omega \geq \frac{1}{T}$

полярные координаты, определяя модуль  $A(\omega)$  и фазу  $\psi(\omega)$ . С этой целью передаточную функцию (6.19) целесообразно представить в так называемой стандартной форме:

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{K(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)(\tau_3^2 p^2 + 2\xi_3 \tau_3 p + 1) \dots}{p^2 (T_1 p + 1)(T_2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1)(T_3 p - 1) \dots} \quad (6.22)$$

Коэффициент  $K$  называется *коэффициентом передачи разомкнутой системы*, а постоянные  $\tau_i$  и  $T_i$  — *постоянными времени*. Коэффициенты  $\xi_i$  могут принимать любые значения от 0 до 1.

Соответствующая (6.22) частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)[(1 - \tau_3^2\omega^2) + 2j\xi_3\tau_3\omega] \dots}{(j\omega)^2 (1 + j\omega T_1)[(1 - T_2^2\omega^2) + 2j\xi_2 T_2\omega](-1 + j\omega T_3) \dots} \quad (6.23)$$

При таком представлении модуль  $A(\omega) = |W(j\omega)|$  равен отношению модулей числителя и знаменателя, а аргумент (фаза)  $\psi(\omega)$  — разности их аргументов. В свою очередь, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов. Модули и аргументы, соответствующие сомножителям передаточной функции (6.22), приведены в табл. 6.1.

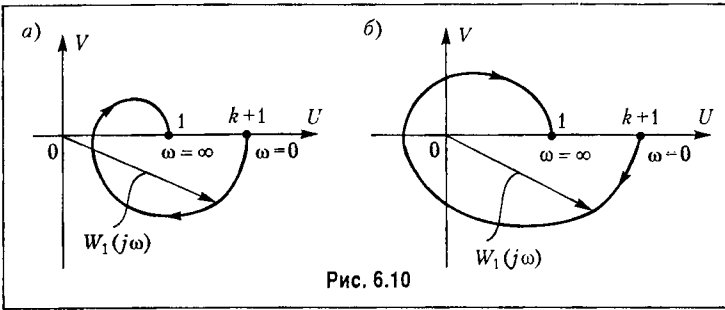


Рис. 6.10

Сформулируем требования к а. ф. х. разомкнутой системы, при выполнении которых замкнутая система будет устойчивой.

Ограничим вначале задачу и будем рассматривать только устойчивые в разомкнутом состоянии

системы. Это значит, что в характеристическом полиноме разомкнутой системы  $C(p)$ , представляющем собой знаменатель передаточной функции (6.22), нет нулевых корней ( $r = 0$ ), а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Для этого, как показано в § 6.2, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты полиномов первого и второго порядков были положительными, т. е. в полином  $C(p)$  должны входить только сомножители типа  $T_i p + 1$  и  $T_i^2 p^2 + 2\xi_i T_i p + 1$  при  $\xi_i \neq 0$ . Ниже будет показано, что при определенных условиях первое ограничение может быть снято.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{B(p) + C(p)}{C(p)} = \frac{D(p)}{C(p)}, \quad (6.24)$$

где  $D(p)$  — характеристический полином замкнутой системы.

Сделаем подстановку  $p = j\omega$  и найдем комплекс

$$W_1(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)}. \quad (6.25)$$

Будем изменять частоту  $\omega$  от 0 до  $\infty$  и изобразим получившуюся амплитудно-фазовую характеристику  $W_1(j\omega)$  на комплексной плоскости (рис. 6.10). При  $\omega = 0$  при указанных выше условиях согласно (6.23)  $W(j\omega) = K$ ,  $W_1(j\omega) = 1 + K$ , а при  $\omega = \infty$ , так как  $m < n$ ,  $W(j\omega) = 0$ ,  $W_1(j\omega) = 1$ . Определим результирующий угол поворота вектора  $W_1(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . Этот угол представляет собой изменение аргумента (6.25), который равен разности аргументов числителя  $\psi_1$  и знаменателя  $\psi_2$ .

Если замкнутая система устойчива, то в полином  $D(p)$  входят только сомножители первого и второго порядка с положительными коэффициентами, аналогичные указанным выше сомножителям полинома  $C(p)$ . Аргумент первого из них, как следует из табл. 6.1, изменяется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , а второго — от 0 до  $\pi$ . Таким образом, при изменении частоты от 0 до  $\infty$  аргумент  $D(j\omega)$  изменяется на величину  $\psi_1 = n\frac{\pi}{2}$ , где  $n$  — степень полинома  $D(p)$ . Степень полинома  $C(p)$  такая же, как и полинома  $D(p)$ .

Поэтому аргумент  $C(j\omega)$  изменяется на такую же величину:  $\psi_2 = n\frac{\pi}{2}$ . Результирующий угол поворота  $W_1(j\omega)$  равен нулю:  $\psi = \psi_1 - \psi_2 = 0$ . Это означает, что для устойчивой замкнутой системы годограф вектора  $W_1(j\omega)$  не должен охватывать начало координат (рис. 6.10, а).

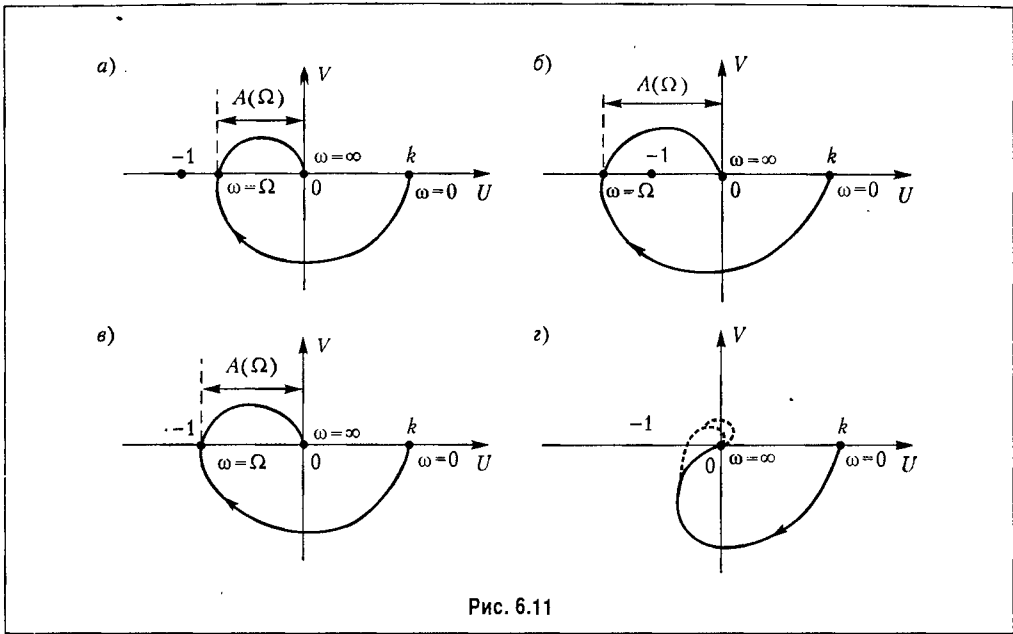


Рис. 6.11

Частотная передаточная функция разомкнутой системы  $W(j\omega)$  отличается от вспомогательной функции  $W_1(j\omega)$  на единицу. Поэтому она для устойчивой замкнутой системы не должна охватывать точку с координатами  $(-1; j0)$ , т. е. должна проходить так, как показано на рис. 6.11, а.

Если замкнутая система неустойчива, то в полиноме  $D(p)$  появляются сомножители первого или второго порядка с отрицательными коэффициентами типа  $T_i p - 1$  или  $T_i^2 p^2 - 2\xi_i T_i p + 1$ , корни которых положительные или имеют положительные вещественные части. Аргумент, соответствующий первому из них (см. табл. 6.1) изменяется от  $\pi$  до  $\frac{\pi}{2}$ , т. е. на  $-\frac{\pi}{2}$ , а второму — на  $-\pi$ . Если общее число таких корней  $l$ , то им соответствует изменение аргумента  $D(j\omega)$  на величину  $-l\frac{\pi}{2}$ . Остальным  $n-l$  корням с отрицательной вещественной частью соответствует изменение на величину  $(n-l)\frac{\pi}{2}$ . Таким образом, аргумент  $D(j\omega)$  изменяется на величину

$$\psi_1 = -l\frac{\pi}{2} + (n-l)\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - l\pi.$$

Аргумент  $C(j\omega)$  остается прежним:  $\psi_2 = n\frac{\pi}{2}$ . Результирующий угол поворота вектора  $W_1(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$   $\psi = \psi_1 - \psi_2 = -l\pi$ . Это означает, что для неустойчивой замкнутой системы годограф вектора  $W_1(j\omega)$  охватывает начало координат на угол  $\pi l$  по часовой стрелке (рис. 6.10, б), а а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 6.11, б) охватывает на тот же угол точку  $(-1; j0)$ . В частности, на рис. 6.10, б и

рис. 6.11, б угол охвата равен  $-2\pi$ , т. е. в полиноме  $D(p)$  имеется два корня с положительной вещественной частью.

Если замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости, то в полиноме  $D(p)$  нет корней с положительной вещественной частью, но имеется пара чисто мнимых корней  $p_{1,2} = \pm j\Omega$ . Эта граница наиболее характерна для устойчивых в разомкнутом состоянии систем. В этом случае, как следует из выражения (6.16),  $D(j\Omega) = 0$ , а  $W(j\Omega) = -1$ . Это означает, что на частоте  $\omega = \Omega$  модуль  $A(\Omega) = 1$ , а фаза  $\psi(\Omega) = -\pi$ , т. е. а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 6.11, в) проходит через точку  $(-1; j0)$ .

Таким образом, если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку с координатами  $(-1; j0)$ .

Для случаев, изображенных на рис. 6.11, а — 6.11, в, исходя из критерия Найквиста можно сформулировать условие устойчивости замкнутой системы. Пусть  $\omega = \Omega$  — частота, на которой фаза  $\psi(\Omega) = -\pi$ . Тогда замкнутая система будет устойчивой, если модуль  $A(\Omega) < 1$  и неустойчивой, если  $A(\Omega) > 1$ . При  $A(\Omega) = 1$  замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости, а  $\Omega$  — это частота незатухающих колебаний, возникающих в системе (см. рис. 6.2, з).

Фаза  $\psi(\omega)$ , как видно из выражения (6.22), зависит от значений постоянных времени. Величина модуля, кроме того, пропорциональна коэффициенту передачи разомкнутой системы  $K$ . В гл. 7 будет показано, что увеличение  $K$  благоприятно влияет на точность системы. Однако одновременно увеличивается и модуль  $A(\Omega)$ . При некотором критическом значении  $K = K_{кр}$  замкнутая система попадает на колебательную границу устойчивости, а при  $K > K_{кр}$  она становится неустойчивой.

В случае, изображенном на рис. 6.11, з, замкнутая система устойчива при сколь угодно большом значении коэффициента передачи разомкнутой системы. Однако практически всегда существуют неучтенные в передаточной функции (6.22) малые

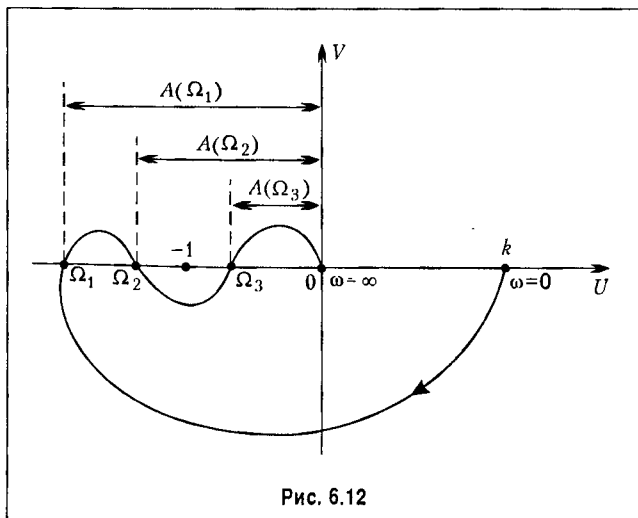


Рис. 6.12

постоянные времени, из-за чего реальная а. ф. х. разомкнутой системы будет такой, как показано пунктиром, а замкнутая система станет критичной к увеличению  $K$ .

На рис. 6.12 изображен более сложный случай, когда замкнутая система может стать неустойчивой как при увеличении, так и при уменьшении коэффициента передачи разомкнутой системы. При  $A(\Omega_3) < 1$ ,  $A(\Omega_2) > 1$  замкнутая система устойчива. При увеличении  $K$  она станет неустойчивой, если  $A(\Omega_3) > 1$ , а при уменьшении  $K$  — если



$A(\Omega_2) < 1$ ,  $A(\Omega_1) > 1$ . Если же  $A(\Omega_1) < 1$ , то замкнутая система вновь станет устойчивой.

Следует отметить, что если разомкнутая система устойчива, то устойчив и сам управляемый объект, так как его характеристический полином  $C_0(p)$  согласно (5.13) входит в состав полинома  $C(p)$ . Поэтому система автоматического управления создается не для обеспечения устойчивости объекта, а для придания системе свойств, отличающихся от свойств объекта, например, для повышения точности поддержания управляемой величины (температуры, давления и т. п.) на заданном уровне при наличии возмущений. Однако если алгоритм управления и параметры управляющего устройства выбраны неправильно, то система автоматического управления может стать неустойчивой. Впервые такая ситуация возникла еще в XVIII в. при создании регуляторов скорости вращения валов паровых машин (см. рис. 1.12). И сразу же, как отмечено в § 6.2, появилась необходимость в разработке критериев устойчивости.

Снимем теперь первое ограничение на корни характеристического полинома разомкнутой системы  $C(p)$ . Будем полагать, что в нем кроме корней с отрицательными вещественными частями есть нулевые корни, т. е. в выражении (6.22)  $r \neq 0$ .

При наличии одного нулевого корня ( $r = 1$ ) в знаменателе (6.23) появится сомножитель  $j\omega$ , модуль которого равен  $\omega$ , а фаза равна  $\frac{\pi}{2}$ . В результате на частоте  $\omega = 0$  модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы (6.23)  $A(0) = \infty$ , а фаза  $\Psi(0) = -\frac{\pi}{2}$ , т. е. амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы будет иметь разрыв непрерывности (рис. 6.13, а). Для получения определенности в ходе а. ф. х. заменим нулевой корень  $p_1 = 0$  бесконечно малым вещественным отрицательным корнем  $p_1 = -\alpha$ . Тогда вместо  $j\omega$  получим сомножитель  $j\omega + \alpha$ , модуль которого  $A_1(\omega) = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$  при  $\omega = 0$  стремится к нулю, а фаза  $\Psi_1(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha}$  изменяется от нуля при  $\omega = 0$  до  $\frac{\pi}{2}$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . При этом модуль (6.23)  $A(0)$  будет стремиться к бесконечности, а фаза будет изменяться от нуля до  $-\frac{\pi}{2}$ .

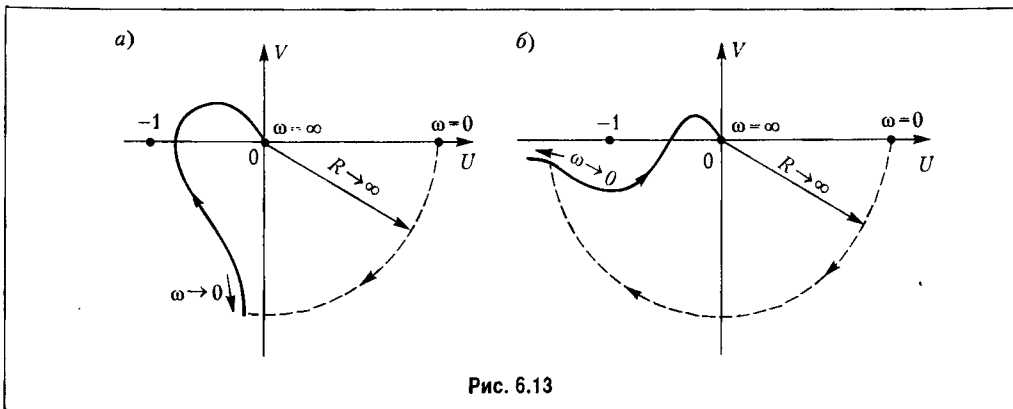


Рис. 6.13

Таким образом, а. ф. х. разомкнутой системы при  $r = 1$  (см. рис. 6.13, а) дополнится по часовой стрелке четвертью окружности с радиусом  $R \rightarrow \infty$ , начало которой находится на вещественной оси, и разрыв непрерывности будет устранен. Кроме того, так как нулевой корень заменен вещественным отрицательным корнем, то разомкнутую систему можно считать устойчивой. Все это означает, что для исследования устойчивости замкнутой системы можно применять приведенную выше формулировку критерия Найквиста.

При наличии двух нулевых корней ( $r = 2$ ) на частоте  $\omega = 0$  модуль частотной передаточной функции (6.23)  $A(0) = \infty$ , а фаза  $\psi(0) = -\pi$ . Аналогичными рассуждениями можно показать, что в этом случае а. ф. х. разомкнутой системы следует дополнить по часовой стрелке полуокружностью с радиусом  $R \rightarrow \infty$  (рис. 6.13, б).

В общем случае при любом  $r$  дополнение производится на угол  $-r \frac{\pi}{2}$ .

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы (6.22) может иметь и чисто мнимые корни. Пусть, например,  $r = 0$ , но имеется пара мнимых корней, что соответствует наличию в полиноме  $C(p)$  сомножителя  $T_2^2 p^2 + 1$ . В этом случае (см. табл. 6.1) на частоте  $\omega = \frac{1}{T_2}$  модуль  $W(j\omega)$  равен бесконечности, а фаза скачком изменится на  $-\pi$ . Для устранения неопределенности можно, как и в предыдущих случаях, отнести мнимые корни к левой полуплоскости, заменив указанный выше сомножитель на  $T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1$ , где  $\xi_2$  — бесконечно малая положительная величина. Тогда разрыв устранится за счет дополнения а. ф. х. полуокружностью бесконечно большого радиуса по часовой стрелке так, как показано на рис. 6.14.

В случае рис. 6.14, а замкнутая система устойчива, если  $A(\Omega) < 1$ , так как при этом условия а. ф. х. разомкнутой системы не охватывает точку  $(-1; j0)$ , и неустойчива, если  $A(\Omega) > 1$ . В случае рис. 6.14, б замкнутая система неустойчива.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим следящую систему, структурная схема которой изображена на рис. 6.4. Для этой системы была получена передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)}$$

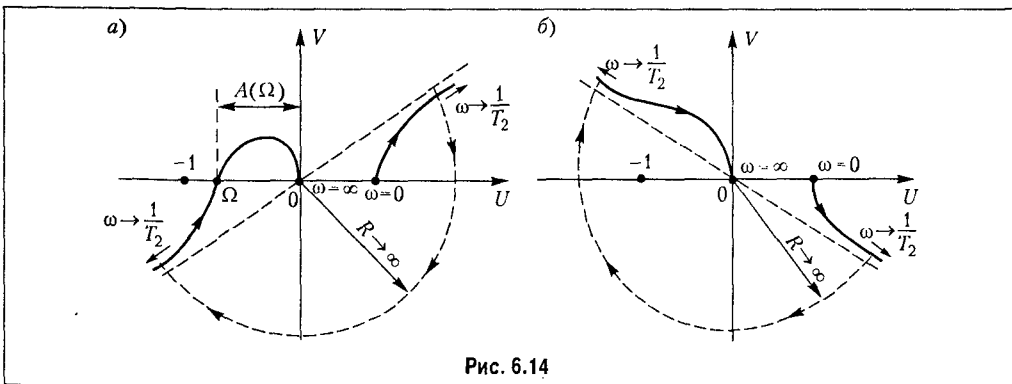


Рис. 6.14

Модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы (см. табл. 6.1)

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{(1 + T_y^2 \omega^2)(1 + T_m^2 \omega^2)}}$$

и фаза

$$\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T_y - \operatorname{arctg} \omega T_m = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega(T_y + T_m)}{1 - \omega^2 T_y T_m}.$$

При  $\omega = 0$  модуль  $A(0) = \infty$ , а фаза  $\psi(0) = -\frac{\pi}{2}$ . По мере увеличения  $\omega$  фаза изменяется от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $-\frac{3\pi}{2}$  при  $\omega = \infty$ . Это означает, что а. ф. х. разомкнутой системы располагается в третьем и втором квадратах комплексной плоскости. Модуль с увеличением  $\omega$  уменьшается и при  $\omega = \infty$  становится равным нулю. Таким образом, с учетом дополнения четвертью окружности и радиусом  $R \rightarrow \infty$  а. ф. х. выглядит так, как показано на рис. 6.13, а.

Частоту  $\Omega$ , на которой фаза  $\psi(\Omega) = -\pi$ , найдем из условия

$$\operatorname{arctg} \frac{\Omega(T_y + T_m)}{1 - \Omega^2 T_y T_m} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_y T_m}}.$$

Подставив это значение в выражение для модуля, получим:

$$A(\Omega) = \frac{K T_y T_m}{T_y + T_m}.$$

Замкнутая система устойчива, если  $A(\Omega) < 1$ . Таким образом, условие устойчивости замкнутой системы

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m}$$

совпадает с найденным ранее условием, вытекающим из критерия Гурвица.

Обратимся теперь к более общему случаю, когда знаменатель передаточной функции разомкнутой системы содержит корни, лежащие в правой полуплоскости. Это соответствует неустойчивой в разомкнутом состоянии системе.

Появление неустойчивости разомкнутой системы может вызываться двумя причинами. Во-первых, это может быть следствием наличия неустойчивых звеньев, подобных рассмотренным в § 4.8, в том числе и неустойчивости самого управляемого

объекта. Во-вторых, это может быть следствием потери устойчивости звеньев, охваченных положительными или отрицательными обратными связями (см., например, рис. 5.4).

Наличие неустойчивости системы в разомкнутом состоянии не означает, что система будет неустойчивой в замкнутом состоянии. Она может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Однако формулировка критерия устойчивости Найквиста при этом несколько меняется. Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы (6.22) содержит  $l$  корней в правой полуплоскости и  $n - l$  корней — в левой. Тогда при изменении частоты от 0 до  $\infty$  для устойчивости в замкнутом состоянии системы результирующий угол поворота годографа вектора  $W(j\omega)$  относительно точки  $(-1, j0)$  должен составить

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = n\frac{\pi}{2} - \left[ (n-l)\frac{\pi}{2} - l\frac{\pi}{2} \right] = l \cdot \pi,$$

т. е. амплитудно-фазовая характеристика должна охватить точку  $(-1, j0)$  столько раз, сколько корней в правой полуплоскости содержит знаменатель передаточной функции разомкнутой системы. Иными словами, в самом общем случае для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до  $\infty$  *охватывала точку*  $(-1, j0)$  *на угол*  $l\pi$  *против часовой стрелки*. Приведенная ранее формулировка критерия Найквиста для случая, когда  $l = 0$ , вытекает отсюда как частный случай.

Таким образом, при использовании критерия Найквиста необходимо проверить, имеются ли в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы корни, лежащие в правой полуплоскости, и сколько имеется таких корней.

Если в системе имеются местные обратные связи, например, такого типа, как это изображено на рис. 5.6, то необходимо убедиться в том, что по цепи местной обратной связи не нарушена устойчивость при разомкнутой главной обратной связи. Проверка устойчивости по цепи местной обратной связи может быть сделана посредством использования любых критериев устойчивости, в том числе и посредством критерия Найквиста, который может применяться для разомкнутой местной обратной связи обычным путем построения для этой цели амплитудно-фазовой характеристики.

В случае, если для местной обратной связи будет получено указание на ее неустойчивость, необходимо определить число корней, лежащих в правой полуплоскости.

Следует заметить, что, хотя теоретически вся система в замкнутом состоянии может быть устойчивой при наличии неустойчивости по цепи местной обратной связи, практически такой случай является нежелательным и его надо избегать, стремясь использовать только устойчивые местные обратные связи. Поэтому, как правило, при расчете системы выбирают такие местные обратные связи, которые были бы устойчивыми при разомкнутой главной обратной связи.

В качестве примера рассмотрим систему угловой стабилизации ракеты, структурная схема которой изображена на рис. 6.5. Для этой системы была получена передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_0^2 p^2 - 1)}.$$

В характеристическом полиноме разомкнутой системы  $C(p)$ , т. е. в полиноме знаменателя  $W(p)$  имеется два вещественных отрицательных корня  $p_1 = -\frac{1}{T_2}$ ,  $p_2 = -\frac{1}{T_0}$  и один вещественный положительный корень  $p_3 = +\frac{1}{T_0}$ . Наличие последнего свидетельствует о неустойчивости управляемого объекта (ракеты) и разомкнутой системы в целом. Поэтому система автоматического управления создается, в первую очередь, для обеспечения устойчивого полета ракеты.

В данном случае  $l = 1$ . Таким образом, для устойчивости замкнутой системы а. ф. х. разомкнутой системы должна охватывать точку  $(-1, j0)$  на угол  $\pi$  против часовой стрелки.

Для построения а. ф. х. находим модуль и фазу (см. табл. 6.1)

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}{(1+T_0^2\omega^2)\sqrt{1+T_2^2\omega^2}},$$

$$\psi(\omega) = -\pi + \operatorname{arctg} \omega T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2.$$

При изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  модуль изменяется от  $A(0) = K$  до  $A(\infty) = 0$ , а фаза -- от  $\psi(0) = -\pi$  до  $\psi(\infty) = -\pi$ . Если  $T_1 > T_2$ , то при  $\omega \neq 0$  и  $\omega \neq \infty$  разность арктангенсов больше нуля, а. ф. х. располагается в третьем квадранте (рис. 6.15) и при  $K > 1$  охватывает точку  $(-1, j0)$  на угол  $+\pi$ , т. е. против часовой стрелки. В этом случае замкнутая система устойчива. Если  $T_1 < T_2$ , то а. ф. х. располагается во втором квадранте и при  $K > 1$  охватывает точку  $(-1, j0)$  на угол  $-\pi$ . В этом случае замкнутая система неустойчива. Если же  $K < 1$ , то при любых значениях  $T_1$  и  $T_2$  а. ф. х. разомкнутой системы не охватывает точку  $(-1, j0)$  и замкнутая система неустойчива. Таким образом, замкнутая система устойчива, если  $K > 1$ ,  $T_1 > T_2$ . Эти условия совпадают с найденными ранее при помощи критерия Гурвица.

В ряде случаев более удобной может оказаться другая формулировка критерия Найквиста. Она основана на том, что величина и знак угла охвата точки  $(-1, j0)$  зависят только от того, как и сколько раз а. ф. х. разомкнутой системы пересекает отрезок вещественной оси, расположенной левее точки  $(-1, j0)$ , и не зависят от ее прохождения правее этой точки. Например, нетрудно убедиться, что все три а. ф. х., изображенные на рис. 6.16, охватывают точку  $(-1, j0)$  на угол  $+\pi$ .

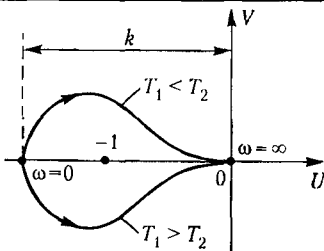


Рис. 6.15

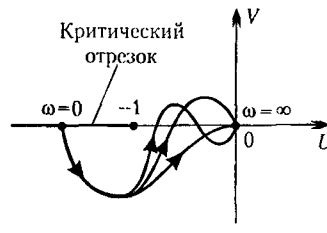


Рис. 6.16

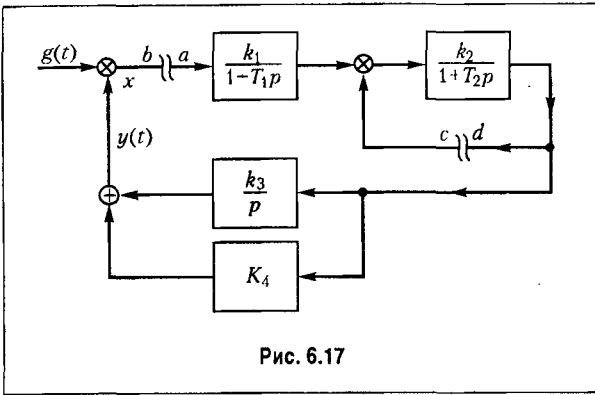


Рис. 6.17

Выделим на вещественной оси *критический отрезок* (рис. 6.16). Тогда для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы *сумма переходов* амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы через критический отрезок при изменении частоты от 0 до  $\infty$  была равна  $\frac{l}{2}$ , где  $l$  — число кор-

ней с положительной веществен-

ной частью в характеристическом полиноме разомкнутой системы. При этом переход сверху вниз считается положительным (+1), а снизу вверх — отрицательным (-1).

Если при  $\omega = 0$  а. ф. х. начинается на критическом отрезке, то имеет место  $\frac{1}{2}$  перехода с соответствующим знаком. Например, на рис. 6.15 ( $l = 1$ ) при  $K > 1$  а. ф. х. совершает  $+\frac{1}{2}$  перехода, если  $T_1 > T_2$  (замкнутая система устойчива) и  $-\frac{1}{2}$  перехода, если  $T_1 < T_2$  (замкнутая система неустойчива). При  $K < 1$  переходов нет и замкнутая система неустойчива. На рис. 6.12 ( $l = 0$ ) имеется -1 переход на частоте  $\Omega_1$  и +1 на частоте  $\Omega_2$ . Сумма переходов равна нулю и замкнутая система устойчива.

Сделаем теперь замечание, касающееся использования для определения устойчивости замкнутой системы передаточной функции разомкнутой системы.

В случае многоконтурной системы управления размыкание ее для получения передаточной функции разомкнутой системы можно делать, вообще говоря, в произвольном месте. Рассмотрим, например, систему, структурная схема которой изображена на рис. 6.17.

Разомкнем систему на входе первого звена. Тогда, рассматривая точку  $a$  как вход, а точку  $b$  как выход, получаем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k_1}{1+T_1p} \frac{k_2}{1+k_2+T_2p} \left( \frac{k_3}{p} + k_4 \right) = \frac{k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4 p}{p(1+T_1p)(1+k_2+T_2p)}$$

Разомкнем теперь ту же систему не на входе первого звена, а в цепи обратной связи второго звена (точка  $c$  соответствует входу, а точка  $d$  — выходу).

Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае

$$W'(p) = \frac{\frac{k_2}{1+T_2p}}{1 + \frac{k_1}{1+T_1p} \frac{k_2}{1+T_2p} \left( \frac{k_3}{p} + k_4 \right)} = \frac{k_2 p (1+T_1p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p) + k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4 p}$$

Передаточные функции  $W(p)$  и  $W'(p)$  получились различными. Однако им соответствует одно и то же характеристическое уравнение замкнутой системы  $1 + W(p) = 1 + W'(p) = 0$ , которое имеет вид

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 + k_2 T_1) p^2 + (1 + k_2 + k_1 k_2 k_4) p + k_1 k_2 k_3 = 0.$$

Поэтому для определения устойчивости можно пользоваться передаточной функцией разомкнутой системы, полученной размыканием исходной системы в произвольной точке, в которой выполняется условие детектирования.

Однако передаточные функции  $W(p)$  и  $W'(p)$  имеют различие. Только передаточная функция  $W(p)$  связывает между собой изображения управляемой величины и ошибки, и только она связана с передаточной функцией замкнутой системы  $\Phi(p)$  известным соотношением

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)}.$$

Передаточную функцию при размыкании на входе первого звена в дальнейшем будем считать главной передаточной функцией разомкнутой системы и именно ее иметь в виду при рассмотрении методов определения качества управления и синтеза систем управления.

## § 6.5. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Для определения устойчивости по критерию Найквиста можно строить не амплитудно-фазовую характеристику, а логарифмическую амплитудную частотную характеристику (л. а. х.) и логарифмическую фазовую частотную характеристику (л. ф. х.) разомкнутой системы.

Построение л. а. х. производится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|,$$

где  $A(\omega)$  — модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы (6.23).

Построение л. ф. х. производится по значению  $\psi(\omega)$  частотной передаточной функции (6.23). Для построения л. а. х. и л. ф. х. удобно использовать стандартную сетку, изображенную на рис. 4.19.

Наиболее простое построение получается, если передаточную функцию разомкнутой системы можно свести к виду

$$W(p) = \frac{K}{p^r} \frac{\prod_{j=1}^m (1 + \tau_j p)}{\prod_{i=1}^{n-r} (1 + T_i p)}.$$

При подстановке  $p = j\omega$  получаем

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^r} \frac{\prod_{j=1}^m \sqrt{1 + \omega^2 \tau_j^2}}{\prod_{i=1}^{n-r} \sqrt{1 + \omega^2 T_i^2}}. \quad (6.26)$$

Фаза (аргумент) частотной передаточной функции

$$\psi(\omega) = -r \cdot 90^\circ + \sum_{j=1}^m \operatorname{arctg} \omega \tau_j - \sum_{i=1}^{n-r} \operatorname{arctg} \omega T_i.$$

На основании (6.26) можно легко, без дополнительных вычислений построить асимптотическую л. а. х., для чего на стандартной сетке (рис. 6.18) нанесены вертикальные прямые при сопрягающих частотах  $\omega_i = \frac{1}{T_i}$  и  $\omega_j = \frac{1}{\tau_j}$ . Для определенности построения возьмем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)^2}, \quad (6.28)$$

которой соответствует выражение для модуля в логарифмическом масштабе

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega} \frac{\sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}}. \quad (6.29)$$

Примем, например, что  $K = 50 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_1 = 0,5 \text{ с}$ ,  $\tau_1 = 0,2 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0,0125 \text{ с}$ . Тогда сопрягающие частоты  $\omega_1 = 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_3 = 80 \text{ с}^{-1}$ .

Вначале построим первую асимптоту. При  $\omega < \omega_1$  выражение (6.29) приобретает вид

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{K}{\omega},$$

которому (см. § 4.4) соответствует прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек, пересекающая ось абсцисс при  $\omega = \omega_{c_1} = K$ . Для получения второй точки этой прямой откладываем от точки  $\omega_{c_1} = 50 \text{ с}^{-1}$  одну декаду вправо, т. е. до частоты  $\omega = 10\omega_{c_1} = 500 \text{ с}^{-1}$ , и находим точку  $D$ , находящуюся на 20 дБ ниже оси абсцисс. Можно отложить одну декаду и влево до частоты  $\omega = 0,1\omega_{c_1} = 5 \text{ с}^{-1}$  и найти точку  $D_1$ , находящуюся на 20 дБ выше оси абсцисс.

Первую асимптоту проводим до первой сопрягающей частоты  $\omega_1$  (точка  $A$ ). Так как этой частоте соответствует постоянная времени  $T_1$ , находящаяся в знаменателе (6.28), то л. а. х. необходимо «изломать» на  $-20$  дБ/дек, и наклон второй асимптоты станет равным  $-40$  дБ/дек. Это означает, что через одну декаду, т. е. на частоте  $\omega = 10\omega_1$ , точка  $A$  опустится на 40 дБ.



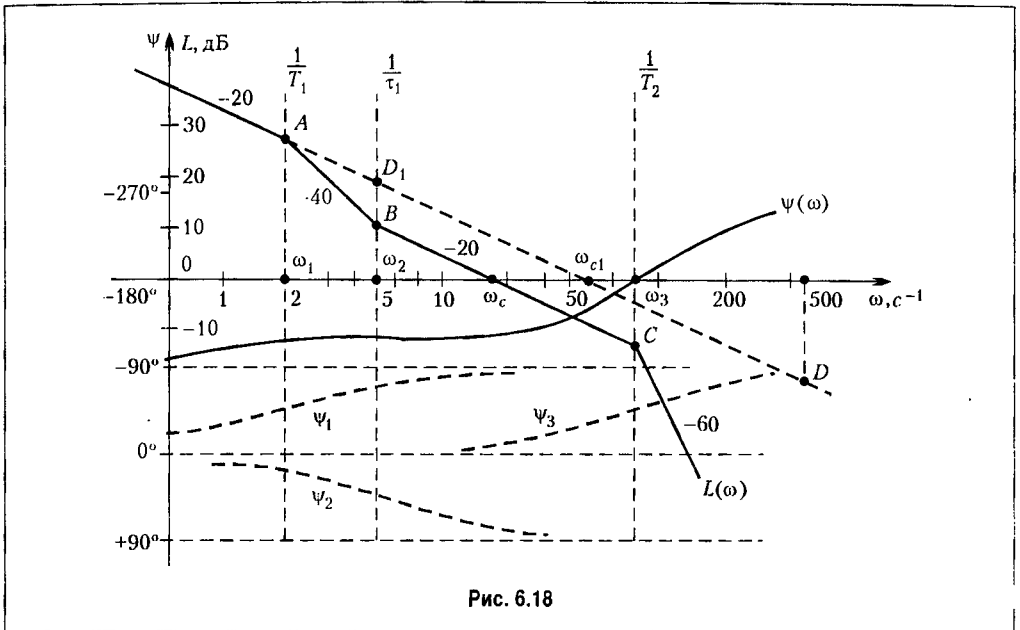


Рис. 6.18

Вторую асимптоту доводим до второй сопрягающей частоты  $\omega_2$  (точка B). Так как частоте  $\omega_2$  соответствует постоянная времени  $\tau_1$ , находящаяся в числителе (6.28), то л. а. х. «изламываем» на +20 дБ/дек и наклон третьей асимптоты составит -20 дБ/дек. Доводим ее до третьей сопрягающей частоты  $\omega_3$  (точка C). Так как этой частоте соответствует постоянная времени  $T_2$  сомножителя второго порядка знаменателя (6.28), то л. а. х. «изламываем» на -40 дБ/дек и последняя асимптота будет иметь наклон -60 дБ/дек.

Действительная л. а. х. несколько отличается от асимптотической (см. § 4.5). Максимальные отклонения имеют место на сопрягающих частотах. На частоте  $\omega_1$  действительная л. а. х. проходит на 3 дБ ниже, на частоте  $\omega_2$  — на 3 дБ выше, а на частоте  $\omega_3$  — на 6 дБ ниже асимптотической.

Выражение для фазы (6.28) имеет вид

$$\psi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 + \arctg \omega \tau_1 - 2\arctg \omega T_2 = -90^\circ + \psi_1 + \psi_2 + 2\psi_3. \quad (6.30)$$

Каждая из составляющих  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  представляет, по сути дела, одну и ту же зависимость от частоты. Поэтому достаточно построить, например, только зависимость  $\psi_1 = -\arctg \omega T_1$  (см. рис. 6.18). Все остальные получаются простым сдвигом этой фазовой характеристики так, чтобы на соответствующей сопрягающей частоте иметь фазовый сдвиг  $45^\circ$ . При этом необходимо учитывать знак каждого слагаемого (6.30). Логарифмическая фазовая характеристика (рис. 6.18) получается в результате алгебраического суммирования всех слагаемых (6.30). Построение л. ф. х. можно существенно упростить, если заранее будет подготовлен шаблон для одной из указанных зависимостей.

Аналогичное построение л. а. х. и л. ф. х. может быть сделано при любом значении  $r$ . Разница будет заключаться в наклоне первой асимптоты л. а. х. и величине первого слагаемого выражения для фазы (6.27).

При  $r = 0$  первая асимптота проходит параллельно оси абсцисс на расстоянии  $20 \lg K$ . При  $r \geq 1$  ее наклон равен  $-r \cdot 20$  дБ/дек, а ее частота среза  $\omega_{c_1} = \sqrt{K}$ .

В тех случаях, когда в передаточной функции разомкнутой системы (6.22) имеются множители типа  $\tau^2 p^2 + 2\xi\tau p + 1$  и  $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$  с комплексными корнями, построение асимптотической л. а. х. принципиально не отличается от рассмотренно-

го выше. Сопрягающими частотами для них будут  $\omega = \frac{1}{\tau}$  и  $\omega = \frac{1}{T}$ . На первой л. а. х. дополнительно изламывается на  $+40$  дБ/дек, а на второй — на  $-40$  дБ/дек. Однако при малых значениях параметра затухания  $\xi$  отклонение действительной л. а. х. от асимптотической оказывается значительным. Поэтому при  $\xi < 0,3$  в асимптотическую л. а. х. следует внести поправки в соответствии с рис. 4.15 или рис. 4.16 (для первого из указанных множителей они берутся с обратным знаком).

Аналогично изложенному выше строится и л. ф. х. Для построения составляющих фазовой характеристики, соответствующих множителям с комплексными корнями, можно использовать графики, приведенные на рис. 4.15.

Обратимся теперь к исследованию устойчивости замкнутой системы по построенным л. а. х. и л. ф. х. разомкнутой системы. Для этого воспользуемся последней из приведенных выше формулировок критерия Найквиста, связанной с прохождением а. ф. х. через критический отрезок.

На плоскости а. ф. х. разомкнутой системы критический отрезок (см. рис. 6.16) представляет собой отрезок вещественной оси, на котором фаза  $\psi(\omega) = -180^\circ$ , а модуль  $A(\omega) \geq 1$ . На плоскости л. ч. х. разомкнутой системы фаза  $\psi(\omega) = -180^\circ$  на всей оси абсцисс, а модуль  $A(\omega) > 1$  там, где  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) > 0$ . Например, на рис. 6.18 эти условия выполняются на отрезке оси абсцисс, расположенном левее частоты среза л. а. х.  $\omega_c$ .

Таким образом, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы *сумма переходов логарифмической фазовой характеристики разомкнутой системы*

через критический отрезок была равна  $\frac{l}{2}$ , где  $l$  — число корней с положительной вещественной частью в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы  $W(p)$ . Как и прежде, переход сверху вниз считается положительным, а снизу вверх — отрицательным.

Так, на рис. 6.18 л. ф. х. не пересекает критический отрезок (переходов нет), в знаменателе передаточной функции (6.28) корней с положительной вещественной частью нет ( $l=0$ ) и, следовательно, замкнутая система устойчива. Аналогично обстоит дело и с замкнутой системой, л. ч. х. которой в разомкнутом состоянии изображены на рис. 6.19, а. В обоих случаях при увеличении коэффициента передачи разомкнутой системы л. а. х. будет сдвигаться вправо параллельно самой себе, а л. ф. х. изменяться не будет. Поэтому (см. рис. 6.19, а), когда частота среза л. а. х.  $\omega_c$  станет равной частоте  $\Omega$ , замкнутая система попадет на колебательную границу устойчивости, а при  $\omega_c > \Omega$  появится  $-1$  переход через критический отрезок и замкнутая система станет неустойчивой.

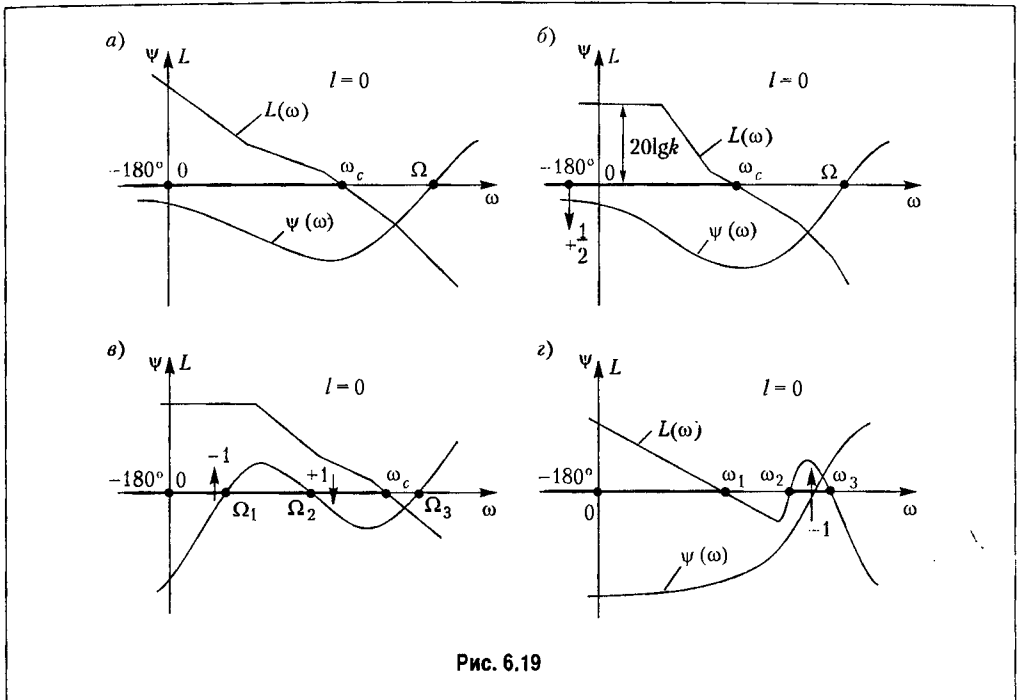


Рис. 6.19

На рис. 6.19, б изображены л. ч. х., соответствующие второй из а. ф. х., показанных на рис. 6.16. В этом случае замкнутая система устойчива, так как при  $l = 1$  имеется  $+1/2$  перехода через критический отрезок на частоте  $\omega = 0$ . Его наличие объясняется тем, что фаза  $\psi(0) = -180^\circ$ , а первая асимптота л. а. х. идет параллельно оси абсцисс, т. е. модуль  $A(0) = k$ . Это означает, что а. ф. х. (см. рис. 6.16) при  $\omega = 0$  начинается на критическом отрезке. На рис. 6.19, а такого перехода нет, так как фаза  $\psi(0) = -180^\circ$ , но первая асимптота л. а. х. имеет отрицательный наклон и  $A(0) = \infty$ .

На рис. 6.19, в изображены л. ч. х., соответствующие рис. 6.12. Здесь имеется  $+1$  переход на частоте  $\Omega_2$  и  $-1$  переход на частоте  $\Omega_1$ . Замкнутая система устойчива, так как  $l = 0$  и сумма переходов равна нулю.

На рис. 6.19, г показан случай, когда критический отрезок состоит из двух частей. Одна его часть находится на частотах  $\omega \leq \omega_1$ , а другая на частотах  $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$ . Так как имеется  $-1$  переход через вторую часть критического отрезка, то замкнутая система неустойчива.

Большое практическое преимущество критерия Найквиста состоит в том, что а. ф. х. или л. ч. х. разомкнутой системы могут быть получены не только расчетным путем (в том числе и с использованием средств вычислительной техники) при заданной передаточной функции разомкнутой системы, но и сняты экспериментально при наличии уже созданных автоматической системы в целом или отдельных ее устройств. Это особенно важно тогда, когда достоверность исходных дифференциальных уравнений по тем или иным причинам вызывает сомнения.

## § 6.6. Устойчивость систем с запаздыванием

Системы с запаздыванием (см. § 1.2) отличаются от рассмотренных ранее систем тем, что в одном или нескольких из своих звеньев имеют запаздывание во времени начала изменения выходной величины (после начала изменения входной) на величину  $\tau$ , называемую временем запаздывания, причем это время запаздывания остается постоянным и во всем последующем ходе процесса.

Например, если звено описывается уравнением

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1 \quad (6.30)$$

(апериодическое звено первого порядка), то уравнение соответствующего звена с запаздыванием будет иметь вид

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = kx_1(t - \tau) \quad (6.31)$$

(апериодическое звено первого порядка с запаздыванием). Такого вида уравнения называются уравнениями с запаздывающим аргументом.

Обозначим  $x_1^*(t) = x_1(t - \tau)$ . Тогда уравнение (6.31) запишется в обыкновенном виде:

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1^*. \quad (6.32)$$

Так, если входная величина  $x_1$  изменяется скачком от нуля до единицы (рис. 6.20, а), то изменение величины  $x_1^*(t) = x_1(t - \tau)$ , стоящей в правой части уравнения звена, изобразится графиком рис. 6.20, б (скачок на  $\tau$  секунд позже). Используя теперь переходную характеристику обыкновенного апериодического звена в применении к уравнению (6.32), получаем изменение выходной величины  $x_2$  в виде графика рис. 6.20, в. Это и будет переходная характеристика апериодического звена первого порядка с запаздыванием (его апериодическое «инерционное» свойство определяется постоянной времени  $T$ , а запаздывание — величиной  $\tau$ ).

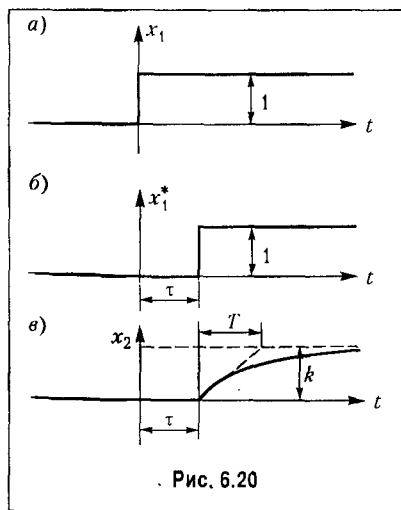


Рис. 6.20

В общем случае, как и для (6.31), уравнение динамики любого звена с запаздыванием можно разбить на два:

$$C(p)x_2 = B(p)x_1^*; \quad (6.33)$$

$$x_1^*(t) = x_1(t - \tau),$$

что соответствует условной разбивке звена с запаздыванием (рис. 6.21, а) на два: обыкновенное звено того же порядка и с теми же коэффициентами и предшествующий ему элемент запаздывания (рис. 6.21, б).

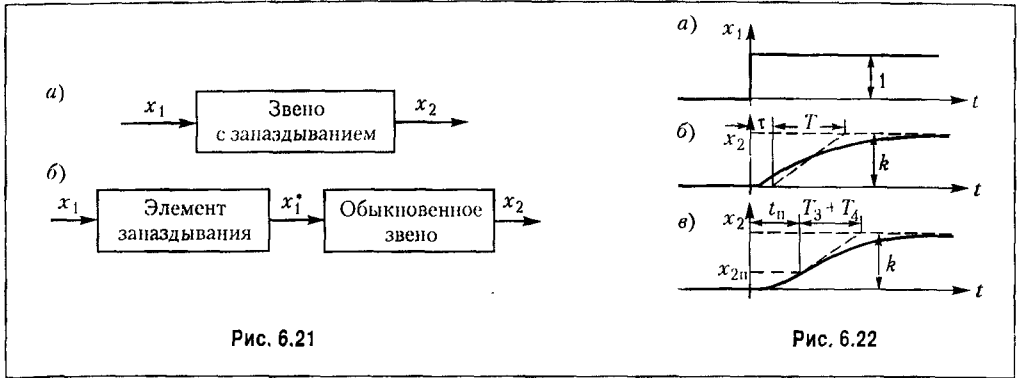


Рис. 6.21

Рис. 6.22

Временная характеристика любого звена с запаздыванием будет, следовательно, такая же, как у соответствующего обыкновенного звена, но только сдвинута по оси времени вправо на величину  $\tau$ .

Примером звена «чистого» запаздывания  $\tau$  является акустическая линия связи ( $\tau$  — время прохождения звука). Другими примерами могут служить система автоматического дозирования какого-либо вещества, перемещаемого с помощью ленточного транспортера ( $\tau$  — время движения ленты на определенном участке), а также система управления толщиной прокатываемого металла, где  $\tau$  означает время движения металла от валков до измерителя толщины. В двух последних примерах величина  $\tau$  называется транспортным запаздыванием.

В первом приближении определенной величиной запаздывания  $\tau$  могут быть охарактеризованы трубопроводы или длинные электрические линии, входящие в звенья системы.

Величину запаздывания  $\tau$  в звене можно определить экспериментально путем снятия временной характеристики. Например, если при подаче на вход звена скачком некоторой величины, принимаемой за единицу, на выходе получается экспериментальная кривая для  $x_2$ , показанная на рис. 6.22, б, то можно приближенно описать это звено как аperiodическое звено первого порядка с запаздыванием (6.31), взяв величины  $\tau$ ,  $T$  и  $k$  с экспериментальной кривой (рис. 6.22, б).

Заметим также, что такая же экспериментальная кривая согласно графику рис. 6.22, в может трактоваться и как временная характеристика обыкновенного аperiodического звена второго порядка с уравнением

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_2 = (T_3 p + 1)(T_4 p + 1)x_1 = kx_1, \tag{6.34}$$

причем  $T_1$ ,  $T_2$  и  $k$  можно вычислить из соотношений, записанных в § 4.5 для данного звена, по некоторым замерам на экспериментальной кривой или другими способами.

Итак, с точки зрения временной характеристики реальное звено, приближенно описываемое уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом (6.31), часто может быть с такой же степенью приближения описано обыкновенным диффе-

В соответствии с формулой теоремы запаздывания для изображений функций по Лапласу для элемента чистого запаздывания получаем передаточную функцию в виде

$$W(p) = e^{-\tau p}. \quad (6.35)$$

Заметим, что в некоторых случаях наличие большого числа малых постоянных времени в системе управления можно учесть в виде постоянного запаздывания, равного сумме этих постоянных времени. Действительно, пусть система содержит  $N$  последовательно включенных апериодических звеньев первого порядка с коэффициентом передачи, равным единице, и величиной каждой постоянной времени  $\Delta T = \frac{\tau}{N}$ . Тогда результирующая передаточная функция будет

$$W(p) = \frac{1}{(1 + \Delta T p)^N} = \left(1 + \frac{\tau}{N} p\right)^{-N}. \quad (6.36)$$

Если  $N \rightarrow \infty$ , то в пределе получаем  $W(p) = e^{-\tau p}$ . Уже при  $N = 8 \div 10$  передаточная функция (6.36) мало отличается от передаточной функции звена с запаздыванием (6.35).

Уравнение любого линейного звена с запаздыванием (6.33) будем теперь записывать в виде

$$C(p)x_2 = B(p)e^{-\tau p}x_1. \quad (6.37)$$

Передаточная функция линейного звена с запаздыванием будет

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)}e^{-\tau p} = W_0(p)e^{-\tau p}. \quad (6.38)$$

где через  $W_0(p)$  обозначена передаточная функция соответствующего обыкновенного звена без запаздывания.

Частотная передаточная функция получается из (6.38) подстановкой  $p = j\omega$ :

$$W(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau} = A_0(\omega)e^{j[\psi_0(\omega) - \tau\omega]}, \quad (6.39)$$

где  $A_0(\omega)$  и  $\psi_0(\omega)$  — модуль и фаза частотной передаточной функции звена без запаздывания.

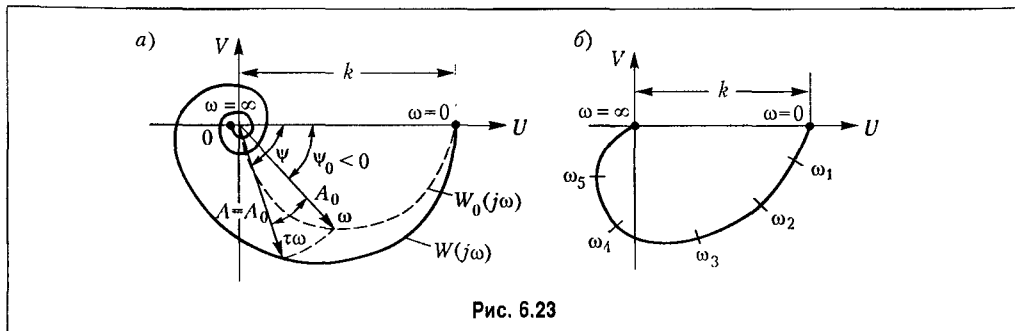


Рис. 6.23

Отсюда получаем следующее правило.

Для построения амплитудно-фазовой характеристики любого звена с запаздыванием нужно взять характеристику соответствующего обыкновенного звена и каждую ее точку сдвинуть вдоль окружности по часовой стрелке на угол  $\tau\omega$ , где  $\omega$  — значение частоты колебаний в данной точке характеристики (рис. 6.23, а).

Так как в начале амплитудно-фазовой характеристики  $\omega = 0$ , а в конце  $\omega = \infty$ , то начальная точка остается без изменения, а конец характеристики асимптотически навивается на начало координат (если степень операторного многочлена  $B$  меньше, чем многочлена  $C$ ).

Выше говорилось о том, что реальные переходные процессы (временные характеристики) вида рис. 6.22, б часто могут быть с одинаковой степенью приближения описаны как уравнением (6.31), так и (6.34). Амплитудно-фазовые характеристики для уравнений (6.31) и (6.34) показаны на рис. 6.23, а и б соответственно. Принципиальное отличие первой состоит в том, что она имеет точку  $D$  пересечения с осью  $U$ . При сравнении обеих характеристик между собой и с экспериментальной амплитудно-фазовой характеристикой реального звена надо принимать во внимание не только форму кривой, но и характер распределения отметок частот  $\omega$  вдоль нее.

Для систем автоматического управления, имеющих в числе своих звеньев одно звено с запаздыванием, все выведенные в главе 5 общие формулы для уравнений и передаточных функций остаются в силе, если в них подставить значения передаточных функций в виде (6.38). Тогда передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием будет такой же, как (6.38), но теперь  $W_0(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы без запаздывания.

Характеристическое уравнение замкнутой системы, как показано в гл. 5, имеет вид

$$D(p) = C(p) + B(p) e^{-\tau p} = 0. \quad (6.40)$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни трансцендентного характеристического уравнения (6.40) имели отрицательные вещественные части. Но в отличие от обыкновенного алгебраического уравнения здесь вследствие наличия множителя  $e^{-\tau p}$  уравнение может иметь бесконечное количество корней.

К указанным системам применим критерий устойчивости Найквиста в его прежней формулировке (см. главу 6). Однако здесь вследствие наличия множителя  $e^{j\tau\omega}$  существенно изменяется очертание амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой цепи, построенной по частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} e^{-j\omega\tau}, \quad (6.41)$$

причем размыкание системы производится по определенному правилу, которое дается ниже.

Как следствие, для устойчивости линейных систем первого и второго порядка с запаздыванием, оказывается, уже недостаточно только положительности коэффициентов, а для систем третьего и более высокого порядка с запаздыванием неприменимы критерии устойчивости Вышнеградского, Рауса и Гурвица.

Ниже будет рассмотрено определение устойчивости только по критерию Найквиста, так как его использование для этой цели оказывается наиболее простым.

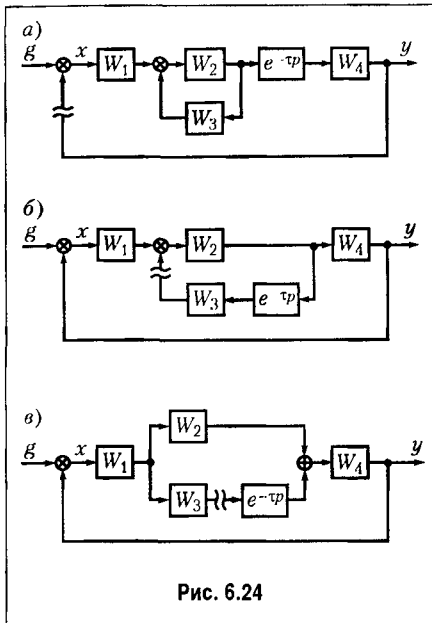


Рис. 6.24

Построение амплитудно-фазовой характеристики и исследование устойчивости по критерию Найквиста лучше всего производить, если передаточная функция разомкнутой системы представлена в виде (6.38). Для получения этого необходимо произвести соответствующим образом размыкание системы.

Для случая, изображенного на рис. 6.24, а, размыкание можно сделать в любом месте главной цепи, например так, как это показано. Тогда передаточная функция разомкнутой системы будет

$$W(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)} e^{-p\tau} W_4(p),$$

что совпадает по форме с (6.41).

Для случая, изображенного на рис. 6.24, б, размыкание главной цепи дает выражение передаточной функции разомкнутой системы, неудобное для дальнейших исследований:

$$W(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)} e^{-p\tau} W_4(p).$$

В этом случае удобнее разомкнуть систему по цепи местной обратной связи. Тогда передаточная функция разомкнутой системы приобретает вид, совпадающий с (6.41):

$$W(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_1(p)W_4(p)} W_3(p) e^{-p\tau}.$$

Наконец, в случае, изображенном на рис. 6.24, в, при размыкании системы в указанном месте получаем выражение, также совпадающее с (6.41):

$$W(p) = W_3(p) e^{-p\tau} \frac{W_4(p)W_1(p)}{1 + W_4(p)W_1(p)W_2(p)}.$$

Частотную передаточную функцию (6.41) можно представить в виде

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\omega\tau}. \tag{6.42}$$

Кроме того,

$$W_0(j\omega) = A_0(\omega) e^{j\psi_0(\omega)}, \tag{6.43}$$

где  $A_0(\omega)$  — модуль и  $\psi_0(\omega)$  — фаза (аргумент) системы без запаздывания. Модуль второго сомножителя (6.43) равен единице, а его аргумент равен  $\Delta\psi = \omega\tau$ . Поэтому, представив выражение (6.41) в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\psi(\omega)},$$



получаем значение модуля результирующей частотной передаточной функции

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = A_0(\omega) \quad (6.44)$$

и фазы

$$\psi(\omega) = \psi_0(\omega) - \omega\tau. \quad (6.45)$$

• Таким образом, наличие звена с запаздыванием не меняет модуля и вносит только дополнительный фазовый сдвиг.

На рис. 6.25 изображена амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая (6.43).

Сплошной линией показана исходная характеристика при  $\tau = 0$ , а пунктиром — характеристика, которая получается при наличии постоянного запаздывания  $\tau \neq 0$ .

Из этих характеристик видно, что наличие дополнительного фазового сдвига  $\Delta\psi = \omega\tau$  «закручивает» годограф, особенно в высокочастотной части, по часовой стрелке. Это, вообще говоря, ухудшает условия устойчивости, так как вся кривая приближается к точке  $(-1, j0)$ . Иногда в особых случаях при сложной форме годографа  $W_0(j\omega)$ , введение постоянного запаздывания может улучшить условия устойчивости.

По имеющемуся годографу  $W_0(j\omega)$  можно определить критическое значение времени запаздывания  $\tau = \tau_{кр}$ , при котором система оказывается на границе колебательной устойчивости.

Для этой цели на годографе  $W_0(j\omega)$  отыскивается точка, для которой модуль равен единице (рис. 6.25). Частоту, соответствующую этой точке, обозначим  $\omega_1$ , а фазу —  $\psi_1$ . При введении постоянного запаздывания  $\tau = \tau_{кр}$  условие совпадения этой точки с точкой  $(-1, j0)$  запишется следующим образом:

$$\psi_1 - \omega_1\tau_{кр} = -\pi,$$

откуда критическое значение запаздывания

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \psi_1}{\omega_1}. \quad (6.46)$$

Если подобных «опасных» точек будет несколько, то необходимо сделать расчеты для всех точек и взять наименьшее значение  $\tau_{кр}$ .

Заметим, что частота  $\omega_1$  равна частоте среза л. а. х.,  $\omega_1 = \omega_{ср}$  (см., например, рис. 6.18). Поэтому нахождение  $\omega_1$  и  $\psi_1$  удобно делать при наличии построенных л. а. х. и л. ф. х.

Л. а. х. системы с запаздыванием совпадает с л. а. х. исходной системы (без запаздывания). Дополнительный фазовый сдвиг, который надо учесть при построении л. ф. х. системы с запаздыванием, определяется (6.45).

В некоторых случаях могут использоваться аналитические расчеты. Так, например, рассмотрим статическую систему с одной постоянной времени. Частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}. \quad (6.47)$$

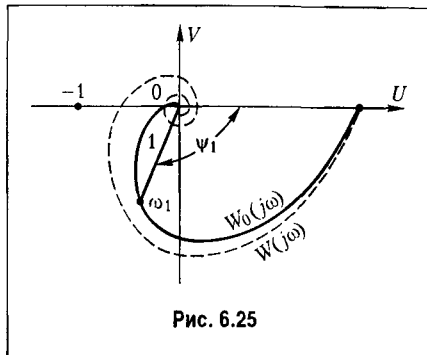


Рис. 6.25

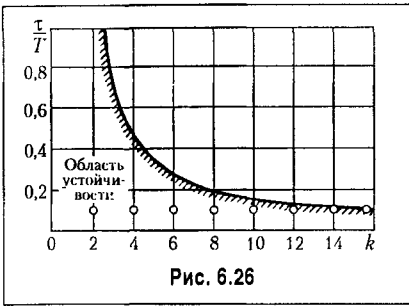


Рис. 6.26

Приравняем модуль единице:

$$\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} = 1.$$

Отсюда находится частота, соответствующая опасной точке:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{T}.$$

Фазовый сдвиг на этой частоте

$$\psi_1 = -\arctg \omega_1 T = -\arctg \sqrt{K^2 - 1}.$$

По формуле (6.46) находим критическое запаздывание:

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \arctg \sqrt{K^2 - 1}}{\omega_1} = T \frac{\pi - \arctg \sqrt{K^2 - 1}}{\sqrt{K^2 - 1}}. \quad (6.48)$$

По этому выражению на рис. 6.26 построена область устойчивости в координатах «общий коэффициент усиления — относительное запаздывание».

## § 6.7. Устойчивость систем с распределенными параметрами

Системой автоматического управления с *распределенными* параметрами называется такая система, среди уравнений которой кроме обыкновенных дифференциальных уравнений имеются уравнения в частных производных. Физически это соответствует учету волновых явлений или гидравлического удара в трубопроводах, учету волновых процессов в длинных электрических линиях при передаче по ним воздействий от одного звена системы автоматического управления к другому или же при управлении процессами в самих трубопроводах или длинных линиях.

Этот вопрос приобретает практическое значение чаще всего в некоторых системах управления, включающих в себя водяные, масляные или газовые трубопроводы (либо в объекте, либо в управляющем устройстве), реже — в некоторых системах телеуправления (телеуправления) и т. н.

Известно, например, что водяной трубопровод гидротурбины описывается без учета потерь уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x}; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x},$$

где  $v$  — скорость движения воды;  $h$  — напор в произвольной точке, определяемой координатой  $x$  вдоль трубопровода;  $a$  — скорость звука в воде.

Уравнения длинной электрической линии без потерь имеют вид:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = l \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial t},$$

где  $u$  — напряжение;  $i$  — ток в произвольной точке, определяемой координатой  $x$  вдоль линии;  $l$  и  $c$  — индуктивность и емкость единицы длины линии.

После решения указанных уравнений в частных производных с учетом граничных условий, определяемых смежными звеньями данной системы автоматического управления, для системы в целом получаются уравнения того же типа, как и для систем с запаздыванием (§ 6.7).

Рассмотрим вывод уравнений системы стабилизации давления газа в трубопроводе, схема которой изображена на рис. 6.27. В данном случае сам объект (трубопровод) является звеном с распределенными параметрами. Для простоты будем считать его прямолинейным, а всех потребителей — сосредоточенными на конце трубопровода.

Управляющее устройство состоит из чувствительного элемента 2 (мембранный измеритель давления), усилителей 3 и 4 (струйная трубка и пневматический двигатель) с жесткой обратной связью 5 и из управляющего органа 6 (кран). Возмущающее воздействие  $f(t)$  на объект выражается в изменении по произволу потребителей некоторого эквивалентного выходного сечения на конце трубопровода.

**Уравнение управляемого объекта.** Движение газа в трубопроводе подчиняется уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}. \tag{6.49}$$

Учтем также условия постоянства массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial w}{\partial l} + w \frac{\partial \rho}{\partial l} = 0 \tag{6.50}$$

и адиабатическое уравнение состояния газа

$$\left( \frac{\rho}{\rho^0} \right)^k = \frac{p}{p^0}. \tag{6.51}$$

В этих уравнениях  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$  — соответственно скорость, давление и плотность газа в текущем сечении трубопровода с координатой  $l$  в момент времени  $t$  (вся длина трубопровода обозначается через  $L$ );  $k$  — показатель степени в уравнении адиабатического состояния газа; индексы 0 вверху ( $p^0$ ,  $\rho^0$ ) означают, что данные величины относятся к установившемуся состоянию системы.

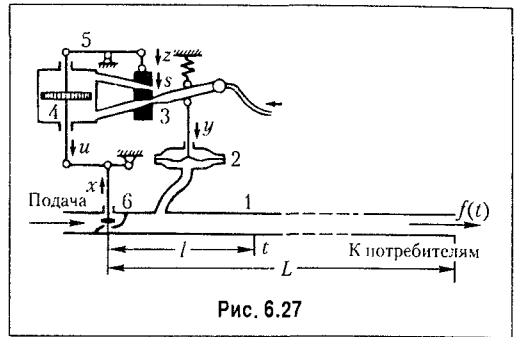


Рис. 6.27

Продифференцировав (6.51), получаем

$$k \left( \frac{\rho}{\rho^0} \right)^{k-1} \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{p^0} \frac{\partial p}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\rho^0}{\rho} \right)^{k-1} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6.52)$$

где  $a$  — скорость звука в газе, определяемая формулой

$$a = \sqrt{\frac{k p^0}{\rho^0}}. \quad (6.53)$$

Обычно не учитывают сопротивление движения газа в трубопроводе, пренебрегая сравнительно малыми членами  $\omega \frac{\partial \omega}{\partial l}$  и  $\omega \frac{\partial \rho}{\partial l}$ . Кроме того, ввиду малости величины отклонения давления  $p$  в процессе управления от его установившегося значения можно считать, что  $\frac{p}{p^0} \approx 1$ , а следовательно, согласно (6.51)  $\frac{\rho}{\rho^0} \approx 1$ . В результате из уравнений (6.49), (6.50) и (6.52) получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^0} \frac{\partial p}{\partial l}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial l} = -\frac{1}{\rho^0 a^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6.54)$$

Введем обозначения для относительного отклонения  $\varphi$  управляемой величины от ее установившегося значения и для относительной координаты  $\lambda$  вдоль трубопровода:

$$\varphi = \frac{p - p^0}{p^0} = \frac{\Delta p}{p^0}; \quad \lambda = \frac{l}{L} \quad (0 \leq \lambda \leq 1), \quad (6.55)$$

а также для относительного отклонения  $\psi$  скорости движения газа в трубопроводе:

$$\psi = k \frac{\omega - \omega^0}{\omega^0} = k \frac{\Delta \omega}{\omega^0}, \quad (6.56)$$

где  $\omega^0$  — скорость газа в трубопроводе при установившемся процессе;  $k$  — показатель степени в адиабатическом уравнении состояния газа (6.51).

Переходя в уравнениях (6.54) к этим относительным безразмерным переменным и бесконечно малым приращениям, получаем искомые уравнения управляемого объекта (трубопровода) в виде

$$\gamma^2 T_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}; \quad T_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (6.57)$$

где введены два постоянных параметра управляемого объекта:

$$T_0 = \frac{L}{w^0}; \quad \gamma = \frac{w^0}{a}. \quad (6.58)$$

Первый из них ( $T_0$ ) представляет собой, очевидно, время прохождения газа по данному трубопроводу в установившемся процессе, а второй ( $\gamma$ ) — отношение установившейся скорости газа к скорости звука в нем.

Заметим, что уравнения (6.57) эквивалентны так называемому волновому уравнению

$$\gamma^2 T_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}, \quad (6.59)$$

которое легко получается, если первое из уравнений (6.57) продифференцировать по  $\lambda$ , а второе — по  $t$  и сравнить результаты дифференцирования.

Для системы уравнений в частных производных (6.57) надо написать граничные условия. Для этого запишем уравнение поступления газа через клапан в начале трубопровода и уравнение потребления газа в конце его.

Используем выражение для скорости газа через его расход, а именно:

$$w = \frac{G}{g\rho F}, \quad (6.60)$$

где  $G$  — расход газа по весу в секунду;  $F$  — площадь сечения трубопровода;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Условимся значения всех переменных, относящихся к началу и к концу трубопровода, обозначать индексами 1 и 2 соответственно. Расход газа в начале трубопровода  $G$  будем считать функцией координаты перемещения клапана  $x$ , т. е.

$$G_1 = G_1(x). \quad (6.61)$$

Эта функция (рис. 6.28) определяется либо аналитическим расчетом, либо из опытных данных.

На основании уравнений (6.60), (6.61), а также формул главы 3 малое отклонение  $\Delta w_1$  величины скорости в начале трубопровода от ее установившегося значения  $w^0$  будет

$$\begin{aligned} w_1 - w^0 = \Delta w_1 &= \left( \frac{\partial w_1}{\partial G_1} \right)^0 \Delta G_1 + \left( \frac{\partial w_1}{\partial \rho_1} \right)^0 \Delta \rho_1 = \frac{1}{g\rho^0 F} \Delta G - \frac{G^0}{g(\rho^0)^2 F} \Delta \rho_1 = \\ &= \frac{1}{g\rho^0 F} \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} \right)^0 \Delta x - \frac{G^0}{g(\rho^0)^2 F} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial p_1} \right)^0 \Delta p_1 \end{aligned} \quad (6.62)$$

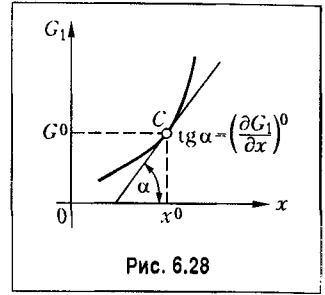


Рис. 6.28

(установившиеся значения  $w^0$ ,  $G^0$ ,  $\rho^0$  пишутся без индекса 1, так как они одинаковы вдоль всего трубопровода). Величина  $\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}\right)^0$  есть тангенс угла наклона касательной в точке  $C$  (рис. 6.28), соответствующей установившемуся процессу в трубопроводе. На основании (6.51) и (6.53)

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_1}\right)^0 = \frac{1}{a^2}.$$

Введем безразмерную величину относительного отклонения управляющего клапана:

$$\xi = \frac{x - x^0}{x_n} = \frac{\Delta x}{x_n}, \quad (6.63)$$

где  $x_n$  — условное номинальное значение, равное

$$x_n = \frac{G^0}{k \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}\right)^0}. \quad (6.64)$$

Кроме того, заметим, что согласно (6.60)

$$w^0 = \frac{G^0}{g\rho^0 F}. \quad (6.65)$$

Подставляя все это в (6.62), с учетом (6.56) и (6.55) получаем уравнение поступления газа через управляющий клапан в начале трубопровода:

$$\varphi_1 + \psi_1 = \xi, \quad (6.66)$$

которое является первым граничным условием для уравнений объекта.

Расход газа в конце трубопровода у потребителей можно записать согласно (6.60) в виде

$$G_2 = Fg\rho_2 w_2. \quad (6.67)$$

С другой стороны, известно, что при выходе газа из трубопровода (в случае критического истечения, которым мы для простоты и ограничимся) будет

$$G_2 = Q \sqrt{2g \frac{p_2}{v_2}}, \quad (6.68)$$

где  $Q$  — площадь некоторого эквивалентного выходного сечения на конце трубопровода у потребителей (это величина, которая может меняться как угодно по произво-

ду потребителя; она выражает собой, следовательно, внешнее возмущающее воздействие на данную систему);  $p_2$  — давление в конце трубопровода перед выходом к потребителям;  $v_2$  — удельный объем газа там же.

Уравнение для отклонения величины расхода в процессе управления от его установившегося значения в линеаризованном виде на основании (6.67), (6.51), (6.65) и (6.55) будет

$$\begin{aligned}\Delta G &= \left(\frac{\partial G_2}{\partial w_2}\right)^0 \Delta w_2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_2}\right)^0 \left(\frac{\partial p_2}{\partial p_2}\right) \Delta p_2 = \\ &= Fg\rho^0 \Delta w_2 + \frac{Fg w^0}{a^2} \Delta p_2 = \frac{G^0}{k} (\psi_2 + \varphi_2).\end{aligned}\quad (6.69)$$

Выразим  $\Delta G_2$  также из (6.68), т. е. через изменение выходного сечения у потребителя, считая для простоты  $v_2 = \text{const} = v^0$ :

$$\Delta G_2 = \left(\frac{\partial G_2}{\partial Q}\right)^0 \Delta Q + \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_2}\right)^0 \Delta p_2 = \sqrt{2g \frac{p_0}{v_0}} \Delta Q + Q^0 \sqrt{\frac{g}{2v^0 p^0}} \Delta p_2.$$

Учитывая, что из (6.68)

$$G^0 = Q^0 \sqrt{2g \frac{p^0}{v^0}}, \quad (6.70)$$

и вводя безразмерную величину изменения выходного сечения, т. е. внешнего возмущающего воздействия

$$f(t) = \frac{\Delta Q}{Q^0} \quad (6.71)$$

получим

$$\Delta G_2 = G^0 \left( f + \frac{1}{2} \varphi_2 \right). \quad (6.72)$$

Сравнение выражений (6.69) и (6.72) дает искомое уравнение потребления газа в конце трубопровода:

$$\psi_2 = kf(t) - \left(1 - \frac{k}{2}\right) \varphi_2, \quad (6.73)$$

которое является вторым граничным условием для уравнения объекта (6.57). Уравнение потребления (6.73) записано для общего случая процесса управления с переменным внешним возмущающим воздействием, выраженным через относительную величину выходного сечения  $f$  у потребителей. При исследовании же переходного

процесса в системе, когда после некоторого возмущения потребление установилось ( $Q = \text{const} = Q^0, f = 0$ ), уравнение (6.73) будет иметь вид

$$\psi_2 = -\left(1 - \frac{k}{2}\right)\phi_2. \quad (6.74)$$

**Уравнение управляющего устройства.** Уравнение чувствительного элемента

$$T_1^2 \ddot{\eta} + T_2 \dot{\eta} + \eta = -k_1 \phi_1. \quad (6.75)$$

Здесь  $T_1, T_2$  и  $k_1$  — постоянные времени и коэффициент передачи, а

$$\eta = \frac{\Delta y}{y_{\text{н}}}, \quad (6.76)$$

где  $y_{\text{н}}$  — некоторое номинальное перемещение. Индекс 1 при переменной  $\phi$  в уравнении (6.75) означает, что чувствительный элемент измеряет давление газа в начале трубопровода.

Уравнение управляющего элемента со струйной трубкой

$$\sigma = \frac{\Delta y - \Delta z}{y_{\text{н}}} = \eta - \zeta. \quad (6.77)$$

Уравнение пневматического двигателя будет

$$T_s \frac{\dot{u}}{u_{\text{н}}} = T_s \dot{\xi} = \sigma, \quad (6.78)$$

где  $T_s$  — время двигателя.

Уравнение жесткой обратной связи согласно рис. 6.27 будет

$$\zeta = \xi. \quad (6.79)$$

**Уравнение всей системы управления.** Итак, для данной системы автоматического управления имеем уравнения объекта (6.57) с граничными условиями (6.66) и (6.73) или (6.74) и уравнения управляющего устройства (6.75), (6.77), (6.78) и (6.79).

Решение уравнений в частных производных (6.57), как известно, можно записать в виде следующей суммы некоторых двух функций от аргументов  $(t - \gamma T_0 \lambda)$  и  $(t + \gamma T_0 \lambda)$ :

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \Phi'(t - \gamma T_0 \lambda) + \Phi''(t + \gamma T_0 \lambda); \\ \psi &= \frac{1}{\gamma} [\Phi'(t - \gamma T_0 \lambda) - \Phi''(t + \gamma T_0 \lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

(легко проверить, что при подстановке этих выражений уравнения (6.57) удовлетворяются тождественно).

Для определения функций  $\Phi'$  и  $\Phi''$  используются граничные условия. При исследовании переходного процесса уравнение потребления газа в конце трубопрово-



да (т. е. второе граничное условие) возьмем в виде (6.74). Это соответствует значению  $l = L$ , т. е.  $\lambda = 1$ . Поэтому из условия (6.74) с подстановкой (6.80) получаем

$$\Phi''(t + \gamma T_0) = \frac{1 + \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)}{1 - \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)} \Phi'(t - \gamma T_0),$$

откуда

$$\Phi''(t) = b\Phi'(t - \tau), \quad (6.81)$$

где обозначено

$$b = \frac{1 + \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)}{1 - \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right)}; \quad \tau = 2\gamma T_0. \quad (6.82)$$

Для начала трубопровода, где  $\lambda = 0$ , из (6.80) с учетом (6.81) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi'(t) + \Phi''(t) = \Phi'(t) + b\Phi'(t - \tau); \\ \psi_1 &= \frac{1}{\gamma} [\Phi'(t) + \Phi''(t)] = \frac{1}{\gamma} [\Phi'(t) + b\Phi'(t - \tau)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

К этим уравнениям надо присоединить первое граничное условие (6.66) и уравнения управляющего устройства.

Запишем теперь все уравнения системы управления в символической операторной форме, заметив предварительно, что согласно § 6.6 равенство (6.81) в операторной форме имеет вид

$$\Phi'' = be^{-\tau p} \Phi'. \quad (6.84)$$

В результате все указанные уравнения системы управления будут:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= (1 + be^{-\tau p}) \Phi'; \\ \psi_1 &= \frac{1}{\gamma} (1 - be^{-\tau p}) \Phi'; \\ \varphi_1 + \psi_1 &= \xi; \\ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) \eta &= -k_1 \varphi_1; \\ \sigma &= \eta - \zeta; \quad T_s p \xi = \sigma; \quad \zeta = \xi \end{aligned} \right\} \quad (6.85)$$

или после объединения некоторых уравнений

$$\left. \begin{aligned} \left[ (1 + be^{-\tau p}) + \frac{1}{\gamma}(1 - be^{-\tau p}) \right] \Phi' &= \xi; \\ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)\eta &= -k_1(1 + be^{-\tau p})\Phi'; \\ (T_3 p + 1)\xi &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

Исключив отсюда переменные  $\xi$  и  $\eta$ , приходим к одному дифференциальному уравнению данной системы автоматического управления:

$$\left\{ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)(T_3 p + 1) \left[ (1 + be^{-\tau p}) + \frac{1}{\gamma}(1 - be^{-\tau p}) \right] + k_1(1 + be^{-\tau p}) \right\} \Phi' = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$\left\{ \left[ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + \frac{k_1 \gamma}{\gamma + 1} \right] + b \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[ (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + \frac{k_1 \gamma}{\gamma - 1} \right] e^{-\tau p} \right\} \Phi' = 0. \quad (6.87)$$

Это уравнение имеет в основном тот же вид, что и уравнение системы с запаздыванием (например, (6.40)). Здесь оно определяет величину  $\Phi'$ , через которую затем находятся из вышенаписанных соотношений управляемая величина  $\phi_1$  и другие. Параметр  $\tau$  в этом уравнении согласно (6.82) и (6.58) вычисляется по формуле

$$\tau = 2 \frac{L}{a}, \quad (6.88)$$

т. е.  $\tau$  есть удвоенное время прохождения звука в газе по данному трубопроводу.

## § 6.8. Устойчивость двумерных систем с антисимметричными связями

В практике встречаются *двумерные* системы управления с антисимметричными связями. Структурная схема такой системы изображена на рис. 6.29. Она содержит два идентичных канала с одинаковыми передаточными функциями  $W_0(p) = W_1(p) = W_2(p)$  и антисимметричные связи. К такому виду сводятся некоторые гироскопические устройства, двухканальные системы слежения и др.

Матрица-столбец выходных (управляемых) величин связана с матрицей-столбцом ошибок выражением

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0(p) & aW_0(p) \\ -aW_0(p) & W_0(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bar{W}(p)\bar{x}. \quad (6.89)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$|\bar{E} + \bar{W}(p)| = \begin{vmatrix} 1 + W_0 & aW_0 \\ -aW_0 & 1 + W_0 \end{vmatrix} = (1 + W_0)^2 + a^2W_0^2 = 0. \quad (6.90)$$

Здесь  $\bar{E}$  — единичная матрица  $2 \times 2$ .

Для расчета устойчивости введем в рассмотрение комплексные величины

$$\left. \begin{aligned} g^* &= g_1 + jg_2; \\ y^* &= y_1 + jy_2; \\ x^* &= x_1 + jx_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.91)$$

Матричная зависимость (6.89) дает два равенства:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W_0(p)x_1 + aW_0(p)x_2; \\ y_2 &= -aW_0(p)x_1 + W_0(p)x_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.92)$$

Умножая второе равенство на  $j$  и складывая, получаем для комплексных величин

$$y^* = (1 - ja)W_0(p)x^* = W_0(p)x^*. \quad (6.93)$$

Здесь введена эквивалентная передаточная функция разомкнутой двумерной системы

$$W_0(p) = (1 - ja)W_0(p). \quad (6.94)$$

Для дальнейшего расчета может использоваться критерий Найквиста в своей обычной формулировке. Однако для построения а. ф. х. разомкнутой системы следует использовать частотную передаточную функцию

$$W_3(j\omega) = (1 - ja)W_0(j\omega).$$

Ее модуль

$$|W_3(j\omega)| = |W_0(j\omega)| \cdot \sqrt{1 + a^2},$$

а фаза

$$\psi_3(\omega) = \psi_0(\omega) - \text{arctg } a.$$

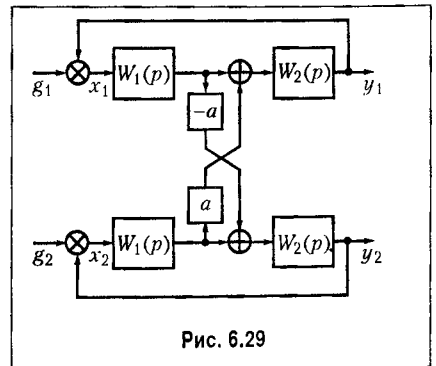


Рис. 6.29

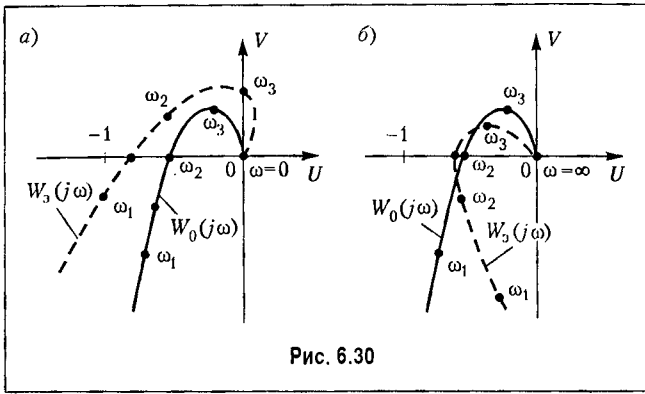


Рис. 6.30

По сравнению с исходной а. ф. х.  $W_0(j\omega)$  модуль увеличивается в  $\sqrt{1+a^2}$  раз и появляется дополнительный фазовый сдвиг  $\alpha = -\operatorname{arctg} a$ . Это означает, что каждая точка исходной а. ф. х. удаляется от начала координат и поворачивается по часовой стрелке, если  $a > 0$  (рис. 6.30, а), и против часовой стрелки, если  $a < 0$  (рис. 6.30, б).

Заметим, что в случае перехода к комплексным величинам  $y^*$  и  $x^*$  можно произвести расчет по а. ф. х. исходной одноканальной системы  $W_0(j\omega)$ . В этом случае колебательная граница устойчивости будет при выполнении условия

$$W_3(j\omega) = (1 - ja) W_0(j\omega) = -1. \tag{6.95}$$

Рассмотренный метод позволяет упростить определенные устойчивости двумерной системы по сравнению с использованием результирующего характеристического уравнения (6.90), так как требуют рассмотрения передаточной функции  $W_0(p)$  одного изолированного канала.

## Глава 7 ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 7.1. Общие соображения

Дифференциальное уравнение обыкновенной линейной системы автоматического управления, записанное для ошибки управления, согласно (5.6) имеет вид

$$D(p) x(t) = Q(p) g(t) + N(p) f(t), \tag{7.1}$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  — алгебраический оператор дифференцирования;  $g(t)$  — задающее воздействие;  $f(t)$  — возмущающее воздействие.

Решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (7.1) будет

$$x(t) = x_n(t) + x_{п}(t), \tag{7.2}$$

где  $x_{\text{п}}(t)$  — общее решение однородного уравнения  $D(p)x(t) = 0$ , имеющее вид

$$x_{\text{п}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (7.3)$$

причем  $C_1, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных значений процесса, а  $p_1, \dots, p_n$  — корни характеристического уравнения  $D(p) = 0$ .

Выражение (7.3) записано для случая отсутствия нулевых и кратных корней.

Частное, или *вынужденное решение*  $x_{\text{п}}(t)$  определяется правой частью уравнения (7.1), и оно соответствует некоторому установившемуся режиму в системе, который будет существовать после затухания  $x_{\text{п}}(t)$ .

Полным решением (7.2) описывается процесс управления в линейной системе (общий случай возмущенного движения системы). Первая часть этого решения  $x_{\text{п}}(t)$  в виде (7.3) представляет собой собственное движение системы, наложенное на частное решение  $x_{\text{п}}(t)$ .

Исходное дифференциальное уравнение системы может быть записано также для управляемой величины  $y(t) = g(t) - x(t)$ . В системах стабилизации  $g(t) = 0$  и поэтому  $y(t) = -x(t)$ .

Необходимо обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Частное решение  $x_{\text{п}}(t)$  складывается из отдельных слагаемых, отвечающих отдельным членам правой части дифференциального уравнения (7.1). Если действует несколько возмущающих воздействий, то в решении будет соответственно и несколько слагаемых. При этом каждое слагаемое частного решения  $x_{\text{п}}(t)$  может определяться по отдельности для каждого возмущающего или задающего воздействия независимо от других, а затем их можно складывать. В этом состоит так называемый принцип суперпозиции.

Следовательно, если имеется дифференциальное уравнение

$$D(p)x(t) = C(p)g(t) + N_1(p)f_1(t) + N_2(p)f_2(t),$$

то частное решение, определяющее установившийся процесс в системе, будет иметь три слагаемых, каждое из которых определяется частным решением одного из уравнений:

$$D(p)x(t) = C(p)g(t); \quad D(p)x(t) = N_1(p)f_1(t); \quad D(p)x(t) = N_2(p)f_2(t).$$

Несколько иначе обстоит дело с определением переходной составляющей. В решении для переходной составляющей (7.3) произвольные постоянные  $C_1, \dots, C_n$  должны вычисляться по начальным значениям обязательно с использованием полного выражения решения (7.2), т. е. при исследовании переходных процессов в системах автоматического управления всегда надо оговаривать соответствующие внешние условия — задавать  $g(t)$  и  $f(t)$ .

Если переходный процесс ищется как решение однородного уравнения  $D(p)x(t) = 0$  при заданных начальных значениях системы, то результат такого решения отвечает случаю отсутствия задающих и возмущающих воздействий, причем система совершает свободное движение с какого-то смещенного начального положения. Если же переходный процесс происходит в результате изменения внешних условий (возмущающих сил, изменения нагрузки, перенастройки, изменения режима слежения и т. п.), то этот переходный процесс надо исследовать иначе, с определени-

ем произвольных постоянных из полного решения, включающего в себя установившуюся составляющую. Вид воздействия  $g(t)$  или  $f(t)$  и стоящих перед ними операторных многочленов оказывает существенное влияние на вид переходного процесса.

При нахождении кривой переходного процесса в системе автоматического управления возникают две трудности. Первая трудность — принципиального характера — заключается в том, что в реальных системах управления управляющие и возмущающие воздействия не являются известными функциями времени, а носят случайный характер. В связи с этим приходится рассматривать некоторые типовые входные воздействия. Типовые входные воздействия стремятся выбирать так, чтобы они были по возможности близкими к реальным воздействиям в системе автоматического управления.

Для следящих систем при  $g(t) = 0$  и систем стабилизации переходный процесс может строиться для случая приложения возмущающего воздействия. В качестве типовых используются возмущающие воздействия в виде единичной ступенчатой функции  $f(t) = 1(t)$  и в виде единичной импульсной функции  $f(t) = \delta(t)$ . Эти типовые возмущения изображены на рис. 7.1.

Входная функция первого типа часто встречается в системах автоматического регулирования и представляет собой внезапный скачок возмущающего воздействия на некоторую постоянную величину, например увеличение тока нагрузки генератора, увеличение момента нагрузки двигателя и т. п. Реакция системы на такое воздействие, построенная для управляемой величины или для ошибки, отличающихся только знаками ( $x(t) = -y(t)$ ), представляет собой переходную функцию системы для данного возмущения.

Входная функция второго типа также встречается в системах автоматического управления в виде кратковременного удара нагрузки, например при коротком замыкании электрического генератора, которое прекращается через небольшой промежуток времени системой защиты (плавкие предохранители, максимальные автоматы и

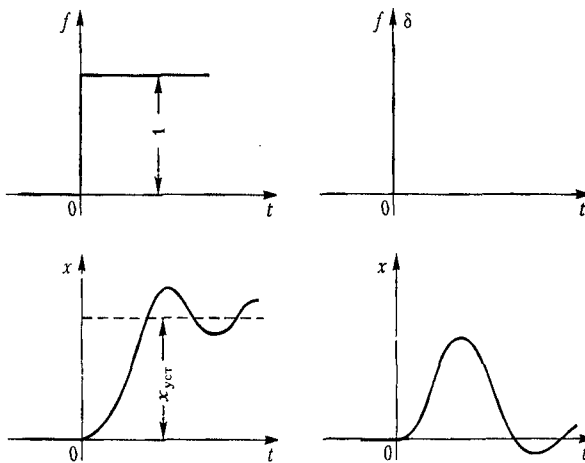


Рис. 7.1

т. п.), при кратковременном возрастании момента нагрузки двигателя и т. д. Реакция системы на воздействие этого типа представляет ее функцию веса.

В следящих системах для построения переходного процесса могут приниматься типовые задающие воздействия (рис. 7.2) в виде единичной ступенчатой функции  $g(t) = 1(t)$  или в виде воздействия, изменяющегося по линейному закону  $g(t) = at \cdot 1(t)$ . Воздействие первого типа соответствует, например, в следящих системах воспроизведения угла быстрому повороту командной оси на некоторый угол. Реакция системы  $y(t)$  на такое задающее воздействие представляет собой ее переходную функцию для задающего воздействия.

Воздействие второго типа является характерным для следящих систем воспроизведения угла, когда командная ось внезапно начинает двигаться с постоянной скоростью.

Возможно изучение поведения системы управления и в том случае, когда входное воздействие представляет собой не детерминированную (определенную), а случайную функцию времени. Этот вопрос будет рассмотрен в главе 11.

Вторая трудность — неприципиального характера — заключается в том, что обычно системы описываются дифференциальными уравнениями сравнительно высокого порядка. Это усложняет практические расчеты; потому для облегчения задачи построения кривой переходного процесса во многих случаях приходится применять вычислительные устройства непрерывного действия и цифровые вычислительные машины.

Для сложных автоматических систем в настоящее время этим методам отдается предпочтение. Важно отметить, что при использовании вычислительных машин часто можно обходиться без составления дифференциальных уравнений тех звеньев автоматической системы, для которых имеются действующие макеты. Тогда для остальной части звеньев набираются их дифференциальные уравнения на вычислительной машине, к которой подключаются имеющиеся действующие макеты. Это свойство можно использовать для испытания и настройки систем в лабораторных условиях.

Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные методы построения кривой переходного процесса. К ним относятся метод непосредственного решения линейных дифференциальных уравнений, или так называемый классический метод, использование преобразований Фурье, Лапласа и Карсона–Хевисайда, и использование вычислительных машин.

В дальнейшем изложении будем рассматривать построение переходного процесса для ошибки  $x(t)$ . Однако методика остается единой и для других случаев построения переходного процесса, например для отыскания  $y(t)$  при  $g(t) \neq 0$ .

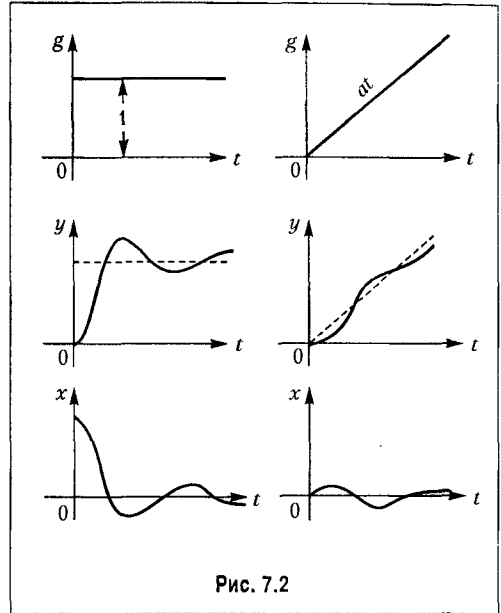


Рис. 7.2

## § 7.2. Непосредственное решение исходного дифференциального уравнения

Пусть система автоматического управления описывается линейным дифференциальным уравнением с правой частью

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) f(t). \quad (7.4)$$

Для отыскания полного решения этого уравнения необходимо найти частное или вынужденное решение уравнения с правой частью  $x_b(t)$  и определить корни характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Как указывалось выше, полное решение будет иметь вид

$$x(t) = x_b(t) + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}. \quad (7.5)$$

Дальнейшим шагом является отыскание произвольных постоянных интегрирования  $C_1, \dots, C_n$ . Для этой цели используются начальные значения: при  $t = 0$   $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$ . Начальные значения накладываются на основании физических соображений или находятся из дифференциального уравнения (7.4). Дифференцируя уравнение (7.5) по времени  $n - 1$  раз и используя начальные значения, получают  $n$  алгебраических уравнений, куда входят  $n$  неизвестных постоянных интегрирования. Совместное решение этих уравнений даст возможность определить искомые постоянные интегрирования  $C_1, \dots, C_n$ .

Операции вычисления корней и совместного решения алгебраических уравнений являются трудоемкими. Это особенно относится ко второй операции, так как вычисление корней может быть сделано довольно быстро при помощи стандартных программ для цифровых вычислительных машин. В связи с этим использование этого метода построения кривой переходного процесса ограничивается случаем сравнительно невысокого порядка дифференциального уравнения, обычно не выше третьего.

Расчеты получаются более простыми в том случае, когда правая часть (7.4) равна нулю, т. е. имеется однородное дифференциальное уравнение. Тогда частное решение равно нулю и полное решение (7.5) приобретает более простой вид:

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}. \quad (7.6)$$

В этом случае переходный процесс определяется только видом корней и начальными значениями. В табл. 7.1 для этого случая приведены формулы для получающегося переходного процесса при различных степенях дифференциального уравнения  $n$  (от 1 до 3) и корнях различного вида. В таблице приняты следующие обозначения:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — абсолютные значения вещественных некрратных корней;  $\gamma$  и  $\lambda$  — абсолютные значения вещественной и мнимой частей комплексного корня;  $x_0$  — начальное значение исследуемой координаты;  $x'_0$  — начальное значение скорости изменения исследуемой координаты;  $x''_0$  — начальное значение ускорения.



Таблица 7.1

$n$	Вещественные корни	Комплексные корни
1	$x = x_0 e^{-\alpha_1 t}$	—
2	$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$ $A_1 = \frac{\alpha_2 x_0 + x_0'}{\alpha_2 - \alpha_1}$ $A_2 = \frac{\alpha_1 x_0 + x_0'}{\alpha_1 - \alpha_2}$	$x = (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $B = x_0$ $C = \frac{\gamma x_0 + x_0'}{\lambda}$
3	$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + A_3 e^{-\alpha_3 t}$ $A_1 = \frac{\alpha_2 \alpha_3 x_0 + (\alpha_2 + \alpha_3) x_0' + x_0''}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}$ $A_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_3 x_0 + (\alpha_1 + \alpha_3) x_0' + x_0''}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)}$ $A_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 x_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_0' + x_0''}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}$	$x = A e^{-\alpha_1 t} + (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $A = \frac{(\gamma^2 + \lambda^2) x_0 + 2\gamma x_0' + x_0''}{(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2}$ $B = \frac{\alpha_1 (\alpha_1 - 2\gamma) x_0 + 2\gamma x_0' - x_0''}{(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2}$ $C = \frac{\alpha_1 (\lambda^2 - \gamma^2 + \gamma \alpha_1) x_0 + \lambda [(\gamma - \alpha_1)^2 + \lambda^2] + (\alpha_1^2 - \gamma^2 + \lambda^2) x_0' + (\alpha_1 - \gamma) x_0''}{\gamma [(\gamma - \alpha_1)^2 + \gamma^2]}$

### § 7.3. Сведение неоднородного уравнения к однородному

Для типового входного воздействия вида единичной ступенчатой функции решение неоднородного уравнения (7.4) может быть сведено к решению уравнения без правой части переходом к другой переменной. Примем, что  $f(t) = 1(t)$ , причем единица имеет размерность переменной, стоящей в правой части (7.4). Тогда установившееся значение переменной  $x$  при  $t \rightarrow \infty$  можно найти из (7.4), положив все производные равными нулю:

$$x(\infty) = x_{уст} = b_m / a_n \cdot 1. \quad (7.7)$$

Это установившееся значение представляет собой частное или вынужденное решение неоднородного уравнения (7.4), т. е.  $x_p(t) = x_{уст}$ .

Введем новую переменную

$$z(t) = x(t) - x_{уст}(t) = x(t) - x_{уст} \quad (7.8)$$

Решение неоднородного уравнения (7.4) для  $z(t)$  может быть записано в виде

$$z(t) = x(t) - x_{уст} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (7.9)$$

что подобно решению типа (7.6). Этому решению соответствует исходное дифференциальное уравнение без правой части

$$a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} z}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_n z = 0. \quad (7.10)$$

Из уравнения (7.8) нетрудно определить связь между начальными значениями для исходной переменной  $x$  и новой переменной  $z$  при  $t = 0$ :

$$z_0 = x_0 - x_{уст}; \quad z'_0 = x'_0, \dots, z_0^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}.$$

После нахождения решения для переменной  $z$  по формуле (7.8) можно легко вернуться к исходной переменной  $x$  смещением решения на величину  $x_{уст}$ .

Однако эти рассуждения пока справедливы для случая, когда степень операторного многочлена в правой части (7.4) равна нулю ( $m = 0$ ) и дифференциальное уравнение (7.4) имеет вид

$$D(p) x(t) = b_m f(t).$$

Это происходит потому, что, вообще говоря, необходимо различать начальные значения, которые существовали в системе до приложения возмущения, т. е. при времени  $t = -0$ , и непосредственно сразу после его приложения, т. е. при времени  $t = +0$ . Остановимся на этом вопросе более подробно в случае приложения возмущения типа ступенчатой функции.

Для простоты расчетов для времени  $t = -0$  почти всегда принимают нулевые начальные значения, т. е.  $x_{-0} = 0$ ,  $x'_{-0} = 0$ ,  $x''_{-0} = 0$  и т. д. В дальнейшем под *нулевыми начальными значениями* будем понимать именно эти равенства.

Начальные значения, которые будут иметь место непосредственно после приложения ступенчатой функции, т. е. при  $t = +0$  (обозначим их  $x_{+0} = 0$ ,  $x'_{+0} = 0$ ,  $x''_{+0} = 0$  и т. д.), можно определить из исходного дифференциального уравнения (7.4). Не останавливаясь на доказательстве, приведем конечные результаты. Для первых  $n - m$  начальных значений имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} x_{+0} &= x_{-0}, \\ x'_{+0} &= x'_{-0}, \\ &\dots \\ x_{+0}^{(n-m-1)} &= x_{-0}^{(n-m-1)} \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Таким образом, для самой координаты и первых  $(n - m - 1)$  производных нулевые начальные значения сохраняются и после приложения ступенчатой функции.

Для остальных начальных значений выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} x_{+0}^{(n-m)} &= x_{-0}^{(n-m)} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1, \\ x_{+0}^{(n-m+1)} &= x_{-0}^{(n-m+1)} + \frac{b_1}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}], \\ x_{+0}^{(n-m+2)} &= x_{-0}^{(n-m+2)} + \frac{b_2}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_2}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}] - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-m+1)} - x_{-0}^{(n-m+1)}], \\ x_{+0}^{(n-1)} &= x_{-0}^{(n-1)} + \frac{b_{m-1}}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_{m-1}}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}] - \dots - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-2)} - x_{-0}^{(n-2)}]. \end{aligned} \right\} (7.12)$$

Эти формулы показывают, что только при  $m = 0$ , т. е. для дифференциального уравнения  $D(p)x(t) = b_m f(t)$  при скачке  $f(t)$ , начальные значения при  $t = +0$  соответствуют начальным значениям при  $t = -0$ . В формулах (7.12) множитель 1 имеет размерность величины  $f(t)$ . Если воздействие прикладывается в виде скачка, не равного единице, то вместо 1 следует поставить величину скачка.

Пр и м е р. Найдем реакцию системы на единичную ступенчатую функцию при нулевых начальных значениях, т. е. переходную функцию, если дифференциальное уравнение имеет вид

$$(0,05p^2 + 0,4p + 1)x(t) = (0,5p + 1)f(t).$$

Для простоты примем, что переменная  $x$  является безразмерной величиной. Решая характеристическое уравнение  $0,05p^2 + 0,4p + 1 = 0$ , находим корни:

$$p_{1,2} = -\gamma \pm j\lambda = -4 \pm j2.$$

Согласно заданным условиям  $x_{-0} = 0$  и  $x'_{-0} = 0$ . Так как в данном случае  $n = 2$  и  $m = 1$ , то начальные значения для  $t = +0$  в соответствии с (7.11) и (7.12), будут

$$x_{+0} = x_{-0} = 0, \quad x'_{+0} = x'_{-0} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1 = 0 + \frac{0,5}{0,05} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем установившееся значение искомой координаты:

$$x_{\text{уст}} = b_m/a_n \cdot 1 = 1.$$

Введем новую переменную  $z(t) = x(t) - 1$ . Начальные значения для новой переменной:

$$z_{-0} = x_{-0} - x_{\text{уст}} = 0 - 1 = -1; \quad z'_{-0} = x'_{-0} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

На основании табл. 7.1 для  $n = 2$  и случая комплексных корней имеем

$$z = (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t)e^{-\gamma t},$$

где

$$B = z_{-0} = -1; \quad C = \frac{\gamma z_{-0} + z'_{-0}}{\lambda} = \frac{-4 + 10}{2} = 3.$$

Таким образом

$$z = (-\cos 2t + 3 \sin 2t)e^{-4t}.$$

Возвращаясь к исходной координате, получаем переходную функцию

$$h(t) = x(t) = 1 + z(t) = 1 - (\cos 2t - 3 \sin 2t)e^{-4t}.$$

Аналогичным образом можно осуществить переход от неоднородного дифференциального уравнения (7.4) к уравнению без правой части при воздействии типа импульсной функции. В этом случае установившееся значение  $x_{уст} = 0$ , так как в случае  $f(t) = \delta(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  будет  $f(\infty) = 0$ . Поэтому нет нужды вводить новую смещенную величину  $z(t)$  и задача заключается только в отыскании начальных значений при  $t = +0$ .

Так как единичная импульсная функция является производной от единичного скачка  $\delta(t) = \dot{1}(t)$ , то формулы пересчета начальных значений можно получить из (7.11) и (7.12), если заменить в них  $m$  на  $m + 1$  и положить  $b_{m+1} = 0$ . Тогда вместо (7.11) для первых  $n - m - 2$  начальных значений получим

$$\left. \begin{aligned} x_{+0} &= x_{-0}, \\ x'_{+0} &= x'_{-0}, \\ &\dots \\ x_{+0}^{(n-m-2)} &= x_{-0}^{(n-m-2)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

и вместо (7.12) для всех остальных начальных значений

$$\left. \begin{aligned} x_{-0}^{(n-m-1)} &= x_{-0}^{(n-m-1)} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1, \\ x_{+0}^{(n-m)} &= x_{-0}^{(n-m)} + \frac{b_1}{a_1} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} \left[ x_{+0}^{(n-m-1)} - x_{-0}^{(n-m-1)} \right], \\ x_{+0}^{(n-m+1)} &= x_{-0}^{(n-m+1)} + \frac{b_2}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_2}{a_0} \left[ x_{+0}^{(n-m-1)} - x_{-0}^{(n-m-1)} \right] - \frac{a_1}{a_0} \left[ x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)} \right], \\ &\dots \\ x_{-0}^{(n-1)} &= x_{-0}^{(n-1)} + \frac{b_m}{a_0} \cdot 1 - \frac{a_m}{a_0} \left[ x_{+0}^{(n-m-1)} - x_{-0}^{(n-m-1)} \right] - \dots - \frac{a_1}{a_0} \left[ x_{+0}^{(n-2)} - x_{-0}^{(n-2)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

В формулах (7.14) единица имеет размерность импульса величины  $f(t)$ , т. е. размерность  $f(t)$ , умноженную на время. Если воздействие поступает в виде неединичного импульса, то в эти формулы вместо единицы необходимо подставить заданную величину импульса.

Как видно из (7.14), при воздействии в виде импульса, в отличие от скачка, даже для дифференциального уравнения вида  $D(p)x(t) = b_0 f(t)$ , не будет равенства начальных значений для  $t = +0$  и  $t = -0$ , так как будет скачок в значении  $(n - 1)$ -й производной. Скачок же первой производной  $x'$ , т. е. перелом кривой, будет уже при  $m = n - 2$ , а скачок самой величины  $x$  — при  $m = n - 1$ .

Пример. Найдём реакцию системы на единичный импульс при нулевых начальных значениях, т. е. функцию веса для дифференциального уравнения, приведенного в предыдущем примере.

Так как в рассматриваемом примере  $m = n - 1$ , то в соответствии с (7.14) получим

$$x_{+0} = x_{-0} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1 = 0 + \frac{0,5}{0,05} = 10 \text{ с}^{-1},$$

$$x'_{+0} = x'_{-0} + \frac{b_1}{a_1} \cdot 1 - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0} - x_{-0}] = 0 + \frac{1}{0,05} \cdot 1 - \frac{0,4}{0,05} \cdot 10 = -60 \text{ с}^{-2}.$$

В соответствии с табл. 7.1 для  $n = 2$  и комплексных корней

$$x = (B \cos 2t + C \sin 2t) e^{-4t},$$

где

$$B = x_{+0} = 10 \text{ с}^{-1}, \quad C = \frac{\gamma x_{+0} + x'_{+0}}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10 - 60}{2} = -10 \text{ с}^{-2}.$$

Окончательно получаем функцию веса

$$w(t) = x(t) = 10 (\cos 2t - \sin 2t) e^{-4t}.$$

Этот результат можно было получить также непосредственным путем для  $h(t)$ , полученного в предыдущем примере, так как  $w(t) = h'(t)$ .

## § 7.4. Использование преобразований Фурье, Лапласа и Карсона–Хевисайда

Как известно, периодическая функция времени, подчиняющаяся условиям Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t),$$

где  $k$  — порядок гармоники, а  $\omega = 2\pi/T$  — основная круговая частота.

Этот ряд может быть представлен также в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega t},$$

где комплексный коэффициент  $C_k$  определяется выражением

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Таким образом, периодическая функция времени может быть представлена в виде совокупности дискретных гармоник с интервалом по частоте между соседними гармониками, равным основной частоте  $\omega$ .

Непериодическая функция времени может рассматриваться как периодическая с периодом, стремящимся к бесконечности. В этом случае вместо приведенных формул получаются два интегральных уравнения Фурье, связывающих оригинал, т. е. функцию времени  $f(t)$  и ее частотное изображение  $F(j\omega)$ , которое называется также преобразованием Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (7.15)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.16)$$

В отличие от разложения в ряд Фурье здесь получается разложение в *непрерывный спектр частот* с интервалом по частоте между соседними гармониками, равным бесконечно малой величине  $d\omega$ .

Недостатком интеграла Фурье является то, что он принадлежит к числу несобственных интегралов и может применяться для так называемых абсолютно интегрируемых функций времени, т. е. для функций времени, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

От этого недостатка свободно преобразование Лапласа, связывающее оригинал и изображение следующими интегральными уравнениями:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (7.17)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (7.18)$$

причем функция времени должна быть равна нулю ( $f(t) = 0$ ) при  $t < 0$ .

В отличие от преобразования Фурье здесь изображение функции времени является функцией не частоты, а некоторой комплексной величины  $s = c + j\omega$ . Вещественная часть ее представляет собой так называемую абсциссу абсолютной сходимости, которая выбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-ct} dt < \infty.$$

Для большинства функций, с которыми приходится иметь дело в управлении, абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, т. е.  $\sigma = 0$ . Поэтому для этих функций преобразование Лапласа переходит в преобразование Фурье, если произвести подстановку  $s = j\omega$ .

Уравнения (7.17) и (7.18) часто записывают в сокращенном виде:

$$F(s) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(s)]. \quad (7.19)$$

Иногда вместо буквы  $s$  применяется буква  $p$ , т. е. изображение Лапласа записывается в виде  $F(p)$ , но в этом случае  $p$  представляет собой не оператор дифференцирования, а комплексную величину:  $p = \sigma + j\omega$ .

В связи с этим формулы (7.19) и (7.20) могут быть записаны в виде

$$F(p) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(p)]. \quad (7.20)$$

В некоторых случаях, особенно в задачах электротехники, используется преобразование Карсона–Хевисайда, которое отличается от преобразования Лапласа дополнительным умножением на величину  $p$ :

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (7.21)$$

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varphi(p)}{p} dp. \quad (7.22)$$

Таким образом, между преобразованиями Лапласа и Карсона–Хевисайда существует соотношение

$$\varphi(p) = pF(p). \quad (7.23)$$

Преобразование Карсона–Хевисайда нашло распространение наряду с преобразованием Лапласа. Это объясняется тем, что исторически первым для решения дифференциальных уравнений был использован так называемый операторный метод Хевисайда, который, по сути дела, использовал преобразования (7.21) и (7.22).

Кроме того, удобство преобразования Карсона–Хевисайда заключается в том, что изображение постоянной величины  $A$ , точнее, ступенчатой функции  $A \cdot 1(t)$ , равно самой постоянной величине, что легко доказывается использованием выражения (7.21). Поэтому во многих случаях преобразование Карсона–Хевисайда сливается с операторной записью дифференциальных уравнений.

Основное достоинство преобразований Фурье, Лапласа и Карсона–Хевисайда заключается в том, что операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются алгебраическими действиями по отношению к изображениям.

В табл. 7.2 приведены основные формулы и свойства изображений Лапласа и Карсона–Хевисайда. Изображение Фурье может быть получено из изображения Лапласа подстановкой  $p = j\omega$ .

<sup>1</sup> В дальнейшем изложении при использовании изображения функции времени комплексная величина будет обозначаться буквой  $p$ . Однако при этом необходимо не путать эту величину с оператором дифференцирования  $p \cdot d/dt$ , который применяется при использовании функции времени (оригиналов).

Таблица 7.2. Преобразования Лапласа и Карсона-Хевисайда

Наименование	Оригинал	Изображение Лапласа	Изображение Карсона-Хевисайда
Свойство линейности	$Af(t)$ $f_1(t) + f_2(t)$	$AF(p)$ $F_1(p) + F_2(p)$	$A\varphi(p)$ $\varphi_1(p) + \varphi_2(p)$
Теорема подобия	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$	$\varphi\left(\frac{p}{a}\right)$
Теорема запаздывания	$f(t - \tau_0)$	$e^{-\tau_0 p}F(p)$	$e^{-\tau_0 p}\varphi(p)$
Теорема смещения в комплексной плоскости	$e^{-\lambda t}f(t)$	$F(p + \lambda)$	$\frac{p}{p + \lambda}\varphi(p + \lambda)$
Правило дифференцирования при нулевых начальных значениях	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p)$	$p^n \varphi(p)$
Правило интегрирования при нулевых начальных значениях	$\int \int \dots \int f(t) dt^n$	$\frac{F(p)}{p^n}$	$\frac{\varphi(p)}{p^n}$
Теорема о конечном значении	$f(\infty)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$	$\lim_{p \rightarrow 0} \varphi(p)$
Теорема о начальном значении	$f(0)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p)$
Единичная импульсная функция	$\delta(t)$	1	$p$
Единичная ступенчатая функция	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$	1
Неединичная ступенчатая функция	$A \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{A}{p}$	$A$
Степенная функция	$t^n \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{n!}{p^n}$
Экспонента	$e^{-at} \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{p}{p+a}$
Смещенная экспонента	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{p+a}$
Синусоида	$\sin \lambda t \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$	$\frac{\lambda p}{p^2 + \lambda^2}$
Косинусоида	$\cos \lambda t \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$	$\frac{p^2}{p^2 + \lambda^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-\gamma t} \sin \lambda t \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{\lambda}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$	$\frac{\lambda p}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-\gamma t} \cos \lambda t \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{p+\gamma}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$	$\frac{p(p+\gamma)}{(p+\gamma)^2 + \lambda^2}$



Формулы для дифференцирования и интегрирования оригинала даны для случая нулевых начальных значений.

Для ненулевых начальных значений из (7.17) можно получить изображение по Лапласу производной оригинала ( $s$  заменено на  $p$ ):

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0), \quad (7.24)$$

где  $F(p)$  — изображение самой функции.

Аналогично для второй производной

$$L[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \quad (7.25)$$

и для производной любого порядка

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (7.26)$$

При нулевых начальных значениях

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) \quad (7.27)$$

или

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p), \quad (7.28)$$

т. е. операция дифференцирования оригинала заменяется для изображения умножением на комплексную величину  $p$ .

Аналогично для преобразования Карсона–Хевисайда

$$f'(t) \doteq p\varphi(p) - pf(0), \quad (7.29)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \varphi(p) - p^n f(0) - \dots - pf^{(n-1)}(0). \quad (7.30)$$

При нулевых начальных условиях

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \varphi(p).$$

Аналогичным образом можно найти изображение интеграла от функции времени:

$$\int f(t) dt \doteq \frac{1}{p} [F(p) + f_0^{(-1)}], \quad (7.31)$$

где  $f_0^{(-1)}$  представляет собой значение интеграла, находящегося в левой части (7.31), при  $t = 0$ :

$$f_0^{(-1)} = \left[ \int f(t) dt \right]_{t=0}.$$

Для нулевых начальных значений выражение (7.31) упрощается:

$$\int f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p},$$

т. е. интегрированию по времени оригинала соответствует деление на изображение на комплексную величину  $p$ .

Рассмотрим теперь использование изображений для решения дифференциального уравнения

$$D(p)x(t) = N(p)f(t) \quad (7.32)$$

на примере преобразования Лапласа.

Перейдем в левой и правой частях (7.32) к изображениям Лапласа. При этом оператор дифференцирования  $p = d/dt$  в полиномах  $D(p)$  и  $N(p)$  заменяется на комплексную величину  $p = s + j\omega$ , а вместо оригиналов  $x(t)$  и  $f(t)$  появляются их изображения  $X(p)$  и  $F(p)$ . В результате получаем

$$D(p)X(p) - D_0(p) = N(p)F(p),$$

где  $D_0(p)$  обозначает сумму всех членов, содержащих начальные значения.

Отсюда находится изображение искомой величины:

$$X(p) = \frac{N(p)F(p) + D_0(p)}{D(p)}. \quad (7.33)$$

Последнее выражение требует некоторых пояснений в связи с различными возможными трактовками понятия начальных значений. Интегральное преобразование Лапласа (7.17), следует, вообще говоря, записать в более строгом виде (при замене  $s$  на  $p$ ):

$$F(p) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(t)e^{-pt} dt. \quad (7.34)$$

Это дает возможность введения двух несколько отличающихся понятий преобразования Лапласа (и соответственно преобразования Карсона–Хевисайда).

**1. Преобразование Лапласа по начальным значениям справа.** Если в выражении (7.34) нижний предел интегрирования стремится к нулю, оставаясь положительным ( $a > 0$ ), то в изображении производной (7.26) следует брать начальные условия при  $t = +0$ , т. е. для момента времени, который будет сразу после приложения к системе внешних воздействий. В этом случае

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0).$$

Для использования последней формулы необходимо знание начальных значений справа, что оказывается не всегда удобным и требует расчета по формулам § 7.3. Заметим, что даже в тех случаях, когда до приложения воздействия система находилась в покое, начальные значения справа могут быть ненулевыми и полином  $D_0(p)$ , как правило, отличен от нуля.

Кроме того, если рассматриваемая функция времени  $f(t)$  имеет при  $t = 0$  особенности типа  $\delta$ -функции, то это обстоятельство не будет учтено в найденном изображении. Так, например, изображение самой  $\delta$ -функции и ее производных оказывается при этом равным нулю:

$$\int_0^{\infty} \delta^{(n)}(t)e^{-pt} dt = \int_{+0}^{\infty} \delta^{(n)}(t)e^{-pt} dt = 0.$$

**2. Преобразование Лапласа по начальным значениям слева.** Если в формуле (7.34) нижний предел интегрирования стремится к нулю, оставаясь отрицательным ( $a < 0$ ), то в выражении для изображения производной (7.26) следует брать начальные значения при  $t = -0$ , т. е. для момента времени, который будет непосредственно предшествовать моменту приложения воздействия. Такие начальные значения называются также *предначальными*.

В этом случае

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(-0) - \dots - f^{(n-1)}(-0).$$

Расчет получается более простым, так как предначальные значения должны быть известны всегда и никаких дополнительных операций здесь не требуется. В частном случае, когда до приложения воздействия система находилась в покое, предначальные значения нулевые и выражение (7.33) приобретает вид

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} F(p) = W(p) F(p). \quad (7.35)$$

Только это выражение и позволяет строго сформулировать понятие передаточной функции  $W(p)$  как отношение изображений входной и выходной величины при нулевых предначальных значениях.

Кроме того, преобразование Лапласа в случае, когда нижний предел интегрирования стремится к нулю, оставаясь отрицательным ( $a < 0$ ), позволяет учитывать наличие в рассматриваемой функции при  $t = 0$  особенностей типа  $\delta$ -функции. Так, например, изображение единичной  $\delta$ -функции оказывается равным единице:

$$\int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1,$$

а изображение ее производной  $n$ -го порядка

$$\int_{-0}^{\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-pt} dt = p^n.$$

Влияние особенностей  $f(t)$  и ее первых  $m$  производных, где  $m$  — порядок полинома  $N(p)$ , на изображение  $N(p) f(t)$  в этом случае и проявляется в виде автоматического учета начальных значений, которые будут иметь место справа (при  $t = +0$ ) в самом изображении  $N(p) F(p)$  без введения дополнительного члена  $D_0(p)$  при нулевых предначальных значениях или без его изменения при ненулевых предначальных значениях. В связи с этим  $\delta$ -функция иногда называется также *функцией начальных значений*.

В дальнейшем изложении под преобразованием Лапласа будет пониматься именно этот случай ( $a < 0$ ).

Зная изображение искомой величины  $X(p)$  в виде (7.33) или (7.35), можно найти оригинал  $x(t)$ . Это и будет решением исходного дифференциального уравнения (7.32).

Для отыскания оригинала  $x(t)$  по его изображению  $X(p)$  можно пользоваться таблицами изображений и существующими теоремами, в частности *теоремой разложе-*

ния, которая устанавливает следующее. Если изображение Лапласа имеет вид отношения двух многочленов

$$X(p) = \frac{X_1(p)}{X_2(p)}, \quad (7.36)$$

то при отсутствии нулевых корней знаменателя

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k)}{X_2(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7.37)$$

где  $p_k$  — некрратные корни знаменателя (7.36).

Если знаменатель изображения Лапласа (7.36) имеет нулевой корень ( $p_0 = 0$ ), то изображение надо представить в виде

$$X(p) = \frac{X_1(p)}{pX_3(p)}, \quad (7.38)$$

Тогда оригинал может быть найден по формуле

$$x(t) = \frac{X_1(0)}{X_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k)}{p_k X_3'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7.39)$$

Аналогичным образом теорема разложения может быть записана и для преобразовании Карсона–Хевисайда. Так, например, если изображение искомой величины может быть представлено в виде отношения двух полиномов

$$\varphi(p) = X(p) = \frac{X_1(p)}{X_3(p)}, \quad (7.40)$$

то при отсутствии нулевых и кратных корней знаменателя оригинал будет определяться выражением

$$x(t) = \frac{X_1(0)}{X_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k)}{p_k X_3'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7.41)$$

Это выражение полностью совпадает с формулой (7.39), так как изображения Лапласа (7.38) и Карсона–Хевисайда (7.40) отличаются на множитель  $p$ .

Использование изображений часто называют также *операторным методом*, хотя в действительности операторному методу, разработанному Хевисайдом, оказывается полностью аналогичным использование только преобразований Карсона–Хевисайда (7.21) и (7.22).

Метод использования изображений обладает тем преимуществом, что в нем полностью сохраняется лишь одна операция — вычисление корней характеристического уравнения (знаменателя изображения). Что касается определения произвольных постоянных интегрирования, то эта операция отпадает, потому что начальные значения автоматически учитываются в процессе решения с самого начала (при находке-

нии изображения искомой величины). Поэтому этот метод оказывается удобным и его часто применяют в задачах теории управления.

Практически важной для отыскания оригинала решения является еще *теорема свертывания*. Она гласит следующее. Если изображение представляет собой произведение

$$X(p) = X_1(p) X_2(p), \quad (7.42)$$

то оригинал выражается формулой

$$x(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau, \quad (7.43)$$

где  $\tau$  представляет собой вспомогательное время интегрирования.

В частности, пусть для некоторой системы с передаточной функцией  $W(p)$  известна реакция на единичную импульсную функцию  $\delta(t) \equiv 1$ , представляющую собой функцию веса и связанную с  $W(p)$  преобразованием Лапласа

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt.$$

Если на вход этой системы поступает некоторая функция времени  $f(t)$ , изображение которой  $F(p)$ , то изображение выходной величины будет

$$X(p) = W(p) F(p).$$

Тогда функция времени на выходе может быть найдена по интегралу свертывания (7.43):

$$x(t) = \int_0^t w(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) w(t - \tau) d\tau. \quad (7.44)$$

Если входная функция определена только для положительного времени (прикладывается на вход в момент времени  $t = 0$ ), то функция  $f(t - \tau)$  отлична от нуля только при  $\tau \leq t$ . В этом случае верхний предел интеграла в формуле (7.44) может быть заменен на бесконечность и она приобретает вид

$$x(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (7.44')$$

## § 7.5. Использование вычислительных машин

За последнее время для исследования систем автоматического управления и, в частности, для построения переходных процессов стали широко применяться вычислительные машины непрерывного действия и цифровые вычислительные машины.

Удобство первых заключается в том, что физическому процессу, протекающему в исследуемой системе, соответствует протекание в вычислительной машине (модели) некоторого другого «аналогового» процесса, описываемого теми же дифферен-

циальными уравнениями, что и исходный процесс. Это позволяет изучать процессы в системах управления наиболее наглядно, так как каждый обобщенной координате в исследуемой системе соответствует некоторая переменная в вычислительной машине, например электрическое напряжение.

Моделирующие или аналоговые вычислительные машины позволяют моделировать как всю систему в целом, так и отдельные ее части. Так, например, часто вычислительная машина используется для моделирования объекта, например самолета, корабля, паровой турбины, двигателя внутреннего сгорания и т. п., а само управляющее устройство может быть реальным. При «сопряжении» реального управляющего устройства с объектом, в качестве которого выступает модель, получается замкнутая система, которая может быть исследована еще до того, как будет построен сам объект.

Вычислительные машины целесообразно использовать для исследования обыкновенных линейных систем в тех случаях, когда последние описываются дифференциальными уравнениями сравнительно высокого порядка и их аналитическое исследование становится малоэффективным. Однако наибольшее значение имеют вычислительные машины при исследовании линейных систем с переменными параметрами и нелинейных систем, поскольку для этих случаев пока еще мало разработано приемлемых для практики методов, а иногда аналитические методы вообще отсутствуют.

Точность моделирующих вычислительных машин обычно не превосходит нескольких процентов. В большинстве случаев этого оказывается достаточно для целей практики. Получение точности в десятые доли процента и выше связано со значительным увеличением стоимости машин. В этом отношении целесообразнее использовать цифровые вычислительные машины, которые сравнительно просто могут обеспечить высокую точность вычислений.

Следует заметить, что моделирование не призвано полностью заменить аналитические методы исследования систем. Комплекс технических задач, связанных с проектированием, конструированием, регулировкой и настройкой систем, весьма сложен, и он всегда должен опираться на сознательные расчетно-теоретические методы. Моделирование же процессов на вычислительных машинах во многом сводится к просмотриванию некоторого количества возможных вариантов, разобраться в которых, а также наметить их предварительно можно при помощи существующих теоретических методов анализа и синтеза. Наилучшим решением в настоящее время является взаимная увязка расчетно-теоретических методов и методов моделирования, так как они взаимно дополняют друг друга и позволяют наиболее полно и быстро решить задачу разработки сложной системы управления.

**Электронные модели.** Электронные моделирующие вычислительные машины имеют наибольшее применение вследствие их сравнительной простоты в изготовлении и эксплуатации. Процессы в исследуемой системе изучаются при помощи наблюдения процессов в некоторой электронной схеме, которая описывается теми же дифференциальными уравнениями, что и исходная система.

Пусть исследуемая реальная система описывается совокупностью уравнений, разрешенных относительно первых производных

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.45)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные, описывающие поведение исследуемой системы.

В электронной модели должна быть реализована совокупность дифференциальных уравнений аналогичного вида:

$$\frac{m_i}{m_i} \frac{dX_i}{d\tau} = F_i \left( \frac{X_1}{m_1}, \frac{X_2}{m_2}, \dots, \frac{X_n}{m_n}, \frac{\tau}{m_t} \right), \quad (7.46)$$

где  $X_1, \dots, X_n$  — машинные переменные (обычно напряжения), соответствующие исследуемым переменным  $x_1, \dots, x_n$ ;  $m_i = X_i/x_i$  — масштабные коэффициенты, связывающие исследуемые переменные с соответствующими им машинными переменными,  $m_t = \tau/t$  — масштаб времени, связывающий истинное время протекания процессов  $t$  с временем протекания процессов в модели  $\tau$ .

Заметим, что изменение скорости протекания процессов возможно только при полном моделировании всей системы. При моделировании только части системы и сопряжении ее с реальной аппаратурой необходимо выполнение равенства  $\tau = t$ , т. е.  $m_t = 1$ .

При выборе масштаба времени должно учитываться то обстоятельство, что электронные модели могут точно работать при ограниченном времени протекания моделируемого процесса. Это время не должно обычно превышать нескольких сотен секунд, что связано с особенностями работы электронных интеграторов.

Масштабные коэффициенты  $m_i$  должны выбираться таким образом, чтобы в переходных процессах максимальное значение машинной переменной  $|X_{i \max}| = m_i \cdot |x_{i \max}|$  не превосходило предельного допустимого значения.

Существует две разновидности электронных моделирующих машин: модели структурного типа и модели матричного типа. Первые позволяют моделировать структурную схему системы, что во многих случаях оказывается более удобным и наглядным.

Модели матричного типа требуют записи дифференциальных уравнений исследуемой системы в особой, матричной форме. Матричные модели менее удобны для исследования систем и потому используются реже.

Остановимся вначале на имеющих наибольшее применение моделях структурного типа. Они построены на базе так называемых операционных усилителей, выполняющих операции интегрирования, суммирования и умножения на постоянный множитель.

Операционный усилитель представляет собой усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления по напряжению (десятки и сотни тысяч). Динамические свойства усилителя таковы, что он может быть замкнут 100%-ной отрицательной обратной связью через резистор или конденсатор без потери устойчивости (без генерации) в замкнутом состоянии.

Передаточная функция усилителя, замкнутого обратной связью (рис. 7.3) при большом коэффициенте усиления может быть достаточно точно представлена в виде

$$\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{z_0(p)}{z_1(p)}, \quad (7.47)$$

где  $z_1(p)$  — входное сопротивление усилителя в операторной форме,  $z_0(p)$  — сопротивление в цепи обратной связи.

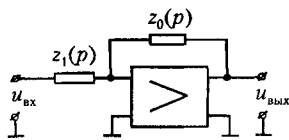


Рис. 7.3

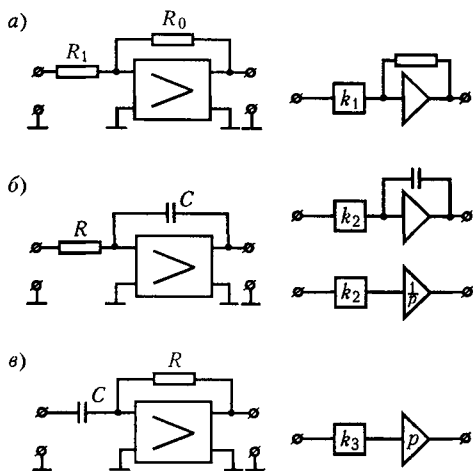


Рис. 7.4

Знак минус в формуле (7.47) показывает, что операционный усилитель инвертирует входной сигнал (меняет его знак). Современные усилители обычно имеют как инвертирующий, так и неинвертирующий входы.

Рассмотрим три основных режима работы усилителя.

1. При  $z_0(p) = R_0$  и  $z_1(p) = R_1$  усилитель выполняет функцию умножения входной величины на постоянный множитель (рис. 7.4, а):

$$U_{\text{вых}}(p) = -\frac{R_0}{R_1} U_{\text{вх}}(p) = -k_1 U_{\text{вх}}(p). \quad (7.48)$$

Упрощенное изображение такого усилителя показано на рис. 7.4, а справа.

2. При  $z_0(p) = 1/pC$ , что соответствует установке в цепи обратной связи конденсатора, и  $z_1(p) = R$  усилитель работает в режиме интегрирования входной величины (рис. 7.4, б):

$$U_{\text{вых}}(p) = -\frac{1}{RCp} U_{\text{вх}}(p) = -\frac{k_2}{p} U_{\text{вх}}(p). \quad (7.49)$$

Два варианта упрощенного изображения такого усилителя изображены на рис. 7.4, б справа.

3. При  $z_0 = R$  и  $z_1(p) = 1/pC$ , что соответствует установке конденсатора во входной цепи, усилитель работает в режиме дифференцирования (рис. 7.4, в):

$$U_{\text{вых}}(p) = -RCp U_{\text{вх}}(p) = -k_3 p U_{\text{вх}}(p). \quad (7.50)$$

Упрощенное изображение такого усилителя показано на рис. 7.4, в справа.

Режим дифференцирования обычно не используют при моделировании, так как в этом режиме сильно возрастает влияние высокочастотных помех и наводок.



На рис. 7.5 изображен операционный усилитель в режиме суммирования. Как нетрудно показать, при  $z_0(p) = R_0$

$$U_{\text{вых}}(p) = -R_0 \sum_{i=1}^n \frac{U_{\text{вх}} i(p)}{R_i} \quad (7.51)$$

При  $z_0(p) = 1/pC$ , получаем суммирующий интегрирующий усилитель.

В табл. 7.3 приведены типичные случаи использования операционного усилителя для получения различных динамических звеньев.

В таблице использован машинный оператор дифференцирования

$$P = \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{m_t} \frac{d}{dt} = \frac{p}{m_t} \quad (7.52)$$

При моделировании в натуральном масштабе времени  $\tau = t$  и  $P = p$ .

Электронная модель структурного типа имеет в своем составе несколько операционных усилителей, которые могут работать в режиме интегрирования, т. е. с конденсатором в цепи обратной связи. Число этих усилителей определяет наивысший

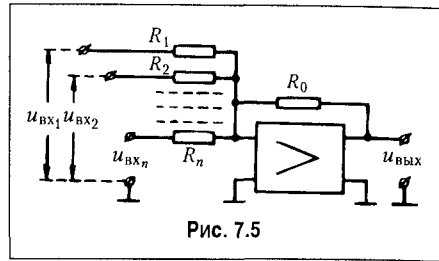


Рис. 7.5

Таблица 7.3. Типовые динамические звенья электронных моделей

Схема	Передаточная функция
	$W(P) = -\frac{1}{TP}, \quad T = RC$
	$W(P) = -\frac{k}{1+TP}$ $k = \frac{R_2}{R_1}, \quad T = R_2C$
	$W(P) = -k \frac{1+T_1P}{1+T_2P}$ $k = \frac{R_2}{R_1}, \quad T_1 = R_3C, \quad T_2 = (R_2 + R_3)C$
	$W(P) = -\frac{1+T_2P}{T_1P}$ $T_1 = R_1C, \quad T_2 = R_2C$
	$W(P) = -k \frac{T_1P}{1+T_1P}$ $k = \frac{R_2}{R_1}, \quad T_1 = R_1C$

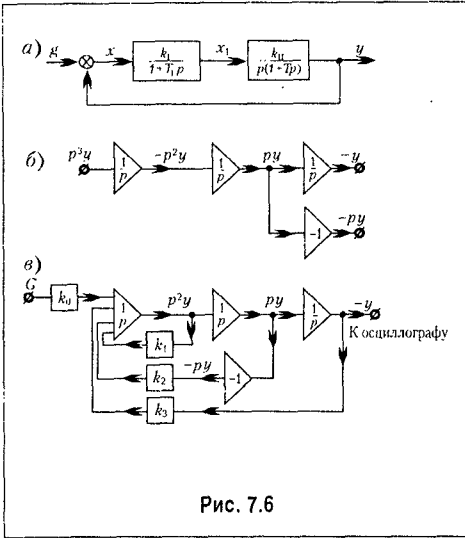


Рис. 7.6

порядок дифференциального уравнения, которое может быть исследовано на данной модели. Кроме того, имеется ряд вспомогательных усилителей, при помощи которых можно осуществлять операции умножения на постоянный множитель (масштабирование), перемены знака (инвертирование) и суммирование.

Исследуемые процессы в виде изменения машинных переменных (напряжений) могут наблюдаться и фиксироваться при помощи осциллографов и графопостроителей.

Для приложения к электронной модели исследуемой системы задающих и возмущающих воздействий используются генераторы, которые могут воспроизводить требуемые функции времени, например линейную функцию, синусоиду, экспоненту, прямоугольную или треугольную волну и т. п., в виде соответствующего изменения электрического напряжения. Существуют также генераторы случайных величин.

Кроме того, электронная модель имеет ряд вспомогательных устройств, позволяющих после набора исследуемой задачи производить пуск и остановку решения дифференциальных уравнений, фиксацию решения в заданной точке, периодизацию решения и т. п.

Набор задачи на электронной модели структурного типа может быть осуществлен двумя способами:

- 1) по дифференциальному уравнению, которым описывается исследуемая система;
- 2) по структурной схеме исследуемой системы.

Рассмотрим порядок набора задачи на простейшем примере. Начнем с первого способа. Пусть дана система, структурная схема которой представлена на рис. 7.6, а. Для этой схемы передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k_1}{1 + T_1 p} \frac{k_{11}}{p(1 + T_2 p)} \tag{7.53}$$

Дифференциальное уравнение замкнутой системы, записанное в символической форме, в соответствии с гл. 5 будет

$$[1 + W(p)] y(t) = W(p) g(t),$$

где  $y(t)$  — управляемая величина а  $g(t)$  — задающее воздействие.

В рассматриваемом случае, учитывая (7.53), получим

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = a_3 g(t). \tag{7.54}$$

где

$$a_0 = T_1 T_2; \quad a_1 = T_1 + T_2; \quad a_2 = 1 \quad \text{и} \quad a_3 = k_1 k_{11}.$$

Перейдем к машинным переменным  $Y = m_1 y$  и  $G = m_2 g$ . Учитывая соотношения  $\tau = m_t t$  и  $p = m_t P$ , получим из (7.54) дифференциальное уравнение для машинных переменных:

$$(A_0 P^3 + A_1 P^2 + A_2 P + A_3) Y(\tau) = B_0 G(\tau), \quad (7.55)$$

где  $A_0 = m_t^3 a_0$ ,  $A_1 = m_t^2 a_1$ ,  $A_2 = m_t a_2$ ,  $A_3 = a_3$  и  $B_0 = a_3 \frac{m_1}{m_2}$ .

Уравнение (7.55) разрешим относительно старшей производной:

$$P^3 Y = \frac{B_0}{A_0} G - \frac{A_1}{A_0} P^2 Y - \frac{A_2}{A_0} P Y - \frac{A_3}{A_0} Y. \quad (7.56)$$

Рассмотрим цепочку из трех последовательно включенных интеграторов (рис. 7.6, б). Если на вход первого интегратора поступает величина  $P^3 Y$ , то на его выходе получится, с учетом перемены знака, величина  $-P^2 Y$ , на выходе второго интегратора — величина  $P Y$  и на выходе третьего интегратора — величина  $-Y$ . В результате можно реализовать дифференциальное уравнение (7.56), если на входе первого интегратора сложить с учетом знаков и масштабов все члены, входящие в правую часть формулы (7.56). Это показано на рис. 7.6, в. Значения коэффициентов делителей

определяются выражениями  $k_0 = \frac{B_0}{A_0}$ ,  $k_1 = \frac{A_1}{A_0}$ ,  $k_2 = \frac{A_2}{A_0}$  и  $k_3 = \frac{A_3}{A_0}$ .

Задавая теперь управляющее воздействие  $G(\tau)$  от генератора функций времени и вводя начальные значения, можно исследовать поведение машинной переменной  $Y(\tau)$ , которая отображает поведение управляемой величины  $y(t)$  в реальной системе.

Второй способ набора задачи на электронной модели заключается в том, что воспроизводится структурная схема, изображенная на рис. 7.6, а. Звено второго порядка удобнее представить в виде последовательно включенных звеньев первого порядка, каждое из которых может быть реализовано на базе одного интегратора. Это представлено на рис. 7.7, а. Схема набора, построенная в соответствии с табл. 7.3, изображена на рис. 7.7, б.

Для уяснения методики подсчета коэффициентов рассмотрим, например, второе звено (рис. 7.7). Исходная передаточная функция имеет вид

$$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{k_{11}}{1 + T_2 p}. \quad (7.57)$$

Для машинных переменных  $X_1 = m_1 x_1$  и  $X_2 = m_2 x_2$  уравнение запишется в виде

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{k_{11}}{1 + T_2 m_t P}. \quad (7.58)$$

Отсюда находим

$$P X_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{k_{11}}{T_2 m_t} X_1 - \frac{1}{m_t T_2} X_2. \quad (7.59)$$

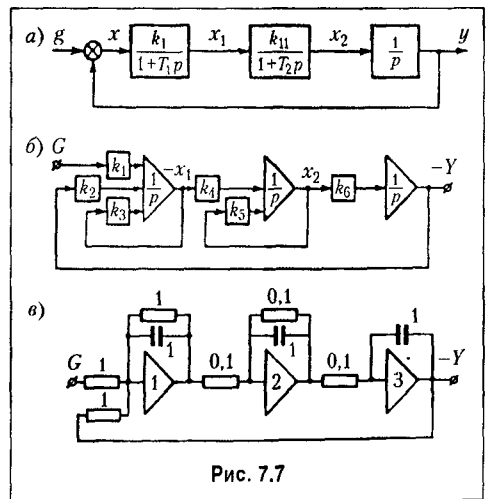


Рис. 7.7

Это уравнение набрано на втором интеграторе (рис. 7.7, б).

Передаточные коэффициенты усилителя по соответствующим входам определяются из (7.59):

$$k_4 = \frac{m_2}{m_1} \frac{k_{11}}{T_2 m_t}, \quad (7.60)$$

$$k_5 = \frac{1}{T_2 m_t}. \quad (7.61)$$

Аналогичным образом составляется схема набора остальных звеньев, входящих в структурную схему (рис. 7.7; а).

Получившаяся схема набора (рис. 7.7, б) представляет собой совокупность операционных усилителей в режиме интегрирования, замкнутых местными отрицательными обратными связями.

Другой метод структурного моделирования заключается в том, что элементы структурной схемы представляются в виде типовых звеньев, набираемых на операционных усилителях в соответствии с табл. 7.3. На рис. 7.7, в изображена подобная схема набора для случая, когда  $k_1 = 1$ ,  $k_{11} = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_1 = 1 \text{ с}$  и  $T_2 = 0,1 \text{ с}$ . При наборе принят натуральный масштаб времени ( $m_t = 1$  и  $t = \tau$ ).

По сравнению с моделированием дифференциального уравнения (рис. 7.6) моделирование структурной схемы имеет преимущество в смысле большего соответствия модели исследуемой системе. Кроме того, моделирование структурной схемы позволяет просто учитывать при исследовании системы типичные нелинейности, например ограничение переменной величины, зону нечувствительности, релейную характеристику, люфт и т. п. Эти характеристики могут быть реализованы в электронной

модели посредством использования диодных элементов. В табл. 7.4 приведены некоторые типичные нелинейности и электронные схемы с диодными элементами, позволяющие реализовать в модели эти характеристики. Кроме этих простейших нелинейных блоков в электронных моделях применяются более сложные схемы, позволяющие реализовать различные криволинейные характеристики, операции возведения в степень и извлечения корня, операции перемножения двух переменных и т. п.

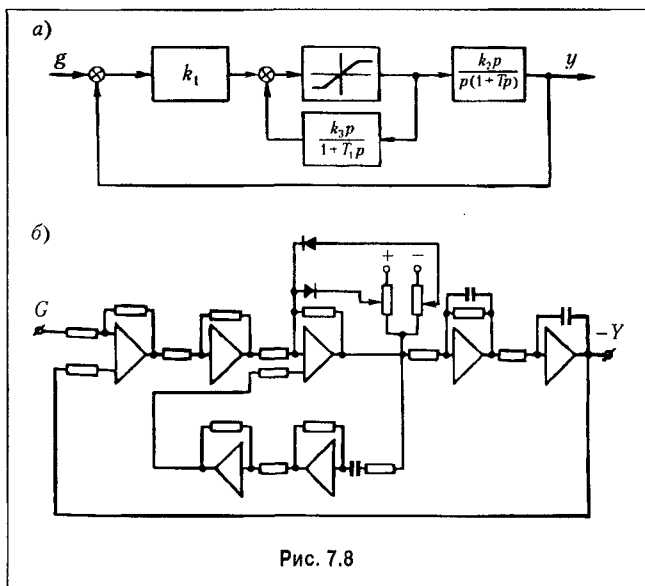


Рис. 7.8

На рис. 7.8 для иллюстрации приведена структурная

Таблица 7.4. Моделирование типичных нелинейных характеристик

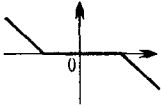
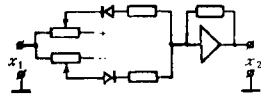
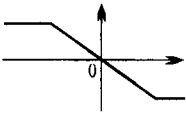
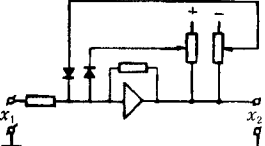
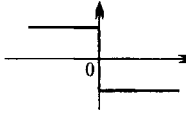
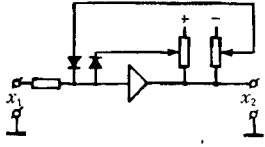
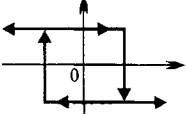
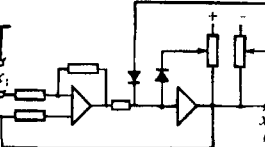
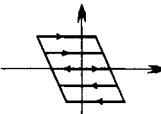
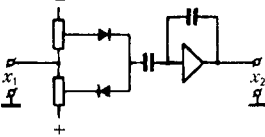
Характеристика	Схема
<p data-bbox="169 219 450 245">Зона нечувствительности</p> 	
<p data-bbox="238 407 386 433">Ограничение</p> 	
<p data-bbox="173 596 446 621">Сухое трение (релейная)</p> 	
<p data-bbox="173 784 446 810">Релейная с гистерезисом</p> 	
<p data-bbox="278 992 338 1018">Люфт</p> 	

схема нелинейной следящей системы (рис. 7.8, а) и схема набора на электронной модели (рис. 7.8, б). Схема набора на рис. 7.8, б изображена несколько подробнее по сравнению со схемами на рис. 7.6 и 7.7.

Все, что было рассмотрено выше, относится к моделированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При необходимости исследовать процессы в системах с переменными коэффициентами или в системах с временным запаздыванием к линейной электронной модели добавляются соответственно блоки переменных коэффициентов и блоки временного запаздывания. Добавление

нелинейных блоков позволяет исследовать процессы в нелинейных системах. Все эти добавочные блоки существенно повышают эффективность электронных моделей, так как позволяют сравнительно просто и достаточно точно исследовать процессы в сложных системах, что является в большинстве случаев недоступным для аналитических методов расчета.

**Цифровые вычислительные машины.** В вычислительных машинах непрерывного действия достижимая точность ограничивается точностью изготовления входящих в машину элементов. Повышение точности всегда связано со значительным удорожанием изготовления, а в некоторых случаях желаемая точность вообще не может быть достигнута при современном уровне техники. В цифровых вычислительных машинах принципиально может быть достигнута любая желаемая точность вычислений. Это связано лишь с увеличением числа используемых разрядов в изображении чисел, что вызывает умеренный рост стоимости вычислительных машин при росте их точности.

Цифровые вычислительные машины по своему принципу действия относятся к устройствам дискретного действия. Результаты вычислений выдаются этими машинами не непрерывно, а в виде последовательности дискретных чисел. Цифровые вычислительные машины могут применяться для различных целей. В том числе их можно использовать для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, что нужно для исследования процессов в сложных системах управления.

Любые вычисления, которые производит цифровая вычислительная машина, сводятся к последовательности арифметических и логических операций. Это означает, что решение дифференциальных уравнений исследуемой системы осуществляется методами численного интегрирования по шагам и точность получаемого решения будет зависеть от величины выбранного шага интегрирования.

В настоящее время разработано большое количество разнообразных алгоритмических языков, которые значительно облегчают вопросы программирования, и множество стандартных программ для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Современные оконечные устройства цифровых вычислительных машин позволяют получать решения как в виде таблиц, так и в виде готовых графиков.

К числу недостатков цифровых вычислительных машин следует отнести трудности сопряжения с реальной аппаратурой.

## Глава 8

### ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

#### § 8.1. Общие соображения

Качество работы любой системы управления в конечном счете определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значениями управляемой величины:  $x(t) = g(t) - y(t)$ . В системах стабилизации при  $g(t) = 0$  ошибка  $x(t) = -y(t)$ .

Знание мгновенного значения ошибки в течение всего времени работы управляемого объекта позволяет наиболее полно судить о свойствах системы управления. Однако в действительности вследствие случайности задающего и возмущающего воздействий такой подход не может быть реализован. Поэтому приходится оценивать качество системы по некоторым ее свойствам, проявляющимся при различных типовых воздействиях. Для определения качественных показателей системы в этом случае используются так называемые *критерии качества*.

В настоящее время разработано большое число различных критериев качества. Все их можно разбить на четыре группы.

К первой группе относятся критерии, в той или иной степени использующие для оценки качества величину ошибки в различных типовых режимах. Эту группу назовем *критериями точности* систем управления.

Ко второй группе относятся критерии, определяющие величину *запаса устойчивости*, т. е. критерии, устанавливающие насколько далеко от границы устойчивости находится система.

Почти всегда опасной для системы является колебательная граница устойчивости. Это определяется тем, что стремление повысить коэффициент передачи разомкнутой системы, как правило, приводит к приближению замкнутой системы именно к колебательной границе устойчивости и затем -- к возникновению незатухающих колебаний.

Третья группа критериев качества определяет так называемое *быстродействие* систем управления. Под быстродействием понимается быстрота реагирования системы на появление задающих и возмущающих воздействий. Наиболее просто быстродействие может оцениваться по времени затухания переходного процесса системы.

К четвертой группе критериев качества относятся комплексные критерии, дающие оценку некоторых обобщенных свойств, которые могут учитывать точность, запас устойчивости и быстродействие. Обычно это делается при помощи рассмотрения некоторых интегральных свойств кривой переходного процесса.

При рассмотрении понятий запаса устойчивости и быстродействия можно исходить из двух существующих в настоящее время точек зрения.

Во-первых, можно основываться на характере протекания процессов во времени и использовать для формирования критериев качества переходную или весовую функцию, расположение полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы и т. п.

Во-вторых, можно основываться на некоторых частотных свойствах рассматриваемой системы, характеризующих ее поведение в установившемся режиме при действии на входе гармонического сигнала. К ним относятся полоса пропускания, относительная высота резонансного пика и др.

Оба эти подхода имеют в настоящее время большое распространение и используются параллельно. И тот и другой подход требует изучения условий эксплуатации уже построенных систем автоматического управления, так как только на основании такого изучения можно правильно сформулировать количественные оценки, которые могут быть использованы в практике проектирования и расчета новых систем.

Связь между временными и частотными свойствами системы автоматического управления имеет сложный характер и может быть определена в общем виде только в простейших случаях, например, для систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка.

Однако отсутствие зависимостей, связывающих в общей форме свойства системы во временном и частотном представлениях, не может служить препятствием для развития и независимого использования критериев качества того или иного направления.

Использование того или иного подхода при формулировании критериев качества определяется в настоящее время удобствами его применения в системах конкретного вида, а также, в известной мере, сложившимися в данной области традициями.

## § 8.2. Точность в типовых режимах

Для оценки точности системы управления используется величина ошибки в различных типовых режимах. Ниже будут рассмотрены наиболее употребительные режимы.

**1. Неподвижное состояние.** В качестве типового режима рассматривается установившееся состояние при постоянных значениях задающего и возмущающего воздействий. Ошибка системы в этом случае называется *статической*. Величина ошибки может быть найдена из общего выражения (5.6). Для этого необходимо положить  $g(t) = g_0 = \text{const}$ . Далее необходимо учесть действующие на систему возмущения. В общем случае их может быть несколько:  $f_1(t), f_2(t)$  и т. д. Тогда в правой части (5.6) появится несколько слагаемых, определяемых имеющимися возмущениями. В неподвижном состоянии необходимо положить  $f_1(t) = f_{10} = \text{const}, f_2(t) = f_{20} = \text{const}$  и т. д. Затем можно использовать изображения функций по Лапласу или Карсону–Хевисайду. Используем, например, изображения Карсона–Хевисайда. Тогда изображение постоянной величины равно ей самой, т. е.  $G(p) = g_0, F_1(p) = f_{10}, F_2(p) = f_{20}$  и т. д. Далее необходимо воспользоваться теоремой о конечном значении (см. табл. 7.2) и получить установившееся значение ошибки (статическую ошибку):

$$x_{\text{ст}} = \left[ \frac{g_0}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[ \frac{\sum_{k=1}^l W_k(p) f_{k0}}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} = x'_{\text{ст}} + x''_{\text{ст}}, \quad (8.1)$$

где  $l$  — число действующих на систему возмущений, а  $W_k(p) = -W_j(p)$ .

Первое слагаемое  $x'_{\text{ст}}$  представляет собой составляющую статической ошибки от задающего воздействия, а второе  $x''_{\text{ст}}$  — от возмущающих воздействий.

Входящая в выражение (8.1) передаточная функция разомкнутой системы  $W(p)$ , как показано в § 6.4, может быть представлена в виде (6.22), где  $K$  — коэффициент передачи разомкнутой системы, а  $r$  — число интегрирующих звеньев, входящих последовательно в разомкнутую цепь системы. При  $r = 0$  система называется статической, а при  $r \geq 1$  — астатической. Величина  $r$  определяет *порядок астатизма* системы.

В статических системах в большинстве случаев  $W(0) = K$ . Тогда статическая ошибка от задающего воздействия

$$x'_{\text{ст}} = \frac{g_0}{1+W(0)} = \frac{g_0}{1+K}. \quad (8.2)$$



В некоторых случаях, например, при наличии в знаменателе  $W(p)$  сомножителя с положительным корнем,  $W(0) = -K$ . При этом

$$x'_{\text{ст}} = \frac{g_0}{1-K}.$$

Составляющая ошибки  $x'_{\text{ст}}$  практически всегда может быть сведена к нулю посредством использования неединичной обратной связи или путем масштабирования (см. § 9.3).

В астатических системах  $W(0) \rightarrow \infty$ . Поэтому первая составляющая (8.1) обращается в нуль.

Второе слагаемое (8.1) никогда не обращается в нуль, так как даже использование управления с астатизмом высокого порядка и использование принципа управления по возмущению (см. § 9.2) могут обратить в нуль лишь часть слагаемых, находящихся под знаком суммы (8.1).

При выводе выражения (8.1) предполагалось, что чувствительный элемент, определяющий разность между требуемым и действительным значениями управляемой величины, является идеальным и определяет имеющуюся ошибку в соответствии с выражением  $x(t) = g(t) - y(t)$ . В действительности чувствительному элементу как измерительному органу присущи свои ошибки. Ошибку чувствительного элемента можно рассматривать также как некоторое возмущающее воздействие, и считать, что она входит во второе слагаемое (8.1). Однако на практике удобнее эту ошибку учитывать отдельно и считать, что статическая ошибка равна (при  $x'_{\text{ст}} = 0$ )

$$x_{\text{ст}} = x''_{\text{ст}} + x'''_{\text{ст}}, \quad (8.3)$$

где  $x''_{\text{ст}}$  представляет собой второе слагаемое в выражении (8.1) и определяется внешними возмущениями,  $x'''_{\text{ст}}$  является ошибкой чувствительного элемента.

Рассмотрим теперь ошибку  $x''_{\text{ст}}$ . Примем для простоты, что на систему действует одно возмущающее воздействие  $f_1$ . Тогда в статической системе получим

$$x'' = \frac{W_1(0)f_{10}}{1+W(0)} = \frac{\gamma_1 f_{10}}{1+K}, \quad (8.4)$$

или при  $W(0) = -K$

$$x'' = \frac{\gamma_1 f_{10}}{1-K}.$$

В этих равенствах  $\gamma_1$  представляет собой отношение установившейся ошибки к постоянному возмущению (коэффициент статизма) в разомкнутой системе. Эта же величина, деленная на  $1 \pm K$ , соответствует коэффициенту статизма в замкнутой системе. Величина  $1 \pm K$ , по сути дела, показывает эффективность управления с точки зрения уменьшения установившейся ошибки.

В астатической системе  $W(0) \rightarrow \infty$ . Однако это еще не означает, что  $x''_{\text{ст}} = 0$ , так как возможен случай, когда  $W_1(0) \rightarrow \infty$ . Вследствие этого для каждого действующе-

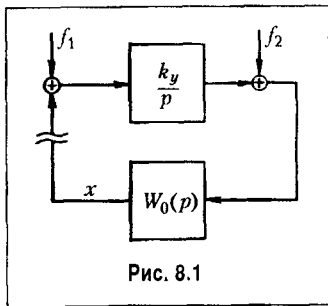


Рис. 8.1

го на систему возмущения необходимо определить факт наличия или отсутствия установившейся ошибки посредством нахождения значения (8.4).

Для иллюстрации этого на рис. 8.1 изображена структурная схема системы автоматического управления. Она содержит объект с передаточной функцией  $W_0(p)$  и астатическое управляющее устройство с передаточной функцией  $W_y(p) = k_y/p$ . Пусть объект не имеет интегрирующих свойств и  $W_0(0) = k_0$ .

На систему действуют два возмущения  $-f_1$  и  $f_2$ . В разомкнутой системе (как показано на рис. 8.1)

$$x = W_0(p) \left[ \frac{k_y}{p} f_1 + f_2 \right]$$

и в замкнутой

$$x = \frac{W_0(p) \left[ \frac{k_y}{p} f_1 + f_2 \right]}{1 + W(p)},$$

где  $W(p) = W_0(p) W_y(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы. Отсюда по теореме о конечном значении определяем установившуюся ошибку, положив  $p = 0$ ,  $f_1(t) = f_{10} = \text{const}$ ,  $f_2(t) = f_{20} = \text{const}$ ,

$$x_{\text{уст}}'' = \left. \frac{W_0(p) \left[ \frac{k_y}{p} f_{10} + f_{20} \right]}{1 + W(p)} \right|_{p=0} = f_{10}.$$

Таким образом, первое возмущение дает статическую ошибку, а второе не даст. Из рассмотрения рис. 8.1 видно, что возмущение  $f_1$  приложено до интегрирующего звена, а  $f_2$  — после. Из этого и вытекает правило, по которому можно определить, устраняет ли астатический алгоритм управления статическую ошибку от какого-либо возмущения. Для выполнения этого необходимо, чтобы интегрирующий элемент был включен в цепь управления до места приложения данного возмущения. Это объясняет, в частности, тот факт, что включение интегрирующих элементов и повышение порядка астатизма не дает возможности устранить ошибку чувствительного элемента  $x_{\text{уст}}''$ , которую можно рассматривать как возмущение.

**2. Движение с постоянной скоростью.** В качестве второго типового режима используется режим движения системы с постоянной скоростью  $v = \text{const}$ , который будет наблюдаться в установившемся состоянии при задающем воздействии, изменяющемся по закону  $g(t) = vt$ , где  $v = \text{const}$ , и при постоянных значениях возмущаю-

щих воздействий  $f_1(t) = f_{10}$ ,  $f_2(t) = f_{20}$  и т. д. Этот режим имеет смысл только в следящих системах и системах программного управления.

Используя изображения Карсона–Хевисайда, в этом случае получаем  $G(p) = \frac{v}{p}$ ,  $F_1(t) = f_{10}$ ,  $F_2(t) = f_{20}$  и т. д.

Из общего выражения для ошибки посредством теоремы о конечном значении может быть найдена установившаяся ошибка в этом режиме:

$$x_{\text{уст}} = \left[ \frac{\frac{v}{p}}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[ \frac{\sum W_k(p) f_{k0}}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0}. \quad (8.5)$$

Второе слагаемое этого выражения дает статическую ошибку (при условии, что возмущающие воздействия такие же, как в неподвижном состоянии системы), в которой может быть также учтена ошибка чувствительного элемента.

Первое слагаемое (8.5) имеет смысл только при астатизме первого порядка, т. е. в том случае, когда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_v(1 + b_{m-1}p + \dots + b_0p^m)}{p(1 + c_{n-2}p + \dots + c_0p^{n-1})},$$

где  $K_v = K$  — коэффициент передачи разомкнутой системы, называемый добротностью по скорости.

Тогда выражение (8.5) приводится к виду

$$x_{\text{уст}} = \frac{v}{K_v} + x_{\text{ст}} = x_c + x_{\text{ст}}. \quad (8.6)$$

Таким образом, в этом типовом режиме установившаяся ошибка будет складываться из статической ошибки и добавочной *скоростной* ошибки, равной отношению скорости задания к добротности системы по скорости:

$$x_c = v/K_v. \quad (8.7)$$

Так как система может двигаться с различными скоростями, то качество ее удобнее характеризовать не самой скоростной ошибкой, которая является переменной величиной, а значением добротности по скорости

$$K_v = v/x_c. \quad (8.8)$$

В статических системах первое слагаемое (8.6) стремится к бесконечности; при астатизме выше первого порядка это слагаемое стремится к нулю. Поэтому режим движения с постоянной скоростью используется для оценки точности только систем с астатизмом первого порядка, главным образом следящих систем, для которых такой режим является характерным.

**3. Движение с постоянным ускорением.** В качестве третьего типового режима используется режим установившегося движения системы с постоянным ускорением  $\varepsilon = \text{const}$ . В этом случае задающее воздействие меняется по закону  $g(t) = \varepsilon t^2/2$ . Возмущающие воздействия принимаются постоянными, как и во втором типовом режиме. Этот режим имеет смысл только в следящих системах и системах программного управления.

Аналогично изложенному выше, установившееся значение ошибки в этом режиме может быть найдено из выражения

$$x_{\text{уст}} = \left[ \frac{\frac{\varepsilon}{p^2}}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[ \frac{\sum W_k(p) f_{k0}}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} \quad (8.9)$$

Второе слагаемое (8.9), как и ранее, дает статическую ошибку. Первое слагаемое (8.9) имеет смысл только при астатизме второго порядка, когда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_\varepsilon (1 + b_{m-1}p + \dots + b_0 p^m)}{p^2 (1 + c_{n-3}p + \dots + c_0 p^{n-1})},$$

где  $K_\varepsilon = K$  — коэффициент передачи разомкнутой системы, называемый добротностью по ускорению.

Тогда выражение (8.9) приводится к виду

$$x_{\text{уст}} = \frac{\varepsilon}{K_\varepsilon} + x_{\text{ст}} = x_y + x_{\text{ст}}.$$

Первое слагаемое (8.10) представляет собой добавочную ошибку от постоянного ускорения. Как и в предыдущем случае, качество системы может быть оценено величиной добротности по ускорению

$$K_\varepsilon = \varepsilon/x_y. \quad (8.11)$$

Этот типовой режим используется только для систем с астатизмом второго порядка, главным образом следящих систем.

**4. Движение по гармоническому (синусоидальному) закону.** Такой режим используется весьма часто, так как он позволяет наиболее полно оценить динамические свойства системы управления. Задающее воздействие принимается изменяющимся по закону

$$g(t) = g_{\text{max}} \sin \omega_k t. \quad (8.12)$$

В зависимости от конкретного вида системы возмущающие воздействия в рассматриваемом режиме могут оставаться постоянными или меняться.

Случай постоянства возмущающих воздействий приводит, как и в рассмотренных выше типовых режимах, к появлению некоторой постоянной ошибки  $x_{\text{ст}}$ .

Более вероятным является случай, когда возмущающие воздействия при движении системы в этом режиме меняются во времени. Это объясняется тем, что при движении по гармоническому закону непрерывно будет меняться направление движения системы, а следовательно, одновременно будет меняться направление действующих в системе сил сухого трения. Этот случай является довольно сложным, и он может рассматриваться только в приложении к конкретным системам. Рассмотрим ошибку, определяемую только первым слагаемым выражения (5.19):

$$x = \frac{g}{1+W(p)}. \quad (8.13)$$

В линеаризованной системе при гармоническом задающем воздействии (8.12) ошибка в установившемся режиме будет также меняться по гармоническому закону с частотой  $\omega_k$ :

$$x = x_{\max} \sin(\omega_k t + \psi). \quad (8.14)$$

Точность системы в этом режиме может быть оценена по амплитуде ошибки, которая может быть найдена из (8.13) на основании символического метода подстановкой  $p = j\omega_k$ :

$$x_{\max} = \frac{g_{\max}}{|1+W(j\omega_k)|}. \quad (8.15)$$

Так как предполагается, что амплитуда ошибки значительно меньше амплитуды входного воздействия:  $x_{\max} \ll g_{\max}$ , то, следовательно, модуль знаменателя (8.15) значительно больше единицы. Это позволяет с большой точностью выражение (8.15) заменить приближенным

$$x_{\max} \approx \frac{g_{\max}}{|W(j\omega_k)|} = \frac{g_{\max}}{A(\omega_k)}, \quad (8.16)$$

где  $A(\omega_k)$  — модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы при  $\omega = \omega_k$ .

Последняя формула позволяет легко вычислять амплитуду ошибки в установившемся режиме. Для этого необходимо располагать либо аналитическим выражением для передаточной функции разомкнутой системы, либо иметь экспериментально снятую амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы.

Формула (8.16) широко используется также при расчете системы методом логарифмических амплитудных частотных характеристик (л. а. х.). В этом случае модуль  $A(\omega_k)$  в дБ, т. е.  $L(\omega_k) = 20 \lg A(\omega_k)$ , равен ординате л. а. х. при частоте  $\omega = \omega_k$  (рис. 8.2, а).

Простота выражения (8.16) позволяет легко решить обратную задачу, т. е. сформулировать тре-

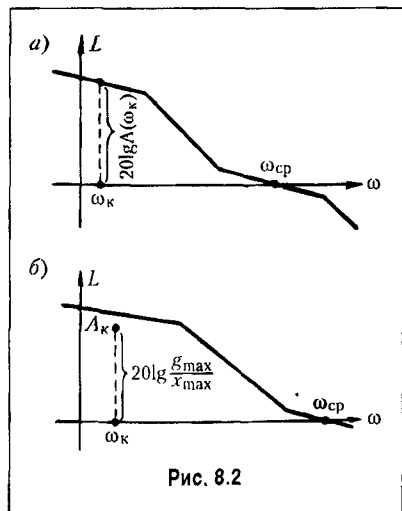


Рис. 8.2

бования к л. а. х., которые необходимо выполнить, чтобы амплитуда ошибки в установившемся режиме была не больше заданной. Для этого необходимо по заданному значению амплитуды задающего воздействия  $g_{\max}$  и допустимой амплитуде ошибки  $x_{\max}$  вычислить требуемое значение модуля частотной передаточной функции разомкнутой системы в децибелах:

$$L(\omega_k) - 20 \lg \Lambda(\omega_k) = 20 \lg g_{\max}/x_{\max}. \quad (8.17)$$

Это значение модуля необходимо отложить на логарифмической сетке при частоте управляющего воздействия  $\omega = \omega_k$ . Полученная точка  $A_k$  (рис. 8.2, б) обычно называется контрольной точкой для л. а. х. Для того чтобы амплитуда ошибки в системе не превосходила допустимого значения  $x_{\max}$ , л. а. х. должна проходить *не ниже* контрольной точки  $A_k$ . Если л. а. х. пройдет через эту точку, то амплитуда ошибки будет как раз равна допустимому значению. Если л. а. х. пройдет ниже точки  $A_k$ , то ошибка будет больше допустимого значения.

### § 8.3. Коэффициенты ошибок

Рассматриваемый метод может применяться как для задающего  $g(t)$ , так и для возмущающего  $f(t)$  воздействий. Не снижая общности рассуждений, рассмотрим случай, когда имеется только задающее воздействие.

Если функция времени  $g(t)$  имеет произвольную форму, но достаточно плавную вдали от начальной точки процесса в том смысле, что через некоторое время существенное значение имеет только конечное число  $m$  производных

$$\frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \dots, \frac{d^m g}{dt^m},$$

то ошибку системы можно определить следующим образом. Из формулы (5.19) можно найти изображение ошибки

$$X(p) = \Phi_x(p)G(p) = \frac{G(p)}{1+W(p)}, \quad (8.18)$$

где  $\Phi_x(p)$  — передаточная функция замкнутой системы по ошибке,  $G(p)$  изображение задающего воздействия.

Разложим передаточную функцию по ошибке в выражении (8.18) в ряд по возрастающим степеням комплексной величины  $p$ :

$$X(p) = \left[ c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \frac{c_3}{3!} p^3 + \dots \right] G(p), \quad (8.19)$$

сходящийся при малых значениях  $p$ , т. е. при достаточно больших значениях времени  $t$ , что соответствует установившемуся процессу изменения управляемой величины при заданной форме задающего воздействия.

Переходя в выражении (8.19) к оригиналу, получаем формулу для установившейся ошибки

$$x_{уст} = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots \quad (8.20)$$

Величины  $c_0, c_1, c_2, \dots$  называются *коэффициентами ошибок*. Они могут определяться согласно общему правилу разложения функции в ряд Тейлора по формулам

$$c_0 = [\Phi_x(p)]_{p=0}; \quad c_1 = \left[ \frac{d\Phi_x(p)}{dp} \right]_{p=0}; \quad \dots; \quad c_m = \left[ \frac{d^m \Phi_x(p)}{dp^m} \right]_{p=0}.$$

Так как передаточная функция по ошибке представляет собой дробно-рациональную функцию, то коэффициенты ошибок можно более просто получить делением числителя на знаменатель и сравнением получающегося ряда с выражением (8.19).

Коэффициент  $c_0$  может быть отличным от нуля только в статических системах и то только в тех случаях, когда не принимаются меры по устранению первой составляющей статической ошибки посредством масштабирования или использования нелинейных обратных связей (см. § 9.3).

В системах с астатизмом первого порядка  $c_0 = 0$ , а коэффициент  $c_1$  связан с добротностью по скорости соотношением

$$c_1 = 1/K_v.$$

В системах с астатизмом второго порядка

$$c_0 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 = 0,$$

а коэффициент  $c_2$  связан с добротностью по ускорению соотношением

$$c_2/2 = 1/K_e. \quad (8.22)$$

При исследовании ошибки от возмущающего воздействия можно получить все коэффициенты не равными нулю при астатизме любого порядка, так как астатизму по задающему воздействию может соответствовать наличие статической ошибки по возмущению.

Если задающее воздействие  $g(t)$  имеет ограниченное число производных, то ряд (8.20) будет иметь ограниченное число членов. Предположение, что коэффициенты ошибок представляют собой постоянные числа, обуславливает применение этого метода для сравнительно медленно меняющихся входных воздействий  $g(t)$  или  $f(t)$ , когда можно пренебречь влиянием переходной составляющей процесса и рассматривать только вынужденное движение системы.

**П р и м е р.** Определим первые три коэффициента ошибки по задающему воздействию, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K_v}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Передаточная функция по ошибке

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + K_v}.$$

Деля числитель на знаменатель, получаем ряд

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{K_v} p + \left( \frac{T_1 + T_2}{K_v} - \frac{1}{K_v^2} \right) p^2 + \left( T_1 T_2 - 2 \frac{T_1 + T_2}{K_v} + \frac{1}{K_v^3} \right) p^3 + \dots$$

Сравнение этого ряда с (8.19) дает

$$c_0 = 0; \quad c_1 = \frac{1}{K_v}; \quad \frac{c_2}{2} = \frac{T_1 + T_2}{K_v} - \frac{1}{K_v^2}; \quad \frac{c_3}{6} = \frac{T_1 T_2}{K_v} - 2 \frac{T_1 + T_2}{K_v^2} + \frac{1}{K_v^3}.$$

Так, например, если задающее воздействие в этой системе меняется по закону

$$g(t) = g_0 + v_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

то установившаяся ошибка будет

$$x_{уст} = \frac{v_0 + \varepsilon t}{K_v} + \frac{\varepsilon}{K_v^2} [(T_1 + T_2)K_v - 1].$$

На основании изложенного выше можно сделать вывод, что ненулевые составляющие ошибки как от задающего, так и от возмущающих воздействий (кроме ошибки чувствительного элемента  $x_{ст}^*$ ) во всех типовых режимах можно уменьшить за счет увеличения коэффициента передачи разомкнутой системы  $K$ . Однако, как было показано в гл. 6, в большинстве случаев при увеличении  $K$  замкнутая система приближается к колебательной границе устойчивости, т. е. уменьшается ее запас устойчивости. При некотором значении  $K > K_{кр}$  замкнутая система становится неустойчивой.

#### § 8.4. Определение запаса устойчивости и быстродействия по переходной характеристике

Оценку запаса устойчивости и быстродействия можно произвести по виду кривой переходного процесса в системе автоматического управления при некотором типовом входном воздействии, которым может быть как задающее, так и возмущающее воздействие. В качестве типового входного воздействия рассматривается обычно единичный скачок. В этом случае кривая переходного процесса для управляемой величины будет представлять собой *переходную характеристику* системы (рис. 8.3). Она может строиться для величины  $y(t)$  или для ошибки  $x(t)$ .



Склонность системы к колебаниям, а следовательно, и запас устойчивости могут быть охарактеризованы максимальным значением управляемой величины  $y_{\max}$  или так называемым *перерегулированием*

$$\sigma\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%, \quad (8.23)$$

где  $y(\infty) \neq 0$  представляет собой установившееся значение управляемой величины после завершения переходного процесса.

Допустимое значение перерегулирования для той или иной системы может быть установлено на основании опыта эксплуатации подобных систем. В большинстве случаев считается, что запас устойчивости является достаточным, если величина перерегулирования не превышает  $10 \div 30\%$ . Однако в некоторых случаях требуется, чтобы переходный процесс протекал вообще без перерегулирования, т. е. был монотонным; в ряде других случаев может допускаться перерегулирование  $50 \div 70\%$ .

Быстродействие системы может определяться по длительности переходного процесса  $t_{\text{п}}$ . Длительность переходного процесса определяется как время, протекающее от момента приложения на вход единичного скачка до момента, после которого имеет место неравенство

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta y(\infty) = \Delta_1, \quad (8.24)$$

где  $\Delta_1$  — заданная малая постоянная величина, представляющая собой обычно допустимую ошибку; величина  $y(\infty)$  в частном случае может равняться нулю.

Допустимое значение времени переходного процесса определяется на основании опыта эксплуатации систем управления. В следящих системах в качестве единичного скачка принимается мгновенное изменение управляющего воздействия  $g(f) = 1(t)$ . В этом случае под величиной  $\Delta$  обычно понимают некоторую долю входного воздействия, составляющую, как правило, от 1 до 5% величины скачка на входе.

Иногда дополнительно к величине перерегулирования  $\sigma\%$  (или к величине  $y_{\max}$ ) задается допустимое число колебаний, которое может наблюдаться в течение времени переходного процесса. Это число составляет обычно  $1 \div 2$ . В некоторых системах колебания могут вообще не допускаться, а иногда может допускаться до  $3 \div 4$  колебаний.

Графически требования к запасу устойчивости и быстродействию сводятся к тому, чтобы отклонение величины не выходило при единичном входном воздействии из некоторой области, изображенной на рис. 8.4. Эта область называется областью допустимых отклонений управляемой величины в переходном процессе.

В следящих системах удобно применять сформулированные требования качества к ошибке си-

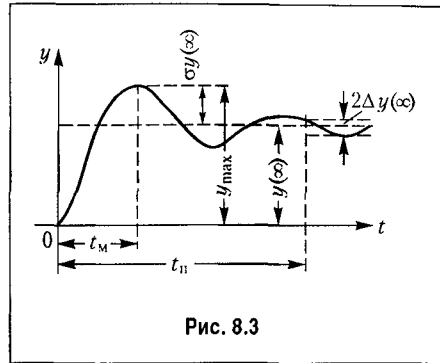


Рис. 8.3

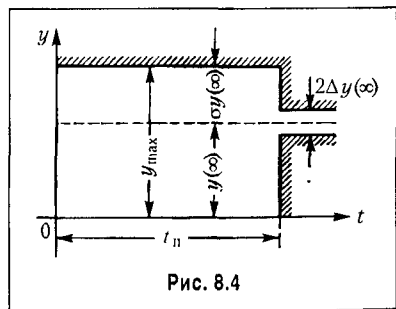


Рис. 8.4

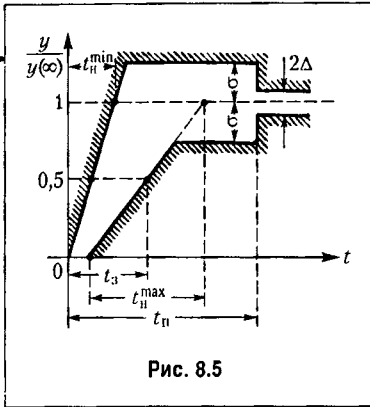


Рис. 8.5

стемы  $x(t) = g(t) - y(t)$ . В этом случае можно рассматривать область допустимых значений ошибки и при более сложных входных воздействиях, например при мгновенном приложении на входе постоянной скорости.

Дальнейшее развитие критериев качества, использующих переходную характеристику, приводит к введению дополнительных оценок качества (кроме введенных выше  $t_p$ ,  $y_{\max}$  и  $\sigma\%$ ). К ним относятся следующие оценки.

1. Время запаздывания  $t_3$  равно отрезку времени, заключенному между моментом приложения входного скачкообразного сигнала и моментом времени, при котором осредненная выходная величина

становится равной половине ее установившегося значения. Примененный здесь термин «осредненная» означает, что в случаях, когда на передний фронт выходного сигнала накладываются высокочастотные колебания (это может иметь место в системах высокого порядка), величина  $t_3$  определяется по сглаженной кривой, аппроксимирующей реальную переходную характеристику системы.

2. Время нарастания  $t_p$ , равно отрезку времени, заключенному между точкой пересечения оси времени с касательной, проведенной к осредненной кривой переходной характеристики в точке  $t = t_3$ , и координатой  $t$  точки пересечения указанной касательной с горизонтальной прямой, соответствующей установившемуся значению управляемой величины. Максимальное время нарастания  $t_p^{\max}$  ограничивается требуемым быстродействием. Минимальное время нарастания  $t_p^{\min}$  ограничивается допустимыми в системе ускорениями и колебательными режимами.

Уточненная диаграмма качества переходного процесса изображена на рис. 8.5.

## § 8.5. Корневые методы

Как было сказано выше, вид корней характеристического уравнения определяет характер переходных процессов в системе автоматического управления. Поэтому можно сформулировать требования по запасу устойчивости и быстродействию системы, не рассматривая самих переходных процессов, а накладывая определенные условия на корни характеристического уравнения.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_k p^{n-k} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (8.25)$$

где  $p = s + j\omega$  комплексное число.

Используя понятие *среднегеометрического корня*

$$\Omega_0 = +\sqrt[n]{|p_1 p_2 \dots p_n|} = +\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \quad (8.26)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — корни характеристического уравнения, в формуле (8.25) можно перейти к новой комплексной величине  $q$  путем подстановки  $p = \Omega_0 q$ . В результате получим уравнение

$$q^n + A_1 q^{n-1} + \dots + A_k p^{n-k} + \dots + A_{n-1} q + 1 = 0, \quad (8.27)$$

в котором безразмерные коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_{n-1}$  определяются выражением

$$A_k = \frac{a_0 \Omega_0^{n-k}}{a_0}, \quad (8.28)$$

а его корни равны  $q_1 = \frac{p_1}{\Omega_0}$ ,  $q_2 = \frac{p_2}{\Omega_0}$  и т. д.

Исходное характеристическое уравнение (8.25) при возвращении к прежней комплексной величине получает вид

$$p^n + A_1 \Omega_0 p^{n-1} + \dots + A_k \Omega_0^{n-k} p^{n-k} + \dots + \Omega_0^n = 0. \quad (8.29)$$

Среднегеометрический корень  $\Omega_0$  может служить мерой скорости протекания переходных процессов. Если в уравнении (8.29) увеличить  $\Omega_0$ , например, в 10 раз, то на основании теоремы подобия (табл. 7.2) переходный процесс, оставаясь подобным сам себе, будет протекать в 10 раз быстрее.

В связи с этим можно рассматривать (8.27) как некоторое нормированное характеристическое уравнение, которому соответствует переходный процесс, построенный для безразмерного времени  $t_0 = \Omega_0 t$ . Если качество переходного процесса является приемлемым с точки зрения допустимого запаса устойчивости, определяемого, например, перерегулированием (рис. 8.3), то требуемая скорость протекания переходного процесса может быть обеспечена соответствующим выбором величины  $\Omega_0$ .

Для увеличения величины  $\Omega_0$ , как следует из (8.26), необходимо увеличивать свободный член характеристического уравнения  $a_n$ . Напомним, что в статических системах  $a_n = 1 + K$ , а в астатических  $a_n = K$ , где  $K$  — коэффициент передачи разомкнутой системы. Следовательно, повышение быстродействия может осуществляться за счет увеличения коэффициента передачи  $K$ . Однако, как уже отмечалось, при этом уменьшается запас устойчивости замкнутой системы. В результате переходный процесс (рис. 8.3) становится более колебательным.

Для оценки быстродействия системы может использоваться понятие степени устойчивости<sup>1</sup>.

Под *степенью устойчивости*  $\eta$  понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня (рис. 8.6). Здесь могут быть два случая: когда ближайший корень является вещественным (рис. 8.6, а) и когда к мнимой оси ближе всего расположена пара комплексных корней (рис. 8.6, б).

<sup>1</sup> Термин «степень устойчивости» не является удачным, и его, вообще говоря, следовало заменить термином «степень быстродействия». Это объясняется тем, что «степень устойчивости» никак не связана с удалением системы от границы устойчивости, определяемым по склонности системы к колебаниям. Однако этот термин используется в литературе, и мы будем его придерживаться.

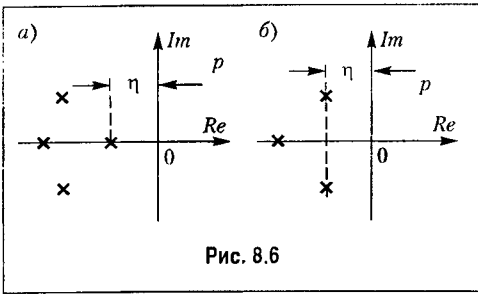


Рис. 8.6

Корни характеристического уравнения, расположенные ближе всего к мнимой оси, т. е. имеющие наименьшую по абсолютной величине вещественную часть, дают в переходном процессе (7.3) члены, которые затухают наиболее медленно. В большинстве случаев переходный процесс можно считать закончившимся тогда, когда затухнет член, определяемый ближайшим к мнимой оси корнем. Если ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, то составляющая в переходном процессе, определяемая этим корнем, будет иметь вид  $x_{\eta}(t) = C_{\eta} e^{-\eta t}$ .

Положив в конце переходного процесса  $x_{\eta}(t_{\Pi}) = \Delta C_{\eta}$ , где  $\Delta = 0,01 + 0,05$ , можно получить приближенную зависимость между степенью устойчивости и временем переходного процесса:

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (8.30)$$

Так, например, если принять  $\Delta = 0,05$ , то время переходного процесса составит

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \approx \frac{3}{\eta}.$$

Если ближайшей к мнимой оси является пара комплексных корней  $-\eta \pm j\beta$ , то составляющая в переходном процессе, определяемая этими корнями, будет  $x_{\eta}(t) = C_{\eta} e^{-\eta t} \sin(\beta t + \psi)$ .

Положив в этом случае  $x_{\eta}(t) = \Delta C_{\eta}$ , нельзя в общем виде определить время переходного процесса, так как для этой цели потребовалось бы решить трансцендентное уравнение. Однако можем найти верхнюю границу переходного процесса, положив в этом уравнении  $\sin(\beta t + \psi) = 1$ . Тогда получим выражение

$$t_{\Pi} \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (8.31)$$

Таким образом, и в этом случае величина степени устойчивости будет в какой-то мере определять быстроту затухания переходного процесса.

Более строго связь между видом переходного процесса и величиной степени устойчивости может быть определена для случая, когда исходное дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = f(t), \quad (8.32)$$

Тогда можно показать [44], что при всех вещественных корнях или одной паре комплексных корней для переходной функции справедливо неравенство

$$1 + v(\eta, t) > h(t) > 1 - v(\eta, t), \quad (8.33)$$

где  $1 + v(\eta, t)$  — функция, ограничивающая  $h(t)$  сверху (мажоранта);  $1 - v(\eta, t)$  — функция, ограничивающая  $h(t)$  снизу (миноранта).

Вспомогательная функция  $v(\eta, t)$  определяется из выражения

$$v(\eta, t) = e^{-\eta t} \left[ 1 + \eta t + \frac{(\eta t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\eta t)^{n-1}}{(n-1)!} \right]. \quad (8.34)$$

Миноранта совпадает с переходной функцией, если характеристическое уравнение имеет корень  $p_1 = -\eta$  кратности  $n$ , т. е. выглядит следующим образом:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (p + \eta)^n = 0. \quad (8.35)$$

Очевидно, что в этом случае  $n$ -кратный корень совпадает со среднегеометрическим корнем

$$\eta = \Omega_0 = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}. \quad (8.36)$$

Из неравенства (8.33) вытекает, что при заданном значении среднегеометрического корня  $\Omega_0 = \text{const}$  и всех вещественных корнях наименьшее время переходного процесса будет при всех кратных корнях, т. е. в случае (8.35).

На рис. 8.7 приведены миноранты, совпадающие с переходными характеристиками для случая  $n$ -кратного корня, построенные в функции относительного времени  $\tau = \Omega_0 t$  для различных значений порядка дифференциального уравнения  $n$ .

Важным обстоятельством является то, что степень устойчивости можно найти без вычисления значений корней характеристического уравнения. Для этой цели в характеристическом уравнении (8.25) переходят к новой переменной  $z = p + \eta$ . Подставляя в него  $z = p - \eta$ , получаем так называемое смещенное уравнение

$$a_0 (z - \eta)^n + a_1 (z - \eta)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (z - \eta) + a_n = 0.$$

Раскрывая скобки и группируя подобные члены, получаем

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0. \quad (8.37)$$

Это уравнение соответствует смещению осей на плоскости корней (рис. 8.6) влево на величину  $\eta$ . В результате один (рис. 8.6, а) или два (рис. 8.6, б) корня попадают на мнимую ось, что соответствует границе устойчивости.

Для вычисления степени устойчивости необходимо применить к смещенному характеристическому уравнению (8.37) любой критерий устойчивости и определить, при каком значении  $\eta$  получается граница устойчивости. Напомним, что апериодической границе устойчивости соответствует равенство нулю свободного члена характеристического уравнения:

$$A_n = a_n - a_{n-1}\eta + a_{n-2}\eta^2 - a_{n-3}\eta^3 + \dots = 0, \quad (8.38)$$

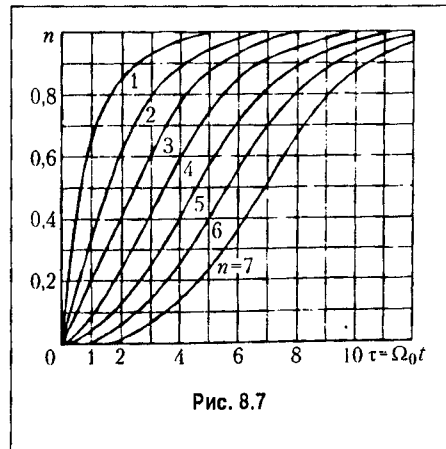


Рис. 8.7

а колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица или прохождение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку  $(-1, j0)$ .

Обратимся теперь к оценке запаса устойчивости системы автоматического управления. Склонность системы к колебаниям будет наблюдаться, если в решении характеристического уравнения будут присутствовать комплексные корни вида  $-\alpha \pm j\beta$ . Эта склонность может характеризоваться отношением мнимой части корня (угловой частоты колебаний) к вещественной (коэффициенту затухания), которое называется *колебательностью*:

$$\mu = \beta/\alpha. \quad (8.39)$$

Колебательность связана с другим корневым показателем запаса устойчивости — с так называемым затуханием. Комплексные сопряженные корни дают в выражении для переходного процесса член вида

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi).$$

Найдем затухание амплитуды синусоидального колебания за один период. При некотором времени  $t = t_1$  эта амплитуда равна

$$C_1 = Ce^{-\alpha t_1}.$$

Через один период  $T = 2\pi/\beta$

$$C_2 = Ce^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = C_1 e^{-\frac{2\pi\alpha}{\beta}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

*Затуханием за период* называют величину

$$\zeta = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{C_2}{C_1}. \quad (8.40)$$

Эта величина обычно выражается в процентах. Подставляя значение амплитуды  $C_2$ , получаем

$$\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}, \quad (8.41)$$

или

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\zeta}}. \quad (8.42)$$

Обычно в системах автоматического управления допускается затухание за один период не менее чем 90 ÷ 98%. Так, например, если  $\zeta\% = 98\%$ , то допустимая колебательность при этом составит

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln 50} \approx \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Соответственно при  $\zeta = 90\%$  получаем  $\mu \approx 2,72$ .

Задание определенной колебательности заставляет ограничивать область расположения корней двумя лучами (рис. 8.8, а), которые составляют с осью вещественных угол

$$\varphi = \arctg (\beta/\alpha) = \arctg \mu. \quad (8.43)$$

Колебательность системы можно определить без нахождения корней характеристического уравнения подобно тому, как это было сделано выше по отношению к степени устойчивости. Идея метода заключается в том, что используется подстановка  $p = jze^{-j\varphi}$ , которая соответствует повороту координатных осей (рис. 8.8, б) против часовой стрелки на угол  $\pi/2 - \varphi$ . При этом по крайней мере один корень попадает на мнимую ось и затем он отыскивается.

Ввиду громоздкости этот метод почти не имеет практического значения.

При задании допустимых значений колебательности и степени устойчивости область расположения корней должна ограничиваться также вертикальной прямой, проходящей параллельно мнимой оси на расстоянии  $\eta$  (рис. 8.8, б). Расположению корней в этой области соответствует выдерживание требуемого запаса устойчивости, определяемого величиной колебательности  $\mu$  или затуханием, и требуемой степени устойчивости  $\eta$ , характеризующей быстрдействие системы.

Для определения параметров системы, при которых обеспечивается нахождение корней характеристического уравнения в заданной области, можно воспользоваться *D*-разбиением. В этом случае в плоскости двух параметров системы может быть построена область, аналогично построению области устойчивости (см. гл. 6).

Использование корней характеристического уравнения для оценки качества управления является не совсем полным, так как вид переходного процесса определяется не только левой, но и правой частью дифференциального уравнения. Для того чтобы учесть это обстоятельство, рассмотрим, например, зависимость между управляемой величиной и задающим воздействием, записанную посредством передаточной функции замкнутой системы (5.20):

$$Y(p) = \Phi(p)G(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}G(p).$$

Передаточная функция замкнутой системы представляет собой дробнорациональную функцию

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (8.44)$$

Раскладывая числитель и знаменатель (8.44) на множители, получим

$$\Phi(p) = \frac{b_0 (p - p_1^0)(p - p_2^0) \dots (p - p_m^0)}{a(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (8.45)$$

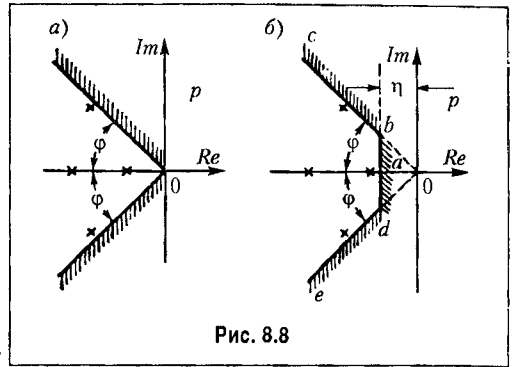


Рис. 8.8

Корни числителя  $p_1^0, \dots, p_m^0$  называются нулями передаточной функции, так как в точке  $p = p_i^0$  передаточная функция обращается в нуль. Корни знаменателя  $p_1, \dots, p_n$  являются корнями характеристического уравнения, и они называются полюсами передаточной функции. В полюсе, т. е. при  $p = p_i$ , передаточная функция обращается в бесконечность.

Полюсы передаточной функции характеризуют левую часть дифференциального уравнения, а нули — правую. В частном случае, когда передаточная функция (8.44) не имеет нулей, правая часть дифференциального уравнения имеет вид  $B(p) f(t) = b_m f(t)$  и формула (8.45) сводится к выражению

$$\Phi(p) = \frac{b_m}{a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}. \quad (8.46)$$

В этом случае вид переходного процесса определяется только расположением полюсов.

Задание области расположения полюсов и нулей позволяет более полно оценить вид переходного процесса. Не останавливаясь на подробном анализе, приведем без доказательства общие рекомендации, которых желательно придерживаться при выборе расположения полюсов и нулей передаточных функций [70].

1. Желательно располагать нули вблизи области расположения полюсов. Удаление нулей от области полюсов ведет к увеличению амплитуд собственных колебаний в переходном процессе.

2. Для уменьшения отклонений в переходном процессе часто бывает выгодно удалять полюсы друг от друга.

3. Приближение друг к другу не представляет опасности для тех полюсов, которые расположены далеко от мнимой оси.

Кроме этих рекомендаций сохраняют свою силу ограничения на область расположения полюсов, накладываемые в связи с требованиями обеспечения определенного запаса устойчивости и быстродействия (см. рис. 8.8, б).

## § 8.6. Диаграмма Вышнеградского

Рассмотрим характеристическое уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad (8.47)$$

Приведем его к нормированному виду. Для этого разделим все члены на  $a_3$  и введем новую переменную

$$q = p \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}} = \frac{p}{\Omega_0}. \quad (8.48)$$

Здесь использовано понятие среднегеометрического корня (8.26):

$$\Omega_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}.$$



В результате получим нормированное уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (8.49)$$

где коэффициенты

$$A = \frac{a_1 \Omega_0^2}{a_3} = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}, \quad B = \frac{a_2 \Omega_0}{a_3} = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}$$

называются *параметрами Вышнеградского*.

На плоскости параметров  $A$  и  $B$  нанесем границу устойчивости. Условия устойчивости системы третьего порядка были впервые сформулированы Вышнеградским еще в 1876 году, до появления в 1895 году критерия Гурвица. Эти условия:  $A > 0$ ,  $B > 0$  и  $AB > 1$ . Уравнение границы устойчивости (колебательной):  $AB = 1$  при  $A > 0$  и  $B > 0$ . Это есть равнобокая гипербола, для которой оси координат служат асимптотами (рис. 8.9). Область устойчивости системы, согласно написанным выше условиям, лежит выше этой кривой.

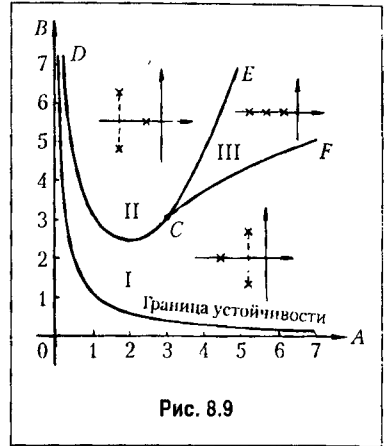


Рис. 8.9

Разобьем область устойчивости на отдельные части, соответствующие различному расположению корней характеристического уравнения. Заметим, что в точке  $C$ , где  $A = 3$  и  $B = 3$ , характеристическое уравнение (8.49) принимает вид  $(q + 1)^3 = 0$ . Следовательно, в этой точке все три корня равны:  $q_1 = q_2 = q_3 = -1$ . При этом для исходного характеристического уравнения согласно (8.48) получаем  $p_1 = p_2 =$

$$= p_3 = - \left( \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} \right) = -\Omega_0.$$

В общем случае возможны два варианта: 1) все три корня вещественные; 2) один корень вещественный и два комплексных.

Граница между этими двумя случаями определяется равенством нулю дискриминанта уравнения третьей степени (8.49), который может быть получен, например, из формулы Кардана для решения кубического уравнения

$$A^2 B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0.$$

Это уравнение дает на плоскости параметров  $A, B$  две кривые:  $CE$  и  $CF$  (рис. 8.9). Внутри области  $ECF$  дискриминант положителен. Следовательно, в этой области имеется три вещественных корня (область III). В остальной части плоскости дискриминант отрицателен, что соответствует наличию пары комплексных корней.

Существенное значение имеет взаимное расположение вещественного и комплексных корней. Будем различать здесь два случая: I — пара комплексных корней лежит ближе к мнимой оси, чем вещественный, и II — вещественный корень лежит ближе к мнимой оси, чем пара комплексных. Границей между этими двумя случаями является расположение всех трех корней на одинаковом расстоянии от мнимой оси. Уравнение этой границы можно найти, положив значения корней  $q_1 = -\alpha$ , и  $q_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$ . Тогда характеристическое уравнение (8.49) будет

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = (q + \alpha)(q + \alpha - j\beta)(q + \alpha + j\beta) = q^3 + 3\alpha q^2 + (3\alpha^2 + \beta^2)q + \alpha(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

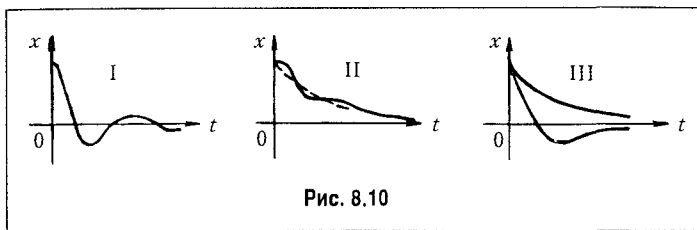


Рис. 8.10

Уравнивание коэффициентов при одинаковых степенях даст

$$A = 3\alpha, \quad B = 3\alpha^2 + \beta^2, \\ 1 = \alpha(\alpha^2 + \beta^2).$$

В результате совместного решения послед-

них трех равенств получаем после исключения  $\alpha$  и  $\beta$  искомое уравнение, соответствующее граничному случаю:

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0, \quad A < 3.$$

Написанное равенство дает на плоскости параметров кривую  $CD$ .

В результате область устойчивости разбивается на три части: I, II, III (см. рис. 8.9). Этот график называется *диаграммой Вышнеградского*. Он построен им в 1876 году в работе, которая положила начало развитию теории автоматического управления. На рисунке показан характер расположения корней внутри каждой из этих частей области устойчивости.

В области III, где все корни вещественные, в зависимости от начальных условий получим апериодический переходный процесс в одной из форм, показанных на третьем графике рис. 8.10. Область III носит название области апериодических процессов.

В областях I и II, где имеется один вещественный корень и два комплексных, переходный процесс будет иметь соответственно формы, показанные на первых двух графиках рис. 8.10. В области I быстрее затухает экспонента и переходный процесс в основном будет определяться колебательной составляющей. Это будет область колебательных процессов. В области II, наоборот, быстрее затухает колебательная составляющая. Это будет область монотонных процессов.

Диаграмма Вышнеградского получила дальнейшее развитие. Для более точной оценки характера переходного процесса на ней можно нанести вспомогательные линии, разбивающие области I, II и III на еще более мелкие части, что позволит иметь более полное суждение о быстродействии и запасе устойчивости. Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные способы уточнения диаграммы Вышнеградского посредством нанесения линий равной степени устойчивости (для оценки быстродействия) и линий равного затухания (для оценки запаса устойчивости).

Для нанесения линий равной степени устойчивости обратимся к нормированному характеристическому уравнению (8.49). Для получения смещенного уравнения введем новую переменную, определяемую соотношением  $q = q_1 - \eta_0$ , где  $\eta_0$  обозначает степень устойчивости для нормированного уравнения. Для исходного уравнения (8.47) согласно (8.48) степень устойчивости будет

$$\eta = \eta_0 \Omega_0 = \eta_0 \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}.$$

Смещенное уравнение имеет вид

$$q_1^3 + A_1 q_1^2 + A_2 q + A_3 = 0. \quad (8.50)$$

Коэффициенты этого уравнения:

$$A_1 = -3\eta_0 + A, \quad A_2 = 3\eta_0^2 - 2A\eta_0 + B,$$

$$A_3 = -\eta_0^3 + A\eta_0^2 - B + 1.$$

Применим к смешанному уравнению условие границы устойчивости. Колебательная граница устойчивости, соответствующая чисто мнимым корням смешанного уравнения (8.50), будет при выполнении условия  $A_1 A_2 = A_3$ . Апериодическая граница устойчивости (нулевой корень) будет при  $A_3 = 0$ . Первое условие при подстановке значений коэффициентов приводит к уравнению

$$B = \frac{1}{A - 2\eta_0} + 2\eta_0(a - 2\eta_0), \quad (8.51)$$

а второе даст

$$B = A\eta_0 - \eta_0^2 + \frac{1}{\eta_0}. \quad (8.52)$$

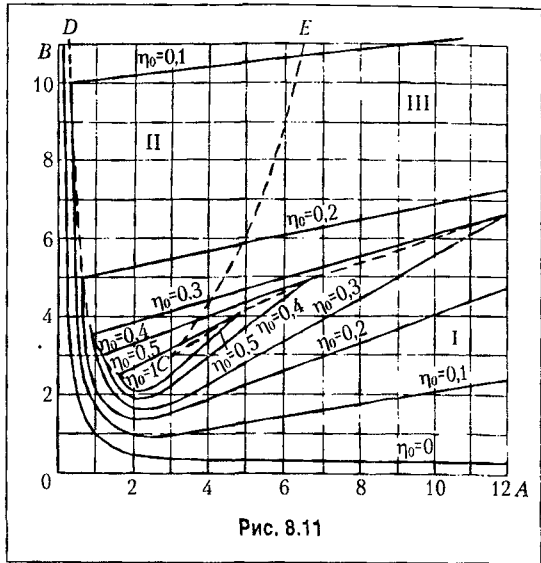


Рис. 8.11

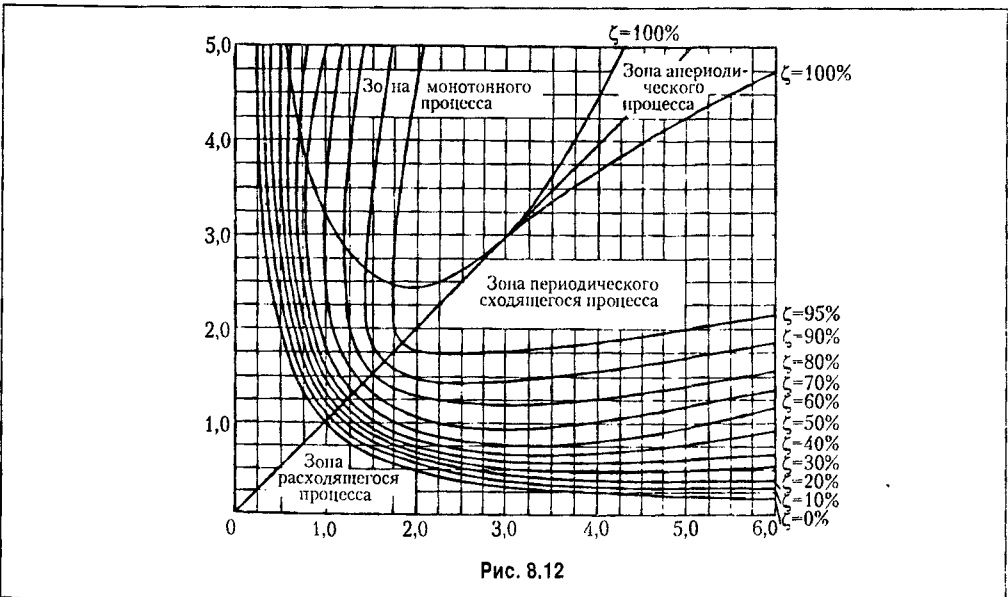


Рис. 8.12

На основании полученных уравнений, задаваясь различными значениями  $\eta_0 = \text{const}$ , можно построить на диаграмме Вышнеградского линии одинаковых значений нормированной степени устойчивости (рис. 8.11). По уравнению (8.51) построены кривые  $\eta_0 = \text{const}$  в области I, так как там, согласно рис. 8.9, ближайшими к мнимой оси являются комплексные корни. Кривая  $\eta_0 = 0$  совпадает с границей устойчивости. Уравнение (8.52) дает прямые, которые нанесены в областях II и III.

Как видно из диаграммы, наибольшая степень устойчивости  $\eta_0 = 1$  имеет место в точке C с координатами  $A = 3$  и  $B = 3$ . Следовательно, эта точка соответствует наилучшим значениям параметров с точки зрения величины степени устойчивости. Однако, как уже отмечалось, степень устойчивости является приближенной оценкой быстроты затухания переходного процесса. Поэтому при выборе параметров системы управления практически нет смысла попадать именно в эту точку диаграммы. Можно считать, что наилучшей областью параметров системы будет область, прилегающая к точке C, например внутри замкнутой кривой  $\eta_0 = 0,5$ .

На рис. 8.12 приведена диаграмма Вышнеградского с нанесенными линиями равного затухания  $\zeta = \text{const}$ . (Аналитические выкладки не приводятся ввиду громоздкости). Эти же линии являются, по существу, и линиями равной колебательности  $\mu = \text{const}$ , так как колебательность и затухание связаны между собой формулами (8.41) и (8.42).

## § 8.7. Интегральные оценки

Интегральные оценки имеют целью дать общую оценку быстроты затухания и величины отклонения управляемой величины в совокупности, без определения того и другого в отдельности. Простейшей интегральной оценкой может служить величина

$$I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt, \quad (8.53)$$

где  $x(t)$  — отклонение управляемой величины от нового установившегося значения, которое она будет иметь после завершения переходного процесса.

В устойчивой системе  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и этот интеграл имеет конечную величину. Геометрически это будет площадь под кривой переходного процесса, построенного для отклонения (рис. 8.13, а).

Площадь будет тем меньше, чем быстрее затухает переходный процесс и чем меньше величина отклонения. Поэтому параметры системы рекомендуется выбирать таким образом, чтобы добиваться минимума этой интегральной оценки.

Для вычисления интеграла (8.53) нет необходимости в нахождении  $x(t)$ , так как

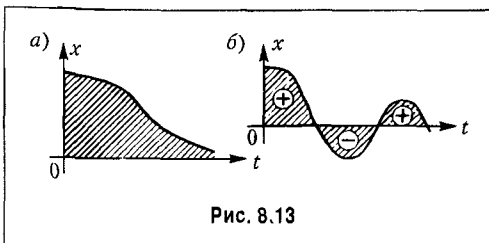


Рис. 8.13

его можно легко вычислить, используя изображение Лапласа или Хевисайда–Карсона. Действительно, изображение Лапласа определяется выражением

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt.$$

Отсюда следует, что интеграл (8.53) может быть найден посредством предельного перехода  $p \rightarrow 0$ :

$$\int_0^{\infty} x(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} X(p). \quad (8.54)$$

Неудобством интегральной оценки вида (8.53) является то, что она годится только для монотонных процессов, когда не меняется знак отклонения  $x$ . Если же имеет место колебательный процесс (рис. 8.13, б), то при вычислении интеграла (8.53) площади будут складываться алгебраически и минимум этого интеграла может соответствовать колебаниям с малым затуханием или вообще без затухания. Так как форма переходного процесса при расчете систем управления может быть неизвестна, то применять интегральную оценку вида (8.53) оказывается практически нецелесообразным. Поэтому предлагалась другая интегральная оценка:

$$I_2 = \int_0^{\infty} |x| dt, \quad (8.55)$$

т. е. сумма абсолютных величин всех площадей под кривой переходного процесса. Но оказалось, что вычисление ее по коэффициентам уравнения затруднительно.

**Квадратичная интегральная оценка.** В свете вышесказанного целесообразно перейти к квадратичной интегральной оценке

$$I = \int_0^{\infty} x^2 dt \quad (x \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty), \quad (8.56)$$

которая не зависит от знаков отклонений, а значит, и от формы переходного процесса (монотонной или колебательной).

Величина  $I$  (8.56) будет тем меньше, чем меньше сумма заштрихованных на рис. 8.14 площадей (взятых для квадратов ординат), т. е. чем лучше переходный процесс приближается к идеальному скачку управляемой величины вслед за скачком задающего или возмущающего воздействия. Ниже будет показано, что такая оценка не всегда является лучшей, но пока остановимся на ней.

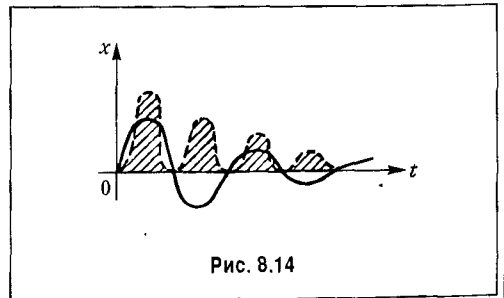


Рис. 8.14

Заметим, что оценку (8.56) называют также квадратичной динамической ошибкой. Ее можно записать в безразмерном виде:

$$I_0 = \sqrt{\frac{a_n}{a_0}} \int_0^{\infty} x^2 dt = \frac{\Omega_0}{C^2} \int_0^{\infty} x^2 dt, \quad (8.57)$$

где  $x = x(t)$  обозначает отклонение управляемой величины в переходном процессе от ее нового установившегося значения:  $x(t) = y(t) - y(\infty)$ ;  $C$  — некоторая величина, имеющая размерность управляемой величины, например статическое отклонение  $y(\infty)$ ;  $\Omega_0$  — среднегеометрическое значение корня характеристического уравнения (8.26).

Рассмотрим один из возможных способов вычисления квадратичной интегральной оценки (8.56) при скачкообразном внешнем воздействии.

В общем случае дифференциальное уравнение системы (в символической операторной записи) согласно (5.5) имеет вид

$$D(p) y(t) = B(p) g(t) - N(p) f(t), \quad (8.58)$$

где  $y(t)$  — управляемая величина или ее отклонение,  $g(t)$  и  $f(t)$  — задающее и возмущающее воздействия.

Степени многочленов  $B(p)$  и  $N(p)$  обычно ниже, чем  $D(p)$ ; в некоторых случаях они могут иметь ту же степень, что и полином  $D(p)$ . Пусть переходный процесс вызывается единичным скачком  $1(t)$  либо функции  $f$  при  $g = \text{const}$ , либо функции  $g$  при  $f = \text{const}$ . Положим, например, что рассматриваем скачок задающего воздействия  $g(t) = 1(t)$ . Изображение Лапласа такого скачка будет  $G(p) = 1/p$ . Перейдя в формулу (8.58) к изображениям, получаем

$$D(p) Y(p) = B(p) \cdot 1/p. \quad (8.59)$$

Изображение управляемой величины  $y(t)$  представляет собой дробно рациональную функцию:

$$Y(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{p}. \quad (8.60)$$

Отклонение  $x$  управляемой величины от нового установившегося состояния в переходном процессе, входящее в формулу (8.56), будет

$$x(t) = y(t) - y(\infty) = y(t) - \frac{b_m}{a_n} \cdot 1,$$

где  $y(t)$  есть решение уравнения (8.59), а также оригинал изображения (8.60).

Для изложенных условий при  $m < n$  ниже без вывода приводится формула [89], по которой может быть вычислена квадратичная интегральная оценка:

$$I = \int_0^{\infty} x^2 dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} (B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + B_2 \Delta_2 + B_1 \Delta_1 + B_0 \Delta_0) - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2}, \quad (8.61)$$

где  $\Delta$  есть следующий определитель  $n$ -го порядка (равный старшему определителю Гурвица, но записанный в несколько иной форме):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & -a_{n-6} & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & -a_{n-4} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \dots \end{vmatrix}. \quad (8.62)$$

На границе устойчивости  $\Delta = 0$  и  $I \rightarrow \infty$ .

Через  $\Delta_k$  ( $k = m, m - 1, \dots, 2, 1, 0$ ) в формуле (8.61) обозначены определители, получающиеся путем замены в определителе (8.62)  $(m - k + 1)$ -го столбца столбцом

$$\begin{matrix} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \quad (8.63)$$

Коэффициенты  $B_m, B_{m-1}, \dots$  вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} B_m &= b_m^2, \\ B_{m-1} &= b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-2}, \\ B_{m-2} &= b_{m-2}^2 - 2b_{m-1} b_{m-3} + 2b_m b_{m-4}, \\ &\dots \\ B_k &= b_k^2 - 2b_{k+1} b_{k-1} + 2b_{k+2} b_{k-2} + \dots + 2(-1)^k b_m b_{2k-m}, \\ &\dots \\ B_0 &= b_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.64)$$

В определителе (8.62) заменяются нулями все буквы с индексами меньше нуля и больше  $n$ , а в формулах (8.64) — с индексами меньше нуля и больше  $m$ .

В том случае, когда  $m = n$ , формула (8.61) заменяется следующей:

$$I = \int_0^\infty x^2 dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} (B'_n \Delta_n + B'_{n-1} \Delta_{n-1} + \dots + B'_2 \Delta_2 + B'_1 \Delta_1) - \frac{b'_n b'_{n-1}}{a_n^2}, \quad (8.65)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 B'_n &= b_0^2 \left( \frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right)^2, \\
 B'_{n-1} &= b_0^2 \left[ \left( \frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right) \left( \frac{b_{n-2}}{b_0} - \frac{a_{n-2}}{a_0} \right) \right], \\
 B'_{n-2} &= b_0^2 \left[ \left( \frac{b_{n-2}}{b_0} - \frac{a_{n-2}}{a_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right) \left( \frac{b_{n-3}}{b_0} - \frac{a_{n-3}}{a_0} \right) + 2 \left( \frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right) \left( \frac{b_{n-4}}{b_0} - \frac{a_{n-4}}{a_0} \right) \right], \\
 &\dots \\
 B'_1 &= b_0^2 \left( \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right)^2, \\
 b'_n &= b_0 \left( \frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right), \\
 b'_{n-1} &= b_0 \left( \frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right).
 \end{aligned} \right\} (8.66)$$

При поступлении на вход системы единичного импульса  $\delta(t) = 1'(t)$ , изображение которого по Лапласу равно 1, изображение управляемой величины можно также представить в виде дробно-рациональной функции (8.60). Разница будет заключаться только в том, что степень числителя  $m$  возрастает на единицу, а последний коэффициент числителя  $b_m = 0$ . Это обусловлено тем, что получение реакции системы на единичный импульс (весовой функции) эквивалентно дифференцированию переходной функции, получающейся при действии единичного скачка. В области изображений это эквивалентно умножению на комплексную величину  $p$ .

В связи с этим квадратичную интегральную оценку при действии единичного импульса можно рассматривать в виде выражения

$$I' = \int_0^{\infty} \omega^2(t) dt = \int_0^{\infty} [x(t)]^2 dt, \quad (8.67)$$

где  $\omega(t)$  — весовая функция системы по задающему или возмущающему воздействию,  $x(t)$  — отклонение управляемой величины от нового установившегося состояния в переходном процессе при действии единичной ступеньки задающего или возмущающего воздействия.

Таким образом, техника вычисления оценки  $I'$  полностью совпадает с вычислением оценки  $I$  по формуле (8.61) или (8.65). Совпадает при этом и значение определителя  $\Delta$  (8.62). Отличаться в вычислениях будут определители  $\Delta_0, \dots, \Delta_m$  и коэф-



коэффициенты  $B_0, \dots, B_m$  или  $B'_0, \dots, B'_n$ , что обусловлено повышением степени  $m$  в выражении (8.60) на единицу при вычислении  $I'$  по сравнению со случаем вычисления  $I$ .

Интегральная оценка  $I'$  также может использоваться в безразмерном виде аналогично формуле (8.57):

$$I'_0 = \frac{\Omega_0}{C^2} I'. \quad (8.68)$$

Интегральные оценки  $I$  и  $I'$  (или выражения квадратичных динамических ошибок) применяются для выбора структуры и параметров систем автоматического управления. При этом наилучшими параметрами считаются такие, при которых величина  $I$  или  $I'$  имеет минимальное значение. Вычисление квадратичных интегральных оценок  $I$  и  $I'$  можно также производить на основании так называемой формулы Релея, которая будет доказана ниже, в главе 11. Здесь она будет приведена без доказательства.

Если  $X(j\omega)$  есть изображение Фурье функции времени  $x(t)$ , то существует зависимость, определяемая теоремой Парсеваля

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega,$$

т. е. интегрирование квадрата функции по времени в пределах от нуля до бесконечности можно заменить интегрированием квадрата модуля изображения Фурье этой функции по всем частотам. При нахождении интегральной оценки  $I$ , соответствующей реакции системы на входное задающее воздействие типа  $1(t)$ , изображение Фурье исследуемого отклонения  $x(t) = y(\infty) - y(t)$  будет

$$X(j\omega) = \frac{\Phi(0) - \Phi(j\omega)}{j\omega},$$

где  $\Phi(j\omega)$  — частотная передаточная функция замкнутой системы.

Тогда

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(0) - \Phi(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega. \quad (8.69)$$

В астатических системах и статических системах с единичной обратной связью или с масштабированием (см. § 9.3) установившееся значение  $y(\infty) = 1$  и  $\Phi(0) = 1$ . Тогда формула (8.69) будет иметь вид

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi_x(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega, \quad (8.70)$$

где  $\Phi_x(j\omega) = 1 - \Phi(j\omega)$  — частотная передаточная функция замкнутой системы по ошибке.

Аналогичным образом для входного задающего воздействия типа единичного импульса  $\delta(t)$ , изображение которого равно 1, изображение Фурье исследуемого откло-

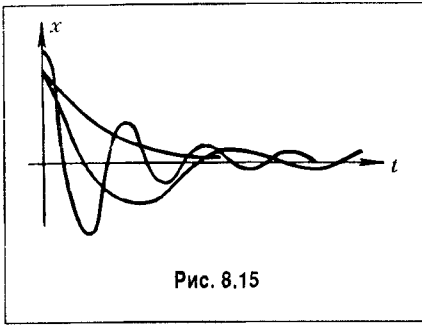


Рис. 8.15

нения  $x(t) = -y(t)$  равно частотной передаточной функции замкнутой системы:  $X(j\omega) = \Phi(j\omega) \cdot 1$ . В результате получаем

$$I' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega. \quad (8.71)$$

Подобные выражения могут быть получены и для входного возмущающего воздействия, если вместо частотной передаточной функции  $\Phi(j\omega)$  использовать передаточную функцию по возмущающему воздействию  $\Phi_F(j\omega)$ .

Недостатком интегральных оценок является то, что здесь ничем не ограничивается форма кривой переходного процесса. Оказывается, например, что три совершенно различных по форме процесса, изображенных на рис. 8.15, имеют одно и то же значение квадратичной интегральной оценки (8.56). Часто оказывается, что выбранные по минимуму этой оценки параметры системы соответствуют сильно колебательному процессу, ибо отмечавшееся уже при этом стремление приблизить процесс к идеальному скачку вызывает большую скорость процесса при подходе к установившемуся значению  $x = 0$ .

Это получается вследствие того, что оценка (8.56) учитывает только величину отклонения и быстроту затухания и никак не учитывает близость системы к колебательной границе устойчивости.

Если, например, подать на вход системы единичный скачок, то ошибка в переходном процессе определится заштрихованной частью на рис. 8.16, а. Очевидно, что величина интегральной оценки (8.56) будет тем меньше, чем ближе будет кривая переходного процесса к ломаной линии  $AOBC$ . Но приближение процесса к этой линии требует увеличения угла наклона кривой в начальной стадии процесса (приближение части кривой  $OD$  к отрезку  $OB$ ).

Увеличение же начальной скорости может вызвать значительное перерегулирование и, следовательно, малый запас устойчивости.

Поэтому применяется еще другой вид интегральной оценки, в которой ограничение накладывается не только на величину отклонения  $x$ , но также и на скорость отклонения  $\dot{x}$ . Эта улучшенная квадратичная интегральная оценка имеет вид

$$I_k = \int_0^{\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt, \quad (8.72)$$

где  $T$  — некоторая постоянная времени.

Выясним, какой вид переходного процесса будет получаться при выборе параметров системы по минимуму улучшенной интегральной оценки (8.72). Для этого сделаем следующие преобразования:

$$I_k = \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt - \int_0^{\infty} 2Tx\dot{x} dt = \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt - Tx_0^2 \Big|_{x_0}^0 = Tx_0^2 + \int_0^{\infty} (x + T\dot{x})^2 dt,$$

где  $x_0$  — начальное значение отклонения в переходном процессе.

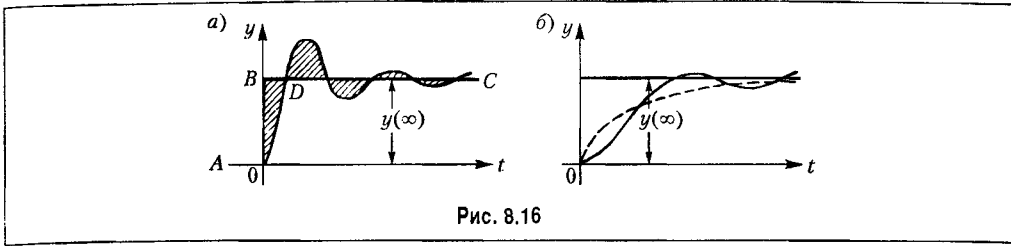


Рис. 8.16

Наименьшее значение последнего выражения будет при выполнении условия  $\dot{T}x + x = (Tp + 1)x = 0$ .

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого имеет вид

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad y = y_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad (8.73)$$

где  $y_0 = x_0$  — установившееся отклонение управляемой величины.

Этот процесс изображен на рис. 8.16 пунктиром. Следовательно, выбирая параметры системы по минимуму улучшенной интегральной оценки (8.72), можно приблизить переходный процесс к заданной экспоненте (8.73) с постоянной времени  $T$ , которая носит в этом случае название экстремали. Из этих соображений можно заранее задаться определенной величиной  $T$ .

Выбор параметров системы по улучшенной квадратичной интегральной оценке приводит к менее колебательным процессам по сравнению с использованием обычной квадратичной интегральной оценки (8.56).

Методика вычисления интеграла (8.72) сводится к тому, что правая его часть разбивается на два слагаемых:

$$I_k = \int_0^{\infty} x^2 dt + T^2 \int_0^{\infty} \dot{x}^2 dt.$$

При входном воздействии типа единичной ступенчатой функции первое слагаемое последнего выражения соответствует интегральной оценке  $I$ , а второе —  $T^2 I'$ . Поэтому для этого случая получаем

$$I_k = I + T^2 I'. \quad (8.74)$$

Улучшенная интегральная оценка  $I_k$  может также применяться в безразмерном виде аналогично (8.57) и (8.68):

$$I_{k0} = \frac{\Omega_0}{C^2} I_k, \quad (8.75)$$

где  $\Omega_0$  — среднегеометрический корень характеристического уравнения, а  $C$  — некоторая величина, имеющая размерность  $y(t)$ , например статическое отклонение  $y(\infty)$ .

Недостатком приведенных расчетных формул для вычисления как  $I$ , так и  $I_k$  является их выражение через определители, которые трудно бывает раскрывать в буквенном виде при высокой степени характеристического уравнения. В этих случаях

можно использовать имеющиеся специальные приемы числовых расчетов. Сам определитель  $\Delta$  (8.62), как старший определитель Гурвица, согласно § 6.2 имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_n = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) && \text{при } n = 3, \\ \Delta &= \Delta_n = a_4[a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2] && \text{при } n = 4, \\ \Delta &= \Delta_n = a_5[(a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2] && \text{при } n = 5.\end{aligned}$$

Несколько сложнее вычисляется только определитель  $\Delta_n$ , когда первый столбец  $\Delta$  (8.62) с одним элементом  $a_n$  заменяется столбцом (8.63) с двумя элементами  $a_{n-1}$  и  $a_n$ . Все остальные определители оказываются проще.

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут отвечать разные формы переходного процесса, что создает недостаточную определенность решения задачи.

В принципе возможно использование более сложных выражений, чем (8.72), в которые кроме первой производной от отклонения будут входить вторая, третья и т. д. производные. Так, например, ограничившись при подаче ступенчатого воздействия  $g(t)$  или  $f(t)$  отклонением  $x$ , первой производной  $\dot{x}$  и второй производной  $\ddot{x}$ , получим интегральную оценку в виде

$$I_k = \int_0^{\infty} (x^2 + T_1^2 \dot{x}^2 + T_2^4 \ddot{x}^2) dt. \quad (8.76)$$

Эта оценка будет характеризовать приближение переходного процесса к экстремали, определяемой решением дифференциального уравнения

$$T_2^2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} + x = 0.$$

Экстремаль в данном случае будет соответствовать более сложной кривой, чем экспонента, что позволяет точнее задать желаемый вид переходного процесса.

Однако нахождение интегральных оценок вида

$$I_k = I + T_1^2 I' + T_2^4 I'',$$

к которым сводится вычисление интеграла (8.76), сопряжено со значительными трудностями, что ограничивает их применение.

**Определение минимума интегральной оценки.** Пусть требуется исходя из минимума какой-нибудь интегральной оценки, выбрать два каких-нибудь параметра  $\alpha$  и  $\beta$  заданной автоматической системы. Указанные два параметра входят в коэффициенты дифференциального уравнения системы. Прежде всего по вышеприведенным формулам находится выражение соответствующей интегральной оценки. Это выражение, если все параметры системы заданы, кроме  $\alpha$  и  $\beta$ , имеет вид

$$I = I(\alpha, \beta).$$

Для определения значений  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующих минимуму  $I$ , вычисляем частные производные по  $\alpha$  и  $\beta$  и приравняем их нулю. В результате получаем два уравнения:

$$\frac{dI(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dI(\alpha, \beta)}{d\beta} = 0$$

с двумя неизвестными  $\alpha$  и  $\beta$ . Отсюда и определяются искомые значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Чтобы убедиться в том, что это действительно минимум, а не максимум, можно вычислить значение  $I$  при полученных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , а затем при каких-нибудь соседних. Последние должны оказаться больше. Аналогично можно поступить и при выборе нескольких параметров по минимуму интегральной оценки.

Функция  $I(\alpha, \beta)$  не всегда обладает минимумом по рассматриваемым параметрам. Тогда нужно выбирать их по наименьшему значению интегральной оценки  $I$  внутри области, назначаемой из других соображений.

Важно также иметь в виду, что выражение интегральной оценки через выбираемые параметры системы в буквенном виде может в ряде случаев оказаться сложным для исследования в общем виде. В таких случаях можно поступить иначе: задавать несколько числовых значений одного из выбираемых параметров (при жестко заданных всех остальных) и вычислять для каждого из них значения  $I$  (или  $I_k$ ). В результате будет видно, при каких значениях данного параметра получается  $I_{\min}$  (можно для наглядности построить график величины  $I$  в зависимости от выбираемого параметра). Аналогично нужно поступить и с другими выбираемыми параметрами системы.

В конкретных расчетах всегда следует учитывать, что одновременно с таким выбором параметров нужно, во-первых, обеспечить хорошие статические свойства системы и, во-вторых, проследить, чтобы оптимальная точка не оказалась слишком близкой к границе устойчивости, так как всегда надо иметь некоторый запас устойчивости.

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = b_0 \psi(t), \quad (8.77)$$

где  $\psi(t)$  — входное задающее или возмущающее воздействие. Пусть входное воздействие  $\psi(t) = 1(t)$ . Тогда изображение по Лапласу управляемой величины будет

$$Y(p) = \frac{b_0}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \frac{1}{p}.$$

Установившееся значение управляемой величины здесь будет  $y(\infty) = C = b_0/a_3$ .

Вычислим для этого случая интегральную оценку  $I$ . Так как  $n = 3$ , а  $m = 0$ , то в соответствии с формулой (8.61) имеем

$$I = \int_0^{\infty} x^2 dt = \frac{B_0 \Delta_0}{2a_3^2 \Delta}.$$

Далее по выражению (8.62) находим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_0 \\ 0 & -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3).$$

Для нахождения  $\Delta_0$  необходимо первый столбец определителя  $\Delta$  заменить на (8.63):

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_2 & -a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 & -a_0 \\ 0 & -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2(a_1a_2 - a_0a_3) + a_3a_1^2.$$

По формуле (8.64) находим единственный коэффициент  $B_0 = b_0^2$ .

В результате получаем значение интегральной квадратичной оценки:

$$I = \frac{b_0^2}{2a_3^2} \left( \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_1^2}{a_1a_2 - a_0a_3} \right). \quad (8.78)$$

Это выражение и служит для выбора параметров системы, входящих в коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , из условия минимума величины  $I$ .

Построим диаграмму квадратичной интегральной оценки на плоскости параметров Вышнеградского  $A$  и  $B$ . Согласно § 8.6

$$a_1 = A\sqrt[3]{a_0^2a_3}, \quad a_2 = B\sqrt[3]{a_0a_3^2}.$$

Подставив это выражение в (8.78), получим:

$$I = \frac{b_0^2}{2a_3^2} \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}} \left( B + \frac{A^2}{AB-1} \right).$$

Найдем безразмерную оценку  $I_0$  в соответствии с формулой (8.57). Подставляя

значение среднегеометрического корня  $\Omega_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$  и  $C = \frac{b_0}{a_3}$  получаем

$$I_0 = \frac{1}{2} \left( B + \frac{A^2}{AB-1} \right). \quad (8.79)$$

При  $I_0 = \text{const}$  это дает на плоскости параметров Вышнеградского кривую

$$A^2 + (AB-1)(B-2I_0) = 0. \quad (8.80)$$

Построенные по этому уравнению кривые постоянных значений оценки  $I_0$  нанесены на диаграмме (рис. 8.17). Там же пунктиром нанесены кривые, взятые из диаграммы Вышнеградского (рис. 8.9), показывающие области колебательности (I) монотонного (II) и аperiodического (III) процессов. Минимум интегральной оценки находим, приравнявая нулю частные производные:

$$\frac{dI_0}{dA} = 0, \quad \frac{dI_0}{dB} = 0.$$

что дает

$$AB - 2 = 0, \quad (AB - 1)^2 - A^3 = 0$$

откуда находим  $A = 1, B = 2$ . Следовательно, минимум квадратичной интегральной оценки  $I_0 = 1,5$  имеет место в точке  $D$  (рис. 8.17). Эта точка лежит, однако, слишком близко к границе устойчивости, что может не обеспечить необходимого запаса устойчивости (см., например, рис. 8.12). Практически лучше брать параметры системы не точно в точке  $D$ , а несколько правее и выше.

Этот результат имеет смысл, однако, только в тех случаях, когда  $b_0, a_3, a_0$  остаются постоянными, а выбираемые параметры системы входят только в коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  уравнения (8.77).

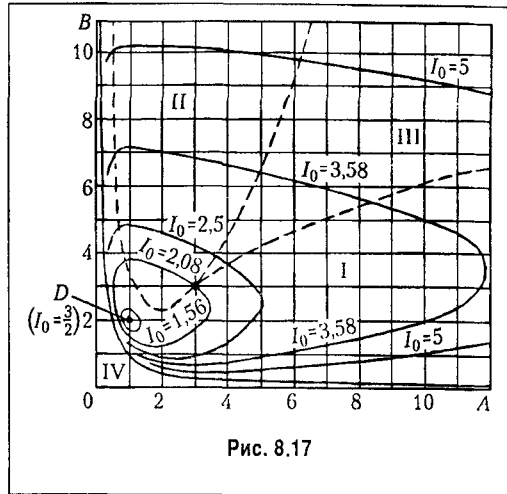


Рис. 8.17

## § 8.8. Частотные критерии качества

Под частотными критериями качества будем понимать такие критерии, которые не рассматривают вида переходного процесса, а базируются на некоторых частотных свойствах системы. Частотные критерии качества особенно удобно применять при использовании частотных методов расчета, так как при этом получается наиболее простое решение задачи.

Частотные критерии наиболее разработаны в отношении оценки запаса устойчивости замкнутой системы. Разумеется, что при этом система должна быть устойчивой. Запас устойчивости замкнутой системы можно определять по удалению амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы (рис. 8.24, а) от точки  $(-1, j0)$ . Для этой цели вводятся понятия *запаса устойчивости по амплитуде (модулю)* и *запаса устойчивости по фазе*.

Для случая, изображенного на рис. 8.18, а, удаление а. ф. х. от критической точки определяется величинами  $U_1$  и  $U_2$ , выраженными в децибелах:

$$L_1 = 20 \lg \frac{1}{U_1}, \quad L_2 = 20 \lg U_2.$$

Запас устойчивости замкнутой системы по амплитуде равен минимальной из них:

$$L_3 = \min\{L_1, L_2\}.$$

чем больше  $L_3$ , тем больше запас устойчивости по амплитуде. Система считается хорошо демпфированной, если  $L_3$  составляет примерно  $6 \div 20$  дБ, что соответствует  $2 \div 10$  в линейном масштабе.

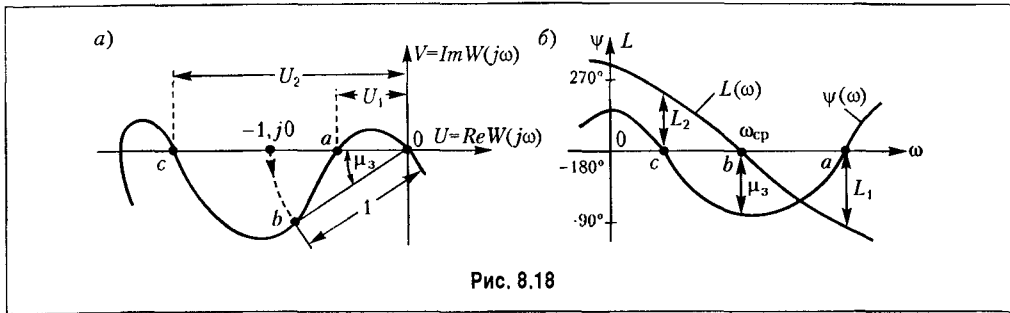


Рис. 8.18

Из рис. 8.18, а видно, что даже при  $U_1 \ll 1$ ,  $U_2 \gg 1$  точка  $b$  может оказаться вблизи критической точки  $(-1, j0)$ . Поэтому дополнительно к запасу устойчивости по амплитуде  $L_3$  вводится запас устойчивости по фазе  $\mu_3$ :

$$\mu_3 = 180^\circ + \psi_1,$$

Здесь  $\psi_1$  — аргумент (фаза) частотной передаточной функции разомкнутой системы  $W(j\omega)$ , соответствующий ее модулю  $L(\omega)$ , равному единице (точка  $b$  на рис. 8.18, а):

$$\psi_1 = \psi(\omega)|_{L(\omega)=1}.$$

Запас устойчивости замкнутой системы по фазе тем больше, чем больше  $\mu_3$ . В хорошо демпфированных системах он составляет около  $30 \div 60^\circ$ .

Величины  $L_3$  и  $\mu_3$  могут быть определены и при использовании логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы.

На рис. 8.18, б изображены л. ч. х., соответствующие рис. 8.18, а. Так как  $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$ , то в указанных на рис. 8.18, а точках имеем:  $L_a < 0$ ,  $\psi_a = -180^\circ$ ;  $L_b = 0$ ,  $-180^\circ < \psi_b < -90^\circ$ ;  $L_c > 0$ ,  $\psi_c = -180^\circ$ . При  $\omega = \infty$  модуль  $L = -\infty$ , а фаза  $\psi = -270^\circ$ . Величины  $L_1$  и  $L_2$  определяются в точках перехода л. ф. х. через ось абсцисс, а величина  $\mu_3$  — на частоте среза л. ф. х.  $\omega_{ср}$ .

Недостатком рассмотренного критерия является то, что для определения запаса устойчивости необходимо задать два числа:  $L_3$  и  $\mu_3$ . В этом отношении более удобно определять запас устойчивости по *показателю колебательности*. Показателем колебательности называется максимальное значение ординаты  $M_{\max}$  амплитудной характеристики замкнутой системы (см. рис. 8.19) при начальной ординате, равной единице, т. е. относительная высота резонансного пика. Физически эта характеристика представляет собой следующее. Если задающее воздействие меняется по закону  $g = g_{\max} \sin \omega t$ , то управляемая величина в режиме установившихся вынужденных колебаний будет меняться по закону  $y_{\max} = y_{\max} \sin(\omega t + \psi)$ . Отношение амплитуд  $y_{\max}$  и  $g_{\max}$  определяется модулем частотной передаточной функции замкнутой системы:

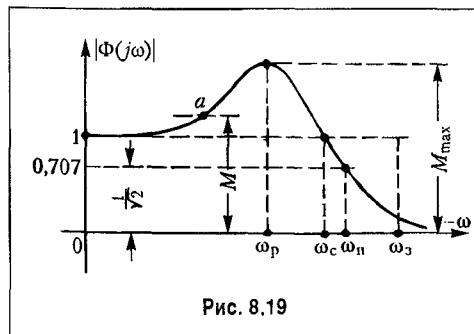


Рис. 8.19

$$\frac{y_{\max}}{g_{\max}} = \text{mod } \Phi(j\omega) = \text{mod } \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}, \quad (8.81)$$



где  $W(j\omega)$  – частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Максимальное значение этого модуля и представляет собой показатель колебательности (имеется в виду наибольший максимум)

$$M_{\max} = |\Phi(j\omega)|_{\max} = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} \quad (8.82)$$

Как видно из этих рассуждений, показатель колебательности определяется посредством задания задающего воздействия  $g = g_{\max} \sin \omega t$ . В принципе возможно определение показателя колебательности системы посредством задания возмущающего воздействия  $f = f_{\max} \sin \omega t$  и отыскания относительной величины резонансного пика.

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Допустимое значение показателя колебательности определяется на основании опыта эксплуатации систем управления. Считается, что в хорошо демпфированных системах показатель колебательности не должен превосходить значений  $1,1 \div 1,5$ , хотя в некоторых случаях можно допускать величины до  $2 \div 2,5$ .

Для отыскания показателя колебательности нет необходимости строить амплитудную частотную характеристику (рис. 8.19) или отыскивать максимум (8.82). Существуют приемы, позволяющие найти показатель колебательности по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Возьмем на амплитудной характеристике (рис. 8.19) некоторую точку  $a$ , которой соответствует ордината  $M$ , и отобразим эту точку на комплексную плоскость частотной передаточной функции разомкнутой системы. Для этого рассмотрим уравнение

$$\operatorname{mod} \Phi(j\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| = M.$$

Сделаем подстановки  $U = \operatorname{Re} W(j\omega)$  и  $V = \operatorname{Im} W(j\omega)$ . Тогда

$$\left| \frac{U + jV}{1 + U + jV} \right| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1+U)^2 + V^2}} = M.$$

Возводя в квадрат правую и левую части и освобождаясь от знаменателя, после алгебраических преобразований получим

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2, \quad (8.83)$$

где

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}, \quad (8.84)$$

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}. \quad (8.85)$$

Это есть уравнение окружности с радиусом  $R$  и с центром, смещенным влево от начала координат на величину  $C$ .

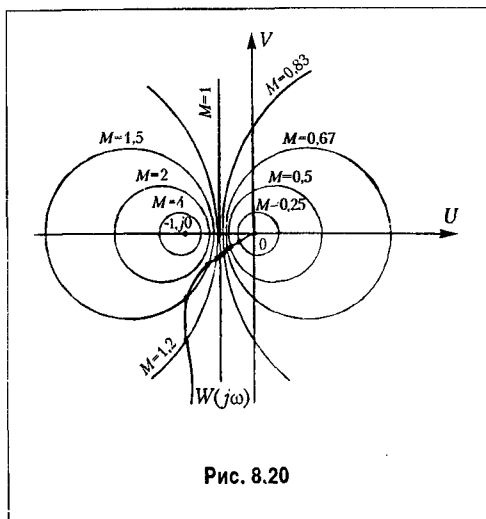


Рис. 8.20

Задавая различные значения  $M$  от 1 до  $\infty$ , можно построить семейство таких окружностей (рис. 8.20). На каждой окружности написано значение ординаты амплитудной частотной характеристики. При  $M = 1$  окружность вырождается в прямую линию, параллельную оси ординат и проходящую слева от нее на расстоянии 0,5. При  $M \rightarrow \infty$  окружность вырождается в точку, совпадающую с точкой  $(-1, j0)$ .

Для значений ординат амплитудной характеристики, лежащих в пределах  $0 < M < 1$ , получается семейство окружностей, расположенных справа от линии  $M = 1$ , симметрично с первым семейством. При  $M = 0$  окружность вырождается в точку, совпадающую с началом координат.

Для построения амплитудной характеристики (рис. 8.19) достаточно в тех же координатах, где построены окружности  $M = \text{const}$ , нанести амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Точки пересечения этой характеристики с окружностями будут определять точки амплитудной характеристики с соответствующими значениями ординат, равными  $M$ . Для определения показателя колебательности можно не строить амплитудную характеристику, так как достаточно знать одно максимальное значение ординаты  $M_{\max}$ , определяемое по наименьшей окружности  $M = \text{const}$  ( $M \geq 1$ ), которой коснется амплитудно-фазовая характеристика.

Если при проектировании системы ставится условие, чтобы ее показатель колебательности был не больше некоторого заданного значения, например  $M_{\max} = 1,5$ , то для выполнения этого необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика не заходила в область, ограниченную соответствующей окружностью (рис. 8.21). Амплитудно-фазовая характеристика может только коснуться этой окружности. В этом случае показатель колебательности будет как раз равен заданному значению  $M_{\max}$ .

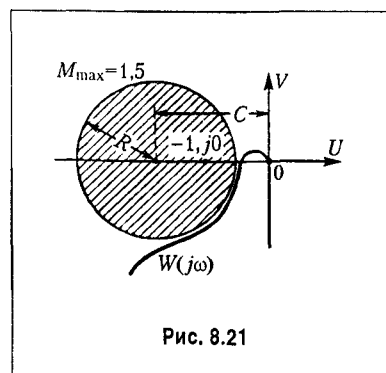


Рис. 8.21

Таким образом, окружность  $M_{\max}$  ограничивает *запретную зону* для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Эта зона охватывает точку  $(-1, j0)$  и обеспечивает получение заданного запаса устойчивости.

Величина показателя колебательности может быть определена и в случае использования логарифмических частотных характеристик. Для этого отобразим запретную зону (рис. 8.21) на логарифмическую сетку. Рассмотрим отдельно окружность заданного показателя колебательности (рис. 8.22).

На окружности возьмем произвольную точку  $B$  и построим вектор, соединяющий эту точку с нача-

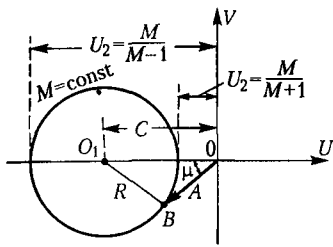


Рис. 8.22

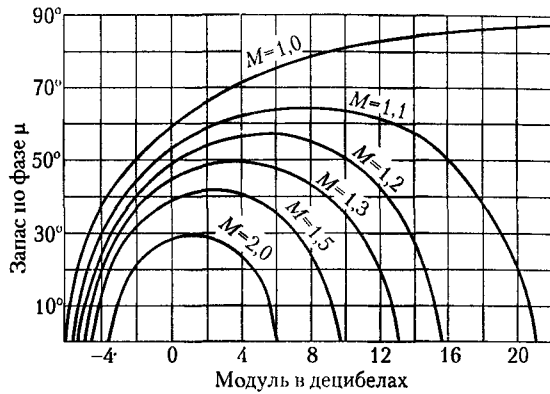


Рис. 8.23

лом координат. Установим для этого вектора связь между его модулем  $A$  и запасом по фазе  $\mu$ . Из треугольника  $OBO_1$  по теореме косинусов находим

$$\cos \mu = \frac{A^2 + C^2 - R^2}{2AC}.$$

Далее можно найти

$$C^2 - R^2 = \left( \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 - \left( \frac{M}{M^2 - 1} \right)^2 = \frac{M^2}{M^2 - 1} = C$$

и окончательно

$$\mu = \arccos \frac{A^2 + C}{2AC}. \tag{8.86}$$

Из рис. 8.22 нетрудно видеть, что зависимость (8.86) существует только для модулей, лежащих в пределах

$$\frac{M}{M+1} < A < \frac{M}{M-1}. \tag{8.87}$$

В случае, когда  $A < \frac{M}{M+1}$  или  $A > \frac{M}{M-1}$ , запас по фазе может быть любым, так как в этом случае конец вектора не может попасть в запретную зону (рис. 8.22).

Задаваясь различными значениями показателя  $M = \text{const}$ , а следовательно, и  $C = \text{const}$  (8.84), по выражению (8.86) можно построить графики  $\mu = f(A)$ , которые носят название  $\mu$ -кривых. Эти графики строятся обычно таким образом, что модуль  $A$  откладывается в децибелах (рис. 8.23).

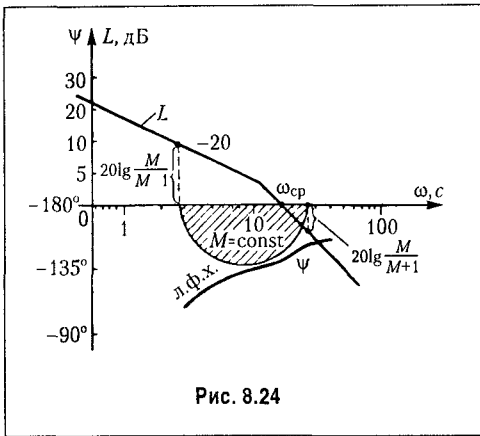


Рис. 8.24

Из выражения (8.86) можно найти, в частности, максимальный запас по фазе обычным методом отыскания максимума:

$$\mu_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{C}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}. \quad (8.88)$$

Этот максимум получается, когда модуль  $A = \sqrt{C}$ . Если имеется построенная л. а. х. (рис. 8.24), то по имеющимся  $\mu$ -кривым и при заданном значении  $M$  можно построить требуемое значение запаса по фазе для каждого значения модуля. Это построение должно делаться для модулей, лежащих

в пределах (8.87). В результате будет получена запретная область для фазовой характеристики. Чтобы показатель колебательности был не больше заданного значения, фазовая характеристика не должна заходить в эту область. Нетрудно видеть, что определение качественного показателя, характеризующего запас устойчивости, делается здесь одновременно с определением устойчивости.

Удобство показателя колебательности определяется также тем, что запас устойчивости характеризуется здесь одним числом, имеющим для достаточно широкого класса систем сравнительно узкие пределы (1,1+1,5).

Если в полиноме числителя передаточной функции разомкнутой системы  $W(p)$  нет корней с положительной вещественной частью, то возможность получения требуемого запаса устойчивости замкнутой системы может быть предварительно установлена непосредственно по виду л. а. х. разомкнутой системы. Такая возможность существует, если л. а. х. в окрестностях частоты среза  $\omega_{ср}$  (рис. 8.25, а) или вблизи нее (рис. 8.24) имеет асимптоту с наклоном  $-20$  дБ/дек (или с нулевым наклоном, что встречается гораздо реже). На рис. 8.25, а протяженность этой асимптоты  $h = \omega_2/\omega_1$ . Чем больше  $h$ , тем больше ожидаемый запас устойчивости. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два предельных случая.

Пусть л. а. х. состоит только из одной асимптоты с наклоном  $-20$  дБ/дек (рис. 8.25, б), что соответствует передаточной функции  $W(p) = K/p$ . Тогда замкну-

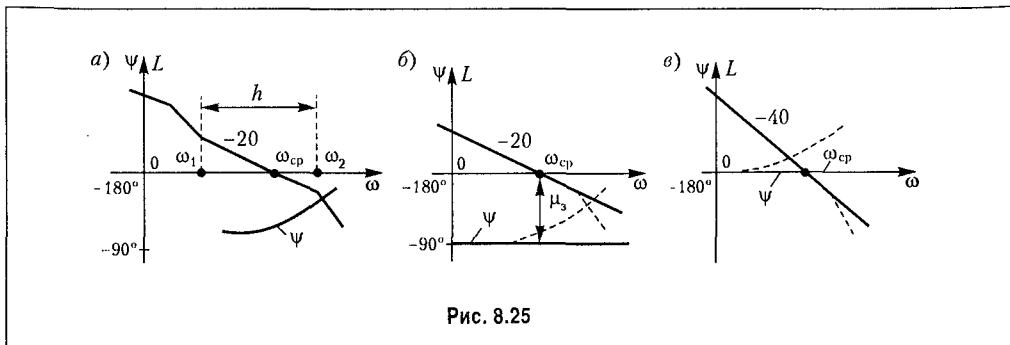


Рис. 8.25

тая система очень хорошо демпфирована, так как запас устойчивости по амплитуде  $L_{\omega} = \infty$ , по фазе  $\mu_{\omega} = 90^\circ$ , а показатель колебательности (см. рис. 8.23)  $M = 1$ . При наличии дополнительного излома (показано пунктиром на рис. 8.25, б, а также см. рис. 8.24) запас устойчивости уменьшается.

Пусть теперь л. а. х. состоит из одной асимптоты с наклоном  $-40$  дБ/дек (рис. 8.25, в), что соответствует передаточной функции  $W(p) = K/p^2$ . Нетрудно убедиться, что в этом случае замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости, а при наличии дополнительного излома (показано пунктиром) становится неустойчивой.

Таким образом, если л. а. х. разомкнутой системы не имеет асимптоты с наклоном  $-20$  дБ/дек (или с нулевым наклоном), то не обеспечивается даже устойчивость замкнутой системы.

Более детально связь между запасом устойчивости и протяженностью  $h$  будет рассмотрена в §12.6.

Оценка быстродействия может производиться по частотным характеристикам замкнутой и разомкнутой системы. При рассмотрении замкнутой системы обычно используется амплитудная частотная характеристика (рис. 8.19).

Для оценки быстродействия по этой характеристике могут использоваться следующие величины:

$\omega_p$  — резонансная частота, соответствующая пику а. ч. х.;

$\omega_n$  — частота, соответствующая полосе пропускания замкнутой системы и определяемая из условия  $A(\omega_n) = 0,707$ ;

$\omega_c$  — частота среза, соответствующая условию  $A(\omega_c) = 1$ ;

$\omega_{\Sigma}$  — эквивалентная полоса пропускания замкнутой системы, определяемая по выражению

$$\omega_{\Sigma} = \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega, \quad (8.89)$$

где  $|\Phi(j\omega)| = A(\omega)$ .

Эквивалентная полоса пропускания представляет собой основание прямоугольника (рис. 8.19), высота которого равна единице, а площадь равна площади под кривой квадратов модуля  $\Phi(j\omega)$ .

В отличие от показателя колебательности, который является некоторой безразмерной характеристикой и лежит в сравнительно узких пределах, приведенные выше характерные частоты, определяющие быстродействие системы, имеют размерность и их допустимые значения могут сильно меняться в зависимости от типа и назначения системы. Здесь наблюдается полная аналогия с критериями качества, основанными на рассмотрении кривых переходного процесса. Допустимое значение перерегулирования  $\sigma$  % (рис. 8.3) лежит в сравнительно узких пределах для систем самого различного назначения, а допустимое время переходного процесса  $t_n$  может меняться от долей секунды до нескольких часов и более.

Допустимые значения  $\omega_p$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_c$  или  $\omega_{\Sigma}$  должны устанавливаться для каждой конкретной системы на основе изучения условий ее эксплуатации. При этом харак-

теризовать быстродействие системы может как вся совокупность указанных выше величин, так и каждая из них в отдельности.

При определении быстродействия по частотной передаточной функции  $W(j\omega)$  разомкнутой системы может использоваться частота среза  $\omega_{ср}$ , которая определяется из условия  $\text{mod } W(j\omega_{ср}) = 1$  или  $L(\omega_{ср}) = 0$ . Эта частота показана, например, на рис. 8.2 и 8.24.

Определение частоты среза разомкнутой системы может быть сделано на диаграмме, изображенной на рис. 8.18, по точке пересечения а. ф. х. с окружностью единичного радиуса, центр которой расположен в начале координат.

Резонансная частота замкнутой системы  $\omega_p$  близка к частоте колебаний системы в переходном процессе. Значение  $\omega_p$  может быть приближенно определено по точке а. ф. х. (рис. 8.18), которая ближе всего расположена к точке  $(-1, j0)$ .

Частота среза  $\omega_{ср}$  во многих случаях близка к резонансной частоте системы  $\omega_p$ .

Удобной и наглядной мерой быстродействия системы является также частота  $\omega_k$  (рис. 8.2), при которой задающее воздействие вида  $g = g_{\text{max}} \sin \omega_k t$  обрабатывается системой с амплитудой ошибки не более  $x_{\text{max}}$ .

Хотя приведенные выше частотные критерии запаса устойчивости и быстродействия могут рассматриваться независимо от свойств системы во временной области, представляется полезным провести некоторое приближенное сопоставление частотных и временных характеристик.

Если показатель колебательности  $M > 1$ , то замкнутую систему можно аппроксимировать колебательным звеном (см. § 4.5). Тогда передаточная функция замкнутой системы может быть представлена в виде

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}. \quad (8.90)$$

Для этой передаточной функции сравнительно просто найти, как зависят величины, которые определяют запас устойчивости: перерегулирование  $\sigma\%$ , показатель колебательности  $M$  и запас устойчивости по фазе  $\mu_\phi$ , от параметра затухания  $\zeta$ . Соответствующие кривые приведены на рис. 8.26, а.

На рис. 8.26, б дается зависимость между перерегулированием  $\sigma\%$  и показателем колебательности  $M$  для той же передаточной функции (8.90).

Кривые, приведенные на рис. 8.26, в некоторой мере характеризуют связь между показателями качества и в более сложных случаях, чем выражение (8.90).

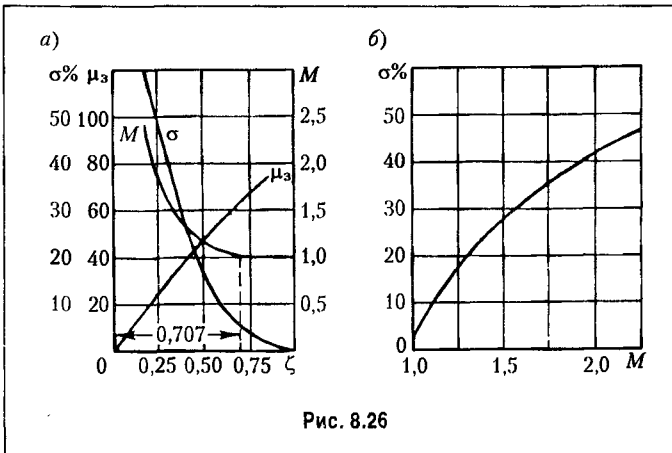


Рис. 8.26

Так как резонансная частота  $\omega_p$  приблизительно соответствует частоте колебаний замкнутой системы в переходном процессе, то время достижения первого максимума  $t_M$  на переходной характеристике (рис. 8.3) может быть определено по приближенной зависимости

$$t_M \approx \frac{\pi}{\omega_p} \approx \frac{\pi}{\omega_{cp}}. \quad (8.91)$$

Если переходный процесс в системе заканчивается за 1–2 колебания, то время переходного процесса можно определить по приближенной зависимости

$$t_{II} \approx (1+2) \frac{2\pi}{\omega_p} \approx (1+2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}. \quad (8.92)$$

Сравнение формул (8.71) и (8.89) показывает, что эквивалентная полоса пропускания  $\omega_s$  совпадает с точностью до постоянного множителя с интегральной квадратичной оценкой  $I'$ , определяемой формулами (8.67) и (8.68). Совпадение будет полным, если рассматривать всю эквивалентную полосу пропускания от  $-\omega_s = -2\pi f_s$  до  $+\omega_s = 2\pi f_s$  и измерять ее в Герцах. Тогда получаем

$$\Delta f_s = 2f_s = \frac{2\omega_s}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = I'. \quad (8.93)$$

## § 8.9. Чувствительность систем управления

Действительные значения параметров системы управления практически всегда отличаются от расчетных. Это может вызываться неточностью изготовления отдельных элементов, изменением параметров в процессе хранения и эксплуатации, изменением внешних условий и т. д.

Изменение параметров может привести к изменению статических и динамических свойств системы. Это обстоятельство желательно учесть заранее в процессе проектирования и настройки системы.

Степень влияния изменения отдельных параметров на различные характеристики системы оценивается посредством чувствительности. *Чувствительностью* называется некоторый показатель, характеризующий свойство системы изменять режим работы при отклонении того или иного ее параметра от номинального или исходного значения. В качестве оценки чувствительности используются так называемые *функции чувствительности*, представляющие собой частные производные  $i$ -й координаты системы по вариации  $j$ -го параметра.

$$u_{ij} = \left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0, \quad (8.94)$$

или частные производные от используемого критерия качества  $I$  по  $j$ -му параметру,

$$U_j = \left( \frac{\partial I}{\partial \alpha_j} \right)^0. \quad (8.95)$$

Нулевым индексом сверху отмечено то обстоятельство, что частные производные должны приниматься равными значениям, соответствующим номинальным (расчетным) параметрам.

**Функции чувствительности временных характеристик.** Посредством этих функций чувствительности оценивается влияние малых отклонений параметров системы от расчетных значений на временные характеристики системы (переходную функцию, функцию веса и др.).

*Исходной системой* называют систему, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций. Этой системе соответствует так называемое *основное движение*.

*Варьированной системой* называют такую систему, у которой произошли вариации параметров. Движение ее называют *варьированным движением*.

*Дополнительным движением* называют разность между варьированным и основным движением.

Пусть исходная система описывается совокупностью нелинейных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8.96)$$

Рассмотрим мгновенные вариации параметров  $\Delta\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), так что параметры приняли значения  $\alpha_j + \Delta\alpha_j$ . Если изменения параметров не вызывают изменения порядка дифференциального уравнения, то варьированное движение будет описываться совокупностью уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \tilde{F}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \alpha_m + \Delta\alpha_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8.97)$$

Для дополнительного движения можно записать

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t). \quad (8.98)$$

При условии дифференцируемости  $\tilde{x}_i(t)$  и  $x_i(t)$  по параметрам  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) дополнительное движение можно разложить в ряд Тейлора.

Для малых вариаций параметров допустимо ограничиться линейными членами разложения. Тогда получим уравнения первого приближения для дополнительного движения

$$\Delta x_i(t, \Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_m) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0 \Delta\alpha_j = \sum_{j=1}^m u_{ij} \Delta\alpha_j. \quad (8.99)$$



Частные производные, находящиеся в скобках, должны быть равны их значениям при  $\Delta\alpha_j = 0$ .

Таким образом, первое приближение для дополнительного движения может быть найдено при известных функциях чувствительности. Заметим, что использование функций чувствительности удобнее для нахождения дополнительного движения по сравнению с прямой формулой (8.98), так как последняя во многих случаях может дать большие ошибки вследствие необходимости вычитать две близкие величины.

При значительных вариациях  $\Delta\alpha_j$  может оказаться необходимым использование второго приближения с удерживанием в ряде Тейлора, кроме линейных, также и квадратичных членов.

Дифференцирование исходных уравнений (8.96) по  $\alpha_j$  приводит к так называемым *уравнениям чувствительности*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} u_{kj} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} \quad (8.100)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Решение этих уравнений дает функции чувствительности  $u_{ij}$ . Однако уравнения (8.100) оказываются сложными и решение их затруднительно. Более целесообразен путь структурного построения модели, используемой для нахождения функций чувствительности [40, 82].

Обратимся теперь к линейным системам. Не снижая общности рассуждений, можно рассматривать случай изменения одного  $j$ -го параметра.

В некоторых случаях функции чувствительности получаются дифференцированием известной функции времени на выходе системы. Так, если передаточная функция системы соответствует аperiodическому звену второго порядка, то (см. табл. 4.2)

$$y(t) = \frac{1}{(1+T_3p)(1+T_4p)} \cdot g(t).$$

При поступлении на вход ступенчатой функции  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$  на выходе будет

$$y(t) = g_0 \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t).$$

Пусть, например, вариацию претерпевает постоянная времени  $T_3$ . Тогда дифференцирование последнего выражения по  $T_3$  даст функцию чувствительности по этому параметру

$$u(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial T_3} = \frac{[(T_3 - T_4)t - T_3 T_4] e^{-\frac{t}{T_3}} - T_3 T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}}{T_3 (T_3 - T_4)^2} \cdot g_0 \cdot 1(t).$$

Дополнительное движение при этом будет  $\Delta y(t) = u(t) \Delta T_3$ , где  $\Delta T_3$  — вариация постоянной времени  $T_3$ .

Пусть рассматриваемая система описывается совокупностью уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{q=1}^l b_{iq} f_q(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8.101)$$

где  $a_{ik}$  и  $b_{iq}$  — постоянные коэффициенты,  $x_i$  — фазовые координаты, а  $f_q(t)$  — внешние воздействия. Начальные условия в системе: при  $t = 0$   $x_i = x_i^0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Уравнения чувствительности получаются из (8.101) дифференцированием по варьируемому параметру  $\alpha_j$ , от которого могут зависеть коэффициенты  $a_{ik}$  и  $b_{iq}$ :

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_{kj} + \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k + \sum_{q=1}^l d_{iq} f_q(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8.102)$$

где  $c_{ik} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial \alpha_j}$  и  $d_{iq} = \frac{\partial b_{iq}}{\partial \alpha_j}$  — частные производные от коэффициентов системы уравнений (8.101) по варьируемому параметру  $\alpha_j$ . Уравнениям (8.102) соответствуют начальные значения  $u_{ij}^0 = \frac{\partial x_i^0}{\partial \alpha_j}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Если начальные значения  $x_i^0$  не зависят от

параметра  $\alpha_j$ , то уравнениям (8.102) соответствуют нулевые начальные условия.

Для решения (8.102) необходимо предварительно решить совокупность уравнений (8.101) и определить исходное движение  $x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Для нахождения функций чувствительности и дополнительного движения удобно использовать передаточные функции системы. Пусть, например, управляемая величина  $y(t, \alpha_j)$  связана с задающим воздействием зависимостью

$$y(t, \alpha_j) = L^{-1}[Y(p, \alpha_j)] = L^{-1}[\Phi(p, \alpha_j) G(p)], \quad (8.103)$$

где  $G(p)$  — изображение задающего воздействия.

Функция чувствительности может быть получена из (8.103) дифференцированием по параметру  $\alpha_j$ :

$$u_j(t) = \frac{\partial y(t, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} = L^{-1} \left[ \frac{\partial Y(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right] = L^{-1} \left[ \frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} G(p) \right] = L^{-1} [S_j(p) G(p)]. \quad (8.104)$$

Здесь введена функция чувствительности передаточной функции

$$S_j(p) = \left[ \frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right]^0, \quad (8.105)$$

которая определяет первое приближение дополнительной передаточной функции, равной разности варьируемой и исходной передаточных функций при вариации параметра  $\alpha_j$ :

$$\Delta \Phi_j(p, \alpha_j) = \tilde{\Phi}(p, \alpha_j) - \Phi(p, \alpha_j) = S_j(p) \Delta \alpha_j. \quad (8.106)$$

Эти зависимости справедливы в том случае, когда вариация параметра  $\alpha_j$  не меняет порядка характеристического уравнения системы.

Может также использоваться так называемая *логарифмическая функция чувствительности*

$$\sigma_j(p) = \frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\Phi(p, \alpha_j)} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\alpha_j} = \frac{\partial \ln \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \ln \alpha_j} = \frac{\alpha_j}{\Phi(p, \alpha_j)} S_j(p). \quad (8.107)$$

Формула (8.107), строго говоря, может использоваться в тех случаях, когда  $\Phi(p, \alpha_j)$  и  $\alpha_j$  представляют собой безразмерные величины. Если эти величины размерны, то их логарифмирование возможно, если использовать прием, указанный в § 4.4.

Найдем дополнительную передаточную функцию для случая, когда исходная передаточная функция может быть представлена в виде отношения двух полиномов:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_j(p) &= S_j(p) \Delta \alpha_j = \frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j = \frac{\partial R(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j D(p, \alpha_j)} \Delta \alpha_j = \\ &= \frac{1}{D(p, \alpha_j)} [\Delta R(p) - \Phi(p, \alpha_j) \Delta D(p)], \end{aligned} \quad (8.108)$$

где  $\Delta R(p)$  и  $\Delta D(p)$  — вариации полиномов числителя и знаменателя передаточной функции.

Формула (8.108) позволяет составить структурную схему модели чувствительности в виде, изображенном на рис. 8.27. Эта схема может быть использована для нахождения функции дополнительного движения  $\Delta y(t)$  или функции чувствительности  $u(t) = \Delta y(t) : \Delta \alpha_j$  расчетным путем или моделированием на ЭВМ.

Составим, например, модель чувствительности для передаточной функции замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{K + K\tau p + p^2} \quad (8.109)$$

при вариации параметра  $\tau$ . В соответствии с изложенным находим  $\Delta R(p) = \Delta D(p) = = K_p \Delta \tau$ . Равенство приращений числителя и знаменателя  $\Phi(p)$  позволяет упростить схему модели. Она изображена на рис. 8.28, а в исходном, а на рис. 8.28, б — в преобразованном виде.

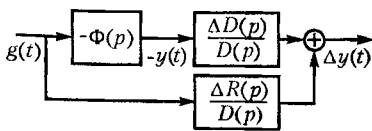


Рис. 8.27

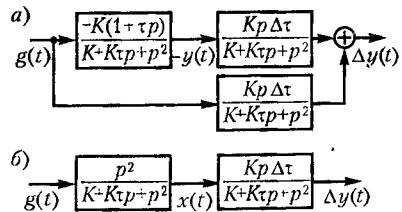


Рис. 8.28

В общем случае, когда передаточная функция зависит от ряда варьируемых параметров, дополнительная передаточная функция

$$\Delta\Phi(p, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \approx \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\partial\Phi(p, \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial\alpha_j} \right]^0 \Delta\alpha_j = \sum_{j=1}^m S_j(p) \Delta\alpha_j. \quad (8.110)$$

Если к системе приложено несколько внешних воздействий  $[g(t), f_1(t), \dots, f_l(t)]$ , то следует найти дополнительные передаточные функции для всех исходных передаточных функций, определенных для каждого внешнего воздействия.

**Функции чувствительности критериев качества.** Если в системе произошли изменения ряда параметров  $\Delta\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), то результирующее изменение некоторой используемой оценки качества

$$\Delta I = \tilde{I} - I, \quad (8.111)$$

где  $\tilde{I}$  — варьированное значение оценки качества, а  $I$  — ее исходное значение, можно подсчитать по формуле полного дифференциала

$$\Delta I \approx \sum_{j=1}^m U_j \Delta\alpha_j. \quad (8.112)$$

Так как в большинстве случаев известны только вероятностные оценки вариаций  $\Delta\alpha_j$ , то целесообразно использование вероятностных методов. Так, если известны максимальные возможные отклонения  $\Delta\alpha_{j\max}$ , то при их независимости друг от друга можно найти среднеквадратичный максимум отклонения оценки качества

$$\Delta I_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (U_j \Delta\alpha_{j\max})^2} \quad (8.113)$$

и среднеквадратичный относительный максимум

$$\Delta_{\max} = \frac{\Delta I_{\max}}{I}. \quad (8.114)$$

Если заданы дисперсии отклонений параметров  $D_j = M [(\Delta\alpha_j)^2]$  и отклонения независимы, то можно найти дисперсию оценки качества

$$D_I = \sum_{j=1}^m U_j^2 D_j. \quad (8.115)$$

В качестве критериев оценки качества системы могут использоваться, например, максимум ошибки, коэффициенты ошибок, оценки запаса устойчивости и быстродействия, интегральные оценки и т. п.

Пример. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

Требуется определить среднеквадратичный максимум отклонения показателя колебательности, если  $K = 100 \pm 10 \text{ с}^{-1}$  и  $T = 0,03 \pm 0,01 \text{ с}$ , причем изменения параметров независимы.

Определим вначале исходное значение показателя колебательности. Для этого необходимо найти максимум модуля частотной передаточной функции замкнутой системы

$$M = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} = \frac{K}{|K + j\omega + T(j\omega)^2|}$$

Исследование на максимум дает: при  $KT \leq 2$  показатель колебательности  $M = 1$ , при  $KT > 2$  показатель колебательности

$$M = \frac{2KT}{\sqrt{4KT-1}} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 0,03}{\sqrt{4 \cdot 100 \cdot 0,03 - 1}} = 1,8.$$

Функции чувствительности, если  $\alpha_1 = K$  и  $\alpha_2 = T$ ,

$$U_1 = \left( \frac{\partial M}{\partial K} \right)^0 = \left[ \frac{2T(2KT-1)}{(4KT-1)^{\frac{3}{2}}} \right]^0 = 0,005 \text{ с},$$

$$U_2 = \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)^0 = \left[ \frac{2K(2KT-1)}{(4KT-1)^{\frac{3}{2}}} \right]^0 = 16,7 \text{ с}^{-1}.$$

Среднеквадратичный максимум отклонения (8.113)

$$\Delta M_{\max} = \sqrt{(0,005 \cdot 10)^2 + (16,7 \cdot 0,01)^2} = 0,175.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе показатель колебательности  $M = 1,8 \pm 0,175$ .

## Глава 9

# ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 9.1. Общие методы

К числу общих методов повышения точности систем автоматического управления относятся:

- 1) увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы;
- 2) повышение порядка астатизма;
- 3) применение управления по производным от ошибки.

Увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы является наиболее универсальным и эффективным методом. Увеличить коэффициент передачи можно обычно за счет введения в систему усилителей. Однако в некоторых случаях удается достичь этого увеличения за счет повышения коэффициентов передачи отдельных звеньев, например чувствительных элементов, редукторов и т. д.

Увеличение коэффициента передачи благоприятно сказывается в смысле уменьшения ошибок практически во всех типовых режимах. Это вытекает, в частности, из того, что он входит в качестве делителя во все коэффициенты ошибок (см. пример, рассмотренный в § 8.3).

Однако увеличение коэффициента передачи ограничивается устойчивостью системы. При повышении коэффициента передачи, как правило, система приближается к колебательной границе устойчивости. При некотором предельном его значении в системе возникают незатухающие колебания. В этом сказывается противоречие между требованиями к точности и требованиями к устойчивости системы управления.

В связи с этим повышение коэффициента передачи до значения, при котором обеспечивается выполнение требований к точности, обычно может производиться только при одновременном повышении запаса устойчивости системы, что осуществляется при помощи так называемых корректирующих средств, рассматриваемых в следующей главе.

**Повышение порядка астатизма.** Повышение порядка астатизма используется для устранения установившихся ошибок в различных типовых режимах: в неподвижном положении, при движении с постоянной скоростью, при движении с постоянным ускорением и т. д. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибки системы, например,  $c_0 = 0$  при астатизме первого порядка, или  $c_0 = c_1 = 0$  при астатизме второго порядка, или  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$  при астатизме третьего порядка и т. д. Физически повышение порядка астатизма осуществляется за счет введения в канал системы интегрирующих звеньев. В качестве таких звеньев могут, например, использоваться звенья, изображенные на рис. 4.18.

Структурная схема системы с введенным интегрирующим звеном изображена на рис. 9.1. Передаточная функция интегрирующего звена

$$W_{\text{и}}(p) = \frac{k_{\text{и}}}{p},$$

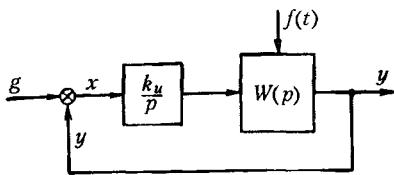


Рис. 9.1

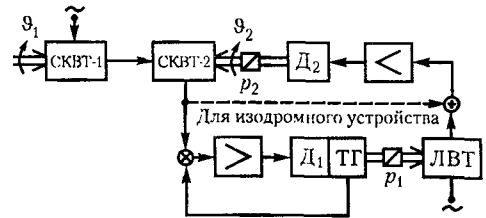


Рис. 9.2

где  $k_n [c^{-1}]$  коэффициент передачи интегрирующего звена;  $W(p)$  представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы управления до введения интегрирующего звена.

Результирующая передаточная функция разомкнутой системы будет иметь дополнительный множитель  $p$  в знаменателе:

$$W_o(p) = \frac{k_n W(p)}{p}$$

Повышение порядка астатизма неблагоприятно сказывается на устойчивости системы. Поэтому одновременно с повышением порядка астатизма приходится использовать корректирующие звенья, повышающие запас устойчивости (см. главу 10). В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 6.4. Для нее была получена передаточная функция разомкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)}, \quad (9.1)$$

которая соответствует астатизму первого порядка.

В соответствии с примером, рассмотренным в § 8.3, первые коэффициенты ошибки можно записать следующим образом (если положить  $T_y = T_1$ ,  $T_m = T_2$  и  $K = K_v$ ):

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0, \\ c_1 &= \frac{1}{K}, \\ \frac{c_2}{2} &= \frac{T_y + T_m}{K} - \frac{1}{K^2}, \\ \frac{c_3}{6} &= \frac{T_y T_m}{K} - 2 \frac{T_y + T_m}{K^2} + \frac{1}{K^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Введем в систему интегрирующее звено, например интегрирующий привод. Соответствующая этому случаю электро-механическая схема изображена на рис. 9.2. В этой схеме приняты следующие условные обозначения: СКВТ — синусно-коси-

нусные вращающиеся трансформаторы, ЛВТ — линейный вращающийся трансформатор, Д — двигатели, Р — редукторы, ТГ — тахогенератор. Передаточная функция исходной системы без интегрирующего звена (9.1) была выведена в § 6.2. Передаточная функция разомкнутой системы, изображенной на рис. 9.2, будет отличаться от (9.1) наличием дополнительного множителя  $k_{\text{и}}/p$ , который дает интегрирующее звено. В результате получим передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)} \frac{k_{\text{и}}}{p} = \frac{K_{\epsilon}}{p^2(1+T_y p)(1+T_m p)}, \quad (9.3)$$

где  $K_{\epsilon} = k_{\text{и}} \cdot K$  [с<sup>-2</sup>] — добротность системы по ускорению.

Эта передаточная функция соответствует уже астатизму второго порядка.

Передаточная функция системы по ошибке

$$\Phi_{\text{в}}(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p^2(1+T_y p)(1+T_m p)}{p^2(1+T_y p)(1+T_m p) + K_{\epsilon}}. \quad (9.4)$$

Раскладывая эту функцию в ряд делением числителя на знаменатель, получаем вместо (9.2) следующие равенства для коэффициентов ошибок:

$$c_0 = c_1 = 0, \quad \frac{c_2}{2} = \frac{1}{K_{\epsilon}}, \quad \frac{c_3}{6} = \frac{T_y + T_m}{K_{\epsilon}}. \quad (9.5)$$

Сравнивая (9.5) с (9.2), можно заметить, что в результате введения интегрирующего звена вследствие повышения порядка астатизма получено условие  $c_1 = 0$ , и, следовательно, будет равна нулю скоростная составляющая ошибки.

Однако, если проверить теперь систему на устойчивость, можно убедиться, что система вообще не может работать, так как получить устойчивую работу нельзя ни при каком значении общего коэффициента передачи  $K_{\epsilon}$ . Это называется структурной неустойчивостью. Действительно, передаточной функции (9.3) соответствует характеристическое уравнение

$$T_y T_m p^4 + (T_y + T_m) p^3 + p^2 + K_{\epsilon} = 0,$$

в котором отсутствует член, содержащий оператор  $p$  в первой степени. Пропуск одного из членов в характеристическом уравнении всегда соответствует неустойчивости в соответствии с § 6.1.

Появление неустойчивости в рассматриваемой системе при повышении порядка астатизма можно проиллюстрировать на логарифмических характеристиках. Для передаточной функции (9.1) они построены на рис. 9.3, а по выражениям:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_{\Omega}}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_y^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_m^2}}, \quad (9.6)$$

$$\psi = -90^\circ - \arctg \omega T_y - \arctg \omega T_m. \quad (9.7)$$



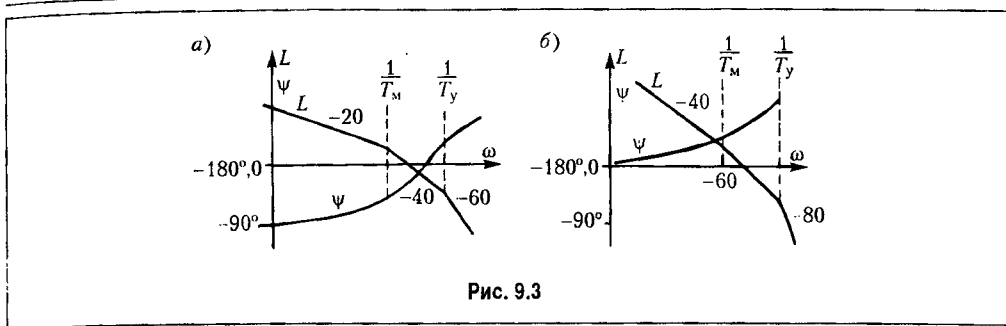


Рис. 9.3

Логарифмические характеристики для передаточной функции (9.3) построены на рис. 9.3, б по выражениям:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_{\epsilon}}{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2 T_y^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_m^2}}, \quad (9.8)$$

$$\psi = -180^\circ - \arctg \omega T_y - \arctg \omega T_m. \quad (9.9)$$

Сравнение рис. 9.3, а и 9.3, б, а также формул (9.7) и (9.9) показывает, что введение интегрирующего элемента дает дополнительный фазовый сдвиг ( $-90^\circ$ ), в результате чего в рассматриваемой схеме нельзя добиться устойчивой работы ни при каком значении коэффициента передачи  $K_{\epsilon}$ . Однако это не означает, что схема является вообще неработоспособной. Введение в нее корректирующих средств (см. главу 10) позволяет не только достичь устойчивости, но и обеспечить определенный запас устойчивости, т. е. выполнить требования к качеству процесса управления.

**Применение изодромных устройств.** Существует путь повышения порядка астатизма системы без заметного или недопустимого ухудшения ее запаса устойчивости. Этот путь заключается в применении изодромных устройств, например таких, как изображенные на рис. 4.19. Структурная схема системы при введении изодромного устройства изображена на рис. 9.4. Передаточная функция изодромного устройства может быть представлена в виде

$$W_{изу}(p) = 1 + \frac{k_{из}}{p} = \frac{k_{из}(1 + T_{из}p)}{p}, \quad (9.10)$$

где  $T_{из} = \frac{1}{k_{из}}$  — постоянная времени изодромного устройства.

Пример введения изодромного устройства показан на рис. 9.5. На рис. 9.5, а изображен чувствительный элемент регулятора давления с противодействующей пружиной. Если не учитывать массу движущихся частей, то перемещение чувствительного

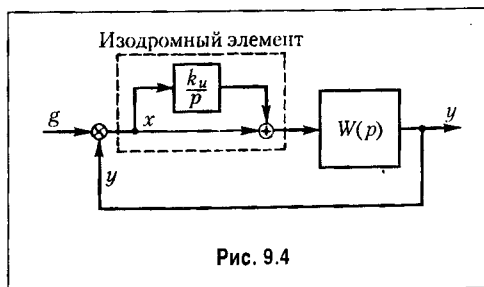
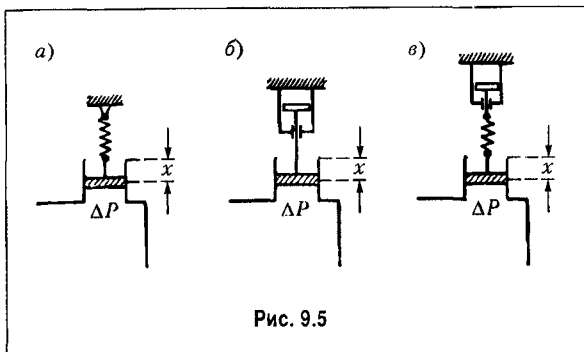


Рис. 9.4



элемента будет пропорциональным отклонению давления от заданного значения:

$$x = k_1 \Delta P, \quad (9.11)$$

где  $k_1$  — коэффициент пропорциональности, определяемый жесткостью пружины.

На рис. 9.5, б изображен тот же элемент, но с противодействующим демпфером. Так как сила, раз-

виваемая демпфером, пропорциональна скорости перемещения его поршня, то в этом случае будет иметь место соотношение  $p x = k_2 \Delta P$ . Вместо (5.11) получим

$$x = \frac{k_2}{p} \Delta P, \quad (9.12)$$

где  $k_2$  — коэффициент, определяемый скоростным сопротивлением демпфера.

Равенство (9.12) соответствует введению интеграла в алгоритм управления.

Наконец, в случае, изображенном на рис. 9.5, в, перемещение чувствительного элемента будет складываться из деформации пружины и перемещения поршня демпфера:

$$x = \left( k_1 + \frac{k_2}{p} \right) \Delta P = \frac{k_2 (1 + T_n p)}{p} \Delta P, \quad (9.13)$$

где  $T_n = \frac{k_1}{k_2}$  — постоянная времени издромного устройства.

В качестве второго примера рассмотрим приведенную выше схему следящей системы (рис. 9.2). Переход от введения дополнительного интеграла к введению издромного устройства может быть сделан добавлением связи, показанной пунктиром. Передаточная функция разомкнутой системы может быть получена умножением (9.1) на передаточную функцию издромного устройства.

В результате для рассматриваемой схемы получим:

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)} \frac{k_n(1+T_n p)}{p} = \frac{K_\epsilon(1+T_n p)}{p^2(1+T_y p)(1+T_m p)}, \quad (9.14)$$

где  $K_\epsilon = k_n K [c^{-2}]$  — добротность системы по ускорению.

Коэффициенты ошибки определяются равенствами:

$$c_0 = c_1 = 0, \quad \frac{c_2}{2} = \frac{1}{K_\epsilon}, \quad \frac{c_3}{6} = \frac{T_y + T_m - T_n}{K_\epsilon}. \quad (9.15)$$

Рассматривая характеристическое уравнение системы

$$T_y T_M p^4 + (T_y + T_M) p^3 + p^2 + K_\epsilon T_M p + K_\epsilon = 0,$$

можно убедиться, что в системе возможно получение устойчивости при выполнении условия

$$K_\epsilon < \frac{T_M(T_y + T_M) - (T_y + T_M)^2}{T_y T_M T_M^2} \quad (9.16)$$

или в ином виде

$$K = K_\epsilon T_M < \frac{T_y + T_M - \frac{(T_y + T_M)^2}{T_M}}{T_y T_M} \quad (9.17)$$

Нетрудно видеть, что при  $T_M \rightarrow \infty$  (это будет при отсутствии интегрирующего привода в изодромном механизме) условие устойчивости переходит в неравенство

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_M}, \quad (9.18)$$

которое справедливо для исходной схемы, изображенной на рис. 6.4. При достаточно больших значениях постоянной времени изодромного механизма  $T_M$ , что соответствует малому передаточному коэффициенту интегрирующего привода  $k_n = \frac{1}{T_M}$ , условия устойчивости (9.16) и (9.17) будут мало отличаться от условия устойчивости (9.18) исходной схемы. Таким образом, введение изодромного механизма с относительно большой постоянной времени  $T_M$  дает повышение порядка астатизма на единицу при возможности практически сохранить условия устойчивости в системе, куда этот механизм вводится.

Это обстоятельство можно проиллюстрировать также на логарифмических частотных характеристиках (рис. 9.6). В соответствии с выражением для передаточной функции разомкнутой системы (9.14) можно записать:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_y^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_M^2}} \frac{k_n \sqrt{1 + \omega^2 T_n^2}}{\omega}, \quad (9.19)$$

$$\psi(\omega) = (-90^\circ - \arctg \omega T_y - \arctg \omega T_M) - 90^\circ + \arctg \omega T_n. \quad (9.20)$$

Сравнивая эти выражения с формулами (9.6) и (9.7), справедливыми для исходной схемы, можно заметить, что при относительно большом значении постоянной времени  $T_M$  логарифмические характеристики системы с изодромным устройством

будут иметь отличие только в низкочастотной области при  $\omega < \frac{1}{T_M}$ . Для частот  $\omega > \frac{1}{T_M}$

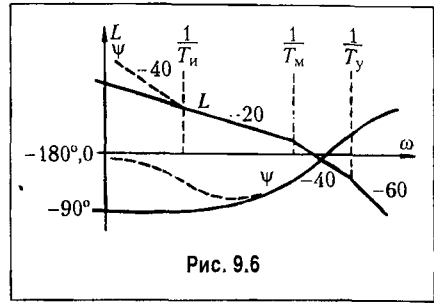


Рис. 9.6

дополнительный множитель в (9.19) обращается в единицу, а дополнительный фазовый сдвиг в (9.20) равен нулю. Таким образом, при  $\omega > \frac{1}{T_{и}}$  логарифмические частотные характеристики системы с изодромным устройством практически не отличаются от логарифмических характеристик исходной схемы.

В частности, в районе нуля децибел для л. а. х. можно получить одинаковый вид амплитудной и фазовой характеристик для обеих схем, что будет соответствовать одинаковому запасу устойчивости.

На рис. 9.6 сплошными линиями показаны л. а. х. и л. ф. х. для исходной схемы, а пунктирными — изменения, даваемые введением изодромного устройства с относительно большой постоянной времени.

Следует заметить, что введение изодромного устройства с большой постоянной времени образует систему, динамические качества которой могут оказаться сравнительно низкими. Это объясняется тем, что введение такого устройства улучшает вид амплитудной характеристики только в низкочастотной области (рис. 9.6). В результате коэффициенты ошибки, следующие за тем коэффициентом, который обращается в нуль, могут не только не уменьшиться, но даже возрасти.

В рассмотренном выше примере при введении изодромного устройства обратился в нуль коэффициент  $c_1$  (9.15). Однако в следующие коэффициенты в качестве делителя входит добротность по ускорению  $K_{\epsilon} = \frac{K}{T_{и}}$ . При большом значении постоянной

времени  $T_{и}$  добротность системы по ускорению  $K_{\epsilon}$  получается малой и коэффициенты ошибок  $c_2, c_3, \dots$  сильно возрастают.

Для дальнейшего повышения порядка астатизма системы могут применяться не один, а два, три и т. д. изодромных устройств. В этом случае можно получить повышение порядка астатизма на один, два, три и т. д. в зависимости от необходимости. На рис. 9.7 в качестве примера приведена структурная схема системы с тремя изодромными устройствами. Если исходная система имеет, например, астатизм первого порядка, то система рис. 9.7 с изодромными устройствами будет обладать астатизмом четвертого порядка. В этом случае для коэффициентов ошибок будет иметь место равенство  $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Как и ранее, при соответствующем выборе постоянных

времени изодромных устройств  $T_{и1} = \frac{1}{k_1}$ ,  $T_{и2} = \frac{1}{k_2}$  и  $T_{и3} = \frac{1}{k_3}$  можно сохранить

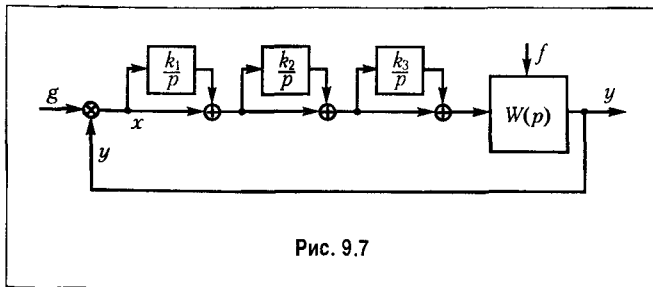


Рис. 9.7

практически те же условия устойчивости, что и в исходной системе.

**Управление по производным от ошибки.** В большинстве случаев управление по производным от ошибки имеет целью повысить запас устойчивости системы, что позволяет увеличить коэф-

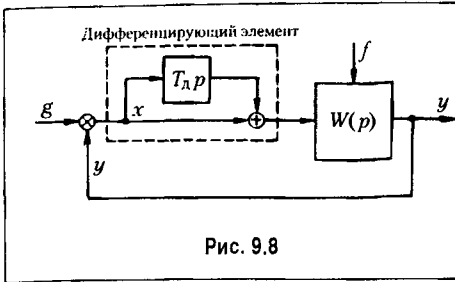


Рис. 9.8

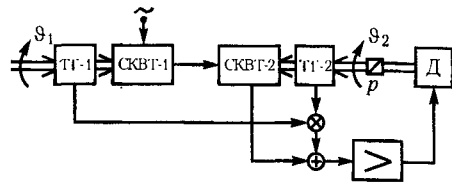


Рис. 9.9

коэффициент передачи разомкнутой системы и тем самым улучшить точность. Это будет рассмотрено более подробно в главе 10.

Однако управление по производным от ошибки может самостоятельно повышать точность системы даже в том случае, когда сохраняется неизменным коэффициент передачи. Физика этого явления заключается в том, что при введении управления по производным система начинает чувствовать не только наличие ошибки, но и тенденцию к изменению ее величины. В результате она более быстро реагирует на появление задающих и возмущающих воздействий, что снижает ошибку.

Структурная схема введения производной по ошибке изображена на рис. 9.8. Передаточная функция части прямого канала вместе с включенным дифференцирующим элементом может быть представлена приближенно (в предположении, что дифференцирующий элемент является идеальным) в виде

$$W_d(p) = 1 + T_d p, \tag{9.21}$$

где  $T_d$  — постоянная времени дифференцирующей цепи.

В качестве дифференцирующих элементов могут, например, применяться устройства, изображенные на рис. 4.20 и 4.21.

Рассмотрим в качестве примера ту же следящую систему (рис. 6.4). При введении производной от ошибки при помощи тахогенераторов, установленных на командной и исполнительных осях, электромеханическая схема будет иметь вид, изображенный на рис. 9.9. Здесь приняты следующие обозначения: СКВТ — синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы, ТГ — тахогенераторы, Д — двигатель, Р — редуктор.

Передаточная функция разомкнутой системы может быть получена умножением (9.1) на передаточную функцию (9.21). В результате получим

$$W(p) = \frac{K(1 + T_d p)}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p)}, \tag{9.22}$$

где постоянная времени  $T_d$  представляет собой отношение передаточного коэффициента тахогенератора к передаточному коэффициенту чувствительного элемента (СКВТ), т. е.

$$\frac{k_{ТГ}}{k_{ВТ}} \left[ \frac{B \cdot c}{\text{рад}} \right] = T_d [c].$$

Для передаточной функции разомкнутой системы (9.22) находим передаточную функцию по ошибке:

$$\Phi_{\theta}(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+T_y p)(1+T_m p)}{p(1+T_y p)(1+T_m p) + K(1+T_d p)}. \quad (9.23)$$

Раскладывая ее в ряд, получим соотношения для коэффициентов ошибок:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0; \\ c_1 &= \frac{1}{K}; \\ \frac{c_2}{2} &= \frac{T_y + T_m}{K} - \frac{1}{K^2} - \frac{T_d}{K}; \\ \frac{c_3}{6} &= \frac{T_y T_m}{K} - 2 \frac{T_y + T_m - T_d}{K^2} + \frac{1}{K^3} - \frac{T_d(T_y + T_m - T_d)}{K^4}. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Сравнивая последние выражения с (9.2), можно заметить, что коэффициенты  $c_2$  и  $c_3$  (а также следующие коэффициенты) уменьшаются при введении управления по первой производной от ошибки. При соответствующем выборе величины постоянной времени  $T_d$  можно добиться условий  $c_2 = 0$  или  $c_3 = 0$ . При  $c_2 = 0$  система не будет иметь установившейся ошибки, пропорциональной ускорению.

Аналогичным образом, применяя два включенных последовательно дифференцирующих элемента, можно получить равенство нулю одновременно двух коэффициентов, например  $c_2 = 0$  и  $c_3 = 0$ . В этом случае можно показать, что в системе, наряду с управлением по первой производной от ошибки, будет использоваться управление по второй производной. Это вытекает из того, что передаточная функция двух дифференцирующих элементов, включенных друг за другом в соответствии с рис. 9.8, будет равна произведению двух передаточных функций типа (9.21):

$$W_d(p) = (1 + T_{d1}p)(1 + T_{d2}p) = 1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2, \quad (9.25)$$

где  $\tau_1 = T_{d1} + T_{d2}$  представляет собой отношение коэффициентов передачи по первой производной и по ошибке, а  $\tau_2 = T_{d1}T_{d2}$  — отношение коэффициентов передачи по второй производной и по ошибке.

Как видно из рассмотренного, в отличие от случая введения изодромного устройства (см. рис. 9.4), когда обращается в нуль первый, ранее отличный от нуля коэффициент ошибки, введение дифференцирующего элемента (рис. 9.8) не влияет на этот коэффициент ошибки, но зато уменьшает последующие коэффициенты. В связи с этим наиболее эффективное снижение ошибки системы может быть достигнуто при одновременном использовании изодромных устройств и дифференцирующих элементов.

Так как дифференцирование эквивалентно дополнительному усилению верхних частот, то использование более чем двух дифференцирующих элементов оказывается затруднительным вследствие возрастания влияния высокочастотных помех. Число же изодромных устройств ограничивается только получающимся усложнением системы. Однако и оно обычно не превышает трех.

## § 9.2. Теория инвариантности и комбинированное управление

Одним из способов, позволяющих получить высокую точность в системах автоматического управления, является использование методов так называемой *теории инвариантности* [52]. Система является *инвариантной по отношению к возмущающему воздействию*, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, управляемая величина и ошибка системы не зависят от этого воздействия. Система является *инвариантной по отношению к задающему воздействию*, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, ошибка системы не зависит от этого воздействия.

Оба этих понятия имеют общую математическую трактовку. Рассмотрим эту трактовку для случая, когда на систему действует одно входное воздействие – задающее  $g(t)$  или возмущающее  $f(t)$ . Пусть для ошибки системы имеет место дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \psi(t), \quad (9.26)$$

где  $\psi(t)$  – задающее или возмущающее воздействие, а  $p = d/dt$ .

Решение этого уравнения имеет две составляющие – переходную  $x_n(t)$  и вынужденную  $x_b(t)$ . Переходная составляющая определяется общим решением уравнения (9.26) без правой части, а вынужденная – частным решением уравнения (9.26) с правой частью.

Изображение ошибки  $x(t)$  при нулевых начальных условиях можно представить в следующем виде:

$$X(p) = \frac{Q(p)}{D(p)} \Psi(p) = \frac{Q(p) A(p)}{D(p) B(p)}, \quad (9.27)$$

где

$$Q(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m,$$

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Здесь введено также изображение функции времени  $\psi(t)$ , представляющее собой дробно-рациональную функцию комплексной величины  $p = s + j\omega$

$$\Psi(p) = \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (9.28)$$

В соответствии с теоремой разложения (см. § 7.4) оригинал (9.27) в случае отсутствия кратных корней может быть представлен в виде

$$x(t) = x_n(t) + x_b(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t} + \sum_{i=1}^l E_i e^{p_i t}, \quad (9.29)$$

где  $p_k$  – полюсы передаточной функции, т. е. корни уравнения  $D(p) = 0$ , а  $p_i$  – полюсы входного воздействия, т. е. корни уравнения  $B(p) = 0$ .

Вынужденная составляющая  $x_{\text{в}}(t)$  будет тождественно равна нулю в следующих случаях.

1. Если  $A(p) = 0$ , то  $x_{\text{в}}(t) \equiv 0$ . Этот случай является тривиальным, так как соответствует отсутствию входного воздействия, и он не представляет интереса.

2. Если  $Q(p) = 0$ , то также  $x_{\text{в}}(t) \equiv 0$ . Этот случай соответствует абсолютной инвариантности системы по отношению к входному воздействию  $\psi(t)$ , которое может быть любой функцией времени, т. е. меняться по произвольному закону.

В следящих системах при рассмотрении задающего воздействия условие  $Q(p) = 0$  означает, что равна нулю передаточная функция по ошибке:  $\Phi_x(p) = 0$ . В иной записи это означает равенство единице передаточной функции замкнутой системы:  $\Phi(p) = 1 \rightarrow \Phi_x(p) = 1$ . Это условие приводит к тому, что следящая система должна иметь бесконечную полосу пропускания, так как частотная передаточная функция замкнутой системы  $\Phi(j\omega) = 1$  при всех частотах  $0 < \omega < \infty$ . В реальных системах реализовать бесконечную полосу пропускания невозможно, поэтому реализация абсолютной инвариантности по задающему воздействию сталкивается с принципиальными трудностями.

Заметим, что в случае, когда следящая система должна воспроизводить задающее воздействие в некотором масштабе  $k$ , условие абсолютной инвариантности запишется в виде  $\Phi(p) = k$ . Однако это не меняет существа дела.

При рассмотрении возмущающего воздействия условие  $Q(p) = 0$  означает равенство нулю передаточной функции по возмущающему воздействию:  $\Phi_F(p) = 0$ . Здесь в принципе возможно получение абсолютной инвариантности по данному возмущению, однако в большинстве случаев приходится иметь дело со значительными техническими трудностями.

3. Равенство нулю вынужденной составляющей будет наблюдаться для таких входных функций, изображения которых имеют все полюсы, т. е. все корни уравнения  $B(p) = 0$ , совпадающие с нулями передаточной функции, т. е. с корнями уравнения  $Q(p) = 0$ . В этом случае после разложения на множители полиномов  $B(p)$  и  $Q(p)$  можно сократить одинаковые сомножители вида  $(p - p_i)$  в числителе и знаменателе изображения (9.27). В результате второе слагаемое в выражении (9.29) обращается в нуль и  $x_{\text{в}}(t) \equiv 0$ .

Этот случай соответствует частичной инвариантности. Система будет инвариантна к входным воздействиям определенного вида, например к воздействиям, которые могут быть представлены в виде степенной функции времени с положительными и ограниченными степенями, в виде суммы экспонент с заданными постоянными времени и т. п.

Вводится также понятие инвариантности системы по отношению к какому-либо входному воздействию с точностью до  $\epsilon$ . Здесь имеется в виду не тождественное равенство нулю вынужденной составляющей ошибки  $x_{\text{в}}(t)$ , а приближенное равенство, мерой выполнения которого является некоторая величина  $\epsilon$ . Для оценки выполнения инвариантности до  $\epsilon$  существуют различные критерии, сливающиеся практически с критериями точности рассмотренными в главе 8.

Основным методом, используемым при построении инвариантных систем, является применение так называемого комбинированного управления.

**Комбинированное управление.** Под комбинированным управлением понимается такой метод построения замкнутых автоматических систем, когда, наряду с ун-



равлением по отклонению или ошибке, используется управление по задающему или возмущающему воздействию. Таким образом, в системе комбинированного управления осуществляется управление по замкнутому и разомкнутому циклам.

Рассмотрим вначале случай, когда дополнительно к управлению по отклонению  $x(t)$  используется управление по задающему воздействию  $g(t)$ . Структурная схема такой системы изображена на рис. 9.10, а.

В случае отсутствия управления по задающему воздействию, т. е. при  $\varphi(p) = 0$ , управляемая величина  $y$  связана с задающим воздействием  $g$  через передаточную функцию разомкнутой системы:

$$y = \Phi(p)g = \frac{W(p)}{1+W(p)}g, \quad (9.30)$$

где  $W(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы.

При введении управления по задающему воздействию управляемая величина определяется выражением

$$y = \frac{W(p)}{1+W(p)}[1+\varphi(p)]g = \Phi_3(p)g. \quad (9.31)$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом управления по задающему воздействию

$$\Phi_3(p) = \frac{W(p)[1+\varphi(p)]}{1+W(p)}. \quad (9.32)$$

Из последнего выражения видно, в частности, что введение управления по задающему воздействию не меняет характеристического уравнения системы, работающей по отклонению, так как знаменатель передаточной функции замкнутой системы одинаков в (9.30) и (9.32). Это обстоятельство является замечательным свойством систем комбинированного управления.

Введение дополнительного управления по задающему воздействию не меняет левой части дифференциального уравнения. Это означает, что не будут нарушаться не только условия устойчивости, но сохранятся оценки качества переходного процесса, базирующиеся на использовании корней характеристического уравнения.

Из выражения (9.32) по известным соотношениям (5.19) и (5.26) могут быть найдены эквивалентная (т. е. с учетом управления по задающему воздействию) передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{x3}(p) = 1 - \Phi_3(p) = \frac{1 - \varphi(p)W(p)}{1+W(p)}. \quad (9.33)$$

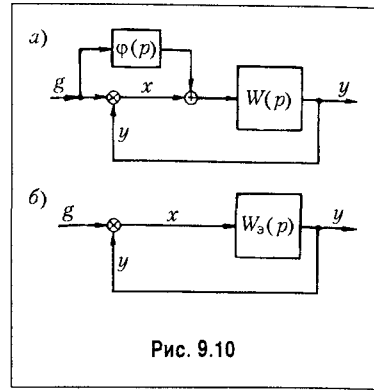


Рис. 9.10

и передаточная функция разомкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{\Phi_3(p)}{1 - \Phi_3(p)} = \frac{W(p)[1 + \varphi(p)]}{1 - \varphi(p)W(p)}. \quad (9.34)$$

Переход к эквивалентной передаточной функции разомкнутой системы  $W_3(p)$  позволяет заменить структурную схему системы комбинированного управления эквивалентной ей обычной схемой системы, работающей по отклонению (рис. 9.10, б).

Из формулы (9.33) для передаточной функции по ошибке можно найти условие *полной инвариантности* системы. Положив  $\Phi_{xy}(t) = 0$ , получаем

$$\varphi(p) = \frac{1}{W(p)}. \quad (9.35)$$

Разложив последнее выражение в ряд по возрастающим степеням оператора  $p$ , получим необходимый вид функции, определяющей вводимый сигнал от управляющего воздействия:

$$\varphi(p) = a_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots, \quad (9.36)$$

где  $a_0$  — безразмерное число.

Этот ряд может быть конечным и бесконечным. Первое слагаемое (9.36) в астатических системах и в большинстве статических систем (см. следующий параграф) оказывается равным нулю. Это не распространяется на случай использования комбинированного управления по возмущающему воздействию, где практически всегда получается  $a_0 \neq 0$ .

Таким образом, при введении управления по задающему воздействию для получения полной инвариантности необходимо вводить первую и высшие производные от задающего воздействия.

Обычно точно можно ввести только в некоторых случаях первую производную, а все последующие производные могут быть получены приближенно при помощи использования известных дифференцирующих звеньев (см., например, рис. 4.23 и 4.24). Поэтому практически может быть получена не полная, а *частичная инвариантность*. Это соответствует введению ограниченного числа первых членов разложения (9.36).

Так, например, введением первой производной от задающего воздействия в системе с астатизмом первого порядка можно получить равной нулю скоростную ошибку,

т. е. повысить степень астатизма относительно задающего воздействия на единицу. Вводя первую и вторую производные (даже приближенно), можно повысить степень астатизма на два и т. д. Это дает обращение в нуль соответствующих коэффициентов ошибки (8.20).

В некоторых случаях сигнал по задающему воздействию может вводиться не непосредствен-

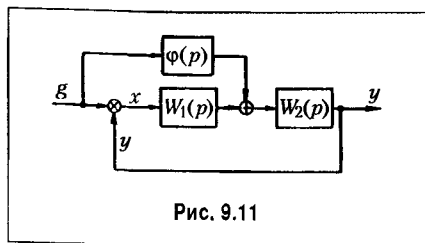


Рис. 9.11

но на вход системы, как это показано на рис. 9.10, а в некоторую точку внутри канала управления (рис. 9.11).

В этом более общем случае эквивалентная передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$\Phi_{\text{з}}(p) = \frac{W(p) \left[ 1 + \frac{\varphi(p)}{W_1(p)} \right]}{1 + W(p)}. \quad (9.37)$$

Эквивалентная передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{\text{зп}}(p) = \frac{1 - \varphi(p)W_2(p)}{1 + W(p)}. \quad (9.38)$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{з}}(p) = \frac{W(p) \left[ 1 + \frac{\varphi(p)}{W_1(p)} \right]}{1 - \varphi(p)W_2(p)}. \quad (9.39)$$

Условие полной инвариантности

$$\varphi(p) = \frac{1}{W_2(p)}. \quad (9.40)$$

В качестве примера рассмотрим следящую систему (см. рис. 6.4) при введении управления по первой производной от угла поворота командной оси, которое осуществляется при помощи тахогенератора. Электромеханическая и структурная схемы для этого случая изображены на рис. 9.12.

В соответствии с общим случаем, изображенным на рис. 9.11, имеем:

$$\varphi(p) = k_{\text{ТГ}} p, \quad W_1(p) = k_{\text{ВТ}}, \quad W_2(p) = \frac{1}{k_{\text{ВТ}}} \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)}.$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы (9.37)

$$\Phi_{\text{з}}(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)}{T_y T_m p^3 + (T_y + T_m) p^2 + p + K},$$

где  $\tau_1 = \frac{k_{\text{ТГ}}}{k_{\text{ВТ}}}$  — постоянная времени цепи первой производной от угла поворота командной оси.

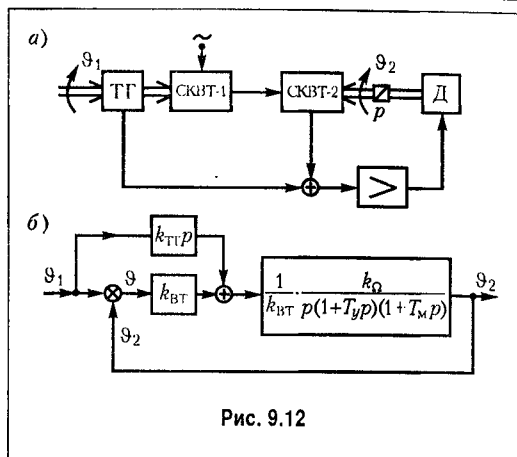


Рис. 9.12

Эквивалентная передаточная функция по ошибке (9.38)

$$\Phi_{x_3}(p) = \frac{T_y T_M p^3 + (T_y + T_M) p^2 + 1(1 - \tau_1 K) p}{T_y T_M p^3 + (T_y + T_M) p^2 + p + K}$$

Скоростная ошибка будет равна нулю в том случае, когда в числителе последнего выражения будет равен нулю коэффициент при операторе в первой степени. Отсюда получаем условие частичной инвариантности (ликвидация скоростной ошибки):

$$\tau_1 = \frac{1}{K} \tag{9.41}$$

Из (9.39) можно найти эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_3(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)}{p(1 + T_y p)(1 + T_M p) - \tau_1 K p}$$

При выполнении условия (9.41) эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы будет соответствовать астатизму второго порядка:

$$W_3(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)}{(T_y + T_M) p^2 + T_y T_M p^3} = \frac{K_\epsilon (1 + \tau_1 p)}{p^2 (1 + T_3 p)}$$

где  $K_\epsilon = \frac{K}{T_y + T_M}$  — добротность системы по ускорению,  $T_3 = \frac{T_y T_M}{T_y + T_M}$  — эквивалент-

ная постоянная времени.

В качестве второго примера рассмотрим инерциальную вертикаль (рис. 9.13, а). Принцип работы ее заключается в том, что акселерометр А воспринимает ускорение перемещения подвижного объекта, на котором установлена стабилизированная платформа (СП), и составляющую ускорения силы тяжести, возникающую при наклоне этой платформы на некоторый угол  $\alpha$  (ошибка вертикали). Таким образом, акселерометр определяет ускорение

$$a = g\alpha + Rp^2\sigma_1, \tag{9.42}$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $R$  — радиус Земли,  $\sigma_1$  — путь, пройденный объектом по Земле, в дуговых единицах.

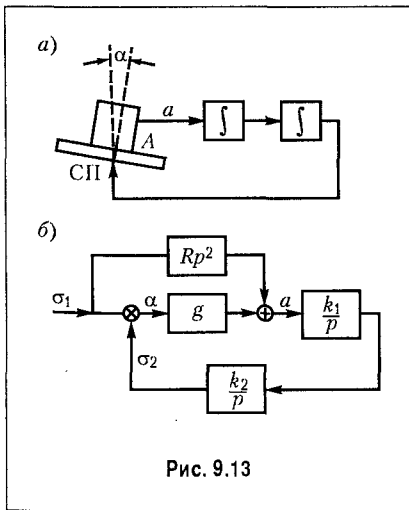


Рис. 9.13

Это ускорение дважды интегрируется и поступает на стабилизированную платформу, которая поворачивается на угол

$$\sigma_2 = \frac{k_1 k_2}{p^2} a, \quad (9.43)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты передачи первого и второго интеграторов.

К этим двум уравнениям необходимо добавить связь между ошибкой вертикали  $\alpha$ , пройденным путем в дуговых единицах  $\sigma_1$  и углом поворота стабилизированной платформы  $\sigma_2$ :

$$\alpha = \sigma_1 - \sigma_2. \quad (9.44)$$

Для рассмотренных уравнений (9.42)–(9.44) инерциальной вертикали изобразим структурную схему (рис. 9.13, б). Сравнивая ее с рис. 9.11, можем записать:

$$\varphi(p) = Rp^2; \quad (9.45)$$

$$W_1(p) = g; \quad (9.46)$$

$$W_2(p) = \frac{k_1 k_2}{p^2}. \quad (9.47)$$

Условие полной инвариантности (9.40)

$$\varphi(p) = \frac{1}{W_2(p)},$$

откуда следует, что должно быть выполнено равенство  $k_1 k_2 = 1/R$ . Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{g}{Rp^2}, \quad (9.48)$$

а передаточная функция по ошибке будет тождественно равна нулю:  $\Phi_{x_0}(p) = 0$ . Следовательно, при любых движениях объекта, на котором установлена инерциальная вертикаль, ошибка вертикали будет равна нулю. Это будет справедливым в том случае, если выполнены нулевые начальные условия, т. е. отсутствует свободное движение вертикали под действием начальных условий, и в случае, когда можно считать, что достаточно точно выполняется требуемое условие  $k_1 k_2 = 1/R$ .

Заметим, что в рассмотренном случае особенно важно иметь нулевые начальные условия вследствие того, что передаточной функции (9.48) соответствует характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{g}{R} = 0. \quad (9.49)$$

Оно имеет чисто мнимые корни

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{g}{R}} = \pm j \Omega_0, \quad (9.50)$$

где  $\Omega_0$  — частота незатухающих колебаний инерциальной вертикали, которой соответствует период  $T_0 \approx 84,6$  мин, называемый *периодом Шулера*. При наличии ненулевых начальных условий в системе будут устанавливаться незатухающие колебания с частотой  $\Omega_0$ , что будет нарушать работу вертикали.

Комбинированное управление может быть использовано также для снижения ошибки от возмущающего воздействия (рис. 9.14). В этом случае наряду с управлением по отклонению  $x(t)$  используется управление по возмущающему воздействию  $f(t)$ . Передаточная функция по возмущению здесь будет иметь вид

$$\Phi_f(p) = \frac{W_f(p) - \varphi(p)W(p)}{W(p)}, \quad (9.51)$$

где  $W_f(p)$  — передаточная функция по данному возмущению в разомкнутой системе,  $W(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы.

Условие полной инвариантности может быть получено, если положить  $\Phi_f(p) = 0$ . Тогда

$$\varphi(p) = \frac{W_f(p)}{W(p)}. \quad (9.52)$$

Эта функция также может быть представлена в виде ряда аналогично формуле (9.36):

$$\varphi(p) = k_f(a_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots), \quad (9.53)$$

где  $a_0$  — безразмерное число (1 или 0), а  $k_f$  — некоторый коэффициент, размерность которого совпадает с размерностью передаточной функции  $W_f(p)$ .

Как и в случае использования управления по задающему воздействию, получение полной инвариантности затрудняется необходимостью вводить первую и более высокие производные от возмущения  $f(t)$ . Поэтому используется, как правило, частичная инвариантность, получающаяся при реализации в системе первых членов разложения (9.53).

Это в свою очередь даст обращение в нуль соответствующих первых коэффициентов ошибки по возмущению ( $c_0, c_1, c_2$  и т. д.).

В заключение заметим, что возможно использование комбинированных систем с введением управления по нескольким возмущающим воздействиям и получением полной или частичной инвариантности по каждому из них. Однако это приводит, конечно, к усложнению схемы.

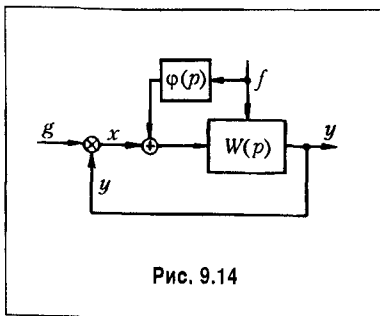


Рис. 9.14

### § 9.3. Неединичные обратные связи

Неединичные обратные связи применяются для уменьшения ошибки, вызванной задающим воздействием в замкнутой системе.

Рассмотрим структурную схему, изображенную на рис. 9.15. В отличие от обычной схемы управляемая величина  $y(t)$  поступает на сравнение в чувствительный элемент по главной обратной связи с передаточной функцией, не равной единице, т. е.  $\psi(p) \neq 1$ .

В этом случае управляемая величина в функции задающего воздействия будет определяться выражением

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + \psi(p)W(p)} g(t) = \Phi_{\psi}(p) g(t). \quad (9.54)$$

Для получения полной инвариантности необходимо выполнять условие  $\Phi_{\psi}(p) = 1$ . Отсюда можно найти требуемую передаточную функцию главной обратной связи:

$$\psi(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)}. \quad (9.55)$$

При разложении этого выражения в степенной ряд получаем

$$\psi(p) = a_0 - (\tau_1 p + \tau_2 p^2 + \tau_3 p^3 + \dots). \quad (9.56)$$

Отсюда видно, что для получения полной инвариантности необходимо использовать главную обратную связь с коэффициентом передачи, в общем случае отличным от единицы:  $a_0 \neq 1$  (в астатических системах  $a_0 = 1$ ), и дополнительно ввести положительные обратные связи по производным от управляемой величины.

Реализация полной инвариантности, т. е. реализация условия (9.55), практически невозможна. Это определяется, во-первых, невозможностью точного введения высших производных (9.56), а во-вторых, тем, что при выполнении условия (9.55) система будет находиться на границе устойчивости. Поэтому неединичные обратные связи используются лишь как средство повышения точности замкнутой системы.

Аналогично тому, как это делалось для систем комбинированного управления, структурную схему с неединичной обратной связью (рис. 9.15, а) можно заменить эквивалентной схемой с единичной главной обратной связью, но с некоторой эквивалентной передаточной функцией разомкнутой системы  $W_{\psi}(p)$ . Последняя может быть определена из равенства передаточных функций замкнутой системы двух схем (рис. 9.15, а и 9.15, б):

$$\Phi_{\psi}(p) = \frac{W(p)}{1 + \psi(p)W(p)} = \frac{W_{\psi}(p)}{1 + W_{\psi}(p)}. \quad (9.57)$$

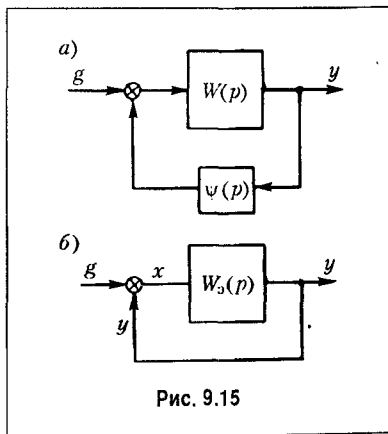


Рис. 9.15

Отсюда находим

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 - [1 - \psi(p)]W(p)}. \quad (9.58)$$

Наиболее эффективным действие неединичной обратной связи оказывается в статической системе. Здесь простым изменением коэффициента передачи жесткой главной обратной связи можно получить астатизм относительно задающего воздействия.

Для того чтобы показать это, рассмотрим передаточную функцию разомкнутой статической системы:

$$W(p) = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{1 + C_{n-1}p + \dots + C_0p^n}.$$

Будем считать, что главная обратная связь жесткая, т. е.  $\psi(p) = a_0$ . Тогда эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы (9.58) будет

$$W_3(p) = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{(1 + C_{n-1}p + \dots + C_0p^n) - (1 - a_0)K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}. \quad (9.59)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия

$$(1 - a_0)K = 1 \quad (9.60)$$

или

$$a_0 = \frac{K-1}{K} = 1 - \frac{1}{K}$$

в знаменателе (9.59) пропадает член с оператором в нулевой степени. В этом случае эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы будет соответствовать астатизму первого порядка:

$$W_3(p) = \frac{K(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{(C_{n-1} - B_{m-1})p + (C_{n-2} - B_{m-2})p^2 + \dots + C_0p^n}. \quad (9.62)$$

Эта система будет обладать добротностью по скорости

$$K_v = \frac{K}{C_{n-1} - B_{m-1}} [c^{-1}]. \quad (9.63)$$

Таким образом, при помощи совершенно элементарного приема — уменьшения коэффициента передачи главной обратной связи на незначительную величину по сравнению с единицей — можно получить в системе астатизм первого порядка относительно задающего воздействия, что будет означать отсутствие статической ошибки и равенство нулю первого коэффициента ошибки:  $c_0 = 0$ .



Следует заметить, что аналогичные результаты, т. е. уничтожение статической ошибки от задающего воздействия в статической системе, можно получить не менее простым способом масштабирования входной или выходной величины системы (рис. 9.16).

Если на входе или выходе системы включить масштабирующее устройство с коэффициентом передачи

$$m = \frac{K+1}{K},$$

то управляемая величина  $y(t)$  будет связана с задающим воздействием  $g(t)$  соотношением

$$y(t) = \frac{W(p)}{1+W} \frac{K+1}{K} g(t). \quad (9.64)$$

В установившемся режиме  $W(0) = K$ . Поэтому для установившегося режима при  $g(t) = g_0 = \text{const}$

$$y_{\text{уст}} = \frac{K}{1+K} \frac{K+1}{K} g_0 = g_0, \quad (9.65)$$

что соответствует отсутствию статической ошибки. Такое масштабирование делается практически во всех статических системах, что позволяет рассматривать их по отношению к задающему воздействию как астатические и считать для них коэффициент ошибки  $c_0 = 0$ .

Однако равенство нулю первого коэффициента ошибки в статических системах может быть достигнуто при выполнении условия  $K = \text{const}$ , что следует из приведенных выше формул. Если коэффициент передачи разомкнутой системы нестабилен, то нетрудно показать (см. § 8.2), что в системе появится статическая ошибка

$$x'_{\text{ст}} = \frac{\Delta K}{K} \frac{g_0}{K}, \quad (9.66)$$

где  $\frac{\Delta K}{K}$  — относительное изменение коэффициента передачи по сравнению с расчетным значением; следовательно, первый коэффициент ошибки в этом случае будет равен

$$c_0 = \frac{\Delta K}{K^2}.$$

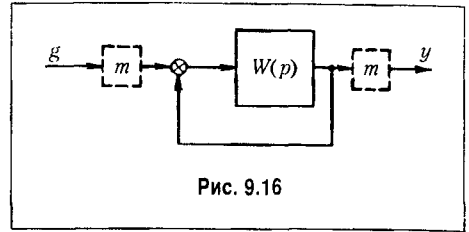


Рис. 9.16

## Глава 10

# УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

### § 10.1. О корректирующих средствах

Под улучшением качества процесса управления, помимо повышения точности в типовых режимах, понимается изменение динамических свойств системы с целью получения необходимого запаса устойчивости и быстродействия. В этой проблеме основное значение имеет обеспечение запаса устойчивости. Это объясняется тем, что стремление снизить ошибки системы приводит, как правило, к необходимости использовать такие значения коэффициента передачи разомкнутой системы, при которых без принятия специальных мер замкнутая система вообще оказывается неустойчивой.

При решении задачи повышения запаса устойчивости проектируемой системы прежде всего необходимо попытаться рациональным образом изменить ее параметры (коэффициенты передачи отдельных звеньев, постоянные времени и т. п.) так, чтобы удовлетворить требованиям качества управления, которые определяются критериями качества. При невозможности решить эту задачу в рамках имеющейся системы приходится идти на изменение ее структуры. Для этой цели обычно используется введение в систему так называемых корректирующих средств, которые должны изменить динамику всей системы в нужном направлении. К корректирующим средствам относятся, в частности, корректирующие звенья, представляющие собой динамические звенья с определенными передаточными функциями.

В тех случаях, когда корректирующие звенья используются именно для получения устойчивости системы или для повышения ее запаса устойчивости, они называются иногда демпфирующими звеньями. При этом имеется в виду, что звенья демпфируют колебания, которые возникают в системе. Термин «корректирующие звенья» является более широким и используется для звеньев, которые вводятся в систему для изменения статических и динамических свойств с различными целями.

Получение требуемого быстродействия обычно обеспечивается при проектировании системы управления посредством выбора соответствующих элементов (исполнительных органов, усилителей, двигателей и т. п.). Однако возможно улучшение быстродействия системы посредством использования корректирующих средств.

Заметим также, что проблема получения требуемых качественных показателей — точности в типовых режимах, запаса устойчивости и быстродействия — является единой и ни один из входящих в нее вопросов не может решаться в отрыве от других. Это делает всю проблему весьма сложной, что заставляет в некоторых случаях получать требуемое решение посредством последовательного приближения и рассмотрения многих вариантов.

Корректирующие звенья могут вводиться в систему различными способами.

На рис. 10.1, а представлена схема введения в цепь управления корректирующего устройства *последовательного типа*. Здесь  $W_c(p)$  представляет собой передаточную функцию части цепи управления  $W_{\text{из}}(p)$  передаточную функцию последовательного корректирующего звена.

Результирующая передаточная функция может быть найдена из выражения

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} = W_c(p)W_{\text{из}}(p). \quad (10.1)$$

На рис. 10.1, б представлена схема введения в цепь управления корректирующего устройства *параллельного типа*, имеющего передаточную функцию  $W_{\text{п}}(p)$ . Результирующая передаточная функция

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{x_4}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} = W_c(p) + W_{\text{п}}(p). \quad (10.2)$$

На рис. 10.1, в изображено корректирующее устройство, выполненное в виде *местной обратной связи*. Результирующая передаточная функция находится следующим образом.

На вход звена с передаточной функцией  $W_c(p)$  поступит сигнал  $x_2$ , равный сумме или разности входного сигнала  $x_1$  и сигнала  $x_4$ , поступающего по цепи обратной связи:

$$x_2 = x_1 \pm x_4.$$

Знак плюс соответствует положительной обратной связи, а знак минус — отрицательной обратной связи.

Сигнал обратной связи  $x_4 = W_{\text{oc}}(p) x_3$ .

В результате получим

$$x_3 = W_c(p) x_2 = W_c(p) [x_1 \pm W_{\text{oc}}(p) x_3]$$

или

$$x_3 [1 \pm W_c(p) W_{\text{oc}}(p)] = W_c(p) x_1.$$

Отсюда можно найти результирующую передаточную функцию:

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{x_3}{x_1} = \frac{W_c(p)}{1 \mp W_c(p)W_{\text{oc}}(p)}. \quad (10.3)$$

В этом выражении знак минус соответствует положительной обратной связи, а знак плюс — отрицательной.

В качестве корректирующих устройств обычно применяют отрицательные обратные связи, хотя не исключена возможность использования и положительных обратных связей. Поэтому в дальнейшем будем использовать формулу (10.3) со знаком плюс, считая, что она записана для отрицательной обратной связи:

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p)W_{\text{oc}}(p)}. \quad (10.3')$$

Использование того или иного типа корректирующих устройств, т. е. последовательных звеньев, параллельных звеньев или обратных связей, определяется удобством технического осуществления.

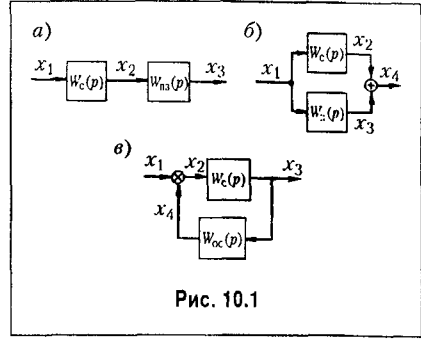


Рис. 10.1

В линейных системах динамические свойства их при введении корректирующих устройств различного типа могут быть сделаны одинаковыми, и для корректирующего устройства одного типа можно подобрать эквивалентное корректирующее устройство другого типа. Эквивалентность означает, что присоединение к системе одного или другого корректирующего устройства образует полностью подобные в динамическом отношении системы.

Для получения формул перехода от корректирующего устройства одного типа к корректирующему устройству другого типа необходимо приравнять результирующие передаточные функции (10.1)–(10.3). В результате имеем

$$W_c(p)W_{\text{пз}}(p) = W_c(p) + W_{\text{п}}(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p)W_{\text{oc}}(p)}. \quad (10.4)$$

Отсюда можно получить шесть формул перехода от передаточной функции звена одного типа к передаточной функции звена другого типа:

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{1}{1 + W_c(p)W_{\text{oc}}(p)}; \quad (10.5)$$

$$W_{\text{oc}}(p) = \frac{1 - W_{\text{пз}}(p)}{W_c(p)W_{\text{пз}}(p)}; \quad (10.6)$$

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{W_c(p) + W_{\text{п}}(p)}{W_c(p)}; \quad (10.7)$$

$$W_{\text{п}}(p) = W_c(p)[W_{\text{пз}}(p) - 1]; \quad (10.8)$$

$$W_{\text{oc}}(p) = -\frac{W_{\text{п}}(p)}{W_c^2(p) + W_c(p)W_{\text{п}}(p)}; \quad (10.9)$$

$$W_{\text{п}}(p) = \frac{W_c^2(p)W_{\text{oc}}(p)}{1 + W_c(p)W_{\text{oc}}(p)}. \quad (10.10)$$

Звенья последовательного типа особенно удобно применять в тех случаях, когда в системе управления используется электрический сигнал в виде напряжения постоянного тока, величина которого функционально связана с сигналом ошибки  $u = f(x)$ , например, линейной зависимостью  $u = kx$ . Тогда корректирующее звено может быть осуществлено при помощи  $R$ -,  $C$ - и  $L$ -элементов или на операционных усилителях (см. § 7.5).

Эти звенья оказываются значительно менее удобными, если сигнал представляет собой модулированное напряжение переменного тока. В этом случае имеется принципиальная возможность построения звеньев на тех же  $R$ -,  $C$ - и  $L$ -элементах, воздей-

ствующих на огибающую модулированного сигнала, но ввиду их сложности и недостатков они пока почти не находят применения. При наличии модулированного сигнала и при необходимости использования звеньев последовательного типа при-

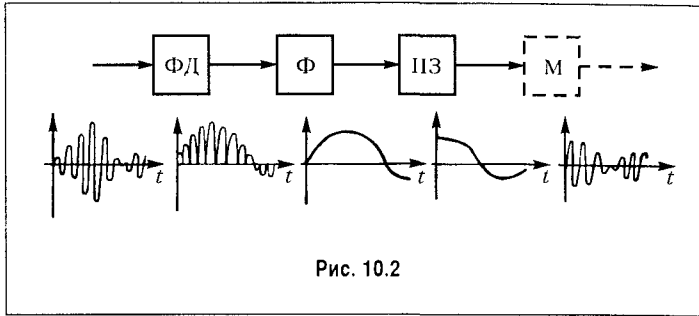


Рис. 10.2

ходится устанавливать в канале переменного тока фазочувствительный демодулятор. После выпрямления и фильтрации сигнала от высших гармоник в этом случае появляется возможность ввести звено последовательного типа. Схема введения звена последовательного типа изображена для этого случая на рис. 10.2. Модулированный сигнал переменного тока поступает на фазочувствительный демодулятор ФД, затем после выпрямления на фильтр  $\Phi$  и далее на последовательное корректирующее звено ПЗ. В случае необходимости вести дальнейшее усиление на переменном токе после последовательного звена устанавливается модулятор М. Однако такой путь часто связан с серьезным ухудшением динамических свойств системы вследствие влияния дополнительных постоянных времени фильтра, устанавливаемого на выходе демодулятора.

Звенья параллельного типа удобно применять в тех случаях, когда необходимо осуществить сложный алгоритм управления с введением интегралов и производных от сигнала ошибки. Примером этому может служить рассмотренный в предыдущей главе случай использования изодромных устройств.

Обратные связи находят наиболее широкое применение вследствие простоты технической реализации. Это объясняется тем обстоятельством, что на вход обратной связи поступает сигнал сравнительно высокого уровня, часто даже непосредственно с выхода системы или выходного каскада усилителя. Другое не менее важное обстоятельство заключается в том, что корректирующие устройства различного типа оказывают различное влияние на содержащиеся в системе нелинейности. Если обратная связь охватывает участок канала управления, содержащий какую-либо нелинейность, например силы трения, люфт, зону нечувствительности и т. п., то влияние этой нелинейности на протекание процессов в системе меняется существенным образом. Отрицательные обратные связи имеют свойство уменьшать влияние нелинейностей тех участков цепи, которые ими охватываются. Так как практически все системы содержат те или иные нелинейности, ухудшающие качество управления, то использование корректирующих устройств в виде отрицательных обратных связей, как правило, дает возможность добиться лучших результатов по сравнению с другими типами корректирующих устройств.

Аналогичным образом отрицательные обратные связи дают значительно лучший эффект в тех случаях, когда вследствие воздействия внешних факторов (время, температура и т. п.) меняется коэффициент усиления какой-либо части цепи, охватываемой отрицательной обратной связью.

## § 10.2. Последовательные корректирующие звенья

Корректирующие звенья последовательного типа могут составляться из различных по своей физической природе элементов: электрических, механических, гидравлических и т. д. Наиболее просто такие звенья могут быть составлены из электрических  $R$ -,  $C$ - и  $L$ -элементов или реализованы на операционных усилителях. Электрические последовательные звенья имеют самое широкое распространение в системах автоматического управления, поэтому в дальнейшем они будут рассмотрены в первую очередь.

Последовательные звенья из  $R$ -,  $C$ - и  $L$ -элементов часто называют пассивными последовательными корректирующими устройствами, так как они не содержат источников электродвижущих сил.

Существует весьма большое количество пассивных последовательных звеньев. В некоторых книгах и справочниках приводятся таблицы, содержащие схемы десятков и даже сотен звеньев различного вида.

Обычно пассивные последовательные звенья могут быть представлены в виде обобщенной схемы, изображенной на рис. 10.3.

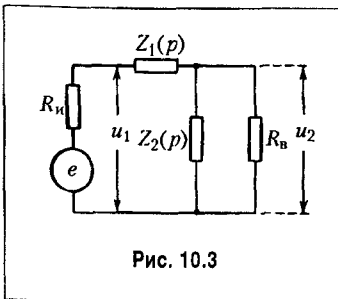
Функции  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  представляют собой сопротивления участков цепи, записанные в операторной форме. Влияние предыдущего и последующего звеньев на работу последовательного корректирующего звена может быть учтено введением сопротивления выхода источника сигнала  $R_n$  и сопротивления входа  $R_b$ .

С учетом введенных сопротивлений передаточная функция последовательного звена будет

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} = \frac{\frac{R_n Z_2(p)}{R_n + Z_2(p)}}{R_n + Z_1(p) + \frac{R_n Z_2(p)}{R_n + Z_2(p)}}. \quad (10.11)$$

В идеализированном случае, когда  $R_n \rightarrow 0$ , а  $R_b \rightarrow \infty$ , формула (10.11) приобретает вид

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} \approx \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \quad (10.12)$$



Передаточная функция (10.11), как правило, соответствует звеньям с более плохими корректирующими свойствами по сравнению с (10.12).

В табл. 10.1 приведены основные типы последовательных пассивных электрических корректирующих звеньев в соответствии с формулами (10.11) и (10.12).

*Пассивные дифференцирующие звенья* подавляют низкие частоты и вносят положительный фазовый сдвиг. Подавление низких частот обычно недопустимо, так как снижает коэффициент передачи разомкнутой

Таблица 10.1

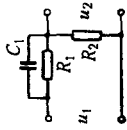
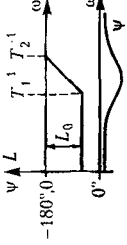
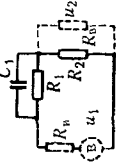
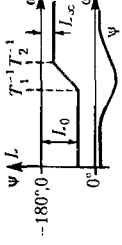
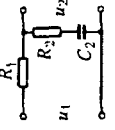
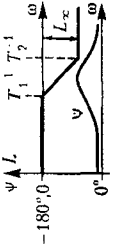
№ п/п	Название и схема пассивного звена	Передаточная функция	Частотные характеристики	Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
1	Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}};$ $\psi = \text{arctg} \omega T_1 - \text{arctg} \omega T_2$	$T_1 = R_1 C_1;$ $T_2 = \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} T_1;$ $G_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_2}{T_1};$ $L_0 = 20 \lg G_0$	
2	Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}};$ $\psi = \text{arctg} \omega T_1 - \text{arctg} \omega T_2$	$T_1 = R_1 C_1;$ $T_2 = \frac{R_0 + R_2}{R_0 + R_1 + R_2} T_1;$ $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$ $G_0 = \frac{R_0}{R_0 + R_1 + R_2};$ $G_\infty = \frac{R_0}{R_0 + R_1};$ $L_0 = 20 \lg G_0; L_\infty = 20 \lg G_\infty$	
3	Интегрирующее 	$\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$	$A = \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}};$ $\psi = \text{arctg} \omega T_2 - \text{arctg} \omega T_1$	$T_1 = (R_1 + R_2) C_2;$ $T_2 = R_2 C_2;$ $G_\infty = \frac{R_0}{R_0 + R_1} = \frac{T_2}{T_1};$ $L_\infty = 20 \lg G_\infty$	

Таблица 10.1 (Продолжение)

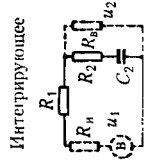
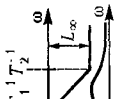
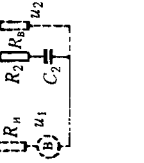
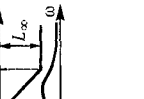
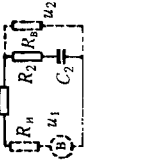
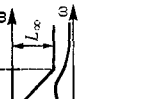

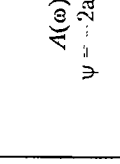
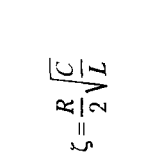
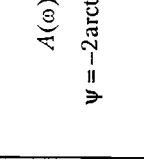
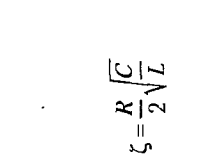
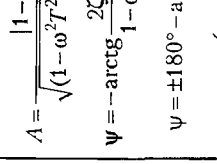
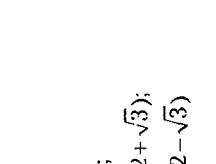
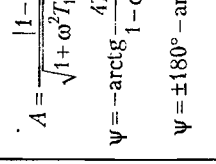
№ п/п	Название и схема пассивного звена	Передаточная функция	Частотные характеристики	Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
4	Интегрирующее 	$G_0 \frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$	$A = \frac{G_0 \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}$ $\psi = \text{arctg} \omega T_2 - \text{arctg} \omega T_1$	$T_1 = \left[ R_2 + \frac{R_b(R_{\mu} + R_{\nu})}{R_{\mu} + R_{\nu} + R_1 + R_b} \right] C_2;$ $T_2 = R_2 C_2; G_0 = \frac{R_b}{R_b + R_{\nu} + R_1 + R_{\mu}};$ $G_{\infty} = \frac{R_b R_2}{R_b(R_{\nu} + R_{\mu}) + R_2(R_{\mu} + R_{\nu} + R_1 + R_b)}$	
5	Интегро-дифференцирующее 	$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$	$A = \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \sqrt{1+\omega^2 T_4^2}}$ $\psi = \text{arctg} \omega T_1 + \text{arctg} \omega T_2 - \text{arctg} \omega T_3 - \text{arctg} \omega T_4$	$T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2;$ $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2};$ $T_{3,4} = \frac{T_1 + a T_2}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 T_1 T_2}{(T_1 + a T_2)^2}} \right)$	
6	Интегро-дифференцирующее 	$G_0 = \frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$	$A = G_0 \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \sqrt{1+\omega^2 T_4^2}}$ $\psi = \text{arctg} \omega T_1 + \text{arctg} \omega T_2 - \text{arctg} \omega T_3 - \text{arctg} \omega T_4$	$T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2;$ $T_3 = \left[ R_2 + \frac{R_b(R_{\mu} + R_{\nu})}{R_{\mu} + R_{\nu} + R_1 + R_b} \right] C_2;$ $T_4 = \frac{T_1 T_2}{T_3}; G_0 = \frac{R_b}{R_b + R_{\nu} + R_1 + R_{\mu}};$ $G_{\infty} = \frac{R_b R_2}{R_b R_{\mu} + R_2(R_{\nu} + R_{\mu})}$	



Таблица 10.1 (Окончание)

№ п/п	Название и схема пассивного звена	Передаточная функция	Частотные характеристики	Параметры	Л. а. х. и л. ф. х.
7	Фазосдвигающее 	$\frac{1 - T p}{1 + T p}$	$A(\omega) = 1;$ $\psi = -2 \operatorname{arctg} \omega T$	$T = RC$	
8	Фазосдвигающее 	$\frac{1 - 2\zeta T p + T^2 p^2}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}$	$A(\omega) = 1;$ $\psi = -2 \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$	$T = \sqrt{LC}; \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$	
9	Антвибратор 	$\frac{1 + T^2 p^2}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}$	$A = \frac{ 1 - \omega^2 T^2 }{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}};$ $\psi = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \left( \omega < \frac{1}{T} \right);$ $\psi = \pm 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \left( \omega > \frac{1}{T} \right)$	$T = \sqrt{LC}; \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$	
10	Антвибратор 	$\frac{1 + T^2 p^2}{1 + 4T p + T^2 p^2} = \frac{1 + T^2 p^2}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$	$A = \frac{ 1 - \omega^2 T^2 }{\sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)^2 + 4\omega^2 T^2}};$ $\psi = -\operatorname{arctg} \frac{4T \omega}{1 - \omega^2 T^2} \left( \omega < \frac{1}{T} \right);$ $\psi = \pm 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{4T \omega}{1 - \omega^2 T^2} \left( \omega > \frac{1}{T} \right)$	$T = RC;$ $T_1 = T(2 + \sqrt{3});$ $T_2 = T(2 - \sqrt{3})$	

системы и увеличивает ошибки системы. Если восстановить, на низких частотах прежний коэффициент введением дополнительного усиления  $k_{\text{доп}} = G_0^{-1}$ , то передаточная функция звена совместно с дополнительным усилителем будет

$$W_{\text{из}}(p) = k_{\text{доп}} G_0^{-1} \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}. \quad (10.13)$$

Такое звено обладает свойством усиливать высокие частоты в  $T_1/T_2$  раз. Асимптотическая л. а. х. этого звена может быть получена из л. а. х., изображенной в табл. 10.1, поднятием ее параллельно самой себе до совпадения левой горизонтальной асимптоты с осью абсцисс. Л. ф. х. остается без изменений.

*Пассивные интегрирующие звенья* подавляют усиление на высоких частотах и вносят в некотором интервале частот отрицательный фазовый сдвиг.

*Интегро-дифференцирующие звенья* подавляют усиление в некотором интервале «средних» частот, а вносимый фазовый сдвиг вначале отрицателен, затем с ростом частоты становится нулевым на частоте  $\omega_c = (T_1 T_2)^{-0.5} = (T_3 T_4)^{-0.5}$ . При дальнейшем росте частоты фазовый сдвиг становится положительным. Подавление усиления в области средних частот происходит в соответствии с относительным значением модуля  $W_{\text{из}}(j\omega)$  на «средней» частоте:

$$|W_{\text{из}}(j\omega)| = \left| \frac{(1 + j\omega_c T_1)(1 + j\omega_c T_2)}{(1 + j\omega_c T_3)(1 + j\omega_c T_4)} \right| = \frac{T_1 + T_2}{T_3 + T_4} \approx \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_4}{T_2}. \quad (10.14)$$

*Фазосдвигающие звенья* вносят отрицательный фазовый сдвиг при равенстве единице модуля частотной передаточной функции,  $|W_{\text{из}}(j\omega)| = 1$ , что соответствует прохождению гармонического сигнала любой частоты без изменения его амплитуды.

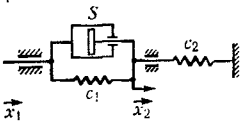
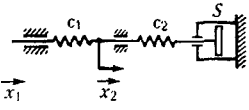
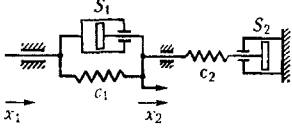
*Антивибраторы* по своим свойствам противоположны консервативному звену и на некоторой частоте (частоте настройки) имеют модуль коэффициента передачи, равный нулю.

Все рассмотренные выше пассивные звенья могут быть реализованы на операционных усилителях при соответствующем выборе операторных сопротивлений  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  передаточной функции (7.47). Например, при помощи третьей схемы, приведенной в табл. 7.3, можно получить аналог пассивного интегрирующего звена. Знак «минус» в (7.47) можно не учитывать, так как он появляется при использовании инвертирующего входа усилителя.

Последовательные корректирующие звенья могут быть также построены на механических элементах. В табл. 10.2 изображены три основных пассивных звена: дифференцирующее, интегрирующее и интегро-дифференцирующее. Эти звенья построены на пружинах и демпферах. В качестве входной величины используется перемещение  $x_1$  и выходной — перемещение  $x_2$ .

Передаточные функции этих звеньев полностью совпадают с передаточными функциями соответствующих звеньев, приведенных в табл. 10.1, для идеализированного случая ( $R_{\text{н}} \rightarrow 0$ , и  $R_{\text{в}} \rightarrow \infty$ ). Параметры элементов можно получить из приведенных в табл. 10.1 формул для электрических звеньев заменой емкостей конденсаторов ( $C$ ) на коэффициенты сопротивления демпферов ( $S$ ) и электрического сопротивления ( $R$ ) на величину, обратную жесткости пружины ( $c$ ).

Таблица 10.2

Название и схема звена	Передаточная функция	Параметры
Дифференцирующее 	$G_0 \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$	$T_1 = \frac{S}{c_1}; \quad T_2 = \frac{c_1}{c_1+c_2};$ $G_0 = \frac{c_1}{c_1+c_2}$
Интегрирующее 	$\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$	$T_1 = \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) S; \quad T_2 = \frac{S}{c_1};$ $G_\infty = \frac{c_1}{c_1+c_2}$
Интегро-дифференцирующее 	$\frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$	$T_1 = \frac{S}{c_1}; \quad T_2 = \frac{S_2}{c_2};$ $a = \frac{c_1+c_2}{c_1};$ $T_{3,4} = \frac{T_1+aT_2}{2} \times$ $\times \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_1 T_2}{(T_1+aT_2)^2}} \right)$

### § 10.3. Параллельные корректирующие звенья

Как уже отмечалось, параллельные корректирующие звенья удобно применять при использовании сложных алгоритмов управления, когда наряду с основным сигналом вводятся его производные или интегралы.

Введение интегралов преследует цель снижения установившейся ошибки. Этот вопрос был рассмотрен в главе 9 в связи с повышением точности систем автоматического управления посредством использования издромных устройств.

Введение производных преследует обычно цель обеспечения устойчивости. В этом случае используются звенья дифференцирующего типа, включаемые параллельно основной цепи.

Варианты параллельного включения дифференцирующих звеньев показаны на рис. 10.6. Получение производной второго порядка при помощи одного звена является затруднительным. Поэтому схема, изображенная на рис. 10.6, б используется

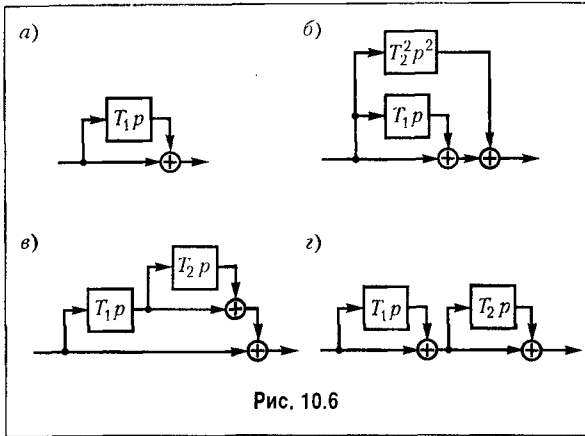


Рис. 10.6

редко. Введение второй производной дополнительно к первой производной осуществляется обычно по каскадным схемам, изображенным на рис. 10.6, в и 10.6, г. Для первой из них (рис. 10.6, в) результирующая передаточная функция будет

$$W(p) = 1 + T_1 p + T_1 T_2 p^2, \quad (10.18)$$

а для второй (рис. 10.6, г) —

$$W(p) = 1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2. \quad (10.19)$$

На рис. 10.6 дифференциаторы изображены идеальными. Более вероятно, что они будут представлять собой дифференцирующие звенья с замедлением (рис. 4.24).  
Заметим, что введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой интеграторы, соответствует поднятию нижних частот. Это хорошо видно на рис. 9.6. Введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой дифференциаторы, соответствует поднятию верхних частот. Это можно видеть из формул (10.18) и (10.19).

В качестве примера на рис. 10.7, а изображен случай введения дополнительно к основному сигналу, пропорциональному углу поворота вала, сигналов, пропорциональных первой и второй производным угла поворота. Первый сигнал  $u_1$  вырабатывается датчиком угла — потенциометром, второй  $u_2$  — тахогенератором и третий  $u_3$  — дифференцирующим трансформатором, на вход которого подается напряжение тахогенератора.

На рис. 10.7, б приведена структурная схема рассматриваемого устройства. На ней обозначено:  $k_1$  — коэффициент передачи потенциометра,  $k_2$  — коэффициент пе-

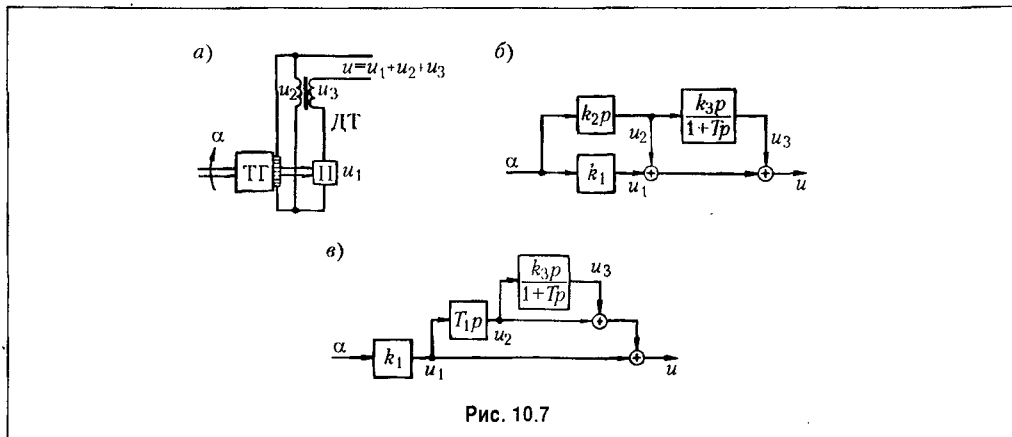


Рис. 10.7

передачи тахогенератора,  $k_3$  и  $T$  — коэффициент передачи и постоянная времени дифференцирующего трансформатора.

Результирующая передаточная функция

$$W(p) = k_1 + k_2 p + \frac{k_2 k_3 p^2}{1 + Tp}. \quad (10.20)$$

Структурная схема может быть приведена к виду, изображенному на рис. 10.7, *в*, если в выражении (10.20) вынести за скобки множитель  $k_1$ :

$$W(p) = k_1 \left( 1 + T_1 p + \frac{k_3 T_1 p^2}{1 + Tp} \right), \quad (10.21)$$

где  $T_1 = \frac{k_2}{k_1}$ .

На рис. 10.8 приведен пример параллельного соединения гироскопических чувствительных элементов. Трехстепенный гироскоп  $\Gamma-1$  сохраняет заданное положение в пространстве. Поэтому при наклоне основания на выходе потенциометра  $\Pi-1$  будет возникать напряжение, пропорциональное этому углу наклона:  $u_1 = k_1 \alpha$ . Двухстепенный гироскоп  $\Gamma-2$  работает в режиме датчика угловой скорости. При наклонах основания угол прецессии его можно приближенно считать пропорциональным скорости наклона. На выходе потенциометра  $\Pi-2$  будет поэтому напряжение  $u_2 = k_2 p \alpha$ . Сумма напряжений  $u = u_1 + u_2$  определит результирующую передаточную функцию

$$W(p) = \frac{u}{\alpha} = k_1 + k_2 p = k_1 (1 + Tp), \quad (10.22)$$

где  $T = \frac{k_2}{k_1}$ .

Этой передаточной функции соответствует структурная схема 10.6, *а*.

### § 10.4. Обратные связи

Как уже отмечалось выше, обратные связи (см. рис. 10.1, *в*) могут быть положительными и отрицательными. Кроме того, обратные связи могут быть *жесткими* и *гибкими*. Для уяснения последнего рассмотрим передаточную функцию (10.3), записанную для случая отрицательной обратной связи. Из этого выражения найдем передаточную функцию для установившегося режима, для чего в (10.3) необходимо положить  $p = 0$ :

$$W_{\text{ск}}(0) = \frac{W_c(0)}{1 + W_c(0)W_{\text{ос}}(0)}. \quad (10.23)$$

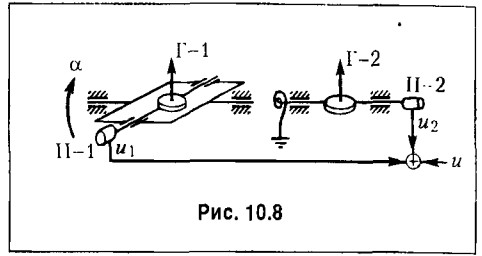


Рис. 10.8

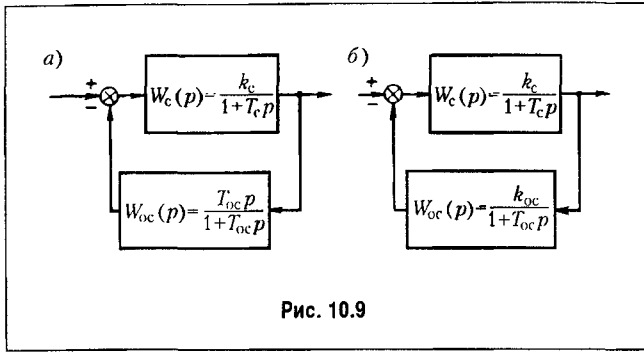


Рис. 10.9

Здесь может быть два случая. Если выполняется условие  $W_{oc}(0) = 0$ , что будет при использовании в цепи обратной связи дифференцирующих элементов, то в установившемся режиме  $W_{ск}(0) = W_{oc}(0)$ . Это означает, что в этом режиме передаточная функция цепи, охваченной обратной связью, будет равна передаточной функции исходной цепи. Такая обратная связь называется гибкой. Нетрудно видеть, что гибкая обратная связь действует только в переходных режимах, а в установившемся режиме она как бы отключается.

Если  $W_{oc}(0) \neq 0$ , то обратная связь действует не только в переходном, но и в установившемся режиме. В этом случае обратная связь называется жесткой.

Заметим, что случай, когда звено, охватываемое обратной связью, относится к числу интегрирующих звеньев и  $W_c(0) \rightarrow \infty$  не вносит особенностей. Здесь по-прежнему условие  $W_{oc}(0) = 0$  будет соответствовать случаю гибкой обратной связи, так как числитель (10.23) будет стремиться к бесконечности быстрее, чем знаменатель, и результирующая передаточная функция  $W_{ск}(0) \rightarrow \infty$  так же, как и передаточная функция исходной цепи. Заметим также, что понятие гибкой или жесткой обратной связи связано с той величиной, которая принимается в качестве выходной в исходном звене. Так, например, обратная связь может быть гибкой по отношению к углу поворота вала двигателя и жесткой по отношению к скорости его вращения, которая является первой производной от угла поворота.

На рис. 10.9, а и 10.9, б изображены примеры гибкой и жесткой отрицательных обратных связей. Обратной связью замыкается апериодическое звено с передаточной функцией

$$W_c(p) = \frac{k_c}{1 + T_c p}$$

В первом случае (рис. 10.9, а) обратная связь представляет собой дифференцирующее звено с замедлением (например, дифференцирующий конденсатор) с передаточной функцией

$$W_{oc}(p) = \frac{T_{oc} p}{1 + T_{oc} p}$$

Результирующая передаточная функция

$$W_{ск}(p) = \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p)W_{oc}(p)} = \frac{k_c(1 + T_{oc} p)}{1 + (T_c + T_{oc} + k_c T_{oc})p + T_c T_{oc} p^2}$$

Результирующий коэффициент передачи в установившемся состоянии равен  $k_c$ , так же, как и в исходном апериодическом звене. Таким образом, эта обратная связь является гибкой. Наличие дифференцирующего элемента в цепи обратной связи и привело к получению гибкой обратной связи.

Во втором случае (рис. 10.9, б) обратная связь представляет собой апериодическое звено с передаточной функцией

$$W_{oc}(p) = \frac{k_{oc}}{1 + T_{oc}p}$$

Результирующая передаточная функция

$$\begin{aligned} W_{ск}(p) &= \frac{W_c(p)}{1 + W_c(p)W_{oc}(p)} = \frac{k_c(1 + T_{oc}p)}{1 + k_c k_{oc} + (T_c + T_{oc})p + T_c T_{oc} p^2} = \\ &= \frac{k_{ск}(1 + T_{oc}p)}{1 + \frac{T_c + T_{oc}}{1 + k_c k_{oc}} p + \frac{T_c + T_{oc}}{1 + k_c k_{oc}} p^2}, \end{aligned}$$

где

$$k_{ск} = \frac{k_c}{1 + k_c k_{oc}}$$

представляет собой новое значение коэффициента передачи звена, замкнутого обратной связью.

В рассмотренном случае обратная связь является жесткой, так как она изменяет коэффициент передачи звена в установившемся состоянии.

Весьма важным является случай, когда цепь обратной связи представляет собой идеальное безынерционное звено с передаточной функцией  $W_{oc}(p) = k_{oc}$ . Этот случай легко получить из последних равенств, положив в них  $T_{oc} = 0$ . В результате для апериодического звена, замкнутого такой отрицательной обратной связью, получим

$$W_{ск}(p) = \frac{k_c}{1 + k_c k_{oc}} \frac{1}{1 + \frac{T_c p}{1 + k_c k_{oc}}} = \frac{k_{ск}}{1 + T_{ск} p},$$

где

$$k_{ск} = \frac{k_c}{1 + k_c k_{oc}} \quad \text{и} \quad T_{ск} = \frac{T_c}{1 + k_c k_{oc}}.$$

Из этих выражений видно, что подобная отрицательная обратная связь уменьшает коэффициент передачи и постоянную времени апериодического звена в  $1 + k_c k_{oc}$  раз, где  $k_c k_{oc}$  представляет собой коэффициент передачи по петле обратной связи.

На первый взгляд здесь имеет место полная аналогия со случаем уменьшения постоянной времени и коэффициента передачи звена в одинаковое число раз при

помощи пассивного дифференцирующего звена (см. § 10.2). Однако это не так. Если рассмотреть случай двух апериодических звеньев первого порядка с одинаковыми постоянными времени  $T_0' = T_0'' = T_0$ , включенных последовательно, то, как нетрудно показать, для уменьшения суммы постоянных времени  $T_0' + T_0'' = 2T_0$  в  $n$  раз при помощи пассивных дифференцирующих звеньев необходимо подавить результирующий коэффициент передачи в  $n^2$  раз. При решении этой же задачи посредством использования жесткой обратной связи, охватывающей сразу оба звена, получится снижение результирующего коэффициента передачи только в  $n$  раз. Задача снижения суммы постоянных времени звеньев, входящих в систему управления, встречается в практике довольно часто. Это делает применение обратных связей обычно более предпочтительным.

В динамическом отношении отрицательные обратные связи могут оказывать самое различное действие. Однако, подобно тому как это было сделано для последовательных корректирующих устройств, можно наметить три основных вида отрицательных обратных связей:

- 1) обратные связи, подавляющие высокие частоты (аналоги пассивного последовательного интегрирующего звена);
- 2) обратные связи, подавляющие низкие частоты (аналоги пассивного последовательного дифференцирующего звена);
- 3) обратные связи, подавляющие средние частоты (аналоги пассивного последовательного интегро-дифференцирующего звена).

Установить аналогию обратной связи с тем или иным последовательным корректирующим звеном можно при помощи формул перехода (10.5) и (10.6). Особенно важно иметь возможность перехода от последовательного корректирующего звена к эквивалентной обратной связи. Это определяется тем, что расчетным путем наиболее просто определить параметры последовательного корректирующего звена, а с точки зрения технического осуществления наиболее удобны обратные связи.

В табл. 10.3 приведены наиболее распространенные случаи перехода от электрических последовательных корректирующих звеньев к электрическим обратным связям. Эта таблица может быть использована также для перехода от последовательных звеньев к обратным связям любого типа (неэлектрическим), так как она позволяет по передаточной функции последовательного звена определить передаточную функцию эквивалентной отрицательной обратной связи.

**Отрицательные обратные связи.** Отрицательные корректирующие обратные связи очень часто используются для охвата исполнительных двигателей и серводвигателей (вспомогательных двигателей). В связи с этим рассмотрим наиболее важные случаи.

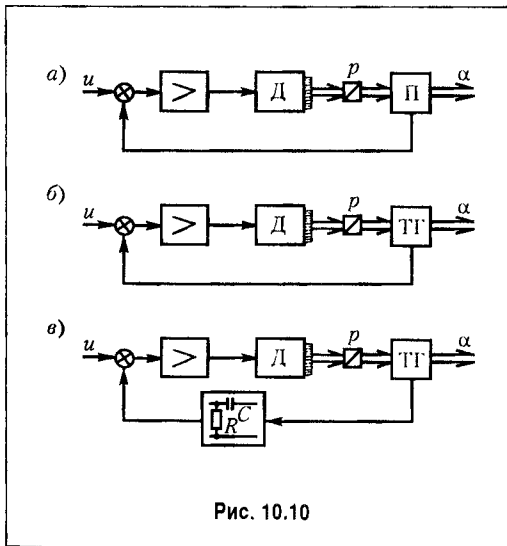


Рис. 10.10



На рис. 10.10 изображено несколько случаев охвата электродвигателя отрицательной обратной связью. Схема на рис. 10.10, а соответствует использованному линейного потенциометра П, сцепленного через редуктор Р с валом двигателя Д. Напряжение, снимаемое с потенциометра, поступает на вход усилителя, от которого управляется двигатель. Пусть передаточная функция двигателя совместно с усилителем соответствует интегрирующему звену с замедлением:

$$W_c(p) = \frac{\alpha}{u} = \frac{k}{p(1+T_m p)}, \quad (10.24)$$

где  $T_m$  — электромеханическая постоянная времени.

Передаточная функция цепи обратной связи  $W_{oc}(p) = k_n$  равна коэффициенту передачи потенциометра. Результирующая передаточная функция в соответствии с формулой (10.3) будет

$$W_{ск}(p) = \frac{k}{T_m p^2 + p + k k_n} = \frac{1}{k_{oc}} \frac{1}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}, \quad (10.25)$$

где

$$T^2 = \frac{T_m}{k k_n}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{k k_n T_m}}, \quad \frac{1}{k_{oc}} = \frac{k}{k k_n} = \frac{1}{k_n},$$

В этом случае имеется жесткая обратная связь, так как  $W_{oc}(p) = k_n \neq 0$ , которая превращает интегрирующее звено с замедлением, передаточная функция которого имеет вид (10.24), в колебательное звено с передаточной функцией (10.25). Чем больше коэффициент усиления по петле обратной связи  $k k_n$ , тем выше будет частота не демпфированных колебаний звена  $q = T^{-1}$  и тем меньше параметр затухания  $\zeta$ .

Аналогичный результат можно получить, если вместо обратной связи установить на выходном валу пружину, развивающую момент, пропорциональный углу поворота вала.

Схема на рис. 10.10, б соответствует использованию в цепи обратной связи тахогенератора ТГ. В этом случае  $W_{oc}(p) = k_t p$ , где  $k_t$  — коэффициент передачи тахогенератора.

Результирующая передаточная функция в соответствии с (10.3) будет

$$W_{ск}(p) = \frac{k}{T_m p^2 + (1 + k k_t) p} = \frac{k'}{p(1 + T'_m p)}, \quad (10.26)$$

где

$$k' = \frac{k}{1 + k k_t} \quad \text{и} \quad T'_m = \frac{T_m}{1 + k k_t}.$$

Передаточная функция (10.26) отличается от исходной передаточной функции (10.24) только уменьшением в  $1 + k k_t$  раз коэффициента передачи и постоянной време-

Таблица 10.3. Эквивалентные корректирующие устройства

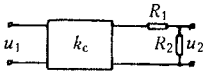
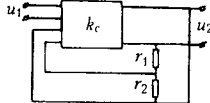
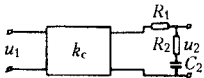
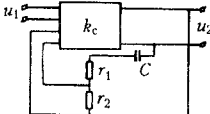
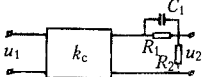
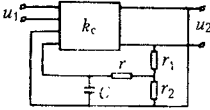
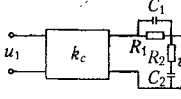
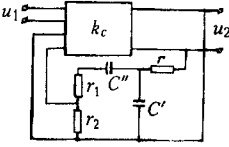
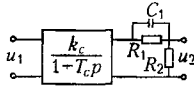
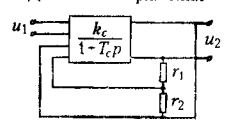
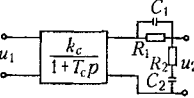
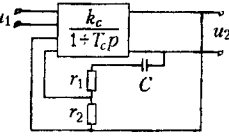
№ п/п	Основное звено	Звено последовательного типа	Отрицательная обратная связь	Свойства
1	Безынерционный усилитель $W_c(p) = k_c$	Делитель напряжения  $W_{пз}(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = k_{пз}$	Делитель напряжения  $W_{oc}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = k_{oc};$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1 - k_{пз}}{k_c k_{пз}}$	Подавление усиления
2	То же	Интегрирующее пассивное звено  $W_{пз}(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p} \quad (T_1 > T_2);$ $T_1 = (R_1 + R_2)C_2; \quad T_2 = R_2 C_2$	Дифференцирующее звено  $W_{oc}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{T_2 p}{1 + T_2 p};$ $(r_1 + r_2)C = T_2;$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{T_1 - T_2}{k_c T_2}$	Подавление верхних частот
3	То же	Дифференцирующее пассивное звено  $W_{пз}(p) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$ $(T_1 > T_2);$ $T_1 = R_1 C_1;$ $T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1$	Аперриодическое звено  $W_{oc}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{1}{1 + T_1 p};$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{T_1 - T_2}{2 k T};$ $\left( r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) C = T_1$	Подавление низких частот

Таблица 10.3 (Оковчание)

№ п/п	Основное звено	Звено последовательного типа	Отрицательная обратная связь	Свойства
4	Безынерционный усилитель	<p>Интегро-дифференцирующее звено</p>  $W_{\text{из}}(p) = \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{(1+T_3p)(1+T_4p)}$ $T_1 = R_1C_1; \quad T_2 = R_2C_2;$ $T_3T_4 = T_1T_2;$ $T_3 + T_4 = T_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2$	<p>Апериодическое и дифференцирующее звенья</p>  $W_{\text{ос}}(p) = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{T_2p}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$ $rC' \approx T_1; \quad (r_1 + r_2)C'' \approx T_2;$ $r_2 / (r_1 + r_2) = R_1 / k_c R_2$	Подавление средних частот
5	Инерционный усилитель $W_c(p) = \frac{k_c}{1+T_cp}$	<p>Пассивное дифференцирующее звено (частный случай, когда <math>T_1 = T_c</math>)</p>  $W_{\text{из}}(p) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1+T_1p}{1+T_2p} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1+T_1p}{1+T_2p} \quad (T_1 > T_2);$ $T_1 = R_1C_1 = T_c;$ $T_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C_1$	<p>Делитель напряжения</p>  $k_{\text{ос}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{T_1 - T_2}{k_c T_2} = \frac{R_1}{k_c R_2}$	Подавление низких частот
6	То же	<p>Интегро-дифференцирующее звено (частный случай, когда <math>T_1 = T_c</math>)</p>  $W_{\text{из}}(p) = \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)}{(1+T_3p)(1+T_4p)}$ $T_1 = R_1C_1 = T_c; \quad T_2 = R_2C_2;$ $T_3T_4 = T_1T_2;$ $T_3 + T_4 = T_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2$	<p>Дифференцирующее звено</p>  $W_{\text{ос}}(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{T_2p}{1+T_2p};$ $(r_1 + r_2)C = T_2;$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{R_1}{k_c R_2}$	Подавление средних частот

ни. Если в соответствии с (10.24) в качестве выходной величины рассматривать угол поворота вала двигателя  $\alpha$ , то эта обратная связь является гибкой, так как  $W_{oc}(0) = 0$ .

Для схемы, изображенной на рис. 10.10, б, в качестве выходной величины можно рассматривать скорость вращения двигателя. Тогда обратная связь по напряжению тахогенератора оказывается жесткой, и в этом случае  $W_{oc}(0) = k_T \neq 0$ .

В соответствии с табл. 10.3 (№ 5) этот случай аналогичен включению последовательного пассивного дифференцирующего звена. Аналогичный результат может быть получен при установке на валу двигателя демпфера, развивающего момент сопротивления, пропорциональный скорости вращения (скоростное трение). В этом случае коэффициент передачи и постоянная времени двигателя уменьшаются в одинаковое число раз.

На рис. 10.10, в изображено введение обратной связи по ускорению. В этом случае передаточная функция цепи обратной связи будет

$$W_{ck}(p) = k_T p \frac{T_k p}{1 + T_k p},$$

где  $T_k = RC$  — постоянная времени дифференцирующего конденсатора, а  $k_T$  — коэффициент передачи тахогенератора.

Резльтирующая передаточная функция для этого случая в соответствии с формулой (10.3) будет

$$W_{ck}(p) = \frac{k(1 + T_k p)}{p[1 + (T_M + T_k + k k_T T_k)p + T_M T_k p^2]}. \quad (10.27)$$

В соответствии с табл. 10.3 (№ 6) этот случай аналогичен включению последовательного интегро-дифференцирующего звена.

Представляет интерес рассмотрение частного случая, когда можно приближенно считать дифференциатор идеальным (рис. 10.10, в). Тогда передаточная функция цепи обратной связи будет  $W_{oc}(p) = k_T T_k p^2$ , а результирующая передаточная функция двигателя совместно с обратной связью примет вид

$$W_{ck}(p) = \frac{k}{p[1 + (T_M + k k_T T_k)p]} = \frac{k}{p(1 + T'_M p)}, \quad (10.28)$$

где  $T'_M = T_M + k k_T T_k$  — результирующая электромеханическая постоянная времени двигателя.

Из формулы (10.28) видно, что обратная связь по ускорению эквивалентна установке на валу двигателя дополнительного маховика, увеличивающего электромеханическую постоянную времени двигателя.

На рис. 10.11 доказано введение обратной связи в гидравлическом серводвигателе. Случай, изображенный на рис. 10.11, а, соответствует жесткой отрицательной обратной связи или так называемому серводвигателю с выключателем. Передаточная функция серводвигателя без обратной связи, определяемая по отношению перемещений  $x_1$  и  $x_2$ , соответствует (10.24). Передаточная функция цепи обратной связи

$W_{oc}(p) = \frac{x_3}{x_2} = \frac{a}{b} = k_n = \text{const}$ , где  $a$  и  $b$  — плечи рычага. В результате этот случай сводится к рассмотренной выше схеме, изображенной на рис. 10.10, а. Результирующая передаточная функция будет совпадать с (10.25).

Рис. 10.11, б соответствует гибкой обратной связи, передаточная функция которой

$$W_{oc}(p) = \frac{x_3}{x_2} = \frac{a}{b} \frac{T_d p}{1 + T_d p} = \frac{k_n T_d p}{1 + T_d p},$$

где  $T_d$  — постоянная времени дифференцирующего устройства, состоящего из демпфера и пружины (см. рис. 4.2А, з).

Результирующая передаточная функция в соответствии с формулой (10.3) будет

$$W_{ск}(p) = \frac{k(1 + T_d p)}{p[1 + k k_n T_d + (T_m + T_n)p + T_m T_d p^2]} = \frac{k'(1 + T_d p)}{p(1 + 2\zeta T p + T^2 p^2)}, \quad (10.29)$$

где

$$k' = \frac{k}{1 + k k_n T_d}, \quad T^2 = \frac{T_m T_d}{1 + k k_n T_d}, \quad \zeta = \frac{T_m + T_n}{2\sqrt{(1 + k k_n T_d) T_m T_d}}.$$

Из формулы (10.29) видно, что подобная гибкая обратная связь сохраняет интегрирующие свойства серводвигателя, уменьшает его коэффициент передачи, вводит производную в соответствии с членом  $(1 + T_d p)$  и образует колебательное звено с частотой недемпфированных колебаний  $q = T^{-1}$  и параметром затухания  $\zeta$ . Если частота  $q$  достаточно велика, то выражение (10.29) можно приближенно записать в виде

$$W_{ск}(p) \approx \frac{k'(1 + T_d p)}{p}. \quad (10.30)$$

Передаточная функция (10.30) совпадает с передаточной функцией изолромного устройства (9.10). В связи с этим гибкую обратную связь, изображенную на рис. 10.24, б, называют иногда изолромной обратной связью.

**Положительные обратные связи.** Положительные обратные связи находят значительно меньшее распространение в качестве корректирующих средств по сравнению с отрицательными. Встречается применение положительных обратных связей в качестве так называемых корректоров ошибки (рис. 10.12). Прямая цепь представляет собой

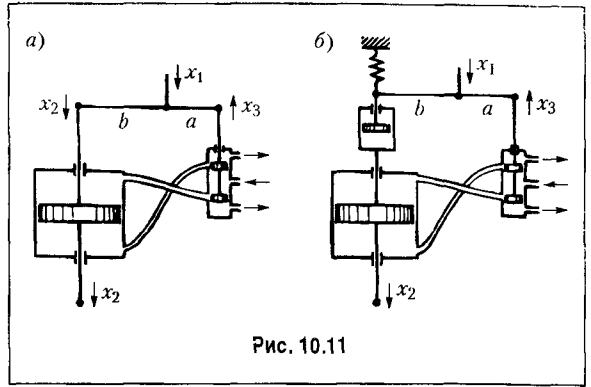


Рис. 10.11

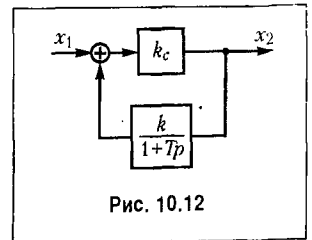


Рис. 10.12

безынерционное звено с передаточной функцией  $W_c(p) = k_c$ , а в цепи обратной связи установлено аperiodическое звено первого порядка с передаточной функцией

$W_{oc}(p) = \frac{k}{1+Tp}$ . Результирующая передаточная функция в соответствии с (10.3) будет

$$W_{ск}(p) = \frac{k_c(1+Tp)}{1 - k_c k + Tp}. \quad (10.31)$$

При выполнении условия  $k_c k = 1$  формула (10.31) будет соответствовать передаточной функции изохромного устройства (9.10). Это позволяет построить изохромное устройство, повышающее астатизм системы, на базе аperiodического звена, а не интегратора, как показано на рис. 9.4. Отсутствие интегратора упрощает схему, но точное выполнение требования  $k_c k = 1$  затрудняется необходимостью тщательного масштабирования.

Положительные обратные связи находят также применение в магнитных усилителях с целью уменьшения постоянных времени последних при сохранении коэффициента усиления по мощности. Это делается следующим образом. Предположим, что усилитель имеет передаточную функцию, соответствующую аperiodическому звену,

$$W_y(p) = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{k_y}{1 + T_y p},$$

где  $T_y$  — постоянная времени усилителя,  $k_y$  — коэффициент усиления (коэффициент передачи) по напряжению.

При замыкании усилителя положительной жесткой обратной связью с передаточной функцией  $W_{oc}(p) = k_{oc}$  в соответствии с (10.3) имеем результирующую передаточную функцию

$$W_{ук}(p) = \frac{W_y(p)}{1 - W_y(p)W_{oc}(p)} = \frac{k_y}{1 - k_y k_{oc} + T_y p}.$$

Эта передаточная функция может быть также представлена в следующем виде:

$$W_{ук}(p) = \frac{k'_y}{1 - k_y k_{oc}} \frac{1}{1 + \frac{T'_y}{1 - k_y k_{oc}}} = \frac{k'_y}{1 + T'_y p},$$

где

$$k'_y = \frac{k_y}{1 - k_y k_{oc}} \quad \text{и} \quad T'_y = \frac{T_y}{1 - k_y k_{oc}} -$$

новые значения коэффициента усиления по напряжению и постоянной времени усилителя. Нетрудно видеть, что при помощи жесткой положительной обратной связи

можно в одинаковое число раз увеличить коэффициент усиления по напряжению и постоянную времени усилителя.

Коэффициент усиления усилителя по мощности равен отношению выходной и входной мощностей в установившемся режиме:

$$k_p = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{R_{\text{вх}} U_{\text{вых}}^2}{R_{\text{н}} U_{\text{вх}}^2} = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{н}}} k_y^2,$$

где  $R_{\text{н}}$  и  $R_{\text{вх}}$  — сопротивление нагрузки и входное сопротивление усилителя.

Качество усилителя может характеризоваться отношением коэффициента усиления по мощности к постоянной времени:

$$\frac{k_p}{T_y} = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{н}} T_y} k_y^2.$$

При введении положительной обратной связи необходимо взять новое значение коэффициента усиления по мощности ( $R_{\text{н}}$  и  $R_{\text{вх}}$  считаются постоянными)

$$k_p' = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{н}}} (k_y')^2$$

и новые значения коэффициента усиления по напряжению  $k_y'$ , и постоянной времени  $T_y'$ . В результате получаем

$$\frac{k_p'}{T_y'} = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{н}}} \frac{(k_y')^2}{T_y'} = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{н}}} \frac{k_y^2}{T_y (1 - k_y k_{\text{ос}})} = \frac{k_p}{T_y (1 - k_y k_{\text{ос}})}.$$

Таким образом, введение положительной обратной связи позволяет увеличить отношение коэффициента усиления по мощности к постоянной времени усилителя. При заданном значении коэффициента усиления по мощности усилитель с положительной обратной связью будет иметь меньшее значение результирующей постоянной времени.

## § 10.5. Методы повышения запаса устойчивости

Повышение запаса устойчивости или *демпфирование* системы управления сводится в конечном счете к рациональному перераспределению полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы для задающего или возмущающего воздействия. Передаточная функция замкнутой системы связана с передаточной функцией разомкнутой системы жестким соотношением. Поэтому под демпфированием можно понимать также рациональное перераспределение полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой системы.

Ответить на вопрос, каким образом необходимо перераспределить полюсы и нули передаточной функции замкнутой или разомкнутой системы, можно на основании применения критериев устойчивости и критериев качества. Наиболее полно этот вопрос решается при помощи синтеза корректирующих средств. Некоторые методы синтеза будут изложены в главе 12.

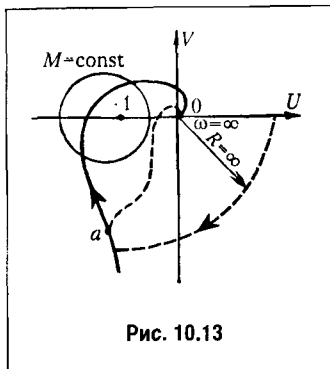


Рис. 10.13

Здесь будут рассмотрены только основные идеи, которые используются при изменении динамических свойств системы с целью повышения запаса устойчивости. Рассмотрение может вестись на основании различных критериев качества. Здесь это будет сделано на наиболее наглядных примерах, использующих амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы.

На рис. 10.13 изображена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы с астатизмом первого порядка. Будем предполагать, что в разомкнутом состоянии система устойчива (не имеет полюсов в правой полуплоскости). Тогда по виду амплитудно-фазовой характеристики можно установить, что в замкнутом состоянии

система будет неустойчивой. Это вытекает из того, что характеристика охватывает точку  $(-1, j0)$ . Задачей демпфирования является такая деформация амплитудно-фазовой характеристики, в результате которой характеристика не только не будет охватывать точку  $(-1, j0)$ , но будет достаточно удалена от этой точки. Величину требуемого удаления характеристики от точки  $(-1, j0)$  можно установить, воспользовавшись каким-либо критерием качества. Здесь наиболее просто использовать показатель колебательности. Тогда амплитудно-фазовая характеристика не должна пересекать окружность, соответствующую заданному значению показателя колебательности  $M = \text{const}$ .

Деформация амплитудно-фазовой характеристики с целью получения устойчивости, а также запаса устойчивости может производиться посредством использования корректирующих звеньев различного типа: последовательных, параллельных и обратных связей. Так как в линейной системе для каждого звена какого-либо типа может быть найдено эквивалентное звено другого типа, то достаточно рассмотреть действие звеньев одного определенного типа. Наиболее наглядно может быть прослежено действие последовательных корректирующих звеньев, и для них наиболее просто могут быть вычислены требуемые параметры. Поэтому в дальнейшем в основном будут рассматриваться последовательные корректирующие звенья.

Деформация амплитудно-фазовой характеристики может быть произведена четырьмя основными способами, которые будут рассмотрены ниже в отдельности.

**Демпфирование с подавлением высоких частот.** Выведение амплитудно-фазовой характеристики из запретной зоны (рис. 10.13) может быть осуществлено посредством подавления пропускания разомкнутой системой всех частот, которые превышают частоту  $\omega_a$ , соответствующую некоторой точке  $a$  на характеристике. Тогда амплитудно-фазовая характеристика примет вид, изображенный на рис. 10.13 пунктиром. Как видно из этого рисунка, деформированной характеристике будет соответствовать замкнутая система, которая является не только устойчивой, но и имеющей необходимый запас устойчивости.

Подавление усиления на высоких частотах всегда сопровождается появлением отрицательных фазовых сдвигов. Поэтому этот метод демпфирования может также называться демпфированием с внесением отрицательных фазовых сдвигов.

Подавление высоких частот может осуществляться различными способами. Наиболее просто это получается при введении последовательно в цепь управления апе-



риодического звена первого порядка с относительно большой постоянной времени и коэффициентом передачи  $k = 1$ . Передаточная функция такого звена

$$W_k(p) = \frac{1}{1 + T_0 p} \tag{10.32}$$

Легко показать, что подобное звено может всегда привести к получению желаемого запаса устойчивости в статических системах с минимально-фазовыми звеньями. Пусть, например, передаточная функция разомкнутой статической системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + 2\zeta_m \tau_m p + \tau_m^2 p^2)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \dots (1 + 2\zeta_n T_n p + T_n^2 p^2)}, \tag{10.33}$$

где  $\zeta_m$  и  $\zeta_n$  отличны от нуля.

Ей соответствует л. а. х.  $L_1$  и л. ф. х.  $\psi_1$  (рис. 10.14). Пусть л. ф. х. пересекает ось абсцисс левее частоты среза  $\omega_{c1}$ . Тогда (см. § 6.4) имеет место  $-1$  переход через критический отрезок и замкнутая система неустойчива.

Введем в систему последовательное корректирующее звено с передаточной функцией (10.32). Для определения постоянной времени  $T_0$  найдем такую частоту  $\omega_H$  (рис. 10.14), что независимо от значений постоянных времени, входящих в (10.33), на частотах  $\omega < \omega_H$  л. а. х.  $L_1(\omega)$  будет мало отличаться от своей первой асимптоты, а фаза  $\psi_1(\omega)$  — от нуля. Постоянную величину  $T_0$  выберем так, чтобы частота среза л. а. х.  $\omega_{c2} = K/T_0$  была меньше частоты  $\omega_H$ . Тогда у л. а. х.  $L_2(\omega)$  появится асимптота, имеющая на частоте среза  $\omega_{c2}$  наклон  $-20$  дБ/дек. А это, как показано в § 8.8 (рис. 8.25), свидетельствует об устойчивости замкнутой системы и о наличии у нее запаса устойчивости. Все остальные постоянные времени передаточной функции (10.33) не смогут нарушить устойчивости либо запаса устойчивости, так как соответствующие им сопрягающие частоты лежат значительно правее частоты среза л. а. х. и они могут деформировать только высокочастотные «хвосты» л. а. х. и л. ф. х. Получается, что введение большой постоянной времени  $T_0$  делает все остальные постоянные времени относительно малыми, в результате чего и достигается эффект демпфирования.

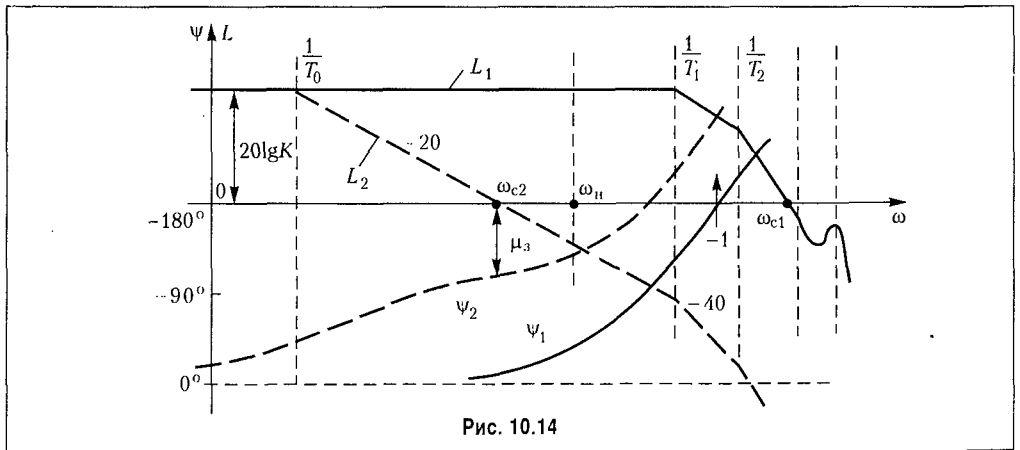


Рис. 10.14

Из рис. 10.14 видно, что этот результат может быть получен при любой величине коэффициента передачи  $K$ . Если зафиксировать положение точки, соответствующей частоте среза  $\omega_{c2}$ , то запас устойчивости в системе не будет нарушаться при сколь угодно большом увеличении  $K$  и одновременном увеличении  $T_0$ . Для этого нужно только выполнить условие

$$\frac{K}{T_0} = \omega_{c2} = \text{const}. \quad (10.35)$$

Демпфирование статических систем может быть осуществлено и более сложными корректирующими звеньями, вносящими подавление высоких частот и отрицательные фазовые сдвиги, например при помощи пассивного интегрирующего звена (табл. 10.1) или его аналогов (табл. 10.3).

Также можно показать, что в астатических системах первого порядка, состоящих из минимально-фазовых звеньев, желаемый запас устойчивости может быть всегда получен при введении последовательного пассивного интегрирующего звена, имеющего передаточную функцию вида

$$W_k(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p} \quad (T_1 > T_2). \quad (10.36)$$

Цель будет всегда достигнута при достаточно больших значениях постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ . Эффект демпфирования достигается здесь за счет того, что при увеличении  $T_1$  и  $T_2$  результирующая передаточная функция разомкнутой системы с любой степенью точности может быть представлена в виде произведения (10.36) и множителя  $K/p$ , а постоянные времени системы оказываются относительно малыми.

В астатических системах второго порядка требуемый запас устойчивости может быть получен при помощи подавления высоких частот только в некоторых случаях.

Достоинством демпфирования с подавлением высоких частот является то, что система оказывается менее подверженной действию высокочастотных помех, так как корректирующее звено представляет собой фильтр низких частот.

Недостатком демпфирования с подавлением высоких частот является то, что снижение полосы пропускания системы означает понижение быстродействия. Поэтому такой метод демпфирования может применяться в тех случаях, когда снижение быстродействия системы является допустимым.

**Демпфирование с поднятием высоких частот.** Введение амплитудно-фазовой характеристики из запретной зоны может быть произведено поворотом ее высокочастотной части в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Это показано пунктиром на рис. 10.15.

Положительный фазовый сдвиг (фазовое опережение) может быть получен посредством включения звеньев дифференцирующего типа.

Если параллельно части основного канала управления включить идеальное дифференцирующее звено (рис. 10.6), то результирующая передаточная функция будет иметь вид

$$W_k(p) = 1 + T_1 p. \quad (10.37)$$

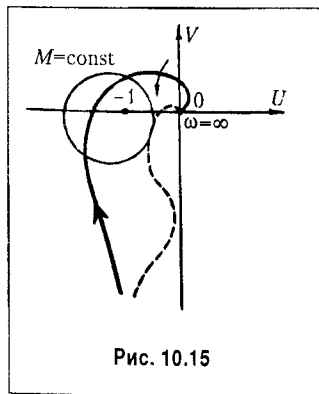


Рис. 10.15

При введении такого звена будет получен дополнительный положительный фазовый сдвиг

$$\psi = \arctg \omega T_1. \quad (10.38)$$

В области высоких частот фазовый сдвиг близок к  $90^\circ$ . Это и вызывает «закручивание» амплитудно-фазовой характеристики в высокочастотной области (рис. 10.15).

Одновременно с положительным фазовым сдвигом звено увеличивает пропускание высоких частот, так как модуль его частотной передаточной функции

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \quad (10.39)$$

будет тем больше, чем выше частота.

В случае, если положительный фазовый сдвиг, вносимый дифференцирующим звеном, является недостаточным для выведения амплитудно-фазовой характеристики из запретной зоны, могут применяться два дифференцирующих звена, включенных последовательно, что соответствует введению первой и второй производных от сигнала ошибки. Для идеальных дифференцирующих звеньев передаточная функция будет иметь вид

$$W(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = 1 + ap + bp^2. \quad (10.40)$$

Дополнительный фазовый сдвиг в этом случае будет

$$\psi = \arctg \omega T_1 + \arctg \omega T_2. \quad (10.41)$$

Поднятие высоких частот будет здесь еще более заметным, так как модуль частотной передаточной функции этих звеньев

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}. \quad (10.42)$$

Реализация дифференцирующего звена, близкого к идеальному, может быть осуществлена, например, при использовании в следящей системе воспроизведения угла тахогенераторов. Этот случай будет описан ниже при рассмотрении конкретного примера. Хорошие результаты дает также применение гироскопических датчиков угловых скоростей и дифференцирующих операционных усилителей.

В системах автоматического управления наиболее часто употребляются пассивные дифференцирующие звенья, подобные рассмотренным в § 10.2 (см. табл. 10.1) или их аналоги, выполненные на операционных усилителях. Однако из табл. 10.1 следует, что положительный фазовый сдвиг вносится этими звеньями не за счет поднятия высоких, а за счет подавления низких частот. Это вытекает из вида их передаточной функции:

$$W_k(p) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} = G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}. \quad (10.43)$$

В установившемся состоянии коэффициент передачи звена  $G_0 < 1$ . Поэтому введение такого звена снижает коэффициент передачи разомкнутой цепи в  $G_0^{-1}$  раз.

С точки зрения выполнения требований по точности допустить такое снижение коэффициента нельзя. Поэтому одновременно с включением в цепь пассивного дифференцирующего звена необходимо предусмотреть восстановление прежнего коэффициента при помощи введения дополнительного усилителя или поднятия коэффициента усиления имеющегося усилителя. В результате общая передаточная функция пассивного дифференцирующего звена вместе с дополнительным усилителем будет иметь вид

$$W_k(p) = \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p} \quad (T_1 > T_2). \quad (10.44)$$

Дополнительный фазовый сдвиг

$$\psi = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 \geq 0. \quad (10.45)$$

Модуль частотной передаточной функции в этом случае

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}} \quad (10.46)$$

показывает на поднятие высоких частот. При  $\omega = 0$  коэффициент передачи  $A(0) = 1$ , и при  $\omega \rightarrow \infty$  имеем  $A(\infty) = T_1/T_2 > 1$ .

Логарифмические частотные характеристики пассивного дифференцирующего звена совместно с дополнительным усилителем, компенсирующим затухание, вносимое звеном на низких частотах, изображены на рис. 10.16. Здесь же пунктиром изображены характеристики идеального дифференцирующего звена, имеющего передаточную функцию вида (10.37). Как видно из сравнения этих характеристик, пассивное звено, в отличие от идеального, дает положительный фазовый сдвиг в ограниченной области частот при ограниченном поднятии высоких частот.

Аналогичный эффект дает применение отрицательных обратных связей, содержащих апериодическое звено (табл. 10.4).

Характеристика, подобная изображенной на рис. 10.16, может быть получена также при использовании активного дифференцирующего звена, состоящего из

операционного усилителя (в режиме дифференцирования), включенного параллельно основному каналу в соответствии со схемой, изображенной на рис. 10.6.

Демпфирование посредством поднятия высоких частот или, соответственно, введение упреждения по фазе является универсальным методом, так как позволяет получить требуемый результат практически при любых передаточных функциях исходной системы, в том числе и при

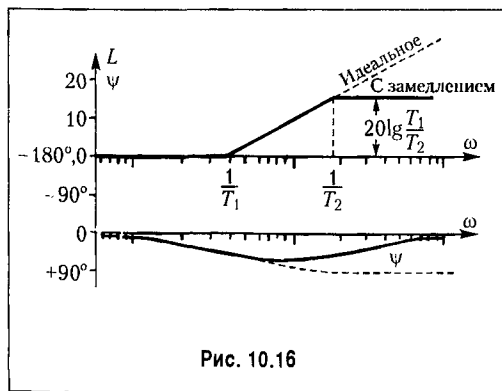


Рис. 10.16

наличии в канале управления неминимально-фазовых звеньев. Однако это не означает, что данный метод может быть рекомендован для использования во всех случаях. Поднятие верхних частот расширяет полосу пропускания системы, что приводит к увеличению ее быстродействия и одновременно усиливает влияние на систему высокочастотных помех. При большом уровне помех на входе или в канале управления поднятие верхних частот может привести к неприемлемым результатам. Поэтому данный метод демпфирования имеет ограниченную сферу применения. Она определяется в основном теми случаями, когда введение положительного фазового сдвига является принципиально необходимым для получения устойчивой работы, а также теми случаями, когда необходимо повысить быстродействие системы при допустимости возрастания влияния высокочастотных помех.

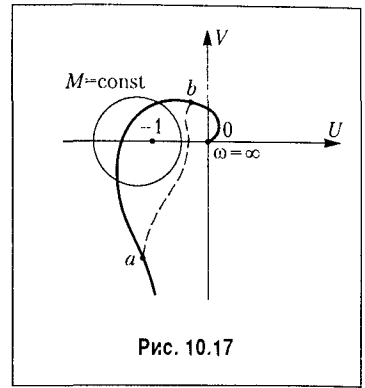


Рис. 10.17

В некоторых случаях при поднятии верхних частот приходится предусматривать меры одновременного подавления высокочастотных помех путем введения специальных узко- или широкополосных фильтров. Иногда задача может оказаться вследствие этого весьма сложной.

**Демпфирование с подавлением средних частот.** Выведение амплитуднофазовой характеристики из запретной зоны (рис. 10.17) может быть произведено при помощи подавления усиления в области частот, соответствующей части характеристики между точками *a* и *b*. В результате будет получена характеристика, изображенная на рис. 10.17 пунктиром.

Подавление средних частот может быть осуществлено включением в цепь управления последовательного интегро-дифференцирующего звена (табл. 10.1), имеющего л. а. х., изображенную там же. Из вида л. а. х. вытекает, что звено подавляет усиление в некоторой области «средних» частот. Вместо пассивного интегро-дифференцирующего звена могут применяться его эквиваленты, например гибкая отрицательная обратная связь, охватывающая инерционный усилитель (табл. 10.4).

По своим свойствам демпфирование с подавлением средних частот занимает промежуточное положение между двумя рассмотренными методами. При демпфировании с подавлением средних частот сохраняется быстродействие системы и сохраняется полоса пропускания. Этот вид демпфирования является наиболее распространенным.

**Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов.** Сущность этого метода можно уяснить, например, из рассмотрения рис. 6.22. На рис. 6.22, б изображен случай, когда из-за наличия в канале разомкнутой системы консервативного звена, имеющего чисто мнимые полюсы, замкнутая система будет неустойчивой. Добавление отрицательного фазового сдвига вызовет «закручивание» а. ф. х. по часовой стрелке. В результате система в замкнутом состоянии может быть сделана устойчивой (рис. 6.22, а).

Введение отрицательного фазового сдвига производится использованием последовательных корректирующих звеньев фазосдвигающего типа (табл. 10.1). Так как

подобные звенья оказываются обычно неминимально-фазовыми, то такой метод демпфирования иногда называют в литературе методом демпфирования с использованием неминимально-фазовых звеньев.

Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов оказывается эффективным в случае наличия в канале разомкнутой системы консервативных, а также колебательных звеньев со слабым демпфированием. В первом случае это приводит к появлению в амплитудной частотной характеристике (или в л. а. х.) резонансных пиков бесконечной высоты, а во втором — к резонансным пикам конечной, но значительной высоты. Использование демпфирования других типов здесь оказывается затруднительным.

По своим свойствам этот метод демпфирования сходен со случаем подавления средних частот, так как фазосдвигающие звенья обычно не вносят изменений в амплитудную частотную характеристику и модуль их частотной передаточной функции  $|W_{\text{пз}}(j\omega)| = 1$ . В результате сохраняется быстродействие демпфируемой системы и сохраняется ее полоса пропускания.

Рассмотренные выше методы демпфирования являются основными, но лишь иллюстрируют те идеи, которые используются при повышении запаса устойчивости. В практике, в зависимости от конкретных условий, могут использоваться и более сложные изменения динамических свойств системы управления. Так, например, может осуществляться подавление средних частот с одновременным поднятием высоких, поднятие высоких частот с подавлением их некоторой области (фильтрация определенных частот) и т. п.

## § 10.6. Примеры

**1. Система управления движущимся объектом.** Рассмотрим систему управления, изображенную на рис. 10.18. Здесь обозначено: ГН — гироскоп направления, измеряющий отклонение движущегося объекта от заданного курса; П — потенциометр; Д — двигатель рулевого устройства и Р — редуктор. При отклонении объекта от заданного курса на угол  $\alpha$  движок потенциометра отклоняется на тот же угол. В результате на усилитель поступает напряжение. Пройдя усилитель, это напряжение поступает на двигатель и руль объекта начинает поворачиваться.

Составим передаточную функцию разомкнутой системы. Для этого отсоединим гироскоп направления от объекта и введем обозначения  $\alpha_1$  — угол отклонения гироскопа и  $\alpha_2$  — угол поворота объекта (в замкнутой системе  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ).

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

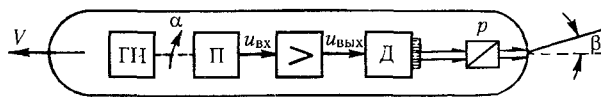


Рис. 10.18

Найдем передаточные функции отдельных звеньев.

Потенциометр. Считая потенциометр безынерционным звеном получаем

$$W_1(p) = \frac{u_{\text{вх}}}{\alpha_1} = k_1, \quad (10.47)$$

где  $k_1$  — крутизна потенциометра [В/рад].

Усилитель. При безынерционном усилителе

$$W_2(p) = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = k_2, \quad (10.48)$$

где  $k_2$  — коэффициент усиления по напряжению.

Двигатель совместно с редуктором. Передаточная функция двигателя с редуктором в случае пренебрежения переходными процессами в обмотке управления имеет вид

$$W_3(p) = \frac{k_3}{p(1+T_d p)}, \quad (10.49)$$

где  $k_3$  — коэффициент передачи двигателя совместно с редуктором по скорости [рад/В · с], а  $T_d$  — электромеханическая постоянная времени.

Объект. Будем считать, что угловая скорость поворота объекта по курсу пропорциональна углу отклонения руля. Тогда угол поворота будет пропорционален интегралу от угла поворота руля по времени.

При учете инерционности объекта его передаточная функция имеет вид

$$W_4(p) = \frac{k_4}{p(1+T_0 p)}, \quad (10.50)$$

где  $k_4$  — коэффициент передачи объекта [ $c^{-1}$ ],  $T_0$  — постоянная времени объекта.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p) = \frac{K}{p^2(1+T_d p)(1+T_0 p)}. \quad (10.51)$$

где  $K [c^{-2}]$  — коэффициент передачи разомкнутой системы.

Найдем характеристическое уравнение системы

$$1 + W(p) = 0. \quad (10.52)$$

После подстановки получаем

$$T_d T_0 p^4 + (T_d + T_0) p^3 + p^2 + K = 0. \quad (10.53)$$

Достаточно одного взгляда на это уравнение, чтобы убедиться в неустойчивости системы при любом коэффициенте передачи  $K$ . Это вытекает из того, что в характеристическом уравнении отсутствует член с оператором в первой степени. Такая не-

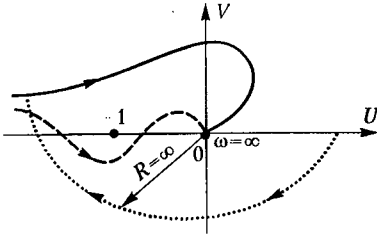


Рис. 10.19

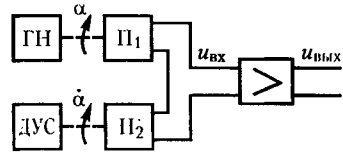


Рис. 10.20

устойчивость называется структурной неустойчивостью, так как при данной структуре изменение параметров схемы любым образом не дает устойчивости.

На рис. 10.19 изображена амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая передаточной функции разомкнутой системы (10.51). Из вида характеристики вытекает, что устойчивость может быть достигнута только при «закручивании» высокочастотной части годографа против часовой стрелки, что показано на рис. 10.19 пунктиром. Только в этом случае амплитудно-фазовая характеристика не будет охватывать точку  $(-1, j0)$  и замкнутая система окажется устойчивой. Для введения положительного фазового сдвига необходимо применить демпфирование с поднятием высоких частот, что достигается включением звеньев дифференцирующего типа.

На рис. 10.20 изображена схема использования в качестве чувствительного элемента кроме гироскопа направления ГН дополнительного дифференцирующего гироскопа — датчика угловой скорости ДУС. Угол поворота движка потенциометра  $\Pi_2$  можно считать пропорциональным угловой скорости  $\alpha$  поворота ДУС. В результате вместо (10.41) будем иметь

$$W_1(p) = \frac{u_{вх}}{\alpha_1} = k_1 + k_5 p = k_1(1 + T_k p), \quad (10.54)$$

где постоянная времени  $T_k = k_5/k_1$ .

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p) = \frac{K(1 + T_k p)}{p^2(1 + T_d p)(1 + T_0 p)}. \quad (10.55)$$

Характеристическое уравнение системы (10.72) в этом случае уже не имеет пропуска членов:

$$T_d T_0 p^4 + (T_d + T_0) p^3 + p^2 + K T_k p + K = 0. \quad (10.56)$$

При соответствующем выборе постоянной времени коррекции  $T_k$  и коэффициента передачи  $K$  может быть получена устойчивая система.



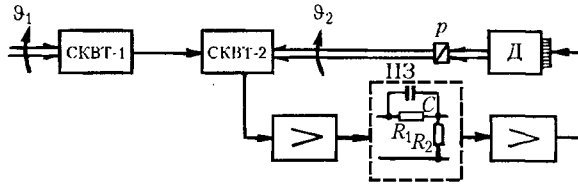


Рис. 10.21

**2. Следящая система.** Схема следящей системы без корректирующих средств изображена на рис. 6.4. В этом случае предельная добротность по скорости из условия устойчивости определяется неравенством, полученным в § 6.2:

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m}$$

Рассмотрим случай демпфирования с поднятием верхних частот. Включим последовательно в канал усиления (рис. 10.21) пассивное дифференцирующее звено ПЗ с передаточной функцией

$$W_{\text{пз}}(p) = G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} = G_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + G_0 T_1 p} \quad (T_1 > T_2), \quad (10.57)$$

где

$$G_0 = \frac{T_2}{T_1} < 1.$$

Будем считать, что затухание  $G_0$ , вносимое звеном на низких частотах компенсируется соответствующим увеличением коэффициента усиления усилителя. Тогда передаточная функция разомкнутой системы, полученная в § 6.2,

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p)}$$

примет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_y p)(1 + T_m p)} \frac{1 + T_1 p}{1 + G_0 T_1 p}. \quad (10.58)$$

Примем теперь, что в использованном пассивном звене выполнено условие  $T_1 = T_m$ . Тогда вместо (10.58) получим

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_y p)(1 + G_0 T_m p)}. \quad (10.59)$$

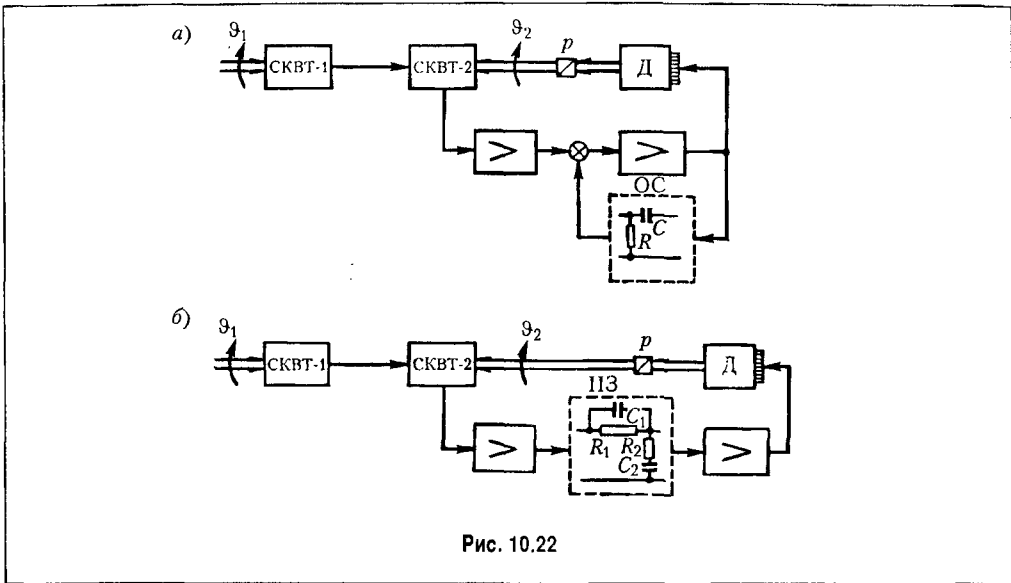


Рис. 10.22

Найдем характеристическое уравнение

$$1 + W(p) = 0.$$

Подстановка выражения для передаточной функции (10.59) приводит к уравнению

$$G_0 T_y T_m p^3 + (T_y + G_0 T_m) p^2 + p + K = 0. \quad (10.60)$$

Условие устойчивости

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{G_0 T_m}. \quad (10.61)$$

Нетрудно видеть, что, уменьшая коэффициент  $G_0$ , можно получить устойчивость при любом значении добротности следящей системы.

Рассмотрим теперь случай демпфирования с подавлением средних частот той же следящей системы. Для этой цели охватим часть усилителя, содержащую инерционность, гибкой отрицательной обратной связью (рис. 10.22, а). Согласно табл. 10.4 это эквивалентно включению последовательного интегро-дифференцирующего звена, обладающего свойством подавлять средние частоты.

Передаточная функция разомкнутой системы может быть получена из передаточной функции исходной системы делением ее на  $1 + W_0(p)$ , где  $W_0(p)$  представляет собой передаточную функцию по петле обратной местной связи

$$W_0(p) = W_c(p) W_{oc}(p) = \frac{k_c}{1 + T_y p} \frac{T p}{1 + T p}. \quad (10.62)$$

Здесь  $k_c$  — коэффициент усиления части усилителя, охваченной обратной связью,  $T = RC$  — постоянная времени дифференцирующего конденсатора в цепи обратной связи.

В результате получим

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_m p)} = \frac{K(1+Tp)}{p(1+T_m p)[(1+T_y p)(1+Tp) + k_c Tp]} \quad (10.63)$$

Положим теперь, что выполняется условие  $T = T_m$ . Это всегда легко сделать выбором параметров  $R$  и  $C$ . Тогда

$$W(p) = \frac{K}{p[1 + (T_y + T_m + k_c T_m)p + T_y T_m p^2]} \quad (10.64)$$

характеристическое уравнение

$$T_y T_m p^3 + (T_y + T_m + k_c T_m)p^2 + p + K = 0, \quad (10.65)$$

условие устойчивости

$$K < \frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_m} + \frac{k_c}{T_y}. \quad (10.66)$$

Из этого неравенства видно, что введение обратной связи позволяет повысить добротность системы  $K$  по сравнению  $k_c = 0$ .

Вместо включения гибкой отрицательной обратной связи аналогичный эффект может быть достигнут введением в прямую цепь эквивалентного пассивного интегро-дифференцирующего звена (рис. 10.22, б).

## Глава 11 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 11.1. Вводные замечания

До сих пор поведение систем автоматического управления исследовалось при определенных, заданных во времени задающих и возмущающих воздействиях (ступенчатая функция, импульсная функция, гармоническое воздействие и т. д.)

Однако во многих случаях характер воздействия бывает таким, что его нельзя считать определенной функцией времени. Оно может принимать с течением времени

самые разнообразные случайные значения. В таких случаях мы можем оценить только вероятность появления той или иной формы воздействия в тот или иной момент времени. Это происходит не потому, что оно неизвестно заранее, а потому, что сама природа реального задающего или возмущающего воздействия такова, что величина его в каждый момент времени и процесс его изменения с течением времени зависят от множества разнообразных величин, которые случайным образом могут комбинироваться друг с другом, появляться одновременно или с любым сдвигом во времени и т. д.

Возьмем, например, систему автоматической стабилизации напряжения электрического генератора. Возмущающее воздействие здесь является результатом изменения нагрузки в сети, зависящей от включения, выключения и изменения режима работы множества потребителей электрической энергии.

Другой пример — автопилот. На него действуют обычно возмущающие воздействия случайного характера: порывы ветра и изменения других атмосферных факторов, изменение тяги, изменения напряжения питания усилителей и рулевых машинок и т. д.

Третий пример — следящие системы, на вход которых попадают вместе с полезным сигналом помехи. Например, в радиолокационной системе сопровождения отраженный от цели сигнал содержит в себе помехи в виде многочисленных флуктуации, происходящих от вибраций и поворотов цели, замирания сигнала и т. п.

Аналогичные помехи случайной природы имеют место в других автоматических устройствах.

В следящих системах не только возмущающие воздействия и помехи являются случайными, но и сам полезный сигнал, который должен воспроизводиться (задающее воздействие), как правило, носит случайный характер.

Прежде чем рассматривать поведение автоматических систем при случайных воздействиях, напомним некоторые сведения о случайных величинах, случайных процессах и об их вероятностных характеристиках.

К категории *случайных событий* можно отнести такие, точное предсказание протекания которых в каждом отдельном случае оказывается невозможным.

Так, например, если бросать монету, то выпадение герба или цифры будет случайным событием. Если повторить этот эксперимент  $N$  раз, то можно зафиксировать определенное число выпадений герба  $m$  и число выпадений цифры  $N - m$ . Относительная величина  $m/N$  называется частотой события выпадения герба, а величина

$\frac{N - m}{N}$  — частотой события выпадения цифры. Если устремить число экспериментов  $N \rightarrow \infty$ , то частоты событий будут стремиться к некоторому пределу

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} = P, \quad (11.1)$$

называемому *вероятностью* данного события. В рассмотренном случае очевидно, что обе вероятности выпадения герба и цифры одинаковы и равны 0,5.

Вероятность каждого события лежит в интервале  $0 \leq P \leq 1$ .

Если событие является невозможным, вероятность его равна нулю; если событие является достоверным, его вероятность равна единице.

В примере с бросанием монеты рассматривалась дискретная случайная величина, которая могла принимать два фиксированных значения -- выпадение орла или решки. Существуют случайные величины, которые могут принимать непрерывные значения. Так, например, если рассмотреть стрельбу из орудия (рис. 11.1), то расстояние  $L$  от орудия до места падения снаряда будет случайной величиной, которая на определенном отрезке может принимать все возможные значения. В этом случае можно говорить о вероятности нахождения случайной величины  $L$  в некотором интервале от  $L_1$  до  $L_2$ .

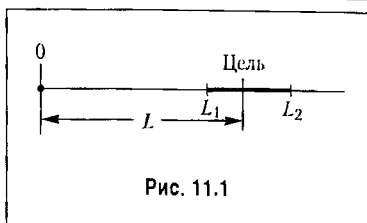


Рис. 11.1

**Вероятностные характеристики дискретных случайных величин.** Чтобы полностью знать дискретную случайную величину, надо иметь следующие данные:

- все возможные значения, которые она может принимать при данных условиях задачи или опыта;
- вероятность появления каждого из этих значений.

Так, например, если дискретная случайная величина может принимать конечное число значений  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  и вероятность каждого значения будет соответственно  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ , то можно представить так называемый закон распределения случайной величины в виде таблицы 11.1.

Таблица 11.1

Значение случайной величины	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
Вероятность	$P_1$	$P_2$	$P_3$	...	$P_n$

При этом должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (11.2)$$

Пусть, например, производится опыт бросания игральной кости. Очевидно, что при каждом бросании число выпавших очков, которое представляет собой случайную величину, может принимать одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если кость совершенно симметрична, то вероятность выпадения каждой из этих цифр является одинаковой. Так как число различных значений, которое может принимать случайная величина, равно шести, то из (11.2) имеем

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6.$$

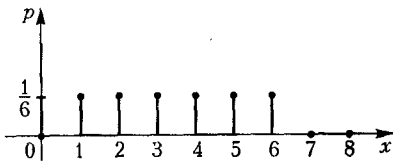


Рис. 11.2

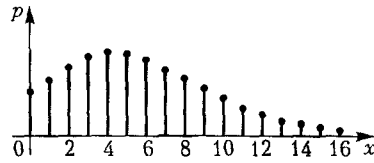


Рис. 11.3

Графически этот закон *распределения* изображен на рис. 11.2. Он представляет собой равновероятное распределение в некотором интервале (в рассматриваемом случае от 1 до 6).

В некоторых случаях закон распределения случайной величины может задаваться в аналитической форме.

Примером аналитического задания закона распределения дискретной случайной величины является часто используемый закон Пуассона. Он применим к дискретным случайным величинам, которые теоретически могут принимать все положительные значения от 0 до  $\infty$ . Примерами таких величин могут служить число пассажиров вагона трамвая, число вызовов на телефонной станции в течение какого-либо определенного отрезка времени и т. п. Этот закон для целых значений числа  $x$  записывается следующим образом:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \tag{11.3}$$

где  $P(x)$  — вероятность появления значения  $x$ ;  $\lambda$  представляет собой среднее значение данной дискретной величины, полученное по результатам большого числа опытов.

Графически этот закон имеет вид, изображенный на рис. 11.3, причем место максимума зависит от величины  $\lambda$ .

В качестве одного из примеров рассмотрим функцию  $y(t)$ , которая может принимать одно из значений  $+a$  или  $-a$  (рис. 11.4).

Предположим, что среднее число перемен знака в единицу времени этой функции равно  $\mu$  и что вероятность перемены знака на интервале  $(t, t + \Delta t)$  не зависит от того, что происходит в остальные моменты времени. Тогда вероятность перемены знака на интервале  $\Delta t$  составит  $\mu\Delta t \ll 1$ . Вероятность того, что на интервале  $\Delta t$  не произойдет перемены знака, будет  $(1 - \mu\Delta t)$ .

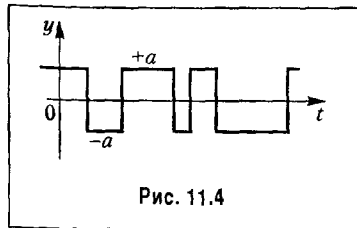


Рис. 11.4

Если взять два интервала времени  $\Delta t$ , то вероятность отсутствия перемены знака на двух интервалах будет равна произведению вероятностей и составит  $(1 - \mu\Delta t)^2$ . Для трех интервалов  $\Delta t$  она составит  $(1 - \mu\Delta t)^3$  и т. д.

Возьмем теперь конечный интервал времени  $T$ , который можно представить в виде  $T = n\Delta t$ . Тогда веро-

ятность отсутствия перемены знака на этом интервале можно найти из выражения

$$P(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \mu \Delta t)^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \mu \Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} = e^{-\mu T}.$$

Аналогичным образом можно показать, что вероятность одной перемены знака на интервале  $T$  будет  $P(1) = \mu T e^{-\mu T}$ , вероятность двух перемен знака  $P(2) = \frac{(\mu T)^2}{2!} e^{-\mu T}$  и т. д. Следовательно, вероятность  $x$  перемен знака на интервале времени  $T$  будет определяться выражением

$$P(x) = \frac{(\mu T)^x}{x!} e^{-\mu T}, \quad (11.4)$$

которое совпадает с формулой (11.3), если положить в ней  $\lambda = \mu T$ , где  $\mu T$  — среднее число перемен знака на интервале времени  $T$ , которое будет наблюдаться при многократном повторении наблюдения.

Хотя закон распределения полностью определяет случайную величину, для практики нужны некоторые более простые осредненные характеристики случайной величины, выражающиеся в виде обыкновенных неслучайных чисел.

Одной из таких характеристик является *среднее значение*, или *математическое ожидание*, случайной величины. Оно определяется из выражения

$$\tilde{x} = M[x] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i. \quad (11.5)$$

Так, например, для случая бросания игральной кости

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i = \left( 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Вообще для равновероятного закона распределения (11.5) превращается в формулу

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, среднее значение, подсчитанное по формуле (11.5), дает

$$\tilde{x} = \lambda.$$

Основные свойства среднего значения случайной величины следующие.

1. Для любых случайных величин среднее значение их суммы равно сумме средних значений этих величин:

$$\overbrace{x + y + z + \dots}^{\dots} = \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} + \dots$$

2. Среднее значение произведения случайных величин, независимых друг от друга, равно произведению средних значений этих величин:

$$\widetilde{xyz\dots} = \tilde{x} \cdot \tilde{y} \cdot \tilde{z}\dots$$

Последняя формула не распространяется на общий случай любых случайных величин.

В виде обобщения понятия среднего значения (11.5) отметим, что выражение

$$\widetilde{x^m} = M[x^m] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^m P_i. \quad (11.6)$$

называется *моментом*  $m$ -го порядка случайной величины  $x$ . В частности, момент нулевого порядка выражает свойство (11.2), и он всегда равен единице:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 P_i = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1.$$

Момент первого порядка есть среднее значение (математическое ожидание) случайной величины (11.5). Момент второго порядка

$$\widetilde{x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P_i$$

есть *средний квадрат* случайной величины.

Часто используется так называемое *среднеквадратичное* значение случайной величины, представляющее собой корень квадратный из среднего квадрата случайной величины:

$$x_{\text{ск}} = \sqrt{\widetilde{x^2}}.$$

Иногда рассматривается *центрированное* значение случайной величины  $x_0 = x - \tilde{x}$ , где  $\tilde{x}$  — среднее значение. Тогда аналогично формуле (11.6) можно ввести понятие *центрального момента*  $m$ -го порядка

$$M[(x - \tilde{x})^m] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \tilde{x})^m P_i. \quad (11.7)$$

Из формулы (11.7) следует, что центральный момент первого порядка всегда равен нулю.

Обратимся теперь к характеристикам рассеяния дискретной случайной величины.

Если  $x$  — случайная величина, а  $\tilde{x}$  — среднее значение этой величины, то величина  $x - \tilde{x}$  есть отклонение случайной величины от ее среднего значения. Это отклонение является случайной величиной, как и сама величина  $x$ .



Средним отклонением  $\Delta$  называется среднее значение (математическое ожидание) абсолютной величины отклонения, т. е.

$$\Delta = M[|x - \bar{x}|] = \overline{|x - \bar{x}|} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - \bar{x}| P_i. \quad (11.8)$$

Заметим, что без знака абсолютного значения было бы

$$\overline{x - \bar{x}} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Для рассмотренного выше примера бросания игральной кости

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=1}^6 |x_i - \bar{x}| P_i = \frac{1}{6} [|6 - 3,5| + |5 - 3,5| + |4 - 3,5| + |3 - 3,5| + |2 - 3,5| + |1 - 3,5|] = \\ &= \frac{1}{6} (2,5 + 1,5 + 0,5 + 0,5 + 1,5 + 2,5) = 1,5. \end{aligned}$$

Среднее отклонение случайной величины является уже не случайной величиной, а обычным числом.

*Дисперсией* называется средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения. Она совпадает с центральным моментом второго порядка:

$$D = M[(x - \bar{x})^2] = \overline{(x - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2 P_i. \quad (11.9)$$

Дисперсия может быть легко вычислена на основании свойства среднего значения:

$$D = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{(x^2 - 2x\bar{x} + (\bar{x})^2)} = \widetilde{x^2} - 2\widetilde{x\bar{x}} + (\bar{x})^2 = \widetilde{x^2} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2 = \widetilde{x^2} - (\bar{x})^2,$$

т. е. она равна разности среднего квадрата и квадрата среднего значения случайной величины. Так как всегда выполняется неравенство  $\widetilde{x^2} \geq (\bar{x})^2$ , то дисперсия может быть только положительным числом:  $D \geq 0$ .

Корень квадратный из дисперсии называется среднеквадратичным отклонением случайной величины от среднего значения:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\widetilde{x^2} - (\bar{x})^2}.$$

Для рассмотренного выше примера бросания игральной кости

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 P_i = \frac{1}{6} [(6 - 3,5)^2 + (5 - 3,5)^2 + (4 - 3,5)^2 + \\ &+ (3 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + (1 - 3,5)^2] = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,7.$$

Укажем простейшие свойства среднеквадратичных отклонений.

1. При сложении независимых случайных величин

$$u = x + y + z + \dots$$

дисперсии складываются:

$$D_u = D_x + D_y + D_z + \dots$$

Поэтому среднеквадратичное отклонение суммы независимых случайных величин

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \dots}$$

Эта формула часто применяется в измерительной технике и в автоматике для вычисления среднеквадратичных ошибок.

2. Пусть имеется  $n$  случайных величин

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$$

с одинаковыми средними значениями  $x$  и с одинаковыми законами распределения. Тогда их среднее арифметическое

$$y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

тоже будет случайной величиной с тем же самым средним значением  $\tilde{y} = \tilde{x}$ , но среднеквадратичное отклонение его будет в  $\sqrt{n}$  раз меньше, чем для каждой из составляющих (в случае независимых случайных величин):

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Например, если производится  $n$  измерений одной и той же физической величины, то их среднее арифметическое хотя тоже является случайной величиной, но всегда надежнее (имеет меньшее среднеквадратичное отклонение), чем каждое измерение в отдельности. Здесь случайные ошибки измерения в известной мере компенсируются. Но надо помнить, что систематические ошибки приборов при этом остаются в полной мере в составе среднего арифметического и никакой массой измерений скомпенсированы быть не могут.

3. Для  $n$  случайных величин, независимых и имеющих одно и то же среднее значение  $\tilde{x}$ , среднее арифметическое будет при достаточно большом  $n$  как угодно мало отличаться от среднего значения  $\tilde{x}$  (с вероятностью, как угодно близкой к единице).

Замечание в скобках означает, что это практически достоверно, но не абсолютно, потому что среднее арифметическое есть все же случайная величина. Таким образом, при большом  $n$  и указанных условиях

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow \bar{x} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Этот закон *больших чисел*, доказанный П. Л. Чебышевым, имеет первостепенное значение для обработки экспериментальных данных и для учетной статистики.

Введем теперь понятие *интегрального закона* распределения. Интегральным законом распределения или функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее некоторого значения  $x$ . Математически эта формулировка записывается в виде

$$F(x) = P(\xi < x),$$

где  $\xi$  — текущее значение случайной величины  $x$ .

Например, если график закона распределения дискретной случайной величины  $x$  имеет вид, показанный на рис. 11.5, а, то график функции распределения  $F(x)$  для нее будет иметь вид, показанный на рис. 11.5, б. Он показывает, что вероятность того, что величина  $x$  получит значение меньше единицы, равна нулю; меньше трех — равна 0,2; меньше четырех — равна 0,6 и т. д. Функция распределения  $F(x)$  всегда возрастает с увеличением  $x$ , причем  $F(x) = 1$  при наибольшем возможном значении  $x_{\max}$  и остается равной единице при всех значениях  $x > x_{\max}$ .

Например, для закона Пуассона (11.3), когда дискретная случайная величина может принимать значения  $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ , функция распределения

$$F(x) = \sum_0^x P(x) \quad (11.10)$$

будет иметь вид бесконечной лестницы (рис. 11.6), но не заходящей выше единицы, т. е.  $F(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин.** Непрерывная случайная величина может принимать все значения в каком-либо заданном ограниченном интервале ( $a \leq x \leq b$ ) или все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Следовательно, функция распределения (интегральный закон распределения) для непрерывной случайной величины будет изображаться непрерывной кривой. На рис. 11.7 показаны оба упомянутых выше варианта. Вероятность

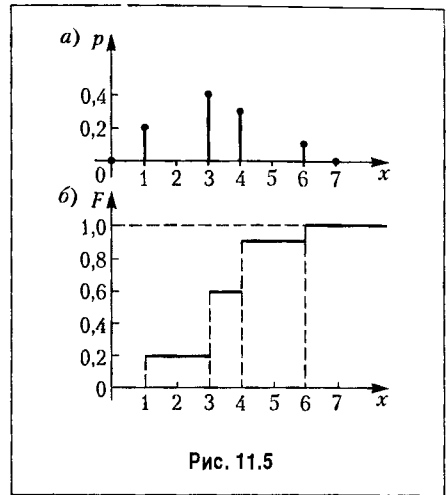


Рис. 11.5

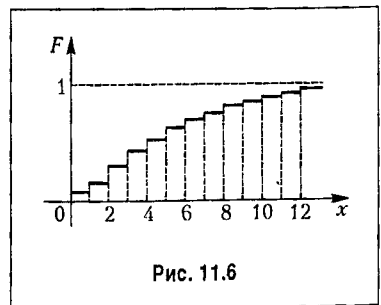


Рис. 11.6

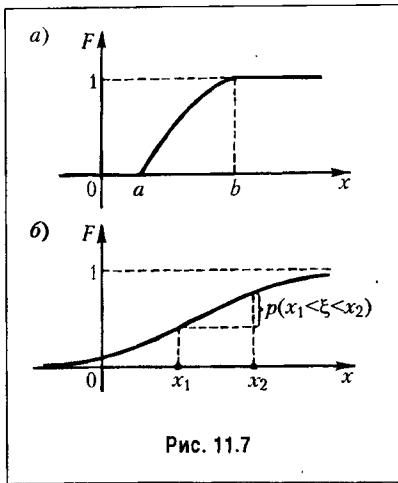


Рис. 11.7

того, что непрерывная случайная величина примет определенное числовое значение  $x$ , бесконечно мала (например, вероятность попадания центра тяжести снаряда в определенную точку цели). Вероятность же того, что непрерывная случайная величина окажется в некотором промежутке  $x_1 < x < x_2$ , будет иметь конечное значение, а именно:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина содержится в промежутке между  $x$  и  $x + dx$ , будет

$$P(x < \xi < x + dx) = dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} dx.$$

Величина

$$\frac{dF(x)}{dx} = w(x) \quad (11.11)$$

называется плотностью вероятности.

Закон распределения для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной задается не в виде значений вероятности, а в виде *плотности вероятности*  $w(x)$ , называемой также *дифференциальным законом распределения*. На рис. 11.8 показаны дифференциальные законы распределения для двух вариантов функции распределения  $F(x)$ , показанных на рис. 11.7. Если бы здесь использовалось то же понятие закона распределения, что и для дискретной случайной величины, то получились бы бесконечно малые ординаты  $P(x)$ .

Выражение  $w(x) dx$  означает вероятность того, что случайная величина содержится между  $x$  и  $x + dx$ :

$$P(x < \xi < x + dx) = w(x) dx.$$

Вероятность того, что случайная величина содержится между значениями  $x_1$  и  $x_2$ , определяется формулой

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx, \quad (11.12)$$

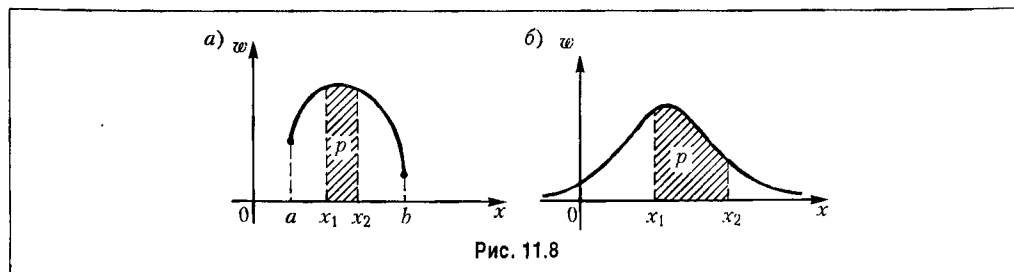


Рис. 11.8

что геометрически выражается заштрихованной площадью на рис. 11.8.

Кроме того, имеет место зависимость

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx. \quad (11.13)$$

Вся площадь под кривой  $w(x)$  равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1, \quad (11.14)$$

так как  $F(\infty) = 1$ .

Формула (11.14) соответствует моменту нулевого порядка. Среднее значение (математическое ожидание) соответствует моменту первого порядка:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xw(x) dx, \quad (11.15)$$

что вытекает из формулы (11.5) как предел суммы.

Моменты высших порядков по аналогии с (11.6) будут

$$\widetilde{x^m} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m w(x) dx. \quad (11.16)$$

Таким же образом можно вычислить центральный момент  $m$ -го порядка

$$M[(x - \bar{x})^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^m w(x) dx. \quad (11.17)$$

Как и в случае дискретных случайных величин, центральный момент первого порядка всегда равен нулю.

Рассеяние непрерывной случайной величины можно оценивать одним из следующих значений, словесные формулировки которых остаются прежними.

Среднее отклонение (мало удобная для вычислений величина)

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}| w(x) dx. \quad (11.18)$$

Дисперсия (наиболее удобная для вычислений величина)

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 w(x) dx = \widetilde{x^2} - (\bar{x})^2. \quad (11.19)$$

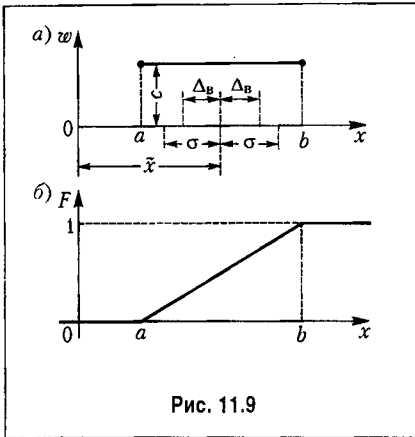


Рис. 11.9

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\tilde{x}^2 - (\bar{x})^2}. \quad (11.20)$$

Средневероятным отклонением  $\Delta_B$  называется такая величина, при которой отклонения  $|x - \bar{x}| < \Delta_B$  и  $|x - \bar{x}| > \Delta_B$  имеют одинаковую вероятность.

Рассмотрим простейшие типовые законы распределения непрерывных случайных величин.

1. *Равномерное распределение* случайной величины на определенном участке характеризуется плотностью вероятности  $w(x)$  и функцией распределения  $F(x)$ , показанными на рис. 11.9.

При этом на основании свойства (11.14) имеем

$$c = \frac{1}{b-a}.$$

Подсчитаем характерные значения. Среднее значение (математическое ожидание)

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x) dx = \int_a^b xc dx = \frac{b+a}{2}.$$

Среднее значение квадрата случайной величины (момент второго порядка)

$$\tilde{x}^2 = \int_a^b x^2 c dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Дисперсия

$$D = \tilde{x}^2 - (\bar{x})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Средневероятное отклонение

$$\Delta_B = \frac{1}{4}(b-a) < \sigma.$$

Максимально возможное отклонение случайной величины от среднего значения в данном случае будет

$$\Delta_{\max} = \frac{b-a}{2}.$$

2. *Нормальный закон распределения* непрерывных случайных величин (закон Гаусса). Этот закон имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\tilde{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (11.21)$$

где  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение, а  $\tilde{x}$  – математическое ожидание случайной величины.

График для этого закона изображен на рис. 11.10. Он имеет типичную «колоколообразную» форму.

Анализ условий возникновения нормального распределения показывает, что оно имеет место во всех тех случаях, когда случайная величина характеризует собой суммарный эффект большого числа независимых причин. Поэтому нормальное распределение весьма часто встречается на практике.

Для этого закона средневероятное отклонение будет

$$\Delta_v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = 0,674\sigma.$$

За максимальное отклонение, которое может иметь место, обычно принимают величину  $\Delta_{\max} = 3\sigma$ , так как вероятность того, что отклонение  $|x - \tilde{x}|$  будет больше  $3\sigma$ , очень мала, а именно:

$$P(|x - \tilde{x}| > 3\sigma) = 0,003.$$

Для удобства расчетов составлены таблицы для единичного нормального закона. Для получения этого закона положим  $\tilde{x} = 0$  и введем новую относительную переменную  $y = \frac{x}{\sigma}$ . Тогда вероятность того, что текущее значение относительной переменной находится в интервале от  $-a$  до  $+a$  или сама переменная находится в интервале от  $-a\sigma$  до  $+a\sigma$ , определится выражением

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-a\sigma}^{+a\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (11.22)$$

Для функции  $\Phi(a)$  составлены подробные таблицы. В качестве иллюстрации приводится краткая табл. 11.2.

Рассмотрим пример пользования таблицей. Пусть имеется некоторая случайная величина  $x$ , для которой математическое ожидание  $\tilde{x} = 10$ , а среднеквадратичное отклонение составляет  $\sigma = 4$ . Определим, какова вероятность того, что случайная величина лежит в интервале  $9,5 < x < 10,5$ . Это означает, что отклонение от математического ожидания должно лежать в интервале  $-0,5 < \Delta < +0,5$ . Для относительных величин это соответствует неравенству

$$-0,125 < \Delta/\sigma < +0,125.$$

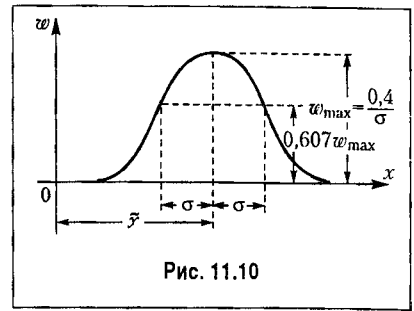


Таблица 11.2. Единичный нормальный закон

$a$	$\Phi(a)$	$a$	$\Phi(a)$	$a$	$\Phi(a)$	$a$	$\Phi(a)$
0,00	0,000	0,25	0,197	0,70	0,516	2,00	0,954
0,05	0,040	0,30	0,236	0,80	0,576	2,50	0,988
0,10	0,080	0,40	0,311	0,90	0,632	3,00	0,997
0,15	0,119	0,50	0,383	1,00	0,683	3,50	0,999
0,20	0,158	0,60	0,451	1,50	0,866	4,00	0,999

Таким образом,  $a = 0,125$ . По табл. 11.2 определяем путем интерполяции вероятность  $\Phi(a) = 0,1$ .

Произведем более сложный расчет. Пусть для той же случайной величины необходимо определить вероятность нахождения ее в интервале  $11 < x < 12$ . Так как кривая нормального распределения является симметричной относительно среднего значения случайной величины, то искомая вероятность может быть найдена как половина разности вероятности нахождения случайной величины в интервале  $-12 < x < 12$  и вероятности нахождения в интервале  $-11 < x < 11$ , т. е.

$$P(11 < x < 12) = \frac{P(-12 < x < 12) - P(-11 < x < 11)}{2}$$

или для отклонений

$$P(11 < x < 12) = \frac{P(-2 < \Delta < 2) - P(-1 < \Delta < 1)}{2}.$$

Перейдя к относительным величинам, получаем в результате искомую вероятность

$$P(11 < x < 12) = \frac{\Phi(0,5) - \Phi(0,25)}{2} = \frac{0,383 - 0,197}{2} = 0,093.$$

**Характеристические функции.** Введем в рассмотрение функцию  $g(j\lambda)$ , связанную с плотностью вероятности  $w(x)$  взаимным преобразованием Фурье:

$$M[e^{j\lambda x}] = g(j\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{j\lambda x} dx, \quad w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(j\lambda) e^{-j\lambda x} d\lambda. \quad (11.23)$$

Эта функция называется *характеристической*. Ее основные свойства следующие. Если случайная величина  $y = ax + b$ , то

$$g_y(j\lambda) = e^{j\lambda b} g_x(j\lambda). \quad (11.24)$$



Если случайная величина  $z = x + y$ , где  $x$  и  $y$  — независимые величины, то

$$g_z(j\lambda) = g_x(j\lambda)g_y(j\lambda). \quad (11.25)$$

Для нормального закона распределения (11.21) характеристическая функция будет

$$\begin{aligned} g(j\lambda) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\lambda x - \frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{e^{j\lambda\bar{x}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\lambda x_0 - \frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right] dx_0 = \\ &= \exp\left[j\lambda\bar{x} - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right]. \end{aligned} \quad (11.26)$$

По характеристической функции могут быть найдены моменты случайной величины. Разлагая  $g(j\lambda)$  и  $M[e^{j\lambda x}]$  в первой формуле (11.23) в ряд Маклорена, имеем

$$g(j\lambda) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} g^{(i)}(0) \lambda^i + \rho_n, \quad (11.27)$$

$$M[e^{j\lambda x}] = \sum_{i=0}^n \frac{(j\lambda)^i}{i!} M[x^i] + M[R_n]. \quad (11.28)$$

Из сравнения (11.27) и (11.28) можно получить формулу для момента  $m$ -го порядка:

$$M[x^m] = j^{-m} g^{(m)}(0). \quad (11.29)$$

Аналогичным образом можно получить формулу для центрального момента  $m$ -го порядка:

$$M[(x - \bar{x})^m] = j^{-m} \left[ \frac{d^m}{d\lambda^m} e^{-j\lambda\bar{x}} g(j\lambda) \right]_{\lambda=0}. \quad (11.30)$$

Формулы (11.29) и (11.30) могут быть использованы для вычисления моментов.

**Векторные случайные величины.** Пусть имеется совокупность случайных величин  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Такая совокупность может быть представлена в виде матрицы-столбца. Если физические размерности всех величин одинаковы, то матрица-столбец может быть отождествлена с вектором. При разных размерностях переход к вектору может быть сделан после нормирования (введения весовых коэффициентов).

Пусть, например, имеются две непрерывных случайные величины  $x_1$  и  $x_2$ . Для них может быть введена двумерная плотность вероятности  $w(x_1, x_2)$ . Если величины  $x_1$  и  $x_2$  независимы, то  $w(x_1, x_2) = w_1(x_1)w_2(x_2)$ .

Вводится понятие смешанного момента  $m$ -го порядка, где  $m = q + s$ ,

$$M[x_1^q x_2^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^q x_2^s w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (11.31)$$

и смешанного центрального момента

$$M[(x_1 - \bar{x}_1)^q (x_2 - \bar{x}_2)^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)^q (x_2 - \bar{x}_2)^s w(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (11.32)$$

Если  $q = s = 1$ , то центральный момент второго порядка имеет особое значение и носит название корреляционного момента:

$$r_{12} = M[(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (11.33)$$

В случае независимости случайных величин  $x_1$  и  $x_2$  можно легко показать, что корреляционный момент  $r_{12} = 0$ .

Иногда употребляется понятие коэффициента корреляции, представляющего собой относительное значение корреляционного момента:

$$\rho_{12} = \frac{r_{12}}{\sqrt{D_1 D_2}} = \frac{r_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (11.34)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  — дисперсии величин  $x_1$  и  $x_2$ .

Для совокупности случайных величин  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в приближенных расчетах часто ограничиваются заданием матрицы-столбца (вектора) математических ожиданий  $\bar{x} = [\bar{x}_i]_{n \times 1}$  и матрицы корреляционных моментов

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}. \quad (11.35)$$

Составляющие корреляционной матрицы показывают степень связи между отдельными случайными величинами, причем  $r_{ji} = r_{ij}$ . На диагонали корреляционной матрицы находятся собственные центральные моменты второго порядка, т. е. дисперсии  $D_i = r_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

## § 11.2. Случайные процессы

Случайная величина  $x$ , изменяющаяся во времени  $t$ , называется *случайным* или *стохастическим* процессом. Случайный процесс не есть определенная кривая  $x(t)$ , а является множеством возможных кривых  $x(t)$ , так же как случайная величина не имеет определенного значения, а является совокупностью (множеством) возможных значений.

Можно еще сказать, что случайный процесс есть такая функция времени, значение которой в каждый момент времени является случайной величиной.

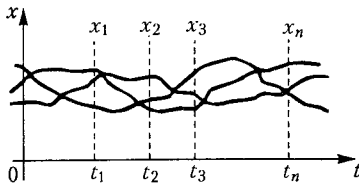


Рис. 11.11

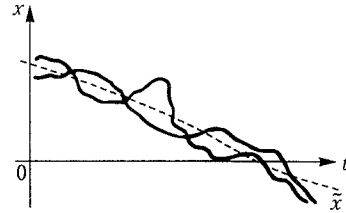


Рис. 11.12

Примерами случайных процессов могут, например, являться: координаты самолета, измеряемые радиолокационной станцией; угол визирования движущейся цели головкой самонаведения; помехи в системе телеуправления; нагрузка электрической сети и т. п.

Итак, в случайном процессе нет определенной зависимости  $x(t)$ . Каждая кривая множества (рис. 11.11) является лишь отдельной реализацией случайного процесса. Никогда нельзя сказать заранее, по какой кривой пойдет процесс.

Однако случайный процесс может быть оценен некоторыми вероятностными характеристиками.

В каждый отдельный момент времени ( $t_1, t_2, t_3, \dots$ ; рис. 11.11) наблюдаются случайные величины  $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ , каждая из которых имеет свой закон распределения. Поскольку это — непрерывная случайная величина, то надо пользоваться понятием плотности вероятности.

Обозначим  $w(x, t)$  закон распределения для всех этих отдельных случайных величин. В общем случае он меняется с течением времени. Для каждого данного  $t$  в отдельности ( $t_1, t_2, t_3, \dots$ ) будет свой закон распределения:

$$w(x_1, t_1), w(x_2, t_2), w(x_3, t_3), \dots,$$

причем по свойству (11.14) для каждого из них

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) dx = 1.$$

Для каждого заданного момента времени можно найти характеристики случайных величин, определенные в § 11.1. В результате будем иметь среднее по множеству (математическое ожидание)

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x, t) dx \quad (11.36)$$

и дисперсию

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 w(x, t) dx = \overline{x^2(t)} - [\bar{x}(t)]^2. \quad (11.37)$$

Среднее значение случайного процесса представляет собой некоторую среднюю кривую (рис. 11.12), около которой группируются все возможные отдельные реали-

зации этого процесса, а дисперсия  $D(t)$  или среднеквадратичное отклонение  $\sigma(t)$  характеризуют рассеяние отдельных возможных реализации процесса около этой средней кривой.

Кроме этих осредненных характеристик  $\bar{x}(t)$  и  $D(t)$ , которые для каждого данного момента времени являются средними по множеству, введем понятие среднего значения случайной величины  $\tilde{x}$  для отдельной реализации случайного процесса  $x(t)$ , которое определяется из выражения

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt. \quad (11.38)$$

Переход к пределу здесь необходим для того, чтобы характеризовать не какой-нибудь отдельный участок кривой, а всю возможную кривую  $x(t)$  в целом.

Для того чтобы знать связь между возможными значениями случайной функции  $x(t)$  в последующие моменты времени со значениями в предыдущие моменты, вводится понятие двумерной плотности вероятности

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (w_2 > 0),$$

смысл которого можно пояснить следующим образом. Вероятность того, что в момент времени  $t_1$  величина  $x$  находится в интервале  $(x_1, x_1 + dx_1)$ , а в момент времени  $t_2$  — в интервале  $(x_2, x_2 + dx_2)$ , будет  $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$ . Это есть вероятность того, что кривая  $x(t)$  пройдет вблизи двух заданных точек  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$ . Вводится также и  $n$ -мерная плотность вероятности

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n).$$

Если ее умножить на  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , то это будет вероятность того, что кривая пройдет вблизи заданных  $n$  точек.

Случайный процесс полностью определяется видом функций  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  и связью между ними.

Простейшим типом случайного процесса является чисто случайный процесс. В таком процессе все значения случайной величины в отдельные моменты времени ( $x_1$  в момент  $t_1$ ;  $x_2$  в момент  $t_2$  и т. д.) не зависят друг от друга. Тогда появления значений  $(x_1, t_1)$ ,  $(x_2, t_2)$ ,  $(x_3, t_3)$  и т. д. будут независимыми случайными событиями, для которых вероятность их совместного наступления равна, как известно, произведению вероятностей наступления каждого из них в отдельности. Следовательно, для чисто случайного процесса

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, t_1) w(x_2, t_2) \quad (11.39)$$

и вообще

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w(x_1, t_1) w(x_2, t_2); \dots; w(x_n, t_n) \quad (11.40)$$

Это — самые простые соотношения в теории случайных процессов. Они могут применяться для характеристики некоторых видов помех (чисто случайные хаотические помехи).

Для характеристики полезных входных сигналов систем управления соотношения (11.39) и (11.40) практически не могут применяться, так как для этих сигналов ход процесса в последующие моменты времени в какой-то степени зависит от того, что было в предыдущие моменты времени.

Так, например, если речь идет о слежении за самолетом, то он не может как угодно быстро менять свое положение и скорость. Поэтому если он в момент времени  $t_1$  занял положение  $x_1$ , то этим самым его возможное положение  $x_2$  в следующий момент  $t_2$  ограничено, т. е. события  $(x_2, t_2)$  и  $(x_1, t_1)$  не будут независимыми. Чем более инерционен изучаемый объект, тем больше эта взаимозависимость, или корреляция. В таких случаях вместо формулы (11.39) необходимо записать

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1, t_1) w_{2,1}(x_2, t_2), \quad (11.41)$$

где  $w_{2,1}(x_2, t_2)dx$  — условная вероятность того, что случайный процесс пройдет вблизи точки  $(x_2, t_2)$ , если он уже прошел через точку  $(x_1, t_1)$ .

Следовательно, зная плотности вероятности  $w(x_1, t_1)$  и  $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ , можно найти также и условную плотность вероятности

$$w_{2,1}(x_2, t_2) = \frac{w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{w(x_1, t_1)}. \quad (11.42)$$

Кроме того, имеет место следующая связь между основными плотностями вероятности:

$$w(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2, \quad (11.43)$$

так как  $w(x_1, t_1)$  есть плотность вероятности случайной величины  $(x_1, t_1)$  безотносительно к тому, какое потом будет значение  $(x_2, t_2)$ , т. е. допускается  $-\infty < x_2 < +\infty$ . Аналогичным образом любая плотность вероятности низшего порядка всегда может быть получена из высшей, т. е. высшие плотности вероятностей содержат наибольшее количество информации о случайном процессе (о взаимосвязях между возможными значениями случайной величины  $x$  в различные моменты времени).

Написанные соотношения справедливы для случайных процессов любых типов. В зависимости же от того, до какого порядка принимаются во внимание плотности вероятности, а также от разных дополнительных гипотез о формах связи между  $w_1, w_2, \dots, w_n$  рассматриваются разные типы случайных процессов в отличие от чисто случайных.

Другая классификация всех случайных процессов состоит в разделении их на стационарные и нестационарные. Теория стационарных случайных процессов наиболее разработана и чаще всего применяется на практике.

### § 11.3. Стационарные случайные процессы

*Стационарным случайным процессом* называется такой процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. Все плотности вероятностей  $w_1, w_2,$

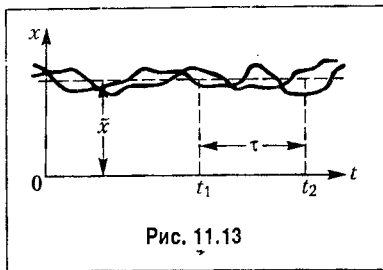


Рис. 11.13

...,  $\omega_n$  не меняются при любом сдвиге рассматриваемого участка процесса во времени, т. е. при сохранении постоянной разности.

Можно сказать, что стационарный случайный процесс в какой-то мере аналогичен обычным стационарным или установившимся процессам в автоматических системах. Например, при рассмотрении обычных установившихся периодических колебаний ничего не изменится, если перенести начало отсчета на какую-нибудь величину. При этом сохраняют свои значения

такие характеристики, как частота, амплитуда, среднеквадратичное значение и т. п.

В стационарном случайном процессе закон распределения один и тот же для каждого момента времени, т. е. плотность вероятности не зависит от времени:  $w(x, t) = w(x)$ .

Отсюда получаем  $\bar{x} = \text{const}$  и  $\sigma = \text{const}$  вдоль всего случайного процесса. Следовательно, в стационарном случайном процессе средняя линия, в отличие от общего случая (см. рис. 11.12), будет прямой  $\bar{x} = \text{const}$  (рис. 11.13), подобно постоянному смещению средней линии обычных периодических колебаний. Рассеяние значений переменной  $x$  в стационарном случайном процессе, определяемое  $\sigma = \text{const}$ , также будет все время одинаковым, подобно постоянному значению среднеквадратичного отклонения обычных установившихся колебаний от средней линии.

Аналогичным образом и двумерная плотность вероятности также будет одна и та же для одного и того же промежутка времени  $\tau = t_2 - t_1$  между любыми  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 11.13), т. е.

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w_2(x_1, x_2, \tau), \quad (11.44)$$

и также для  $n$ -мерной плотности вероятности.

Задание всех этих функций распределения плотности определяет случайный процесс. Однако более удобно иметь дело с некоторыми осредненными и характеристиками процесса.

Прежде чем перейти к ним, отметим два важных для практики свойства.

1. Ограничиваясь только стационарными случайными процессами, можно будет определить только установившиеся (стационарные) динамические ошибки автоматических систем при случайных воздействиях. Такой прием применялся и ранее при рассмотрении регулярных воздействий, когда определялись динамические свойства систем по величине динамических ошибок в установившемся периодическом режиме.

2. Стационарные случайные процессы обладают замечательным свойством, которое известно под названием эргодической гипотезы.

Для стационарного случайного процесса с вероятностью, равной единице (т. е. практически достоверно), всякое среднее по множеству равно соответствующему среднему по времени, в частности  $\bar{x} = \overline{x}$ ,  $\overline{x^2} = \overline{x^2}$  и т. д.

В самом деле, поскольку вероятностные характеристики стационарного случайного процесса с течением времени не меняются (например,  $\bar{x} = \text{const}$ ), то длительное наблюдение случайного процесса на одном объекте (среднее по времени) дает в среднем такую же картину, как и большое число наблюдений, сделанное в один и тот же момент времени на большом числе одинаковых объектов (среднее по множеству).

Для многих случаев существует математическое доказательство этого свойства. Тогда оно сводится к эргодической теореме.

Итак, среднее значение (математическое ожидание) для стационарного процесса будет

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x) dx = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt. \quad (11.45)$$

Аналогичным образом могут быть записаны моменты более высоких порядков — дисперсия, среднеквадратичное отклонение и т. п.

Эргодическая гипотеза позволяет сильно упрощать все расчеты и эксперименты. Она позволяет для определения  $\bar{x}$ ,  $D$ ,  $\sigma$  и т. п. пользоваться одной кривой  $x(t)$ , полученной при испытании одной системы в течение длительного времени вместо параллельного испытания многих однотипных систем в один и тот же момент времени.

Таким образом, важное свойство стационарного случайного процесса состоит в том, что отдельная его реализация на бесконечном промежутке времени полностью определяет собой весь случайный процесс со всеми бесчисленными возможными его реализациями. Этим свойством не обладает никакой другой тип случайного процесса.

## § 11.4. Корреляционная функция

Начальный корреляционный момент двух значений случайной функции  $x(t)$  и  $x(t_1)$ , взятых в моменты времени  $t$  и  $t_1$  носит название *корреляционной (автокорреляционной) функции*. Она может быть найдена аналогично (11.31) из выражения

$$R(t, t_1) = M[x(t)x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t_1)w_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1, \quad (11.46)$$

где вместо параллельного испытания многих однотипных систем в один и тот же момент времени  $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$  — двумерная плотность вероятности.

Иногда под корреляционной функцией понимают центральный корреляционный момент  $x(t)$  и  $x(t_1)$ , т. е.

$$R^0(t, t_1) = M[\{x(t) - \bar{x}(t)\}\{x(t_1) - \bar{x}(t_1)\}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \bar{x}(t)][x(t_1) - \bar{x}(t_1)] w_2(x, t; x_1, t_1) dx dx_1. \quad (11.47)$$

В этом случае корреляционная функция (11.46) может быть представлена в виде суммы

$$R(t, t_1) = \bar{x}(t)\bar{x}(t_1) + R^0(t, t_1). \quad (11.48)$$

Корреляционная функция является весьма универсальной характеристикой для случайного процесса. Она определяет зависимость случайной величины в последующий момент времени  $x(t_1)$  от предшествующего значения  $x(t)$  в момент времени  $t$ . Это есть мера связи между ними.

Рассмотрим основные свойства корреляционных функций.

1. Из определения корреляционной функции (11.46) и (11.47) следует свойство симметрии:  $R(t, t_1) = R(t_1, t)$  и  $R^0(t, t_1) = R^0(t_1, t)$ .

2. При  $t = t_1$  корреляционная функция  $R(t, t_1)$  дает средний квадрат случайной величины, а  $R^0(t, t_1)$  — дисперсию:

$$R(t, t) = M[x^2(t)] = \widetilde{x^2}(t), \quad R^0(t, t) = M[\{x(t) - \bar{x}(t)\}^2] = D(t).$$

3. Можно показать, что прибавление к случайным величинам произвольных неслучайных величин не меняет их корреляционных моментов и дисперсии. Поэтому корреляционная функция  $R^0(t, t_1)$  не изменится, если к случайной функции добавить произвольную неслучайную функцию. Это свойство не относится к функции  $R(t, t_1)$ , так как добавление неслучайных величин к случайным изменяет начальные моменты. В этом случае корреляционная функция будет равна сумме корреляционных функций случайной и неслучайной функций.

Иногда в рассмотрение вводится *нормированная* корреляционная функция

$$\rho(t, t_1) = \frac{R^0(t, t_1)}{\sqrt{D(t)D(t_1)}}. \quad (11.49)$$

Аналогично корреляционной функции можно ввести понятие *взаимной корреляционной функции* для двух случайных величин  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$R_{xy}(t, t_1) = M[x(t)y(t_1)], \quad R_{xy}^0(t, t_1) = M[\{x(t) - \bar{x}(t)\}\{y(t_1) - \bar{y}(t_1)\}]. \quad (11.50)$$

В случае тождественного равенства нулю взаимной корреляционной функции случайные функции  $x(t)$  и  $y(t)$  называют некоррелированными.

Если взаимная корреляционная функция отлична от нуля, то  $x(t)$  и  $y(t)$  носят название коррелированных случайных функций.

В случае стационарности процесса корреляционные функции  $R(t, t_1)$  и  $R^0(t, t_1)$  не будут зависеть от текущего значения времени  $t$  и будут определяться только временным сдвигом  $\tau = t_1 - t$ .

С учетом эргодичности стационарного процесса корреляционной функцией можно назвать среднее по времени от произведения  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$  или  $x(t) - \bar{x}$  и  $x(t + \tau) - \bar{x}$

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt, \\ R^0(\tau) &= \overline{[x(t) - \bar{x}][x(t+\tau) - \bar{x}]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}][x(t+\tau) - \bar{x}]dt. \end{aligned} \right\} \quad (11.51)$$

Для стационарного процесса корреляционная функция определяет зависимость, случайной величины  $x$  в последующий момент времени  $t + \tau$  от предшествующего значения в момент  $t$ .



Приведем основные свойства корреляционной функции стационарного процесса применительно к величине  $R(\tau)$ .

1. Корреляционная функция является четной функцией, т. е.  $R(-\tau) = R(\tau)$ . Это вытекает из самого определения корреляционной функции.

2. При  $\tau = 0$  корреляционная функция дает средний квадрат случайной величины:

$$R(0) = \overline{x(t)x(t)} = \overline{x^2}.$$

3. При  $\tau \rightarrow \infty$  корреляционная функция дает квадрат среднего значения случайной величины. Докажем это. На основании эргодической гипотезы

$$R(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2.$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  величины  $x_1$  и  $x_2$  можно считать независимыми. Отсюда, принимая во внимание формулу (11.39) для независимых случайных величин, получим

$$R(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 w(x_2) dx_2 = (\bar{x})^2 = (\bar{x})^2.$$

4. Значение корреляционной функции при  $\tau = 0$  является ее наибольшим значением, т. е. имеет место неравенство  $R(0) \geq R(\tau)$ . Докажем это. Рассмотрим очевидное неравенство

$$[x(t) - x(t+\tau)]^2 \geq 0.$$

Сделаем преобразование

$$x^2(t) + x^2(t+\tau) \geq 2x(t)x(t+\tau).$$

Возьмем теперь среднее по времени от правой и левой частей. В результате получим:

$$\overline{x^2(t) + x^2(t+\tau)} = 2\overline{x^2} = 2R(0), \quad \overline{2x(t)x(t+\tau)} = 2R(\tau),$$

откуда и вытекает следующее неравенство:  $R(0) \geq R(\tau)$ .

5. Значение корреляционной функции чаще всего будет тем меньше, чем больше промежутки времени  $\tau$ , так как связь между далеко отстоящими друг от друга значениями  $x$  будет обычно слабее.

6. Чем менее инерционен (более подвижен) объект наблюдения, тем быстрее убывает  $R(\tau)$  с увеличением  $\tau$ . Например, у самолета, как подвижной цели, связь между последующими и предыдущими положениями (при заданном  $\tau$ ) будет тем меньше, чем он легче и маневреннее. Отсюда следует, что чем быстрее убывает корреляционная функция, тем более высокие частоты будут присутствовать в случайном процессе.

На рис. 11.14 в качестве примера приведены две корреляционные функции и две соответствующие им реализации процесса при одинаковых среднеквадратичных значениях случайной величины. Второй процесс по сравнению с первым имеет более тонкую структуру, т. е. в нем присутствуют более высокие частоты.

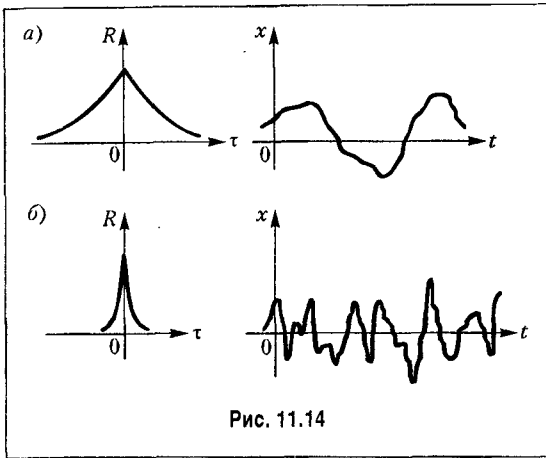


Рис. 11.14

Таким образом, при известной корреляционной функции легко определяются следующие вероятностные характеристики:

а) среднее значение (момент первого порядка)

$$\tilde{x} = \bar{x} = \sqrt{R(\infty)};$$

б) среднеквадратичное значение (момент второго порядка)

$$\tilde{x}^2 = \overline{x^2} = R(0);$$

в) дисперсия

$$D = R(0) - R(\infty);$$

г) среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{R(0) - R(\infty)}.$$

Корреляционную функцию можно найти на основании экспериментально снятой кривой случайного процесса при наличии достаточно длительной записи (рис. 11.15). Обработка имеющейся осциллограммы производится следующим образом. Весь интервал записи осциллограммы  $T$  делится на  $N$  равных частей, длительность которых составляет

$$\Delta t = T/N.$$

Затем для различных значений  $\tau = m\Delta t$  находят средние значения произведений ординат:

$$R(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x_n x_{n+m}.$$

По этим значениям строится график корреляционной функции в зависимости от интервала  $m$  или времени  $\tau = m\Delta t$ .

Корреляционную функцию можно найти по результатам эксперимента также при помощи специальных приборов — корреляторов, которые автоматически вычисляют среднее произведение двух ординат осциллограммы, отстоящих друг от друга на расстояние  $\tau$ .

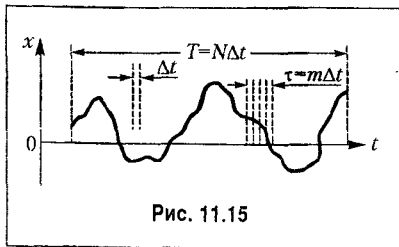


Рис. 11.15

Если найденная корреляционная функция  $R(\tau)$  содержит постоянную составляющую  $\bar{x} = \sqrt{R(\infty)}$ , то, выделив ее, можно перейти к корреляционной функции  $R^0(\tau)$  в соответствии с (11.48), т. е.  $R^0(\tau) = R(\tau) - (\bar{x})^2$ .

Можно также ввести в рассмотрение нормированную корреляционную функцию

$$\rho(\tau) = \frac{R^0(\tau)}{D} = \frac{R(\tau) - R(\infty)}{R(0) - R(\infty)}, \quad (11.52)$$

которая удобна тем, что всегда  $\rho(0) = 1$ .

Корреляционная функция  $R^0(\tau)$  для неслучайных (регулярных) функций времени тождественно равна нулю. Однако корреляционная функция  $R(\tau)$  может вычисляться и для неслучайных функций времени. Рассмотрим несколько примеров.

1. Для постоянной величины  $x(t) = A_0$  (например, для постоянного тока) корреляционная функция

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A_0 A_0 dt = A_0^2.$$

2. Для гармонической функции  $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1)$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) A_1 \sin(\omega_1 t + \omega_1 \tau + \psi_1) dt = \frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 \tau.$$

Появление в корреляционной функции члена вида  $\frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 \tau$  указывает на наличие в случайном процессе скрытой периодичности, которая может не обнаруживаться при первом взгляде на отдельные записи реализации случайного процесса.

3. Периодическая кривая, разлагаемая в ряд Фурье:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

имеет на основании изложенного выше корреляционную функцию вида

$$R(\tau) = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \cos \omega_k \tau.$$

Типичная корреляционная функция для стационарных случайных процессов при  $\bar{x} = 0$ , а следовательно  $R(\tau) = R^0(\tau)$ , и при отсутствии скрытых периодичностей имеет вид

$$R(\tau) = R(0) e^{-\alpha|\tau|} = D e^{-\alpha|\tau|}.$$

Иногда встречается корреляционная функция вида

$$R(\tau) = R(0) e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau.$$

Эти выражения часто используются для аппроксимации корреляционных функций, полученных в результате обработки экспериментальных данных.

Для стационарных случайных процессов используется также понятие взаимной корреляционной функции, вводимой при рассмотрении каких-либо двух процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt. \quad (11.53)$$

Для взаимной корреляционной функции существует следующее соотношение:

$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau).$$

Кроме того, можно показать, что

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)}\sqrt{R_y(0)}.$$

Взаимная корреляционная функция характеризует взаимную связь двух случайных процессов между собой в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на промежуток времени  $\tau$ . Значение  $R_{xy}(0)$  характеризует эту связь в один и тот же момент времени. Примером таких двух взаимосвязанных случайных процессов могут служить две координаты пространственного положения подвижной цели.

Для не связанных друг с другом случайных процессов для всех  $\tau$  справедливо равенство  $R_{xy}(\tau) = 0$ . В связи с этим говорят, что процессы коррелированы или не коррелированы. Это означает наличие или отсутствие между ними статистической связи.

Аналогично предыдущему можно также ввести понятие нормированной взаимной корреляционной функции.

## § 11.5. Спектральная плотность стационарных процессов

Рассмотрим так называемую энергетическую форму интеграла Фурье. В главе 5 были приведены формулы (7.15) и (7.16), дающие переход от функции времени к изображению Фурье и обратно. Если рассматривается некоторая случайная функция времени  $x(t)$ , то для нее эти формулы могут быть записаны в виде

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (11.54)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.55)$$

Возьмем квадрат модуля изображения Фурье  $|F(j\omega)|^2$  и проинтегрируем по всем частотам от  $-\infty$  до  $+\infty$  с делением результата на  $2\pi$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)F(-j\omega)d\omega. \quad (11.56)$$

В последнем выражении квадрат модуля заменен произведением сопряженных комплексов  $F(j\omega)$  и  $F(-j\omega)$ . Изображение Фурье  $F(j\omega)$  заменим выражением (11.54):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-j\omega) d\omega \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right].$$

В последней формуле изменим порядок интегрирования:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right]. \quad (11.57)$$

Величина, находящаяся в квадратных скобках (11.57), как нетрудно видеть, является исходной функцией времени (11.55). Поэтому в результате получается так называемая формула Релея (теорема Парсеваля), которая и соответствует энергетической форме интеграла Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2 dt. \quad (11.58)$$

Подставляя  $\omega = 2\pi f$ , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j2\pi f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2 dt. \quad (11.59)$$

Правая часть (11.58) и (11.59) представляет собой величину, пропорциональную энергии рассматриваемого процесса. Так, например, если рассматривается ток, протекающий по некоторому резистору с сопротивлением  $R$ , то энергия, выделяющаяся в этом резисторе за время  $t$ , будет

$$A = \int_0^t Ri^2 dt.$$

Из (11.58) и (11.59) вытекает, что для нахождения энергии рассматриваемого процесса за бесконечный интервал наблюдения с равным основанием можно интегрировать квадрат функции времени по всему времени от  $-\infty$  до  $+\infty$  или интегрировать квадрат модуля изображения Фурье по всем частотам от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Формулы (11.58) и (11.59) и выражают энергетическую форму интеграла Фурье.

Однако эти формулы неудобны тем, что для большинства процессов энергия за бесконечный интервал времени стремится также к бесконечности. Поэтому удобнее иметь дело не с энергией, а со средней мощностью процесса, которая будет получена, если энергию поделить на интервал наблюдения. Тогда формулу (11.58) можно представить в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t)]^2 dt. \quad (11.60)$$

Правая часть (11.60) представляет собой средний квадрат рассматриваемой величины  $x(t)$ .

Вводя обозначение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 = S(\omega), \quad (11.61)$$

можно переписать формулу (11.60) в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \overline{x^2} \quad (11.62)$$

или в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(2\pi f) df = \overline{x^2}. \quad (11.63)$$

Величина  $S(\omega)$  или  $S(2\pi f)$  носит название *спектральной плотности*. Важным свойством спектральной плотности является то, что интегрирование ее по всем частотам от  $-\infty$  до  $+\infty$  дает средний квадрат исходной функции времени  $x(t)$ .

По своему физическому смыслу спектральная плотность есть величина, которая пропорциональна средней мощности процесса в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

В некоторых случаях спектральную плотность рассматривают только для положительных частот, удваивая ее при этом, что можно сделать, так как спектральная плотность является четной функцией частоты. Тогда, например, формула (11.62) должна быть записана в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_0(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \overline{x^2}. \quad (11.64)$$

где  $S_0(\omega) = 2S(\omega)$  — спектральная плотность для положительных частот.

В дальнейшем изложении будет рассматриваться спектральная плотность, соответствующая всему диапазону частот от  $-\infty$  до  $+\infty$ , так как при этом формулы получают более симметричный характер.

Весьма важным обстоятельством является то, что спектральная плотность и корреляционная функция случайных процессов представляют собой взаимные преобразования Фурье, т. е. они связаны интегральными зависимостями типа (11.54) и (11.55). Это свойство приводится без доказательств [88].

Таким образом, могут быть записаны следующие формулы:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (11.65)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (11.66)$$

Так как спектральная плотность и корреляционная функция представляют собой четные вещественные функции, то иногда формулы (11.65) и (11.66) представляют в более простом виде:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (11.67)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (11.68)$$

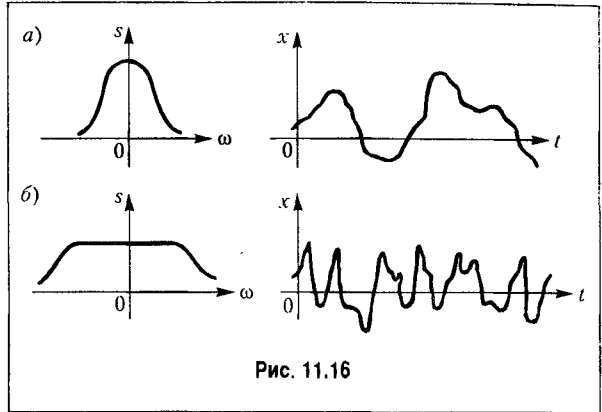


Рис. 11.16

Это вытекает из того, что имеют место равенства:

$$e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau,$$

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

и мнимые части могут быть отброшены после подстановки в (11.65) и (11.66), так как слева стоят вещественные функции.

Связь между спектральной плотностью  $S(\omega)$  и видом функции времени  $x(t)$  заключается в том, что чем «уже» график спектральной плотности (рис. 11.16, а), т. е. чем меньшие частоты представлены в спектральной плотности, тем медленнее изменяется величина  $x$  во времени. Наоборот, чем «шире» график спектральной плотности (рис. 11.16, б), т. е. чем большие частоты представлены в спектральной плотности, тем тоньше структура функции  $x(t)$  и тем быстрее происходят изменения  $x$  во времени.

Как видно из этого рассмотрения, связь между видом спектральной плотности и видом функции времени получается обратной по сравнению со связью между корреляционной функцией и самим процессом (рис. 11.14). Отсюда вытекает, что более «широкому» графику спектральной плотности должен соответствовать более «узкий» график корреляционной функции и наоборот.

Вычисление спектральной плотности неудобно делать по соотношению (11.61), так как это связано с трудностью предельного перехода. Обычно спектральная плотность вычисляется по известной корреляционной функции при помощи формул (11.65) или (11.67). Эти формулы соответствуют так называемому двустороннему преобразованию Фурье четной функции времени  $R(\tau)$ .

В табл. 11.3 даны некоторые функции  $R(\tau)$  и их изображения Фурье  $S(\omega)$  в соответствии с (11.65) и (11.67). В таблице используются импульсные функции  $\delta(\tau)$  и  $\delta(\omega)$ . Эти функции, в отличие от импульсных функций, рассматривавшихся в главе 4, являются четными. Это означает, что функция  $\delta(\tau)$  расположена симметрично относительно начала координат и может быть определена следующим образом:

$$\delta(\tau) = 0 \text{ при } \tau \neq 0 \text{ и } \int_0^{\varepsilon} \delta(\tau) d\tau = \int_{-\varepsilon}^0 \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \text{ для всех } \varepsilon > 0.$$

Таблица 11.3. Двустороннее изображение Фурье четных функций

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$\delta(\tau)$	1
2	1	$2\pi\delta(\omega)$
3	$ \tau $	$-\frac{2}{\omega^2}$
4	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
5	$e^{-(\alpha\tau)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$
6	$\sin \Omega  \tau $	$\frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$
7	$\cos \Omega \tau$	$\pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$
8	$\sin(\Omega  \tau  + \psi)$	$\frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \psi + \pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \sin \psi$
9	$e^{-\alpha \tau } \sin \Omega  \tau $	$\frac{\Omega - \omega}{\alpha^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{\Omega + \omega}{\alpha^2 + (\Omega + \omega)^2}$
10	$e^{-\alpha \tau } \cos \Omega \tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega + \omega)^2}$
11	$e^{-(\alpha\tau)^2} \cos \Omega \tau$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[ e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega - \Omega)^2} + e^{-\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 (\omega + \Omega)^2} \right]$

Аналогичное определение относится к функции  $\delta(\omega)$ . Иногда в рассмотрение вводят нормированную спектральную плотность, являющуюся изображением Фурье нормированной корреляционной функции (11.52):

$$\sigma(\omega) = \frac{S^0(\omega)}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^0(\omega) d\omega}, \quad (11.69)$$



где спектральная плотность  $S^0(\omega)$  соответствует процессу  $(x - \bar{x})|$  и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^0(\omega) d\omega = \overline{(x - \bar{x})^2} = D, \quad (11.70)$$

где  $D$  – дисперсия.

Аналогично введенному понятию взаимной корреляционной функции (11.53) могут рассматриваться взаимные спектральные плотности  $S_{xy}(\omega)$  и  $S_{yx}(\omega)$ , являющиеся изображениями Фурье  $R_{xy}(\tau)$  и  $R_{yx}(\tau)$ . Взаимные спектральные плотности также являются мерой связи между двумя случайными величинами. При отсутствии связи взаимные спектральные плотности равны нулю.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Для постоянной величины  $x(t) = A_0$  корреляционная функция равна  $R(\tau) = A_0^2$ . Эта функция изображена на рис. 11.17, а. Соответствующее ей изображение Фурье на основании табл. 11.3 будет

$$S(\omega) = 2\pi A_0^2 \delta(\omega)$$

или, в другом виде,

$$S(2\pi f) = A_0^2 \delta(f).$$

Спектр процесса состоит из единственного пика типа импульсной функции, расположенной в начале координат (рис. 11.17, б).

Это означает, что вся мощность рассматриваемого процесса сосредоточена на нулевой частоте, что и следовало ожидать.

2. Для гармонической функции  $x = A_1 \sin(\omega_1 t + \psi)$  была получена корреляционная функция  $R(\tau) = \frac{A_1^2}{2} \cos \omega_1 \tau$ . Эта функция изображена на рис. 11.18, а. В соответствии с табл. 11.3 спектральная плотность будет

$$S(\omega) = 2\pi \frac{A_1^2}{4} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$$

или

$$S(f) = \frac{A_1^2}{4} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)].$$

График спектральной плотности будет иметь два пика типа импульсной функции (рис. 11.18, б), расположенные симметрично относительно начала координат при  $\omega = +\omega_1$  и  $\omega = -\omega_1$ .

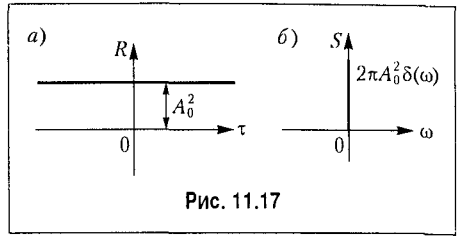


Рис. 11.17

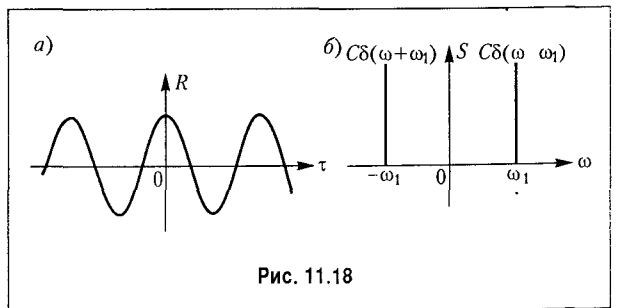


Рис. 11.18

Следовательно, мощность гармонического сигнала сосредоточена на двух частотах:  $\omega_1$  и  $-\omega_1$  (или соответственно  $f_1$  и  $-f_1$ ).

Если рассматривать спектральную плотность только в области положительных частот, то получим, что вся мощность гармонического сигнала будет сосредоточена на одной фиксированной частоте:  $+\omega_1$  или  $+f_1$ .

3. Для периодической функции, разлагаемой в ряд Фурье

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

спектральная плотность может быть представлена в виде

$$S(\omega) = 2\pi \left\{ A_0^2 \delta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{4} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)] \right\}$$

или

$$S(f) = A_0^2 \delta(f) + \sum \frac{A_k^2}{4} [\delta(f - f_k) + \delta(f + f_k)].$$

Этой спектральной плотности соответствует линейчатый спектр (рис. 11.19) с импульсными функциями, расположенными на положительных и отрицательных частотах гармоник. На рис. 11.19 импульсные функции условно нарисованы так, что их высоты показаны пропорциональными коэффициентам при единичной импульсной функции, т. е. величинам  $A_k^2/4$  и  $A_0^2$ .

Если функция времени  $x(t)$  кроме периодической части будет содержать непериодическую составляющую, то спектр этой функции будет содержать, наряду с отдельными линиями типа импульсной функции, также и непрерывную часть (рис. 11.20). Отдельные пики на графике спектральной плотности указывают на присутствие в исследуемой функции скрытых периодичностей.

Если функция времени  $x(t)$  не содержит периодической части, то она будет иметь непрерывный спектр без ярко выраженных пиков.

Рассмотрим некоторые стационарные случайные процессы, имеющие значение при исследовании систем управления. Будем рассматривать только центрированные

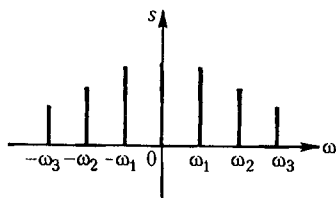


Рис. 11.19

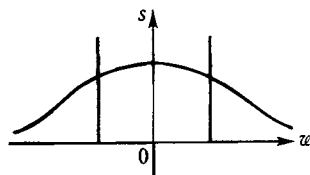


Рис. 11.20

процессы, т. е. такие процессы, математическое ожидание которых равно нулю:  $\bar{x} = 0$ , а дисперсия  $D \neq 0$ . При этом средний квадрат случайной величины будет равен дисперсии:  $\overline{x^2} = D = \sigma^2$ , а  $R(\tau) = R^0(\tau)$ .

Это ограничение не имеет существенного значения, так как в случае  $\bar{x} \neq 0$  учет постоянного смещения в системе управления является элементарным.

**1. Белый шум.** Под белым шумом понимается случайный процесс, имеющий «белый» спектр, т. е. одинаковое значение спектральной плотности при всех частотах от  $-\infty$  до  $+\infty$  (рис. 11.21, а):

$$S(\omega) = N. \quad (11.71)$$

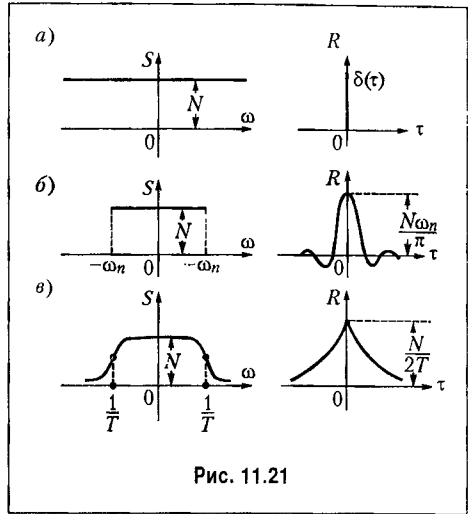


Рис. 11.21

Пример такого процесса — тепловые шумы резистора, которые дают уровень спектральной плотности хаотического напряжения на этом резисторе

$$N = 4RkT^\circ,$$

где  $R$  сопротивление,  $k = 1,37 \times 10^{-23}$  Вт · с/1° — постоянная Больцмана,  $T^\circ$  — абсолютная температура.

На основании (11.68) спектральной плотности (11.71) соответствует корреляционная функция

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty N \cos \omega \tau d\omega = N \delta(\tau). \quad (11.72)$$

Таким образом, корреляционная функция представляет импульсную функцию, расположенную в начале координат (рис. 11.21). Этот процесс является чисто случайным процессом, так как из графика корреляционной функции видно, что при любом  $\tau \neq 0$  отсутствует корреляция между последующими и предыдущими значениями случайной величины  $x$ .

Процесс с подобной рода спектральной плотностью является физически нереальным, так как ему соответствуют бесконечно большие дисперсия и средний квадрат случайной величины:  $D = \overline{x^2} = R(0) \rightarrow \infty$ , а следовательно, бесконечно большая мощность.

Чтобы получить физически реальный процесс, удобно ввести понятие белого шума с ограниченной спектральной плотностью (рис. 11.21, б):

$$\begin{aligned} S(\omega) &= N \text{ при } |\omega| < \omega_n, \\ S(\omega) &= 0 \text{ при } |\omega| > \omega_n, \end{aligned} \quad (11.73)$$

где

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_{\Pi}}{\pi}$$

— полоса частот для спектральной плотности.

Этому процессу соответствует корреляционная функция

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{N}{\pi} \int_0^{\omega_{\Pi}} \cos \omega \tau d\omega = \frac{N}{\pi \tau} \sin \omega_{\Pi} \tau. \quad (11.74)$$

Корреляционная функция также изображена на рис. 11.21, б. Для этого процесса

$$\overline{x^2} = D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\Pi}}^{\omega_{\Pi}} N d\omega = \frac{N 2\omega_{\Pi}}{2\pi} = \frac{N \Delta\omega}{2\pi} = N \Delta f. \quad (11.75)$$

Среднеквадратичное значение случайной величины пропорционально корню квадратному из полосы частот:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{N} \sqrt{\Delta f}. \quad (11.76)$$

Часто бывает удобнее аппроксимировать зависимость (11.73) плавной кривой. Для этой цели можно, например, использовать выражение

$$S(\omega) = \frac{N}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{\mu^2 N}{\mu^2 + \omega^2}, \quad (11.77)$$

где  $\mu = 1/T$  — коэффициент, определяющий ширину полосы частот.

График спектральной плотности, соответствующий этому выражению, построен на рис. 11.21, в. Для частот  $-\mu < \omega < \mu$  процесс приближается к белому шуму, так как для этих частот

$$S(\mu) \approx N.$$

Интегрирование (11.77) по всем частотам дает возможность определить дисперсию:

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N d\omega}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{N}{2T}.$$

Поэтому спектральная плотность (11.77) может быть записана в другом виде:

$$S(\omega) = \frac{2TD}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2}. \quad (11.78)$$

Корреляционная функция для этого процесса

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2} e^{j\omega\tau} d\omega = D e^{-\mu|\tau|}. \quad (11.79)$$

Корреляционная функция также изображена на рис. 11.21, в.

2. Типовой входной сигнал следящей системы. В качестве типового сигнала для следящей системы часто принимают график изменения угловой скорости на входе в соответствии с рис. 11.22. Скорость сохраняет постоянное значение в течение некоторых интервалов времени ( $t_1, t_2, t_3, \dots$ ).

Переход от одного значения к другому совершается мгновенно. Интервалы времени подчиняются закону распределения Пуассона (11.4).

В соответствии со сказанным выше будем считать, что математическое ожидание  $\bar{\Omega} = 0$ , а средний квадрат скорости равен дисперсии, т. е.  $\overline{\Omega^2} = D_{\Omega} \neq 0$ .

График такого вида получается, например, в первом приближении при слежении радиолокатором за движущейся целью. Постоянное значение скорости соответствует движению цели по прямой. Перемена знака или величины скорости соответствует маневру цели.

Обозначим  $\mu$ , среднее число перемен скорости за одну секунду. Тогда  $T = 1/\mu$  будет средним значением интервала времени, в течение которого угловая скорость сохраняет постоянное значение. Применительно к радиолокатору это значение будет средним временем движения цели по прямой.

Для определения корреляционной функции необходимо найти среднее значение произведения

$$R(\tau) = \overline{\Omega(t)\Omega(t+\tau)}.$$

При нахождении этого произведения могут быть два случая.

1. Моменты времени  $t$  и  $t + \tau$  относятся к одному интервалу. Тогда среднее значение произведения угловых скоростей будет равно среднему квадрату угловой скорости или дисперсии:

$$R_1(\tau) = \overline{\Omega(t)\Omega(t+\tau)} = \overline{\Omega^2} = D_{\Omega}.$$

2. Моменты времени  $t$  и  $t + \tau$  относятся к разным интервалам. Тогда среднее значение произведения скоростей будет равно нулю:

$$R_2(\tau) = \overline{\Omega(t)\Omega(t+\tau)} = 0,$$

так как произведения с положительным и отрицательным знаком будут равновероятными.

Корреляционная функция будет равна

$$R(\tau) = P_1 R_1(\tau) + P_2 R_2(\tau) = P_1 R_1(\tau),$$

где  $P_1$  — вероятность нахождения моментов времени  $t$  и  $t + \tau$  в одном интервале, а  $P_2 = 1 - P_1$  — вероятность нахождения их в разных интервалах.

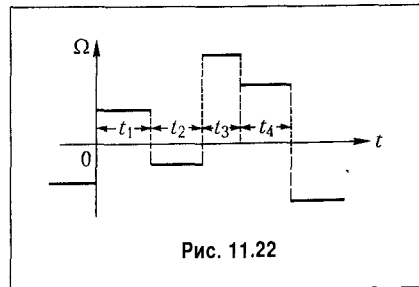


Рис. 11.22

Вероятность появления перемены скорости на малом промежутке времени  $\Delta\tau$  пропорциональна этому промежутку и равна  $\mu\Delta\tau$  или  $\Delta\tau/T$ . Вероятность отсутствия перемены скорости для этого же промежутка будет  $1 - \Delta\tau/T$ . Для интервала времени  $\tau$  вероятность отсутствия перемены скорости, т. е. вероятность нахождения моментов времени  $t$  и  $t + \tau$  в одном интервале постоянной скорости, будет равна произведению вероятностей отсутствий перемены скорости на каждом элементарном промежутке  $\Delta\tau$ , так как эти события независимые.

В результате для конечного промежутка  $\Delta\tau$  получаем

$$P_1 = \left(1 - \frac{\Delta\tau}{T}\right)^{\frac{\tau}{\Delta\tau}}.$$

Устремив  $\Delta\tau \rightarrow 0$  и переходя к пределу, получим

$$P = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\Delta\tau}{T}\right)^{\frac{\tau}{\Delta\tau}} = e^{-\frac{\tau}{T}}$$

и окончательно

$$R(\tau) = D_{\Omega} e^{-\frac{|\tau|}{T}} = \Omega^2 e^{-\frac{|\tau|}{T}}. \quad (11.80)$$

Знак модуля при  $\tau$  поставлен вследствие того, что выражение (11.80) должно соответствовать четной функции. Выражение для корреляционной функции совпадает с (11.79). Поэтому спектральная плотность рассматриваемого процесса должна совпадать с (11.78):

$$S_{\Omega}(\omega) = \frac{2TD_{\Omega}^2}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{2\mu D_{\Omega}}{\mu^2 + \omega^2}. \quad (11.81)$$

Заметим, что в отличие от (11.78) формула спектральной плотности (11.81) записана для угловой скорости процесса (рис. 11.22). Если перейти от угловой скорости к углу, то получится нестационарный случайный процесс с дисперсией, стремящейся к бесконечности. Однако в большинстве случаев следящая система, на входе которой действует этот процесс, обладает астатизмом первого и более высоких порядков. Поэтому первый коэффициент ошибки  $c_0$  у следящей системы равен нулю и ее ошибка будет определяться только входной скоростью и производными более высоких порядков, относительно которых процесс стационарен. Это дает возможность использовать спектральную плотность (11.81) при расчете динамической ошибки следящей системы.

3. Н е р е г у л я р н а я к а ч к а. Некоторые объекты, например корабли, самолеты и другие, находясь под действием нерегулярных возмущений (нерегулярное волнение, атмосферные возмущения и т. п.), движутся по случайному закону. Так как сами объекты имеют определенную им свойственную, частоту колебаний, то они обладают свойством подчёркивать те частоты возмущений, которые близки к их

собственной частоте колебаний. Получающееся при этом случайное движение объекта называют нерегулярной качкой в отличие от регулярной качки, представляющей собой периодическое движение.

Типичный график нерегулярной качки изображен на рис. 11.23. Из рассмотрения этого графика видно, что, несмотря на случайный характер, это движение довольно близко к периодическому.

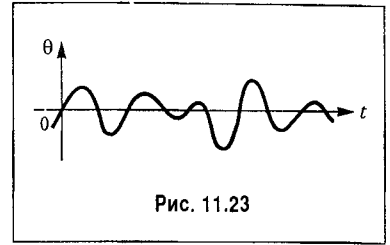


Рис. 11.23

В практике корреляционную функцию нерегулярной качки часто аппроксимируют выражением

$$R(\tau) = D e^{-\mu|\tau|} \cos \beta \tau, \quad (11.82)$$

где  $\beta$  — резонансная частота,  $\mu$  — параметр затухания,  $D$  — дисперсия.

Значения  $D$ ,  $\mu$  и  $\beta$  находятся обычно путем обработки экспериментальных данных (натурных испытаний).

Корреляционной функции (11.82) соответствует спектральная плотность (см. табл. 11.3)

$$S(\omega) = \mu D \left[ \frac{1}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \frac{2a(1 + b\omega^2)D}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2}. \quad (11.83)$$

Неудобством аппроксимации (11.82) является то, что этой формулой можно описать поведение какой-либо одной величины нерегулярной качки (угла, угловой скорости или углового ускорения). В этом случае величина  $D$  будет соответствовать дисперсии угла, скорости или ускорения.

Если, например, записать формулу (11.82) для угла, то этому процессу будет соответствовать нерегулярная качка с дисперсией для угловых скоростей, стремящейся к бесконечности, т. е. это будет физически нереальный процесс.

Более удобная формула для аппроксимации угла качки

$$R(\tau) = D_0 e^{-\mu|\tau|} \left( \cos \beta \tau + \frac{\mu}{\beta} \sin \beta |\tau| \right). \quad (11.84)$$

Соответствующая спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{\mu}{\beta} D_0 \left[ \frac{2\beta - \omega}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \frac{2aD_0}{|1 + aj\omega + b(j\omega)^2|^2}. \quad (11.85)$$

Здесь  $D_0$  — дисперсия для угла,  $a = 2\mu (\mu^2 + \beta^2)^{-1}$ ,  $b = (\mu^2 + \beta^2)^{-1}$ .

При такой аппроксимации дисперсия для угловой скорости получается конечной:  $D_\Omega = (\mu^2 + \beta^2) D_0$ .

Однако и эта аппроксимация соответствует физически нереальному процессу, так как дисперсия углового ускорения получается стремящейся к бесконечности.

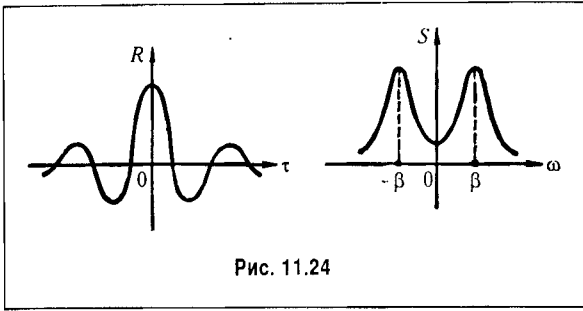


Рис. 11.24

Для получения конечной дисперсии углового ускорения требуются еще более сложные формулы аппроксимации, которые здесь не приводятся.

Типичные кривые для корреляционной функции и спектральной плотности нерегулярной качки приведены на рис. 11.24.

## § 11.6. Канонические разложения случайных функций

Элементарной случайной функцией называется функция, которая может быть представлена в виде

$$x(t) = x\varphi(t), \quad (11.86)$$

где  $\varphi(t)$  — некоторая известная неслучайная функция времени (синусоида, экспонента, степенная функция и т. н.),  $x$  — случайная величина.

Если математическое ожидание величины  $x$  равно нулю, то и математическое ожидание случайной функции  $M[x(t)] = 0$ . Корреляционная функция в этом случае

$$R(t, t_1) = M[x\varphi(t)x\varphi(t_1)] = D\varphi(t)\varphi(t_1), \quad (11.87)$$

где дисперсия  $D = M[x^2]$ .

Рассмотрим случайную функцию  $x(t)$ , которая может быть представлена в виде суммы математического ожидания  $\bar{x}(t)$  и элементарных случайных функций:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sum V_v x_v(t). \quad (11.88)$$

Здесь  $V_v$  — случайные взаимно некоррелированные коэффициенты с нулевым математическим ожиданием.

Представление случайной функции в виде суммы ее математического ожидания и взаимно некоррелированных элементарных случайных функций называется *каноническим разложением*. Случайные коэффициенты носят название коэффициентов канонического разложения, а функции  $x_v(t)$  координатных функций.

При использовании канонического разложения значительно упрощается выполнение различных операций над случайными функциями (дифференцирование, интегрирование, решение линейных дифференциальных уравнений и т. п.). Так, например, производная от (11.88) будет

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\bar{x}(t)}{dt} + \sum V_v \frac{dx_v(t)}{dt}. \quad (11.89)$$



Аналогичным образом интегрирование (11.88) дает

$$\int x(t)dt = \int \tilde{x}(t)dt + \sum V_v \int x_v(t)dt. \quad (11.90)$$

Для нахождения канонического разложения случайных функций существуют различные методы [80].

Из (11.88) может быть найдена корреляционная функция

$$R(t, t_1) = M[x(t)x(t_1)] = [\tilde{x}(t)]^2 + \sum D_v x_v(t)x_v(t_1). \quad (11.91)$$

Здесь  $D_v = M[V_v^2]$  — дисперсии коэффициентов канонического разложения.

Таким образом, корреляционная функция может быть выражена через те же координатные функции.

Для стационарной случайной функции, заданной в интервале  $-T < t < T$ , разность  $\tau = t_1 - t$  изменяется в интервале  $-2T < \tau < 2T$  и разложение корреляционной функции может быть задано в виде ряда Фурье:

$$R(\tau) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} D_v e^{j\omega_v \tau} = (\tilde{x})^2 + \sum_{v=1}^{\infty} 2D_v \cos \omega_v \tau, \quad \omega_v = \frac{\pi v}{2T}, \quad (11.92)$$

где  $v$  — целые числа.

Этому выражению соответствует каноническое разложение самой случайной функции

$$x(t) = \tilde{x} + \sum_{v=-\infty}^{\infty} V_v e^{j\omega_v t} = \tilde{x} + \sum_{v=0}^{\infty} (X_v \cos \omega_v t + Y_v \sin \omega_v t), \quad (11.93)$$

где  $X_v$  и  $Y_v$  взаимно некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и с одинаковыми дисперсиями  $0,5D_v$ . В разложении (11.92) должны отсутствовать нечетные гармоники. Тогда ряд (11.93) будет содержать только четные гармоники, что соответствует периоду  $2T$  (интервалу  $-T < t < T$ ).

Если разность между двумя соседними гармониками  $\Delta\omega = \omega_{v+1} - \omega_v = \frac{\pi}{2T}$  устремить к нулю, что соответствует  $T \rightarrow \infty$ , то формулу (11.92) можно представить в виде

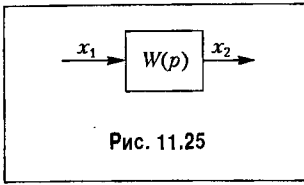
$$R(\tau) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{D_v}{\Delta\omega} e^{j\omega_v \tau} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega. \quad (11.94)$$

Здесь введена спектральная плотность стационарного процесса (см. § 11.5)

$$S(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi D_v}{\Delta\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} 4TD_v.$$

являющаяся изображением Фурье корреляционной функции  $R(\tau)$ .

## § 11.7. Прохождение случайного сигнала через линейную систему



Рассмотрим линейную систему (рис. 11.25) с передаточной функцией  $W(p)$  и функцией веса  $w(t)$ . Пусть на входе действует случайный сигнал  $x_1(t)$  с корреляционной функцией  $R_1(t, t_1)$ .

Выходной сигнал  $x_2(t)$  на основании формулы свертки (7.44)

$$x_2(t) = \int_0^t w(\tau) x_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t w(t - \tau) x_1(\tau) d\tau.$$

Рассматривая в этой формуле математические ожидания, имеем

$$M[x_2(t)] = \tilde{x}_2(t) = \int_0^t w(t - \tau) \tilde{x}_1(\tau) d\tau. \quad (11.95)$$

Для получения корреляционной функции на выходе запишем исходную формулу для центрированных значений  $x_1^0(t) = x_1(t) - \tilde{x}_1(t)$  и  $x_2^0(t) = x_2(t) - \tilde{x}_2(t)$  для двух моментов времени:

$$\left. \begin{aligned} x_2^0(t) &= \int_0^t w(\eta) x_1^0(t - \eta) d\eta, \\ x_2^0(t_1) &= \int_0^{t_1} w(\lambda) x_1^0(t_1 - \lambda) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (11.96)$$

После перемножения получим

$$x_2^0(t) x_2^0(t_1) = \int_0^t \int_0^{t_1} w(\eta) w(\lambda) x_1^0(t_1 - \eta) x_1^0(t_1 - \lambda) d\eta d\lambda. \quad (11.97)$$

Далее, переходя к математическому ожиданию, можно найти корреляционную функцию

$$R_2^0(t, t_1) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1^0(t_1 - \eta, t_1 - \lambda) d\lambda. \quad (11.98)$$

Для определения дисперсии на выходе  $D_2(t)$  в формуле (11.98) следует положить  $t = t_1$ . Тогда

$$D_2(t) = R^0(t, t) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1^0(t_1 - \eta, t_1 - \lambda) d\lambda. \quad (11.99)$$

В случае использования канонического разложения случайной функции

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) + \sum_v V_v x_v(t) \quad (11.100)$$

выходная величина может быть представлена в виде

$$x_2(t) = \tilde{x}_2(t) + \sum_v V_v y_v(t), \quad (11.101)$$

где  $\tilde{x}_2(t)$  определяется формулой (11.95), а координатные функции

$$y_v(t) = \int_0^t w(t-\tau) x_v(\tau) d\tau. \quad (11.102)$$

Корреляционная функция выходного сигнала

$$R_2^0(t, t_1) = \sum_v D_v y_v(t) y_v(t_1), \quad (11.103)$$

а дисперсия

$$D_2(t) = \sum_v D_v [y_v(t)]^2. \quad (11.104)$$

Для нахождения математического ожидания  $\tilde{x}_2(t)$  и координатных функций  $y_v(t)$  в соответствии с выражениями (11.95) и (11.102) могут использоваться различные методы построения переходных процессов (см. главу 7).

В случае, когда на входе (рис. 11.25) действует случайный стационарный процесс, корреляционная функция  $R_1^0(t, t_1) = R_1^0(\tau)$  зависит только от сдвига  $\tau = t_1 - t$ . Однако на выходе линейной системы процесс некоторое время после включения будет устанавливаться и не будет стационарным. Корреляционная функция на выходе может быть получена из общего выражения (11.98):

$$R_2^0(t, t_1) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1^0(\tau - \eta + \lambda) d\lambda, \quad (11.105)$$

а дисперсия — из (11.99):

$$D_2(t) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^t w(\lambda) R_1^0(\lambda - \eta) d\lambda. \quad (11.106)$$

Если рассматриваемая система устойчива, то  $R_2^0(t, t_1)$  и  $D_2(t)$  стремятся к некоторым пределам, которые определяют стационарный процесс на выходе. Они могут быть найдены из (11.105) и (11.106), если положить  $t \rightarrow \infty$  и  $t_1 \rightarrow \infty$ .

Тогда при  $t_1 - t = \tau$

$$R_2^0(\tau) = \int_0^{\infty} w(\eta) d\eta \int_0^{\infty} w(\lambda) R_1^0(\tau - \eta + \lambda) d\lambda, \quad (11.107)$$

$$D_2 = R_2^0(0) = \int_0^{\infty} w(\eta) d\eta \int_0^{\infty} w(\lambda) R_1^0(\lambda - \eta) d\lambda. \quad (11.108)$$

Пусть, например, на входе интегрирующего звена с передаточной функцией  $W(p) = k/p$  и функцией веса  $w(t) = k$  действует белый шум с корреляционной функцией  $R_1(\tau) = R_1^0(\tau) = N\delta(\tau)$ . Тогда в соответствии с (11.106) дисперсия на выходе будет

$$D_2(t) = \int_0^t k d\eta = \int_0^t k N \delta(\lambda - \eta) d\lambda = \int_0^t k d\eta \cdot kN = k^2 Nt,$$

т. е. дисперсия растет пропорционально времени. Нетрудно видеть, что  $D(\infty) \rightarrow \infty$ , так как звено не является устойчивым, а оно находится на границе устойчивости (нейтрально-устойчиво).

Для расчета установившегося стационарного процесса на выходе системы (рис. 11.25) более удобно исходить из известной спектральной плотности на входе  $S_1(\omega)$ . Тогда можно легко найти спектральную плотность  $S_2(\omega)$  выходного сигнала. Действительно, по определению спектральная плотность на входе связана с изображением Фурье  $F_1(j\omega)$  случайной величины  $x_1(t)$  соотношением (11.61):

$$S_1(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_1(j\omega)|^2.$$

Это же соотношение имеет место и для выходного сигнала:

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_2(j\omega)|^2.$$

В линейной системе изображения Фурье  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$  связаны между собой посредством частотной передаточной функции:

$$F_2(j\omega) = W(j\omega) F_1(j\omega).$$

Отсюда можно найти

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_1(j\omega)|^2 |W(j\omega)|^2$$

или

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega). \quad (11.109)$$

Таким образом, спектральная плотность выходной величины может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на квадрат модуля ча-

стотной передаточной функции линейной системы. Отметим, что приведенное выше доказательство, вообще говоря, не является строгим, так как существование стационарного случайного процесса на выходе не доказано.

При известной спектральной плотности  $S_2(\omega)$  выходной величины может быть найдена корреляционная функция  $R_2(\tau)$  по преобразованию Фурье (11.66) или (11.68).

Получим выражение (11.109) более строго. Для этого используем формулу (11.107). Так как в реальных системах весовая функция тождественно равна нулю при  $t < 0$ , то нижние пределы интегрирования можно положить равными  $-\infty$ . Полагая, что на входе действует центрированный процесс ( $\tilde{x} = 0$ ) и  $R_1(\tau) = R_1^0(\tau)$ , имеем

$$R_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_1(\tau + \lambda - \eta) d\lambda. \quad (11.110)$$

Найдем теперь спектральную плотность для выходного сигнала. Она связана с корреляционной функцией соотношением (11.65):

$$S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Подставляя в последнюю формулу значение корреляционной функции из (11.110), получаем

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} w(\eta) w(\lambda) R_1(\tau + \lambda - \eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} e^{j\omega\lambda} e^{-j\omega\eta} R_1(\tau + \lambda - \eta) w(\lambda) w(\eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau + \lambda - \eta) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} d\tau = \\ &= W(j\omega) W(-j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega). \end{aligned} \quad (11.111)$$

Последнее выражение совпадает с (11.109), что и требовалось доказать. Для нахождения дисперсии, или среднего квадрата выходной величины необходимо проинтегрировать по всем частотам спектральную плотность:

$$\overline{x_2^2} = D_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(2\pi f) df. \quad (11.112)$$

Отметим, что закон распределения для случайной величины может, вообще говоря, меняться при прохождении ее через линейную систему. Однако в случае, если

на входе линейной системы имеется нормальное распределение случайной величины  $x_1(t)$ , то на выходе для случайной величины  $x_2(t)$  также будет иметь место нормальное распределение.

При вычислении интеграла (11.112) обычно приходится иметь дело с подынтегральным выражением вида

$$\frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2},$$

где  $A(j\omega)$  и  $B(j\omega)$  представляют собой некоторые полиномы от комплексной переменной  $j\omega$ .

Наивысшую степень знаменателя обозначим  $2n$ . Наивысшая степень числителя в реальной системе может быть на выше  $2n - 2$ . Для удобства интегрирования написанное выше выражение обычно представляют в виде

$$\frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} = \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)},$$

где

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n, \\ G(j\omega) &= b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}. \end{aligned}$$

Полином  $G(j\omega)$  содержит только четные степени  $j\omega$ . Полином  $A(j\omega)$  для устойчивой системы может иметь корни только в верхней полуплоскости. Область устойчивости оказалась в верхней полуплоскости вследствие того, что была использована подстановка  $p = j\omega$ , а множитель  $j$  означает поворот комплексного числа на угол  $\pi/2$ .

Таким образом, вычисление дисперсии (11.112) можно свести к нахождению интеграла

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega)d\omega}{A(j\omega)A(-j\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega)d\omega}{|A(j\omega)|^2}. \quad (11.113)$$

В общем случае при любом  $n$  для устойчивой системы интеграл  $I_n$  может быть представлен в виде [29]:

$$I_n = \frac{1}{2a_0} \frac{M_n}{\Delta_n}, \quad (11.114)$$

где

$$\Delta_n = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (11.115)$$

совпадает с точностью до знака со старшим определителем Гурвица, а числитель определяется выражением

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} (-1)^n. \quad (11.116)$$

Интегралы такого вида вычислены до  $n = 7$  и сведены в таблицы (см. приложение 1).

Заметим, что знаменатель правых частей приведенных в приложении 1 формул представляет собой  $\Delta_{n-i}$  — определитель Гурвица. На колебательной границе устойчивости этот определитель обращается в нуль, а дисперсия выходной величины будет стремиться к бесконечности.

В заключение рассмотрим два важных случая прохождения случайного сигнала через линейную систему.

**Статистическое дифференцирование.** При поступлении случайного сигнала на идеальное дифференцирующее устройство с передаточной функцией  $W(p) = p$  спектральная плотность выходной величины (производной от входной величины) может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на  $\omega^2$

$$S_2(\omega) = \omega^2 S_1(\omega), \quad (11.117)$$

при двойном дифференцировании — на  $\omega^4$  и т. д.

**Статистическое интегрирование.** При поступлении случайного сигнала на идеальное интегрирующее звено с передаточной функцией  $W(p) = 1/p$  спектральная плотность выходной величины (интеграла от входной величины) может быть получена делением интегральной плотности входной величины на  $\omega^2$ :

$$S_2(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega^2} \quad (11.118)$$

при двойном интегрировании — на  $\omega^4$  и т. д.

## § 11.8. Расчет установившихся ошибок в автоматических системах

Замкнутая система автоматического управления может находиться под воздействием случайного задающего сигнала  $g(t)$  и случайной помехи  $f(t)$ , приложенной в произвольной точке системы (рис. 11.26).

Корреляционные функции и спектральные плотности задающего воздействия и помехи будем считать известными. Конечной целью расчета является нахождение корреляционных функций и спектральных плотностей выходной величины  $y(t)$  и

ошибки  $x(t)$ . Обычно ограничиваются более узкой задачей и определяют только среднеквадратичную ошибку системы. Это может быть сделано посредством интегрирования по всем частотам спектральной плотности ошибки или через корреляционную функцию ошибки  $x(t)$ .

В простейшем случае, когда задающее воздействие  $g(t)$  представляет собой случайный стационарный процесс со спектральной плотностью  $S_g(\omega)$ , а помеха отсутствует:  $f(t) = 0$ , расчет можно свести к рассмотренной выше схеме (рис. 11.25). Тогда спектральная плотность ошибки будет

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega). \quad (11.119)$$

Частотная передаточная функция по ошибке  $\Phi_x(j\omega)$  связана с частотными передаточными функциями разомкнутой  $W(j\omega)$  и замкнутой  $\Phi(j\omega)$  системы соотношением

$$\Phi_x(j\omega) = \frac{1}{1+W(j\omega)} = 1 - \Phi(j\omega).$$

Таким образом, для спектральной плотности ошибки получаем

$$S_x(\omega) = \frac{S_g(\omega)}{|1+W(j\omega)|^2}. \quad (11.120)$$

Интегрирование этого выражения по всем частотам позволяет определить дисперсию и среднеквадратичное значение ошибки:

$$x_{\text{ск}} = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega}. \quad (11.121)$$

Вычисление дисперсии и среднеквадратичной ошибки через корреляционные функции может производиться на основании формулы (11.107). В качестве функции веса в рассматриваемом случае должна использоваться функция веса для ошибки  $w_x(t)$ , связанная с частотной передаточной функцией по ошибке преобразованием Фурье

$$\Phi_x(j\omega) = \int_0^{\infty} w_x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

После нахождения корреляционной функции ошибки  $R_x(\tau)$  дисперсия определяется подстановкой  $\tau = 0$ , т. е.  $D = R_x(0)$ .

Однако нахождение среднеквадратичной ошибки посредством использования спектральных плотностей оказывается обычно более простым и поэтому применяется чаще.

В другом простейшем случае, когда задающее воздействие  $g(t) = 0$ , а помеха представляет собой случайный стационарный процесс со спектральной плотностью  $S_f(\omega)$ , аналогичным образом можно найти спектральную плотность ошибки:

$$S_x(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega). \quad (11.122)$$



В этом выражении  $\Phi_f(j\omega)$  представляет собой частотную передаточную функцию:

$$\Phi_f(j\omega) = \left. \frac{X(p)}{F(p)} \right|_{p=j\omega} = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)},$$

связывающую изображения Фурье ошибки  $x(t)$  и помехи  $f(t)$ .

В частном случае, когда помеха  $f(t)$  действует на входе системы в месте приложения задающего воздействия, в формуле (11.101) должна использоваться частотная передаточная функция замкнутой системы:

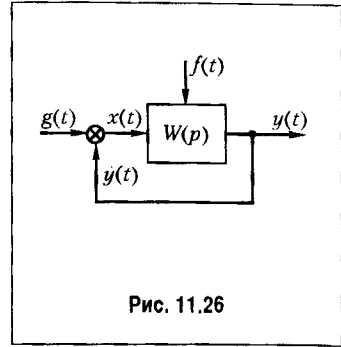


Рис. 11.26

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega). \quad (11.123)$$

Рассмотрим теперь общее выражение спектральной плотности ошибки для случая, когда задающее воздействие  $g(t)$  и помеха  $f(t)$  действуют одновременно (рис. 11.26).

Обозначим через  $w_x(t)$  весовую функцию для ошибки по задающему воздействию и через  $w_f(t)$  весовую функцию для ошибки по помехе. Тогда ошибку можно представить в виде

$$x(t) = \int_0^{\infty} g(t-\lambda)w_x(\lambda)d\lambda + \int_0^{\infty} f(t-\lambda)w_f(\lambda)d\lambda. \quad (11.124)$$

Подставим это выражение для ошибки в формулу корреляционной функции (11.51). В результате получим

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} & \left\{ \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} g(t+\tau-\eta)w_x(\eta)d\eta \int_0^{\infty} g(t-\lambda)w_x(\lambda)d\lambda + \right. \\ & + \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} f(t+\tau-\eta)w_f(\eta)d\eta \int_0^{\infty} f(t-\lambda)w_f(\lambda)d\lambda + \\ & + \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} g(t+\tau-\eta)w_x(\eta)d\eta \int_0^{\infty} f(t-\lambda)w_f(\lambda)d\lambda + \\ & \left. + \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} f(t-\lambda)w_x(\lambda)d\lambda \int_0^{\infty} g(t+\tau-\eta)w_f(\eta)d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \{w_x(\lambda)R_g(\tau+\lambda-\eta)w_x(\eta) + w_f(\lambda)R_f(\tau+\lambda-\eta)w_f(\eta) + w_f(\lambda)R_{fg}(\tau+\lambda-\eta)w_x(\eta) + w_x(\lambda)R_{gf}(\tau+\lambda-\eta)w_f(\eta)\} d\eta, \quad (11.125)$$

где  $R_{gf}(t)$  и  $R_{fg}(t)$  — взаимные корреляционные функции.

Для нахождения спектральной плотности ошибки левую и правую части (11.125) умножим на  $e^{-j\omega\tau}$  и проинтегрируем по  $\tau$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В результате выкладок, аналогичных тем, которые были проделаны при выводе формулы (11.111), получим

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) + \Phi_x(j\omega)S_{fg}(\omega)\Phi_f^*(j\omega) + \Phi_x^*(j\omega)S_{gf}(\omega)\Phi_f(j\omega). \quad (11.126)$$

В этом выражении  $S_{gf}(\omega)$  и  $S_{fg}(\omega)$  представляют собой взаимные спектральные плотности полезного сигнала и помехи, а  $\Phi_x(j\omega)$  и  $\Phi_f(j\omega)$  частотные передаточные функции для ошибки по задающему воздействию и помехе. Звездочкой обозначен сопряженный комплекс.

При отсутствии корреляции между полезным сигналом и помехой формула (11.126) упрощается:

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega). \quad (11.127)$$

В частном случае, когда помеха действует на входе в месте приложения задающего воздействия и корреляция между ними отсутствует, формула (11.127) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \\ &= \left| \frac{1}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_g(\omega) + \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega), \end{aligned} \quad (11.128)$$

так как для этого случая частотная передаточная функция  $\Phi_f(j\omega)$  совпадает с частотной передаточной функцией замкнутой системы  $\Phi(j\omega)$ .

Все приведенные выше формулы для спектральной плотности ошибки  $x(t)$  могут быть легко переписаны для спектральной плотности выходной величины  $y(t)$ , если в них заменить частотную передаточную функцию для ошибки  $\Phi_x(j\omega)$  на частотную передаточную функцию замкнутой системы  $\Phi(j\omega) = 1 - \Phi_x(j\omega)$ .

## § 11.9. Расчеты по минимуму среднеквадратичной ошибки

Если на автоматическую систему действуют одновременно полезный сигнал и помеха, то возникает задача оптимального расчета системы с тем, чтобы получить наименьшую результирующую ошибку. С точки зрения наилучшего воспроизведе-

ния полезного сигнала система должна иметь возможно большую полосу пропускания, а с точки зрения наилучшего подавления помехи система, наоборот, должна иметь возможно меньшую полосу пропускания. Критерием получения оптимального решения здесь будет минимальное значение результирующей ошибки системы, определяемой полезным сигналом и помехой.

Для случайных величин наиболее просто определить среднеквадратичную ошибку, поэтому ее и используют для оценки точности автоматической системы.

Рассмотрим расчет системы по критерию минимума среднеквадратичной ошибки при одновременном действии полезного сигнала и помехи.

Согласно этому критерию нежелательность ошибки пропорциональна квадрату ее величины. Такая постановка является часто логичной, но она не может, конечно, претендовать на полную универсальность. В некоторых случаях, например при стрельбе по какой-либо цели, все ошибки, большие некоторого значения, являются одинаково нежелательными. Однако средний квадрат ошибки системы управления

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (11.129)$$

практически во всех случаях является наиболее просто вычисляемой величиной, что и определило использование этого критерия.

Возможны несколько формулировок задачи. Наиболее просто задача может быть сформулирована так. Если имеется какая-то система автоматического управления заданной структуры, то необходимо так выбрать параметры этой системы, чтобы получить минимум среднеквадратичной ошибки при заданных статистических характеристиках полезного сигнала и помехи.

Эта задача решается следующим образом. По спектральной плотности ошибки путем ее интегрирования находится дисперсия. Дисперсия получается зависящей от вероятностных характеристик полезного сигнала, помехи и параметров системы. Затем ищутся условия, которые должны быть наложены на параметры системы, чтобы получить минимум дисперсии. При достаточно простом выражении для дисперсии это может быть определено непосредственным дифференцированием и приравнением нулю частных производных.

В более сложных случаях приходится искать минимум дисперсии путем числового задания интересующих параметров и построения соответствующих графиков, а также расчетом на ЭВМ.

Другая постановка задачи при расчете по критерию минимума среднеквадратичной ошибки заключается в том, что ставится вопрос о нахождении оптимальной структуры и значений параметров автоматической системы, при которых обеспечивается получение теоретического минимума среднеквадратичной ошибки при заданных вероятностных характеристиках полезного сигнала и помехи. Эта задача будет решена, если найти, например, передаточную функцию замкнутой системы  $\Phi(j\omega)$ , при которой обеспечивается получение теоретического минимума среднеквадратичной ошибки. Задача относится к категории вариационных задач. Приведем здесь некоторые результаты ее решения [ 88 ] для случая, когда полезный сигнал  $g(t)$  и помеха  $f(t)$  представляют собой центрированные стационарные случайные процессы, при-

ложенные на входе системы. Перед системой ставится задача преобразовывать входной сигнал  $g(t)$  так; чтобы на ее выходе воспроизводилась величина  $h(t)$ , связанная с  $g(t)$  некоторой формулой преобразования

$$L[h(t)] = H(p) L[g(t)],$$

где  $H(p)$  — преобразующий оператор.

Так, например, при  $H(p) = 1/p$  получится задача интегрирования входного сигнала, при  $H(p) = p$  — задача дифференцирования, при  $H(p) = 1$  — задача простого воспроизведения со сглаживанием помехи (обычная следящая система при наличии помех), при  $H(p) = e^{Tp}$  — статистическое упреждение (предсказание) и т. п.

На основании изложенного ошибку системы можно представить в виде

$$x(t) = h(t) - y(t). \quad (11.130)$$

Выходная величина системы управления

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) \omega(\tau) d\tau, \quad (11.131)$$

где  $\varphi(t) = g(t) + f(t)$ , а  $\omega(t)$  — весовая функция замкнутой системы.

Подставляя (11.130) и (11.131) в формулу (11.129), получаем

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ h(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) \omega(\tau) d\tau \right]^2 dt. \quad (11.132)$$

Задача заключается в том, чтобы найти частотную передаточную функцию замкнутой системы, связанную с весовой функцией преобразованием Фурье

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (11.133)$$

таким образом, чтобы минимизировать значение  $\overline{x^2}$ .

Раскроем в выражении (11.132) скобки и изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) d\lambda \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t) \varphi(t-\lambda) dt + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\nu) d\nu \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t-\lambda) \varphi(t-\nu) dt. \end{aligned} \quad (11.134)$$

Введем корреляционные функции:

$$R_h(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t+\tau) h(t) dt, \quad (11.135)$$

$$R_{\varphi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t+\tau) \varphi(t) dt = R_g(\tau) + R_f(\tau) + R_{gf}(\tau) + R_{fg}(\tau), \quad (11.136)$$

$$R_{h\varphi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t+\tau) \varphi(t) dt = R_{hg}(\tau) + R_{hf}(\tau). \quad (11.137)$$

Этим корреляционным функциям соответствуют спектральные плотности  $S_h(\omega)$ ,  $S_{\varphi}(\omega)$ ,  $S_g(\omega)$ ,  $S_f(\omega)$ ,  $S_{gf}(\omega)$ ,  $S_{fg}(\omega)$ ,  $S_{hg}(\omega)$  и  $S_{hf}(\omega)$ . Кроме того,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^2(t) dt = R_h(0).$$

В результате выражение (11.134) можно преобразовать к виду

$$\overline{x^2} = R_h(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\nu) R_{\varphi}(\lambda - \nu) d\nu. \quad (11.138)$$

Так как в реальных системах  $\omega(t) = 0$  при  $t < 0$ , то нижние пределы интегрирования в (11.138) надо положить равными нулю. В результате получим

$$\overline{x^2} = R_h(0) - 2 \int_0^{\infty} \omega(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} \omega(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} \omega(\nu) R_{\varphi}(\lambda - \nu) d\nu. \quad (11.139)$$

Из последнего выражения видно, что оптимальная весовая функция, соответствующая минимуму среднего квадрата ошибки, определяется только видом корреляционных функций полезного сигнала и помехи.

Можно показать [88], что необходимое и достаточное условие минимизации выражения (11.139), которое должно быть наложено на весовую функцию, заключается в том, чтобы она была решением интегрального уравнения Винера–Хопфа

$$R_{h\varphi}(\tau) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau - \lambda) \omega(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (11.140)$$

Оптимальная передаточная функция (11.133), соответствующая оптимальной весовой функции, являющейся решением уравнения (11.140), может быть представлена в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (11.141)$$

где

$$\Psi(j\omega) \Psi^*(j\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = S_{\varphi}(\omega). \quad (11.142)$$

В частном случае, когда преобразующий оператор  $H(p) = 1$ , т. е. в так называемом случае оптимального сглаживания, имеем

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t), \\ S_{\varphi}(\omega) &= S_g(\omega) + S_f(\omega) + S_{gf}(\omega) + S_{fg}(\omega), \\ S_{h\varphi}(\omega) &= S_{g\varphi}(\omega) = S_g(\omega) + S_{gf}(\omega). \end{aligned}$$

В этом случае решение (11.141) может быть представлено в более простом виде:

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}. \quad (11.143)$$

Числитель этого выражения определяется следующим образом. Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{S_{g\varphi}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{\omega - \eta_i} + \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{\omega + \alpha_i} + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{e_i}{\omega - \gamma_i}. \quad (11.144)$$

Здесь  $\eta_i$  — полюсы  $S_{g\varphi}(\omega)$ , расположенные в верхней полуплоскости,  $(-\alpha_i)$  — полюсы  $S_{g\varphi}(\omega)$ , расположенные в нижней полуплоскости, причем полюсы предпологаются простыми, а  $\gamma_i$  — нули  $\Psi^*(j\omega)$ . Тогда

$$B(j\omega) = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{\omega - \eta_i}. \quad (11.145)$$

При реализации в системе оптимальной передаточной функции получится теоретический минимум среднего квадрата ошибки. Этот минимум определяется выражением

$$\overline{x_{\min}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_g(\omega) - |\Phi(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega)\} d\omega \quad (11.146)$$

или в другом виде

$$\overline{x_{\min}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_g(\omega) - |B(j\omega)|^2\} d\omega. \quad (11.147)$$

Рассмотрим иллюстративный пример. Предположим, что полезному сигналу и помехе на входе системы соответствуют спектральные плотности:

$$S_g(\omega) = \frac{2\mu D}{\omega^2 + \mu^2}, \quad S_f(\omega) = N,$$

причём корреляция между ними отсутствует и  $S_{gf}(\omega) = S_{fg}(\omega) = 0$ . Найдём спектральную плотность, соответствующую (11.136):

$$S_{\varphi}(\omega) = S_g(\omega) + S_f(\omega) = \frac{2\mu D + N\mu^2 + N\omega^2}{(\mu + j\omega)(\mu - j\omega)}$$

или в другом виде

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{(1 + j\alpha\omega)(1 - j\alpha\omega)}{(\mu + j\omega)(\mu - j\omega)},$$

где

$$A = 2\mu D + N\mu^2, \quad a^2 = \frac{N}{2\mu D + N\mu^2} = \frac{N}{A}.$$

Отсюда знаменатель искомой передаточной функции (11.143)

$$\psi(j\omega) = \sqrt{A} \frac{1 + j\alpha\omega}{\mu + j\omega}.$$

Кроме того, получаем

$$\begin{aligned} \frac{S_{g\varphi}(\omega)}{\psi^*(j\omega)} &= \frac{S_g(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \frac{1}{(1 - j\alpha\omega)(\mu + j\omega)} = \\ &= \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \left( \frac{a}{1 + \mu a} \frac{1}{1 - j\alpha\omega} + \frac{1}{1 + \mu a} \frac{1}{\mu + j\omega} \right). \end{aligned}$$

Отбросив первый член в скобках, соответствующий полюсу в нижней полуплоскости, находим числитель искомой передаточной функции (11.143):

$$B(j\omega) = \frac{2\mu D}{\sqrt{A}} \frac{1}{1 + \mu a} \frac{1}{\mu + j\omega}.$$

Окончательно получаем

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{2\mu D}{A(1 + \mu a)} \frac{1}{1 + j\alpha\omega}$$

или

$$\Phi(p) = \frac{2\mu D}{A(1 + \mu a)} \frac{1}{1 + \alpha p}.$$

В соответствии с (11.147)

$$\overline{x_{\min}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2} - \frac{4\mu^2 D}{A(1+\mu a)^2} \frac{1}{\mu^2 + \omega^2} \right\} d\omega = \frac{D}{1 + \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{2D}{\mu N}} - 1 \right)}.$$

Нахождение оптимальной передаточной функции еще не означает, что реальная автоматическая система может быть выполнена оптимальной, так как реализация ее может быть сопряжена с большими трудностями. Оптимальную передаточную функцию, за исключением простейших случаев, следует считать идеальной функцией, к которой по возможности надо стремиться при выполнении реальной автоматической системы. Теория оптимальных систем излагается в работах [22, 88, 89].

## Глава 12 МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 12.1. Общие соображения

Под синтезом системы автоматического управления понимается направленный расчет, имеющий конечной целью отыскание рациональной структуры системы и установление оптимальных величин параметров ее отдельных звеньев. По отношению к основе синтеза в настоящее время имеются разные точки зрения.

Синтез можно трактовать как пример вариационной задачи и рассматривать такое построение системы, при котором для данных условий работы (управляющие и возмущающие воздействия, помехи, ограничения по времени работы и т. п.) обеспечивается теоретический минимум ошибки.

Синтез также можно трактовать как инженерную задачу, сводящуюся к такому построению системы, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Подразумевается, что из многих возможных решений инженер, проектирующий систему, будет выбирать те, которые являются оптимальными с точки зрения существующих конкретных условий и требований к габаритам, весу, простоте, надежности и т. п.

Иногда в понятие инженерного синтеза вкладывается еще более узкий смысл и рассматривается синтез, имеющий целью определение вида и параметров корректирующих средств, которые необходимо добавить к некоторой неизменяемой части системы (объект с управляющим устройством), чтобы обеспечить требуемые динамические качества.

При инженерном синтезе системы автоматического управления необходимо обеспечить, во-первых, требуемую точность и, во-вторых, приемлемый характер переходных процессов.



Решение первой задачи в большинстве случаев сводится к определению требуемого общего коэффициента передачи разомкнутой системы и, в случае необходимости, — вида корректирующих средств, повышающих точность системы (комбинированное управление, издромпные механизмы и т. п.). Эта задача может решаться при помощи определения ошибок в типовых режимах на основе тех критериев точности, которые были изложены в главе 8. Решение этой задачи, как правило, не сопряжено с трудностями принципиального или вычислительного характера, так как критерии точности достаточно просты для их практического использования. В сложных случаях можно прибегать к помощи моделирования. Решение оказывается сравнительно простым вследствие необходимости установления значений относительно небольшого числа параметров. В простейшем случае необходимо найти только коэффициент передачи разомкнутой системы.

Решение второй задачи — обеспечение приемлемых переходных процессов — оказывается почти всегда более трудным вследствие большого числа варьируемых параметров и многозначности решения задачи демпфирования системы. Поэтому существующие инженерные методы часто ограничиваются решением только второй задачи, так как их авторы считают, что обеспечение требуемой точности может быть достаточно просто сделано на основании использования существующих критериев точности и совершенствования их практически не требуется.

В настоящее время для целей синтеза систем автоматического управления широко используются вычислительные машины, позволяющие производить полное или частичное моделирование проектируемой системы. При таком моделировании становится возможным наиболее полно исследовать влияние различных факторов нелинейности, зависимость параметров от времени и т. п.

Однако моделирование на вычислительных машинах не может заменить расчетных методов проектирования, которые во многих случаях позволяют исследовать вопрос в общем виде и среди многих решений найти оптимальное. Поэтому, несмотря на развитие и распространение машинных методов синтеза, теория должна располагать собственными методами, которые дополняли бы моделирование и являлись бы теоретической базой при отыскании оптимального решения.

## § 12.2. Корневой метод

Наиболее простой корневой метод разработан Т. Н. Соколовым [85]. Сущность его сводится к следующему<sup>1</sup>.

Пусть имеется характеристическое уравнение системы

$$p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_n = 0. \quad (12.1)$$

<sup>1</sup> В соответствии с изложенным в § 12.1 рассматривается только задача получения приемлемых динамических качеств при заданном значении коэффициента, т. е. последнего члена характеристического уравнения.

С точки зрения скорейшего затухания переходного процесса важно, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения были наибольшими. Сумма вещественных частей всех корней численно равна первому коэффициенту характеристического уравнения (12.1). Поэтому при заданной величине этого коэффициента наивыгоднейшие результаты получаются при равенстве вещественных частей всех корней. Однако расчеты и исследования построенных систем показывают, что стремление удовлетворить поставленному требованию приводит к совершенно нереальным конструктивным характеристикам отдельных звеньев. Эти расчеты и исследования показывают, что из общего числа корней характеристического уравнения всегда можно выделить два или три корня с меньшей по абсолютному значению вещественной частью, которые и определяют ход основного процесса. Остальные же корни характеризуют быстро затухающие составляющие, оказывающие влияние только на начальной стадии переходного процесса.

Примем, что основной характер переходного процесса определяется двумя корнями. Тогда уравнение (12.1) удобно представить в виде

$$(p^{n-2} + C_1 p^{n-3} + \dots + C_{n-2}) (p^2 + B_1 p + B_2) = 0. \quad (12.2)$$

Второй сомножитель (12.2) и будет определять основной характер процесса.

Для уменьшения погрешностей проектируемой системы важно, чтобы коэффициент  $B_2$  в основном множителе имел возможно большую величину. Однако чрезмерное увеличение  $B_2$  приводит к колебательному характеру переходного процесса.

Оптимальное соотношение между коэффициентами  $B_1$  и  $B_2$  определяется из условия получения затухания за один период  $\xi = 98\%$ , которому соответствует выражение (см. § 8.5)

$$2\pi \frac{\alpha}{\beta} = \ln \frac{1}{1-\xi} = \ln \frac{1}{0,02} = 4, \quad (12.3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественная и мнимая части комплексного корня, характеризующего основной процесс.

Учитывая соотношения:

$$\alpha = \frac{B_1}{2}, \quad \beta = \sqrt{B_2 - \frac{B_1^2}{4}},$$

из (12.3) можно получить

$$B_2 = \frac{\pi^2 + 4}{16} B_1^2 = k_n B_1^2. \quad (12.4)$$

Множитель  $k_n$ , определяющий соотношение между коэффициентами основного множителя характеристического уравнения, является критерием переходного режима, зависящим от выбранной степени затухания. Формула (12.4) показывает желаемое соотношение между коэффициентами характеристического уравнения, к которому надо стремиться при проектировании системы. Это должно осуществляться введением различных корректирующих средств.

Из (12.3) можно также получить требуемое соотношение между мнимой и вещественной частями корня (колебательность):

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} = 1,57. \quad (12.5)$$

В ряде случаев для описания основного переходного процесса оказывается более целесообразным воспользоваться уравнением третьей степени

$$p^3 + B_1 p^2 + B_2 p + B_3 = 0. \quad (12.6)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$(p + C_{11})(p^2 + B_{11}p + B_{21}) = 0. \quad (12.7)$$

Между коэффициентами уравнений (12.6) и (12.7) имеют место соотношения:

$$B_1 = C_{11} + B_{11}, \quad B_2 = C_{11}B_{11} + B_{21}, \quad B_3 = C_{11}B_{21}.$$

Положим, что во втором множителе (12.7) по-прежнему

$$B_{21} = \frac{\pi^2 + 4}{16} B_{11}^2. \quad (12.8)$$

Поэтому корни характеристического уравнения (12.6) и (12.7) равны:

$$p_1 = -C_{11}, \quad (12.9)$$

$$p_{2,3} = -\frac{B_{11}}{2} \pm j \frac{B_{11}}{2} \frac{\pi}{2}. \quad (12.10)$$

Так как вещественная часть корней должна быть возможно большей, то целесообразно задать

$$C_{11} = \frac{B_{11}}{2} \quad (12.11)$$

и, следовательно,

$$B_{11} = \frac{2}{3} B_1, \quad (12.12)$$

$$C_{11} = \frac{1}{3} B_1, \quad (12.13)$$

$$B_{21} = \frac{\pi^2 + 4}{36} B_1^2. \quad (12.14)$$

Подставив полученные значения в формулы разложения, находим зависимость между коэффициентами основного уравнения. Если  $B_1$  задано, то

$$B_2 = \frac{\pi^2 + 12}{36} B_1^2, \quad (12.15)$$

$$B_3 = \frac{\pi^2 + 4}{108} B_1^3. \quad (12.16)$$

Эти соотношения должны реализоваться при проектировании системы управления.

Корни основного уравнения

$$p_1 = -\frac{1}{3} B_1, \quad (12.17)$$

$$p_{2,3} = -\frac{1}{3} B_1 \pm j \frac{\pi}{6} B_1. \quad (12.18)$$

Выбор уравнения для описания основной составляющей переходного процесса зависит от структурной схемы проектируемой системы.

Рассмотрим теперь связь между основной и дополнительной составляющими переходного процесса для заданного затухания  $\zeta$  (8.40). Для этой цели полезно представить характеристическое уравнение (12.1) в таком виде:

$$p^n A_1 \Omega_0 p^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 p^{n-2} + \dots + \Omega_0^n = 0, \quad (12.19)$$

где  $\Omega_0$  — произвольно выбранный среднегеометрический корень,  $A_1, \dots, A_{n-1}$  — безразмерные коэффициенты.

Записанное в такой форме уравнение третьей степени принимает вид

$$p^3 + A_1 \Omega_0 p^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 p + \Omega_0^3 = 0. \quad (12.20)$$

Разлагая его на множители, находим

$$(p + C_1)(p^2 + B_1 p + B_2) = 0.$$

Соотношения для коэффициентов:

$$A_1 \Omega_0 = C_1 + B_1, \quad (12.21)$$

$$A_2 \Omega_0^2 = B_2 + C_1 B_1, \quad (12.22)$$

$$\Omega_0^3 = C_1 B_2. \quad (12.23)$$

Введем коэффициент  $a$  и положим

$$B_1 = a A_1 \Omega_0. \quad (12.24)$$

Тогда

$$C_1 = (1 - a) A_1 \Omega_0, \quad (12.25)$$

$$B_2 = k_{\Pi} B_1^2 = k_{\Pi} a^2 A_1^2 \Omega_0^2. \quad (12.26)$$

Подставив полученные значения коэффициентов в формулы (12.22) и (12.23), можем записать:

$$A_2 \Omega_0^2 = [1 - a(1 - k_{\Pi})] a A_1^2 \Omega_0^2, \quad \Omega_0^3 = k_{\Pi} (1 - a) a^2 A_1^3 \Omega_0^3,$$

откуда

$$A_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{k_{\Pi} (1 - a) a^2}}, \quad (12.27)$$

$$A_2 = [1 - a(1 - k_{\Pi})] a A_1^2. \quad (12.28)$$

Таким образом, безразмерные коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  являются функциями критерия переходного процесса  $k_{\Pi}$ , зависящего от желаемой степени затухания и коэффициента разложения  $a$ , определяющего соотношение постоянных времени затухания отдельных составляющих.

При  $a = \frac{2}{3}$  имеем  $\frac{C_1}{B_1} = \frac{1 - a}{a} = \frac{1}{2}$ , т. е.  $C_1 = \frac{B_1}{2}$ , и отношение постоянных времени

$$T_C = \frac{1}{C_1} \text{ и } T_{\alpha} = \frac{B_1}{2} \text{ будет } \frac{T_C}{T_{\alpha}} = \frac{B_1}{2C_1} = 1.$$

Следовательно, обе составляющие переходного процесса затухают с одинаковой скоростью.

Аналогичным образом можно получить выражения для коэффициентов характеристического уравнения четвертой, пятой и более высоких степеней [85].

Синтез системы управления начинается с того, что для выбранной структурной схемы и введенных корректирующих средств находится характеристическое уравнение. Затем варьируются параметры основного канала и корректирующих средств таким образом, чтобы получить требуемые значения коэффициентов характеристического уравнения (12.1) или (12.20).

Этот метод оказывается достаточно эффективным в случае сравнительно невысокой степени характеристического уравнения ( $n = 2 + 4$ ). В более сложных случаях обеспечить требуемые значения коэффициентов характеристического уравнения оказывается затруднительно, так как некоторые параметры системы и корректирующих средств могут влиять сразу на несколько коэффициентов характеристического уравнения.

Недостатком этого метода является также то, что необходимо задаваться видом корректирующих средств. Поэтому получаемое решение будет во многом зависеть от опытности проектианта.

### § 12.3. Метод корневых годографов

Качество системы управления с точки зрения быстродействия и запаса устойчивости может характеризоваться расположением корней числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы, т. е. расположением нулей и полюсов передаточной функции (§ 8.5).

Зная эти корни, можно изобразить их расположение на комплексной плоскости корней. При расчете системы целесообразно проследить, как меняется общая картина расположения корней при изменении отдельных параметров, например коэффициента передачи разомкнутой системы, постоянных времени корректирующих цепей и т. п., с целью установления оптимальных значений этих параметров.

При плавном изменении значения какого-либо параметра корни будут перемещаться на плоскости корней, прочерчивая некоторую кривую, которую будем называть *корневым годографом* или *траекторией корней*. Построив траектории всех корней, можно выбрать такое значение варьируемого параметра, которое соответствует наилучшему расположению корней.

Первый способ построения траекторий корней заключается в следующем. Пусть имеется дифференциальное уравнение замкнутой системы (5.3), записанное для управляемой величины при наличии задающего воздействия:

$$D(p)y(t) = B(p)g(t),$$

где

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \quad B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m.$$

Это уравнение записано здесь для случая равенства нулю возмущающих воздействий. Оно может быть записано также для любого возмущающего воздействия. Это не изменит его формы и не отразится на дальнейших рассуждениях.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (12.29)$$

Полюсы передаточной функции, т. е. корни знаменателя, обозначим через  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , а ее нули (корни числителя) — через  $p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0$ .

Коэффициенты числителя и знаменателя (12.29) определенным образом выражены через параметры объекта, управляющего устройства и корректирующих устройств. Если нужно выбрать величину какого-либо параметра  $\beta$  (постоянная времени, коэффициент усиления и т. п.), входящего как угодно в коэффициенты (12.29), то необходимо принять некоторые постоянные значения для всех остальных параметров, а для искомого параметра  $\beta$  задавать различные числовые значения  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  внутри реально возможных пределов изменения этого параметра в данной системе. Для каждого из этих вариантов необходимо затем вычислить корни числителя и знаменателя (12.29). Результаты вычислений можно свести в таблицу, на основании которой легко строятся все траектории корней.

Если нужно выбрать два или несколько параметров системы, то такого рода вычисления нужно проделать несколько раз, меняя каждый раз один из параметров при заданных значениях всех остальных.

Вычисление корней при этом можно производить при помощи стандартных программ для цифровых машин с выводом траектории корней на экран дисплея. Другой способ построения траекторий корней рассмотрен в [91].

## § 12.4. Метод стандартных переходных характеристик

Для получения необходимых значений коэффициентов передаточной функции разомкнутой системы можно воспользоваться стандартными переходными характеристиками. Для большей общности эти характеристики строятся в нормированном виде. В этом случае по оси времени откладывается относительное время  $\tau = \Omega_0 t$ , где  $\Omega_0$  — среднегеометрический корень характеристического уравнения, определяющий быстродействие системы.

При построении стандартных переходных характеристик необходимо задаться определенным распределением корней характеристического уравнения.

Ниже приводятся стандартные характеристики и соответствующие передаточные функции [44].

Для систем с астатизмом первого порядка корни приняты вещественными, причем они составляют арифметическую прогрессию. В табл. 12.1 приведены передаточные функции разомкнутой системы для различных порядков характеристического уравнения  $n = 2 + 4$ , получающиеся при этом значения перерегулирования  $\sigma\%$  и добротности по скорости  $K_v$ .

Нормированные переходные характеристики для каждого случая приведены на рис. 12.1, а.

Для систем с астатизмом второго порядка корни также приняты вещественными, причем они составляют геометрическую прогрессию. Соответствующие передаточные функции приведены в табл. 12.2, а переходные характеристики — на рис. 12.1, б.

Таблица 12.1. Стандартные передаточные функции разомкнутой системы с астатизмом первого порядка при  $n = 2 + 4$

$n$	$\sigma\%$	$K_v$	$W(p)$
2	5	$\frac{\Omega_0}{1,4}$	$\frac{\Omega_0^2}{p^2 + 1,4\Omega_0 p}$
3	8	$\frac{\Omega_0}{2}$	$\frac{\Omega_0^3}{p^3 + 2\Omega_0 p^2 + 2\Omega_0^2 p}$
5	10	$\frac{\Omega_0}{2,6}$	$\frac{\Omega_0^4}{p^4 + 2,6\Omega_0 p^3 + 3,4\Omega_0^2 p^2 + 2,6\Omega_0^3 p}$

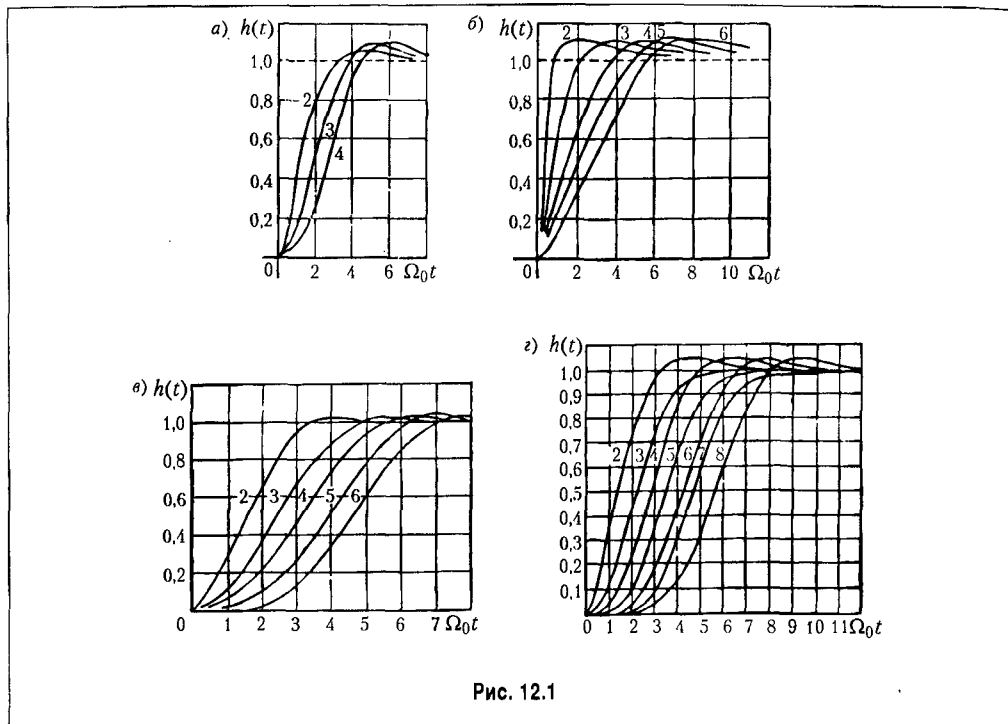


Рис. 12.1

 Таблица 12.2. Стандартные передаточные функции разомкнутой системы с астатизмом второго порядка при  $n = 2 + 6$ 

$n$	$\sigma\%$	$K_e$	$W(p)$
2	10	$\Omega_0^2$	$\frac{2,5\Omega_0 p + \Omega_0^2}{p^2}$
3	10	$\frac{\Omega_0^2}{5,1}$	$\frac{6,3\Omega_0^2 p + \Omega_0^3}{p^3 + 5,1\Omega_0 p^3}$
4	10	$\frac{\Omega_0^2}{16}$	$\frac{12\Omega_0^3 p + \Omega_0^4}{p^4 + 7,2\Omega_0 p^3 + 16\Omega_0^2 p^2}$
5	10	$\frac{\Omega_0^2}{38}$	$\frac{18\Omega_0^4 p + \Omega_0^5}{p^5 + 9\Omega_0 p^4 + 29\Omega_0^2 p^3 + 38\Omega_0^3 p^2}$
6	10	$\frac{\Omega_0^2}{73}$	$\frac{25\Omega_0^5 p + \Omega_0^6}{p^6 + 11\Omega_0 p^5 + 43\Omega_0^2 p^4 + 83\Omega_0^3 p^3 + 73\Omega_0^4 p^2}$



Использование метода стандартных переходных характеристик для синтеза заключается в том, что для принятой структурной схемы выбирается приемлемый вид переходного процесса. Это позволяет установить необходимое значение среднегеометрического корня  $\Omega_0$ . Далее оказываются известными все коэффициенты желаемой передаточной функции системы. Введением различных корректирующих средств необходимо добиться того, чтобы коэффициенты реальной передаточной функции были возможно ближе к коэффициентам желаемой передаточной функции.

Этот метод может применяться и в том случае, когда важно обеспечить требуемую точность работы системы, которая может быть задана, например, при помощи коэффициентов ошибок. Тогда при заданных значениях коэффициентов ошибок можно определить требуемое значение  $K_v$  или  $K_e$ , а по ним найти величину  $\Omega_0$ . Далее расчет ведется так, как описано выше.

Недостатком рассмотренного метода является то, что при построении стандартных переходных процессов приняты вещественные корни. Это во многих случаях не приводит к оптимальному решению. Однако стандартные переходные характеристики можно сравнительно просто построить для любого другого расположения корней, в том числе и для комплексных корней. Предлагается, например, такое решение [44]. Пусть характеристическое уравнение записано в виде

$$p^n + A_1\Omega_0 p^{n-1} + A_2\Omega_0^2 p^{n-2} + \dots + \Omega_0^n = 0,$$

где  $\Omega_0$  — среднегеометрический корень.

Если принять все корни равными и вещественными, то это характеристическое уравнение приобретает вид

$$(p + \Omega_0)^n = 0. \quad (12.30)$$

В этом случае безразмерные коэффициенты  $A_1, \dots, A_{n-1}$  являются коэффициентами бинома Ньютона.

Однако переходный процесс затухает быстрее, если характеристическое уравнение при четном  $n$  имеет вид

$$(p^2 + 2\zeta\Omega_0 p + \Omega_0^2)^{\frac{n}{2}} = 0 \quad (12.31)$$

и при нечетном  $n$

$$(p + \Omega_0)(p^2 + 2\zeta\Omega_0 p + \Omega_0^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0, \quad (12.32)$$

причем безразмерный параметр затухания  $\zeta = 0,7 \div 0,8$ .

В табл. 12.3 для случая  $\zeta = 0,75$  приведены значения безразмерных коэффициентов  $A_1, \dots, A_{n-1}$ , причем  $A_0 = 1$  и  $A_n = 1$ , для степени характеристического уравнения от 2 до 6.

На рис. 12.1, в приведены нормированные переходные характеристики, соответствующие характеристическому уравнению (12.32), если в него ввести правую часть в виде  $\Omega_0^n f(t)$ .

Таблица 12.3. Коэффициенты характеристического уравнения для кратных корней

$n$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
2	1,5				
3	2,5	2,5			
4	3	4,25	3		
5	4	7,25	7,25	4	
6	4,5	9,25	12,375	9,25	4,5

Таблица 12.4. Коэффициенты характеристического уравнения (оптимальный случай)

$n$	$\gamma/\eta$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
2	1	1,38						
3	1,45	2,05	2,39					
4	0,79	2,6	3,8	2,8				
5	1,5	2,5	5,3	5,46	3,64			
6	0,64	3,73	8,0	10,3	8,56	4,18		
7	1,5	2,76	8,12	11,74	14,35	11,5	4,86	
8	0,57	4,65	9,42	22,7	28,4	24,3	15,0	5,45

Переходный процесс затухает еще быстрее, если принять не кратное распределение комплексных корней [44]. В этом случае все корни имеют одинаковую вещественную часть  $\eta$ . Мнимые части корней образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\gamma$  и первым членом также  $\gamma$ . Для каждой степени характеристического уравнения существует некоторое оптимальное отношение  $\gamma/\eta$ , которому соответствует наибольшее быстродействие в безразмерном времени. Безразмерные коэффициенты характеристического уравнения для этого случая приведены в табл. 12.4, а переходные характеристики изображены на рис. 12.1, г.

При наличии нулей у передаточной функции принятые в табл. 12.3 и 12.4 распределения корней оказываются неудачными вследствие появления большого перерегулирования. В этом случае оказывается более выгодным использование расположения корней на вещественной оси по арифметической прогрессии (см. табл. 12.1 и 12.2).

## § 12.5. Метод логарифмических амплитудных характеристик

Наиболее приемлемы для целей синтеза логарифмические амплитудные характеристики, так как построение л. а. х., как правило, может делаться почти без вычислительной работы. Особенно удобно использовать асимптотические л. а. х.

Процесс синтеза обычно включает в себя следующие операции.

1. Построение желаемой л. а. х. Построение желаемой л. а. х. делается на основе тех требований, которые предъявляются к проектируемой системе управления. При построении желаемой л. а. х. необходимо быть уверенным, что вид амплитудной характеристики полностью определяет характер переходных процессов и нет необходимости вводить в рассмотрение фазовую характеристику. Это будет выполняться в случае минимально-фазовых систем. В этом случае амплитудная характеристика однозначно определяет вид фазовой характеристики. Напомним, что передаточная функция разомкнутой минимально-фазовой системы не должна иметь нулей и полюсов, расположенных в правой полуплоскости.

2. Построение располагаемой л. а. х. Под располагаемой л. а. х. понимается характеристика исходной системы управления, построенной исходя из требуемых режимов стабилизации или слежения, требуемых выходной мощности, скорости, ускорения и т. п. Обычно под исходной системой понимается система, состоящая из управляемого объекта и управляющего устройства и не снабженная необходимыми корректирующими средствами, обеспечивающими требуемое качество переходного процесса. Исходная система должна быть также минимально-фазовой.

3. Определение вида и параметров корректирующего устройства. Наиболее просто определяется корректирующее устройство последовательного типа. Если желаемая передаточная функция разомкнутой системы —  $W_{\text{ж}}(p)$ , располагаемая —  $W_{\text{р}}(p)$  и передаточная функция корректирующего звена последовательного типа —  $W_{\text{пз}}(p)$ , то можно записать равенство

$$W_{\text{ж}}(p) = W_{\text{р}}(p)W_{\text{пз}}(p), \quad (12.33)$$

откуда

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{W_{\text{ж}}(p)}{W_{\text{р}}(p)}. \quad (12.34)$$

Для л. а. х. можно записать

$$L_{\text{пз}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{р}}(\omega). \quad (12.35)$$

Таким образом, при использовании л. а. х. весьма легко осуществляется синтез последовательных корректирующих средств, так как л. а. х. корректирующих средств получается простым вычитанием ординат располагаемой л. а. х. из ординат желаемой.

4. Техническая реализация корректирующих средств. По виду л. а. х. необходимо подобрать схему и параметры корректирующего звена последовательного типа. В случае необходимости последовательное звено может быть пересчитано на эквивалентное параллельное звено или эквивалентную обратную связь по формулам, которые приведены в § 10.4.

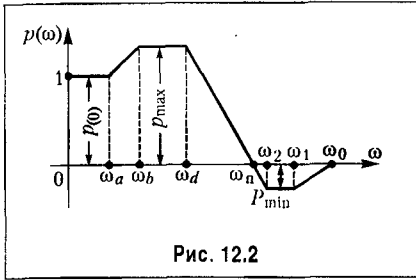


Рис. 12.2

5. Поверочный расчет и построение переходного процесса. В случае необходимости полученная система управления вместе с корректирующими средствами может быть исследована обычными методами анализа.

Ниже приводится краткое изложение метода синтеза, разработанного В. В. Солодовниковым [89] для следящих систем с астатизмом первого порядка.

В основу синтеза положены следующие показатели качества:

- 1) перерегулирование  $\sigma\%$  при единичном ступенчатом воздействии на входе;
- 2) время переходного процесса  $t_{п}$ ;
- 3) коэффициенты ошибок  $c_1$  и  $c_2/2$ .

В рассмотрение вводится типовая вещественная частотная характеристика замкнутой системы (рис. 12.2). Эта характеристика описывается следующими величинами:  $\kappa = \omega_d/\omega_n$  — основной коэффициент наклона;  $\kappa_a = \omega_a/\omega_b$  и  $\kappa_1 = \omega_1/\omega_0$  — дополнительные коэффициенты наклона;  $\lambda_1 = \omega_b/\omega_n$  и  $\lambda_2 = \omega_2/\omega_0$  — основной и дополнительный коэффициенты формы;  $\omega_n$  — интервал положительности.

Если в следящей системе с приемлемыми динамическими качествами для вещественной частотной характеристики выполняются условия:

$$\kappa \leq 0,8, \quad \kappa_a \geq 0,4, \quad \lambda \geq 0,5,$$

то, как показало построение соответствующих типовым вещественным характеристикам переходных процессов, величина перерегулирования в основном определяется величиной  $P_{max}$ . В этом случае перерегулирование  $\sigma\%$  и время переходного процесса могут быть определены по кривым, приведенным на рис. 12.3.

Таким образом, на основании заданного перерегулирования  $\sigma\%$  можно определить  $P_{max}$  и затем по  $P_{max}$  зависимость между временем переходного процесса  $t_{п}$  и частотой  $\omega_n$ , соответствующей интервалу положительности вещественной характеристики. По заданному значению  $t_{п}$  легко определяется требуемое значение  $\omega_n$ .

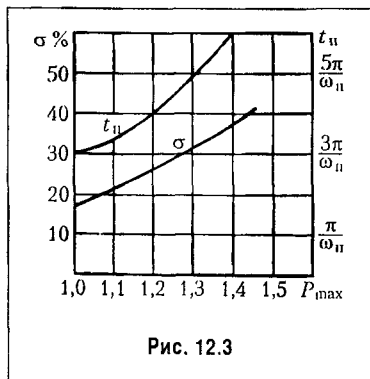


Рис. 12.3

Однако отрицательная часть вещественной характеристики также влияет на перерегулирование, увеличивая его на величину  $\Delta\sigma \leq 0,3 P_{min}$ . Это можно учесть, положив  $P_{min} \approx 1 - P_{max}$ . Тогда по кривой, изображенной на рис. 12.3, можно найти допустимые значения  $P_{max}$  и  $P_{min} = 1 - P_{max}$ , при которых суммарное перерегулирование не будет превосходить заданного значения  $\sigma\%$ .

В табл. 12.5 приведены некоторые типовые значения  $P_{max}$  и соответствующие им качественные показатели замкнутой системы.

После нахождения основных величин для типовой вещественной характеристики переходят к фор-

Таблица 12.5

$P_{\max}$	$\sigma\%$	$t_n$	Число колебаний	$P_{\max}$	$\sigma\%$	$t_n$	Число колебаний
1,4	$\leq 38$	$\leq 6\pi/\omega_{\Pi}$	$\leq 3$	1,2	$\leq 26$	$\leq 4\pi/\omega_{\Pi}$	$\leq 2$
1,3	$\leq 32$	$\leq 5\pi/\omega_{\Pi}$	$\leq 2$	1,0	$\leq 17$	$\leq 3\pi/\omega_{\Pi}$	1

мированию желаемой логарифмической амплитудной характеристики. При этом очевидно, что фазовая характеристика разомкнутой системы должна так проходить, чтобы обеспечивалась не только устойчивость, но и определенный запас устойчивости.

Вещественная характеристика замкнутой системы связана с частотной передаточной функцией разомкнутой системы  $W(j\omega)$  зависимостью

$$P(\omega) = \operatorname{Re} \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} = \operatorname{Re} \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1+U(\omega) + jV(\omega)}. \quad (12.36)$$

Задаваясь различными значениями  $P(\omega) = \text{const}$ , на комплексной плоскости можно построить кривые, дающие связь между вещественной и мнимой частями  $W(j\omega)$  или между ее модулем и фазой (или запасом по фазе). На рис. 12.4 приведено подоб-

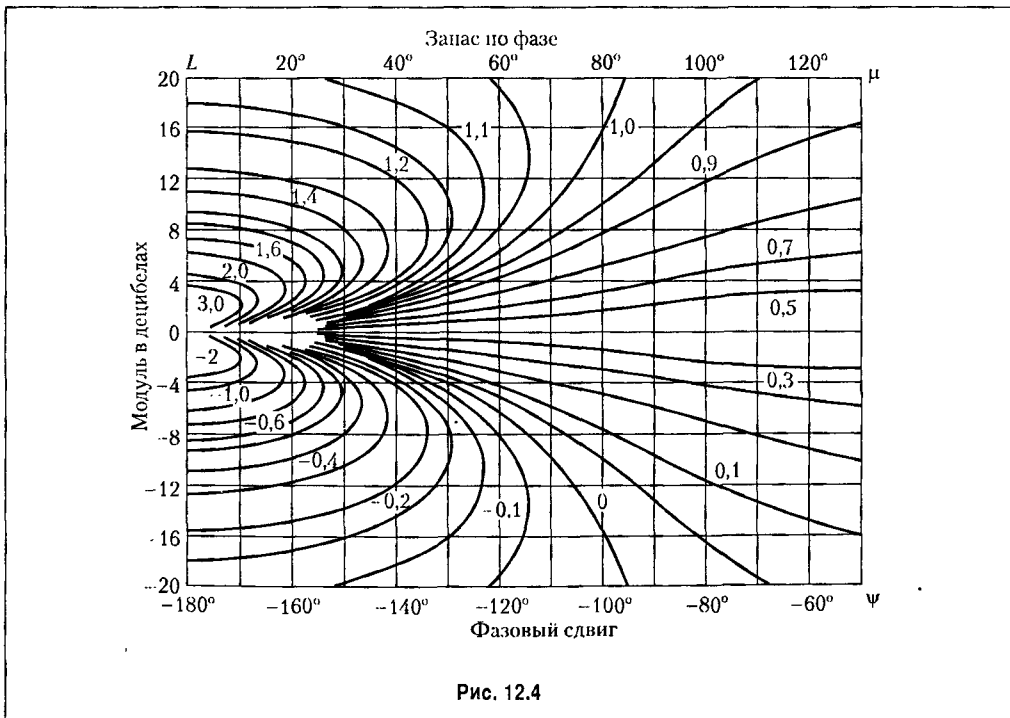


Рис. 12.4

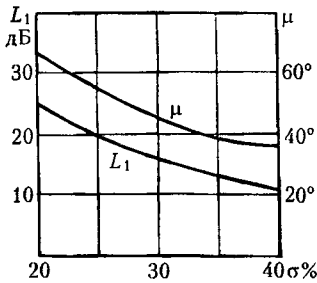


Рис. 12.5

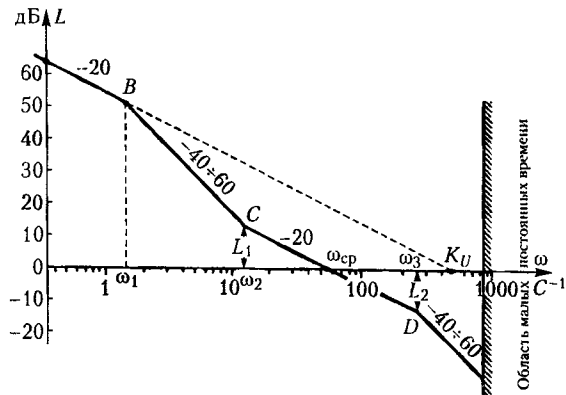


Рис. 12.6

ное семейство кривых для амплитуды, откладываемой в децибелах. Цифры около соответствующих кривых указывают значение  $P(\omega)$ . Если на этом графике нанести амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, то по точкам пересечения с кривыми можно построить вещественную характеристику.

Кривые, приведенные на рис. 12.4, позволяют сформулировать требования к амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы, которые необходимо выполнить, чтобы обеспечить получение желаемой типовой характеристики.

Так, например, если необходимо, чтобы  $\sigma\% \leq 30\%$ , то максимальная и минимальная ординаты вещественной характеристики в соответствии с табл. 12.5 не должны превышать значений (ориентировочно)  $P_{\max} \leq 1,2$  и  $|P_{\min}| \leq 0,2$ . Это означает, что логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика, нанесенная на рис. 12.4, не должна заходить в области, ограниченные кривыми с отметками 1,2 и 0,2. Сформулированное условие будет выполняться, если амплитудно-фазовая характеристика не будет заходить в прямоугольник, образованный горизонтальными линиями  $L_1 = 16$  дБ и  $L_2 = -16$  дБ и вертикальной линией  $\psi = -135^\circ$  (или в величинах запаса по фазе  $\mu = 180^\circ + \psi = 45^\circ$ ).

В соответствии с этим на рис. 12.5 построены кривые, которые позволяют при заданном значении перерегулирования выбирать требуемое значение запаса по модулю  $L_1 = |L_2|$  и запаса по фазе  $\mu$ .

Построение желаемой асимптотической л. а. х. производится в следующем порядке.

Первая низкочастотная асимптота проводится так, чтобы она имела наклон  $-20$  дБ/дек, соответствующий астатизму первого порядка (рис. 12.6). Продолжение асимптоты должно пересечь ось частот при частоте, равной желаемой добротности по скорости:

$$K_v = 1/c_1, \quad (12.37)$$

где  $c_1$  — заданный коэффициент ошибки.

При однократном изломе в точке  $B$  первая сопрягающая частота определяется по формуле

$$\omega_1 = \frac{2c_1}{c_2} = \frac{K_\varepsilon}{K_v}, \quad (12.38)$$

где  $K_\varepsilon = 2/c_2$  — добротность системы по ускорению, а при двукратном изломе — по формуле

$$\omega_1 = \frac{4c_1}{c_2} = \frac{K_\varepsilon}{K_v}, \quad (12.39)$$

Далее по найденной из рис. 12.3 частоте положительности  $\omega_{\text{п}}$  определяется частота среза л. а. х.  $\omega_{\text{ср}}$  так, чтобы она удовлетворяла условию

$$\omega_{\text{ср}} = (0,6 + 0,9) \omega_{\text{п}}. \quad (12.40)$$

Среднечастотный участок желаемой л. а. х. образуется асимптотой с наклоном  $-20$  дБ/дек, проводимой так, чтобы она пересекла ось частот при  $\omega_{\text{ср}}$ . Этот участок проводится влево и вправо до достижения модулей, равных  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 12.6). Затем производится сопряжение среднечастотного участка с низкочастотными асимптотами и высокочастотной частью.

Для облегчения построения желаемой л. а. х. вводятся типовые передаточные функции разомкнутой системы и им соответствующие л. а. х. Они даны в табл. 12.6.

Передаточные функции и л. а. х. всех четырех типов полностью определяются заданием четырех величин: коэффициента передачи  $K$  и трех сопрягающих частот

Таблица 12.6. Типовые передаточные функции и л. а. х.

Тип л. а. х.	Передаточная функция	Отрицательные наклоны асимптот в дБ/дек
I	$\frac{K(1+\tau_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)}$	20-40-20-40
II	$\frac{K(1+\tau_2 p)^2}{p(1+T_1 p)^2(1+T_3 p)}$	20-60-20-40
III	$\frac{K(1+\tau_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)^2}$	20-40-20-60
IV	$\frac{K(1+\tau_2 p)^2}{p(1+T_1 p)^2(1+T_3 p)^2}$	20-60-20-60

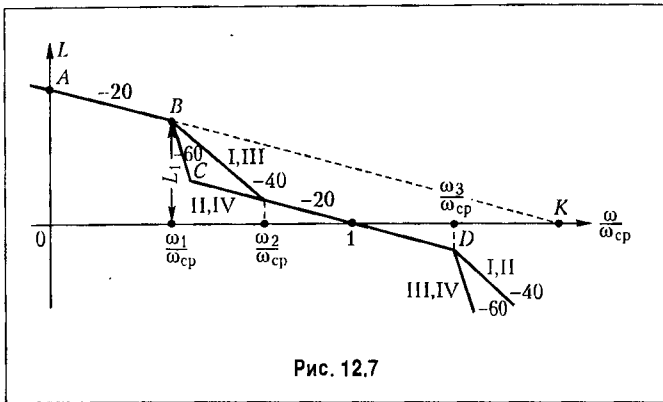


Рис. 12.7

$\omega_1 = 1/T_1, \omega_2 = 1/\tau_2$  и  $\omega_3 = 1/T_3$  (рис. 12.7). Л. а. х. полностью определяется также заданием следующих четырех величин: коэффициента передачи в децибелах,  $L_1$  при частоте  $\omega = \omega_1$ , частоты среза  $\omega_{cp}$  и двух относительных сопрягающих частот  $\omega_1/\omega_{cp}$  и  $\omega_3/\omega_{cp}$ .

К малым параметрам (рис. 12.6) относятся те постоянные времени системы, пренебрежение влиянием

которых не сказывается существенно на динамических качествах системы. Обычно считают, что в качестве «малых» постоянных времени можно принять такие, которые удовлетворяют условию

$$T_i \leq \frac{1}{(5 \div 10)\omega_3} \tag{12.41}$$

При построении желаемой л. а. х. нужно следить, чтобы она как можно меньше отличалась от располагаемой л. а. х., что нужно для упрощения корректирующих средств. Это замечание особенно относится к низкочастотной и высокочастотной частям л. а. х. Желательно делать так, чтобы по крайней мере первая низкочастотная и последняя высокочастотная асимптоты обеих л. а. х. сливались вместе. Совпадение низкочастотных асимптот л. а. х. достигается за счет выбора соответствующего коэффициента передачи в системе  $K$ , равного требуемому. Совпадение высокочастотных асимптот достигается соответствующим выбором желаемой л. а. х. в высокочастотной области. Заметим, что при формировании желаемой л. а. х. можно увеличивать, если это необходимо для совпадения асимптот, запасы по модулю  $L_1$  и  $-L_2$ , так как такое увеличение только повысит качество системы.

После формирования всей желаемой л. а. х. необходимо проверить выдерживается ли требуемое значение запаса по фазе, определяемое из графика на рис. 12.5, для модулей, лежащих в пределах

$$L_1 \geq L(\omega) \geq L_2 \tag{12.42}$$

Для этой проверки необходимо подсчитать фазовый сдвиг в двух крайних точках среднечастотного участка, имеющего наклон  $-20$  дБ/дек, т. е. при частотах  $\omega = \omega_2$  и  $\omega = \omega_3$ . Подсчет фазового сдвига делается на основании принятой желаемой передаточной функции. Так, например, для передаточной функции типа I (см. табл. 12.6) он равен

$$\psi = -90^\circ - \arctg \omega T_1 + \arctg \omega \tau_2 - \arctg \omega T_3.$$

Если требуемый запас по фазе не выдержан, то необходимо расширить среднечастотный участок и произвести вновь проверку.



Чтобы окончательно убедиться в приемлемости сформированной л. а. х., можно по известной желаемой передаточной функции построить любым методом переходный процесс и проверить величины  $\sigma\%$  и  $t_{п}$ .

Далее из ординат желаемой л. а. х. вычитаются ординаты располагаемой л. а. х. Получившаяся л. а. х. соответствует передаточной функции последовательного корректирующего звена. При необходимости это звено может быть пересчитано на эквивалентную обратную связь или эквивалентное параллельное корректирующее звено (см. главу 10).

## § 12.6. Синтез систем автоматического управления на основе частотных критериев качества

Синтез систем автоматического управления методом логарифмических амплитудных характеристик является в настоящее время одним из самых удобных и наглядных. Наиболее трудным моментом при расчете методом логарифмических амплитудных характеристик является установление связи показателей качества переходного процесса с параметрами желаемой л. а. х., что объясняется сравнительно сложной зависимостью между переходной характеристикой линейной системы и ее частотными свойствами. Задача построения желаемой л. а. х. значительно облегчается, если вместо оценки качества работы системы по ее переходной характеристике перейти к оценке качества непосредственно по ее частотным свойствам.

Для оценки качества любой системы управления, в том числе и следящей системы, необходимо знать ее точность, характеризуемую ошибками в некоторых типовых режимах, быстродействие, определяемое по способности системы работать при больших скоростях и ускорениях входного воздействия или по скорости протекания переходных процессов, и запас устойчивости, показывающий склонность системы к колебаниям. В соответствии с этим можно говорить о критериях точности, критериях быстродействия и критериях запаса устойчивости. При использовании частотных критериев необходимо основываться на тех или иных частотных свойствах системы.

При оценке точности по ошибкам при воспроизведении гармонического входного воздействия одновременно можно оценить и быстродействие по частоте этого воздействия. Тогда критерий точности и критерий быстродействия сливаются в один критерий динамической точности системы управления.

Ниже будут рассмотрены методы расчета систем, основанные на использовании частотных критериев качества. При этом кривая переходного процесса может, вообще говоря, не рассматриваться и не использоваться. Однако в целях иллюстрации будут даны универсальные нормированные кривые переходных процессов при единичном входном воздействии для рассматриваемых типовых л. а. х.

В дальнейшем изложении будут, как и ранее, рассматриваться линейные системы, состоящие из минимально-фазовых звеньев.

Под ошибкой следящей системы будет пониматься не действительное рассогласование между задающей и исполнительной осями, а только сигнал рассогласования, выявляемый чувствительным элементом системы. Это вызвано тем обстоятельством, что собственные ошибки чувствительных элементов, несмотря на их большой удельный вес в полной ошибке системы управления, не оказывают влияния на ста-

тический и динамический расчет последней и должны учитываться отдельно. Вопросы расчета ошибок чувствительных элементов относятся к сфере теории соответствующих устройств (сельсипов, вращающихся трансформаторов, потенциометров и т. п.).

Методика расчета излагается в основном применительно к следящим системам воспроизведения угла и воспроизведения скорости. Однако эта методика применима и для других систем автоматического управления.

**Требования к низкочастотной части желаемой л. а. х., связанные с необходимой точностью.** На основании требования по точности формируется низкочастотная часть желаемой л. а. х. следящей системы. Рассмотрим вначале астатические системы.

Наиболее просто оценить точность следящей системы можно по воспроизведению гармонического входного сигнала с амплитудой  $\vartheta_{1\max}$  и частотой  $\omega_k$ :

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1\max} \sin \omega_k t. \quad (12.43)$$

Амплитуда ошибки может быть найдена с помощью модуля передаточной функции по ошибке:

$$\vartheta_{\max} = |\Phi_{\vartheta}(j\omega_k)| \vartheta_{1\max} = \frac{\vartheta_{1\max}}{|1 + W(j\omega_k)|}, \quad (12.44)$$

где  $W(j\omega_k)$  — частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Так как в подавляющем большинстве случаев амплитуда ошибки значительно меньше амплитуды входного сигнала, т. е.  $\vartheta_{\max} \ll \vartheta_{1\max}$ , то справедливо соотношение  $|W(j\omega_k)| \gg 1$ . Поэтому вместо (12.44) можно пользоваться приближенным выражением

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{\vartheta_{1\max}}{|W(j\omega_k)|}. \quad (12.45)$$

Последнее выражение позволяет легко сформулировать требование к низкочастотной части л. а. х. следящей системы. Для того чтобы входное воздействие (12.43) воспроизводилось с ошибкой, не превышающей  $\vartheta_{\max}$ , л. а. х. системы должна проходить не ниже *контрольной точки*  $A_k$  с координатами

$$\omega = \omega_k, \quad L(\omega_k) = 20 \lg |W(j\omega_k)| = 20 \lg \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.46)$$

Часто при определении условий работы следящей системы оговариваются только максимальная скорость  $\Omega_{1\max}$  и максимальное ускорение  $\varepsilon_{1\max}$  слежения. В этом случае можно подобрать эквивалентные режимы гармонического входного воздействия. Вначале найдем такой режим (12.43), при котором амплитуда скорости и амплитуда ускорения равны максимальным заданным значениям. Очевидно, что этому режиму соответствуют:

$$\omega_k = \varepsilon_{1\max} / \Omega_{1\max}, \quad (12.47)$$

$$\vartheta_{1\max} = \Omega_{1\max}^2 / \varepsilon_{1\max}. \quad (12.48)$$

По этим величинам можно построить контрольную точку  $A_k$  (рис. 12.8) в соответствии с (12.46).

Будем теперь рассматривать режим гармонического входного воздействия, в котором амплитуда скорости по-прежнему равна максимальному значению, а амплитуда ускорения меньше максимального. Тогда контрольная частота (12.47) будет пропорционально уменьшаться, а амплитуда (12.48) возрастать обратно пропорционально амплитуде ускорения. При этом контрольная точка  $A_k$  будет перемещаться влево по прямой, имеющей наклон  $-20$  дБ/дек. В предельном случае, если принять амплитуду ускорения равной нулю, контрольная частота  $\omega_k \rightarrow 0$ . Это соответствует режиму вращения с постоянной скоростью  $\Omega_1 = \Omega_{1\max}$ . Тогда формула (12.45) вырождается в известное соотношение

$$\vartheta_{\max} = \Omega_{1\max} / K_{\Omega}, \quad (12.49)$$

где  $K_{\Omega} [c^{-1}]$  — предельное значение добротности по скорости следящей системы с астатизмом первого порядка, ниже которого нельзя иметь реальную добротность по скорости, исходя из условий точности.

Если теперь рассматривать режим гармонического входного воздействия с амплитудой ускорения, равной максимальному значению  $\epsilon_{1\max}$  и амплитудой скорости, меньшей максимального значения  $\Omega_{1\max}$ , то аналогичными рассуждениями можно показать, что контрольная точка  $A_k$  (рис. 12.8) будет двигаться вправо по прямой, имеющей наклон  $-40$  дБ/дек. Квадрат частоты точки пересечения этой прямой с осью нуля децибел равен предельной добротности следящей системы с астатизмом второго порядка по ускорению

$$K_{\epsilon} = \epsilon_{1\max} / \vartheta_{\max}, \quad (12.50)$$

равной отношению ускорения к установившейся ошибке. Это будет при условии, что первая асимптота л. а. х. проектируемой следящей системы совпадает с прямой, по которой движется контрольная точка  $A_k$  (рис. 12.8). Ниже этого предельного значения не может быть реальной добротности следящей системы с астатизмом второго порядка.

Область, расположенная ниже контрольной точки  $A_k$  и двух прямых с наклонами  $-20$  и  $-40$  дБ/дек, представляет собой запретную область для л. а. х. следящей системы с астатизмом любого порядка. При работе со скоростями и ускорениями, не превышающими значений  $\Omega_{1\max}$  и  $\epsilon_{1\max}$ , ошибки следящей системы не будут превосходить значения  $\vartheta_{\max}$ , если л. а. х. будет проходить не ниже запретной области.

Для входного воздействия вида (12.43) можно также ограничивать фазовую и относительную амплитудную составляющие ошибки. Для этого найдем ошибку  $\theta_A$ , находящуюся в фазе, и ошибку  $\theta_{\varphi}$ , находящуюся в квадратуре по отношению к входному воздействию. Для этого на рис. 12.9 построим векторную диаграмму, из которой следует

$$\theta = \frac{\theta_1}{1 + W(j\omega_k)} = (U + jV)\theta_1 = \theta_A + j\theta_{\varphi}, \quad (12.51)$$

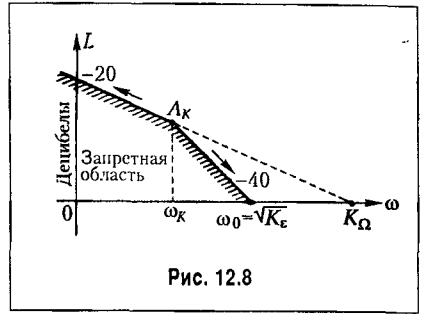


Рис. 12.8

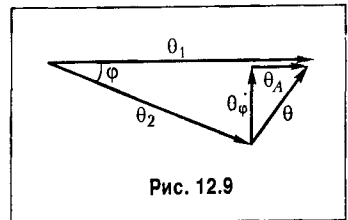


Рис. 12.9

где  $U$  и  $V$  — вещественная и мнимая части частотной передаточной функции по ошибке. Фазовая ошибка следящей системы

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\theta_\varphi|}{|0_1 - \theta_A|} = \operatorname{arctg} \frac{\vartheta_{\varphi \max}}{\vartheta_{1 \max} - \vartheta_{A \max}} \quad (12.52)$$

и относительная амплитудная ошибка

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_{1 \max}} = \frac{|\theta_1| - |\theta_2|}{|\theta_1|} = \frac{\vartheta_{1 \max} - \vartheta_{2 \max}}{\vartheta_{1 \max}} \quad (12.53)$$

В формулах (12.51)–(12.53) и на рис. 12.9 величины  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta$ ,  $\theta_\varphi$  и  $\theta_A$  представляют собой векторные изображения соответствующих гармонических функций времени  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta_\varphi$  и  $\vartheta_A$ .

В большинстве случаев, аналогично изложенному выше, можно считать, что  $|W(j\omega_k)| \gg 1$  и передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом первого порядка в области низких частот имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{K_\Omega}{j\omega(1 + j\omega T_1)}$$

Тогда фазовая ошибка (при  $\operatorname{arctg} \varphi \approx \varphi$ ) на основании (12.51)

$$\varphi = \frac{1}{\vartheta_{1 \max}} \operatorname{Im} \frac{\vartheta_{1 \max}}{W(j\omega_k)} = \frac{\omega_k}{K_\Omega} \quad (12.54)$$

и относительная амплитудная ошибка

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_{1 \max}} \approx \frac{|\theta_A|}{\vartheta_{1 \max}} \approx \frac{1}{\vartheta_{1 \max}} \operatorname{Re} \frac{\vartheta_{1 \max}}{W(j\omega_k)} = \frac{\omega_k^2 T_1}{K_\Omega} = \frac{\omega_k^2}{K_\epsilon} \quad (12.55)$$

Задание величины фазовой и относительной амплитудной ошибок определяет предельные положения первой и второй асимптот л. а. х., т. е. необходимые значения добротности по скорости  $K_\Omega$  и добротности по ускорению  $K_\epsilon = K_\Omega/T_1$ . Нетрудно видеть, что предельные положения асимптот и в этом случае формируют запретную зону для низкочастотной части л. а. х. вида, изображенного на рис. 12.8. Использование приведенных выше формул для формирования низкочастотной части л. а. х. возможно лишь в том случае, если двигатель в состоянии обеспечивать получение на исполнительной оси требуемых максимальных значений скорости  $\Omega_{1 \max}$  и ускорения  $\epsilon_{1 \max}$ .

При выводе всех приведенных выше формул предполагалось, что ошибка в системе определяется только наличием задающего воздействия  $\vartheta_1(t)$ . При действии на систему возмущений, например момента нагрузки на оси двигателя, необходимо увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы для того, чтобы результирующая ошибка не превосходила заданного значения. Более подробно это изложено, например, в [9].

В статических системах установившаяся ошибка по задающему воздействию может быть сделана равной нулю применением неединичной обратной связи (§ 9.3). Однако появление статической ошибки возможно при неустойчивости коэффициента передачи разомкнутой системы. В соответствии с формулой (9.66) для рассматриваемого случая максимальное значение ошибки составит

$$\vartheta_{\max} = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{K}, \quad (12.56)$$

где  $\frac{\Delta K}{K}$  — относительное изменение коэффициента передачи разомкнутой системы.

Из выражения (12.56) можно получить требуемые значения коэффициента передачи  $K$  или коэффициента ошибки  $c_0$ :

$$K = \frac{1}{c_0} = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.57)$$

Пусть, кроме того, задано требуемое значение коэффициента ошибки  $c_1$ , являющегося коэффициентом пропорциональности между скоростью входного воздействия и ошибкой.

Примем, что в низкочастотной области частотная передаточная функция статической системы может быть сведена к выражению

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 + T_0 j\omega)(1 + T_1 j\omega)}.$$

Тогда коэффициент ошибки  $c_1$  для этой передаточной функции будет равен

$$c_1 = \frac{T_0 - T_1}{K}. \quad (12.58)$$

Отсюда может быть получена допустимая сумма двух постоянных времени:

$$T_0 + T_1 \leq c_1 K = c_1 \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.59)$$

Формулы (12.57) и (12.59) устанавливают требования к низкочастотной части желаемой л. а. х.

Если к проектируемой системе кроме задающего воздействия приложено возмущение, то в формуле для коэффициента передачи разомкнутой системы необходимо дополнительно учесть составляющую, определяемую этим возмущением. Пусть, например, статическая ошибка от возмущения определяется формулой (8.4):

$$x_{\text{ст}}'' = \frac{\gamma_1 f_{10}}{1 + K} \approx \frac{\gamma_1 f_{10}}{K},$$

где  $\gamma_1$  — коэффициент статизма, а  $f_{10}$  — постоянное возмущение.

Тогда вместо (12.56) можно записать

$$\vartheta_{\max} = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{K} + \frac{\gamma_1 f_{10}}{K}. \quad (12.60)$$

Отсюда находим требуемое значение коэффициента передачи:

$$K = \frac{\Delta K}{K} \frac{\vartheta_{1\max}}{\vartheta_{\max}} + \frac{\gamma_1 f_{10}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.61)$$

В системах стабилизации ошибка определяется только наличием возмущения (или возмущений). В этом случае требование к низкочастотной части л. а. х. сводится к необходимости иметь определенное значение коэффициента передачи разомкнутой системы, вне зависимости от того, является ли система по виду передаточной функции  $W(p)$  статической или астатической.

Это значение коэффициента передачи будет определяться вторым слагаемым в правой части (12.61) или суммой подобных слагаемых при действии нескольких возмущений. По коэффициенту передачи может быть построена первая асимптота желаемой л. а. х.

**Требования к запасу устойчивости.** В следящих системах повышение коэффициента передачи разомкнутой системы вызывает приближение к колебательной границе устойчивости. Это проявляется в увеличении колебательности системы. Для оценки запаса устойчивости, т.е. степени удаления от колебательной границы устойчивости, могут использоваться различные критерии, в том числе такие, как, например, перерегулирование при единичном входном возмущении, запас устойчивости по амплитуде и по фазе и т.п.

При использовании частотных критериев качества наиболее удобно оценивать запас устойчивости замкнутой системы по показателю колебательности  $M$ , который характеризует склонность системы к колебаниям (см. гл. 8).

В астатических системах для замкнутой системы коэффициент передачи на нулевой частоте равен единице. Поэтому под показателем колебательности понимается абсолютное значение наибольшего максимума

$$M = \left| \Phi(j\omega) \right|_{\max} = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right|_{\max}.$$

Это положение остается справедливым и для статических систем, так как для исключения статической ошибки по задающему воздействию в них, как правило, используется масштабирование выходной величины посредством применения неединичной обратной связи (см. § 9.3) с коэффициентом  $k_{oc} < 1$ . Тогда коэффициент передачи замкнутой системы на нулевой частоте может быть сделан равным единице соответствующим выбором величины  $k_{oc}$ :

$$\Phi(j0) = \frac{W(j0)}{1 + k_{oc} W(j0)} = \frac{K}{1 + k_{oc} K} = 1,$$

где  $K$  – коэффициент передачи разомкнутой системы.

Отсюда находится требуемое значение коэффициента обратной связи:

$$k_{oc} = \frac{K-1}{K}.$$

Показатель колебательности  $M = 1,1 \div 1,3$  соответствует очень хорошему демпфированию системы, при котором перерегулирования весьма малы. Показатель колебательности  $M = 1,3 \div 1,5$  обычно является вполне достаточным для большинства следящих систем. Во многих случаях следящие системы работают удовлетворительно и при значениях  $M = 1,6 \div 1,8$ .

Необходимым и достаточным условием того, чтобы в устойчивой системе показатель колебательности был не больше заданного, является нахождение фазовой характеристики вне запретной зоны (рис. 8.21). В минимально-фазовых системах это условие может быть выдержано соблюдением определенных правил построения л. а. х. без нахождения фазовой характеристики.

Рассмотрим принципы построения л. а. х. с заданным показателем колебательности. По методическим соображениям рассмотрение начнем со следящих систем с астатизмом второго порядка, хотя эти системы и не относятся к наиболее простым и распространенным.

Как правило, в качестве типовых используются л. а. х., имеющие в низкочастотной части наклон не более  $-40$  дБ/дек. Это вызвано стремлением избавиться от условий, при которых возможно появление неустойчивости в большом, т. е. при согласовании следящей системы с большого угла.

**Типовые л. а. х. систем с астатизмом второго порядка.** В системах с астатизмом второго порядка обычно имеются два интегрирующих звена. Такими звеньями могут быть исполнительный и вспомогательный двигатели, например гидромуфта и управляющий двигатель, поворачивающий шпиндель или чашу гидронасоса. В некоторых случаях астатизм второго порядка может появляться вследствие особенностей механических характеристик единственного исполнительного двигателя, у которого вращающий момент не зависит от скорости вращения.

Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой системы вида

$$W(p) = \frac{K_e(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)}, \quad (12.62)$$

где  $K_e [c^{-2}]$  — коэффициент передачи по разомкнутой системе, называемый добротностью по ускорению.

Асимптотическая л. а. х., соответствующая (12.62), изображена на рис. 12.10. В соответствии с наклонами асимптот, кратными  $-20$  дБ/дек, ей присвоен тип 2–1–2.

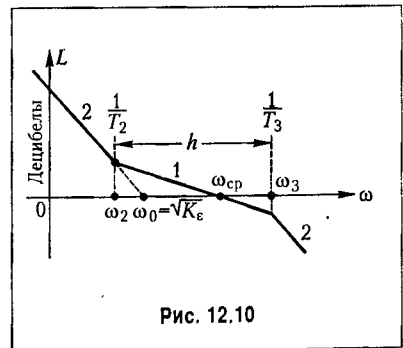


Рис. 12.10

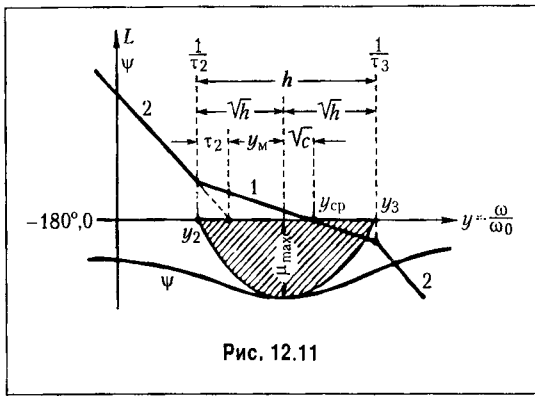


Рис. 12.11

Положение всей л. а. х. может быть задано точкой пересечения первой асимптоты с осью нуля децибел. Этой точке соответствует частота

$$\omega_0 = \sqrt{K_\epsilon}, \quad (12.63)$$

которую назовем *базовой*.

При введении новой переменной  $q = p/\omega_0$  передаточная функция будет представлена в нормированном виде:

$$W(q) = \frac{1 + \tau_2 q}{q^2 (1 + \tau_3 q)}, \quad (12.64)$$

где  $\tau_2 = \omega_0 T_2$  и  $\tau_3 = \omega_0 T_3$  — относительные постоянные времени.

Соответствующая нормированная л. а. х., построенная для относительной частоты  $y = \omega/\omega_0$ , изображена на рис. 12.11. Здесь же показаны для иллюстрации фазовая характеристика и запретная область для нее.

Протяженность участка с единичным наклоном, т. е. с отрицательным наклоном 20 дБ/дек, определяется отношением двух постоянных времени (см. § 8.8 и рис. 8.25):

$$h = \frac{T_2}{T_3} = \frac{\tau_2}{\tau_3}. \quad (12.65)$$

Под протяженностью участка вдоль оси частот (рис. 12.11) понимается отношение частот конечных точек участка (большой к меньшей).

Запас по фазе для функции (12.64)

$$\mu = \arctg y \tau_2 - \arctg y \tau_3 = \arctg \frac{(h-1)y \tau_3}{1 + h y^2 \tau_3^2}. \quad (12.66)$$

Исследование на максимум дает

$$y_M = \frac{1}{\tau_3 \sqrt{h}}, \quad (12.67)$$

$$\mu_{\max} = \arctg \frac{h-1}{2\sqrt{h}}. \quad (12.68)$$

Максимальный запас по фазе определяется только протяженностью асимптоты л. а. х., имеющей единичный наклон.

Приравнивание максимальных запасов по фазе (8.88) и (12.68) даст зависимость между протяженностью участка  $h$  и показателем колебательности  $M$  при оптималь-



ном выборе параметров, т. е. при совпадении максимумов реальной фазовой характеристики и запретной зоны (рис. 12.11):

$$h = \frac{M+1}{M-1}, \quad (12.69)$$

$$M = \frac{h+1}{h-1}. \quad (12.70)$$

Эти формулы связывают протяженность участка  $h$  с минимальным значением показателя колебательности, который может быть получен при этой протяженности, или величину показателя колебательности  $M$  с минимальной протяженностью участка  $h$ , обеспечивающей этот показатель колебательности.

Из рис. 12.11 легко найти оптимальные параметры л. а. х.:

$$\tau_2 = \omega_0 T_2 = \sqrt{\sqrt{h} \cdot \sqrt{C}} = \sqrt{\sqrt{\frac{M+1}{M-1}} \sqrt{\frac{M^2}{M^2-1}}} = \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \quad (12.71)$$

где  $\sqrt{C}$  соответствует модулю, а  $\frac{1}{\sqrt{C}}$  — относительной частоте, при которых запас по фазе (в запретной области) получается максимальным (см. формулу (8.88));

$$\tau_3 = \omega_0 T_3 = \frac{\tau_2}{h} = \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (12.72)$$

Эти параметры соответствуют минимальному значению показателя колебательности при заданной протяженности участка  $h$ .

Следует заметить, что технически реализовать систему тем легче, чем меньше протяженность участка  $h$ . Это связано с необходимостью подъема на этом участке верхних частот, что во многих случаях затруднено вследствие наличия в системе внешних и внутренних высокочастотных помех. Поэтому с точки зрения оптимальности инженерного решения необходимо стремиться к реализации желаемых динамических качеств при минимальной требуемой протяженности участка  $h$ .

Для получения заданного показателя колебательности в замкнутой системе при фиксированной базовой частоте л. а. х. необходимо иметь следующие постоянные времени:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \quad (12.73)$$

$$T_3 = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (12.74)$$

Вместо базовой частоты  $\omega_0$  за точку, фиксирующую положение л. а. х. (рис. 12.10 и 12.11), можно принять, например, точку пересечения второй асимптоты л. а. х. с

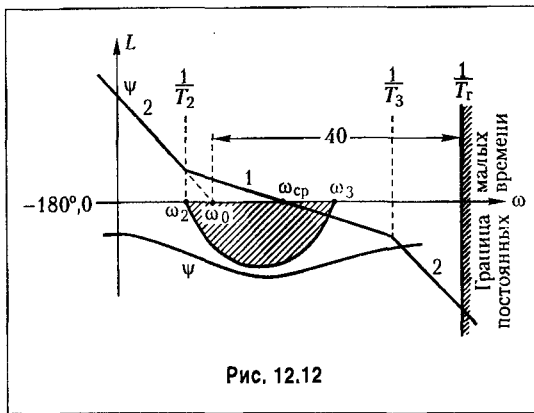


Рис. 12.12

осью децибел, которой соответствует частота  $\omega_{\text{ср}} = \omega_0 \tau_2$ . Тогда вместо (12.73) и (12.74) получим выражения, которые при фиксированной частоте среза, а следовательно, и фиксированном положении запретной зоны для фазовой характеристики можно превратить в неравенства:

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M-1}, \quad (12.75)$$

$$T_3 \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (12.76)$$

При равенстве левых частей правым показатель колебательности будет равен заданному значению  $M$ . При неравенстве левых и правых частей будет вводиться некоторый дополнительный запас устойчивости и показатель колебательности будет снижаться.

Эти формулы легко запоминаются, и они просто связаны с параметрами окружности — запретной зоны на комплексной плоскости (см. рис. 8.22).

В неравенство может быть превращена и формула (12.74). Формулу (12.73) лучше иметь в виде равенства, так как увеличение  $T_2$  по сравнению с тем, что дает формула, в некоторых случаях может привести к ухудшению запаса устойчивости.

При использовании типовой передаточной функции (12.62) может быть предусмотрен дополнительный запас устойчивости для возможности иметь в усилительном канале некоторое количество не учитываемых при расчете малых постоянных времени. Дополнительный запас устойчивости создается уменьшением величины постоянной времени  $T_3$  или, соответственно,

$$\tau_3 = \omega_0 T_3,$$

чтобы отодвинуть фазовую характеристику от запретной области (рис. 12.12).

На малые постоянные времени отводится обычно несколько градусов запаса по фазе. Так, например, в [9] предлагается отводить на эти цели величину, соответствующую сумме малых постоянных,

$$\sum T_m = \frac{0,1}{\omega_0}, \quad (12.77)$$

а число малых постоянных времени принимать равным  $4 \div 6$ . Тогда граница малых постоянных времени определяется значением

$$T_r = \frac{\sum T_m}{4} = \frac{0,025}{\omega_0}. \quad (12.78)$$

Если некоторая постоянная времени  $T_M$  дает сопрягающую частоту  $\omega_M = 1/T_M$ , которая больше граничной частоты (рис. 12.12)

$$\omega_r = 1/T_r = 40\omega_0, \quad (12.79)$$

то эта постоянная может не учитываться при расчете.

Расчетная формула для определения допустимого значения постоянной времени  $T_2$  (12.73) при этом сохраняется, а вместо формулы (12.74) должно использоваться выражение

$$T_3 \leq \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} - 0,1 \right). \quad (12.80)$$

В более сложном случае передаточная функция разомкнутой системы может иметь произвольное число постоянных времени, входящих в ее знаменатель:

$$W(p) = \frac{K_\varepsilon(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)(1+T_4p)(1+T_5p)\dots} \quad (12.81)$$

Этой передаточной функции соответствует л. а. х. типа 2-1-2-3-4...

Расчеты и здесь оказываются достаточно простыми. Для получения заданного показателя колебательности необходимо выполнение условия (12.73) для постоянной времени  $T_2$ . Сумма всех остальных постоянных времени  $\Sigma T = T_3 + T_4 + T_5 + \dots$ , включая малые постоянные времени, должна удовлетворять неравенству

$$\Sigma T \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (12.82)$$

При использовании расчета по частоте среза для постоянной времени  $T_2$  должно выполняться условие (12.75), а для суммы остальных постоянных времени — условие

$$\Sigma T \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{M}{M+1}. \quad (12.83)$$

В л. а. х. подобного типа легко учесть наличие звеньев постоянного запаздывания. В этом случае время запаздывания должно учитываться при подсчете сумм постоянных времени  $\Sigma T$ .

Возможен случай, когда в передаточную функцию разомкнутой системы входит множитель, соответствующий колебательному звену с комплексными корнями:

$$W(p) = \frac{K_\varepsilon(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)(1+ap+bp^2)\dots} \quad (12.84)$$

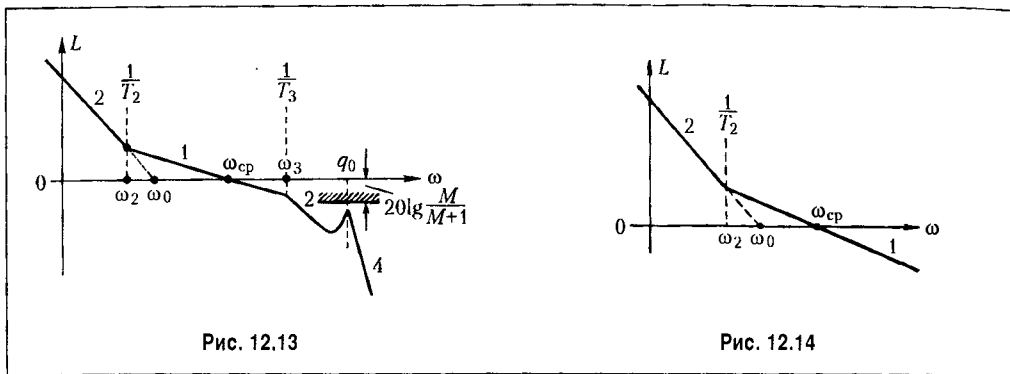


Рис. 12.13

Рис. 12.14

Допустить наличие такого множителя можно в том случае, если частота свободных колебаний звена значительно больше базовой частоты:

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} \gg \omega_0. \quad (12.85)$$

Асимптотическая л. а. х. для этого случая изображена на рис. 12.13.

При выполнении условия (12.85) фазовый сдвиг, вносимый колебательным звеном в районе максимального запаса по фазе, можно принять равным  $\arctg a\omega$ . Поэтому коэффициент  $a$  должен входить в общую сумму постоянных времени (12.82) или (12.83).

Для того чтобы избежать появления второй запретной зоны в районе пика л. а. х. при  $\omega \approx q_0$  (рис. 12.13), необходимо выполнение дополнительного условия, которое вытекает из неравенства (8.87):

$$\text{mod } W(jq_0) = A(q_0) < \frac{M}{M+1}. \quad (12.86)$$

Выполнение этого условия может быть легко проверено при построении л. а. х.

Более подробно этот вопрос рассмотрен для случая гироскопических следящих систем в [9].

Предельным случаем л. а. х. типа 2-1-2 или типа 2-1-2-3 является л. а. х. типа 2-1 (рис. 12.14), соответствующая случаю, когда  $\Sigma T \rightarrow 0$ . Тогда передаточная функция разомкнутой системы (12.81) приобретает вид

$$W(p) = \frac{K_\varepsilon(1+T_2p)}{p^2} = \frac{K_\varepsilon}{p^2} + \frac{K_\varepsilon T_2}{p}. \quad (12.87)$$

Передаточная функция подобного вида соответствует издромному управлению. Она может встречаться, например, в сглаживающих системах различного типа, построенных на электромеханических, электронных, гироскопических и тому подобных интеграторах.

Показатель колебательности для подобной передаточной функции может быть определен прямым отысканием максимума модуля частотной передаточной функции замкнутой системы

$$\left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} = M.$$

Подстановка (12.87) и исследование получившегося выражения на максимум дает следующее условие, которое должно быть выполнено, чтобы показатель колебательности не превышал заданного значения:

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{2 \frac{M^2 - M\sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}}$$

или, в другом виде (при условии, что  $\omega_{cp} > \omega_0$ ),

$$T_2 \geq \frac{2}{\omega_{cp}} \frac{M^2 - M\sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 1}. \tag{12.88}$$

**Типовые л. а. х. систем с астатизмом первого порядка.** Следящие системы с астатизмом первого порядка представляют собой наиболее распространенный тип систем, содержащих одно интегрирующее звено — исполнительный двигатель. В простейшем случае, когда следящая система состоит из безынерционного усилителя и исполнительного двигателя с постоянной времени  $T_1$  и не имеет дополнительных корректирующих средств кроме, возможно, жесткой тахометрической обратной связи, передаточная функция разомкнутой системы может быть сведена к виду

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}}{p(1+T_1 p)}. \tag{12.89}$$

Асимптотическая л. а. х. типа 1–2, соответствующая этой передаточной функции, изображена на рис. 12.15.

Определение допустимого значения постоянной времени может быть сделано прямым нахождением максимума амплитудной частотной характеристики замкнутой системы

$$\left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} = M.$$

Подставляя (12.89) и исследуя получившееся выражение на максимум, можно найти условие того, чтобы показатель колебательности не превышал заданного значения:

$$K_{\Omega} T_1 \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \tag{12.90}$$

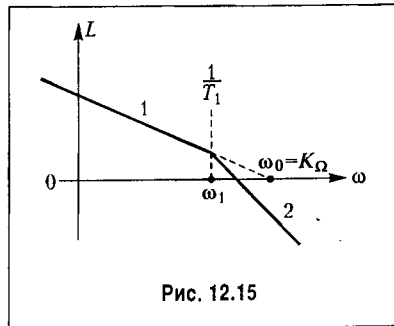


Рис. 12.15

Последняя формула позволяет при заданном значении постоянной времени исполнительного двигателя легко определять максимальное значение добротности по скорости, которое можно иметь в следящей системе при данном значении показателя колебательности.

При заданном значении требуемой добротности по скорости эта же формула позволяет определять допустимое значение постоянной времени исполнительного двигателя и необходимый коэффициент передачи по петле жесткой тахометрической обратной связи, служащей для снижения постоянной времени двигателя. Определение коэффициента передачи для тахометрической обратной связи может производиться по формуле

$$T_1 = \frac{T_d}{1 + k_{oc}},$$

где  $T_d$  — постоянная времени исполнительного двигателя;  $k_{oc}$  — коэффициент передачи по петле тахометрической обратной связи.

В более сложном случае передаточная функция (12.89) может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K_\Omega}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) \dots} \quad (12.91)$$

Этой функции соответствует л. а. х. типа 1–2–3–4...

Здесь может быть получена приближенная формула, ориентировочно связывающая сумму всех постоянных времени с добротностью по скорости:

$$K_\Omega(T_1 + T_2 + T_3 + \dots) \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (12.92)$$

при  $M \leq 1,3$ .

Приближенная формула (12.92) становится точной при  $M = 1$  и любом числе постоянных времени либо при наличии только одной постоянной времени и любом значении  $M$ . В последнем случае она вырождается в формулу (12.90). При значениях  $M$ , мало отличающихся от единицы, например при  $M \leq 1,3$ , формула (12.92) является достаточно точной и может использоваться для расчета при наличии любого числа

постоянных времени, а также при наличии временного запаздывания  $\tau$ , которое должно учитываться в общей сумме постоянных времени.

Л. а. х. рассмотренного типа может использоваться в простейших следящих системах с невысокими требованиями в отношении статической и динамической точности. При невозможности удовлетворить требованиям технического задания приходится переходить к более сложным типам л. а. х. На рис. 12.16 изображена асимптотическая л. а. х. типа 1–2–1–2–3... Она может быть получена из соответ-

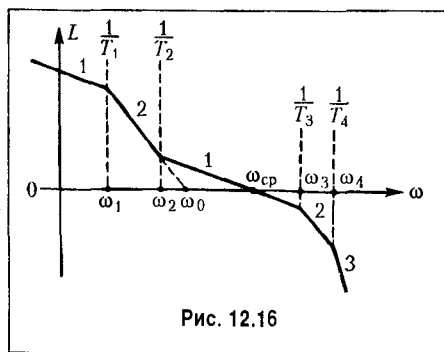


Рис. 12.16

ствующей л. а. х. типа 2-1-2-3... система с астатизмом второго порядка (рис. 12.12) добавлением одного излома при сопрягающей частоте  $\omega_1 = 1/T_1$ . Этой л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_{\Omega}(1+T_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p)\dots} \quad (12.93)$$

Так как обычно сопрягающая частота  $\omega_1$  значительно отличается от частоты в зоне максимума требуемого запаса по фазе, то с большой степенью точности расчет можно вести по формулам, полученным для систем с астатизмом второго порядка. В этом случае положение л. а. х., изображенной на рис. 12.16, определяется базовой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{K_{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{K_{\Omega}}{T_1}}$$

В соответствии с формулами (12.73) и (12.82) имеем

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \quad T_3 + T_4 + \dots \leq \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}$$

или в соответствии с формулами (12.75) и (12.83)

$$T_2 \geq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M-1}, \quad T_3 + T_4 + \dots \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}$$

Для уточнения расчета можно учесть то обстоятельство, что по сравнению с системой, имеющей астатизм второго порядка, здесь имеется дополнительный запас по фазе

$$\Delta\mu = \arctg \frac{1}{\omega T_1} \quad (12.94)$$

Это позволяет немного увеличить допустимую сумму постоянных времени, которым соответствуют сопрягающие частоты правее частоты среза (формулы (12.82) и (12.83)), или немного уменьшить постоянную времени  $T_2$  (формулы (12.73) и (12.75)). Однако подобное уточнение обычно не имеет практического значения [9] и почти всегда с достаточной степенью точности можно вести расчет параметров л. а. х. типа 1-2-1-2-3... по формулам, которые были получены для системы с астатизмом второго порядка (л. а. х. типа 2-1-2-3...).

**Типовые л. а. х. статических систем.** В простейшем случае передаточная функция разомкнутой статической системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_0 p)(1+T_1 p)}, \quad (12.95)$$

где  $K$  — коэффициент передачи разомкнутой системы.

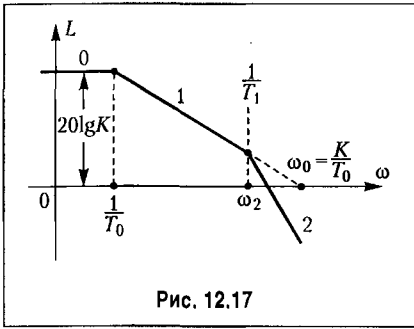


Рис. 12.17

Соответствующая асимптотическая л. а. х. типа 0–1–2 изображена на рис. 12.17.

В районе пересечения л. а. х. оси нуля децибел передаточная функция может быть приближенно сведена к передаточной функции системы с астатизмом первого порядка

$$W(p) = \frac{\omega_0}{p(1+T_1 p)}, \quad (12.96)$$

где базовая частота л. а. х.

$$\omega_0 = \frac{K}{T_0}. \quad (12.97)$$

Это дает возможность использовать полученную выше формулу (12.90) для л. а. х. типа 1–2 (рис. 12.15) при замене  $K_\Omega$  на  $\omega_0$ . Тогда можно получить условие обеспечения заданного показателя колебательности

$$\frac{KT_1}{T_0} \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \quad (12.98)$$

Для передаточной функции более сложного вида

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_0 p)(1+T_1 p)(1+T_2 p)...} \quad (12.99)$$

аналогично (12.92) имеем

$$\frac{K(T_1 + T_2 + \dots)}{T_0} \leq \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (M \leq 1,3). \quad (12.100)$$

Из этих формул видно значение первой большой постоянной времени  $T_0$  как фактора, увеличивающего запас устойчивости системы. Повышение коэффициента передачи или повышение суммы остальных постоянных времени при заданном показателе колебательности может быть сделано при одновременном увеличении постоянной времени  $T_0$ .

Отклонение передаточной функции (12.96) от более точного выражения (12.95) в области низких частот дает некоторое увеличение запаса устойчивости, т. е. уменьшение колебательности. Учет этого обстоятельства обычно нецелесообразен ввиду незначительности получаемого эффекта [9].

При повышенных требованиях по статической и динамической точности могут применяться л. а. х. типа 0–1–2–1–2–3... (рис. 12.18), образованные из л. а. х. типа 2–1–2–3... (рис. 12.10) систем с астатизмом второго порядка.

Таким л. а. х. соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1+T_2 p)}{(1+T_0 p)(1+T_1 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p)...} \quad (12.101)$$



Как и в случае систем с астатизмом первого порядка, здесь можно с достаточной степенью точности пользоваться универсальными формулами (12.73)–(12.76) и (12.82), (12.83).

Учет звеньев постоянного запаздывания и колебательных звеньев, а также введение границы малых постоянных времени может делаться аналогично изложенному выше.

**Переходные процессы, соответствующие типовым л. а. х.** Для л. а. х. типа 2–1–2 можно показать, что при заданной протяженности  $h$  асимптоты с единичным наклоном (рис. 12.10) выбор параметров, при котором обеспечивается минимальное значение показателя колебательности (12.70), вместе с тем соответствует некоторому оптимальному протеканию переходных процессов. При этом будет иметь место максимальное приближение кривой переходного процесса к некоторой экстремали, которая является экспонентой с постоянной времени  $T = \omega_0^{-1} h^{-2}$ .

Чем больше протяженность участка  $h$ , тем меньше показатель колебательности и тем более благоприятным будет протекание переходного процесса, так как постоянная времени экспоненты будет меньше.

Определим вид переходного процесса при единичном входном воздействии  $\vartheta_1 = 1(t)$  для случая использования л. а. х. типа 2–1–2 (рис. 12.10).

Для нормированной передаточной функции (12.64) изображение Лапласа выходной величины будет иметь вид

$$\vartheta_2(q) = \frac{1 + \tau_2 q}{\tau_3 q^3 + q^2 + \tau_2 q + 1} \cdot \frac{1}{q} \tag{12.102}$$

Задаваясь различными значениями показателя колебательности, можно найти относительные постоянные времени  $\tau_2 = \omega_0 T_2$  и  $\tau_3 = \omega_0 T_3$  и затем построить переходный процесс для выходной величины  $\vartheta_2$  в функции безразмерного времени  $\omega_0 t$ . Переходные характеристики показаны на рис. 12.19.

Параметры переходных процессов — перерегулирование  $\sigma\%$  и относительное время переходного процесса  $\omega_0 t_n$  — для  $|1 - \vartheta_2(\omega_0 t)| < 0,05$  приведены в табл. 12.7.

Хотя эти кривые переходных процессов соответствуют л. а. х. типа 2–1–2 системы с астатизмом второго порядка (рис. 12.10), они с большой степенью точности могут использоваться для оценки переходных процессов при использовании л. а. х. других типов, изображенных, например, на рис. 12.13, 12.16 и 12.18, для которых характерным является наличие участка с наклоном  $-20$  дБ/дек в районе пересечения оси частот.

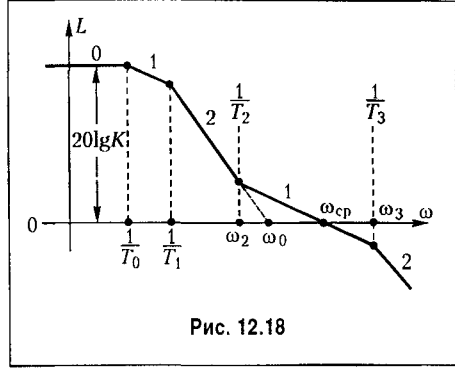


Рис. 12.18

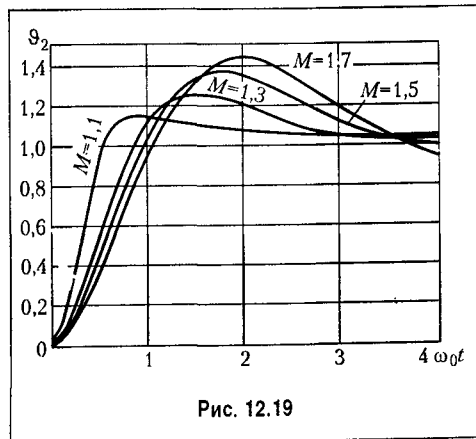


Рис. 12.19

Таблица 12.7. Параметры переходных процессов

$M$	1,1	1,3	1,5	1,7
$\sigma, \%$	13,8	26,5	37,2	44,6
$\omega_0 t_{II}$	7,75	5,85	5,45	7,25

Различие будет наблюдаться в начальной части, если высокочастотная часть л. а. х. отличается от высокочастотной части л. а. х. типа 2–1–2, и в конечной части, если будут отличаться их пизкочастотные части.

Таким образом, в случае нужды оценка переходных процессов может делаться по универсальным кривым, приведенным на рис. 12.19, во всяком случае для средней части кривой переходного процесса, которая показывает степень склонности системы к колебаниям.

В тех случаях, когда л. а. х. не имеет специального участка с наклоном  $-20$  дБ/дек при переходе оси частот (см. например, рис. 12.15 и 12.17), оценка переходных процессов может быть сделана следующим образом.

В качестве исходной примем л. а. х. типа 1–2 (рис. 12.15). Ей соответствует передаточная функция (12.89). Вводя единичное ступенчатое воздействие  $\vartheta_1(t)$ , можно аналогично изложенному выше построить нормированные переходные процессы в функции безразмерного времени  $\omega_0 t$  (рис. 12.20). Здесь в качестве  $\omega_0$  принята частота пересечения асимптоты, имеющей наклон  $-20$  дБ/дек, с осью частот (рис. 12.15).

Эти же кривые переходного процесса могут использоваться для оценки переходного процесса в случае использования л. а. х. другого типа, например 1–2–3 или 0–1–2 (рис. 12.17). Как и в предыдущем случае, различие может наблюдаться только в начальной и конечной стадиях переходного процесса.

**Построение низкочастотной области желаемой л. а. х.** Построение желаемой л. а. х. начинается с низкочастотной области. Из условий требуемой точности работы определяется положение контрольной точки или запретной области (см. рис. 12.8). Низкочастотная часть л. а. х. должна проходить не ниже контрольной точки или так, чтобы не заходить в запретную область.

В следящих системах с астатизмом второго порядка положение первой низкочастотной асимптоты, имеющей наклон  $-40$  дБ/дек, опреде-

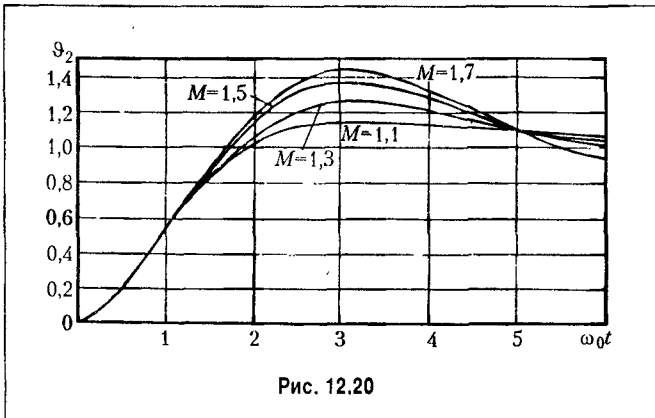


Рис. 12.20

ляется совершенно однозначно. Из условий облегчения задачи демпфирования выгодно сдвигать эту асимптоту как можно более влево, т. е. в сторону низких частот. Очевидно, что предельное положение первой асимптоты будет в том случае когда она или пройдет через контрольную точку  $A_k$ , или сольется с правой границей запретной области (рис. 12.21).

Необходимое значение базовой частоты л. а. х.  $\omega_0$  и необходимый коэффициент передачи разомкнутой системы определяются из выражения (12.50):

$$\omega_0^2 = K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{1\max}}{\vartheta_{\max}} \left[ \frac{1}{c^2} \right].$$

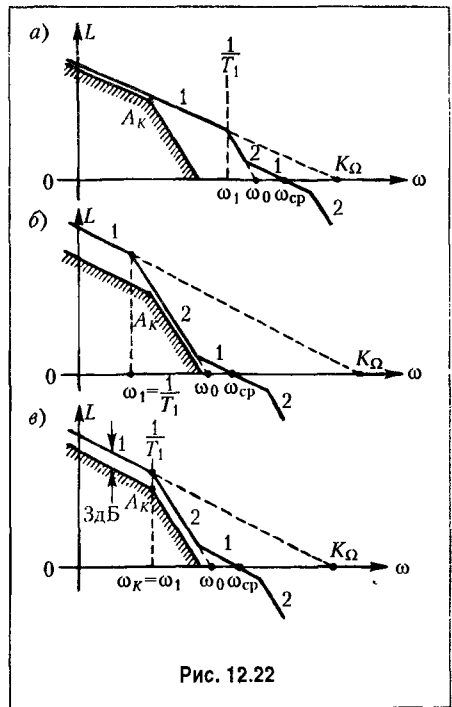
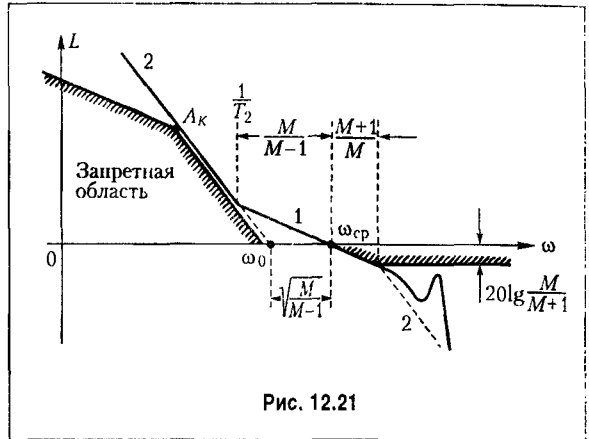
В следящих системах с астатизмом первого порядка необходимо определить положение двух первых асимптот, что можно сделать различным образом в зависимости от выбранного значения первой сопрягающей частоты  $\omega_1 = 1/T_1$ .

Если принять, что первая сопрягающая частота больше контрольной частоты не менее чем в 2–3 раза, то первые две асимптоты можно расположить так, чтобы через контрольную точку  $A_k$  прошла первая асимптота (рис. 12.22, а).

При этом коэффициент усиления по разомкнутой цепи или добротность по скорости  $K_\Omega$  будет иметь минимальную возможную величину, равную предельному значению, определяемому из (12.49):

$$K_\Omega = \frac{\Omega_{1\max}}{\vartheta_{\max}} \left[ \frac{1}{c} \right],$$

что является благоприятным. Однако частота точки пересечения второй асимптоты с осью нуля децибел  $\omega_0$  будет значительно больше минимального достижимого значения, определяемого по требуемому предельному коэффициенту передачи по ускорению (12.50). Это является нежелательным, так как вся л. а. х. будет сдвигаться в область более высоких частот, что



затрудняет демпфирование вследствие относительного возрастания влияния всех постоянных времени системы.

Если теперь принять, что первая сопрягающая частота  $\omega_1$  меньше контрольной частоты  $\omega_k$  по крайней мере в 2–3 раза, то первые две асимптоты можно расположить так, чтобы через контрольную точку  $A_k$  прошла вторая асимптота (рис. 12,22, б). При этом частота пересечения второй асимптоты с осью нуля децибел  $\omega_0$  будет иметь минимальную возможную величину, определяемую предельным значением добротности по ускорению (12.50), что является благоприятным с точки зрения облегчения демпфирования системы. Однако при этом требуемый коэффициент передачи разомкнутой системы  $K_\Omega$  будет в 2–3 раза превышать минимальное возможное значение, определяемое формулой (12.50). Увеличение коэффициента передачи может неблагоприятным образом сказаться на возрастании влияния помех и наводок на входе. Поэтому выбор того или иного расположения низкочастотной части л. а. х. относительно контрольной точки должен определяться конкретными условиями.

При отсутствии преобладания того или иного фактора оптимальным следует считать такое расположение низкочастотных асимптот (рис. 12.22, в), при котором первая сопрягающая частота  $\omega_1$  совпадает с контрольной частотой  $\omega_k$ .

Так как истинная л. а. х. в точке  $\omega = \omega_1$  проходит ниже точки пересечения двух асимптот на 3 дБ, или на  $\sqrt{2}$ , то вся л. а. х. при  $\omega_1 = \omega_k$  должна быть поднята вверх на 3 дБ. При этом требуемое значение коэффициента передачи

$$K_\Omega = \sqrt{2} \frac{\Omega_{1\max}}{\vartheta_{\max}}. \quad (12.103)$$

Точке пересечения второй асимптоты с осью нуля децибел соответствует частота

$$\omega_0 = \sqrt{K_\varepsilon} = \sqrt{\sqrt{2} \frac{\varepsilon_{1\max}}{\vartheta_{1\max}}}. \quad (12.104)$$

В статических следящих системах, а также в системах стабилизации построение низкочастотной части делается в соответствии с формулами (12.56)–(12.61).

**Построение средне- и высокочастотной частей л. а. х.** В системах с астатизмом второго порядка (рис. 12.21) необходимо осуществить типовой переход оси нуля децибел в соответствии с рис. 12.10. При этом известно значение базовой частоты  $\omega_0$ .

Требуемое значение постоянной времени  $T_2$  определяется формулой (12.73).

Среднечастотной части л. а. х. соответствует асимптота с единичным наклоном, проходящая в интервале амплитуд

$$\frac{M}{M-1} > A(\omega) > \frac{M}{M+1}$$

или в интервале частот

$$\frac{1}{T_2} = \omega_{\text{ср}} \frac{M-1}{M} > \omega > \omega_{\text{ср}} \frac{M+1}{M}. \quad (12.105)$$

Часть л. а. х., лежащая правее частоты среза, может иметь, вообще говоря, произвольный вид, определяемый имеющимися в системе звеньями. Однако в соответствии с изложенным выше необходимо выполнение следующих условий.

1. Высокочастотная часть л. а. х. не должна заходить в запретную область, образованную асимптотой с единичным наклоном, пересекающей ось нуля децибел в точке  $\omega = \omega_{cp}$ , и горизонтальной прямой, соответствующей

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{M}{M+1}. \quad (12.106)$$

2. Сумма постоянных времени и коэффициентов при операторе в первой степени передаточных функций колебательных звеньев не должна превышать значения (12.82):

$$\sum_{i=1}^m T_i \leq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}.$$

При построении желаемой л. а. х. в высокочастотной области вначале можно ориентироваться на наиболее простой ее вид и сформулировать ее при помощи одной асимптоты с наклоном  $-40$  дБ/дек, положение которой определяется постоянной времени

$$T_3 \leq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}.$$

Эта л. а. х. показана в высокочастотной части на рис. 12.21 пунктирной линией. Она соответствует типу 2-1-2. При дальнейшем расчете вид высокочастотной части л. а. х. может уточняться. Однако два сформулированных выше условия не должны нарушаться. В окончательном виде высокочастотная часть л. а. х. может иметь произвольный вид, например показанный сплошной линией на рис. 12.21.

В следящих системах с астатизмом первого порядка необходимо вначале проверить возможность сведения желаемой л. а. х. к типу 1-2 или ее модификациям 1-2-3... Для этого необходимо исследовать возможность доведения суммы всех постоянных времени до значения, определяемого формулой (12.92):

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots \leq \frac{1}{K_{\Omega}} \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (M \leq 1.3).$$

При отрицательном ответе необходимо сформировать переход оси нуля децибел асимптотой с единичным наклоном так, как показано на рис. 12.22. Весь расчет ведется аналогично изложенному выше для следящих систем с астатизмом второго порядка.

Исходные данные для расчета — базовая частота  $\omega_0$ , и постоянная времени  $T_1$  — известны по построению низкочастотной части л. а. х. (см. рис. 12.22).

Для статических систем расчет ведется аналогично расчету систем с астатизмом первого порядка. Вначале необходимо проверить возможность использования л. а. х. типа 0-1-2 (рис. 12.17) или ее модификации 0-1-2-3... по формуле (12.100). При

отрицательном ответе, необходимо сформировать переход оси нуля децибел аналогично рис. 12.21 и 12.22.

**Расчет корректирующих (демпфирующих) средств.** По наиболее простой схеме расчета корректирующие средства определяются сравнением желаемой передаточной функции с передаточной функцией системы без корректирующих средств или сравнением л. а. х., соответствующих этим передаточным функциям.

Часто эта схема расчета оказывается слишком упрощенной, что затрудняет ее использование. Это объясняется главным образом трудностью непосредственного перехода в сложных случаях от имеющейся передаточной функции к желаемой, а также тем обстоятельством, что формирование высокочастотной части л. а. х. может быть выполнено многозначно. Если вид желаемой л. а. х. в низкочастотной части является вполне определенным, то для ее высокочастотной части могут быть сформулированы лишь общие требования в отношении допустимой суммы постоянных времени и отсутствия пиков, заходящих в запретную зону (см. рис. 12.21).

Поэтому более гибкой оказывается схема расчета, при которой построение желаемой л. а. х. и расчет корректирующих средств, обеспечивающих получение желаемой л. а. х., делаются в два этапа.

На первом этапе расчета на основании требований к точности строится желаемая л. а. х. и рассчитываются корректирующие средства, формирующие ее в низкочастотной части. При этом будет получена некоторая промежуточная система, имеющая требуемую точность, но не имеющая, возможно, требуемого запаса устойчивости.

В некоторых случаях возможно формирование одновременно с низкочастотной частью л. а. х. ее средне-, а в простейших случаях и высокочастотной частей.

На втором этапе расчета уточняется вид и рассчитываются параметры корректирующих средств, формирующих средне- и высокочастотную части л. а. х. В результате должна быть получена система, обеспечивающая не только требуемую точность в типовых режимах, но и имеющая необходимый запас устойчивости. Методы решения задачи оптимального синтеза будут рассмотрены в гл. 23.

## Глава 13

# СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### § 13.1. Основные понятия

Системами с *переменными параметрами* называются системы, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными во времени коэффициентами:

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = b_0(t) \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \dots + b_{m-1}(t) \frac{df(t)}{dt} + b_m(t)f(t). \quad (13.1)$$

Коэффициенты  $a_0, \dots, a_n$  и  $b_0, \dots, b_m$  являются функциями времени, которые задаются либо графиками, построенными на основании эксперимента, либо аналитически.

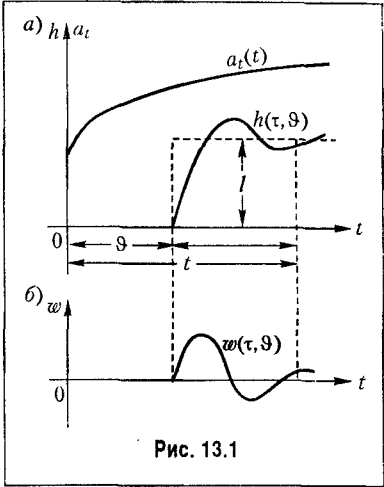
Переменные коэффициенты в уравнении системы автоматического управления (13.1) возникают вследствие наличия переменных коэффициентов хотя бы в одном звене системы.

Так, например, у подвижного объекта (корабля, самолета, ракеты) с течением времени вследствие выгорания топлива происходит изменение массы и моментов инерции. Если объект при своем движении меняет скорость и высоту, то возможно изменение его аэродинамических коэффициентов.

В отличие от линейных систем с постоянными параметрами, методы анализа и синтеза которых были рассмотрены в предыдущих главах, исследование линейных систем с переменными параметрами представляет собой очень сложную задачу. В первую очередь это связано с тем, что в общем случае найти решение уравнения (13.1) невозможно. В результате, как правило, неприменимы разработанные для линейных систем с постоянными параметрами критерии устойчивости, оценки качества установившихся и переходных процессов, методы синтеза и др., а существующие специфические методы анализа и синтеза систем с переменными параметрами во многих случаях оказываются сложными для практического применения.

В связи с этим в данной главе рассматриваются лишь особенности систем с переменными параметрами и намечаются некоторые методы их исследования. Более подробно такие системы исследуются в работах [25, 86, 89] и др.

Рассмотрим переходную функцию и функцию веса системы с переменными параметрами. Так как коэффициенты уравнения (13.1) меняются с течением времени, то эти функции будут зависеть от момента приложения единичного скачка или единичного импульса на входе. На рис. 13.1, а изображен график изменения одного из коэффициентов уравнения (13.1) и переходная функция



$$h(t - \vartheta, \vartheta) = h(\tau, \vartheta), \quad (13.2)$$

где  $t$  — текущее время, отсчитываемое от некоторого момента, соответствующего, например, включению системы или началу изменения переменных параметров;  $\vartheta$  — время, соответствующее поступлению на вход единичной ступенчатой функции;  $\tau$  — текущее время, отсчитываемое от момента приложения ступенчатой функции.

Если теперь на вход подать единичную импульсную функцию, которую можно представить как предел отношения

$$\delta(t - \vartheta) = \lim_{\Delta\vartheta \rightarrow 0} \frac{1(t - \vartheta) - 1[t - (\vartheta + \Delta\vartheta)]}{\Delta\vartheta},$$

то процесс на выходе, т. е. функцию веса, в силу принципа суперпозиции можно представить в виде разности двух смещенных на  $\Delta\vartheta$  переходных функций с измененным в  $1/\Delta\vartheta$  раз масштабом:

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \lim_{\Delta\vartheta \rightarrow 0} \frac{h|t - \vartheta, \vartheta| - h|t - (\vartheta + \Delta\vartheta), \vartheta + \Delta\vartheta|}{\Delta\vartheta}$$

Правая часть этого выражения представляет собой производную от переходной функции по аргументу  $\vartheta$ , взятую с обратным знаком. Таким образом, для функции веса получаем (рис. 13.1, б)

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = w(\tau, \vartheta) = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} h(t - \vartheta, \vartheta). \quad (13.3)$$

Как следует из (13.3), функция веса является функцией двух переменных: времени  $\vartheta$ , соответствующего моменту поступления на вход системы единичного импульса, и текущего времени  $t$  (или  $\tau = t - \vartheta$ ). В связи с этим функцию веса можно изобразить в виде некоторой поверхности (рис. 13.2). Эта поверхность переходит в плоскость  $tO\vartheta$  при  $t < \vartheta$ . Границе перехода поверхности в плоскость соответствует биссектриса  $t = \vartheta$ . Это обстоятельство объясняется тем, что в реальных системах реакция не может появиться ранее приложения на входе системы импульса. Поэтому при  $t < \vartheta$  функция веса должна быть тождественно равна нулю.

Сечение поверхности весовой функции вертикальной плоскостью, параллельной оси  $t$  (рис. 13.2, а), даст весовую функцию для фиксированного момента приложения единичного импульса на входе системы ( $\vartheta = \text{const}$ ). Эта функция называется *нормальной* весовой функцией системы с переменными параметрами:

$$w(t - \vartheta, \vartheta), \quad \vartheta = \text{const}. \quad (13.4)$$

Она является параметрической функцией, так как в нее входит фиксированный параметр  $\vartheta = \text{const}$ .

Нормальная весовая функция может быть сделана зависящей от аргумента  $\tau = t - \vartheta$  подстановкой  $t = \vartheta + \tau$ . В результате получаем функцию

$$w(\tau, \vartheta), \quad \vartheta = \text{const}. \quad (13.5)$$

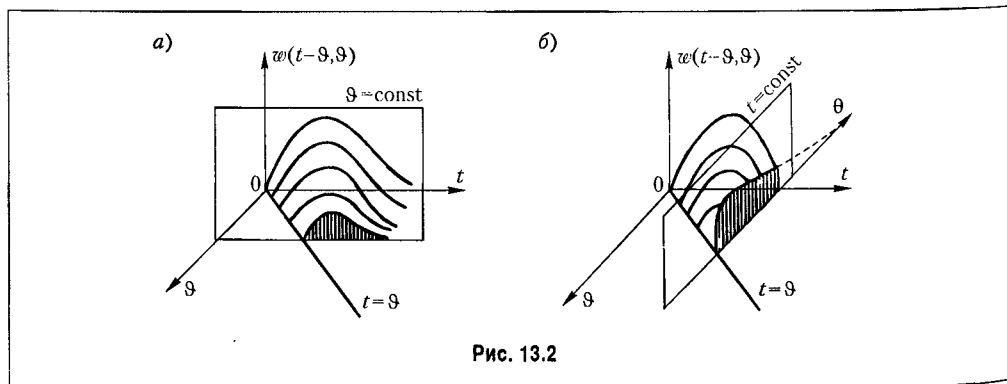


Рис. 13.2



Сечение поверхности весовой функции вертикальной плоскостью, параллельной оси  $\vartheta$ , дает кривую, образованную ординатами семейства нормальных весовых функций для фиксированного значения времени  $t = \text{const}$  (рис. 13.2, б). Эта кривая может быть получена путем обработки семейства нормальных весовых функций, построенных для различных моментов приложения единичного входного импульса  $\vartheta$  (рис. 13.3). Получающуюся зависимость будем называть сопряженной функцией веса:

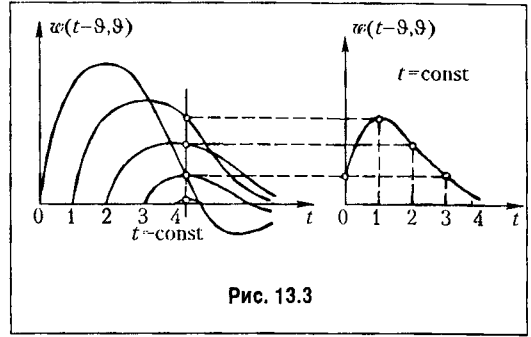


Рис. 13.3

$$w(t - \vartheta, \vartheta), \quad t = \text{const}. \quad (13.6)$$

Она также является параметрической функцией, так как содержит параметр  $t = \text{const}$ .

Сопряженная функция веса является функцией смещения  $\vartheta$ , но может быть представлена также как функция аргумента  $\theta = t - \vartheta$  (рис. 13.2, б), называемого реверс-смещением, поскольку 0 отсчитывается от точки  $\vartheta = t$  в сторону, противоположную смещению  $\vartheta$ . Это осуществляется подстановкой в сопряженную весовую функцию значения  $\vartheta = t - \theta$  при  $t = \text{const}$ . В результате получаем

$$w(\theta, t - \theta), \quad t = \text{const}. \quad (13.7)$$

Проиллюстрируем все сказанное примером. Пусть функция веса системы с переменными параметрами имеет вид

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{e^{-\alpha(t-\vartheta)}}{t}.$$

Зафиксировав смещение и положив, например,  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$ , получаем нормальную функцию веса:

$$w(t - \vartheta_0, \vartheta_0) = e^{\alpha\vartheta_0} \frac{e^{-\alpha t}}{t}$$

или в другом виде при переходе к аргументу  $\tau = t - \vartheta$ :

$$w(\tau, \vartheta_0) = \frac{e^{-\alpha\tau}}{\vartheta_0 + \tau}.$$

Зафиксировав текущее время и положив, например,  $t = t_0 = \text{const}$ , получаем сопряженную функцию веса

$$w(t_0 - \vartheta, \vartheta) = \frac{e^{-\alpha t_0}}{t_0 - \vartheta} e^{\alpha\vartheta}.$$

Перейдя к реверс-смещению в  $\theta = t - \vartheta$ , имеем

$$w(\theta, t_0 - \theta) = \frac{e^{-\alpha\theta}}{t_0}.$$

Заметим, что в системах с постоянными параметрами весовая функция является функцией только времени  $\tau = t - \vartheta$  и не зависит от момента приложения  $\vartheta$  входного импульса. Рельеф функции веса (рис. 13.2) в этом случае получается цилиндрическим, а оба рассмотренных выше сечения (рис. 13.2, *a* и *б*) совпадают по форме и отличаются только знаками аргументов. При переходе к реверс-смещению получаем полное совпадение двух функций веса — нормальной и сопряженной:  $w(\tau) = w(\theta)$ .

Пусть на систему (13.1) с функцией веса  $w(t - \vartheta, \vartheta)$  действует входной сигнал  $f(t)$ . Элементарная реакция на выходе системы в произвольный момент времени  $t \geq \vartheta$  будет

$$dx(t) = w(t - \vartheta, \vartheta) f(\vartheta) d\vartheta. \quad (13.8)$$

Полный сигнал на выходе линейной системы определяется как суперпозиция элементарных реакций интегрированием (13.8) в пределах от 0 до  $t$ :

$$x(t) = \int_0^t w(t - \vartheta, \vartheta) f(\vartheta) d\vartheta. \quad (13.9)$$

Так как при  $\vartheta > t$  функция веса равна нулю, то выражение (13.9) можно также записать в виде

$$x(t) = \int_0^{\infty} w(t - \vartheta, \vartheta) f(\vartheta) d\vartheta. \quad (13.10)$$

Из двух последних выражений видно, что в интегральном уравнении связи между входной и выходной величинами используется сопряженная функция веса (13.6), т. е. разрез рельефа функции веса (рис. 13.2, *б*) вдоль аргумента  $\vartheta$ .

Если использовать реверс-смещение  $\theta = t - \vartheta$ , то интегральная связь (13.9) может быть представлена в виде интеграла свертки

$$x(t) = \int_0^t w(\theta, t - \theta) f(t - \theta) d\theta. \quad (13.11)$$

Как уже отмечалось, в случае постоянства параметров системы функция веса зависит только от времени  $(t - \vartheta)$ . В этом случае формула (13.11) переходит в интеграл свертки (7.44)

$$x(t) = \int_0^t w(\theta) f(t - \theta) d\theta = \int_0^t w(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

## 13.2. Нахождение функции веса и построение переходных процессов

Функция веса системы с переменными параметрами является исчерпывающей характеристикой этой системы, и нахождение ее важно по следующим соображениям. Функция веса характеризует протекание временных процессов в системе управления, и по ее виду можно судить о качестве управления, аналогично тому, как это делалось для систем с постоянными параметрами (§ 8.4). По имеющейся функции веса можно определить время протекания переходного процесса, как характеристику быстродействия и склонность системы к колебаниям.

Кроме того, по имеющейся функции веса можно строить процесс на выходе системы при заданных входных воздействиях не производя при этом каждый раз полного решения исходного уравнения (13.1). В соответствии с формулами (13.9) и (13.11) для этой цели необходимо иметь сопряженные функции веса.

Ввиду сложности проблемы существующие методы позволяют решать задачу нахождения функции веса в численном виде. Только для систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и иногда второго порядков, удастся решить задачу в общем виде. Поэтому в некоторых случаях приходится сложную систему с переменными параметрами приближенно сводить к более простой системе, движение которой описывается уравнением не выше второго порядка.

Следует заметить, что большинство систем управления с переменными параметрами относится к так называемым квазистационарным системам, и системам, параметры которых меняются сравнительно медленно. В подобных системах коэффициенты дифференциального уравнения (13.1) мало меняются в течение времени переходного процесса, определяемого временем затухания нормальной функции веса.

**Дифференциальное уравнение первого порядка.** В некоторых случаях для оценки вида переходных процессов системы с переменными параметрами ее уравнение приближенно можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t). \quad (13.12)$$

Это уравнение имеет аналитическое решение

$$x(t) = e^{-S(t)} \left[ \int Q(t) e^{S(t)} dt + C \right], \quad (13.13)$$

где

$$S(t) = \int P(t) dt,$$

а  $C$  — постоянная интегрирования.

Пусть, например, имеется уравнение

$$t \frac{dx}{dt} + a_1 x = f(t). \quad (13.14)$$

Определим для него семейство переходных характеристик  $h(t - \vartheta, \vartheta) = h(t, \vartheta)$ . Для единичной ступенчатой функции при  $\vartheta \neq 0$  уравнение (13.14) можно записать в следующем виде:

$$t \frac{dx}{dt} + a_1 x = 1(t - \vartheta).$$

Приведем его к виду (13.12):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_1}{t} x = \frac{1(t - \vartheta)}{t}.$$

Далее получаем

$$P(t) = \frac{a_1}{t}, \quad S(t) = \int P(t) dt = \int \frac{a_1}{t} dt = a_1 \ln t, \\ e^{S(t)} = t^{a_1}, \quad e^{-S(t)} = t^{-a_1}, \quad Q(t) = \frac{1(t - \vartheta)}{t}, \quad \int Q(t) e^{S(t)} dt = \frac{t^{a_1}}{a_1}.$$

На основании формулы (13.13) получаем

$$h(t - \vartheta, \vartheta) = t^{-a_1} \left[ \frac{t^{a_1}}{a_1} + C \right] = \frac{1}{a_1} + \frac{C}{t^{a_1}}.$$

При нулевых начальных условиях (для  $t = \vartheta$ ) должно быть  $h(0, \vartheta) = 0$ . Отсюда определяется постоянная интегрирования

$$C = -\frac{\vartheta^{a_1}}{a_1}.$$

Окончательно получаем

$$h(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{a_1} \left[ 1 - \left( \frac{\vartheta}{t} \right)^{a_1} \right].$$

Дифференцируя последнее выражение по  $\vartheta$ , можно получить функцию веса:

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} h(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{\vartheta^{a_1 - 1}}{t^{a_1}}$$

или в ином виде:

$$w(t - \vartheta) = \frac{\vartheta^{a_1 - 1}}{(\vartheta + \tau)^{a_1}}.$$

Для дифференциального уравнения (13.12) можно сразу найти функцию веса из общего решения (13.13), если положить в (13.12) входной сигнал равным единичному смещенному импульсу  $Q(t) = \delta(t - \vartheta)$ . Пролетав необходимые выкладки, получаем

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = e^{-R(t, \vartheta)}, \quad (13.15)$$

где

$$R(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^t P(t) dt.$$

Распространим этот результат на более общий случай записи дифференциального уравнения в виде

$$a_0(t) \frac{dx}{dt} + a_1(t) x = b_0(t) f(t). \quad (13.16)$$

Приведем его к виду (13.12):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_1(t)}{a_0(t)} x = \frac{b_0(t)}{a_0(t)} f(t). \quad (13.17)$$

Положив  $f(t) = \delta(t - \vartheta)$ , получим для функции веса решение в виде

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{b_0(\vartheta)}{a_0(\vartheta)} e^{-R(t, \vartheta)}, \quad (13.18)$$

где

$$R(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^t \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt.$$

Рассмотрим снова в качестве примера уравнение (13.14). Приведем его к виду (13.17):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_1}{t} x = \frac{1}{t} f(t).$$

Обратившись к формуле (13.18), находим

$$R(t, \vartheta) = \int_{\vartheta}^t \frac{a_1}{t} dt = a_1 \ln \frac{t}{\vartheta}$$

и функцию веса

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\vartheta} e^{-a_1 \ln \frac{t}{\vartheta}} = \frac{\vartheta^{a_1 - 1}}{t^{a_1}},$$

что совпадает с полученным ранее выражением.

**Дифференциальное уравнение второго порядка.** Рассмотрим случай, когда дифференциальное уравнение (13.1) сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\frac{dx}{dt} + Q(t)x = f(t). \quad (13.19)$$

При помощи подстановки

$$x(t) = u(t) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt} \quad (13.20)$$

это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F(t)u = f(t) e^{\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt} = f_1(t). \quad (13.21)$$

Здесь введено обозначение

$$F(t) = Q(t) - \frac{1}{2} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{P^2(t)}{4}. \quad (13.22)$$

При действии единичного импульса  $f(t) = \delta(t - \vartheta)$  для уравнения (13.21) получится решение  $\bar{u} = z(t - \vartheta, \vartheta)$ , которое связано с весовой функцией  $w(t - \vartheta, \vartheta)$  исходного уравнения (13.19) на основании формулы (13.20) соотношением

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = z(t - \vartheta, \vartheta) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt}. \quad (13.23)$$

Если же положить  $f_1(t) = \delta(t - \vartheta)$ , то для уравнения (13.21) будет получена весовая функция  $r(t - \vartheta, \vartheta)$ , которая на основании (13.9) связана с решением  $z(t - \vartheta, \vartheta)$  зависимостью

$$z(t - \vartheta, \vartheta) = \int_0^t r(t - u, u) e^{\frac{1}{2} \int_0^u P(u) du} \delta(u - \vartheta) du.$$

Эта зависимость на основании свойства дельта-функции может быть представлена в виде

$$z(t - \vartheta, \vartheta) = r(t - \vartheta, \vartheta) e^{\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} P(\vartheta) d\vartheta} \quad (13.24)$$

В результате из (13.23) и (13.24) получаем

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = r(t - \vartheta, \vartheta) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t P(t) dt} \quad (13.25)$$

Таким образом, для отыскания функции веса  $w(t - \vartheta, \vartheta)$  необходимо предварительно решить уравнение (13.21), которое приобретает вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + F(t)u = \delta(t - \vartheta) \quad (13.26)$$

с нулевыми начальными условиями:  $u(t) = 0$  и  $\dot{u}(t) = 0$  при  $t = \vartheta$ . Полученную при решении весовую функцию  $u = r(t - \vartheta, \vartheta)$  необходимо затем подставить в (13.25) и пайти  $\vartheta(t - \vartheta, \vartheta)$ .

Решение уравнения (13.26) может быть произведено при помощи функций Бесселя [86]. Для этого функция  $F(t)$  должна быть аппроксимирована отрезками прямых линий, уравнение которых сводится к виду  $a_i + b_i t$ . Однако это решение является сравнительно сложным.

Ограничимся рассмотрением так называемого аппроксимирующего решения, которое может применяться, если функция  $F(t)$  мало изменяется относительно своего среднего большого значения  $F_{\text{ср}}$  (рис. 13.4). Это решение называется аппроксимацией Бриллюина–Вентцеля–Крамера [86].

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + F(t)u = 0. \quad (13.27)$$

Предположим теперь, что для некоторого однородного дифференциального уравнения второго порядка получено частное решение

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{N(t)}} e^{-jS(t)}, \quad (13.28)$$

где

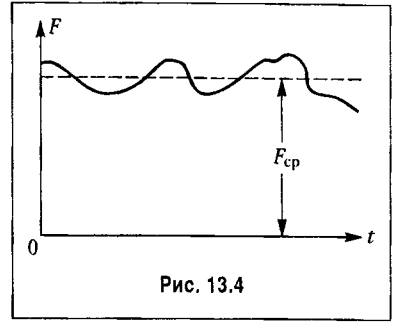
$$S(t) = \int_0^t N(t) dt. \quad (13.29)$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет решение (13.28). Продифференцировав его дважды и исключив промежуточные переменные, получаем

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \left[ N^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{N}}{N} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}}{N} \right] u_1 = 0. \quad (13.30)$$

Сравнивая (13.30) и (13.27), видим, что выражение (13.28) будет частным решением уравнения (13.27), если выполняется тождество

$$F(t) = N^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{N}}{N} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}}{N}. \quad (13.31)$$



Решение уравнения (13.31) и отыскание функции  $N(t)$  является сложной задачей вследствие наличия нелинейностей в (13.31). Однако может быть найдено приближенное решение (13.31) в виде ряда, если удовлетворяются неравенства

$$\left| \frac{\dot{N}}{N^2} \right|^2 < \varepsilon, \quad \left| \frac{\ddot{N}}{N^3} \right| < \varepsilon^2, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тогда решение (13.21) можно представить в виде

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots \quad (13.32)$$

Подставляя этот ряд в (13.31), получаем формулы для определения членов ряда:

$$\left. \begin{aligned} N_0(t) &= \sqrt{F(t)}, \\ 2N_0N_1 &= \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{N}_0}{N_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{N}_0}{N_0}, \\ 2N_0N_1 + N_1^2 &- \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{N}_0}{N_0} \right)^2 \left( \frac{\dot{N}_1}{N_0} - \frac{N_1}{N_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\dot{N}_0}{N_0} \left( \frac{\dot{N}_1}{N_0} - \frac{N_1}{N_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.33)$$

Часто можно ограничиться только первым членом ряда (13.22), что будет справедливым, если функция  $F(t)$  изменяется медленно, оставаясь в среднем большой (рис. 13.4). Тогда

$$N(t) = \sqrt{F(t)}. \quad (13.34)$$

При выполнении условия  $F(t) > 0$  в качестве второго частного решения можно взять комплексно-сопряженную величину (13.29)

$$u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{N(t)}} e^{jS(t)}. \quad (13.35)$$

Тогда можно показать, что решение уравнения (13.26) будет

$$r(t - \vartheta, \vartheta) = - \frac{u_1(t) u_2(\vartheta) - u_1(\vartheta) u_2(t)}{u_1(\vartheta) \dot{u}_2(\vartheta) - \dot{u}_1(\vartheta) u_2(\vartheta)} = \frac{u_1(t) u_2(\vartheta) - u_1(\vartheta) u_2(t)}{2j} \quad (13.36)$$

или, после подстановки (13.28) и (13.35),

$$r(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{F(t)F(\vartheta)}} \sin [S(t) - S(\vartheta)]. \quad (13.37)$$



В предельном случае постоянства параметров  $F(t) = \Omega^2 = \text{const}$ . Тогда  $S(t) = \Omega t$  и  $S(\vartheta) = \Omega \vartheta$ . В результате из формулы (13.37) можно получить функцию веса консервативного звена

$$r(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\Omega} \sin(t - \vartheta) = \frac{1}{\Omega} \sin \Omega \tau.$$

Для исходного дифференциального уравнения (13.19) на основании (13.25) и (13.37) получаем искомую функцию веса

$$w(t - \vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{F(t)F(\vartheta)}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\vartheta}^t P(t) dt} \sin[S(t) - S(\vartheta)]. \quad (13.38)$$

Критерием медленности изменения функции  $F(t)$  и, следовательно, применимости полученного выражения может служить неравенство

$$\left| \frac{1}{2} \frac{[\dot{F}(t)]^2}{F^3(t)} + \frac{1}{4} \frac{\ddot{F}(t)}{F_2(t)} \right| \ll 1, \quad (13.39)$$

которое получается из (13.31) и (13.34).

**Метод последовательных приближений.** Рассмотрим уравнение (13.1):

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n(t)x = b_0(t) \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_m(t)f.$$

Ограничиваясь случаем квазистационарных систем и полагая, что коэффициенты  $a_i(t)$  меняются медленно, найдем функцию веса для этого уравнения.

Переменные коэффициенты в левой части исходного уравнения представим в виде суммы постоянной и изменяющейся частей:

$$a_i(t) = a_i^0 + a_i^* = a_i(\vartheta) + a_i^*(t - \vartheta), \quad (13.40)$$

где  $a_i^0 = a_i(\vartheta)$  — переменный коэффициент, зафиксированный для момента приложения входной величины  $t = \vartheta$ .

Тогда исходное дифференциальное уравнение (13.1) можно представить в виде

$$a_0^0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1^0 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n^0 x = f_0(t) - y(t), \quad (13.41)$$

где

$$f_0(t) = b_0(t) \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_m(t)f, \quad (13.42)$$

$$y(t) = a_0^* \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n^* x. \quad (13.43)$$

Поскольку мы предположили, что коэффициенты  $a_i(t)$  меняются медленно, то функция  $y(t)$  мала по сравнению с левой частью (13.41). Эту функцию можно рассматривать как возмущение, и тогда к уравнению (13.41) можно применить метод последовательных приближений.

В уравнении (13.41) можно перейти к изображениям по Лапласу. Тогда получим

$$X(p) = \Phi(p) F_0(p) - \Phi(p) Y(p). \quad (13.44)$$

Здесь введено обозначение

$$\Phi(p) = \frac{1}{a_0^0 p^n + a_1^0 p^{n-1} + \dots + a_n^0}. \quad (13.45)$$

Решение уравнения (13.41) или (13.44) можно записать в виде ряда

$$x(t) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots \quad (13.46)$$

Для получения первого приближения  $x_1$  зафиксируем переменные коэффициенты  $a_i(t) = a_i(\vartheta)$ . Тогда первое приближение может быть найдено как решение дифференциального уравнения

$$a_0^0 \frac{d^n x_1}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_1 = f_0(t). \quad (13.47)$$

Решение этого уравнения можно получить, используя обычные методы (см. главу 7), в том числе путем нахождения оригинала, соответствующего изображению (13.44) при  $Y(p) = 0$ :

$$X_1(p) = \Phi(p) F_0(p). \quad (13.48)$$

Для получения второго приближения в правую часть (13.41) или (13.44) подставляется первое приближение  $x = x_1$ , а в левую часть —  $x = x_1 + x_2$ . Тогда получается уравнение с фиксированными коэффициентами для определения поправки:

$$a_0^0 \frac{d^n x_2}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_2 = - \left[ a_0^* \frac{d^n x_1}{dt^n} + \dots + a_n^* x_1 \right]. \quad (13.49)$$

Это уравнение также может быть решено с использованием преобразования Лапласа посредством нахождения оригинала изображения

$$X_2(p) = -\Phi(p) Y_1(p),$$

где  $Y_1(p)$  — изображение  $y(t)$  при подстановке в формулу (13.43)  $x = x_1$ .

Повторяя этот процесс многократно, можно найти рекуррентное соотношение для определения  $k$ -го члена ряда (13.46):

$$a_0^0 \frac{d^n x_k}{dt^n} + \dots + a_n^0 x_k = - \left[ a_0^* \frac{d^n x_{k-1}}{dt^n} + \dots + a_n^* x_{k-1} \right]. \quad (13.50)$$

Ряд (13.46) сходится тем быстрее, чем медленнее изменяются коэффициенты  $a_i(t)$ . Рассмотренный метод может использоваться как для нахождения функции веса и переходной функции, так и для построения переходного процесса при любом известном воздействии  $f(t)$ .

### § 13.3. Передаточные функции

Связь между входной и выходной величинами в системе с переменными параметрами определяется интегральной зависимостью (13.9):

$$x(t) = \int_0^t w(t - \vartheta, \vartheta) f(\vartheta) d\vartheta.$$

Предположим, что к входному сигналу  $f(t)$  можно применить преобразование Фурье (7.15). Тогда его можно представить в виде (7.16):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Объединяя записанные выше две формулы, получаем

$$x(t) = \int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) d\vartheta \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega \vartheta} d\omega. \quad (13.51)$$

Здесь в первом интеграле нижний предел взят равным  $-\infty$ . Это отражает тот факт, что входное воздействие может начаться в любой момент времени при  $t < 0$ , в том числе и при  $t \rightarrow -\infty$ . Меняя в (13.51) порядок интегрирования и умножая правую часть на  $e^{j\omega t} e^{-j\omega t} = 1$ , получаем

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{-j\omega(t-\vartheta)} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega, t) F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (13.52)$$

Здесь введена частотная передаточная функция системы с переменными параметрами

$$W(j\omega, t) = \int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{-j\omega(t-\vartheta)} d\vartheta. \quad (13.53)$$

Ее можно представить также в следующем виде:

$$W(j\omega, t) = \int_0^{\infty} w(\theta, t - \theta) e^{-j\omega\theta} d\theta, \quad (13.54)$$

где  $\theta = t - \vartheta$  — реверс-смещение, а  $w(0, t - 0)$  — сопряженная функция веса (13.7).

Величина, находящаяся в правой части (13.52) под знаком интеграла, представляет собой изображение Фурье функции времени  $x(t)$ . Поэтому вместо (13.52) можно записать

$$X(j\omega, t) = W(j\omega, t) F(j\omega). \quad (13.55)$$

Таким образом, изображение Фурье выходной величины системы с переменными параметрами можно представить как изображение Фурье входной величины, умноженное на частотную передаточную функцию. Разница по сравнению с системой, имеющей постоянные параметры, заключается в том, что выражение (13.55) записано для некоторого фиксированного момента времени  $t = \text{const}$ . В связи с этим в частотную передаточную функцию  $W(j\omega, t)$  входит параметр  $t$ , вследствие чего она называется *параметрической* частотной передаточной функцией.

Переходя в формуле (13.52) к преобразованию Лапласа, получим

$$x(t) = \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} W(p, t) F(p) e^{pt} dp, \quad (13.56)$$

где параметрическая передаточная функция

$$W(p, t) = \int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{-p(t-\vartheta)} d\vartheta = \int_0^{\infty} w(\theta, t - \theta) e^{-p\theta} d\theta. \quad (13.57)$$

**Отыскание параметрической передаточной функции.** Использование интегральной связи (13.57) для нахождения параметрической передаточной функции является нерациональным, так как требует знания функции веса, что усложняет задачу. Более удобно находить параметрическую передаточную функцию непосредственно из исходного дифференциального уравнения (13.1). Положим в нем  $f(t) = \delta(t - \vartheta)$ . Тогда решение этого уравнения будет соответствовать функции веса  $w = w(t - \vartheta, \vartheta)$ . Подставим эти значения в (13.1):

$$\left[ a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n(t) x \right] w(t - \vartheta, \vartheta) = \left[ b_0(t) \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_m(t) \right] \delta(t - \vartheta). \quad (13.58)$$

Умножим левую и правую части (13.58) на  $e^{p\vartheta}$  и проинтегрируем по  $\vartheta$  в пределах от  $-\infty$  до  $t$ :

$$\begin{aligned} a_0(t) \frac{d^n}{dt^n} \left[ \int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{p\vartheta} d\vartheta \right] + \dots + a_n(t) \left[ \int_{-\infty}^t w(t - \vartheta, \vartheta) e^{p\vartheta} d\vartheta \right] = \\ = \left[ b_0(t) p^m + \dots + b_m(t) \right] e^{pt}. \end{aligned} \quad (13.59)$$

На основании (13.57) величины, находящиеся в квадратных скобках, можно представить в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^t w(t-\vartheta, \vartheta) e^{p\vartheta} d\vartheta = W(p, t) e^{pt}.$$

В результате вместо (13.59) можно записать

$$a_0(t) \frac{d^n}{dt^n} [W(p, t) e^{pt}] + \dots + a_n(t) [W(p, t) e^{pt}] = [b_0(t) p^m + \dots + b_m(t)] e^{pt}. \quad (13.60)$$

Продифференцировав левую часть и сократив на  $e^{pt}$ , получим

$$A(p, t) W(p, t) + \frac{dA}{dp} \frac{dW}{dt} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{dp^n} \frac{d^n W}{dt^n} = B(p, t). \quad (13.61)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A(p, t) &= a_0(t) p^n + \dots + a_n(t), \\ B(p, t) &= b_0(t) p^m + \dots + b_m(t). \end{aligned} \right\} \quad (13.62)$$

Таким образом, параметрическая передаточная функция может быть получена в результате решения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (13.61).

Заметим, что в системах с постоянными параметрами передаточная функция не зависит от времени и уравнение (13.61) приобретает вид

$$A(p) W(p) = B(p). \quad (13.63)$$

Передаточная функция в случае постоянства параметров будет

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n}. \quad (13.64)$$

В случае переменных параметров уравнение (13.61) может быть решено методом последовательных приближений [86]. Для этого представим его в виде

$$A(p, t) W(p, t) = B(p, t) + N\{W(p, t)\}, \quad (13.65)$$

$$N\{W(p, t)\} = - \left[ \frac{dA}{dp} \frac{dW}{dt} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{dp^n} \frac{d^n W}{dt^n} \right]. \quad (13.66)$$

Будем искать решение в виде ряда

$$W(p, t) = W_0(p, t) + W_1(p, t) + \dots \quad (13.67)$$

Первое приближение можно получить, положив  $N = 0$  в (13.65):

$$W_0(p, t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)}. \quad (13.68)$$

Это будет передаточная функция системы с «замороженными» коэффициентами. Для вычисления первой поправки  $W_1(p, t)$  подставим полученное из (13.68) первое приближение в правую часть (13.65). Тогда получим для первой поправки

$$W_1(p, t) = \frac{N\{W_0(p, t)\}}{A(p, t)}. \quad (13.69)$$

Формула для  $k$ -й поправки будет иметь вид

$$W_k(p, t) = \frac{N\{W_{k-1}(p, t)\}}{A(p, t)}. \quad (13.70)$$

Таким образом, последующий член ряда (13.67) получается посредством дифференцирования предыдущего члена в соответствии с (13.66) и подстановки его в (13.70).

Ряд (13.67) сходится тем быстрее, чем медленнее изменяются коэффициенты исходного дифференциального уравнения (13.1).

По найденной функции  $W(p, t)$  может быть получена параметрическая частотная передаточная функция  $W(j\omega, t)$  подстановкой  $p = j\omega$ .

**Использование параметрических передаточных функций.** В соответствии с формулой (13.56) изображение Лапласа выходной величины системы с переменными параметрами можно найти как произведение изображения воздействия на параметрическую передаточную функцию:

$$X(p, t) = W(p, t) F(p). \quad (13.71)$$

Это дает возможность находить переходные процессы в системе с переменными параметрами посредством использования преобразования Лапласа (или Карсона-Хевисайда). Для этой цели по формуле (13.71) отыскивается изображение выходной величины, а затем делается переход к оригиналу  $x(t)$ .

Для этой цели могут использоваться существующие таблицы изображений Лапласа функций времени. Так, например, пусть изображение выходной величины равно

$$X(p, t) = W(p, t) F(p) = \frac{k}{p(p + bt + ct^2)}.$$

Полагая в этом выражении время фиксированным параметром, по таблице (см., например, табл. 7.2) находим

$$x(t) = \frac{k}{bt + ct^2} [1 - e^{-(bt + ct^2)t}].$$

Если изображение представляет собой сложную дробно-рациональную функцию, то можно использовать теорему разложения (см. § 7.4). При отсутствии нулевых корней знаменателя изображения

$$X(p) = \frac{X_1(p)}{X_2(p)} \quad (13.72)$$

аналогично формуле (7.37) получаем

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k, t)}{\left[ \frac{d}{dp} X_2(p, t) \right]_{p=p_k}} e^{p_k t}. \quad (13.73)$$

При наличии одного нулевого корня знаменателя изображения

$$X(p) = \frac{X_1(p, t)}{p X_2(p, t)} \quad (13.74)$$

аналогично формуле (7.39) получаем

$$x_1(t) = \frac{X_1(0)}{X_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k, t)}{\left[ \frac{d}{dp} X_2(p, t) \right]_{p=p_k}} e^{p_k t}. \quad (13.75)$$

В формулах (13.73) и (13.75) корни знаменателя предполагаются некратными.

## § 13.4. Устойчивость и качество управления

Для систем с переменными параметрами понятие устойчивости имеет некоторую специфику. Если система работает ограниченный интервал времени, то понятие асимптотической устойчивости (см. § 6.1) практически теряет свой смысл. Однако для квазистационарных систем при сравнительно медленном изменении коэффициентов уравнения (13.1) представляется возможным сформулировать понятие устойчивости следующим образом.

Будем считать систему с переменными параметрами устойчивой на заданном интервале времени  $T$ , если ее нормальная функция веса (13.4) или (13.5) затухает во времени для всех фиксированных значений  $\vartheta$ , лежащих внутри этого интервала. Это условие можно записать следующим образом:

$$I_t = \int_{\vartheta}^{\infty} |\omega(t - \vartheta, \vartheta)| dt = \int_0^{\infty} |\omega(\tau, \vartheta)| d\tau < \infty, \quad 0 < \vartheta < T. \quad (13.76)$$

Если для системы получена нормальная функция веса, то вид ее и определяет устойчивость системы.

Однако в некоторых случаях имеется сопряженная функция веса (13.6) или (13.7), которая связана преобразованием Лапласа с параметрической передаточной функцией (13.57) и преобразованием Фурье с параметрической частотной передаточной функцией (13.53) или (13.54). Поэтому более просто можно исследовать вопрос затухания функции веса вдоль аргументов  $\vartheta$  (смещение) или  $\theta$  (реверс-смещение). Условие затухания вдоль этих аргументов можно записать следующим образом:

$$I_{\vartheta} = \int_{-\infty}^t |\omega(t - \vartheta, \vartheta)| d\vartheta = \int_0^{\infty} |\omega(\theta, t - \theta)| d\theta < \infty, \quad 0 < t < T. \quad (13.77)$$

Однако затухание сопряженной функции веса и выполнение условий (13.77) еще не означает затухания нормальной функции веса и выполнения условия (13.76). Заметим, что в системах с постоянными параметрами не наблюдается такой неопределенности, так как для них совпадают оба разреза рельефа функции веса:  $x(\tau) = w(\theta)$ , и оба интеграла:  $I_t = I_{\vartheta}$ , определяемые формулами (13.76) и (13.77).

Можно показать [86], что для систем, описываемых дифференциальным уравнением вида

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n(t)x = f(t),$$

выполнение условия (13.77) практически обеспечивает выполнение условия (13.76). В этих системах исследование устойчивости может быть проведено на базе параметрической передаточной функции.

Исследование затухания сопряженной функции веса может производиться как по ее виду, если она известна для рассматриваемой системы, так и на основании отсутствия полюсов параметрической передаточной функции замкнутой системы в правой полуплоскости и на мнимой оси. Для этой цели могут привлекаться известные критерии устойчивости, например, критерий Найквиста и др.

Формулы главы 5, дающие связь между передаточными функциями замкнутой системы  $\Phi(p)$ , разомкнутой системы  $W(p)$  и передаточной функцией по ошибке  $\Phi_x(p)$ , сохраняют свою силу и для параметрических передаточных функций.

Качество управления может быть оценено по виду переходного процесса (переходной функции или функции веса) в соответствии с § 8.4. Для этой цели должны использоваться нормальная функция веса и нормальная переходная функция, определяемые для фиксированного момента времени  $0 < \vartheta < T$ .

Рассмотрим теперь точность воспроизведения задающего воздействия в следящих системах. Составим дифференциальное уравнение (13.1) так, чтобы в левой части находилась ошибка  $x(t)$ , а в правой — задающее воздействие  $g(t)$ :

$$a_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_n(t)x(t) = b_0(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_m(t)g(t). \quad (13.78)$$



Реакция системы на дельта-функцию в правой части  $g(t) = \delta(t - \theta, \theta)$  представляет собой функцию веса ошибки  $w_x(t - \theta, \theta)$ .

В соответствии с формулой (13.11) ошибку системы можно представить в виде

$$x(t) = \int_0^t w(\theta, t - \theta) f(t - \theta) d\theta. \quad (13.79)$$

Разлагая задающее воздействие в ряд Тейлора около точки  $t$  и подставляя его в (13.79), получаем

$$x(t) = g(t) \int_0^t w_x(\theta, t - \theta) d\theta - \dot{g}(t) \int_0^t w_x(\theta, t - \theta) \theta d\theta + \frac{\ddot{g}(t)}{2!} \int_0^t w_x(\theta, t - \theta) \theta^2 d\theta + \dots \quad (13.80)$$

Ограничимся случаем, когда  $t > t_n$ , где  $t_n$  — время затухания функции веса. Тогда верхний предел интегрирования в (13.80) можно положить равным бесконечности. В результате (13.80) можно представить в виде

$$x(t) = c_0(t) + g(t) + c_1(t)\dot{g}(t) + \frac{c^2(t)}{2!}\ddot{g}(t) + \dots \quad (13.81)$$

Здесь введено понятие коэффициентов ошибок, определяемых выражением

$$(-1)^k c_k(t) = \int_0^\infty w_x(\theta, t - \theta) \theta^k d\theta. \quad (13.82)$$

В отличие от коэффициентов ошибок системы с постоянными параметрами здесь они получаются зависящими от времени.

Коэффициенты ошибок можно вычислить с помощью параметрической передаточной функции по ошибке  $W_x(p, t)$ . Из (13.57) следует

$$[W_x(p, t)]_{p=0} = \left[ \int_0^\infty w_x(\theta, t - \theta) e^{-p\theta} d\theta \right]_{p=0} = \int_0^\infty w_x(\theta, t - \theta) d\theta = c_0(t). \quad (13.83)$$

Дифференцируя  $W_x(p, t)$  по  $p$  и положив затем  $p = 0$ , получаем формулу для определения  $k$ -го коэффициента:

$$c_k(t) = \left[ \frac{d^k W_x(p, t)}{dp^k} \right]_{p=0}. \quad (13.84)$$

Коэффициенты ошибок могут быть также получены делением числителя  $W_x(p, t)$  на знаменатель так, чтобы получить ряд по возрастающим степеням  $p$ .

Коэффициенты ошибок могут также определяться для возмущающего воздействия по соответствующей функции веса или по параметрической передаточной функции относительно возмущающего воздействия.

### § 13.5. О синтезе систем с переменными параметрами

Ввиду сложности математического решения синтез систем управления с переменными параметрами, как правило, должен осуществляться при помощи вычислительных машин непрерывного или дискретного действия, а также посредством реального моделирования. Вычислительные машины позволяют просмотреть все наиболее важные режимы работы системы, оценить ее качественные показатели и подобрать необходимые корректирующие средства.

Однако во многих случаях, особенно для квазистационарных систем, можно провести синтез расчетным путем. Это позволяет более сознательно подойти к определению структуры проектируемой системы и параметров корректирующих средств, что значительно сокращает объем последующих исследований и проверок на вычислительных машинах и моделях.

**Метод замороженных коэффициентов.** Одним из наиболее простых способов является «замораживание» переменных во времени параметров в какой-то фиксированный момент времени  $t = \vartheta$ , что ведет к замораживанию коэффициентов дифференциального уравнения (13.1). В этом случае система с переменными параметрами сводится к системе с постоянными параметрами, что позволяет применять для нее известные методы синтеза (см. главу 12).

Разница по сравнению с системами, имеющими постоянные коэффициенты, заключается в том, что исследование системы с замороженными коэффициентами должно быть последовательно проведено для различных моментов времени  $t = \vartheta$ , лежащих в интервале  $0 < \vartheta < T$ , где  $T$  — время работы системы.

Если во всем рабочем интервале времени от 0 до  $T$  качество системы управления оказывается приемлемым, то ее считают работоспособной и при изменении коэффициентов уравнения в исследованных пределах.

Этот метод будет давать правильные результаты, если в течение времени переходного процесса (пока функция веса не затухнет практически до нуля) коэффициенты уравнения (13.1) успеют мало изменить свое значение.

Следует заметить, что эффективность рассматриваемого метода может зависеть от правильного выбора фиксированных моментов времени, для которых производится замораживание коэффициентов. Необходимо так выбирать эти моменты времени, чтобы охватить все возможные варианты значений коэффициентов, обратив особое внимание на «опасные» точки, в которых происходит значительное изменение коэффициента, смена его знака и т. п. Безусловно, что правильный выбор рассматриваемых моментов времени во многом зависит от опыта проектировщика.

В качестве примера рассмотрим систему угловой стабилизации ракеты по углу рыскания  $\psi$ . Дифференциальное уравнение ракеты как объекта управления без учета влияния возмущений в простейшем случае может быть представлено в виде [93]

$$\ddot{\psi} + c_1 \dot{\psi} = c_2 \delta,$$

где  $\delta$  — угол поворота управляющих органов.

Из-за изменения скоростного напора, плотности атмосферы, выгорания топлива и под влиянием других факторов коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  в процессе полета изменяются (рис. 13.5).

Наиболее «опасными» являются точки, соответствующие моментам времени  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . «Заморозим» в этих точках коэффициенты. Тогда вместо одного уравнения с переменными коэффициентами получим четыре уравнения с постоянными коэффициентами и, соответственно, четыре стационарных объекта.

Наиболее тяжелым с точки зрения стабилизации является момент времени  $t = t_1$ , когда коэффициент  $c_1(t_1)$  имеет максимальное отрицательное значение. Передаточная функция объекта для этого случая

$$W_0(p) = \frac{c_2(t_1)}{p^2 + c_1(t_1)} = \frac{k_0}{T_0^2 p^2 - 1}, \quad k_0 = \frac{c_2(t_1)}{|c_1(t_1)|}, \quad T_0^2 = \frac{1}{|c_1(t_1)|}.$$

В характеристическом уравнении  $T_0^2 p^2 - 1 = 0$  имеется положительный корень, т. е. объект статически неустойчив. Структурная схема системы угловой стабилизации с таким объектом аналогична изображенной на рис. 6.5. Выберем параметры этой системы исходя из требований точности и запаса устойчивости. При необходимости введем в систему дополнительное корректирующее звено. Желательно, чтобы при тех же значениях параметров обеспечивалось требуемое качество системы с любым из четырех стационарных объектов. В противном случае придется производить коммутацию параметров или даже структуры корректирующих средств в процессе полета ракеты.

**Метод замороженных реакций.** Во многих случаях переменными параметрами обладает не вся система управления, а одно из ее звеньев. Чаще всего таким звеном оказывается объект управления. Задача синтеза будет сильно упрощена, если звено с переменными параметрами исследовать отдельно, а затем приближенно заменить его в окрестностях некоторой точки  $\vartheta_0$  эквивалентным звеном с постоянными параметрами. Задача оказывается более простой вследствие того, что в большинстве случаев дифференциальное уравнение звена с переменными параметрами может быть сведено к уравнению первого или второго порядка.

Этот метод оказывается более точным, чем метод замороженных коэффициентов, так как при замене звена с переменными параметрами эквивалентным звеном с постоянными параметрами учитывается факт переменности параметров исходного звена, что будет определять вид и параметры эквивалентного звена.

Идея метода заключается в следующем. Пусть имеется некоторая система управления (рис. 13.6), содержащая в своем составе звено с переменными параметрами. Часть системы, соответствующая постоянным параметрам, выделена в отдельное звено.

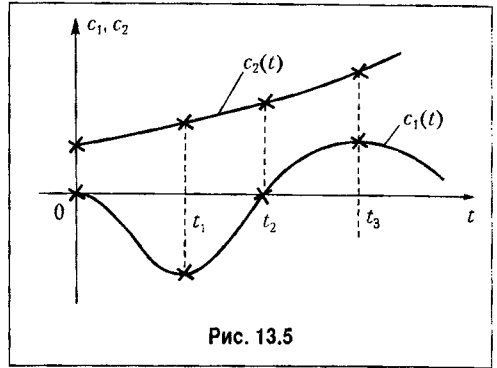


Рис. 13.5

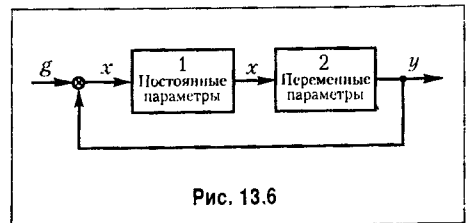


Рис. 13.6

Для звена с постоянными параметрами может быть определена весовая функция  $w_1(\tau)$ , которая зависит только от времени  $\tau = t - \vartheta$  (рис. 13.1), и соответствующая ей передаточная функция

$$W_1(p) = \int_0^{\infty} w_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (13.85)$$

Для звена с переменными параметрами определим весовую функцию  $w_2(t - \vartheta, \vartheta) = w_2(\tau, \vartheta)$ . Эта весовая функция может быть найдена точно, если дифференциальное уравнение звена имеет первый или второй порядок или приближенными методами в соответствии с изложенным в § 13.2 и § 13.3. Для ее нахождения могут быть также использованы вычислительные машины с последующей аппроксимацией решения.

После нахождения весовой функции  $w_2$  заморозим ее для некоторого фиксированного момента времени  $t = \vartheta_0$ , полагая при этом, что весовая функция на небольшом интервале времени вблизи точки  $t = \vartheta_0$  зависит только от времени  $\tau = t - \vartheta$  и не зависит от зафиксированного значения смещения. Таким образом, мы получим функцию

$$w_2(t - \vartheta, \vartheta_0) = w_2(\tau, \vartheta_0). \quad (13.86)$$

Заметим при этом, что мы фиксируем аргумент  $\vartheta$  не полностью, а только в той его части, которая делает рельеф функции веса нецилиндрическим. В результате этого оба разреза (рис. 13.2) получаются одинаковыми, т. е. весовые функции (13.5) и (13.7) совпадают.

Для весовой функции (13.98) может быть найдена передаточная функция

$$W_2(p, \vartheta_0) = \int_0^{\infty} w_2(\tau, \vartheta_0) e^{-p\tau} d\tau. \quad (13.87)$$

Эта передаточная функция по своей сущности является параметрической, так как в нее входит фиксированный параметр  $\vartheta_0$ . Однако по своим свойствам она полностью совпадает с передаточной функцией звена с постоянными параметрами. Вследствие этого будем называть ее эквивалентной передаточной функцией. С этой передаточной функцией можно в дальнейшем оперировать так, как будто рассматривается звено с постоянными параметрами. В связи с этим рассматриваемую передаточную функцию можно записать сокращенно:  $W_2(p, \vartheta_0) = W_2(p)$ .

Однако при этом надо помнить, что исследование системы должно быть произведено при различных значениях фиксированного параметра в пределах  $0 < \vartheta_0 < T$ .

Для системы, изображенной на рис. 13.6, при использовании эквивалентной передаточной функции может быть найдена передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) W_2(p), \quad (13.88)$$

передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} \quad (13.89)$$

и передаточная функция по ошибке

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (13.90)$$

Эти функции могут быть использованы обычным образом, как это делается для систем с постоянными параметрами при исследовании устойчивости, точности и качества управления, но исследование должно охватить весь рабочий интервал  $\vartheta$  от 0 до  $T$ .

Как и в случае замороженных коэффициентов, здесь приходится намечать «опасные» точки, где должно быть проведено исследование. Однако в рассматриваемом методе можно учитывать при этом не только сами значения коэффициентов в отдельные моменты времени, но и характер их изменения во времени (скорость изменения, ускорение изменения и т. д.). Это делает все исследование более полным при сохранении его относительной простоты.

В некоторых случаях оказывается более целесообразным отыскание и последующее замораживание переходной функции звена с переменными параметрами

$$h_2(t - \vartheta, \vartheta_0) = h_2(\tau, \vartheta_0). \quad (13.91)$$

Для переходной функции (13.18) может быть найдена передаточная функция

$$W_2(p, \vartheta_0) = p \int_0^{\infty} h_2(\tau, \vartheta_0) e^{-p\tau} d\tau. \quad (13.92)$$

По сравнению с нахождением передаточной функции по замороженной весовой функции (13.87) здесь получается обычно более полный учет динамических качеств звена с переменными параметрами. Это оказывается наиболее заметным в тех случаях, когда в правой части дифференциального уравнения звена имеются переменные во времени коэффициенты. Их изменение может быть учтено только при нахождении переходной функции, так как при нахождении весовой функции значения коэффициентов в правой части уравнения фиксируются в момент приложения единичного импульса.

# РАЗДЕЛ III

## ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

### Глава 14

### ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

#### § 14.1. Общие сведения

Линейной импульсной системой называется такая система автоматического управления, которая кроме звеньев, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, содержит *импульсный элемент*, преобразующий непрерывное входное воздействие в последовательность импульсов (рис. 14.1, а). Примеры импульсных систем рассмотрены в главе 1.

В общем случае можно изобразить обобщенную структурную схему импульсной системы так, как показано на рис. 14.1, б, где все непрерывные звенья сведены в один блок — непрерывную часть системы ПЧ. Последняя может иметь какую угодно структуру (любой сложности, с обратными связями и т. п.).

Импульсный элемент может представлять собой самостоятельное функциональное устройство (см., например, рис. 1.25) или являться составной частью цифро-аналоговых преобразователей, входящих в систему управления с цифровыми управляющими машинами (ЦВМ). Более подробно системы с ЦВМ будут рассмотрены ниже.

В процессе преобразования непрерывного сигнала в дискретный импульсный элемент (рис. 14.1, а) выполняет две операции: квантование по времени и импульсную модуляцию. Первая из них состоит в том, что сигнал  $u^*(t)$  появляется в дискретные моменты времени  $t = t_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ . Чаще всего эти моменты времени равноотстоящие, т. е.  $t_i = iT$ , где  $T$  — период дискретности. В результате импульсной модуляции изменяется какой-либо параметр импульса (амплитуда, ширина). Форма импульсов может быть любой (прямоугольной, трапецидальной и т. п.), но обычно используются импульсы прямоугольной формы.

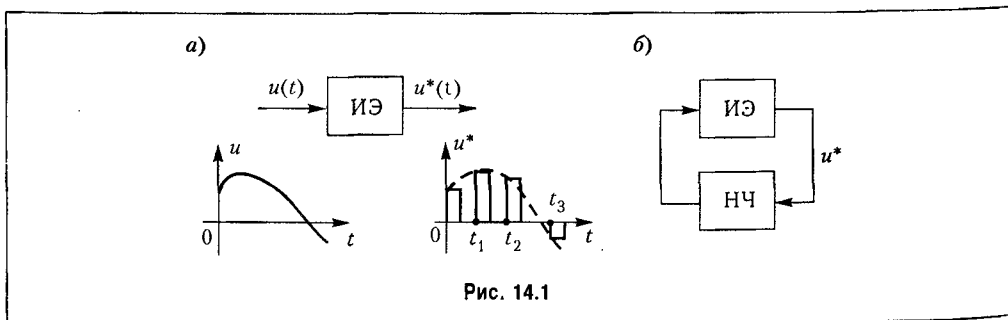


Рис. 14.1

Наиболее распространенными в настоящее время видами импульсной модуляции являются амплитудно-импульсная (АИМ) и широтно-импульсная (ШИМ).

При амплитудно-импульсной модуляции модулируемым параметром служит амплитуда (высота) импульсов. Обычно она пропорциональна значениям непрерывного сигнала  $u(t)$  в дискретные моменты времени  $t = iT$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), т. е. значениям

$$u(iT) = u(t)|_{t=iT}. \quad (14.1)$$

Сигнал  $u^*(t)$  на выходе импульсного элемента формируется в виде (рис. 14.2)

$$u^*(t) = \begin{cases} k_A u(iT) & \text{при } iT \leq t < (i+\gamma)T, \\ 0 & \text{при } (i+\gamma)T \leq t < (i+1)T, \end{cases} \quad (14.2)$$

где  $k_A$  — коэффициент пропорциональности;  $\gamma$  — скважность импульсов ( $0 < \gamma \leq 1$ ), которая остается постоянной.

При широтно-импульсной модуляции модулируемым параметром является ширина или длительность импульсов  $\tau_i = \gamma_i T$ , где  $\gamma_i = \gamma(u(iT))$  — скважность  $i$ -го импульса. Амплитуда импульсов при этом остается постоянной. Сигнал на выходе импульсного элемента (широтно-импульсного модулятора) формируется в виде (рис. 14.3)

$$u^*(t) = \begin{cases} h \operatorname{sign} u(iT) & \text{при } iT \leq t < (i+\gamma_i)T, \\ 0 & \text{при } (i+\gamma_i)T \leq t < (i+1)T, \end{cases} \quad (14.3)$$

где  $h$  — амплитуда импульсов, а  $\operatorname{sign} u(iT)$  означает знак величины  $u(iT)$ .

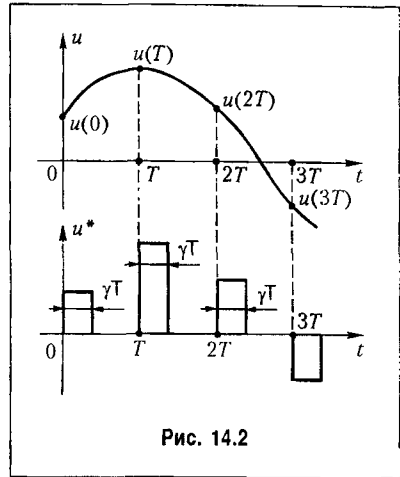


Рис. 14.2

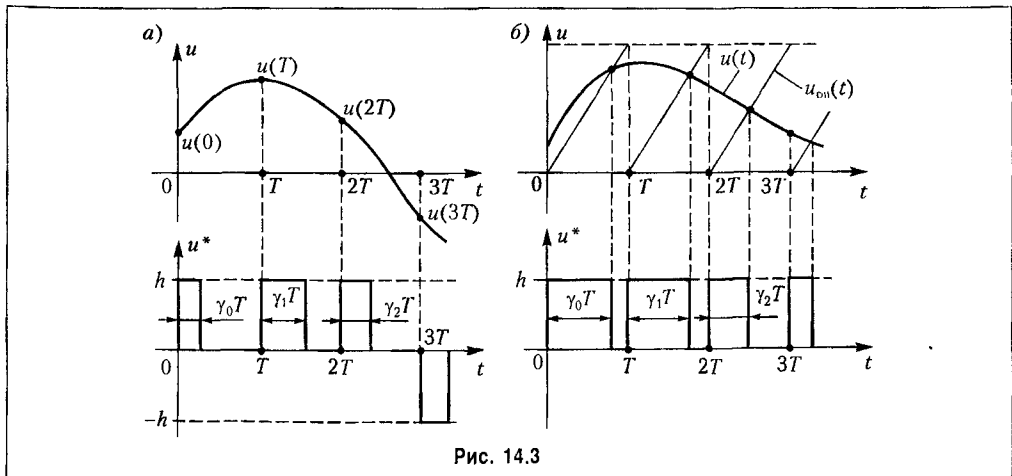


Рис. 14.3

В зависимости от способа определения текущего значения скважности  $\gamma_i$  различают широтно-импульсную модуляцию 1-го рода (ШИМ-1) и 2-го рода (ШИМ-2).

При ШИМ-1 (рис. 14.3, а) скважность  $i$ -го импульса

$$\gamma_i = \begin{cases} k_{\text{ш}} |u(iT)| & \text{при } k_{\text{ш}} |u(iT)| < 1, \\ 1 & \text{при } k_{\text{ш}} |u(iT)| \geq 1, \end{cases} \quad (14.4)$$

где  $k_{\text{ш}}$  — коэффициент пропорциональности (крутизна характеристики широтно-импульсного модулятора).

Так как длительность импульса  $\tau_i = \gamma_i T$  не может быть больше периода дискретности  $T$ , то при  $|u(iT)| \geq k_{\text{ш}}^{-1}$  скважность  $\gamma_i = 1$ , т. е. происходит насыщение модулятора.

При ШИМ-2 (рис. 14.3, б) длительность импульсов определяется в результате сравнения непрерывного входного сигнала  $u(t)$  с некоторым периодическим опорным сигналом  $u_{\text{оп}}(t)$ , в качестве которого обычно используется пилообразный сигнал, формируемый специальным генератором. Импульсы запускаются в моменты времени  $t = iT$  и существуют до момента совпадения сигналов  $u(t)$  и  $u_{\text{оп}}(t)$ . Как правило, ШИМ-2 используется в системах, в которых сигнал  $u(t)$  не меняет свой знак. Примером может служить система стабилизации напряжения, рассмотренная в главе 1.

Широтно-импульсный модулятор, даже если он в процессе работы системы управления не насыщается, является нелинейным звеном. В этом можно убедиться, воспользовавшись принципом суперпозиции, согласно которому реакция линейного звена на сумму входных воздействий должна быть равна сумме реакций.

Рассмотрим, например, ШИМ-1, положив для простоты в (14.4)  $k_{\text{ш}} = 1$ . Пусть сигнал на входе модулятора  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  представляет собой ступенчатую функцию, причем  $u_1(t) = 0,2 \cdot 1(t)$ ,  $u_2(t) = 0,5 \cdot 1(t)$ . Если сигналы  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  действуют одновременно, то в соответствии с (14.3) и (14.4) на выходе модулятора появится последовательность импульсов  $u^*(t)$ , высота которых равна  $h$ , а длительность  $\tau = 0,7T$ . Это есть реакция на сумму воздействий. Пусть теперь действует только сигнал  $u_1(t)$ . Реакцией на него будет последовательность импульсов высотой  $h$  и длительностью  $0,2T$ . Соответственно, реакция на сигнал  $u_2(t)$  — это последовательность импульсов, высота которых равна  $h$ , а длительность —  $0,5T$ . В результате сумма реакций будет представлять собой последовательность импульсов, длительность которых  $\tau = 0,5T$ , а высота равна  $2h$  при  $iT \leq t < iT + 0,2T$  и  $h$  при  $iT + 0,2T \leq t < iT + 0,5T$ . Таким образом, реакция на сумму воздействий не равна сумме реакций и принцип суперпозиции не выполняется.

Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться, что амплитудно-импульсный модулятор является линейным звеном. Поэтому ниже рассматриваются только системы с амплитудно-импульсной модуляцией. Системы управления с широтно-импульсной модуляцией из-за нелинейности самого импульсного элемента (широтно-импульсного модулятора) относятся к нелинейным системам и будут рассмотрены в разделе IV.

## § 14.2. Разностные уравнения

В импульсной системе (рис. 14.1, б) на вход непрерывной части поступает последовательность импульсов  $u^*(t)$ , модулированных по амплитуде. Несмотря на то, что непрерывная часть описывается линейным дифференциальным уравнением и сам им-



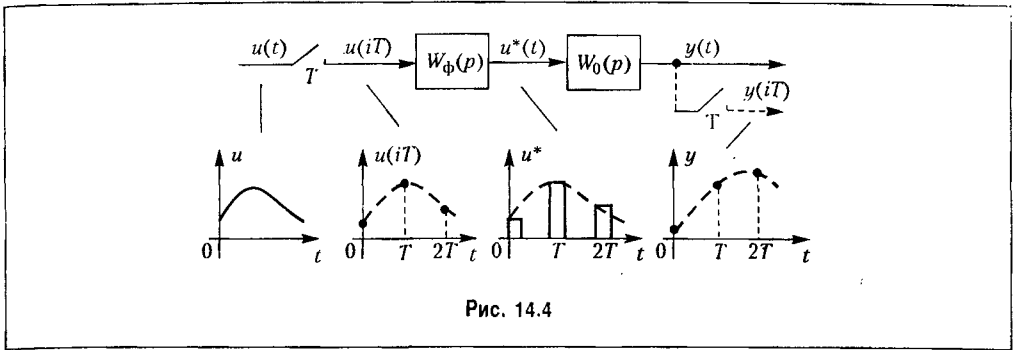


Рис. 14.4

пульсный элемент является линейным, получить дифференциальное уравнение системы, как это делалось в главе 5 для непрерывных систем, не представляется возможным из-за разрывного характера сигнала  $u^*(t)$ . Поэтому для исследования импульсных систем вместо дифференциальных уравнений используются так называемые *разностные уравнения*.

Рассмотрим разомкнутую систему, состоящую из импульсного элемента и непрерывной части. Ее схему представим так, как показано на рис. 14.4, где  $W_0(p)$  — передаточная функция непрерывной части, а импульсный элемент условно заменен последовательным соединением ключа и некоторого формирующего устройства с передаточной функцией  $W_\phi(p)$ . Ключ периодически с периодом  $T$  замыкается на очень короткий промежуток времени и выделяет из непрерывного сигнала  $u(t)$  его мгновенные значения  $u(iT)$  в соответствии с выражением (14.2). Формирующее устройство образует из этих значений импульсы прямоугольной формы так, как показано на рис. 14.2.

Будем полагать, что входным сигналом системы является не  $u(t)$ , а  $u(iT)$ , или в сокращенной записи  $u(i)$ . Несмотря на то, что сигнал  $y(t)$ , как показано в главе 1, в общем случае непрерывен, в качестве выходного сигнала системы будем рассматривать  $y(iT)$ , или в сокращенной записи  $y(i)$ . Условно это отображено на рис. 14.4 наличием ключа на выходе непрерывной части.

Последовательности типа  $u(i)$  и  $y(i)$  иногда называют решетчатыми функциями, хотя в строгом понимании они функциями не являются.

Аналогом первой производной непрерывной функции для любой последовательности  $f(i)$  служит конечная разность 1-го порядка или первая разность

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i). \quad (14.5)$$

Она определяется в момент времени  $t = iT$  как разность между будущим значением последовательности при  $t = (i+1)T$  и текущим значением при  $t = iT$ .

Аналогом второй производной непрерывной функции для последовательности является конечная разность 2-го порядка или вторая разность

$$\Delta^2 f(i) = \Delta[\Delta f(i)] = \Delta f(i+1) - \Delta f(i) = f(i+2) - 2f(i+1) + f(i). \quad (14.6)$$

В общем случае для  $k$ -й разности можно записать

$$\Delta^k f(i) = \sum_{v=0}^k (-1)^v C_k^v f(i+k-v), \quad (14.7)$$

где

$$C_k^v = \frac{k!}{v!(k-v)!} \quad (14.8)$$

-- биномиальные коэффициенты.

В качестве аналога дифференциального уравнения можно рассматривать *уравнение в конечных разностях*. Применительно к системе, изображенной на рис. 14.4, оно имеет вид

$$a_0 \Delta^n y(i) + a_1 \Delta^{n-1} y(i) + \dots + a_n y(i) = d_0 \Delta^m u(i) + d_1 \Delta^{m-1} u(i) + \dots + d_m u(i), \quad (14.9)$$

где  $m \leq n$ .

Однако при исследовании дискретных систем удобнее пользоваться уравнением

$$c_0 y(i+n) + c_1 y(i+n-1) + \dots + c_n y(i) = b_0 u(i+m) + b_1 u(i+m-1) + \dots + b_m u(i), \quad (14.10)$$

которое получается из (14.9) с учетом (14.7). Оно и называется *разностным уравнением*.

Уравнение (14.10) можно представить и в ином виде:

$$c_0 y(i) + c_1 y(i-1) + \dots + c_n y(i-n) = b_0 u(i+m-n) + b_1 u(i+m-1-n) + \dots + b_m u(i-n). \quad (14.11)$$

Разностные уравнения по существу являются рекуррентными соотношениями, позволяющими при  $i = 0, 1, 2, \dots$  последовательно шаг за шагом (т. е. рекуррентно) вычислять значения выходной величины  $y(i)$  при заданных ее начальных значениях и любых заданных аналитически, графически или таблично значениях входной величины  $u(i)$ . Например, из уравнения (14.11), задав начальные значения  $y(-n), y(-n+1), \dots, y(-1)$  и значения  $u(i)$  можно последовательно найти  $y(0), y(1), y(2), \dots$  Такие вычисления легко механизуются, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счете (кроме, конечно, затрат времени) даже в случае, когда коэффициенты разностного уравнения с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов — дифференциальных уравнений.

Общее решение неоднородного разностного уравнения (14.10) или (14.11), как и решение неоднородного дифференциального уравнения, представляется в виде суммы переходной и вынужденной составляющих. Переходная составляющая, т. е. общее решение однородного уравнения, определяется следующим образом:

$$y(i) = C_1 z_1^i + C_2 z_2^i + \dots + C_n z_n^i, \quad (14.12)$$

где  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) — некрратные корни характеристического уравнения

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad (14.13)$$

которое легко получается из (14.10), а  $C_v$  — произвольные постоянные.

Из (14.12), в частности, вытекает условие затухания свободного движения системы, описываемой разностным уравнением (14.10), т. е. условие устойчивости:

$$|z_v| < 1 \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (14.14)$$

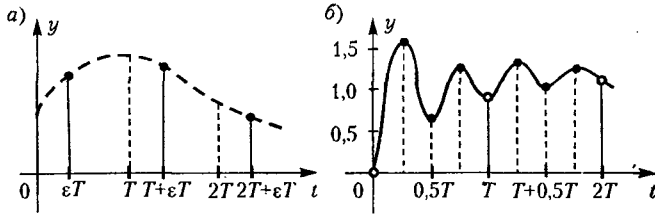


Рис. 14.5

Решение разностного уравнения  $y(i)$  дает значения выходной величины лишь в дискретные моменты времени  $t = iT$ . Во многих случаях этого вполне достаточно для суждения о поведении системы. Если же возникает необходимость в получении информации об изменении выходной величины в любой момент времени, то используется *смещенная последовательность* (рис. 14.5, а)

$$y(iT + \epsilon T) = y(t)|_{t = iT + \epsilon T}, \tag{14.15}$$

или в сокращенной записи  $y(i, \epsilon)$ , где  $\epsilon$  – параметр, которому можно придавать любые значения в пределах  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Если  $\epsilon$  изменять непрерывно в указанных пределах, то  $y(i, \epsilon)$  совпадает с  $y(t)$ .

Смещенная последовательность  $y(i, \epsilon)$  представляет собой решение *разностного уравнения со смещенным аргументом*

$$c_0 y(i + n, \epsilon) + c_1 y(i + n - 1, \epsilon) + \dots + c_n y(i + \epsilon) = b_0(\epsilon) u(i + m) + b_1(\epsilon) u(i + m - 1) + \dots + b_m(\epsilon) u(i), \tag{14.16}$$

которое при  $\epsilon = 0$  превращается в уравнение (14.10).

Значения выходной величины  $y(i, \epsilon)$  можно вычислить последовательно шаг за шагом при заданных начальных значениях и значениях входной величины  $u(i)$ .

Переходная составляющая, т. е. общее решение однородного уравнения, определяется в этом случае следующим образом:

$$y(i, \epsilon) = C_1 z_1^{i+\epsilon} + C_2 z_2^{i+\epsilon} + \dots + C_n z_n^{i+\epsilon}, \tag{14.17}$$

где  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) – некратные корни характеристического уравнения (14.13).

В качестве примера исследуем процессы в системе, разностное уравнение со смещенным аргументом которой имеет вид

$$y(i + 2, \epsilon) - 0,27y(i + 1, \epsilon) + 0,135y(i, \epsilon) = (1 - e^{-2\epsilon} \cos 4\pi\epsilon) u(i + 2) - (0,135 - e^{-2\epsilon} \cos 4\pi\epsilon) u(i + 1) \tag{14.18}$$

при начальных значениях  $y(-1, \epsilon) = y(-2, \epsilon) = 0$  и единичной входной последовательности  $u(0) = u(1) = \dots = 1$ .

Положив  $\epsilon = 0$ , получим обыкновенное разностное уравнение:

$$y(i + 2) - 0,27y(i + 1) + 0,135y(i) = 0,865 u(i + 1). \tag{14.19}$$

Корни характеристического уравнения

$$z^2 - 0,27z + 0,135 = 0;$$

$$z_{1,2} \approx 0,135 \pm j0,34$$

удовлетворяют условию (14.14). Следовательно, система устойчива.

Из (14.19) при  $y(-1) = y(-2) = 0$  последовательно шаг за шагом находим значения выходной величины в моменты времени  $t = iT$ :

$$y(0) = 0,27 y(-1) - 0,135 y(-2) + 0,865 u(-1) = 0;$$

$$y(1) = 0,27 y(0) - 0,135 y(-1) + 0,865 u(0) = 0,865;$$

$$y(2) = 0,27 y(1) - 0,135 y(0) + 0,865 u(1) \approx 1,098;$$

$$y(3) = 0,27 y(2) - 0,135 y(1) + 0,865 u(2) \approx 1,045, \dots$$

Продолжая вычисления, убеждаемся, что в дискретные моменты времени  $t = iT$  процесс монотонный, а выходная величина стремится к установившемуся значению  $y_{уст} = 1$ .

Аналогично решая уравнение (14.18) получим:

$$y(0, \varepsilon) = 1 - e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon;$$

$$y(1, \varepsilon) = 1,135 - 0,27e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon;$$

$$y(2, \varepsilon) \approx 1,036 + 0,062 e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon, \dots$$

Кривая  $y(t)$  изображена на рис. 14.5, б, где отмечены ее значения при  $\varepsilon = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ . Таким образом, реальный процесс в системе колебательный затухающий, что не обнаруживается в результате решения уравнения (14.19).

Способы получения разностных уравнений будут рассмотрены в следующих параграфах.

### § 14.3. Использование z-преобразования

Для последовательностей  $f(i)$  может быть введено понятие *дискретного преобразования Лапласа*, определяемое формулой

$$F^*(p) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) e^{-piT}. \quad (14.20)$$

Для смещенных последовательностей может быть записано аналогичное выражение:

$$F^*(p, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i, \varepsilon) e^{-piT}. \quad (14.21)$$

Формулы (14.20) и (14.21) можно представить в символической записи:

$$F^*(p) = D \{f(i)\}, \quad (14.22)$$

$$F^*(p, \varepsilon) = D_{\varepsilon} \{f(i, \varepsilon)\}. \quad (14.23)$$

В приведенных формулах, как и в случае непрерывного преобразования Лапласа, комплексная величина  $p = c + j\omega$ , где  $c$  — абсцисса абсолютной сходимости. Если  $c < \infty$ , то ряд, определяемый формулами (14.20) и (14.21), сходится к оригиналу  $f(i)$  соответствует некоторое изображение.

Как следует из (14.20) и (14.21), изображение является функцией величины  $e^{pT}$ .

Для исследования импульсных систем большое распространение получило так называемое  $z$ -преобразование, которое связано с дискретным преобразованием Лапласа и вытекает из него. Применительно к  $z$ -преобразованию ниже будут рассмотрены основные свойства и теоремы дискретного преобразования Лапласа.

Под  $z$ -преобразованием понимается изображение несмещенной или смещенной последовательностей, определяемое формулами

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i}, \quad F(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i, \varepsilon)z^{-i}. \quad (14.24)$$

В этих формулах введено новое обозначение  $z = e^{pT}$ . Из них следует, что  $z$ -преобразование практически совпадает с дискретным преобразованием Лапласа и отличается только аргументом изображения.

Формулы преобразования (14.24) могут быть записаны в символической форме:

$$F(z) = Z\{f(i)\}, \quad F(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon}\{f(i, \varepsilon)\}, \quad (14.25)$$

Формулы преобразования (14.25) могут быть записаны и для непрерывной производящей функции в виде

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{f(t)\}, & t &= iT, \\ F(z, \varepsilon) &= Z_{\varepsilon}\{f(t)\}, & t &= (i + \varepsilon)T, \end{aligned} \quad (14.26)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$

Ряды (14.24) сходятся, и изображение существует, если выполняется условие, сформулированное выше для дискретного преобразования Лапласа:  $c < \infty$ , где  $c$  — абсцисса абсолютной сходимости.

В табл. 14.1 приведены изображения некоторых последовательностей, а также производящих функции времени и их изображений Лапласа.

Для всех непрерывных функций и последовательностей, приведенных в табл. 14.1, предполагается, что они тождественно равны нулю при  $t < 0$ . В некоторых изображениях табл. 14.1 использованы полиномы  $R_k(z)$ , которые могут быть представлены в виде определителя [ 96 ]

$$R_k = k! \begin{vmatrix} 1 & 1-z & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1-z & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (14.27)$$

Таблица 14.1. Изображения решетчатых функций

Непрерывная функция		Несмещенная последовательность	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$	-	$\delta_0(i)$	1	0
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1(i)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$iT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$Tz \left[ \frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right]$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{(iT)^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$	$\frac{T^2 z}{2!} \left[ \frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{2\varepsilon}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{(iT)^3}{3!}$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{3!(z-1)^4}$	$\frac{T^3 z}{3!} \left[ \frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{3\varepsilon^2}{(z-1)^2} + \frac{3\varepsilon(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4} \right]$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{(iT)^k}{k!}$	$\frac{T^k z R_k(z)}{k!(z-1)^{k+1}}$	$\frac{T^k z}{k!} \sum_{v=0}^k C_k^v R_v(z) \varepsilon^{k-v}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha iT} = d^i$	$\frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$	$\frac{zd^\varepsilon}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha iT}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^\varepsilon}{z-d}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$iTe^{-\alpha iT}$	$\frac{zd}{(z-d)^2}$	$\frac{zd^\varepsilon}{z-d} + \frac{zd^{\varepsilon+1}}{(z-d)^2}$

Таблица 14.1. (Окончание)

Непрерывная функция		Несмещенная последовательность	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$\frac{t^2}{2!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{(iT)^2}{2!} e^{-\alpha iT}$	$\frac{z(z+d)d^2}{2!(z-d)^3}$	$\frac{zd^2 \epsilon^2}{2!(z-d)^2} + \frac{zd^{\epsilon 1}}{(z-d)^2} + \frac{z(z+d)d^{\epsilon 2}}{2!(z-d)^3}$
$\frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{k+1}}$	$\frac{(iT)^k}{k!} e^{-\alpha iT}$	$\frac{zR_k(d^{-1}z)d^k}{k!(z-d)^{k+1}}$	$\frac{z}{k!} \sum_{v=0}^k C_k^v R_v(d^{-1}z) d^{\epsilon v} \epsilon^{k-v} (z-d)^{\nu 1}$
$\sin \frac{t}{T}$	$\frac{\pi T^{-1}}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\sin \pi i = 0$	0	$\frac{z \sin \pi \epsilon}{z+1}$
$\cos \frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\cos \pi i = (-1)^i$	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{z \cos \pi \epsilon}{z+1}$
$\sin \frac{\pi t}{2T}$	$\frac{0,5\pi T^{-1}}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\sin \frac{\pi}{2} i$	$\frac{z}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \sin \frac{\pi}{2} \epsilon + z \cos \frac{\pi}{2} \epsilon}{z^2+1}$
$\cos \frac{\pi t}{2T}$	$\frac{p}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\cos \frac{\pi}{2} i$	$\frac{z^2}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \cos \frac{\pi}{2} \epsilon - z \sin \frac{\pi}{2} \epsilon}{z^2+1}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\sin \beta iT$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \epsilon \beta T + z \sin(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos \beta iT$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos \epsilon \beta T - z \cos(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{\alpha iT} \sin \beta iT$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$zd^{\epsilon} \frac{z \sin \epsilon \beta T + d \sin(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha iT} \cos \beta iT$	$\frac{z^2 - zd \cos \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$zd^{\epsilon} \frac{z \cos \epsilon \beta T - d \cos(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$

Некоторые частные значения этого полинома:

$$\left. \begin{aligned} R_0(z) &= 1, \\ R_1(z) &= 1, \\ R_2(z) &= z + 1, \\ R_3(z) &= z^2 + 4z + 1, \\ R_4(z) &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1. \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

Рассмотрим кратко основные правила и теоремы применительно к  $z$ -преобразованию. Эти же правила и теоремы будут справедливыми и для дискретного преобразования Лапласа. Рассмотрение проведем для несмещенных последовательностей, но полученные результаты можно распространить и на случай смещенных последовательностей, кроме случаев, оговоренных особо.

1. **Свойство линейности.** Это свойство заключается в том, что изображение линейной комбинации последовательностей равно той же линейной комбинации их изображений. Пусть

$$f(i) = \sum_{v=1}^N c_v f_v(i). \quad (14.29)$$

Тогда для изображения можно записать

$$F(z) = \sum_{v=1}^N c_v F_v(z). \quad (14.30)$$

2. **Теорема запаздывания и упреждения.** Рассмотрим последовательность  $f(i - m)$ , сдвинутую вправо (запаздывающую) на целое число тактов  $m$ . Тогда из формулы (14.24) следует, если обозначить  $i - m = r$ ,

$$\begin{aligned} Z\{f(i - m)\} &= \sum_{r=-m}^{\infty} f(r)z^{-(m+r)} = z^{-m} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} f(r)z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} f(r)z^{-r} \right] = \\ &= z^{-m} \left[ F(z) + \sum_{r=1}^m f(-r)z^r \right]. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Здесь  $F(z)$  — изображение  $f(i)$ . Если исходная последовательности  $f(i)$  равна нулю при отрицательных значениях аргумента, то формула (14.31) упрощается:

$$Z\{f(i - m)\} = z^{-m} F(z). \quad (14.32)$$

Если сдвиг происходит влево (упреждение) и рассматривается последовательность  $f(i + m)$ , где  $m$  — целое положительное число, то аналогично случаю запаздывания можно показать, что

$$Z\{f(i + m)\} = z^m \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right]. \quad (14.33)$$



Второе слагаемое в правой части (14.33) обращается в нуль, если  $f(i) = 0$  при  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ .

При запаздывании на не целое число периодов  $m + \xi$  приходится вводить смещенную последовательность  $f(i + \varepsilon - m - \xi)$ , где  $m$  — целая, а  $\xi$  — дробная часть запаздывания. Если смещение  $\varepsilon$  удовлетворяет условию  $0 \leq \varepsilon < \xi$  и  $f(i + \varepsilon - m - \xi) \equiv 0$  при  $i + \varepsilon < m - \xi$ , то можно показать, что

$$Z_{\varepsilon} \{f(i + \varepsilon - m - \xi)\} = z^{-(1+m)} \cdot F(z, 1 + \varepsilon - \xi). \quad (14.34)$$

Если  $\xi \leq \varepsilon < 1$ , то

$$Z_{\varepsilon} \{f(i + \varepsilon - m - \xi)\} = z^{-m} \cdot F(z, \varepsilon - \xi). \quad (14.35)$$

При использовании табл. 14.1 для нахождения изображений следует вместо  $\varepsilon$  подставить  $1 + \varepsilon - \xi$  или  $\varepsilon - \xi$  в соответствии с формулами (14.34) и (14.35).

3. Сумма ординат последовательности. Если абсцисса абсолютной сходимости отрицательна ( $c < 0$ ), то, положив в (14.24)  $p = 0$ , имеем

$$F(1) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i). \quad (14.36)$$

4. Конечное значение последовательности. Составим первую прямую разность последовательности  $f(i)$  и на основании (14.30) найдем ее изображение

$$Z \{\Delta f(i)\} = (z - 1) F(z) - z f(0).$$

Далее на основании (14.36) найдем сумму ординат  $\Delta f(i)$ :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta f(i) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z) - f(0).$$

Кроме того, можно записать

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta f(i) = \sum_{i=0}^{\infty} [f(i+1) - f(i)] = \lim_{i \rightarrow \infty} f(i) - f(0).$$

Из двух последних выражений следует:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z). \quad (14.37)$$

5. Формулы разложения. Если изображение представляет собой простейшую табличную форму (см., например, табл. 14.1), то переход к оригиналу не представляет трудностей. Сложная дробно-рациональная форма может быть представлена в виде суммы дробей первой степени. Рассмотрим некоторые употребительные разновидности формулы разложения.

а) Пусть изображение  $F(z)$  представляет собой отношение двух многочленов:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{zA_0(z)}{B(z)},$$

причем будем предполагать, что степень числителя не выше, чем степень знаменателя, а корни знаменателя простые. Тогда изображение можно представить в виде суммы

$$F(z) = \frac{zA_0(z)}{B(z)} = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{\dot{B}(z_v)} \frac{z}{z-z_v}, \quad (14.38)$$

где  $\dot{B}(z)$  — производная  $B(z)$  по  $z$ , а  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, l$ ) — корни знаменателя. Элементарному слагаемому  $z(z-z_v)^{-1}$  соответствует оригинал  $e^{-\alpha_v iT} = z_v^i$ , где  $\alpha_v = T^{-1} \ln z_v^{-1}$  (см. табл. 14.1). В табл. 14.1 единственный корень дроби первой степени обозначен  $z_1 = d$ .

Поэтому оригинал (14.38) можно записать следующим образом:

$$f(i) = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{\dot{B}(z_v)} z_v^i. \quad (14.39)$$

б) Пусть изображение  $F(z)$  не имеет нулевого корня числителя, но степень числителя  $A(z)$  меньше степени знаменателя.

Для нахождения оригинала в этом случае можно воспользоваться формулами (14.38) и (14.39), но применить их следует для сдвинутой на один такт влево решетчатой функции, изображение которой будет  $zF(z)$ . В результате имеем

$$f(i) = \sum_{v=1}^l \frac{A(z_v)}{\dot{B}(z_v)} z_v^{i-1}, \quad (14.40)$$

причем последнее выражение будет справедливым только для  $i \geq 1$ .

в) Пусть изображение  $F(z)$  не имеет нулевого корня числителя  $A(z)$ , причем степень  $A(z)$  равна степени знаменателя  $B(z)$ . Тогда следует понизить степень числителя, поделив его на знаменатель, и представить  $F(z)$  в виде суммы составляющей нулевого порядка и дробно-рационального остатка  $F_0(z)$ . Тогда

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = f(0) + F_0(z) = f(0) + \frac{A_0(z)}{B(z)}.$$

Переход от второй составляющей изображения к оригиналу может быть сделан по формуле (14.40), которая справедлива для  $i \geq 1$ .

г) Если изображение  $F(z)$  можно представить в виде

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{z}{z-1} F_0(z) = \frac{z}{z-1} \frac{A_0(z)}{B_0(z)},$$

то можно показать, что формула разложения приобретает вид

$$f(i) = \frac{A_0(1)}{B_0(1)} - \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{(1-z_v)\dot{B}(z_v)} z_v^i. \quad (14.41)$$

Последнее выражение представляет собой аналог известной формулы разложения Хевисайда, полученной им для непрерывных систем.

д) Пусть изображение  $F(z)$  имеет нулевой полюс кратности  $r$  и простые остальные полюсы

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)},$$

причем степень числителя  $A(z)$  меньше степени полинома  $B_0(z)$ . Тогда можно найти оригинал в виде

$$f(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < r + 1, \\ \sum_{v=1}^{l-r} \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{i-r}, & \text{если } i \geq r + 1. \end{cases} \quad (14.42)$$

При равенстве степеней числителя и полинома  $B_0(z)$  следует выделить делением  $A(z)$  на  $B_0(z)$  нулевую составляющую и остаток, после чего представить изображение в виде

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)} = \frac{1}{z^r} \left[ f(r) + \frac{A_0(z)}{B_0(z)} \right].$$

Здесь  $f(r)$  — значение оригинала в момент  $i = r$ . Далее можно воспользоваться формулой (14.42), заменив в ней  $A(z)$  на  $A_0(z)$ .

е) Пусть изображение  $F(z)$  имеет полюс  $z_l$  кратности  $r$ , а все остальные полюсы простые:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{(z - z_l)^r B_0(z)},$$

причем степень числителя меньше степени знаменателя.

Тогда оригинал будет

$$f(i) = \sum_{v=1}^{l-r} \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{i-1} + \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} \left[ \frac{A(z) z^{i-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (14.43)$$

Эта формула справедлива для  $i \geq 1$ . При  $i = 0$  значение оригинала  $f(0) = 0$ .

Для случая двойного корня ( $r = 2$ ) формула (14.43) приобретает вид

$$f(i) = \sum_{v=1}^{l-2} \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{i-1} + \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d}{dz} \left[ \frac{A(z) z^{i-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (14.44)$$

Так, например, если

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2},$$

то

$$f(i) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [Tz^i] = iT,$$

что совпадает с табл. 14.1.

В случае, когда степень числителя  $F(z)$  равна степени знаменателя, следует аналогично изложенному выше выделить член нулевого порядка  $f(0)$  делением числителя на знаменатель и рассматривать далее остаток от деления.

6. Разложение в ряд Лорана. Из основного выражения для нахождения  $z$ -преобразования (14.24) следует:

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i} = f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(k)z^{-k} + \dots$$

Разложив любым способом изображение  $F(z)$  в ряд Лорана (ряд по убывающим степеням  $z$ ):

$$F(z) = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_kz^{-k} + \dots,$$

и сравнивая два ряда между собой, можно установить, что  $c_0 = f(0)$ ,  $c_1 = f(1)$ ,  $c_2 = f(2)$ , ...,  $c_k = f(k)$  и т. д.

Разложение в ряд можно делать любым способом, так как такое разложение единственно. Наиболее удобным приемом для дробно-рациональных функций является деление числителя на знаменатель.

Применяя разложение в ряд Лорана, можно вычислить значения оригинала  $f(i)$  или  $f(i, \epsilon)$  в дискретных точках без нахождения полюсов изображений  $F(z)$ .

7. Решение разностных уравнений. Пусть имеется разностное уравнение в форме (14.10)

$$c_0y(i+n) + c_1y(i+n-1) + \dots + c_ny(i) = b_0u(i+m) + b_1u(i+m-1) + \dots + b_mu(i)$$

с начальными условиями  $y(v) = y_v$  ( $v = 0, 1, \dots, n-1$ ). Найдем  $z$ -преобразование от его левой и правой частей. В соответствии с формулой (14.33) для случая упреждения на  $n$  тактов

$$Z\{y(i+n)\} = z^n \left[ Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(k)z^{-k} \right].$$

Аналогичные зависимости могут быть записаны для упреждения на  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ , ..., 1 тактов.

Для входной последовательности начальные условия не задаются. Поэтому

$$Z\{u(i+m)\} = z^m U(z).$$

В результате при переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям получим:

$$C(z) Y(z) - Y_0(z) = B(z) U(z), \quad (14.45)$$

где  $C(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + \dots + c_n$ ,  $B(z) = b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m$ , а  $Y_0(z)$  — сумма членов, определяемых начальными условиями.

Из (14.45) можно найти изображение искомой выходной последовательности

$$Y(z) = \frac{B(z)}{C(z)}U(z) + \frac{Y_0(z)}{C(z)}. \quad (14.46)$$

Далее можно использовать изложенные выше приемы перехода к искомому оригиналу  $y(i)$ .

Для решения рассматриваемого разностного уравнения необходимо, как следует из изложенного, знать начальные условия  $y(v) = y_v$  ( $v = 0, 1, \dots, m - 1$ ). Последние же зависят от вида действующей в правой части разностного уравнения входной последовательности.

Более удобны для решения разностные уравнения вида (14.11)

$$c_0 y(i) + c_1 y(i-1) + \dots + c_n y(i-n) = b_0 u(i+m-n) + b_1 u(i+m-1-n) + \dots + b_m u(i-n)$$

с начальными условиями  $y(-v) = y_v$  ( $v = 0, 1, \dots, n$ ).

Изображение последовательности  $y(i-n)$ , запаздывающей на  $n$  тактов, в соответствии с (14.31) будет

$$Z\{y(i-n)\} = z^{-n} \left[ Y(z) + \sum_{r=1}^n y(-r)z^r \right].$$

Подобные зависимости могут быть записаны для запаздывания на  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ , ..., 1 тактов.

При переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям могут быть получены выражения, аналогичные (14.45) и (14.46). Переход к искомой последовательности  $y(i)$  осуществляется в соответствии с изложенными выше приемами.

Особый интерес представляет случай, когда до момента времени  $t = 0$  искомая последовательность тождественно равна нулю. Это эквивалентно случаю нулевых начальных условий слева (при  $t = -0$ ) при решении дифференциальных уравнений для непрерывных функций. Тогда в выражении для изображения (14.46) пропадает член в правой части, определяемый начальными условиями, и оно приобретает вид

$$Y(z) = \frac{B(z)}{C(z)}U(z) = W(z)U(z). \quad (14.47)$$

Здесь введена дискретная передаточная функция  $W(z)$ , которая, как и в случае непрерывных функций, есть отношение двух изображений (выходной и входной величин) при нулевых начальных условиях. Дискретная передаточная функция играет такую же роль в импульсных и цифровых системах, как и обычная передаточная функция в непрерывных системах. Получение этой функции будет подробно рассмотрено ниже.

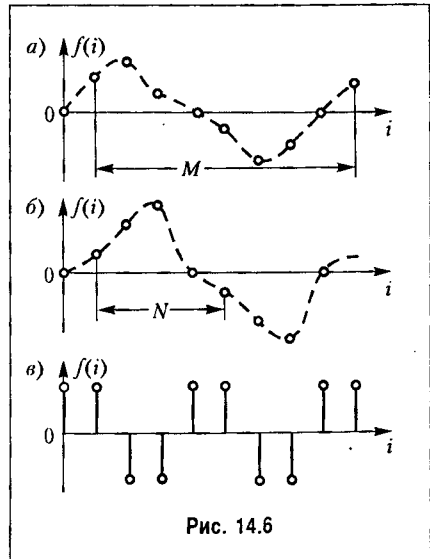


Рис. 14.6

8. Периодические последовательности и их изображения. Введем в рассмотрение периодическую последовательность

$$f(i + kM) = f(i), \quad (14.48)$$

где  $k$  и  $M$  — целые числа, причем  $M$  представляет собой относительный период (рис. 14.6).

Для симметричной периодической функции (см. рис. 14.6, б)  $M = 2N$  и  $f(i) = -f(i + N)$ .

Для нахождения изображения периодической последовательности (14.48) применим теорему сдвига (14.33):

$$F(z) = z^M \left[ F(z) - \sum_{r=0}^{M-1} f(r)z^{-r} \right].$$

Отсюда следует:

$$F(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \sum_{r=0}^{M-1} f(r)z^{-r}. \quad (14.49)$$

Сумма в правой части (14.49) представляет собой изображение последовательности на интервале  $0 - M$ .

Для симметричной последовательности  $f(i) = -f(i + N)$  аналогичным образом можно получить

$$F(z) = \frac{z^N}{z^N + 1} \sum_{r=0}^{N-1} f(r)z^{-r}. \quad (14.50)$$

Найдем, например, изображение симметричной периодической последовательности, показанной на рис. 14.6, в:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} \sum_{r=0}^1 z^{-r} = \frac{z^2}{z^2 + 1} (1 + z^{-1}) = \frac{z(z+1)}{z^2 + 1}.$$

Кроме рассмотренных существуют и другие теоремы  $z$ -преобразования [49].

## § 14.4. Передаточные функции

В предыдущем параграфе было показано, что передаточная функция  $W(z)$  системы, схема которой представлена на рис. 14.4, легко определяется если известно разностное уравнение (14.10) или (14.11). В соответствии с (14.47) она имеет вид

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{C(z)}. \quad (14.51)$$

где  $B(z)$  и  $C(z)$  — полиномы, входящие в уравнение (14.45).

Однако на самом деле заданным является не разностное, а дифференциальное уравнение непрерывной части системы. Поэтому, наоборот, один из способов получения

разностного уравнения основан на использовании уже известной передаточной функции  $W(z)$ .

Действительно, если известна передаточная функция (14.51), то сразу же определяется уравнение для изображений (14.45). Из него при помощи формул (14.33) или (14.31) получаются разностные уравнения (14.10) или (14.11).

С учетом отмеченного передаточную функцию  $W(z)$  будем определять непосредственно по структурной схеме системы (рис. 14.4).

В качестве входной величины системы целесообразно рассматривать последовательность  $u(i)$ , изображение которой  $U(z)$ , а в качестве выходной — последовательность  $y(i)$ , изображение которой  $Y(z)$ . Тогда, как видно из рис. 14.4,

$$Y(z) = Z\{W_\Phi(p) W_0(p)\} U(z) \quad (14.52)$$

и передаточная функция (14.51) может быть определена следующим образом:

$$W(z) = Z\{W_\Phi(p) W_0(p)\}. \quad (14.53)$$

Последовательное соединение формирующего устройства с передаточной функцией  $W_\Phi(p)$  и непрерывной части с передаточной функцией  $W_0(p)$  иногда называют приведенной непрерывной частью системы. Передаточная функция  $W(z)$  должна определяться по ее результирующей передаточной функции  $W_\Phi(p) W_0(p)$ . Это связано с тем что  $z$ -преобразования от произведения передаточных функций непрерывных звеньев, не разделенных импульсным элементом (ключом), не равна произведению  $z$ -преобразований:

$$Z\{W_\Phi(p) W_0(p)\} \neq Z\{W_\Phi(p)\} Z\{W_0(p)\}.$$

Поэтому иногда для последовательного соединения двух звеньев, например такого, как в (14.53), передаточная функция записывается в виде  $W(z) = W_\Phi W_0(z)$ , причем  $W_\Phi W_0(z) \neq W_\Phi(z) W_0(z)$ .

Передаточная функция непрерывной части системы  $W_0(p)$  полагается заданной. Для нахождения передаточной функции формирующего устройства  $W_\Phi(p)$  положим, что оно генерирует прямоугольные импульсы (рис. 14.2) длительностью  $\gamma T$  в соответствии с выражением (14.2). Коэффициент пропорциональности  $k_A$  можно отнести к непрерывной части системы. Тогда амплитуда (высота) импульсов будет равна  $u(i)$ .

Передаточная функция  $W_\Phi(p)$  может быть определена как отношение изображений по Лапласу выходной величины формирующего устройства (см. рис. 14.4)  $U^*(p)$  и его входной величины. Однако входная величина представляет собой последовательность  $u(i)$ , для которой преобразование Лапласа не существует. Чтобы устранить эту неопределенность положим, что идеальный импульсный элемент (ключ) генерирует не импульсы конечной высоты  $u(i)$ , а бесконечно короткие импульсы типа  $\delta$ -функций, площади которых пропорциональны значениям  $u(i)$ .

На самом деле никакой импульсный элемент не может генерировать бесконечные по высоте импульсы. Вместе с тем возможность использования указанного формального представления при теоретических исследованиях является обоснованной [49].

При поступлении на вход формирующего устройства единственной дискреты  $u(i)$  высотой, равной единице, на его выходе образуется прямоугольный импульс с такой же высотой и длительностью  $\gamma T$ . Его изображение в соответствии с (7.7)

$$U^*(p) = \int_0^{\gamma T} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}. \quad (14.54)$$

Но так как указанная дискрета формально заменяется единичной  $\delta$ -функцией, изображение которой по Лапласу (см. табл. 7.2) равно единице, то изображение (14.54) представляет собой передаточную функцию формирующего устройства:

$$W_\Phi(p) = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}. \quad (14.55)$$

В этом случае передаточная функция (14.53)

$$W(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p} W_0(p) \right\}. \quad (14.56)$$

Выражение (14.56) неудобно для практического применения. Поэтому воспользуемся теоремой смещения  $z$ -преобразования в вещественной области [49], согласно которой

$$Z \left\{ e^{-(m+\xi)Tp} F(p) \right\} = z^{-(1+m)} F(z, \xi) \Big|_{\xi=1-\xi}, \quad (14.57)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq \xi < 1$ . Положив  $m = 0, \xi = \gamma$ , вместо (14.56) получим:

$$W(z) = Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z_\epsilon \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} \Big|_{\epsilon=1-\gamma}. \quad (14.58)$$

Пусть, например, непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{K}{1 + T_1 p}.$$

Тогда в соответствии с (14.58) и табл. 14.1 получим:

$$W(z) = K \left[ \frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)} - \frac{1}{z-1} + \frac{d^{1-\gamma}}{z-d} \right] = K \frac{d^{1-\gamma} - d}{z-d},$$

где  $d = e^{-T/T_1}$ .

В системах автоматического управления преимущественно используются формирующие устройства, удерживающие на выходе величину, равную  $u(i)$ , в течение всего периода дискретности  $T$ . В этом случае  $\gamma = 1$ , а само формирующее устройство называ-



ется экстраполятором нулевого порядка. Передаточные функции (14.55) и (14.58) при  $\gamma = 1$  принимают вид

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}, \quad (14.59)$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}. \quad (14.60)$$

Определим, например, передаточную функцию (14.60) для случая, когда непрерывная часть имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)}.$$

Чтобы можно было использовать данные табл. 14.1, разложим правую часть на простые дроби:

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} = K \left( \frac{1}{p} - \frac{T_1}{1+T_1 p} \right).$$

Тогда из (14.60) и табл. 14.1 получим:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{K(z-1)}{z} Z \left\{ \frac{1}{p^2} - \frac{T_1}{p(1+T_1 p)} \right\} = \frac{K(z-1)}{z} \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_1(1-d)z}{(z-1)(z-d)} \right] = \\ &= \frac{K[(T-T_1(1-d))z + T_1(1-d) - Td]}{(z-1)(z-d)}. \end{aligned}$$

В непрерывную часть системы может входить звено с чистым временным запаздыванием  $\tau$ , что соответствует (см. гл. 6) наличию в передаточной функции  $W_0(p)$  множителя  $e^{-\tau p}$ . Если величина  $\tau$  находится в пределах  $0 < \tau < T$ , то передаточную функцию (14.60) с учетом формулы (14.57) при  $m = 0$ ,  $\xi = \tau$  можно определить следующим образом:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{e^{-\tau p} W_0(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z^2} Z_{\epsilon} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} \Bigg|_{\epsilon=1-\tau}. \quad (14.61)$$

Заметим, что при  $\tau = 0$  из (14.61) нельзя получить (14.60), так как при этом  $\epsilon = 1$  и смещенная последовательность  $f(i, \epsilon)$  переходит в  $f(i+1)$ . Выражения (14.60) и (14.61) совпадут, если последнее в соответствии с формулой (14.33) умножить на  $z$ .

В ряде случаев для получения более полной информации об изменении выходной величины системы применяется так называемая модифицированная передаточная функция

$$W(z, \epsilon) = \frac{Y(z, \epsilon)}{U(z)} = Z_{\epsilon} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}, \quad (14.62)$$

где  $Y(z, \epsilon) = Z_{\epsilon} \{y(1, \epsilon)\}$ .

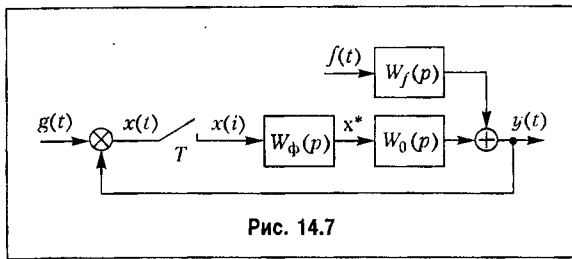


Рис. 14.7

ная функция разомкнутой системы по возмущению (см. гл. 5). Основу этой системы составляет схема, изображенная на рис. 14.4, при  $x(i) = u(i)$ . Тогда изображение управляемой величины  $y(t)$  при  $f(t) = 0$

$$Y(z) = W(z) X(z), \quad (14.63)$$

где  $W(z)$  – передаточная функция разомкнутой системы, которая при использовании экстраполятора нулевого порядка имеет вид (14.60) или (14.61).

Так как приведенная непрерывная часть системы реагирует на значения ошибки системы  $x(t) = g(t) - y(t)$  только в дискретные моменты  $t = iT$ , то  $x(i) = g(i) - y(i)$ , а  $X(z) = G(z) - Y(z)$ , и из (14.63) получим:

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} G(z) = \Phi(z) G(z); \quad (14.64)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 + W(z)} G(z) = \Phi_x(z) G(z), \quad (14.65)$$

где  $\Phi(z)$  – передаточная функция замкнутой системы, а  $\Phi_x(z)$  – передаточная функция замкнутой системы по ошибке (по своей структуре эти передаточные функции аналогичны передаточным функциям замкнутой непрерывной системы (см. гл. 5)).

В качестве передаточной функции разомкнутой системы можно рассматривать и модифицированную передаточную функцию (14.62). Тогда при  $U(z) = X(z)$

$$Y(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) X(z), \quad (14.66)$$

или с учетом (14.65)

$$Y(z, \varepsilon) = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + W(z)} G(z) = \Phi(z, \varepsilon) G(z), \quad (14.67)$$

где  $\Phi(z, \varepsilon)$  – модифицированная передаточная функция замкнутой системы (обычно эта передаточная функция не используется, так как практически всегда для оценки качества работы дискретной системы достаточно знания передаточных функций  $W(z)$ ,  $\Phi(z)$  или  $\Phi_x(z)$ ).

Передаточная функция импульсной системы (рис. 14.7) по возмущению  $\Phi_f(z)$  не существует. Это связано с тем, что если  $F(p)$  представляет собой изображение по Лапласу функции  $f(t)$ , то как отмечалось ранее,

$$Z\{W_f(p)F(p)\} = W_f F(z) \neq W_f(z)F(z). \quad (14.68)$$

Однако большинство задач по исследованию дискретных систем решается при использовании передаточной функции  $W(z)$ .

Рассмотрим теперь замкнутую импульсную систему (рис. 14.1, б). Ее структурная схема может быть представлена так, как показано на рис. 14.7, где  $W_f(p)$  – передаточ-

При наличии возмущения для разомкнутой системы вместо (14.63) получим

$$Y(z) = W(z)X(z) + W_f F(z). \quad (14.69)$$

Отсюда с учетом выражения  $X(z) = G(z) - Y(z)$  для замкнутой системы имеем:

$$Y(z) = \Phi(z)G(z) + \frac{W_f F(z)}{1 + W(z)}. \quad (14.70)$$

Изображение  $W_f F(z)$  можно определить только для конкретных заданных воздействий  $f(t)$ . Однако, как будет показано в §14.5, это не является препятствием для оценки качества импульсных систем при детерминированных воздействиях.

## § 14.5. Уравнения состояния

Уравнения состояния при непрерывном управлении

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u + \bar{m}f; \\ y &= \bar{c}^T \bar{x} \end{aligned} \quad (14.71)$$

и способы их получения были рассмотрены в главе 5. Найдем уравнения состояния для импульсной системы, схема которой изображена на рис. 14.4 с учетом возмущающего воздействия. Передаточные функции  $W_0(p)$  и  $W_f(p)$  полагаются заданными. Это означает, что известны и матрицы  $\bar{A}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{c}^T$ .

Решение первого из уравнений (14.71), как было показано в главе 5, имеет вид

$$\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} [\bar{b}u(\tau) + \bar{m}f(\tau)] d\tau. \quad (14.72)$$

Для дискретных моментов времени из (14.72) получим:

$$\bar{x}(i) = e^{\bar{A}iT} \bar{x}(0) + \int_0^{iT} e^{\bar{A}(iT-\tau)} [\bar{b}u(\tau) + \bar{m}f(\tau)] d\tau. \quad (14.73)$$

Входное воздействие  $u(t) = u^*(t)$  изменяется по закону (14.2), причем коэффициент пропорциональности  $k_A$  отнесен к матрице  $\bar{b}$ . Возмущающее воздействие  $f(t)$  будем полагать детерминированным и изменяющимся по любому закону, но таким, что в течение периода дискретности  $T$  его можно считать постоянным:  $f(t) = f(i)$  при  $iT \leq t < (i+1)T$ . В реальных системах при малых значениях  $T$  это условие, как правило, выполняется.

Решая (14.73) последовательно шаг за шагом при  $i = 1, 2, \dots$ , как это делалось для разностных уравнений (см. 14.2), получим:

$$\bar{x}(i+1) = e^{\bar{A}T} \bar{x}(i) + u(i) \int_{iT}^{(i+1)T} e^{\bar{A}(iT+T-\tau)} \bar{b} d\tau + f(i) \int_{iT}^{iT+T} e^{\bar{A}(iT+T-\tau)} \bar{m} d\tau,$$

или после введения новой переменной  $\sigma = iT + T - \tau$

$$\bar{x}(i+1) = e^{\bar{A}T} \bar{x}(i) + u(i) \int_{(1-\gamma)T}^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{b} d\sigma + f(i) \int_0^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{m} d\sigma. \quad (14.74)$$

Таким образом, для импульсной системы (рис. 14.4) уравнения состояния можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+1) &= \bar{A}^* \bar{x}(i) + \bar{b}^* u(i) + \bar{m}^* f(i); \\ y(i) &= \bar{c}^T \bar{x}(i), \end{aligned} \quad (14.75)$$

где

$$\bar{A}^* = e^{\bar{A}T}, \quad \bar{b}^* = \int_{(1-\gamma)T}^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{b} d\sigma, \quad \bar{m}^* = \int_0^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{m} d\sigma, \quad (14.76)$$

а матрица  $\bar{c}^T$  такая же, как и в (14.71).

При переходе от уравнений (14.71) к уравнениям (14.74) наиболее сложной операцией является вычисление матрицы  $\bar{A}^*$ . Задача определения этой матрицы может быть решена различными способами [31]. В общем случае предпочтительнее следует отдать способу, основанному на использовании преобразования Лапласа, согласно которому

$$e^{\bar{A}T} = L^{-1} \left\{ (p\bar{E} - \bar{A})^{-1} \right\}. \quad (14.77)$$

где  $p$  — оператор Лапласа,  $\bar{E}$  — единичная матрица.

Иными словами, для получения  $\bar{A}^*$  необходимо найти матрицу, обратную матрице  $(p\bar{E} - \bar{A})$ , для каждого ее элемента осуществить обратное преобразование Лапласа и в полученных выражениях заменить  $t$  на  $T$ .

Обширная таблица для матриц (14.76), соответствующих наиболее распространенным передаточным функциям  $W_0(p)$  и  $W_f(p)$ , приведена в [57]. При ее использовании в выражениях для  $\bar{b}^*$  скажность импульсов  $\gamma_i$  следует заменить на  $\gamma$ .

В частном случае, когда уравнения (14.71) представлены в канонической форме (см. гл. 5), т. е. когда матрица  $\bar{A}$  является диагональной с элементами  $p_1, p_2, \dots, p_n$  матрица  $\bar{A}^*$  вычисляется очень просто:

$$\bar{A}^* = \begin{bmatrix} e^{p_1 T} & & & \\ & e^{p_2 T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{p_n T} \end{bmatrix}. \quad (14.78)$$

Решение первого из уравнений (14.75) можно получить как последовательно шаг за шагом, так и в замкнутой форме. В первом случае вычислительная процедура осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}(1) &= \bar{A}^* \bar{x}(0) + \bar{b}^* u(0) + \bar{m}^* f(0); \\ \bar{x}(2) &= \bar{A}^* \bar{x}(1) + \bar{b}^* u(1) + \bar{m}^* f(1); \\ &\dots \end{aligned} \tag{14.79}$$

Во втором случае, подставляя выражение для  $\bar{x}(1)$  в выражение для  $\bar{x}(2)$ , выражение для  $\bar{x}(2)$  в выражение для  $\bar{x}(3)$  и т. д., получим

$$\bar{x}(i) = (\bar{A}^*)^i \bar{x}(0) + \sum_{v=0}^{i-1} (\bar{A}^*)^{i-1-v} \bar{b}^* u(v). \tag{14.80}$$

Для простоты здесь положено, что  $f(i) = 0$ .

Решение (14.80) позволяет при известной последовательности  $u(i)$  найти  $\bar{x}(i)$  и, следовательно,  $y(i) = \bar{c}^T \bar{x}(i)$  для любого наперед заданного момента времени  $t = iT$ .

Используя уравнения (14.75), можно определить передаточные функции рассматриваемой системы. Для этого найдем  $z$ -преобразования от их левых и правых частей с учетом формулы (14.33) при нулевых начальных значениях. В результате получим:

$$\begin{aligned} z\bar{X}(z) &= \bar{A}^* \bar{X}(z) + \bar{b}^* U(z) + \bar{m}^* F(z); \\ Y(z) &= \bar{c}^T \bar{X}(z), \end{aligned} \tag{14.81}$$

где

$$\bar{X}(z) = Z\{\bar{x}(i)\} = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix}. \tag{14.82}$$

Тогда

$$\bar{X}(z) = (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{b}^* U(z) + (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{m}^* F(z); \tag{14.83}$$

$$\bar{Y}(z) = \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{b}^* U(z) + \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{m}^* F(z). \tag{14.84}$$

Таким образом, передаточные функции системы определяются следующим образом:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{b}^*; \tag{14.85}$$

$$W_f(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{m}^*. \quad (14.86)$$

Использование выражения (14.85) дает такой же результат, как и (14.58) при  $\gamma < 1$  или (14.60) при  $\gamma = 1$ . Передаточная функция (14.86) существует лишь при сделанном ранее допущении о том, что возмущающее воздействие можно считать постоянным на интервалах времени  $iT \leq t < (i+1)T$ .

## § 14.6. Устойчивость импульсных систем

В § 6.1 было показано, что непрерывная система устойчива, если все корни  $p_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) ее характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости (рис. 14.8, а). При исследовании импульсных систем вместо  $p$  используется новая переменная  $z = e^{pT}$ . В теории функций комплексного переменного преобразования, в процессе которого одна переменная заменяется некоторой функцией от новой переменной, а одна область комплексной плоскости отображается в другую, называется конформным преобразованием. Конформное преобразование  $z = e^{pT}$  отображает левую полуплоскость плоскости  $p$  в область, ограниченную окружностью единичного радиуса на плоскости  $z$  (рис. 14.8, б). При этом мнимая ось плоскости  $p$  отображается в саму окружность.

Действительно, пусть  $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ . Тогда

$$z_{1,2} = e^{(\alpha \pm j\beta)T} = e^{\alpha T} (\cos \beta T \pm j \sin \beta T). \quad (14.87)$$

При этом  $|z_{1,2}| = e^{\alpha T}$ . Для значений  $\alpha < 0$  (что соответствует корням  $p_{1,2}$  лежащим в левой полуплоскости плоскости  $p$ )  $|z_{1,2}| < 1$ , что соответствует корням, лежащим внутри круга единичного радиуса плоскости  $z$ . Если  $\alpha = 0$ , т. е. если корни  $p_{1,2}$  располагаются на мнимой оси плоскости  $p$ , то корни  $z_{1,2}$  попадают на окружность единичного радиуса плоскости  $z$ .

Таким образом, импульсная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения лежат внутри круга единичного радиуса, т. е. если  $|z_v| < 1$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , что совпадает с результатом (14.14). Если хотя бы один корень лежит вне круга единичного радиуса, то система неустойчива.

Окружность единичного радиуса представляет собой границу устойчивости для импульсной системы.

Система падает на апериодической границе устойчивости, если в ее характеристическом уравнении

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (14.88)$$

имеется корень  $z_v = 1$ , а остальные корни располагаются внутри круга единичного радиуса (рис. 14.8, в). В этом случае переходная составляющая решения разностного уравнения (14.12) с течением времени стремится к значению  $C_v(z_v)^i = C_v$ .

Если в характеристическом уравнении имеется пара комплексных сопряженных корней, расположенных на окружности единичного радиуса (рис. 14.8, г), т. е. таких, что  $Re^2 z_{v,v+1} + Im^2 z_{v,v+1} = 1$ , то имеет место колебательная граница устойчивости. В этом

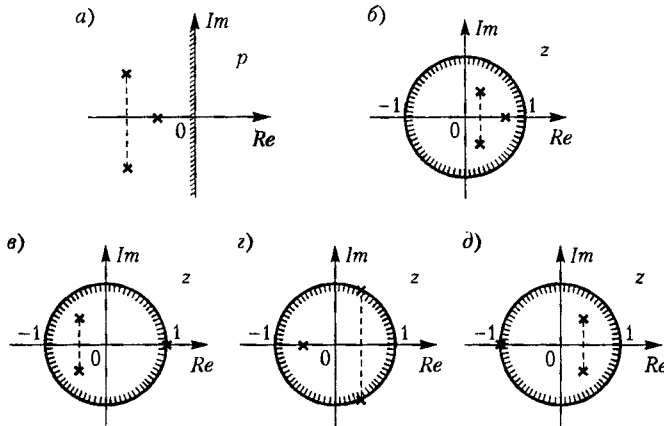


Рис. 14.8

случае с течением времени в системе устанавливаются незатухающие периодические колебания. Вещественная часть указанных корней  $Re z_{v,v+1}$  может быть положительной, как на рис. 14.8, з, отрицательной или нулевой.

Типичной для импульсных систем является так называемая граница устойчивости третьего типа, которой соответствует наличие в характеристическом уравнении корня  $z_v = -1$  (рис. 14.8, д). В этом случае в системе с течением времени устанавливаются незатухающие периодические колебания с периодом, равным  $2T$ , так как составляющая решения (14.12)  $C_v(z_v)^i = C_v(-1)^i$  при изменении  $i$  последовательно принимает значения  $C_v$  и  $-C_v$ .

В §14.4 отмечалось, что обычно для оценки устойчивости и качества импульсных систем используются передаточная функция разомкнутой системы  $W(z)$  и передаточные функции замкнутой системы  $\Phi(z)$  или  $\Phi_x(z)$ . Тогда в соответствии с выражениями (14.64) или (14.65) характеристическое уравнение замкнутой системы (14.88) может быть получено следующим образом:

$$1 + W(z) = B(z) + C(z) = 0, \quad (14.89)$$

где  $B(z)$  и  $C(z)$  — полиномы числителя и знаменателя передаточной функции  $W(z)$ .

Как правило, такое же уравнение получается и при использовании модифицированной передаточной функции замкнутой системы  $\Phi(z, \varepsilon)$ , определяемой по формуле (14.67). Лишь в отдельных редких частных случаях полиномы знаменателей передаточных функций  $\Phi(z)$  и  $\Phi(z, \varepsilon)$  могут иметь различное число корней [30]. Эти случаи здесь не рассматриваются.

Исследование устойчивости импульсных систем представляет собой более сложную задачу, чем исследование устойчивости непрерывных систем. Это связано с тем, что рассмотренные в главе 6 критерии устойчивости, такие как критерии Гурвица или Вышнеградского, устанавливают принадлежность корней характеристического уравнения к левой полуплоскости плоскости  $p$ , тогда как для устойчивости импульсной

системы корни характеристического уравнения (14.88) или (14.89) должны находиться внутри круга единичного радиуса на плоскости  $z$ . По той же причине неприменимым оказывается и необходимое условие устойчивости, требующее положительности коэффициентов характеристического уравнения. Например, в уравнении  $z - 0,5 = 0$  один коэффициент отрицательный, однако корень  $z_1 = 0,5$  находится внутри круга единичного радиуса.

Принадлежность корней к кругу единичного радиуса может быть установлена при помощи критерия Шур-Кона [90]. До некоторой степени он аналогичен критерию Гурвица, однако при его использовании необходимо составлять и анализировать определители вплоть до определителя порядка  $2n \times 2n$ , где  $n$  -- порядок характеристического уравнения. Поэтому на практике этот критерий применяется редко.

Для того чтобы получить возможность использования для исследования устойчивости импульсных систем всех критериев устойчивости непрерывных систем, необходимо отобразить круг единичного радиуса с плоскости  $z$  на левую полуплоскость некоторой новой переменной. Для этого можно, например, применить рассмотренное выше конформное преобразование  $z = e^{pT}$ . Однако в результате такой замены уравнение (14.88) станет трансцендентным. Вместе с тем в теории функций комплексного переменного существует преобразование

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (14.90)$$

которое называется билинейным, или  $w$ -преобразованием. Оно тоже отображает круг единичного радиуса на левую полуплоскость, но уже не плоскости  $p$ , а плоскости переменной  $w$ .

Рассмотрим, например, характеристическое уравнение (14.88) при  $n = 1$ . После подстановки (14.90) получим:

$$(a_0 - a_1)w + a_0 + a_1 = 0. \quad (14.91)$$

Для уравнений первого и второго порядка, как показано в главе 6, необходимое и достаточное условие устойчивости сводится к требованию положительности коэффициентов. Таким образом, условия устойчивости импульсной системы при  $n = 1$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_0 - a_1 > 0; \\ a_0 + a_1 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.92)$$

При  $n = 2$  характеристическое уравнение и условия устойчивости следующие:

$$\begin{aligned} (a_0 - a_1 + a_2)w^2 + 2(a_0 - a_2)w + a_0 + a_1 + a_2 = 0; \\ \left. \begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 > 0; \\ a_0 - a_2 > 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.93) \end{aligned}$$



При  $n = 3$  кроме положительности коэффициентов должно дополнительно выполняться условие критерия Гурвица (см. гл. 6). Поэтому для исследования устойчивости требуется проверить выполнение пяти неравенств:

$$\left. \begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &> 0; \\ 3a_0 - a_1 - a_2 + 3a_3 &> 0; \\ 3a_0 + a_1 - a_2 - 3a_3 &> 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &> 0; \\ a_0^2 - a_0a_2 + a_1a_3 - a_3^2 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.94)$$

При  $n \geq 4$  условия устойчивости становятся слишком громоздкими.

В качестве примера исследуем устойчивость замкнутой системы, передаточная функция нецелой части которой

$$W_0(p) = \frac{K(1+\tau p)}{p^2} = \frac{K}{p^2} + \frac{K\tau}{p}. \quad (14.95)$$

В соответствии с (14.60) при помощи табл. 14.1 находим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(z) = \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{K\tau T}{z-1} = \frac{KT^2}{2} \frac{\left(1 + \frac{2\tau}{T}\right)z + 1 - \frac{2\tau}{T}}{(z-1)^2}. \quad (14.96)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы (14.89) имеет вид

$$z^2 + \left(\frac{KT^2}{2} + K\tau T - 2\right)z + \frac{KT^2}{2} - K\tau T + 1 = 0.$$

Из неравенств (14.93) получаем условия устойчивости замкнутой системы:

$$K\tau T < 2, \quad \tau > \frac{T}{2}.$$

Для исследования устойчивости замкнутых систем удобно использовать критерий Найквиста (см. гл. 6). Чтобы построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы можно использовать преобразование  $z = e^{pT}$ . Положив  $p = j\omega$ , получим:

$$z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T = \frac{1 + j\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}}{1 - j\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}}. \quad (14.97)$$

Подставив (14.97) в выражение для передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$ , найдем частотную передаточную функцию разомкнутой системы  $W(e^{j\omega T})$ . Определив модуль и фазу или вещественную и мнимую части этой функции, можно построить а. ф. х. разомкнутой системы.

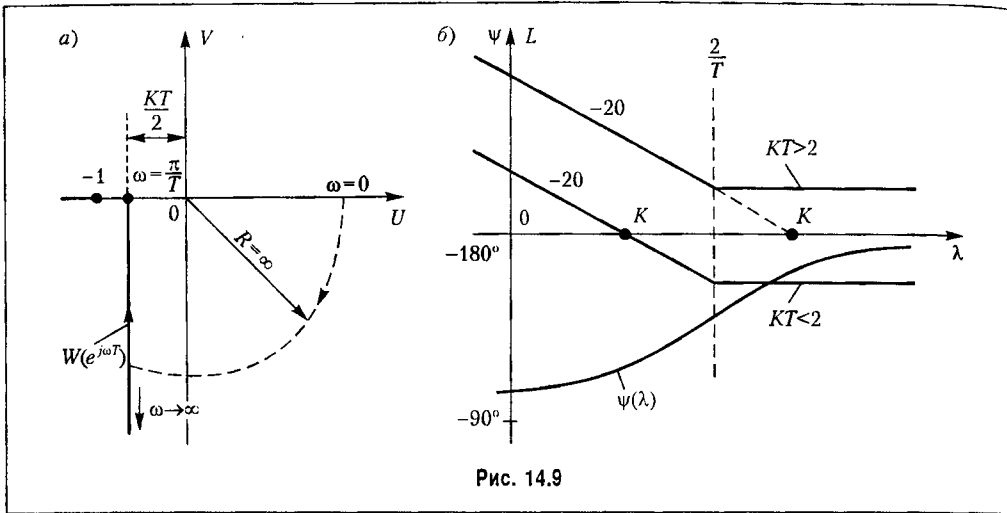


Рис. 14.9

Следует учитывать, что функция (14.97) периодическая. Поэтому при построении а. ф. х. достаточно ограничиться диапазоном частот  $0 \leq \omega \leq \pi/T$ .

В качестве примера рассмотрим систему, передаточная функция непрерывной части которой

$$W_0(p) = K/p.$$

В соответствии с (14.60) находим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{KT}{z-1}. \quad (14.98)$$

В результате замены (14.97) получим

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{KT \left(1 - j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}\right)}{2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}} = -\frac{KT}{2} - j \frac{KT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}.$$

А. ф. х. разомкнутой системы изображена на рис. 14.9, а. Так как при  $\omega = 0$  она имеет разрыв, обусловленный наличием  $p$  в знаменателе  $W_0(p)$ , дополняем ее четвертью окружности бесконечно большого радиуса.

Для исследования устойчивости замкнутой системы можно использовать любую из приведенных в главе 6 формулировок критерия Найквиста. В знаменателе передаточной функции  $W_0(p)$  нет корней с положительной вещественной частью, т. е.  $l = 0$ . Поэтому в соответствии с первой формулировкой а. ф. х. разомкнутой системы не должна охватывать точку  $(-1, j0)$ . Следовательно, как видно из рис. 14.9, а, замкнутая система устойчива при  $KT < 2$ . В соответствии со второй формулировкой сумма переходов а. ф. х. через критический отрезок должна быть равна нулю. При  $KT < 2$  переходов нет и замкнутая система устойчива. При  $KT > 2$  а. ф. х. заканчивается на критическом отрезке, т. е. имеет место  $-1/2$  перехода.

При использовании преобразования  $z = e^{pT}$  частотная передаточная функция  $W(e^{j\omega T})$  является трансцендентной. Поэтому для систем выше второго порядка построение а. ф. х. существенно затрудняется. Кроме того, практически исключается возможность построения асимптотических логарифмических частотных характеристик.

Для преодоления указанных недостатков удобно использовать преобразование

$$z = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}. \quad (14.99)$$

Оно, как и преобразование (14.90), является билинейным и отображает круг единичного радиуса с плоскости  $z$  на левую полуплоскость плоскости переменной  $\lambda$ , что дает возможность применять все критерии устойчивости непрерывных систем.

Переменная  $\lambda$  называется абсолютной псевдочастотой, или сокращенно — псевдо-частотой. Сравнив (14.99) с (14.97) получим:

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (14.100)$$

Из (14.100) видно, что благодаря множителю  $2/T$  псевдочастота  $\lambda$  имеет размерность угловой частоты. Кроме того, при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  она изменяется от 0 до  $\infty$ . Наконец, при  $\omega < 2/T$  псевдочастота практически совпадает с реальной частотой  $\omega$ .

При исследовании устойчивости и качества импульсных систем можно оперировать с  $j\lambda$  точно так же, как это делалось с  $j\omega$  или с  $p$  при исследовании непрерывных систем.

В качестве примера используем подстановку (14.99) в передаточной функции (14.97). В результате получим частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda}. \quad (14.101)$$

Теперь для исследования устойчивости замкнутой системы можно применять как алгебраический критерий, так и критерий Найквиста.

В первом случае находим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\left(1 - \frac{KT}{2}\right)j\lambda + K = 0.$$

Необходимое условие выполняется при  $KT < 2$ . Для системы первого порядка оно является и достаточным.

Во втором случае находим модуль и фазу:

$$|W(j\lambda)| = \frac{K \sqrt{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}}}{\lambda};$$

$$\psi(\lambda) = -90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\lambda T}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что а. ф. х. разомкнутой системы будет точно такой же, как на рис. 14.9, а, только она закончится на оси абсцисс при  $\lambda = \infty$ .

На рис. 14.9, б изображены логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы. Так как в знаменателе (14.101) имеется  $j\lambda$ , что эквивалентно наличию  $p$  в знаменателе передаточной функции непрерывной системы  $W(p)$ , то первая асимптота имеет наклон  $-20$  дБ/дек и пересекает ось абсцисс при  $\lambda = K$ . На сопрягающей частоте  $\lambda = 2/T$  л.а.х. изламывается на  $+20$  дБ/дек, так как множитель  $1 - j\lambda T/2$  находится в числителе. Если  $K < 2/T$ , то вторая асимптота проходит ниже оси абсцисс. При этом критический отрезок находится левее точки  $\lambda = K$  и логарифмическая фазовая характеристика не пересекает его. Следовательно, замкнутая система устойчива. Если же  $K > 2/T$ , то вторая асимптота проходит выше оси абсцисс и критическим отрезком будет вся эта ось. При  $\lambda = \infty$  фаза  $\psi(\omega) = -180^\circ$ , а модуль не равен бесконечности. Следовательно, имеет место  $-1/2$  перехода и замкнутая система неустойчива.

## § 14.7. Оценка качества импульсных систем

Общие соображения по оценке качества систем автоматического управления, рассмотренные в § 8.1, относятся и к импульсным системам.

Для оценки точности можно использовать величину ошибки в типовых режимах. В первых трех из них (см. § 8.2) при отсутствии возмущения значение установившейся ошибки в любой момент времени в соответствии с теоремой о конечном значении (14.37) определяется по формуле

$$x_{\text{уст}}(\epsilon) = \lim_{i \rightarrow \infty} x(i, \epsilon) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z, \epsilon), \quad (14.102)$$

где

$$X(z, \epsilon) = G(z, \epsilon) - Y(z, \epsilon),$$

$G(z, \epsilon) = Z_\epsilon\{g(t)\}$  — изображение задающего воздействия, а  $Y(z, \epsilon)$  определяется выражением (14.77).

В дискретные моменты времени  $t = iT$

$$x_{\text{уст}} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z), \quad (14.103)$$

где  $X(z)$  определяется выражением (14.65).

Следует отметить, что необходимость в использовании формул (14.102) или (14.103) возникает только тогда, когда скважность импульсов на выходе формирующего устройства системы (рис. 14.7)  $\gamma < 1$ . Если  $\gamma = 1$ , то в установившемся состоянии сигнал на выходе этого устройства  $x^*$  будет постоянным и импульсная система может рассматриваться как непрерывная. В этом случае для оценки точности, в том числе и возмущающих воздействий, можно пользоваться формулами, приведенными в § 8.2.

В режиме движения по гармоническому закону (8.12) частота  $\omega_k$  обычно сравнительно мала, причем всегда  $\omega_k < 2/T$ . При этом условии псевдочастота  $\lambda_k$  в соответствии с (14.100) практически совпадает с реальной частотой  $\omega_k$  и для расчетов можно использовать формулы (8.15) и (8.16), положив в них  $W(j\omega) = W_0(j\omega)$ .

Установившаяся точность импульсной системы может оцениваться и по коэффициентам ошибок. Аналогично непрерывным системам, начиная с некоторого момента времени ошибку можно представить в виде ряда

$$x(i) = c_0 g(i) + c_1 \dot{g}(i) + \frac{c_2}{2} \ddot{g}(i) + \dots, \quad (14.104)$$

где коэффициенты ошибок  $c_0, c_1, c_2, \dots$  представляют собой коэффициенты разложения передаточной функции по ошибке  $\Phi_x(z)$  при  $z = e^{pT}$  в ряд Маклорена по степеням  $p, t, c$ .

$$c_n = \left[ \frac{d^n \Phi_x(e^{pT})}{dp^n} \right]_{p=0}. \quad (14.105)$$

Оценка качества импульсной системы может делаться построением кривой переходного процесса, что при использовании  $z$ -преобразования осуществляется сравнительно легко (§ 14.2).

Максимальное значение последовательности  $y(i)$  может не совпадать с максимальным значением переходной характеристики (рис. 14.10, а). Обычно это несовпадение не имеет существенного значения для определения запаса устойчивости системы. Однако в отдельных случаях оно может быть существенным (рис. 14.5, б). Чаще всего это бывает при наличии в знаменателе передаточной функции непрерывной части системы  $W_0(p)$  множителей с комплексными корнями типа  $T_v^2 p^2 + 2\xi_v T_v p + 1$ . Можно

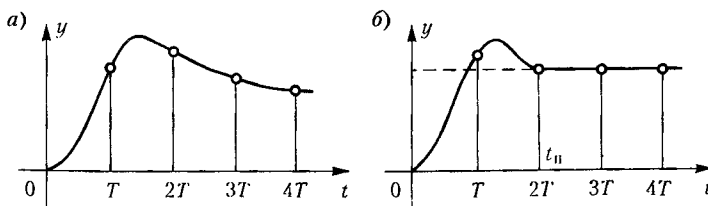


Рис. 14.10

показать, что процессы, подобные изображенному на рис. 14.5, б, будут исключены, если

$$\frac{1}{T_v} \sqrt{1 - \xi_v^2} < \frac{\pi}{T}.$$

Специфической особенностью импульсных систем является возможность существования в них переходных процессов конечной длительности, полностью заканчивающихся за конечный промежуток времени  $t_n = kT$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (рис. 14.10, б). Для этого параметры системы должны быть выбраны так, чтобы корни характеристического уравнения (14.91) располагались в начале координат на плоскости  $z$ . Тогда передаточная функция замкнутой системы принимает вид

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{b_0 z^{k-1} + b_1 z^{k-2} + \dots + b_{k-1}}{z^k}. \quad (14.106)$$

Ей соответствует разностное уравнение

$$y(i) = b_0 g(i-1) + b_1 g(i-2) + \dots + b_{k-1} g(i-k) \quad (14.107)$$

При подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия и  $y(0) = 0$  получим:

$$\begin{aligned} y(1) &= b_0, & y(2) &= b_0 + b_1, & \dots, & & y(k) &= b_0 + b_1 + \dots + b_{k-1}, \\ y(k+1) &= y(k+2) = \dots = y(k). \end{aligned} \quad (14.108)$$

Например, в системе с передаточной функцией (14.98) можно получить процесс с  $t_n = T$ , если  $K\tau = 1$ , а в системе с передаточной функцией (14.96) — процесс с  $t_n = 2T$ , если  $k\tau^2 = 1$ ,  $K\tau = 1,5$ .

Следует однако учитывать, что системы с процессами конечной длительности часто имеют малый запас устойчивости. Так, во втором из рассмотренных случаев при указанных параметрах передаточная функция (14.96) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{2z-1}{z^2}.$$

Из (14.108) находим:  $y(1) = 2, y(2) = y(3) = \dots = 1$ . Таким образом, перерегулирование  $\sigma\% = 100\%$ .

Запас устойчивости по амплитуде и по фазе и показатель колебательности замкнутой системы для импульсных систем определяется точно так же, как и для непрерывных систем (§ 8.8). Отличие состоит только в виде частотных характеристик этих систем.

Рассмотрим, например, систему, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид (14.96):

$$W(z) = \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{K\tau T}{z-1}. \quad (14.109)$$

Воспользуемся для расчета методом логарифмических частотных характеристик. С этой целью в (14.109) сделаем подстановку (14.99). В результате получим частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\lambda) = \frac{K\left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2} + \frac{K\tau\left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)}{j\lambda} = \frac{K(1 + j\lambda\tau)\left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2}. \quad (14.110)$$

Ее модуль

$$|W(j\lambda)| = \frac{K\sqrt{\left(1 + \lambda^2\tau^2\right)\left(1 + \lambda^2\frac{T^2}{4}\right)}}{\lambda^2}$$

и фаза

$$\psi(\lambda) = -180^\circ + \arctg\lambda\tau - \arctg\lambda T/2.$$

Логарифмические частотные характеристики для случая  $\tau > T/2$ ,  $K\tau T < 2$  изображены на рис. 14.11.

Асимптотическая л. а. х. построена в соответствии с выражением (14.110). Ее первая асимптота имеет наклон  $-40$  дБ/дек и пересекает ось абсцисс на частоте  $\lambda_0 = \sqrt{K}$ .

На сопрягающей частоте  $\lambda = \frac{1}{\tau}$  она изламывается на  $+20$  дБ/дек, а на частоте  $\lambda = \frac{2}{T}$  еще на  $+20$  дБ/дек. При  $\lambda = \infty$  модуль  $|W(j\lambda)|$  равен  $0,5K\tau T$ . Поэтому при  $K\tau T < 2$  третья асимптота располагается ниже оси абсцисс. Таким образом, при  $\tau > T/2$  и  $K\tau T < 2$  замкнутая система устойчива, так как л. ф. х. не пересекает критический отрезок.

Запас устойчивости замкнутой системы по амплитуде (см. §8.8)

$$L_1 = 20\lg\frac{2}{K\tau T}. \quad (14.111)$$

Для определения запаса устойчивости по фазе найдем частоту среза л. а. х.  $\lambda_c$ . В соответствии со свойствами треугольников на плоскости л. ч. х., гипотенузы которых имеют наклоны  $-20$  дБ/дек и  $-40$  дБ/дек, имеем:

$$|W(j\lambda_c)| = \frac{\lambda_c}{\lambda_\tau} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_\tau^2}.$$

Отсюда частота среза л. а. х.

$$\lambda_c = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_\tau} = K\tau. \quad (14.112)$$

Таким образом, запас устойчивости замкнутой системы по фазе

$$\psi_1 = 180^\circ + \psi(\lambda_0) = \operatorname{arctg} \lambda_c \tau - \operatorname{arctg} \lambda_c T/2. \quad (14.113)$$

Для определения показателя колебательности замкнутой системы  $M$  необходимо при помощи  $\mu$ -кривых (рис. 8.23) построить запретную область так, как показано на рис. 8.24. При этом параметры  $K$ ,  $\tau$  и  $T$  должны быть заданы численно. В данном случае можно найти такие значения этих параметров, при которых будет обеспечено наперед заданное значение показателя колебательности.

Нетрудно видеть, что случай (рис. 14.11) по расположению фазовой характеристики сводится к случаю л. а. х. типа 2-1-2, изображенной на рис. 12.10. Используя полученные в главе 12 формулы, получаем оптимальную протяженность участка с наклоном  $-20$  дБ/дек:

$$h = \frac{2\tau}{T} = \frac{M+1}{M-1}. \quad (14.114)$$

Базовая частота л. а. х.  $\lambda_0 = \sqrt{K}$ . Далее имеем связь между постоянной времени  $\tau$  и базовой частотой:

$$\tau = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}},$$

откуда находим коэффициент передачи разомкнутой системы

$$K = \lambda_0^2 = \frac{1}{\tau^2} \frac{M}{M-1} = \frac{4}{T^2} \frac{M(M-1)}{(M+1)^2}. \quad (14.115)$$

Эту формулу можно записать также в следующем виде:

$$\frac{KT^2}{4} \leq \frac{M(M-1)}{(M+1)^2}. \quad (14.116)$$

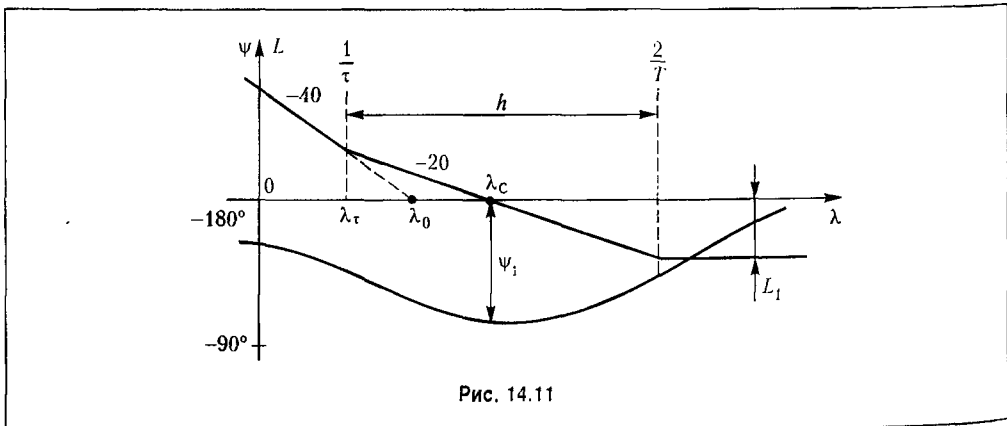


Рис. 14.11



Формулы (14.115) и (14.116) позволяют выбрать значение коэффициента передачи непрерывной части системы  $K$  и постоянной времени  $\tau$  при заданном периоде дискретности  $T$  или определить значение периода дискретности при заданном  $K$ .

Более детально решение задачи синтеза импульсных систем с заданными показателями качества рассматриваются в главе 15.

## § 14.8. Случайные процессы в импульсных системах

Введем понятие случайной последовательности  $f(i)$ , которую можно образовать из непрерывной случайной функции  $f(t)$  ее дискретизацией. В этом случае она будет определена в дискретные моменты времени  $t = iT$ . Будем рассматривать стационарные процессы, когда вероятностные характеристики не зависят от времени.

Среднее значение случайного стационарного процесса

$$\overline{f(i)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N f(i), \quad (14.117)$$

или на основании эргодического свойства

$$\overline{f(i)} = M\{f(i)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(i)w[f(i)]df, \quad (14.118)$$

где  $w[f(i)]$  — одномерная плотность вероятности.

Для центрированных процессов среднее значение равно нулю.

Введем понятие *корреляционной функции*

$$R(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N f(i)f(i+m). \quad (14.119)$$

Аналогично главе 11 можно сформулировать основные свойства корреляционной функции.

1. Для случая  $m = 0$

$$R(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N f^2(i) = \overline{f^2(i)}. \quad (14.120)$$

2. При  $m = 0$  корреляционная функция достигает наибольшего значения:

$$R(0) \geq R(m). \quad (14.121)$$

3. Корреляционная функция является четной:

$$R(-m) = R(m). \quad (14.122)$$

При наличии двух случайных процессов  $f_1(i)$  и  $f_2(i)$  можно ввести понятие взаимной корреляционной функции

$$R_{12}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N f_1(i) f_2(i+m). \quad (14.123)$$

Свойства ее схожи со свойствами взаимной корреляционной функции для непрерывных процессов.

Введем понятие спектральной плотности случайного стационарного процесса как *двустороннего z-преобразования* корреляционной функции

$$S_0(z) = TS(z) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) z^{-m} = T[F(z) + F(z^{-1}) - R(0)]. \quad (14.124)$$

где  $T$  — нормирующий множитель, равный периоду дискретности, а  $F(z)$  представляет собой  $z$ -преобразование корреляционной функции  $R(m)$ . Нормирующий множитель  $T$  введен в  $S_0(z)$  для того, чтобы сделать физическую размерность спектральной плотности дискретного случайного процесса равной размерности спектральной плотности непрерывного процесса и сохранить ее физический смысл. Однако это не обязательно.

Аналогично непрерывному случаю можно ввести понятие спектральной плотности как функции круговой частоты

$$\bar{S}(\omega) = S(e^{j\omega T}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) e^{-j\omega m T}. \quad (14.125)$$

или при учете четности

$$\bar{S}(\omega) = R(0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} R(m) \cos \omega m T. \quad (14.126)$$

Наконец, можно определить спектральную плотность как функцию абсолютной псевдочастоты. Для этого в формуле (14.124) необходимо перейти к  $w$ -преобразованию, используя подстановку (14.92), а затем перейти к псевдочастоте посредством

подстановки  $w = j \frac{T}{2} \lambda$ . В результате получим

$$S^*(\lambda) + S \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \Big|_{w=j\frac{T}{2}\lambda}. \quad (14.127)$$

Аналогичным образом может быть определена взаимная спектральная плотность двух процессов.

Заметим, что все приведенные формулы могут быть записаны и для случая  $\varepsilon \neq 0$ , тогда рассматривается случайная последовательность  $f(i, \varepsilon)$ , корреляционная функция  $R(m, \varepsilon)$ , спектральные плотности  $S(z, \varepsilon)$ ,  $\bar{S}(\omega, \varepsilon)$  и  $S^*(\lambda, \varepsilon)$ .

Основное свойство спектральной плотности, как и в непрерывном случае, заключается в том, что интеграл от нее по всем частотам дает средний квадрат случайной величины. Можно показать [96], что в дискретном случае соответствующая формула имеет вид

$$\overline{f^2(i)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{S}(\omega) d\omega = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} \bar{S}(\omega) d\omega. \quad (14.128)$$

Так как имеют место равенства

$$e^{j\omega T} = \frac{1 + j\frac{T}{2}\lambda}{1 - j\frac{T}{2}\lambda}, \quad d\omega = \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}},$$

то формула (14.128) может быть записана в виде

$$\overline{f^2(i)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^*(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^*(\lambda) d\lambda}{1 - (j\lambda)^2 \frac{T^2}{4}}. \quad (14.129)$$

Выражение (14.129) обычно является более удобным для расчетов по сравнению с (14.128), так как позволяет использовать таблицы интегралов (см. приложение 1).

**Типовые случайные стационарные процессы.** Если для функции  $f(t)$ , представляющей собой центрированную номеху, эффективное время корреляции

$$\Delta\tau = \frac{1}{R(0)} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (14.130)$$

меньше периода дискретности,  $\Delta\tau < T$ , то такой процесс может быть представлен как дискретный белый шум с корреляционной функцией

$$R(m) = R(0) \cdot \delta_0(m), \quad (14.131)$$

где  $R(0) = D$  — дисперсия, а  $\delta_0(m)$  — слинная импульсная функция, равная единице при  $m = 0$  и равная нулю при  $m \neq 0$ . Этому белому шуму соответствует спектральная плотность

$$S(z) = \bar{S}(\omega) = S^*(\lambda) = D. \quad (14.132)$$

Если эффективное время корреляции  $\Delta\tau > T$ , то корреляционная функция  $R(m)$  может быть получена из соответствующей корреляционной функции непрерывного процесса  $R(\tau)$  заменой  $\tau = mT$ . Спектральная плотность может быть получена использованием формул (14.124)–(14.127).

В табл. 14.2 приведены некоторые типовые дискретные стационарные случайные процессы.

Таблица 14.2

Вид процесса	$R(m)$	$S(z)$	$S(\lambda)$
Белый шум	$R(0) \delta(m) = D\delta_0(m)$	$D$	$D$
Случайный процесс с ограниченной полосой	$De^{-\frac{ mT }{T_n}}$	$\frac{D2z \operatorname{sh} \frac{T}{T_n}}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \frac{T}{T_n} + 1}$	$D \frac{\left[ \left( 1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4} \right) \operatorname{th} \frac{T}{2T_n} \right]}{\frac{\lambda^2 T^2}{4} + \operatorname{th}^2 \frac{T}{T_n}}$
Нерегулярная качка	$De^{-\mu  mT } \cos \beta mT$	$D \left[ \frac{z(z - d \cos \beta T)}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2} - \frac{dz(dz - \cos \beta T)}{d^2 z^2 - 2zd \cos \beta T + 1} \right];$ $d = e^{-\mu T}$	$DA \frac{\left( 1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right) \left( B + \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right)}{\left( B - \frac{\lambda^2 T^2}{4} \right) + 4A^2 \cdot \frac{\lambda^2 T^2}{4}}$
$A = \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} \operatorname{ch} \frac{\mu T}{2}}{1 + \operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\beta T}{2}}$		$B = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\mu T}{2} + \sin^2 \frac{\beta T}{2}}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\beta T}{2}}$	

**Прохождение сигнала через линейную систему.** Пусть на входе линейного звена с известной дискретной передаточной функцией  $W(z)$  действует случайная функция  $x_1(i)$ , для которой известны корреляционная функция  $R_1(m)$  и спектральная плотность  $\bar{S}_1(\omega)$  или  $S_1^*(\lambda)$ . Тогда для выходной величины  $x_2(i)$ , аналогично непрерывному случаю, можно найти спектральную плотность умножением спектральной плотности входного сигнала на квадрат модуля частотной передаточной функции:

$$\bar{S}_2(\omega) = |W(e^{j\omega T})|^2 \bar{S}_1(\omega), \quad S_2^*(\lambda) = |W^*(j\lambda)|^2 S_1^*(\lambda). \quad (14.133)$$

Интегрирование спектральной плотности по всем частотам в соответствии с (14.128) и (14.129) позволяет найти средний квадрат выходной величины  $\overline{x_2^2(i)}$ . Это позволяет для замкнутой импульсной системы производить расчеты, аналогичные изложенным в §11.8. Так, например, пусть в схеме, изображенной на рис. 14.7, на входе действуют полезный сигнал  $g(t)$  и помеха  $n(t)$ , не коррелированные между собой. Обозначим их спектральные плотности  $S_g^*(\lambda)$  и  $S_n^*(\lambda)$ . Тогда спектральная плотность ошибки

$$S_x^*(\lambda) = |\Phi_x^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) + |\Phi_n^*(j\lambda)|^2 S_n^*(\lambda), \quad (14.134)$$

где  $\Phi^*(j\lambda)$  и  $\Phi_x^*(j\lambda)$  — частотные передаточные функции замкнутой системы и замкнутой системы по ошибке.

Интегрирование (14.134) по всем частотам в соответствии с (14.129) даст средний квадрат ошибки

$$\overline{x^2(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi_x^*(j\lambda)|^2 S_g^*(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi^*(j\lambda)|^2 S_n^*(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}}. \quad (14.135)$$

Подобным же образом могут быть найдены расчетные формулы и для других возможных случаев (см. §11.8).

## Глава 15 ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ

### § 15.1. Общие сведения

Цифровой системой, как отмечалось в главе 1, называется система автоматического управления, в состав управляющего устройства которой включена цифровая вычислительная машина или специализированное цифровое вычислительное устройство. В дальнейшем будем сокращенно обозначать их как ЦВМ.

Непосредственно в целях управления ЦВМ используется для формирования программ управления (§ 2.1) и цифровой реализации алгоритмов управления (§ 2.2) или корректирующих средств (§ 10.1).

Как правило, целесообразно вводить ЦВМ в систему управления в тех случаях, когда для решения указанных задач требуется сложная обработка информации или выполнение таких операций, которые не могут быть осуществлены с требуемой точностью при помощи аналоговых средств (умножение, деление, преобразование координат и т. п.). Это относится, например, к программам наведения типа (2.8), нелинейным алгоритмам управления, алгоритмам самонастройки и другим.

Вместе с тем в ряде случаев вполне оправданной оказывается цифровая реализация линейных корректирующих средств, которые обычно выполняются с использованием  $R$ -,  $C$ -,  $L$ -элементов. Это связано с тем, что характеристики таких элементов изменяются с течением времени и под влиянием внешних факторов, а их надежность сравнительно невысока.

Помимо непосредственного участия в управлении объектом ЦВМ может выполнять такие операции, как контроль состояния элементов и устройств системы, самоконтроль и др.

В общем случае на ЦВМ может возлагаться решение задач с обслуживанием нескольких зависимых или независимых каналов управления с разделением функций управления между ними по времени или по приоритету [93].

Один из вариантов функциональной схемы цифровой системы автоматического управления при наличии двух каналов показан на рис. 15.1. Управляемые величины  $y_1$

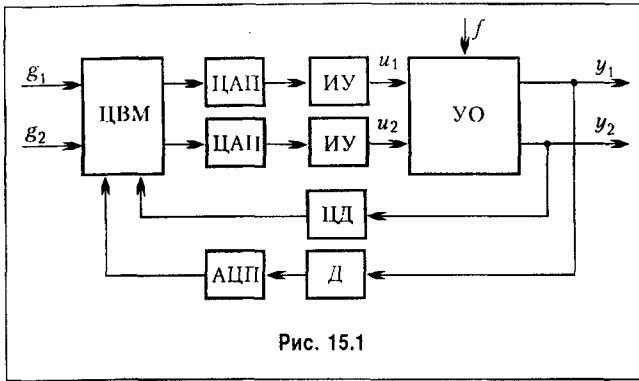


Рис. 15.1

и  $y_2$  измеряются соответственно аналоговым датчиком Д и цифровым датчиком ЦД. Так как ЦВМ оперирует не с аналоговыми величинами (токами, напряжениями), а с числовыми (цифровыми) кодами, в систему вводится преобразователь аналоговой величины в цифровой код АЦП. Для связи ЦВМ с аналоговыми исполнительными устройствами ИУ используются преобразователи цифрового кода в аналоговые величины ЦАП. Задающие воздействия  $g_1$  и  $g_2$  формируются самой ЦВМ в виде программы управления или вводятся в нее извне. В последнем случае преобразования этих воздействий в цифровые коды осуществляется преобразователями АЦП. Функции сравнивающего устройства, как правило, возлагаются на ЦВМ. Кроме исполнительных устройств в систему могут входить и другие аналоговые устройства, например, усилители.

ЦВМ представляет собой устройство дискретного действия. Это связано с тем, что решение задач управления осуществляется в ней путем выполнения арифметических операций. Поэтому в отличие от непрерывных систем реализация ею (ЦВМ) алгоритма управления происходит не мгновенно, а за конечный промежуток времени  $\tau$ . Иными словами если информация поступает на вход ЦВМ в момент времени  $t = t_1$ , то результат вычислений может быть получен лишь при  $t = t_1 + \tau$ . Величина  $\tau$  зависит от сложности алгоритма и быстродействия ЦВМ. К ней добавляется еще и время, затрачиваемое на преобразования в ЦАП и АЦП.

Таким образом, результаты реализации алгоритма управления ЦВМ может выдавать лишь дискретно, т. е. в моменты времени  $t = iT, i = 0, 1, 2, \dots$ , причем  $T > \tau$ . Значения  $\tau$  и  $T$  могут быть различными для каждого из каналов.

На основании изложенного, структурную схему одного канала цифровой системы (при условии независимости этого канала от других) можно представить так, как показано на рис. 15.2. При этом полагается, что ЦВМ реализует линейный алгоритм управления, а суммарное время запаздывания  $\tau$  отнесено к непрерывной части системы.

Процесс преобразования аналоговой величины  $g(t)$  или  $y(t)$  в цифровой код  $\bar{g}$  или  $\bar{y}$ , осуществляемый АЦП, можно условно представить состоящим из трех операций: квантования по времени, квантования по уровню и кодирования.

Квантование по времени возникает из-за того, что информация вводится в АЦП по командам, поступающим от ЦВМ, лишь в моменты времени  $t = iT$ . На рис. 15.2 эту операцию выполняют ключи.

В процессе квантования по уровню весь диапазон изменения непрерывной величины, например  $y(t)$ , разбивается на  $\mu_1$  равных частей (квантов). Величина

$$\delta_1 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\mu_1} \quad (15.1)$$

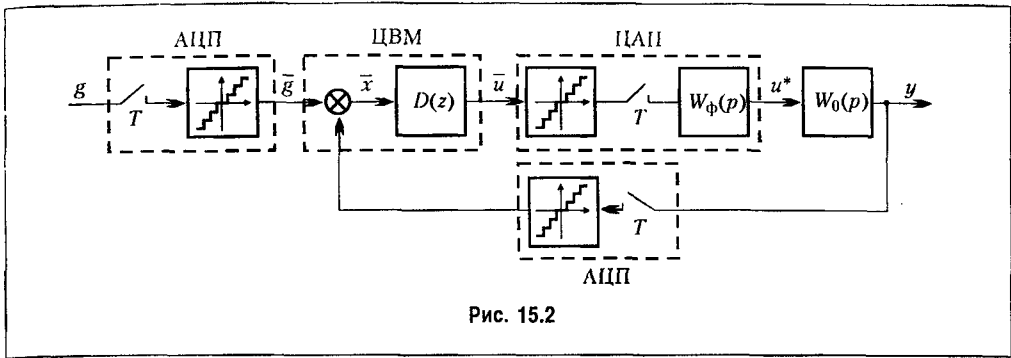


Рис. 15.2

по существу определяет разрешающую способность АЦП. В результате величина на выходе АЦП может принимать только определенные фиксированные значения, отличающиеся друг от друга на величину  $\delta_1$ . На рис. 15.2 это отражено наличием звена с многоступенчатой релейной характеристикой.

В процессе кодирования каждому из  $\mu_1$  интервалов присваивается определенный двоичный код. Чтобы такое присвоение было однозначным, должно выполняться условие

$$\mu_1 = 2^{\alpha_1} - 1, \quad (15.2)$$

где  $\alpha_1$  — число двоичных разрядов (без учета знакового разряда). Тогда разрешающая способность (15.1)

$$\delta_1 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2^{\alpha_1} - 1}. \quad (15.3)$$

В преобразователях АЦП число разрядов обычно велико ( $\alpha_1 \geq 10$ ). При  $\alpha_1 = 10$  число ступеней нелинейной характеристики  $\mu_1 = 1023$ . Если, например, АЦП преобразует напряжение в код, а напряжение изменяется в пределах  $\pm 10$  В, то разрешающая способность такого преобразователя согласно (15.3)  $\delta_1 \approx 0,02$  В. Это означает, что нелинейностью АЦП можно пренебречь, заменив нелинейную характеристику линейной. Коэффициент передачи АЦП для линеаризованной характеристики

$$k_1 = 1/\delta_1. \quad (15.4)$$

ЦАП преобразует код  $\bar{u}$ , поступающий с выхода ЦВМ, в аналоговый сигнал  $u^*$ , обычно представляющий собой электрическое напряжение или ток.

В процессе преобразования каждому значению кода  $\bar{u}$  ставится в соответствие определенное фиксированное (эталонное) значение непрерывного сигнала  $u$ , что означает наличие квантования по уровню и отражено на рис. 15.2 в виде многоступенчатой релейной характеристики. Число отличных от нуля разрешенных уровней

$$\mu_2 = 2^{\alpha_2} - 1, \quad (15.5)$$

где  $\alpha_2$  — число разрядов ЦАП.

В моменты времени  $t = iT$  значения полученного непрерывного сигнала  $u(iT)$  фиксируются и удерживаются на одном уровне в течение периода дискретности  $T$  (или части его), что соответствует наличию в ЦАП формирующего устройства с передаточной функцией  $W_{\Phi}(p)$ , имеющей вид (14.59) или (14.55).

Число разрядов серийно выпускаемых преобразователей кода в напряжение  $\alpha_2 \geq 10$ . Поэтому, как и у АЦП, нелинейностью статической характеристики ЦАП можно пренебречь. Коэффициент передачи для линеаризованной характеристики  $k_2 = \delta_2$ , где  $\delta_2$  — единица младшего разряда для выходной величины  $u$ .

ЦВМ формирует требуемый алгоритм управления или осуществляет дискретную коррекцию в виде вычислительной процедуры, задаваемой линейным разностным уравнением

$$q_0 u(i+k) + q_1 u(i+k-1) + \dots + q_k u(i) = p_0 x(i+s) + p_1 x(i+s-1) + \dots + p_s x(i), \quad s \leq k, \quad (15.6)$$

где переменные  $u$  и  $x$  представляются в виде цифровых кодов.

Это уравнение по существу представляет собой рекуррентную формулу, позволяющую вычислять текущее значение управляющего воздействия  $u(i)$  в зависимости от текущего значения ошибки  $x(i)$ , а также предшествующих значений ошибки и управляющего воздействия:

$$u(i) = \frac{1}{q_0} [-q_1 u(i-1) - q_2 u(i-2) - \dots - q_k u(i-k) + p_0 x(i+s-k) + p_1 x(i+s-k-1) + \dots + p_s x(i-k)]. \quad (15.7)$$

Из (15.7) видно, что в программу вычислений входят операции сложения и умножения на постоянные коэффициенты, а также операции запоминания результатов вычисления и значений ошибки на предшествующих шагах.

Применив к левым и правым частям уравнения (15.6)  $z$ -преобразование при нулевых начальных условиях (см. 14.3) получим передаточную функцию

$$D(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = \frac{p_0 z^s + p_1 z^{s-1} + \dots + p_s}{q_0 z^k + q_1 z^{k-1} + \dots + q_k}, \quad (15.8)$$

которую в дальнейшем будем называть передаточной функцией ЦВМ.

С учетом всех сделанных выше допущений структурную схему цифровой системы (рис. 15.2) можно представить так, как показано на рис. 15.3.

Коэффициенты передачи АЦП и ЦАП, а также запаздывание  $\tau$  здесь отнесены к непрерывной части системы. Погрешности, возникающие в результате замены много-

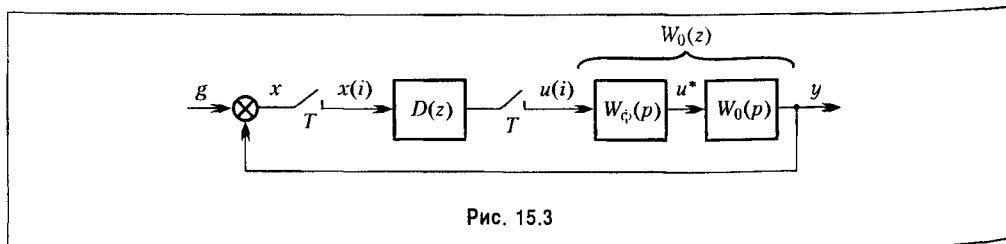


Рис. 15.3



ступенчатых релейных характеристик линейными в случае необходимости могут быть учтены в виде шумов [28].

Структурная схема (рис. 15.3) отличается от структурной схемы импульсной системы (рис. 14.7) лишь наличием дополнительного звена с передаточной функцией  $D(z)$ . Передаточная функция  $W_0(z)$  в главе 14 обозначалась  $W(z)$ , так как она представляла собой передаточную функцию разомкнутой импульсной системы.

В тех случаях, когда запаздывание  $\tau$  значительно меньше периода дискретности  $T$ , для определения  $W_0(z)$  можно использовать формулы (14.60) или (14.58), а в противном случае — формулу (14.61). Модифицированная передаточная функция  $W_0(z, \varepsilon)$  определяется по формуле (14.62).

Передаточная функция разомкнутой цифровой системы (рис. 15.3)

$$W(z) = D(z) W_0(z), \quad (15.9)$$

так как

$$Y(z) = W_0(z) U(z), \quad U(z) = D(z) X(z).$$

Модифицированная передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z, \varepsilon) = D(z) W_0(z, \varepsilon). \quad (15.10)$$

С учетом (15.9) и (15.10) передаточные функции замкнутой цифровой системы определяются из выражений (14.64), (14.65) и (14.77). Таким образом, на цифровые системы распространяются все методы исследования устойчивости и качества, рассмотренные в главе 14.

## § 15.2. Дискретные алгоритмы управления и дискретная коррекция

При непрерывном управлении реализация алгоритма управления (§ 2.2) и корректирующих средств (§ 10.1) осуществляется за счет введения в систему дополнительных устройств: тахогенераторов, интегрирующих приводов,  $R$ -,  $C$ -,  $L$ -цепей и т. п. В цифровых системах как алгоритмы управления, так и корректирующие средства реализуются программным путем в виде вычислительной процедуры, организованной в соответствии с разностным уравнением (15.7).

Разностное уравнение (15.7) может быть физически реализовано, если для вычисления значения управляющего воздействия в момент времени  $t = iT$ , т. е.  $u(i)$ , не требуются будущие значения ошибки, т. е.  $x(i+1)$ ,  $x(i+2)$ ,... Нетрудно убедиться, что это условие выполняется, если  $s \leq k$ . Если же например  $s = k+1$ , то в правой части уравнения (15.7) появится слагаемое  $p_0 x(i+1)$ .

Применительно к передаточной функции ЦВМ (15.8) условие физической реализуемости выполняется, если степень полинома ее числителя не превышает степени полинома знаменателя.

Вообще говоря, в цифровой системе могут быть использованы и непрерывные алгоритмы управления или непрерывные корректирующие устройства. Тогда передаточная функция ЦВМ  $D(z) = 1$ . При этом цифровая система формально превращается в

импульсную, так как их структурные схемы, изображенные на рис. 15.3 и рис. 14.7, будут одинаковыми. Однако фактически эти системы останутся принципиально различными.

В импульсной системе преобразование непрерывного сигнала в последовательность импульсов осуществляется сравнительно простым устройством – амплитудно-импульсным модулятором, а все остальные элементы и устройства являются аналоговыми. В цифровой системе при  $D(z) = 1$  сохраняется весь комплекс сложных устройств (ЦВМ, АЦП, ЦАП), а на ЦВМ возлагается лишь задача вычисления ошибки и, возможно, формирования задающего воздействия в соответствии с программой управления. Поэтому, очевидно, построение цифровой системы при  $D(z) = 1$  не является рациональным.

В табл. 15.1 приведены некоторые простейшие дискретные алгоритмы и передаточные функции  $D(z)$ , соответствующие рассмотренным в § 2.2 линейным непрерывным алгоритмам. В качестве аналога производной использована не первая разность (14.5)  $\Delta x(i) = x(i+1) - x(i)$ , которая физически не реализуется, а разность  $x(i) - x(i-1)$ . Для вычисления интеграла применены известные приближенные методы интегрирования.

При осуществлении дискретной коррекции желаемая передаточная функция  $D(z)$  может быть определена следующим образом. Пусть известна передаточная функция исходной не скорректированной системы

$$W_0(z) = \frac{B_0(z)}{C_0(z)}, \quad (15.11)$$

а в процессе решения задачи синтеза определена желаемая передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{B(z)}{C(z)} = D(z)W_0(z). \quad (15.12)$$

Тогда искомая передаточная функция дискретного корректирующего устройства (передаточная функция ЦВМ)

$$D(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{W(z)}{W_0(z)} = \frac{B(z)C_0(z)}{C(z)B_0(z)}. \quad (15.13)$$

Если известна желаемая передаточная функция замкнутой системы  $\Phi(z)$ , то вместо (15.13) получим:

$$D(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} \cdot \frac{1}{W_0(z)} = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} \cdot \frac{C_0(z)}{B_0(z)}. \quad (15.14)$$

Формирование желаемых передаточных функций  $W(z)$  или  $\Phi(z)$  должно производиться с учетом некоторых ограничений. Во-первых, получающаяся передаточная функция ЦВМ (15.13) или (15.14) должна быть физически реализуемой, т. е. степень полинома ее числителя не должна превышать степени полинома знаменателя. Во-вто-

Таблица 15.1

Управление	Непрерывный алгоритм	Дискретный алгоритм	$D(z)$
По отклонению	$u = k_1 x$	$u(i) = k_1 x(i)$	$k_1$
По производной от отклонения	$u = k_2 \dot{x}$	$u(i) = \frac{k_2}{T} [x(i) - x(i-1)]$	$\frac{k_2}{T} \frac{z-1}{z}$
По отклонению и производной	$u = k_1 x + k_2 \dot{x}$	$u(i) = \left( k_1 + \frac{k_2}{T} \right) x(i) - \frac{k_2}{T} x(i-1)$	$\frac{\left( k_1 + \frac{k_2}{T} \right) z - \frac{k_2}{T}}{z}$
По интегралу от отклонения	$u = k_3 \int x dt$	$u(i) = u(i-1) + k_3 T x(i-1)$ (метод Эйлера)	$\frac{k_3 T z}{z-1}$
		$u(i) = u(i-1) + \frac{k_3 T}{2} [x(i) + x(i-1)]$ (метод трапеций)	$\frac{k_3 T}{2} \frac{z+1}{z-1}$
Изодромнос	$u = k_1 x + k_3 \int x dt$	$u(i) = u(i-1) + k_1 x(i) + k_3 T x(i-1)$	$\frac{k_1 z + k_3 T}{z-1}$
		$u(i) = u(i-1) + \left( k_1 + \frac{k_3 T}{2} \right) x(i) + \frac{k_3 T}{2} x(i-1)$	$\frac{\left( k_1 + \frac{k_3 T}{2} \right) z + \frac{k_3 T}{2}}{z-1}$

рых, скорректированная система должна быть грубой, т. е. малое изменение ее параметров не должно приводить к существенному изменению характера протекающих в ней процессов.

В соответствии с условием грубости нули и полюсы (корни числителя и знаменателя) передаточной функции  $W_0(z)$ , модуль которых равен или больше единицы, не должны сокращаться или компенсироваться такими же полюсами и нулями передаточной функции  $D(z)$ . Иными словами «плохие» нули и полюсы  $W_0(z)$  должны входить в качестве нулей и полюсов в желаемую передаточную функцию разомкнутой системы. Применительно к выражению (15.14) это означает, что передаточная функция  $\Phi(z)$  должна содержать в качестве нулей «плохие» корни полинома  $B_0(z)$ , а  $1 - \Phi(z)$  — «плохие» корни полинома  $C_0(z)$ . Невыполнение условий грубости вызывает неустойчивость системы.

Поясним сказанное примером. Рассмотрим систему (рис. 15.3), передаточная функция непрерывной части которой равна

$$W_0(p) = \frac{K}{T_1 p - 1}.$$

Тогда при  $\gamma = 1$  имеем

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p(T_1 p - 1)} \right\} = \frac{K(d-1)}{z-d}, \quad d = e^{T/T_1} > 1.$$

Положим, например,  $K = 2$ ,  $d = 1,2$ . Тогда

$$W_0(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,4}{z-1,2}. \quad (15.15)$$

Введем в систему дискретное корректирующее устройство с передаточной функцией

$$D(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = \frac{z-1,2}{z-0,8}. \quad (15.16)$$

В результате получим передаточную функцию разомкнутой системы (15.12)

$$W(z) = D(z)W_0(z) = \frac{0,4}{z-0,8}. \quad (15.17)$$

Корень  $z_1 = 1,2$  знаменателя  $W_0(z)$ , модуль которого больше единицы, сокращен таким же корнем числителя  $D(z)$ . Таким образом, условие грубости нарушено. Однако, если судить по передаточной функции (15.17), замкнутая система устойчива, так как корень ее характеристического уравнения  $z_1 = 0,4 < 1$ .

Допустим теперь, что фактическое значение постоянной времени  $T_1$  несколько меньше расчетного значения и  $d = 1,21$ , а параметры  $D(z)$  остались прежними. Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = D(z)W_0(z) = \frac{z-0,2}{z-0,8} \cdot \frac{0,42}{z-1,21}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$z^2 - 1,59z + 0,464 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что замкнутая система стала неустойчивой, так как не выполняется третье из условий (14.93). Такой же вывод получится, если например,  $d = 1,201$ . Таким образом, из-за нарушения условия грубости малое изменение параметра (в данном случае  $T_1$ ) привело к существенному изменению поведения системы.

Следует отметить, что даже при идеальной компенсации (что, конечно, практически невозможно) сделанный ранее вывод об устойчивости замкнутой системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии (15.17) оказывается неверным. Это связано с тем, что передаточные функции получаются при нулевых начальных условиях, а последствия нарушения условий грубости проявляются при ненулевых начальных условиях. Чтобы убедиться в этом, составим разностные уравнения (см. § 14.3), соответствующие передаточным функциям (15.15) и (15.16):

$$y(i+1) = 1,2 y(i) + 0,4 u(i);$$

$$u(i) = 0,8 u(i-1) + x(i) - 1,2 x(i-1); \quad x(i) = g(i) - y(i).$$

Положим  $g(i) = 0$ ,  $y(0) = 0,5$ ,  $y(-1) = 0$ . Определяя при  $i = 0, 1, 2, \dots$  последовательно шаг за шагом значения  $x(0)$ ,  $u(0)$ ,  $y(1)$ ;  $x(1)$ ,  $u(1)$ ,  $y(2)$ ; ... можно установить, что  $y(i)$  неограниченно увеличивается, т. е. замкнутая система неустойчива.

Вместо формул (15.13) и (15.14) может применяться соотношение, связывающее частотные передаточные функции

$$D(j\lambda) = \frac{W(j\lambda)}{W_0(j\lambda)} \quad (15.18)$$

или соответствующие им логарифмические частотные характеристики

$$L_D(\lambda) = L(\lambda) - L_0(\lambda). \quad (15.19)$$

После определения  $L_D(j\lambda)$  подстановкой  $j\lambda = 2\omega T^{-1}$  можно получить передаточную функцию  $L_D(\omega)$ , а затем путем перехода от  $\omega$ -преобразования к  $z$ -преобразованию — передаточную функцию  $D(z)$ .

Сформулированные выше ограничения по отношению к выражению (15.18) имеют следующий вид. Необходимо, чтобы передаточная функция  $W(j\lambda)$  содержала в качестве своих нулей и полюсов по переменной  $j\lambda$  все те нули и полюса передаточной функции  $W_0(j\lambda)$ , которые лежат в правой полуплоскости. Кроме того, необходимо, чтобы получающаяся дробно-рациональная функция  $D(j\lambda)$  имела степень числителя не больше, чем степень знаменателя.

Поясним сказанное примером. Пусть в цифровой системе с экстраполятором нулевого порядка передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p^2}$$

соответствует интегрирующему звену второго порядка. Тогда без коррекции имеем

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^3} \right\} = \frac{KT^2(z+1)}{2(z-1)^2}.$$

Далее можно получить частотную передаточную функцию

$$W_0(j\lambda) = \frac{K \left( 1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{(j\lambda)^2}.$$

Соответствующая ей л. а. х.  $L$  построена на рис. 15.4. Если принять в качестве желаемой л. а. х.  $L_1$ , то желаемая частотная передаточная функция

$$W_1(j\lambda) = \frac{K(1 + j\lambda T_2) \left( 1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{(j\lambda)^2}. \quad (15.20)$$

Она совпадает с передаточной функцией 14.110, если положить  $\tau = T_2$ .

Дискретная частотная передаточная функция требуемого корректирующего звена последовательного типа

$$D(j\lambda) = \frac{W_1(j\lambda)}{W_0(j\lambda)} = 1 + j\lambda T_2. \quad (15.21)$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$D(z) = \frac{\left( 1 + \frac{2T_2}{T} \right) z + \left( 1 - \frac{2T_2}{T} \right)}{z+1}. \quad (15.22)$$

Последнее выражение определяет неустойчивую программу, так как полюс передаточной функции  $z_1 = -1$  соответствует границе устойчивости третьего типа и нарушаются условия гурови.

Заметим, что получившаяся частотная передаточная функция корректирующего устройства (15.21) не может быть реализована, вообще говоря, и в непрерывном варианте. Эта функция соответствует бесконечному подъему усиления при росте частоты до бесконечности. При реализации в дискретном варианте эта функция приводит к неустойчивой программе ЦВМ.

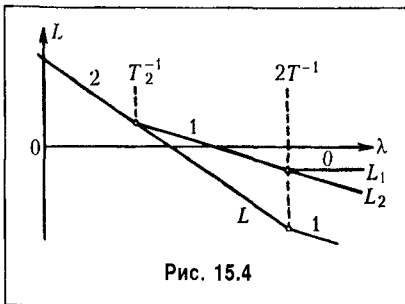


Рис. 15.4

Для исключения этого явления примем желаемую л. а. х.  $L_2$  в другом виде (рис. 15.4). Желаемая передаточная функция

$$W_2(j\lambda) = \frac{K(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)}. \quad (15.23)$$

Передаточная функция корректирующего устройства в этом случае имеет вид

$$D(j\lambda) = \frac{W_2(j\lambda)}{W_0(j\lambda)} = \frac{1+j\lambda T_2}{1+j\lambda\frac{T}{2}}. \quad (15.24)$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2T_2}{T}\right)z + 1 - \frac{2T_2}{T}}{2z}. \quad (15.25)$$

Этой передаточной функции соответствует устойчивая программа ЦВМ, так как условия грубости не нарушаются.

Для рассмотренного примера произведем числовой расчет. Пусть по условиям точности  $K = 100 \text{ с}^{-2}$ , а показатель колебательности  $M = 1,5$ . Дальнейший расчет произведем в соответствии с формулами § 12.6. Базовая частота л. а. х.

$$\lambda_0 = \sqrt{K} = \sqrt{100} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Требуемое значение постоянной времени равно

$$T_2 = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,173 \text{ с}.$$

Допустимое значение суммы малых постоянных времени для передаточной функции (15.23) равно периоду дискретности:

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T \leq \frac{1}{\lambda_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{10} \frac{\sqrt{1,5(1,5-1)}}{1,5+1} = 0,0346 \text{ с}.$$

Примем период дискретности  $T = 0,0346 \text{ с}$ . Передаточная функция ЦВМ (15.25) имеет вид

$$D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}\right)z + 1 - \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}}{2z} = 5,5(1 - 0,82z^{-1}).$$

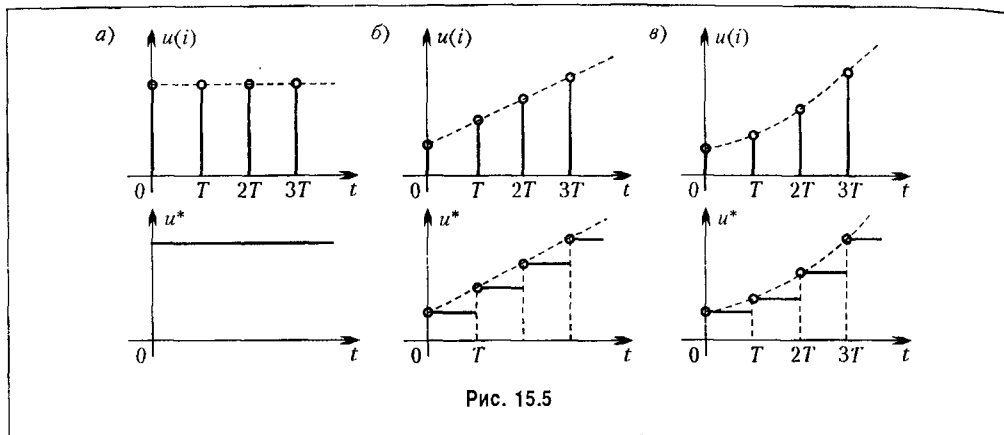


Рис. 15.5

С целью повышения точности ЦВМ может быть использована для повышения порядка астатизма системы или реализации комбинированного управления.

Повышение порядка астатизма, как отмечалось в § 9.1, применяется для устранения установившейся ошибки от задающего воздействия в различных типовых режимах: в неподвижном состоянии, при движении с постоянной скоростью, при движении с постоянным ускорением и т. д. Оно достигается введением в систему интегрирующих или изодромных устройств. Передаточные функции  $D(z)$  для их дискретных аналогов приведены в табл. 15.1.

В непрерывных системах астатизму  $r$ -го порядка соответствует наличие сомножителя  $p^r$  в передаточной функции разомкнутой системы  $W(p)$ , а в дискретных – наличие сомножителя  $(z - 1)^r$  в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$ , так как каждому корню  $p = 0$  соответствует корень  $z = e^{pT} = 1$ . Поэтому повышение порядка астатизма цифровой системы может быть достигнуто за счет как непрерывных, так и дискретных интеграторов.

Принципиальная особенность дискретного интегратора состоит в том, что на его выходе образуется не непрерывный сигнал, а последовательность  $u(i)$ , что показано на рис. 15.5. Формирующее устройство при  $\gamma = 1$  сохраняет значение  $u(i)$  в течение периода дискретности  $T$  и образует сигнал  $u^*$ . Если окажется, что  $u(i)$  в установившемся режиме изменяется (рис. 15.5, б и рис. 15.5, в), то сигнал  $u^*$  будет ступенчатым (разрывным). Поэтому следует ожидать, что ошибка системы между моментами замыкания  $t = iT$  будет иметь пульсации.

Исследуем вначале возможность появления пульсаций исходя из физических соображений.

Пусть имеем статическую непрерывную часть системы и  $D(z) = 1$ . Тогда в режиме неподвижного состояния (см. § 8.2) будет существовать постоянная статическая ошибка от задающего воздействия, а  $u(i)$  и  $u^*$  будет изменяться так, как показано на рис. 15.5, а. Сигнал  $u^*$  непрерывный и появление пульсаций исключается. Для устранения ошибки можно использовать как непрерывный, так и дискретный интеграторы. В любом из этих случаев  $u(i)$  и  $u^*$  будут такими же по форме, как на рис. 15.5, а, но при нулевой ошибке.



Для обеспечения режима движения с постоянной скоростью в системе, как показано в § 8.2, должен иметься по крайней мере один интегратор. Если он непрерывный, то существует постоянная скоростная ошибка, а  $u(i)$  и  $u^*$  изменяются так же, как на рис. 15.5, а, т.е. пульсации отсутствуют. Если же этот интегратор дискретный, то при постоянной ошибке сигнал  $u(i)$  в установившемся состоянии должен изменяться по линейному закону (рис. 15.5, б). При этом сигнал  $u^*$  имеет разрывный характер, что приводит к появлению пульсаций. Таким образом, система может воспроизводить линейно изменяющееся задающее воздействие без пульсаций (но с ошибкой) только при наличии в ней непрерывного интегратора. Для устранения скоростной ошибки можно использовать дополнительно как непрерывные, так и дискретные интеграторы.

Рассуждая аналогично нетрудно убедиться, что для обеспечения движения с постоянным ускорением без пульсаций в системе должно иметься не менее двух непрерывных интеграторов. При наличии одного непрерывного и одного дискретного интеграторов сигнал  $u^*$  будет изменяться так, как показано на рис. 15.5, в, а при наличии двух дискретных интеграторов — как на рис. 15.5, г.

Для исследования возможности появления пульсаций можно использовать также формулу (14.102). Из нее с учетом выражения (14.67) получим

$$x_{\text{уст}}(\varepsilon) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[ G(z, \varepsilon) - \frac{W(z, \varepsilon)}{1+W(z)} G(z) \right]. \quad (15.26)$$

Если окажется, что  $x_{\text{уст}}(\varepsilon)$  не зависит от  $\varepsilon$ , то пульсации отсутствуют.

В качестве примера рассмотрим систему, передаточная функция непрерывной части которой

$$W_0(p) = \frac{K}{T_1 p + 1},$$

при наличии дискретного аналога интегрирующего звена с передаточной функцией

$$D(z) = \frac{T}{z-1}.$$

По формулам (14.60) и (14.62) находим:

$$W_0(z, \varepsilon) = K \frac{z-d-(z-1)d^\varepsilon}{z-d}, \quad W_0(z) = K \frac{1-d}{z-d}, \quad d = e^{-\frac{T}{T_1}}.$$

Передаточные функции разомкнутой системы (15.10) и (15.9) имеют вид

$$W(z, \varepsilon) = D(z)W_0(z, \varepsilon) = KT \frac{z-d-(z-1)d^\varepsilon}{(z-1)(z-d)},$$

$$W(z) = D(z)W_0(z) = KT \frac{1-d}{(z-1)(z-d)}.$$

В режиме неподвижного состояния задающее воздействие  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$ . Его изображение

$$G(z, \varepsilon) = G(z) = \frac{g_0}{z-1}.$$

По формуле (15.26) находим установившуюся ошибку системы

$$x_{\text{уст}}(\varepsilon) = \lim_{z \rightarrow 1} g_0 \frac{(z-1) [z-d-KT(1-d^\varepsilon)]}{(z-d)(z-1)+KT(1-d)} = 0.$$

Таким образом, при введении дискретного интегратора статическая ошибка полностью устраняется, что соответствует сделанному ранее выводу.

В режиме движения с постоянной скоростью, т. е. при  $g(t) = Vt$ , имеем

$$G(z, \varepsilon) = \frac{VTz}{(z-1)^2} [1 + \varepsilon(z-1)], \quad G(z) = \frac{VTz}{(z-1)^2}.$$

Аналогично предыдущему получаем:

$$x_{\text{уст}}(\varepsilon) = \frac{V}{K} \left[ 1 - KT \left( \frac{1-d^\varepsilon}{1-d} - \varepsilon \right) \right].$$

Скоростная ошибка зависит от  $\varepsilon$ , что (как и ожидалось) свидетельствует о наличии пульсаций между моментами замыкания  $t = iT$ . В моменты времени  $t = iT$  она совпадает со скоростной ошибкой системы при наличии одного непрерывного интегратора:  $x_{\text{ск}} = V/K$ . На рис. 15.6 это показано для случая  $T/T_1 = 0,5$ ,  $KT = 5$ .

В цифровых системах возможно использование комбинированного управления по задающему или возмущающему воздействиям. При выполнении заданных условий по точности комбинированное управление позволяет снизить требования к основному каналу.

Комбинированное управление особенно удобно применять в тех случаях, когда задающее воздействие вычисляется в управляющей ЦВМ. В этом случае на ЦВМ может быть также возложена задача вычисления производных этого воздействия, что

позволяет просто реализовать схемы, аналогичные рассмотренным в § 9.2. Подобное положение возникает, например, при слежении телескопов за планетами, при управлении почисляемым координатам и т. н.

Структурная схема системы комбинированного управления для случая использования дополнительного канала с передаточной функцией  $E(z)$  по задающему воздействию изображена на рис. 15.7.

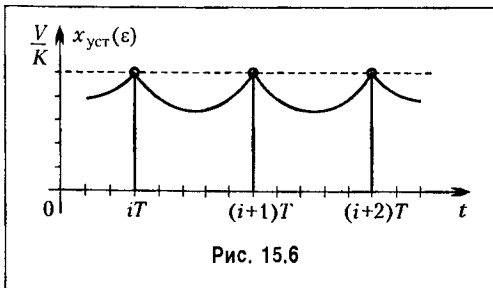


Рис. 15.6

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом дополнительного канала

$$\Phi_{\text{з}}(z) = \frac{W_0(z)[D(z) + E(z)]}{1 + D(z)W_0(z)} = \frac{W(z) \left[ 1 + \frac{E(z)}{D(z)} \right]}{1 + W(z)} = \frac{W_{\text{з}}(z)}{1 + W_{\text{з}}(z)}, \quad (15.27)$$

где  $W(z) = D(z)W_0(z)$  – передаточная функция разомкнутой системы;  $W_{\text{з}}(z)$  – эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы.

Эквивалентная передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{\text{ош}}(z) = 1 - \Phi_{\text{з}}(z) = \frac{1 - E(z)W_0(z)}{1 + W(z)}. \quad (15.28)$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{з}}(z) = \frac{\Phi_{\text{з}}(z)}{1 - \Phi_{\text{з}}(z)} = \frac{W_0(z)[D(z) + E(z)]}{1 - E(z)W_0(z)}. \quad (15.29)$$

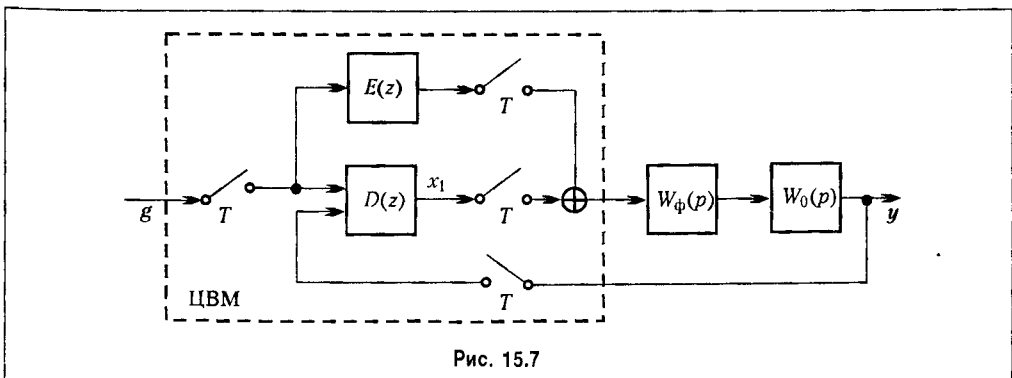
Из формулы (15.28), если положить  $\Phi_{\text{ош}}(z) = 0$ , можно получить условие полной инвариантности

$$E(z) = \frac{1}{W_0(z)} = \frac{E_1(z)}{E_2(z)}. \quad (15.30)$$

Для большинства реальных систем степень числителя  $W_0(z)$  оказывается меньше степени знаменателя на единицу. Поэтому степень полинома  $E_1(z)$  будет на единицу больше степени полинома  $E_2(z)$  и формула (15.30) может быть приведена к виду

$$E(z) = cz + \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k}}. \quad (15.31)$$

Слагаемое  $cz = ce^{pT}$  означает, что при формировании сигнала по каналу с передаточной функцией  $E(z)$  необходимо использовать упрежденное на один такт значение



задающего воздействия. Это связано с необходимостью применения прямых разностей, которые в дискретном плане должны здесь заменить процесс дифференцирования (см. § 14.2). При этом возможны следующие ситуации.

1. Если ЦВМ вычисляет значение задающего воздействия по некоторым заложенным в нее данным и использует при этом прогнозирование (например, при вычислении текущих координат небесных тел, спутников, ракет и др.), то вычисление будущего значения интересующей величины может быть легко сделано со сдвигом на практически любое число тактов. В этом случае реализация формулы (15.31) в принципе возможна. Однако практические трудности в реализации слишком сложных алгоритмов и ограничения в элементах не дают возможности получить полную инвариантность.

2. Если ЦВМ вычисляет задающее воздействие не по принципу прогнозирования, а в результате обработки поступающей текущей информации, то точная реализация формулы (15.31) оказывается невозможной. Тогда приходится ограничиться приближенной реализацией формулы (15.30) либо вводить в прямой канал дополнительное запаздывание на один такт. В первом случае условие полной инвариантности (15.30) нарушается, во втором — вводится постоянное временное запаздывание на один такт в обработку задающего воздействия, что также нарушает условие инвариантности.

Таким образом, при использовании комбинированного управления приходится ориентироваться не на полную инвариантность, а на некоторое, во многих случаях весьма существенное, повышение точности.

Поскольку точность систем управления определяется низкочастотной частью л. а. х., а низкочастотная часть л. а. х. дискретных систем практически сливается с л. а. х. непрерывной части системы, то расчет дискретных систем комбинированного управления осуществляется аналогично непрерывному случаю [9].

Важнейшим следствием использования комбинированного управления является возможность снижения требований к ЦВМ в части ограничения периода дискретности. Это связано с понижением требований к каналу управления по отклонению при введении дополнительного канала с передаточной функцией  $E(z)$ .

### § 15.3. О синтезе систем управления с ЦВМ

Синтез систем управления с ЦВМ наиболее просто производить на основе той методики, которая была изложена в § 12.6 для непрерывных систем. Покажем, как можно перенести ее на дискретные системы управления.

Как и в случае непрерывных систем, будем определять качество переходного процесса устойчивых дискретных систем, точнее их запас устойчивости, по показателю колебательности, соответствующему максимуму амплитудной частотной характеристики замкнутой системы:

$$M = |\Phi(j\lambda)|_{\max} = \left| \frac{W(j\lambda)}{1 + W(j\lambda)} \right|_{\max}. \quad (15.32)$$

Соотношение (15.32) полностью аналогично соответствующему соотношению для непрерывных систем. Поэтому получение требуемого показателя колебательности может быть обеспечено выполнением условия для л. а. х. разомкнутой системы подобно тому, как это было сделано в § 12.6 для непрерывных систем.

Для упрощения выкладок ограничимся рассмотрением систем с астатизмом не выше второго порядка при наличии двух непрерывных интеграторов, хотя методика остается применимой и в случае более высокого порядка астатизма. Пусть передаточная функция непрерывной части разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + \tau_m p)}{p^2(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \dots (1 + T_n p)}. \quad (15.33)$$

При построении л. а. х. следящей системы с учетом ЦВМ введем следующие предположения.

1. Величина, обратная периоду дискретности  $T$ , больше половины частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$  л. а. х. непрерывной части системы, т. е.  $\omega_{\text{ср}} T < 2$ . При расчете следящих систем с ЦВМ это неравенство приходится выполнять практически во всех случаях в связи с требованиями по устойчивости и запасу устойчивости.

2. Все постоянные времени  $T_1, \dots, T_n$  можно разделить на две группы. К первой группе  $T_1, \dots, T_q$  отнесем те из них, которым соответствуют сопрягающие частоты, меньшие частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$  (большие постоянные времени). Ко второй группе  $T_{q+1}, \dots, T_n$  отнесем те постоянные времени, которым соответствуют сопрягающие частоты большие, чем частота среза  $\omega_{\text{ср}}$  (малые постоянные времени), причем для каждой постоянной времени второй группы должно выполняться неравенство  $T_i < T/2$ .

3. Постоянным временем  $\tau_1, \dots, \tau_m$  соответствуют сопрягающие частоты меньше, чем частота среза. Это не относится к тем постоянным времени числителя передаточной функции разомкнутой непрерывной части, которые были введены для компенсации некоторых ее полюсов и поэтому после сокращения соответствующих множителей не вошли в окончательное выражение (15.33).

4. Переход оси нуля децибел асимптотической л. а. х. непрерывной части происходит при отрицательном наклоне 20 дБ/дек.

**Л. а. х. системы с ЦВМ в области низких частот.** Рассмотрим построение л. а. х. для (15.33) в области низких частот, т. е. левее частоты среза. Передаточная функция непрерывной части для этой области может быть представлена в виде

$$W_0(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p) \dots (1 + \tau_m p)}{p^2(1 + T_1 p) \dots (1 + T_n p)}. \quad (15.34)$$

Очевидно, что вследствие условия 4 имеем равенство  $m = q + 1$ .

Разложим (15.34) на простые дроби:

$$W_0(p) = \frac{K}{p^2} + \frac{KT_0}{p} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + T_i p}, \quad (15.35)$$

где  $N_i$  — коэффициенты разложения,  $KT_0 = K_{\Omega}$  представляет собой условную добротность по скорости, а

$$T_0 = \sum_{k=1}^m \tau_k - \sum_{i=1}^q T_i. \quad (15.36)$$

На основании (14.60) дискретная передаточная функция, соответствующая (15.34), будет

$$W(z) = \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{KT_0T}{z-1} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i(1-d_i)}{z-d_i}, \quad (15.37)$$

где

$$d_i = e^{-\frac{T}{T_i}}.$$

Перейдем к дискретной частотной передаточной функции посредством использования  $\omega$ -преобразования (14.90) и подстановки (14.99). В результате получим

$$W(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[ \frac{K}{(j\lambda)^2} + \frac{KT_0}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + j\lambda \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}} \right], \quad (15.38)$$

где абсолютная псевдочастота

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (15.39)$$

Ранее было сделано допущение, что  $T_i > T/2$ . Поэтому можно считать

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{T}{2T_i}} \approx 2 \frac{T_i}{T}.$$

Тогда окончательно

$$W(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[ \frac{K}{(j\lambda)^2} + \frac{KT_0}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^q \frac{N_i}{1 + j\lambda T_i} \right].$$

Сравнение последнего выражения с (15.35) показывает, что в низкочастотной области частотная передаточная функция системы с ЦВМ может быть получена из передаточной функции непрерывной части подстановкой  $p = j\lambda$  и умножением на дополнительный множитель  $(1 - j\lambda T/2)$ . Псевдочастота  $\lambda$  в этой области практически совпадает с частотой входного воздействия  $\omega$ , что вытекает из (15.39). Так как было принято, что  $2/T > \omega_{cp}$ , то влияние дополнительного множителя  $(1 - j\lambda T/2)$  при построении асимптотической л. а. х. можно не учитывать. Поэтому в низкочастотной области асимптотическая л. а. х. системы с ЦВМ практически сливается с л. а. х. непрерывной части, причем можно положить  $\lambda = \omega$ . Это дает большие удобства в формировании низкочастотной части л. а. х. проектируемой системы и позволяет полностью использовать ту методику, которая была изложена ранее для непрерывных систем.

**Л. а. х. системы с ЦВМ в области высоких частот.** В соответствии с принятыми условиями передаточная функция непрерывной части для этой области может быть представлена в виде

$$W_b(p) = \frac{\omega_{cp}}{p(1+T_{q+1}p) \dots (1+T_n p)}, \quad (15.41)$$

где частота среза асимптотической л. а. х.

$$\omega_{cp} = \frac{K\tau_1\tau_2 \dots \tau_m}{T_1 T_2 \dots T_q}.$$

Разложим (15.41) на простые дроби:

$$W_b(p) = \frac{\omega_{cp}}{p} - \omega_{cp} \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1+T_i p}. \quad (15.42)$$

Аналогично предыдущему найдем частотную передаточную функцию переходом к псевдочастоте:

$$W_b(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[ \frac{\omega_{cp}}{j\lambda} - \omega_{cp} \sum_{i=q+1}^n \frac{N_i}{1 + j\lambda \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_i}} \right]. \quad (15.43)$$

Так как  $T_i < T/2$ , то можно положить

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_i} \approx 1.$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=q+1}^n N_i = \sum_{i=q+1}^n T_i = T_\Sigma,$$

получаем в результате

$$W_b(j\lambda) = \frac{\omega_{cp} \left[ 1 + j\lambda \left( \frac{T}{2} - T_\Sigma \right) \right] \left( 1 - j\lambda \frac{T}{2} \right)}{j\lambda \left( 1 + j\lambda \frac{T}{2} \right)}. \quad (15.44)$$

Это выражение и может использоваться для построения л. а. х., причем модуль (15.44)

$$|W_b(j\lambda)| = \frac{\omega_{cp} \sqrt{1 + \lambda^2 \left( \frac{T}{2} - T_\Sigma \right)^2}}{\lambda}. \quad (15.45)$$

Начало л. а. х. в высокочастотной области сливается с концом л. а. х. низкочастотной области в точке  $\lambda = \omega_{\text{ср}}$ .

При построении фазовой характеристики следует учитывать появление множителя  $(1 - j\lambda T/2)$ , соответствующего неминимально-фазовому звену. Для построения фазовой характеристики можно воспользоваться результирующим выражением для дискретной частотной передаточной функции, которое на основании изложенного будет

$$W(j\lambda) = \frac{K(1 + j\lambda\tau_1) \dots (1 + j\lambda\tau_m) \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma}\right)\right]}{(j\lambda)^2 (1 + j\lambda T_1) \dots (1 + j\lambda T_q) \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}. \quad (15.46)$$

Результирующий фазовый сдвиг

$$\psi = -180^\circ + \sum_{j=1}^m \arctg \lambda \tau_j - \sum_{i=1}^q \arctg \lambda T_i - 2 \arctg \lambda \frac{T}{2} + \arctg \lambda \left(\frac{T}{2} - T_{\Sigma}\right). \quad (15.47)$$

В районе частоты среза при  $\lambda < 2/T$  можно считать с достаточной точностью

$$\psi \cong -180^\circ + \sum_{j=1}^m \arctg \lambda \tau_j - \sum_{i=1}^q \arctg \lambda T_i - \arctg \lambda \left(\frac{T}{2} + T_{\Sigma}\right). \quad (15.48)$$

В результате при построении высокочастотного «хвоста» приходится учитывать сумму малых постоянных времени  $T_{\Sigma}$  и дополнительный множитель  $(1 - j\lambda T/2)$ . Последний приводит к подъему л. а. х. на высоких частотах и дает дополнительный фазовый сдвиг в отрицательную сторону, равный  $\arctg \lambda T/2$ . Методика расчета следящих систем с ЦВМ и здесь совпадает с методикой расчета непрерывных систем, изложенной выше. Только формула (12.83) должна быть переписана в виде

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=q+1}^n T_i \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (15.49)$$

Аналогичным образом для «несимметричных» л. а. х. типа 1–2–3... (рис. 12.15) систем с астатизмом первого порядка можно показать, что вид л. а. х. в низкочастотной области сохраняется, а требуемый запас устойчивости получится при

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=1}^n T_i \leq \frac{1}{K} \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2} \quad (M \leq 1,3). \quad (15.50)$$

Последнее выражение является достаточным, если имеется хотя бы одна постоянная времени, по величине большая чем  $T/2$ . Если для всех постоянных времени выполняется условие  $T_i < T/2$ , то для предотвращения захода высокочастотного хвоста л. а. х. в запретную зону (рис. 12.13) необходимо выполнить дополнительное условие

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{K} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1}. \quad (15.51)$$



При построении л. а. х. для систем с ЦВМ можно не вводить специального обозначения для псевдочастоты  $\lambda$ , а употреблять обычное обозначение  $\omega$ , считая, что в области рабочих частот (левее частоты среза) это есть частота входного воздействия, а в высокочастотной области она переходит в псевдочастоту.

Сделаем теперь два замечания. Первое относится к случаю наличия в передаточной функции непрерывной части (15.33) сомножителей, соответствующих колебательным звеньям с передаточной функцией

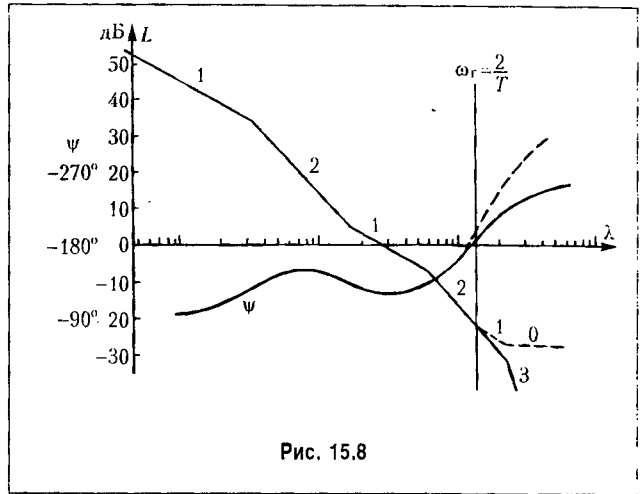


Рис. 15.8

$$W_q(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{q}p + \frac{p^2}{q^2}}$$

Если выполняется условие  $qT < 2$ , то дискретная частотная передаточная функция для подобного сомножителя совпадает с частотной передаточной функцией непрерывного звена и она может быть получена подстановкой  $p = j\lambda$  и умножением на  $(1 - j\lambda T/2)$ . При  $qT > 2$  построение л. а. х. несколько усложняется вследствие явления транспонирования частот. Однако и здесь не возникает никаких принципиальных трудностей [9].

Второе замечание касается последней части условия 2, которое было сформулировано выше при построении л. а. х. для передаточной функции (15.33). Если для всех постоянных времени  $T_{q-1} \dots T_n$  условие  $T_i < 0,5T$  не выполняется, то построение л. а. х. делается следующим образом. Строится л. а. х., соответствующая передаточной функции непрерывной части (рис. 15.8). Затем проводится вертикальная линия, соответствующая граничной частоте  $\omega_c = 2/T$ . Л. а. х., расположенная левее граничной частоты, соответствует низкочастотной части, и она может быть принята в качестве л. а. х. дискретной системы, так как в этой области абсолютная псевдочастота совпадает с обычной частотой:  $\lambda \approx \omega$ .

Далее находится формула, соответствующая высокочастотной части л. а. х. непрерывной системы, аналогичная формуле (15.41). Пусть, например, пересечение граничной частоты происходит при наклоне асимптоты  $-40$  дБ/дек так, как это показано на рис. 15.8. Тогда уравнение высокочастотной части будет

$$W_n(p) = \frac{k}{p^2(1+T_1p)\dots(1+T_np)} \quad (15.52)$$

где  $\omega_b = \sqrt{k}$  — частота пересечения оси частот асимптотой, имеющей отрицательный наклон 40 дБ/дек.

Раскладывая выражение (15.52) на простые дроби, переходя к  $W_b(z)$ , а затем к  $W_b(j\lambda)$ , получим аналогично формуле (15.44) для высокочастотной части

$$W_b(j\lambda) = \frac{k \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right) - (j\lambda)^2 \left(\frac{T}{2} T_\Sigma - T_\sigma^2\right)\right]}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}. \quad (15.53)$$

где

$$T_\Sigma = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

$$T_\sigma^2 = T_1^2 + \dots + T_n^2 + T_1 T_2 + T_1 T_3 + \dots + T_1 T_n + T_2 T_3 + \dots$$

Если выполняется условие  $T_\sigma^2 \ll \frac{T}{2} T_\Sigma$ , то формула (15.53) упрощается:

$$W_b(j\lambda) = \frac{k \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) (1 - j\lambda T_\Sigma)}{(j\lambda)^2}. \quad (15.54)$$

В соответствии с выражением для  $W_n(j\lambda)$  строится высокочастотная часть л. а. х., которая показана на рис. 15.8 пунктиром.

Построение фазовой характеристики делается аналогично изложенному выше.

Таким же способом строится высокочастотная часть л. а. х. при пересечении граничной частоты асимптотой  $-60$  дБ/дек,  $-80$  дБ/дек и т. д. Во всех случаях формирование высокочастотной части делается по сумме малых постоянных времени, которым соответствуют сопрягающие частоты, находящиеся правее граничной частоты  $\omega_r = 2/T$ .

**Пр и м е р.** Произведем расчет следящей системы с астатизмом второго порядка при следующих исходных данных:

- 1) максимальная входная скорость  $\Omega_{\max} = 10$  град/с;
- 2) максимальное входное ускорение  $\epsilon_{\max} = 5$  град/с<sup>2</sup>;
- 3) максимальная допустимая ошибка  $\theta_{\max} = 2$  угл. мин.;
- 4) непрерывная часть содержит постоянные времени  $T_1 = 0,01$  с,  $T_2 = 0,002$  с и  $T_3 = 0,001$  с;
- 5) допустимый показатель колебательности  $M = 1,5$  и  $M = 1,2$ .

Требуется определить параметры непрерывной части системы и допустимый период дискретности  $T$ .

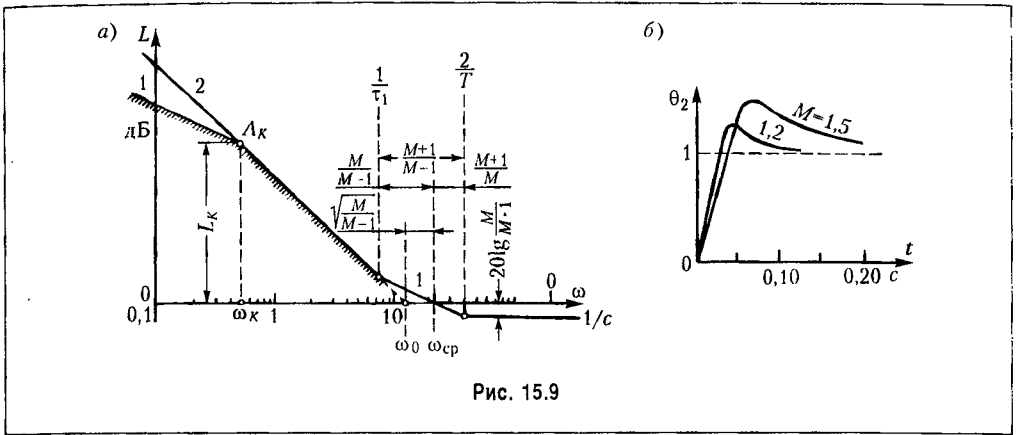


Рис. 15.9

Решим задачу вначале для случая  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$  и  $M = 1,5$ . Передаточная функция непрерывной части разомкнутой системы, структурно устойчивой в замкнутом состоянии, должна иметь вид

$$W_0(p) = \frac{K(1 + \tau_1 p)}{p^2}$$

где  $\tau_1$  — постоянная времени, вносимая корректирующим звеном дифференцирующего типа.

Так как высокочастотная часть после частоты среза в рассматриваемом идеализованном случае представляет собой прямую с наклоном  $-20$  дБ/дек, то вся частотная передаточная функция системы с ЦВМ может быть получена подстановкой  $p = j\omega$ , где  $\omega$  — псевдочастота, и введем дополнительный множитель  $(1 - j\omega T/2)$ :

$$W_0(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_1)\left(1 - j\omega\frac{T}{2}\right)}{(j\omega)^2}$$

Л. а. х. для нее построена на рис. 15.9, а.

На этом же рисунке построена запретная зона для л. а. х. на основании условий по точности и в соответствии с рис. 12.8. Базовая частота (12.63)

$$\omega_{0к} = \sqrt{\frac{\epsilon_{\max}}{\theta_{\max}}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 60}{2}} = 12,2 \text{ c}^{-1}$$

Требуемое значение общего коэффициента передачи разомкнутой системы при совпадении первой асимптоты л. а. х. с границей запретной зоны (рис. 12.21)

$$K = \omega_0^2 = \omega_{0к}^2 = 150 \text{ c}^{-2}$$

В соответствии с расчетом, проделанным выше, для л. а. х., изображенной на рис. 12.11 и рис. 14.11, получаем требуемое значение постоянной времени

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{12,2} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,142 \text{ с.}$$

Частота среза л. а. х.

$$\omega_{cp} = K\tau_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 12,2 \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 21,2 \text{ с}^{-1}.$$

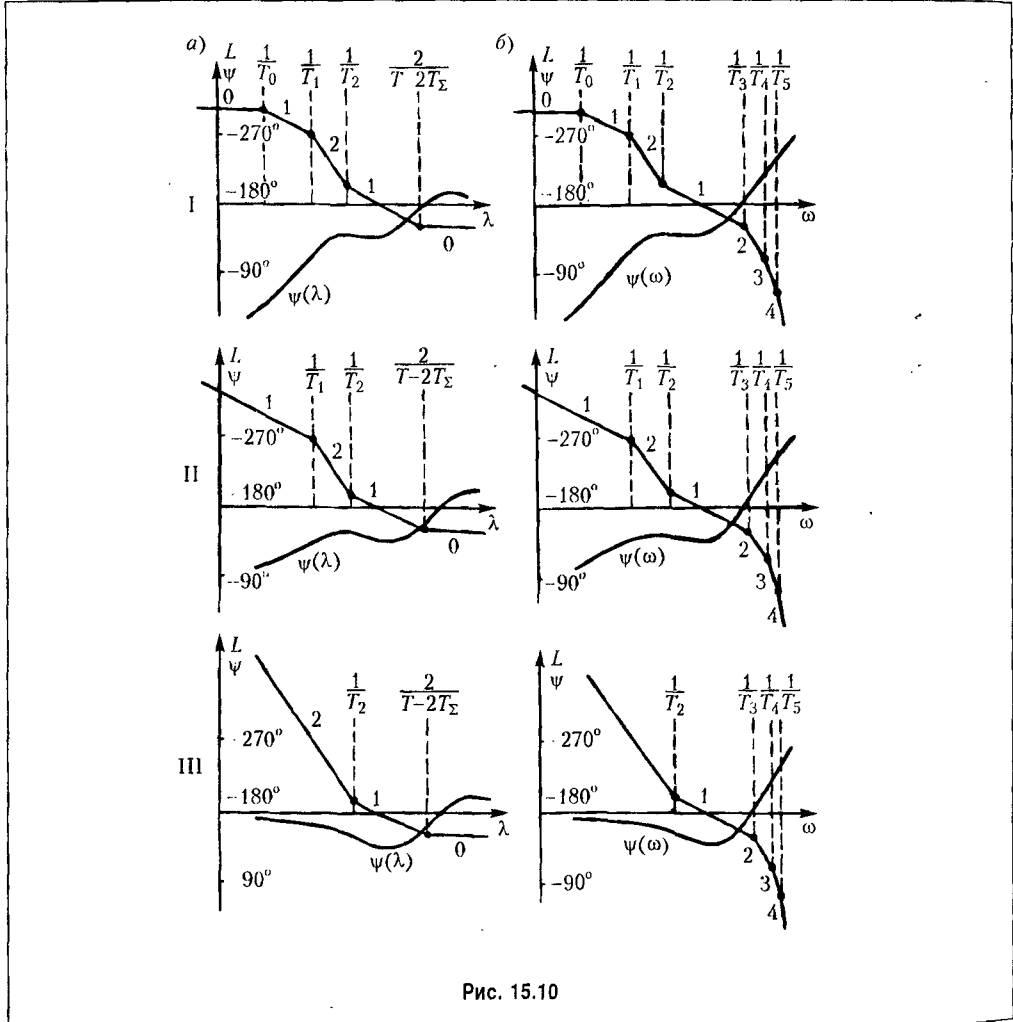


Рис. 15.10

В соответствии с формулой (15.41) получаем далее

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1} = \frac{1}{21,2} \frac{1,5}{1,5+1} = 0,0284 \text{ с},$$

откуда допустимый период дискретности  $T \leq 0,0568 \text{ с}$ . В случае учета постоянных времени  $T_1, T_2$  и  $T_3$  имеем

$$\frac{T}{2} \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1} - (T_1 + T_2 + T_3) = 0,0284 - 0,013 = 0,0154 \text{ с}$$

и допустимый период дискретности  $T \leq 0,0308 \text{ с}$ .

Аналогичные расчеты для случая  $M = 1,2$  дают  $\tau_1 = 0,2 \text{ с}$ ,  $\omega_{\text{ср}} = 30 \text{ с}^{-1}$  и  $T \leq 0,0368 \text{ с}$  (при  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ ) и  $T \leq 0,026 \text{ с}$  (при  $T_1 \neq 0$ ,  $T_2 \neq 0$  и  $T_3 \neq 0$ ).

На рис. 15.9, б для иллюстрации построены переходные процессы при воздействии на входе в виде единичной ступенчатой функции. Переходные процессы построены посредством разложения в ряд Лорана  $z$ -преобразования выходной величины.

Таким образом, синтез следящих систем методом л. а. х. на основе частотных критериев качества (по точности и запасу устойчивости) оказывается применимым и для систем, содержащих в своем контуре ЦВМ. При этом все расчеты сохраняют свою простоту и наглядность.

Для расчета удобно применять абсолютную псевдочастоту, которая в области низких частот (левее частоты среза) совпадает с обычной угловой частотой  $\omega$ . При этом в области высоких частот л. а. х. приходится строить по сумме малых постоянных времени. Влияние квантования по времени, вносимое ЦВМ, легко учитывается при построении только л. а. х., без необходимости рассмотрения фазовой характеристики.

Для облегчения процесса синтеза можно ввести понятие типовых л. а. х. систем управления с ЦВМ. На рис. 15.10, а приведены типовые л. а. х. для статической системы и астатической первого и второго порядков без учета временного запаздывания. На рис. 15.10, б изображены соответствующие им л. а. х. непрерывной части, а в табл. 15.2 приведены передаточные функции.

**Синтез непрерывных корректирующих средств.** В импульсных системах (глава 14) для коррекции используются непрерывные корректирующие средства. Наиболее просто производится расчет корректирующих средств последовательного типа. В этом случае дискретная передаточная функция разомкнутой системы должна равняться желаемой передаточной функции

$$W_{\text{ж}}(z) = W_{\text{пк}} W_0(z). \quad (15.55)$$

Здесь  $W_{\text{пк}} W_0(z)$  представляет собой дискретную передаточную функцию последовательно включенных корректирующего звена с передаточной функцией  $W_{\text{пк}}(p)$  и непрерывной части с передаточной функцией  $W_0(p)$ . Напомним, что  $W_{\text{пк}} W_0(z) \neq W_{\text{пк}}(z) W_0(z)$ . Поэтому расчет последовательных корректирующих средств в дискретных системах не является столь простой задачей, как в непрерывных системах.

Таблица 15.2. Типовые передаточные функции

Тип л. а. х.	Степень астатизма	Дискретная частотная передаточная функция	Передаточная функция непрерывной части
I	0	$\frac{K(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)}{(1+j\lambda T_0)(1+j\lambda T_1)\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)} \times \left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_{\Sigma}\right)\right]$	$K(1+T_2p) \times \{(1+T_0p)(1+T_1p) \times (1+T_3p)\dots(1+T_ip)\dots\}^{-1}$
II	1	$\frac{K(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)}{j\lambda(1+j\lambda T_1)\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)} \times \left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_{\Sigma}\right)\right]$	$K(1+T_2p) \times \{p(1+T_1p)(1+T_3p) \times (1+T_4p)\dots(1+T_ip)\dots\}^{-1}$
III	2	$\frac{K(1+j\lambda T_2)\left(1-j\lambda\frac{T}{2}\right)}{(j\lambda)^2\left(1+j\lambda\frac{T}{2}\right)} \times \left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_{\Sigma}\right)\right]$	$K(1+T_2p) \times \{p^2(1+T_3p)(1+T_4p)\dots (1+T_ip)\dots\}^{-1}$
$T_{\Sigma} = \sum_{i=3}^n T_i = T_3 + T_4 + \dots + T_n$			

Однако выше было показано, что л. а. х. дискретных систем, построенные в функции абсолютной псевдочастоты  $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$  для частот  $\lambda < 2/T$  практически сливаются с л. а. х. непрерывной части. Поэтому можно воспользоваться известными приемами расчета последовательных корректирующих средств, если в качестве желаемых л. а. х. использовать характеристики, соответствующие передаточным функциям непрерывной части.

Требуемый вид последовательного корректирующего звена определяется в этом случае по виду л. а. х., полученной вычитанием ординат л. а. х. нескорректированной системы из ординат желаемой (типовой) л. а. х.

Рассмотрим иллюстративный пример [9].

**П р и м е р.** Произведем расчет системы с астатизмом первого порядка по следующим исходным данным: максимальная скорость слежения  $\Omega_{\max} = 20$  град/с; максималь-

ное ускорение слежения  $\epsilon_{\max} = 10 \text{ град/с}^2$ ; максимальная допустимая ошибка  $\theta_{\max} = 4 \text{ угл. мин.}$ ; допустимый показатель колебательности  $M = 1,5$ ; период дискретности  $T = 0,02 \text{ с}$ ; передаточная функция непрерывной части имеет вид

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_I p)(1+T_{II} p)(1+T_{III} p)}$$

где  $T_I = 0,05 \text{ с}$ ,  $T_{II} = 0,003 \text{ с}$ ,  $T_{III} = 0,001 \text{ с}$ .

Определим вид и параметры последовательного корректирующего звена, которое должно быть включено в непрерывную часть системы, а также необходимое значение коэффициента передачи разомкнутой системы  $K$ .

Левее частоты среза л. а. х. дискретной системы совпадает с л. а. х. ее непрерывной части, а псевдочастота  $\lambda$  — с реальной частотой  $\omega$ . Поэтому формирование желаемой л. а. х. левее частоты среза произведем обычными приемами.

Построим запретную зону для л. а. х. из условий точности (рис. 15.11). Контрольная частота

$$\omega_k = \frac{\epsilon_{\max}}{\Omega_{\max}} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ с}^{-1}$$

Модуль передаточной функции разомкнутой системы при  $\omega = \omega_k$

$$|W_0(j\omega_k)| = \frac{\Omega_{\max}^2}{\epsilon_{\max} \theta_{\max}} = \frac{20^2 \cdot 60}{10 \cdot 4} = 600 = 55,6 \text{ дБ.}$$

По этим данным на рис. 15.11 построены контрольная точка  $A_k$  и запретная зона, сформированная из прямых с наклоном  $-20$  и  $-40$  дБ/дек (наклоны 1 и 2).

Желаемая л. а. х. в низкочастотной области формируется так, чтобы она проходила выше точки  $A_k$  на 3 дБ. Она состоит из отрезков прямых с наклонами  $1-2-1$ . В низкочастотной области частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{K(1+j\omega\tau_1)}{j\omega(1+j\omega T_I)}$$

Параметры желаемой л. а. х. и передаточной функции разомкнутой системы в низкочастотной области определим в следующем порядке.

Базовая частота л. а. х.

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{2} \frac{\epsilon_{\max}}{\theta_{\max}}} = \sqrt{1,41 \frac{10 \cdot 60}{4}} = 14,5 \text{ с}^{-1}$$

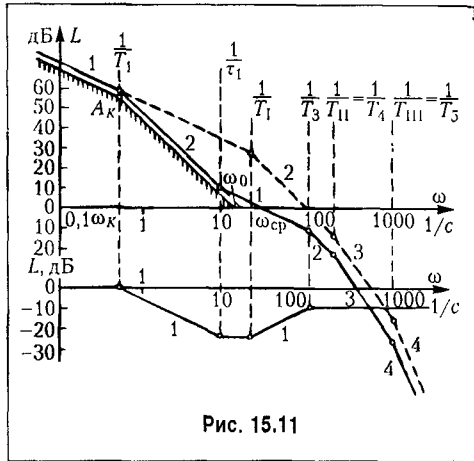


Рис. 15.11

Постоянная времени корректирующего звена, формирующая первый взлом л. а. х.,

$$T_1 = \frac{1}{\omega_k} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с.}$$

Для получения заданного показателя колебательности должно выдерживаться условие (формула 12.73)

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}.$$

Отсюда получаем значение второй постоянной времени корректирующего звена:

$$\tau_1 = \frac{1}{14,5} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,12 \text{ с.}$$

Далее определяем необходимое значение коэффициента передачи разомкнутой системы:

$$K = \sqrt{2} \frac{\Omega_{\max}}{\theta_{\max}} = 1,41 \frac{20 \cdot 60}{4} = 420 \text{ с}^{-1}.$$

и частоту среза л. а. х.:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{K \tau_1}{T_1} = \frac{420 \cdot 0,12}{2} = 25,2 \text{ с}^{-1}.$$

Для обеспечения заданного показателя колебательности в высокочастотной области должно удовлетворяться неравенство (15.49):

$$\frac{T}{2} + \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1},$$

где  $\sum_{i=3}^n T_i = T_{\Sigma}$  — сумма постоянных времени меньших, чем  $T/2$ .

Отсюда получаем допустимое значение для суммы постоянных времени:

$$T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \frac{M}{M+1} - \frac{T}{2} = \frac{1}{25,2} \frac{1,5}{1,5+1} - \frac{0,02}{2} = 0,014 \text{ с.}$$

На рис. 15.11 пунктиром построена л. а. х. непрерывной части нескорректированной системы, сплошной линией — желаемая (скорректированная) л. а. х. непрерывной части. В низкочастотной области (до частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$ ) она совпадает с л. а. х. дискретной системы (см. рис. 15.10, а; на рис. 15.11 л. а. х. дискретной системы не изображена). В области высоких частот вид желаемой л. а. х. непрерывной части, вообще говоря,



может быть произвольным. Важно только, чтобы сумма постоянных времени  $T_{\Sigma}$  не превышала допустимого значения.

Наиболее простые корректирующие звенья получаются в тех случаях, когда сопрягающие частоты л. а. х. нескорректированной системы и желаемой л. а. х. совпадают между собой. В рассматриваемом примере

$$T_{\Sigma} = T_3 + T_4 + T_5.$$

Целесообразно принять

$$T_4 = T_{II} = 0,003 \text{ с}, \quad T_5 + T_{III} = 0,001 \text{ с}.$$

Тогда

$$T_3 = T_{\Sigma} - T_4 - T_5 = 0,014 - 0,003 - 0,001 = 0,01 \text{ с}.$$

Вычитая из ординат желаемой л. а. х. ординаты характеристики нескорректированной системы, получим искомую л. а. х. последовательного корректирующего звена. Она соответствует интегро-дифференцирующему звену с передаточной функцией

$$W_{\text{нк}}(p) = \frac{(1 + T_{2\text{к}}p)(1 + T_{3\text{к}}p)}{(1 + T_{1\text{к}}p)(1 + T_{4\text{к}}p)},$$

где

$$\begin{aligned} T_{1\text{к}} = T_1 = 2 \text{ с}, & & T_{2\text{к}} = \tau_1 = 0,12 \text{ с}, \\ T_{3\text{к}} = T_1 = 0,05 \text{ с}, & & T_{4\text{к}} = T_3 = 0,01 \text{ с}. \end{aligned}$$

Из приведенного примера видно, что при синтезе непрерывных последовательных корректирующих устройств метод логарифмических частотных характеристик не теряет своей простоты и наглядности. Более детально цифровые системы рассмотрены в работах [8, 39, 48].

# РАЗДЕЛ IV

## НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

### Глава 16

## СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 16.1. Общие понятия

Нелинейной системой автоматического управления называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Перечислим виды нелинейных звеньев:

- 1) звено релейного типа (рис. 1.12);
- 2) звено с кусочно-линейной характеристикой (рис. 1.10, *д* и др.);
- 3) звено с криволинейной характеристикой любого очертания;
- 4) звено, уравнение которого содержит произведение переменных или их производных и другие их комбинации;
- 5) нелинейный импульсный элемент;
- 6) логическое звено;
- 7) звенья, описываемые кусочно-линейными дифференциальными уравнениями, в том числе переменной структуры.

Различают статические и динамические нелинейности. Первые описываются нелинейными алгебраическими уравнениями, а вторые представляются в виде нелинейных дифференциальных уравнений.

Общий метод составления уравнений для нелинейных систем состоит в следующем. Сначала по правилам § 3.1 производится линеаризация уравнений всех звеньев системы, для которых это допустимо, кроме существенно нелинейных звеньев (чаще всего одного-двух). Затем составляются уравнения этих последних звеньев со всеми допустимыми упрощениями их характеристик.

В результате получается система линейных уравнений, к которым добавляется одно-два (иногда более) нелинейных. В соответствии с этим обобщенную структурную схему любой нелинейной системы в случае одного нелинейного звена можно представить в виде рис. 16.1, *а*, где линейная часть может иметь структуру любой сложности (с обратными связями и т. п., как, например, на рис. 16.1, *б* или *в*). В случае двух нелиней-

ных звеньев могут быть разные комбинации, в зависимости от того, в какие цепи системы они входят (см., например, рис. 16.2).

Часто при исследовании нелинейных систем удается выделить нелинейность так, чтобы она описывалась непосредственно зависимостью между выходной и входной величинами

$$x_2 = F(x_1), \quad (16.1)$$

которая может иметь любую форму (релейного типа, кусочно-линейного или криволинейного). Но иногда, как будет показано в следующих параграфах, не удастся этого сделать и придется исследовать нелинейные дифференциальные зависимости вида

$$x_2 = F(x_1, px_1), \quad x_2 = F_1(x_1) + F_2(px_2); \quad (16.2)$$

$$F(px_2, x_2) = c_1 x_1, \quad F_1(p^2 x_2, px_2) + F_2(x_2) = c_1 x_1 \text{ и т. п.} \quad (16.3)$$

Встречаются и более сложные случаи, когда обе величины (входная и выходная) оказываются под знаком нелинейной функции раздельно:

$$F_2(px_2, x_2) = F_1(x_1),$$

$$F_3(px_2) + F_2(x_2) = F_1(x_1), \quad (16.4)$$

или же вместе:

$$F_2(px_2, x_2, x_1) = 0,$$

$$F_2(x_2) + F_1(x_2, x_1) = 0. \quad (16.5)$$

Разделим все нелинейные системы на два больших класса.

1. К первому классу отнесем такие, в которых уравнение нелинейного звена приводится к любому из видов (16.1)–(16.3), т. е. когда под знаком нелинейной функции стоит только входная величина (и ее производные) либо только выходная величина (и ее производные). При этом имеется в виду, что схема системы в целом

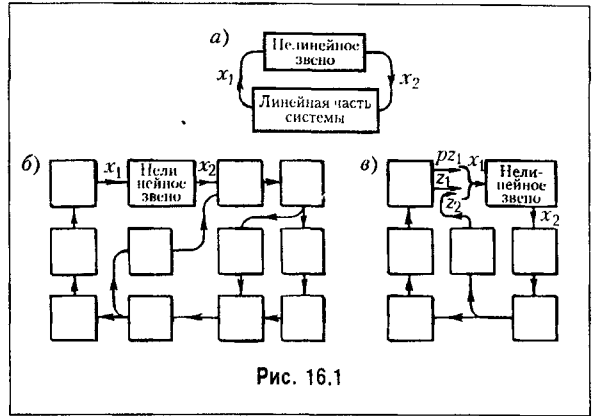


Рис. 16.1

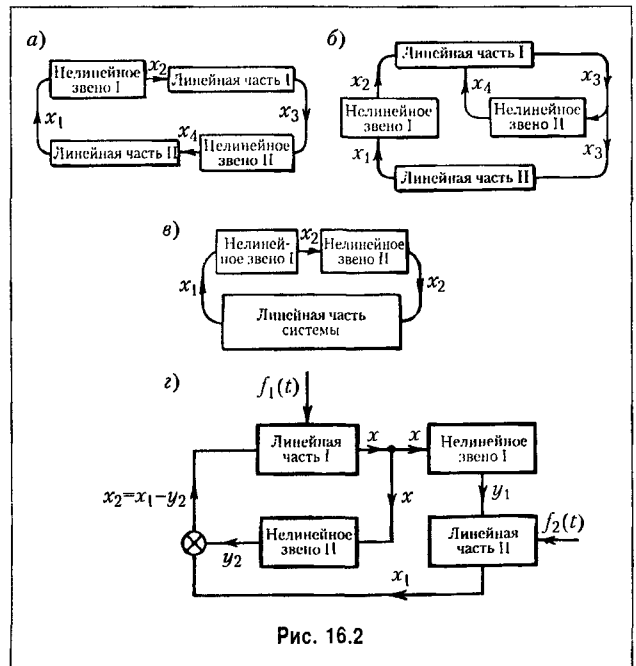


Рис. 16.2

может быть приведена к виду рис. 16.1 с одним нелинейным звеном. К этому классу сводится также случай с двумя нелинейными звеньями, указанный на рис. 16.2, *в*, так как там они могут быть объединены в одно нелинейное звено. Сюда же относятся и случай, показанный на рис. 16.2, *г*, где имеются два нелинейных звена (если их уравнения содержат под знаком нелинейности только входную величину  $x$ , например, вида (16.1) или (16.2)).

2. Вторым классом нелинейных систем включает системы с любым числом нелинейных звеньев, когда под знаки нелинейных функций входят различные переменные, связанные между собой *линейной* передаточной функцией. Так будет в случае системы с одним нелинейным звеном вида (16.4) или (16.5), а также в системе с двумя нелинейными звеньями (рис. 16.2, *а* или *з*), если в первом из них под знаком нелинейности входит входная величина, а во втором – выходная. Система же рис. 16.2, *б* относится ко второму классу, если под знаки нелинейностей входят в обоих звеньях либо только входные, либо только выходные величины нелинейных звеньев.

Ко второму классу нелинейных систем относятся также системы с двумя и более нелинейностями, в уравнениях которых под знаки нелинейных функций входят разные переменные, связанные между собой *нелинейными* дифференциальными уравнениями (т. е. связанные через линейные части и нелинейные звенья). К таким системам относятся, например, система на рис. 16.2, *а*, если в ее уравнениях под знаками нелинейных функций падаются входные (или выходные) величины обоих нелинейных звеньев, и многие другие системы.

Системы с логическими устройствами относятся обычно к нелинейным системам второго класса.

Заметим, что во всех случаях, когда под знак нелинейной функции входит какая-либо линейная комбинация разных переменных, их следует обозначать одной буквой, а данную линейную комбинацию учесть при составлении общего уравнения линейной части системы. Это бывает, например, в тех случаях, когда на вход нелинейного звена подаются производные или включается обратная связь. Так, если для рис. 16.1, *б*

$$x_2 = F(z_1 + k_1 p z_1 - k_2 z_2),$$

то, обозначая

$$z_1 + k_1 p z_1 - k_2 z_2 = x_1, \quad (16.6)$$

можно привести уравнение нелинейного звена к виду (16.1).

Из всех уравнений линейных звеньев, а также добавочных линейных выражений типа (16.6), получаемых при выделении нелинейности, составляется общее *уравнение линейной части* системы

$$Q(p)x_1 = -R(p)x_2, \quad (16.7)$$

где  $Q(p)$  и  $R(p)$  — операторные многочлены, или *передаточная функция линейной части* системы

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (16.8)$$

Составление уравнений будет проиллюстрировано ниже на примерах.

Процессы в нелинейных системах автоматического управления имеют целый ряд весьма существенных особенностей, которые не встречаются в линейных системах.

Благодаря этим существенным особенностям даже вопрос об устойчивости системы становится здесь более сложным. Кроме структуры системы и значений ее параметров для устойчивости того или иного установившегося процесса в отличие от линейных систем имеют значение также и начальные условия. Возможен новый вид установившегося процесса — автоколебания, т. е. устойчивые собственные колебания с постоянной амплитудой при отсутствии внешних колебательных воздействий. Когда в системе возникают автоколебания, то установившееся состояние, соответствующее постоянному значению управляемой величины, становится невозможным.

Следовательно, в общем случае на плоскости параметров системы могут быть не два вида областей (устойчивости и неустойчивости), как в линейных системах, а больше: 1) область устойчивости равновесного состояния с постоянным значением управляемой величины; 2) область автоколебаний; 3) область неустойчивости системы; 4) области, соответствующие другим, более сложным случаям.

Если процессы в системе имеют вид, указанный на рис. 16.3, а, то равновесное состояние ( $x = 0$ ) неустойчиво. В том случае, когда оба указанных на рис. 16.3, а колебания в переходных процессах стремятся к колебаниям с одной и той же амплитудой и с одной и той же частотой, система будет обладать автоколебаниями с амплитудой  $a$ .

На рис. 16.3, б и в показаны случаи, когда равновесное состояние ( $x = 0$ ) системы устойчиво «в малом», т. е. при начальных условиях, не выводящих отклонения в переходном процессе за определенную величину  $a$ , и неустойчиво «в большом», т. е. при начальных условиях, выводящих отклонение в переходном процессе за пределы величины  $a$ . Здесь граничным процессом является неустойчивый периодический процесс собственного движения системы с амплитудой  $a$  (переходные процессы расходятся от него в обе стороны).

На рис. 16.3, г показан случай трех возможных установившихся состояний: 1) равновесное состояние ( $x = 0$ ); 2) колебания с постоянной амплитудой  $a_1$ ; 3) колебания с постоянной амплитудой  $a_2$ . При этом колебания с амплитудой  $a_1$  неустойчивы. В результате система будет устойчива «в малом» по отношению к равновесному состоянию  $x = 0$ , а «в большом» система будет обладать автоколебаниями с амплитудой  $a_2$ .

**Пример.** Для иллюстрации особенностей нелинейной системы исследуем переходный процесс и автоколебания в релейной системе стабилизации температуры. Для этого составим сначала уравнения управляемого объекта и управляющего устройства.

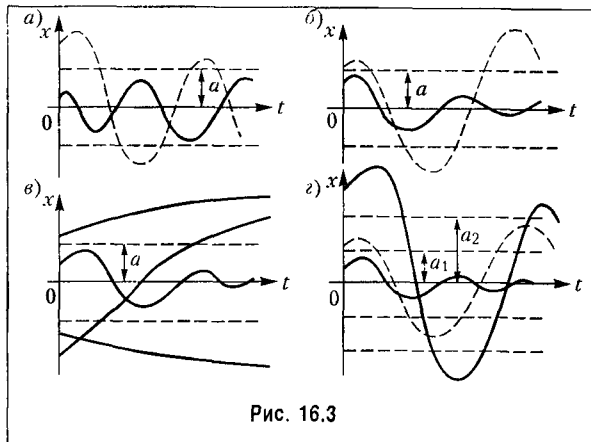


Рис. 16.3

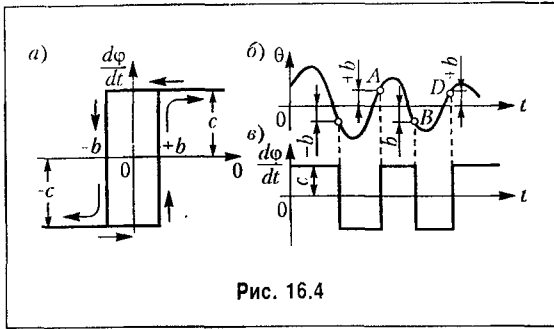


Рис. 16.4

Пусть объект представляет собой некоторую камеру. Учитывая инерционность процесса нагрева и охлаждения, запишем его уравнение в виде

$$T_1 \frac{d\theta}{dt} + \theta = -k_1 \phi + f(t), \quad (16.9)$$

где  $\theta$  — отклонение температуры;  $\phi$  — отклонение управляющего органа,  $f(t)$  — внешние возмущения.

При отклонении температуры  $\theta$  появляется ток в диагонали моста того или иного направления и замыкается соответствующий контакт реле, включающего постоянное напряжение в ту или иную обмотку возбуждения электродвигателя. Приняв во внимание некоторое отставание в этом процессе включения, получим релейную характеристику. Далее, считая, что ток  $I$  пропорционален отклонению температуры объекта  $\theta$ , а скорость  $\frac{d\phi}{dt}$  отклонения управляющего органа пропорциональна напряжению на обмотках возбуждения электродвигателя, можно в данном случае выходной величиной для указанной релейной характеристики считать прямо  $\frac{d\phi}{dt}$ , а входной —  $\theta$  (рис. 16.4, а).

Следовательно, уравнение управляющего устройства запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = +c \text{ при } \theta > +b, \\ \frac{d\phi}{dt} = -c \text{ при } \theta < -b, \end{aligned} \right\} \text{ когда } \frac{d\theta}{dt} > 0; \quad (16.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = +c \text{ при } \theta > -b, \\ \frac{d\phi}{dt} = -c \text{ при } \theta < -b, \end{aligned} \right\} \text{ когда } \frac{d\theta}{dt} < 0. \quad (16.11)$$

Рассмотрим два произвольных участка переходного процесса (при  $f(t) = 0$ ) в данной системе (участки  $AB$  и  $BD$  на рис. 16.4, б).

На участке  $AB$  уравнение управляющего устройства согласно рис. 16.4, в будет  $\frac{d\phi}{dt} = +c$ . Дифференцируя (16.9) по  $t$  и подставляя туда  $+c$ , получаем при  $f(t) = 0$  следующее уравнение системы на участке  $AB$ :

$$T_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = -k_1 c, \quad (16.12)$$

а на участке  $BD$

$$T_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = +k_1 c. \quad (16.13)$$

Решение уравнения (16.12) будет

$$\frac{d\theta}{dt} = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - k_1 c, \quad (16.14)$$

откуда получаем

$$\theta = -T_1 C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - k_1 c t + C_2. \quad (16.15)$$

Условимся для простоты отсчитывать время  $t$  от начала участка  $AB$  (рис. 16.5, а). Тогда начальные условия будут

$$\theta = +b, \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}_A \quad \text{при } t = 0,$$

где  $\dot{\theta}_A$  пока неизвестно. Используя начальные условия, находим произвольные постоянные для уравнения (16.15):

$$C_1 = \dot{\theta}_A + k_1 c, \quad C_2 = b + T_1 C_1. \quad (16.16)$$

Аналогично для участка  $BD$  согласно (16.13), отсчитывая время  $t$  тоже от начала этого участка (рис. 16.5, б), получим решение

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= C'_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + k_1 c, \\ \theta &= -T_1 C'_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + k_1 c t + C'_2, \\ C'_1 &= \dot{\theta}_B - k_1 c, \quad C'_2 = -b + T_1 C'_1. \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

Все остальные участки кривой переходного процесса будут определяться, очевидно, такими же решениями, но только с другими значениями величин  $C_1, C_2, \dot{\theta}_A, C'_1, C'_2, \dot{\theta}_B$ . Заметим, что величины  $\dot{\theta}_A$  и  $\dot{\theta}_B$ , необходимые для определения произвольных постоянных, находятся как значения  $\dot{\theta}$  в конце предшествующих им участков. Поэтому, если

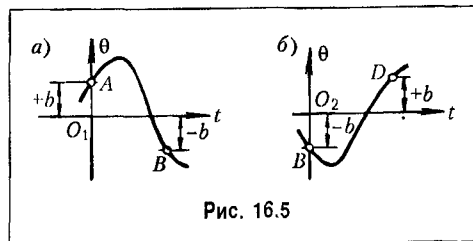


Рис. 16.5

будет задана величина  $\dot{\theta}$  в начальной точке первого участка процесса, то все вышесказанное решение для переходного процесса в системе станет определенным. Такой метод решения задачи называется *методом припасовывания*.

Выясним теперь, возможны ли в данной системе автоколебания, т. е. устойчивое периодическое решение. Для этого нужно, очевидно, чтобы в конце  $D$  одного периода колебаний (рис. 16.4, б) получились точно такие же значения  $\theta$  и  $\dot{\theta}$ , какие были в начале его  $A$ . Легко заметить, что при этом оба полуцикла ( $AB$  и  $BD$ ) должны быть одинаковыми вследствие симметрии характеристики (рис. 16.4, а). Поэтому для определения автоколебаний достаточно рассмотреть только один участок  $AB$  и потребовать, чтобы

$$\dot{\theta}_B = -\dot{\theta}_A. \quad (16.18)$$

Обозначив период искомых автоколебаний через  $2T$ , а длительность участка  $AB$ , через  $T$ , из (16.14) найдем

$$\dot{\theta}_B = C_1 e^{-\frac{T}{T_1}} - k_1 c.$$

Подставляя сюда (16.18) и замечая, что из (16.16)  $\dot{\theta}_A = C_1 - k_1 c$ , получаем выражение

$$C_1(1 + e^{-\frac{T}{T_1}}) = 2k_1 c, \quad (16.19)$$

в котором содержатся две неизвестные:  $C_1$  и  $T$ . Величину  $T$  (длительность участка  $AB$ ) можно выразить из (16.15), так как известно, что в конце участка  $\theta = -b$ . Из (16.15) и (16.16) при этом находим

$$T_1 C_1 (1 - e^{-\frac{T}{T_1}}) - k_1 c T = -2b.$$

Подставив сюда значение  $C_1$  из (16.19), получим уравнение для определения полупериода автоколебаний:

$$\text{th} \frac{T}{2T_1} = \frac{T}{2T_1} - \frac{b}{k_1 c T_1}. \quad (16.20)$$

Это трансцендентное уравнение для  $T$  легко решается графически (рис. 16.6) пересечением двух кривых:

$$y_1 = \text{th} \frac{T}{2T_1} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{T}{2T_1} - \frac{b}{k_1 c T_1}.$$

Если найдено вещественное положительное значение для  $T$ , то это свидетельствует о наличии периодического решения в данной системе. Чтобы доказать, что

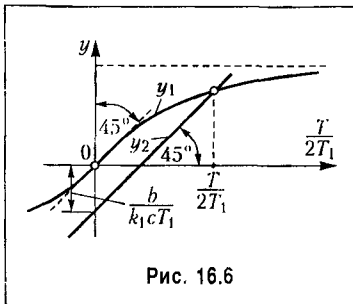


Рис. 16.6



это соответствует автоколебаниям, нужно исследовать их устойчивость, т. е. показать, что в переходном процессе система ведет себя, как изображено на рис. 16.3, а, но не так, как на рис. 16.3, б. Это будет показано ниже.

Амплитуда найденных автоколебаний определяется как  $\theta_{\max}$  на участке  $AB$  (рис. 16.5, а) путем исследования функции (16.15) на максимум обычным путем.

**Фазовое пространство.** Для наглядного представления о сложных нелинейных процессах управления часто прибегают к понятию фазового пространства, которое заключается в следующем. Дифференциальное уравнение замкнутой системы  $n$ -го порядка можно преобразовать к системе  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f, g), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, f, g), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, f, g) \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

с начальными условиями

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n = x_{n0} \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — переменные, являющиеся искомыми функциями времени, причем  $x_1$  может обозначать управляемую величину, а  $x_2, \dots, x_n$  — вспомогательные переменные;  $f$  и  $g$  — возмущающее и задающее воздействия.

Пусть, например, в уравнениях (16.21) будет  $n = 3$  (система третьего порядка). Переменные  $x_1, x_2, x_3$  здесь могут иметь любой физический смысл. Но условно их можно представить как прямоугольные координаты некоторой точки  $M$  (рис. 16.7, а).

В реальном процессе управления в каждый момент времени величины  $x_1, x_2, x_3$  имеют вполне определенные значения. Это соответствует вполне определенному положению точки  $M$  в пространстве (рис. 16.7, а). С течением времени в реальном процессе величины  $x_1, x_2, x_3$  определенным образом изменяются. Это соответствует перемещению точки  $M$  в пространстве по определенной траектории. Следовательно, траектория движения точки  $M$  может служить наглядной геометрической иллюстрацией поведения системы в процессе управления.

Точка  $M$  называется *изображающей точкой*, ее траектория называется *фазовой траекторией*, а пространство  $(x_1, x_2, x_3)$  называется *фазовым пространством*.

Так как производные по времени от координат точки представляют проекции ее скорости  $v$  на оси координат, то дифференциальные уравнения системы в форме (16.21) представляют собой выражения для проекций скорости  $v$  изображающей точки  $M$  (рис. 16.7, а) на оси координат. Следовательно, по значениям правых частей уравнений (16.21) в каждый момент времени можно судить о направлении движения изображающей точки  $M$ , а вместе с тем и о поведении соответствующей реальной системы.

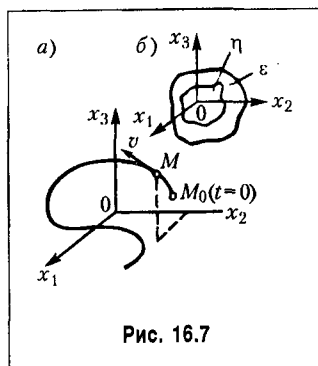


Рис. 16.7

Начальные условия  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  определяют координаты начальной точки фазовой траектории  $M_0$  (рис. 16.7, а).

Если переменных в уравнениях (16.21) будет всего две:  $x_1$  и  $x_2$  (система второго порядка), то изображающая точка будет двигаться не в пространстве, а на плоскости (*фазовая плоскость*).

Если переменных будет любое число  $n > 3$  (система  $n$ -го порядка), то фазовое пространство будет не трехмерным, а  $n$ -мерным.

Итак, фазовое пространство и фазовые траектории представляют собой лишь геометрический образ процессов, протекающих в системе. В этом геометрическом представлении участвуют координаты и исключено время. Фа-

зовая траектория сама по себе даст лишь качественное представление о характере поведения системы. Чтобы определить количественно положение изображающей точки (а значит, и состояние системы) в любой момент времени, нужно найти решение заданных дифференциальных уравнений (16.21) во времени.

Если уравнения (16.21) составлены в отклонениях от установившегося состояния, то последнее характеризуется значениями  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Следовательно, изображением установившегося состояния системы является начало координат фазового пространства.

Отсюда вытекает, что фазовые траектории устойчивой линейной системы будут асимптотически приближаться к началу координат при неограниченном увеличении времени. Фазовые траектории неустойчивой линейной системы будут неограниченно удаляться от начала координат.

Для нелинейной системы вследствие ряда особенностей процессов, отмечавшихся выше, фазовые траектории могут принимать самые разнообразные очертания. Если имеется асимптотическая устойчивость для определенного круга начальных условий, то все фазовые траектории, которые начинаются внутри определенной области  $\eta$ , окружающей начало координат фазового пространства (рис. 16.7, б), будут асимптотически приближаться к началу координат. Если устойчивость неасимптотическая, то фазовые траектории, начинающиеся внутри области  $\eta$  могут иметь любые очертания, но не будут выходить за пределы некоторой определенной области  $\epsilon$ , окружающей начало координат (рис. 16.7, б).

**Формулировка понятия устойчивости по Ляпунову.** Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области  $\epsilon$  (рис. 16.7, б) можно найти такую область  $\eta$ , что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области  $\epsilon$  при любом сколь угодно большом значении времени  $t$  (см. § 6.1).

В аналитической записи формулировка понятия устойчивости по Ляпунову будет следующей. Невозмущенное движение (установившийся процесс) будет устойчивым, если при заданных положительных сколь угодно малых числах  $\epsilon_i$  можно найти такие положительные числа  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), что при начальных условиях

$$|x_{i0}| < \eta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (16.22)$$

решение дифференциальных уравнений возмущенного движения (переходного процесса) удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

при любом сколь угодно большом  $t$ , начиная с некоторого  $t = T > 0$ .

Представим себе для этой аналитической записи геометрический образ в фазовом пространстве. Очевидно, что при ограничении начальных условий по каждой координате неравенствами (16.22) получается  $n$ -мерный параллелепипед со сторонами  $2\eta_i$ , внутри которого должна лежать начальная точка фазовой траектории  $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ . На фазовой плоскости ( $n = 2$ ) он обращается в прямоугольник. Аналогично и второе из написанных неравенств геометрически означает, что фазовые траектории не должны выходить из параллелепипеда со сторонами  $2\varepsilon_i$ .

В формулировке Ляпунова содержится требование сколь угодно малости указанных областей. Однако практически это определение, так же как и теоремы Ляпунова, которые будут приведены ниже, применяется и тогда, когда эти области имеют определенные конечные размеры.

**Фазовые траектории для обыкновенных линейных систем.** Пусть переходный процесс в некоторой системе описывается уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \quad (16.23)$$

Введем обозначение для скорости изменения отклонения управляемой величины

$y = \frac{dx}{dt}$ . Тогда уравнение системы (16.23) преобразуется к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -a_1 y - a_2 x, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

Исключим из уравнений (16.24) время  $t$ , разделив первое из них на второе (при  $x$  и  $y \neq 0$ ):

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{x}{y}. \quad (16.25)$$

Решение  $y = \varphi(x)$  этого дифференциального уравнения с одной произвольной постоянной определяет собой некоторое семейство так называемых интегральных кривых на фазовой плоскости  $(x, y)$ , каждая из которых соответствует одному определенному значению произвольной постоянной.

Вся совокупность интегральных кривых представит собой все возможные фазовые траектории, а значит, и все возможные виды переходного процесса в данной системе при любых начальных условиях.

Рассмотрим отдельно различные случаи. Уравнению (16.23) соответствуют корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2},$$

причем возможны шесть случаев:

- 1) корни чисто мнимые при  $a_1 = 0, a_2 > 0$  (колебательная граница устойчивости линейной системы);
- 2) корни комплексные и имеют отрицательные вещественные части при  $a_1^2 < 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$  (устойчивая линейная система);
- 3) корни комплексные и имеют положительные вещественные части при  $a_1^2 < 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$  (неустойчивая линейная система);
- 4) корни вещественные отрицательные при  $a_1^2 < 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$  (устойчивая линейная система);
- 5) корни вещественные положительные при  $a_1^2 < 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$  (неустойчивая линейная система);
- 6) корни вещественные и имеют разные знаки при  $a_2 < 0$  (неустойчивая линейная система); в частности, один из корней будет равен нулю при  $a_2 = 0$  (апериодическая граница устойчивости линейной системы).

**С л у ч а й 1.** В первом случае получаются, как известно, незатухающие колебания (рис. 16.8, а)

$$x = A \sin(\omega t + \beta), \quad y = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \beta), \quad \omega = \sqrt{a_2}, \quad (16.26)$$

с постоянной амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\beta$ , которые зависят от начальных условий. Для фазовой плоскости уравнения (16.26) представляют собой параметрические уравнения эллипса с полуосями  $A$  и  $\omega A$  (рис. 16.8, б). Уравнение эллипса

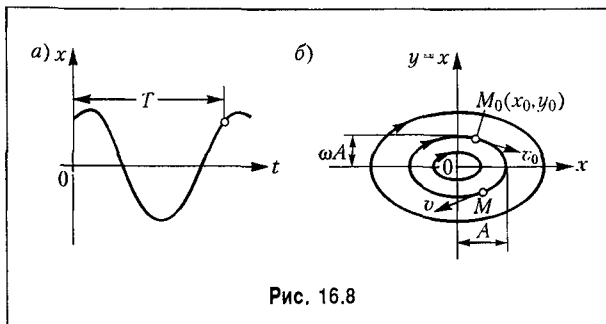


Рис. 16.8

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\omega A)^2} = 1$$

можно получить непосредственным решением дифференциального уравнения фазовых траекторий (16.25) при  $a_1 = 0$  и  $a_2 = \omega^2$ , причем  $A$  — произвольная постоянная интегрирования.

Итак, периодическим колебаниям системы (рис. 16.8, а) соответствует движение изображающей точки по замкнутой кривой (рис. 16.8, б).

**С л у ч а й 2.** В этом случае (комплексные корни с отрицательными вещественными частями), как известно, имеют место затухающие колебания (рис. 16.9, а)

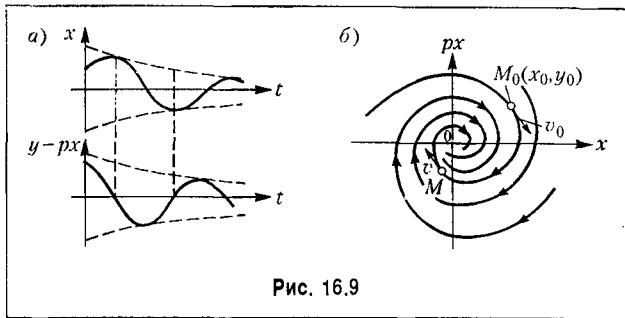


Рис. 16.9

$$x = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta), \quad y = \frac{dx}{dt} = \gamma A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta + \delta),$$

где

$$\alpha = \frac{a_1}{2}, \quad \omega = \sqrt{a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}, \quad \gamma = \sqrt{a_2}, \quad \delta = \arctg \frac{\alpha}{\omega},$$

а произвольные постоянные  $A$  и  $\beta$  определяются из начальных условий:

$$x = x_0, \quad y = y_0 = \dot{x}_0 \quad \text{при } t = 0.$$

Значения  $x$  и  $y$  не возвращаются за период колебания к прежним, а становятся меньше. Это даст на фазовой плоскости  $(x, y)$  кривую (рис. 16.9, б), которая за один оборот не возвращается в прежнюю точку  $M_0$ , а подходит ближе к началу координат.

Итак, затухающим колебаниям системы (рис. 16.9, а) отвечают фазовые траектории в виде спиралей, по которым изображающая точка приближается к началу координат (рис. 16.9, б).

**С л у ч а й 3.** Этот случай (комплексные корни с положительными вещественными частями) соответствует расходящимся колебаниям (рис. 16.10, а). Рассуждая аналогично предыдущему, получим всю совокупность возможных фазовых траекторий тоже в виде спиралей, но только изображающая точка будет двигаться по ним не к началу координат, а от него (рис. 16.10, б).

**С л у ч а й 4.** Этот случай (вещественные отрицательные корни) соответствует аperiodическому процессу

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

$$y = \frac{dx}{dt} = -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (16.27)$$

где

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

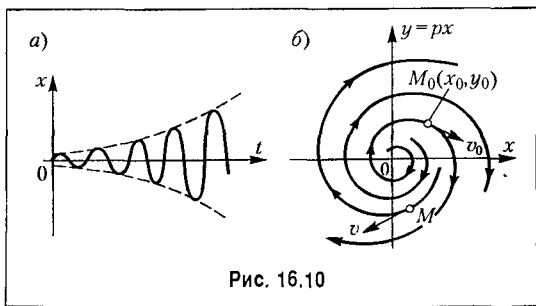


Рис. 16.10

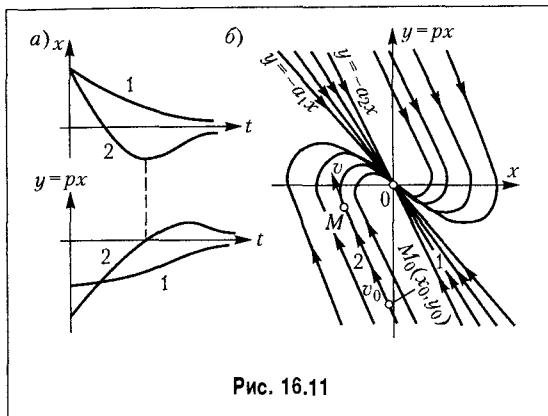


Рис. 16.11

На рис. 16.11, а показаны два возможных варианта (кривые 1 и 2) протекания такого процесса. Легко видеть, что на фазовой плоскости  $(x, y)$  это изобразится кривыми 1 и 2 соответственно (рис. 16.11, б), так как в первом варианте все время  $x > 0$  и  $y < 0$ , а во втором варианте знаки  $x$  и  $y$  меняются по одному разу. Границы областей 1 и 2 представляют собой прямые  $y = -\alpha_1 x$  и  $y = -\alpha_2 x$ , получающиеся из уравнений (16.27) соответственно при  $\alpha_2 = 0$  и при  $\alpha_1 = 0$  (обращение одного из корней в нуль).

В отличие от прежнего здесь все фазовые траектории вливаются непосредственно в начало координат  $O$  фазовой плоскости. Однако изображающая точка  $M$  не попадает в начало координат в конечное время, а приближается асимптотически.

Итак, затухающим апериодическим процессам в системе отвечают фазовые траектории, вливающиеся в начало координат.

**С л у ч а й 5.** Этот случай (вещественные положительные корни) соответствует также апериодическому процессу, определяемому теми же уравнениями (16.27), но при  $\alpha_1 < 0$  и  $\alpha_2 < 0$ . Аналогично предыдущему получаем кривые процесса и фазовые траектории, изображенные на рис. 16.12.

**С л у ч а й 6.** В этом случае (вещественные корни разных знаков) также имеет место апериодический процесс (16.27) (рис. 16.13, а), где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеют разные знаки, но картина фазовых траекторий здесь иная. Так как  $\alpha_2 < 0$ , то введем обозначение  $\alpha^2 = -\alpha_2$ , причем для простоты построений рассмотрим случай  $\alpha_1 = 0$ , что соответствует

согласно (16.23) уравнению системы  $\frac{dy}{dt} - \alpha^2 x = 0$  и согласно (16.25) — уравнению фазовых траекторий

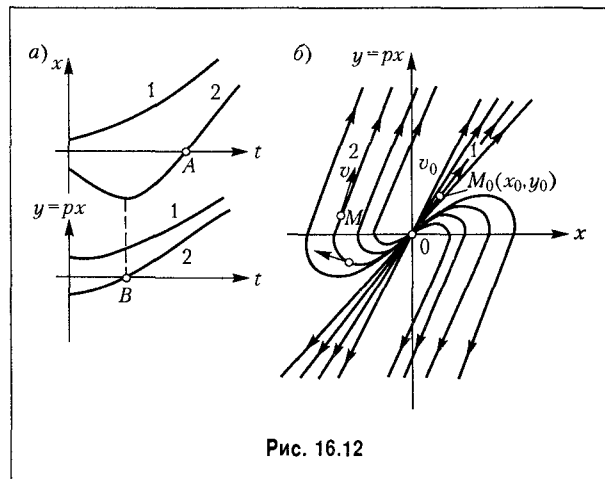


Рис. 16.12

$$\frac{dy}{dt} = \alpha^2 \frac{x}{y}. \quad (16.28)$$

Интегрирование последних аналогично случаю 1 дает

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{y^2}{(\alpha C)^2} = 1, \text{ т. е. семейство гипербол, изображенное на рис. 16.13, б.}$$

Направления движения изображающей точки  $M$  по фазовым траекториям, показанные на рис. 16.13, б, легко определяются в

каждой четверти плоскости по знаку  $dy/dx$  (16.28).

Аналогичная картина фазовых траекторий получится в данном случае и при  $a_1 \neq 0$ .

Итак, расходящимися аperiodическим процессам в системе отвечают фазовые траектории типа рис. 16.12, б или типа рис. 16.13, б, причем изображающая точка, двигаясь по ним, в конечном итоге удаляется от начала координат.

**Особые точки.** В точках, которые соответствуют установившемуся состоянию, получаем согласно (16.25) неопределенное выражение

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{0}{0},$$

т. е. неопределенное направление касательных к интегральным кривым (фазовым траекториям). Такие точки называются особыми точками, причем для них существует следующая классификация:

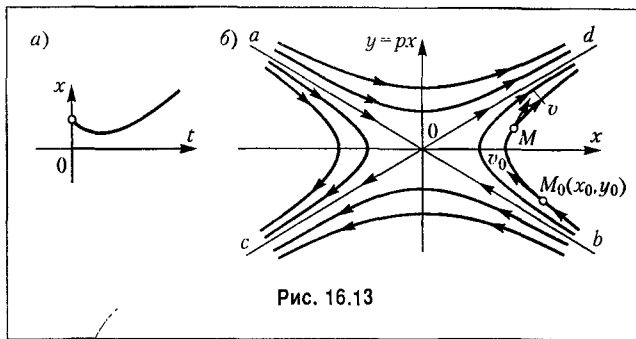
- особые точки типа точки  $O$  на рис. 16.8, б называются центрами,
- особые точки типа рис. 16.9, б называются устойчивыми фокусами,
- особые точки типа рис. 16.10, б называются неустойчивыми фокусами,
- особые точки типа рис. 16.11, б называются устойчивыми узлами,
- особые точки типа рис. 16.12, б называются неустойчивыми узлами,
- особые точки типа рис. 16.13, б называются седлами (седло всегда неустойчиво).

**Особые линии для нелинейных систем.** Реальные системы автоматического управления можно считать линейными чаще всего в предположении малости отклонений переменных от их значений в определенном установившемся состоянии.

За пределами указанной области вследствие значительного отклонения характеристик от линейных картина фазовых траекторий может сильно измениться и стать качественно иной.

В частности, если по линейной теории система оказывается неустойчивой и процесс начинает расходиться, то может оказаться, что из-за фактической нелинейности характеристик он не будет расходящимся неограниченно. Амплитуда расходящихся колебаний может увеличиваться только до определенного значения, а затем оставаться постоянной, т. е. неустойчивая линейная автоматическая система как бы превращается в устойчивую нелинейную автоколебательную систему (система «генерирует» устойчивые колебания определенной формы).

Картина фазовых траекторий для такой системы изображена на рис. 16.14, а. Здесь вблизи начала координат получаются спирали, как в неустойчивой линейной системе (рис. 16.10, б), но далее все они расходятся не до бесконечности, а приближаются



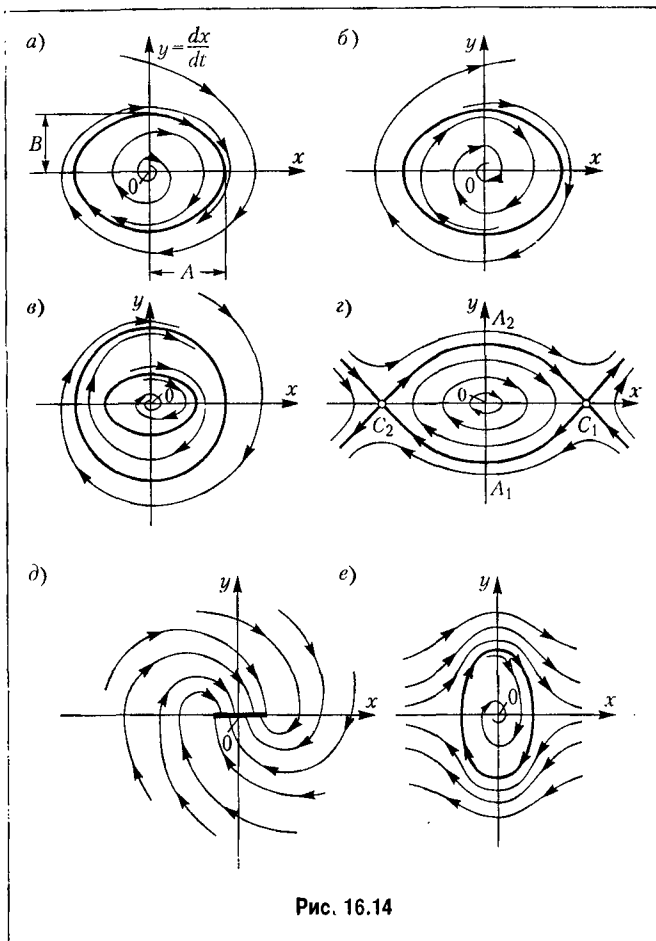


Рис. 16.14

устойчивости «в большом» (рис. 16.3, б) соответствует картина фазовых траекторий, изображенная на рис. 16.14, б. Граница начальных условий, до которой система устойчива, имеет чаще всего на фазовой плоскости вид неустойчивого предельного цикла, как на рис. 16.14, б, от которого в обе стороны удаляются спиралевидные фазовые траектории. Это — второй важный тип особых линий, определяющий устойчивость системы «в малом» и неустойчивость «в большом».

Заметим, что в этом случае может быть также еще более удаленный устойчивый предельный цикл (рис. 16.14, в), соответствующий автоколебаниям с большой амплитудой. Это соответствует процессам во времени, изображенным на рис. 16.3, г. Такие же принципиальные качественные изменения картины фазовых траекторий при достаточно больших отклонениях могут наблюдаться и в случаях аperiodических процессов (рис. 16.12, б и 16.13, б), включая превращения их в колебательные и наоборот. Например, картине процессов во времени, показанной на рис. 16.3, в, соответствует картина фазовых траекторий на рис. 16.14, е.

асимптотически к некоторому замкнутому контуру ограниченных размеров, как показано на рис. 16.14, а. К нему же приближаются и все спирали, находящиеся вне контура. Это соответствует картине процессов во времени, изображенной на рис. 16.3, а. Такого вида замкнутый контур, представляющий собой наиболее важный для теории тип особых линий на фазовой плоскости, называется устойчивым предельным циклом.

Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям системы. Размеры предельного цикла  $A$  и  $B$  (рис. 16.14, а) представляют амплитуды колебаний самой величины  $x$  и скорости ее изменения  $y = \frac{dx}{dt}$ . Для определения периода автоколебаний надо обратиться к решению уравнений во времени.

Случаю устойчивости системы «в малом» и неустойчивости «в большом»



Аналогично для системы, паходящейся согласно линейной теории па границе устойчивости (при чисто мнимых корнях), картина фазовых траекторий, изображенная на рис. 16.8, б, может иметь место лишь вблизи состояния установившегося режима  $O$ . При больших отклонениях, если линейность характеристик звеньев системы нарушается, картина фазовых траекторий будет другой. Один из возможных вариантов изменения фазовых траекторий при больших отклонениях в этом случае показан па рис. 16.14, з. Здесь, кроме особой точки  $O$  типа центра, появляются два седла  $C_1$  и  $C_2$ , что приводит фактически к неустойчивости системы. Но может иметь место и устойчивый предельный цикл. Особые линии такого типа, как  $C_1A_1C_2$  и  $C_2A_2C_1$  (рис. 16.14, з), на фазовой плоскости называются сепаратрисами (третий тип особых линий). Особые линии более сложного очертания рассматриваться не будут.

Здесь говорилось пока о системах, которые при малых отклонениях рассматриваются как линейные. Но совершенно аналогичная картина получается и для таких нелинейных систем автоматического управления, которые даже «в малом» нельзя рассматривать как линейные. Таковыми являются многочисленные типы релейных систем, а также системы с зоной нечувствительности, с гистерезисной петлей, с сухим трением, с зазором. Интересно отметить, что некоторые из таких систем скорее «в большом», чем «в малом», могут приближаться к линейным, когда зона нечувствительности или зазор оказываются малыми по сравнению с величиной отклонений  $x$ .

В системах с зоной нечувствительности и с сухим трением существуют, как известно, области застоя, когда установившемуся состоянию при данных внешних условиях (данной нагрузке) соответствует не одна точка, а целая область возможных равновесных состояний системы. На фазовой плоскости это выражается в том, что особая точка вытягивается в особый отрезок (рис. 16.14, д).

Заметим, наконец, что координатами  $(x, y)$  фазовой плоскости могут служить не обязательно отклонения управляемой величины и скорость ее, как было выше. Для этой цели могут быть взяты любые две переменные, однозначно характеризующие состояние системы второго порядка в произвольный момент времени.

Примем. Изобразим на фазовой плоскости переходный процесс и автоколебания в системе стабилизации температуры, рассмотренной выше. Координаты фазовой плоскости будут

$$x = \theta \quad \text{и} \quad y = \frac{d\theta}{dt}. \quad (16.29)$$

Если  $y > 0$ , то согласно (16.10) и рис. 16.4, а переключение управляющего устройства происходит при  $\theta = +b$  (линия  $EF$  па рис. 16.15); если же  $y < 0$ , то при  $\theta = -b$  (линия  $GH$ ). Справа от линии переключения  $EFGH$  справедливо уравнение системы (16.12), а слева — (16.13).

Уравнение (16.12) в обозначениях (16.29) примет вид

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad T_1 \frac{dy}{dt} + y = -k_1 c,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} - \frac{k_1 c}{T_1 y}. \quad (16.30)$$



### § 16.2. Уравнения систем с нелинейностью релейного типа

Следуя сделанным в § 16.1 замечаниям, приведем несколько примеров составления уравнений нелинейных систем релейного типа.

**Система автоматической стабилизации напряжения.** Пусть имеется генератор постоянного тока (управляемый объект) с вибрационным регулятором напряжения. Упрощенная принципиальная схема такой системы показана на рис. 16.16.

Когда контакты  $K$  под действием пружины  $\Pi$  замкнуты, резистор, обозначенный через  $2r_1$ , выключен из цепи возбуждения генератора 1. Система рассчитана так, что при этом напряжение  $U$  на клеммах генератора возрастает. В результате увеличивается ток  $I_2$  в обмотке 2 электромагнитного реле и якорь реле притягивается, размыкая тем самым контакты  $K$ . При разомкнутых же контактах  $K$  в цепь возбуждения включен резистор  $2r_1$ . Это вызывает снижение напряжения  $U$ , а значит уменьшение тока  $I_2$  и отпускание реле, в результате чего контакты  $K$  снова замыкаются, выключая тем самым резистор  $2r_1$  из цепи возбуждения. Настройка системы на желаемое номинальное значение управляемой величины  $U$  производится установкой резистора  $R_d$ .

Уравнение объекта (генератора) представим в линейном виде:

$$(T_1 p + 1) \Delta U = -k \Delta r + f(t), \quad (16.33)$$

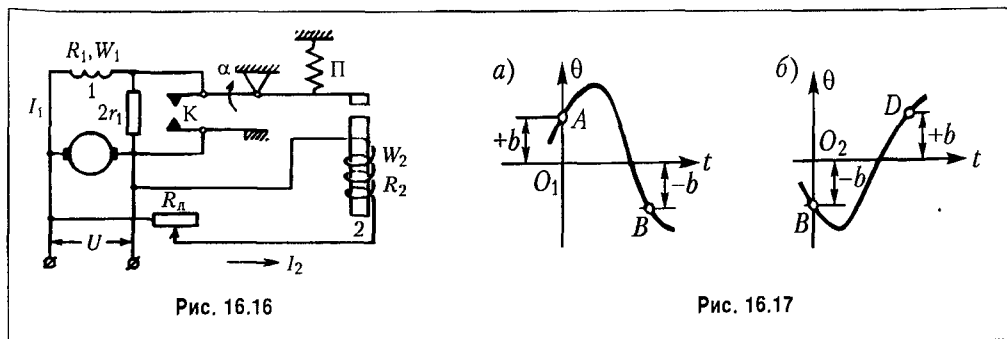
где  $\Delta r$  — изменение сопротивления цепи возбуждения (управляющее воздействие); постоянная времени  $T_1$  и коэффициент  $k_1$  определяются параметрами якоря и цепи возбуждения.

Уравнение чувствительного элемента (обмотки электромагнита 2) запишем в виде

$$(T_2 p + 1) \Delta I_2 = k_2 \Delta U. \quad (16.34)$$

Начало отсчета величин отклонений  $\Delta U$ ,  $\Delta I_2$  и  $\Delta r$  будет определено ниже.

Управляющий орган (контакты  $K$ , скачком включающие и выключающие резистор  $2r_1$ ) является нелинейным звеном релейного типа. Выходная величина его — сопротивление  $r$  цепи возбуждения — меняется скачкообразно при срабатывании и отпуске реле, т. е. в зависимости от величины тока  $I_2$  в цепи обмотки 2 электромагнитного реле. Это изображено на рис. 16.17, а, где  $I_{ср}$  и  $I_{отп}$  — токи полного срабатывания и отпускания реле. Для составления уравнения такого нелинейного звена удобно, как



всегда, ввести отклонения  $\Delta I_2$  и  $\Delta r$  от некоторых постоянных значений  $I_2^0$  и  $R^0$ . Как указано на рис. 16.17, а, принимаем

$$I_2^0 = \frac{I_{\text{опт}} + I_{\text{ср}}}{2} = I_{\text{опт}} + i_1, \quad R^0 = R_1 + r_1. \quad (16.35)$$

Тогда характеристика данного нелинейного звена в отклонениях примет вид рис. 16.17, б, симметричный относительно пачала координат (релейная характеристика с гистерезисной петлей).

В связи с этим уравнение нелинейного звена (рис. 16.17, б) будет

$$\Delta r = r_1 \text{sign}(\Delta I_2 - i_1) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} > 0; \quad (16.36)$$

$$\Delta r = r_1 \text{sign}(\Delta I_2 + i_1) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} < 0, \quad (16.37)$$

где выражение  $\text{sign}(\Delta I_2 - i_1)$  обозначает знак величины  $(\Delta I_2 - i_1)$ .

Формулы (16.36) и (16.37) отвечают соответственно движению вправо по линии  $ABCEF$  (рис. 16.17) и влево по линии  $FEDBA$ , причем в точках  $C$  и  $D$  происходит переключение реле (перескоки в точки  $E$  и  $B$  соответственно).

Уравнения линейной части системы (16.33) и (16.34), имея в виду исследовать переходный процесс при  $f(t) = 0$ , объединим в одно:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \Delta I_2 = -k_1 k_2 \Delta r. \quad (16.38)$$

Постоянные значения, от которых производится здесь отсчет отклонений переменных, определяются из алгебраических уравнений условного номинального установившегося режима

$$U^0 = (R_1 + r_1)I_1^0, \quad (R_2 + R_d)I_2^0 + U^0, \quad I_2^0 = \frac{I_{\text{опт}} + I_{\text{ср}}}{2}.$$

с использованием реальных характеристик генератора.

**Система автоматической стабилизации курса торпеды.** Возьмем простейшую схему. Уравнение вращения торпеды вокруг вертикальной оси (рыскание по курсу) как управляемого объекта запишем приближенно в виде

$$J \ddot{\psi} + c_1 \dot{\psi} = -c_2 \delta, \quad (16.39)$$

где  $\psi$  — угол отклонения торпеды от заданного направления;  $J$  — ее момент инерции относительно вертикальной оси;  $c_1 \dot{\psi}$  — момент сопротивления среды (воды),  $c_2 \delta$  — момент руля;  $\delta$  — угол поворота руля.

Разделив (16.39) на  $c_1$ , получим уравнение объекта в виде

$$(T_1 p + 1) p \psi = -k_1 \delta, \quad (16.40)$$

где

$$T_1 = \frac{J}{c_1}, \quad k_1 = \frac{c_2}{c_1}.$$

Чувствительным элементом является трехстепенный гироскоп, поворачивающий рычаг заслонки в системе питания пневматической рулевой машинки на угол, пропорциональный углу отклонения торпеды. Следовательно, уравнение чувствительного элемента будет

$$s = k_2 \psi, \tag{16.41}$$

где  $s$  — величина перемещения заслонки из нейтрального положения.

Будем считать, что поршень рулевой машинки при открытии заслонки, быстро получая полную скорость, мгновенно (точнее, за такое малое время, в течение которого торпеда не успевает заметно повернуться, т. е. много меньшее возможного периода колебаний торпеды) перебрасывает руль из одного крайнего положения в другое.

В таком приближенном представлении линейная часть системы ограничивается уравнениями (16.40) и (16.41). Единое уравнение линейной части системы поэтому будет

$$(T_1 p + 1) ps = -k_1 k_2 \delta. \tag{16.42}$$

Рулевая машинка вместе с рулем (привод и управляющий орган) представляет собой нелинейное звено, уравнение которого согласно вышесказанному можно представить либо в простейшем виде (рис. 16.18, а)

$$\delta = c \operatorname{sign} s, \tag{16.43}$$

либо, если имеется заметная зона нечувствительности (рис. 16.18, б), в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta = 0 & \text{ при } -b < s < +b, \\ \delta = c \operatorname{sign} s & \text{ при } |s| > b, \end{aligned} \right\} \tag{16.44}$$

либо, если существенное значение имеет гистерезисная петля (рис. 16.18, в),

$$\left. \begin{aligned} \delta = c \operatorname{sign}(s - b) & \text{ при } ps > 0, \\ \delta = c \operatorname{sign}(s + b) & \text{ при } ps < 0, \end{aligned} \right\} \tag{16.45}$$

либо, наконец, в простейшем случае, но с запаздыванием (рис. 16.18, г)

$$\left. \begin{aligned} \delta = c \operatorname{sign}(s - |s_\tau|) & \text{ при } ps > 0, \\ \delta = c \operatorname{sign}(s + |s_\tau|) & \text{ при } ps < 0, \end{aligned} \right\} \tag{16.46}$$

где

$$s_\tau = s(\tau), \tag{16.47}$$

причем  $\tau$  — время запаздывания срабатывания реле.

При исследовании системы в целом можно принять один из этих четырех вари-

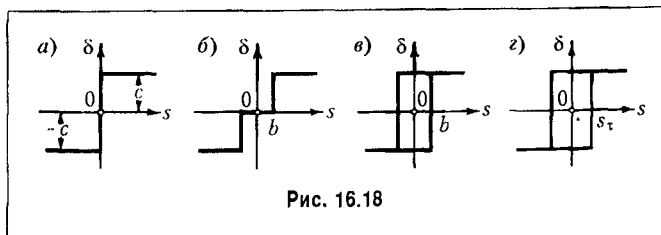


Рис. 16.18

антов в зависимости от того, какой из них лучше будет соответствовать свойствам данной релейной системы.

### § 16.3. Уравнения систем с нелинейностью в виде сухого трения и зазора

Приведем примеры составления уравнений для нелинейных систем с сухим трением или зазором в механической передаче.

**Следящая система с линейным и сухим трением.** В главе 5 были составлены уравнения следящей системы в линейном виде. Рассмотрим теперь такой случай, когда к линейному моменту трения  $M_{\text{лт}}$  добавляется еще момент сухого трения  $M_{\text{ст}}$ , имеющий постоянную величину, равную некоторому значению  $c$ , и меняющий свое направление (знак) с изменением знака скорости вращения объекта  $p\beta$  (рис. 16.19). Следовательно, теперь уравнение управляемого объекта примет вид

$$Jp^2\beta = M_{\text{вр}} - M_{\text{лт}} - M_{\text{ст}}, \quad M_{\text{вр}} = c_1 i_{\text{я}}, \quad M_{\text{лт}} = c_2 p\beta, \quad (16.48)$$

где  $\beta$  — угол поворота вала управляемого объекта, причем

$$\left. \begin{array}{l} M_{\text{ст}} = c \operatorname{sign} p\beta \quad \text{при } p\beta \neq 0, \\ -c \leq M_{\text{ст}} \leq +c \quad \text{при } p\beta = 0. \end{array} \right\} . \quad (16.49)$$

Важная особенность сухого трения состоит в том, что это (в отличие от релейных характеристик) далеко не всегда означает мгновенное переключение величины  $M_{\text{ст}}$  при  $p\beta = 0$ . Здесь возможны два варианта:

$$\left. \begin{array}{l} 1) p\beta = 0 \text{ и } |M_{\text{вр}}| > c, \\ 2) p\beta = 0 \text{ и } |M_{\text{вр}}| < c. \end{array} \right\} \quad (16.50)$$

В первом случае скорость объекта  $p\beta$  пройдет через нулевое значение и его движение будет продолжаться без остановки дальше по закону (16.48). Во втором же случае произойдет остановка управляемого объекта, в течение которой будет иметь место не переключение, а медленное изменение величины  $M_{\text{ст}}$  в интервале  $-c \leq M_{\text{ст}} \leq +c$  (или наоборот), причем  $M_{\text{ст}}$  будет принимать все время определенные значения

$$M_{\text{ст}} = M_{\text{вр}} \quad (p\beta = 0, \quad |M_{\text{вр}}| < c). \quad (16.51)$$

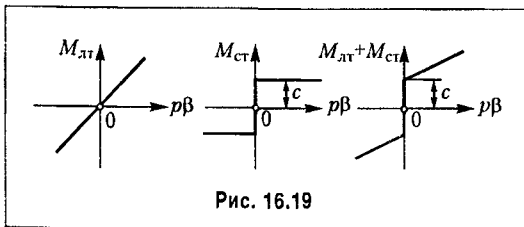


Рис. 16.19

В этом случае движение возобновится снова только тогда, когда вращающий момент достигнет значения  $|M_{\text{вр}}| = c$  и превысит его.

Если же остается  $|M_{\text{вр}}| < c$ , то система будет неподвижна. Поэтому положение равновесия управляемого объекта оказывается неопределенным внутри не-

которого отрезка, а именно при любом значении  $|M_{\text{пр}}| < c$ . Этим определяется зона застоя системы. Застой проявляется в том, что, с одной стороны, система не будет двигаться при изменении угла поворота командной оси в определенном интервале и, с другой стороны, что система будет обладать ошибкой из-за сухого трения в положении равновесия. В процессе же движения системы в одну сторону с любой скоростью сухое трение внесет постоянную ошибку одного знака, что соответствует как бы дополнительной внешней нагрузке  $M_{\text{итр}} = c$ .

Итак, уравнение управляемого объекта, как нелинейного звена системы, согласно (16.48) и (16.49) с учетом (16.50) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} Jp^2\beta + c_2 p\beta + c \operatorname{sign} p\beta &= c_1 i_{\text{я}} \quad \text{при } p\beta \neq 0 \\ \text{или } p\beta = 0 \text{ и } |i_{\text{я}}| &> \frac{c}{c_1}, \\ \beta &= \text{const} \quad \text{при } p\beta = 0 \text{ и } |i_{\text{я}}| < \frac{c}{c_1}. \end{aligned} \right\} \quad (16.53)$$

Уравнения всех остальных звеньев данной следящей системы в совокупности образуют линейную часть системы, дифференциальное уравнение которой для свободного движения упрощенно запишем в виде

$$(T_{\text{в}} p + 1) i_{\text{я}} = -(T_{\text{в}} p + 1) k_{\text{б}} p + k \beta. \quad (16.53)$$

**Следящая система с зазором.** Предположим теперь, что в той же самой следящей системе нелинейность заключается не в сухом трении, а в наличии зазоров в силовой механической передаче между двигателем и управляемым объектом. Все эти зазоры объединим в один и изобразим его условно в виде вилки со свободным ходом  $\pm b$ . Таким образом, между двигателем и управляемым объектом вклинивается теперь новое нелинейное звено, изображенное на рис. 16.20, а, входную величину которого обозначим  $\beta_1$ .

Характеристика этого нелинейного звена изображена на рис. 16.20, б. Смысл ее следующий. Если бы не было зазора, то  $\beta$  равнялась бы  $\beta_1$  и характеристикой была бы прямая под углом  $45^\circ$ , изображенная на рис. 16.20, б штрих-пунктиром. Вследствие зазора при движении в сторону возрастания угла  $\beta$  эта прямая сдвинется вправо на величину  $b$  (поводок при-

жмется к правой стороне вилки). При изменении направления движения сначала поводок будет перемещаться внутри зазора, не двигая вилку ( $\beta = \text{const}$ ). На характеристике это соответствует горизонтальному отрезку длиной  $2b$  (AB, или EF,

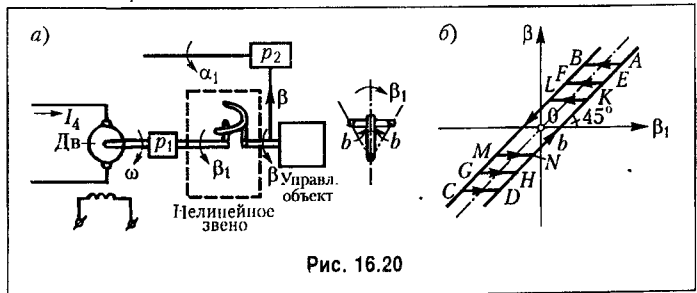


Рис. 16.20

или  $KL$ , или другие в зависимости от фактического значения  $\beta$  в это время). Затем начнет двигаться и вилка, что будет соответствовать прямой  $BC$ , сдвинутой влево от начала координат на величину  $b$ .

При равновесии системы поводок и вилка могут занимать любое относительное положение внутри зазора, что вызывает ошибку системы из-за зазора, равную  $\pm b$ . При движении системы в одну из сторон будет постоянное отставание объекта из-за зазора на величину  $\pm b$ , не считая того отставания, которое будет еще из-за нагрузки.

Уравнение управляемого объекта, включавшее в себя и двигатель, теперь разобьется на два нелинейных. Первое нелинейное уравнение управляемого объекта с двигателем будет (ограничиваемся учетом одной постоянной времени)

$$\left. \begin{aligned} (T_0 p + 1) p \beta_1 &= k_1 i_n \quad \text{при } p \beta \neq 0, \\ (T_1 p + 1) p \beta_1 &= k_1 i_n \quad \text{при } p \beta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.54)$$

(соответственно с поводком, прижатым к вилке, и с поводком, свободно движущимся внутри зазора);  $T_1$  меньше  $T_0$  на величину  $J_0/c_2$ , где  $J_0$  — момент инерции управляемого объекта. Кроме этого, надо написать второе уравнение нелинейного звена с зазором, соответствующее характеристике рис. 16.20, б:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \beta_1 - b \quad \text{при } p \beta_1 > 0, \\ \beta &= \beta_1 + b \quad \text{при } p \beta_1 < 0, \\ \beta &= \text{const} \quad \text{при } |\beta_1 - \beta| < b. \end{aligned} \right\} \quad (16.55)$$

Следовательно, управляемый объект будет иметь остановки при своих колебаниях, соответствующие участкам  $AB$ ,  $CD$  и т. д. характеристики рис. 16.20, б.

Линейная часть системы остается такой же, как в предыдущем примере, т. е. (16.53).

**Система автоматической стабилизации давления (учет сухого трения).** Рассмотрим систему (рис. 6.27), уравнения которой в линейном виде были получены в § 6.7. В чувствительном элементе 2 масса незначительна, но зато существенное значение может иметь сухое трение. Поэтому уравнение движения штока мембраны запишем в виде

$$P - F_M - F_T - F_n = 0, \quad (16.56)$$

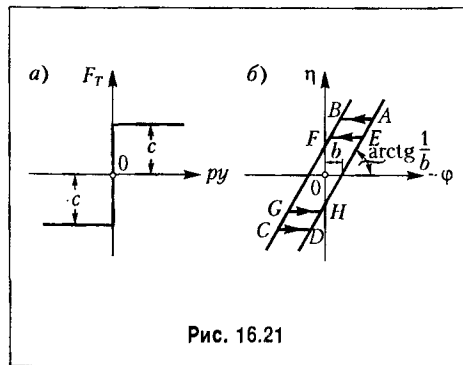


Рис. 16.21

где  $F_T$  — сила сухого трения, имеющая постоянную величину  $c$ , меняющая направление при изменении знака скорости  $py$  (рис. 16.21, а) и могущая принимать любые значения во время остановки, т. е.

$$\left. \begin{aligned} F_T &= c \operatorname{sign} py \quad \text{при } py \neq 0, \\ -c &\leq F_T \leq +c \quad \text{при } py = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.57)$$

$P$  — сила давления воздуха камеры на мембрану;  $F_M$  — упругая сила мембраны;  $F_n$  — сила пружины.



В результате после перехода к безразмерным относительным отклонениям (14.27) и (14.48) получим вместо (14.47) следующее уравнение чувствительного элемента как нелинейного звена:

$$\left. \begin{aligned} b \operatorname{sign} p\eta + \delta\eta &= -\varphi \text{ при } p\eta \neq 0, \\ \text{или } p\eta &= 0 \text{ и } |\varphi + \delta\eta| > b, \\ \eta &= \operatorname{const} \text{ при } |\varphi + \delta\eta| > b, \end{aligned} \right\} \quad (16.58)$$

где  $b = \frac{c}{q_m p_n}$ ;  $q_m$  — площадь мембраны;  $p_n$  — номинальное давление в камере.

Построим характеристику этого нелинейного звена с сухим трением в координатах  $(-\varphi, \eta)$ . Легко видеть, что первое из уравнений (16.58) соответствует прямым  $DA$  и  $BC$  при  $p\eta > 0$  и  $p\eta < 0$ , а второе уравнение ( $\eta = \operatorname{const}$ ) — отрезкам  $AB, CD, EF, GH$  и т. п. на рис. 16.21, б. Из сравнения рис. 16.21, б и рис. 16.20, б видно, что сухое трение в таком нелинейном звене (без массы) эквивалентно зазору, половина которого равна  $b$ , чего совершенно нельзя сказать о сухом трении в следящей системе, где учитывалась масса (момент инерции).

Все остальные звенья системы образуют линейную часть, единое уравнение которой при  $f = 0$  будет

$$(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)\varphi = k_1 \eta. \quad (16.59)$$

## § 16.4. Уравнения систем с нелинейностями других видов

Рассмотрим несколько примеров составления уравнений автоматических систем с нелинейностями других видов, чем в §§ 16.2 и 16.3.

**Система автоматического управления с нелинейной характеристикой привода управляющего органа.** Привод управляющего органа, каким бы он ни был (электрический, гидравлический, пневматический), всегда имеет, во-первых, некоторую зону нечувствительности в начале координат (рис. 16.22, а), и, во-вторых, зону «насыщения». Кроме того, может иметь место еще и гистерезис (рис. 16.22, з). Эти две

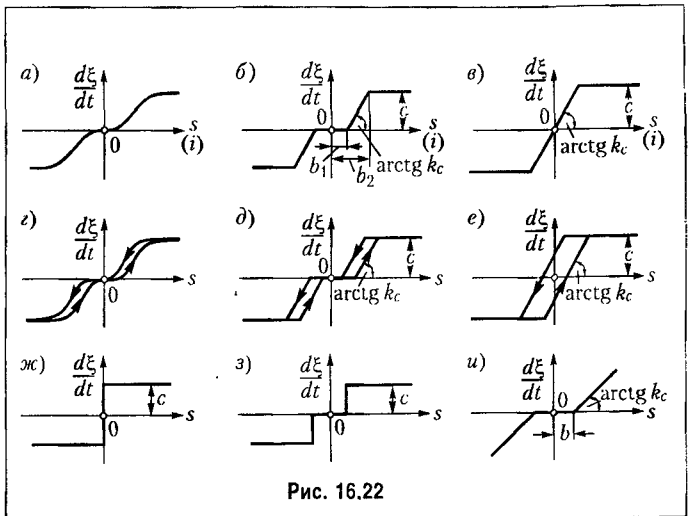


Рис. 16.22

криволинейные характеристики могут быть приближенно заменены кусочно-линейными (рис. 16.22, б, д или в, е, и). Наконец, существуют приводы с постоянной скоростью (рис. 16.22, ж, з), относящиеся к нелинейным звеньям релейного типа, уже рассмотренным ранее.

Зона нечувствительности  $b_1$  выражается в том, что электрический двигатель имеет определенный минимальный ток трогания ( $i = b_1$ ), до достижения которого вал двигателя будет неподвижен ( $p\xi = 0$ ). В гидравлическом же двигателе золотник имеет так называемую зону перекрытия (его поршенок немного шире отверстия, им закрываемого), вследствие чего он откроет путь рабочей жидкости в цилиндр двигателя, только переместившись на некоторую величину  $s = b_1$ . Аналогично и в случае пневматического привода, где роль золотника играет заслонка.

Зона насыщения обнаруживается в том, что при увеличении тока сверх некоторого значения  $i = b_2$  скорость перемещения управляющего органа остается постоянной ( $p\xi = c$ ); также и для гидравлического двигателя при  $s \geq b_2$ , когда окна золотника полностью открыты.

Термины «насыщение» и «гистерезис» применяются здесь в обобщенном смысле для обозначения нелинейностей определенного типа; они не обязательно соответствуют физическим явлениям насыщения и гистерезиса.

Уравнение привода управляющего органа с учетом указанных обстоятельств вместо прежнего линейного будет иметь нелинейный вид:

$$p\xi = F(s), \quad (16.60)$$

где  $F(s)$  есть нелинейная функция задаваемая графиком (рис. 16.22, а или г). Для электрических приводов можно записать

$$p\xi = F(i). \quad (16.61)$$

В приближенном кусочно-линейном виде (рис. 16.22, б) уравнение (16.60) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p\xi &= 0 && \text{при } -b_1 \leq s \leq +b_1, \\ p\xi &= k_c(s - b_1) && \text{при } +b_1 \leq s \leq +b_2, \\ p\xi &= k_c(s + b_1) && \text{при } -b_1 \geq s \geq -b_2, \\ p\xi &= c \operatorname{sign} s && \text{при } |s| \geq b_2. \end{aligned} \right\} \quad (16.62)$$

В случае наличия гистерезиса (рис. 16.22, д) придется написать два ряда таких же выражений с разными значениями  $b_1$  и  $b_2$  — один для движения вправо ( $ps > 0$ ) и другой для движения влево ( $ps < 0$ ). Этим определяется уравнение привода управляющего органа как нелинейного звена. Уравнение линейной части составляется обычным способом в зависимости от того, в какой конкретно автоматической системе этот привод применен.

**Следящая система с линейным и квадратичным трением.** В § 16.3 была рассмотрена следящая система с линейным и сухим трением. Пусть теперь управляемый объект

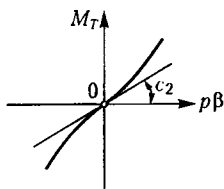


Рис. 16.23

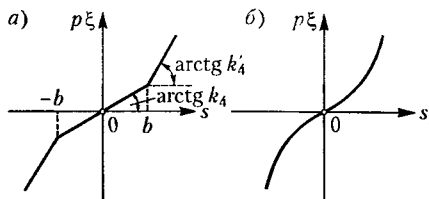


Рис. 16.24

в той же следящей системе обладает кроме линейного еще квадратичным трением, т. е. уравнение объекта имеет вид

$$Jp^2\beta = M_{вр} - M_T,$$

где

$$M_{вр} = c_1 i_y, \quad M_T = c_2 p\beta + c_3 (p\beta)^2 \operatorname{sign} p\beta$$

(рис. 16.23). Тогда уравнение управляемого объекта как нелинейного звена будет

$$(Jp + c_2) p\beta + c_3 (p\beta)^2 \operatorname{sign} p\beta = c_1 i_y. \quad (16.63)$$

Уравнение линейной части системы в полном виде по-прежнему будет (16.53).

#### Система автоматического управления с переменным коэффициентом усиления.

В ряде случаев для повышения качества процесса бывает желательно, чтобы воздействие на управляющий орган было не пропорциональным отклонению управляемой величины, а усиливалось или ослаблялось при увеличении этого отклонения (нелинейный алгоритм управления). Примерами такого воздействия с переменным коэффициентом усиления могут служить характеристики с ограниченной линейностью или с насыщением (рис. 16.22, а). Однако они дают уменьшение коэффициента усиления при увеличении отклонения. Рассмотрим теперь два примера характеристик с переменным коэффициентом усиления, который увеличивается при увеличении отклонения.

Уравнение нелинейной части привода управляющего органа будет в случае характеристики рис. 16.24, а

$$\left. \begin{aligned} p\xi &= k_4 s && \text{при } |s| < b, \\ p\xi &= k_4 b + k'_4 (s - b) && \text{при } s > b, \\ p\xi &= -k_4 b + k'_4 (s + b) && \text{при } s < -b, \end{aligned} \right\} \quad (16.64)$$

а в случае характеристики рис. 16.24, б

$$p\xi = F(s) \quad (16.65)$$

Все рассмотренные примеры иллюстрируют случай, когда общая схема системы имеет вид рис. 16.1, т. е. случай нелинейной системы (кроме случая сухого трения в следящей системе при наличии остановок). Комбинации нелинейностей приводят к нелинейным системам второго и третьего классов (см. главу 18).

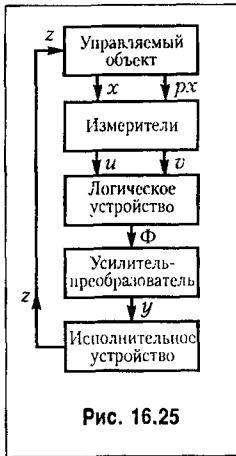


Рис. 16.25

**Система автоматического управления с логическим устройством.** Пусть динамика управляемого объекта (рис. 16.25) описывается уравнением

$$(T_0 p + 1)px = k_0 z. \quad (16.66)$$

Уравнения измерителей

$$(T_1 p + 1)u = k_1 x, \quad (T_2 p + 1)v = k_2 px. \quad (16.67)$$

Уравнение усилителя-преобразователя с логическим устройством

$$(T_3 p + 1)y = k_3 F(u, v). \quad (16.68)$$

Уравнение исполнительного устройства

$$(T_4 p + 1)z = -k_4 y. \quad (16.69)$$

Кроме того, должна быть задана логика формирования нелинейного алгоритма управления  $\Phi(u, v)$ , которая может быть назначена или синтезирована в очень разнообразных формах для обеспечения простоты и надежности аппаратуры, наибольшего быстродействия, наименьшей затраты энергии на управление, учета ограничения мощности источника энергии и специфики желательных режимов его работы и т. п.

Выбранную тем или иным образом логику формирования нелинейного алгоритма можно записывать в аналитической форме. Однако во многих случаях удобнее изображать ее графически на плоскости входных величин логического устройства ( $u, v$ ).

Для примера рассмотрим простейшую логику (рис. 16.26). Смысл ее заключается в следующем. Величины  $u$  и  $v$ , согласно уравнениям (16.67), с точностью до постоянных времени соответствуют отклонению управляемой величины  $x$  и ее первой производной по времени  $px$ . Поэтому наличие порогового значения  $u_1$  соответствует тому, что при малых  $x$  исполнительное устройство не работает ( $\Phi = 0$ ). Не работает оно также и при больших отклонениях  $x$ , но только тогда, когда имеется достаточная по величине скорость

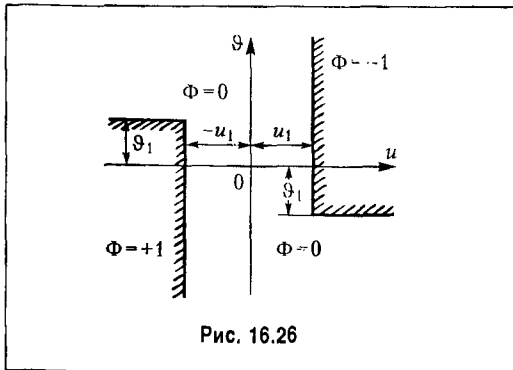


Рис. 16.26

речь ( $px$  соответствующая превышению порога  $\pm v_1$ ) со знаком, противоположным знаку  $x$ , ибо в этом случае отклонение  $x$  уменьшается по величине само собой даже при неработающем исполнительном устройстве системы управления. Исполнительное устройство включается ( $\Phi = +1$  или  $\Phi = -1$ , рис. 16.26) только тогда, когда при достаточно больших отклонениях  $x$  ( $|u| > u_1$ ) скорость  $px$  имеет тот же знак (т. е. отклонение возрастает по величине) либо когда скорость  $px$  имеет противоположный знак, но мала ( $|v| < v_1$ ).

**Система с переменной структурой.** Как уже указывалось в главе 2 системы с переменной структурой содержат в себе специальное переключающее устройство для изменения управляющего устройства, которое срабатывает в зависимости от размеров и знаков входных величин.

Пример переключающего устройства приведен схематически на рис. 16.27, где КЭ — ключевой элемент, БИС — блок изменения структуры. Его уравнение [32] принято записывать в виде

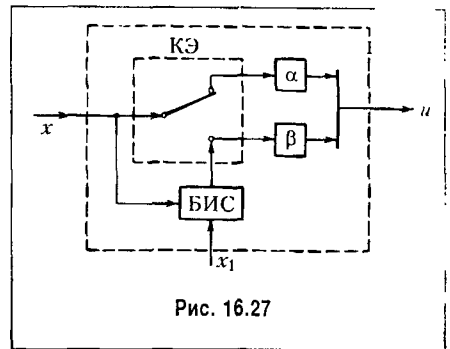


Рис. 16.27

$$u = \psi x. \quad (16.70)$$

Функция  $\psi$  может строиться по-разному. Например,

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x_1 x > 0, \\ \beta & \text{при } x_1 x < 0. \end{cases} \quad (16.71)$$

Основная характерная нелинейность здесь состоит в самом факте автоматического переключения в зависимости от состояния входных величин.

## Глава 17

# ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

### § 17.1. Фазовые траектории и метод точечных преобразований

Понятие о фазовом пространстве, о фазовых траекториях и их типах было уже дано выше. В данном параграфе на примерах построения фазовых траекторий для простейших систем второго порядка будут проиллюстрированы некоторые важные особенности процессов в нелинейных системах автоматического управления.

**Пример 1.** Возьмем систему автоматического управления с объектом без самовыравнивания и с приводом управляющего органа, имеющим постоянную скорость. Уравнение объекта будет

$$T_a p \varphi = \xi. \quad (17.1)$$

Для управляющего устройства без массы и демфера с жесткой обратной связью, т. е. при  $\delta\eta = -\varphi$ ,  $\sigma = \eta - \zeta$ ,  $\zeta = \xi$ , получим

$$\sigma = -\frac{1}{\delta}\varphi - \xi, \quad (17.2)$$

где  $\varphi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  и  $\sigma$  — относительные изменения управляемой величины, смещений чувствительного элемента, управляющего органа, элемента обратной связи и управляющего золотника (рис. 10.11, а),  $\delta$  — коэффициент.

Пусть привод управляющего органа имеет постоянную скорость в двух вариантах: 1) с мгновенным переключением (рис. 16.22, ж) при переходе управляющего элемента (золотника, струйной трубки) через нейтральное положение ( $\sigma = 0$ ); 2) с зоной нечувствительности (рис. 16.22, з) вследствие наличия «перекрытия» золотника или струйной трубки. В первом случае уравнение привода управляющего органа будет

$$p\xi = c \operatorname{sign} \sigma, \quad (17.3)$$

а во втором

$$\left. \begin{aligned} p\xi &= 0 && \text{при } |\sigma| < b, \\ p\xi &= c \operatorname{sign} \sigma && \text{при } |\sigma| > b. \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Возьмем фазовую плоскость  $(x, y)$ , приняв

$$x = \varphi, \quad y = p\varphi. \quad (17.5)$$

Из уравнений (17.1), (17.2) и (17.5) имеем

$$x_1 = T_a y, \quad \sigma = -\frac{1}{\delta}x - T_a y. \quad (17.6)$$

Следовательно, переключения привода в первом варианте ( $\sigma = 0$ ) будут иметь место при

$$x = -\delta T_a y, \quad (17.7)$$

что соответствует прямой  $AB$  (рис. 17.1, а) на фазовой плоскости, причем согласно (17.6) значениям  $\sigma > 0$  соответствует часть плоскости слева от прямой  $AB$ , а  $\sigma < 0$  — справа.

На основании первого из соотношений (17.6) с учетом (17.3) при  $\sigma < 0$  получаем

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{c}{T_a}, \quad (17.8)$$

а из (17.5)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (17.9)$$

откуда находим уравнения фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{T_a y} \tag{17.10}$$

или, после интегрирования,

$$x = -\frac{T_a}{2c} y^2 + C_1.$$

Это есть семейство парабол, показанное на рис. 17.1, а справа от линии AB (они симметричны относительно оси  $x$ ). Так как (17.8) и (17.9) являются проекциями скорости  $v$  изображающей точки  $M$  на оси  $x$  и  $y$ , то имеем  $v_y < 0$ , а знак  $v_x$  совпадает со знаком  $y$ . В соответствии с этим на рис. 17.1, а укажем стрелочками направление движения изображающей точки  $M$  по фазовым траекториям. Аналогичным путем легко строятся параболы слева от прямой AB.

В результате, как видно из общего расположения фазовых траекторий (рис. 17.1, а), получается устойчивая система с затухающим колебательным переходным процессом. Но число колебаний будет конечным. В самом деле, здесь имеется особый отрезок CD, в который вливаются все фазовые траектории. Чтобы выявить поведение системы на этом отрезке, вспомним, что для него согласно (17.7) и (17.5)

$$\delta T_a \dot{\varphi} + \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \varphi = C_2 e^{-\frac{t}{\delta T_a}}.$$

Следовательно, попав на отрезок CD, изображающая точка не может с него уйти, и система будет апериодически приближаться к установившемуся состоянию, т. е. изображающая точка будет «сползать» по отрезку CD к началу координат O. Таким образом, имевший место вначале колебательный переходный процесс после конечного числа колебаний вырождается в этот так называемый *скользящий процесс*.

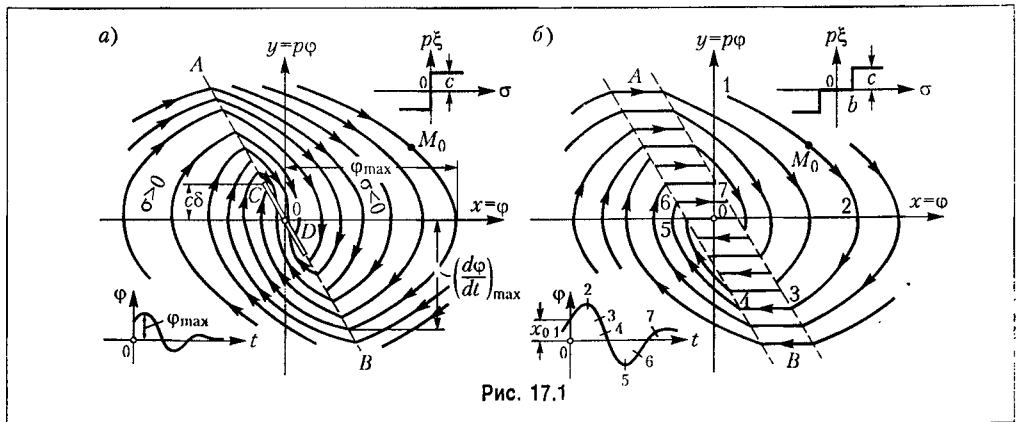


Рис. 17.1

Крайние точки особого отрезка  $CD$  определяются, очевидно, как точки, в которых прямая  $AB$  касается одной из парабол соответственно правого и левого семейств. Поэтому, подставив значения  $\frac{dy}{dx}$  из (17.7) в выражение (17.10), найдем точку  $C$ :

$$y_C = c\delta.$$

По найденной картине расположения фазовых траекторий можно качественно представить себе кривую переходного процесса  $\varphi(t)$  при любых начальных условиях. Начальными условиями определяется начальное положение изображающей точки  $M$  и тем самым – определенная фазовая траектория, иллюстрирующая протекание процесса. Она показывает (рис. 17.1, *a*) максимальное отклонение управляемой величины  $\varphi_{\max}$ , максимальную скорость  $(p\varphi)_{\max}$ , а также все последующие отклонения, число колебаний и т. п.

Рассмотрим теперь ту же систему, но с учетом зоны нечувствительности. В этом случае переключения привода (при  $\sigma = -b$  и  $\sigma = +b$ ) на фазовой плоскости соответствуют согласно (17.6) две наклонные прямые (рис. 17.1, *б*):

$$x = -\delta T_a y + b\delta \quad \text{и} \quad x = -\delta T_a y - b\delta.$$

Между этими прямыми  $|\sigma| < b$ , правее их  $\sigma < -b$ , левее их  $\sigma > b$  (причем  $b > 0$ ). При  $|\sigma| < b$  из (17.4), (17.6) и (17.5) получаем

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

откуда (при  $y \neq 0$ )

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad y = C_3$$

(прямые, параллельные оси  $x$  в полосе  $AB$  на рис. 17.1, *б*).

При  $|\sigma| > b$  получим прежние параболы. В результате снова система оказывается устойчивой и имеет колебательный переходный процесс, но вместо особой точки  $O$  получаем особый отрезок ( $y = 0, -b\delta < x < b\delta$ ), т. е. установившееся состояние определяется неоднозначно. Это соответствует тому, что система может находиться в равновесии в любом месте внутри зоны нечувствительности. Здесь точно так же возможен скользящий процесс, как и в случае рис. 17.1, *a*.

В данном примере система оказывается устойчивой при любых значениях параметров и при любых начальных условиях. Однако здесь для получения системы второго порядка была проведена грубая идеализация уравнений (пренебрежение массой и демпфированием).

**Пример 2.** Допустим, что требуется стабилизировать угловое положение некоторого тела, например космического аппарата, когда сопротивлением среды его вращению можно пренебречь. Уравнение объекта будет

$$J \frac{d\omega}{dt} = M, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (17.11)$$



где  $J$  — момент инерции тела;  $\varphi$  — угол поворота тела;  $\omega$  — его угловая скорость;  $M$  — управляющий момент со стороны исполнительного органа системы стабилизации.

Уравнение управляющего устройства запишем в виде

$$M = M_1 \Phi(\varphi, \omega), \quad (17.12)$$

где  $M_1$  — постоянная положительная величина,  $\Phi(\varphi, \omega)$  — нелинейный алгоритм управления, осуществляемый при помощи логического устройства по тому же простейшему принципу, что и на рис. 16.26, с той лишь разницей, что по углу  $\varphi$  фазовая плоскость ограничена значениями  $+\pi$  и  $-\pi$ , так как это составляет один полный оборот тела (рис. 17.2).

Изобразим процесс управления на фазовой плоскости. Уравнение всей системы согласно (17.11) и (17.12) будет

$$\frac{d\omega}{dt} = c \Phi(\varphi, \omega), \quad (17.13)$$

где обозначено

$$c = \frac{M_1}{J},$$

причем  $c$  имеет физический смысл величины углового ускорения, сообщаемого данному телу постоянным моментом  $M_1$ .

Умножив почленно уравнение (17.13) на выражение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

получим дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\omega d\omega = c \Phi(\varphi, \omega) d\varphi. \quad (17.14)$$

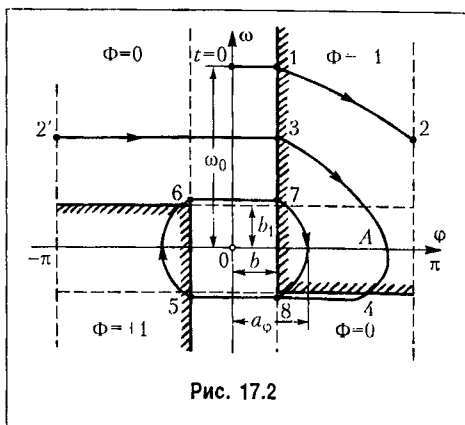
Это уравнение легко интегрируется внутри участков, на которых  $\Phi = \text{const}$ . В результате для каждого отдельно взятого участка уравнение фазовой траектории будет

$$\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{2} = c \Phi(\varphi - \varphi_n), \quad (17.15)$$

где  $\varphi_n$  и  $\omega_n$  — значения  $\varphi$  и  $\omega$  в начальной точке данного участка.

Зададим начальные условия процесса:

$$\varphi = 0, \quad \omega = \omega_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$



Для данной начальной точки процесса (см. рис. 17.2) имеем  $\Phi = 0$ . Поэтому на первом участке процесса согласно (17.15) уравнение фазовой траектория будет

$$\omega = \text{const} = \omega_0.$$

Этот участок движения с постоянной скоростью заканчивается в точке 1 (рис. 17.2), где происходит включение исполнительного органа ( $\Phi = -1$ ). Следовательно, для второго участка процесса (после точки 1) из (17.15) получим уравнение фазовой траектории

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2c(\varphi - b), \quad (17.16)$$

так как в начальной точке 1 этого участка  $\varphi_{11} = b$ ,  $\omega_{11} = \omega_0$ .

Фазовая траектория (17.16) — парабола, ось которой совпадает с осью  $\varphi$ .

Это соответствует равнозамедленному движению  $\left(\frac{d\omega}{dt} = -c\right)$ . Изображая параболу графически, доводим ее до границы  $\varphi = \pi$  (участок 1–2 на рис. 17.2), причем в точке 2 согласно (17.16)

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2c(\pi - b)}. \quad (17.17)$$

Это значение переносим в точку 2' (для вращающегося тела  $\varphi = \pm\pi$  — это одна и та же точка). Здесь происходит выключение исполнительного органа ( $\Phi = 0$ ). Поэтому дальнейшее движение согласно (17.15) пойдет с постоянной скоростью

$$\omega = \text{const} = \omega_0$$

до точки 3 (рис. 17.2). Таким образом, в рассмотренной начальной части процесса управления тело совершило один полный оборот, но в конце этого оборота скорость вращения его стала меньше начальной.

В точке 3 снова включается исполнительный орган ( $\Phi = -1$ ), в результате чего фазовая траектория будет

$$\omega^2 = \omega_2^2 - 2c(\varphi - b), \quad (17.18)$$

так как в точке 3  $\varphi_{11} = b$ ,  $\omega_{11} = \omega_2$ . Допустим, что соответствующая уравнению (17.18) парабола 3–4 не доходит до границы  $\varphi = \pi$ . Это означает, что тело больше не совершит полного оборота, а начнет (с точки А) возвращаться в сторону нулевого положения.

В точке 4 (рис. 17.2) имеем скорость  $\omega_4 = -b_1$ . Следовательно, из (17.18) угловая координата ее будет

$$\varphi_4 = b + \frac{\omega_2^2 - b_1^2}{2c},$$

где  $\omega_2$  определяется по формуле (17.17).

Дальше (4–5) процесс пойдет с постоянной скоростью (так как  $\Phi = 0$ ), после чего тело войдет в установившийся автоколебательный режим, определяемый предельным циклом (5–6–7–8). Уравнение параболы 7–8 согласно (17.15) будет

$$\frac{\omega^2 - b_1^2}{2} = -c(\varphi - b).$$

Отсюда амплитуда угловых автоколебаний  $a_\varphi$ , как значение  $\varphi$  при  $\omega = 0$ , будет

$$a_\varphi = b + \frac{b_1^2}{2c}, \quad (17.19)$$

а амплитуда колебаний скорости  $a_\omega = b_1$ .

Она равна зоне нечувствительности датчика угловой скорости  $b_1$ , в то время как амплитуда угловых колебаний (17.19) несколько больше зоны нечувствительности измерителя угла  $b$ .

Период автоколебаний  $t_a$  можно вычислить как сумму времен:

$$t_a = t_{\text{хол}} + t_{\text{раб}},$$

где  $t_{\text{хол}}$  и  $t_{\text{раб}}$  — времена участков (6–7) + (8–5) и (5–6) + (7–8) соответственно.

По законам равномерного и равнозамедленного движений соответственно получаем

$$t_a = 4 \left( \frac{b}{b_1} + \frac{b_1}{c} \right).$$

Итак, установившийся режим стабилизации в данной системе является автоколебательным. Однако уравнение системы (17.13) справедливо только для идеальной системы стабилизации. Всякое реально имеющееся запаздывание в работе усилительно-преобразовательного и исполнительного устройств приведет к увеличению амплитуд автоколебаний по сравнению с полученными здесь значениями. Решение задачи с учетом постоянных времени системы управления будет дано в следующей главе.

**Пример 3.** Уравнения системы автоматического управления курсом торпеды в упрощенном варианте имеют вид: линейная часть (16.40) и (16.41), т. е.

$$T_1 p^2 \psi + p \psi = -k_1 \delta, \quad s = k_2 \psi, \quad (17.20)$$

и нелинейное звено (возьмем сначала один случай — рис. 16.18, в)

$$\left. \begin{aligned} \delta &= c \operatorname{sign}(s - b) \text{ при } ps > 0, \\ \delta &= c \operatorname{sign}(s + b) \text{ при } ps < 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.21)$$

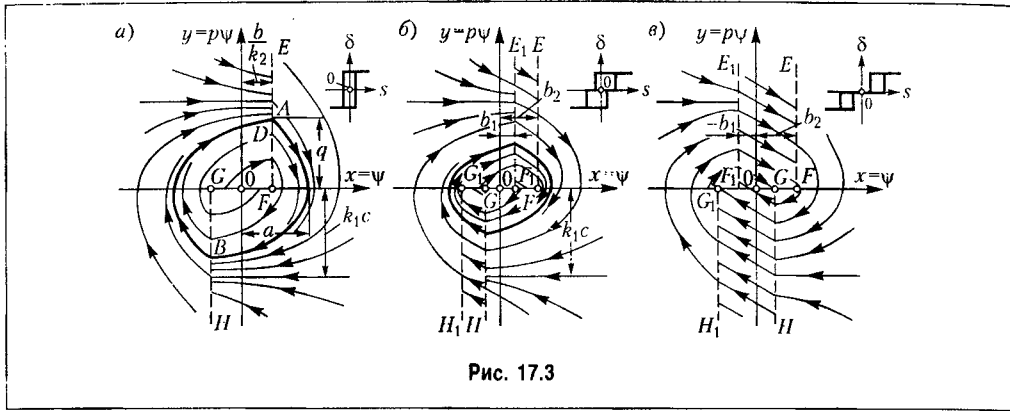


Рис. 17.3

Покажем, что здесь равновесное установившееся состояние системы с постоянным значением  $\psi = 0$  неустойчиво, но будет иметь место автоколебательный процесс.

Возьмем фазовую плоскость  $(x, y)$  с координатами  $x = \psi$ ,  $y = p\psi$  (угла отклонения и угловая скорость отклонения оси торпеды от заданного курса). Уравнения (17.20) и (17.21) переищутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{y}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} \delta, \\ \delta &= c \operatorname{sign}\left(x - \frac{b}{k_2}\right) \text{ при } y > 0, \\ \delta &= c \operatorname{sign}\left(x + \frac{b}{k_2}\right) \text{ при } y < 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.22)$$

Из сравнения этих уравнений с упрощенными уравнениями системы стабилизации температуры в конце § 16.1 видна их полная аналогия. Поэтому здесь, так же как и в случае рис. 16.15, установившийся процесс движения торпеды будет автоколебательным, причем картина фазовых траекторий будет иметь вид, показанный на рис. 17.3, а.

При этом кривая  $AB$  предельного цикла, соответствующая автоколебательному процессу, определяется из уравнения (16.31) с таким значением произвольной постоянной  $C_1$ , чтобы выполнялось условие

$$y_A = -y_B, \quad \text{т. е.} \quad (y)_{x=\frac{b}{k_2}} = -(y)_{x=-\frac{b}{k_2}}, \quad (17.23)$$

так как только в этом случае и получится замкнутая кривая предельного цикла  $ABD$  (рис. 17.3, а). Определив таким образом  $C_1$ , найдем амплитуду автоколебаний  $a$  как значение  $x$  при  $y = 0$ , т. е. согласно (16.31)

$$a = k_1 c T_1 \ln k_1 c + C_1.$$

Значения же (17.23) дают амплитуду  $q$  колебаний скорости  $y$ . Можно все это определять и графически прямо по чертежу (рис. 17.3, а). Период автоколебаний остается неизвестным.

Введем теперь в характеристику нелинейного звена (рулевой машинки) зону нечувствительности, как показано на рис. 17.3, б, в. Так, на том участке характеристики  $\delta = f(s)$  (рис. 17.3, б), где  $\delta = 0$ , из (17.22) следует, что

$$y = -\frac{x}{T_1} + C_2,$$

что соответствует наклонным прямым внутри полосы  $EFF_1E_1$  на фазовой плоскости (рис. 17.3, б). Аналогичная полоса  $HGG_1H_1$  будет и в нижней части плоскости. Все остальное заполняется такими же кривыми, как на рис. 17.3, а. В результате с увеличением зоны нечувствительности размеры предельного цикла, а значит, и амплитуда автоколебаний уменьшаются. При  $b_1 = 0$  предельный цикл вырождается в точку  $O$ .

При дальнейшем увеличении зоны нечувствительности характеристика нелинейного звена и картина фазовых траекторий принимают вид, показанный на рис. 17.3, в. Здесь автоколебания отсутствуют и становится устойчивым установившийся процесс с постоянным значением  $\psi$ . Ранее неустойчивый особый отрезок  $F_1G$  теперь стал устойчивым. Дальнейшее увеличение зоны нечувствительности приводит к расширению отрезка  $F_1G$ , т. е. к увеличению установившейся ошибки системы из-за слишком широкого участка равновесия.

**П р и м е р 4.** Рассмотрим систему стабилизации напряжения, уравнения которой были составлены в § 16.2, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1)\Delta U &= -k_1 \Delta r, \\ (T_2 p + 1)\Delta I_2 &= k_2 \Delta U, \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

причем уравнение нелинейного звена (управляющего органа)

$$\left. \begin{aligned} \Delta r &= r_1 \operatorname{sign}(\Delta I_2 - i_1) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} > 0, \\ \Delta r &= r_1 \operatorname{sign}(\Delta I_2 + i_2) \quad \text{при} \quad \frac{dI_2}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.25)$$

В качестве ординаты фазовой плоскости здесь удобнее взять не скорость отклонения управляемой величины  $\frac{dU}{dt}$ , как делалось раньше, а вторую переменную  $\Delta I_2$ . Итак, примем для этой задачи

$$x = \Delta U, \quad y = \Delta I_2 \quad (17.26)$$

Тогда уравнения (17.24) преобразуются к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T_1}(x + k_1 \Delta r), \quad (17.27)$$

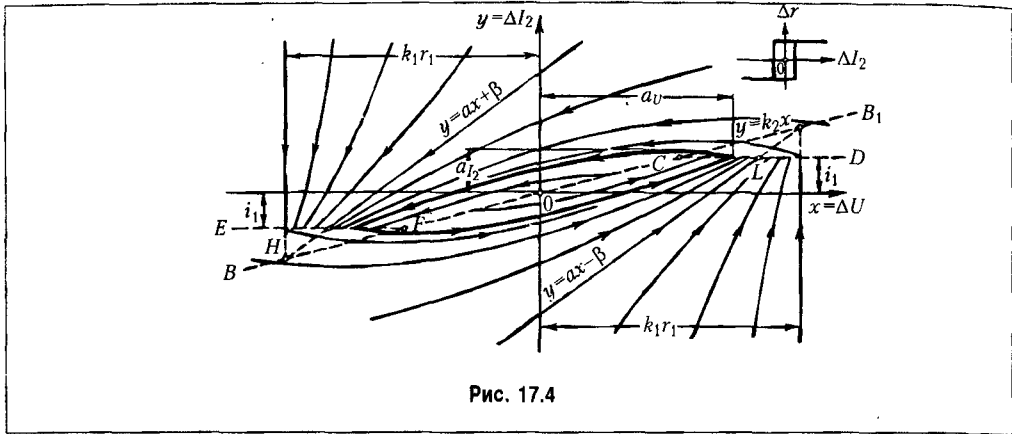


Рис. 17.4

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T_2}(y - k_2x), \tag{17.28}$$

где согласно (17.25), (17.26) и (17.28) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta r &= r_1 \operatorname{sign}(y - i_1) \text{ при } y < k_2x, \\ \Delta r &= r_1 \operatorname{sign}(y + i_1) \text{ при } y > k_2x; \end{aligned} \right\} \tag{17.29}$$

следовательно, первое из этих условий имеет место ниже прямой  $BB_1$  (рис. 17.4), а второе — выше нее. В первом случае переключение реле происходит при  $y = -i_1$ , т. е. на прямой  $CD$  (рис. 17.4), а во втором случае — при  $y = -i_1$ , т. е. на прямой  $EF$ . Чертеж сделан в предположении, что  $k_1k_2r_1 > i_1$ . В результате получаем, что выше линии  $EFCD$  будет

$$\Delta r = r_1, \tag{17.30}$$

а ниже линии  $EFCD$

$$\Delta r = -r_1. \tag{17.31}$$

Рассмотрим сначала верхнюю область. Для нее, деля (17.28) на (17.27), с учетом (17.30) получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_1}{T_2} \frac{y - k_2x}{x + k_1r_1}, \tag{17.32}$$

которое можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_1}{T_2} \frac{y + k_1k_2r_1 - k_2(x + k_1r_1)}{x + k_1r_1}$$

и проинтегрировать, применив вспомогательную подстановку

$$y + k_1k_2r_1 = z(x + k_1r_1),$$

где  $z$  — новая переменная вместо  $y$ .

В результате найдем следующее уравнение фазовых траекторий (при  $T_1 > T_2$ ):

$$y = \alpha x + \beta + C_1(x + k_1 r_1)^\gamma \quad (\gamma > 1), \quad (17.33)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная,

$$\alpha = \frac{k_2 T_1}{T_1 - T_2}, \quad \beta = \frac{k_1 k_2 r_1 T_2}{T_1 - T_2}, \quad \gamma = \frac{T_1}{T_2} > 1 \quad (17.34)$$

(при  $\gamma = 1$  решение будет иметь другой вид, а при  $\gamma < 1$  будет  $\alpha < 0$  и  $\beta < 0$ ; эти решения не будут исследоваться).

Чтобы представить себе всю совокупность фазовых траекторий, можно провести на фазовой плоскости прямую

$$y_1 = \alpha x + \beta \quad (17.35)$$

и ко всем ординатам этой прямой добавлять

$$y_2 = C_1(x + k_1 r_1)^\gamma, \quad (17.36)$$

придавая  $C_1$  произвольные значения (каждому значению  $C_1$  будет соответствовать определенная фазовая траектория). Это будут параболы степени  $\gamma$  с осью

$$x = -k_1 r_1 \quad (17.37)$$

и с единым началом в точке  $H$  (рис. 17.4), имеющей координаты

$$x = -k_1 r_1, \quad y = -k_1 k_2 r_1.$$

На рис. 17.4 показаны все ветви этих парабол, лежащие выше линии  $EFCD$  (так как только там справедливы данные выкладки). Направления стрелок на полученных фазовых траекториях определяются тем, что проекция скорости изображающей точки  $v_x = \frac{dx}{dt}$  справа от прямой (17.37) согласно (17.27) будет отрицательна, а слева — положительна; проекция же  $v_y = \frac{dy}{dt}$  согласно (17.28) выше прямой  $y = k_2 x$  будет отрицательна, а ниже — положительна (во всех точках прямой  $y = k_2 x$  касательные к фазовым траекториям горизонтальны).

Аналогично строятся и все фазовые траектории ниже линии  $EFCD$ , так как их дифференциальное уравнение отличается от (17.32) только замной  $+r_1$  на  $-r_1$  согласно (17.31).

В результате на рис. 17.4 видим, что все фазовые траектории, исходящие из особого отрезка  $FOC$ , расходятся, а все траектории, идущие от краев чертежа, сходятся. Как те, так и другие асимптотически приближаются к установившемуся предельному циклу, обозначенному на чертеже жирной замкнутой кривой (чичевиеобразной). Это соответствует тому, что установившийся процесс в системе является автоколебательным, причем размеры предельного цикла  $a_U$  и  $a_{I_2}$  представляют собой амплитуды автоколебаний соответственно напряжения  $\Delta U$  и тока в обмотке магнита реле  $\Delta I_2$ .

Определить фазовую траекторию, образующую этот предельный цикл, можно как такую кривую (17.33), у которой

$$(x)_{y-i} = -(x)_{y--i}, \quad (17.38)$$

чем определяется значение произвольной постоянной  $C_1$ . Значение  $x$  (17.38) для этой кривой и дает искомую амплитуду  $a_U$ . Амплитуда же  $a_{I_2}$  определяется как ордината пересечения кривой предельного цикла с прямой  $y = k_2 x$  (ибо, как было показано ранее, в точках этой прямой касательные к фазовым траекториям горизонтальны).

Из чертежа (рис. 17.4) видно, что предельный цикл лежит левее точки  $L$  и охватывает точку  $C$ . Поэтому  $x_C < a_U < x_L$ , т. е. амплитуда автоколебаний напряжения заключена в интервале

$$\frac{i_1}{k_2} < a_U < \frac{i_1 + \beta}{\alpha},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются формулами (17.34); амплитуда же  $a_{I_2}$  будет немного больше  $i_1$ .

**Пример 5.** Рассмотрим следящую систему с сухим трением в управляемом объекте, для которой уравнения были написаны в § 16.3. Уравнение объекта (16.52) как нелинейного звена при отсутствии люфтового трения ( $c_2 = 0$ ) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} Jp^2\beta + c \operatorname{sign} p\beta = c_1 i_n \quad \text{при } p\beta \neq 0 \text{ или } p\beta = 0 \text{ и } |i_n| > \frac{c}{c_1}, \\ \beta = \operatorname{const} \quad \text{при } p\beta = 0 \text{ и } |i_n| < \frac{c}{c_1}. \end{aligned} \right\} \quad (17.39)$$

При написании уравнения линейной части системы (16.53) пренебрежем постоянными времени (чтобы иметь возможность рассматривать уравнение всей системы как уравнение второго порядка), а именно:

$$i_n = -(k_6 p + k) \beta.$$

Подставив это в уравнения объекта (17.39) и обозначив

$$a_1 = \frac{c_1 k}{J}, \quad a_2 = \frac{c_1 k}{J}, \quad b_1 = \frac{c}{J}, \quad (17.40)$$

получим уравнение всей следящей системы в целом:

$$(p^2 + a_1 p + a_2) \beta = -b_1 \operatorname{sign} p\beta \quad \text{при } p\beta \neq 0 \text{ или при } p\beta = 0 \text{ и } |\beta| > \frac{c}{c_1 k}, \quad (17.41)$$

$$\beta = \operatorname{const} \quad \text{при } p\beta = 0 \text{ и } |\beta| < \frac{c}{c_1 k}. \quad (17.42)$$



За координаты фазовой плоскости примем, как обычно,  $x = \beta$ ,  $y = p\beta$ . Условие  $y = 0$  и  $|x| < \frac{c}{c_1 k}$ , при котором согласно (17.42) будет  $\beta = \text{const}$ , т. е.

система будет в равновесии, изображается на фазовой плоскости отрезком  $AB$  (рис. 17.5).

Вне этого отрезка согласно (17.41) необходимо отдельно рассмотреть два случая:  $y = p\beta \geq 0$  и  $y = p\beta \leq 0$ , т. е. верхнюю и нижнюю половины фазовой плоскости. При  $y \leq 0$  из (17.41) имеем

$$(p^2 + a_1 p + a_2)x = b_1. \quad (17.43)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (16.23), но со сдвигом на величину  $x = \frac{b_1}{a_1}$ .

Следовательно, ниже оси  $x$  надо нанести такие же кривые, как на рис. 16.9, б (если  $a_1^2 < 4a_2$ ) или как на рис. 16.11, б (если  $a_1^2 > 4a_2$ ), но со сдвигом начала координат в точку  $A$ , что и сделано на рис. 17.5, а и б соответственно.

Аналогичные кривые наносятся и выше оси  $x$ , но только со сдвигом начала координат в точку  $B$  (рис. 17.5), так как согласно (17.41) при  $y > 0$  имеем уравнение

$$(p^2 + a_1 p + a_2)x = -b_1. \quad (17.44)$$

В обоих случаях (рис. 17.5, а и б) система устойчива, причем в первом случае переходный процесс состоит из конечного числа затухающих колебаний, а во втором случае имеем апериодическое движение. Положение равновесия объекта определяется неоднозначно, он может остановиться в любой точке особого отрезка  $AB$  (рис. 17.5), как это было уже ранее при наличии зоны нечувствительности (см. пример 1). Особый отрезок  $AB$  определяется соотношением  $|M_{\text{впр}}| = |c_1 i_{\text{я}}| < c$ , где  $c$  — абсолютное значение момента сухого трения при движении управляемого объекта.

Заметим, что произведенное здесь упрощение уравнений системы хотя и позволило решить их точно, но это решение, дающее в результате устойчивость системы при любых числовых значениях параметров системы, неполно отражает действительную картину явлений в данной нелинейной системе.

## § 17.2. Теоремы прямого метода Ляпунова и их применение

Предварительно заметим, что при изложении прямого метода Ляпунова, именуемого также второй метод Ляпунова, будем пользоваться дифференциальными уравнениями автоматической системы в форме уравнений первого порядка, или уравне-

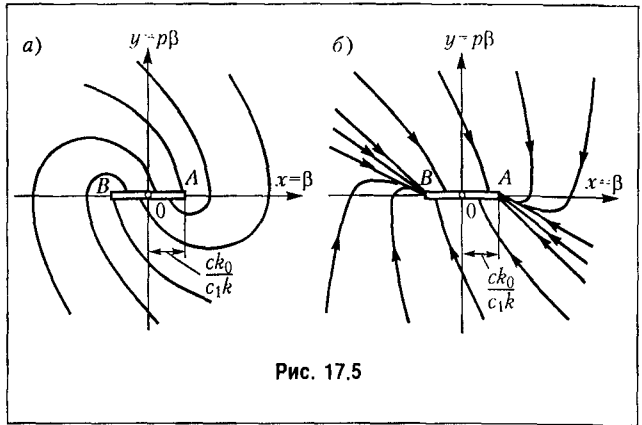


Рис. 17.5

ний состояния, полагая, что они записаны для переходного процесса в отклонениях всех переменных от их значений в установившемся процессе при новых постоянных значениях возмущающего  $f = f^0$  и задающего  $g = g^0$  воздействий. Следовательно, эти уравнения для нелинейной системы  $n$ -го порядка будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \right\} \quad (17.45)$$

где функции  $X_1, X_2, \dots, X_n$  произвольны и содержат любого вида нелинейности, но всегда удовлетворяют условию

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (17.46)$$

так как в установившемся состоянии все отклонения переменных и их производные равны, очевидно, нулю по самому определению понятия этих отклонений.

Нам понадобятся в дальнейшем еще следующие сведения.

**Понятие о знакоопределенных, знакопостоянных и знакопеременных функциях.**

Пусть имеется функция нескольких переменных

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Представим себе  $n$ -мерное фазовое пространство (см. § 16.1), в котором  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются прямоугольными координатами (это будут, в частности, фазовая плоскость при  $n = 2$  и обычное трехмерное пространство при  $n = 3$ ). Тогда в каждой точке указанного пространства функция  $V$  будет иметь некоторое определенное значение. Нам понадобятся в дальнейшем функции  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которые обращаются в нуль в начале координат (т. е. при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ) и непрерывны в некоторой области вокруг него.

*Функция  $V$  называется знакоопределенной* в некоторой области, если она во всех точках этой области вокруг начала координат сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме только самого начала координат.

*Функция  $V$  называется знакопостоянной*, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

*Функция  $V$  называется знакопеременной*, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Приведем примеры всех трех типов функций  $V$ . Пусть  $n = 2$  и  $V = x_1^2 + x_2^2$ . Это будет знакоопределенная (положительная) функция, так как  $V = 0$  только тогда, когда одновременно  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ , и  $V > 0$  при всех вещественных значениях  $x_1$  и  $x_2$ . Аналогично при любом  $n$  функция  $V = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  будет знакоопределенной положительной, а  $V = -(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$  — знакоопределенной отрицательной.

Если взять функцию  $V = x_1^2 + x_2^2$  при  $n = 3$ , то она уже не будет знакоопределенной, так как, оставаясь положительной при любых  $x_1, x_2$  и  $x_3$  она может обращаться в нуль не только при  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , но также и при любом значении  $x_3$ , если  $x_1 = x_2 = 0$  (т. е. на всей оси  $x_3$ , рис. 17.9, а). Следовательно, это будет знакопостоянная (положительная) функция.

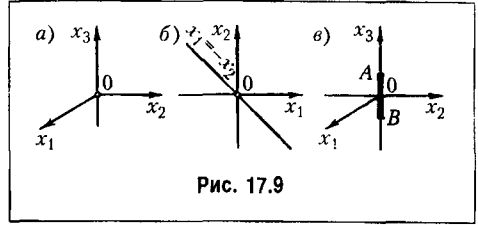


Рис. 17.9

Наконец, функция  $V = x_1 + x_2$  будет знакопеременной, так как она положительна для всех точек плоскости справа от прямой  $x_1 = -x_2$  (рис. 17.9, б) и отрицательна слева от этой прямой.

Заметим, что в некоторых частных задачах нам понадобится также функция  $V$ , которая обращается в нуль не в начале координат, а на заданном конечном отрезке  $AB$  (рис. 17.9, в). Тогда знакоопределенность функции  $V$  будет обозначать ее неизменный знак и необращение в нуль в некоторой области вокруг этого отрезка.

**Функция Ляпунова и ее производная по времени.** Любую функцию

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{17.47}$$

тождественно обращающуюся в нуль при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , будем называть функцией Ляпунова, если в ней в качестве величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  взяты те отклонения переменных в переходном процессе

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \dots, \quad x_n = x_n(t),$$

в которых записываются уравнения (17.45) для этой системы.

Производная от функции Ляпунова (17.47) по времени будет

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}. \tag{17.48}$$

Подставив сюда значения  $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$  из заданных уравнений система в общем случае (17.45), получим производную от функции Ляпунова по времени в виде

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n, \tag{17.49}$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — правые части уравнений (17.45), представляющие собой заданные функции от отклонений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Следовательно, производная от функции Ляпунова по времени, так же как и сама  $V$ , является некоторой функцией отклонений, т. е.

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{17.50}$$

причем согласно свойству (17.46) эта функция  $W$ , так же как и сама  $V$ , тождественно обращается в нуль при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Поэтому к ней в одинаковой степени можно применять все те же понятия знакоопределенности, знакопостоянства и знакопеременности в некоторой области вокруг начала координат, о которых говорилось выше по отношению к функции  $V$ .

Здесь шла речь только об уравнениях (нелинейных), в которые не входит в явном виде время  $t$ , так как только этот случай будет рассматриваться в дальнейшем. Вообще же метод Ляпунова может применяться и при наличии времени  $t$  в явном виде, в частности для уравнений с переменными коэффициентами (линейных и нелинейных).

Базируясь на этих предварительных сведениях, дадим общую формулировку теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости нелинейных систем и покажем их справедливость. Теоремы эти годятся для исследования устойчивости систем управления не только при малых, но и при больших отклонениях, если для них справедливы исходные уравнения данной системы управления. Устойчивость системы при любых больших начальных отклонениях называется коротко — *устойчивостью в целом*.

**Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем.** Теорема формулируется следующим образом: если при заданных в форме (17.45) уравнениях системы  $n$ -го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , чтобы ее производная по времени  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку  $V$ , то данная система устойчива. При знакоопределенной функции  $W$  будет иметь место асимптотическая устойчивость.

Проиллюстрируем справедливость этой теоремы на наглядных геометрических образах. Для простоты возьмем систему третьего порядка ( $n = 3$ ). Уравнения (17.45) для нее в общем виде будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= X_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (17.51)$$

Возьмем знакоопределенную положительную функцию Ляпунова в виде

$$V = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2, \quad (17.52)$$

где  $a, b, c$  — произвольно заданные вещественные числа.

Будем придавать величине  $V$  возрастающие постоянные значения:  $V = 0, C_1, C_2, C_3, \dots$ , что означает

$$\begin{aligned} a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= 0, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_1, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Первое из этих выражений соответствует одной точке  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  (началу координат фазового пространства), а остальные — поверхностям эллипсоидов в фазовом пространстве, причем каждый последующий эллипсоид содержит внутри себя целиком предыдущий (рис. 17.10).

Возьмем теперь производную от функции Ляпунова по времени. Согласно (17.49) и (17.52)

$$\frac{dV}{dt} = 2a^2 x_1 X_1(x_1, x_2, x_3) + 2b^2 x_2 X_2(x_1, x_2, x_3) + 2c^2 x_3 X_3(x_1, x_2, x_3) = W(x_1, x_2, x_3),$$

где функции  $X_1, X_2, X_3$  берутся из заданных уравнений системы (17.51).

Если полученная таким путем функция  $W(x_1, x_2, x_3)$  окажется знакоопределенной отрицательной, т. е. если

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad (17.53)$$

во всех точках исследуемого фазового пространства, кроме одного только начала координат, где

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (\text{при } x_1 = x_2 = x_3 = 0),$$

то при любых начальных условиях изображающая точка  $M$  (рис. 17.10) вследствие (17.53) будет двигаться в сторону уменьшения значения  $V$ , т. е. будет пересекать эллипсоиды, изображенные на рис. 17.10, извне внутрь. В результате с течением времени изображающая точка  $M$  будет стремиться к началу координат  $O$  фазового пространства (асимптотическая устойчивость) и уже никак не сможет выйти за пределы тех эллипсоидов, в которые она проникла.

Это и означает затухание всех отклонений  $x_1, x_2, x_3$  в переходном процессе с течением времени. Таким образом, установлена устойчивость данной системы, что иллюстрирует справедливость теоремы для системы третьего порядка (в случае знакоопределенной функции  $W$ ).

Отсюда вытекает справедливость теоремы и в общем случае. Рассуждения остаются аналогичными, только вместо трех уравнений (17.51) будет  $n$  уравнений (17.45). Как и раньше, для любой знакоопределенной положительной функции Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$  получим некоторые замкнутые поверхности, окружающие начало координат (рис. 17.10), но уже не в обычном трехмерном, а в  $n$ -мерном фазовом пространстве (их иногда называют гиперповерхностями).

Поэтому, если производная  $\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  окажется знакоопределенной отрицательной, то траектория изображающей точки  $M$  в  $n$ -мерном пространстве при любых начальных условиях с течением времени будет пересекать указанные поверхности только извне внутрь, что и свидетельствует об устойчивости данной системы.

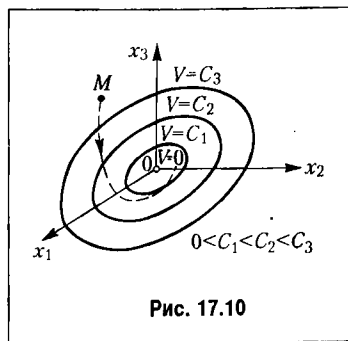


Рис. 17.10

Если же функция  $W$  будет не знакоопределенной, а знакопостоянной, то очевидно, что траектория изображающей точки  $M$  не везде будет пересекать поверхности  $V = C$ , а может их касаться в тех точках, где  $W$  обращается в нуль (помимо начала координат). Но так как во всех других местах фазового пространства функция  $W$  имеет один и тот же знак, вследствие чего изображающая точка может идти только извне внутрь поверхности  $V = C$ , то при решении задачи остается только проверить, не «застрянет» ли изображающая точка там, где  $W = 0$  (см. пример ниже).

**Замечания к теореме Ляпунова об устойчивости.** По поводу сформулированной теоремы Ляпунова об устойчивости системы необходимо сделать следующие два важных замечания.

1. В теореме речь идет о подборе функции Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Вообще говоря, при заданных в форме (17.45) уравнениях системы управления можно подобрать несколько различных вариантов функции  $V$ , поскольку требуется только знакоопределенность ее и ее производной. Различные варианты функции  $V$ , удовлетворяющие теореме, могут дать соответственно различные варианты условий устойчивости для одной и той же системы. При этом одни из них будут шире, другие уже, последние могут входить в первые как частный случай и т. д.

Поэтому, вообще говоря, данная теорема Ляпунова обеспечивает получение достаточных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми, т. е. при выполнении условий теоремы система наверняка будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам. В самом деле, если выбрана функция  $V$ , удовлетворяющая теореме, нет уверенности в том, что нельзя подобрать другой вариант функции  $V$ , который бы еще более полно охватывал область устойчивости данной системы.

Геометрически это значит, что, получив определенное семейство поверхностей  $V = C$  (рис. 17.10) и убедившись, что траектории изображающей точки  $M$  приближаются к началу координат, пересекая эти поверхности извне внутрь, нельзя быть уверенным в том, что не существует еще других вариантов траекторий изображающей точки  $M$ , которые в отдельных местах могут пересекать данные поверхности изнутри вовне, но все же с течением времени в конце концов неограниченно приближаться к началу координат. Такие траектории будут соответствовать другому семейству поверхностей  $V = C$ , т. е. другому варианту выбора функции Ляпунова.

В ряде технических задач можно вполне удовлетвориться этими достаточными условиями устойчивости. От более или менее удачного подбора функции Ляпунова будет зависеть большая или меньшая близость полученных достаточных условий устойчивости к необходимым и достаточным, т. е. более или менее полный охват всей области устойчивости данной системы. Существуют, конечно, и такие функции  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которые соответствуют всей области устойчивости.

2. К сформулированной выше теореме Ляпунова необходимо добавить, что понятие устойчивости по Ляпунову допускает, чтобы *при знакоопределенной функции  $V$  производная от нее  $W$  была не обязательно знакоопределенной или знакопостоянной, а могла быть и тождественно равна нулю во всем рассматриваемом фазовом пространстве*. В этом случае, проводя аналогичные прежним рассуждения, легко убедиться, что изображающая точка  $M$  (рис. 17.10) будет оставаться все время на какой-нибудь одной из поверхностей  $V = \text{const}$ , куда ее забросили начальные условия. В результате

система хотя и не будет асимптотически приближаться к установившемуся состоянию, но все же будет все время в достаточной близости от него.

**Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем.** Поскольку предыдущая теорема Ляпунова дает, вообще говоря, только достаточные условия устойчивости и поскольку кроме области устойчивости нелинейная система может иметь целый ряд особых областей (см. § 16.1), то может возникнуть потребность в отдельном определении области неустойчивости путем использования нижеследующей теоремы Ляпунова, которая дает достаточные условия неустойчивости системы.

Теорема формулируется так: *если при заданных в форме (17.45) уравнениях системы  $n$ -го порядка производная  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от какой-нибудь функции Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  окажется знакоопределенной, причем сама функция  $V$  в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком производной  $W$ , то данная система неустойчива.*

Справедливость этой теоремы иллюстрируется геометрически следующим образом. Пусть для какой-нибудь заданной системы второго порядка ( $n = 2$ ) найдена такая знакпеременная функция  $V(x_1, x_2)$ , для которой производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2(x_1, x_2) = W(x_1, x_2)$$

оказалась знакоопределенной положительной. Пусть при этом линии  $V(x_1, x_2)$  на фазовой плоскости располагаются, как указано на рис. 17.11, где линии  $AB$  и  $CD$  соответствуют значениям  $V = 0$  и разделяют те области, внутри которых  $V > 0$  и  $V < 0$ .

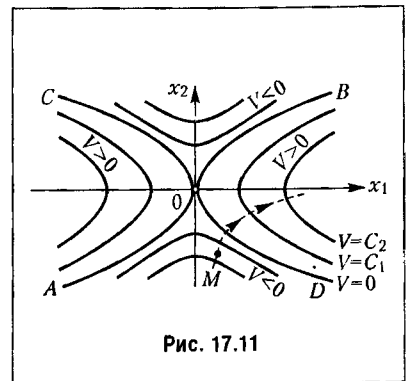
Возьмем изображающую точку  $M$ , как показано на рис. 17.11. Поскольку там  $V < 0$  и везде

$$W = \frac{dV}{dt} > 0,$$

то изображающая точка  $M$  с течением времени будет двигаться и пересекать линии  $V = C$ , переходя от меньших значений  $C$  к большим. Она может при этом лишь временно приблизиться к началу координат, но в конце концов будет неограниченно удаляться от начала координат. Это соответствует расходящемуся процессу, т. е. *неустойчивости* системы. Аналогично можно показать справедливость теоремы и для системы любого порядка  $n$ , проводя те же рассуждения для  $n$ -мерного фазового пространства.

Приведем два примера применения изложенных теорем Ляпунова к исследованию нелинейных систем автоматического управления.

**Пример учета нелинейности привода управляющего органа.** Такой пример применительно к системе самолета с курсовым автопилотом (в упрощен-



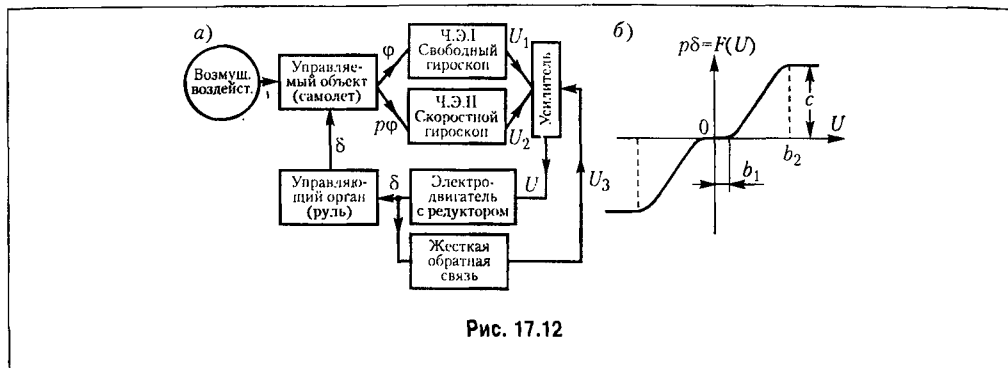


Рис. 17.12

ном виде) был рассмотрен в работе А. И. Лурье и В. Н. Постникова. Схема данной системы представлена на рис. 17.12, а.

Пусть все звенья системы являются линейными, за исключением электродвигателя (с редуктором), для которого будем рассматривать его реальную характеристику (рис. 17.12, б). Она может иметь произвольное криволинейное очертание с зоной застоя (при  $|U| < b_1$ ) и с зоной насыщения (при  $|U| > b_2$ ). Наклон характеристики и ее криволинейность могут быть любыми, лишь бы только соблюдались условия

$$\frac{dF}{dU} > 0, \quad F > 0 \text{ при } U > b_1 \text{ и } F < 0 \text{ при } U < -b_1. \quad (17.54)$$

Требуется найти условия устойчивости данной системы.

Уравнение самолета как управляемого объекта в грубо упрощенном виде будет

$$(T_1 p + 1) p \psi = -k_1 \delta, \quad (17.55)$$

где  $\psi$  — отклонение курсового угла самолета;  $\delta$  — отклонение руля.

Уравнения чувствительных элементов (гироскопов с потенциометрами):

$$U_1 = k_2 \psi, \quad U_2 = k_3 p \psi. \quad (17.56)$$

Уравнение обратной связи

$$U_3 = k_4 \delta. \quad (17.57)$$

Уравнение усилителя

$$U = k_5 U_1 + k_6 U_2 - k_7 U_3. \quad (17.58)$$

Уравнение электродвигателя с редуктором и рулем

$$p \delta = F(U), \quad (17.59)$$

где  $F(U)$  задается графиком рис. 17.12, б.



Уравнения (17.56), (17.57), и (17.58) можно свести к одному:

$$U = k_{\psi}\psi + k_{p\psi}p\psi - k_{oc}\delta, \quad (17.60)$$

где

$$k_{\psi} = k_2 k_5, \quad k_{p\psi} = k_3 k_6, \quad k_{oc} = k_4 k_7.$$

Для перехода к уравнениям вида (17.45) введем новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{T_1 k_1} p\psi + \frac{1}{T_1} \delta, & x_2 &= -\frac{1}{T_1} \delta, \\ x_3 &= \frac{1}{T_1 k_1 k_{p\psi}} U = \frac{k_{\psi}}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \psi + \frac{1}{T_1 k_1} p\psi - \frac{k_{oc}}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \delta \end{aligned} \right\} \quad (17.61)$$

и безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{T_1}. \quad (17.62)$$

С введением этих переменных дифференциальные уравнения всей системы (17.55), (17.59), (17.60) преобразуются к виду (17.45), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -x_1 + f(x_3), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -f(x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= (\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - r f(x_3), \end{aligned} \right\} \quad (17.63)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{T_1 k_{\psi}}{k_{p\psi}}, & r &= \frac{k_{\psi}}{k_1 k_{p\psi}}, \\ f(x_3) &= F(T_1 k_1 k_{p\psi} x_3), \end{aligned} \right\} \quad (17.64)$$

т. е. функция  $f(x_3)$  имеет все те же свойства, что и заданная функция  $F(U)$  (рис. 17.12, б), и отличается лишь масштабом чертежа по оси абсцисс в связи с заменой переменной  $U$  на  $x_3$  согласно третьему из равенств (17.61).

Установившийся процесс полета при данной системе согласно (17.55), (17.59), (17.60) и графику рис. 17.12, б будет иметь место при

$$\delta = 0, \quad p\psi = 0, \quad |\psi| < \frac{b_1}{k_{p\psi}}, \quad (17.65)$$

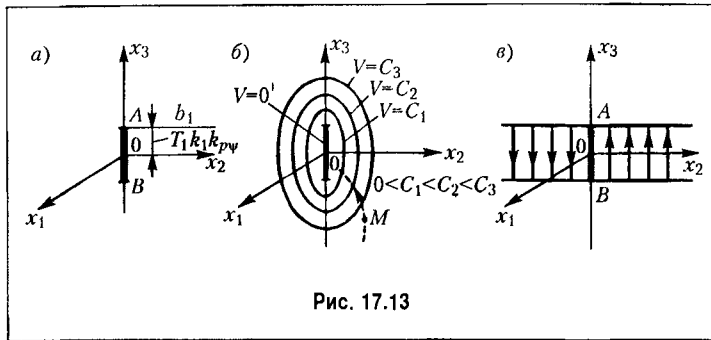


Рис. 17.13

т. е. наличие зоны застоя двигателя приводит к тому, что в установившемся процессе курсовой угол может принять любое постоянное значение в пределах (17.65).

В новых переменных (17.61) установившийся процесс полета определяется значениями:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{p\psi}}, \quad (17.66)$$

чему соответствует любая точка отрезка  $AB$  в фазовом пространстве (рис. 17.13, а).

При отыскании условий устойчивости рассмотрим два случая:  $\gamma > 1$  и  $0 < \gamma < 1$ .

С л у ч а й  $\gamma > 1$ . Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{\gamma - 1}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3. \quad (17.67)$$

Здесь интеграл будет всегда положительным, так как функция  $f(x_3)$  нечетная (см. условие (17.54)). Поэтому  $V$  есть знакоопределенная положительная функция, если  $\gamma > 1$ , обращающаяся в нуль на отрезке установившегося процесса  $AB$  (рис. 17.13). Поверхности  $V(x_1, x_2, x_3) = C$  окружают этот отрезок (рис. 17.13, б), стягиваясь к нему с уменьшением  $C$ .

Составим производную от функции Ляпунова:

$$W = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau},$$

причем частные производные возьмем из (17.67), а производные по безразмерному времени — из уравнений системы (17.63). Тогда

$$W = -(\gamma - 1)x_1^2 + (\gamma - 1)x_1 f(x_3) - \gamma x_2 f(x_3) + f(x_3)[(\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - r f(x_3)].$$

Представим это в виде

$$W = -(\gamma - 1)[f(x_3) - x_1]^2 - (r - \gamma + 1)[f(x_3)]^2. \quad (17.68)$$

Эта функция  $W$  знакопостоянная, так как она не включает в себя координату  $x_2$ , а потому обращается в нуль не только на отрезке установившегося процесса  $AB$ , а на всей полосе шириной  $AB$  в плоскости  $x_2 x_3$  (рис. 17.13, в). Но вне этой полосы согласно (17.68) она будет всюду отрицательной при

$$r > \gamma - 1, \quad \text{если } \gamma > 1. \quad (17.69)$$

Поэтому согласно теореме Ляпунова об устойчивости выражение (17.69) является достаточным условием устойчивости рассматриваемой нелинейной системы самолета с курсовым автопилотом (при любой кривизне и любом наклоне характеристики двигателя, имеющей вид рис. 17.12, б).

Траектория изображающей точки  $M$  будет пересекать поверхности  $V = C$  извне внутрь везде, где  $W = \frac{dV}{dt} < 0$ . Нужно только проверить, не «застрянет» ли изображающая точка  $M$  там, где  $W$  обращается в нуль (помимо отрезка установившегося процесса  $AB$ ). В данном случае речь идет о том, не останется ли изображающая точка на полосе (показанной на рис. 17.13, в), где  $W = 0$ , если она случайно на нее попадет.

Для решения этого вопроса найдем проекции скорости изображающей точки  $M \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}$ , когда эта точка находится в любом месте указанной полосы. Поскольку там

$$x_1 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{\psi}}, \quad f(x_3) = 0,$$

то искомые проекции скорости согласно (17.63) будут

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \gamma x_2.$$

Таким образом, если изображающая точка  $M$  попадет на указанную полосу вне отрезка  $AB$  (рис. 17.13, в), то она не останется в ней, а пройдет ее поперек по прямой, параллельной оси  $x_3$ , с постоянной скоростью, равной  $\gamma x_2$  как показано стрелками на рис. 17.13, в. Пройдя полосу, изображающая точка снова будет пересекать поверхности  $V = C$  извне внутрь, т. е. данная система управления будет устойчивой.

С л у ч а й  $0 < \gamma < 1$ . Для этого случая возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1-\gamma}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3.$$

Производная от нее будет

$$W = \frac{dV}{d\tau} = -(1-\gamma)x_1^2 - r[f(x_3)]^2.$$

Отсюда аналогично предыдущему приходим к достаточному условию устойчивости системы в виде

$$r > 0, \quad \text{если } 0 < \gamma < 1. \quad (17.70)$$

О б щ и й в ы в о д. Полученные в данной задаче достаточные условия устойчивости (17.69) и (17.70) после подстановки выражений  $\gamma$  и  $r$  через параметры системы (17.64) принимают вид соответственно

$$\begin{aligned} k_{\text{ос}} &> (T_1 k_{\psi} - k_{p\psi}) k_1, & \text{если } k_{p\psi} < T_1 k_{\psi}, \\ k_{\text{ос}} &> 0, & \text{если } k_{p\psi} < T_1 k_{\psi}. \end{aligned}$$

Первое из этих условий устойчивости говорит о том, что передаточное число обратной связи надо сделать достаточно большим, если производная  $p\psi$  введена в алгоритм управления недостаточно интенсивно. Из второго же условия устойчивости следует, что система будет устойчива при любой обратной связи, если передаточное число по производной достаточно велико.

Как видим, данные условия устойчивости не зависят от формы характеристики двигателя (рис. 17.12, б), т. е. они одинаковы при любой кривизне, любом наклоне и любой зоне застоя (в том числе и при однозначной релейной характеристике двигателя постоянной скорости, а также и при линейной характеристике). Такие условия называются условиями *абсолютной устойчивости*. Они гарантируют, что при их выполнении система будет наверняка устойчива при любой нелинейности с ограничением лишь (17.54). В действительности же система может быть устойчивой и в некоторой области за пределами этих условий устойчивости при конкретно заданной форме нелинейности (см. гл. 18).

**Пример учета нелинейности измерителя управляемой величины.** На основании вышесказанных теорем Ляпунова М. А. Айзерман показал, что если уравнение системы содержит нелинейность

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + F(x_k), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \right\} \quad (17.71)$$

где  $F(x_k)$  — однозначная нелинейная функция, обращающаяся в нуль при  $x_k = 0$ , а  $k$  — любое целое число из  $1, 2, \dots, n$ , то для устойчивости системы достаточно, чтобы для линеаризованной системы (17.71) при замене  $F(x_k) = ax_k$  можно было построить функцию Ляпунова  $V$ , производная от которой  $\dot{V}$  является знакоопределенной отрицательной функцией при любом значении  $a$  в интервале  $a_1 < a < a_2$ , если кривая  $F(x_k)$  лежит между прямыми  $F = a_1x_k$  и  $F = a_2x_k$ , как изображено, например, на рис. 17.14, а.

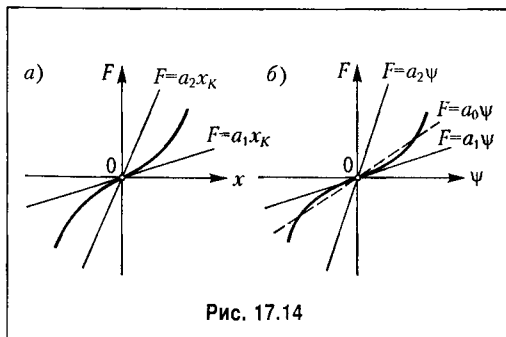


Рис. 17.14

Пусть, например, в прежней системе самолета с курсовым автопилотом (рис. 17.12, а) уравнение объекта имеет вид (17.55), привод руля имеет линейную характеристику  $p\delta = k_8 U$ , но потенциометр чувствительного элемента  $I$  (измерителя управляемой величины  $\psi$ ) имеет нелинейную характеристику, в результате чего получается нелинейное уравнение автопилота

$$p\delta = F(\psi) + k_{p\psi} p\psi - k_{oc}\delta, \quad (17.72)$$

где

$$k_{p\psi} = k_3 k_6 k_8, \quad k_{oc} = k_4 k_7 k_8,$$

а  $F(\psi)$  — нелинейная функция, например, вида рис. 17.14, б.

Введем обозначения переменных:

$$x_1 = -\delta, \quad x_2 = \psi, \quad x_3 = p\psi.$$

Тогда уравнения автопилота (17.72) и самолета (17.55) примут вид (17.71), а именно:

$$\left. \begin{aligned} px_1 &= -k_{oc}x_1 - k_{p\psi}x_3 - F(x_2), \\ px_2 &= x_3, \\ px_3 &= \frac{k_1}{T_1}x_1 - \frac{1}{T_1}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (17.73)$$

Зададимся функцией  $V$  в виде

$$V = \frac{1}{2}b_1x_1^2 + \frac{1}{2}b_2x_2^2 + \frac{1}{2}b_3x_3^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3,$$

где все шесть коэффициентов  $b$  неизвестны. Потребуем, чтобы функция

$$W = \frac{\partial V}{\partial x_1} px_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} px_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} px_3 \quad (17.74)$$

при фиксированном значении  $F(x_2) = a_0x_2$  в уравнениях (17.73) имела вид

$$W_0 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \quad (17.75)$$

Тогда путем приравнивания соответствующих коэффициентов выражений (17.74) и (17.75) можно найти все шесть величин  $b$  из системы шести алгебраических уравнений. Здесь приводится результат решения только для трех коэффициентов, которые понадобятся в дальнейшем, а именно:

$$b_1 = \frac{D_1}{a_1 D}, \quad b_{12} = \frac{1}{a_0}, \quad b_{13} = \frac{D_{13}}{a_0 D}, \quad (17.76)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D &= (T_1 k_{oc} + 1)(k_{oc} + k_{p\psi} k_1) - a_0 k_1 T_1, \\ D_1 &= a_0 k_1 (T_1 k_{p\psi} + k_1) + (T_1 k_{oc} + 1)(a_0 + k_1), \\ D_{13} &= T_1 [a_0 (T_1 a_0 + k_{oc} k_1 - k_{p\psi}) + k_{oc} (T_1 k_{oc} + 1)]. \end{aligned} \right\} \quad (17.77)$$

Затем потребуем, чтобы выражение (17.74) при замене в уравнениях (17.73)  $F(x_2) = ax_2$ , где  $a = a_0 + \Delta a$ , имело вид

$$W = -(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + 2 c_{12} x_1 x_2 + 2 c_{13} x_1 x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3),$$

что дает значения:

$$\left. \begin{aligned} c_1 = c_3 = 1, \quad c_2 = b_{12} \Delta a + 1, \\ 2c_{12} = -b_1 \Delta a, \quad 2c_{13} = 0, \quad 2c_{23} = b_{13} \Delta a. \end{aligned} \right\} \quad (17.78)$$

Функция  $W$  будет знакоопределенной отрицательной, как требуется по условию, если

$$c_2 > 0, \quad c_2 c_3 - c_{23}^2 > 0, \quad c_1 c_2 c_3 + 2 c_{12} c_{13} c_{23} - c_1 c_{23}^2 - c_2 c_{13}^2 - c_3 c_{12}^2 > 0.$$

Эти неравенства с учетом (17.78) приводятся к следующему:

$$(\Delta a)^2 - \frac{4b_{12}}{b_1^2 + b_{13}^2} \Delta a - \frac{4}{b_1^2 + b_{13}^2} < 0.$$

Подставив сюда (17.76), увидим, что это условие выполняется, если  $\Delta a$  лежит в интервале  $\Delta a_1 < \Delta a < \Delta a_2$  где

$$\Delta a_{1,2} = \frac{2a_0 D}{D_1^2 + D_{13}^2} (D \mp \sqrt{D^2 + D_1^2 + D_{13}^2}), \quad (17.79)$$

откуда видно, что  $\Delta a_1 < 0$  и  $\Delta a_2 > 0$ . При этом требуется еще  $D > 0$ . Нетрудно проверить, что последнее требование совпадает с критерием устойчивости (см. § 6.2) для данной системы в линеаризованном виде при замене  $F(\psi) = a_0 \psi$  (рис. 17.14, б), так как характеристическое уравнение согласно (17.55) и (17.72) в этом случае будет

$$T_1 p^3 + (T_1 k_{oc} + 1) p^2 + (k_{oc} + k_{p\psi} k_1) p + a_0 k_1 = 0. \quad (17.80)$$

Итак, для устойчивости рассматриваемой нелинейной системы достаточно, во-первых, чтобы выполнялся критерий устойчивости Гурвица  $D > 0$  для линеаризованной системы при  $F(\psi) = a_0 \psi$  и, во-вторых, чтобы нелинейная характеристика  $F(\psi)$ , измерителя управляемой величины лежала, как указано на рис. 17.14, б, между прямыми  $F = a_1 \psi$  и  $F = a_2 \psi$ , причем  $a_1 = a_0 + \Delta a_1$ ,  $a_2 = a_0 + \Delta a_2$ , где значения  $\Delta a_{1,2}$  определяются формулой (17.79), в которой величины  $D, D_1, D_{13}$  согласно (17.77) выражаются через параметры данной системы и через первоначально принятое значение  $a_0$  при линеаризации  $F(\psi) = a_0 \psi$ .

Как и в предыдущем примере, здесь получаются условия *абсолютной устойчивости*, т. е. условия, не зависящие от формы нелинейности, но в более узких, чем (17.54), пределах, показанных на рис. 17.14, б. Точные аналитические методы исследования релейных систем рассмотрены в работах [ 67, 89, 95 ] и др.

### § 17.3. Частотный метод В. М. Попова

Решение задачи об абсолютной устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью (т. е. устойчивости при любой форме этой нелинейности со слабым ограничением тина (17.54) или тина рис. 17.14) с помощью теорем прямого метода Ляпунова было проиллюстрировано на двух примерах в § 17.2.

Изложим теперь частотный метод, предложенный румынским ученым В. М. Поповым [69], при использовании которого та же задача решается более простыми приемами, аналогичными частотным способам исследования устойчивости линейных систем.

Если в системе автоматического управления имеется лишь одна однозначная нелинейность

$$y = F(x), \tag{17.81}$$

то, объединив вместе все остальные (линейные) уравнения системы, можно всегда получить общее уравнение линейной части системы (рис. 17.15, а) в виде

$$Q(p)x = -R(p)y, \tag{17.82}$$

где

$$\begin{aligned} Q(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ R(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m, \end{aligned}$$

причем будем считать  $m < n$ .

Пусть нелинейность  $y = F(x)$  имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла  $\arctg k_F$  (рис. 17.15, б), т. е. при любом  $x$

$$0 < F(x) < k_F x. \tag{17.83}$$

Пусть многочлен  $Q(p)$  или, что то же, характеристическое уравнение линейной части  $Q(p) = 0$  имеет все корни с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых корней. Другими словами, допускается, чтобы  $a_n = 0$  или  $a_n = 0$  и  $a_{n-1} = 0$  в выражении  $Q(p)$ , т. е. не более двух нулевых полюсов в передаточной функции линейной части системы

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Приведем без доказательства формулировку теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число  $h$ , при котором при всех  $\omega \geq 0$ ,

$$\left[ \operatorname{Re}(1 + j\omega h)W(j\omega) \right] + \frac{1}{k_F} > 0, \tag{17.84}.$$

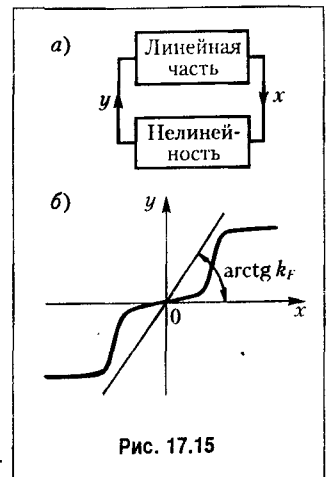


Рис. 17.15

где  $W(j\omega)$  — амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы

$$\text{Im } W(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0,$$

а при двух нулевых полюсах

$$\text{Re } W(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0, \text{ а } \text{Im } W(j\omega) < 0 \text{ при малых } \omega.$$

Теорема справедлива также и при наличии в знаменателе  $Q(p)$  передаточной функции линейной части не более двух чисто мнимых корней, но при этом требуются некоторые другие простые добавочные условия [2], называемые условиями предельной устойчивости.

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением *видоизмененной частотной характеристики*  $W^*(j\omega)$ , которая определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} U^*(\omega) &= \text{Re } W^*(j\omega) = \text{Re } W(j\omega), \\ V^*(\omega) &= \text{Im } W^*(j\omega) = \omega T_0 \text{Im } W(j\omega), \end{aligned} \right\} \quad (17.85)$$

где  $T_0 = 1 \text{ с}$  — нормирующий множитель.

График  $W^*(j\omega)$  имеет вид (рис. 17.16, а), похожий на  $W(j\omega)$ , когда при отсутствии в  $W(p)$  нулевых полюсов в выражениях  $Q(p)$  и  $R(p)$  разность степеней  $n - m > 1$ . Если же разность степеней  $n - m = 1$ , то конец графика  $W^*(j\omega)$  будет на мнимой оси ниже начала координат (рис. 17.16, б).

Преобразуем левую часть неравенства (17.84):

$$\left[ \text{Re}(1 + j\omega h)W(j\omega) \right] + \frac{1}{k_F} = \text{Re } W(j\omega) - \omega h \text{Im } W(j\omega) + \frac{1}{k_F}.$$

Тогда, положив

$$W^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$$

и использовав соотношения (17.85), получим вместо (17.84) для теоремы В. М. Попова условие

$$U^*(\omega) - \frac{h}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k_F} = U^*(\omega) - h_0 V^*(\omega) + \frac{1}{k_F} > 0 \quad (17.86)$$

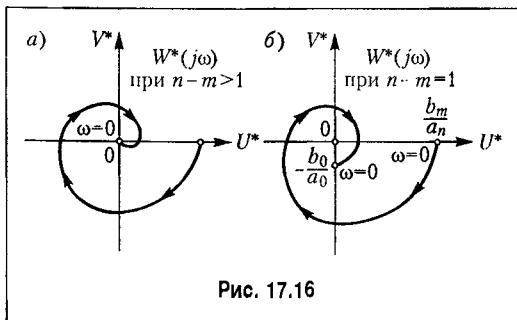


Рис. 17.16

при всех  $\omega \geq 0$ .

Очевидно, что равенство

$$U^*(\omega) - h_0 V^*(\omega) + \frac{1}{k_F} = 0 \quad (17.87)$$

представляет уравнение прямой на плоскости  $W^*(j\omega)$ .

Отсюда вытекает следующая графическая интерпретация теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости не-



линейной системы, достаточно подобрать такую прямую на плоскости  $W^*(j\omega)$ , проходящую через точку

$\left(-\frac{1}{k_F}, j0\right)$ , чтобы, вся кривая  $W^*(j\omega)$  лежала справа от этой прямой.

На рис. 17.17 показаны случаи выполнения теоремы. В этих случаях нелинейная система устойчива при любой форме однозначной нелинейности, ограниченной лишь условием (17.83). На рис. 17.18 показаны случаи, когда теорема не выполняется, т. е. нелинейная система не имеет абсолютной устойчивости.

Заметим, что, например, в задаче о самолете с автопилотом (§ 17.2) условие (17.54) означает любое расположение нелинейной характеристики во всем первом (и третьем) квадранте. Во всех подобных случаях согласно рис. 17.15 имеем  $k = \infty$ . В теореме В.М. Попова при этом вместо (17.84) получаем условие

$$\operatorname{Re}(1 + j\omega h)W(j\omega) > 0, \quad (17.88)$$

а вместо (17.86)

$$U^*(\omega) - h_0 V^*(\omega) > 0 \quad (17.89)$$

при всех  $\omega > 0$ . Поэтому в графической интерпретации прямая должна проходить не так, как показано на рис. 17.17, а через начало координат.

В частности, для указанного примера (§ 17.2) уравнения (17.63) можно преобразовать к виду

$$y = f(x_3), \quad (1+p)p^2 x_3 = [rp^2 + (1+r)p + \gamma]y,$$

где обозначено  $y = -px_2$ , причем  $p$  — производная по  $t$ . Передаточная функция линейной части системы будет

$$W(p) = \frac{rp^2 + (1+r)p + \gamma}{p^2(1+p)}.$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{-r\omega^2 + j(1+r)\omega + \gamma}{-\omega^2(1+j\omega)}.$$

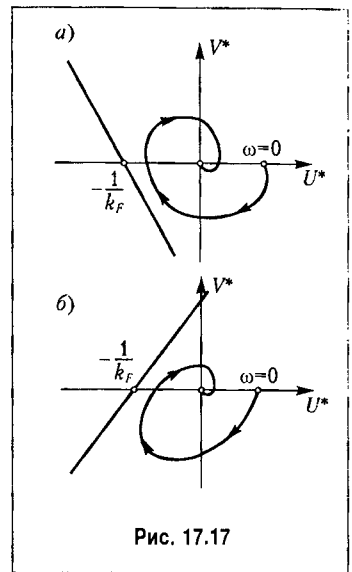


Рис. 17.17

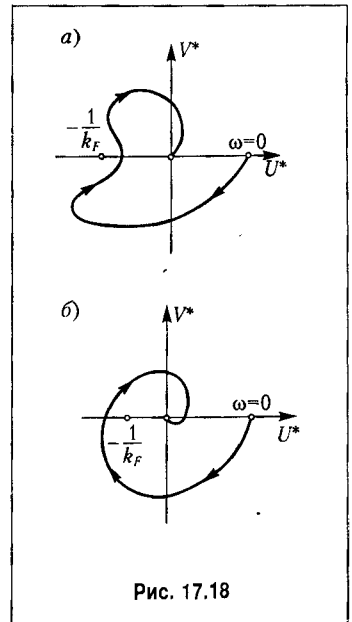


Рис. 17.18

Умножив числитель и знаменатель на  $1 - j\omega$ , получим

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{\gamma + \omega^2}{-\omega^2(1 + \omega^2)}, \quad \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{(1 + r - \gamma)\omega + r\omega^3}{-\omega^2(1 + \omega^2)},$$

а согласно (17.85)

$$\left. \begin{aligned} U^* &= \frac{\gamma + \omega^2}{-\omega^2(1 + \omega^2)}, \\ T_0^{-1}V^* &= \frac{(1 + r - \gamma)\omega^2 + r\omega^4}{-\omega^2(1 + \omega^2)} = \frac{1 + r - \gamma + r\omega^2}{-1 - \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.90)$$

Неравенство (17.89) принимает вид

$$-(\gamma + \omega^2) + h\omega^2(1 + r - \gamma + r\omega^2) > 0. \quad (17.91)$$

Очевидно, что это неравенство может быть выполнено при любом  $\omega > 0$ , если

$$1 + r - \gamma > 0 \quad (17.92)$$

и если  $h$  берется сколь угодно большим, чтобы обеспечить неравенство (17.91) при сколь угодно малых  $\omega$ .

Полученное условие (17.92) выполняется при

$$\begin{aligned} r &> \gamma - 1, & \text{если } \gamma > 1, \\ r &> 0, & \text{если } 0 < \gamma < 1, \end{aligned}$$

что точно совпадает с найденными ранее условиями абсолютной устойчивости данной системы (17.69) и (17.70). Смысл практической реализации этих условий был разъяснен в § 17.2.

Графически критерий устойчивости выражается в том, что вся кривая  $W^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$ , построенная согласно (17.90), расположена (рис. 17.19, а) справа от прямой  $U^* - hV^* = 0$ , обозначенной штрих-пунктиром, со сколь угодно малым наклоном, если  $1 + r - \gamma > 0$ . Если же  $1 + r - \gamma < 0$  (рис. 17.19, б), то такую прямую провести невозможно и, следовательно, нелинейная система не будет абсолютно устойчивой.

Здесь был приведен простой пример, в котором условия устойчивости по методу В. М. Попова выражаются в общем буквенном виде. В боль-

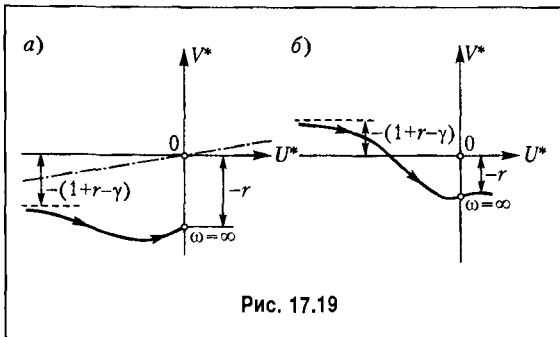


Рис. 17.19

шинстве технических задач этого не получится. Однако видно, что описанный частотный критерий устойчивости В. М. Попова для систем с одной однозначной нелинейностью в его графической форме может быть применен при любой сложности линейной части системы и численно заданных коэффициентах уравнений. Более того, он может быть применен в случае, когда не заданы уравнения, но известна экспериментально снятая амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части  $W(j\omega)$ . Чтобы установить устойчивость системы согласно рис. 17.17,  $W(j\omega)$  надо перестроить в характеристику  $W^*(j\omega)$ , пользуясь формулами (17.85).

Очертание нелинейности может быть неизвестным. Необходимо лишь знать, в пределах какого угла (рис. 17.15) она расположена. Для конкретно заданных форм нелинейности область устойчивости, вообще говоря, будет несколько шире, но данным методом это не определяется (см. гл. 18).

### § 17.4. Исследование систем с переменной структурой

Понятие о системах с переменной структурой было дано в главе 2, а об их уравнениях — в конце главы 16.

Покажем методику исследования систем с переменной структурой при отсутствии внешнего воздействия на примере системы второго порядка при линейном объекте и линейных структурах управляющего устройства, так что нелинейность системы будет заключаться в автоматическом переключении этих структур.

Имея в виду второй порядок системы, используем изображение процессов на фазовой плоскости, которое для линейных систем представлено было выше на рис. 16.8 - 16.13.

Рассмотрим систему (рис. 17.20), не обладающую при постоянной структуре собственной устойчивостью [32]. В самом деле, если  $\Psi = \text{const}$ , то уравнение системы будет

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + ckx = 0$$

и получатся незатухающие колебания, изображаемые на фазовой плоскости concentрическими эллипсами (рис. 16.8).

Если же звену  $\psi$  придать вид, как на рис. 16.27, где  $x_1 = \frac{dx}{dt}$  с переключением согласно формуле (16.71), где  $\alpha = k_1$ ,  $\beta = k_2$ , причем  $k_1 > k_1 > 0$ , то получим уравнения системы

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_1 kx = 0 \text{ при } x_1 x > 0, \quad (17.93)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_2 kx = 0 \text{ при } x_1 x < 0. \quad (17.94)$$

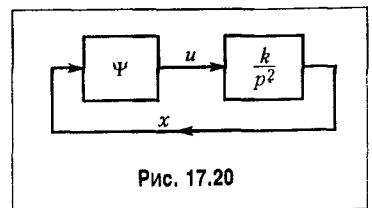


Рис. 17.20

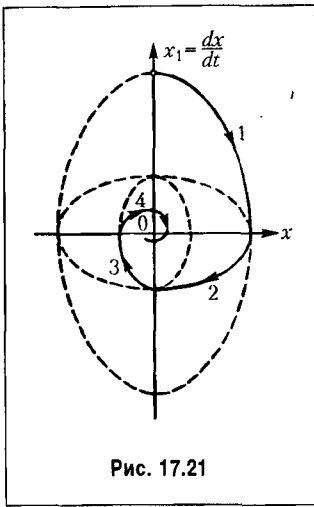


Рис. 17.21

Первое из них будет действовать в первом и третьем квадрантах фазовой плоскости (рис. 17.21), а второе — в четвертом и втором квадрантах. С эллипса 1 в первом квадранте (соответствует коэффициенту  $k_1$ ) изображающая точка переходит на эллипс 2 в четвертом квадранте (соответствует коэффициенту  $k_2$ ), затем на эллипс 3, концентрический с первым (снова коэффициент  $k_1$ ), далее на эллипс 4, концентрический с эллипсом 2, и т. д. В результате таких переключений система становится устойчивой.

В данном примере переходный процесс представляет собой затухающие колебания. В большинстве случаев для избежания колебательных процессов в системах с переменной структурой следует стремиться реализовать скользящий режим. Для этого переключения в системе должны производиться в таких местах, где фазовые траектории направлены навстречу друг другу.

Покажем это на примере.

Пусть в той же системе (рис. 17.20) звено также устроено по принципу рис. 16.27, но

$$x_1 = y - cx, \quad \text{где } y = \frac{dx}{dt}. \quad (17.95)$$

Тогда прежнее выражение для  $\Psi$

$$\Psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x_1 x > 0, \\ \beta & \text{при } x_1 x < 0, \end{cases}$$

получает другой смысл. Возьмем при этом

$$\alpha = k_1, \quad \beta = k_1.$$

Получим два уравнения системы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_1 k x = 0 \quad \text{при } x_1 x > 0, \quad (17.96)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - k_1 k x = 0 \quad \text{при } x_1 x < 0. \quad (17.97)$$

Линиями раздела между областями их действия будут

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = y - cx = 0,$$

т. е. ось ординат и наклонная прямая на фазовой плоскости (рис. 17.22). При этом уравнение (17.96) будет действовать в первом и третьем секторах фазовой плоскости.

Поэтому там фазовыми траекториями будут служить согласно рис. 16.8 концентрические эллипсы. Уравнение же (17.97) будет действовать во втором и четвертом секторах фазовой плоскости (рис. 17.22), где фазовые траектории изобразятся в соответствии с рис. 16.3.

Обе эти линейные структуры (17.96) и (17.97) по отдельности не обладают устойчивостью. Благодаря же переключениям система в целом становится устойчивой.

В отличие от предыдущей системы, здесь, как видно из рис. 17.22, нет колебательного процесса. При любых начальных условиях фазовая траектория приходит на наклонную прямую  $x_1 = 0$ , где она встречается с фазовой траекторией с противоположным ей направлением движения. Поэтому переход изображающей точки через прямую  $x_1 = 0$  невозможен. В результате изображающая точка вынуждена двигаться вдоль прямой  $x_1 = 0$  в сторону начала координат, что и представляет собой скольльзящий режим переходного процесса в данной системе.

Практически скольльзящее движение будет сопровождаться вибрациями вследствие быстрых переключений то в одну, то в другую сторону, как и показано на рис. 17.22. Ввиду неидеальности системы (дополнительной инерционности или запаздывания) эти вибрации будут иметь конечные амплитуду и частоту. При идеальном же рассмотрении, проведенном выше, амплитуда их равна нулю, а частота — бесконечности.

Рассмотрение реального переходного процесса скольльзящего типа с конечными вибрациями за счет дополнительной инерционности, повышающей порядок уравнения, возможно с помощью приближенного метода гармонической линеаризации. Это можно сделать аналогично рассмотрению медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах (§ 19.2), если за медленно меняющийся сигнал принять основное аperiодическое движение в скольльзящем процессе, а наложенные на него вибрации рассчитать, как автоколебательную составляющую процесса (см. [73]).

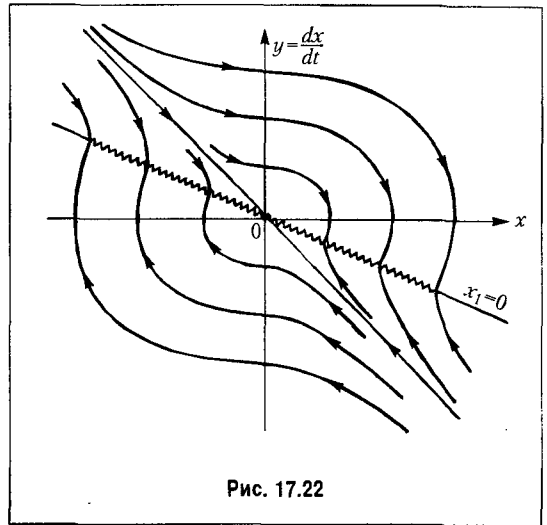


Рис. 17.22

## Глава 18

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

## § 18.1. Гармоническая линеаризация нелинейностей

В этой главе будет изложен метод гармонической линеаризации для приближенного определения периодических решений (автоколебаний) и устойчивости нелинейных систем любого порядка, который по идее близок к методу эквивалентной линеа-

ризации или методу гармонического баланса Н. М. Крылова и Н. П. Боголюбова, а по результатам — также и к методу малого параметра Б. В. Булгакова.

Рассматриваемый метод является мощным средством исследования нелинейных автоматических систем в смысле простоты и довольно большой универсальности его аппарата в применении к самым разнообразным нелинейностям. Однако надо иметь в виду, что он решает задачу приближенно. Имеются определенные ограничения его применимости, о которых будет сказано ниже. Эти ограничения обычно хорошо соблюдаются в задачах теории автоматического управления. Практические расчеты и эксперимент показывают приемлемость этого метода для многих видов нелинейных систем.

Пусть дано какое-нибудь нелинейное выражение вида

$$y = F(x, px) \quad (18.1)$$

и задано

$$x = a \sin \psi, \quad \psi = \omega t \quad (18.2)$$

Тогда

$$px = a\omega \cos \psi. \quad (18.3)$$

Разложив функцию в правой части выражения (18.1) в ряд Фурье получим

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \right] \sin \psi + \\ + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \right] \cos \psi + \text{высшие гармоники.} \quad (18.4)$$

Положим

$$\int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi = 0, \quad (18.5)$$

что означает отсутствие постоянной составляющей в данном разложении.

В настоящей главе будет везде предполагаться выполнение условия отсутствия постоянной составляющей (18.5). Впоследствии (глава 19) будет дан метод исследования автоколебаний при наличии постоянной составляющей.

Если принять во внимание, что из (18.2) и (18.3)

$$\sin \psi = \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \cos \psi = \frac{px}{a\omega},$$

то формулу (18.4) при условии (18.5) можно будет записать в виде

$$y = q(a, \omega)x + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} px + \text{высшие гармоники,} \quad (18.6)$$

где  $q$  и  $q'$  — коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

Итак, нелинейное выражение (18.1) при  $x = a \sin \omega t$  заменяется выражением (18.6), которое с точностью до высших гармоник аналогично линейному. Эта операция и называется гармонической линеаризацией. Коэффициенты  $q(a, \omega)$  и  $q'(a, \omega)$  постоянны при постоянных значениях  $a$  и  $\omega$ , т. е. в случае периодического процесса. В переходном колебательном процессе с изменением  $a$  и  $\omega$  коэффициенты  $q$  и  $q'$  изменяются (см. гл. 20). Для разных амплитуд и частот периодических процессов коэффициенты выражения (18.6) будут различны по величине. Это очень важно для дальнейшего обстоятельство является существенным отличием гармонической линеаризации по сравнению с обычным способом линеаризации (§ 3.1), приводящим к чисто линейным выражениям, которые применялись в предыдущих разделах книги. Указанное обстоятельство и позволит путем применения к выражению (18.6) линейных методов исследования проанализировать основные свойства нелинейных систем, которые не могут быть обнаружены при обычной линеаризации.

Приведем также формулы гармонической линеаризации для более простой нелинейности:

$$y = F(x). \quad (18.8)$$

Здесь возможны два варианта: 1) кривая  $F(x)$  имеет гистерезисную петлю (например, рис. 16.18, в, рис. 16.22, з, д), и 2) кривая  $F(x)$  не имеет гистерезисной петли (рис. 16.8, б, рис. 16.22, а и др.).

При наличии гистерезисной петли, когда фактически наблюдается зависимость от знака производной, нелинейная функция  $y = F(x)$  после гармонической линеаризации заменяется следующим выражением (при  $x = a \sin \omega t$ ):

$$y = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x + \text{высшие гармоники}, \quad (18.9)$$

где

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi \quad (18.10)$$

при условии отсутствия постоянной составляющей:

$$\int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \, d\psi = 0.$$

Если же кривая  $F(x)$  не имеет гистерезисной петли, то  $q' = 0$ , так как при  $x = a \sin \psi$  будет

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^0 F(x) dx = 0$$

(при гистерезисной петле этот интеграл не был нулем вследствие различия в очертании кривой  $F(x)$  при возрастании и убывании  $x$ ).

Следовательно, при отсутствии гистерезисной петли нелинейное выражение (18.8) заменяется более простым:

$$y = q(a)x + \text{высшие гармоники},$$

т. е. криволинейная или ломаная характеристика  $y = F(x)$  с точностью до высших гармоник заменяется прямолинейной, тангенс угла наклона которой  $q$  зависит от амплитуды колебаний  $a$ . Другими словами, нелинейное звено уподобляется «линейному» с передаточным числом (коэффициентом передачи), зависящим от амплитуды  $a$  колебаний входной величины  $x$ .

Гистерезисная же петля вводит согласно (18.9), кроме того, еще производную, дающую отставание по фазе, так как  $q'(a) < 0$ . Таким образом, нелинейное отставание по координате в виде гистерезисной петли превращается при гармонической линеаризации в эквивалентное линейное отставание по фазе.

Можно создать специальное нелинейное звено с опережающей петлей, что будет эквивалентно линейному опережению фазы при введении производной, но с тем отличием, что величина опережения фазы будет зависеть от амплитуды колебаний, чего нет в линейных системах.

В случаях, когда нелинейное звено описывается сложным уравнением, включающим сумму различных линейных и нелинейных выражений, каждый из нелинейных членов подвергается гармонической линеаризации по отдельности. Произведение же нелинейностей рассматривается обязательно в целом как одна сложная нелинейность. При этом могут встретиться иного характера нелинейные функции.

Например, при гармонической линеаризации второго из уравнений (16.3) придется иметь дело с функцией  $F(p^2x, px)$  при  $x = a \sin \omega t$ . В этом случае получаем

$$\left. \begin{aligned} F(p^2x, px) &= \left[ \frac{q_2(a, \omega)}{-\omega^2} p^2 + \frac{q_1(a, \omega)}{\omega} p \right] x + \text{высшие гармоники}, \\ q_2 &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(-a\omega^2 \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q_1 &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(-a\omega^2 \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$



при условии

$$\int_0^{2\pi} F(-a\omega^2 \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi = 0.$$

Если же функция  $F(p^2x, px)$  или функция  $F(px)$  будет единственной нелинейной функцией в уравнении нелинейного звена, то при гармонической линеаризации можно положить  $px = a \sin \omega t$  и

$$F(p^2x, px) = q(a, \omega)px + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p^2x + \text{высшие гармоники}$$

аналогично прежним формулам (18.6 и 18.7). Но при этом величина  $a$  во всех выкладках будет амплитудой колебаний скорости  $px$ , а не самой координаты  $x$ . Последняя же будет иметь амплитуду  $a_x = a/\omega$ .

При вычислении коэффициентов гармонической линеаризации по формулам (18.10) надо иметь в виду, что при симметричных нелинейных характеристиках интеграл  $(0, 2\pi)$  можно получить удвоением интеграла  $(0, \pi)$ , т. е.

$$\int_0^{2\pi} = 2 \int_0^{\pi}, \quad (18.12)$$

а для симметричных относительно начала координат безгистерезисных характеристик  $F(x)$  при вычислении  $q(a)$  можно писать

$$\int_0^{2\pi} = 4 \int_0^{\pi/2}. \quad (18.13)$$

Приведем выражения для коэффициентов некоторых простейших нелинейных звеньев. Затем их можно будет непосредственно использовать при решении различных конкретных задач.

**Коэффициенты гармонической линеаризации релейных звеньев.** Найдем коэффициенты  $q(a)$  и  $q'(a)$  уравнений наиболее типичных релейных звеньев по формулам (18.10). Возьмем общий вид характеристики релейного звена  $x_2 = F(x_1)$ , изображаемой графиком рис. 18.1, а, где  $m$  есть любое дробное число в интервале  $-1 \leq m \leq 1$ . Как частные случаи будут получены уравнения других типов релейных звеньев.

Если колебания входной величины  $x_1 = a \sin \omega t$  имеют амплитуду  $a < b$ , то согласно рис. 18.1, а движения в системе не будет. Если амплитуда  $a > b$ , то переключения реле происходят в точках  $A, B, C, D$  (рис. 18.1, б), в которых имеем

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{a}, \quad \psi_2 = \pi - \arcsin \frac{mb}{a}. \quad (18.14)$$

Следовательно, после использования свойств (18.12) каждый из интегралов (18.10) разбивается на три слагаемых:

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\psi_1} + \int_{\psi_1}^{\psi_2} + \int_{\psi_2}^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi},$$

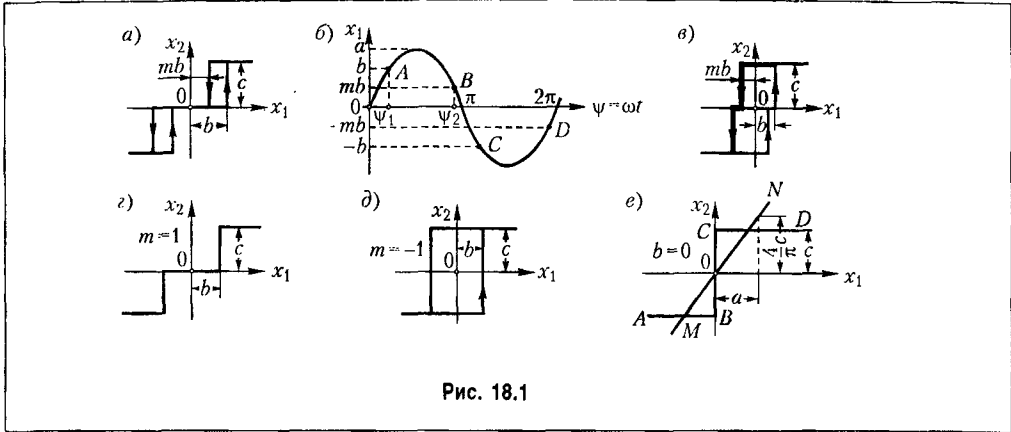


Рис. 18.1

причем первое и третье из них согласно рис. 18.1, а и б будут нулями. Поэтому выражения (18.10) принимают вид

$$q(a) = \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\psi_1} c \sin \psi \, d\psi, \quad q'(a) = \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi \, d\psi,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2c}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2) = \frac{2c}{\pi a} \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} \right), \\ q' &= -\frac{2c}{\pi a} (\sin \psi_1 - \sin \psi_2) = -\frac{2c}{\pi a^2} (1 - m) \quad \text{при } a > b, \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

а уравнение релейного звена с характеристикой вида рис. 18.1, а будет иметь вид (18.9) с полученными здесь значениями  $q(a)$  и  $q'(a)$ .

Рассмотрим частные случаи.

Для релейного звена с характеристикой без гистерезисной петли, но с зоной нечувствительности  $b$  (рис. 18.1, з), полагая  $m = 1$ , из вышенаписанных формул получаем

$$q = \frac{4c}{\pi a} \cos \psi_1 = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad q' = 0 \quad \text{при } a > b. \quad (18.16)$$

Для релейной характеристики с гистерезисной петлей типа рис. 18.1, д, полагая  $m = -1$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{4c}{\pi a} \cos \psi_1 = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \\ q' &= -\frac{4c}{\pi a} \sin \psi_1 = -\frac{4cb}{\pi a^2} \quad \text{при } a > b. \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

Наконец, для идеального релейного звена (рис. 18.1, *e*), полагая  $b = 0$ , находим

$$q = \frac{4c}{\pi a}, \quad q' = 0. \quad (18.18)$$

На последнем примере легко видеть смысл гармонической линеаризации релейной характеристики. Написанное выражение для  $q$  означает замену ломаной характеристики  $ABCD$  прямолинейной  $MN$  (рис. 18.1, *e*) с таким наклоном, чтобы эта прямая  $MN$  приблизительно заменяла собой тот участок ломаной  $ABCD$ , который охватывается заданной амплитудой  $a$ . Отсюда становится вполне понятной обратно пропорциональная зависимость  $q$  от  $a$ , даваемая формулой (18.18), так как чем больше амплитуда  $a$  колебаний входной величины  $x_1$ , тем более пологой должна быть прямая  $MN$ , приблизительно заменяющая ломаную  $ABCD$ .

Аналогично обстоит дело и с релейной характеристикой на рис. 18.1, *z*, для которой наклон заменяющей ее прямой дается формулой (18.16). Следовательно, всякое безгистерезисное релейное звено в колебательном процессе эквивалентно такому «линейному» звену, передаточное число (коэффициент усиления) которого  $q(a)$  уменьшается с увеличением амплитуды колебаний входной величины, начиная с  $a = b\sqrt{2}$ .

Что касается релейного звена с гистерезисной петлей, то согласно (18.9) и (18.17) оно заменяется линейным звеном с аналогичным прежнему коэффициентом усиления  $q(a)$ , но кроме того, еще с введением отрицательной производной в правой части уравнения. Введение отрицательной производной в противовес положительной вносит отставание по фазе в реакции звена на входное воздействие. Это служит «линейным эквивалентом», заменяющим эффект действия нелинейности в виде гистерезисной петли. При этом коэффициент  $q'(a)$  при производной согласно (18.17) тоже уменьшается с увеличением амплитуды  $a$  колебаний входной величины  $x_1$ , что и понятно, так как эффект влияния гистерезисной петли на процесс колебаний в релейном звене должен быть тем меньше, чем больше амплитуда колебаний по сравнению с шириной гистерезисной петли.

**Коэффициенты гармонической линеаризации других простейших нелинейных звеньев.** Рассмотрим нелинейное звено с зоной нечувствительности и с насыщением (рис. 18.2, *a*). Согласно рис. 18.2, *б*, где

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b_1}{a}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{b_2}{a} = \arcsin \frac{c + b_1 k}{ak}, \quad (18.19)$$

интеграл (18.10) на участке  $(0, \pi)$  разбивается на пять слагаемых, причем два из них равны нулю. Поэтому

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\psi_1} k(a \sin \psi - b_1) \sin \psi \, d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\pi - \psi_2} c \sin \psi \, d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\pi - \psi_2}^{\pi - \psi_1} k(a \sin \psi - b_1) \sin \psi \, d\psi,$$

откуда с заменой  $c = (b_2 - b_1)k$  и  $b_1 = a \sin u_1$ ,  $b_2 = a \sin u_2$  получаем

$$q = \frac{2k}{\pi} \left( \psi_2 - \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right) \quad \text{при } a > b_2, \quad (18.20)$$

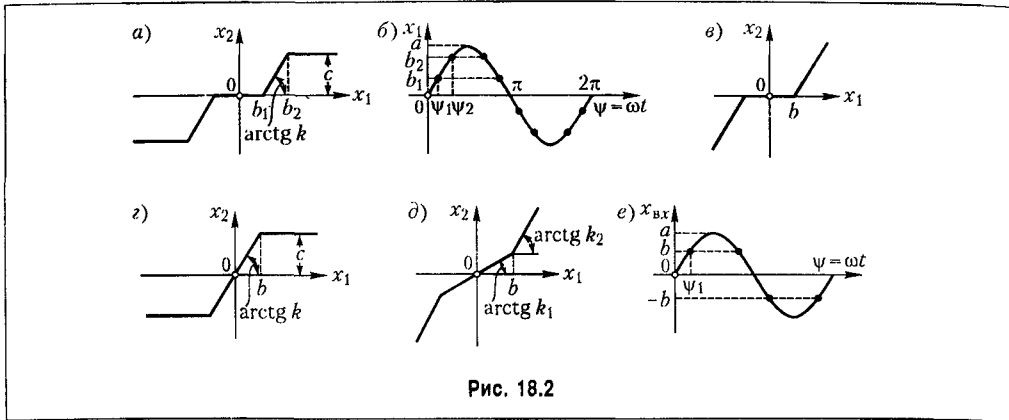


Рис. 18.2

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  определяются формулами (18.19). Ввиду отсутствия гистерезисной петли здесь  $q' = 0$ .

Итак, уравнение нелинейного звена с характеристикой вида рис. 18.2, а будет  $x_2 = q(a)x_1$ , где  $q(a)$  определяется выражением (18.20).

Как частный случай отсюда получается значение  $q(a)$  для звена с зоной нечувствительности без насыщения (рис. 18.2, в). Для этого в предыдущем решении нужно положить  $a < b$  и, следовательно,  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$q = k - \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad \text{при } a > b. \quad (18.21)$$

Как видим, звено с зоной нечувствительности уподобляется здесь линейному звену с уменьшенным за ее счет коэффициентом усиления. Это уменьшение коэффициента усиления значительно при малых амплитудах и невелико при больших, причем  $0 \leq q(a) \leq k$  при  $b \leq a \leq \infty$ .

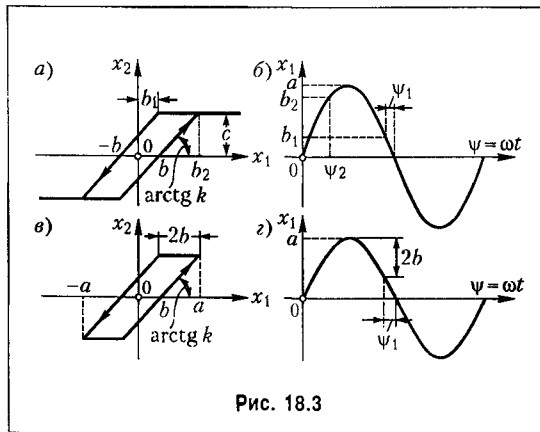


Рис. 18.3

Для второго частного случая – звено с насыщением без зоны нечувствительности (рис. 18.2, з), – полагая  $b_1 = 0$ , т. е.  $\psi_1 = 0$ , из (18.20) и (18.19) получаем

$$q = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{c}{ak} + \frac{c}{ak} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 k^2}} \right) \quad \text{при } a > \frac{c}{k}. \quad (18.22)$$

причем при  $a \leq c/k$  имеем  $q = k$  (линейная характеристика). При амплитудах колебания входной величины, захваты-

вающих зону насыщения, данное звено заменяется как бы линейным звеном с тем меньшим коэффициентом передачи  $q(a)$ , чем больше амплитуда (в противоположность предыдущему).

Для звена с переменным коэффициентом усиления согласно рис. 18.2,  $\delta$  и  $\epsilon$  по формуле (18.10) с учетом (18.12) получаем

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\psi_2} k_1 a \sin \psi \sin \psi d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} [k_2(a \sin \psi - b) + k_1 b] \sin \psi d\psi + \\ + \frac{2}{\pi a} \int_{\pi-\psi_2}^{\pi} k_1 a \sin \psi \sin \psi d\psi,$$

что с заменой  $\sin \psi_1 = b/a$  дает

$$q = k_2 - \frac{2}{\pi}(k_2 - k_1) \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad \text{при } a > b. \quad (18.23)$$

Здесь ломаная характеристика (рис. 18.2,  $\delta$ ) заменяется одной прямой со средним между  $k_1$  и  $k_2$  наклоном  $q(a)$ , причем этот наклон изменяется в интервале  $k_1 \leq q(a) \leq k_2$  при увеличении амплитуды  $b \leq a \leq \infty$ . Для амплитуд  $a < b$  имеем линейную характеристику с наклоном  $k_1$ .

Для нелинейного звена с насыщением и с гистерезисной петлей (рис. 18.3,  $a$ ) уравнение получит вид (18.9), где согласно рис. 18.3,  $b$  и формулам (18.10)

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\psi_2} k(a \sin \psi - b) \sin \psi d\psi + \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} c \sin \psi d\psi + \\ + \frac{2}{\pi a} \int_{\pi-\psi_2}^{\pi} k(a \sin \psi + b) \sin \psi d\psi,$$

аналогично и для  $q'(a)$ . Отсюда

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{k}{\pi} \left( \psi_2 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 + \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right), \\ q' &= -\frac{k}{\pi} (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1) \quad (a > b_2), \end{aligned} \right\} \quad (18.24)$$

где

$$\psi_2 = \arcsin \frac{b_2}{a} = \arcsin \frac{c + bk}{ak}, \quad \psi_1 = \arcsin \frac{b_1}{a} = \arcsin \frac{c - bk}{ak}. \quad (18.25)$$

Если в таком нелинейном звене амплитуда колебаний входной величины  $x_1$  будет  $a < b$ , то в процессе колебаний не будет захватываться зона насыщения и получится чисто гистерезисная характеристика (рис. 18.3, в). В данном случае

$$\psi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_1 = \arcsin\left(1 - \frac{2b}{a}\right). \quad (18.26)$$

Уравнение звена с гистерезисной характеристикой вида рис. 18.3, в поэтому будет иметь форму (18.9), где согласно (18.24)

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{k}{\pi} \left( \psi_1 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right), \\ q' &= -\frac{k}{\pi} \cos^2 \psi_1 = -\frac{4kb}{\pi a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \quad \text{при } a > b. \end{aligned} \right\} \quad (18.27)$$

Величина  $\psi_1$  вычисляется по формуле (18.26).

Такого же типа характеристика (рис. 18.3, в) получалась и для чувствительного элемента с сухим трением в системе стабилизации давления, рассмотренной в § 16 (см. рис. 16.21, б), когда мы пренебрегли массой. Следовательно, для такого нелинейного звена с сухим трением будут справедливы те же формулы (18.27) с заменой в них только

$$k = \frac{1}{8}, \quad (18.28)$$

а уравнение (16.58) для колебательного процесса в форме (18.9) будет

$$\eta = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \Phi + \text{высшие гармоники}. \quad (18.29)$$

Этого же типа характеристика (рис. 18.3, в) имела место и для нелинейного звена с зазором в следящей системе (см. рис. 16.20, б), причем там  $k = 1$ . Следовательно, уравнение (16.55) данного нелинейного звена (для колебательного процесса) запишется в виде

$$\beta = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \right] \beta_1 + \text{высшие гармоники}, \quad (18.30)$$

где  $q(a)$  и  $q'(a)$  определяются по формулам (18.27), в которых надо считать  $k = 1$ .

Для нелинейностей, не заданных аналитически, существует графический способ определения  $q(a)$  (см. § 3.8 в книге [72]).

## § 18.2. Алгебраические способы определения автоколебаний и устойчивости в нелинейных системах первого класса

Опираясь на вышеизложенную гармоническую линеаризацию, составим гармонически линеаризованное уравнение всей замкнутой нелинейной автоматической системы в целом. Пусть известно дифференциальное уравнение линейной части системы

$$Q(p)x_1 = -R(p)x_2, \tag{18.31}$$

причем линейная часть может иметь структуру любой сложности (и любой порядок уравнения).

Уравнение нелинейного звена

$$x_2 = F(x_1, px_1)$$

в колебательном процессе после гармонической линеаризации запишем в виде

$$x_2 = \left[ q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] x_1. \tag{18.32}$$

В частности, для нелинейной характеристики  $x_2 = F(x_1)$  без гистерезисной петли будет

$$x_2 = q(a)x_1.$$

Уравнение нелинейного звена (18.32) записано, как видим, без учета высших гармоник, фигурировавших в предыдущем параграфе. Это сделано отнюдь не потому, что они малы. В отдельно взятом нелинейном звене при подаче на вход  $x_1 = a \sin \omega t$  в общем случае на выходе обязательно появятся высшие гармоники. Однако в замкнутой автоматической системе (рис. 18.4, а) линейная часть имеет обычно амплитудно-частотную характеристику одного из двух видов, показанных на рис. 18.4, б. Поэтому высшие гармоники, имеющиеся у переменной  $x_2$ , гасятся линейной частью и переменная  $x_1$  оказывается достаточно близкой к синусоиде:  $x_1 = a \sin \omega t$ . В таком виде и будем искать приближенное периодическое решение для нелинейной автоматической системы. Свойство линейной части системы, определяющее вид амплитудно-частотной характеристики типа изображенной на рис. 18.4, б, именуется *свойством фильтра*. Аналитическое обоснование сказанного см. в книге [72, § 2.2].

Как видим, в коэффициенты уравнения (18.32) входят амплитуда  $a$  и частота  $\omega$  искомого колебательного процесса.

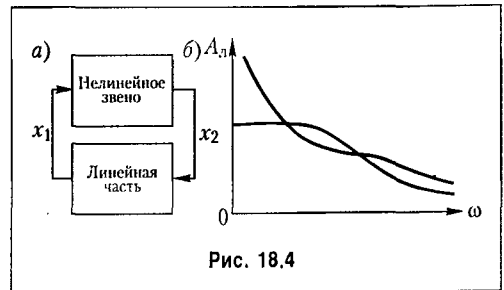


Рис. 18.4

На основании уравнений (18.31) и (18.32) можно написать гармонически линеаризованное характеристическое уравнение замкнутой нелинейной системы в виде

$$Q(p) + R(p) \left( q + \frac{q'}{\omega} p \right) = 0 \quad (18.33)$$

с теми же особенностями в коэффициентах, что и в уравнении (18.6), описанными в § 18.1.

В том случае, когда в замкнутой системе возникают собственные незатухающие колебания постоянной амплитуды  $a = a_n$  и постоянной частоты  $\omega = \omega_n$  (автоколебания), коэффициенты уравнения (18.32), а значит, и коэффициенты характеристического уравнения (18.33) становятся постоянными. Вместе с тем из линейной теории известно, что появление указанных колебаний в системе при постоянных коэффициентах соответствует наличию пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении системы.

Следовательно, можно обнаружить в замкнутой нелинейной системе появление незатухающих собственных колебаний вида  $x \approx a_n \sin \omega_n t$  ( $a_n = \text{const}$ ,  $\omega_n = \text{const}$ ), подставив в характеристическое уравнение (18.33)  $p = j\omega_n$ . Если эта подстановка  $p = j\omega_n$  соответствует каким-нибудь вещественным положительным значениям  $a = a_n$  и  $\omega = \omega_n$  при заданных параметрах системы, то такие колебания возможны. Но подстановка  $p = j\omega_n$  в характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами эквивалентна отысканию границы устойчивости линейной системы. Следовательно, появление незатухающих собственных колебаний в нелинейной системе можно обнаружить применением к характеристическому уравнению (18.33) любого из методов определения границы устойчивости линейной системы, изложенных в главе 6.

**Основной способ определения периодических решений.** Используем непосредственную подстановку  $p = j\omega$  в гармонически линеаризованное характеристическое уравнение, а именно

$$Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a, \omega) + j q'(a, \omega)] = 0, \quad (18.34)$$

при неизвестных постоянных значениях амплитуды  $a$  и частоты  $\omega$ , входящих в коэффициенты  $q$  и  $q'$ , причем для однозначной нелинейной характеристики  $F(x_1)$  будет

$$Q(j\omega) + R(j\omega) q(a) = 0.$$

Выделим в выражении (18.34) вещественную и мнимую части:

$$X(\omega) + jY(\omega) = 0, \quad (18.35)$$

и введем для частоты и амплитуды искомого периодического решения обозначения:  $\omega = \omega_n$ ,  $a = a_n$ . Это дает два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_n, a_n) &= 0, \\ Y(\omega_n, a_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.36)$$

из которых и определяются неизвестные частота  $\omega_n$  и амплитуда  $a_n$ .



Если уравнения (18.36) не имеют положительных вещественных решений для  $a_{II}$  и  $\omega_{II}$ , то периодические решения вообще (а значит, и автоколебания) в данной нелинейной системе невозможны.

Исследование устойчивости периодического решения дается ниже.

С помощью уравнений (18.36) можно не только определять частоту  $\omega_{II}$  и амплитуду  $a_{II}$  автоколебаний при заданных параметрах системы, но и построить графики зависимостей  $\omega_{II}$  и  $a_{II}$  от какого-либо параметра системы, например коэффициента усиления  $k$ . Для этого нужно считать в уравнениях (18.36) параметр  $k$  переменным и записывать эти уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_{II}, a_{II}, k) &= 0, \\ Y(\omega_{II}, a_{II}, k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.37)$$

Отсюда можно найти зависимости

$$a_{II} = a_{II}(k), \quad \omega_{II} = \omega_{II}(k)$$

и построить их, например, в виде графиков рис. 18.5, а, б. На основании этих графиков можно будет выбирать параметр  $k$  так, чтобы амплитуда автоколебаний была достаточно малой, чтобы частота их не была опасной для данной системы или же, наконец, чтобы автоколебаний не было вовсе ( $k < k_{гр}$ ).

Кроме того, с помощью тех же уравнений (18.36) можно строить линии равных значений амплитуды и частоты автоколебаний на плоскости двух каких-либо параметров системы, например  $k$  и  $T$ . Для этого уравнения (18.36) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_{II}, a_{II}, k, T) &= 0, \\ Y(\omega_{II}, a_{II}, k, T) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.38)$$

Зададимся различными числовыми значениями амплитуды  $a_{II}$  и получим для каждого из них по уравнениям (18.38) зависимости

$$k = k(\omega_{II}) \quad \text{и} \quad T = T(\omega_{II}).$$

После этого, меняя  $\omega_{II}$ , можно построить по точкам соответствующие кривые  $a_{II} = \text{const}$  в координатах  $(k, T)$ , как показано сплошными линиями на рис. 18.5, в. На этих кривых получают отметки частот  $\omega_{II}$ , которые также можно соединить (пунктирные кривые).

График рис. 18.5, в позволяет выбирать значения двух параметров ( $k$  и  $T$ ) целинейной системы. Если такие графики построить для различных возможных структурных схем системы, то можно будет выбирать также и наилучшую структурную схему проектируемой замкнутой автоматической системы с учетом целинейностей.

**Использование графиков коэффициентов гармонической линеаризации.** Во многих задачах коэффициенты

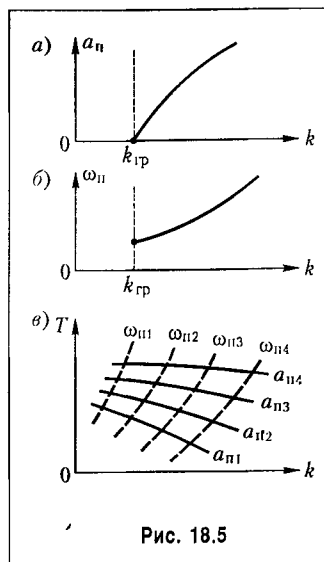


Рис. 18.5

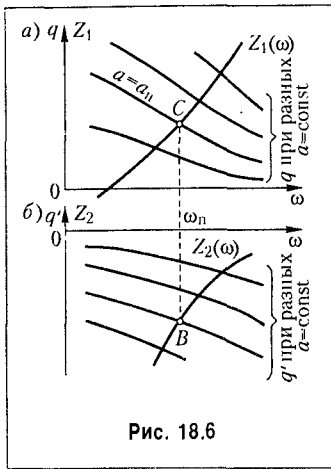


Рис. 18.6

$q$  и  $q'$ , входящие в уравнение (18.34), сложно зависят от амплитуды  $a$ , а в ряде случаев и от частоты  $\omega$ . В таких случаях удобнее указанное уравнение записывать в виде

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q + jq') = 0, \quad (18.39)$$

не подставляя зависимости  $q$  и  $q'$  от  $a$  и  $\omega$ . Тогда вместо уравнений (18.36) получим для определения периодического решения уравнения:

$$X(\omega, q, q') = 0, \quad Y(\omega, q, q') = 0. \quad (18.40)$$

Для общего случая задач, в которых каждый из коэффициентов гармонической линеаризации  $q$  и  $q'$  зависит сложным образом от обеих неизвестных  $a$  и  $\omega$ , т. е.

$$q = q(a, \omega), \quad q' = q'(a, \omega), \quad (18.41)$$

можно применить следующий прием решения.

Задаваясь различными значениями  $a$  и  $\omega$ , построим по формулам (18.41) две серии кривых:  $q(\omega)$  и  $q'(\omega)$  при разных  $a = \text{const}$  (рис. 18.6). Затем из уравнений (18.40) выразим

$$q = Z_1(\omega), \quad q' = Z_2(\omega) \quad (18.42)$$

и эти две кривые нанесем на тех же графиках. Теперь остается на этих двух кривых найти такие точки  $C$  и  $B$ , в которых кривые  $Z_1(\omega)$  и  $Z_2(\omega)$  пересекают линии с одинаковыми значениями  $a$  при одном и том же значении  $\omega$ . Полученные величины  $a$  и  $\omega$  будут решением задачи, т. е. амплитудой  $a_n$  и частотой  $\omega_n$  искомого периодического решения.

Во многих встречающихся на практике задачах вместо (18.41) будет

$$q = q(a) \quad \text{и} \quad q' = q'(a). \quad (18.43)$$

Тогда кривые  $q$  и  $q'$  на рис. 18.6 для разных амплитуд будут иметь вид горизонтальных прямых линий.

В простейшем случае, когда в системе имеется однозначная нечетно-симметричная нелинейность  $F(x)$ , для которой  $q = q(a)$  и  $q' = 0$ , из уравнений (18.40) можно найти

$$q(a) = Z(\omega). \quad (18.44)$$

Тогда, исключив  $q$  из уравнений (18.40), найдем частоту  $\omega = \omega_n$  как функцию параметров системы. Затем, изобразив график зависимости  $q(a)$  (рис. 18.7), проведем на нем согласно (18.44) горизонтальные линии  $q = Z(\omega)$  для разных постоянных значений  $\omega = \omega_n$ , т. е. для разных соотношений параметров системы. Точки пересечения этих

прямых ( $\omega = \omega_{II}$ ) с кривой  $q(a)$  (например, на рис. 18.7 точки  $a_{II1}$  и  $a_{II2}$ ) определяют в каждом случае амплитуды периодических решений. Если пересечений нет, то и периодических решений в системе не будет. В простейших случаях уравнение (18.44) решается аналитически.

**Графический способ.** Для гармонически линеаризованного характеристического уравнения (18.33) можно написать выражение кривой Михайлова [73]

$$D(j\tilde{\omega}) = Q(j\tilde{\omega}) + R(j\tilde{\omega}) \left[ q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} j\tilde{\omega} \right], \quad (18.45)$$

где знак «~» введен, чтобы отличать текущий параметр  $\tilde{\omega}$ , изменяющийся вдоль кривой Михайлова, от частоты  $\omega$ , входящей в выражение гармонической линеаризации нелинейности.

Искомое периодическое решение  $x_1 = a_{II} \sin \omega_{II} t$ , т. е. неизвестные  $a_{II}$  и  $\omega_{II}$  определяются прохождением кривой Михайлова через начало координат (рис. 18.8, а). Поскольку в точке прохождения кривой Михайлова через начало координат текущее значение  $\tilde{\omega}$  должно совпадать со значением  $\omega = \omega_{II}$ , входящим в коэффициенты гармонической линеаризации, то для удобства решения можно заранее отождествить в выражении (18.45) значения  $\tilde{\omega}$  и  $\omega$ . Тогда искомые частоту  $\omega = \omega_{II}$  и амплитуду  $a = a_{II}$  автоколебаний можно будет определить путем построения кривых

$$f(\omega) = Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a, \omega) + j q'(a, \omega)] = 0, \quad (18.46)$$

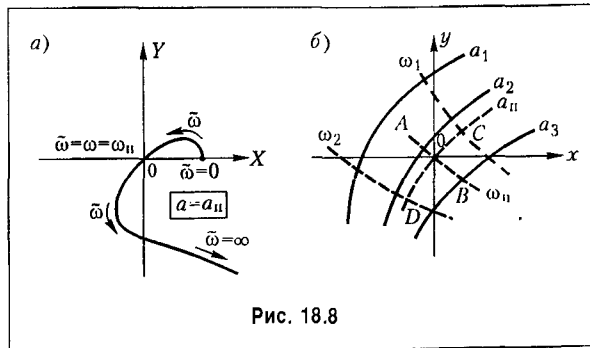
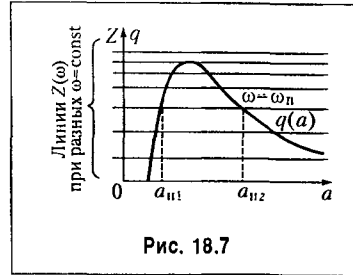
которые в общем случае не будут совпадать с кривыми Михайлова. При этом надо выбрать такое значение  $a$ , при котором кривая пройдет через начало координат.

Если, например, для каких-нибудь трех различных значений  $a$  кривые  $f(\omega)$  проходят указанным на рис. 18.8, б образом, то искомые значения  $a = a_{II}$  и  $\omega = \omega_{II}$  можно найти путем следующей интерполяции:

$$a_{II} = a_2 + \frac{AO}{AB}(a_3 - a_2), \quad \omega_{II} = \omega_1 + \frac{CO}{CD}(\omega_2 - \omega_1).$$

Этот способ целесообразен лишь в самых сложных случаях, когда изложенные выше способы не удается применить.

**Использование коэффициентов соотношений для определения периодического решения.** Для обнаружения факта наличия пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении (18.33) можно также применить известные алгебраические критерии устойчи-



ности линейных систем. Так, если гармонически линеаризованное уравнение (18.33) нелинейной системы имеет третью степень относительно  $p$ , то его можно записать в виде

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (18.47)$$

причем коэффициенты его будут содержать в себе искомые значения частоты  $\omega_n$  и амплитуды  $a_n$  автоколебаний.

Условие наличия пары чисто мнимых корней по критерию Гурвица (см. § 6.2) будет

$$a_1 a_2 = a_0 a_3. \quad (18.48)$$

Оно дает только одно уравнение с двумя неизвестными  $a_n$  и  $\omega_n$ . Чтобы найти второе, представим уравнение (18.47) при наличии мнимых корней  $p = \pm j\omega_n$  в виде

$$(p^2 + \omega_n^2)(a_0 p + b) = 0.$$

Раскрыв здесь скобки и приравняв коэффициенты этого уравнения соответствующим коэффициентам (18.47), найдем

$$a_0 \omega_n^2 = a_2. \quad (18.49)$$

Из двух уравнений (18.48) и (18.49) определяются неизвестные амплитуда  $a_n$  и частота  $\omega_n$  автоколебаний, входящие в состав коэффициентов (18.47). При этом точно так же, как в основном способе, здесь на основании уравнений (18.48) и (18.49) можно строить графики зависимостей  $a_n$  и  $\omega_n$  от одного параметра системы или на плоскости двух параметров с целью их выбора.

Если гармонически линеаризованное уравнение (18.33) нелинейной системы имеет четвертую степень относительно  $p$ :

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0, \quad (18.50)$$

то условие наличия пары чисто мнимых корней согласно § 6.2 будет

$$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 = 0. \quad (18.51)$$

Кроме того, записывая уравнение (18.50) в виде

$$(p^2 + \omega_n^2)(a_0 p^2 + b_1 p + b_2) = 0,$$

раскрывая здесь скобки и приравнявая полученные коэффициенты соответствующим коэффициентам (18.50), находим

$$a_1 \omega_n^2 = a_3. \quad (18.52)$$

С помощью двух уравнений (18.51) и (18.52) решаются все вышеуказанные задачи для нелинейной системы четвертого порядка.

Заметим, что для систем с нелинейностью вида  $x_2 = F(x_1)$  без гистерезисной петли частота  $\omega$  не входит в коэффициенты характеристического уравнения. Поэтому из уравнения (18.48) или (18.51) сразу определяется амплитуда  $a_n$ , а затем из (18.49) или (18.52) — частота  $\omega_n$ . Для систем с более сложными нелинейностями получаются два уравнения с двумя неизвестными.

**Учет временного запаздывания в нелинейной системе.** В нелинейной системе, как и в линейной, может иметься постоянное по времени запаздывание  $\tau$ .

При этом уравнение линейной части (18.31) получит вид

$$Q(p)x_1 = -R(p)e^{-p\tau}x_2.$$

Выражение (18.34) при этом будет

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(\cos \tau\omega - j \sin \tau\omega)(q + jq') = 0. \quad (18.53)$$

К уравнению (18.53) можно применить основной способ отыскания периодических решений или другой из изложенных выше.

**Устойчивость периодических решений.** Выше уже указывалось, что не всякое периодическое решение уравнений собственного движения нелинейной системы будет соответствовать автоколебаниям, а только устойчивое. В конкретных задачах часто из физических соображений бывает сразу видно, возникают автоколебания или нет. Поэтому иногда нет нужды в математическом исследовании устойчивости найденного периодического решения. Однако в ряде случаев все же приходится этот вопрос исследовать.

Задача исследования устойчивости периодического решения сводится, вообще говоря, к анализу линейного уравнения с периодическими переменными коэффициентами. А. М. Ляпуновым [58] разработаны соответствующие методы. Но их использование во многих случаях представляет пока еще большие трудности. Поэтому здесь строгое исследование устойчивости периодических решений излагаться не будет.

Опишем три приближенных способа исследования устойчивости периодического решения: 1) осреднение коэффициентов; 2) использование кривой Михайлова; 3) аналитический критерий.

**Осреднение коэффициентов при исследовании устойчивости периодического решения.** Запишем дифференциальное уравнение замкнутой системы в малых отклонениях  $\Delta x$  от исследуемого периодического решения:  $x = a_n \sin \omega_n t$ . Для линейной части системы на основании уравнения (18.31) получим

$$Q(p)\Delta x_1 = -R(p)\Delta x_2. \quad (18.54)$$

Уравнение нелинейного звена, например  $x_2 = F(x_1, px_1)$ , примет при этом для малых отклонений вид

$$\Delta x_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_n \Delta x_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial px_1} \right)_n \Delta px_1 \quad (18.55)$$

(аналогично и для других типов нелинейных уравнений), где индекс «п» означает, что в частные производные нужно подставить  $x_1 = a_n \sin \omega_n t$  и  $px_1 = a_n \omega_n \cos \omega_n t$ . Эти

частные производные и являются периодическими переменными коэффициентами. В задачах теории управления они могут меняться как плавно, так и скачками (см. примеры в § 18.3). Осредним полученные периодические коэффициенты, после чего вместо (18.55) будем иметь линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\Delta x_2 = [\kappa(a_n, \omega_n) + \kappa_1(a_n, \omega_n)p] \Delta x_1, \quad (18.56)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_n d\psi, \quad \kappa_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F}{\partial p x_1} \right)_n d\psi, \quad \psi = \omega_n t. \quad (18.57)$$

Характеристическое уравнение системы, определяющее устойчивость периодического решения, согласно (18.54) и (18.56) будет

$$Q(p) + R(p) [\kappa(a_n, \omega_n) + \kappa_1(a_n, \omega_n)p] = 0. \quad (18.58)$$

Если оно удовлетворяет линейному критерию устойчивости, то исследуемое периодическое решение устойчиво.

В случаях, когда нелинейное звено описывается уравнением вида  $x_2 = F(x_1)$  (с гистерезисной петлей или без нее), осредненное характеристическое уравнение для исследования периодического решения будет

$$Q(p) + R(p) \kappa(a_n) = 0, \quad (18.59)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_n d\psi, \quad \psi = \omega_n t. \quad (18.60)$$

**Использование кривой Михайлова для исследования устойчивости периодического решения.** Каждому конкретному значению  $a$  будет соответствовать определенная кривая Михайлова (18.45). При  $a = a_n$  она пройдет через начало координат (рис. 18.9).

Для исследования устойчивости периодического решения с амплитудой  $a = a_n$  дадим малое приращение амплитуде  $\Delta a$ . Тогда при  $a = a_n + \Delta a$  кривая Михайлова займет либо положение 1, либо положение 2 (рис. 18.9). При этом кривая 1, охватывающая начало координат, соответствует затухающим колебаниям переходного процесса, а кривая 2 — расходящимся колебаниям.

Поэтому если при  $\Delta a > 0$  кривая Михайлова займет положение 1, а при  $\Delta a < 0$  — положение 2, то переходный процесс в системе будет таким, что колебания с амплитудой, большей чем  $a_n$ , затухают, а колебания с амплитудой, меньшей чем  $a_n$ , расходятся. Следовательно, переходный процесс с обеих сторон сходится к исследуемому периодическому процессу с амплитудой  $a_n$ . Это означает устойчивость последнего, т. е. в системе имеют

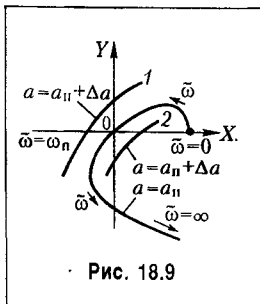


Рис. 18.9

место автоколебания. Если же при  $\Delta a > 0$  получится кривая 2, а при  $\Delta a < 0$  — кривая 1, то переходный процесс в обе стороны расходится, т. е. исследуемое периодическое решение неустойчиво (система устойчива в малом и неустойчива в большом, как на рис. 16.3, б).

**Аналитический критерий устойчивости периодического решения.** Развивая предыдущий способ, видим, что нет необходимости строить сами кривые Михайлова. Все исследование можно произвести аналитически. В самом деле, для того чтобы узнать, примет ли кривая Михайлова при  $\Delta a > 0$  положение 1 (рис. 18.9), достаточно определить, куда будет перемещаться с увеличением  $a$  та точка кривой Михайлова ( $\tilde{\omega} = \omega_n$ ), которая при  $a = a_n$  находится в начале координат. Если она будет перемещаться по направлениям  $OA_1$ ,  $OA_2$  или  $OA_3$  (рис. 18.10, а), то периодический процесс с амплитудой  $a = a_n$  устойчив, а если по направлениям  $OA_4$ , или  $OA_5$  — неустойчив.

Это направление перемещения точки  $\tilde{\omega} = \omega_n$  из начала координат с увеличением  $a$  определяется, очевидно, следующими проекциями на координатные оси  $X$  и  $Y$ :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_n \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_n, \tag{18.61}$$

где  $X$  и  $Y$  обозначают вещественную и мнимую части аналитического выражения кривой Михайлова, а индекс « $n$ » означает подстановку  $a = a_n$ ,  $\tilde{\omega} = \omega_n$ . Как видно из рис. 18.10, а, для устойчивости исследуемого периодического решения вектор, определяемый проекциями (18.61), должен лежать с определенной стороны от касательной  $MN$  к кривой Михайлова, направление которой в свою очередь определяется проекциями

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}}\right)_n \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}}\right)_n. \tag{18.62}$$

Из расположения вектора с проекциями (18.61) по отношению к вектору с проекциями (18.62) и видна непосредственно устойчивость или неустойчивость данного периодического решения с амплитудой  $a_n$ .

На рис. 18.10, б и в показаны те же векторы, что и на рис. 18.10, а, но для других видов кривых Михайлова. Видно, что во всех случаях для устойчивости исследуемого периодического решения требуется, чтобы вектор с проекциями (18.61) лежал справа от касательной  $MN$ , если смотреть вдоль кривой Михайлова в сторону возрастания

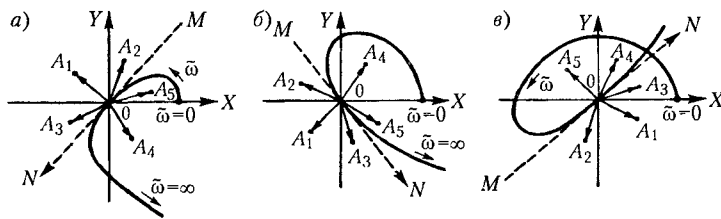


Рис. 18.10

$\tilde{\omega}$ , причем направление касательной  $MN$  определяется вектором с проекциями (18.62). Это геометрическое условие устойчивости периодического решения можно записать в следующем аналитическом виде:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_{\parallel} \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\parallel} - \left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\parallel} \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_{\parallel} > 0, \quad (18.63)$$

или иначе:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial a}\right)_{\parallel} \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\parallel} - \left(\frac{\partial Y}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial a}\right)_{\parallel} \left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\parallel} > 0.$$

Здесь важно, что частные производные берутся не по частоте  $\omega$ , а по текущему параметру кривой Михайлова  $\tilde{\omega}$ , т. е. имеются в виду выражения  $X$  и  $Y$  не в форме (18.35), а как вещественная и мнимая части выражения (18.45) в функции от  $\tilde{\omega}$  при  $\omega = \text{const}$  (если она входит в коэффициенты, стоящие в квадратных скобках этого выражения).

Выполнение условия (18.63) устойчивости периодического решения во всякой конкретной задаче можно проверить аналитически, без построения кривых. Этого достаточно для систем третьего и четвертого порядков, если все коэффициенты гармонически линеаризованного характеристического уравнения положительны. Для систем же пятого и более высокого порядков требуется дополнительно проверить общий ход кривой Михайлова, чтобы убедиться, что имеет место случай, например, рис. 18.11, а, по не рис. 18.11, б. Заметим, что вместо построения кривой Михайлова можно и тут воспользоваться аналитическим дополнительным условием, потребовав выполнения критерия Гурвица для многочлена

$$D_1(p) = \frac{D(p)}{p^2 - \omega_{\parallel}^2}, \quad (18.64)$$

где  $D(p)$  — левая часть гармонически линеаризованного характеристического уравнения (18.33) при  $a = a_{\parallel}$  и  $\omega = \omega_{\parallel}$ , при этом если  $D(p)$  имеет пятую или шестую степень, достаточно убедиться в положительности коэффициентов  $D_1(p)$ .

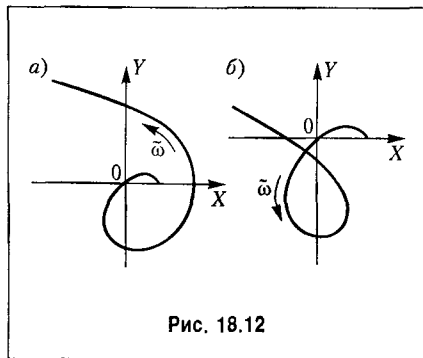


Рис. 18.12

**Устойчивость равновесного состояния системы.** Приведенные в начале данного параграфа гармонически линеаризованные уравнения нелинейной системы годятся только для колебательных процессов, определяемых периодическими решениями, и для колебательных переходных процессов в непосредственной близости от указанных периодических решений. Поэтому, строго говоря, с помощью этих приближенных уравнений можно анализировать только сами периодические решения и их устойчивость или неустойчи-



вость при малых отклонениях от исследуемого колебательного режима, что выше и делается.

Практически же из анализа полученных приближенных уравнений нелинейной системы часто можно делать значительно более широкие выводы. В частности, можно оценивать устойчивость системы в тех областях ее параметров, в которых периодические решения отсутствуют вовсе.

Пусть, например, определено, что периодическое решение, амплитуда которого показана на рис. 18.5, *a*, устойчиво (оно соответствует автоколебаниям). Условимся факт устойчивости периодического решения обозначать на графике вертикальными стрелками, сходящимися к данному периодическому решению (рис. 18.12, *a*). Этим обозначением иллюстрируется то, что переходные процессы с обеих сторон (т. е. с большими, чем  $a_{п}$ , и с меньшими, чем  $a_{п}$ , начальными амплитудами) сходятся к автоколебательному процессу с амплитудой  $a_{п}$ . Пусть в данном случае  $k$  обозначает коэффициент передачи линейной части. График рис. 18.12, *a* показывает, что в системе возникают автоколебания при  $k > k_{гр}$ . Естественно сделать отсюда вывод о том, что в области  $0 < k < k_{гр}$  (где нет периодического решения) данная система будет устойчива, что также обозначено на рис. 18.12, *a* вертикальной стрелкой.

Аналогичное заключение для области  $0 \leq k \leq k_{гр}$  можно сделать и в случае неустойчивого периодического решения на рис. 18.12, *б*, и в случае паличия двух периодических решений на рис. 18.12, *в*, одно из которых устойчиво, другое неустойчиво. Если же автоколебания наблюдаются в области  $0 \leq k \leq k_{гр}$ , как показано на рис. 18.12, *г*, то естественно предположить, что область  $k > k_{гр}$  будет областью неустойчивости данной нелинейной системы.

Наконец, если периодических решений для исследуемой нелинейной системы не получается вовсе ни при каких значениях ее параметров, то согласно геометрическому способу определения автоколебаний (см. выше) получим, что кривая Михайлова будет либо охватывать начало координат при всяком значении  $a$ , либо не охватывать его при всех  $a$ . Отсюда можно сделать вывод, что в первом случае данная нелинейная система устойчива, а во втором — неустойчива.

Развитие, а также сравнение данного способа определения устойчивости равновесия нелинейной системы с методом Ляпунова, показывающее эффективность такого способа, см. в книге [72, §§ 2.7–2.9].

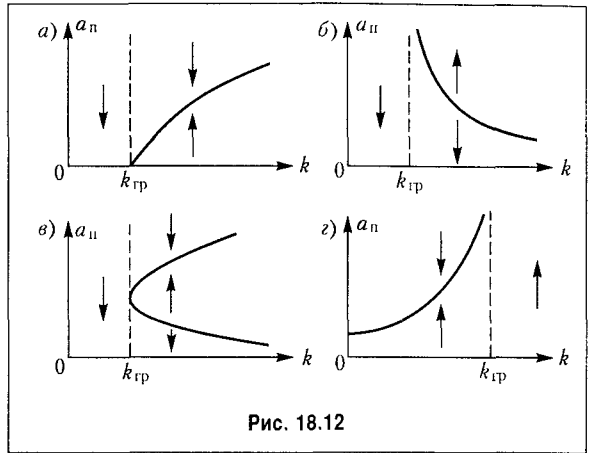


Рис. 18.12

### § 18.3. Примеры исследования нелинейных систем первого класса

Рассмотрим несколько примеров применения изложенного в предыдущем параграфе метода.

**Пример 1.** Найдем влияние ограничения линейной характеристики двигателя (рис. 18.13, а) на процессы в следящей системе. Пусть остальные звенья системы линейны. Тогда уравнение управляемого объекта с двигателем вместо (16.63) примет вид

$$(T_o p + 1) p \beta = c' F(i_n),$$

где  $F(i_n)$  определяется графиком рис. 18.13, а.

Применяя к правой части этого уравнения формулы гармонической линеаризации (18.22) с заменой  $c = bk_c$ , получаем уравнение управляемого объекта с двигателем в виде

$$(T_o p + 1) p \beta = q(a) i_n, \quad (18.65)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= k_1 = c' k_c && \text{при } a \leq b, \\ q &= \frac{2}{\pi} k_1 \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) && \text{при } a > b, \end{aligned} \right\} \quad (18.66)$$

что изображено графически на рис. 18.13, б. Здесь  $a$  обозначает амплитуду колебаний величины  $i_n$ .

Общее уравнение остальной части следящей системы согласно (16.53) будет

$$(T_b p + 1) i_n = -[k + (T_b p + 1) k_6 p] \beta. \quad (18.67)$$

На основании (18.65) и (18.66) получаем характеристическое уравнение

$$(T_o p + 1) (T_b p + 1) p + q(a) [k + (T_b p + 1) k_6 p] = 0. \quad (18.68)$$

После приведения его левой части к виду  $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$  и подстановки  $p = j\omega$  получаем уравнения типа (18.36) в виде

$$\left. \begin{aligned} X &= kq(a_n) - [T_o + T_b + T_b k_6 q(a_n)] \omega_n^2 = 0, \\ Y &= [1 + k_6 q(a_n)] \omega_n - T_o T_b \omega_n^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.69)$$

Выясним влияние параметра  $k$  на автоколебания в данной системе. Из последнего уравнения находим

$$q(a_n) = \frac{T_o T_b \omega_n^2 - 1}{k_6}, \quad (18.70)$$

а из первого

$$k = \left[ \frac{T_o + T_B}{q(a_{II})} + T_B k_G \right] \omega_{II}^2. \quad (18.71)$$

Формула (18.70) дает график, изображенный на рис. 18.13, в, где

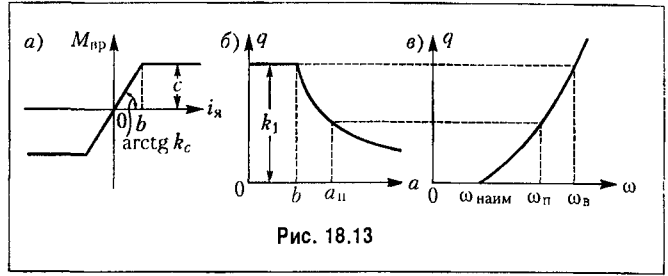


Рис. 18.13

$$\omega_{\text{наим}} = \frac{1}{\sqrt{T_o T_B}}, \quad \omega_{\text{в}} = \sqrt{\frac{1 + k_1 k_G}{T_o T_B}}. \quad (18.72)$$

Графики на рис. 18.13, б и в определяют связь между амплитудой  $a_{II}$  и частотой периодического решения в данной системе.

Найдем зависимость амплитуды  $a_{II}$  от величины параметра  $k$ . Для этого, задаваясь различными  $\omega_{II}$ , будем брать из графика рис. 18.13 соответствующие значения  $a_{II}$ , а по формуле (18.71) вычислять  $k$ . В результате получим график  $a_{II}(k)$  типа рис. 18.14, а или б. Чтобы определить, в каких случаях каждый из них имеет место, найдем  $k_{\min}$ . Дифференцируя (18.71) по  $\omega_{II}$  с учетом (18.70) и приравнявая результат нулю, получаем соответствующее значение  $\omega_M$  в виде

$$\omega_M^2 = \frac{1}{T_o T_B} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{T_o}{T_B}} \right), \quad (18.73)$$

причем  $k_{\min}$  определяется подстановкой  $\omega_M$  в (18.70) и (18.71), а именно:

$$k_{\min} = \frac{k_G}{T_B} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{T_B}{T_o}} \right). \quad (18.74)$$

Очевидно, что если  $\omega_M > \omega_{\text{в}}$ , то  $k_{\min}$  не существует и имеет место первый случай (рис. 18.14, а), а при  $\omega_M < \omega_{\text{в}}$  — второй (рис. 18.14, б). Сравнивая (18.73) и (18.72), приходим к выводу, что для системы, параметры которой удовлетворяют условию

$$k_1 k_G \leq \sqrt{1 + \frac{T_o}{T_B}}, \quad (18.75)$$

справедлив график на рис. 18.14, а, а для системы с параметрами

$$k_1 k_G > \sqrt{1 + \frac{T_o}{T_B}} \quad (18.76)$$

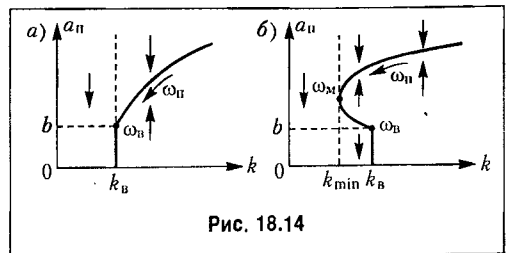


Рис. 18.14

— на рис. 18.14, б.

Исследуем устойчивость найденного периодического решения по критерию (18.63). Согласно (18.66) частота  $a$  не входит в коэффициенты. Поэтому в выражении (18.45) для кривой Михайлова функции  $X(\tilde{\omega})$  и  $Y(\tilde{\omega})$  совпадают с (18.69).

Найдем производные:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\Pi} &= -2[T_o + T_b + T_b k_6 q(a_{\Pi})] \omega_{\Pi} = -2T_o \omega_{\Pi} (1 + T_b^2 \omega_{\Pi}^2) < 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\omega}}\right)_{\Pi} &= 1 + k_6 q(a_{\Pi}) - 3T_o T_b \omega_{\Pi}^2 = -2T_o T_b \omega_{\Pi}^2 < 0, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_{\Pi} &= (k - T_b k_6 \omega_{\Pi}^2) \left(\frac{dq}{da}\right)_{\Pi} = \frac{(T_o + T_b) \omega_{\Pi}^2}{q(a_{\Pi})} \left(\frac{dq}{da}\right)_{\Pi} < 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_{\Pi} &= k_6 \omega_{\Pi} \left(\frac{dq}{da}\right)_{\Pi} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.77)$$

так как согласно рис. 18.13,  $b$  производная  $dq/da$  отрицательна.

Легко проверить, что при  $\omega > \omega_M$ , где  $\omega_M$  определяется формулой (18.73), критерий (18.63) удовлетворяется, а при  $\omega < \omega_M$  не удовлетворяется. Отсюда делаем заключение, что все периодические решения на рис. 18.14,  $a$  устойчивы (т. е. соответствуют автоколебаниям). Вертикальными стрелками там показано, что переходные процессы с большими и меньшими амплитудами сходятся к данному периодическому процессу. На рис. 18.14,  $b$  только верхняя ветвь кривой (выше точки  $\omega_M$ ) соответствует устойчивым периодическим решениям, т. е. автоколебаниям, а нижняя ( $\omega_M + \omega_b$ ) — неустойчивым.

Как уже отмечалось, через  $a_{\Pi}$  здесь обозначена амплитуда колебаний величины  $i_{\Pi}$ . Чтобы узнать амплитуду  $a_{\beta}$  автоколебаний управляемой величины  $\beta$ , надо воспользоваться уравнением (18.65), откуда

$$a_{\beta} = \frac{q(a_{\Pi})}{\omega_{\Pi} \sqrt{T_o^2 \omega_{\Pi}^2 + 1}} a_{\Pi} = \frac{T_o T_b \omega_{\Pi}^2 - 1}{k_6 \omega_{\Pi} \sqrt{T_o^2 \omega_{\Pi}^2 + 1}} a_{\Pi} \quad (18.78)$$

как модуль соответствующей передаточной функции при  $p = j\omega$ , умноженный на  $a_{\Pi}$ . При этом величины  $a_{\Pi}$  и  $\omega_{\Pi}$  определяются графиком рис. 18.14,  $a$  или  $b$ .

Учитывая, что  $q(a) = k_1$  при  $a = b$  (см. рис. 18.13,  $b$ ), найдем по формуле (18.71) с подстановкой  $\omega_{\Pi} = \omega_b$  из (18.72) величину  $k_b$ , отмеченную на рис. 18.14:

$$k_b = \left( \frac{T_o + T_b}{k_1} + T_b k_6 \right) \frac{1 + k_1 k_6}{T_o T_b}. \quad (18.79)$$

Точно такое же значение  $k$  является границей устойчивости для линейной системы, когда уравнение управляемого объекта с двигателем вместо (18.65) имеет линейный вид  $(T_p + 1) p\beta = k_1 i_{\Pi}$ . Отсюда можно сделать вывод о том, что в случае (18.75), для которого имеет место график рис. 18.14,  $a$ , данная нелинейная система сохраняет устойчивость в той же области, что и линейная система, но она обладает еще установившимся автоколебательным режимом там, где линейная система неустойчива. Сле-

довательно, ограничение линейной характеристики типа насыщения в двигателе (рис. 18.13, в) препятствует раскачиванию системы, которое получается при  $k > k_B$  в линейной системе. Это наблюдается и на практике.

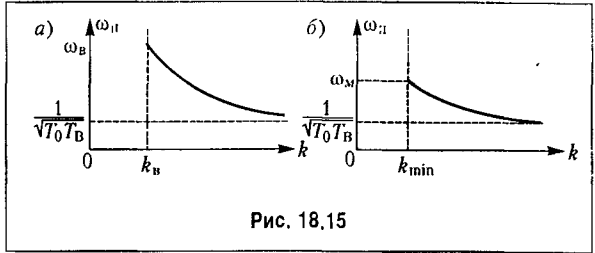


Рис. 18.15

В случае же (18.76), для которого график, определяющий автоколебания, имеет вид рис. 18.14, б, автоколебания могут уже появиться при  $k > k_B$  (но  $> k_M$ ), т. е. раньше наступления границы устойчивости линейной системы. Но в этом случае, как видно из рис. 18.14, б, при малых начальных амплитудах переходного процесса (ниже кривой  $\omega_M, \omega_B$ ) сохраняется еще устойчивость равновесного состояния. Здесь в области параметров  $k_M < k < k_B$  (рис. 18.14, б) имеется как бы два предельных цикла (рис. 16.14, в), а в области  $k_B < k < \infty$  -- один.

Случай, изображенный на рис. 18.14, б, называется «жестким возбуждением» автоколебаний. Такое возбуждение автоколебаний раньше наступления границы устойчивости возможно, как видно из (18.76), только при достаточно большом  $k_B$ , который, по существу, является коэффициентом гибкой обратной связи. При отсутствии такой связи указанное явление не имело бы места.

На рис. 18.15, а и б даны графики для величины частоты автоколебаний  $\omega_n$  в зависимости от параметра  $k$  соответственно для случаев, изображенных на рис. 18.14, а и б.

**Пример 2.** Рассмотрим теперь следующую систему с линейной характеристикой привода, но учтем сухое трение совместно с линейным (рис. 18.16, а). Уравнение управляемого объекта с двигателем имеет при этом вид (16.52). Здесь возможны два случая: 1) колебания без остановок, когда обеспечиваются условия первого из уравнений (16.52); 2) колебания с остановками, когда действуют попеременно оба уравнения (16.52). Рассмотрим первый случай и определим условия его существования.

Итак, записываем первое из уравнений (16.52), поделив его на  $c_2$  в виде

$$\left. \begin{aligned} T_0 p^2 \beta + p \beta + k_7 \operatorname{sign} p \beta &= k_1 i_{я}, & k_7 &= \frac{c}{c_2}, \\ k_1 &= \frac{c_1}{c_2}, & T_0 &= \frac{J}{c_2}, \end{aligned} \right\} \quad (18.80)$$

с условием, что

$$|i_{я}| > \frac{k_7}{k_1} \quad \text{при } p \beta = 0. \quad (18.81)$$

Обозначим  $x = p \beta$ . Тогда это уравнение будет

$$(T_0 p + 1)x + F(x) = k_1 i_{я}, \quad (18.82)$$

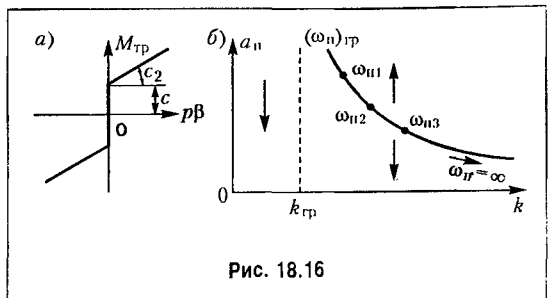


Рис. 18.16

где

$$F(x) = k_7 \operatorname{sign} x. \quad (18.83)$$

Поскольку движение предполагается без остановок, то нелинейную функцию (18.83) подвергнем гармонической линейризации, как релейную характеристику, и на основании формулы (18.18), полагая  $x = a \sin \omega t$ , получаем

$$F(x) \approx \frac{4k_7}{\pi a} x, \quad (18.84)$$

где  $a$  — амплитуда колебаний скорости  $x = p\beta$ ; амплитуда колебаний самого угла  $\beta$  при этом, очевидно, будет

$$a_\beta = \frac{a}{\omega} \quad \left( \beta = -\frac{a}{\omega} \cos \omega t \right).$$

Выражение (18.84) представляет собой известную формулу линейризации сухого трения с помощью вибраций. Найдем условия, при которых она здесь справедлива. Согласно (18.81) и (18.82) имеем

$$|i_{я}|_{p\beta=0} = \left| \frac{T_o p x}{k_1} \right|_{x=0} = \left| \frac{T_o a \omega \cos \omega t}{k_1} \right|_{\sin \omega t=0} = \frac{T_o a \omega}{k_1} > \frac{k_7}{k_1},$$

откуда

$$a\omega > \frac{k_7}{T_o} \quad \text{или} \quad a_\beta \omega^2 > \frac{k_7}{T_o}, \quad (18.85)$$

что и является условием, при котором справедливо дальнейшее решение.

Характеристическое уравнение всей замкнутой системы согласно (18.82), (18.84) и (16.53) получает вид

$$(T_b p + 1) \frac{4k_7}{\pi a} p + k_1 (T_o p + 1) k_6 p + k_1 k + (T_o p + 1) (T_b p + 1) p = 0.$$

После подстановки  $p = j\omega$  получаем

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k - \left( \frac{4k_7}{\pi a} T_b + k_1 k_6 T_b + T_b + T_o \right) \omega^2 = 0, \\ Y &= \left( \frac{4k_7}{\pi a} + k_1 k_6 + 1 \right) \omega - T_o T_b \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.86)$$

Чтобы исследовать влияние коэффициента  $k$  на динамику системы, выразим из этих двух уравнений величины  $k$  и  $a_{II}$  через  $\omega_{II}$ :

$$k = \frac{T_o \omega_{II}^2}{k_1} (T_B^2 \omega_{II}^2 + 1), \quad a_{II} = \frac{4k_7}{\pi(T_o T_B \omega_{II}^2 - 1 - k_1 k_6)}. \quad (18.87)$$

Заметим, что  $a_{II} = \infty$  при

$$(\omega_{II})_{гp}^2 = \frac{1 + k_1 k_6}{T_o T_B}, \quad k_{гp} = \frac{1 + k_1 k_6}{k_1} \left( \frac{1 + k_1 k_6}{T_o} + \frac{1}{T_B} \right). \quad (18.88)$$

Изменяя  $\omega_{II}$  в интервале  $(\omega_{II})_{гp} \leq \omega_{II} \leq +\infty$ , строим по формулам (18.87) график  $a_{II} = f(k)$ , представленный на рис. 18.16, б. Условие, при котором справедливо это решение, было выражено неравенством (18.85). Подставив в него значения  $a = a_{II}$  и  $\omega = \omega_{II}$  из (18.87), приводим его к виду

$$\frac{4\sqrt{2T_o b}}{\pi[b - 2T_B(1 + k_1 k_6)]} > 1, \quad (18.89)$$

где

$$b = \sqrt{T_o^2 + 4k_1 k T_o T_B^2} - T_o.$$

Для исследования устойчивости найденного периодического решения на основании (18.86) находим

$$\left( \frac{\partial X}{\partial a} \right)_{II} > 0, \quad \left( \frac{\partial Y}{\partial a} \right)_{II} < 0, \quad \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{II} < 0, \quad \left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)_{II} < 0.$$

Критерий (18.63) при этом не выполняется, что означает неустойчивость найденного периодического решения. Это и показано условно вертикальными стрелками на рис. 18.16, б.

Легко проверить, что значение  $k_{гp}$  (18.88) совпадает с границей устойчивости линейной системы без сухого трения. Следовательно, добавление сухого трения несколько расширяет область устойчивости системы, но весьма своеобразно, а именно: неустойчивость найденного периодического решения означает, что при  $k > k_{гp}$  и при выполнении условия (18.89) система может быть устойчивой в малом (при начальных условиях, которые дают начальную амплитуду собственных колебаний системы в переходном процессе, лежащую ниже кривой на рис. 18.16, б). Однако система неустойчива в большом (при начальных амплитудах собственных колебаний выше этой кривой). Последнее можно объяснить физически тем, что при больших амплитудах и соответственно при больших скоростях движения демпфирующее влияние силы сухого трения, которая сохраняет одну и ту же величину при любой скорости, становится несущественным, вследствие чего система оказывается неустойчивой, как и при отсутствии сухого трения.

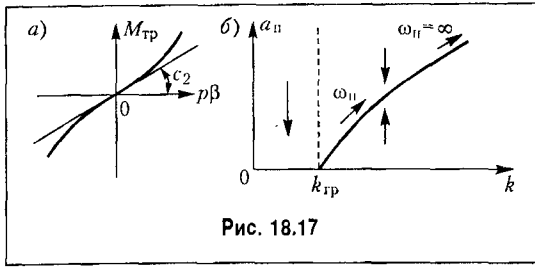


Рис. 18.17

При невыполнении условия (18.89) требуется исследование обоих уравнений (16.52) совместно (это будет уже нелинейность второго класса, так как она затрагивает обе величины: входную  $i_n$  и выходную  $\beta$ ). При этом колебания угла  $\beta$  будут происходить с остановками. Это — задача более сложная.

**Пример 3.** Пусть теперь в той же системе действует не сухое трение, а сопротивление движению объекта, пропорциональное квадрату скорости, с линейной составляющей (рис. 18.17, а). Уравнение управляемого объекта с двигателем имеет в этом случае вид (16.63). Перепишем здесь его иначе по аналогии с предыдущим примером:

$$(T_0 p + 1)x + F(x) = k_1 i_n, \quad x = p\beta, \quad (18.90)$$

где

$$T_0 = \frac{J}{c_2}, \quad k_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad F(x) = k_8 x^2 \operatorname{sign} x, \quad k_8 = \frac{c_3}{c_2}.$$

Полагая  $x = a \sin \omega t$ , по формулам гармонической линеаризации (18.10) получаем

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} k_8 a^2 \sin^2 \psi (\operatorname{sign} \sin \psi) \sin \psi \, d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} k_8 a^2 \sin^3 \psi \, d\psi - \frac{1}{\pi a} \int_{\pi}^{2\pi} k_8 a^2 \sin^3 \psi \, d\psi = \frac{8k_8 a}{3\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F(x) \approx \frac{8k_8 a}{3\pi} x.$$

Составив, как и раньше, характеристическое уравнение, приходим к выражениям:

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k - \left( k_1 k_6 T_n + T_n + T_0 + \frac{8k_8 a}{3\pi} T_n \right) \omega^2 = 0, \\ Y &= \left( k_1 k_6 + 1 + \frac{8k_8 a}{3\pi} \right) \omega - T_0 T_n \omega^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.91)$$

откуда находим:

$$k = \frac{T_0 \omega_n^2}{k_1} (T_n^2 \omega_n^2 + 1), \quad a_n = \frac{3\pi}{8k_8} (T_0 T_n \omega_n^2 - 1 - k_1 k_6). \quad (18.92)$$



Граничные значения  $\omega_{II}$  и  $k$  совпадают здесь с прежними (18.88), но они соответствуют уже не  $a_{II} = \infty$ , а  $a_{II} = 0$ . В результате получаем график для определения амплитуды и частоты периодического решения, изображенный на рис. 18.17, б.

Поскольку здесь

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_{II} < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_{II} > 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_{II} < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_{II} < 0,$$

то критерий (18.63) выполняется. Поэтому найденное неперiodическое решение устойчиво. Следовательно, квадратичное трение приводит к автоколебаниям в той области параметров, где система без этого добавочного трения была бы неустойчивой. Это объясняется усилением демпфирующего действия квадратичной силы трения при увеличении амплитуды (и скорости) колебаний, что препятствует неограниченному раскачиванию системы. Заметим, что переход закона сопротивления движению объекта от линейного к квадратичному при больших скоростях отражает реальные явления.

Амплитуда и частота автоколебаний определяются здесь графиком рис. 18.17, б или формулами (18.92), причем амплитуда колебаний угла  $\beta$  будет  $a_\beta = a_{II}/\omega_{II}$ .

**Пример 4.** Пусть в той же следящей системе требуется учесть влияние зазора в механической передаче между двигателем и управляемым объектом (схематически он показан на рис. 16.20) при линейной характеристике двигателя и при линейном трении. В колебательных процессах, которые здесь рассматриваются, зависимость между углами новорота  $\beta$  (после зазора) и  $\beta_1$  (до зазора) будет иметь нелинейный вид, показанный на рис. 16.20, б, где  $b$  — половина ширины зазора. Кроме этой нелинейной зависимости здесь присутствует вторая нелинейность (16.54). Полагая, что момент инерции управляемого объекта  $J_1$  велик по сравнению с приведенным моментом инерции двигателя, будем считать в уравнении (16.54)  $T_1 = 0$ .

Первая нелинейность (рис. 16.20, б) после гармонической линеаризации при  $\beta_1 = a \sin \omega t$  согласно формуле (18.30) принимает вид

$$\beta = \left[ q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \beta_1, \tag{18.93}$$

где  $q(a)$  и  $q'(a)$  определяются по формулам (18.27), в которых надо считать  $k = 1$  (так как характеристика рис. 16.20, б имеет наклон  $45^\circ$ ), а именно:

$$q = \frac{1}{\pi} \left( \psi_1 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right), \quad q' = \frac{1}{\pi} \cos^2 \psi_1 = \frac{4b}{\pi a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right), \tag{18.94}$$

причем

$$\psi_1 = \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{a} \right). \tag{18.95}$$

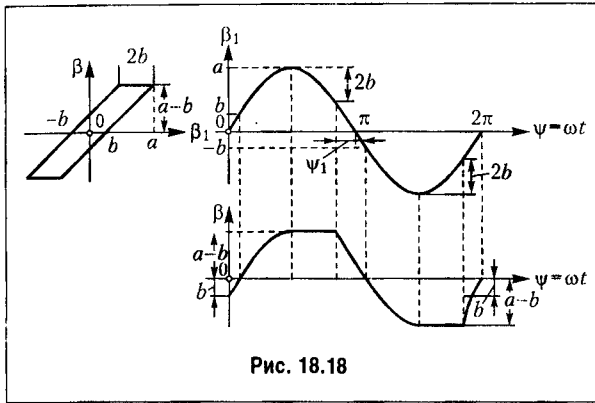


Рис. 18.18

Вторую нелинейность (16.54) запишем в виде  $F(p^2\beta_1, p\beta_1) = k_1 i_{\text{н}}$ . Она подвергается гармонической линеаризации по формулам (18.11) также при  $\beta_1 = a \sin \omega t$ .

Зависимость между углами  $\beta_1$  и  $\beta$  показана на рис. 18.18. При этом из нижнего графика и из формул (16.54) видно, что

$$F(p^2\beta_1, p\beta_1) = T_0 p^2\beta_1 + p\beta_1$$

при

$$0 < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad \pi - \psi_1 < \psi < \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi - \psi_1 < \psi < 2\pi$$

и (учитывая, что  $T_1 = 0$ )

$$F(p^2\beta_1, p\beta_1) = p\beta_1$$

при

$$\frac{\pi}{2} < \psi < \pi - \psi_1, \quad \frac{3\pi}{2} < \psi < 2\pi - \psi_1.$$

Условие отсутствия постоянной составляющей здесь выполняется, а третья из формул (18.11) принимает вид

$$q_1(a, \omega) = \frac{1}{\pi a} \left[ \int_0^{2\pi} (a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi + \int_0^{\pi/2} T_0 (-a\omega^2 \sin \psi) \cos \psi d\psi + \int_{\pi - \psi_1}^{\pi/2} T_0 (-a\omega^2 \sin \psi) \cos \psi d\psi + \int_{2\pi - \psi_1}^{2\pi} T_0 (-a\omega^2 \sin \psi) \cos \psi d\psi \right];$$

аналогично определяется и  $q_2(a, \omega)$ . Произведя интегрирование и сравнив результаты с выражениями (18.94), получаем

$$q_1(a, \omega) = \omega - q'(a) T_0 \omega^2,$$

где  $q'(a)$  то же, что в формулах (18.94).

В результате вместо нелинейного уравнения (16.54) при  $T_1 = 0$  имеем

$$[q_2(a) T_0 p + 1 - q'(a) T_0 \omega] p\beta_1 = k_1 i_{\text{н}}, \quad (18.96)$$

где

$$q_2(a) = \frac{1}{\pi} \left( \psi_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right),$$

причем  $q'(a)$  и  $\psi_1$  те же, что и в (18.94) и (18.95). На рис. 18.19, а изображены графики для величин коэффициентов  $q(a)$ ,  $q_1(a)$ ,  $q_2(a)$ .

На основании (18.93), (18.96) и линейной части (16.53) приходим к характеристическому уравнению

$$(T_b p + 1) [q_2(a) T_o p + 1 - q'(a) T_o \omega] p + k_1 [(T_b p + 1) k_6 p + k] \left[ q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0.$$

Следовательно, после подстановки  $p = j\omega$  получим

$$X = k_1 k q(a) - [T_b - T_b T_o \omega q'(a) + T_o q_2(a) + k_1 k_6 T_b q(a)] \omega^2 = 0,$$

$$Y = \left[ 1 - T_o q'(a) \omega + k_1 k_6 q(a) - k_1 k \frac{q'(a)}{\omega} \right] \omega - \left[ T_o T_b q_2(a) - k_1 k_6 T_b \frac{q'(a)}{\omega} \right] \omega^3 = 0.$$

Для исследования влияния параметра  $k$  на собственные колебания данной системы выразим величину  $k$  из каждого уравнения по отдельности:

$$k = \frac{k_b q'(a)}{q(a)} \omega + \left[ \frac{T_o q_2(a)}{k_1 q(a)} + T_b k_6 + \frac{T_b}{k_1 q(a)} \right] \omega^2 - \frac{T_o T_b q'(a)}{k_1 q(a)} \omega^3, \quad (18.97)$$

$$k = \left[ \frac{k_b q(a)}{q'(a)} + \frac{1}{k_1 q'(a)} \right] \omega - \left( \frac{T_o}{k_1} + T_b k_6 \right) \omega^2 - \frac{T_o T_b q_2(a)}{k_1 q'(a)} \omega^3. \quad (18.98)$$

. Задавая разными значениями  $a = a_{п}$ , для каждого из них по этим уравнениям строим две кривые  $k(\omega)$  (рис. 18.19, б). Точка их пересечения даст соответствующие значения  $\omega_{п}$  и  $k$ . В результате можно построить графики (рис. 18.19, в и г) зависимостей амплитуды  $a_{п}$  и частоты  $\omega_{п}$  периодического решения от параметра  $k$  (каждое построение на рис. 18.19, б даст по одной точке на каждом из графиков рис. 18.19, в и г).

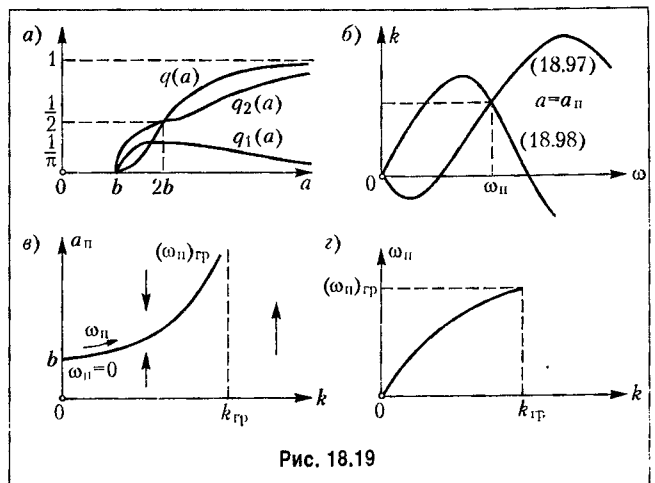


Рис. 18.19

При  $a = \infty$ , как видно из рис. 18.19, а, имеем  $q(a) = q_2(a) = 1$  и  $q_1(a) = 0$ . Поэтому из выражений  $X(\omega_{II}) = 0$  и  $Y(\omega_{II}) = 0$  находим:

$$(\omega_{II})_{гр}^2 = \frac{1 + k_1 k_6}{T_0 T_B}, \quad k_{гр} = \frac{(1 + k_1 k_6)(T_0 + T_B + T_B k_1 k_6)}{k_1 T_0 T_B},$$

причем вдоль кривой на рис. 18.19, в частота  $\omega_{II}$  изменяется в интервале  $0 \leq \omega_{II} \leq (\omega_{II})_{гр}$ .

**Пример 5.** Пусть имеется релейная система стабилизации температуры, описываемая согласно § 16.1 уравнениями (с дополнительным учетом постоянной времени привода  $T_3$ ):

$$(T_1 p + 1)\theta = -k_1 \phi, \quad x = k_2 \theta,$$

$$(T_3 p + 1)p\phi = k_3 U, \quad U = F(x),$$

где  $x$  — ток в диагонали моста (управляющей обмотке реле), а  $F(x)$  — характеристика реле, изображенная на рис. 18.20, а.

В следующем примере произведем также учет не гистерезисного, а временного запаздывания реле.

Гармоническая линеаризация характеристики реле рис. 18.20, а согласно формулам (18.9) и (18.15) дает

$$U = \left[ q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x,$$

где

$$q = \frac{2c}{\pi a^2} \left( \sqrt{a^2 - b_1^2} + \sqrt{a^2 - b_2^2} \right), \quad q' = \frac{2c(b_2 - b_1)}{\pi a^2}. \quad (18.99)$$

На основании написанных уравнений получаем следующее характеристическое уравнение данной замкнутой системы:

$$(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p + k_1 k \left[ q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0,$$

где

$$k = k_2 k_3.$$

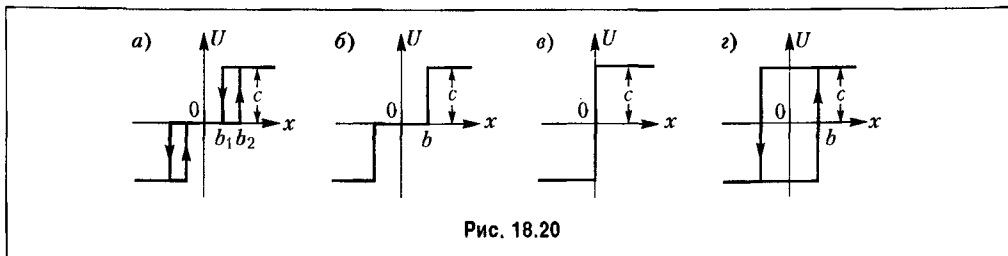


Рис. 18.20

Отсюда после подстановки  $p = j\omega$  получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k q(a) - (T_1 + T_3) \omega^2 = 0, \\ Y &= \left[ 1 - k_1 k \frac{q'(a)}{\omega} \right] \omega - T_1 T_3 \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.100)$$

Исследуем влияние параметра  $k$  на устойчивость и автоколебания данной системы.

Из (18.100) имеем

$$\frac{q(a_{\Pi})}{q'(a_{\Pi})} = \frac{(T_1 + T_3) \omega_{\Pi}^2}{1 - T_1 T_3 \omega_{\Pi}^2}, \quad (18.101)$$

откуда после подстановки (18.99) находим

$$a_{\Pi} = \frac{(v^2 + b_1^2 + b_2^2)^2 - 4b_1^2 b_2^2}{4v^2}, \quad (18.102)$$

где

$$v = \frac{(b_2 - b_1)(T_1 + T_3) \omega_{\Pi}}{1 - T_1 T_3 \omega_{\Pi}^2}.$$

Тогда из второго уравнения (18.100) с учетом (18.99) получаем

$$k = \frac{\pi(1 - T_1 T_3 \omega_{\Pi}^2) \omega_{\Pi}}{2c k_1 (b_2 - b_1)} a_{\Pi}^2. \quad (18.103)$$

На основании формул (18.102) и (18.103) можно построить графики для амплитуды  $a_{\Pi}$  в зависимости от параметра  $k$  по точкам, соответствующим различным значениям частоты  $\omega_{\Pi}$ , как это делалось в предыдущих примерах. При этом, исходя из положительности  $k$ , согласно (18.103) нужно задавать значения  $\omega_{\Pi}$  в интервале

$$0 \leq \omega_{\Pi}^2 \leq \frac{1}{T_1 T_3}. \quad (18.104)$$

Рассмотрим частные случаи.

Пусть реле имеет характеристику вида рис. 18.20, б, где  $b_1 = b_2 = b$ . Для этого случая из (18.99) получаем:

$$q = \frac{4c}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad q' = 0. \quad (18.105)$$

Поэтому второе из уравнений (18.100) дает постоянное значение частоты периодического решения

$$\omega_n^2 = \frac{1}{T_1 T_3} \tag{18.106}$$

Подставляя его в первое уравнение (18.100), с учетом (18.105) находим

$$k = \frac{\pi(T_1 + T_3)a_n^2}{4ck_1 T_1 T_3 \sqrt{a_n^2 - b^2}} \quad \text{при } b \leq a_n < \infty \tag{18.107}$$

Здесь  $k = \infty$  в двух случаях:  $a_n = b$  и  $a_n = \infty$ . Найдём  $k_{\min}$  из условия равенства нулю производной  $k$  по  $a_n$ :

$$k_{\min} = \frac{\pi b(T_1 + T_3)}{2ck_1 T_1 T_3} \tag{18.108}$$

при  $a_n = b\sqrt{2}$ .

Соответствующий график зависимости амплитуды  $a_n$  от параметра изображен на рис. 18.21, а. В этом частном случае релейной характеристики (рис. 18.20, б) для исследования устойчивости воспользуемся критерием (18.63), для которого предварительно находим

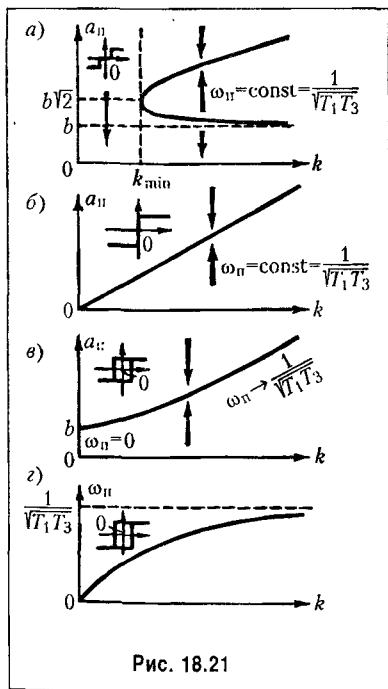


Рис. 18.21

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_n = \frac{4ck_1 k}{\pi a \sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{2b^2}{a^2} - 1\right),$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_n \begin{cases} > 0 & \text{при } a < b\sqrt{2}, \\ < 0 & \text{при } a > b\sqrt{2}, \end{cases}$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial a}\right]_n = 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_n < 0.$$

Следовательно, нижняя ветвь кривой на рис. 18.21, а соответствует неустойчивому периодическому решению, а верхняя -- устойчивому (автоколебания).

Пусть в другом частном случае характеристика реле имеет идеальный вид (рис. 18.20, в), т. е.  $b_1 = b_2 = b = 0$ . Здесь получится прежнее постоянное значение  $\omega_n$  (18.106) и согласно (18.107) -- прямая зависимость

$$a_n = \frac{4ck_1 T_1 T_3}{\pi(T_1 + T_3)} k, \tag{18.109}$$

изображенная на рис. 18.21, б. Здесь возможен только автоколебательный процесс; область устойчивости равновесного состояния, имевшаяся на рис. 18.21, а, пропадает.

Как видим, зона нечувствительности имеет стабилизирующее значение для релейной системы, причем ширина области устойчивости ( $0 \leq k \leq k_{\min}$ ) согласно (18.108) пропорциональна ширине зоны нечувствительности  $2b$ . Сравнение данного решения, учитывающего инерционность  $T_3$ , с решением без учета  $T_3$  показывает принципиальную важность учета этого фактора. Например, для характеристики вида рис. 18.20, а без учета  $T_3$  получится только устойчивость ( $a_{\text{н}} = 0$ ) при любых числовых значениях параметров (что нереально), а с учетом  $T_3$  — только автоколебания (рис. 18.21, б). Для характеристики вида рис. 18.20, б вместо неограниченной области устойчивости (без учета  $T_3$ ) получается ограниченная и возникает еще область автоколебаний с большой амплитудой при одновременном существовании устойчивости в малом (рис. 18.21, а).

Далее, в третьем частном случае, когда характеристика реле чисто гистерезисная (рис. 18.20, з), т. е.  $b_1 = -b_2 = -b$ , из (18.99) имеем

$$q = \frac{4c}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad q' = -\frac{4cb}{\pi a^2}. \tag{18.110}$$

При этом из (18.102) находим

$$a_{\text{н}}^2 = \frac{(1 + T_1^2 \omega_{\text{н}}^2)(1 + T_3^2 \omega_{\text{н}}^2)}{(1 - T_1 T_3 \omega_{\text{н}}^2)^2} b^2, \tag{18.111}$$

а из (18.103)

$$k = \frac{\pi \lambda \omega_{\text{н}} (1 + T_1^2 \omega_{\text{н}}^2)(1 + T_3^2 \omega_{\text{н}}^2)}{4c k_1 (1 - T_1 T_3 \omega_{\text{н}}^2)}. \tag{18.112}$$

По этим формулам построены кривые на рис. 18.21, в и г, определяющие амплитуду и частоту периодического решения в зависимости от величины параметра  $k$ . Устойчивость периодического решения определим здесь по методу осреднения периодических коэффициентов. Для вычисления коэффициента  $\varkappa(a)$  согласно (18.60) нужно знать производную от  $U$  по  $x$ , которая, однако, обращается в бесконечность при  $x = b$ , когда  $px > 0$ , и при  $x = -b$ , когда  $px < 0$ . Чтобы избежать этого, заменим заданную характеристику (рис. 18.20, з) новой (рис. 18.22, а), из которой заданная получается предельным переходом  $h \rightarrow 0$  (другой способ, с дельта-функцией, см. в § 18.5, рис. 18.37). Для характеристики на рис. 18.22, а при изменении величины

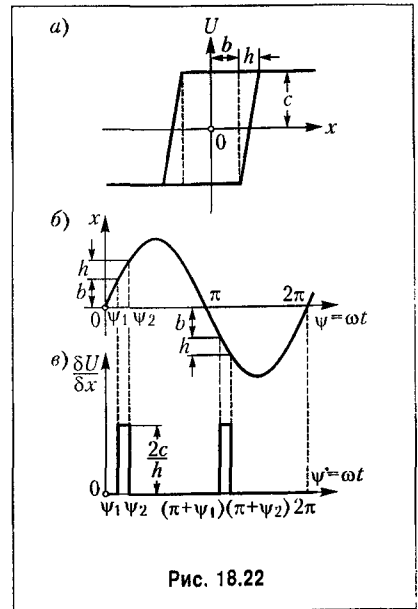


Рис. 18.22

$x$  по закону  $x = a \sin \omega t$  (рис. 18.22, б) производная  $\frac{\partial U}{\partial x}$  принимает значения, показанные на рис. 18.22, в, где

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{a}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{b+h}{a}. \quad (18.113)$$

Осредненное ее значение (18.60) согласно рис. 18.22, в с предельным переходом к заданной характеристике ( $h \rightarrow 0$ ) будет

$$\chi(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \frac{2c}{h} (\psi_2 - \psi_1)}{2\pi} = \lim_{\psi_2 \rightarrow \psi_1} \frac{2c(\psi_2 - \psi_1)}{\pi a (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)},$$

так как  $h = a \sin \psi_2 - a \sin \psi_1$ .

Обозначив  $\psi_2 = \psi_1 + \Delta\psi$  и взяв производные от числителя и знаменателя по  $\Delta\psi$ , получим

$$\chi(a) = \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{2c}{\pi a \cos(\psi_1 + \Delta\psi)} = \frac{2c}{\pi \sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (18.114)$$

Итак, для исследования устойчивости получаем следующее характеристическое уравнение:

$$T_1 T_3 p^3 + (T_1 + T_3) p^2 + p + k_1 k \chi(a) = 0. \quad (18.115)$$

Условие устойчивости периодического решения, следовательно, по критерию Гурвица будет

$$(T_1 + T_3) > T_1 T_3 k_1 k \chi(a).$$

Подставив сюда  $\chi(a)$  из (18.114) и значения  $a_n^2$  и  $k$  из (18.111) и (18.112), убедимся, что оно выполняется. Следовательно, в системе будут автоколебания  $x = a_n \sin \omega_n t$ , амплитуда и частота которых определяются графиками рис. 18.21, в и г или формулами (18.111), (18.112).

**Пример 6.** Пусть в той же системе характеристика реле имеет простейший вид рис. 18.20, в, но имеется постоянное по времени запаздывание  $\tau$ . Тогда согласно (18.110), где  $b = 0$ , уравнение нелинейного звена будет

$$U = \frac{4c}{\pi a} e^{-\tau p} x.$$

В результате получим характеристическое уравнение системы

$$(T_1 p + 1)(T_3 p + 1) p + k_1 k \frac{4c}{\pi a} e^{-\tau p} x = 0.$$



Подстановка  $p = j\omega$  с учетом выражения  $e^{j\tau\omega} = \cos \tau\omega - j \sin \tau\omega$  даст два уравнения:

$$X = \frac{4ck_1k}{\pi a} \cos \tau\omega - (T_1 + T_3)\omega^2 = 0,$$

$$Y = -\frac{4ck_1k}{\pi a} \sin \tau\omega + \omega - T_1T_3\omega^3 = 0,$$

из которых находим два соотношения:

$$(T_1 + T_3)\omega_{н} \operatorname{tg} \tau\omega_{н} = 1 - T_1T_3\omega_{н}^2,$$

$$a_{н} = \frac{4ck_1k}{\pi\omega_{н} \sqrt{1 + (T_1^2 + T_3^2)\omega_{н}^2 + T_1^2T_3^2\omega_{н}^4}}.$$

Первое из них определяет частоту (решается графически), а второе — амплитуду автоколебаний в зависимости от коэффициента усиления  $k$  и от других параметров системы.

Заметим, что во всех случаях, рассмотренных в примере 5 и в данном примере релейной системы, через  $a_{н}$  обозначалась амплитуда автоколебаний величины  $x$ . Амплитуда же автоколебаний  $a_{\theta}$  управляемой величины  $\theta$  (температуры) будет

$$a_{\theta} = \frac{a_{н}}{k_2}.$$

**Пример 7.** Рассмотрим систему автоматического управления с приводом регулирующего органа в виде двухфазного двигателя переменного тока. Характеристика этого двигателя для разных значений управляющего напряжения  $U$  имеет вид, представленный на рис. 18.23, а.

Линеаризуя характеристики, обычно считают

$$M = c_1U - c_2\omega_{дв}. \quad (18.116)$$

Но это справедливо в первом приближении только для левого участка характеристики. Если же используется большая часть характеристики, то необходимо учесть ее нелинейность. Имея в виду, что на рис. 18.23, а с увеличением  $\omega_{дв}$  коэффициент  $c_1$  уменьшается, а коэффициент  $c_2$  увеличивается, примем для описания этой характеристики вместо (18.116) следующее нелинейное выражение:

$$M = \frac{c_1}{1 + c_3|\omega_{дв}|}U - (c_2 + c_4|\omega_{дв}|)\omega_{дв} \quad (18.117)$$

(абсолютные значения  $\omega_{дв}$  в коэффициентах поставлены потому, что  $\omega_{дв}$  меняет знак, а сами коэффициенты должны оставаться положительными). Аналогично можно под-

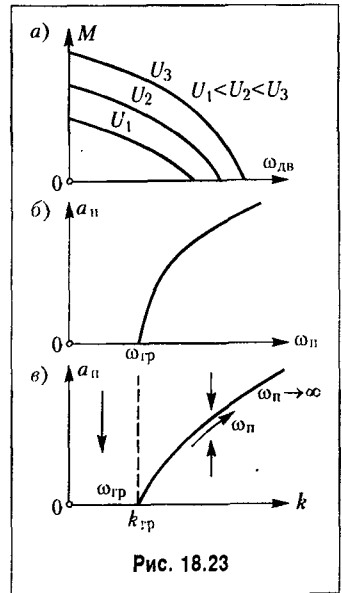


Рис. 18.23

бирать и любой другой более подходящий нелинейный закон для описания характеристик двигателя.

Введем для дальнейшего обозначение

$$x = \omega_{\text{дв}}. \quad (18.118)$$

Тогда дифференциальное уравнение двигателя

$$J \frac{dx}{dt} = \frac{c_1}{1+c_3|x|} U - c_2 x - c_4 |x|x$$

(где  $J$  — момент инерции всех вращаемых двигателем масс, приведенных к валу двигателя) можно записать в виде

$$J \frac{dx}{dt} + Jc_3|x| \frac{dx}{dt} + c_2 x + (c_2 c_3 + c_4)|x|x + c_3 c_4 x^3 = c_1 U. \quad (18.119)$$

Здесь имеем три нелинейные функции:

$$F_1 = |x| \frac{dx}{dt}, \quad F_2 = |x|x, \quad F_3 = x^3.$$

Гармоническая их линеаризация по правилам § 18.1 дает:

$$F_1 = \frac{4a}{3\pi} \frac{dx}{dt}, \quad F_2 = \frac{8a}{3\pi} x, \quad F_3 = \frac{3a^2}{4} x.$$

Подставляя это в (18.119), получаем следующее уравнение двухфазного двигателя (для колебательных процессов):

$$[T_3(1+b_1 a)p + (1+b_2 a+b_3 a^2)]x = k_3 U, \quad (18.120)$$

вместо обычного линейного  $(T_3 p + 1)x = k_3 U$ , где

$$T_3 = \frac{J}{c_2}, \quad k_3 = \frac{c_1}{c_2}, \quad b_1 = \frac{4c_3}{3\pi}, \quad b_2 = 2b_1 + \frac{8c_4}{3\pi c_2}, \quad b_3 = \frac{3c_3 c_4}{4c_2}. \quad (18.121)$$

Здесь  $a$  обозначает амплитуду колебаний угловой скорости двигателя  $x = \omega_{\text{дв}}$ .

Далее, скорость перемещения управляющего органа  $p\xi$  с учетом передаточного числа редуктора и с обозначением (18.118) будет

$$p\xi = k_4 x. \quad (18.122)$$

Уравнение объекта и уравнение чувствительного элемента возьмем соответственно в виде

$$(T_1 p + 1)\varphi = -k_1 \xi, \quad U = k_2 \varphi, \quad (18.123)$$

где  $\varphi$  — отклонение управляемой величины.

Характеристическое уравнение всей замкнутой системы будет

$$[T_3(1 + b_1 a)p + (1 + b_2 a + b_3 a^2)](T_1 p + 1)p + k_1 k = 0, \quad (18.124)$$

где

$$k = k_2 k_3 k_4.$$

После подстановки  $p = j\omega$  получаем:

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k - [T_3(1 + b_1 a) + T_1(1 + b_2 a + b_3 a^2)]\omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + b_2 a + b_3 a^2)\omega - T_3 T_1(1 + b_1 a)\omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.125)$$

Рассмотрим при этом влияние параметра  $k$ . Второе из уравнений (18.125) дает

$$a_n = \frac{b_1 T_3 T_1 \omega_n^2 - b_2 + \sqrt{(b_1 T_3 T_1 \omega_n^2 - b_2)^2 + 4b_3(T_3 T_1 \omega_n^2 - 1)}}{2b_3}. \quad (18.126)$$

Из (18.121) видно, что  $b_2 > b_1$ . Поэтому полученная формула дает зависимость амплитуды  $a_n$  от частоты  $\omega_n$  искомого периодического решения в виде графика, показанного на рис. 18.23, б, где

$$\omega_{гр} = \frac{1}{\sqrt{T_3 T_1}}. \quad (18.127)$$

Далее, первое из выражений (18.125) при  $\omega = \omega_n$  и  $a = a_n$  с использованием второго приводит к формуле для параметра  $k$ , влияние которого рассматривается:

$$k = \frac{T_3}{T_1} (1 + b_1 a_n) (1 + T_1^2 \omega_n^2) \omega_n^2. \quad (18.128)$$

По этой формуле, используя предыдущие результаты, получаем график зависимости амплитуды автоколебаний  $a_n$  от величины параметра  $k$ , показанный на рис. 18.23, в.

## § 18.4. Нелинейные системы второго класса

Нелинейные системы второго класса – это системы с несколькими нелинейными звеньями или же с одним нелинейным звеном, когда под знаки нелинейных функций входят две или более переменных, связанных между собой линейными передаточными функциями или нелинейными уравнениями. Обычный прием приближенного решения, излагаемый ниже в примерах 1–3, справедлив при соблюдении условия фильтра, оговоренного в § 18.2, для всех передаточных функций, связывающих указанные переменные. Если это условие не соблюдается, применяется специальный прием решения, изложенный ниже в примере 4.

**Пример 1.** В предыдущем параграфе рассматривалось влияние нелинейности привода, а затем влияние квадратичного трения по отдельности. Рассмотрим теперь

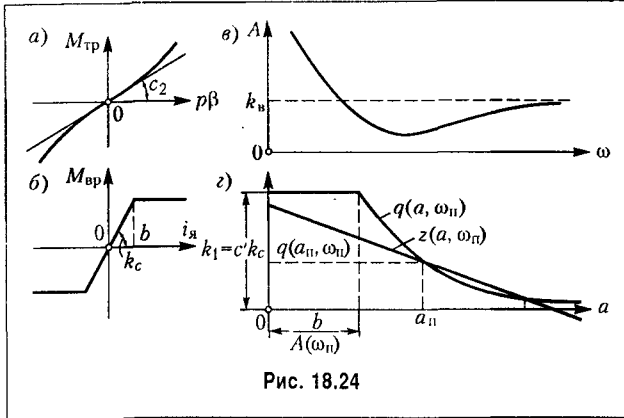


Рис. 18.24

совместное действие нелинейности привода и квадратичного трения. Момент трения при этом описывается нелинейным членом  $F(x)$ , как в уравнении (18.90), или, что то же самое, графиком на рисунке 18.24, а. Нелинейный привод пусть имеет характеристику типа насыщения (рис. 18.24, б).

Тогда уравнение двигателя и управляемого объекта вместо (18.90) примет вид

$$(T_d p + 1)x + F(x) = c' F_1(i_я), \quad x = p\beta, \quad (18.129)$$

где  $F_1(i_я) = M_{вр}$  и определяется графиком рис. 18.24, б.

В данном случае получается нелинейная система второго класса. Приближенно полагаем, что при автоколебаниях

$$x = a \sin \omega t, \quad i_я = Aa \sin(\omega t + B), \quad (18.130)$$

где  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  — модуль и аргумент амплитудно-фазовой характеристики линейной части, получаемой из уравнения (18.67), которое согласно (18.129) надо умножить на  $p$ . В результате получим

$$W_{\Gamma}(j\omega) = k_6 + \frac{k}{(T_B \omega j + 1)j\omega} = k_6 - \frac{kT_B}{1 + T_B^2 \omega^2} - j \frac{k}{(1 + T_B^2 \omega^2)\omega}.$$

Отсюда

$$A = \sqrt{k_6^2 + \frac{k^2 - 2kk_6 T_B \omega^2}{(1 + T_B^2 \omega^2)\omega^2}}, \quad (18.131)$$

что изображено графически на рис. 18.24, в.

Поскольку в уравнение (18.129) переменные  $x = p\beta$  и  $i_я$  входят отдельно, то и гармоническую линеаризацию можно производить для каждой из них отдельно. К нелинейности в левой части уравнения (18.129) применяем формулы из прежнего примера 3 (с квадратичным трением), а к нелинейности в правой части — формулы (18.65) и (18.66), в которых, в соответствии с (18.130), вместо  $a$  подставляем  $Aa$ . В результате нелинейное уравнение (18.129) принимает вид

$$\left( T_d p + 1 + \frac{8k_8 a}{3\pi} \right) p\beta = q(a, \omega) i_я, \quad (18.132)$$

где

$$q = k_1 \left\{ \begin{array}{l} q = k_1 = c'k_c \text{ при } a \leq b, \\ \arcsin \frac{b}{aA(\omega)} + \frac{b}{aA(\omega)} \sqrt{1 - \left[ \frac{b}{aA(\omega)} \right]^2} \end{array} \right\}, \quad (18.133)$$

причем  $A(\omega)$  определяется формулой (18.131) или графиком рис. 18.24, в.

Из уравнений (18.132) и (16.53) получаем гармонически линеаризованное характеристическое уравнение замкнутой системы в виде

$$(T_b p + 1) \left( T_o p + 1 + \frac{8k_8 a}{3\pi} \right) p + [(T_b p + 1)k_6 p + k] q(a) = 0.$$

Следовательно, после подстановки  $p = j\omega$ , находим:

$$X = kq(a, \omega) - \left[ T_o + T_b + k_6 T_b q(a, \omega) + \frac{8k_8 a}{3\pi} T_b \right] \omega^2 = 0,$$

$$Y = \left[ 1 + k_6 q(a, \omega) + \frac{8k_8 a}{3\pi} \right] \omega - T_o T_b \omega^3 = 0,$$

откуда получаем

$$q(a_{11}, \omega_{11}) = \frac{1}{k_6} \left( T_o T_b \omega_{11}^2 - 1 - \frac{8k_8 a_{11}}{3\pi} \right), \quad k = \frac{T_o \omega_{11}^2 (1 + T_b^2 \omega_{11}^2)}{q(a_{11}, \omega_{11})}. \quad (18.134)$$

Из первого уравнения легко определяются все возможные значения амплитуды  $a_{11}$  и частоты  $\omega_{11}$  следующим образом.

Задаемся каким-нибудь значением  $\omega_{11}$ . Из графика на рис. 18.24, в находим для него величину  $A(\omega_{11})$ . По формуле (18.133) строим кривую  $q(a, \omega_{11})$ , показанную на рис. 18.24, г.

Обозначим далее правую часть первого из уравнений (18.134) через  $z$  (при переменной  $a$  вместо  $a_{11}$ ):

$$z(a, \omega_{11}) \equiv \frac{1}{k_6} \left( T_o T_b \omega_{11}^2 - 1 - \frac{8k_8 a}{3\pi} \right),$$

и проведем согласно этой формуле на том же рис. 18.24, г прямую  $z(a, \omega_{11})$ . В точках пересечения получаем искомые значения амплитуды  $a_{11}$ , а также и значения  $q(a_{11}, \omega_{11})$ . После этого по второй из формул (18.134) подсчитаем величину параметра  $k$ .

Продлав такую же операцию для различных значений  $\omega_{11}$  и получая каждый раз  $a_{11}$  и  $k$ , сможем построить и здесь графики, подобные тем, которые получались в предыдущих примерах. Амплитуда колебаний угла  $u$  будет  $a_u = a_{11}/\omega_{11}$ . При этом согласно (18.134)

из условия положительности величины  $q(a_{11}, \omega_{11})$  должно быть  $\omega_{11}^2 > \frac{1}{T_1 T_3}$ .

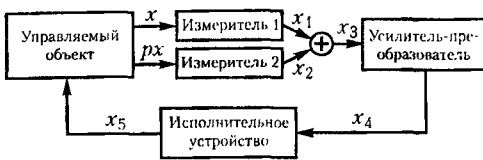


Рис. 18.25

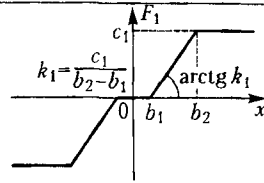


Рис. 18.26

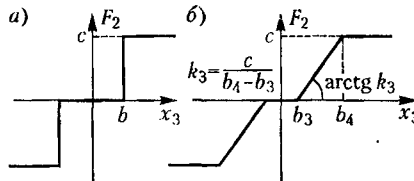


Рис. 18.27

Пример 2. Пусть в системе, функциональная схема которой изображена на рис. 18.25, управляемый объект описывается уравнением

$$p^2 x = k_0 x_5, \quad (18.135)$$

измеритель 1 — нелинейный (рис. 18.26) —

$$(T_1 p + 1) x_1 = F_1(x), \quad (18.136)$$

измеритель 2 — линейный —

$$(T_2 p + 1) x_2 = k_2 p x, \quad (18.137)$$

линейный усилитель-преобразователь вместе с линейным исполнительным устройством —

$$(T_3 p + 1) x_5 = -F_2(x_3), \quad (18.138)$$

где  $x_3 = x_1 + x_2$ , а нелинейность  $F_2(x_3)$  задана в двух вариантах, обусловленных разными режимами работы исполнительного устройства — релейным (рис. 18.27, а) или непрерывным (рис. 18.27, б).

Будем определять автоколебания приближенно в виде

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ x_3 &= a_3 (\sin \omega t + \beta), \end{aligned} \quad (18.139)$$

Здесь связь между переменными  $x$  и  $x_3$ , входящими под знаки нелинейностей, согласно рис. 18.25 идет через нелинейное звено. Следовательно, данная система является системой второго класса (с двумя нелинейными звеньями).

Гармоническая линеаризация нелинейностей согласно § 18.1 дает

$$F_1 = q_1(a)x, \quad F_2 = q_2(a_3)x_3, \quad (18.140)$$

где

$$q_1 = k_1 - \frac{2k_1}{\pi} \left( \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \left( \frac{b_1}{a} \right)^2} \right) \quad \text{при } b_1 < a < b_2 \quad (18.141)$$

и для двух вариантов исполнительного устройства соответственно

$$q_2 = \frac{4c}{\pi a_3} \sqrt{1 - \left( \frac{b}{a_3} \right)^2} \quad \text{при } a_3 > b,$$

$$q_3 = k_3 - \frac{2k_3}{\pi} \left( \arcsin \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{a_3} \sqrt{1 - \left( \frac{b_3}{a_3} \right)^2} \right) \quad \text{при } b_3 < a_3 < b_4, \quad (18.142)$$

если ищутся амплитуды автоколебаний  $a$  и  $a_3$  в указанных пределах (паличие именно такого автоколебательного режима известно, например, из опыта). Не представляет труда использование выражений  $q_1$  и  $q_2$  также и для случая  $a > b_2$  и  $a_3 > b_4$  (это ниже для общности будет сделано при изображении графиков  $q_1$  и  $q_2$ ).

Передаточная функция для переменных  $x$  и  $x_3 = x_1 + x_2$  запишется теперь согласно (18.136), (18.137) и (18.140) в виде

$$x_3 = \left[ \frac{q_1(a)}{T_1 p + 1} + \frac{k_2 p}{T_2 p + 1} \right] x, \quad (18.143)$$

откуда

$$a_3 = a \sqrt{\frac{[q_1(a) - T_1 k_2 \omega^2]^2 + [q_1(a) T_2 + k_2]^2 \omega^2}{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)}}. \quad (18.144)$$

Это выражение  $a_3(a, \omega)$  будет далее использовано.

Составим теперь характеристическое уравнение всей замкнутой системы в гармонически линеаризованном виде. Согласно (18.135)–(18.140) получаем

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) p^2 + k_0 q_2(a_3) [T_1 p^2 k_2 + (q_1(a) T_2 + k_2) p + q_1(a)] = 0.$$

Пренебрегая произведениями постоянных времени при высших степенях  $p$  по сравнению с их суммой, что вполне допустимо при рассмотрении низкочастотных автоко-

лебаний (которые здесь и будут иметь место), запишем характеристическое уравнение в виде

$$(T_1 + T_2 + T_3)p^3 + [1 + T_1 k_2 k_0 q_2(a_3)]p^2 + k_0 q_2(a_3)[q_1(a)T_2 + k_2]p + k_0 q_2(a_3)q_1(a) = 0.$$

Подстановка  $p = j\omega$  дает:

$$\begin{aligned} X &= k_0 q_2(a_3) q_1(a) - [1 + T_1 k_2 k_0 q_2(a_3)]\omega^2 = 0; \\ Y &= k_0 q_2(a_3)[q_1(a)T_2 + k_2]\omega - (T_1 + T_2 + T_3)\omega^3 = 0. \end{aligned}$$

Подставив значение  $k_0 q_2 q_1$  из первого уравнения во второе, поделенное на  $\omega$ , получим (пренебрегая снова произведением  $T_1 T_2 \omega^2$  по сравнению с единицей)

$$q_2(a_3) = \frac{(T_1 + T_3)\omega^2}{k_0 k_2}. \quad (18.145)$$

Подставив это в первое уравнение ( $X = 0$ ) и пренебрегая опять-таки произведением  $T_1(T_1 + T_3)\omega^2$  по сравнению с единицей, найдем

$$q_1(a) = \frac{k_2}{T_1 + T_3}. \quad (18.146)$$

Последнее уравнение легко решается графически. Изобразим график  $q_1(a)$  согласно формуле (18.141). На рис. 18.28, а это показано сплошной кривой. Пунктирная кривая показывает продолжение его при  $a > b_2$ . Путь графического решения уравнения (18.146) показан сплошными стрелками. Этим определяется искомая амплитуда автоколебаний  $a_{п}$  управляемой величины  $x$ . Пунктирные стрелки дают второе решение  $a_{п2}$  (неустойчивое).

Для определения частоты автоколебаний воспользуемся уравнением (18.145). Для этого сначала из формулы (18.144) найдем зависимость  $a_3(\omega)$  при заданном значении (18.146), что после пренебрежения прежними малыми членами дает

$$a_3 = \frac{k_2 a_{п}}{T_1 + T_3} \sqrt{\frac{1 + (T_1 + T_2 + T_3)^2 \omega^2}{1 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2}}, \quad (18.147)$$

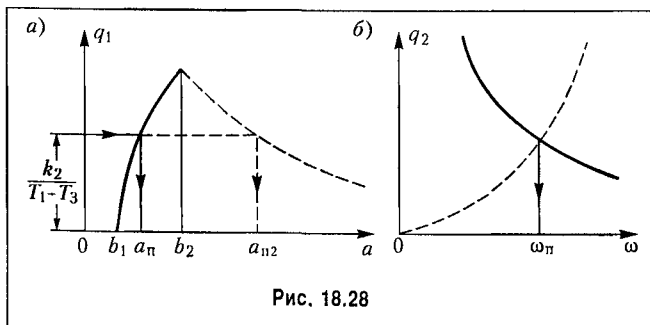


Рис. 18.28

где значение  $a_{п}$  берется из графика рис. 18.28, а.

Имея выражение для  $q_2(a_3)$  [одно из (18.142)], подставим в него полученное  $a_3(\omega)$ . Это позволяет построить график  $q_2(\omega)$  (сплошная кривая на рис. 18.28, б). На тот же график напомним правую часть уравнения (18.145) (пунктирная кривая на



рис. 18.28, б). Точка пересечения этих двух кривых дает искомое значение частоты автоколебаний  $\omega_{н}$  как решение уравнения (18.145). После этого становится известной и амплитуда автоколебаний  $a_{3н}$  на входе усилителя-преобразователя, вычисляемая по формуле (18.147) при найденном значении  $\omega = \omega_{н}$ .

**Пример 3.** Рассмотрим систему, в которой нелинейным звеном является логическое устройство (рис. 16.25) с простейшим законом формирования сигнала управления (рис. 16.26). Уравнения системы заданы в виде (16.66)–(16.69).

Установившийся режим в такой системе будет автоколебательным. Искать его будем приближенно в синусоидальной форме

$$x = a \sin \psi, \quad \psi = \omega t, \tag{18.148}$$

так как свойство фильтра в данной системе соблюдается. Тогда величины  $u$  и  $v$  будут

$$u = a_u \sin (\psi - \beta), \quad v = a_v \cos (\psi - \gamma),$$

где

$$a_u = \frac{k_1 a}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \beta = \arctg T_1 \omega, \tag{18.149}$$

$$a_v = \frac{k_2 \omega a}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}, \quad \gamma = \arctg T_2 \omega. \tag{18.150}$$

В результате процесс изменения  $u$  и  $v$  в установившемся режиме будет иметь приблизительно вид некоторого эллипса (рис. 18.29, пунктир). Поэтому включение сигнала  $\Phi$  в логическом устройстве при данной логике будет происходить от величины  $u$  (при  $u = \pm u_1$ , т. е. в точках А и С), а выключение — от величины  $v$  (при  $v = \pm v_1$ , т. е. в точках D и B; рис. 18.29). Этот процесс во времени ( $\psi = \omega t$ ) изображен на рис. 18.30.

Точки включения и выключения определяются на оси абсцисс величинами  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , причем

$$\sin(\psi_1 - \beta) = \frac{u_1}{a_u}, \quad \cos(\psi_2 - \gamma) = -\left(\frac{v_1}{a_v}\right).$$

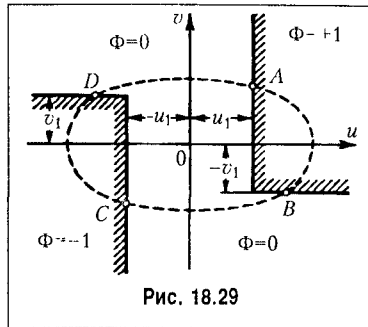


Рис. 18.29

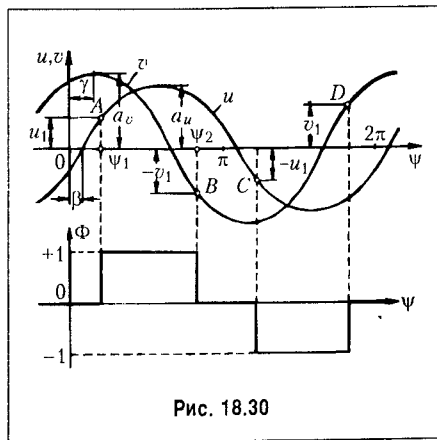


Рис. 18.30

Отсюда

$$\sin \psi_1 = \sin(\psi_1 - \beta) \cos \beta + \cos(\psi_1 - \beta) \sin \beta;$$

$$\cos \psi_1 = \cos(\psi_1 - \beta) \cos \beta - \sin(\psi_1 - \beta) \sin \beta$$

(аналогично  $\psi_2$  выражается через  $\gamma$ ). Учитывая, что согласно (18.149)

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \sin \beta = \frac{T_1 \omega}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}$$

(аналогично  $\gamma$  выражается через  $T_2 \omega$ ), находим

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi_1 &= \frac{u_1}{k_1 a} + T_1 \omega \sqrt{\frac{1}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{u_1}{k_1 a}\right)^2}, \\ \cos \psi_2 &= \sqrt{\frac{1}{T_1^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{u_1}{k_1 a}\right)^2} - \frac{T_1 \omega u_1}{k_1 a}, \end{aligned} \right\} \quad (18.151)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_2 &= \frac{v_1}{k_2 a \omega} + T_2 \omega \sqrt{\frac{1}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{v_1}{k_2 a \omega}\right)^2}, \\ \sin \psi_2 &= \sqrt{\frac{1}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \left(\frac{v_1}{k_2 a \omega}\right)^2} - \frac{T_2 v_1}{k_2 a}. \end{aligned} \right\} \quad (18.152)$$

Теперь по правилам § 18.1 легко записать результат гармонической линеаризации нелинейной логической функции:

$$\Phi(u, v) = \left( q + \frac{q'}{\omega} p \right) x, \quad (18.153)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2), \\ q' &= \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi a} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1). \end{aligned} \right\} \quad (18.154)$$

Найденные значения  $q$  и  $q'$  согласно (18.151) и (18.152) являются вполне определенными функциями искомых величин  $a$  и  $\omega$  (амплитуды и частоты автоколебаний переменной  $x$ ).

Характеристическое уравнение рассматриваемой системы в целом после указанной гармонической линеаризации нелинейности, согласно (16.66)–(16.69) и (18.153), принимает вид

$$T_0 T_3 T_4 p^4 + (T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4) p^3 + (T_0 + T_3 + T_4) p^2 + p + k_0 k_3 k_4 \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p + k_0 k_3 k_4 q(a, \omega) = 0. \quad (18.155)$$

Для отыскания синусоидального периодического решения подставляем  $p = j\omega$ . Получаем вещественную и мнимую части соответственно

$$X = k_0 k_3 k_4 q(a, \omega) - (T_0 + T_3 + T_4) \omega^2 + T_0 T_3 T_4 \omega^4 = 0;$$

$$Y = k_0 k_3 k_4 q'(a, \omega) + \omega - (T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4) \omega^3 = 0.$$

Отсюда

$$q(a, \omega) = \frac{T_0 + T_3 + T_4}{k_0 k_3 k_4} \omega^2 - \frac{T_0 T_3 T_4}{k_0 k_3 k_4} \omega^4; \quad (18.156)$$

$$q'(a, \omega) = \frac{T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4}{k_0 k_3 k_4} \omega^3 - \frac{1}{k_0 k_3 k_4} \omega. \quad (18.157)$$

Эти два уравнения с двумя неизвестными  $a$  и  $\omega$  решаются графически. Для этого по формулам (18.154) с учетом (18.151) и (18.152) строятся графики  $q(\omega)$  и  $q'(\omega)$  при разных значениях  $a = a_1, a_2, a_3, \dots$  (рис. 18.31, а). Затем на первом из них наносится кривая 1, определяемая правой частью уравнения (18.156), а на втором — кривая (18.157). Решение определится точками пересечения, для которых значения  $a = a_n$  и  $\omega = \omega_n$  одинаковы на обоих графиках. Найденные значения  $a_n$  и  $\omega_n$  будут искомыми амплитудой и частотой автоколебаний, определяемых приближенно в виде  $x = a_n \sin \omega_n t$ . Полученные конкретные числовые значения  $a = a_n$  и  $\omega = \omega_n$  соответствуют всем заданным параметрам объекта и системы управления. Если изменить параметры системы, изменятся также  $a_n$

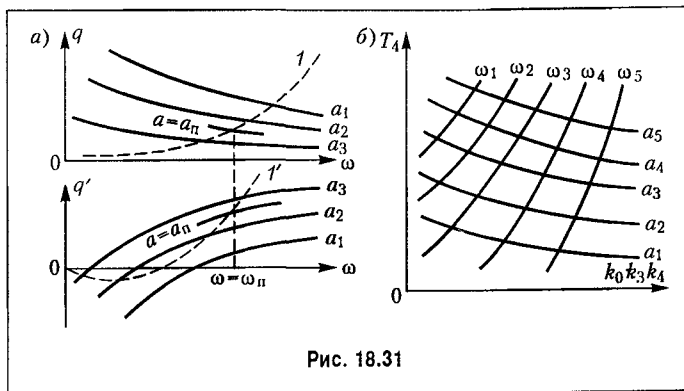


Рис. 18.31

и  $\omega_{II}$ . На том же графике можно проследить влияние изменения параметров системы, для чего нужно менять коэффициенты правых частей (18.156) и (18.157) при построении пунктирных кривых  $1, 1'$  на рис. 18.31, а.

Изложенное выше решение удобно, если все параметры системы заданы. Для изучения же зависимости  $a$  и  $\omega$  от параметров системы (т. е. для выбора параметров) целесообразнее применить другой путь решения задачи. Допустим, необходимо выбрать общий коэффициент усиления  $k_0 k_3 k_4$  с учетом влияния различных возможных значений постоянной  $T_4$ . Тогда, исключая  $k_0 k_3 k_4$  из уравнений (18.156) и (18.157), находим

$$T_4 = \frac{1(1 - T_0 T_3 \omega^2) q(a, \omega) + (T_0 + T_3) \omega q'(a, \omega)}{\omega (T_0 + T_3) \omega q(a, \omega) - (1 - T_0 T_3 \omega^2) q'(a, \omega)}$$

а затем

$$k_0 k_3 k_4 = \omega^2 \frac{(T_0 + T_3) + T_4 (1 - T_0 T_3 \omega^2)}{q(a, \omega)}$$

Задаваясь теперь различными значениями  $a$  и  $\omega$  и вычисляя каждый раз по этим формулам  $T_4$  и  $k_0 k_3 k_4$ , получим сетку линий равных значений  $\omega$  ( $\omega_1, \omega_2, \dots$ ) и  $a$  ( $a_1, a_2, \dots$ ), показанных на рис. 18.31, б. По этой диаграмме удобно выбирать значения параметров  $k_0 k_3 k_4$  и  $T_4$  для получения желаемых  $a$  и  $\omega$ .

Кроме того, важными параметрами являются  $k_1, k_2$  и особенно  $u_1$  и  $v_1$  (см. рис. 18.29). Но они входят в выражения  $q$  и  $q'$ . Поэтому для определения их влияния нужно построить графики  $q$  и  $q'$  для разных значений указанных параметров, а затем, задаваясь значениями  $a$  и  $\omega$  и используя соотношения (18.156) и (18.157), по «нотребным» значениям  $q$  и  $q'$  определять эти параметры ( $u_1, v_1, k_1$  или  $k_2$ ). При этом нужно учитывать, что из требования вещественности выражений (18.151) и (18.152) следует выбирать

$$u_1^2 < \frac{k_1^2 a^2}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad v_1^2 < \frac{k_2^2 a^2 \omega^2}{T_2^2 \omega^2 + 1}$$

**Пример 4.** Рассмотрим систему автоматического управления с двумя нелинейностями в случае, когда их гармоническая линеаризация по отдельности невозможна вследствие свойства фильтра звена, стоящего между ними (рис. 18.32).

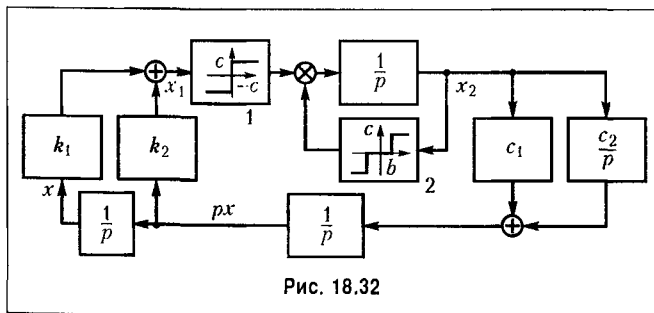


Рис. 18.32

можно вследствие отсутствия свойства фильтра звена, стоящего между ними (рис. 18.32).

Представим весь блок, включающий обе нелинейности, изображенный отдельно на рис. 18.33, как одно нелинейное звено. По отношению к нему система обладает

свойством фильтра. Следовательно, автоколебания в системе можно искать приближенно в виде

$$x_1 = a \sin \omega t.$$

Система уравнений, описывающих работу всей системы, имеет вид

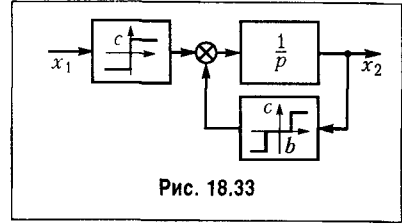


Рис. 18.33

$$\left. \begin{aligned} p^2 x &= \left( c_1 + \frac{c_2}{p} \right) x_2, \\ x_1 &= -(k_2 p + k_1) x, \\ px_2 &= \begin{cases} c & \text{при } x_1 > 0, \quad x_2 < b, \\ 0 & x_1 > 0, \quad x_2 = b, \\ -c & x_1 < 0, \quad x_2 > -b, \\ 0 & x_1 < 0, \quad x_2 = -b. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18.158)$$

Чтобы найти передаточную функцию нового нелинейного блока (рис. 18.33), определим его выходной сигнал  $x_2(t)$  при входном сигнале  $x_1 = a \sin \omega t$ . Это представлено на рис. 18.34. Отсюда видно, что выходной сигнал  $x_2$  представляет собой ограниченные на уровне  $b$  треугольные колебания, отстающие по фазе от входного сигнала на угол  $\varphi \leq \pi/2$ . Если время перехода выходного сигнала из одного крайнего положения в другое составляет  $t_{\text{п}}$ , угол  $\varphi$  определяется соотношением

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{t_{\text{п}}}{T/2} = \frac{\pi t_{\text{п}}}{T}.$$

С учетом того, что  $t_{\text{п}} = 2b/c$ ,  $T = 2\pi/\omega$ , получаем

$$\varphi = \frac{\omega b}{c}. \quad (18.159)$$

Для того чтобы выходной сигнал достигал уровня ограничения (т. е. чтобы вторая нелинейность участвовала в работе), необходимо выполнение условия

$$t_{\text{п}} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Таким образом, следует рассматривать входные сигналы с частотой

$$\omega \leq \frac{\pi}{t_{\text{п}}} = \frac{\pi c}{2b}. \quad (18.160)$$

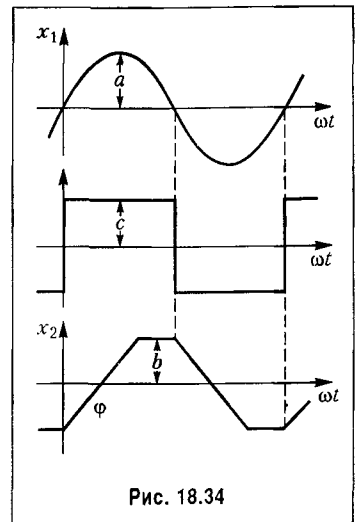


Рис. 18.34

Амплитуда первой гармоники для треугольного сигнала с ограничением имеет вид

$$a_2 = \frac{4b}{\pi\varphi} \sin \varphi. \quad (18.161)$$

Следовательно, первая гармоника сигнала  $x_2$  будет

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{4b}{\pi\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \sin \omega t - \frac{4b}{\pi\varphi} \sin^2 \varphi \cos \omega t. \quad (18.162)$$

В результате можно записать уравнение нелинейного блока (рис. 18.33) в гармонически линеаризованном виде:

$$x_2 = \left[ q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] x_1, \quad (18.163)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2b \sin 2\varphi}{\pi a \varphi} = \frac{2c \sin \frac{2b\omega}{c}}{\pi a \omega} = \frac{4b \sin \omega t_{\Pi}}{\pi a \omega t_{\Pi}}, \\ q' &= -\frac{4b \sin^2 \varphi}{\pi a \varphi} = -\frac{4c \sin^2 \frac{b\omega}{c}}{\pi a \omega} = -\frac{8b \sin^2 \frac{\omega t_{\Pi}}{2}}{\pi a \omega t_{\Pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.164)$$

Характеристическое уравнение всей замкнутой системы при этом получит вид

$$\left( 1 + k_2 c_1 \frac{q'}{\omega} \right) p^3 + \left[ k_2 c_1 q + (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{q'}{\omega} \right] p^2 + \left[ (k_1 c_1 + k_2 c_2) q + k_1 c_2 \frac{q'}{\omega} \right] p + k_1 c_2 q = 0. \quad (18.165)$$

Для удобства дальнейших преобразований представим  $q$  и  $\frac{q'}{\omega}$  в виде

$$q = \frac{Q_1}{a}, \quad \frac{q'}{\omega} = -\frac{Q_2}{a}, \quad (18.166)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  зависят от частоты  $\omega$ , а от амплитуды  $a$  не зависят. Будем искать частоту  $\omega_{\Pi}$  и амплитуду  $a_{\Pi}$  автоколебаний путем подстановки  $p = j\omega$  (18.165), что дает:

$$X = k_1 c_2 \frac{Q_1}{a} - \left[ k_2 c_1 \frac{Q_1}{a} - (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{Q_2}{a} \right] \omega^2 = 0; \quad (18.167)$$

$$Y = \left[ (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{Q_1}{a} - k_1 c_2 \frac{Q_2}{a} \right] \omega - \left( 1 - k_2 c_1 \frac{Q_2}{a} \right) \omega^3 = 0. \quad (18.168)$$

Поскольку  $a \neq 0$ , из (18.167) можно найти частоту  $\omega_{н}$ :

$$k_1 c_2 Q_1 - [k_2 c_1 Q_1 - (k_1 c_2 + k_2 c_2) Q_2] \omega_{н}^2 = 0. \quad (18.169)$$

Так как в  $Q_1$  и  $Q_2$  входит  $\omega_{н}$  под знаком тригонометрических функций, решаем это уравнение графически. Его левая часть изображается кривой, показанной на рис. 18.35.

В результате получаются два значения частоты периодического решения:  $\omega_{н} = \omega_1$  и  $\omega_{н} = \omega_2$ .

Преобразуем уравнение (18.168) к виду

$$(k_1 c_1 + k_2 c_2) Q_1 - k_1 c_2 Q_2 - (a_{н} - k_2 c_1 Q_2) \omega_{н}^2 = 0. \quad (18.170)$$

Отсюда, подставляя значения полученных при решении уравнения (18.169) частот, можно найти амплитуду периодического решения  $a_{н}$  сигнала на входе нелинейного звена. Остается определить, которое из двух найденных решений соответствует действительным автоколебаниям в системе. Для этого исследуем устойчивость найденного решения с помощью критерия (18.63).

Поскольку согласно (18.167)

$$X = \frac{1}{a} F_1(\omega),$$

частная производная

$$\left( \frac{\partial X}{\partial a} \right)_{н} = \left[ -\frac{1}{a^2} F_1(\omega) \right]_{н} = 0,$$

так как выражение  $F_1(\omega)$  представляет собой левую часть уравнения (18.169), обращаящуюся в нуль при  $\omega = \omega_{н}$ .

Для отыскания  $\frac{\partial Y}{\partial a}$  представим  $Y$  в виде

$$Y = \frac{1}{a} F_2(a, \omega).$$

Тогда

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial a} \right)_{н} = \left[ -\frac{1}{a^2} F_2(a, \omega) + \frac{1}{a} \frac{\partial F_2}{\partial a} \right]_{н} = -\frac{\omega^3}{a_{н}} < 0,$$

так как выражение  $F_2(a, \omega)$  представляет собой левую часть уравнения (18.170), обращаящуюся в нуль при  $\omega = \omega_{н}$ ,  $a = a_{н}$ , а частная производная

$$\frac{\partial F_2}{\partial a} = -\omega^3.$$

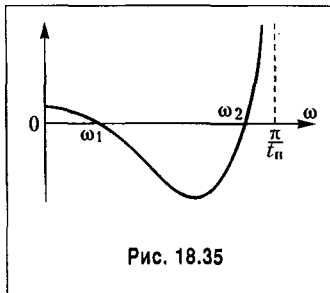


Рис. 18.35

В результате условие устойчивости колебаний (18.63) сводится к требованию

$$\left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\omega_{II}} > 0. \quad (18.171)$$

При отыскании частоты  $\omega_{II}$  автоколебаний по уравнению (18.169) был построен график  $F_1(\omega) = aX(a, \omega)$ . Из рассмотрения этой кривой (рис. 18.35) видно, что условие устойчивости (18.171) выполняется для большего из найденных значений частоты  $\omega_{II} = \omega_2$ . Таким образом, в системе существуют автоколебания, параметры которых определяются указанными значениями частоты  $\omega_{II} = \omega_2$ .

Помимо условия (18.171) для устойчивости найденного решения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения (18.165) были положительными, а именно:

$$1 + k_2 c_1 \frac{q'}{\omega} > 0, \quad (k_1 c_1 + k_2 c_2) q + k_1 c_2 \frac{q'}{\omega} > 0, \quad k_2 c_1 q + (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{q'}{\omega} > 0, \quad k_1 c_2 q > 0.$$

Легко проверить, что все эти условия были выполнены в самом процессе отыскания периодического решения.

## § 18.5. Вычисление высших гармоник и уточнение первой гармоники автоколебаний

Пусть задано дифференциальное уравнение нелинейной системы

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (18.172)$$

До сих пор периодическое решение (автоколебания) для нелинейной системы искалось для первого приближения в виде

$$x = a \sin \omega t, \quad (18.173)$$

что соответствовало приближенному значению первой гармоники периодического решения. Все высшие гармоники при этом отбрасывались ввиду их малости при наличии в системе свойства фильтра (§18.2).

Оставляя в силе это условие, произведем отыскание малых высших гармоник [72], введя отдельное обозначение для каждой  $k$ -й гармоники:

$$x_k = \delta_k a \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (18.174)$$

где амплитуда  $k$ -й гармоники  $\delta_k a$  выражена через амплитуду первой гармоники  $a$ , причем коэффициент  $\delta_k$  является малой величиной (так как амплитуда высшей гармоники предполагается малой по сравнению с амплитудой первой гармоники). Величину  $\delta_k$ , играющую в данной задаче роль малого параметра, можно назвать относительной амплитудой  $k$ -й гармоники.

Теперь с учетом конечного числа  $n$  высших гармоник искомое периодическое решение запишется в виде

$$x = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k, \quad (18.175)$$



где

$$x_1 = a_1 \sin \omega_1 t$$

обозначает уточненную по сравнению с (18.173) первую гармонику автоколебаний.

Поскольку амплитуды высших гармоник  $\delta_k a$  малы, то их вычисление можно производить, используя первое приближение периодического решения (18.173), так как использование уточненного решения (18.175) внесло бы в определение  $\delta_k a$  несущественные малые высшего порядка, но зато привело бы к неразрешимой системе уравнений.

Это чрезвычайно важное (для вычисления высших гармоник автоколебаний) допущение можно иначе сформулировать следующим образом. Считая, что на входе  $x$  нелинейного звена (рис. 18.36) истинное периодическое решение (18.175) (при  $n \rightarrow \infty$ ) мало отличается от синусоидального (18.173), будем для определения высших гармоник, порождаемых нелинейностью (т. е. на выходе нелинейного звена, где они не малые), подавать на вход нелинейного звена синусоиду (18.173).

Тогда каждая из высших гармоник на выходе нелинейного звена  $y = F(x, px)$  в комплексной форме запишется в виде

$$y_k = a_k e^{j\beta_k} = a(r_k + js_k) \quad (k = 2, 3, \dots), \tag{18.176}$$

где  $a_k$  и  $\beta_k$  — искомые амплитуда и фаза высшей гармоники  $y_k$  на выходе нелинейного звена,  $a$  — амплитуда входной синусоиды.

При этом величины  $r_k$  и  $s_k$  определяются коэффициентами ряда Фурье, деленными на  $a$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} r_k &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \sin k\psi \, d\psi, \\ s_k &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \cos k\psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \tag{18.177}$$

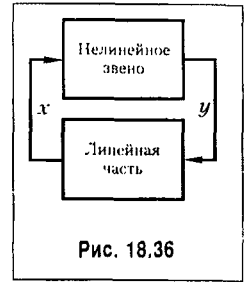
Следовательно,

$$a_k = a \sqrt{r_k^2 + s_k^2}, \quad \beta_k = \arctg \frac{s_k}{r_k}. \tag{18.178}$$

Затем эти немалые высшие гармоники с выхода нелинейного звена проходят через линейную часть (рис. 18.36) с передаточной функцией

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

становясь малыми за счет наличия свойства фильтра.



Учитывая переменную знака воздействия в замкнутой системе, получаем малые высшие гармоники для переменной  $x$  в виде (18.174), где

$$\delta_k a = \left| \frac{R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} \right| a_k, \quad \varphi_k = \beta_k + \arg \frac{-R(jk\omega)}{Q(jk\omega)}.$$

Окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \left| \frac{R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} \right| \sqrt{r_k^2 + s_k^2}, \\ \varphi_k &= \arg \frac{-R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} + \operatorname{arctg} \frac{s_k}{r_k} \end{aligned} \right\} \quad (18.179)$$

или, в комплексной форме,

$$\delta_k e^{j\varphi_k} = -\frac{R(jk\omega)}{Q(jk\omega)} (r_k + js_k). \quad (18.180)$$

Итак, по формулам (18.179) легко определяются относительная амплитуда и фаза каждой из высших гармоник (18.174) периодического решения (автоколебаний) для переменной  $x$  (18.175). Они вычисляются по известным амплитуде  $a$  и частоте  $\omega$  первого приближения (18.173), определению которого были посвящены предыдущие параграфы данной главы.

Теперь произведем уточнение амплитуды  $a$  и частоты  $\omega$  первой гармоники за счет учета уже найденных высших гармоник. Уточненные значения  $a$  и  $\omega$  обозначаются через  $a_1$  и  $\omega_1$ .

Имея в виду форму решения (18.175), где  $x_1$  — первая гармоника, разложим нелинейную функцию  $F(x, px)$  в ряд Тейлора:

$$F(x, px) = F(x_1, px_1) + \frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k + \dots$$

Ограничимся написанными членами разложения ввиду малости высших гармоник  $\sum_{k=2}^n x_k$ .

Применяя далее разложение в ряд Фурье, по аналогии с § 18.1 получим

$$F(x, px) = \left( q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\omega_1} p \right) x_1 + \text{высшие гармоники}, \quad (18.181)$$

где имеем аналогичные прежним формулам первого приближения (18.7) основные коэффициенты (причем  $\psi = \omega_1 t$ )

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F(a_1 \sin \psi, a_1 \omega_1 \cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F(a_1 \sin \psi, a_1 \omega_1 \cos \psi) \cos \psi \, d\psi \end{aligned} \right\} \quad (18.182)$$

и новые добавки к ним, вычисляемые, в отличие от этих основных, через первое приближение (18.173):

$$\begin{aligned} \Delta q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \sin \psi \, d\psi, \\ \Delta q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \cos \psi \, d\psi. \end{aligned}$$

Они и дают уточнение первой гармонике  $x_1$  за счет учета высших гармоник искомого периодического решения. Формулы для  $\Delta q$  и  $\Delta q'$  с учетом (18.174) можно преобразовать к следующей, удобной для вычислений, форме:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= \sum_{k=2}^n (I_{k1} \delta_k \cos \varphi_k + I_{k2} \delta_k \sin \varphi_k), \\ \Delta q' &= \sum_{k=2}^n (I_{k3} \delta_k \cos \varphi_k + I_{k4} \delta_k \sin \varphi_k), \end{aligned} \right\} \quad (18.183)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{k1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_k(\psi) \sin \psi \, d\psi, & I_{k2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_k(\psi) \sin \psi \, d\psi, \\ I_{k3} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_k(\psi) \cos \psi \, d\psi, & I_{k4} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_k(\psi) \cos \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (18.184)$$

причем

$$\begin{aligned} \Psi_k(\psi) &= \frac{\partial}{\partial x} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \sin k\psi + \frac{\partial}{\partial px} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) k \omega \cos k\psi; \\ \Theta_k(\psi) &= \frac{\partial}{\partial x} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) \cos k\psi + \frac{\partial}{\partial px} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) k \omega \sin k\psi. \end{aligned}$$

Подставив выражение (18.181) в уравнение системы (18.172) с учетом свойства фильтра, получим уравнение для определения уточненной первой гармоники  $x_1$  в виде

$$\left[ Q(p) + R(p) \left( q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\omega_1} p \right) \right] x_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение представим в форме

$$Q_1(p) + R(p) \left[ q(a_1, \omega_1) + \frac{q'(a_1, \omega_1)}{\omega_1} p \right] = 0, \quad (18.185)$$

где введено обозначение

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left( \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right) \quad (18.186)$$

(замена  $\omega_1$  на  $\omega$  в малых добавках не играет существенной роли). Введение такого обозначения удобно по двум причинам. Во-первых, отделяются искомые  $a_1$  и  $\omega_1$ , входящие в  $q$  и  $q'$ , от известных величин  $\Delta q$  и  $\Delta q'$ , которые вычисляются здесь предварительно по формулам (18.183) через найденные выше значения  $\delta_k$ ,  $\varphi_k$  и через  $a$  и  $\omega$ , известные из первого приближения (§§ 18.1–18.4). Во-вторых, уравнение (18.185) для определения уточненной первой гармоники  $x_1 = a_1 \sin \omega_1 t$  приведено к виду, формально совпадающему с уравнением (18.33), которое определяет первое приближение. Это позволяет использовать при определении уточненной первой гармоники совершенно те же способы, что и в § 18.2 для первого приближения. Кроме того, согласно (18.182) здесь можно использовать все прежние готовые выражения коэффициентов гармонической линеаризации  $q$  и  $q'$  для конкретно заданных нелинейностей с заменой только  $a$ ,  $\omega$  на  $a_1$ ,  $\omega_1$ .

Итак, полностью найдено искомое уточненное решение для автоколебаний (18.175) в виде

$$x = a_1 \sin \omega_1 t + \sum_{k=2}^n \delta_k a_1 \sin(k\omega_1 t + \varphi_k).$$

Следует помнить, что, используя любой из способов § 18.2 применительно к данной задаче, надо везде вместо  $Q(p)$  ставить новый многочлен  $Q_1(p)$ , отличающийся от  $Q(p)$  некоторыми добавками к его коэффициентам и определяемый по формуле (18.186).

Важная особенность уточненного решения состоит еще и в том, что многочлен  $Q_1(p)$ , в отличие от прежнего  $Q(p)$ , зависит не только от параметров линейной части системы, но, согласно (18.186) и (18.183), также и от формы нелинейности  $F(x, px)$  за счет  $\Delta q$  и  $\Delta q'$ . Однако в то время как основные коэффициенты  $q$  и  $q'$  имеют готовые выражения для каждой нелинейности (см. § 18.1), здесь нельзя применять заранее вычисленные конкретные формулы для величин  $\Delta q$  и  $\Delta q'$ , так как входящие в формулы (18.183) величины  $\delta_k$  и  $\varphi_k$ , согласно (18.179), зависят от параметров и структуры

линейной части системы. Однако можно заранее вычислить для различных конкретных форм нелинейностей вспомогательные величины  $r_k$  и  $s_k$ .

О том, какой состав высших гармоник (18.175) в каждой конкретной задаче следует учесть, можно судить по разложению заданной нелинейной функции  $F(x, px)$  в ряд Фурье. Так, например, в часто встречающемся на практике случае однозначной нечетно-симметричной нелинейности  $F(x)$  наиболее существенной из высших гармоник будет третья. Учитывая ее, представляем искомое периодическое решение (автоколебания), согласно (18.175), в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + x_3, \quad x_1 = a_1 \sin \omega_1 t, \\ x_3 &= \delta_3 a_1 \sin(3\omega_1 t + \varphi_3). \end{aligned} \right\} \quad (18.187)$$

В этом случае в уравнении для первой гармоники (18.185), как и прежде, будет равен нулю коэффициент  $q'$  и характеристическое уравнение будет

$$Q_1(p) + R(p)q = 0, \quad (18.188)$$

где

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left( \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right),$$

причем выражение коэффициента

$$q = -\frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F(a_1 \sin \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (18.189)$$

остается прежним (§ 18.1) с заменой  $a$  на  $a_1$ . Формулы для добавочных коэффициентов  $\Delta q$  и  $\Delta q'$  здесь значительно упрощаются, так как в формулах (18.183) и (18.184) многие члены пропадают, а коэффициент  $s_k = 0$ . В результате приходим к весьма простым соотношениям:

$$\Delta q = h_3 \delta_3 \cos \varphi_3, \quad \Delta q' = 3r_3 \delta_3 \sin \varphi_3, \quad (18.190)$$

где введено новое сокращенное обозначение  $h_3$ , причем

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial x} F(a \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi \, dx, \\ r_3 &= \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} F(a \sin \psi) \sin 3\psi \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (18.191)$$

Из формул (18.179) определяются относительная амплитуда и фаза третьей гармоники:

$$\delta_3 = r_3 \left| \frac{R(j3\omega)}{Q(j3\omega)} \right|, \quad \varphi_3 = \arg \frac{-R(j3\omega)}{Q(j3\omega)}. \quad (18.192)$$

Таким образом, достаточно просто определяется уточненное периодическое решение для случая однозначной нелинейности  $F(x)$  с учетом третьей гармоники в виде

$$x = a_1 [\sin \omega_1 t + \delta_3 \sin(3\omega_1 t + \varphi_3)]. \quad (18.193)$$

Проведем вычисление коэффициентов  $h_3$  и  $r_3$  по формулам (18.191) для релейных характеристик, где оно представляет некоторые особенности.

Рассмотрим релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 18.37, а). Входящая под интеграл в формуле для  $h_3$  величина производной  $dF/dx$  будет для этой нелинейности равна нулю везде, кроме двух точек  $x = \pm b$ , где она равна мгновенному импульсу, площадь которого равна  $c$  (рис. 18.37, б), т. е. величине  $c$ , умноженной на дельта-функцию. Выражение  $\sin \psi d\psi$  при  $x = a \sin \psi$  можно преобразовать к виду

$$\sin \psi d\psi = \frac{\sin \psi}{\frac{\partial x}{\partial \psi}} dx = \frac{\sin \psi}{a \cos \psi} dx = \frac{\operatorname{tg} \psi}{a} dx. \quad (18.194)$$

Поскольку подынтегральное выражение в формуле (18.191) для  $h_3$  на участке интегрирования  $(0, \pi/2)$  согласно рис. 18.37, б будет нулем везде, кроме одной точки  $\psi = \psi_1$ , то эту формулу в данном примере можно переписать в виде

$$h_3 = \frac{4}{\pi a} \sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 \int_0^{\pi} \frac{dF}{dx} dx = \frac{4}{\pi a} \sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 [F(a) - F(0)].$$

Но из рис. 18.37, в имеем

$$\sin \psi_1 = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \sin 3\psi_1 = \frac{3ba^2 - 4b^3}{a^3}, \quad (18.195)$$

а из рис. 18.37, а при  $a \geq b$

$$F(a) = c, \quad F(0) = 0.$$

Окончательно получаем

$$h_3 = \frac{4cb^2(3a^2 - 4b^2)}{\pi a^4 \sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{при } a \geq b. \quad (18.196)$$

Формула (18.191) для  $r_3$  согласно рис. 18.37,  $z$  принимает вид

$$r_3 = \frac{4c}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\pi/2} \sin 3\psi \, d\psi = \frac{4c}{3\pi a} \cos 3\psi_1,$$

откуда с учетом соотношений (18.195) находим

$$r_3 = \frac{4c(a^2 - 4b^2)}{3\pi a^4} \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{при } a \geq b. \quad (18.197)$$

В частности, для идеальной релейной характеристики из формул (18.196) и (18.197), полагая  $b = 0$ , получим:

$$h_3 = 0, \quad r_3 = \frac{4c}{3\pi a}. \quad (18.197)$$

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих процесс отыскания высших гармоник при автоколебаниях, а также уточнения первой гармоники за счет учета низших.

**Пример 1.** Исследуем следящую систему с нелинейностью типа насыщения, автоколебания в которой в первом приближении  $x = a \sin \omega t$  уже были найдены ранее, в примере 1 § 18.3, в общем виде.

Пусть теперь заданы параметры системы:

$$T_b = 0,005 \text{ с}, T_0 = 0,4 \text{ с}, k = 140 \text{ с}, k_1 = 100 \text{ с}, k_6 = 0,5 \text{ с}.$$

Они удовлетворяют соотношению (18.76). Следовательно, здесь имеет место случай, изображенный на рис. 18.14,

б, причем согласно (18.79) и (18.74)  $k_n = 166 \text{ с}$ ,  $k_{\min} = 125 \text{ с}$ . Заданное значение  $k$  лежит между ними, что соответствует области наличия двух периодических режимов. Выведенные выше формулы первого приближения (18.70) и (18.71) при этом дают для неустойчивого режима  $a = 2,29 \text{ В}$ ,  $\omega = 118,2 \text{ с}^{-1}$ , а для устойчивого режима  $a = 21,4 \text{ В}$ ,  $\omega = 44,8 \text{ с}^{-1}$ , причем  $a_m = 7,08 \text{ В}$  (в точке  $\omega_m$  рис. 18.14, б).

Наибольший интерес представляет первое (неустойчивое) периодическое решение. Оно указывает границу для начальных условий, вне которой переходный процесс в системе будет расходиться, стремясь к автоко-

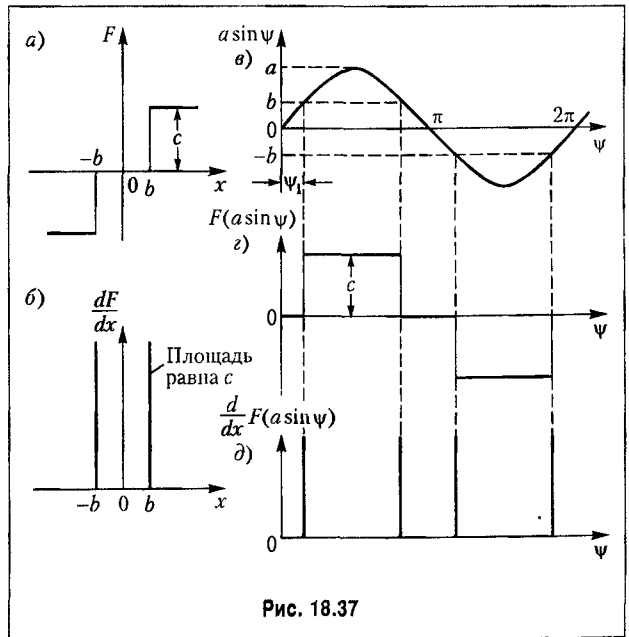


Рис. 18.37

лебниям с очень большой амплитудой  $a = 21,4$  в, что практически можно считать неустойчивостью системы в большом. Поэтому уточнение решения с вычислением высших гармоник произведем только для первого периодического решения.

Для данной нелинейности (рис. 18.13, а) по формулам (18.191) находим выражения:

$$h_3 = \frac{4b^3 k_1}{\pi a^3} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad r_3 = \frac{4b k_1}{3\pi a} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{3/2}. \quad (18.199)$$

Из формул (18.192) и (18.68) получаем относительную амплитуду  $\delta_3'$  и фазу  $\varphi_3$  третьей гармоники в виде

$$\delta_3 = \frac{r_3}{3\omega} \sqrt{\frac{(k - 9k_6 T_1 \omega^2)^2 + 9k_6^2 \omega^2}{(9T_1^2 \omega^2 + 1)(9T_2^2 \omega^2 + 1)}},$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{3k_6 \omega}{k - 9T_1 k_6 \omega^2} - \arctg 3T_1 \omega - \arctg 3T_2 \omega.$$

Вычисление по этим формулам дает

$$\delta_3 = 0,0317, \quad \varphi_3 = -1,875.$$

Для уточнения первой гармоники за счет только что вычисленной третьей гармоники находим согласно (18.190) добавки к коэффициентам гармонической линеаризации:

$$\Delta q = h_3 \delta_3 \cos \varphi_3, \quad \Delta q' = 3r_3 \delta_3 \sin \varphi_3,$$

подставляя которые в (18.188) согласно (18.68) придем к уточненному характеристическому уравнению

$$(T_o p + 1)(T_b p + 1)p + [k + (T_b p + 1)k_6 p] \left( \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right) + [k + (T_b p + 1)k_6 p] q(a_1) = 0, \quad (18.200)$$

где аналогично (18.66) имеем

$$\left. \begin{aligned} q &= k_1 \text{ при } a_1 \leq b, \\ q &= \frac{2k_1}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_1^2}} \right) \text{ при } a_1 > b. \end{aligned} \right\} \quad (18.201)$$



Подставив в уравнение (18.200)  $p = j\omega$  и выделив вещественную и мнимую части, получим два уравнения:

$$kq(a_1) + k\Delta q - [T_0 + T_B + T_B k_6 q(a_1)] \omega_1^2 - \left( T_B \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} \right) k_6 \omega_1^2 = 0;$$

$$[1 + k_6 q(a_1)] \omega_1 + \left( k_6 \Delta q + k \frac{\Delta q'}{\omega} \right) \omega_1 - T_0 T_B \omega_1^3 - T_B k_6 \frac{\Delta q'}{\omega} \omega_1^3 = 0.$$

Эти уточненные уравнения отличаются от прежних уравнений первого приближения несколькими добавочными членами, но способ решения их остается прежним. Из последнего уравнения находим

$$\omega_1^2 = \frac{1 + k_6 q(a_1) + k_6 \Delta q + k \frac{\Delta q'}{\omega}}{T_0 T_B + T_B k_6 \frac{\Delta q'}{\omega}}, \quad (18.202)$$

а из первого

$$k = \frac{T_0 + T_B + T_B k_6 q(a_1) + \left( T_B \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} \right) k_6}{q(a_1) + \Delta q} \omega_1^2. \quad (18.203)$$

Задаваясь разными значениями амплитуды  $a_1$  и вычисляя каждый раз по формулам (18.201)–(18.203) значения  $q(a_1)$ ,  $\omega_1^2$  и  $k$ , получим графики  $a_1(k)$  типа рис. 18.14, но уже для уточненного значения амплитуды  $a_1$ , первой гармоники периодического решения.

Для заданного значения  $k = 140$  это уточнение дает  $a_1 = 2,39 B$ ,  $\omega_1 = 117,8 c^{-1}$ . Значения эти достаточно близки к величинам первого приближения, а подсчитанная выше амплитуда третьей гармоники достаточно мала.

**Пример 2.** Пусть в системе автоматического управления используется двухфазный двигатель, описываемый нелинейным уравнением (18.119). В примере 7 § 18.3 найдены автоколебания для первого приближения в общем виде. Рассмотрим следующий числовой пример:

$$T_3 = 0,5 c, \quad T_1 = 0,1 c, \quad k_1 k = 26,5 c$$

с двумя вариантами нелинейности:

а) слабая нелинейность

$$b_1 = 0,01, \quad b_2 = 0,1, \quad b_3 = 0,002;$$

б) сильная нелинейность

$$b_1 = 0,1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0,166.$$

Расчет по формулам первого приближения (18.126) и (18.128) дает автоколебания в виде  $x = a \sin \omega t$ , где для варианта слабой нелинейности

$$a = 8,14, \quad \omega = 6 \text{ с}^{-1},$$

а для варианта сильной нелинейности

$$a = 0,834, \quad \omega = 6 \text{ с}^{-1}.$$

Вычислим теперь высшие гармоники. Для учета второй и третьей гармоник воспользуемся формулой (18.178). Для рассматриваемой в настоящем примере нелинейности  $F(x, px)$  коэффициенты  $r_2$  и  $s_2$ , подсчитанные по формулам (18.177), оказываются нулями. Поэтому остается только третья гармоника, для которой по формулам (18.177) для данной нелинейности с учетом обозначений (18.121) находим:

$$r_3 = -\frac{2}{5}b_2a - \frac{1}{3}b_3a^2, \quad s_3 = -\frac{3}{5}T_3b_1a\omega. \quad (18.204)$$

Тогда по формулам (18.179) с учетом того, что согласно (18.124)

$$Q(p) = (T_3p + 1)(T_1p + 1)p + k_1k, \quad R(p) = (T_1p + 1)p,$$

находим относительную амплитуду и фазу третьей гармоники:

$$\delta_3 = 3\omega \sqrt{\frac{(9T_1^2\omega^2 + 1)(r_3^2 + s_3^2)}{\left[k_1k - 9(T_1 + T_3)\omega^2\right]^2 + 9\omega^2(1 - 9T_1T_3\omega^2)^2}};$$

$$\varphi_3 = -\frac{\pi}{2} + \arctg 3T_1\omega - \arctg \frac{3\omega(1 - 9T_1T_3\omega^2)}{k_1k - 9(T_1 + T_3)\omega^2} + \arctg \frac{s_3}{r_3}.$$

При указанных выше данных получаем для варианта слабой нелинейности

$$\delta_3 = 0,041, \quad \varphi_3 = -0,377,$$

а для сильной нелинейности

$$\delta_3 = 0,042, \quad \varphi_3 = -0,384.$$

После этого уточняется первая гармоника автоколебаний  $a_1 \sin \omega_1 t$ . Для этого по формулам (18.183) находим величины добавок  $\Delta q$  и  $\Delta q'$  к коэффициентам гармонической линеаризации:

$$\Delta q = \frac{3}{5}T_3b_1a\omega\delta_3 \sin \varphi_3 - \left(\frac{2}{5}b_2 + b_3a\right)a\delta_3 \cos \varphi_3;$$

$$\Delta q' = -\frac{2}{5}T_3b_1a\omega\delta_3 \cos \varphi_3 - \left(\frac{3}{5}b_2 + b_3a\right)a\delta_3 \sin \varphi_3.$$

Поэтому новое характеристическое уравнение для определения уточненной первой гармоники будет

$$\left[ (T_3 p + 1) + (T_3 b_1 a_1 p + b_2 a_1 + b_3 a_1^2) \right] (T_1 p + 1) p + k_1 k + \left( \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right) (T_1 p + 1) p = 0.$$

Подставляя  $p = j\omega_1$  и выделяя вещественную и мнимую части, получим

$$k_1 k - \left[ T_3(1 + b_1 a_1) + T_1(1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2) \right] \omega_1^2 - \left( T_1 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} p \right) \omega_1^2 = 0;$$

$$(1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2) \omega_1 + \Delta q \omega_1 - T_1 T_3 (1 + b_1 a_1) \omega_1^3 - T_1 \frac{\Delta q'}{\omega} \omega_1^3 = 0.$$

Эти уравнения решаются тем же методом, что и (18.125), а именно: из второго уравнения получаем

$$\omega_1^2 = \frac{1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2 + \Delta q}{T_1 T_3 (1 + b_1 a_1) + T_1 \frac{\Delta q'}{\omega}},$$

а из первого,

$$k = \left[ T_3(1 + b_1 a_1) + T_1(1 + b_2 a_1 + b_3 a_1^2) + \left( T_1 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\omega} \right) \right] \omega_1^2.$$

Эти уравнения приводят также к графику  $a_1(k)$  вида рис. 18.23, в.

Для приведенных выше числовых значений параметров системы получаем следующие уточненные значения амплитуды и частоты автоколебаний:

– для слабой нелинейности

$$a_1 = 8,03, \quad \omega_1 = 5,99 \text{ с}^{-1},$$

– для сильной нелинейности

$$a_1 = 0,820, \quad \omega_1 = 5,98 \text{ с}^{-1}.$$

Как видим, сильная нелинейность<sup>1</sup> значительно снижает амплитуду автоколебаний (в линейной системе было бы  $a_1 = \infty$ ). Этот результат получался выше в решении по первому приближению и подтверждается теперь уточненным решением.

<sup>1</sup> Нелинейность в данном примере характеризует степень отклонения реальной криволинейной характеристики двухфазного индукционного двигателя от прямолинейной.

### § 18.6. Частотный метод определения автоколебаний

Здесь, следуя Л. С. Гольдфарбу [89], будем рассматривать простые нелинейности  $x_2 = F(x_1)$ , так как в других случаях получаются более сложные графические построения.

Пусть в нелинейной системе выделено, как обычно, нелинейное звено. Разомкнем систему указанным на рис. 18.38, а образом, причем уравнение нелинейного звена будет

$$x_2 = F(x_1), \tag{18.205}$$

а линейной части системы —

$$Q(p)x_3 = R(p)x_2. \tag{18.206}$$

Замыкание системы соответствует замене

$$x_3 = -x_1. \tag{18.207}$$

Подадим на вход нелинейного звена (рис. 18.38, а) синусоидальные колебания

$$x_1 = a \sin \omega t. \tag{18.208}$$

На выходе нелинейного звена получим согласно (18.205) вынужденные колебания

$$x_2 = F(a \sin \omega t), \tag{18.209}$$

которые можно пайти, например, как показано на рис. 18.38, б или в.

Разложим (18.209) в ряд Фурье и сохраним только основную синусоиду (первую гармонику, отбросив все высшие гармоники. Очевидно, что это приближенное представление вынужденных колебаний эквивалентно гармонической линеаризации нелинейностей, рассмотренной в § 18.1. На основании этого для определения первой гармоники вынужденных колебаний величины  $x_2$  можно воспользоваться частотным аппаратом, который применялся ранее для линейных систем следующим образом.

Согласно формулам (18.9) приближенная передаточная функция нелинейного звена с уравнением  $x_2 = F(x_1)$  будет

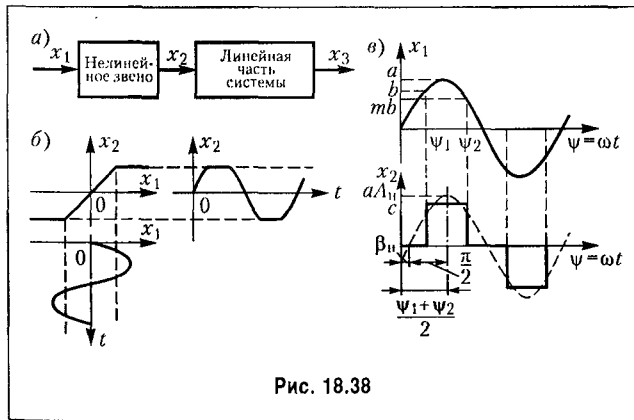


Рис. 18.38

$$W_{11} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p$$

и

$$W_{11} = q(a)$$

соответственно при наличии гистерезисной петли и при ее отсутствии. При этом выражения  $q(a)$  и  $q'(a)$  определяются формулами (18.10).

Приближенный комплексный коэффициент усиления, или приближенная амплитудно-фазовая характеристика нелинейного звена с уравнением  $x_2 = F(x_1)$ , при наличии гистерезисной петли, следовательно, будет

$$W_n = q(a) + jq'(a), \quad (18.210)$$

а без гистерезисной петли —

$$W_n(a) = q(a). \quad (18.211)$$

Эта характеристика определяет амплитуду и фазу первой гармоники на выходе нелинейного звена (если на его вход подается синусоида), а именно выражение (18.210) можно представить в виде

$$W_n(a) = A_n(a)e^{j\beta_n(a)},$$

где

$$A_n(a) = \sqrt{[q(a)]^2 + [q'(a)]^2}, \quad \beta_n(a) = \arctg \frac{q'(a)}{q(a)}. \quad (18.212)$$

Следовательно, амплитуда первой гармоники на выходе будет  $a_2 = aA_n(a)$ , а фазовый сдвиг —  $\beta_n(a)$ , где  $a$  — амплитуда на входе нелинейного звена. В результате получим следующие вынужденные колебания на выходе нелинейного звена (первая гармоника):

$$x_2 \approx aA_n(a) \sin[\omega t + \beta_n(a)].$$

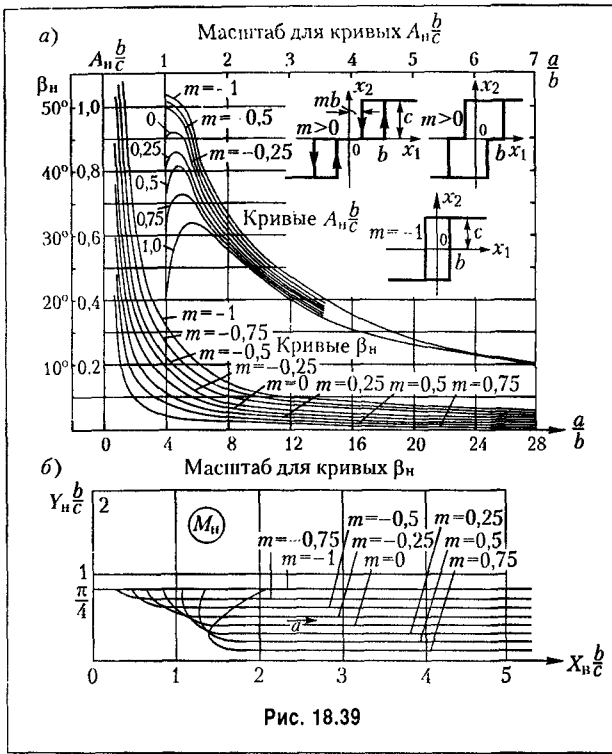
Например, выходная величина  $x_2$  релейного звена с характеристикой рис. 18.1,  $a$  меняется в процессе вынужденных колебаний по закону, изображенному сплошной ломаной линией на рис. 18.38, в. Пунктиром показана основная синусоида для нее, причем из (18.212) и (18.15) имеем:

$$a_2 = aA_n = \frac{4c}{\pi} \sin \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} = \frac{2c\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{mb^2}{a^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{m^2b^2}{a^2}\right)}},$$

$$\beta_n = -\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\arctg \frac{b(1-m)}{\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - m^2b^2}}.$$

Действительная ступенчатая кривая заменяется в данном случае синусоидой (первая гармоника), вершина которой совпадает с осью симметрии действительного прямоугольника (рис. 18.38, в).

Для нелинейных звеньев с уравнением вида  $x_2 = F(x_1)$  без гистерезисной петли, как следует из § 18.1,  $q'(a) = 0$ . Следовательно, для таких звеньев  $A_n = q(a)$  и  $\beta_n = 0$ , т. е. вынужденные колебания на выходе не имеют фазового сдвига.



более типичных релейных и других простейших нелинейных звеньев. На основании этого строятся приближенные амплитудные и фазовые характеристики путем вычислений по формулам (18.212). Результаты для простейших случаев приведены на рис. 18.39 и 18.40. Там приведены также и обратные амплитудно-фазовые характеристики

$$M_n(a) = \frac{1}{W_n(a)} = X_n(a) + jY_n(a). \quad (18.213)$$

На графиках указаны все необходимые обозначения и типы нелинейных характеристик звеньев. Аналогичным путем можно построить графики и для других конкретных нелинейных звеньев.

Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы согласно (18.206) имеет вид

$$W_n(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (18.214)$$

Общая приближенная амплитудно-фазовая характеристика всей разомкнутой системы с нелинейным звеном будет

$$W(a, \omega) = W_n(a)W_n(j\omega) = [q(a) + jq'(a)]W_n(j\omega). \quad (18.215)$$

Одним из главных отличий вынужденных колебаний нелинейных систем от линейных является их существенная зависимость не только от частоты, но и от амплитуды входных колебаний. Эту главную особенность как раз и улавливает написанное здесь приближенное выражение амплитудно-фазовой характеристики нелинейного звена. В формулах (18.210)–(18.212) получилась зависимость только от амплитуды  $a$ , потому что ограничились рассмотрением только нелинейности вида  $x_2 = F(x_1)$ . Для более сложных нелинейных звеньев в амплитудно-фазовую характеристику войдет также и частота  $\omega$ . Кроме того, как увидим ниже, зависимость от частоты будет всегда вводиться линейной частью системы.

В § 18.1 были приведены выражения  $q(a)$  и  $q'(a)$  для наи-

Следовательно, амплитуда и фаза первой гармоники выходной величины  $x_3$ , определяемые формулами

$$a_3 = |W(a, \omega)|a$$

$$\text{и } \beta_3 = \arg W(a, \omega), \quad (18.216)$$

зависят здесь не только от частоты  $\omega$ , как в линейных системах, но еще и от величины входной амплитуды  $a$ .

**Отыскание автоколебаний замкнутой системы.** Незатухающие синусоидальные колебания с постоянной амплитудой в замкнутой системе определяются согласно критерию устойчивости Найквиста (см. гл. 6) прохождением амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку  $(-1, j0)$ , т. е. равенством  $W = -1$ . Это и будет в данном случае условием существования периодического решения для замкнутой нелинейной системы, которое принимается приближенно синусоидальным. Итак, имеем условие

$$W(a, \omega) = -1.$$

Учитывая (18.215) и (18.213), это можно записать в виде

$$W_n(j\omega) = -M_n(a) \quad (18.217)$$

или

$$W_{-1}(j\omega) = \frac{1}{q(a) + jq'(a)}, \quad (18.218)$$

где  $q'(a) = 0$  в случае отсутствия гистерезисной петли (правая часть (18.218) в этом случае будет вещественной).

Левая часть уравнения (18.218) или (18.217) представляет собой амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы, а правая — обратную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного звена (для первой гармоники), взятую с обратным знаком. Решение этого уравнения можно получить графически как точку пересече-

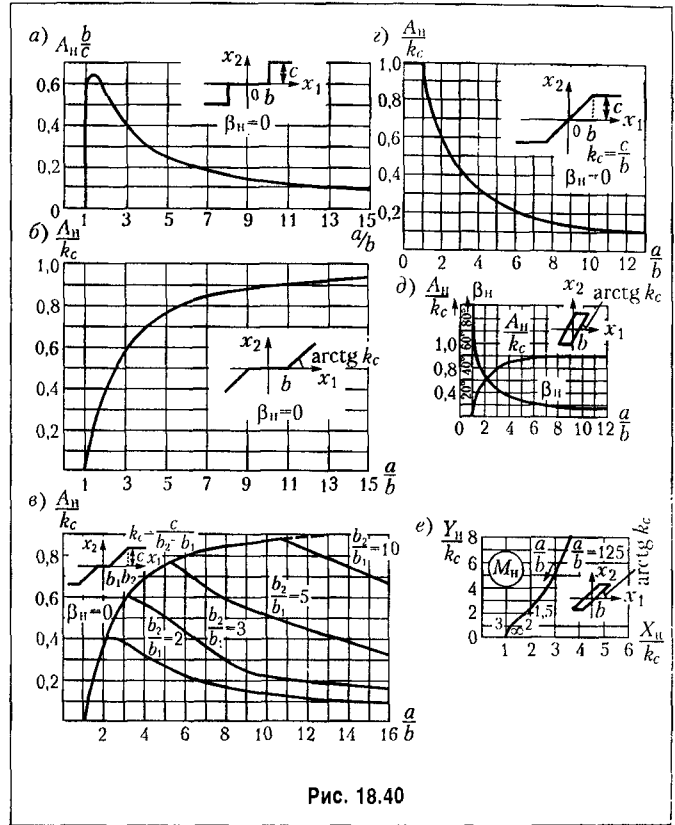


Рис. 18.40

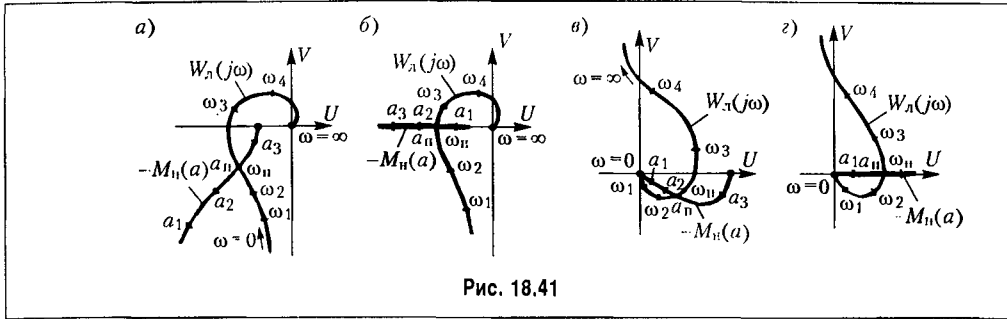


Рис. 18.41

чения указанных двух характеристик (рис. 18.41, а и б). В точке пересечения из кривой  $W_n(j\omega)$  берем значение частоты  $\omega_n$ , а из кривой  $-M_n(a)$  берем величину амплитуды  $a_n$  искомого периодического решения. Рис. 18.41, а соответствует системе с нелинейным звеном, имеющим гистерезисную петлю, когда согласно (18.210) и (18.213) характеристика  $M_n(a)$  комплексна. При отсутствии гистерезисной петли, когда  $M_n(a)$  вещественна, получаем график рис. 18.41, б.

Вместо (18.217) можно пользоваться также выражением

$$\frac{1}{W_n(j\omega)} = W_n(a), \quad (18.219)$$

т. е. искать решение как точку пересечения амплитудно-фазовой характеристики нелинейного звена с обратной амплитудно-фазовой характеристикой линейной части системы, взятой с обратным знаком (рис. 18.41, в и з).

Устойчивость найденного периодического решения грубо оценивается следующим образом (этот метод не является строго обоснованным, но во многих случаях его применения достаточно). Дадим малое приращение амплитуде:  $a = a_n + \Delta a$ . Тогда при положительном  $\Delta a$  получим на кривой  $-M_n(a)$ , например, точку  $a_1$  (рис. 18.42, а), а при отрицательном  $\Delta a$  — точку  $a_2$ . Для устойчивости периодического решения требуется, очевидно, чтобы при положительном  $\Delta a$  колебания затухали, а при отрицательном  $\Delta a$  — расходились. Для этого согласно критерию Найквиста в случае устойчивой или нейтральной разомкнутой системы требуется, чтобы суммарная амплитудно-фазовая характеристика  $W(a, \omega)$  в первом случае не охватывала точку  $(-1, j0)$ , а во втором — охватывала. Но общая характеристика  $W(a, \omega)$  не чертится в рассмотренном

способе. Поэтому высказанное положение надо перенести на свойства кривых  $W_n(j\omega)$  и  $-M_n(a)$ .

Отсюда получаем, что для устойчивости периодического решения (если линейная часть системы в разомкнутом состоянии устойчива или нейтральна) требуется, чтобы амплитуд-

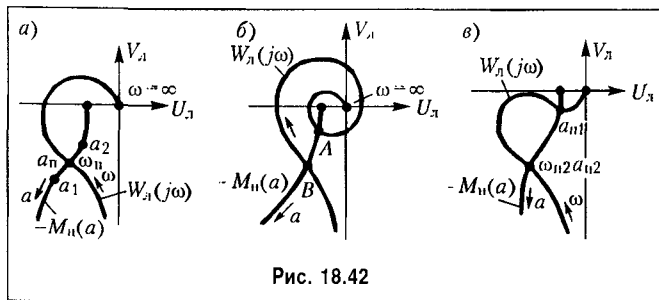


Рис. 18.42



но-фазовая характеристика линейной части  $W_{\lambda}(j\omega)$  не охватывала точку  $a_1$  соответствующую положительному  $\Delta a$ , и охватывала точку  $a_2$ , соответствующую отрицательному  $\Delta a$ . По этому признаку графики рис. 18.42,  $a$  и  $b$  (в точке  $B$ ) дают устойчивое периодическое решение, которое соответствует автоколебаниям замкнутой системы с частотой  $\omega_{п2}$ , и амплитудой  $a_{п2}$ .

На графике рис. 18.42,  $b$  значения  $\omega_{п1}$  и  $a_{п1}$  соответствуют неустойчивому, а значения  $\omega_{п2}$ ,  $a_{п2}$  — устойчивому периодическому решению. Это в простейшем случае может означать устойчивость системы в малом (до амплитуды  $a_{п1}$ ) и автоколебания с частотой  $\omega_{п2}$  и амплитудой  $a_{п2}$ , если начальная амплитуда колебаний в переходном процессе превышает значения  $a_{п1}$ .

В таких исследованиях предполагается, что все параметры системы заданы в числовом виде (или амплитудно-фазовые характеристики звеньев в виде определенных графиков). Если же требуется выяснить влияние одного или двух каких-нибудь параметров системы, то надо рассмотреть все возможные комбинации кривых  $W_{\lambda}(j\omega)$  и  $-M_{п}(a)$  при разных значениях этих параметров.

Рассмотрим примеры.

**Система автоматической стабилизации температуры.** Уравнения системы с релейным звеном были описаны в примере 5 § 18.3. Выражение амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы с добавлением жесткой обратной связи будет

$$W_{\lambda}(j\omega) = \frac{k_3}{(T_3 j\omega + 1)j\omega} \left[ \frac{k_1 k_2}{T_1 j\omega + 1} + k_{oc} \right]. \quad (18.220)$$

В данном случае очевидно, что общий знаменатель передаточной функции линейной части системы

$$Q(p) = (T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p \quad (18.221)$$

не имеет корней с положительной вещественной частью, а нулевой корень говорит о том, что линейная часть системы нейтральна.

Выражение, стоящее в квадратных скобках (18.220), при  $k_{oc} = 0$  (система без обратной связи) соответствует апериодическому звену (объект и чувствительный элемент). Оно изображено на рис. 18.43,  $a$ . При наличии же жесткой обратной связи в системе ( $k_{oc} \neq 0$ ) этот график сдвигается вправо на величину  $k_{oc}$  (рис. 18.43,  $b$ ).

Множитель перед квадратной скобкой (18.220) соответствует инерционному интегрирующему звену (привод с управляющим органом). Он изображен на рис. 18.43,  $b$ .

Перемножением этих характеристик получаем амплитудно-фазовую характеристику  $W_{\lambda}(j\omega)$  линейной части системы соответственно при отсутствии обратной связи (рис. 18.43,  $z$ ) и при наличии жесткой обратной связи (рис. 18.43,  $d$ ). Нанесем на эти же графики кривую обратной по величине и по знаку амплитудно-фазовой характеристики  $-M_{п}(a)$  нелинейного звена (в данном случае — реле). Здесь эта кривая изображена в соответствии с рис. 18.39,  $b$  для того случая, когда реле характеризуется графиком рис. 18.20,  $a$ , причем  $b_2 = b$ ,  $b_1 = mb$ .

Как видно из рис. 18.43,  $z$ , в данном случае в замкнутой системе без обратной связи возможны автоколебания, так как кривые  $W_{\lambda}(j\omega)$  и  $-M_{п}(a)$  пересекаются, а введем

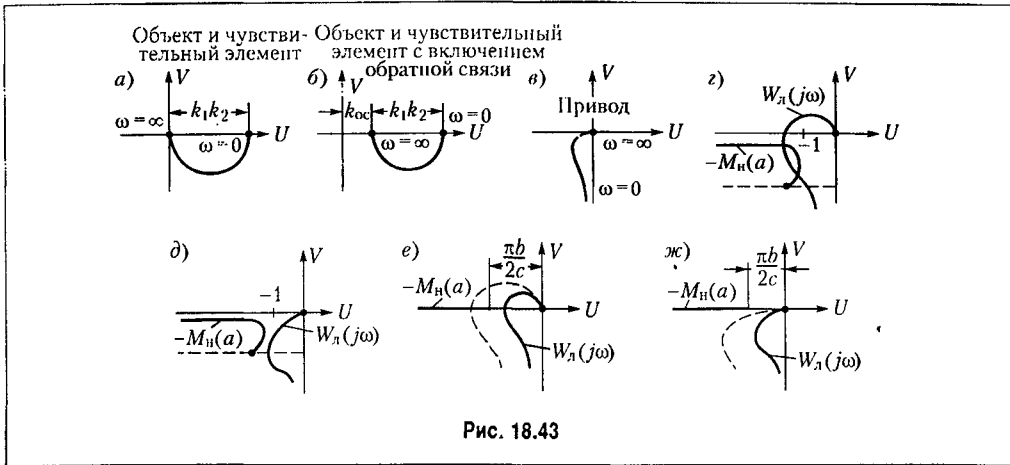


Рис. 18.43

обратной связи можно уничтожить эти автоколебания (рис. 18.43, д). Очевидно также, что и выбором параметров линейной части системы (т. е. деформацией кривой  $W_n$  на рис. 18.43, з) можно было бы уничтожить автоколебания замкнутой нелинейной системы и без обратной связи. Напротив, неудачный выбор параметров может привести к автоколебаниям системы даже и при наличии жесткой обратной связи, если на рис. 18.43, д кривые пересекутся. Чем меньше гистерезисная петля (рис. 18.20, а), тем больше будет  $m$  (рис. 18.39) и тем легче, как видно из рис. 18.39, б и рис. 18.43, з, д, сделать замкнутую систему устойчивой.

Когда реле имеет чисто гистерезисную характеристику (рис. 18.20, з) кривая  $-M_H(a)$  вырождается согласно рис. 18.39, б ( $m = -1$ ) в прямую (пунктир на рис. 18.43, д), причем добиться уничтожения автоколебаний в этом случае нельзя, а можно бороться лишь за уменьшение их амплитуды.

Если в характеристике реле с зоной нечувствительности не будет гистерезисной петли (рис. 18.20, б), то согласно рис. 18.40, а и формуле (18.213) обратная амплитудно-фазовая характеристика нелинейного звена  $-M_H(a)$  будет вещественной, как показано на рис. 18.43, е и ж. При этом замкнутая система без обратной связи может иметь автоколебания, если  $W_n(j\omega)$  примет очертание, показанное пунктиром (рис. 18.43, е). Введение же жесткой обратной связи, как видно из рис. 18.43, ж, полностью уничтожает автоколебания.

Из этого предварительного рассмотрения можно сделать вывод, во-первых, о важном стабилизирующем свойстве дополнительной жесткой обратной связи в системе и, во-вторых, о стабилизирующем свойстве зоны нечувствительности реле. С точки зрения устойчивости системы выгодно увеличивать и то, и другое. Однако эти возможности ограничены из-за увеличения статической ошибки системы при усилении жесткой обратной связи и при увеличении зоны нечувствительности реле. Последнее связано с тем, что система может находиться в состоянии равновесия в любой точке зоны нечувствительности; получается не одно определенное состояние равновесия, а целая область возможных состояний равновесия с разными значениями управляемой величины.

После сделанных предварительных заключений перейдем к определению амплитуды и частоты автоколебаний в тех случаях, когда последние имеют место.

В случае идеальной релейной характеристики в соответствии с (18.211) и (18.18) имеем

$$-M_{\Pi}(a) = -\frac{1}{W_{\Pi}(a)} = -\frac{\pi}{4c}a \quad (0 \leq a \leq \infty) \quad (18.222)$$

$(M_{\Pi}(a))$  заполняет всю отрицательную вещественную ось, рис. 18.44, *a*). Поэтому  $W_{\Sigma}(j\omega)$  при отсутствии жесткой обратной связи (сплошная кривая) пересекает ее, а при наличии жесткой обратной связи не пересекает (пунктирная кривая). В первом случае получаем точку пересечения *D*, определяющую периодическое решение  $(a_{\Pi}, \omega_{\Pi})$ . Оно будет устойчиво (т. е. соответствует автоколебаниям), так как кривая  $W_{\Sigma}(j\omega)$  охватывает участок прямой  $-M_{\Pi}(a)$  с меньшими амплитудами (линейная часть согласно (18.221) нейтральна, вследствие чего этот критерий можно применять). Во втором же случае кривая  $W_{\Sigma}(j\omega)$  пересекается с прямой  $-M_{\Pi}(a)$  только в точке, где  $a = 0$ ,  $\omega = \infty$ , т. е. автоколебания отсутствуют (конечная амплитуда получится, если учесть постоянную  $T_2$ ).

Амплитуда  $a_{\Pi}$  автоколебаний в первом случае определяется по расстоянию  $l$  (рис. 18.44, *a*) на линии  $-M_{\Pi}(a)$  до точки пересечения, причем с учетом (18.222) получаем

$$a_{\Pi} = \frac{4c}{\pi l} \quad (18.223)$$

где  $l$  берется из графика или вычисляется по формуле

$$l = -U_{\Sigma}(\omega_{\Pi}),$$

причем величина частоты автоколебаний  $\omega_{\Pi}$  находится из условия

$$V_{\Sigma}(\omega_{\Pi}) = 0,$$

если  $U_{\Sigma}(\omega_{\Pi})$  и  $V_{\Sigma}(\omega_{\Pi})$  обозначают вещественную и мнимую части выражения  $W_{\Sigma}(j\omega)$  при  $k_{oc} = 0$ , т. е.

$$W_{\Sigma}(j\omega) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)j\omega}. \quad (18.224)$$

Отсюда видно, например, что с увеличением  $k_2 k_3$  увеличивается амплитуда автоколебаний.

Для характеристики реле в виде рис. 18.20, *a* поведение системы без жесткой обратной связи поясняется рис. 18.44, *b*. Здесь автоколебания могут отсутствовать (кривая 1 рис. 18.44, *b*), возможно одно периодическое решение (кривые 2 и 3, пересекающиеся в точке *B*) или два периодических решения (кривые 2 и 4, пересекающиеся в точках *A* и *C*). При этом кривая 3 соответствует меньшим, а кривая 4 — большим значениям  $m$  в релейной характеристике (см. рис. 18.39). Точки *B* и *A* отвечают устой-

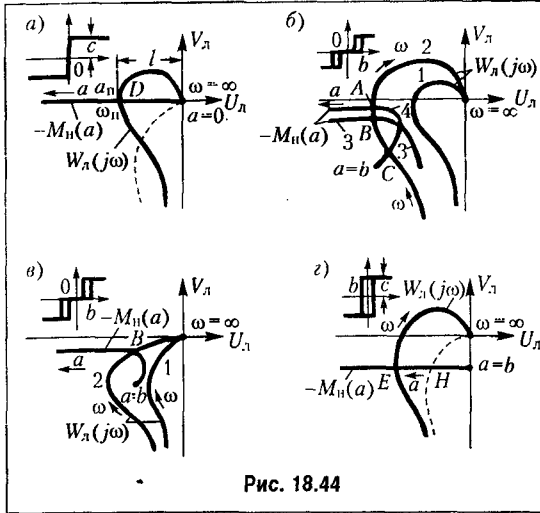


Рис. 18.44

взойдет некоторое граничное значение, определяемое моментом касания кривой 1 с кривой 3 или 4.

Аналогично определяются автоколебания и при наличии жесткой обратной связи, как показано на рис. 18.44, в.

Наконец, при чисто гистерезисной характеристике реле получаем только автоколебательный процесс (рис. 18.44, з), амплитуда и частота которого без жесткой обратной связи определяются точкой E, а при наличии жесткой обратной связи – точкой H.

Во всех рассмотренных случаях, как и вообще в рассматриваемом частотном методе, через  $a_n$  обозначается амплитуда автоколебаний входной величины нелинейного звена, т. е. в данном случае величины  $x$ . Чтобы определить амплитуду  $a_0$  автоколебаний управляемой величины  $\theta$  (температуры), надо найти передаточную функцию, связывающую величины  $x$  и  $\theta$ :

$$\theta = \frac{k_1}{k_1 k_2 + k_{oc}(T_1 p + 1)} x,$$

и, следовательно,

$$a_0 = \frac{k_1 a_n}{|k_1 k_2 + k_{oc}(T_1 j\omega_n + 1)|} = \frac{k_1 a_n}{\sqrt{(k_1 k_2 + k_{oc})^2 + k_{oc}^2 T_1^2 \omega_n^2}}.$$

Для системы без обратной связи ( $k_{oc} = 0$ )

$$a_0 = \frac{a_n}{k_2}.$$

Аналогично можно определить амплитуду первой гармоники автоколебаний для других переменных в данной системе.

чивым автоколебаниям. Точка C отвечает неустойчивому периодическому процессу, что может означать устойчивость системы в малом (при  $a < a_C$ ) и стремление к автоколебательному процессу с амплитудой  $a = a_A$  в большом. Величины амплитуды и частоты автоколебаний определяются по самим кривым в точках их пересечения.

В данном случае влияние величины  $k_2 k_3$  без жесткой обратной связи заключается в том, что с увеличением  $k_2 k_3$  осуществляется переход от кривой 1 к кривой 2 (рис. 18.44, б), т. е. автоколебания в системе появляются только тогда, когда  $k_2 k_3$  превзойдет некоторое граничное значение, определяемое моментом касания кривой 1 с кривой 3 или 4.

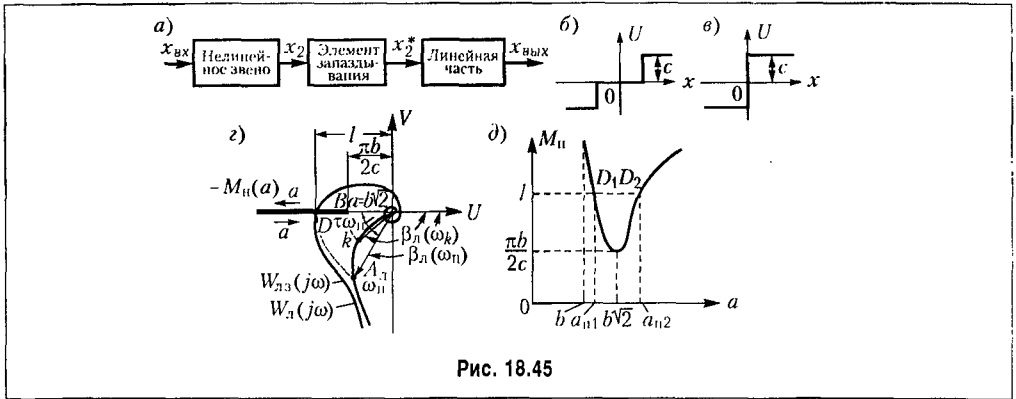


Рис. 18.45

**Учет временного запаздывания в реле.** В рассматриваемом выше примере системы стабилизации температуры считалось, что в характеристике реле рис. 18.20 величины  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b$  заданы постоянными, т. е. считалось, что характеристики реле имеют обычный гистерезисный вид с заданным по входной координате отставанием в срабатывании реле. Теперь же будем считать, что имеются данные запаздывания во времени срабатывания и отпускания реле (одинаковые). Такое нелинейное звено с запаздыванием можно разбить на два элемента: 1) обычное нелинейное звено, характеризующееся графиком рис. 18.45, б или в, и 2) элемент запаздывания (рис. 18.45, а), описываемый уравнением

$$x_2^* = x_2 e^{-\tau p}.$$

Тогда можно будет записать выражение амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы вместе с элементом запаздывания в виде

$$W_{лз}(j\omega) = W_{л}(j\omega) e^{-j\tau\omega} = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} e^{-j\tau\omega}. \quad (18.225)$$

Правило построения такой характеристики описано в главе 6.

Пусть реле (после выделения элемента запаздывания) характеризуется графиком рис. 18.45, б. В этом случае для системы с жесткой обратной связью получим соответственно кривые  $W_{л}(j\omega)$  и  $W_{лз}(j\omega)$ , изображенные на рис. 18.45, г, а также прямую  $-M_{II}(a)$  на основании формулы (18.213) и рис. 18.40, а. Если кривые  $W_{лз}(j\omega)$  и  $-M_{II}(a)$  пересекаются, то будут иметь место автоколебания. Но, как видно из рис. 18.45, г, при достаточно малых запаздываниях  $\tau$  указанные кривые могут не пересекаться, т. е. автоколебаний не будет.

Здесь, как и в линейных системах, можно определить критическое время запаздывания, до которого автоколебания отсутствуют, без построения кривой  $W_{лз}(j\omega)$  только по кривым  $W_{л}(j\omega)$  и  $-M_{II}(a)$ . В самом деле, в критическом случае некоторая точка

кривой  $W_{\text{зз}}(j\omega)$  попадет в крайнюю точку  $B$  (рис. 18.45,  $z$ ). Это, как видно из чертежа, соответствует такой точке  $K$  кривой  $W_{\text{л}}(j\omega)$ , в которой

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{л}}(\omega_k) &= \frac{\pi b}{2c}, \\ \beta_{\text{л}}(\omega_k) - \tau_k \omega_k &= -\pi \quad (\beta_{\text{л}} < 0). \end{aligned} \right\} \quad (18.226)$$

Из первого условия определяется величина  $\omega_k$ , и из второго — критическое время запаздывания:

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_k} [\pi + \beta_{\text{л}}(\omega_k)] \quad (\beta_{\text{л}} < 0). \quad (18.227)$$

Такое решение можно найти непосредственно из графика  $W_{\text{л}}(j\omega)$  или же аналитически, используя выражение (18.220).

Если же реле не имеет зоны нечувствительности, т. е.  $b = 0$ , то точка  $B$  попадет в начало координат на рис. 18.45,  $z$  и автоколебания будут при любом значении времени запаздывания в срабатывании реле ( $\tau_k = 0$ ). Поэтому выгодно, чтобы временное запаздывание в реле, рассматриваемое здесь, было бы сравнительно малым, а зона нечувствительности имела бы большую величину (но не превышала допустимых значений, полученных из статического расчета точности регулирования).

Амплитуда и частота автоколебаний при наличии запаздывания определяются следующим образом. Точка пересечения  $D$  (рис. 18.45,  $z$ ) дает два периодических решения, так как в ней на прямой  $-M_{\text{н}}(a)$  имеются два значения  $a$ . Это следует из графика рис. 18.40,  $a$ , причем на основании (18.16) имеем

$$M_{\text{н}}(a) = \frac{1}{W_{\text{н}}(a)} = \frac{\pi a^2}{4c\sqrt{b^2 - a^2}}, \quad (18.228)$$

что изображается графиком рис. 18.45,  $d$ . Расстоянию от начала координат  $l$  точки пересечения  $D$  на рис. 18.45,  $z$  соответствуют две точки графика  $D_1$  и  $D_2$  на рис. 18.45,  $d$ , которые дают два значения амплитуды:  $a_{\text{н}1}$  и  $a_{\text{н}2}$ . Частота  $\omega_{\text{н}}$  обоих периодических решений одинакова и определяется точкой  $D$  на кривой  $W_{\text{зз}}(j\omega)$ .

При этом периодическое решение с меньшей амплитудой  $a_{\text{н}1}$  будет неустойчивым, а с большей амплитудой  $a_{\text{н}2}$  — устойчивым, так как в первом случае точка с положительным приращением  $\Delta a$  на линии  $-M_{\text{н}}(a)$  охватывается кривой  $W_{\text{зз}}(j\omega)$ , а во втором случае — не охватывается. Следовательно, могут иметь место устойчивость системы в малом (до амплитуд  $a_{\text{н}1}$ ) и автоколебательный процесс с большой амплитудой, к которому стремится система при начальных амплитудах переходного процесса, превышающих значение  $a_{\text{н}1}$ .

Заметим, что точку пересечения  $D$  кривой  $W_{\text{зз}}(j\omega)$  с линией  $-M_{\text{н}}(a)$  можно найти без построения кривой  $W_{\text{зз}}(j\omega)$  непосредственно по амплитудно-фазовой характеристике  $W_{\text{л}}(j\omega)$  линейной части системы без элемента запаздывания. Для этого нужно на кривой  $W_{\text{л}}(j\omega)$  найти такую точку  $\omega_{\text{н}}$  (рис. 18.45,  $z$ ), которая бы при повороте

вектора  $A_d$  на угол  $\tau\omega_n$  попала на линию  $-M_n(a)$ , что и даст нам точку  $D$  (величина запаздывания  $\tau$  задана,  $\omega_n$  неизвестна). Условие для определения  $\omega_n$  будет

$$\tau\omega_n + |\beta_d| = \pi;$$

после этого находится величина  $l = A_{d1}$ , а затем амплитуда автоколебаний  $a_{n2}$  по графику рис. 18.45, д.

В заключение заметим, что при исследовании нелинейных автоматических систем применяются также приближенные методы Б. В. Булгакова (см. [17] или [70]), которые здесь не излагаются.

## Глава 19

# МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

### § 19.1. Статические и скоростные ошибки автоколебательных систем

В предыдущих главах исследовались симметричные автоколебания, как результат свободного движения системы (т. е. без внешнего воздействия) при симметричных нелинейностях. Однако, как будет показано, важное практическое значение имеет также рассмотрение несимметричных автоколебаний.

Несимметрия автоколебаний может вызываться различными причинами:

- 1) несимметричностью нелинейной характеристики как при наличии, так и при отсутствии внешних воздействий;
- 2) наличием постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия при симметричных нелинейностях;
- 3) наличием постоянной или медленно меняющейся скорости изменения внешнего воздействия при симметричных нелинейностях (для тех случаев, когда постоянное воздействие не вызывает смещения центра колебаний; обычно это имеет место в следящих системах и вообще в астатических системах).

В самом деле, если имеется несимметричная нелинейная характеристика (например, рис. 19.1, а, б), то даже при симметричных колебаниях переменной  $x = a \sin \omega t$  возникают несимметричные по амплитуде колебания переменной  $F$  (рис. 19.1, б). Если же нелинейность симметрична (например, рис. 19.2, а, б), то при наличии постоянного внешнего воздействия (или в астатических системах при наличии постоянной скорости изменения внешнего воздействия) смещается центр колебаний переменной  $x = x^0 + a \sin \omega t$ , вследствие чего колебания переменной  $F$  становятся несимметричными по амплитуде и по времени (рис. 19.2, а) или только по времени (рис. 19.2, б).

Пусть задана автоматическая система, динамика которой описывается уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t). \quad (19.1)$$

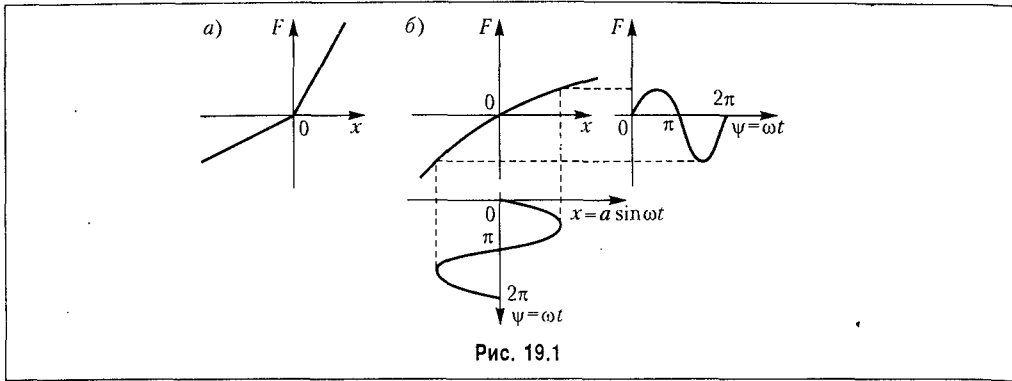


Рис. 19.1

В данном параграфе будем считать  $f(t) = \text{const} = f^0$  для статических систем или же  $pf(t) = \text{const} = f_1^0$  для астатических систем. Астатической системой называется такая, в которой многочлен  $S(p)$  имеет общий множитель  $p$ , т. е.  $S(p) = pS_1(p)$ .

Поэтому запишем уравнение (19.1) в виде

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = M^0, \quad (19.2)$$

где соответственно

$$M^0 = S(0)f^0 \quad \text{или} \quad M^0 = S_1(0)f_1^0. \quad (19.3)$$

При этом решение нелинейного уравнения (19.1), в отличие от прежнего (§ 18.2), ищется в форме

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где} \quad x^* = a \sin \omega t, \quad (19.4)$$

причем  $x^0, a, \omega$  являются неизвестными постоянными.

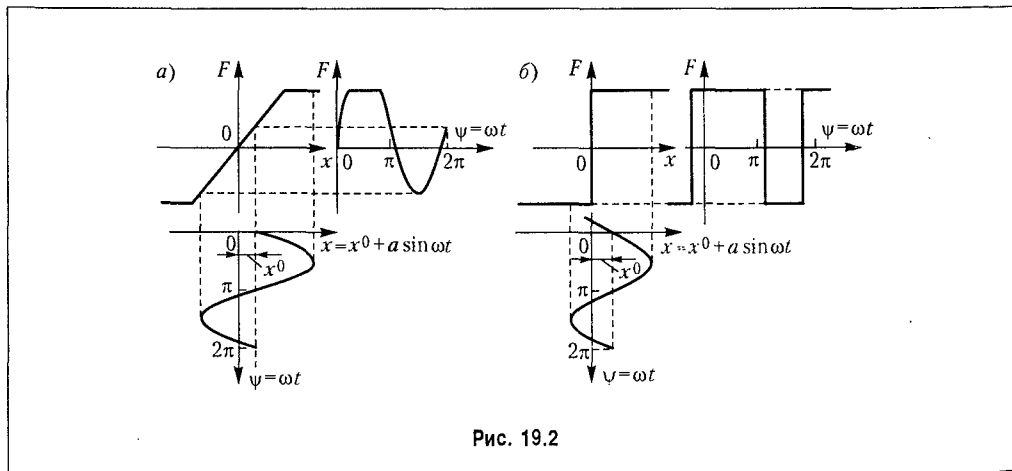


Рис. 19.2



С учетом величины *смещения*  $x^0$  первые члены разложения в ряд Фурье вместо (18.6) и (18.7) следует записать в виде

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega} px^* + \text{высшие гармоники}, \quad (19.5)$$

где при обозначении  $\psi = \omega t$

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi; \\ q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi; \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

Отсюда видно, что в общем случае все три коэффициента являются функциями трех неизвестных:

$$F^0(x^0, a, \omega), \quad q(x^0, a, \omega), \quad q'(x^0, a, \omega). \quad (19.7)$$

В частных случаях эти зависимости могут быть более простыми.

Подстановка выражений (19.4) и (19.5) в заданное дифференциальное уравнение (19.1) с учетом свойства фильтра (см. § 18.2) дает

$$Q(p)(x^0 + x^*) + R(p) \left( F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega} px^* \right) = M^0.$$

Это уравнение разбивается на два:

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = M^0, \quad (19.8)$$

$$Q(p)x^* + R(p) \left( q + \frac{q'}{\omega} p \right) x^* = 0. \quad (19.9)$$

При таком разделении сохраняются существенно нелинейные свойства и отсутствие суперпозиции решений, так как остается нелинейная взаимосвязь обоих уравнений через соотношения (19.7).

Можно предложить два метода решения задачи.

**Первый метод** состоит в следующем. Уравнение (19.9) совпадает с прежним уравнением (18.33); отличие состоит лишь в том, что теперь коэффициенты  $q$  и  $q'$  согласно (19.7) зависят не только от  $a$  и  $\omega$ , но и от смещения  $x^0$ . Поэтому, написав как прежде характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p) \left( q + \frac{q'}{\omega} p \right) = 0, \quad (19.10)$$

заменяв  $p$  на  $j\omega$  и выделив вещественную и мнимую части, в отличие от (18.36), получим здесь два алгебраических уравнения с тремя неизвестными:

$$X(x^0, a_n, \omega_n) = 0, \quad Y(x^0, a_n, \omega_n) = 0. \quad (19.11)$$

Эти уравнения дают возможность определить амплитуду  $a_n$  и частоту  $\omega_n$  автоколебаний как функции постоянной составляющей  $x^0$ :

$$a_n(x^0), \quad \omega_n(x^0). \quad (19.12)$$

Для решения этой задачи можно применять любой из способов, описанных в § 18.2, в зависимости от того, какой из них лучше подходит к условиям заданной конкретной задачи. Таким же способом можно определить зависимость  $a$  и  $\omega$  не только от  $x^0$ , но и от параметров системы с целью выбора последних. Что касается тех способов § 18.2, где используются графики  $q(a)$  и  $q'(a)$ , то здесь их необходимо строить в виде серии кривых при разных постоянных значениях  $x^0$  (рис. 19.3).

После того как из уравнений (19.11) определены зависимости (19.12), можно, воспользовавшись первым из выражений (19.7), найти *функцию смещения*

$$F^0 = \Phi(x^0). \quad (19.13)$$

Подставив ее в (19.8), получим алгебраическое уравнение

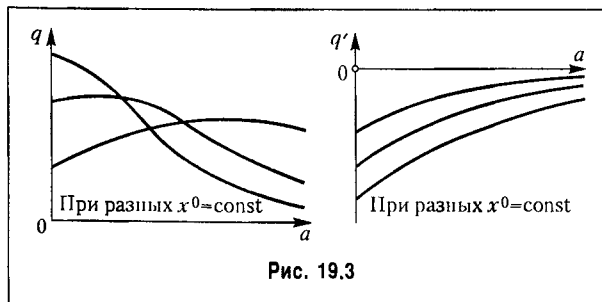
$$Q(0)x^0 + R(0)\Phi(x^0) = M^0 \quad (19.14)$$

с одной неизвестной  $x^0$ , которая отсюда и определяется. Чаще всего это уравнение относительно  $x^0$  является трансцендентным и решается графически. Затем согласно (19.12) определяются также амплитуда  $a_n$  и частота  $\omega_n$ .

Указанную зависимость (19.12) амплитуды и частоты автоколебаний от величины смещения центра колебаний надо всегда иметь в виду. При одних нелинейностях она может быть весьма существенной, при других — менее существенной.

Второй метод решения той же задачи состоит, наоборот, в том, что сначала решается уравнение (19.8), где согласно (19.7) будет  $F^0(x^0, a, \omega)$  или часто  $F^0(x^0, a)$ . Решение получает вид

$$x^0(a, \omega) \quad \text{или} \quad x^0(a). \quad (19.15)$$



Это решение подставляется затем в уравнения (19.11), которые, таким образом, будут содержать только две неизвестные:  $a_n$  и  $\omega_n$ . Определив последние (по любому из способов § 18.2), вычисляем потом по (19.15) и величину  $x^0$ , которая будет в результате зависеть от формы нелинейности, от параметров системы и от внешнего воздействия  $M^0$ .

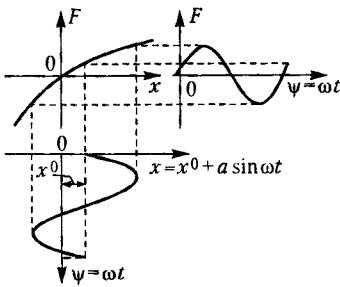


Рис. 19.4

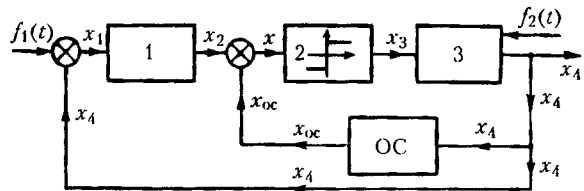


Рис. 19.5

Величина  $x^0$  и является искомой *статической* или *скоростной ошибкой* соответственно для статической и астатической систем.

В тех случаях, когда передаточная функция линейной части системы  $R(p)/Q(p)$  имеет нулевой корень в знаменателе, т. е. когда  $Q(0) = 0$ , вместо (19.14) получаем уравнение

$$\Phi(x^0) = \frac{M^0}{R(0)} \quad (19.16)$$

откуда определяется статическое отклонение или скоростная ошибка  $x^0$  ( $M^0$ ).

В случае, когда при отсутствии внешнего воздействия ( $M^0 = 0$ ) определяются автоколебания в системе с несимметричной нелинейностью, т. е. нелинейностью  $F(x)$  или же  $F(x, px)$ , для которой

$$\int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a \omega \cos \psi) d\psi \neq 0 \quad (19.17)$$

вместо уравнения (19.8) получаем

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = 0. \quad (19.18)$$

Оно решается любым из тех же двух методов, описанных выше для уравнения (19.8). Одновременно согласно (19.11) определяются  $x^0$ ,  $a_{\text{н}}$ ,  $\omega_{\text{н}}$ .

Если в этом случае знаменатель  $Q(p)$  передаточной функции линейной части системы имеет нулевой корень, то  $Q(0) = 0$  и, следовательно, уравнение (19.18) с учетом (19.13) принимает вид

$$\Phi(x^0) = 0, \quad (19.19)$$

откуда определяется  $x^0$ . Это означает, что в указанных системах возникает такое смещение  $x^0$  колебаний переменной  $x$ , которое ликвидирует свойственную данной нелинейности несимметрию колебаний переменной  $F$  (т. е. обеспечивается  $F^0 = 0$ ), как показано, например, на рис. 19.4 в отличие от рис. 19.1, б.

Приведем пример исследования совместного влияния двух внешних воздействий, причем из дальнейшего будет видно, что, в отличие от линейных систем, здесь нельзя просто складывать статические ошибки от отдельно взятых воздействий.

Уравнения автоматической системы (рис. 19.5) заданы в виде

$$(T_1 p + 1) x_2 = k_1 x_1, \quad x_1 = f_1(t) - x_4; \quad (19.20)$$

$$x_3 = F(x), \quad x = x_2 - x_{oc}, \quad x_{oc} = k_{oc} x_4; \quad (19.21)$$

$$(T_2 p + 1) p x_4 = k_2 x_3 - f_2(t), \quad (19.22)$$

где  $F(x)$  — простейшая симметричная релейная характеристика показанная на рис. 19.5:

$$F(x) = c \operatorname{sign} x. \quad (19.23)$$

Чтобы воспользоваться выведенными выше общими формулами, надо сначала привести заданную систему уравнений (19.20) – (19.22) к одному уравнению типа (19.1). В результате получаем

$$(T_1 p + 1) (T_2 p + 1) p x + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) k_2 F(x) = k_1 (T_2 p + 1) p f_1(t) + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) f_2(t). \quad (19.24)$$

Пусть  $f_1(t)$  является задающим воздействием, изменяющимся с постоянной скоростью:

$$f_1(t) = f_1^0 t, \quad (19.25)$$

которое требуется воспроизвести на выходе системы в виде  $x_4(t)$ .

Допустим также, что второе внешнее воздействие  $f_2(t)$  является возмущающим и имеет постоянную величину (например, постоянная нагрузка на выходном валу системы):

$$f_2(t) = \operatorname{const} = f_2^0. \quad (19.26)$$

Его влияние требуется свести к минимуму. Найдем установившуюся ошибку на выходе системы. Правая часть уравнения (19.24) будет при этом постоянной, и установившееся решение для  $x$  с учетом автоколебаний следует искать в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где } x^* = a \sin \omega t. \quad (19.27)$$

Гармоническая линеаризация нелинейности (19.23) при этом согласно (19.6) даст

$$F = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \quad q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}. \quad (19.28)$$

В данной задаче согласно (19.24) уравнение (19.9) для периодических составляющих получит вид

$$(T_1 p + 1) (T_2 p + 1) p x^* + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) k_2 q x^* = 0, \quad (19.29)$$

а уравнение (19.8) для постоянных составляющих будет

$$(k_1 + k_{oc}) k_2 F^0 = M^0, \quad (19.30)$$

где согласно (19.24) -- (19.26)

$$M^0 = k_1 f_1^0 + (k_1 + k_{oc}) f_2^0. \quad (19.31)$$

Выше были указаны два метода решения задачи. Для иллюстрации обоих методов решим данную задачу каждым из них.

Согласно первому методу сначала решается уравнение (19.29) для определения зависимостей  $a(x^0)$  и  $\omega(x^0)$ .

Характеристическое уравнение здесь будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) p + (k_1 + k_{oc}) k_2 q = 0, \quad (19.32)$$

и уравнения (19.11) поэтому примут вид

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{oc}) k_2 q - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

Исключая отсюда  $q$ , находим частоту автоколебаний

$$\omega_{н}^2 = \frac{k_1 + k_{oc}}{T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}. \quad (19.34)$$

Частота  $\omega$  в данной задаче оказалась не зависящей от смещения  $x^0$ , а следовательно, и от величины внешнего воздействия. Затем, подставляя в первое из уравнений (19.33) выражение  $q$  из (19.28) и  $\omega_{н}^2$  из (19.34), получаем биквадратное уравнение для отыскания зависимости амплитуды автоколебаний  $a_{н}$  от смещения  $x^0$ :

$$\left(\frac{a_{н}}{A}\right)^4 - \left(\frac{a_{н}}{A}\right)^2 + \left(\frac{x^0}{A}\right)^2 = 0, \quad (19.35)$$

где величина

$$A = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_2 k_{oc})}{\pi (T_1 + T_2)} \quad (19.36)$$

представляет собой амплитуду автоколебаний в данной системе при отсутствии смещения (при  $x^0 = 0$ ). Отсюда

$$\left(\frac{a_{н}}{A}\right)^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}. \quad (19.37)$$

Полученное выражение можно записать также в виде

$$a_{н} = A \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (19.38)$$

если обозначить

$$\alpha = \arcsin \frac{2x^0}{A}. \quad (19.39)$$

Результат (19.37) или (19.38) и представляет собой искомую зависимость  $a_{\Pi}(x^0)$ .

Далее, согласно первому методу решения задачи, подставим полученное значение амплитуды  $a_{\Pi}$  из (19.38) в выражение (19.28) для  $F^0$ , откуда с использованием (19.39) найдем функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{c}{\pi} \alpha = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A} \quad \left( 0 \leq |x^0| < \frac{A}{2} \right), \quad (19.40)$$

где  $A$  определяется через параметры системы формулой (19.36).

Подставив величину (19.40) в уравнение (19.30) для постоянных составляющих, с учетом (19.31) и (19.36) получим

$$x^0 = \frac{A}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{ck_2} \left( \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.41)$$

Сравнивая это с формулой (19.39), видим, что для искусственно введенной ранее величины  $\alpha$  можно записать следующее выражение:

$$\alpha = \frac{\pi}{ck_2} \left( \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right). \quad (19.42)$$

Эта величина характеризует совокупность приложенных к системе внешних воздействий. Учитывая это, из формулы (19.38) находим амплитуду автоколебаний

$$a_{\Pi} = A \cos \left[ \frac{\pi}{2ck_2} \left( \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.43)$$

Существенно то, что амплитуда автоколебаний зависит не только от параметров системы (см. (19.36)), но еще и от величины внешних воздействий. Эта зависимость нелинейная. В данном случае при увеличении внешних воздействий амплитуда уменьшается по закону косинуса, в то время как частота не зависит от внешних воздействий.

Из формулы (19.43) видно, что автоколебания существуют до тех пор, пока величины внешних воздействий удовлетворяют условию

$$0 \leq \left| \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right| < ck_2. \quad (19.44)$$

При этом амплитуда автоколебаний изменяется в пределах  $A \geq a_{\Pi} > 0$ .

Таков первый метод определения установившихся величин смещения  $x^0$ , амплитуды  $a_{\Pi}$  и частоты  $\omega_{\Pi}$  автоколебаний при наличии внешних воздействий.

Проиллюстрируем также и второй метод. Согласно второму методу сначала решается уравнение (19.30). По (19.30) и первой из формул (19.28) находим

$$\frac{x^0}{a} = \sin \frac{\pi F^0}{2c} = \sin \frac{\pi M^0}{2c(k_1 + k_{oc})k_2}$$

или, с учетом (19.31),

$$\frac{x^0}{a} = \sin \left[ \frac{\pi}{2ck_2} \left( \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.45)$$

Для отыскания входящей сюда амплитуды  $a$  воспользуемся уравнением (19.29). Характеристическое уравнение для него будет (19.32), и уравнения (19.11) поэтому примут вид:

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{oc})k_2 q - (T_1 + T_2)\omega^2 = 0; \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{oc} q)\omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.46)$$

где согласно (19.28) и (19.45)

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sin \left[ \frac{\pi}{2ck_2} \left( \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.47)$$

Исключая из уравнений (19.46) величину  $q$ , находим частоту автоколебаний

$$\omega_n^2 = \frac{k_1 + k_{oc}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}. \quad (19.48)$$

Подставив найденные выражения  $q$  и  $\omega_n^2$  в первое из уравнений (19.46), найдем амплитуду автоколебаний

$$a_n = A \cos \left[ \frac{\pi}{2ck_2} \left( \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right], \quad (19.49)$$

где величина

$$A = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_2 k_{oc})}{\pi(T_1 + T_2)} \quad (19.50)$$

является амплитудой автоколебаний при отсутствии внешних воздействии (при  $f_1^0 = 0$ ,  $f_2^0 = 0$ ).

Подставив найденное выражение амплитуды (19.49) в формулу (19.45), получим окончательно величину смещения

$$x^0 = \frac{A}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{ck_2} \left( \frac{k_1 f_1^0}{k_1 + k_{oc}} + f_2^0 \right) \right]. \quad (19.51)$$

Как видно, второй метод в данной задаче приводит к тем же самым результатам значительно более коротким путем, чем первый, что очень важно для практических расчетов (принципиально же оба метода эквивалентны друг другу). По-видимому, большая простота второго метода будет иметь место и в большинстве других задач.

В этом втором методе, в отличие от первого, функция смещения  $\Phi(x^0)$  не определяется. Однако последняя может понадобиться в дальнейшем для других целей. Но ее тоже легко можно определить при использовании второго метода. Здесь величины  $x^0$ ,  $a_{II}$  и их отношение выражены через величины внешних воздействий. Функция же смещения  $\Phi(x^0)$  не должна содержать ни величин внешних воздействий, ни амплитуды  $a_{II}$  зависящей от них. Подставив значение квадратной скобки из (19.51) в (19.45), получим

$$\frac{x^0}{a} = \sin \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x^0}{A} \right), \quad (19.52)$$

а подставив это в первую из формул (19.28), сразу получим искомую функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A}, \quad (19.53)$$

где  $A$  выражается только через параметры системы согласно (19.50).

Важно отметить, что функция смещения  $\Phi(x^0)$  не зависит ни от числа внешних воздействий, ни от характера их изменения (если они постоянные или медленно меняющиеся), что наиболее наглядно было видно из первого метода решения задачи.

Итак, двумя разными методами определена величина смещения  $x^0$  автоколебаний на входе реле. Найдем теперь установившуюся ошибку на выходе системы  $x_1$ . Поскольку на выходе должно воспроизводиться внешнее воздействие  $f_1(t)$ , то согласно рис. 19.5 и второму уравнению (19.20) ошибка данной системы выражается величиной  $x_1$ , установившееся решение для которой, следовательно, и надо искать. Выразив переменную  $x_1$  через  $x$ , которая уже известна, из заданных уравнений системы (19.20) и (19.21) получаем

$$(k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) x_1 = (T_1 p + 1) x + k_{oc} (T_1 p + 1) p f_1(t).$$

Учитывая (19.25) и (19.27), перепишем данное уравнение в виде

$$(k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) x_1 = x^0 + (T_1 p + 1) x^* + k_{oc} T_1 f_1^0 + k_{oc} f_1^0 t. \quad (19.54)$$

В соответствии с видом правой части установившееся решение этого линейного уравнения следует искать в виде

$$x_1 = x_1^0 + c_1 t + x_1^*, \quad (19.55)$$

где  $x_1^0$  и  $c_1$  — постоянные, а  $x_1^*$  — периодическая составляющая.



Подставив это в (19.54), получим три уравнения для отыскания указанных величин:

$$k_{oc} T_1 c_1 + (k_1 + k_{oc}) x_1^0 = x^0 + k_{oc} T_1 f_1^0. \quad (19.56)$$

$$(k_1 + k_{oc}) c_1 = k_{oc} f_1^0; \quad (19.57)$$

$$(k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) x_1^* = (T_1 p + 1) x^*. \quad (19.58)$$

Второе из них дает

$$c_1 = \frac{k_{oc} f_1^0}{k_1 + k_{oc}}. \quad (19.59)$$

Тогда из (19.56) находим

$$x_1^0 = \frac{1}{k_1 + k_{oc}} \left( x^0 + \frac{k_1 k_{oc} T_1}{k_1 + k_{oc}} f_1^0 \right), \quad (19.60)$$

где  $x^0$  определяется формулой (19.51) через внешние воздействия. Наконец, из уравнения (19.58) получаем амплитуду автоколебаний переменной  $x_1$ :

$$a_1 = a_{II} \sqrt{\frac{T_1^2 \omega_{II}^2 + 1}{k_{oc}^2 T_1^2 \omega_{II}^2 + (k_1 + k_{oc})^2}}, \quad (19.61)$$

где  $a_{II}$  определяется формулой (19.49) через внешнее воздействие, а  $\omega_{II}$  — формулой (19.48).

Итак, в данной системе имеются все три составляющие ошибки (19.55), зависящие от величины внешних воздействий и от параметров системы. Наиболее нежелательной из них является составляющая  $c_1 t$ , возрастающая пропорционально времени. Поэтому систему необходимо видоизменить в первую очередь так, чтобы уничтожить эту составляющую ошибки, т. е. сделать  $c_1 = 0$ . Для этого можно было бы вовсе изъять дополнительную обратную связь (рис. 19.5), так как при  $k_{oc} = 0$  согласно (19.59) будет  $c_1 = 0$ . Однако при этом существенно возрастает амплитуда автоколебаний (19.61), т. е. периодическая составляющая ошибки. Поэтому более целесообразной мерой будет замена жесткой обратной связи  $x_{oc} = k_{oc} x_4$  на гибкую  $x_{oc} = k_{oc} p x_4$ . Тогда в уравнении (19.54) величина  $k_{oc}$  заменится на  $k_{oc} p$ :

$$(k_{oc} T_1 p^2 + k_1 + k_{oc} p) x_1 = x^0 + (T_1 p + 1) x^* + k_{oc} f_1^0 \quad (19.62)$$

Как видим, составляющая, пропорциональная времени, в правой части уравнения исчезла, вследствие чего установившееся решение для ошибки  $x_1$  в отличие от (19.55), будет

$$x_1 = x_1^0 + x_1^*. \quad (19.63)$$

При этом из (19.62) находим:

$$x_1^0 = \frac{1}{k_1}(x^0 + k_{oc}f_1^0), \quad (19.64)$$

$$a_1 = a_{нн} = \sqrt{\frac{T_1^2 \omega_{нн}^2 + 1}{k_{oc}^2 \omega_{нн}^2 + (k_1 - k_{oc}T_1 \omega_{нн}^2)^2}}, \quad (19.65)$$

причем изменяются, конечно, и формулы для  $x^0$ ,  $a_{нн}$  и  $\omega_{нн}$  (их можно получить таким же способом). Подбором параметров системы амплитуду автоколебаний ошибки  $a_1$  можно сделать весьма малой.

## § 19.2. Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах

Рассмотрим очень важный для практики случай, когда внешнее воздействие  $f(t)$ , которое может быть либо возмущающим, либо управляющим (задающим), в автоколебательной системе является не постоянным, а медленно меняющимся. Медленно меняющейся будем называть такую функцию времени, которая сравнительно мало изменяется за период автоколебаний, т. е. соблюдается условие в виде одного из неравенств

$$|f(t+T) - f(t)| \ll |f(t)| \quad \text{или} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| T \ll |f(t)|,$$

где  $T = \frac{2\pi}{\omega_{нн}}$ , а  $\omega_{нн}$  — частота автоколебаний.

Соответственно для астатических систем медленно меняющейся скоростью  $f'(t)$  будет такая, для которой выполняется условие

$$|f'(t+T) - f'(t)| \ll |f'(t)| \quad \text{или} \quad \left| \frac{df'}{dt} \right| T \ll |f'(t)|,$$

Указанными свойствами почти всегда обладают «полезные» сигналы управления, проходящие через автоматическую автоколебательную систему (в том числе в переходных процессах).

Условие медленного изменения любой функции времени можно выразить также и в частотной форме, а именно: медленно меняющейся считается такая функция, возможные частоты изменения которой во времени значительно ниже возможной частоты возникающего в системе периодического решения (автоколебаний).

Сделанные предположения позволяют величину  $f(t)$  или, соответственно,  $pf(t)$  считать постоянной за время каждого периода исследуемых автоколебаний и искать решение в той же форме (19.4):

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t',$$

где  $t'$  отсчитывается отдельно внутри каждого периода, ибо теперь  $x^0$ ,  $a$  и  $\omega$  будут не постоянными, а переменными во времени  $t$  (от периода к периоду) вместе с изменением внешнего воздействия  $f(t)$ . При этом  $x^0(t)$  будет медленно меняющимся сигналом на входе нелинейности.

В связи со сказанным здесь остается в силе разложение (19.5) – (19.7). Но подстановка его в заданное уравнение нелинейной автоматической системы (19.1) дает

$$Q(p)(x^0 + x^*) + R(p)\left(F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega} px^*\right) = S(p)f(t).$$

При достаточно медленном изменении функции  $f(t)$  ( $a$  в астатических системах  $pf$ ) и величин  $x^0$ ,  $a$ ,  $\omega$ , входящих в коэффициенты  $F^0$ ,  $q$ ,  $q'$ , данное уравнение может быть разделено на два отдельных уравнения:

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = S(p)f(t), \quad (19.66)$$

$$Q(p)x^* + R(p)\left(q + \frac{q'}{\omega} p\right)x^* = 0, \quad (19.67)$$

соответственно для медленно меняющейся составляющей и для колебательной составляющей. При этом разделении уравнений, как и прежде, сохраняются существенно нелинейные свойства системы.

Следовательно, здесь сохраняется целиком прежний (§ 19.1) первый метод решения задачи (второй здесь неприемлем), выраженный формулами (19.10) – (19.13), где в данном случае  $x^0$  является величиной не постоянной, а медленно меняющейся. Поэтому прежний процесс решения заканчивается определением функции смещения (19.13). Подставив (19.13) в (19.66), получим дифференциальное уравнение для определения медленно меняющегося сигнала управления  $x^0(t)$  (на фоне автоколебаний системы) в виде

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = S(p)f(t). \quad (19.68)$$

Таким образом, получается, что для определения медленно меняющихся процессов функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0) \quad (19.69)$$

следует подставить в уравнение автоматической системы (19.1) вместо заданной нелинейности  $F(x, px)$ .

Следовательно, функция смещения  $\Phi(x^0)$  представляет собой как бы статическую характеристику (обычно криволинейную), которая определяет зависимость между выходной и входной величинами заданной нелинейности для постоянных или медленно меняющихся сигналов в автоколебательной системе.

При любых нелинейностях, в том числе и скачкообразных, функция смещения  $\Phi(x^0)$  может получать при определенных условиях вид весьма плавной кривой. Этот

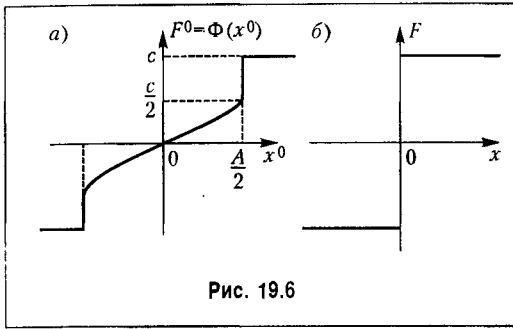


Рис. 19.6

Эффект называется *вибрационным сглаживанием нелинейностей* при помощи автоколебаний, а функцию смещения  $\Phi(x^0)$  можно называть *сглаженной нелинейной характеристикой*.

Так, в примере § 19.1 согласно (19.40) функция смещения будет иметь вид рис. 19.6, а, т. е. для медленно меняющегося сигнала в данной релейной системе нелинейная характеристика будет в определенных пределах иметь плавный вид (рис.

19.6, а) вместо скачкообразного (рис. 19.6, б) — за счет сглаживающего влияния автоколебательных вибраций.

Далее, например, для нелинейностей, обусловленных зоной нечувствительности (рис. 19.7, а), а также зазором (рис. 19.7, в) и петлей, сигналы  $x < b$  при отсутствии автоколебаний не передаются ( $F = 0$ ). При наличии же автоколебаний сигнал  $x^0 < b$  передается в виде составляющей  $F^0$ . Поэтому для медленно меняющегося сигнала получается плавная характеристика (функция смещения)  $\Phi(x^0)$  без зоны нечувствительности (рис. 19.7, б). Эффект вибрационного сглаживания нелинейностей в этих примерах является положительным (ликвидация зон нечувствительности и петель).

Однако в других случаях эффект вибрационного сглаживания нелинейности может оказаться и отрицательным. Возьмем, например, нелинейную характеристику с зоной насыщения (ограниченно-линейную), показанную на рис. 19.8. В этом случае за счет того, что верхушки синусоиды с одной стороны срезаются, постоянная составляющая  $F^0$  будет меньше, чем само значение  $F$ , соответствующее линейному начальному участку. Поэтому постоянный или медленно меняющийся сигнал будет при наличии автоколебаний проходить через данную нелинейность с меньшим коэффициентом усиления, чем без автоколебаний, что может в известных случаях отрицательно сказаться на качестве автоматической системы в целом.

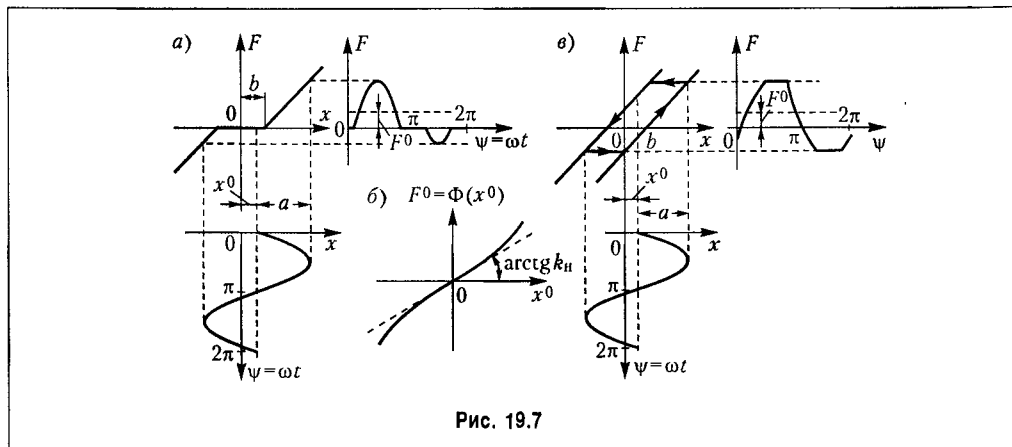


Рис. 19.7

Во многих случаях вычисление  $a$  и  $\omega$  будет необходимо только с точки зрения проверки выполнения условий вибрационного сглаживания нелинейности и допустимости таких вибраций в данной конкретной автоматической системе. Основными же для качества работы автоматической системы при этом будут являться медленно меняющиеся процессы, определяемые уравнением (19.68). С точки зрения упрощения их определения весьма важными являются следующие два обстоятельства.

Во-первых, вид функции смещения  $\Phi(x^0)$ , как видно из § 19.1, не зависит ни от количества и места приложения внешних воздействий на систему, ни от характера их изменения (если только они медленно меняющиеся). Вид  $\Phi(x^0)$  зависит от формы нелинейности, от структуры и от параметров системы. Поэтому можно пользоваться любым методом определения  $\Phi(x^0)$  при любых частных упрощающих предположениях относительно внешних воздействий. Можно, например, пользоваться более простым вторым методом из описанных в § 19.1 методов и проиллюстрированных там на примере, взяв любое одно постоянное по величине внешнее воздействие.

Во-вторых, какова бы ни была заданная нелинейность  $F(x, px)$  (скачкообразная, петлевая и т. п.), обычно функция смещения  $\Phi(x^0)$  получает вид плавной кривой. Поэтому, в отличие от первоначально заданной нелинейности, ее легко можно *линеаризовать обычным способом* (по касательной или по секущей в начале координат или в другом начале отсчета). Имея в виду это свойство, часто вместо термина «вибрационное сглаживание» употребляют термин «вибрационная линеаризация» (будем придерживаться первого из них).

Итак, в определенном диапазоне можно считать

$$F^0 = \Phi(x^0) = k_{11} x^0, \tag{19.70}$$

где

$$k_{11} = \left( \frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0}.$$

Графически  $k_{11}$  представляет собой тангенс угла наклона прямой (касательной или секущей, рис. 19.7, б). Величина коэффициента  $k_{11}$  зависит от соотношения, вообще говоря, от всех параметров системы.

Например, для системы, описываемой уравнениями (19.20) – (19.23), согласно (19.53) и (19.50) имеем

$$k_{11} = \left( \frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \frac{2c}{\pi A} = \frac{T_1 + T_2}{2k_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}. \tag{19.71}$$

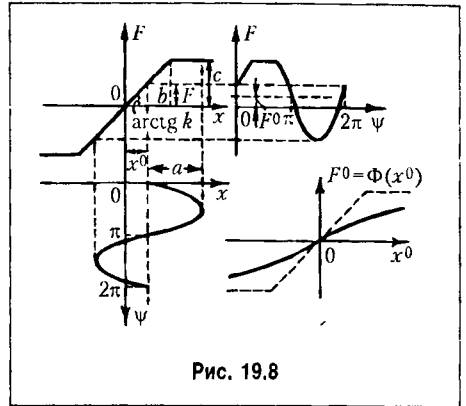


Рис. 19.8

Поэтому для расчета медленно протекающих процессов в данной системе на основании (19.20) – (19.22) и (19.70) получаем линейные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1)x_2^0 &= k_1 x_1^0; & x_1^0 &= f_1(t) - x_4^0; \\ x_3^0 &= k_n x^0; & x^0 &= x_2^0 - x_{oc}^0; & x_{oc}^0 &= k_{oc} x_4^0; \\ (T_2 p + 1)px_4^0 &= k_2 x_3^0 - f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (19.72)$$

или единое линейное уравнение (19.24), в котором надо заменить  $x$  на  $x^0$  и  $F(x)$  на  $k_n x^0$ .

Определение коэффициента усиления  $k_n$  можно значительно упростить следующим образом. Поскольку функция смещения  $\Phi(x^0)$  определяется согласно (19.13) и (19.7) и по выражению  $F^0(x^0, a, \omega)$ , в которое подставлена зависимость  $a(x^0)$ , то формулу для вычисления  $k_n$  можно представить в виде

$$k_n = \left( \frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \left( \frac{\partial F^0}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}$$

В тех случаях, когда рассматриваются нечетно-симметричные нелинейности  $F(x)$ , величина  $F^0$  не зависит от  $\omega$  и, кроме того, согласно (19.6)

$$\left( \frac{\partial F^0}{\partial a} \right)_{x^0=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=a \sin \psi} \sin \psi d\psi = 0,$$

так как производная под знаком интеграла будет четной функцией. Следовательно, для нечетно-симметричных нелинейностей  $F(x)$ , как однозначных, так и петлевых, величину  $k_n$  можно вычислять по формуле

$$k_n = \left( \frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}$$

непосредственно из выражения (19.7), не определяя функции смещения  $\Phi(x^0)$ . Во многих задачах это будет существенным упрощением решения.

Это упрощение не относится к несимметричным нелинейностям, а также к тем случаям, когда  $k_n$  приходится определять не по касательной, а по секущей.

Итак, с подстановкой (19.70) уравнение (19.68) для определения медленно протекающих процессов становится обыкновенным линейным уравнением

$$[Q(p) + R(p) k_n] x^0 = S(p) f(t) \quad (19.73)$$

и, как таковое, легко решается.

Как видим, введенный здесь принцип разделения уравнений для колебательных и для медленно меняющихся составляющих, при котором сохраняются существенно нелинейные свойства системы, приводит к весьма важным для практических расчетов результатам. Существенным выводом является то, что медленно меняющиеся сигналы проходят через нелинейность с другим коэффициентом усиления  $k_n$ , чем

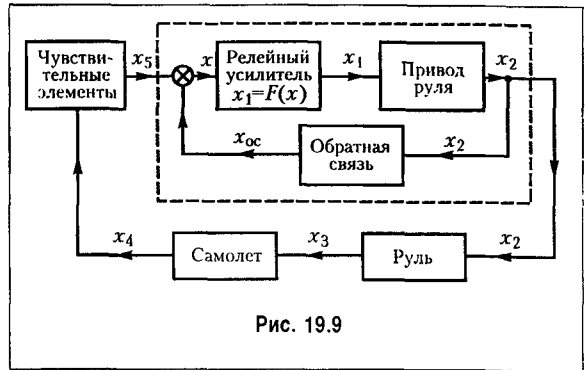


Рис. 19.9

автоколебания ( $q$  или  $q + \frac{q'}{\omega} p$ ).

Особенно важно использовать свойство вибрационного сглаживания нелинейностей с последующей их обычной линеаризацией при расчете сложных автоматических систем.

Если, например, система автоматического управления полетом самолета работает по схеме, изображенной на рис. 19.9, то часть системы, обведенную пунктиром (релейный усилитель, привод и дополнительная обратная связь), как отдельную следящую систему, можно рассчитывать изложенным выше методом с учетом автоколебательных вибраций. Частоту последних путем соответствующего выбора параметров этой части системы или введением корректирующих устройств можно сделать достаточно большой с тем, чтобы амплитуда автоколебаний переменной  $x_2$  на выходе этой части системы была мала. Если же указанную амплитуду  $x_2$  не удастся сделать малой (тогда руль будет колебаться), то необходимо, чтобы указанная частота практически не воспринималась корпусом самолета в процессе его движения вокруг центра тяжести.

Тогда расчет автоматической системы будет выглядеть следующим образом.

Автоколебания определяем только в обведенной пунктиром внутренней части (рис. 19.9), как в отдельной самостоятельной системе, считая  $x_5(t)$  произвольным медленно меняющимся внешним входным воздействием, а  $x_2$  — выходной величиной. Для такой простой системы находим, как изложено выше, функцию смещения  $\Phi(x^0)$ , а также частоту и амплитуду автоколебаний в зависимости от величины внешнего воздействия. Выбираем параметры данной части системы так, чтобы условия вибрационного сглаживания нелинейности соблюдались во всем практически возможном диапазоне изменения входной величины  $x_5$ . При этом следим за тем, чтобы частота автоколебаний системы (зависящая от параметров системы) лежала за пределами частот возможных колебаний самолета (чтобы она практически не воспринималась корпусом самолета).

После такого расчета внутренней части системы производим обычную линеаризацию функции смещения  $\Phi(x^0)$ , т. е. заменяем ее одной прямой линией  $F^0 = k_n x^0$  (причем можно использовать указывавшееся упрощение в определении  $k_n$ ). В результате получаем линейное уравнение для медленно протекающих процессов в данной части системы. К этому уравнению добавляем уравнение всей остальной части системы (в данном случае самолета, чувствительных элементов и руля, см. рис. 19.9) и рас-

считываем всю систему в целом, как линейную, по любым обычным методам теории автоматического управления. При этом не обращаем уже внимания на автоколебания, которые локализуются в рассчитанном ранее внутреннем контуре системы. Однако их влияние не игнорируется, ибо оно было учтено при определении функции смещения  $\Phi(x^0)$  и коэффициента  $k_n$ .

Изложенный принцип позволяет, во-первых, вести расчет автоколебаний по более простым уравнениям (так как выделяется только внутренняя часть системы) и, во-вторых, значительно упрощает расчет всей системы в целом, сводя его к исследованию обыкновенных линейных уравнений (по с коэффициентом  $k_n$ , зависящим от автоколебаний, т. е. от параметров внутреннего контура системы). Если необходимо учесть переменные коэффициенты и нелинейности самого самолета, то уравнения системы в целом не будут уже столь простыми. Однако и в этом случае полностью сохраняет смысл предварительный отдельный расчет внутреннего контура системы, так как влияние нелинейностей самого самолета будет распространяться обычно только на те процессы движения, которые по сравнению с автоколебаниями внутреннего контура являются медленными.

Известно, что и само движение самолета, например по тангажу, можно, разделить на два, одно более быстрое — движение относительно центра масс (угловое движение) и другое более медленное — движение центра масс (движение по траектории). Оба они являются медленными по сравнению с автоколебаниями внутреннего контура системы управления. Однако их тоже можно рассматривать отдельно. Следовательно, в этом случае, кроме обычно применяемого пространственного разбиения движения самолета по каналам (тангажа, курса, крена), расчет системы по каждому каналу (например, тангажа) разбивается еще на три этапа по степени медленности движения во времени.

Аналогичное разделение расчета по крайней мере на два этапа по степени медленности во времени бывает целесообразным и для многих других нелинейных автоматических систем (слежения, стабилизации и т. п.). В сложных системах такие приемы, существенно упрощающие все исследование, оказываются единственными, которые могут сделать расчет системы практически осуществимым. Важно иметь в виду, что при этом принципе разделения движений сохраняется существенная нелинейная взаимосвязь между ними.

### § 19.3. Гармоническая линеаризация нелинейностей при несимметричных колебаниях

В главе 18 гармоническая линеаризация нелинейностей выполнялась для случая симметричных колебаний в системе. Для гармонической линеаризации нелинейной функции  $F(x, px)$  при несимметричных колебаниях будем полагать, что входная величина  $x$  нелинейного звена ищется в виде

$$x = x^0 + a \sin \psi.$$

Нелинейная функция  $F(x, px)$  будет в этом случае периодической функцией аргумента  $\psi$  с постоянной составляющей  $F^0$ .



**Релейная характеристика общего вида.** Релейная характеристика общего вида при несимметричных колебаниях входной величины  $x$  представлена на рис. 19.10, а. Здесь  $m$  — любое число в интервале  $-1 \ll m \ll 1$ .

Определим постоянную составляющую и коэффициенты гармонической линеаризации при условии  $a \geq b + |x^0|$ . В соответствии с видом функции  $F(x^0 + a \sin \psi)$ , представленной на рис. 19.10, б, получим

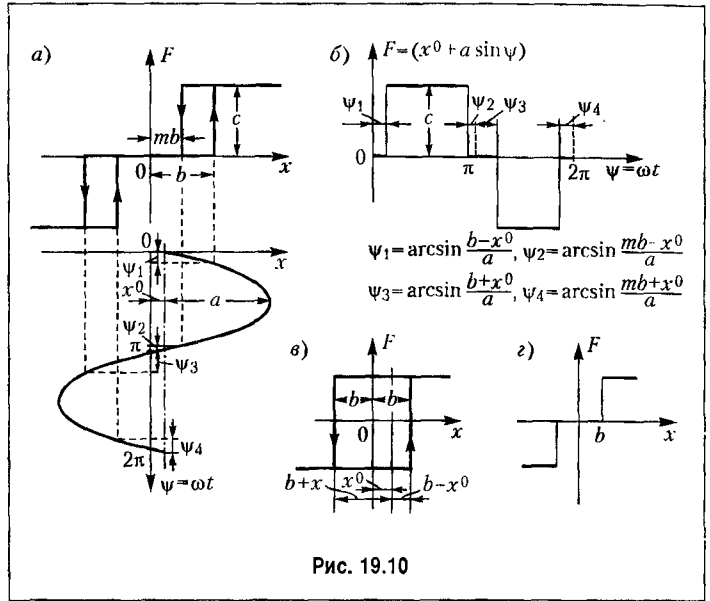


Рис. 19.10

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi = \frac{c}{2\pi} \left( \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_2} d\psi - \int_{\pi+\psi_3}^{2\pi-\psi_4} d\psi \right) = \frac{c}{2\pi} (\psi_3 - \psi_1 + \psi_4 - \psi_2).$$

С учетом значений соответствующих углов

$$F^0 = \frac{c}{2\pi} \left( \arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{mb+x^0}{a} - \arcsin \frac{mb-x^0}{a} \right) \quad (19.74)$$

при  $a \geq b + |x^0|$ .

Далее для  $q(a, x^0)$  получаем

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{c}{2\pi} \left( \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_2} \sin \psi d\psi - \int_{\pi+\psi_3}^{2\pi-\psi_4} \sin \psi d\psi \right) = \frac{c}{\pi a} (\cos \psi_1 + \cos \psi_2 + \cos \psi_3 + \cos \psi_4).$$

Учитывая значение углов  $\psi_1, \dots, \psi_4$ , находим

$$q = \frac{c}{\pi a} \left[ \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb+x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb-x^0)^2}{a^2}} \right] \quad (19.75)$$

при  $a \geq b + |x^0|$ .

Наконец, для  $q'(a, x^0)$  будем иметь

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \sin \psi_2 - \sin \psi_1 + \sin \psi_4 - \sin \psi_3.$$

С учетом значений соответствующих синусов получим

$$q' = \frac{2cb}{\pi a^2} (1-m) \quad \text{при} \quad a \geq b + |x^0|. \quad (19.76)$$

**Релейная характеристика с гистерезисной петлей.** Считая, что релейная характеристика с гистерезисной петлей (рис. 19.10) есть частный случай релейной характеристики общего вида при  $m = -1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{c}{2\pi} \left( \arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right); \\ q &= \frac{2c}{\pi a} \left( \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} \right); \\ q' &= -\frac{4cb}{\pi a^2} \end{aligned} \right\} \quad (19.77)$$

при  $a \geq b + |x^0|$ .

**Релейная характеристика с зоной нечувствительности.** Релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 19.10, з) следует рассматривать как частный случай релейной характеристики общего вида при  $m = 1$ . Тогда получим значения постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линеаризации:

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{c}{\pi} \left( \arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right); \\ q &= \frac{2c}{\pi a} \left( \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} \right); \\ q' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.78)$$

при  $a \geq b + |x^0|$ .

**Идеальная релейная характеристика.** Для идеальной релейной характеристики (рис. 19.6, б), полагая в последних формулах  $b = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}; \\ q &= \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}; \\ q' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.79)$$

при  $a \geq |x^0|$ .

**Релейная несимметричная характеристика.** Релейная несимметричная характеристика при гармоническом изменении входной величины  $x$  со смещенным центром колебаний представлена на рис. 19.11, а. Так будет изменяться напряжение на потребителе, управляемом реле, если реле при срабатывании включает потребитель на полное напряжение, а при отпускании выключает.

Вычисляя постоянную составляющую по формуле (19.6), получим

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi = \frac{c}{2\pi} (\pi - \psi_2 - \psi_1).$$

После подстановки значений соответствующих углов имеем

$$F^0 = \frac{c}{2} - \frac{c}{2\pi} \left( \arcsin \frac{b - x^0}{a} + \arcsin \frac{mb - x^0}{a} \right) \quad (19.80)$$

при  $a \geq |b - x^0|$  и  $a \geq |x^0 - mb|$ .

Далее

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{c}{\pi a} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2)$$

или, с учетом значений углов  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ,

$$q = \frac{c}{\pi a} \left( \sqrt{1 - \frac{(b + x^0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb - x^0)^2}{a^2}} \right), \quad (19.81)$$

при  $a \geq |b - x^0|$  и  $a \geq |x^0 - mb|$ .

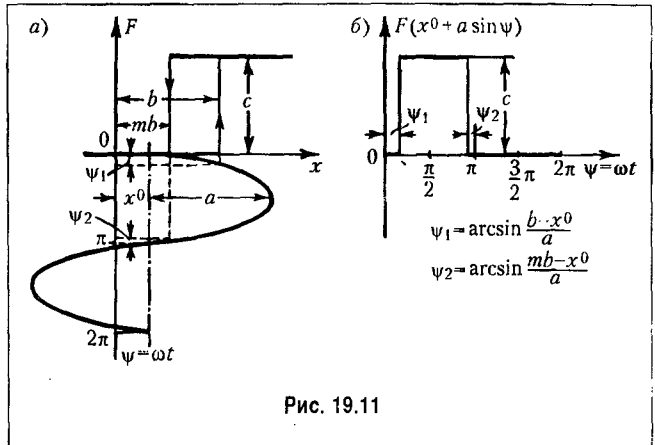


Рис. 19.11

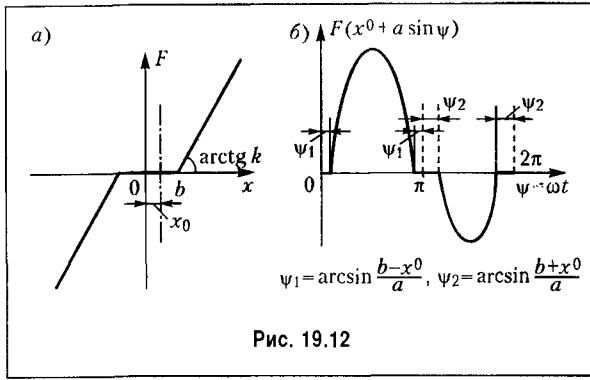


Рис. 19.12

И наконец,

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{c}{2\pi} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)$$

или, с учетом соответствующих синусов,

$$q' = -\frac{cb}{\pi a^2} (1 - m) \quad (19.82)$$

при тех же ограничениях.

**Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности.** Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности изображена на рис. 19.12, а. Коэффициент  $q'$  в этом случае равен нулю, так как характеристика однозначная.

Определим значения постоянной составляющей  $F^0(a, x^0)$  и коэффициента гармонической линеаризации  $q(a, x^0)$  в соответствии с видом функции  $F(x^0 + a \sin \psi)$ , показанной на рис. 19.12, б.

Для постоянной составляющей имеем

$$\begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} k [a \sin \psi - (b - x^0)] d\psi - \int_{\psi_3}^{\pi - \psi_2} k [a \sin \psi - (b + x^0)] d\psi \right\} = \\ &= \frac{ka}{\pi} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2) + kx^0 + \frac{k}{\pi} [b(\psi_1 - \psi_2) - x^0(\psi_1 - \psi_2)], \end{aligned}$$

что после подстановки соответствующих углов дает

$$\begin{aligned} F^0 &= \frac{ka}{\pi} \left( \sqrt{1 - \frac{(b - x^0)^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b + x^0)^2}{a^2}} \right) + kx^0 + \\ &+ \frac{k}{\pi} \left[ b \left( \arcsin \frac{b - x^0}{a} - \arcsin \frac{b + x^0}{a} \right) - \right. \\ &\left. - x^0 \left( \arcsin \frac{b - x^0}{a} + \arcsin \frac{b + x^0}{a} \right) \right] \quad (19.83) \end{aligned}$$

при  $a \geq b + |x^0|$ .

Вычисляя коэффициент  $q(a, x^0)$ , получаем

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi a} \left\{ \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_2} k [a \sin \psi - (b-x^0)] \sin \psi d\psi - \int_{\psi_2}^{\pi-\psi_1} k [a \sin \psi - (b+x^0)] \sin \psi d\psi \right\} = \\ &= \frac{k}{\pi} \left[ \pi - (\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{2} (\sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2) \right] - \frac{2k}{\pi a} [(b-x^0) \cos \psi_1 + (b+x^0) \cos \psi_2], \end{aligned}$$

что с учетом значений углов дает

$$\begin{aligned} q &= k - \frac{k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{b+x^0}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \frac{b+x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} \right) \end{aligned} \quad (19.84)$$

при  $a \geq b + |x^0|$ .

**Нелинейная характеристика с насыщением.** Для нелинейной характеристики с насыщением (рис. 19.8) при несимметричных колебаниях аналогичным путем получаем следующие значения постоянной составляющей  $F^0(a, x^0)$  и коэффициента гармонической линеаризации  $q(a, x^0)$ :

$$\begin{aligned} F^0 &= \frac{k}{\pi} \left[ a \left( \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (b+x^0) \arcsin \frac{b+x^0}{a} + (b-x^0) \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right]; \\ q &= \frac{k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{b+x^0}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{a^2}} + \frac{b+x^0}{a} \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{a^2}} \right) \end{aligned} \quad (19.85)$$

при  $a \geq b + |x^0|$ .

Проиллюстрируем на примере данной нелинейной характеристики графики  $\frac{F^0}{c} = f_1\left(\frac{x^0}{b}\right)$  при разных  $\frac{a}{b} = \text{const}$  и  $\frac{q}{k} = f_2\left(\frac{a}{b}\right)$  при разных  $\frac{x^0}{b} = \text{const}$ , вычисленные по формулам (19.85) и представленные на рис. 19.13.

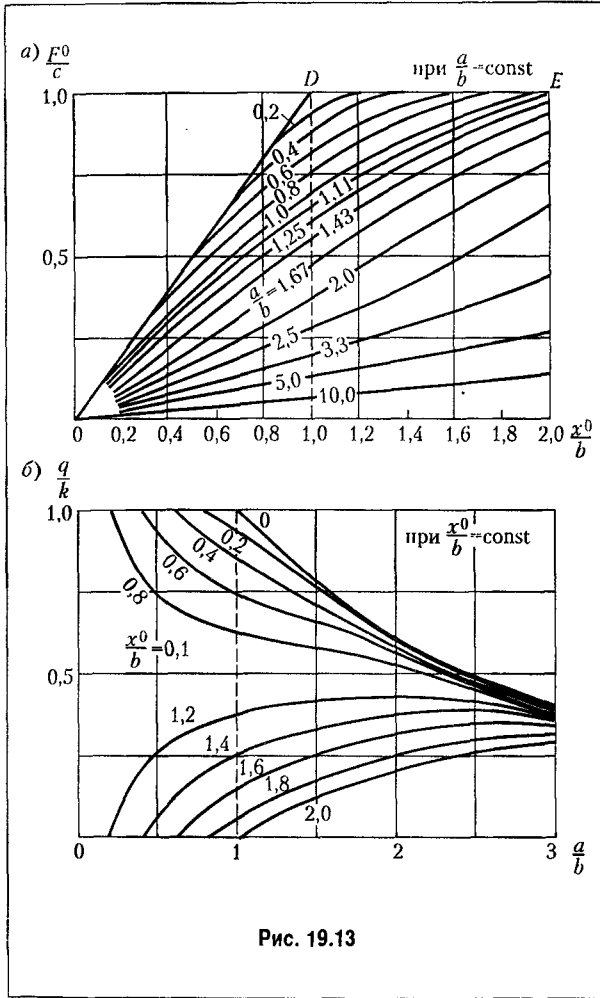


Рис. 19.13

Из графиков для  $F^0$  (рис. 19.13, а) видно, что при наличии колебаний входной величины пелицейного звена его статическая характеристика для медленно меняющегося воздействия (функция смещения) сглаживается, причем увеличение амплитуды колебаний входной величины приводит к уменьшению коэффициента усиления пелицейного звена по постоянному или медленно меняющемуся входному воздействию.

Графики для  $q$  (рис. 19.13, б) характеризуют прохождение через нелинейное звено колебательной составляющей в зависимости от амплитуды на входе и смещения центра колебаний. Как видно, увеличение смещения приводит к уменьшению коэффициента усиления для колебательной составляющей.

**Нелинейная характеристика типа люфта или зазора.** В случае несимметричных колебаний пелицейная характеристика типа люфта или зазора (рис. 19.14) смещается вдоль средней линии, так что ее прежний центр  $O$  переходит в положение  $O'$ . Постоянная составляющая в этом случае определяется простой формулой

$$F^0 = kx^0.$$

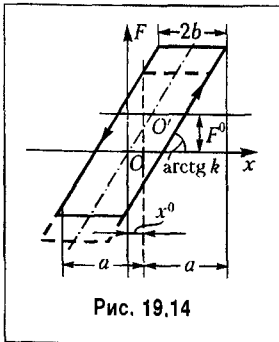


Рис. 19.14

Колебательная составляющая функции  $F(x^0 + a \sin \psi)$  относительно нового центра колебаний не зависит от величины смещения  $x^0$ . Так, например, зубчатая пара, имеющая люфт, передает движение с тем же передаточным числом для любых углов поворота ведущей шестерни. В случае колебаний в кинематической передаче, включающей данную пару, люфт будет проявлять себя одинаково для любых углов поворота. Поэтому для коэффициентов гармонической линеаризации характеристики типа люфта или зазора в случае смещенного центра колебаний относительно начала отсчета будем иметь те же формулы (18.27), что и для случая симметричных колебаний.

## Глава 20

# ОЦЕНКА КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

### § 20.1. Приближенное исследование колебательных переходных процессов

Рассмотрим симметричные относительно оси времени колебательные переходные процессы в нелинейной автоматической системе, которые в первом грубом приближении могут быть описаны затухающей или расходящейся синусоидой с медленно меняющимся во времени показателем затухания и частотой (рис. 20.1).

Прежде чем записать это математически, обратим внимание на два существенных обстоятельства. Для линейных систем, когда показатель затухания  $\zeta = \text{const}$  и частота  $\omega = \text{const}$ , пишут

$$x = a_0 e^{\zeta t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (20.1)$$

Если же частота  $\omega$  и показатель затухания  $\zeta$  в процессе колебаний меняются с течением времени, то решение следует записывать в другом виде.

Во-первых, следует писать  $\sin \psi(t)$  и определять текущее значение частоты в произвольный момент времени в виде

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} \quad (20.2)$$

причем

$$\psi = \int_0^t \omega dt + \psi_0, \quad (20.3)$$

где  $\psi_0$  — постоянная (начальная фаза). Существует другой способ, когда полагают  $\psi = \omega_0 t + \varphi(t)$  при  $\omega_0 = \text{const}$ , причем согласно (20.2) текущее значение частоты

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (20.4)$$

Однако в данной задаче целесообразно придерживаться первого представления ((20.2) и (20.3)).

Во-вторых, при переменном во времени показателе затухания следует определять текущее значение амплитуды  $a$  (рис. 20.1) не в виде  $a_0 e^{\zeta t}$ , как сделано в (20.1), а в виде дифференциальной зависимости

$$\frac{da}{dt} = a\zeta. \quad (20.5)$$

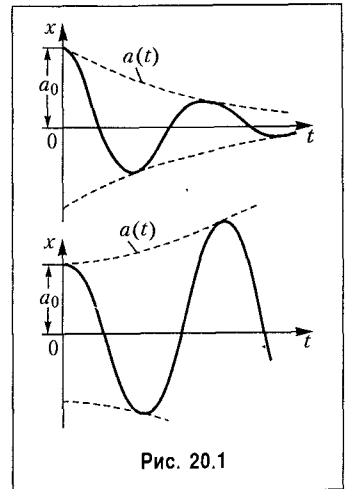


Рис. 20.1

Тогда в случае линейной системы, когда  $\zeta = \text{const}$ , получаем как частный случай

$$\frac{da}{a} = \zeta dt, \quad a = a_0 e^{\zeta t},$$

а в случае нелинейной системы, когда  $\zeta$  меняется в процессе колебаний, текущее значение амплитуды согласно (20.5) будет

$$\frac{da}{a} = \zeta dt, \quad a = a_0 e^{\int \zeta dt}, \quad (20.6)$$

т. е. огибающая колебаний (рис. 20.1) состоит из элементарных отрезков экспонент с непрерывно меняющимся показателем  $\zeta$ .

Итак, будем искать решение для переходного процесса в нелинейной системе как первое приближение в виде

$$x = a \sin \psi, \quad (20.7)$$

$$\frac{da}{dt} = a\zeta, \quad \omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad (20.8)$$

причем искомыми неизвестными будем считать медленно меняющиеся величины  $\zeta$  и  $\omega$ .

«Показатель затухания» может характеризовать быстроту не только затухания, но и расхождения колебаний:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} > 0 \text{ при } \zeta > 0; \\ \frac{da}{dt} < 0 \text{ при } \zeta < 0, \end{array} \right\} \quad (20.9)$$

т. е. положительным значениям «показателя затухания»  $\zeta$  соответствуют расходящиеся колебания.

Как уже было сказано, величины  $\zeta$  и  $\omega$  считаются медленно меняющимися функциями. Однако поскольку постоянные значения  $\zeta$  могут соответствовать в линейных системах как медленному, так и быстрому затуханию колебаний, то и медленно меняющиеся значения  $\zeta$  могут характеризовать как те, так и другие процессы.

Формулы гармонической линеаризации нелинейности для рассматриваемого случая будут иметь некоторую особенность по сравнению с прежними. В самом деле, если величина показателя затухания  $\zeta$  не мала, то, дифференцируя выражение (20.7) по времени как произведение двух функций, с учетом (20.8) находим

$$px = a\omega \cos \psi + a\zeta \sin \psi. \quad (20.10)$$

Отсюда и из (20.7) получаем

$$\sin \psi = \frac{x}{a}, \quad \cos \psi = \frac{px}{a\omega} - \frac{\zeta x}{a\omega} = \frac{p-\zeta}{a\omega} x. \quad (20.11)$$



Поэтому первая «гармоника» (затухающая или расходящаяся) нелинейной функции  $F(x, px)$  при  $x = a(t) \sin \psi(t)$  вместо (18.6) здесь будет

$$F(x, px) = qx + q' \frac{p - \zeta}{\omega} x = \left( q - \frac{\zeta}{\omega} q' \right) x + \frac{q'}{\omega} px, \quad (20.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi + a\zeta \sin \psi) \sin \psi d\psi; \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi + a\zeta \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Здесь в общем случае коэффициенты гармонической линеаризации будут зависеть от трех неизвестных:  $a$ ,  $\omega$  и  $\zeta$ . Если же рассматривается нелинейность  $F(x)$ , как чаще всего бывает, то  $q$  и  $q'$  сохраняют прежний вид:

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (20.14)$$

и в этом случае можно целиком использовать материал главы 18 в виде готовых выражений  $q(a)$  и  $q'(a)$  для различных конкретных нелинейностей, учитывая, однако, новую форму (20.12) замены нелинейной функции.

В случае нелинейных систем первого класса дифференциальное уравнение колебательного переходного процесса

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0 \quad (20.15)$$

при наличии свойства фильтра (§ 18.2) после гармонической линеаризации согласно (20.12) принимает вид

$$Q(p)x + R(p) \left( q + \frac{p - \zeta}{\omega} q' \right) x = 0. \quad (20.16)$$

Колебательный процесс в линейной системе, описываемый решением (20.1), соответствует паре комплексных корней характеристического уравнения  $p = \zeta + j\omega$  с постоянными значениями  $\zeta$  и  $\omega$ . Аналогично и колебательный процесс в нелинейной системе, описываемый приближенно формулами (20.7) и (20.8), определяется медленно меняющимися значениями  $\zeta$  и  $\omega$ , которые можно найти путем определения пары комплексных корней  $p = \zeta \pm j\omega$  характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы (20.16).

В соответствии с этим в характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p) \left( q + \frac{p - \zeta}{\omega} q' \right) = 0 \quad (20.17)$$

подставим  $p = \zeta + j\omega$  для определения значений  $\zeta$  и  $\omega$ , удовлетворяющих этому уравнению. В результате получим

$$Q(\zeta + j\omega) + R(\zeta + j\omega)(q + jq') = v. \quad (20.18)$$

Подстановку значения  $\zeta + j\omega$  вместо  $p$  в любой многочлен удобно выполнять путем разложения его в ряд по степеням  $j\omega$ , например:

$$Q(\zeta + j\omega) = Q(\zeta) + \left(\frac{dQ}{dp}\right)_{\zeta} j\omega + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2Q}{dp^2}\right)_{\zeta} (j\omega)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n Q}{dp^n}\right)_{\zeta} (j\omega)^n, \quad (20.19)$$

где индекс  $\zeta$  означает, что в выражения производных надо подставить  $\zeta$  вместо  $p$ . По такой же формуле разлагается в ряд и многочлен  $R(\zeta + j\omega)$ .

При малых значениях  $\zeta$  (для медленно затухающих процессов) вместо (20.19) удобнее применять разложение по степеням  $\zeta$ , ограничиваясь его первой степенью, а именно:

$$\left. \begin{aligned} Q(\zeta + j\omega) &= Q(j\omega) + \left(\frac{dQ}{dp}\right)_{j\omega} \zeta; \\ R(\zeta + j\omega) &= R(j\omega) + \left(\frac{dR}{dp}\right)_{j\omega} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

где индекс  $j\omega$  означает подстановку  $j\omega$  вместо  $p$  в выражения для производных.

В комплексном уравнении (20.18) содержатся три неизвестные:  $\zeta$ ,  $\omega$  и  $a$ , причем последняя входит в  $q$  и  $q'$ . Поэтому указанное комплексное уравнение позволяет найти две переменные как функцию третьей:

$$\zeta = \zeta(a) \quad \text{и} \quad \omega = \omega(a), \quad (20.21)$$

т. е. изменение показателя затухания  $\zeta$  и частоты  $\omega$  с изменением амплитуды  $a$  затухающего или расходящегося колебательного процесса в нелинейной системе.

Когда функции (20.21) найдены, можно, пользуясь двумя дифференциальными уравнениями первого порядка (20.8), найти  $a(t)$  и  $\psi(t)$  для первого приближения искомого решения нелинейного уравнения (20.15) в форме (20.7). Интегралы уравнения (20.8) имеют при заданных начальных условиях ( $a = a_0$ ,  $\psi = \psi_0$  при  $t = 0$ ) следующие выражения:

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a\zeta(a)} = t, \quad \psi = \int_0^t \omega(a) dt + \psi_0, \quad (20.22)$$

где  $\zeta(a)$  и  $\omega(a)$  — найденные ранее функции (20.21).

Из первого уравнения (20.22) определяется  $a(t)$ , а из второго —  $\psi(t)$  после подстановки в него  $a(t)$  из первого.

В результате получаем решение

$$x = a(t) \sin \psi(t). \quad (20.23)$$

Операция интегрирования (20.22) во многих случаях для оценки качества переходных процессов в автоматических системах не нужна. В большинстве случаев вполне достаточно бывает ограничиться нахождением функций (20.21) из комплексного алгебраического уравнения (20.18), так как качество симметричного колебательного переходного процесса вполне может быть охарактеризовано величинами  $\zeta$ ,  $\omega$  и их отношением  $\zeta/\omega$ , а также характером их изменения в зависимости от амплитуды колебаний и от параметров системы.

Это достигается построением так называемых *диаграмм качества* затухания симметричных нелинейных колебаний. Диаграмма на рис. 20.2 представляет собой семейство линий  $\zeta = \text{const}$  и линий  $\omega = \text{const}$  на плоскости с координатами  $k$ ,  $a$ , причем  $k$  означает какой-либо из основных подлежащих выбору параметров системы (коэффициент усиления или др.).

Для линейной системы линии  $\zeta = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$  в тех же координатах имели бы вид вертикальных прямых, так как показатель затухания и частота колебательных переходных процессов в линейной системе не зависят от величины амплитуды колебаний  $a$ , а меняются только с изменением параметров системы (в данном случае  $k$ ). В нелинейной же системе эти линии искривляются (рис. 20.2) или просто наклоняются в зависимости от формы нелинейности и от общей структуры системы. Это выражает собой изменение показателя затухания  $\zeta$  и частоты  $\omega$  нелинейных колебательных переходных процессов с изменением величины амплитуды колебаний  $a$ .

Значение  $\zeta = 0$  соответствует отсутствию затухания, т. е. сохранению с течением времени постоянной амплитуды  $a$ . Например, точке  $C$  (рис. 20.2) соответствуют колебания с постоянной амплитудой  $a_c$  (автоколебания). Поэтому линия  $\zeta = 0$  на диаграмме качества (рис. 20.2) представляет собой не что иное, как зависимость амплитуды автоколебаний от параметра системы  $k$ , которая определялась в главе 18. По одну сторону от этой линии лежат линии  $\zeta = \text{const} > 0$ , а по другую —  $\zeta = \text{const} < 0$ . Первые соответствуют расходящимся колебаниям, а вторые — затухающим.

Протеканию переходного процесса во времени соответствует движение изображающей точки  $M$  по вертикали (так как амплитуда  $a$  в переходном процессе меняется, а коэффициент усиления  $k$  сохраняется постоянным), как указано на рис. 20.2 пунктиром и стрелками. Например, значению  $k$  в точке  $L$  соответствует вертикальная прямая  $M_0L$ . Поскольку эта прямая пересекает линии только с отрицательными значениями  $\zeta$ , то колебания в переходном процессе будут затухать, т. е. изображающая точка  $M$  будет двигаться из некоторого начального положения  $M_0$  (где задана начальная амплитуда  $a_0$ ) вниз. Процесс изменения амплитуды во времени показан на рис. 20.3, а. Изменение частоты  $\omega(a)$  определяется при этом по соответствующей вертикали на нижней части рис. 20.2.

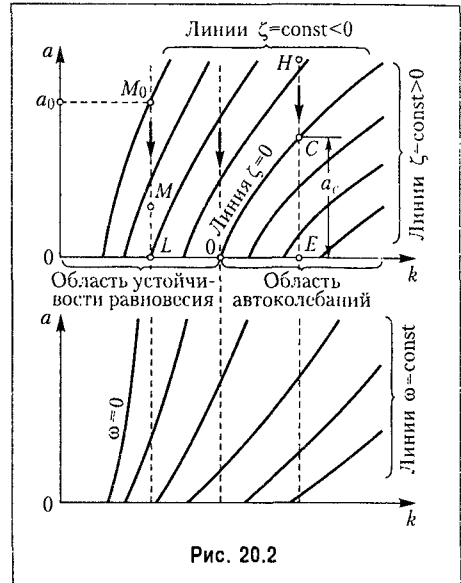


Рис. 20.2

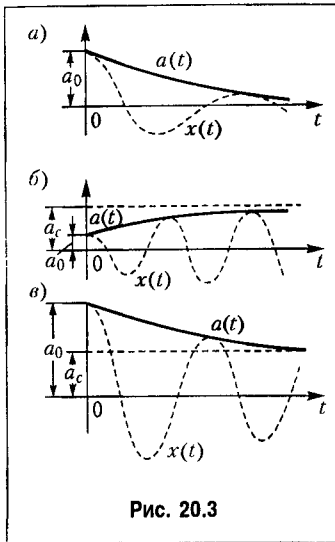


Рис. 20.3

В том случае, когда, параметр  $k$  в исследуемой системе имеет значение, соответствующее точке  $E$  (рис. 20.2), получается два варианта протекания переходного процесса. Если начальное положение изображающей точки будет ниже точки  $C$  ( $a_0 < a_c$ ), то  $\zeta > 0$ , т. е. колебания расходятся и изображающая точка идет, как показано стрелкой на прямой  $EC$ , асимптотически приближаясь к точке  $C$ . Это соответствует процессу изменения амплитуды колебаний во времени, изображенному на рис. 20.3, б. Если же  $a_0 > a_c$ , то  $\zeta < 0$ , и изображающая точка пойдет по прямой  $HC$  вниз (рис. 20.2), что соответствует затухающему переходному процессу (рис. 20.3, в), асимптотически приближающемуся к автоколебаниям с амплитудой  $a_c$ .

Процессы, аналогичные этому, будут иметь место при любом значении параметра  $k$  правее точки  $D$  (рис. 20.2). Следовательно, область значений параметра  $k$ , лежащая правее точки  $D$ , является областью существования авто-

колебаний, к которой сходятся колебательные переходные процессы с обеих сторон (снизу и сверху). При этом положение равновесия системы (любая точка  $a = 0$  на оси абсцисс) в данной области значений параметра  $k$  является неустойчивым, так как колебания в переходном процессе от него расходятся, стремясь к другому устойчивому состоянию — автоколебательному режиму.

Левее же точки  $D$  (рис. 20.2) лежат значения параметра  $k$ , при которых переходный процесс затухает от любой начальной амплитуды  $a_0$  до нуля. Это есть область устойчивости равновесного состояния системы.

Левее линии  $\omega = 0$  (рис. 20.2) лежит обычно область монотонных переходных процессов.

Итак, если диаграммы качества для разных структурных схем какой-либо автоматической системы построены по различным параметрам ( $k$  и др.), то они могут служить хорошим материалом для выбора наилучших параметров нелинейной системы при ее проектировании или синтезе.

Обратимся теперь к способам построения этих диаграмм.

**Первый способ.** Выделив в уравнении (20.18) вещественную  $X$  и мнимую  $Y$  части, подобно тому как это делалось в главе 18, получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(a, \omega, \zeta) &= 0, \\ Y(a, \omega, \zeta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.24)$$

Пусть требуется построить диаграмму качества затухания нелинейных колебаний по некоторому параметру системы  $k$ , который входит в коэффициенты уравнений (20.24). Выразив на основании одного из этих уравнений величину

$$\omega = f_1(a, \zeta, k) \quad (20.25)$$

и подставив ее в другое из уравнений (20.24), найдем

$$k = f_2(a, \zeta). \quad (20.26)$$

Тогда, придавая  $\zeta$  различные постоянные значения, по (20.26) можно легко построить семейство линий  $\zeta = \text{const}$  на диаграмме качества (рис. 20.2). Затем, используя (20.25), можно построить также семейство линий  $\omega = \text{const}$ .

**Второй способ.** Характеристическое уравнение (20.17) можно записать в развернутом виде:

$$p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \dots + A_{n-1} p + A_n = 0, \quad (20.27)$$

где все коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_n$  или часть из них являются функциями искомых величин  $a, \omega$  и  $\zeta$  (в простейших задачах только от  $a$ ). Разложим левую часть уравнения (20.27) на два сомножителя:

$$(p^n + C_1 p^{n-3} + \dots + C_{n-2}) (p^2 + B_1 p + B_2), \quad (20.28)$$

последний из которых соответствует основной паре комплексных корней  $p_{1,2} = \zeta \pm j\omega$ , определяющей колебательный переходный процесс в исследуемой системе. Тогда получаем

$$\zeta = -\frac{B_1}{2}, \quad \omega^2 = B_2 - \zeta^2. \quad (20.29)$$

Первый из сомножителей (20.28) должен иметь значительно большие по модулю корни, чем второй, чтобы колебательное решение, соответствующее искомым корням  $p_{1,2}$  при принятых начальных условиях, было основным.

Коэффициенты разложения (20.28) связаны следующими соотношениями:

$$A_1 = C_1 + B_1, \quad A_2 = C_2 + B_2 + B_1 C_1, \dots, A_n = C_{n-2} B_2.$$

Для нахождения величин  $\zeta$  и  $\omega$  необходимо, очевидно, в формулах (20.29) выразить коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  через коэффициенты первоначального уравнения (20.27).

В частности, для характеристического уравнения, третьей степени

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = (p + C_1)(p^2 + B_1 p + B_2) = 0$$

имеем:

$$A_1 = C_1 + B_1, \quad A_2 = B_2 + B_1 C_1, \quad A_3 = C_1 B_2. \quad (20.30)$$

Чтобы значения  $\zeta$  и  $\omega$  (20.29) определяли основную часть решения, а третий корень уравнения можно было не учитывать, нужно, чтобы

$$C_1 \gg \left| \frac{B_1}{2} \right| \quad \text{или} \quad A_1 \gg |\zeta|, \quad (20.31)$$

чем определяется верхний предел для значений  $|\zeta|$ , которые следует брать при построении диаграммы качества.

Составим предпоследний определитель Гурвица:

$$H_{n-1} = A_1 A_2 - A_3 = (C_1 + B_1)(B_2 + B_1 C_1) - C_1 B_2 = B_1(B_2 + C_1^2 + C_1 B_1).$$

Но так как из (20.30) и (20.29) следует, что  $B_2 + C_1 B_1 = A_2$ ,  $C_1^2 = (A_1 - B_1)^2$ ,  $B_1 = -2\zeta$ , то полученное выше выражение можно записать в виде

$$\zeta = -\frac{H_{n-1}}{2[A_2 + (A_1 + 2\zeta)^2]} = -\frac{|A_1 A_2 - A_3|}{2[A_2 + (A_1 + 2\zeta)^2]}. \quad (20.32)$$

Далее, поскольку из (20.30) следует, что

$$B_1 = \frac{A_3}{C_1} = \frac{A_3}{A_1 - B_1},$$

то из (20.29) получаем формулу для квадрата частоты:

$$\omega^2 = \frac{A_3}{A_1 + 2\zeta} - \zeta^2. \quad (20.33)$$

Формулы (20.22) и (20.23) позволяют строить диаграммы качества для систем третьего порядка.

Аналогично для системы четвертого порядка получаем

$$p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p = (p^2 + C_1 p + C_2)(p^2 + B_1 p + B_2), \quad (20.34)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= C_1 + B_1; & A_2 &= C_2 + B_2 + B_1 C_1; \\ A_3 &= C_1 B_2 + B_1 C_2; & A_4 &= C_2 B_2. \end{aligned} \right\} \quad (20.35)$$

Здесь требуется, соблюдение того же условия (20.31).

Исходя из выражения предпоследнего определителя Гурвица, аналогичным путем находим формулу

$$\zeta = -\frac{H_{n-1}}{2(A_1 + 2\zeta)\{[A_2 + (A_1 + 2\zeta)2\zeta]^2 - 4A_4 + A_1 A_3\}}; \quad (20.36)$$

где

$$H_{n-1} = A_3(A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4;$$

а затем

$$\omega^2 = \frac{A_4(A_1 + 4\zeta)}{(A_1 + 2\zeta)(A_2 + 2\zeta) - A_3} - \zeta^2. \quad (20.37)$$

Третий способ. Рассмотрим часто встречающийся частный случай, когда коэффициенты гармонической линеаризации  $q$  и  $q'$  зависят только от амплитуды  $a$  и

не зависят от частоты  $\omega$  и показателя затухания  $\zeta$ , что имеет место для нелинейностей вида  $F(x)$ . В этом случае после подстановки в характеристическое уравнение  $p = \zeta + j\omega$  выражение (20.18) можно представить в виде

$$W_n(\zeta + j\omega) = -\frac{1}{W_n(a)}, \quad (20.38)$$

где обозначено:

$$W_n(a) = q(a) + jq'(a); \quad W_n(\zeta + j\omega) = \frac{R(\zeta + j\omega)}{Q(\zeta + j\omega)}, \quad (20.39)$$

причем числитель и знаменатель последнего выражения представляют собой, согласно (20.19), многочлены по степеням  $j\omega$  с коэффициентами, зависящими от  $\zeta$ .

Задаваясь различными постоянными значениями  $\zeta$ , построим серию кривых  $W_n(\zeta + j\omega)$  как функции от  $j\omega$  при  $\zeta = \text{const}$  (рис. 20.4) аналогично тому, как обычно строятся амплитудно-фазовые характеристики линейной части системы.

На том же графике (рис. 20.4) нанесем линию  $-\frac{1}{W_n(a)}$ . Точки пересечения ее с линиями  $W_n(\zeta + j\omega)$  определяют собой решение уравнения (20.38), а именно для каждого значения  $x$  в этих точках пересечения получаются соответствующие значения  $a$  (по кривой  $-\frac{1}{W_n(a)}$ ) и  $\omega$  (по кривой  $W_n(\zeta + j\omega)$ ). Этим самым определяется

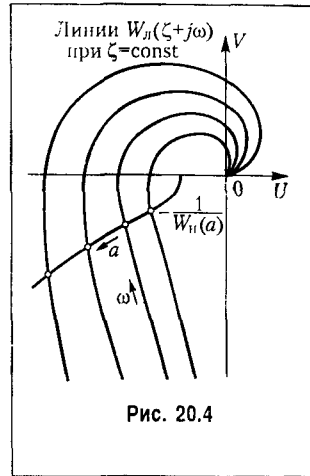
качество колебательного переходного процесса при всех заданных параметрах системы, т. е. определяются точки одной вертикали на диаграмме качества (рис. 20.2). Повторив такие же построения (рис. 20.4) для различных значений выбираемого параметра системы  $k$ , можно построить и всю диаграмму качества (рис. 20.2).

Способы построения диаграмм качества для систем второго класса и другие применения диаграмм см. в [72]. Там же рассматриваются несимметричные колебательные процессы и скользящие процессы.

## § 20.2. Примеры исследования колебательных переходных процессов

Рассмотрим сначала построение диаграммы качества и кривой переходного процесса на примере нелинейной следящей системы, а затем исследуем переходный процесс в нелинейной системе с логическим устройством.

**Пример 1.** Структурная схема следящей системы изображена на рис. 20.5, где 1 — датчик рассогласования, 2 — усилитель, 3 — реле, 4 — исполнительный двигатель, 5 — редуктор, 6 — управляемый объект, 7 — дополнительная обратная связь.



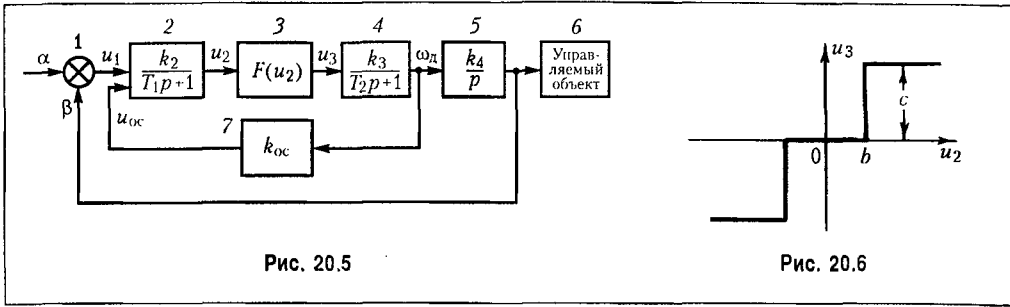


Рис. 20.5

Рис. 20.6

Системы с такой структурной схемой находят применение в тех случаях, когда для управления двигателем нужна значительная мощность, а увеличение габаритов и массы усилителя нежелательно.

Для датчика рассогласования системы имеем уравнения

$$u_1 = k_1(\alpha - \beta) = k_1 \vartheta, \tag{20.40}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — соответственно входная и выходная величины системы;  $k_1$  — коэффициент передачи датчика рассогласования;  $\vartheta$  — рассогласование.

Статическая характеристика нелинейного звена — реле — изображена на рис. 20.6. Выполняя гармоническую линеаризацию нелинейной характеристики реле, получим уравнение

$$u_3 = q(a) u_2, \tag{20.41}$$

где в соответствии с (18.16) для однозначной релейной характеристики с зоной нечувствительности коэффициент гармонической линеаризации определяется формулой

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \tag{20.42}$$

Учитывая уравнение датчика (20.40), гармонически линеаризованное уравнение реле (20.41) и передаточные функции других линейных звеньев, приведенные на рис. 20.5, запишем уравнение для собственного движения ( $\alpha = 0$ ) следящей системы в виде

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_2 k_3 k_{ос} q(a)p + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a)] u_2 = 0. \tag{20.43}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее полученному, дифференциальному уравнению, будет

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_2 k_3 k_{ос} q(a)p + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a) = 0. \tag{20.44}$$

Произведем вначале построение диаграммы качества по первому способу, указанному в § 20.1. Для этого в уравнении (20.44) необходимо произвести подстановку  $p = \zeta + j\omega$  с использованием формулы (20.19).

Вычисляя соответствующие производные характеристического полинома (20.44) по  $p$  и подставляя  $p = \zeta$  в полученные выражения производных, найдем коэффициенты



разложения в ряд уравнения (20.44) при  $p = \zeta + j\omega$ , которое в результате распадается на следующие два уравнения:

$$X = T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + [1 + k_2 k_3 k_{oc} q(a)] \zeta + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a) - [3T_1 T_2 \zeta + T_1 + T_2] \omega^2 = 0; \quad (20.45)$$

$$Y = [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{oc} q(a)] \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \quad (20.46)$$

Из последнего уравнения определяем квадрат частоты:

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{oc} q(a)]. \quad (20.47)$$

Подставляя значение  $\omega^2$  в уравнение (20.45), получим

$$\begin{aligned} & T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + [1 + k_2 k_3 k_{oc} q(a)] \zeta + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a) = \\ & = \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{oc} q(a)] [3T_1 T_2 \zeta + T_1 + T_2]. \end{aligned} \quad (20.48)$$

Построим диаграмму качества для следящей системы по параметру  $k_1$ . Так как затухание  $\zeta$  в (20.48) входит нелинейно, то удобно данное уравнение разрешить относительно параметра  $k_1$ . В результате получим

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{1}{k_2 k_3 k_4 q(a)} & \left\{ \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1 + k_2 k_3 k_{oc} q(a)] \times \right. \\ & \left. \times (3T_1 T_2 \zeta + T_1 + T_2) - [T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + \zeta] \right\}. \end{aligned} \quad (20.49)$$

Для построения диаграммы зададимся следующими значениями других параметров:  $T_1 = 0,05$  с,  $T_2 = 0,05$  с,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 200$  град/с · В,  $k_4 = 0,01$ ,  $k_{oc} = 10^{-3}$  с · В/град,  $b = 5$  В,  $c = 120$  В.

Подставляя приведенные значения параметров в (20.49) и задаваясь различными постоянными значениями показателя затухания  $\zeta = \text{const}$ , строим кривые  $a(k_1)$  (рис. 20.7). На основании формулы (20.47) при постоянных значениях частоты  $\omega = \text{const}$  строим также пунктирные кривые  $a(k_1)$ . Эти кривые представляют собой диаграмму качества для рассматриваемой следящей системы. Кривая  $a(k_1)$  при  $\zeta = 0$  соответствует автоколебаниям.

Выполним теперь построение диаграммы качества по второму способу, указанному в § 20.1.

Уравнение (20.44) запишем в виде

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0,$$

где

$$A_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}, \quad A_2 = \frac{1 + k_2 k_3 k_{oc} q(a)}{T_1 T_2}, \quad A_3 = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 q(a)}{T_1 T_2}.$$

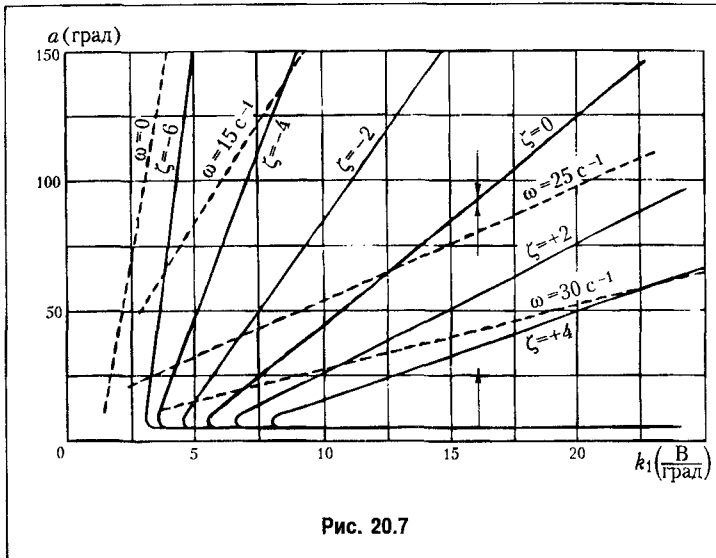


Рис. 20.7

дополнительной обратной связи дает результат, представленный на рис. 20.8. В данном частном случае линии  $\zeta = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$  накладываются друг на друга.

Сравнивая полученные диаграммы для случаев наличия дополнительной обратной связи и отсутствия обратной связи, убеждаемся, что за счет обратной связи расширяется область затухающих колебательных процессов (область левее и выше линии  $\zeta = 0$ , соответствующей автоколебаниям). Кроме того, при тех же самых значениях параметра  $k_1$  в случае наличия обратной связи в области затухающих процессов получается большее по абсолютной величине затухание, чем без обратной связи.

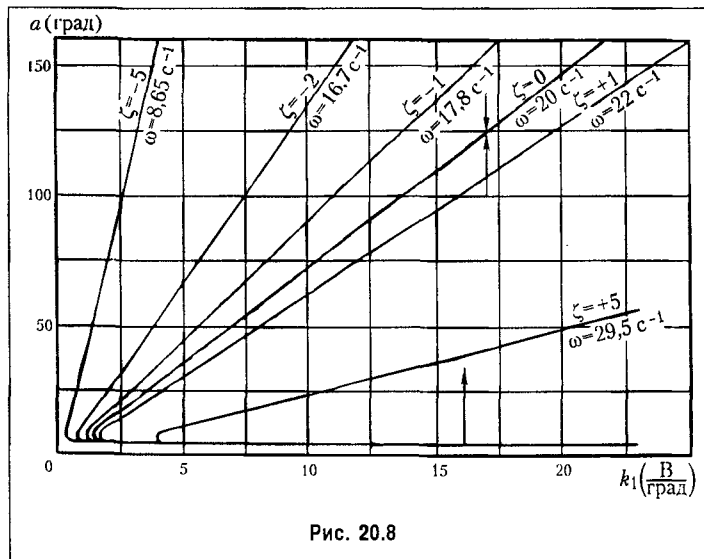


Рис. 20.8

Формулы (20.32) и (20.33) с этими значениями  $A_1, A_2, A_3$  позволяют построить диаграмму затухания нелинейных процессов по любому из параметров системы. Для параметра  $k_1$  при выбранных значениях других параметров следящей системы это дает тот же результат, что и в предыдущем случае.

Аналогичное построение диаграммы качества переходного процесса для той же системы при отключении

обратной связи. Например, при  $k_1 = 8$  В/град и  $a = 90^\circ$  при наличии обратной связи затухание  $\zeta = -4$ , тогда как в случае отключенной обратной связи  $\zeta = -2$ . Это говорит о том, что обратная связь приводит к увеличению быстроты затухания переходного процесса.

Полученные диаграммы качества позволяют оценить переходный процесс в пеллинейной системе, если заданы па-

параметры последней, а также дают возможность решить и обратную задачу, т. е. выбрать значения параметров из условия заданного качества переходного процесса. Кроме того, по диаграммам качества легко построить огибающую амплитуд переходного процесса и найти изменение частоты процесса от периода к периоду, т. е. в конечном счете выполнить приближенное построение переходного процесса.

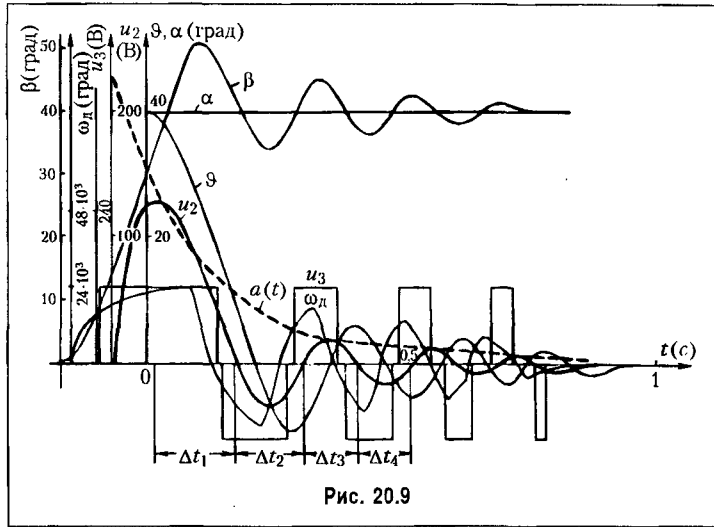


Рис. 20.9

Для определения погрешности метода на рис. 20.9 построен переходный процесс в рассматриваемой системе [70] при значении параметра  $k_1 = 5$  В/град и при начальном значении амплитуды колебаний  $a_0 = 250$  В. На том же рис. 20.9 изображена пунктиром огибающая переходного процесса, построенная приближенно на основании диаграммы качества (рис. 20.7). Из выполненного построения видно, что приближенный расчет по методу гармонической линеаризации дает небольшую погрешность при определении огибающей. На рис. 20.10 показан характер переходных процессов в той же системе при повышенной крутизне датчика рассогласования:  $k_1 = 10$  В/град. В данном случае в установившемся режиме имеют место автоколебания с амплитудой  $a = 42$  В.

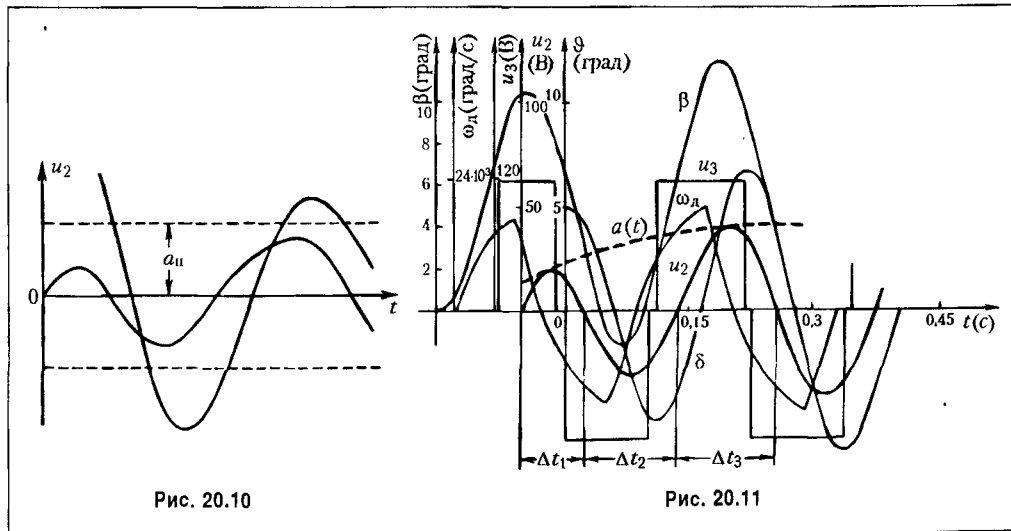


Рис. 20.10

Рис. 20.11

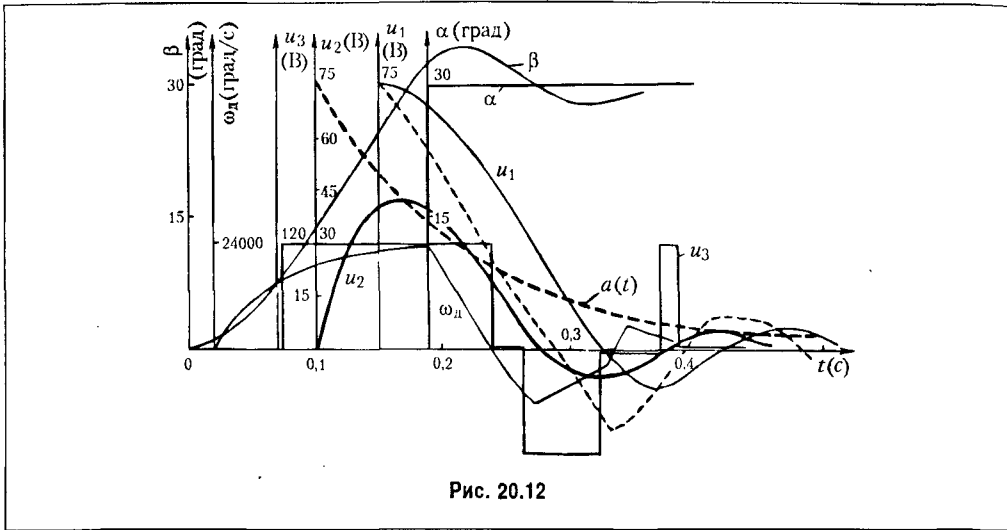


Рис. 20.12

На рис. 20.11 построен переходный процесс в той же системе при  $k_1 = 10$  В/град для случая, когда система приходит к указанному режиму автоколебаний от малых начальных отклонений («снизу»). Там же показана огибающая  $a(t)$ , найденная по методу гармонической линеаризации на основании диаграммы качества.

Приближенный метод даст достаточно хорошие результаты и в том случае, когда колебания затухают практически за один период (рис. 20.12).

**Пример 2.** В главе 17 было рассмотрено точное исследование переходного процесса в идеальной системе с логическим устройством. Исследуем теперь приближенным методом переходный процесс в реальной системе с учетом нескольких постоянных времени, имея в виду, что он сходится к автоколебаниям с некоторой амплитудой  $a = a_{пр}$ , которые изучались в § 18.4.

Найдем зависимости показателя затухания  $\zeta$  и частоты  $\omega$  от меняющейся в переходном процессе амплитуды  $a$ , т. е. зависимости  $\zeta(a)$ ,  $\omega(a)$ . Тогда, зная начальную амплитуду  $a_0$  и конечную  $a = a_{пр}$ , можно судить о качестве переходного процесса по соответствующим значениям показателя затухания  $\zeta$  и частоты  $\omega$ .

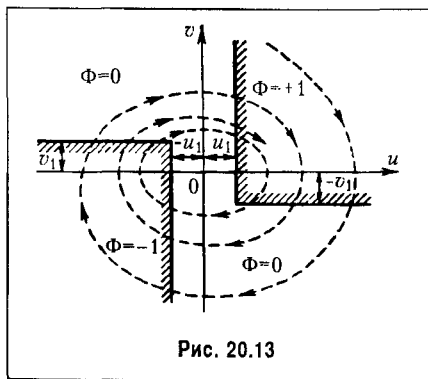


Рис. 20.13

Формула для гармонической линеаризации, нелинейности вместо (18.153) принимает вид

$$\Phi(u, v) = \left[ q + \frac{q'}{\omega} (p - \zeta) \right] x,$$

где  $q$  и  $q'$  определяются прежними формулами (18.154), так как последовательность переключений, согласно рис. 20.13, остается прежней. Но значения входящих в  $q$  и  $q'$  тригонометрических функций (18.151) и (18.152) изменятся следующим образом. При определении  $u_n$  и  $a_n$  через  $a$

нужно в соответствующие передаточные функции подставить  $p = \zeta + j\omega$ , что дает

$$a_u = \frac{k_1 a}{(1 + T_1 \zeta) \sqrt{\left(\frac{T_1 \omega}{1 + T_1 \zeta}\right)^2 + 1}}, \quad \beta = \arctg \frac{T_1 \omega}{1 + T_1 \zeta}$$

(аналогичные выражения получаются для  $a_v$  и  $\gamma$ ). Сравнивая их с (18.149), приходим к выводу, что в формулах (18.151) и (18.152) вместо  $a, T_1 \omega, a\omega, T_2 \omega$  должны быть поставлены соответственно выражения:

$$\frac{a}{1 + T_1 \zeta}, \quad \frac{T_1 \omega}{1 + T_1 \zeta}, \quad \frac{a\omega}{1 + T_2 \zeta}, \quad \frac{T_2 \omega}{1 + T_2 \zeta}. \quad (20.50)$$

В результате  $q$  и  $q'$  будут функциями всех трех величин:  $q(a, \omega, \zeta); q'(a, \omega, \zeta)$ . Характеристическое уравнение вместо (18.155) примет вид

$$b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + p + k \frac{q'(a, \omega, \zeta)}{\omega} (p - \zeta) + kq(a, \omega, \zeta) = 0,$$

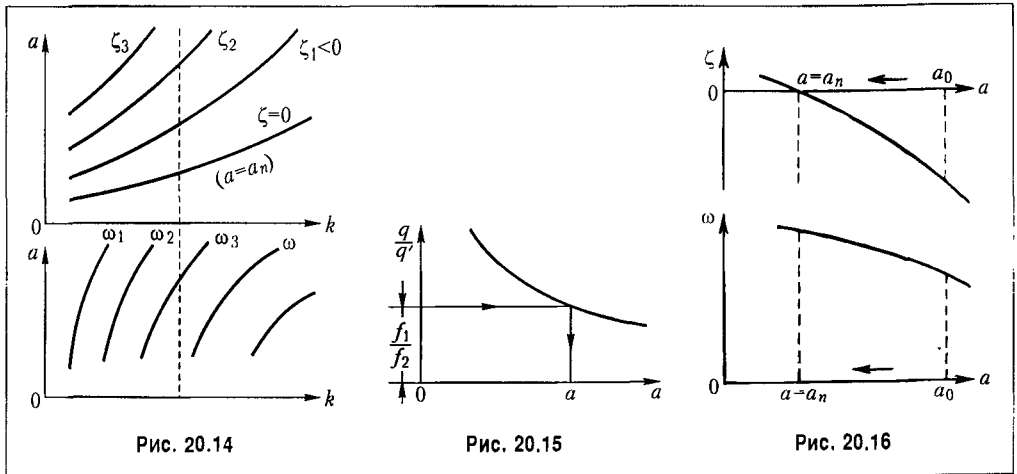
где

$$b_0 = T_0 T_3 T_4, \quad b_1 = T_0 T_3 + T_0 T_4 + T_3 T_4, \quad b_2 = T_0 + T_3 + T_4, \quad k = k_0 k_3 k_4.$$

После подстановки  $p = \zeta + j\omega$  по формуле (20.19) получаем вещественную и мнимую части:

$$X = kq(a, \omega, \zeta) + b_1 \zeta^3 b_0 \zeta^4 + b_2 \zeta^2 + \zeta - (6b_0 \zeta^2 + 3b_1 \zeta + 2b_2) \omega^2 + b_0 \omega^4 = 0;$$

$$Y = kq'(a, \omega, \zeta) + (4b_0 \zeta^3 + 3b_1 \zeta^2 + 2b_2 \zeta + 1) \omega - (4b_0 \zeta + 6b_1) \omega^3 = 0.$$



Отсюда находим:

$$kq(a, \omega, \zeta) = f_1(\omega, \zeta), \quad kq'(a, \omega, \zeta) = f_2(\omega, \zeta). \quad (20.51)$$

Будем задаваться разными значениями  $\zeta$  и  $\omega$  и строить на основании уравнений (20.51) линии равных значений  $\zeta$  и  $\omega$  на плоскости координат  $k, a$  (рис. 20.14). Для этого для заданных  $\zeta, \omega$  сначала строится кривая отношения  $q(a)/q'(a)$  (рис. 20.15). Согласно (20.51) это отношение должно быть равно определенному числу:  $q(a)/q'(a) = f_1/f_2$ , чем определится значение  $a$  (рис. 20.15) для данных  $\zeta, \omega$ . После этого для них вычисляется значение  $k = f_1/q$ . Таким путем по точкам строится вся диаграмма качества нелинейного переходного процесса (рис. 20.14). Линия  $\zeta = 0$  соответствует зависимости амплитуды установившихся автоколебаний от коэффициента усиления  $k$ .

При любом заданном  $k$  изменение показателя затухания  $\zeta$  и изменение частоты  $\omega$  во время переходного процесса определится прямой  $k = \text{const}$  (рис. 20.14, пунктир). Результат показан на рис. 20.16. Это позволяет судить о быстроте затухания и о количестве колебаний за время переходного процесса.

Заметим, что решение задачи несколько упростится при малом  $\zeta$ . В этом случае, считая постоянные времени измерителей  $T_1$  и  $T_2$  достаточно малыми, можем пренебречь произведениями  $T_1\zeta$  и  $T_2\zeta$  в выражениях (20.50) и пользоваться прежними выражениями  $q$  и  $q'$  (18.151) с подстановками (18.151) и (18.152). Кроме того, в написанных выше выражениях для  $X$  и  $Y$  нужно сохранить только первую степень  $\zeta$ :

$$X = kq(a, \omega) + \zeta - (3b_1\zeta + 2b_2)\omega^2 + b_0\omega^4 = 0;$$

$$Y = kq'(a, \omega) + (2b_2\zeta + 1)\omega - (4b_0\zeta + 6b_1)\omega^3 = 0.$$

В принципе решение не меняется. Изложенный метод решения задачи отличается тем, что он одинаково пригоден к различным системам, описываемым уравнениями любого порядка, и не связан с построением годографов на комплексной плоскости.

Более подробно применение логических устройств, нелинейных алгоритмов управления и нелинейных корректирующих средств рассмотрено в работах [74, 75, 94] и др.

## Глава 21

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### § 21.1. Симметричные одночастотные вынужденные колебания

Проблема анализа вынужденных колебаний нелинейных систем вообще является весьма сложной и многообразной. Поскольку принцип наложения решений (суперпозиция) здесь неприменим, то, вообще говоря, нельзя складывать частные решения при различных внешних воздействиях, найденных по отдельности, а также складывать свободные и вынужденные колебания. Особое нелинейное сложение решений возможно в случае, если решения разделяются по степени медленности протекания их во времени

(т. е. по значению возможных частот колебаний), аналогично тому, как это делалось в главе 19. При этом каждое из складываемых решений существенно зависело от другого, а именно амплитуда автоколебаний существенно зависела от величины смещения, характеризующей медленно протекающие процессы. Такого же рода разделение решений для вынужденных колебаний будет рассмотрено ниже, где появится возможность рассмотрения нелинейных двухчастотных колебаний с большой разностью частот.

Не касаясь сложных форм вынужденных колебаний нелинейных систем (хотя их исследование также имеет большое практическое значение), ограничимся в данном параграфе определением одночастотных вынужденных колебаний, когда колебания системы происходят с частотой внешнего периодического воздействия. Форма колебаний, как и прежде, на основании свойства фильтра будет считаться близкой к синусоидальной для переменной  $x$ , стоящей под знаком нелинейной функции. При рассмотрении вынужденных колебаний во многих случаях возникают ограничения, накладываемые на амплитуду и частоту внешнего периодического воздействия (зависящие также и от параметров системы) и обуславливающие существование одночастотных вынужденных колебаний в нелинейной системе. Будем их кратко называть *условиями захватывания* (в указанном широком смысле). Особое значение эти условия приобретают для автоколебательных систем при частотах, близких к частоте автоколебаний и выше.

Итак, пусть имеется некоторая нелинейная автоматическая система, в любом месте которой приложено внешнее синусоидальное воздействие

$$f(t) = B \sin \omega_b t, \quad (21.1)$$

Пусть уравнение динамики системы приведено к виду

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t) \quad (21.2)$$

Выполнение условий фильтра (§ 18.2), а также выводимых ниже условий захватывания (где это необходимо) позволяет в первом приближении искать решение для установившихся вынужденных колебаний системы в синусоидальной форме

$$x = a_b \sin(\omega_b t + \varphi), \quad (21.3)$$

где искомыми неизвестными постоянными будут амплитуда  $a_b$  и сдвиг фазы  $\varphi$ , в то время как частота  $\omega_b$  здесь уже задана выражением (21.1). В отличие от такой типичной постановки задачи можно будет, конечно, в дальнейшем решать и обратную задачу определения потребной частоты  $\omega_b$  или амплитуды  $B$  внешнего воздействия по заданной амплитуде вынужденных колебаний  $a_b$  и т. п.

Чтобы иметь возможность применить тот же общий подход к решению задачи, который был принят при отыскании автоколебаний, выразим в уравнении (21.2) переменную  $f$  через  $x$ . Согласно (21.1)

$$f(t) = B \sin[(\omega_b t + \varphi) - \varphi] = B \cos \varphi \sin(\omega_b t + \varphi) - B \sin \varphi \cos(\omega_b t + \varphi).$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (21.3) для  $x$  и выражение для его производной

$$px = a_b \omega_b \cos(\omega_b t + \varphi),$$

окончательно получаем

$$f(t) = \frac{B}{a_B} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) x. \quad (21.4)$$

Подставив это выражение в заданное дифференциальное уравнение системы (21.2), получим

$$\left[ Q(p) - S(p) \frac{B}{a_B} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_B} p \right) \right] x + R(p) F(x, px) = 0. \quad (21.5)$$

Таким образом, неоднородное нелинейное уравнение (21.2) при заданном внешнем воздействии (21.1) и предполагаемой форме решения (21.3) сведено к однородному нелинейному уравнению (21.5), содержащему добавочный член в левой части. Уравнение (21.5) аналогично прежнему уравнению (§ 18.2) и отличается от него только заменой операторного многочлена  $Q(p)$  на новый операторный многочлен, стоящий в (21.5) в квадратных скобках. Применяя при отыскании синусоидального периодического решения формально тот же метод, что и в главе 18, нужно потребовать выполнения свойства фильтра от этой новой системы.

Заданная нелинейность  $F(x, px)$  должна допускать симметричные колебания, т. е. должно выполняться условие

$$\int_0^{2\pi} F(a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) d\psi = 0. \quad (21.6)$$

Итак, получив для определения вынужденных колебаний однородное уравнение (21.5), можно, как и в § 18.2, произвести гармоническую линеаризацию нелинейности

$$F(x, px) = qx + \frac{q'}{\omega_B} px, \quad (21.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a_B} \int_0^{2\pi} F(a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a_B} \int_0^{2\pi} F(a_B \sin \psi, a_B \omega_B \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

причем согласно (21.3)

$$\psi = \omega_B t + \varphi, \quad (21.9)$$

что, однако, не влияет на результат вычисления  $q$  и  $q'$ . Поэтому при определении симметричных однозначных вынужденных колебаний можно целиком пользоваться гото-



выми выражениями для  $q$  и  $q'$ , приведенными в главе 18, с заменой в них  $a, \omega$  на  $a_b, \omega_b$ . Таким образом, для каждой нелинейности в общем случае получаются зависимости

$$q(a_b, \omega_b), \quad q'(a_b, \omega_b), \quad (21.10)$$

а во многих частных случаях (см. главу 18) —

$$q(a_b), \quad q'(a_b). \quad (21.11)$$

В результате из (21.5) и (21.7) получаем характеристическое уравнение для первого приближения

$$Q(p) - S(p) \frac{B}{a_b} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_b} p \right) + R(p) \left( q + \frac{q'}{\omega_b} p \right) = 0. \quad (21.12)$$

Подставляя сюда чисто мнимое значение  $p = j\omega_b$ , что соответствует отысканию синусоидального решения (21.3), получаем

$$Q(j\omega_b) - S(j\omega_b) \frac{B}{a_b} (\cos \varphi - j \sin \varphi) + R(j\omega_b)(q + jq') = 0. \quad (21.13)$$

Замечая, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

из уравнения (21.13) находим, что

$$a_b \frac{Q(j\omega_b) + R(j\omega_b)(q + jq')}{S(j\omega_b)} = B e^{-j\varphi}. \quad (21.14)$$

Возможны два метода дальнейшего решения задачи. Эти методы остаются справедливыми и для нелинейных систем с временным запаздыванием  $\tau$ , когда выражение (21.14) принимает вид

$$a_b \frac{Q(j\omega_b) + R(j\omega_b)(q + jq') e^{-j\tau\omega_b}}{S(j\omega_b)} = B e^{-j\varphi} \quad (21.15)$$

или другой аналогичный вид, содержащий  $\tau$ .

**Графический метод.** Для каждого значения частоты при заданных параметрах системы на комплексной плоскости строится кривая (рис. 21.1)

$$Z(a_b) = a_b \frac{Q(j\omega_b) + R(j\omega_b)(q + jq')}{S(j\omega_b)}. \quad (21.16)$$

Эта кривая соответствует левой части равенства (21.14)<sup>1</sup>. Правая же часть (21.14) изобразится в виде окружности радиуса  $B$ . Пересечение ее с кривой  $Z(a_b)$  дает решение задачи, причем в точке пересечения по дуге окружности определяется фазовый сдвиг  $\varphi$ , а по кривой  $Z(a_b)$  — величина амплитуды  $a_b$  вынужденных колебаний.

<sup>1</sup> Аналогично решается задача и в случае выражения (21.15).

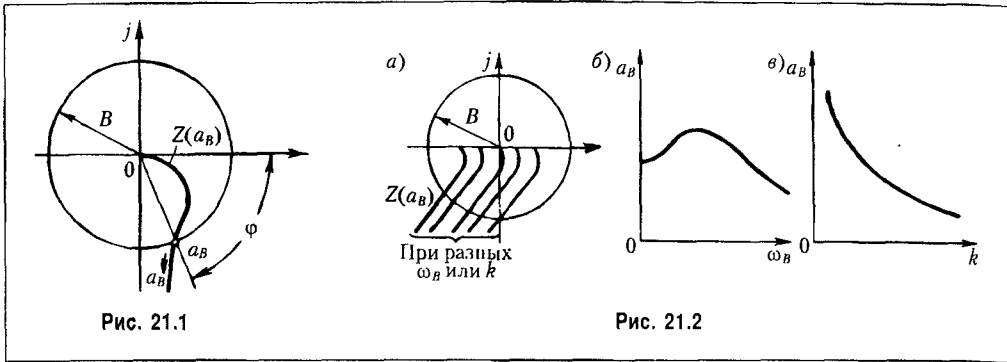


Рис. 21.1

Рис. 21.2

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $a_v$  от частоты  $\omega_v$  (рис. 21.2, б) можно получить, если на рис. 21.1 начертить серию кривых  $Z(a_v)$  при разных постоянных значениях  $\omega_v$  (рис. 21.2, а). Таким же путем, строя кривые  $Z(a_v)$  при разных постоянных значениях какого-нибудь параметра  $k$  (рис. 21.2, а), можно определить зависимость  $a_v$  от любого параметра системы  $k$  (рис. 21.2, в), входящего в выражение (21.16) для  $Z(a_v)$ .

Для отыскания зависимости  $a_v$  от амплитуды внешнего воздействия  $B$  нужно нанести серию концентрических окружностей разных радиусов  $B$  (рис. 21.3, а). При этом возможны два случая: 1) когда имеется точка пересечения окружности с кривой  $Z(a_v)$  при любой величине радиуса  $B$ , начиная от нуля, что дает зависимость  $a_v(B)$ , например, в виде рис. 21.3, б; 2) когда точка пересечения окружности с кривой  $Z(a_v)$  существует только при значениях радиуса  $B$ , превышающих некоторое пороговое значение  $B_{пор}$  (рис. 21.3, а), что приводит к зависимости  $a_v(B)$  типа рис. 21.3, в.

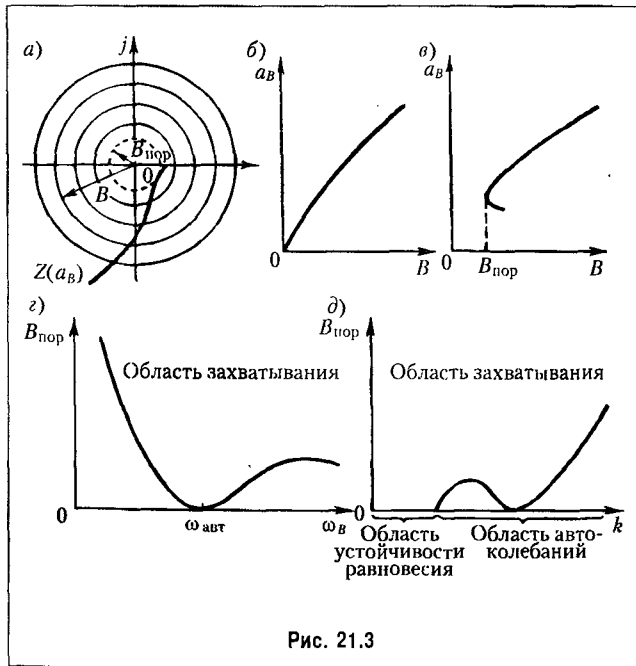


Рис. 21.3

Графическое определение  $B_{пор}$  ясно из чертежа. Можно построить зависимость пороговой амплитуды  $B_{пор}$  внешнего воздействия от частоты  $\omega_v$  при заданных параметрах системы (рис. 21.3, з) или от любого параметра  $k$  при данной частоте  $\omega_v$  (рис. 21.3, д). Последнюю зависимость можно найти с помощью рис. 21.3, а, построенного для серии кривых  $Z(a_v)$ , соответствующих различным  $k$ .

Рассмотренный второй случай, когда система перехо-

лит на одночастотные колебания с частотой  $\omega_b$  только при  $B > B_{\text{пор}}$ , наблюдается чаще всего в таких нелинейных системах, которые до приложения внешнего периодического воздействия работают в автоколебательном режиме. При этом величина  $B_{\text{пор}}$  обращается в нуль в том случае, когда частота  $\omega_b$  совпадает с частотой автоколебаний  $\omega_{\text{н}}$  данной системы (рис. 21.3, з).  $B_{\text{пор}}$  равно нулю обычно также в области отсутствия автоколебаний (область устойчивости равновесия системы, рис. 21.3, д).

Тогда выше кривых на рис. 21.3, з, д будут лежать значения амплитуды  $B$  внешнего воздействия, при которых существует одночастотный режим вынужденных колебаний с частотой  $\omega_b$  (область захватывания), а при значениях, лежащих ниже кривой, будет иметь место более сложное вынужденное движение системы. Это и является определением (пока графическим) условий захватывания, о которых говорилось выше.

В других нелинейных системах может быть  $B_{\text{пор}} = 0$ , как в случае рис. 21.3, б.

**Аналитический метод.** Из равенства (21.14) или (21.15) можно получить аналитические выражения для определения амплитуды  $a_b$  и сдвига фазы  $\varphi$  одночастотных вынужденных колебаний нелинейной системы. Для этого выделим вещественные и мнимые части числителя и знаменателя и запишем равенства для модулей и аргументов обеих частей уравнения (21.14) или (21.15):

$$a_b^2 \frac{X^2(a_b, \omega_b) + Y^2(a_b, \omega_b)}{X_S^2(\omega_b) + Y_S^2(\omega_b)} = B^2, \quad (21.17)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{Y(a_b, \omega_b)}{X(a_b, \omega_b)} + \arctg \frac{Y_S(\omega_b)}{X_S(\omega_b)}, \quad (21.18)$$

где  $X$  и  $Y$  — вещественная и мнимая части числителя выражения (21.14) или (21.15);  $X_S$  и  $Y_S$  — вещественная и мнимая части знаменателя, т. е.  $S(j\omega_b)$ . При этом  $X$  и  $Y$  соответствуют левой части заданного нелинейного уравнения (21.2), т. е. являются теми же самыми выражениями  $X$  и  $Y$ , которые применялись при исследовании автоколебаний (§ 18.2), а  $X_S$  и  $Y_S$  являются новыми выражениями, соответствующими правой части заданного нелинейного уравнения (21.2).

Как видим, выражение (21.17) может, вообще говоря, оказаться довольно сложным алгебраическим уравнением относительно  $a_b$ . Однако важно то, что это уравнение содержит лишь одну неизвестную  $a_b$ , которая, следовательно, так или иначе может быть определена. После этого фазовый сдвиг  $\varphi$  легко вычисляется по формуле (21.18). Напомним, что и при отыскании автоколебаний (глава 18) часто получалось сложное относительно  $a$  уравнение, но это не вызывало больших затруднений. Действительно, в большинстве случаев интересуются тем, как будет изменяться амплитуда вынужденных колебаний  $a_b$  в зависимости от частоты и амплитуды внешнего воздействия, а также при изменении того или иного параметра системы. Указанные параметры могут входить в уравнение (21.17) более простым образом, чем амплитуда  $a_b$ . Тогда уравнение (21.17) можно будет разрешить в явном виде относительно любого из этих параметров, а затем, задаваясь разными значениями  $a_b$  и вычисляя по найденной формуле рассматриваемый параметр, можно построить искомые зависимости  $a_b(B)$ ,  $a_b(\omega_b)$  или  $a_b(k)$  и т. п.; затем по формуле (21.18) можно также вычислить для каждого случая фазовый сдвиг  $\varphi$ .

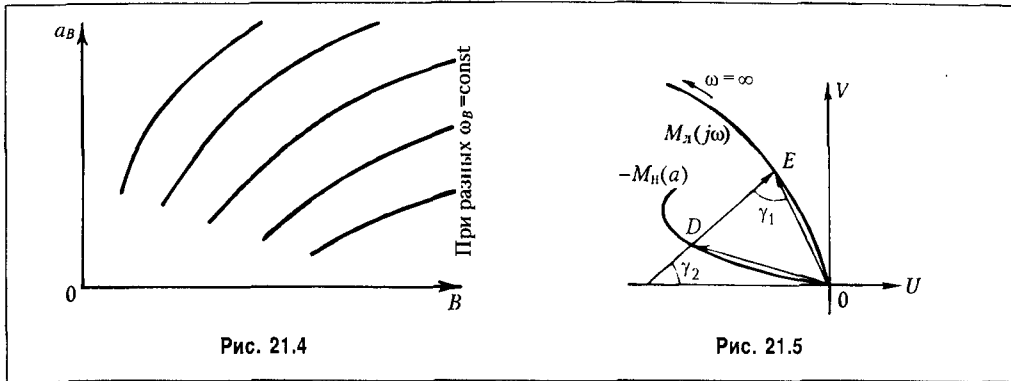


Рис. 21.4

Рис. 21.5

Например, возможен следующий простой прием решения уравнения (21.17). Для каждой заданной частоты внешнего воздействия  $\omega_b$  будем задаваться разными значениями  $a_b$  и вычислять каждый раз величину  $B$ . По результатам этих вычислений легко строится график (рис. 21.4), который и представляет собой искомое решение уравнения (21.17).

Что касается условия захватывания, то оно может быть определено аналитически как условие существования вещественного положительного решения для  $a_b$  в уравнении (21.17). Это условие автоматически выявится при построении графика типа рис. 21.4.

Итак, получены амплитуда  $a_b$  и сдвиг фазы  $\varphi$  вынужденных колебаний для переменной  $x$ , стоящей под знаком нелинейной функции. После этого можно подсчитать амплитуду и фазу первой гармоники вынужденных колебаний для любой другой переменной исследуемой системы на основании соответствующих уравнений или передаточных функций звеньев, связывающих эту переменную с переменной  $x$ .

**Частотный метод.** Пусть нелинейное звено в системе определяется уравнением

$$y = F(x). \tag{21.19}$$

Находим для него приближенную амплитудно-фазовую характеристику  $W_n(a)$  согласно формулам (18.210) и (18.211). Рассмотрим два случая.

**Первый случай.** Передаточная функция  $x/f$ , замкнутой системы такова, что

$$\frac{x}{f} = \frac{1}{1 + W_n(j\omega)W_n(a)} = \frac{M_n(j\omega)}{M_n(j\omega) + W_n(a)}, \tag{21.20}$$

где  $M_n(j\omega) = \frac{1}{W_n(j\omega)}$  — обратная амплитудно-фазовая характеристика линейной части.

Изобразим характеристики  $M_n(j\omega)$  и  $-W_n(a)$  на комплексной плоскости (рис. 21.5). Амплитуда  $a_b$  вынужденных колебаний величины  $x$  определяет точку  $D$ , а частота  $\omega_b$  — точку  $E$ . Из формулы (21.20) и из чертежа (рис. 21.5) находим

$$\frac{a_b}{B} = \frac{|M_n(j\omega_b)|}{|M_n(j\omega_b) + W_n(a)|} = \frac{OE}{DE},$$

откуда амплитуда  $B$  внешнего периодического воздействия  $f$  получает значение

$$B = \frac{DE}{OE} a_B. \quad (21.21)$$

Перемещая точку  $D$  вдоль кривой  $-W_{II}(a)$ , можно найти зависимость величины  $a_B$  от  $B$  при заданной частоте  $\omega_B$ , а перемещая точку  $E$  — зависимость величины  $a_B$  от частоты  $\omega_B$ .

Второй случай. Передаточная функция  $x/f$  замкнутой системы такова, что

$$\frac{x}{f} = \frac{W_I(j\omega)}{1 + W_I(j\omega)W_{II}(a)} = \frac{1}{M_I(j\omega) + W_{II}(a)}. \quad (21.22)$$

Тогда на основании этой формулы и чертежа (рис. 21.5) получаем

$$\frac{a_B}{B} = \frac{1}{|M_I(j\omega) + W_{II}(a)|} = \frac{1}{DE},$$

откуда

$$B = DEa_B. \quad (21.23)$$

В других случаях, когда передаточная функция не подходит под частные виды (21.20) и (21.22), построения усложняются.

## § 21.2. Несимметричные вынужденные колебания с медленно меняющейся составляющей

Вынужденные колебания будут несимметричными в следующих случаях:

- 1) при несимметричных нелинейных характеристиках системы;
- 2) при наличии постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия (в статических системах);
- 3) при наличии постоянной или медленно меняющейся скорости изменения внешнего воздействия (в астатических системах).

В общем случае будем полагать, что к нелинейной системе приложены два внешних воздействия, вследствие чего ее уравнение вместо (21.2) имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S_1(p)f_1(t) + S_2(p)f_2(t), \quad (21.24)$$

причем  $f_1(t)$  — медленно меняющееся внешнее воздействие, а  $f_2(t)$  — периодическое внешнее воздействие:

$$f_2(t) = B \sin \omega_B t. \quad (21.25)$$

Медленно меняющееся воздействие  $f_1(t)$  считается мало изменяющимся за период  $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$ , т. е. предполагается, что возможные частоты изменения  $f_1(t)$  значительно ниже частоты  $\omega_B$ .

Решение уравнения (21.24) будем искать в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = a_b \sin(\omega_b t + \varphi), \quad (21.26)$$

где  $x^0$  — медленно меняющаяся составляющая, а  $x^*$  — колебательная составляющая, амплитуда  $a_b$  и фаза  $\varphi$  которой в общем случае тоже медленно изменяются во времени.

Тогда гармоническая линеаризация нелинейности  $F(x, px)$  может производиться по формуле, аналогичной (19.5):

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega_b} px^*, \quad (21.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a_b \sin \psi, a_b \omega_b \cos \psi) d\psi; \\ q &= \frac{1}{\pi a_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a_b \sin \psi, a_b \omega_b \cos \psi) \sin \psi d\psi; \\ q' &= \frac{1}{\pi a_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a_b \sin \psi, a_b \omega_b \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (21.28)$$

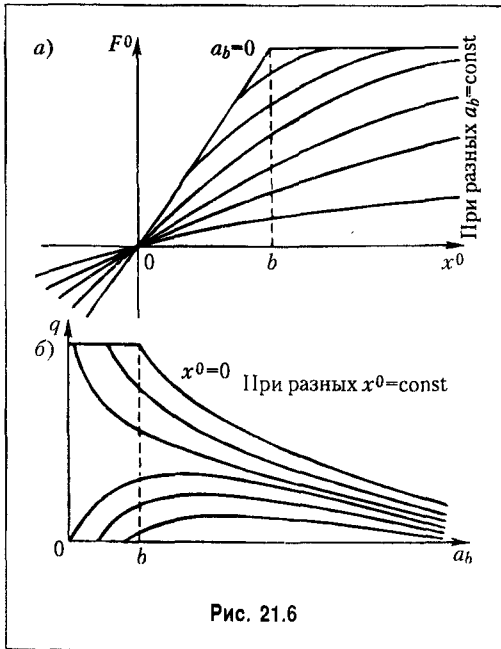


Рис. 21.6

причем  $\psi = \omega_b t + \varphi$ . Из сравнения этих формул с (19.6) видно, что при отыскании вынужденных колебаний можно целиком пользоваться всеми конкретными выражениями для  $F^0$ ,  $q$  и  $q'$ , приведенными в главе 19. Таким образом, для каждой конкретной нелинейности имеются готовые выражения:

$$\left. \begin{aligned} F^0(x^0, a_b, \omega_b), \quad q(x^0, a_b, \omega_b), \\ q'(x^0, a_b, \omega_b), \end{aligned} \right\} \quad (21.29)$$

причем часто величина  $\omega_b$  в них отсутствует. В качестве примера на рис. 21.6 приведены эти зависимости для нелинейности типа насыщения, аналогичные приведенным в главе 19.

По аналогии с формулой (21.4) запишем

$$f_2 = \frac{B}{a_b} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_b} p \right) x^*. \quad (21.30)$$

Подставив выражения для  $F(x, px)$ ,  $f_2(t)$  и  $x$  в заданное дифференциальное уравнение нелинейной системы (21.24), получим уравнение

$$\begin{aligned} Q(p)(x^0 + x^*) + R(p)\left(F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega_b} px^*\right) = \\ = S_1(p)f_1(t) + S_2(p)\frac{B}{a_b}\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\omega_b}p\right)x^*, \end{aligned}$$

которое разбивается нелинейным образом (см. главу 19) на два уравнения соответственно для медленно меняющихся и для колебательных составляющих:

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = S_1(p)f_1(t); \quad (21.31)$$

$$\left[Q(p) + S_2(p)\frac{B}{a_b}\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\omega_b}p\right)\right]x^* + R(p)\left(q + \frac{q'}{\omega_b}p\right)x^* = 0. \quad (21.32)$$

Оба уравнения содержат все три неизвестные  $a$ ,  $\varphi$  и  $x^0$ .

Второе из этих уравнений совпадает с прежним уравнением (21.5), но только с иными коэффициентами гармонической линеаризации  $q$  и  $q'$ , зависящими от величины смещения  $x^0$ . Поэтому уравнение (21.32) до конца решается только совместно с уравнением (21.31), хотя, как будет видно из дальнейшего, возможны и более простые случаи. Пока же можно, написав характеристическое уравнение вида (21.12), после подстановки  $p = j\omega_b$  привести уравнение (21.32) к следующему:

$$a_b \frac{Q(j\omega_b) + R(j\omega_b)(q + jq')}{S_2(j\omega_b)} = Be^{-j\varphi}, \quad (21.33)$$

в результате решения которого любым из двух методов (графическим или аналитическим), описанных в § 21.1, определяются зависимости амплитуды  $a_b$  и сдвига фазы  $\varphi$  от величины смещения  $x^0$ . т. е.

$$a_b(x^0, \omega_b, B), \quad \varphi(x^0, \omega_b, B), \quad (21.34)$$

где  $x^0$  остается пока еще неизвестным.

Для применения графического метода § 21.1 к отысканию зависимости  $a_b(x^0)$  по уравнению (21.33) нужно на рис. 21.1 построить серию кривых  $Z(a_b)$  для разных значений  $x^0 = \text{const}$ , которые согласно (21.28) входят в выражения для  $q$  и  $q'$ . Уравнение аналитического метода (21.17) примет вид

$$a_b^2 = \frac{X_2^2(\omega_b) + Y_2^2(\omega_b)}{X^2(\omega_b, a_b, x^0) + Y^2(\omega_b, a_b, x^0)} B^2, \quad (21.35)$$

где  $X_2$ ,  $Y_2$  и  $X$ ,  $Y$  обозначают вещественные и мнимые части соответственно для выражения  $S_2(j\omega_b)$  и выражения

$$Q(j\omega_b) + R(j\omega_b)[q(a_b, \omega_b, x^0) + jq'(a_b, \omega_b, x^0)].$$

Уравнение (21.35) не решается так просто, как (21.17). Однако можно применить следующий графический прием его решения. Разбив (21.35) на два уравнения:

$$a_B^2 = \zeta;$$

$$\frac{X_2^2(\omega_B) + Y_2^2(\omega_B)}{X^2(\omega_B, a_B, x^0) + Y^2(\omega_B, a_B, x^0)} B^2 = \zeta,$$

построим по первому из них на плоскости  $(\zeta, a_B)$  кривую 1 (рис. 21.7), а по второму – серию кривых 2 для разных значений  $x^0 = \text{const}$  при заданных  $B$  и  $\omega_B$ . Переносим полученные точки пересечения кривых вправо на плоскость  $x^0, a_B$ , получаем сразу искомую зависимость  $a_B(x^0)$  для заданного внешнего периодического воздействия, т. е. для заданной пары значений  $B$  и  $\omega_B$ . Эту зависимость легко получить таким же путем и для любых других заданных  $B$  и  $\omega_B$ .

Подставив теперь значение амплитуды  $a_B$  в первое из выражений (21.29), найдем функцию смещения в виде

$$F^0 = \Phi(x^0, \omega_B, B), \quad (21.36)$$

которая является характеристикой данного нелинейного звена системы по отношению к медленно меняющимся составляющим переменных  $F$  и  $x$ . Эти медленно меняющиеся составляющие определяются затем путем решения дифференциального уравнения (21.31), в которое надо подставить найденную функцию смещения (21.36).

Независимость очертания функции смещения  $\Phi(x^0)$  от характера изменения и места приложения медленно меняющихся внешних воздействий здесь остается в силе, как было и при автоколебаниях (глава 19).

Однако принципиальным отличием функции смещения (21.36), определяющей прохождение медленно меняющихся сигналов через нелинейную систему при наличии вынужденных колебаний, от функции смещения (19.13) при автоколебаниях является существенная зависи-

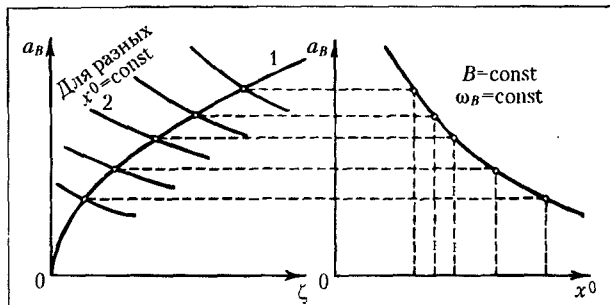


Рис. 21.7

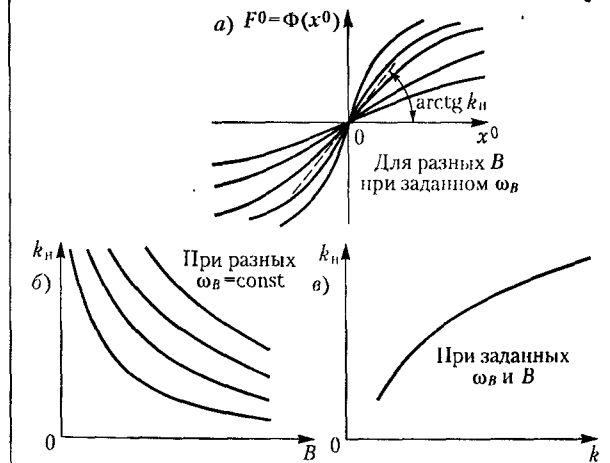


Рис. 21.8



мость ее от частоты и амплитуды внешнего периодического воздействия (в то время как при автоколебаниях вид функции смещения зависит только от структуры и от соотношения параметров самой системы).

В результате для каждой заданной частоты вынужденных колебаний  $\omega_b$  получается серия кривых  $F^0 = \Phi(x^0)$  для разных значений амплитуды  $B$  внешнего периодического воздействия  $f_2(t)$ , как показано, например, на рис. 21.8, а. При заданных  $\omega_b$  и  $B$  получается вполне определенное очертание функции смещения  $\Phi(x^0)$ , зависящее только от структуры и параметров самой системы, входящих в уравнение (21.33).

Здесь, так же как и в главе 19, возможен и второй метод отыскания функции смещения. При этом методе попутно определяются также статические и установившиеся ошибки. Метод состоит в следующем.

Поскольку функция смещения  $F^0 = \Phi(x^0)$  не зависит от характера изменения и места приложения медленно меняющихся воздействий, то ее можно определить для простейшего случая  $f_1 = \text{const} = f_1^0$  (или при астатической системе для  $pf_1 = \text{const} = g_1^0$ ). Тогда уравнение (21.31) принимает вид

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = M^0, \quad (21.37)$$

где  $M^0 = S_1(0)f_1^0$  или для астатических систем

$$M^0 = \left. \frac{S_1 p}{p} \right|_{p=0} g_1^0.$$

Используя первое выражение из (21.29), т. е. (при заданной частоте  $\omega_b$ )

$$F^0(x^0, a_b), \quad (21.38)$$

из уравнения (21.37) находим

$$x^0(a_b, M^0). \quad (21.39)$$

Подставив это в выражения для  $q$  и  $q'$ , определяемые второй и третьей из формул (21.29), получим зависимости

$$q(a_b, M^0) \quad \text{и} \quad q'(a_b, M^0).$$

Вводя их в уравнение (21.33), эквивалентное (21.32), и решая его любым из двух способов, указанных выше, при заданных  $B$  и  $\omega_b$  находим амплитуду вынужденных колебаний  $a_b(M^0)$ . Подставляя  $a_b(M^0)$  в (21.38) и (21.39), получаем зависимости

$$F^0(x^0, M^0) \quad \text{и} \quad x^0(M^0). \quad (21.40)$$

Эти зависимости представляют самостоятельный интерес, так как ими определяется статическая ошибка (а для астатической системы — установившаяся ошибка при постоянной скорости) нелинейной системы по медленно меняющейся составляющей, на которую накладывается еще установившаяся периодическая ошибка вынужденных колебаний с амплитудой  $a_b(M^0)$ . Все эти ошибки определяются, как видим, в зависимости от величины постоянной правой части  $M^0$  уравнения (21.37), т. е. от величины

внешнего воздействия (постоянного и равного  $f_1^0$  или меняющегося с постоянной скоростью  $g_1^0$ ). Но, кроме того, что очень важно для нелинейных систем, величина статического отклонения  $x^0$  ( $M^0$ ) может существенно зависеть от амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_b$  внешнего периодического воздействия, так как выражения (21.40) выводились с помощью уравнения (21.33), в которое входят  $B$  и  $\omega_b$ . В свою очередь амплитуда вынужденных колебаний  $a_b$  зависит через  $M^0$  от величины постоянного внешнего воздействия. Это яркий пример неприменимости принципа суперпозиции для нелинейных систем и в то же время иллюстрация достоинства развиваемого здесь метода, который позволяет это уловить, несмотря на приближенность решения задачи.

Далее, исключая из выражений (21.40) величину  $M^0$ , находим функцию смещения  $F^0 = \Phi(x^0)$  для заданных  $B$  и  $\omega_b$  (рис. 21.8, а).

Итак, наличие в нелинейной системе вынужденных колебаний с частотой внешнего периодического воздействия приводит к эффекту вибрационного сглаживания нелинейности, как и при автоколебаниях. При этом согласно (21.31) для медленно протекающих процессов в условиях вынужденных вибраций исходное дифференциальное уравнение системы (21.24) заменяется уравнением

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = F_1(p)f_1(t), \quad (21.41)$$

т. е. заданная нелинейность  $F(x, px)$  заменяется функцией смещения  $\Phi(x^0)$  и отбрасывается внешнее периодическое воздействие  $f_2(t)$ , по сравнению с которым  $f_1(t)$  является медленно меняющимся.

Функция смещения  $\Phi(x^0)$  обычно на определенном участке изменения величины  $x^0$  изображается однозначной плавной кривой (рис. 21.8, а), в то время как заданная нелинейность  $F(x, px)$  или  $F(x)$  может быть скачкообразной (релейной), петлевой, с зоной нечувствительности и т. п. Этот эффект сглаживания характеристики нелинейного звена позволяет, следовательно, ликвидировать влияние вредных гистерезисных петель, зоны нечувствительности, эффекта сухого трения и пр. по отношению к медленно меняющимся сигналам. В некоторых же случаях вибрационное сглаживание может оказаться отрицательным явлением, как было в случае рис. 19.8, где получался эффект снижения коэффициента усиления. Кроме этих явлений, аналогичных вибрационному сглаживанию при автоколебаниях, здесь появляются и принципиально новые явления вследствие зависимости характеристики  $\Phi(x^0)$  от  $B$  и  $\omega_b$ , что будет подробнее рассмотрено ниже.

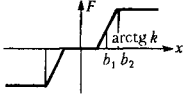
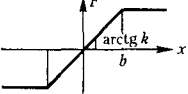
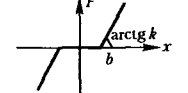
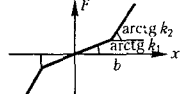
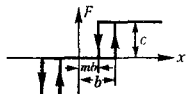
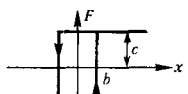
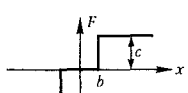
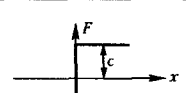
Плавность функции смещения  $\Phi(x^0)$  (рис. 21.8, а) позволяет произвести обычную линеаризацию, а именно на некотором участке вблизи начала координат можно принять

$$F^0 = k_{11}x^0, \quad (21.42)$$

где

$$k_{11} = \left( \frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0}. \quad (21.43)$$

Таблица 21.1. Нелинейные коэффициенты усиления

№ п/п	Форма нелинейности	Выражение $k_{н}(a_{в})$
1		$k_{н} = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b_2}{a_{в}} - \arcsin \frac{b_1}{a_{в}} \right)$
2		$k_{н} = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_{в}}$
3		$k_{н} = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_{в}}$
4		$k_{н} = k_2 - \frac{2(k_2 - k_1)}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_{в}}$
5		$k_{н} = \frac{c}{\pi a_{в}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a_{в}}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mb}{a_{в}}\right)^2}} \right]$
6		$k_{н} = \frac{2c}{\pi a_{в}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a_{в}^2}}}$
7		$k_{н} = \frac{2c}{\pi a_{в}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a_{в}^2}}}$
8		$k_{н} = \frac{2c}{\pi a_{в}}$

Тогда все медленно протекающие процессы в данной нелинейной системе можно будет рассчитывать не по уравнению (21.41), а по линейному уравнению

$$[Q(p) + k_{н}R(p)]x^0 = S_1(p)f_1(t). \quad (21.44)$$

При этом очень существенно то, что коэффициент усиления  $k_{н}$  (рис. 21.8, а) будет зависеть не только от структуры и параметров самой системы, как было при автоколебаниях, но также и от амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_{в}$  внешнего периодического воздействия, которые могут меняться в известных пределах независимо от самой системы. Поэтому вибрационное сглаживание нелинейных характеристик при помощи вынужденных колебаний обладает значительно большими практическими возможностями, чем при автоколебаниях, и довольно часто применяется в технике, особенно в релейных системах автоматического управления. Однако в некоторых случаях вибрационное сглаживание может приводить к вредным последствиям, вплоть до потери устойчивости системы.

С точки зрения упрощения решения задачи важно иметь в виду, что для всех нечетно-симметричных нелинейностей  $F(x)$ , как однозначных, так и петлевых, вычисление коэффициента  $k_{н}$  при линеаризации функции смещения можно производить, как было показано в § 19.2, не по формуле (21.43), а по более простой формуле:

$$k_{н} = \left( \frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}. \quad (21.45)$$

т. е. непосредственно по первому из выражений (21.29), не определяя вовсе самой функции смещения  $\Phi(x^0)$ . Выражения  $k_{н}(a_{в})$ , найденные по формуле (21.45), для некоторых нелинейностей приведены в табл. 21.1. Геометрически величина  $k_{н}$  будет крутизной кривой  $F^0(x^0)$  в начале координат, например кривой  $F^0(x^0)$  на рис. 21.6, а в начале координат. Чтобы взять при этом определенную кривую из изображенной на рис. 21.6, а серии кривых для различных  $a_{в}$ , нужно предварительно по заданным значениям амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_{в}$  внешнего периодического воздействия найти величину амплитуды вынужденных колебаний  $a_{в}$  при  $x^0 = 0$ . Но эта задача была уже решена в § 21.1, причем результат решения представлен в виде графика рис. 21.4. Следовательно, теперь для подстановки в формулу (21.45) или для рис. 21.6, а нужно взять просто готовые значения  $a_{в}$  из рис. 21.4 для заданных  $B$  и  $\omega_{в}$ .

При этом легко могут быть построены зависимости величины  $k_{н}$  не только от  $B$  и  $\omega_{в}$  (рис. 21.8, б), но также и от любого параметра системы  $k$  (рис. 21.8, в), влияние которого желательно исследовать и от которого зависит амплитуда вынужденных колебаний  $a_{в}$  (рис. 21.2, в), фигурирующая на рис. 21.6, в.

### § 21.3. Зависимость устойчивости и качества нелинейных систем от внешних вибраций

После определения функции смещения  $F^0 = \Phi(x^0)$  открывается возможность исследовать по уравнению (21.41) или по линейному уравнению (21.44) любые медленно меняющиеся процессы в системе.

Устойчивость системы по медленно меняющейся составляющей можно рассматривать тоже путем исследования нелинейного уравнения (21.41) или же линейного уравнения (21.44).

На устойчивость системы существенно может влиять величина амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_B$  внешнего периодического воздействия, так как от них зависят вид функции смещения  $\Phi(x^0)$  и величина коэффициента  $k_{н}$ . Это является совершенно новым и очень важным специфически нелинейным фактором, который в предыдущих главах еще не встречался. В линейных системах такое явление вообще отсутствует.

При использовании линейного уравнения (21.44) можно применять обычные критерии устойчивости линейных систем (Гурвица, Найквиста) и обычные логарифмические частотные характеристики.

При использовании линейного уравнения (21.44) можно применять обычные критерии устойчивости линейных систем (Гурвица, Найквиста) и обычные логарифмические частотные характеристики.

Может оказаться, что область устойчивости системы по какому-либо параметру  $k$  (рис. 21.9, а) сужается, как показано на рис. 21.9, б, при увеличении амплитуды  $B$  внешних помех, имеющих вид вибраций заданной частоты  $\omega_B$ . Вследствие этого для каждого значения  $k$  при данной частоте внешних вибраций может быть свое критическое значение их амплитуды  $B$ , при котором система становится неустойчивой. Аналогично, меняя частоту вибраций  $\omega_B$ , можно определить для заданного значения параметра  $k$  зависимость критической амплитуды внешних вибраций от частоты (рис. 21.9, в) — границу вибрационной помехоустойчивости системы.

Важно при этом иметь в виду, что при изменении параметров системы меняется и коэффициент  $k_{н}$  и очертание функции смещения  $\Phi(x^0)$ . Поэтому, строя области устойчивости системы по какому-нибудь параметру  $k$  (рис. 21.9), нужно соответственно все время менять величину  $k_{н}$  в уравнении (21.44) или  $\Phi(x^0)$  в (21.41), т. е. при построении области устойчивости нужно учитывать, что любой параметр системы  $k$  может входить не только в состав  $R(p)$  и  $Q(p)$ , но также и в состав величины  $k_{н}$ . Зависимость же величины  $k_{н}$  от любого параметра системы нетрудно найти предварительно согласно § 21.2 (см., например, рис. 21.8, в).

Кроме исследования устойчивости нелинейной системы, можно по уравнению (21.41) или (21.44) провести полный анализ всех динамических качеств нелинейной системы, подверженной внешним вибрациям (качество переходных процессов, статические и динамические ошибки), при любых медленно меняющихся по сравнению с вибрациями внешних воздействиях  $f_1(t)$ .

По указанным уравнениям могут определяться и вынужденные колебания системы на низких частотах, если медленно меняющееся воздействие  $f_1(t)$  изменяется периодически, т. е. имеется возможность исследования двухчастотных вынужденных колебаний нелинейной системы при большой разнице частот. Можно и здесь (как в

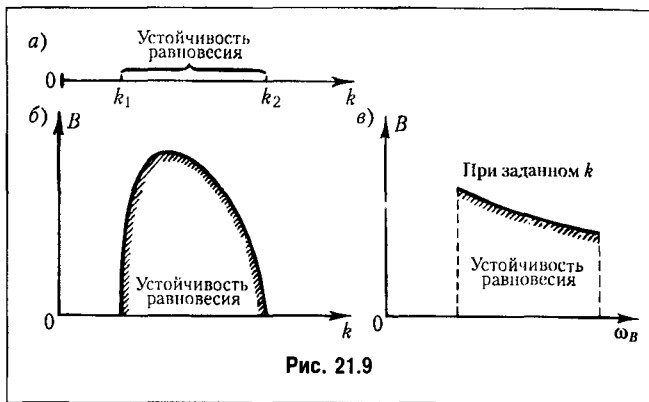


Рис. 21.9

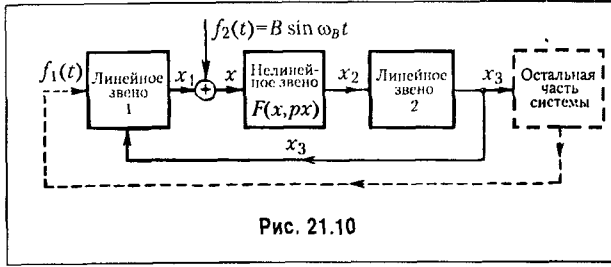


Рис. 21.10

ческих и динамических качеств и даже ее устойчивости от величины амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_b$  внешнего периодического воздействия (вибраций), что в некоторых случаях на практике может оказаться решающим для создания качественной автоматической системы.

Изложенная общая теория поведения нелинейных автоматических систем при наличии внешнего периодического воздействия (вибрации) может значительно упрощаться в различных частных задачах.

Приведем здесь видоизменение этой общей теории для следующих двух наиболее типичных частных задач:

- 1) приложение специального внешнего периодического воздействия с целью вибрационного сглаживания нелинейности (с последующей линеаризацией сглаженной характеристики при расчете системы в целом);
- 2) исследование работы нелинейной автоматической системы при высокочастотных внешних вибрационных помехах, когда не все звенья системы пропускают эти вибрации.

**Задача 1.** Когда в любой автоматической системе прикладывается внешнее периодическое воздействие  $f_2(t)$  (рис. 21.10) специально для того, чтобы произвести вибрационное сглаживание нелинейности, то обязательно ставится условие, чтобы на выходе амплитуда вынужденных колебаний  $x_3$  была практически ничтожной. В результате этого переменные  $x_3$  и  $x_1$  (рис. 21.10) практически не будут содержать колебательной составляющей, а будут определяться через медленно меняющееся воздействие  $f_1(t)$  по уравнениям типа (21.41) или (21.44). Поэтому переменная  $x$  на входе нелинейного звена будет

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = B \sin \omega_b t. \quad (21.46)$$

Следовательно, в данной задаче (вибрационная линеаризация нелинейности при помощи вынужденных колебаний) нет необходимости в решении уравнения (21.32) или (21.33) для определения колебательных составляющих, ибо, согласно (21.26), уже имеется готовое решение

$$a_b = B, \quad \varphi = 0. \quad (21.47)$$

Поскольку внешнее периодическое воздействие  $f_2(t)$  предполагается приложенным к системе непосредственно там же, где и  $x$  (рис. 21.10), то в уравнении (21.24), составленном для исследуемой части системы (не включая пунктирной части на рис. 21.10), будет

$$S_2(p) = Q(p). \quad (21.48)$$

§ 19.2) проводить разделение общего движения нелинейной системы не только на два, но и на три вида по степени медленности движения во времени.

В результате всех перечисленных расчетов будет выявлена специфическая для нелинейных систем зависимость всех статических

На основании (21.47) по первой из формул (21.28) находим

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + B \sin \psi, B \omega_b \cos \psi) d\psi,$$

что и дает искомую сглаженную характеристику. При этом можно воспользоваться для всех типовых нелинейностей готовыми формулами из главы 19 и их графиками типа рис. 21.6, а, заменив везде  $a$  и  $a_b$  на величину  $B$ . Как видим, здесь совершенно отпадает описанное в § 21.2 особое определение функции смещения  $\Phi(x^0)$ .

В результате сглаженная характеристика  $F^0(x^0)$  будет иметь крутизну, зависящую в общем случае от амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_b$  внешних вибраций. Если же имеется нелинейность менее общего вида, а именно  $F(x)$ , то частота  $\omega_b$  не войдет в выражение для  $F^0$ , как, например, в случае рис. 21.6, а. Однако все же и в этом случае нужно потребовать, чтобы частота содержалась в определенных пределах, позволяющих считать воздействие  $f_1(t)$  по сравнению с  $f_2(t)$  медленно меняющимся.

Определив таким образом сглаженную характеристику  $F^0(x^0)$ , можно затем по уравнению типа (21.31) или (21.44) с использованием линеаризации (21.45) исследовать любые медленно протекающие процессы в системе в целом обычными методами теории управления. Заметим, что линеаризация по формуле (21.45) в данной задаче справедлива для любых форм нелинейностей, так как здесь частная производная по  $x^0$  совпадает с полной производной.

Что касается уравнения для колебательных составляющих (21.32) или, что то же самое, (21.33), то его нужно использовать в данной задаче только для определения желательной величины частоты  $\omega_b$  внешнего периодического воздействия  $f_2(t)$ , обеспечивающей возможность получения решения (21.47) для вынужденных колебаний и выполнение сделанного выше предположения о малости вынужденных вибраций на выходе системы  $x_3$ . С этой целью подставим равенства (21.47) и (21.48) в уравнение (21.33). Тогда для удовлетворения последнего уравнения необходимо потребовать, чтобы модуль отношения

$$\left| \frac{R(j\omega_b)}{Q(j\omega_b)} \right|$$

был очень мал. Следовательно, частота внешнего периодического воздействия  $\omega_b$  должна лежать за пределами полосы пропускания всей линейной части рассматриваемого участка системы (блоки 1 и 2).

Кроме того, чтобы амплитуда вынужденных вибраций на выходе системы  $x_3$  была ничтожна, нужно взять частоту  $\omega_b$  также и за пределами полосы пропускания отдельного блока 2 исследуемой системы (рис. 21.10).

**Задача 2.** Пусть на какую-нибудь систему автоматического управления (рис. 21.11) воздействует внешняя вибрационная помеха

$$f_2(t) = B \sin \omega_b t$$

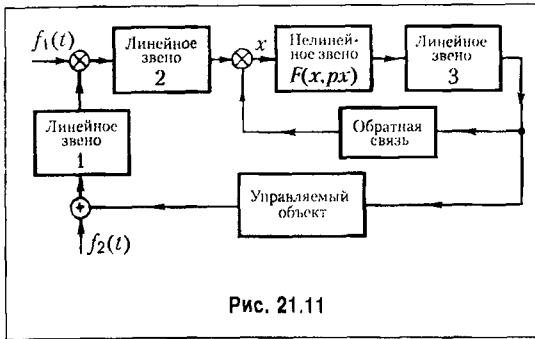


Рис. 21.11

и, кроме того, внешнее задающее или возмущающее воздействие  $f_1(t)$ , которое по отношению к помехе является медленно меняющимся. Уравнение динамики системы приводится к виду (21.24).

Решение уравнения (21.24) ищется в виде (21.26), где  $x^0$  — полезный сигнал управления, а  $x^*$  — вибрационная помеха на входе нелинейного звена. Разбив уравнение (21.24) на два, а именно на (21.31) и (21.33), необходимо, со-

гласно развитому выше общему методу, определить сначала с помощью (21.33) и (21.29) функцию смещения  $F^0 = \Phi(x^0)$ , после чего можно решать дифференциальное уравнение (21.31) относительно переменной  $x^0(t)$  при заданной функции  $f_2(t)$ . Однако в данной задаче этот общий метод решения можно упростить. Рассмотрим два случая.

В том случае, когда вся приведенная линейная часть системы (рис. 21.11), определяемая передаточной функцией

$$W_A(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \tag{21.49}$$

практически не пропускает вибраций с заданной частотой  $\omega_v$ , уравнение (21.33) можно записать в виде

$$a_v = \frac{S_2(j\omega_v)}{Q(j\omega_v)} B e^{-j\varphi}.$$

Тогда амплитуда вибраций на входе нелинейного звена будет определяться формулой

$$a_v^2 = \frac{X_2^2(\omega_v) + Y_2^2(\omega_v)}{X_Q^2(\omega_v) + Y_Q^2(\omega_v)} B^2, \tag{21.50}$$

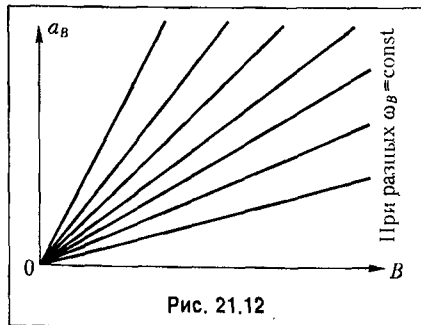


Рис. 21.12

где через  $X_2(\omega_v)$ ,  $Y_2(\omega_v)$  и  $X_Q(\omega_v)$ ,  $Y_Q(\omega_v)$  обозначены вещественные и мнимые части соответственно для выражений  $S_2(j\omega_v)$  и  $Q(j\omega_v)$ .

Формула (21.50) даст линейную зависимость  $a_v(B)$  с разными коэффициентами пропорциональности для разных частот вибраций  $\omega_v$  (рис. 21.12). В частности, для схемы рис. 21.11 они будут определяться структурой линейных блоков 1 и 2.

По сравнению с общей теорией здесь существенно то, что амплитуда вибраций  $a_v$  на входе нелинейного звена в этом случае не зависит от величины  $B$  полезного сигнала  $x^0$ . Поэтому здесь, как



и в задаче 1, отпадает необходимость отыскания функции смещения  $\Phi(x^0)$  и характеристика нелинейного звена по полезному сигналу  $F^0(x^0)$  будет определяться непосредственно первой формулой (21.29), представленной графически, например, на рис. 21.6, а. Однако здесь нужно подставить в выражение  $F^0$  или взять на графике рис. 21.6, а значение  $a_v$ , определяемое по формуле (21.50) или графиком рис. 21.12. Поэтому, в отличие от задачи 1, здесь даже для простейших нелинейностей очертание характеристики нелинейного звена по полезному сигналу  $F^0(x^0)$  и ее крутизна

$$k_{н} = \left( \frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}$$

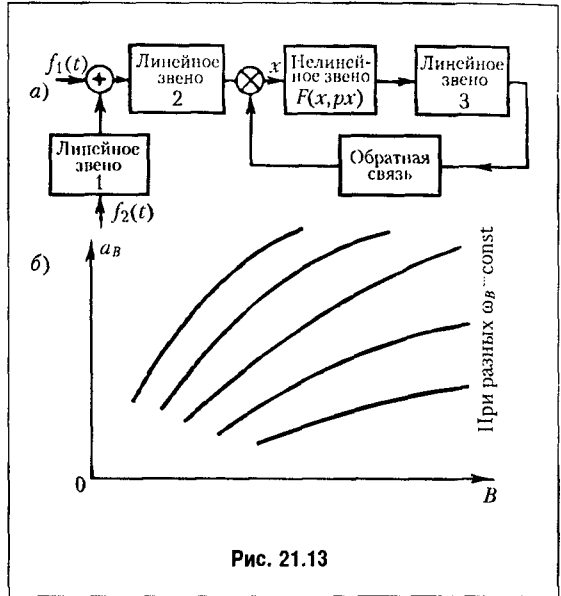


Рис. 21.13

будут зависеть не только от амплитуды  $B$ , но и от частоты  $\omega_v$  вибрационных помех, а также, конечно, и от параметров линейных блоков 1 и 2 (рис. 21.11), входящих в формулу (21.50).

Рассмотрим далее *другой случай*, когда первая гармоника вибраций с заданной частотой  $\omega_v$  пропускается линейной частью системы с передаточной функцией (21.49), но все же не пропускается каким-либо одним блоком системы. Пусть, например, в схеме на рис. 21.11 вибрации не пропускаются вовсе только управляемым объектом, а по внутренней обратной связи первая гармоника вибраций с частотой  $\omega_v$  проходит. Тогда, вообще говоря, уже нельзя не считаться с зависимостью (21.34) амплитуды вибраций  $a_v$  переменной  $x$  от величины полезного сигнала  $x^0$ . Однако и в этом случае возможно упрощение решения задачи по сравнению с общей теорией, состоящее в том, что при определении функции смещения выбрасывается часть системы, не пропускающая вибраций (рис. 21.13, а).

В этом случае нужно записать уравнение динамики только оставшейся части системы (рис. 21.13, а):

$$Q_c(p)x + R_c(p)F(x, px) = S_{1c}(p)f_1(t) + S_{2c}(p)f_2(t), \quad (21.51)$$

которое будет, конечно, проще общего уравнения (21.24). Отсюда по аналогии с (21.35) получим уравнение для определения амплитуды вибраций на входе нелинейного звена в виде

$$a_v^2 = \frac{X_{2c}^2(\omega_v) + Y_{2c}^2(\omega_v)}{X_c^2(a_v, \omega_v, x^0) + Y_c^2(a_v, \omega_v, x^0)} B^2,$$

где через  $X_{2c}$ ,  $Y_{2c}$  и  $X_c$ ,  $Y_c$  обозначены вещественные и мнимые части соответственно для  $S_{2c}(j\omega_b)$  и для выражения

$$Q_c(j\omega_b) + R_c(j\omega_b) [q(a_b, \omega_b, x^0) + jq'(a_b, \omega_b, x^0)].$$

Написанное уравнение позволяет определить зависимость амплитуды вибраций  $a_b$  от величины полезного сигнала  $x^0$  на входе нелинейного звена для каждой заданной внешней вибрационной помехи (т. е. для заданных  $B$ ,  $\omega_b$ ) графическим приемом, описанным в §21.2 (рис. 21.7).

Полученная зависимость  $a_b(x^0)$  подставляется затем в первую из формул (21.29) для получения функции смещения  $F^0 = \Phi(x^0)$ , которая в данном случае и будет являться характеристикой нелинейного звена по полезному сигналу. Вид ее будет зависеть от заданных амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_b$  внешних вибраций и от параметров системы, входящих в выделенную часть контура (рис. 21.13, а).

В обоих рассмотренных случаях, проводя линеаризацию  $F^0 = k_n x^0$  характеристики нелинейного звена  $F^0(x^0)$  или  $F^0 = \Phi(x^0)$  по полезному сигналу, можно обычными методами теории автоматического управления, используя линейные уравнения (21.44), выявить зависимость всех статических и динамических качеств данной нелинейной системы автоматического управления (и ее устойчивости) от амплитуды  $B$  и частоты  $\omega_b$  вибрационных помех.

Линейная система выходила бы из строя при наличии помех тогда, когда полезный сигнал практически перестал бы различаться на фоне помех. Но пока он нормально различается, все статические и динамические свойства системы по полезному сигналу, если система линейна, остаются неизменными. Вибрационная помеха при этом накладывается как дополнительная ошибка. Совсем иначе дело обстоит в нелинейной системе. Коэффициент усиления  $k_n$  полезного сигнала в нелинейном звене, а вместе с ним и все качества и даже устойчивость системы могут настолько существенно зависеть от помехи (от  $B$  и  $\omega_b$ ), что система может выйти из строя по этой причине раньше, чем перестанет различаться полезный сигнал на уровне помех. Это очень важно учитывать на практике.

С точки зрения упрощения решения задачи нужно всегда иметь в виду упрощенную формулу линеаризации (21.45), которая позволяет и во втором из рассмотренных случаев обходиться без определения функции смещения. В этом случае нужно подставить в (21.45) значение амплитуды вибраций на входе нелинейного звена  $a_b$ , найденное при отсутствии полезного сигнала ( $x^0 = 0$ ) любым из двух методов, изложенных в § 21.1, но для более простого уравнения системы (21.51). Зависимость  $a_b(B)$  будет при этом, в отличие от первого случая, криволинейной (рис. 21.13, б).

В заключение заметим, что тем же методом, что и в § 18.5, легко вычислять высшие гармоники выпущенных колебаний (см. § 9.4 книги [72]).

## Глава 22 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

### § 22.1. Статистическая линеаризация нелинейностей

Предварительно заметим, что по уравнениям, выведенным в § 19.2 и в § 21.2, можно исследовать также медленно меняющиеся *случайные* процессы в автоматической системе, сопровождающиеся соответственно автоколебаниями и вынужденными колебаниями. При этом целесообразно функцию смещения  $\Phi(x^0)$  подвергнуть обычной линеаризации (19.70) и затем целиком применить линейную теорию случайных процессов к уравнению (19.73) или (21.44). Нелинейная же колебательная часть решения определяется с помощью гармонической линеаризации так же, как и в § 19.2 и в § 21.2. При этом находятся сглаженная характеристика (функция смещения) и зависимости амплитуды и частоты колебательной составляющей от величины медленно меняющейся составляющей. В этом случае предполагается, что внешние воздействия  $f(t)$  в (19.73) и  $f_1(t)$  в (21.44) являются медленно меняющимися случайными процессами с нормальным законом распределения (см. подробнее § 10.1 в книге [72]).

Для решения других задач при случайных воздействиях удобно бывает применять так называемую статистическую линеаризацию нелинейностей, разработанную П. Е. Казаковым [38]. Сущность ее заключается в следующем.

Для оценки динамической точности автоматических систем при случайных воздействиях будем определять два первых вероятностных момента случайных процессов: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднеквадратичное отклонение). Последнее эквивалентно определению спектральной плотности или корреляционной функции.

Если нелинейная система описывается дифференциальным уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (22.1)$$

то схематически можно себе представить прохождение сигналов, как показано на рис. 22.1. Проходя через линейную часть, случайный процесс  $f(t)$ , заданный двумя первыми вероятностными моментами, преобразуется в переменную  $x$ , которую тоже можно определить двумя первыми моментами. Однако определение дальнейшего преобразования случайного процесса  $x(t)$  в нелинейном звене  $F(x, px)$  существенно связано с высшими вероятностными моментами (подобно тому как в главе 18 приходилось иметь дело с высшими гармониками). Ввиду замкнутости контура системы это обстоятельство накладывает отпечаток и на все процессы в данной системе. Поэтому точное решение задачи в большинстве случаев оказывается недоступным.

Достаточно хорошее для целей инженерных расчетов первое приближение применительно к рассматриваемым классам систем, обладающих свойством фильтра (см. § 18.2), даст пренебрежение выс-

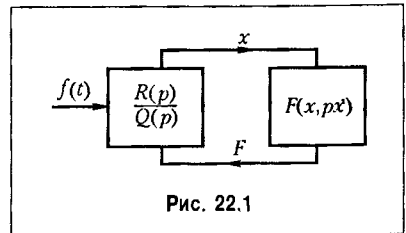


Рис. 22.1

шими моментами, т. е. замена нелинейного звена эквивалентным линейным, которое одинаково с данным нелинейным преобразует два первых вероятностных момента: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднеквадратичное отклонение). Это и называется статистической линеаризацией нелинейности.

Эта операция по общей идее (но не по конкретному содержанию) аналогична тому, как в главе 19 нелинейное звено при помощи гармонической линеаризации заменялось эквивалентным линейным, которое одинаково с данным нелинейным преобразует постоянную (или медленно меняющуюся) составляющую и первую гармонику колебательной составляющей, т. е. принимались во внимание два первых члена ряда Фурье и отбрасывались все высшие гармоники.

Итак, представим переменную  $x$  под знаком нелинейности  $F(x, px)$  в виде

$$x = \bar{x} + x^{сл}, \quad (22.2)$$

где  $\bar{x}$  — математическое ожидание (среднее значение), которое является обычной (регулярной) функцией времени, и  $x^{сл}$  — случайная составляющая с нулевым математическим ожиданием (центрированная случайная функция времени).

Это представление аналогично тому, которое употреблялось в главе 19 при гармонической линеаризации, но оно имеет совсем другой, вероятностный смысл. Далее, переменную  $F(x, px)$  также представим в виде

$$F(x, px) = \tilde{F} + q^{сл} x^{сл}, \quad (22.3)$$

где  $\tilde{F}$  — математическое ожидание (среднее значение) нелинейной функции  $F$ , которое является регулярной составляющей;  $q^{сл}$  — эквивалентный коэффициент усиления случайной составляющей (центрированной).

Это выражение по форме тоже аналогично тому, которое применялось в главе 19, но имеет иное конкретное содержание.

Величина регулярной составляющей  $\tilde{F}$  определяется, следовательно, по известной формуле для математического ожидания. В случае однозначной нелинейной функции  $F(x)$  эта формула дает

$$\tilde{F} = M[F(\bar{x} + x^{сл})] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\bar{x} + x^{сл}) w(x) dx, \quad (22.4)$$

где  $M$  — обозначение операции взятия математического ожидания,  $w(x)$  — дифференциальный закон распределения случайной составляющей, например нормальный закон (рис. 11.10):

$$w = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \right)^2}. \quad (22.5)$$

Для нелинейности общего вида  $F(x, px)$  будет более сложное выражение:

$$\tilde{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\bar{x} + x^{сл}, p\bar{x} + px^{сл}) w(x, px) dx dpx. \quad (22.6)$$

которое для петлевых нелинейностей  $F(x)$  при симметричном законе распределения (в том числе и нормальном) упрощается. Например, для нелинейности, показанной на рис. 22.2, будет

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \int_{-\infty}^{-b_1} F(\tilde{x} + x^{cл}) w(x) dx + \int_{-b_1}^{b_2} \frac{1}{2} [F_1(\tilde{x} + x^{cл}) + F_2(\tilde{x} + x^{cл})] w(x) dx + \\ & + \int_{b_2}^{\infty} F(\tilde{x} + x^{cл}) w(x) dx. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Величину эквивалентного коэффициента усиления  $q^{cл}$  случайной составляющей в формуле (22.3) рекомендуется определять одним из следующих двух способов.

**Первый способ** исходит непосредственно из величин среднеквадратичных отклонений  $\sigma_x$  и  $\sigma_F$  переменной  $x$  и нелинейной функции  $F$ , а именно:

$$q^{cл} = \frac{\sigma_F}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{M[(F^{cл})^2]}{M[(x^{cл})^2]}}, \quad (22.8)$$

что в случае однозначной нелинейности  $F(x)$  дает

$$q^{cл} = \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\tilde{x} + x^{cл}) w(x) dx - \tilde{F}^2}. \quad (22.9)$$

Для общего случая  $F(x, px)$  и в случае петлевой нелинейности  $F(x)$  получаются более сложные выражения, которые можно получить для  $q^{cл}$ , обобщив (22.9) по тому же образцу, как обобщены выражения (22.6) и (22.7) по сравнению с (22.4).

**Второй способ** заключается в определении коэффициента  $q^{cл}$  из условия минимума математического ожидания квадрата разности истинной нелинейной функции  $F(x, px)$  и ее заменяющей (22.3), т. е. минимума среднеквадратичного отклонения. Записав это условие

$$M \{ [F(x, px) - \tilde{F} - q^{cл} x^{cл}]^2 \} = \min,$$

получим

$$q^{cл} = \frac{M[F^{cл} x^{cл}]}{M[(x^{cл})^2]} = \frac{r_{Fx}}{\sigma_x^2}, \quad (22.10)$$

где  $r_{Fx}$  — значение взаимной корреляционной функции переменных  $F$  и  $x$  при  $\tau = 0$ . Отсюда в случае однозначной нелинейности  $F(x)$  находим

$$q^{cл} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{cл}) x^{cл} w(x) dx. \quad (22.11)$$

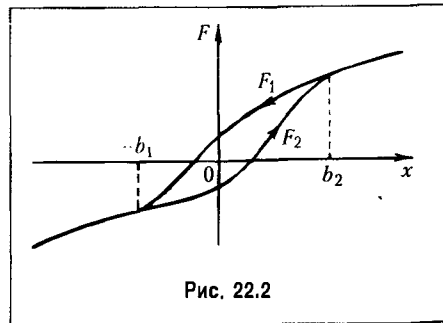


Рис. 22.2

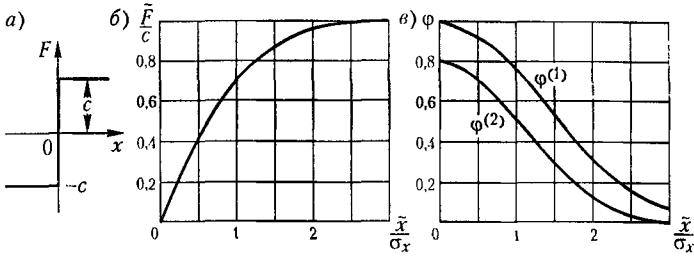


Рис. 22.3

Аналогично предыдущему легко получить также выражение коэффициента  $q^{cл}$  для общего случая  $F(x, px)$  и для петлевой нелинейности  $F(x)$ .

Второй способ определения коэффициента  $q^{cл}$  приводит к более простым расчетным формулам. С этой точки зрения его использование предпочтительнее. По точности же оба способа примерно равноценны и соответствуют общей степени приближенности всего метода в целом. Замечено, что во многих случаях, когда первый из этих способов дает завышенные значения корреляционной функции нелинейного процесса  $F(t)$  по сравнению с точными, второй дает заниженные значения. Поэтому часто может получиться более хорошее приближение, если в качестве величины  $q^{cл}$  взять среднее арифметическое из двух: (22.8) и (22.10).

Важно иметь в виду, что величины  $\tilde{F}$  и  $\tilde{q}^{cл}$  взаимосвязаны тем, что каждая из них зависит от обеих рассматриваемых характеристик случайного процесса:  $x$  и  $\sigma_x$  (входящих в закон распределения  $w$ ). Сам факт наличия этих зависимостей и их взаимосвязь позволяют, несмотря на линеаризацию задачи, уловить существенно нелинейные особенности случайных процессов, подобно тому как в прежних главах зависимость величин  $F^0$ ,  $q$  и  $q'$  от всех трех неизвестных  $x^0$ ,  $a$  и  $\omega$  (или по крайней мере от первых двух из них) и взаимосвязь этих величин позволяли исследовать существенно нелинейные особенности регулярных процессов во времени методом гармонической линеаризации.

Приведем выражения величин  $\tilde{F}$  и  $q^{cл}$  и их графики для некоторых типовых нелинейностей, составленные по формулам (22.4), (22.9) и (22.11) при условии нормального закона распределения (22.5) случайной переменной  $x$  (при других законах распределения величины  $\tilde{F}$  и  $q^{cл}$  имели бы другие выражения).

**1. Идеальная релейная характеристика** (рис. 22.3, а). Из формулы (22.4) находим

$$\tilde{F} = c \Phi(u), \quad u = \frac{\bar{x}}{\sigma_x \sqrt{2}},$$

где обозначено

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy \quad (22.12)$$

(числовые значения этого интеграла вероятностей имеются в справочниках, а также приведены в табл. 11.2). Зависимость величины  $\bar{F}/c$  от отношения  $\bar{x}/\sigma_x$  показана графически на рис. 22.3, б.

По формулам (22.9) и (22.11) находим соответственно

$$q^{cl} = \frac{c}{\sigma_x} \varphi^{(1)}(\bar{x}, \sigma_x) \quad \text{и} \quad q^{cl} = \frac{c}{\sigma_x} \varphi^{(2)}(\bar{x}, \sigma_x), \quad (22.13)$$

где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \Phi^2(u)}, \quad \varphi^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}.$$

Зависимости  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  показаны на рис. 22.3, в.

**2. Однозначная релейная характеристика с зоной нечувствительности** (рис. 22.4, а). По формуле (22.4) с учетом обозначения (22.12) находим

$$\bar{F} = \frac{c}{2} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2)],$$

где

$$u_1 = \frac{1 + \bar{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{1 - \bar{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad \bar{x}_1 = \frac{\bar{x}}{b}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}. \quad (22.14)$$

Функция  $\bar{F}/c$  изображена графически на рис. 22.4, б в зависимости от  $\bar{x}_1$  при разных значениях  $\sigma_1$ .

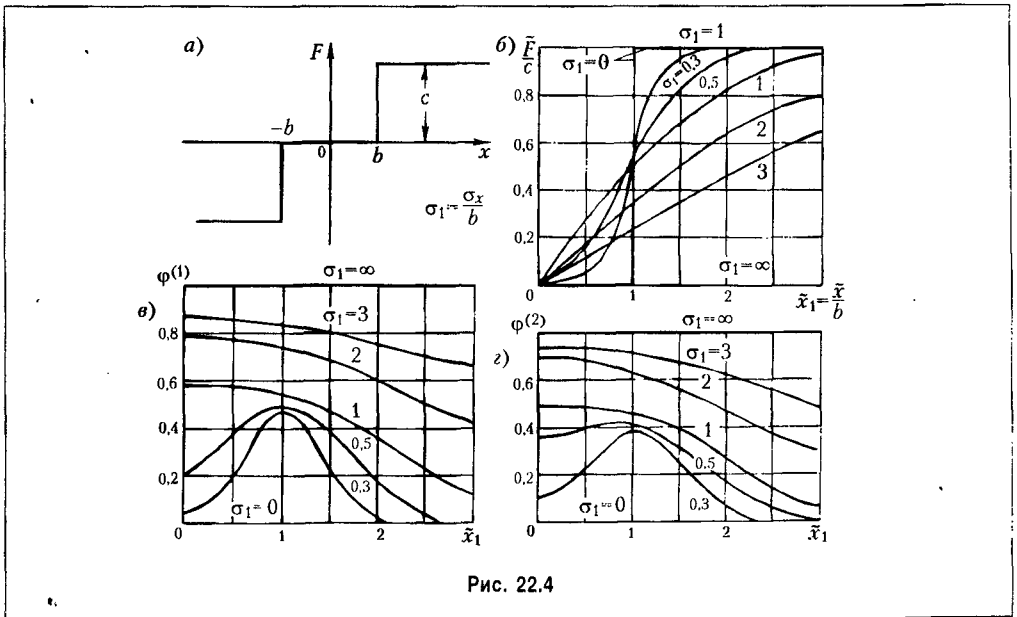


Рис. 22.4

По формулам (22.9) и (22.11) получаем выражения типа (22.13), где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c}\right)^2} - \frac{1}{2}[\Phi(u_1) + \Phi(u_2)], \quad \varphi^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2}),$$

что изображено графически на рис. 22.4, в и г.

**3. Петлевая релейная характеристика общего вида** (рис. 22.5, а). По формулам (22.7) находим

$$\tilde{F} = \frac{c}{4} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2) + \Phi(u_3) - \Phi(u_4)],$$

где кроме (22.14) и (22.12) введены еще обозначения

$$u_3 = \frac{m + \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad u_4 = \frac{m - \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}},$$

Зависимость  $\tilde{F}/c$  для случая  $m = 0,5$  показана на рис. 22.5, б.

Далее получаем выражения типа (22.13), где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{F}}{C}\right)^2} - \frac{1}{4}[\Phi(u_1) + \Phi(u_2) + \Phi(u_3) + \Phi(u_4)],$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2} + e^{-u_3^2} + e^{-u_4^2}).$$

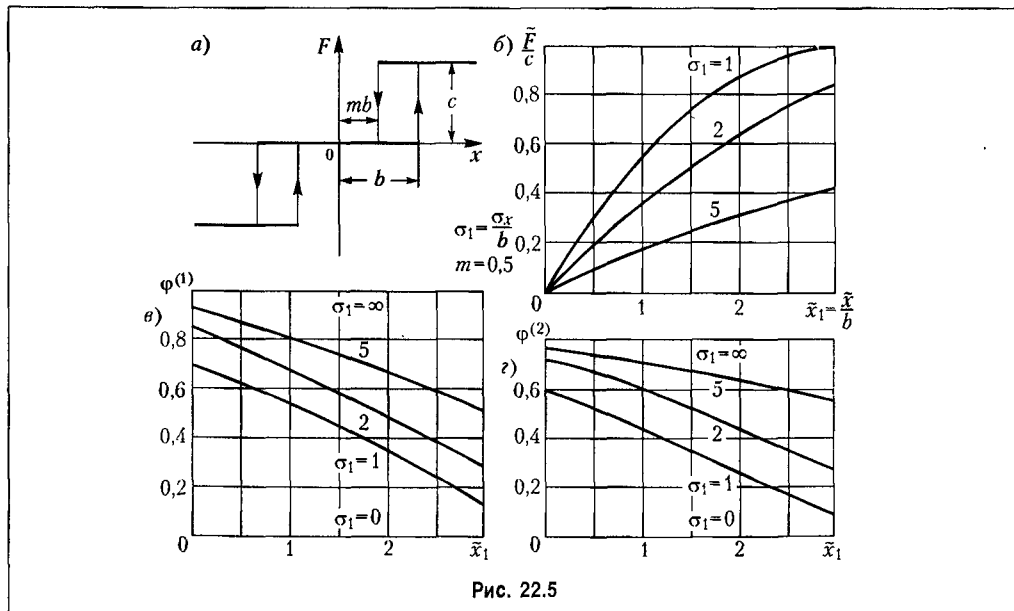


Рис. 22.5



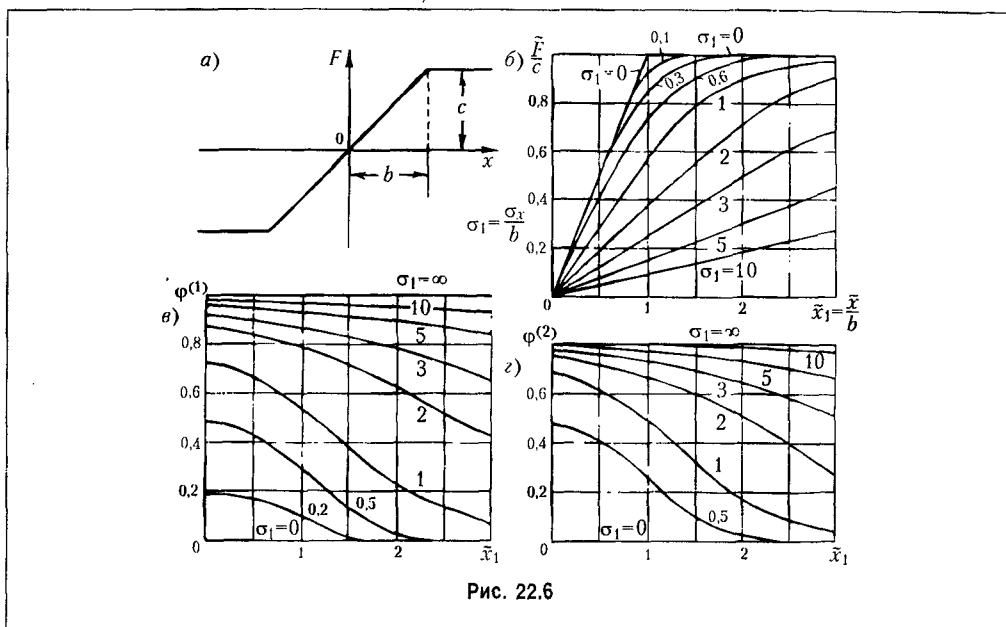


Рис. 22.6

Эти функции для случая  $m = 0,5$  изображены на рис. 22.5, в и г.

4. Характеристика типа насыщения (рис. 22.6, а). По формуле (22.4) с учетом обозначений (22.12) и (22.14) находим

$$\frac{\tilde{F}}{c} = \frac{\tilde{x}_1 + 1}{2} \Phi(u_1) + \frac{\tilde{x}_1 - 1}{2} \Phi(u_2) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-u_1^2} - e^{-u_2^2} \right),$$

что показано в зависимости от  $\tilde{x}_1$  при разных  $s_1$  на рис. 22.6, б. По формулам же (22.9) и (22.11) находим выражение (22.13), где

$$\varphi^{(1)} = \left\{ 1 - \left( \frac{\tilde{F}}{C} \right)^2 + \frac{\sigma_1^2}{2} (1 - 2u_1 u_2) \left[ \Phi(u_1) + \Phi(u_2) - \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\pi}} \left( u_2 e^{-u_1^2} + u_1 e^{-u_2^2} \right) \right] \right\}^{1/2};$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{\sigma_1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)],$$

что изображено на рис. 22.6, в и г.

## § 22.2. Простейшие случайные процессы в нелинейных системах

В данном параграфе рассматриваются такие задачи, в которых регулярная составляющая процесса  $\tilde{x}$  (математическое ожидание) постоянна или медленно меняется во времени по сравнению с составляющими основных частот спектра случайной состав-

ляющей  $x^{cl}$ . Обратимся к нелинейным системам, динамика которых описывается уравнениями вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (22.15)$$

где  $f(t)$  — внешнее воздействие, представляющее собой случайный процесс, причем

$$f(t) = \tilde{f} + f^{cl}(t). \quad (22.16)$$

Здесь  $\tilde{f}$  — заданное математическое ожидание (регулярная составляющая), а  $f^{cl}$  — центрированная случайная составляющая.

Пусть параметры системы таковы, что автоколебания отсутствуют и система устойчива относительно равновесного состояния. Применяв статистическую линеаризацию (22.3) и подставив полученное выражение в заданное уравнение (22.15), разобьем последнее на два уравнения:

$$Q(p)\tilde{x} + R(p)\tilde{F} = S(p)\tilde{f}; \quad (22.17)$$

$$[Q(p) + R(p)q^{cl}]x^{cl} = S(p)f^{cl}, \quad (22.18)$$

соответственно для регулярных (математических ожиданий) и случайных (центрированных) составляющих. При этом

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x)$$

определяются для каждой заданной нелинейности, как указано в § 22.1.

Рассмотрим в общем виде две различные задачи.

**Первая задача.** Если имеет место стационарный процесс, то величины  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{x}$ ,  $\sigma_x$  являются постоянными (имеет место некоторый установившийся режим) и уравнение (22.17) принимает алгебраический вид:

$$Q(0)x + R(0)\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x) = S(0)\tilde{f}. \quad (22.19)$$

Здесь фигурируют две неизвестные:  $\tilde{x}$  и  $\sigma_x$ . Поэтому в принципе отсюда можно лишь выразить величину  $\tilde{x}$  как функцию  $\sigma_x$ .

$$\tilde{x}(\sigma_x). \quad (22.20)$$

Далее по линейной теории случайных процессов, описанной в главе 11, производится исследование уравнения (22.18). В этом уравнении величина  $f^{cl}$  задана спектральной плотностью  $s_f(\omega)$  или корреляционной функцией  $r_f(\tau)$ . Линейная теория дает

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega) + q^{cl}R(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (22.21)$$

где в выражении

$$q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x) \quad (22.22)$$

необходимо  $\bar{x}$  заменить найденной выше функцией (22.20). Тогда в уравнении (22.21) останется одна неизвестная величина  $\sigma_x$ . Учитывая формулы (11.91) и (11.92), уравнение (22.21) можно записать в виде

$$\sigma_x^2 = hI_n(\bar{x}, \sigma_f), \quad (22.23)$$

где  $h$  — постоянный множитель, выносимый за знак интеграла (формулы для вычисления интеграла  $I_n$  приведены в приложении 1).

Таким образом, путем решения уравнения (22.23) с подстановкой (22.20) будет найдено среднеквадратичное отклонение  $\sigma_x$ , а затем по формуле (22.20) будет вычислено и математическое ожидание  $\bar{x}$ , т. е. полностью определится искомое приближенное решение<sup>1</sup> уравнения (22.15):

$$x = \bar{x} + x^{сл}. \quad (22.24)$$

Это решение справедливо для случая установившегося режима при стационарном случайном процессе.

Однако зависимость  $\bar{x}(\sigma_x)$  далеко не всегда можно выразить из уравнения (22.19) в явном виде ввиду сложности выражения  $\tilde{F}(\bar{x}, \sigma_x)$ . Поэтому в большинстве случаев придется решать совместно два уравнения, (22.19) и (22.23), либо численно, путем последовательных приближений, либо графически.

Можно применять, например, следующий графический прием. Представим уравнение (22.19) в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \bar{x}; \\ \eta &= \frac{S(0)}{Q(0)} \tilde{f} - \frac{R(0)}{Q(0)} \tilde{F}(\bar{x}, \sigma_x). \end{aligned} \right\} \quad (22.25)$$

Первое из них дает прямую 1 (рис. 22.7, а), а второе — серию кривых 2 для различных постоянных значений  $\bar{x}, \sigma_x$ . Перенеся все точки пересечения этих кривых с прямой 1 на плоскость координат  $\bar{x}, \sigma_x$  (рис. 22.7, б), получим зависимость  $\sigma_x(\bar{x})$  в виде кривой 3, так как каждой точке пересечения на верхнем графике соответствовало определенное значение  $\sigma_x$ . После этого построим (рис. 22.7, б) еще одну зависимость  $\sigma_x(\bar{x})$  в виде кривой 4 по формуле (22.23), подставляя в правую часть этой формулы значения  $\sigma_x$ , взятые для каждого  $\bar{x}$  из кривой 3. Очевидно, что координаты точки пересечения С кривых 3 и 4 представляют собой искомый результат совместного решения уравнений (22.19) и (22.23).

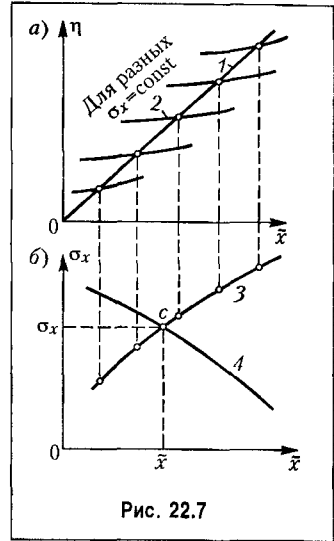


Рис. 22.7

<sup>1</sup> Во всех задачах здесь и далее будем искать приближенное решение только для переменной  $x$ , стоящей под знаком нелинейности. Когда оно найдено, всегда можно через соответствующие передаточные функции найти приближенное решение и для других переменных системы.

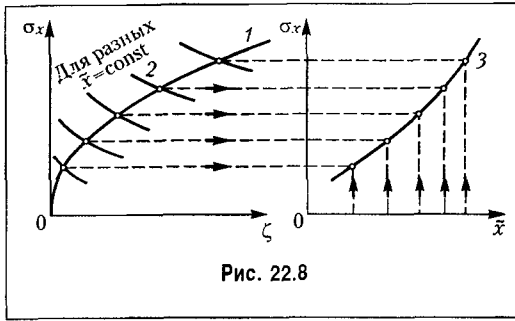


Рис. 22.8

Вторая задача. Перейдем теперь к решению другой задачи, когда исследуется неустановившийся процесс.

Часто в автоматических системах управления разложению искомого решения (22.24) на  $\tilde{x}$  и  $x^{сл}$  соответствует разложение его на полезный регулярный сигнал  $\tilde{x}$  и случайную помеху  $x^{сл}$ . Когда полезный сигнал управления  $\tilde{x}$  изменяется во времени, процесс уже не будет стационарным. Однако если помехи (флуктуации)

характеризуются спектром значительно более высоких частот, чем полезный сигнал, можно считать последний медленно меняющимся. Тогда можно исследовать случайный процесс в первом приближении как стационарный, применяя формулу (22.23). Но при этом для определения регулярной составляющей  $\tilde{x}$  нельзя пользоваться алгебраическим уравнением (22.19), а надо обращаться к дифференциальному уравнению (22.17).

В этом случае описанное выше графическое решение не годится и следует поступать иначе. Сначала надо из уравнения (22.23) определить зависимость  $\sigma_x(\tilde{x})$ . Для этого по аналогии с графическим решением (21.25) разобьем уравнение (22.23) на два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \zeta; \\ hI_n(\tilde{x}, \sigma_x) &= \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

Первое из них дает параболу 1 (рис. 22.8), а второе — серию кривых 2 при разных постоянных значениях  $\tilde{x}$ . Перенеся ординаты их точек пересечения на плоскость  $\tilde{x}, \sigma_x$  и отложив для каждой из них соответствующие кривым 2 абсциссы  $\tilde{x}$ , получим в виде кривой 3 (рис. 22.8) искомую зависимость  $\sigma_x(\tilde{x})$ .

Подставив полученную зависимость  $\sigma_x(\tilde{x})$  в вычисленное для заданной нелинейности согласно § 22.1 выражение

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (22.27)$$

исключим из него величину  $\sigma_x$  и получим функцию от заданной переменной

$$\tilde{F} = \Phi(\tilde{x}), \quad (22.28)$$

которую, как и в главе 19 и § 21.2, можно назвать функцией смещения<sup>1</sup>, так как здесь математические ожидания  $\tilde{x}$  и  $\tilde{F}$  представляют собой смещения центра случайных составляющих.

Когда функция смещения (22.28) найдена, ее можно подставить в уравнение (22.17):

$$Q(p)\tilde{x} + R(p)\Phi(\tilde{x}) = S(p)\tilde{f}(t), \quad (22.29)$$

<sup>1</sup> По аналогии с введенными ранее функциями смещения это будет сглаженная при помощи случайных флуктуации нелинейная характеристика для медленно меняющейся составляющей процесса.

и отсюда по заданной функции  $\tilde{f}(t)$  найти путем решения дифференциального уравнения регулярную составляющую процесса  $\tilde{x}(t)$ .

В большинстве задач функция смещения (22.28) будет иметь вид плавной кривой (рис. 22.9), которую в некоторых пределах можно подвергнуть обычной линеаризации

$$\tilde{F} = k_{л} \tilde{x}, \quad k_{л} = \left( \frac{d\Phi}{d\tilde{x}} \right)_{\tilde{x}=0} = \text{tg}\beta. \quad (22.30)$$

В случае, если система такова, что линейная часть с передаточной функцией

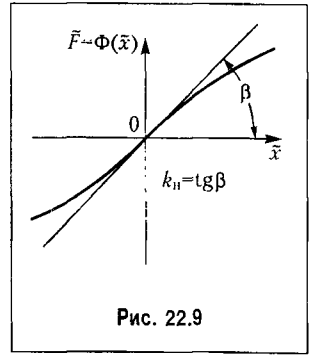


Рис. 22.9

$$\frac{R(p)}{Q(p)}$$

не пропускает спектр частот, соответствующий флуктуациям  $f^{сл}(t)$  и определяемый спектральной плотностью  $s_f(\omega)$ , отыскание величины  $\sigma_x$  значительно упрощается, а именно из (22.21) следует

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (22.31)$$

т. е.  $\sigma_x$  не будет зависеть от формы нелинейности и от величины  $\tilde{x}$ .

В этом случае вместо дифференцирования функции смещения (22.28) можно определить  $k_{л}$  непосредственно из (22.27):

$$\tilde{F} = k_{л} \tilde{x}, \quad k_{л} = \left( \frac{d\tilde{F}}{d\tilde{x}} \right)_{\tilde{x}=0}. \quad (22.32)$$

Здесь  $k_{л}$  получается как функция от  $\sigma_x$

$$k_{л} = k_{л}(\sigma_x). \quad (22.33)$$

Затем надо подставить величину  $\sigma_x$ , найденную из формулы (22.31).

Вместо этого можно воспользоваться кривой на рис. 22.3, б–22.6, б, соответствующей найденному значению  $\sigma_x$ . При этом вычисление интеграла (22.31) производится по готовым формулам  $\sigma_x^2 = hI_n$  (см. приложение 2).

В результате подстановки (22.30) или (22.32) уравнение для определения регулярной составляющей (22.29) станет линейным:

$$[Q(p) + k_{л} R(p)] \tilde{x} = S(p) \tilde{f}(t). \quad (22.34)$$

Оно решается при помощи обычного характеристического уравнения

$$Q(p) + k_{л} R(p) = 0. \quad (22.35)$$

Важно отметить, однако, следующее. Согласно формулам (22.21) и (22.31) величина  $\sigma_x$  зависит от спектральной плотности помехи  $s_f(\omega)$ . Поэтому и определяемая через величину  $\sigma_x$  форма функции смещения (22.28) и крутизна ее  $k_{\Pi}$  (рис. 22.9) зависят не только от параметров самой системы, но также и от спектральной плотности помехи  $s_f(\omega)$ . Но если  $k_{\Pi}$  зависит от  $s_f(\omega)$ , то согласно (22.34) и (22.35) все статические и динамические качества и даже устойчивость системы по полезному сигналу будут зависеть не только от параметров самой системы, но и от параметров спектральной плотности внешней случайной помехи. Следовательно, устойчивая при отсутствии помех нелинейная система может при определенном уровне помех потерять свои качества, т. е. выйти из строя как система автоматического управления не по причине того, что система перестает фильтровать полезный сигнал, как бывает обычно, а потому, что основной контур управления меняет свои динамические качества с изменением  $k_{\Pi}$  или даже становится неустойчивым.

Возможны случаи, когда это специфическое для нелинейных систем явление будет наступать раньше, чем система, рассчитанная как линейная, перестанет фильтровать полезный сигнал. С этой точки зрения учет фактически имеющихся в системе автоматического управления нелинейностей при наличии высокочастотных (по сравнению с полезным сигналом) помех является чрезвычайно важным для практики. Это столь же важно, как и учет влияния вибрационных синусоидальных помех, рассмотренный в § 21.2. Результаты решения обеих задач аналогичны.

Очевидно, что описанное специфическое для нелинейных систем влияние помех в некоторых случаях может и улучшать динамические качества системы.

Привлекательной стороной изложенного метода является то, что исследование качеств переходных процессов, всех частотных характеристик и других качеств системы управления по полезному (регулярному) сигналу производится любыми методами линейной теории автоматического управления по уравнению (22.34). Несмотря на эту линеаризацию решения задачи, хорошо выявляются и все важные для практики специфические нелинейные явления благодаря описанному методу определения коэффициента  $k_{\Pi}$ , учитывающему несправедливость принципа суперпозиции для нелинейных систем.

Важно иметь в виду еще следующее. Исследуя методами линейной теории управления по уравнению (22.34) изменение статических и динамических качеств системы по полезному сигналу с изменением структуры и параметров этой системы, надо обязательно учитывать при этом и изменение самого коэффициента  $k_{\Pi}$ , вытекающее из выражений (22.33) и (22.31) или (22.21).

### § 22.3. Пример исследования влияния случайных помех на динамику нелинейной системы

На нелинейную систему автоматического управления (рис. 22.10) действует случайная помеха  $f(t)$ , являющаяся высокочастотной по сравнению с медленно меняющимся полезным сигналом в данной системе. Проходя через нелинейное звено, помеха изменяет его коэффициент усиления по отношению к полезному сигналу (вторая задача § 22.2). Требуется оценить влияние этого явления на динамические качества данной системы автоматического управления по полезному сигналу.

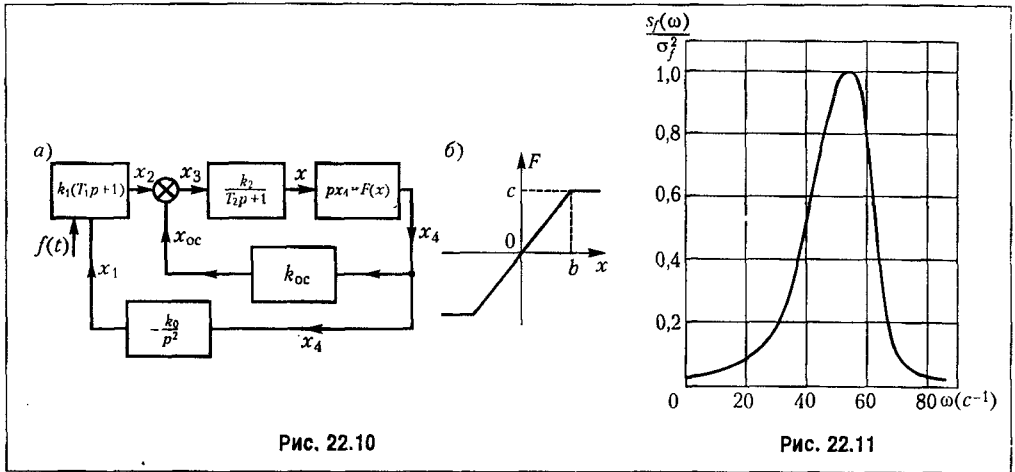


Рис. 22.10

Рис. 22.11

Уравнение замкнутой системы (рис. 22.10) в целом будет

$$p^3(T_2p+1)x + (k_2k_{oc}p^2 + kk_0T_1p + kk_0)F = kp^3(T_1p+1)f(t), \quad (22.36)$$

где  $k = k_1k_2$ ,  $F(x)$  — заданная нелинейность (рис. 22.10, б). При этом заданы:  $k = 18$ ,  $k_2 = 60$ ,  $k_{oc} = 0,03$ ,  $k_0 = 0,5 \text{ c}^{-2}$ ,  $T_1 = 0,5 \text{ c}$ ,  $T_2 = 0,02 \text{ c}$ ,  $\frac{c}{b} = 4$ .

Помеха имеет нормальный закон распределения и задана спектральной плотностью (рис. 22.11)

$$s_f(\omega) = \frac{2\beta\sigma_f^2 f}{(\omega_1^2 - \alpha^2\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}, \quad (22.37)$$

где  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 1,39 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_1^2 = 7,5 \text{ c}^{-2}$ ,  $\mu = 0,03 \text{ c}^{-2}$ .

Меняя величину дисперсии помехи  $\sigma_f^2$ , характеризующую «уровень помехи», будем определять динамические качества системы в зависимости от величины  $\sigma_f$ .

Произведя статистическую линеаризацию (22.3), разобьем уравнение системы (22.36) на два, соответственно для регулярной и случайной составляющих:

$$\left. \begin{aligned} p^3(T_2p+1)\tilde{x} + (k_2k_{oc}p^2 + kk_0T_1p + kk_0)\tilde{F} &= 0; \\ \left[ p^3(T_2p+1) + (k_2k_{oc}p^2 + kk_0T_1p + kk_0)q^{cл} \right] x^{cл} &= kp^3(T_1p+1)f(t). \end{aligned} \right\} \quad (22.38)$$

Поскольку передаточная функция линейной части системы

$$W_{л}(p) = \frac{k_2k_{oc}p^2 + kk_0T_1p + kk_0}{p^3(T_2p+1)}$$

при заданных выше ее параметрах практически не пропускает<sup>1</sup> частот, при которых спектральная плотность помехи (рис. 22.11) имеет существенное значение, то согласно (22.31) дисперсия помехи на входе нелинейного звена будет

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k(T_1 j\omega + 1)}{T_2 j\omega + 1} \right|^2 \frac{2\beta\sigma^2 f}{(\omega_1^2 - \alpha^2 \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2} d\omega.$$

Чтобы привести этот интеграл к стандартному виду (§ 11.6), преобразуем сначала знаменатель спектральной плотности, а именно:

$$(\omega_1^2 - \alpha^2 \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2 = |\alpha^2 (j\omega^2) + \mu j\omega + \omega_1^2|^2.$$

Тогда согласно обозначениям приложения 1 получим

$$A(j\omega) = a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 (j\omega) + a_3,$$

где

$$a_0 = \alpha^2 T_2, \quad a_1 = \alpha^2 + \mu T_2, \quad a_2 = \omega_1^2 T_2 + \mu, \quad a_3 = \omega_1^2.$$

В числителе же получим

$$G(\omega) = |T_1 j\omega + 1|^2 = b_0 \omega^4 + b_1 \omega^2 + b_2,$$

где

$$b_0 = 0, \quad b_1 = T_1^2, \quad b_2 = 1.$$

В результате находим

$$\sigma_x = k\sigma_f \sqrt{2\beta I_3}, \quad (22.39)$$

где согласно приложению 1

$$I_3 = \frac{\alpha^2 + \mu T_2 + T_1^2 \omega^2}{2\mu \omega_1^2 (\alpha^2 + \mu T_2 + T_2^2 \omega_1^2)}.$$

Перейдем теперь к уравнению (22.38) для регулярной составляющей, т. е. для полезного сигнала  $\tilde{x}$ . Функция  $\tilde{F}$  определяется в нем графиком рис. 22.6,  $b$  в зависимости от  $\tilde{x}_1 = \frac{\tilde{x}}{b}$  и  $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$ . В начальной части все кривые этого графика близки к прямым. Поэтому можно провести их обычную линеаризацию в виде

$$\tilde{F} = k_{\mu} \tilde{x}, \quad (22.41)$$

<sup>1</sup> Это определяется путем простого построения амплитудной частотной характеристики линейной части системы по ее передаточной функции.



где  $k_{н}$  — крутизна в начале координат (рис. 22.6, б), которая зависит от величины  $\sigma_1$ . Для данной задачи получим

$\sigma_1$	0	0,1	0,3	0,6	1,0	2,0	3,0	5,0	10	$\infty$
$k_{н}$	4,0	4,0	4,0	3,2	2,3	1,4	1,0	0,6	0,4	0

Физически величина  $k_{н}$  является коэффициентом усиления полезного сигнала в нелинейном звене в присутствии помех, причем приведенная таблица дает зависимость этого коэффициента от уровня помехи, т. е. от среднеквадратичного ее значения  $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$ , на входе нелинейного звена.

Как видим, увеличение уровня помехи ведет к существенному снижению коэффициента усиления полезного сигнала в нелинейном звене, что показано графически на рис. 22.12. Это составляет принципиальную особенность нелинейной системы, которая обуславливает зависимость всех ее статических и динамических качеств по полезному сигналу, в том числе и устойчивости, от уровня помех.

Найдем, например, зависимость устойчивости системы от уровня помех. Для этого согласно (22.38) и (22.41) запишем характеристическое уравнение системы:

$$T_2 p^4 + p^3 + k_2 k_{oc} k_{н} p^2 + k k_0 k_{н} T_1 p + k k_0 k_{н} = 0. \tag{22.42}$$

Условие устойчивости системы по критерию Гурвица принимает вид

$$k_{н} > \frac{1}{T_1(k_2 k_{oc} - k k_0 T_1 T_2)}, \tag{22.43}$$

При заданных в начале параграфа параметрах это дает  $k_{н} > 1,17$ . Это согласно рис. 22.12 соответствует значению

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b} = 2,65.$$

Но согласно (22.39)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b} = \frac{\sigma_f}{b_f} \sqrt{2\beta I_3}, \tag{22.44}$$

где обозначено

$$b_f = \frac{b}{k}.$$

Эту величину удобно принять для выражения среднеквадратичного значения внешней помехи  $\sigma_f$  в относительных единицах, учитывая, что согласно

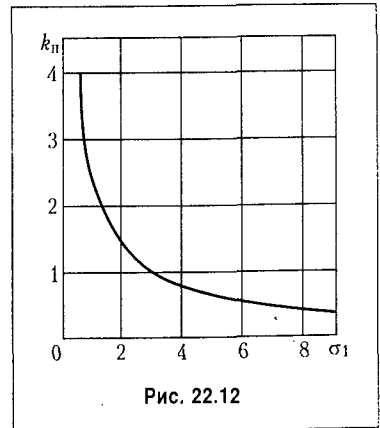


Рис. 22.12

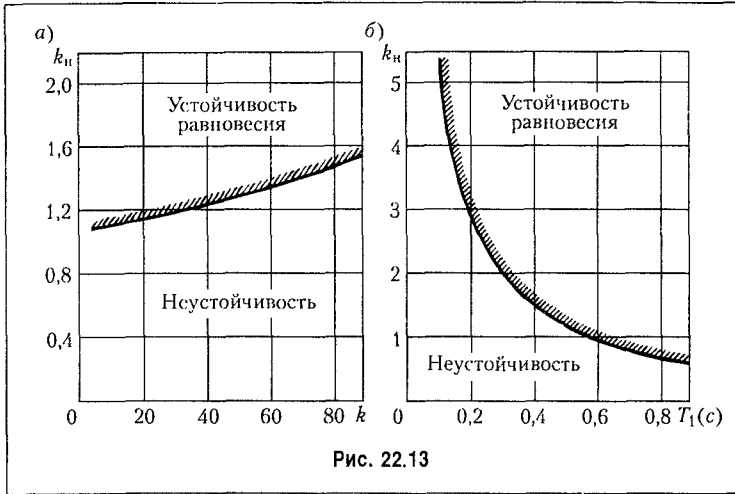


рис. 22.10 размерности переменных  $f(t)$  и  $x$  связаны между собой именно через коэффициент  $k = k_1 k_2$ .

Вычислив величину  $I_3$  по формуле (22.40) при заданных выше параметрах системы, из (22.44) найдем

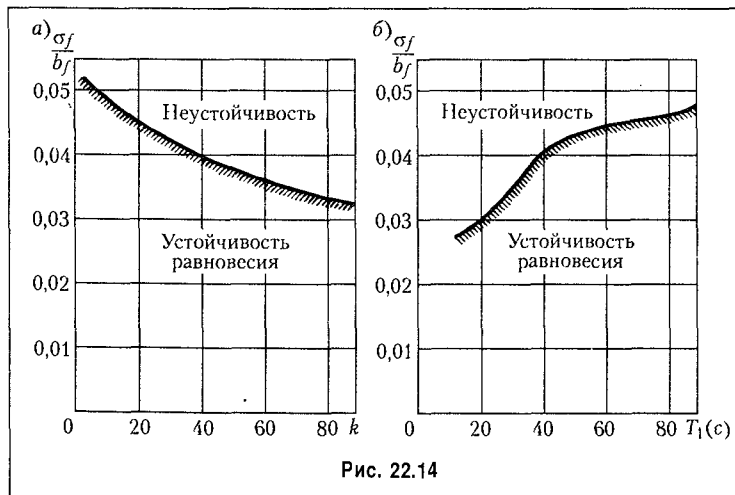
$$\frac{\sigma_f}{b_f} = 0,00437.$$

Это означает, что только при уровне по-

мех, не превышающем указанного значения, данная система остается устойчивой. Далее она теряет устойчивость по полезному сигналу.

Выясним теперь влияние параметров  $k$  и  $T_1$  на устойчивость системы в присутствии помех. Для этого по формуле (22.43) найдем сначала границы устойчивости системы на плоскостях параметров  $k, k_{II}$  и  $T_1, k_{II}$  (рис. 22.13, а и б). На границе устойчивости для каждого значения  $k_{II}$  по графику рис. 22.12 (или по приведенной выше таблице) находим величину  $\sigma_1$ , а по ней согласно (22.44) и среднеквадратичное значение внешней помехи, при которой теряется устойчивость системы:

$$\frac{\sigma_f}{b_f} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\beta I_3}}. \tag{22.45}$$



Это позволяет перестроить найденные на рис. 22.13 границы устойчивости в новые координаты соответственно

$$k, \frac{\sigma_f}{b_f} \quad \text{и} \quad T_1, \frac{\sigma_f}{b_f}$$

(рис. 22.14, а и б). При этом надо иметь в виду, что величина  $I_3$ , согласно (22.40), зависит от параметра  $T_1$  вследствие чего вы-

числение по формуле (22.45) при построении графика рис. 22.14, б необходимо производить с учетом изменения  $I_3$  при изменении  $T_1$ .

Как видим, с увеличением параметра  $k$  опасный уровень помех снижается, а при увеличении параметра  $T_1$  он растет. Это вполне естественно, поскольку  $T_1$  является, согласно рис. 22.10, коэффициентом интенсивности введения производной, улучшающим стабилизацию системы.

По линейному уравнению, вытекающему из (22.38) и (22.41),

$$[p^3(T_2 p + 1) + (k_2 k_{oc} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) k_n] \tilde{x} = 0,$$

используя линейную теорию автоматического управления можно исследовать также и все другие динамические качества данной нелинейной системы по полезному сигналу в присутствии помех, учитывая, однако, при этом все время, что величина коэффициента  $k_n$  зависит от уровня помех  $\sigma_f$ , от общей структуры и от некоторых параметров системы.

## Глава 23 НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

### § 23.1. Общие сведения

Разделим рассматриваемые ниже нелинейные дискретные системы на два класса.

К первому классу отнесем импульсные и цифровые системы с амплитудно-импульсной модуляцией. Импульсные системы этого класса становятся нелинейными при наличии нелинейностей в их непрерывных частях, а цифровые системы всегда нелинейны из-за наличия квантования по уровню в преобразователях АЦП и ЦАП (см. § 15.1). Нелинейными могут быть и их непрерывные части, а также реализуемые ЦВМ алгоритмы управления.

Исследование цифровых систем при учете всех указанных нелинейностей представляет собой очень сложную задачу. Поэтому будем полагать, что алгоритмы управления являются линейными, а квантованием по уровню можно пренебречь. Последнее, как отмечалось в § 15.1, допустимо при большом числе разрядов в АЦП и ЦАП. Влияние квантования по уровню на протекающие в системах процессы рассмотрено в работе [8].

По отношению к нелинейностям непрерывных частей ограничимся случаем, когда нелинейное звено описывается зависимостью (16.1)  $x_2 = F(x_1)$  и включено непосредственно за формирующим устройством.

Ко второму классу отнесем импульсные и цифровые системы с широтно-импульсной модуляцией при сделанных выше допущениях по отношению к квантованию по уровню и алгоритму управления. Нелинейность непрерывной части системы учитывать не будем, так как широтно-импульсный модулятор сам является нелинейным звеном (см. § 14.1). В ряде случаев он нейтрализует влияние включенного за ним нелинейного звена. Это связано с тем, что сигнал на выходе широтно-импульсного модулятора (см. рис. 14.3) может принимать одно из трех фиксированных значений:  $+h$ ,  $-h$

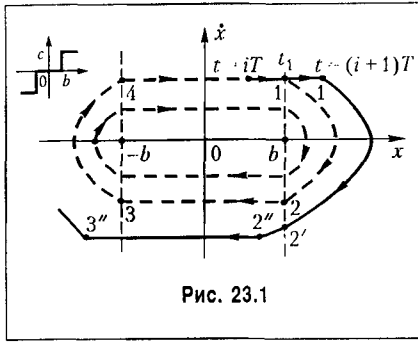


Рис. 23.1

или 0. Поэтому, если  $F(0) = 0$ , то сигнал на выходе нелинейного звена тоже может принимать одно из трех фиксированных значений:  $F(h)$ ,  $F(-h)$  или 0. Таким образом, влияние нелинейности  $x_2 = F(x_1)$  или  $x_2 = F(x_1, px_1)$  при  $F(0) = 0$  сводится лишь к изменению амплитуды импульсов, что может быть учтено заранее.

Процессы в нелинейных дискретных системах даже при отсутствии внешних воздействий могут существенно отличаться от процессов в нелинейных непрерывных системах. В первую очередь это обусловлено наличием квантования по времени.

Влияние квантования по времени иллюстрирует рис. 23.1, где пунктиром показаны фазовые траектории непрерывной системы, нелинейное звено которой имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности. В этой системе существуют периодические колебания, амплитуда которых зависит от начальных условий. Реле срабатывает и отпускает при попадании изображающей точки на линии переключения  $x = b$  (точки 1 и 2) и  $x = -b$  (точки 3 и 4). При данной нелинейности такие процессы будут существовать, например, в системе, рассмотренной в § 17.1 (пример 2).

При наличии квантования по времени в импульсной системе с амплитудно-импульсной модуляцией переключения реле могут происходить только в дискретные моменты времени  $t = iT$ . Это означает (см. рис. 23.1), что в общем случае реле сработает не в момент времени  $t_1$  (точка 1); а в момент  $t'_1 = t_1 + \tau_1$  (точка 1'), где  $0 \leq \tau_1 < T$ . Соответственно, отпускание реле произойдет не в точке 2', а с запаздыванием по времени на величину  $\tau_2$ , где  $0 \leq \tau_2 < T$ , причем  $\tau_2 \neq \tau_1$  (точка 2''). Таким образом, система стала неустойчивой.

Следует отметить, что в реальной непрерывной системе тоже существует запаздывание при срабатывании реле  $\tau_{ср}$  и его отпускании  $\tau_{отп}$ . Однако величины  $\tau_{ср}$  и  $\tau_{отп}$  зависят от технических характеристик реле и остаются постоянными, тогда как  $\tau_1$  и  $\tau_2$  изменяются в процессе работы системы.

В системах с широтно-импульсной модуляцией процессы будут гораздо более сложными, так как в них изменяется длительность импульсов.

В нелинейных дискретных системах при определенных условиях могут возникать периодические режимы. В случае их устойчивости они условно могут рассматриваться как автоколебания. Однако из-за наличия квантования по времени периодические режимы существенно отличаются от автоколебаний, определение которых было дано в § 16.1.

Во-первых, частота периодических режимов жестко связана с периодом дискретности  $T$ . Для симметричных режимов

$$\Omega = \frac{\pi}{NT}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (23.1)$$

где  $N$  — относительный полупериод колебаний. Это означает, что все возможные частоты периодических режимов известны заранее.

Во-вторых, при установлении периодического режима в системах, непрерывные части которых содержат интегрирующие звенья, может появляться постоянная или медленно изменяющаяся составляющая ошибки даже при отсутствии внешних воздействий и при симметричной нелинейной характеристике.

В-третьих, в одной и той же системе могут возникать периодические режимы с различными частотами колебаний. При этом с течением времени частота может изменяться.

Исследование нелинейных дискретных систем представляет собой сложную задачу. Ниже будут рассмотрены лишь некоторые подходы к ее решению.

### § 23.2. Системы с амплитудно-импульсной модуляцией

С учетом сделанных в § 23.1 допущений структурную схему нелинейной дискретной системы с амплитудно-импульсной модуляцией можно представить так, как показано на рис. 23.2, а. Она отличается от изображенной на рис. 15.3 наличием в непрерывной части системы нелинейного звена с характеристикой  $u_1^* = F(u^*)$ . Для простоты возмущающее воздействие  $f(t)$  здесь не показано.

Преобразуем исходную схему (рис. 23.2, а) так, как показано на рис. 23.2, б. Очевидно, что если характеристика  $F(u^*)$  однозначна и  $F(0) = 0$ , то это всегда возможно. Для преобразованной схемы можно определить передаточную функцию приведенной линейной непрерывной части системы (14.60) или (14.61)

$$W_0(z) = \frac{Y(z)}{U_1(z)} = \frac{B_0(z)}{C_0(z)} \tag{23.2}$$

и найти соответствующее ей разностное уравнение (4.11). Если его дополнить разностным уравнением нелинейного звена

$$u_1(i) = F[u(i)], \tag{23.3}$$

разностным уравнением (15.7), соответствующим передаточной функции  $D(z)$ , и уравнением замыкания  $x(i) = g(i) - y(i)$ , то получим систему разностных уравнений для замкнутой системы. Решая эти уравнения последовательно шаг за шагом при заданных внешних воздействиях и начальных условиях можно сравнительно просто исследовать процессы в системе.

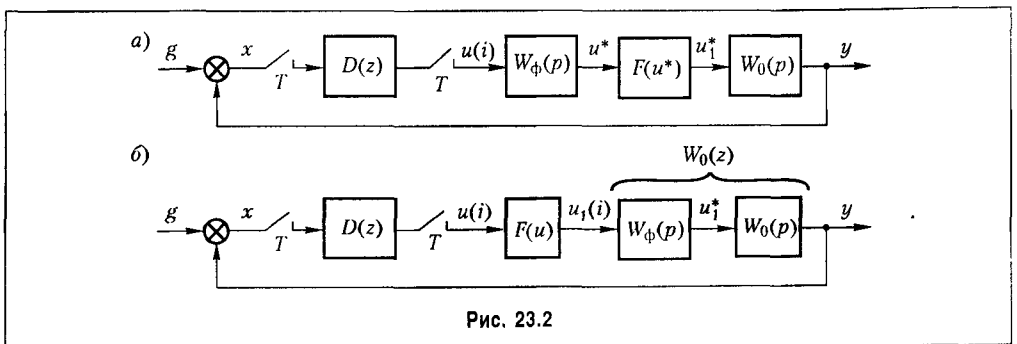


Рис. 23.2

**Пример 1.** Пусть передаточная функция непрерывной части системы  $W_0(p) = k_0/p^2$ , где  $k_0 = 20 \text{ с}^{-2}$ . Период дискретности  $T = 0,1 \text{ с}$ . Передаточная функция приведенной непрерывной части системы (23.2) имеет вид

$$W_0(z) = \frac{Y(z)}{U_1(z)} = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} = \frac{k_0 T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}. \quad (23.4)$$

Для коррекции динамических свойств системы применено дискретное корректирующее устройство, передаточная функция которого

$$D(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = \frac{z-0,8}{z}. \quad (23.5)$$

Нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности:

$$u_1 = F(u) = \begin{cases} c \operatorname{sign} u & \text{при } |u| \geq b, \\ 0 & \text{при } |u| < b, \end{cases} \quad (23.6)$$

где  $c = 2$ ,  $b = 0,1$ .

Задающее воздействие  $g(t) = 0$ . Начальные условия  $y(0) = 0,4$ ;  $y(-1) = 0$ .

Запишем разностные уравнения, соответствующие (23.4) – (23.6):

$$y(i) = 2y(i-1) - y(i-2) + 0,1 [u_1(i-1) + u_1(i-2)];$$

$$u_1(i) = \begin{cases} 2 \operatorname{sign} u(i) & \text{при } |u(i)| \geq 0,1; \\ 0 & \text{при } |u(i)| < 0,1; \end{cases}$$

$$u(i) = x(i) - 0,8x(i-1);$$

$$x(i) = g(i) - y(i) = -y(i).$$

Решив эти уравнения последовательно шаг за шагом при  $i = 0, 1, 2, \dots$ , начиная с последнего, получим процесс, представленный на рис. 23.3. Таким образом, в системе устанавливаются периодические колебания с амплитудой  $A = 0,2$  и периодом, равным  $4T$  (относительный полупериод колебаний  $N = 2$ ). Частота колебаний (23.1)  $\Omega = \pi/2T$ .

Заметим, что таким же способом можно исследовать поведение системы и при нелинейном алгоритме управления  $u(i) = \Phi[x(i)]$ .

Для исследования устойчивости нелинейных систем с амплитудно-импульсной модуляцией можно использовать частотный метод В. М. Попова и метод гармонической линеаризации.

Первый из них (см. § 17.3) применительно к дискретным системам имеет лишь ту осо-

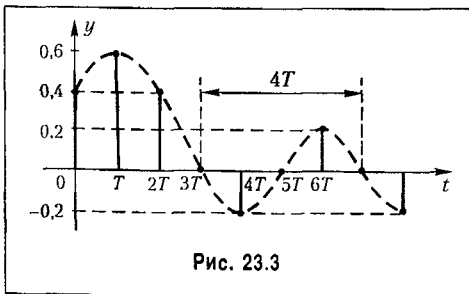


Рис. 23.3

бенность, что передаточной функцией линейной части системы (см. рис. 23.2, б) будет

$$W(z) = W_0(z)D(z). \quad (23.7)$$

Для получения частотной передаточной функции удобно использовать псевдочастоту  $\lambda$  (14.100) и замену (14.99). Тогда

$$W(j\lambda) = W_0(j\lambda)D(j\lambda) \quad (23.8)$$

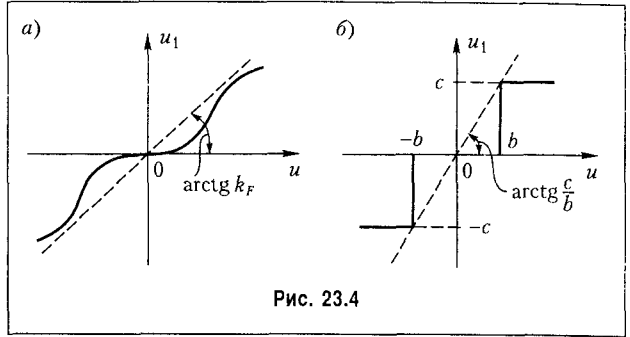


Рис. 23.4

и условие (17.86) примет вид

$$U^*(\lambda) - h_0 V^*(\lambda) + \frac{1}{k_F} > 0, \quad (23.9)$$

где

$$U^*(\lambda) = \operatorname{Re} W(j\lambda), \quad V^* = \lambda T_0 \operatorname{Im} W(j\lambda), \quad (23.10)$$

$T_0 = 1$  с — нормирующий множитель, а коэффициент  $k_F$  определяет левую границу сектора, к которому принадлежит характеристика нелинейного звена (рис. 23.4).

Если коэффициент  $k_F$  отнести к линейной части системы, то вместо (23.9) получим:

$$k_F U^*(\lambda) - h_0 k_F V^*(\lambda) + 1 > 0. \quad (23.11)$$

Это означает, что для установления устойчивости системы достаточно подобрать такую прямую на плоскости  $W^*(j\lambda)$ , проходящую через точку  $(-1; j0)$ , чтобы вся кривая

$$k_F W^*(j\lambda) = k_F U^*(\lambda) + j k_F V^*(\lambda) \quad (23.12)$$

лежала справа от этой прямой.

Для систем высокого порядка значения  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  проще находить по известным формулам:

$$U(\lambda) = A(\lambda) \cos \psi(\lambda), \quad V(\lambda) = A(\lambda) \sin \psi(\lambda), \quad (23.13)$$

где  $A(\lambda)$  и  $\psi(\lambda)$  — модуль и аргумент частотной передаточной функции (23.8). В этом случае кривая  $k_F W^*(j\lambda)$  определяется следующим образом:

$$k_F W^*(j\lambda) = k_F A(\lambda) [\cos \psi(\lambda) + j \lambda T_0 \sin \psi(\lambda)]. \quad (23.14)$$

**Пример 2.** Пусть передаточная функция непрерывной части системы

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p(T_1 p + 1)} = \frac{k_0}{p} - \frac{k_0 T_1}{T_1 p + 1}, \quad (23.15)$$

передаточная функция дискретного корректирующего устройства  $D(z) = 1$ , постоянная времени  $T_1 = 0,2$  с, период дискретности  $T = 0,1$  с, нелинейная характеристика релейная с зоной нечувствительности (рис. 23.4, б),  $c = 1$ ,  $b = 0,2$ .

Отметим, что непрерывная система с передаточной функцией линейной части (23.15) и данной характеристикой нелинейного звена устойчива, так как характеристика

$$W^*(j\omega) = -\frac{k_0 T_1}{1 + T_1^2 \omega^2} - j \frac{k_0 T_0}{1 + T_1^2 \omega^2}$$

целиком располагается в третьем квадранте плоскости  $W^*(j\omega)$ . Этот вывод совпадает с полученным в § 17.1 (пример 3, рис. 17.3, в).

Для исследования дискретной системы находим передаточную функцию (23.7):

$$W(z) = W_0(z) = \frac{k_0 T}{z-1} - \frac{k_0 T_1(1-d)}{z-d}, \quad d = e^{-T/T_1}.$$

Соответствующая ей частотная передаточная функция (23.8)

$$W(j\lambda) = \frac{k_0 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\lambda(T_2 - T_1)\right]}{j\lambda(1 + j\lambda T_2)}, \quad (23.16)$$

где

$$T_2 = \frac{T}{2} \frac{1+d}{1-d} = \frac{T}{2} \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}.$$

При заданных значениях  $T$  и  $T_1$  отношение  $T/2T_1$  значительно меньше единицы. Поэтому приближенно можно принять

$$\operatorname{cth} \frac{T}{2T_1} \approx \frac{2T_1}{T}, \quad T_2 \approx T_1.$$

Тогда выражение (23.16) упрощается:

$$W(j\lambda) \approx \frac{k_0 \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda(1 + j\lambda T_1)}. \quad (23.17)$$

Отсюда с учетом (23.10) и (23.12) находим:

$$k_F U^*(\lambda) = -k \frac{T_1 + \frac{T}{2}}{1 + \lambda^2 T_1^2}; \quad (23.18)$$



$$k_F V^*(\lambda) = -kT_0 \frac{1 - \lambda^2 \frac{T T_1}{2}}{1 + \lambda^2 T_1^2}, \quad (23.19)$$

где  $k = k_F k_0 = \frac{c}{b} k_0 = 5k_0$ .

Кривая (23.12) изображена на рис. 23.5, а. Там же в координатах  $U$  и  $V$  пунктирной кривой показана АФХ приведенной линейной части системы, соответствующая (23.17), при  $k = k_0 k_F$ . Обе характеристики пересекают ось абсцисс при значении псевдочастоты

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2}{T T_1}} \quad (23.20)$$

на расстоянии  $kT/2$  от начала координат.

Из рис. 23.5, а видно, что достаточное условие положения равновесия выполняется при  $kT < 2$ . Заметим, что в данном случае оно совпадает с необходимым и достаточным условием устойчивости замкнутой линейной дискретной системы (см. гл. 14), у которой частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид (23.16), а коэффициент передачи  $k = k_0 k_F$ .

При  $kT > 2$  нелинейная дискретная система может стать неустойчивой. Для подтверждения этого на рис. 23.5, б показан фрагмент кривой переходного процесса, построенной аналогично тому, как это сделано в примере 1, при  $kT = 4$ ,  $g = 0$  и начальных условиях  $x(0) = 0,2$ ;  $x(-1) = 0$ . Видно, что в системе устанавливаются периодические колебания с периодом, равным  $8T$  ( $N = 4$ ). Следует отметить, что выполнение условия  $kT < 2$  не гарантирует устойчивость системы при наличии внешних воздействий.

Метод гармонической линеаризации при его применении для исследования нелинейных дискретных систем в значительной степени утрачивает свои ценные качества. Рассмотрим основы этого метода.

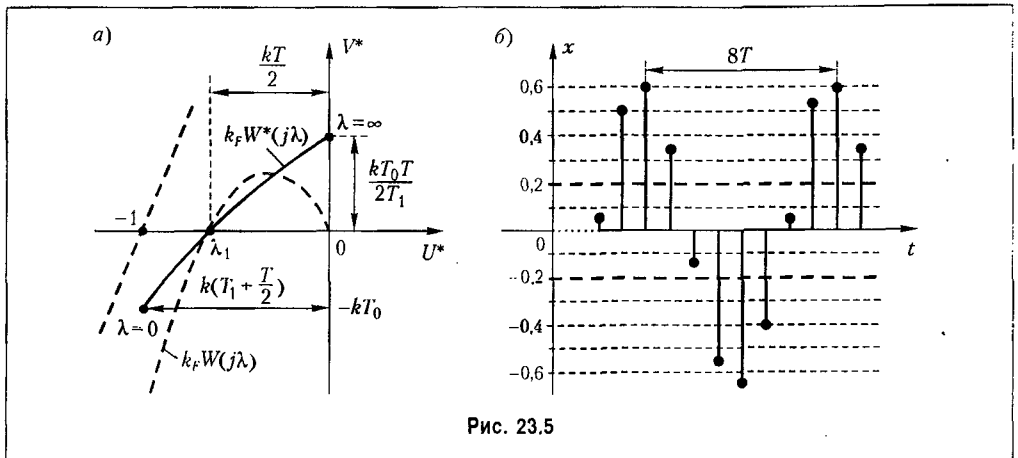


Рис. 23.5

Пусть в системе (рис. 23.2, б) существует периодический режим с частотой (23.1). Положим, что на входе нелинейного звена значения  $u(i)$  изменяются по гармоническому закону:

$$u(i) = A \sin\left(\frac{\pi}{N}i + \varphi\right). \quad (23.21)$$

Тогда на его выходе получим сигнал

$$u_1(i) = F[u(i)] = F\left[A \sin\left(\frac{\pi}{N}i + \varphi\right)\right]. \quad (23.22)$$

Один и тот же тип последовательности (23.22) может существовать при различных значениях фазы  $\varphi$  сигнала (23.21). Например, если характеристика нелинейного звена идеальная релейная (см. рис. 23.4, б при  $b = 0$ ), т. е.

$$F[u(i)] = c \operatorname{sign} u(i), \quad (23.23)$$

то (рис. 23.6) при  $N = 1$  фаза может изменяться от 0 до  $\pi$ , при  $N = 2$  — от 0 до  $\pi/2$ , а в общем случае

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{N}. \quad (23.24)$$

Последовательность (23.22) не может быть представлена рядом Фурье, как это делалось в § 18.1 для непрерывных функций. Поэтому воспользуемся формулами Бесселя для приближенного гармонического анализа. Выделив в получающейся при этом

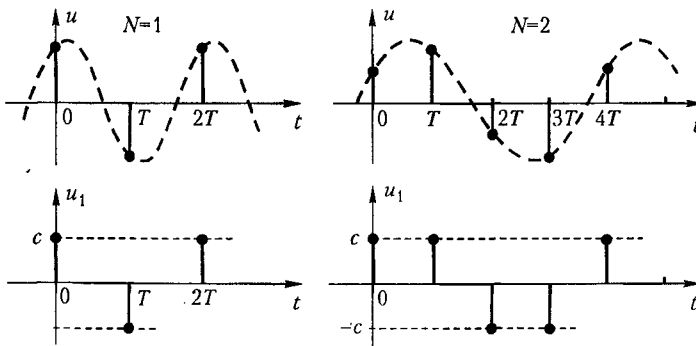


Рис. 23.6

тригонометрической сумме слагаемые с частотой (23.1), соответствующие первой гармонике, получим:

$$u_1(i) = \frac{C_0}{2} + \frac{C_1}{2} \cos \frac{\pi}{N} i, \quad N = 1; \quad (23.25)$$

$$u_1(i) = \frac{C_0}{2} + C_1 \cos \frac{\pi}{N} i + D_1 \sin \frac{\pi}{N} i, \quad N = 2,$$

где

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2N-1} F[u(i)], \quad C_1 = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2N-1} F[u(i)] \cos \frac{v\pi}{N}, \quad D_1 = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2N-1} F[u(i)] \sin \frac{v\pi}{N}. \quad (23.26)$$

Для симметричных периодических режимов (см., например, рис. 23.6)  $C_0 = 0$ .

В качестве примера определим коэффициенты гармонической линейризации для пелинейности (23.23). В соответствии с рис. 23.6 по формулам (23.26) находим:

$$C_1 = 2c, \quad D_1 = 0, \quad N = 1; \quad (23.27)$$

$$C_1 = A_N \sin \left( \frac{2N-1}{2N} \pi \right), \quad D_1 = A_N \cos \left( \frac{2N-1}{2N} \pi \right), \quad N \geq 2,$$

где

$$A_N = \frac{2c}{N} \left( \sin \frac{\pi}{2N} \right)^{-1}. \quad (23.28)$$

С учетом (23.27) выражения (23.25) принимают вид:

$$u_1(i) = A_N \sin \left( \frac{\pi}{N} i + \frac{\pi}{2N} \right), \quad (23.29)$$

где амплитуда  $A_N = C$  при  $N = 1$  и определяется по формуле (23.28) при  $N \geq 2$ . Следует отметить, что при  $N = 1$  и  $N = 2$  выражение (23.29) является точным.

Из (23.21) и (23.29), используя символическую запись

$$u(i) = A e^{j \left( \frac{\pi}{N} i + \varphi \right)} = A e^{j\varphi} e^{j \frac{\pi}{N} i};$$

$$u_1(i) = A_N e^{j \left( \frac{\pi}{N} i + \frac{\pi}{2N} \right)} = A_N e^{j \frac{\pi}{2N}} e^{j \frac{\pi}{N} i},$$

с учетом (23.24) определяем коэффициент гармонической линейризации

$$q = q(A, \varphi, N) = \frac{A_N}{A} e^{j \left( \frac{\pi}{2N} - \varphi \right)}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{N}. \quad (23.30)$$

В отличие от (18.18) он зависит не только от амплитуды  $A$ , но и от  $\varphi$  и  $N$ .

Далее для определения периодических режимов можно было бы использовать способы, аналогичные рассмотренным в § 18.2. Однако даже в данном случае при простейшей характеристике нелинейного звена этот процесс оказывается трудоемким. Кроме того, для других нелинейностей при получении коэффициентов гармонической линеаризации возникают большие сложности.

Вместе с тем в ряде случаев исследование периодических режимов можно произвести более простым способом.

Пусть, например, характеристика нелинейного звена имеет вид (23.23). Будем использовать псевдочастоту  $\lambda$  (14.100), значения которой на фиксированных частотах (23.1)

$$\lambda_N = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega T}{2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N}. \quad (23.31)$$

Так как на входе линейной части (см. рис. 23.2, б) действует гармоническая последовательность (23.29), то при отсутствии задающего воздействия  $x(i) = -y(i)$  и на входе нелинейного звена образуется сигнал

$$u(i) = A_N |W(j\lambda_N)| \sin \left[ \frac{\pi}{2N} i + \frac{\pi}{2N} + \psi(\lambda_N) + \pi \right], \quad (23.32)$$

где  $W(j\lambda)$  — частотная передаточная функция линейной части (23.8), а  $\psi(\lambda)$  — ее аргумент.

Фазовый сдвиг на величину  $\pi$  вносится сравнивающим устройством. Сопоставив (23.32) с (23.21) сразу получим:

$$A = A_N |W(j\lambda_N)|, \quad (23.33)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2N} + \psi(\lambda_N) + \pi. \quad (23.34)$$

Так как фаза  $\varphi$  может изменяться в пределах (23.24) то

$$-\pi - \frac{\pi}{2N} < \psi(\lambda_N) < -\pi + \frac{\pi}{2N}. \quad (23.35)$$

Из (23.35) следует, что периодический режим с  $N \geq 2$  может существовать, если

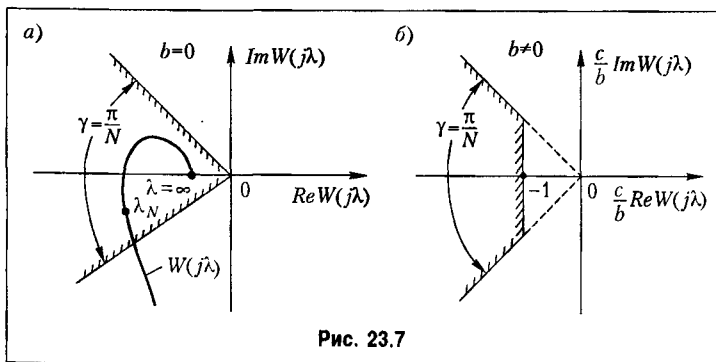


Рис. 23.7

АФХ  $W(j\lambda)$  на фиксированных частотах  $\lambda_N$  заходит в сектор с углом раствора  $\gamma = \frac{\pi}{N}$  (рис. 23.7, а). Для режима  $N = 1$  псевдочастота  $\lambda_N = \infty$ . Следовательно, он возможен, если  $|W(j\infty)| \neq 0$ , т. е. если АФХ заканчивается на оси абсцисс.

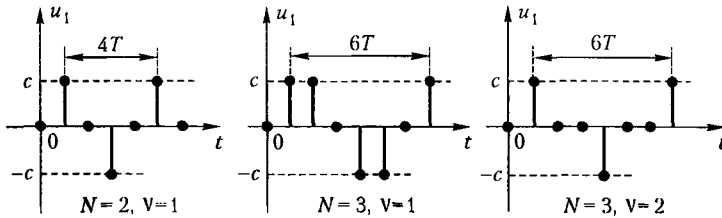


Рис. 23.8

Из рис. 23.7, а видно, что в одной и той же системе могут существовать периодические режимы с различными значениями полупериода  $N$ , причем с течением времени может происходить переход от одного значения  $N$  к другому.

Следует также отметить, что при возникновении периодического режима в системе может появляться постоянная или медленно изменяющаяся составляющая ошибки  $x_0$ , величина которой зависит от начальных условий. Это объясняется тем (см. рис. 23.6), что одна и та же последовательность  $u_1(i)$  может существовать и при сдвиге последовательности  $u(i)$  на некоторую величину  $u_0$ . Например, на рис. 23.5, б  $x_0 \approx -0,06$ .

Формулы (23.31)–(23.35) применимы для определения периодических режимов и в системах с другими нелинейностями, отличными от (23.31), если эти нелинейности имеют ограничение (насыщение), т. е. если при определенных условиях сигнал  $u_1(i)$  может принимать лишь два фиксированных значения:  $+c$  или  $-c$ .

Пусть, например, характеристика нелинейного звена является релейной с зоной нечувствительности (рис. 23.4, б). Тогда для существования в системе рассмотренных выше режимов с  $N = 1, 2, \dots$  кроме фазового условия (23.35) должно выполняться дополнительное амплитудное условие

$$u(k)_{\min} \geq b, \tag{23.36}$$

где  $u(k)_{\min}$  — минимальная из ординат последовательности (23.21):

$$u(k) = A \sin\left(\frac{\pi}{N}k + \varphi\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{23.37}$$

Если же при  $N \geq 2$  для  $v$  из ординат (23.37) при  $v \leq N-1$  условие (23.36) не выполняется, то соответствующие значения последовательности  $u_1(i)$  становятся равными нулю (рис. 23.8).

Тогда по формулам (23.25) и (23.26) вместо (23.28) получим:

$$A_N = \frac{2C}{N} \left( \sin \frac{\pi}{2N} \right)^{-1} \cos \frac{\pi v}{2N}, \quad N \geq 2, \quad v = 0, 1, \dots, N-1. \tag{23.38}$$

Выражение (23.28) представляет собой частный случай (23.38) при  $v = 0$ .

Последовательность на выходе нелинейного звена

$$u_1(i) = A_N \sin\left(\frac{\pi}{N}i + \frac{v+1}{2N}\pi\right), \tag{23.39}$$

а фазовый сдвиг  $\varphi$  в (23.21)

$$\varphi = \pi + \frac{\nu+1}{2N}\pi + \psi(\lambda_N). \quad (23.40)$$

Фаза  $\varphi$  может изменяться в пределах (см. рис. 23.8)

$$\frac{\pi\nu}{2N} < \varphi < \frac{\pi}{N} + \frac{\pi\nu}{2N}. \quad (23.41)$$

Отсюда с учетом (23.40) находим фазовое условие существования периодических режимов

$$-\pi - \frac{\pi}{2N} < \psi_1(\lambda_N) < -\pi + \frac{\pi}{2N}, \quad (23.42)$$

совпадающие с (23.35).

Амплитудные условия можно получить непосредственно из рис. 23.8. Так, при  $N = 3$ ,  $\nu = 1$  они имеют вид  $u(0) < b$ ,  $u(1) \geq b$ ,  $u(2) \geq b$ , где ординаты  $u(k)$  определяются по формуле (23.37) с учетом новых выражений для  $A$  и  $\varphi$ .

Во многих случаях вопрос об отыскании периодических режимов не ставится. Наоборот, может быть поставлена задача так синтезировать систему, чтобы исключить возможность появления этих режимов, что часто (см. гл. 18) гарантирует обеспечения устойчивости системы.

Для системы с нелинейностью релейного типа с зоной нечувствительности (рис. 23.4, б) периодические режимы с любыми значениями  $N$  и  $\nu$  невозможны, если не выполняются фазовое условие (23.42) или сформулированные выше амплитудные условия. Можно показать, что это с некоторым запасом обеспечивается, если АФХ

линейной части с присоединенным к пей коэффициентом  $k_F = c/b$ , т. е.  $k_F W(j\lambda)$ , на фиксированных частотах  $\lambda_N$  не попадает в запретную область, изображенную на рис. 23.7, б.

В качестве иллюстрации на рис. 23.9 построены АФХ для системы, исследованной в примере 2. При  $kT = 4$  достаточное условие устойчивости не выполняется (см. рис. 23.5, а). При этом, как следует из рис. 23.9, в системе могут возникать

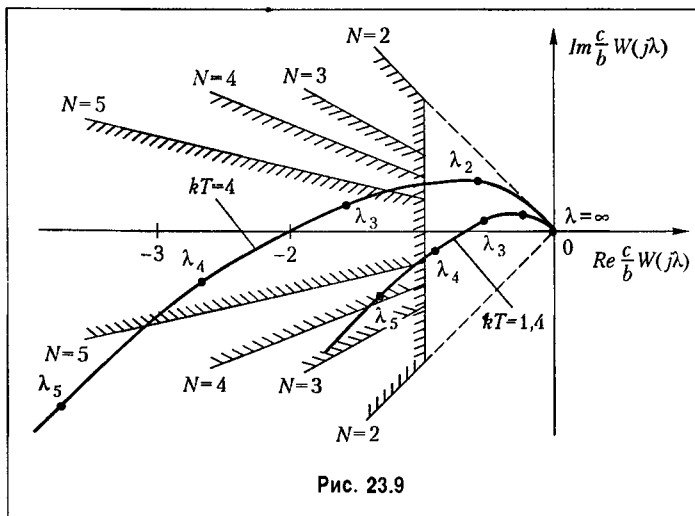


Рис. 23.9

периодические режимы с  $N = 3$  и  $N = 4$ . Режим  $N = 4$  при  $\nu = 1$  показан на рис. 23.5, б. При  $kT = 1,4$  периодические режимы отсутствуют, а система устойчива.

Методы исследования нелинейных дискретных систем с амплитудно-импульсной модуляцией рассмотрены также в работах [8, 27, 49, 73, 79, 97] и др.

### § 23.3. Системы с широтно-импульсной модуляцией

В процессе широтно-импульсной модуляции (см. § 14.1) изменяется скважность (ширина) импульсов, а их амплитуда (высота) остается постоянной. В зависимости от того, как осуществляется изменение скважности, различают (см. рис. 14.3) широтно-импульсную модуляцию 1-го рода (ШИМ-1) и 2-го рода (ШИМ-2).

Структурная схема цифровой системы с ШИМ-1 с учетом сделанных в § 23.1 допущений представлена на рис. 23.10, где широтно-импульсную модуляцию осуществляет ЦАП. При отсутствии ЦВМ  $D(z) = 1$  и система превращается в импульсную, в которой широтно-импульсный модулятор представляет собой самостоятельное конструктивно законченное устройство.

Сигнал на выходе модулятора согласно (14.3) и (14.4) при  $k_{\text{ш}} = 1/\beta$

$$u^*(t) = \begin{cases} h \operatorname{sign} u(i) & \text{при } iT \leq t < (i + \gamma_i)T; \\ 0 & \text{при } (i + \gamma_i)T \leq t < (i + 1)T; \end{cases} \quad (23.43)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{\beta} |u(i)| & \text{при } \frac{1}{\beta} |u(i)| \leq 1; \\ 1 & \text{при } \frac{1}{\beta} |u(i)| \geq 1. \end{cases} \quad (23.44)$$

При ШИМ-2 (см. рис. 14.3, б) скважность импульсов определяется в результате сравнения непрерывного входного сигнала с опорным сигналом. Поэтому широтно-импульсный модулятор «не вписывается» в структуру ЦАП и представляет собой самостоятельное устройство. Сама система в этом случае строится как импульсная (рис. 23.11, а).

В качестве опорного обычно используется пилообразный сигнал (см. рис. 14.3, б)

$$u_{\text{он}}(t - iT) = \beta T^{-1}(t - iT). \quad (23.45)$$

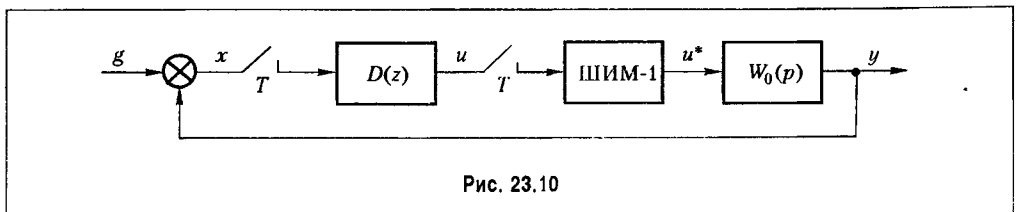


Рис. 23.10

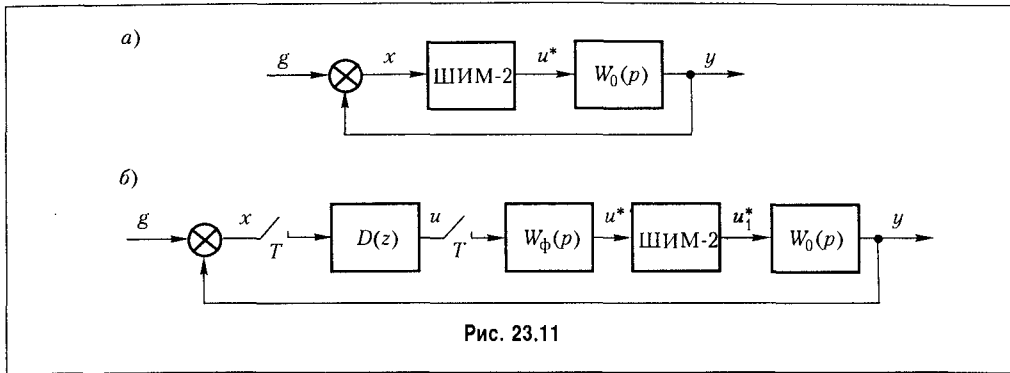


Рис. 23.11

В этом случае скважность импульсов определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$x(i + \gamma_i) \operatorname{sign} x(i) = \beta \gamma_i, \quad (23.46)$$

если таковой имеется. В противном случае  $\gamma_i = 1$ . Например, если на интервалах  $iT \leq t < (i+1)T$  сигнал ошибки остается постоянным и равным  $x(i)$ , то из (23.46) получим выражение

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{\beta} |x(i)| & \text{при } \frac{1}{\beta} |x(i)| \leq 1, \\ 1 & \text{при } \frac{1}{\beta} |x(i)| \geq 1, \end{cases} \quad (23.47)$$

аналогичное (23.44).

Из рассмотренного примера следует, что введение в систему с ЦВМ широтно-импульсного модулятора 2-го рода (рис. 23.11, б) не имеет смысла. Действительно, чтобы получить на его входе непрерывный сигнал  $u^*$ , ЦАП должен формировать модулированные по амплитуде импульсы, а формирующее устройство должно представлять собой экстраполятор нулевого порядка. Но тогда

$$u^*(t) = u(i), \quad iT \leq t < (i+1)T,$$

и выражение для скважности импульсов, как и (23.47), совпадает с (23.44). А это означает, что с точки зрения протекающих в системе процессов схемы рис. 23.10 и рис. 23.11, б эквивалентны, но первая из них конструктивно проще.

Широтно-импульсный модулятор представляет собой нелинейное звено (см. § 14.1). Поэтому определить передаточную функцию приведенной непрерывной части, как это делалось в системах с амплитудно-импульсной модуляцией (рис. 23.2, б), нельзя. Однако можно найти разностное уравнение линейной непрерывной части вместе с широтно-импульсным модулятором минуя определение передаточной функции. Эту задачу можно решить двумя способами.

Первый способ основан на использовании уравнений состояния.



Пусть для системы с ШИМ-1 (рис. 23.10) передаточной функции  $W_0(p)$  соответствуют уравнения состояния (14.71)

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u^*, \\ y &= \bar{c}^T \bar{x}.\end{aligned}\quad (23.48)$$

Решение первого из них для дискретных моментов времени  $t = iT$  имеет вид (14.73)

$$\bar{x}(i) = e^{\bar{A}iT} \bar{x}(0) + \int_0^{iT} e^{\bar{A}(iT-\tau)} \bar{b}u^*(\tau) d\tau, \quad (23.49)$$

где  $u^*$  изменяется по закону (23.43).

Из (23.49) с учетом (23.43) последовательно шаг за шагом получим

$$\bar{x}(i+1) = e^{\bar{A}T} \bar{x}(i) + h \text{sign } u(i) \int_{(1-\gamma_i)T}^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{b} d\sigma. \quad (23.50)$$

Таким образом, разностными уравнениями линейной непрерывной части системы вместе с широтно-импульсным модулятором будут

$$\begin{aligned}\bar{x}(i+1) &= \bar{A}^* \bar{x}(i) + h \bar{b}^* \text{sign } u(i); \\ y(i) &= \bar{c}^T \bar{x}(i),\end{aligned}\quad (23.51)$$

где

$$\bar{A}^* = e^{\bar{A}T}, \quad \bar{b}^* = \int_{(1-\gamma_i)T}^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{b} d\sigma. \quad (23.52)$$

Влияние возмущения можно учесть точно так же, как это сделано в уравнении (14.73). Выражения для матриц  $\bar{A}^*$ ,  $\bar{b}^*$ ,  $\bar{m}^*$ , соответствующих типовым линейным непрерывным частям, приведены в [57].

Второй способ позволяет определить не векторно-матричные уравнения (23.51), а разностное уравнение  $n$ -го порядка, в ряде случаев более удобное для практического использования.

Еначале отметим, что если в (23.50) и (23.52) заменить  $\gamma_i$  на  $\gamma$ , а  $h \text{sign } u(i)$  на  $u(i)$ , то получим линейное векторно-матричное уравнение приведенной непрерывной части системы с амплитудно-импульсной модуляцией при  $\gamma \leq 1$ :

$$\bar{x}(i+1) = \bar{A}^* \bar{x}(i) + \bar{b}^* u(i), \quad (23.53)$$

где

$$\bar{A}^* = e^{\bar{A}T}, \quad \bar{b}^* = \int_{(1-\gamma)T}^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{b} d\sigma, \quad (23.54)$$

совпадающее при  $\gamma = 1$  с уравнением (14.75).

Уравнению (23.53), как показано в главе 14, соответствует передаточная функция

$$W_0(z, \gamma) = \frac{Y(z)}{U(z)} = c^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{b}^* = \frac{B_0(z, \gamma)}{C_0(z)} \quad (23.55)$$

и разностное уравнение

$$\sum_{v=0}^n c_v y(i+n-v) = \sum_{v=0}^m b_v(\gamma) u(i+m-v). \quad (23.56)$$

От уравнения (23.53) обратной заменой  $\gamma$  на  $\gamma_{i+m-v}$  и  $u(i+m-v)$  на  $h \operatorname{sign} u(i+m-v)$  можно перейти к разностному уравнению линейной непрерывной части вместе с широтно-импульсным модулятором:

$$\sum_{v=0}^h c_v y(i+n-v) = h \sum_{v=0}^m b_v(\gamma_{i+m-v}) \operatorname{sign} u(i+m-v). \quad (23.57)$$

В свою очередь, передаточную функцию (23.55) можно определить по формуле (14.58):

$$W_0(z, \gamma) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z_{\epsilon} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}_{\epsilon=1-\gamma}. \quad (23.58)$$

Таким образом, для получения уравнения (23.57) нет необходимости использовать уравнения состояния.

При исследовании процессов в замкнутой системе (рис. 23.10) уравнения (23.51) или (23.57) дополняются уравнением (23.44), разностным уравнением, соответствующим передаточной функции  $D(z)$ , и уравнением замыкания  $x(i) = g(i) - y(i)$ .

В отличие от систем с амплитудно-импульсной модуляцией и экстраполятором нулевого порядка в системах с ШИМ сигнал  $u^*$  представляет собой последовательность импульсов, скважность которых  $\gamma_i \leq 1$ . При  $\gamma_i < 1$  как в установившихся, так и в переходных процессах между моментами замыкания  $t = iT$  появляются пульсации. Они особенно опасны в установившемся состоянии, так как пульсирующая составляющая ошибки может оказаться соизмеримой с ее постоянной составляющей.

Для выявления пульсаций вместо уравнений (23.51) следует использовать разностные уравнения со смещенным аргументом.

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+\epsilon) &= \bar{A}^*(\epsilon) \bar{x}(i) + h \bar{b}^*(\epsilon) \operatorname{sign} u(i); \\ y(i+\epsilon) &= \bar{c}^T \bar{x}(i+\epsilon), \end{aligned} \quad (23.59)$$

где

$$\bar{A}^*(\epsilon) = e^{\bar{A}^T \epsilon}, \quad \bar{b}^*(\epsilon) = \begin{cases} \int_0^{\epsilon T} e^{\bar{A}^T \sigma} \bar{b} d\sigma, & 0 \leq \epsilon \leq \gamma_i; \\ 0, & \gamma_i < \epsilon < 1; \\ \int_{(\epsilon-\gamma_i)T}^{\epsilon T} e^{\bar{A}^T \sigma} \bar{b} d\sigma, & \gamma_i \leq \epsilon \leq 1. \end{cases} \quad (23.60)$$

Они получаются так же, как и уравнения (23.51), если в решении (14.72) положить  $t = iT + \epsilon T$ . Уравнения (23.51) представляют собой частный случай (23.59) при  $\epsilon = 1$ .

Выражения для матриц (23.60), соответствующих типовым линейным непрерывным частям системы, приведены в [57].

Уравнения (23.51), (23.57), (23.59) справедливы и для систем с ШИМ-2 (рис. 23.11, а). В них только следует заменить  $u$  на  $x = g - y$ . Однако скважность импульсов  $\gamma_i$  должна определяться из уравнения (23.46), которое в общем случае является нелинейным.

**Пример 1.** Исследуем систему с ШИМ-1 (рис. 23.10), передаточная функция линейной непрерывной части которой  $W_0(p) = k/p$ , если  $g(t) = Vt, D(z) = 1, kh = 15 c^{-1}, T = 0,1 c, \beta = 1, V = 5 c^{-1}, y(0) = 0$ .

В данном случае в уравнениях (23.48)  $\bar{A} = A = 0, \bar{b} = b = k, \bar{c}^T = c = 1, u = x = g - y$  и уравнения (23.59) принимают вид

$$\begin{aligned} y(i + \epsilon) &= y(i) + 1,5\epsilon \operatorname{sign} x(i) && \text{при } 0 \leq \epsilon \leq \gamma_i; \\ y(i + \epsilon) &= y(i) + 1,5\gamma_i \operatorname{sign} x(i) && \text{при } \gamma_i \leq \epsilon \leq 1. \end{aligned}$$

Скважность импульсов согласно (23.44)

$$\gamma_i = \begin{cases} |x(i)| & \text{при } |x(i)| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |x(i)| \geq 1. \end{cases}$$

Ошибка системы

$$x(i + \epsilon) = g(i + \epsilon) - y(i + \epsilon) = 0,5(i + \epsilon) - y(i + \epsilon).$$

Решив полученные уравнения последовательно шаг за шагом, начиная с последнего, получим переходный процесс, изображенный на рис. 23.12.

В моменты времени  $t = iT$  ошибка стремится к установившемуся значению  $x_{уст}(i) \approx 0,33$ . Однако в промежутках между моментами замыкания устанавливаются незатухающие колебания или пульсации.

**Пример 2.** Исследуем систему с ШИМ-2 (рис. 23.11, а), если  $W_0(p) = k/p, g(t) = 1(t), kh = 10 c^{-1}, T = 0,1 c, \beta = 1, y(0) = 0$ .

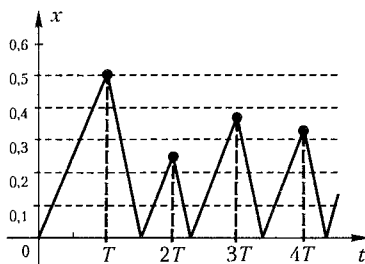


Рис. 23.12

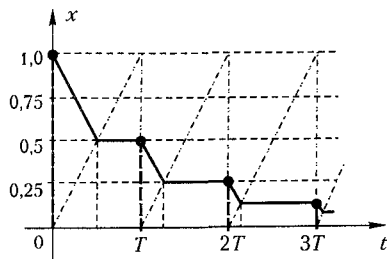


Рис. 23.13

Составляем уравнения системы:

— ошибка системы

$$x(i+\varepsilon) = g(i+\varepsilon) - y(i+\varepsilon) = 1 - y(i+\varepsilon);$$

— уравнения (23.59)

$$y(i+\varepsilon) = y(0) + \varepsilon \operatorname{sign} x(i) \quad \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \gamma_i;$$

$$y(i+\varepsilon) = y(0) + \gamma_i \operatorname{sign} x(i) \quad \text{при } \gamma_i \leq \varepsilon \leq 1;$$

— уравнение (23.46)

$$[1 - y(i + \gamma_i)] \operatorname{sign} x_i = \gamma_i.$$

Решив эти уравнения последовательно шаг за шагом, начиная с последнего, получим переходный изображенный на рис. 23.13. Там же показан пилообразный опорный сигнал. Установившаяся ошибка  $x_{уст} = 0$ . Пульсации имеются только в переходном процессе.

Следует отметить, что в реальных системах ШИМ пульсации существуют практически всегда, так как даже в астатических системах при отсутствии ошибки от задающего воздействия имеется статическая ошибка от возмущений.

Установившуюся ошибку в типовых режимах удобно представлять в виде суммы

$$x_{уст}(\varepsilon) = x_{уст} + x(\varepsilon), \quad (23.61)$$

где  $x_{уст}$  — постоянная составляющая;  $x(\varepsilon)$  — пульсирующая составляющая.

Составляющая  $x_{уст}$  определяется сравнительно просто, так как в установившемся состоянии при  $\gamma_{уст} < 1$  система с ШИМ по существу превращается в линейную дискретную систему с передаточной функцией приведенной линейной части (23.58). Выражения для  $x_{уст}$  приведены в работе [57]. Так, для рассмотренной в примере 1 системы с ШИМ-1

$$x_{уст} = \frac{\beta V}{kh}, \quad \gamma_{уст} = \frac{V}{kh}, \quad (23.62)$$

если  $kh > V$ . Если же  $kh < V$ , то  $\gamma_{уст} = 1$ , скорость изменения управляемой величины  $V_y = kh < V$ , ошибка будет непрерывно увеличиваться, т. е. система станет неустойчивой.

Пульсирующую составляющую  $x(\varepsilon)$  можно определить точно так же, как это делалось в главе 14, или из уравнений (23.59). В частности, для той же системы с учетом выражения

$$x(\varepsilon) = g(i+\varepsilon) - y(i+\varepsilon) = g(i+\varepsilon) - g(i) - [y(i+\varepsilon) - y(i)]$$

и формул (23.62) получим:

$$x(\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq 1/3; \\ -0,5(1-\varepsilon) & \text{при } 1/3 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

Исследование устойчивости систем с ШИМ представляет собой гораздо более сложную задачу. Ее сложность, во-первых, состоит в том, что из-за наличия пульсаций асимптотическая устойчивость при строгом понимании смысла этого термина (гл. 16) может быть обеспечена только при исчезающих внешних воздействиях, когда  $\gamma_{уст} = 0$  и пульсации в установившемся состоянии отсутствуют. Однако, если амплитуда пульсаций находится в допустимых пределах, можно ограничиться исследованием асимптотической устойчивости в дискретные моменты времени  $t = iT$ .

Во-вторых, система с ШИМ остается нелинейной даже если в процессе управления широтно-импульсный модулятор не насыщается, т. е. если скважность импульсов  $\gamma_i < 1$ , что обусловлено нелинейностью уравнений (23.51) и (23.57). При насыщенном модуляторе, когда  $\gamma_i = 1$ , система с ШИМ при отсутствии внешних воздействий по существу превращается в систему с амплитудно-импульсной модуляцией, характеристика нелинейного звена которой имеет вид (23.23). В ней могут существовать периодические режимы, рассмотренные в § 23.2. При наличии внешних воздействий при  $\gamma_i = 1$  система может стать неустойчивой.

В-третьих, устойчивость системы с ШИМ (как и многих других нелинейных систем) зависит от величины и характера изменения внешних воздействий.

Для иллюстрации отмеченных особенностей вновь обратимся к простейшей системе, рассмотренной в примере 1. Для нее можно получить следующие точные условия асимптотической устойчивости в дискретные моменты времени [57]:

— при отсутствии внешних воздействий

$$\frac{khT}{\beta} < 2, \quad \gamma_{уст} = 0;$$

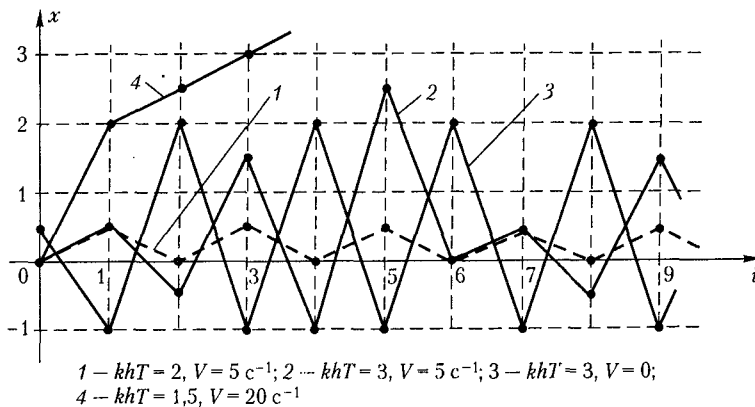


Рис. 23.14

- в режиме неподвижного состояния при задающем воздействии  $g(t) = g_0$  и возмущении  $f(t) = f_0$

$$\frac{k_f f_0 T}{\beta} < \frac{khT}{\beta} < 2, \quad \gamma_{уст} = \frac{k_f f_0}{kh};$$

- в режиме движения с постоянной скоростью при  $g(t) = Vt$

$$\frac{(V + k_f f_0)T}{\beta} < \frac{khT}{\beta} < 2, \quad \gamma_{уст} = \frac{V + k_f f_0}{kh}. \quad (23.63)$$

Процесс в устойчивой системе изображен на рис. 23.12. На рис. 23.14 представлены процессы, возникающие в случае нарушения условий устойчивости, при  $f_0 = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $T = 0,1$  с. Пульсации при  $|x(i)| < 1$  для наглядности не показаны.

Вытекающее из (23.63) условие

$$kh > V + k_f f_0, \quad (23.64)$$

где  $k_f$  — коэффициент передачи непрерывной части по возмущению, накладывает ограничение на минимально допустимое значение коэффициента  $kh$  при наличии внешних воздействий и является *необходимым условием устойчивости*.

Условие (23.64) должно выполняться для всех систем с ШИМ, передаточные функции непрерывных частей которых  $W_0(p)$  и  $W_f(p)$  содержат по одному интегрирующему звену.

Действительно, в установившемся режиме сигнал  $u^*$  на выходе ШИМ представляет собой последовательность импульсов, скважности которых  $\gamma_i = \gamma_{уст}$ . Постоянная составляющая этого сигнала  $u_0 = h\gamma_{уст}$ . Очевидно, что выходная величина системы изменится с постоянной скоростью  $V$ , а влияние постоянного возмущения компенсируется, если

$$ku_0 = kh\gamma_{уст} = V + k_f f_0, \quad (23.65)$$

где  $k$  — коэффициент передачи непрерывной части. Но так как  $\gamma_{уст} \leq 1$ , то из (23.65) следует условие (23.64).

При наличии двух интегрирующих звеньев вместо (23.64) получим:

$$kh > \varepsilon + k_f f_0, \quad (23.66)$$

где  $\varepsilon$  — постоянное ускорение.

В режиме неподвижного состояния при  $V = 0$  или  $\varepsilon = 0$  условия (23.64) и (23.66) принимают вид

$$kh > k_f f_0. \quad (23.67)$$

Если возмущающее воздействие отсутствует или если оно приложено после интегрирующего звена (см. § 8.2), то ограничение (23.67) снимается.

Различные подходы к исследованию устойчивости и качества процессов в системах с ШИМ рассмотрены в работах [25, 51, 57, 79, 97] и ряде других.

# РАЗДЕЛ V

## ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

### Глава 24

#### ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

##### § 24.1. Общие положения

Оптимальной называется такая система автоматического управления, которой тем или иным способом приданы наилучшие качества в каком-либо определенном смысле. Так, например, система, обеспечивающая максимально возможную точность управления объектом, является оптимальной в смысле минимума ошибки. Система, которая переводит объект из заданного начального состояния в конечное за минимально возможное время, является оптимальной по быстродействию. Система, решающая ту же задачу за заданное время при минимально возможных затратах энергии, является оптимальной в смысле минимального расхода энергии на управление.

Таким образом, при синтезе оптимальных систем требуется добиться не просто заданных показателей качества (точность, запас устойчивости, быстродействие и др.), как это делалось в главе 10, а наилучших показателей по определенному виду качества, наиболее важному для конкретной системы (например, по быстродействию), т. е. «выжать» из системы все, что она может дать именно по этому виду качества. Однако в ряде случаев это достигается за счет ухудшения других показателей качества.

При оптимизации систем управления следует различать два класса задач, решаемых последовательно: оптимизацию программы (закона) управления и оптимизацию алгоритма управления.

Первый из этих классов задач возникает не всегда, а лишь тогда, когда требуется найти наиболее выгодную программу изменения задающего воздействия, которое должна воспроизводить система. Эта программа отыскивается в результате расчета по какому-либо критерию качества или определяется автоматически в процессе управления. Так в главе 1 было показано, что для отыскания скорости полета самолета, оптимальной в смысле минимума расхода топлива, может быть использована экстремальная система. Другие примеры применения таких систем рассматриваются в § 25.1.

Вторым классом задач является оптимизация алгоритма управления, в результате решения которой должна быть найдена наилучшая структура управляющего устройства или его изменяемой части. Эта задача может иметь место во всех автоматических системах независимо от того, оптимизировалась ли программа управления или она была задана иначе, в том числе и при постоянном значении задающего воздействия. Частным случаем этого класса задач является отыскание оптимальных значений параметров управляющего устройства при заданной его структуре. Такая задача решалась,

например, в главе 14 для дискретной системы с минимальной конечной длительностью переходных процессов. Однако прибегать к оптимизации алгоритма управления следует лишь тогда, когда в этом действительно есть необходимость. Важно учитывать, что даже для систем невысокого порядка решение задачи оказывается сложным, а сам алгоритм во многих случаях становится нелинейным. Тогда система в целом после оптимизации становится нелинейной.

Синтез оптимальной структуры управляющего устройства производится в два этапа. На первом из них определяется оптимальный алгоритм управления, а на втором осуществляется его техническая реализация.

Рассмотрим вначале задачу синтеза оптимального алгоритма управления.

Допустим, что уравнения динамики многомерного объекта вместе с неизменяемой частью управляющего устройства заданы в векторно-матричной форме

$$\bar{\dot{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}), \quad (24.1)$$

где  $\bar{x}$  — матрица-столбец переменных состояния  $x_i$  размером  $n \times 1$ ;  $\bar{u}$  — матрица-столбец управляющих воздействий  $u_j$ , размером  $r \times 1$ ,  $\bar{f}$  — некоторая в общем случае нелинейная функция; если эта функция линейная, то уравнение (24.1), как показано в главе 5, записываются следующим образом:

$$\bar{\dot{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u}. \quad (24.2)$$

В одномерном случае ( $r = 1$ ) уравнения (24.2) имеют вид

$$\dot{x} = \bar{A}x + bu. \quad (24.3)$$

В результате решения задачи синтеза должен быть найден алгоритм управления

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}) \quad (24.4)$$

Управления  $u_j$  могут иметь различную физическую природу (токи в обмотках управления исполнительных устройств, напряжения, моменты и т. п.). В реальных системах на них практически всегда накладываются определенные ограничения. Чаще всего эти ограничения задаются в виде неравенств

$$|u_j| \leq U_j, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (24.5)$$

а в общем случае — в виде  $\bar{u} \in \bar{U}$ , где  $\bar{U}$  — некоторое множество в  $r$ -мерном пространстве.

Управление  $\bar{u}$ , удовлетворяющее заданным ограничениям, называется *допустимым управлением*. Допустимое управление, как будет показано далее, может быть не только непрерывным, но и разрывным.

Переменные состояния  $x_i$  в зависимости от способа их выбора (см. гл. 5) в одних случаях имеют ясный физический смысл. Например, это могут быть углы, угловые скорости, ускорения и т. д. В других случаях их смысл можно установить только косвенно. Однако в любом случае на них тоже могут накладываться ограничения

$$|x_i| \leq X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24.6)$$



Кроме ограничений в виде неравенств используются также ограничения типа голономных связей

$$G_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, l), \quad (24.7)$$

где  $G_k$  — некоторая функция, а также ограничения типа неголономных связей в виде дифференциальных уравнений

$$G_k(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; \dots) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, l), \quad (24.8)$$

изопериметрические ограничения в виде функционалов и др. [35].

*Цель управления* состоит в переводе объекта из начального состояния  $\bar{x}(t_0)$  в некоторое конечное состояние  $\bar{x}(t_k)$ . Вид этих граничных условий определяется в соответствии с физическим смыслом задачи, решаемой системой автоматического управления. В одних случаях они задаются полностью:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(t_k) = \bar{x}_k. \quad (24.9)$$

Тогда имеем задачу с фиксированными или закрепленными концами. В других случаях граничные условия (или одно из них) задаются лишь частично:

$$\bar{x}(t_0) \in \bar{P}_0, \quad \bar{x}(t_k) \in \bar{P}_k, \quad (24.10)$$

где  $\bar{P}_0$  и  $\bar{P}_k$  — некоторые множества в пространстве состояний.

Момент окончания процесса  $t_k$  может быть фиксированным (заданным) или свободным.

Из всего множества возможных допустимых управлений необходимо выбрать такое, которое не только осуществляет заданную цель управления, но и обеспечивает наилучшее значение выбранного показателя качества (быстродействия, расхода энергии и т. п.). Это можно сделать, если сам показатель качества или критерий оптимальности выражен в той или иной математической форме. Чаще всего он представляется в виде интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt, \quad (24.11)$$

где  $f_0$  — некоторая скалярная функция.

Выражение (24.11) называется *функционалом*, так как  $I$  зависит от выбора функции  $\bar{u}(t)$  и получающейся при этом функции  $\bar{x}(t)$ .

Функционал (24.11) обычно конструируется так, чтобы при оптимальном управлении его значение было минимальным. Это всегда может быть сделано и в случае максимума требуемого показателя качества.

В качестве иллюстрации рассмотрим два конкретных примера.

Пусть система должна иметь максимальное быстродействие. Тогда, положив  $f_0(\bar{x}, \bar{u}) = 1$ , получим:  $I = t_k - t_0$ . Следовательно, необходимо найти такое управление  $\bar{u}(t)$ , при котором  $t_k - t_0 = T_{\min}$ . Значение  $t_k$  не фиксируется. Минимальная длительность переходного процесса  $T_{\min}$  даже для одного и того же объекта зависит как от граничных условий (24.9) или (24.10), так и от ограничений (24.5)–(24.8).

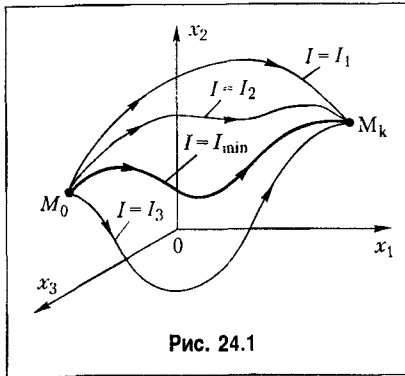


Рис. 24.1

Пусть теперь управляемым объектом (24.3) является электрический двигатель,  $u$  — ток в его обмотке управления,  $R$  — сопротивление обмотки. Тогда при  $f_0(\bar{x}, u) = Ru^2$  функционал (24.11) характеризует расход энергии на управление за промежуток времени  $t_k - t_0$ . При заданных граничных значениях (например, значениях угла и угловой скорости в моменты времени  $t_0$  и  $t_k$ ) и ограничениях на величину тока требуется найти такой закон изменения тока, при котором расход энергии окажется минимальным. Дополнительное ограничение может быть наложено, например, на величину угловой скорости. Момент времени  $t_k$  обязательно

должен быть ограничен (задан), так как в противном случае «оптимальным» будет управление  $u = 0$ , при котором  $t_k = \infty$ .

В общем случае функционал (24.11) может представлять любую желаемую комбинацию оценок различных качеств синтезируемой системы. Однако следует учитывать, что чем сложнее этот функционал, тем труднее решается задача оптимизации даже для линейных одномерных объектов (24.3). Дополнительные трудности возникают при повышении порядка уравнений (24.1)–(24.3) и при наличии внешних воздействий.

С учетом изложенного задачу синтеза оптимального алгоритма управления можно сформулировать следующим образом.

Пусть при  $n = 3$  в трехмерном пространстве (рис. 24.1) начальному состоянию объекта соответствует точка  $M_0$  с координатами  $\bar{x}(t_0)$ , а конечному состоянию — точка  $M_k$  с координатами  $\bar{x}(t_k)$ .

Существует множество допустимых управлений  $\bar{u}(t)$ , переводящих объект из начального состояния в конечное. Для каждого из них, решив дифференциальное уравнение объекта (24.1), можно найти траекторию  $\bar{x}(t)$ , а затем определить величину функционала (24.11). Из полученного множества управлений следует выбрать такое, при котором функционал принимает минимальное значение. Это управление и будет оптимальным управлением, а соответствующая ему траектория — оптимальной траекторией.

Очевидно, что таким способом решить задачу синтеза практически невозможно. Однако существуют другие способы оптимизации или, иначе говоря, методы синтеза оптимальных систем, как аналитические, так и машинные. Все эти способы в своей основе являются вариационными, но в отличие от предыдущего позволяют избежать перебора множества допустимых управлений. Каждый из них дает возможность довести решение задачи до конца в числовом виде. Для некоторых простейших задач удается получить аналитическое решение. Примером может служить рассмотренный в § 11.9 метод синтеза линейной системы при случайных воздействиях по минимуму среднеквадратичной ошибки (задача Винера). В следующих параграфах будут в простейшем виде изложены основы некоторых других методов синтеза. Кроме них следует отметить метод последовательной оптимизации на базе нелинейного программирования, разработанный В. М. Пономаревым [77]. Важные направления развиты также в работах [26, 60, 67, 77] и других.

Получением оптимального алгоритма управления завершается лишь первый этап синтеза оптимальной структуры управляющего устройства. На втором этапе требуется осуществить техническую реализацию алгоритма. Сложность решения этой задачи связана с тем, что при использовании большинства методов синтеза оптимальный алгоритм получается в виде функции времени:  $\bar{u} = \bar{u}(t)$ . При управлении по временной программе система автоматического управления оказывается разомкнутой, так как она не контролирует фактическое состояние объекта. Такой системе будут присущи все типичные для разомкнутых систем недостатки, о которых говорилось в главе 1.

Для построения замкнутой оптимальной системы управления  $\bar{u} = \bar{u}(t)$  необходимо каким-либо способом привести к виду (24.4), т. е. сформировать его как функцию переменных состояния  $x$ . В ряде случаев решение этой задачи оказывает не менее сложным, чем синтез самого оптимального алгоритма. Но даже если оптимальное управление  $\bar{u} = \bar{u}(x)$  найдено, его можно реализовать лишь тогда, когда входящие в него переменные могут быть измерены существующими техническими средствами (например, датчиками). Поэтому часто прибегают к созданию не строго оптимальных, а близких к оптимальным систем. Некоторые конкретные рекомендации по таким системам даны в работе [44].

## § 24.2. Использование классических вариационных методов

Методы классического вариационного исчисления были разработаны еще в XVIII веке и не предназначались для синтеза оптимального управления объектом.

Рассмотрим одну из классических задач. Пусть задан функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt, \quad (24.12)$$

где  $x_i$  — некоторые дважды дифференцируемые функции, среди которых необходимо найти такие функции  $x_i(t)$  или *экстремали*, которые удовлетворяют заданным граничным условиям  $x_i(t_0)$ ,  $x_i(t_k)$  и минимизируют функционал (24.12).

Экстремали отыскиваются среди решений *уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24.13)$$

Для установления факта минимизации функционала необходимо удостовериться, что вдоль экстремалей выполняются условия Лагранжа

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i^2} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24.14)$$

аналогичные требованию положительности второй производной в точке минимума функции.

Используем решение классической вариационной задачи для синтеза оптимального уравнения.

Положим, что дифференциальное уравнение объекта имеет вид (24.3). Введем в функцию  $f_0$  дополнительные переменные  $u$  и  $\dot{u}$ , т. е. сформируем функционал (24.12) в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; u, \dot{u}) dt. \quad (24.15)$$

При этом граничные условия задаются только для  $x_i$ , но требование дважды дифференцируемости распространяется на все переменные. Уравнения (24.13) тоже составляются для всех переменных, т. е.  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ .

Динамические свойства объекта учтем в виде ограничения типа неголомомных связей (24.8), где функция  $G_k$  определяется из дифференциального уравнения (24.3). Тогда в уравнениях (24.13) вместо функции  $f_0$  должна использоваться функция

$$H = f_0 + \sum_{k=1}^l \lambda_k(t) G_k, \quad (24.16)$$

где  $\lambda_k(t)$  — произвольные множители Лагранжа, в общем случае зависящие от времени  $t$ .

Рассмотрим простейший пример. Пусть объект описывается уравнением

$$a_0 \dot{x} + a_1 x = u; \quad (24.17)$$

или

$$(a_0 p + a_1)x = u, \quad (24.18)$$

где  $x = y$  — управляемая величина,  $p = \frac{d}{dt}$ .

Цель управления заключается в переводе объекта из состояния  $x(0) = 0$  при  $t_0 = 0$  в состояние  $x(t_k) = x_0$ , где  $x_0$  — задающее воздействие. Функционал (24.15) представим в виде

$$I = \int_0^{t_k} [(x - x_0)^2 + \mu^2 u^2] dt, \quad (24.19)$$

где  $\mu$  — некоторый весовой коэффициент.

Динамические свойства объекта (24.17) учтем в виде ограничения (24.3):

$$G_k = a_0 \dot{x} + a_1 x - u = 0. \quad (24.20)$$

Другие ограничения на  $x$  и  $u$  отсутствуют.

Формируем функцию (24.16):

$$H = (x - x_0)^2 + \mu^2 u^2 + \lambda (a_0 \dot{x} + a_1 x - u). \quad (24.21)$$

Для получения уравнений Эйлера (24.13) находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= 2(x - x_0) + \lambda a_1, & \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} &= \lambda a_0; \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 2\mu^2 u - \lambda, & \frac{\partial H}{\partial \dot{u}} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (24.13) имеют вид

$$\left. \begin{aligned}2(x - x_0) + \lambda a_1 - \frac{d}{dt}(\lambda a_0) &= 0, \\ 2\mu^2 u - \lambda &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (24.22)$$

Из уравнений (24.22) определяем оптимальное управление

$$u = \frac{\lambda}{2\mu^2}, \quad (24.23)$$

где

$$\lambda = \frac{2(x - x_0)}{a_0 p - a_1}. \quad (24.24)$$

Подставив (24.23) и (24.24) в уравнение (24.18) получаем дифференциальное уравнение объекта при оптимальном управлении:

$$(\mu^2 a_0^2 p^2 - \mu^2 a_1^2 - 1)x = -x_0. \quad (24.25)$$

Для его решения находим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \pm \frac{1}{\mu^2 a_0^2} \sqrt{1 + \mu^2 a_1^2} = \pm \alpha. \quad (24.26)$$

Тогда (см. табл. 7.1)

$$x(t) = x_0 + C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}, \quad (24.27)$$

где при заданных граничных условиях  $x(0) = 0$ ,  $x(t_k) = x_0$

$$C_1 = -\frac{x_0 e^{\alpha t_k}}{e^{\alpha t_k} - e^{-\alpha t_k}}, \quad C_2 = -\frac{x_0 e^{-\alpha t_k}}{e^{\alpha t_k} - e^{-\alpha t_k}}.$$

Выражение (24.27) определяет оптимальную траекторию движения объекта. Оптимальное управление находим из (24.18) с учетом (24.27):

$$u(t) = a_1 x_0 + C_1 (a_1 - \alpha a_0) e^{-\alpha t} + C_2 (a_1 + \alpha a_0) e^{\alpha t}, \quad (24.28)$$

где  $0 \leq t \leq t_k$ .

Если  $t_k = \infty$ , то  $C_1 = -x_0$ ,  $C_2 = 0$ . Тогда

$$u(t) = x_0 [a_1 + (\alpha a_0 - a_1) e^{-\alpha t}]. \quad (24.29)$$

Возможность реализации оптимальных алгоритмов управления (24.28) в замкнутой системе здесь не рассматривается.

Из этого примера следует, что даже для простейшего объекта решение задачи синтеза оптимального управления методами классического вариационного исчисления оказывается не очень простым. Однако основные трудности возникают при наличии ограничений в виде неравенств (24.5) и (24.6), а также (что является главным) в связи с тем, что допустимые управления могут быть не только непрерывными, но и разрывными. Поэтому для решения «неклассических» задач обычно применяют другие методы. К ним относятся, например, разработанные в середине XX века динамическое программирование и принцип максимума, краткое изложение которых дается в следующих параграфах.

### § 24.3. Динамическое программирование

Метод динамического программирования был разработан Р. Беллманом [4]. Он применим не только для решения задач оптимизации систем управления, но и для самых различных технических и экономических задач.

Пусть система описывается уравнениями (24.1), в качестве критерия оптимальности принят функционал (24.11), а переменные состояния и управления принадлежат некоторым замкнутым (ограниченным) пространствам, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(t) \in X, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{a}_0 \in \bar{G}_0, \quad \bar{x}(t_k) = \bar{b} \in \bar{G}_k; \\ \bar{u}(t) \in \bar{U}, \quad t_0 \leq t \leq t_k. \end{aligned} \right\} \quad (24.30)$$

Далее, пусть при заданном начальном состоянии  $\bar{x}(t_0) = \bar{a}_0$  существует оптимальное управление  $\bar{u}(t, \bar{a}_0)$ , обеспечивающее минимум функционала (24.11), а  $\bar{x}(t, \bar{a}_0)$  — оптимальная траектория в пространстве состояний. Выберем произвольный момент времени  $t_1$ , принадлежащий интервалу  $t_0, t_k$  и обозначим через  $\bar{a}_1$  точку  $\bar{a}_1 = \bar{x}(t_1, \bar{a}_0)$  на оптимальной траектории  $\bar{x}(t, \bar{a}_0)$ . Принцип оптимальности состоит в следующем.

Если принять значения  $t_1$  и  $\bar{a}_1$  за начальные, то на интервале  $t_1, t_k$  оптимальное управление  $\bar{u}(t, \bar{a}_1)$  совпадет с оптимальным управлением  $\bar{u}(t, \bar{a}_0)$  и, следовательно, участок оптимальной траектории  $\bar{x}(t, \bar{a}_0)$  для задачи с начальной точкой  $(t_0, \bar{a}_0)$  на интервале  $t_1, t_k$  совпадет с оптимальной траекторией для задачи с начальной точкой  $(t_1, \bar{a}_1)$ . Доказательство достаточно очевидно. Оно исходит из того, что значение функционала качества на участке  $t_1, t_k$  должно быть одинаковым при управлениях  $\bar{u}(t, \bar{a}_1)$  и  $\bar{u}(t, \bar{a}_0)$ . Если бы это было не так и значение функционала на этом интервале времени было бы, например, меньше для управления  $\bar{u}(t, \bar{a}_1)$ , то управление  $\bar{u}(t, \bar{a}_0)$  можно было бы улучшить, заменив его управлением  $\bar{u}(t, \bar{a}_1)$ , что противоречит принятому предположению об оптимальности управления  $\bar{u}(t, \bar{a}_0)$ .

Итак, в соответствии с изложенным введем функциональное уравнение

$$\bar{\Psi}[t_k, \bar{x}(t_0)] = \min_{\bar{u} \in U} \int_{t_0}^{t_k} f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt, \quad (24.31)$$

на основании которого может быть найдено оптимальное управление  $\bar{u}(\bar{x})$ .

Если на промежутке  $t_0, t_k$  выбрать промежуточную точку  $t_1$ , то на основании принципа оптимальности

$$\bar{\Psi}[t_k, \bar{x}(t_0)] = \min_{\bar{u} \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt + \bar{\Psi}[t_k, \bar{x}(t_1)] \right\}. \quad (24.32)$$

Функция  $\bar{\Psi}$  и оптимальное управление обычно не могут быть найдены аналитическим путем. Для этой цели применяются приближенные методы с использованием вычислительных машин. Рассмотрим идею приближенного расчета.

Пусть  $t$  — фиксированное значение времени, а  $\Delta t$  — малый отрезок времени. причем  $0 < t + \Delta t < t_k$ . Тогда

$$\bar{\Psi}(t, \bar{x}) = \min_{\bar{u}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(\bar{x}, \bar{u}) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_k} f_0(\bar{x}, \bar{u}) d\tau \right\}. \quad (24.33)$$

Вид управления  $\bar{u}(\tau)$  на интервале  $t + \Delta t, t_k$  не оказывает влияния на первое слагаемое в правой части (24.33). Поэтому на рассматриваемом интервале времени следует так выбрать управление, чтобы минимизировать второе слагаемое в правой части (24.33) при выполнении условий

$$\bar{u}(\tau) \in \bar{U}, \quad \bar{x}(\tau) \in \bar{X}, \quad \bar{x}(t_k) \in \bar{G}_k, \quad t + \Delta t < \tau < t_k. \quad (24.34)$$

На основании принципа оптимальности перепишем (24.33) следующим образом:

$$\bar{\Psi}(t, \bar{x}) = \min_{\bar{u}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(\bar{x}, \bar{u}) d\tau + \bar{\Psi}[t + \Delta t, \bar{x}(t + \Delta t)] \right\}. \quad (24.35)$$

На интервале  $t, t + \Delta t$  управление  $\bar{u}(\tau)$  должно быть выбрано так, чтобы минимизировать правую часть (24.35). От этого выбора зависят оба слагаемых правой части.

Заменим на малом интервале  $\Delta t$  матричную функцию  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{u})$  и функцию  $f_0(\bar{x}, \bar{u})$  их фиксированными значениями в точке  $t$ , а производную  $\dot{\bar{x}}$  отношением конечных разностей  $\Delta \bar{x} = \bar{x}(t + \Delta t) - \bar{x}(t)$  и  $\Delta t$ . Тогда вместо (24.35) можно записать приближенно:

$$\bar{\Psi}(t, \bar{x}) \approx \min_{\bar{u}} \{ f_0(\bar{x}, \bar{u}) \Delta t + \bar{\Psi}(t + \Delta t, \bar{x} + \Delta \bar{x}) \}. \quad (24.36)$$

Кроме того, имеем

$$\bar{x} + \Delta \bar{x} = \bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \Delta t \cdot f[\bar{x}(t), \bar{u}(t)] = \bar{x} + \Delta t \cdot \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}). \quad (24.37)$$

На основании (24.36) и (24.37) можно найти приближенное значение  $\bar{\psi}(t, \bar{x})$ . Для конечного момента времени  $t_k$  и любых  $x \in G_k$  следует, что  $\bar{\psi}(t_k, \bar{x}) = 0$ . Поэтому вычисление  $\bar{\psi}(t, \bar{x})$  удобно начинать с конца, т. е. с момента времени  $t = t_k$  и области  $G_k$ . На первом шаге расчета рассматривается момент времени  $t = t_k - \Delta t$ . При  $t + \Delta t = t_k$  величина  $\bar{x} + \Delta x$  вследствие краевого условия принадлежит множеству  $G_k$ . Подставляя в (24.36) и (24.37) значение  $t = t_k - \Delta t$  и учитывая, что  $\bar{\psi}(t_k, \bar{x}) = 0$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}(t_k - \Delta t, \bar{x}) = \min_{\bar{u}} f_0[\bar{x}, \bar{u}(t_k - \Delta t)] \cdot \Delta t; \\ \bar{x} + \Delta \bar{x} = \bar{x} + \Delta t \cdot f[\bar{x}, \bar{u}(t_k - \Delta t)]. \end{aligned} \right\} \quad (24.38)$$

Далее фиксируется произвольное значение  $\bar{x} \in \bar{X}$ . Минимум правой части первого равенства (24.38) вычисляется по тем значениям  $\bar{u}(t_k - \Delta t)$  из множества  $\bar{U}$ , для которых точка  $\bar{x} + \Delta x$ , определяемая вторым равенством (24.38), соответствует значению  $\bar{b} \in G_k$ . Если для какой-либо точки таких значений  $\bar{u}(t_k - \Delta t)$  не существует, то функция  $\bar{\psi}(t_k - \Delta t, \bar{x})$  не определена в этой точке.

Таким образом, по значению функции  $\bar{\psi}(t_k, \bar{x})$  можно приближенно определить значения функции  $\bar{\psi}(t_k - \Delta t, \bar{x})$  на некотором подмножестве  $\bar{X}_1$  из  $\bar{X}$ . Так как на интервале  $t_k - \Delta t, t_k$  управление  $\bar{u}(\tau)$  принято постоянным и равным  $\bar{u}(t_k - \Delta t)$ , то одновременно с нахождением функции  $\bar{\psi}(t_k - \Delta t, \bar{x})$  приближенно найдено управление  $\bar{u}(t_k - \Delta t, \bar{x})$ , которое реализует эту функцию.

Последующие шаги рассчитываются аналогично. Если весь интервал управления  $t_k$  разбит на  $m$  шагов, то после  $m$ -го шага определяется функция  $\bar{\psi}(0, \bar{x})$ , на подмножестве  $\bar{X}_m$  из  $\bar{X}$  и управление  $\bar{u}(0, \bar{x})$ , как кусочно-постоянная функция с интервалами постоянства  $\Delta t$ . Если начальная точка  $\bar{x}(0) = \bar{a}$  принадлежит подмножеству  $\bar{X}_m$ , для которого определена функция  $\bar{\psi}(0, \bar{x})$ , то, положив  $\bar{x} = \bar{a}$ , получаем  $\bar{\psi}(0, \bar{a})$  — минимум функционала (24.11) исходной задачи управления и  $\bar{u}(0, \bar{a}) = \bar{u}^*(\tau)$  — оптимальное управление. Подставляя затем оптимальное управление в (24.1) и решая систему исходных дифференциальных уравнений, можно определить оптимальную траекторию движения  $\bar{x}^*(\tau)$ .

Серьезным недостатком метода является то, что с ростом размерности задачи (порядка  $n$  дифференциального уравнения) существенно возрастают требования к быстродействию и объему памяти вычислительных машин.

Введем предположение, что функция  $\bar{\psi}$  имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам:  $t, x_1, \dots, x_n$ . Тогда в равенстве (24.36) функцию  $\bar{\psi}(t + \Delta t, \bar{x} + \Delta \bar{x})$  можно представить следующим образом:

$$\bar{\psi}(t + \Delta t, \bar{x} + \Delta \bar{x}) = \bar{\psi}(t, \bar{x}) + \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}_i} \cdot \frac{d\bar{x}_i}{dt} \right] \Delta t + \delta(\Delta t) \Delta t. \quad (24.39)$$

Здесь  $\delta(\Delta t)$  — величина более высокого порядка малости, чем  $\Delta t$ . Входящие в правую часть (24.39) производные  $\dot{x}_i$ , удовлетворяют (24.1). Поэтому

$$\bar{\psi}(t + \Delta t, \bar{x} + \Delta \bar{x}) = \bar{\psi}(t, \bar{x}) + \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}_i} \cdot f_i \right] \Delta t + \delta(\Delta t) \Delta t. \quad (24.40)$$



Подставим (24.40) в (24.36). Функция  $\bar{\psi}(t, \bar{x})$  не зависит от управления  $\bar{u}(t)$  в момент  $t$ . Поэтому ее можно вынести за знак минимума. Деля полученное равенство на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , имеем

$$\min_{\bar{u}} \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i} f_i[\bar{x}(t), \bar{u}(t)] + f_0[\bar{x}(t), \bar{u}(t)] \right\} = 0 \quad (24.41)$$

при условиях

$$\bar{x} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(0) = \bar{a}, \quad x(t_k) = \bar{b} \in \bar{G}_k, \quad \bar{x}(t) \in \bar{X}, \quad 0 \leq t \leq t_k. \quad (24.42)$$

Уравнение (24.41) представляет собой *уравнение Беллмана* с краевым условием  $\bar{\psi}(t_k, \bar{x}) = 0$ . Сумма первых двух членов (24.41) есть полная производная функции  $\bar{\psi}(t, \bar{x})$  по времени. Поэтому уравнение Беллмана можно записать в другом виде:

$$\min_{\bar{u}} \left\{ \frac{d\bar{\psi}}{dt} + f_0[\bar{x}(t), u(t)] \right\} = 0. \quad (24.43)$$

Требование непрерывной дифференцируемости функции  $\bar{\psi}(t, \bar{x})$  является весьма жестким и во многих задачах не выполняется. В. Г. Болтянский показал [16], что можно ослабить требования к функции  $\bar{\psi}(t, \bar{x})$ . В ней допускаются разрывы частных производных на некотором множестве точек.

Заметим, что если функции  $f_0$  и  $\bar{f}$  не зависят явно от времени, то решение уравнения (24.43) — функция  $\bar{\psi}$  и оптимальное управление  $\bar{u}$ , которое реализует минимум, тоже не зависит явно от времени, т. е.  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x)$  и  $\bar{u} = \bar{u}(x)$ , однако в общем случае  $\bar{\psi}(t, \bar{x})$  и  $\bar{u}(t, \bar{x})$ .

Аналитическое нахождение функции  $\bar{\psi}$  в явной форме удается только в некоторых частных случаях.

## § 24.4. Аналитическое конструирование регуляторов

Так называемая задача аналитического конструирования регуляторов была сформулирована и решена А. М. Летовым [55]. Эта задача развивалась также в работах А. А. Красовского [43] и Н. П. Красовского [45].

Пусть имеется стационарный объект, уравнения которого имеют вид (24.3):

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u. \quad (24.44)$$

Требуется определить оптимальное управление  $u = u(\bar{x})$ , минимизирующее функционал качества

$$I = \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \alpha u^2 \right) dt = \int_0^{\infty} \bar{v} dt \quad (c_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad \alpha > 0). \quad (24.45)$$

Задача управления заключается в переводе системы из начального состояния  $x_i = a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) при  $t=0$  в конечное при  $x_i = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Из формулировки задачи следует, что система должна быть при этом асимптотически устойчива.

В рассматриваемом случае уравнение Беллмана (24.41) имеет вид

$$\min_u \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \right) + \sum_{j=1}^n c_j x_j^2 + \alpha u^2 \right] = 0, \quad (24.46)$$

где  $a_{ij}$  — элемент матрицы  $\bar{A}$ .

Оказывается, что функция  $\bar{\Psi}$ , входящая в (24.46), является функцией Ляпунова, а функция  $\bar{V}$  в функционале (24.45) — ее полной производной, т. е.

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dt} = -\bar{V},$$

чем решается вопрос об устойчивости синтезируемой системы (см. § 17.2).

Так как на управление  $u$  ограничения не накладываются и  $\alpha > 0$ , то минимум в (24.46) достигается в точке, где обращается в нуль производная по  $u$ , т. е. при

$$u = -\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_i}. \quad (24.47)$$

Подставим это значение в (24.46). В результате имеем

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 - \frac{1}{4\alpha} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_i} b_i \right)^2 = 0. \quad (24.48)$$

Это — нелинейное уравнение в частных производных относительно функции  $\bar{\Psi}$ . Будем искать решение этого уравнения в виде квадратичной формы от фазовых координат:

$$\bar{\Psi} = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \gamma_{kr} x_k x_r = \bar{x}^T \bar{\Gamma} \bar{x}. \quad (24.49)$$

Здесь  $\bar{\Gamma} = \|\gamma_{kr}\|_{n \times n}$  — квадратная матрица коэффициентов, удовлетворяющая критерию Сильвестра

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad (24.50)$$

причем матрица может быть принята симметричной, т. е.  $\gamma_{kr} = \gamma_{rk}$ . Функция (24.49) удовлетворяет граничному условию, так как при  $x_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) имеем  $\bar{\Psi} = 0$ .

Дифференцируя (24.49), имеем

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \bar{0}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_i} = 2 \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k.$$

Подставляя полученные выражения в (24.48), приходим к уравнению вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ik} a_{ij} x_k x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_i \gamma_{ik} x_k \right)^2 = 0. \quad (24.51)$$

В левой части (24.51) находится квадратичная форма переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Она будет тождественно равна нулю при равенстве нулю всех ее коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\gamma_{ik} a_{ij} + \gamma_{ij} a_{ik} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n b_i \gamma_{ik} \sum_{i=1}^n b_i \gamma_{ij}) &= 0 \quad (j \neq k); \\ 2 \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} a_{ik} + c_k - \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^n b_i \gamma_{ik} \right)^2 &= 0 \quad (j = k) \\ (j, k = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (24.52)$$

В результате получена система из  $0,5n(n+1)$  алгебраических уравнений, содержащих такое же количество неизвестных  $\gamma_{ik}$  (при учете равенства коэффициентов  $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ )

После нахождения неизвестных коэффициентов  $\gamma_{ik}$  из (24.47) можно определить оптимальное управление

$$u = -\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n d_k x_k, \quad d_k = \sum_{i=1}^n b_i \gamma_{ik}. \quad (24.53)$$

Аналогичный результат может быть получен при использовании классических методов вариационного исчисления (§ 24.2).

В большинстве случаев результаты, полученные при помощи данного метода, не могут быть реализованы точно вследствие необходимости использовать для управления все фазовые координаты. Поэтому приходится говорить лишь о приближенной реализации полученных условий оптимальности. Кроме того, не учитываются реально всегда существующие ограничения. Другие подходы к решению задачи аналитического конструирования содержатся в работах [35, 43, 55].

## § 24.5. Использование принципа максимума

Принцип максимума как метод оптимизации процессов управления разработан школой Л. С. Понтрягина [68].

Допустим, что дифференциальные уравнения объекта вместе с неизменяемой частью управляющего устройства заданы в общей форме (24.1):

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}). \quad (24.54)$$

На управление  $u$ , могут накладываться ограничения, например, в виде неравенств (24.5). Цель управления состоит в переводе объекта из начального состояния  $\bar{x}(t_0)$  в

конечное состояние  $\bar{x}(t_k)$ . Момент окончания процесса  $t_k$  может быть фиксированным или свободным. Критерием оптимальности пусть будет минимум функционала (24.11)

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt. \quad (24.55)$$

Введем вспомогательные переменные  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  и образуем функцию

$$\begin{aligned} H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) &= -f_0(\bar{x}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(\bar{x}, \bar{u}) = \\ &= -f_0(\bar{x}, \bar{u}) + \bar{\psi}^T \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}). \end{aligned} \quad (24.56)$$

Принцип максимума гласит, что для оптимальности системы, т. е. для получения минимума функционала (24.55), необходимо существование таких ненулевых непрерывных функций  $\psi_i(t)$ , удовлетворяющих уравнению

$$\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{x}}, \quad (24.57)$$

что при любом  $t$ , находящемся в заданном диапазоне  $t_0 \leq t \leq t_k$ , величина  $H$ , как функция допустимого управления  $\bar{u}$ , достигает максимума.

Максимум функции  $H$  определяется, как обычно, из условий

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} < 0, \quad (24.58)$$

если  $\bar{u}$  не достигает границ области  $\bar{U}$ , и как точная верхняя грань функции  $H$  по  $\bar{u}$  в противном случае.

Принцип максимума согласно приведенным формулировкам дает только необходимые условия оптимальности. Установить их достаточность очень трудно. Поэтому в практических приложениях заранее интуитивно предполагают достаточность по физическому смыслу исследуемой системы.

Для линейного одномерного объекта (24.3) выражения (24.56) и (24.57) принимают вид

$$H(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = -f_0(\bar{x}, u) + \bar{x}^T \bar{A}^T \bar{\psi} + \bar{b}^T \bar{\psi} u, \quad (24.59)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \frac{\partial f_0(\bar{x}, u)}{\partial \bar{x}} - \bar{A}^T \bar{\psi}. \quad (24.60)$$

Применение принципа максимума проиллюстрируем примерами.

**Пример 1.** Используем принцип максимума для решения задачи, рассмотренной в § 24.2.

Уравнение объекта (24.8) приводится к виду (24.3) при  $A = -\frac{a_1}{a_0}$ ,  $b = \frac{1}{a_0}$ . С учетом функционала (24.19) составляем функцию (24.59):

$$H = -(x - x_0)^2 + \mu^2 u^2 + \lambda x \psi + b \psi u. \quad (24.61)$$

Так как на управление  $u$  ограничение не накладывалось, максимум  $H$  определяем в соответствии с (24.58):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2\mu^2 u + b\psi = 0. \quad (24.62)$$

Таким образом, оптимальное управление

$$u = \frac{b\psi}{2\mu^2}. \quad (24.63)$$

Уравнение (24.60) имеет вид

$$\dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial x} [(x - x_0)^2 + \mu^2 u^2] - A\psi = 2(x - x_0) - A\psi. \quad (24.64)$$

Отсюда находим:

$$\psi = \frac{2(x - x_0)}{p + A} = \frac{2a_0(x - x_0)}{a_0 p - a_1}. \quad (24.65)$$

При  $\psi = a_0 \lambda$  выражения (24.63) и (24.65) совпадают с (24.23) и (24.24). Поэтому далее задача решается точно так же, как в § 24.2.

**Пример 2.** Пусть объект задан уравнением (24.3). На управление наложено ограничение  $|u| \leq U$ . Требуется найти управление, которое переводит объект из состояния  $\bar{x}(0)$  в состояние  $\bar{x}(t_k)$  за минимально возможное время  $t_k = T_{\min}$ .

В § 24.1. отмечалось, что при оптимальном по быстродействию управлении в функционале (24.55)  $f_0 = 1$ . Тогда функция (24.59)

$$H(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = -1 + \bar{x}^T \bar{A}^T \bar{\psi} + \bar{b}^T \bar{\psi} u. \quad (24.66)$$

В (24.66) от управления зависит только слагаемое  $\bar{b}^T \bar{\psi} u$ . Поэтому  $H$  принимает максимальное значение по  $u$  только тогда, когда максимальной является величина  $\bar{b}^T \bar{\psi} u$ . Очевидно, что это имеет место при  $u = +U$ , если  $\bar{b}^T \bar{\psi} > 0$ , и  $u = -U$ , если  $\bar{b}^T \bar{\psi} < 0$ . Таким образом оптимальное управление

$$u = U \text{sign } \bar{b}^T \bar{\psi}. \quad (24.67)$$

Следовательно, оптимальная по быстродействию система всегда будет релейной, но не обычной релейной, а с особым законом переключения реле по знаку вспомогательной функции  $\bar{b}^T \bar{\psi}$ .

Уравнение (24.60) при  $f_0 = 1$

$$\bar{\Psi} = -\bar{A}^T \bar{\Psi}. \quad (24.68)$$

Его решение (см. гл. 5)

$$\bar{\Psi}(t) = e^{-\bar{A}^T t} \bar{\Psi}(0).$$

Но так как начальное значение  $\bar{\Psi}(0)$  не задано, то можно найти лишь общий вид вспомогательной функции  $\bar{\Psi}(t)$ .

Несмотря на это задача синтеза оптимального управления может быть решена до конца.

Рассмотрим теперь конкретную задачу. Пусть управляемым объектом является космический аппарат. Уравнение его движения относительно продольной оси имеет вид

$$\dot{\gamma} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{M}{J}, \quad (24.69)$$

где  $\gamma$  — угол крена,  $M$  — управляющий момент,  $J$  — момент инерции.

На величину управляющего момента наложено ограничение  $|M| \leq M_0$ . Поэтому ограничивается и ускорение:  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ . Требуется перевести аппарат из произвольного начального состояния в конечное состояние  $\gamma(t_k) = 0$ ,  $\dot{\gamma}(t_k) = 0$  за минимальное время  $t_k = T_{\min}$ .

Обозначим  $x_1 = \gamma$ ;  $x_2 = \dot{\gamma}$ ,  $u = M$ . Уравнение (24.69) приведем к виду (24.3), где

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (24.70)$$

Получаем уравнение (24.68):

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_1 \\ \dot{\Psi}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Psi_1 \end{bmatrix}. \quad (24.71)$$

Из него находим:  $\Psi_1 = C_1$ ,  $\Psi_2 = C_2 - C_1 t$ ,  $\bar{b}^T \bar{\Psi} = \Psi_2$ .

Определяем оптимальное управление (24.67):

$$M = M_0 \text{sign}(C_2 - C_1 t). \quad (24.72)$$

Поскольку функция  $C_2 - C_1 t$  может изменять свой знак не более одного раза, то в оптимальном процессе будет не более одного переключения с  $M = +M_0$  на  $M = -M_0$  или наоборот.

Пусть, например, в начальном состоянии  $\gamma(0) = \gamma_0 > 0$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_0 > 0$ . Тогда, очевидно, на первом интервале необходимо иметь  $M = -M_0$  (рис. 24.2, а). В некоторый момент времени  $t = t_1$  должно произойти переключение на  $M = +M_0$ , а при  $t \geq t_k$  управление

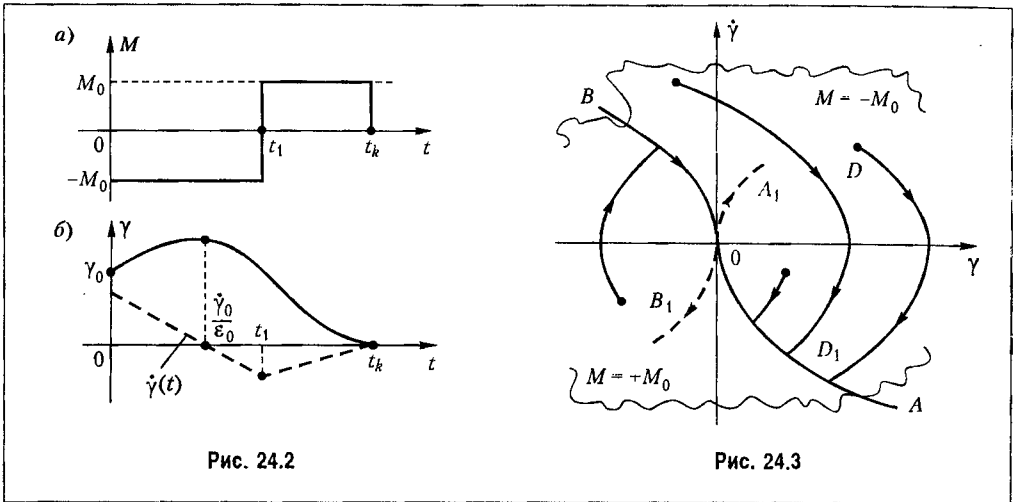


Рис. 24.2

Рис. 24.3

$M = 0$ . Решив при этих условиях уравнение (24.3), получим оптимальную траекторию (рис. 24.2, б) и выражения

$$t_k = T_{\min} = \frac{\dot{\gamma}_0}{\varepsilon_0} + \sqrt{2 \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\varepsilon_0^2} + \frac{4\gamma_0}{\varepsilon_0}}, \quad t_1 = \frac{t_k}{2} + \frac{\dot{\gamma}_0}{2\varepsilon_0}. \quad (24.73)$$

Используя (24.73) можно реализовать оптимальное управление как функцию времени:  $M = M(t)$ .

Для получения оптимального управления как функции переменных состояния  $\gamma$  и  $\dot{\gamma}$  изобразим процесс на фазовой плоскости (рис. 24.3).

Исключив из уравнения (24.69)  $dt$ , как это делалось в главе 17, получим при  $M = +M_0$  дифференциальное уравнение

$$\dot{\gamma}d\dot{\gamma} = \varepsilon_0 d\gamma,$$

откуда после интегрирования найдем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{\dot{\gamma}^2}{2} - \varepsilon_0 \gamma = C_1. \quad (24.74)$$

Аналогично при  $M = -M_0$  имеем

$$\frac{\dot{\gamma}^2}{2} + \varepsilon_0 \gamma = C_2. \quad (24.75)$$

Таким образом, фазовые траектории представляют собой параболы, симметричные относительно оси абсцисс.

При  $M = +M_0$  они обращены вершинами влево, а при  $M = -M_0$  — вершинами вправо.

В заданное конечное состояние  $\gamma(t_k) = 0, \dot{\gamma}(t_k) = 0$ , т. е. в начало координат, изображающая точка может попасть лишь по ветви  $AO$  параболы  $AOA_1$  при  $M = +M_0$  или по

ветви  $BO$  параболы  $BOB_1$  при  $M = -M_0$ . Поэтому если линией переключения сделать кривую  $AOB$ , то при любом начальном состоянии в оптимальном процессе будет не более одного переключения. Например, если начальному состоянию соответствует точка  $D$  с координатами  $\gamma_0 > 0$ ,  $\dot{\gamma}_0 > 0$ , то вначале (см. рис. 24.2)  $M = -M_0$  и процесс идет по параболе  $DD_1$ . В точке  $D_1$  (что соответствует моменту времени  $t_1$  на рис. 24.2) происходит переключение на  $M = +M_0$  и движение продолжается по линии переключения.

Для формирования алгоритма управления найдем уравнение линии переключения. Из уравнений (24.74) и (24.75) следует, что для ветви  $AO$   $\dot{\gamma}^2 - 2\varepsilon_0\gamma = 0$  при  $\dot{\gamma} < 0$ , а для ветви  $BO$   $\dot{\gamma}^2 + 2\varepsilon_0\gamma = 0$  при  $\dot{\gamma} > 0$ . Таким образом, для всей линии переключения можно записать:

$$u_1 = \dot{\gamma}^2 + 2\varepsilon_0\gamma \operatorname{sign} \dot{\gamma} = 0. \quad (24.76)$$

Правее линии переключения  $u_1 > 0$  и  $M = -M_0$ , а левее ее  $u_1 < 0$  и  $M = +M_0$ . В результате оптимальный по быстродействию алгоритм управления объектом (24.69) при заданных граничных условиях можно представить в виде

$$M(\gamma, \dot{\gamma}) = -M_0 \operatorname{sign} u_1. \quad (24.77)$$

Для реализации алгоритма (24.77) в системе используются датчик угла и датчик угловой скорости (ДУС), которые измеряют фактические значения угла  $\gamma$  и угловой скорости  $\dot{\gamma}$ . Управляющее устройство формирует (вычисляет) значение  $u_1$  (24.76) и в зависимости от его знака осуществляет переключение исполнительных устройств (например, реактивных двигателей) в соответствии с (24.77).

Следует отметить, что реально после переключения изображающая точка будет двигаться не по линии переключения, а несколько левее кривой  $AO$  или несколько правее кривой  $BO$ . Это связано с тем, что на самой линии переключения согласно (24.76)  $u_1 = 0$ , тогда как в соответствии с (24.77) знак  $u_1$  должен измениться. Поэтому объект не перейдет точно в заданное конечное состояние, а будет колебаться вокруг него с небольшой амплитудой. Для устранения колебаний вместо идеальной характеристики (24.77) можно использовать релейную характеристику с небольшой зоной нечувствительности.

Другие примеры оптимальных по быстродействию систем приведены в работе [65].

**Пример 3.** Пусть управляемым объектом является космический аппарат, уравнение движения которого имеет вид (24.69), а управляющий момент  $M$  создается реактивными двигателями и пропорционален секунднему расходу топлива, сжигаемого для образования газовой струи. Тогда функционал

$$I = \int_0^{t_k} |M| dt = \int_0^{t_k} M \operatorname{sign} M dt \quad (24.78)$$

характеризует расход топлива за время  $t_k$ . Требуется перевести аппарат из начального состояния  $\gamma(0) = \gamma_0 > 0$ ,  $\dot{\gamma}(0) = 0$  в конечное состояние  $\gamma(t_k) = 0$ ,  $\dot{\gamma}(t_k) = 0$  так, чтобы расход топлива был минимальным. На момент накладывается ограничение  $|M| \leq M_0$ . Время разворота  $t_k$ , очевидно, должно быть ограниченным, но обязательно  $t_k > T_{\min}$ , где  $T_{\min}$  — время при оптимальном по быстродействию управлении.



Формируем функцию (24.59):

$$H(\bar{\psi}, \bar{x}, M) = -M \operatorname{sign} M + \bar{x}^T \bar{A}^T \bar{\psi} - \bar{b}^T \bar{\psi} M, \quad (24.79)$$

где матрицы  $\bar{A}$  и  $\bar{b}$  имеют вид (24.70). В (24.79) от управления  $M$  зависит только сумма

$$-M \operatorname{sign} M + \bar{b}^T \bar{\psi} M = -M(\operatorname{sign} M - \bar{b}^T \bar{\psi}). \quad (24.80)$$

Пусть  $\bar{b}^T \bar{\psi} > 1$ . Тогда сумма (24.80) всегда больше нуля и максимальна при  $M = +M_0$ . При  $\bar{b}^T \bar{\psi} < -1$  она всегда меньше нуля и максимальна при  $M = -M_0$ . Если же  $|\bar{b}^T \bar{\psi}| < 1$ , то эта сумма всегда меньше нуля при любых значениях  $M$ , кроме  $M = 0$ . Следовательно, ее максимум имеет место при  $M = 0$ . В результате получаем следующее оптимальное по расходу топлива управление:

$$M(t) = \begin{cases} M_0 \operatorname{sign} \bar{b}^T \bar{\psi} & \text{при } |\bar{b}^T \bar{\psi}| > 1; \\ 0 & \text{при } |\bar{b}^T \bar{\psi}| < 1. \end{cases} \quad (24.81)$$

Уравнение (24.60) имеет вид (24.68) и (24.71), так как функция  $f_0(\bar{x}, M) = |M|$  и не зависит от  $\bar{x}$ . Поэтому, как и в предыдущем примере,  $\bar{b}^T \bar{\psi} = C_2 - C_1 t$  и может изменять свой знак не более одного раза. Но теперь в соответствии с (24.81) в оптимальном процессе будет не более двух переключений: с  $M = -M_0$  на  $M = 0$ , а затем с  $M = 0$  на  $M = +M_0$  (рис. 24.4, а). Экономия топлива достигается за счет того, что на интервале от  $t_1$  до  $t_2$  двигателя выключены. Оптимальная фазовая траектория изображена на рис. 24.4, б. Пунктирными кривыми показана траектория для оптимальной по быстродействию системы.

В отличие от оптимального по быстродействию управления здесь время завершения процесса  $t_k$  должно быть установлено заранее, причем  $t_k > T_{\min}$ . Для заданных граничных условий из (24.73) найдем:

$$T_{\min} = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}}. \quad (24.82)$$

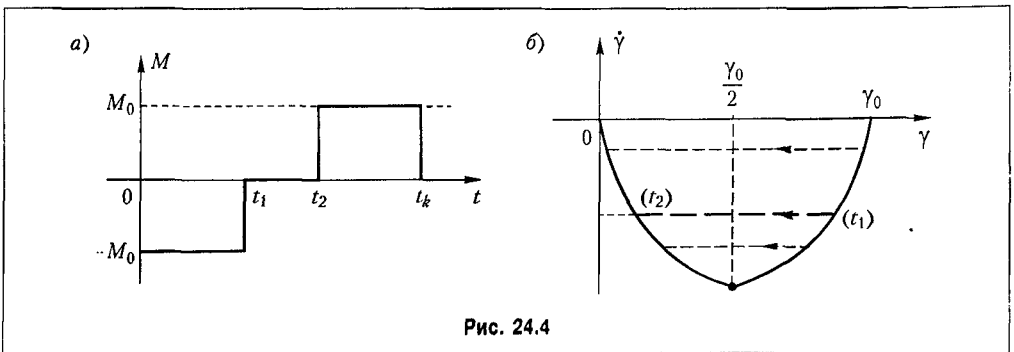


Рис. 24.4

Решив уравнение (24.3) при оптимальном управлении (рис. 24.4, а), получим:

$$t_1 = \frac{t_k}{2} - \sqrt{\frac{t_k^2}{4} - \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}}; \quad (24.83)$$

$$t_2 = t_k - t_1 = \frac{t_k}{2} + \sqrt{\frac{t_k^2}{4} - \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}}. \quad (24.84)$$

Расход топлива за время процесса управления  $t_k$

$$Q = qt_1 + q(t_k - t_2) = 2qt_1, \quad (24.85)$$

или с учетом (24.83) или (24.82)

$$Q = q\left(t_k - \sqrt{t_k^2 - T_{\min}^2}\right), \quad (24.86)$$

где  $q$  — секундный расход топлива.

Из (24.86) следует, что при  $t_k \rightarrow \infty$  расход  $Q \rightarrow 0$ , а при  $t_k = T_{\min}$  он максимален:

$$Q_{\max} = qT_{\min}. \quad (24.87)$$

Из (24.86) и (24.87) получим:

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{t_k}{T_{\min}} - \sqrt{\frac{t_k^2}{T_{\min}^2} - 1}. \quad (24.88)$$

Численно выражение (24.88) представлено в табл. 24.1, из которой видно, что заметную экономию топлива можно обеспечить при незначительном увеличении  $t_k$  по сравнению с  $T_{\min}$ . Эти данные можно использовать для выбора требуемого значения  $t_k$ .

$\frac{t_k}{T_{\min}}$	1	1,02	1,05	1,1	1,3	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
$\frac{Q}{Q_{\max}}$	1	0,82	0,73	0,64	0,47	0,38	0,27	0,17	0,13	0,1



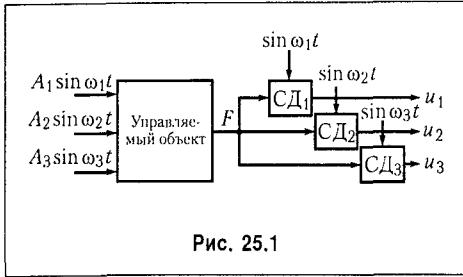


Рис. 25.1

Величина  $F(y_1, \dots, y_n)$  поступает на синхронные детекторы (рис. 25.1), у которых в качестве опорных величин используются те же переменные составляющие (25.4). Идеальные синхронные детекторы умножают величину  $F$  на переключающую функцию, представляющую собой прямоугольную волну с периодом  $T_i = 2\pi/\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и высотой единица. Переключающая функция приближенно может быть заменена синусоидой частоты  $\omega_i$  с единичной амплитудой. Поэтому средние значения выходных величин синхронных детекторов  $u_1, \dots, u_n$  приближенно могут быть представлены в виде

$$u_1 = \overline{F \sin \omega_1 t}, \quad u_2 = \overline{F \sin \omega_2 t}, \quad \dots, \quad u_n = \overline{F \sin \omega_n t}.$$

В квазистационарном режиме, когда составляющие  $y_i^0$  меняются медленно по сравнению с поисковым движением  $A_i \sin \omega_i t$ , величины  $u_1, \dots, u_n$  с точностью до малых высших порядков пропорциональны соответствующим частным производным

$\frac{dF}{dy_1}, \dots, \frac{dF}{dy_n}$  в точке  $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0$  и, следовательно, определяют  $\text{grad } F$  в этой точке.

Для доказательства этого разложим функцию  $F$  в окрестностях точки  $y_1^0, \dots, y_n^0$  в степенной ряд:

$$F(y_1^0 + \Delta y_1, \dots, y_n^0 + \Delta y_n) = F(y_1^0, \dots, y_n^0) + \sum_{i=1}^n \frac{dF^0}{dy_i} \Delta y_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,k=1}^n \frac{d^2 F^0}{dy_i dy_k} \Delta y_i \Delta y_k + \frac{1}{3!} \sum_{i,k,v=1}^n \frac{d^3 F^0}{dy_i dy_k dy_v} \Delta y_i \Delta y_k \Delta y_v + \dots \quad (25.5)$$

В последнем выражении значения частных производных соответствуют точке  $y_1^0, \dots, y_n^0$ , а  $\Delta y_i = A_i \sin \omega_i t, \dots, \Delta y_n = A_n \sin \omega_n t$ .

Выходные величины синхронных детекторов можно представить в виде

$$u_q = \overline{F \sin \omega_q t} = \overline{F(y_1^0, \dots, y_n^0) \sin \omega_q t} + \sum_{i=1}^n A_i \overline{\frac{dF^0}{dy_i} \sin \omega_i t \sin \omega_q t} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_i A_k \overline{\frac{d^2 F^0}{dy_i dy_k} \sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_q t} + \dots \quad (25.6)$$

Если величины  $y_1^0, \dots, y_n^0$  постоянны или меняются настолько медленно, что их изменениями за небольшой период можно пренебречь, то, учитывая очевидные равенства:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\sin \omega_q t} &= 0; \\ \overline{\sin \omega_i t \sin \omega_q t} &= \frac{1}{2} \quad (i = q); \\ \overline{\sin \omega_i t \sin \omega_q t} &= 0 \quad (i \neq q), \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

выражение (25.6) можно свести к виду

$$u_q = \frac{1}{2} A_q \frac{dF^0}{dy_q} + \Delta u_q. \quad (25.8)$$

Погрешность метода определяется членом  $\Delta u_q$ , которому соответствует выражение

$$\begin{aligned} \Delta u_q &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_i A_k \frac{d^2 F^0}{du_i dy_k} \overline{\sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_q t} + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i,k,v=1}^n A_i A_k A_v \frac{d^3 F^0}{dy_i dy_k dy_v} \overline{\sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_v t \sin \omega_q t} + \dots \end{aligned} \quad (25.9)$$

Величина  $\Delta u_q$  по отношению к амплитудам  $A_1, \dots, A_n$  имеет порядок малости не ниже третьего, а по сравнению с  $u_q$  — не ниже второго. Если частоты выбраны по закону нечетных чисел  $\omega_i = (2i + 1)\omega_0$ , где  $\omega_0 = \text{const}$ , то удовлетворяются условия  $\omega_i \neq \omega_k (i \neq k)$  и  $\omega_i \pm \omega_k \neq \pm \omega_q$ . Тогда

$$\overline{\sin \omega_i t \sin \omega_k t \sin \omega_q t} = 0 \quad (25.10)$$

и величина  $\Delta u_q$  имеет порядок малости не ниже четвертого.

Таким образом, выходные величины синхронных детекторов с достаточной степенью точности можно считать пропорциональными составляющим градиента  $F$  в точке  $y_1^0, \dots, y_n^0$ :

$$u_q = \frac{1}{2} A_q \frac{dF^0}{dy_q}. \quad (25.11)$$

**Способ производной по времени.** Производная по времени функции  $F(y_1, \dots, y_n)$  определяется выражением

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{dF}{dy_n} \frac{dy_n}{dt}. \quad (25.12)$$

Отсюда следует, что, задавая поочередно скорости изменения  $\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n$  и измеряя производную по времени  $\frac{dF}{dt}$ , можно найти составляющие градиента (25.3). Некоторым недостатком этого метода является необходимость дифференцирования функции  $F$  по времени, что сопровождается поднятием уровня высокочастотных помех.

**Способ запоминания экстремума.** Этот способ заключается в том, что система совершает вынужденное или автоколебательное движение в районе экстремума. При достижении экстремального значения  $F = F_3$  оно фиксируется на запоминающем устройстве. Градиент функции определяется затем по разности текущего и экстремального значений  $F - F_3$ .

Обратимся теперь к организации движения по направлению к экстремуму. Рассмотрим несколько возможных способов.

**Способ Гаусса–Зайделя.** Способ заключается в поочередном изменении координат  $y_1, \dots, y_n$ . Сначала фиксируются все координаты  $y_2, \dots, y_n$ , а координата  $y_1$  изменяется так, чтобы обратилась в нуль соответствующая составляющая градиента  $\frac{dF}{dy_1}$ . Затем изменяется координата  $y_2$  при фиксированных остальных координатах до обращения в нуль  $\frac{dF}{dy_2}$  и т. д. После изменения координаты  $y_n$  обращаются опять к  $y_1$  и далее повторяют весь цикл снова. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не будет достигнута точка экстремума  $F_3$ .

Этот способ не обеспечивает быстрого достижения точки экстремума вследствие того, что координаты изменяются не все сразу, а поочередно.

**Способ градиента.** В этом способе осуществляется одновременно изменение всех координат так, чтобы обеспечить движение системы в направлении, близком к мгновенному направлению вектора градиента (непрерывно или дискретно).

В простейшем случае непрерывного безынерционного управления для этого должны реализовываться зависимости

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= k \frac{dF}{dy_1}; \\ \dot{y}_2 &= k \frac{dF}{dy_2}; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n &= k \frac{dF}{dy_n}, \end{aligned} \right\} \quad (25.13)$$

где  $k$  — некоторый коэффициент пропорциональности.

Заметим, что для получения правильного направления движения должно быть  $k > 0$  для случая экстремума-максимума и  $k < 0$  для экстремума-минимума.

Траектория движения изображающей точки  $y_1, \dots, y_n$  в этом случае оказывается нормальной к поверхности  $F(y_1, \dots, y_n) = \text{const}$ .

Уравнения (25.13) соответствуют устойчивому движению экстремальной системы, так как из (25.12) следует

$$\frac{dF}{dt} = k \left[ \left( \frac{dF}{dy_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{dF}{dy_n} \right)^2 \right]. \quad (25.14)$$

Следовательно, производная функции  $F$  по времени сохраняет свой знак (больше нуля при  $k > 0$  и меньше нуля при  $k < 0$ ) повсюду, кроме точки экстремума, где эта производная обращается в нуль, что соответствует монотонному сходящемуся процессу.

При шаговом движении реализуются зависимости

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= k \frac{dF}{dy_1}; \\ \dots\dots\dots \\ \Delta y_n &= k \frac{dF}{dy_n}, \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

где  $\Delta y_1, \dots, \Delta y_n$  — фиксированные шаги в направлении экстремума.

Для способа градиента характерно плавное движение по направлению к точке экстремума и малый размах колебаний около точки экстремума при шаговом движении.

**Способ наискорейшего спуска.** При способе наискорейшего спуска движение происходит по начальному направлению вектора градиента  $F$  до тех пор, пока производная функции  $F$  по этому направлению не обратится в нуль. Затем опять определяется направление градиента и происходит движение вдоль этого вектора до обращения в нуль

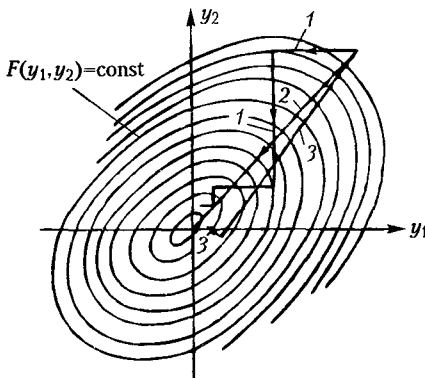


Рис. 25.2

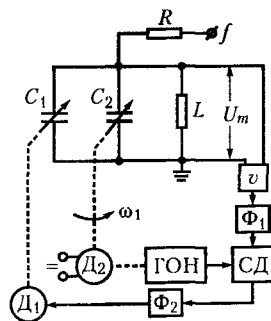


Рис. 25.3

производной от  $F$  по этому направлению. Процесс повторяется до достижения точки экстремума.

Этот способ характеризуется быстрым выходом системы в район экстремума, что делает его предпочтительным для начальной стадии движения. В районе экстремума можно использовать другие способы, например, способ градиента.

На рис. 25.2. для случая двух управляемых величин, что соответствует  $F = F(y_1, y_2)$ , изображены траектории движения для рассмотренных выше способов поиска экстремума [44]. Кривая 1 соответствует способу Гаусса–Зайделя, кривая 2 – способу градиента и кривая 3 – способу наискорейшего спуска.

Рассмотрим теперь пример экстремальной системы для наиболее простого случая, когда  $F = F(y)$ .

**Пример.** На рис. 25.3 изображена схема экстремального управления настройкой колебательного контура. Полезный сигнал с частотой  $f$  поступает на параллельный резонансный контур, состоящий из катушки  $L$  и конденсаторов переменной емкости  $C_1$  и  $C_2$ . Конденсатор  $C_2$  имеет сравнительно небольшую емкость. Ротор его вращается двигателем  $D_2$  с постоянной скоростью, вызывая периодические изменения общей емкости контура, которая является управляемой величиной.

Общая емкость колебательного контура

$$C = C_1 + C_2 = C_1 + C_{20} + A_1 \sin \omega_1 t,$$

где  $C_{20}$  – постоянная составляющая емкости конденсатора  $C_2$ , а  $\omega_1$  – угловая скорость вращения его ротора.

Частота  $\omega_1$  выбирается так, чтобы она была во много раз меньше частоты полезного сигнала  $\omega = 2\pi f$  и больше возможной частоты процесса управления.

Двигатель  $D_2$  синхронно с вращением ротора конденсатора  $C_2$  дает опорную величину в синхронный детектор СД, например, в виде опорного напряжения той же частоты от генератора ГОН.

Переменное напряжение на колебательном контуре после выпрямления и сглаживания фильтром  $\Phi_1$  поступает на вход СД. На выходе СД формируется сигнал, про-

порциональный производной от амплитуды напряжения контура по емкости  $\frac{dU_m}{dC}$ .

Этот сигнал после сглаживания фильтром  $\Phi_2$  поступает далее на усилитель и двигатель  $D_1$ . Последний будет вращать ротор конденсатора  $C_1$ , т. е. изменять управляемую

величину и производить подстройку контура до тех пор, пока производная  $\frac{dU_m}{dC}$  не

станет равной нулю. Всякое изменение частоты сигнала  $f$  будет вызывать автоматическую подстройку на максимум напряжения на контуре.

В этой системе поиски экстремума по способам Гаусса–Зайделя, градиента и наискорейшего спуска сливаются в один вследствие наличия только одной управляемой величины (емкости контура).

Нетрудно видеть, что в рассмотренной экстремальной системе получается своеобразная

следающая система, ошибкой в которой является производная  $\frac{dU_m}{dC}$ . В соответ-



ствии с этим структурная схема этой экстремальной системы может быть сведена к структурной схеме следящей системы (рис. 25.4).

Входной величиной является значение емкости  $C_3$ , соответствующее экстремуму. Это значение связано с частотой полезного сигнала и индуктивностью приближенным соотношением (при пренебрежении влиянием активных сопротивлений)

$$C_3 \approx \frac{1}{\omega^2 L}.$$

В контур структурной схемы входят апериодические звенья, соответствующие фильтрам  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , и интегрирующее звено с замедлением (двигатель  $D_1$ ). Результирующая передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)(1+T_1p)(1+T_2p)},$$

где  $T$  — электромеханическая постоянная времени двигателя,  $T_1$  и  $T_2$  — постоянные времени фильтров.

На рис. 25.4 показано также воздействие  $f$  от неподавленной переменной составляющей на выходе синхронного детектора и воздействие  $\Delta C_3$ , представляющее собой помеху во входном сигнале.

Как следует из рис. 25.4, исследование динамики рассматриваемой экстремальной системы сводится к исследованию следящей системы. Поэтому здесь применимы все методы, используемые в непрерывных автоматических системах.

Помимо обычных показателей качества для экстремальных систем используется еще одна характеристика — потери на поиск.

В установившемся режиме управляемая величина колеблется около значения, соответствующего экстремуму функции  $F(y)$ . Вследствие этого среднее значение этой функции отличается от экстремального. Среднее значение разности  $F - F_3$ , обусловленное колебаниями поиска в установившемся режиме работы системы, называется потерями на поиск.

Поскольку в точке экстремума первая производная  $\frac{dF}{dy} = 0$ , то разность между текущим и экстремальным значениями функции  $F(y)$  можно представить в виде степенного ряда

$$F - F_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dy^2} (\Delta y)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{dy^3} (\Delta y)^3 + \dots \quad (25.16)$$

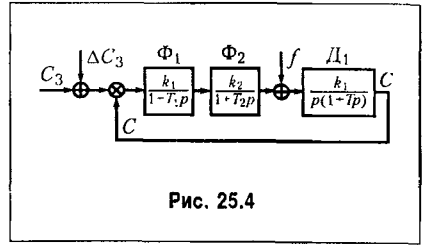


Рис. 25.4

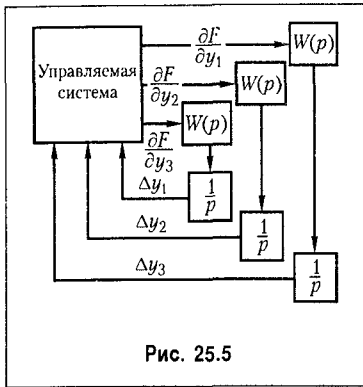


Рис. 25.5

Здесь частные производные соответствуют точке экстремума, а  $\Delta y$  — отклонение от этой точки. Если в (25.16) можно ограничиться только первым членом ряда, т. е. использовать квадратичную форму, то потери на поиск можно представить в виде

$$\overline{F - F_3} = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dy^2} \overline{\Delta y^2}, \quad (25.17)$$

где  $\overline{\Delta y^2}$  — средний квадрат отклонения управляемой величины от значения  $y_3$ , соответствующего экстремуму.

При гармоническом поиске с амплитудой  $A_1$ , средний квадрат  $\overline{\Delta y^2} = \frac{A_1^2}{2}$ .

В общем случае наличия нескольких переменных  $F(y_1, \dots, y_n)$  потери на поиск определяются суммой

$$\overline{F - F_3} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d^2 F}{dy_i^2} \overline{\Delta y_i^2}. \quad (25.18)$$

Рассмотрим исследование динамики экстремальной системы при  $F_3 = F(y_1, \dots, y_n)$  для случая поиска экстремума по способу градиента. Структурная схема для этого случая изображена на рис. 25.5.

Вместо (25.13) здесь будут иметь место более сложные зависимости:

$$\dot{y}_i = W(p) \frac{dF}{dy_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (25.19)$$

или, в ином виде,

$$y_i = \frac{W(p)}{p} \frac{dF}{dy_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (25.20)$$

где  $W(p)$  — передаточная функция, одинаковая для всех каналов.

Для малых отклонений от точки экстремума разность  $F - F_3$  может быть представлена в виде квадратичной формы:

$$F - F_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta y_i \Delta y_k, \quad (25.21)$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} = \left( \frac{d^2 F}{dy_i dy_k} \right)_3 = \left( \frac{d^2 F}{dy_k dy_i} \right)_3. \quad (25.22)$$

В  $n$ -мерном пространстве координат  $(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n)$  поверхность

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta y_i \Delta y_k = 1 \quad (25.23)$$

для экстремума-минимума представляет собой эллипсоид, называемый определяющим эллипсоидом. Поверхность

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta y_i \Delta y_k = -1 \quad (25.24)$$

соответствует определяющему эллипсоиду экстремума-максимума.

В теории квадратичных форм показывается, что для малых отклонений уравнения (25.20) могут быть записаны в виде

$$\Delta y_i = \pm \frac{W(p)}{p} \frac{1}{c_i^2} \Delta y_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (25.25)$$

где  $c_i$  — полуоси определяющего эллипсоида; знак плюс соответствует минимуму и знак минус — максимуму.

Из (25.25) получаются характеристические уравнения для каналов:

$$\frac{W(p)}{p} \frac{1}{c_i^2} + 1 = 0. \quad (25.26)$$

Здесь знак введен в передаточную функцию  $W(p)$ , которая должна быть положительной для экстремума-максимума.

Таким образом, исследование динамики при  $F = F(y_1, \dots, y_n)$  сводится к анализу  $n$  изолированных каналов, которым соответствуют характеристические уравнения (25.26).

Рассмотрим теперь систему с шаговым поиском. На рис. 25.6 изображена схема шагового поиска максимального значения функции  $F(y)$ . В управляемом объекте эта функция должна превращаться в напряжение постоянного тока  $u_y$  по линейной или иной зависимости. Схема осуществляет поиск максимального значения  $u_y$ .

Изменение управляемой величины  $y$  осуществляется серводвигателем Д. Работа всей схемы происходит при помощи управления от временного программного устройства, которое в определен-

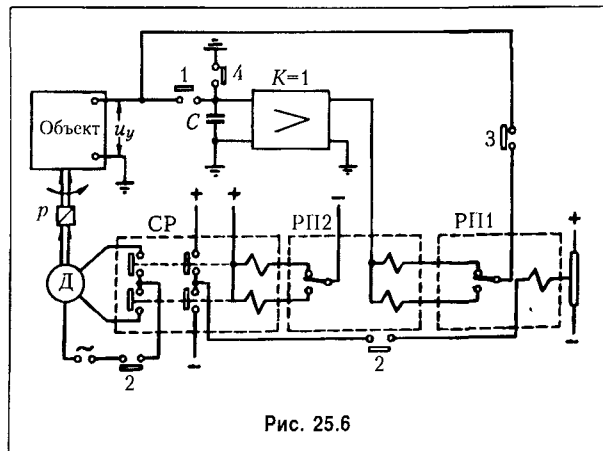


Рис. 25.6

ной последовательности замыкает свои контакты. Эти контакты пронумерованы цифрами, помещенными рядом. В соответствии с последовательной работой программного устройства рассмотрим работу схемы.

**1 - е п о л о ж е н и е.** Замыкается контакт 1, который на короткое время включает конденсатор  $C$ . Конденсатор заряжается до значения напряжения  $u_y$ . Далее при размыкании контакта 1 это напряжение запоминается на конденсаторе. К нему подключен усилитель с большим входным сопротивлением и коэффициентом усиления, равным единице. Выходное напряжение усилителя будет равно запомненному на конденсаторе напряжению  $u_y$ .

**2 - е п о л о ж е н и е.** Замыкаются контакты 2. Один из них включает на короткое время силовое реле  $СР$ , которое подводит напряжение к реверсируемому серводвигателю  $Д$ . В результате управляемая величина изменится на определенное значение  $\Delta u$ , т. е. система сделает один «шаг». Второй контакт 2 также на короткое время подключает к напряжению источника постоянного тока обмотку поляризованного реле РП1. Это делается для того, чтобы поляризованное реле запоминало направление шага.

В начале работы схемы положение поляризованного реле РП2 может быть произвольным. Поэтому трехпозиционное силовое реле может включаться в произвольную сторону, и шаг для поиска экстремума делается также в произвольную сторону.

**3 - е п о л о ж е н и е.** Замыкается на короткое время контакт 3, который включает обмотку реле РП2 на разность напряжений  $u_y$  до и после шага. Если напряжение  $u_y$  увеличилось после шага, реле РП2 остается включенным в прежнем положении. Если это напряжение уменьшилось, реле РП2 переключится в другое положение и подготовит включение силового реле в следующем цикле в другую сторону.

Это остается справедливым и в том случае, когда контакт реле РП2 включен не вверх, как показано на рис. 25.5, а вниз.

**4 - е п о л о ж е н и е.** На короткое время замыкается контакт 4, который замыкает конденсатор  $C$  и «стирает» записанное (запомненное) на нем напряжение  $u_y$ . Тем самым схема подготавливается для следующего цикла работы, который протекает аналогично.

На рис. 25.7 изображена структурная схема рассмотренной экстремальной системы. Значение управляемой величины, соответствующее точке экстремума, обозначено  $u_0$ . В схему введен импульсный элемент ИЭ, соответствующий шаговому характеру работы схемы, и нелинейный элемент НЭ. Наличие нелинейного элемента вызвано тем обстоятельством, что величина шага системы постоянна и меняется только направление самого шага. Это и обеспечивается НЭ с идеальной релейной характеристикой.

Серводвигатель совместно с управляющим органом, изменяющим значение управляемой величины, представлен в виде некоторой непрерывной части  $W_2(p)$ . Непрерывным звеном является также сам объект  $W_1(p)$ .

Процессы в данной экстремальной системе могут изучаться при помощи моделирования структурной схемы (рис. 25.6). Могут использоваться также аналитические методы исследования нелинейных импульсных систем (см. гл. 23).

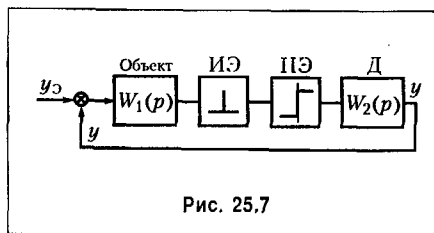


Рис. 25.7

Как следует из структурной схемы, в системе весьма вероятны автоколебания около точки экстремума. Это объясняется тем, что звено с идеальной релейной характеристикой при малых входных сигналах имеет коэффициент передачи, стремящейся к бесконечности. Поэтому и этой схеме будут присущи нотери на поиск в соответствии с формулой (25.17).

## § 25.2. Самонастраивающиеся системы

Самонастраивающиеся системы должны обеспечивать необходимое качество процессов управления при изменении свойств объекта управления и элементов управляющего устройства, а также при изменении характеристик возмущающих сил.

В отличие от экстремальных (поисковых) систем здесь самонастройка часто осуществляется аналитическим путем без организации процесса поиска. Самонастраивающиеся системы подобного типа называют беспоисковыми. Теория самонастраивающихся систем изложена в работах [26, 40, 61].

**Системы с разомкнутыми цепями самонастройки.** Эти системы используются в практике уже сравнительно большое время. Структурная схема подобной системы изображена на рис. 25.8. Здесь  $W_1$  и  $W_2$  обозначают передаточные функции части системы. Пусть  $W_2$  — передаточная функция объекта и управляющего устройства, а  $W_1$  — передаточная функция некоторого звена, которое будем называть корректирующим устройством.

Под влиянием внешних возмущений  $f_1, \dots, f_n$  происходит изменение передаточной функции  $W_2$ .

Для компенсации изменений эти же возмущения подводятся к корректирующему устройству с целью изменения его передаточной функции  $W_1$ .

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2}. \quad (25.27)$$

Очевидно, что для получения постоянства (25.27) необходимо выполнить условие  $W_1 W_2 = \text{const}$ . Поэтому передаточная функция корректирующего устройства должна меняться по зависимости

$$W_1 = \frac{W_{10} W_{20}}{W_2}, \quad (25.28)$$

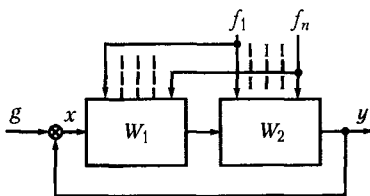


Рис. 25.8

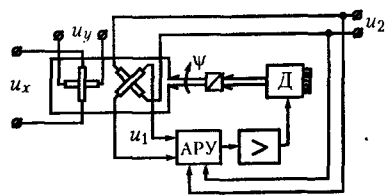


Рис. 25.9

где  $W_{10}$  и  $W_{20}$  — передаточные функции для некоторого начального состояния системы.

Выполнение условия (25.28) сопряжено со значительными трудностями вследствие того, что нельзя точно и полностью учесть все возможные воздействия на объект. Кроме того, точная реализация зависимости (25.28) во многих случаях затруднительна вследствие технических трудностей. Поэтому во многих случаях реализуется приближенное выполнение этого условия.

В качестве примера рассмотрим систему автоматического построения вектора по двум составляющим (рис. 25.9). На статорные обмотки синусно-косинусного вращающегося трансформатора СКВТ поступают напряжения переменного тока  $u_x$  и  $u_y$ , действующие значения которых пропорциональны проекциям вектора на оси  $x$  и  $y$ . В СКВТ образуется переменный магнитный поток, амплитуда которого пропорциональна модулю вектора:  $\Phi_{\max} = k\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = k_1\sqrt{x^2 + y^2}$ , а ось его составляет с осью обмотки, на

которую поступает напряжение  $u_x$ , угол  $\psi = \arctg \frac{u_y}{u_x} = \arctg \frac{y}{x}$ . Следящая система поворачивает ротор СКВТ до тех пор, пока напряжение на сигнальной обмотке ротора, включенной на вход усилителя, не станет равным нулю, точнее, минимальным. Тогда ось сигнальной обмотки будет перпендикулярна оси потока статора. Ось второй (квадратурной) обмотки ротора будет совпадать с осью потока. На второй обмотке будет напряжение, действующее значение которого пропорционально модулю искомого вектора:

$$u_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{k_1}{k} \sqrt{x^2 + y^2},$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — числа витков статорных и роторных обмоток.

Угол между осью квадратурной обмотки ротора и осью обмотки статора, на которую подается напряжение  $u_x$ , является аргументом  $u$  вектора, который строится.

При построении вектора следящая система работает в различных условиях в зависимости от величины модуля строящегося вектора. Это объясняется тем, что крутизна чувствительного элемента, которым является сигнальная обмотка СКВТ, зависит от амплитуды магнитного потока  $\Phi_{\max}$ , т. е. от модуля вектора. Эта крутизна может быть определена из известного для СКВТ выражения для напряжения сигнальной обмотки:

$$u_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \sin \Delta\psi = u_2 \sin \Delta\psi,$$

где  $\Delta\psi$  — рассогласование между сигнальной обмоткой и осью, перпендикулярной потоку статора.

Для малых углов получаем крутизну чувствительного элемента:

$$k_{\text{чз}} = \frac{u_1}{\Delta\psi} = u_2 \left[ \frac{\text{В}}{\text{рад}} \right] = \frac{u_2}{57,3} \left[ \frac{\text{В}}{\text{град}} \right].$$

При малых модулях строящегося вектора напряжение  $u_2$  мало и мала крутизна чувствительного элемента. Поэтому построение будет производиться с большой ошиб-

кой. При больших модулях вследствие увеличения крутизны чувствительного элемента может быть нарушена устойчивость следящей системы.

В связи с этим в схему построения вектора (рис. 25.9) вводится специальное корректирующее устройство, осуществляющее автоматическое изменение коэффициента усиления одного из каскадов усилителя АРУ. Работа схемы АРУ происходит в функции модуля строящегося вектора. Для этой цели может использоваться напряжение  $u_2$  квадратурной обмотки ротора СКВТ.

АРУ осуществляется обычно на каком-либо нелинейном элементе (полупроводниковом диоде, полупроводниковом триоде, дросселе насыщения и т. д.). АРУ должно работать так, чтобы при увеличении напряжения  $u_2$  и соответственно при увеличении крутизны чувствительного элемента  $k_{\text{чз}}$ , коэффициент усиления усилителя  $k_y$  уменьшался по гиперболической зависимости. Тогда их произведение будет оставаться постоянным ( $k_{\text{чз}}k_y = \text{const}$ ), что обеспечит работу следящей системы при постоянном коэффициенте усиления разомкнутой цепи.

**Системы с замкнутыми цепями самонастройки.** Рассмотрим два принципа построения систем с замкнутыми цепями самонастройки.

На рис. 25.10 изображена схема системы со стабилизацией качества процесса управления посредством связей с эталонным фильтром.  $W_1$  и  $W_2$  представляют собой передаточные функции двух звеньев системы. Внешние условия воздействуют на передаточную функцию  $W_2$ . В качестве эталона используется некоторое звено (фильтр), передаточная функция которого  $\Phi_0$  равна желаемой передаточной функции замкнутой системы. Выходная величина  $y$  системы сравнивается с выходной величиной  $y_0$  эталона. Разность этих величин после прохождения усилителя с коэффициентом усиления  $k$  поступает на вход второго звена.

Результирующая передаточная функция замкнутой системы с дополнительной связью от эталонного фильтра будет

$$\Phi = \frac{W_1 W_2 + k W_2 \Phi_0}{1 + W_1 W_2 + k W_2} \quad (25.29)$$

Если коэффициент усиления усилителя  $k$  велик, то можно положить  $\Phi \approx \Phi_0$ . Таким образом, при изменении внешних условий передаточная функция замкнутой системы оказывается близкой к эталонной.

Такие системы обладают сравнительно низкими качествами вследствие невозможности практически реализовать значительное увеличение коэффициента усиления  $k$

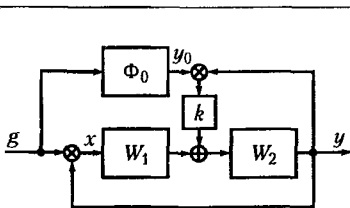


Рис. 25.10

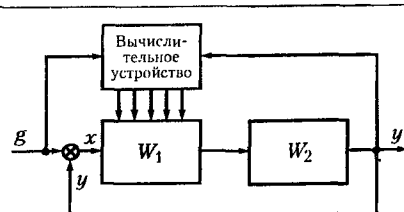


Рис. 25.11

из-за потери устойчивости. Поэтому большее практическое значение имеет другая схема самонастройки, изображенная на рис. 25.11. Эта схема содержит вычислительное устройство дискретного или непрерывного типа, которое определяет отклонение характеристик замкнутой системы от желаемых или эталонных и в соответствии с имеющимся отклонением воздействует на различные параметры корректирующего устройства с передаточной функцией  $W_1$ .

Один из возможных путей заключается в определении вычислительным устройством частотных характеристик систем. Для этой цели на вход системы подаются малые колебания некоторых фиксированных частот, для которых определяется частотная передаточная функция системы. В некоторых случаях нет нужды специально подавать на входе колебания фиксированных частот, так как они могут присутствовать во входном сигнале. Задача тогда будет заключаться только в выделении этих колебаний из выходной величины посредством узкополосных фильтров.

После нахождения частотной передаточной функции системы вычислительное устройство определяет требуемые значения параметров корректирующего устройства и посредством исполнительных устройств устанавливает эти значения параметров. В результате характеристики замкнутой системы будут непрерывно корректироваться так, чтобы реализовать приближение их к желаемому виду.

Возможно также определение переходной или весовой функции системы при подаче на вход ступенчатого или импульсного воздействия и реализация воздействия на корректирующее устройство при наличии отклонения от желаемого вида переходного процесса.

Основной трудностью здесь является недопустимость подачи на вход значительных пробных воздействий, так как они могут нарушать основной процесс управления. Подача же малых пробных воздействий затрудняет выделение получающейся реакции на фоне помех и шумов.

Для контроля динамических характеристик возможно применение статистических методов. Пусть на входе системы действует случайный сигнал  $g(t)$ , вызывающий на ее выходе реакцию  $y(t)$ . Тогда взаимная корреляционная функция для этих двух функций времени может быть определена по выражению

$$R_{gy}(\tau) = \overline{g(t-\tau)y(t)} = \int_0^{\infty} \overline{w(\eta)g(t-\tau)} d\eta = \int_0^{\infty} w(\eta)R_g(\tau-\eta) d\eta, \quad (25.30)$$

где  $w(t)$  — функция веса системы.

Если при помощи корреляторов определить корреляционные функции  $R_g(\tau)$  и  $R_{gy}(\tau)$ , то решение интегрального уравнения (25.30) даст весовую функцию. Эта задача возлагается на вычислительное устройство (рис. 25.11).

Указанный метод наиболее прост, когда в пределах полосы пропускания системы  $g(t)$  имеет белый спектр. Тогда

$$R_g(\tau-\eta) = a\delta(\tau-\eta) \quad \text{и} \quad R_{gy}(\tau) = a\omega(\tau).$$

При статистическом методе определения весовой функции возможно использование имеющихся во входном сигнале шумовых помех в качестве пробных сигналов, что является достоинством этого метода.



Кроме обычных критериев качества, самоадаптивные системы характеризуются временем и точностью самонастройки. Так как объект управления в самоадаптивной системе, как правило, имеет переменные параметры, то определение динамических свойств системы по временным или частотным характеристикам должно

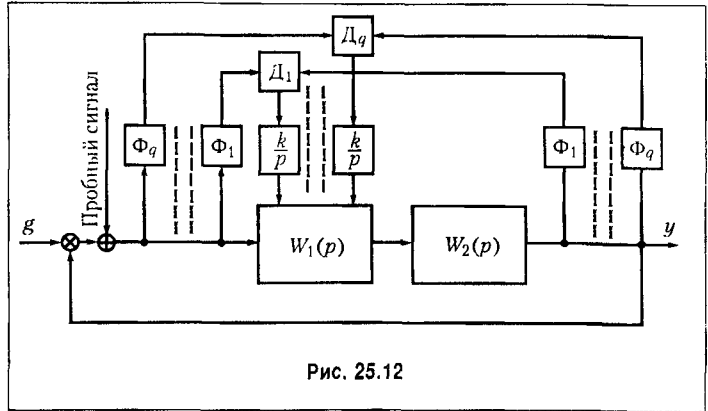


Рис. 25.12

производиться возможно более быстро, чтобы можно было выявить свойства объекта в текущий момент времени. С другой стороны, все указанные выше методы требуют некоторого конечного времени, определяемого необходимостью накопления сигналов на фоне шумов. Так, например, при корреляционном методе время самонастройки обычно значительно превышает время переходного процесса, определяемое по затуханию весовой функции (25.30).

На рис. 25.12 в качестве примера изображена схема самоадаптивной системы с определением амплитудно-частотных характеристик. Работа схемы происходит следующим образом. На вход системы поступает пробный сигнал, содержащий фиксированные частоты  $\omega_1, \dots, \omega_q$ . Эти частоты на входе и выходе системы выделяются узкополосными фильтрами  $\Phi$ , а затем в делительных устройствах  $\Delta$  происходит деление выходной амплитуды на входную. Это дает фиксированные точки а. ч. х. (или л. а. х.) на пробных частотах  $\omega_1, \dots, \omega_q$ . В случае отклонения частотной характеристики от заданного значения сигнал с выхода делительного устройства поступает через усилитель на исполнительный элемент, представляющий собой интегратор, который воздействует на корректирующее устройство с целью восстановления требуемого значения модуля частотной передаточной функции на данной частоте.

Нетрудно видеть, что процесс самонастройки в этой системе в некотором роде подобен автоматическому синтезу системы управления по ее частотным характеристикам. Число дискретных частот пробного сигнала определяется сложностью объекта. Оно совпадает с числом опорных точек логарифмической амплитудной характеристики, которое надо иметь, чтобы осуществить синтез системы по методу л. а. х.

Таким образом, самоадаптивные системы этого типа (рис. 25.11) представляют собой, по существу, устройства автоматического синтеза систем управления по заданным качественным показателям.

**Системы с экстремальной самонастройкой.** Эти системы отличаются от рассмотренных выше систем с замкнутыми цепями самонастройки тем, что в них автоматически осуществляется оптимальный синтез системы. Структурная схема в этом случае совпадает со схемой, изображенной на рис. 25.11.

Для реализации оптимального синтеза в основу работы вычислительного устройства должен быть положен некоторый критерий оптимальности. При расчете систем

автоматического управления часто используется критерий минимума среднеквадратичной ошибки, когда минимизируется средний квадрат ошибки:

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2 dt. \quad (25.31)$$

Очевидно, что реализовать эту оценку для самонастраивающейся системы затруднительно. Это связано, во-первых, с тем, что необходимо вычисление интеграла (25.31) в бесконечных пределах, и, во-вторых, с тем, что оценка остается неизменной во все время работы системы.

Практически легко реализуется минимизация оценки вида

$$F = \int_0^t x^2(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau. \quad (25.32)$$

Устройство, реализующее выражение (25.32), представляет собой квадратор (звено, возводящее входную величину в квадрат) и последовательно включенное апериодическое звено с постоянной времени  $T$ . Функция веса такого звена

$$w(t) = e^{-\frac{t}{T}}.$$

Выходная величина этого устройства, записанная при помощи интеграла Дюамеля, совпадает с (25.32).

Постоянная времени  $T$  апериодического звена, которое является фильтром нижних частот, должна выбираться так, чтобы устройства изменения параметров корректирующего звена практически не реагировали на случайные быстрые изменения ошибки  $x$ .

Системы с экстремальной самонастройкой являются наиболее совершенными самонастраивающимися системами. Они обеспечивают оптимальную настройку системы в условиях изменения характеристик объекта, управляющего устройства и возмущающих сил. Однако они являются наиболее сложными системами и их реализация сталкивается пока со значительными техническими трудностями.

Самонастраивающиеся системы с экстремальной настройкой относятся к категории экстремальных систем с поиском минимума или максимума некоторой величины, определяющей оптимум работы системы. В качестве управляемых величин  $y_1, \dots, y_n$  здесь выступают параметры корректирующего устройства, например, общий коэффициент усиления, значения постоянных времени и передаточных коэффициентов и т. п. Исследование этих систем может производиться в соответствии с теорией экстремальных систем (§ 25.1).

**Системы с самоорганизацией.** Самоорганизующиеся системы по своей первоначальной структуре представляют собой набор элементов, связанных между собой случайным образом.

В дальнейшем при внешних возмущениях в них образуются устойчивые отрицательные и положительные обратные связи, подобно тому как в природе происходит

приспособление живых организмов к различным внешним условиям. Для живых организмов также характерны отрицательные обратные связи, в результате которых эти организмы «уравновешивают» неблагоприятные внешние воздействия, и положительные обратные связи, усиливающие благоприятные воздействия.

Самоорганизующимся системам свойственна большая универсальность (приспособляемость) и большая надежность по сравнению с обычными системами.

Самоорганизующиеся системы еще не получили распространения, и работа с ними не выходит пока из стадии первых опытов. Так, например, в литературе [36] описывается моделирование на цифровой машине процесса поиска методов решения новой задачи. В машину вводилось много различных программ, в том числе бессмысленные, и ставилась задача. Машина решала задачу наугад, чаще всего неправильно. Результат решения оценивался, и на основе оценки изменялся метод решения. После нескольких сотен тысяч попыток у машины «накопился опыт» и появилось суждение о правильном методе решения. В дальнейшем она придерживалась этого метода, несколько изменяя его, если изменялись условия.

Задача, которая ставилась машине, состояла в обработке 14-значного числа посредством 63 математических операций. Авторы эксперимента считают, что проще построить машину, способную самостоятельно выработать методику решения, чем точно составить алгоритмы этого решения.

Опыты с самоорганизующимися системами, несомненно, могут принести большую пользу конструкторам сложных систем управления, так как высшая стадия развития жизни на Земле — человек, — по сути дела, возникла на основе принципов самоорганизации неживой природы. Использование этих принципов может привести к весьма совершенным, надежным и универсальным системам управления.

**Игровые системы.** Игровые системы используются для управления различного рода операциями и, в частности, военными операциями. «Игра» или «борьба» может вестись против организованного противника или против сил природы (случайного процесса).

На рис. 25.13 изображена структурная схема игровой системы. Управляющая машина этой системы имеет так называемый игровой алгоритм. Он заключается в сравнении возможных в данной обстановке решений и выборе из большого числа решений оптимального. После принятия решения управляющая машина должна сформировать и передать к управляемой операции команды управления.

Сравнение вариантов решений делается управляющей машиной на основе заложенных в нее критериев. Эти критерии выражаются в виде некоторой функции, которую называют функцией выгоды. Установление

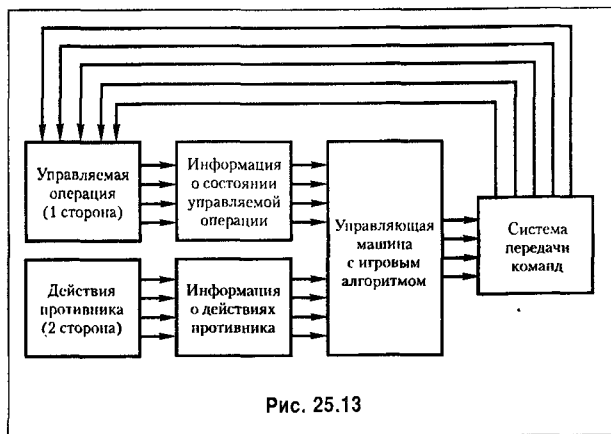


Рис. 25.13

рациональной функции представляет собой основную проблему при построении игровых систем.

При исследовании игровых систем в настоящее время используется специальная математическая дисциплина — теория игр. Главным содержанием теории игр является обоснование так называемых оптимальных стратегий ведения игр.

Наиболее полно теория игр разработана для конечных игр, для которых характерно конечное число ходов и, следовательно, конечное число возможных стратегий.

В управляющих машинах в настоящее время используются игровые алгоритмы двух видов.

Игровые алгоритмы первого вида используются в системах с набором шаблонных решений. Идея здесь заключается в том, что все возможные решения заранее исследуются и нумеруются. Задачей управляющей машины является выбор такого решения, для которого в сложившейся ситуации будет получено максимальное значение функции выгоды. Недостатком такого принципа является малая гибкость и приспособляемость игровой системы в условиях широкого изменения складывающейся обстановки ведения игры.

В игровых системах второго вида используется идея динамического программирования. Для динамического программирования характерным является решение задачи оптимальности по отдельным этапам и шагам. Поиск оптимального выбора на каждом этапе осуществляется управляющей машиной. Процесс управления в игровой системе с динамическим программированием является замкнутым дискретным процессом. Результат выполнения команд управления на предыдущем этапе является исходным для формирования команд управления на следующем этапе.

Наиболее разработана теория так называемых *дифференциальных игр*. К ним относятся: задача преследования одного управляемого объекта другим, задача приведения управляемого объекта в некоторое заданное состояние при действии заранее неизвестных возмущений, задача управления объектом при неполной текущей информации о его состоянии и другие родственные задачи. Предполагается при этом, что отыскиваются оптимальные решения всех этих задач. Наиболее полно теория дифференциальных игр разработана в монографии Н. Н. Красовского [46]. Там же изложены примеры дифференциальных игр и методы решения таких задач, как конфликтная задача сближения, игровая задача наведения, информационная игровая задача, задача оптимального преследования и уклонения и др.

# Приложение 1

## ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{A(j\omega) A(-j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$$

и все корни  $A(j\omega)$  расположены в верхней полуплоскости;

$$I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1},$$

$$I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1},$$

$$I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)},$$

$$I_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3 - a_1a_2)}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)}$$

$$I_5 = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5},$$

$$M_5 = b_0(-a_0a_1a_5 + a_1a_4^2 + a_2^2a_5 - a_2a_3a_4) + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) + \\ + a_0b_2(a_0a_5 - a_1a_4) + a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) + \\ + \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3),$$

$$\Delta_5 = a_0^2a_5^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4,$$

$$I_6 = \frac{M_6}{2a_0\Delta_6},$$

$$M_6 = b_0(-a_0a_3a_5a_6 + a_0a_4a_5^2 - a_1^2a_6^2 + 2a_1a_2a_5a_6 + a_1a_3a_4a_6 - \\ - a_1a_4^2a_5 - a_2^2a_5^2 - a_2a_3^2a_6 + a_2a_3a_4a_5) + a_0b_1(-a_1a_5a_6 + a_2a_5^2 + a_3^2a_6 - a_3a_4a_5) + \\ + a_0b_2(-a_0b_5^2 - a_1a_3a_6 + a_1a_4a_5) + a_0b_3(a_0a_3a_5 + a_1^2a_6 - a_1a_2a_5) + \\ + a_0b_4(a_0a_1a_5 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + a_1a_2a_3) + \frac{a_0b_5}{a_6}(a_0^2a_5^2 + a_0a_1a_3a_6 - \\ - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 - a_1^2a_2a_6 + a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4),$$

$$\Delta_6 = a_0^2a_5^3 + 3a_0a_1a_3a_5a_6 - 2a_0a_1a_4a_5^2 - a_0a_2a_3a_5^2 - a_0a_3^2a_6 + a_0a_3^2a_4a_5 + \\ + a_1^3a_6^2 - 2a_1^2a_2a_5a_6 - a_1^2a_3a_4a_6 + a_1^2a_4^2a_5 + a_1a_2^2a_5^2 + a_1a_2a_3^2a_6 - a_1a_2a_3a_4a_5,$$

$$I_7 = \frac{M_7}{2a_0\Delta_7},$$

где

$$M_7 = b_0m_0 + a_0b_1m_1 + a_0b_2m_2 + \dots + a_0b_6m_6,$$

$$m_0 = a_0^2a_6a_7^2 - 2a_0a_1a_6^2a_7 - 2a_0a_2a_4a_7^2 + a_0a_2a_5a_6a_7 + a_0a_3a_5a_6^2 + a_0a_4^2a_5a_7 - \\ - a_0a_4a_5^2a_6 + a_1^2a_6^3 + 3a_1a_2a_4a_6a_7 - 2a_1a_2a_5a_6^2 - a_1a_3a_4a_6^2 - a_1a_4^3a_7 + a_1a_4^2a_5a_6 + \\ + a_2^3a_7^3 - 2a_2^2a_3a_6a_7 - a_2^2a_4a_5a_7 + a_2^2a_5^2a_6 + a_2a_3a_4^2a_7 - a_2a_3a_4a_5a_6 - a_2a_3^2a_6^2,$$

$$m_1 = a_0a_4a_7^2 - a_0a_5a_6a_7 - a_1a_4a_6a_7 + a_1a_5a_6^2 - a_2^2a_7^2 + 2a_2a_3a_6a_7 + \\ + a_2a_4a_5a_7 - a_2a_5^2a_6 - a_3^2a_6^2 - a_3a_4^2a_7 + a_3a_4a_5a_6,$$

$$m_2 = a_0 a_2 a_7^2 - a_0 a_3 a_6 a_7 - a_0 a_4 a_5 a_7 + a_0 a_5^2 a_6 - a_1 a_2 a_6 a_7 + a_1 a_3 a_6^2 + a_1 a_4^2 a_7 - a_1 a_4 a_5 a_6,$$

$$m_3 = -a_0^2 a_7^2 + 2a_0 a_1 a_6 a_7 + a_0 a_3 a_4 a_7 - a_0 a_3 a_5 a_6 - a_1^2 a_6^2 - a_1 a_2 a_4 a_7 + a_1 a_2 a_5 a_6,$$

$$m_4 = a_0^2 a_5 a_7 - a_0 a_1 a_4 a_7 - a_0 a_1 a_5 a_6 - a_0 a_2 a_3 a_7 + a_0 a_3^2 a_6 + a_1^2 a_4 a_6 + a_1 a_2^2 a_7 - a_1 a_2 a_3 a_6,$$

$$m_5 = a_0^2 a_3 a_7 - a_0^2 a_5^2 - a_0 a_1 a_2 a_7 - a_0 a_1 a_3 a_6 + 2a_0 a_1 a_4 a_5 + a_0 a_2 a_3 a_5 - \\ - a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2 a_6 - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4,$$

$$m_6 = \frac{1}{a_7} (a_0^2 a_1 a_7^2 - 2a_0^2 a_3 a_5 a_7 + a_0^2 a_5^3 - 2a_0 a_1^2 a_6 a_7 + a_0 a_1 a_2 a_5 a_7 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 - \\ - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 + a_0 a_2 a_2^2 a_7 - a_0 a_2 a_3 a_5^2 - a_0 a_3^3 a_6 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 + a_1^3 a_6^2 + a_1^2 a_2 a_4 a_7 - \\ - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6 - a_1^2 a_3 a_4 a_6 + a_1^2 a_4^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_7 + a_1 a_2^2 a_5^2 + a_1 a_2 a_3^2 a_6 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5),$$

$$\Delta_7 = -a_0^3 a_7^3 + 3a_0^2 a_1 a_6 a_7^2 + a_0 a_2 a_5 a_7^2 + 2a_0^2 a_3 a_4 a_7^2 - 3a_0^2 a_3 a_5 a_6 a_7 - a_0^2 a_4 a_5^2 a_7 + \\ + a_0^2 a_5^3 a_6 - 3a_0 a_1^2 a_6^2 a_7 - 3a_0 a_1 a_2 a_4 a_7^2 + a_0 a_1 a_2 a_5 a_6 a_7 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6^2 - a_0 a_1 a_3 a_4 a_6 a_7 + \\ + 2a_0 a_1 a_4^2 a_5 a_7 - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 a_6 - a_0 a_2^2 a_3 a_7^2 + 2a_0 a_2 a_3^2 a_6 a_7 + a_0 a_2 a_3 a_4 a_5 a_7 - \\ - a_0 a_2 a_3 a_5^2 a_6 - a_0 a_3^3 a_6^2 - a_0 a_3^2 a_4^2 a_7 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 a_6 + a_3^3 a_6^3 + 3a_1^2 a_2 a_4 a_6 a_7 - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6^2 - \\ - a_1^2 a_3 a_4 a_6^2 - a_1^2 a_4^3 a_7 + a_1^2 a_4^2 a_5 a_6 + a_1 a_2^3 a_7^2 - 2a_1 a_2^3 a_3 a_6 a_7 - a_1 a_2^2 a_4 a_5 a_7 + \\ + a_1 a_2^2 a_5^2 a_6 + a_1 a_2 a_3^2 a_6^2 + a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_7 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6.$$

## Литература

1. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования. -- М.: Наука, 1966.
2. Айзерман М. А. Абсолютная устойчивость регулируемых систем / М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер. -- М.: Изд-во АН СССР, 1963.
3. Андронов А. Теория колебаний / А. А. Андронов, Л. А. Витт, С. Э. Хайкин. -- Изд. 2-е. -- М.: Физматгиз, 1959.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. -- М.: Изд-во иностр. литер., 1959.
5. Беллман Р. Процессы управления с адаптацией. -- М.: Наука, 1964.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц. -- М.: Наука, 1969.
7. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории процессов управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. -- М.: Изд-во иностр. литер., 1962.
8. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. -- М.: Наука, 1976.
9. Бесекерский В. А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. -- М.: Наука, 1970.
10. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. Бесекерского В. А. -- Изд. 4-е. -- М.: Наука, 1972.
11. Бесекерский В. А. Электромеханические сглаживающие устройства / В. А. Бесекерский, С. Б. Востоков, Я. М. Цейтлин. -- Л.: Судостроение, 1964.
12. Бесекерский В. А. / Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. -- М.: Наука, 1966.
13. Бесекерский В. А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации / В. А. Бесекерский, Е. А. Фабрикант. -- М.: Судостроение, 1968.
14. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. -- Изд. 2-е. -- М.: Физматгиз, 1958.
15. Боднер В. А. Системы управления летательными аппаратами. -- М.: Машиностроение, 1973.
16. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. -- М.: Наука, 1966.
17. Булгаков Б. В. Колебания. -- М.: Гостехиздат, 1954.
18. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. -- М.: Судпромгиз, 1962.
19. Вавилов А. А. Частотные методы расчета нелинейных систем. -- М.: Энергия, 1970.
20. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления. -- М.: Мир, 1969.
21. Васильев Д. В. Системы автоматического управления / Д. В. Васильев, Г. В. Чучи. -- М.: Высшая школа, 1967.



22. Вилепкин С. Я. Статистические методы исследования стационарных процессов и систем автоматического регулирования. — М.: Советское радио, 1967.
23. Власов П. П. Теория линейных систем, работающих на переменном токе. — М.: Энергия, 1964.
24. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Часть I. Линейные системы регулирования одной величины. — М.: Энергия, 1965.
25. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Часть II. Специальные линейные и нелинейные системы автоматического регулирования одной величины. — М.: Энергия, 1966.
26. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Часть III. Оптимальные, многосвязные и адаптивные системы. — М.: Энергия, 1970.
27. Гусев В. Г. Методы исследования процессов управления и обработки информации в цифровых автоматических системах. — М.: Наука, 1972.
28. Гусев В. Г. Методы исследования точности цифровых автоматических систем. — М.: Наука, 1973.
29. Джеймс Х. Теория следящих систем / Х. Джеймс, П. Никольс, Р. Филлис. — М.: Изд-во иностр. литер., 1953.
30. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1963.
31. Директор С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. — М.: Мир, 1974.
32. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. — М.: Наука, 1967.
33. Теория систем с переменной структурой // Под ред. Емельянова С. В. — М.: Наука, 1970.
34. Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. — М.: Судостроение, 1962.
35. Зубов В. И. Теория оптимального управления. — М.: Судостроение, 1966.
36. Иващенко П. Н. Автоматическое регулирование. — М.: Машиностроение, 1973.
37. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
38. Казаков И. Е. Статистическая динамика нелинейных систем / И. Е. Казаков, В. Г. Доступов. — М.: Физматгиз, 1962.
39. Катковник В. Я. Многомерные дискретные системы управления / В. Я. Катковник, Р. А. Полуэктов. — М.: Наука, 1966.
40. Козлов Ю. М. Беспорисковые самоадаптирующиеся системы / Ю. М. Козлов, Р. М. Юсупов. — М.: Наука, 1969.
41. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. — М.: Энергия, 1972.
42. Коршунов Ю. М. Цифровые сглаживающие и преобразующие системы / Ю. М. Коршунов, А. И. Бобиков. — М.: Энергия, 1969.
43. Красовский А. А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1969.
44. Красовский А. А. Основы автоматизации и технической кибернетики / А. А. Красовский, Г. С. Поспелов. — М.: Госэнергонздат, 1962.
45. Красовский П. П. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
46. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970.
47. Крутько П. Д. Статистическая динамика импульсных систем. — М.: Советское радио, 1963.
48. Крутько П. Д. Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. — М.: Советское радио, 1967.
49. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. — М.: Машигиз, 1962.

50. Кузовков П. Т. Динамика систем автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1968.
51. Кунцевич В. М. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией / В. М. Кунцевич, Ю. П. Чеховой. — М.: Техника, 1970.
52. Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. — Гостехиздат УССР, 1963.
53. Современная теория систем управления // Под ред. Леондеса К. Т. — М.: Наука, 1970.
54. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. — М.: Физматгиз, 1962.
55. Летов А. М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969.
56. Лившиц Н. А. Вероятностный анализ систем автоматического управления / Н. А. Лившиц, В. И. Пугачев. — Т. 1 и 2. — М.: Советское радио, 1963.
57. Лучко С. В. Расчет дискретных систем автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией. — М.: Изд-во Министерства обороны, 1984.
58. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950.
59. Месеров М. В. Системы многосвязного регулирования. — М.: Наука, 1965.
60. Мерризм К. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. — М.: Мир, 1967.
61. Приспосабливающиеся автоматические системы // Под ред. Мишкина Э. и Брауна Л. — М.: Изд-во иностр. литер., 1963.
62. Пеллепиц Р. А. Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем. — М.: Судостроение, 1967.
63. Теория автоматического управления // Под ред. Нетушила А. В. — Ч. 1 и 2. — М.: Высшая школа, 1968, 1972.
64. Николаев Ю. А. Динамика цифровых следящих систем / Ю. А. Николаев, В. П. Петухов, Г. Н. Феклисов, Б. К. Чемоданов. — М.: Энергия, 1970.
65. Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. — М.: Наука, 1966.
66. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. — М.: Физматгиз, 1962.
67. Современные методы проектирования систем автоматического управления // Под ред. Петрова Б. Н., Солодовникова В. В., Топчиева Ю. И. — М.: Машиностроение, 1967.
68. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Физматгиз, 1961.
69. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970.
70. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. — М.: ГИИТЛ, 1954.
71. Попов Е. П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. — М.: Наука, 1973.
72. Попов Е. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем / Е. П. Попов, И. П. Пальгов. — М.: Физматгиз, 1960.
73. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем // Под ред. Попова Е. П. и Топчиева Ю. И. — М.: Машиностроение, 1970.
74. Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления // Под ред. Попова Е. П. и Топчиева Ю. И. — М.: Машиностроение, 1970.
75. Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления // Под ред. Попова Е. П. и Федорова С. М. — М.: Машиностроение, 1970.
76. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления // Под ред. Попова Е. П. и Пеллепица Р. А. — М.: Машиностроение, 1970.
77. Нелинейная оптимизация систем автоматического управления // Под ред. Попова Е. П. и Пономарева В. М. — М.: Машиностроение, 1970.
78. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления // Под ред. Попова Е. П. и Даступова Б. Г. — М.: Машиностроение, 1970.

79. Нелинейные дискретные системы // Под ред. Попова Е. П. и Топчиева Ю. И. — М.: Машиностроение, 1982.
80. Основы автоматического управления // Под ред. Пугачева В. С. — М.: Наука, 1974.
81. Пушков К. А. Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1965.
82. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем автоматического управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. — М.: Энергия, 1969.
83. Сигалов Г. Г. Основы теории дискретных систем управления / Г. Г. Сигалов, Л. С. Мадорский. — М.: Высшая школа, 1973.
84. Смит О. Дж. М. Автоматическое регулирование. — М.: Физматгиз, 1962.
85. Соколов Т. Н. Электромеханические системы автоматического управления. — М.: Госэнергоиздат, 1952.
86. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. — М.: Физматгиз, 1962.
87. Солодов А. В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. — М.: Наука, 1967.
88. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1960.
89. Теория автоматического регулирования // Под ред. Солодовникова В. В. — Книги I, II и III. — М.: Машиностроение, 1967.
90. Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1964.
91. Ту Ю. Т. Современная теория управления. — М.: Машиностроение, 1971.
92. Федоров С. М. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами / С. М. Федоров, А. П. Литвинов. — М.: Энергия, 1965.
93. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами // Под ред. Хитрика М. С., Федорова С. М. — М.: Машиностроение, 1976.
94. Хлыпало Е. И. Нелинейные корректирующие устройства в автоматических системах. — М.: Энергия, 1973.
95. Цыпкин Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1955.
96. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1963.
97. Цыпкин Я. З. Теория нелинейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин, Ю. С. Понков. — М.: Наука, 1973.
98. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970.
99. Чаки Ф. Современная теория управления. — М.: Мир, 1975.
100. Чанг Шелдон С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1964.
101. Юревич Е. И. Теория автоматического управления. — М.: Энергия, 1969.

Заслуженный деятель науки и техники России профессор Виктор Антонович Бесекерский, автор 300 научных трудов, в том числе 40 монографий и учебников и более 100 изобретений, был в равной степени выдающимся ученым, инженером и педагогом.

В течение почти полувека он возглавлял петербургскую школу специалистов в области теории и практики создания систем автоматического управления.

Им разработаны методы анализа и оптимального синтеза по заданным качественным показателям систем автоматического управления, в том числе систем гироскопической стабилизации, автопилотирования, инерциальной и астрономической навигации, систем управления с цифровыми вычислительными машинами.

В. А. Бесекерский возглавлял выпускающие кафедры в Военно-механическом институте, Военной инженерной академии им. А. Ф. Можайского и в институте Авиационного приборостроения. Под его руководством подготовлено свыше 100 кандидатов наук, многие из которых стали докторами наук.

Труды профессора Бесекерского отличаются неизменной практической направленностью, ибо параллельно с педагогической деятельностью он более 40 лет работал в промышленности. Под его научным руководством были созданы серийные и уникальные системы автоматического управления, в частности:

- серии приборных следящих систем различного назначения;
- цифровая система управления самым крупным в мире телескопом с диаметром зеркала 6 м;
- система гириориентации и стабилизации искусственных спутников Земли;
- системы автопилотирования первых в мире крупнотоннажных экранопланов.

В. А. Бесекерский написал ряд учебных пособий, в том числе «Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления», выдержавший пять изданий, переведенный и опубликованный в ряде зарубежных стран.

Евгений Павлович Попов — крупный ученый, один из самых известных специалистов в области автоматического управления, талантливый педагог и организатор науки, трижды Лауреат Государственной премии, академик Академии наук Российской Федерации начал свою научную деятельность еще во время обучения в МВТУ им. П. В. Баумана, опубликовав ряд статей по нелинейным задачам механики в академических журналах.

В 1943 г. Е. П. Попов был назначен преподавателем Ленинградской военно-воздушной инженерной академии им. А. Ф. Можайского, где в 1949 г. им была организована одна из первых в стране кафедр автоматики и телемеханики, а позже — кафедра систем управления ракет и космических аппаратов. В 1952 г. им был опубликован один из первых в стране учебников, в котором наряду с линейной теорией впервые освещались вопросы динамики нелинейных автоматических систем. В 1960 г. Е. П. Попов был избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению механики и процессов управления, а в 1964 г. — назначен председателем секции прикладных проблем при Президиуме Академии Наук. Одновременно он заведовал кафедрой автоматических систем в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики. В 1966 г. совместно с В. А. Бессекерским было опубликовано первое издание книги под названием «Теория систем автоматического регулирования», четвертое издание которой и предлагается читателю.

С 1971 г. Е. П. Попов работал в МВТУ им. Н. Э. Баумана, возглавляя вначале кафедру следящих систем, а затем вновь созданную кафедру робототехнических систем. В эти годы он переключился на новую для себя область научных исследований, связанную с проблемами робототехники, а с 1981 г. стал научным руководителем научно-учебного центра «Робототехника». В 1984 г. за участие в разработке и внедрении робототехнических систем в производство ему была присуждена третья Государственная премия.

Е. П. Попов — автор более 200 печатных работ по вопросам механики, теории автоматического управления и робототехники.

*Учебное издание*

**Бесекерский Виктор Антонович**

**Попов Евгений Павлович**

***Теория систем автоматического управления***

Ведущий редактор А. М. Плотников

Верстка И. Артемьева

Дизайн обложки Р. Бабкина

Корректор О. Камнева

**Издательство «Профессия»**

Санкт-Петербург, 191002, а/я 600.

Тел./факс: (812) 316-27-93, 140-12.60, URL: [www.professija.ru](http://www.professija.ru)

Лицензия ИД № 00469 от 25.11.99 г.

Подписано в печать с готовых диапозитивов 01.04.2003.

Формат 70 × 100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Уч.-печ. л. 51,7.

Тираж 5 000 экз. Заказ № 66.

издание подготовлено и выпущено при участии ЗАО «Технострой».

**ОАО «Санкт-Петербургская типография № 6».**

191144, Санкт-Петербург, ул. Монсеенко, 10.

Телефон отдела маркетинга 271-35-42.

**Классические сборники задач  
издательства «Профессия» для всех  
технических и технологических  
университетов**

---

**Волькенштейн В. С. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ**

(15-е, дополненное и переработанное издание)

328 с., тв. пер.

Серия «Специалист», 2003 г.

Формат: 60 × 88/16 (145 × 210 мм)

- физические основы механики
  - молекулярная физика и термодинамика
  - электричество и магнетизм
  - колебания и волны
  - оптика
  - физика атома и атомного ядра
- 

**Берман Г. Н. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

(22-е изд.)

432 с., тв. пер.

Серия «Специалист», 2003 г.

Формат: 60 × 88/16 (145 × 210 мм)

- сохранена нумерация задач и ответов
  - внесены исправления в тексты задач
  - проверена правильность ответов и решений
- 

**Клетеник Д. В. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

(17-е изд.)

200 с., тв. пер.

Серия «Специалист», 2003 г.

Формат: 60 × 88/16 (145 × 210 мм)

- аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
  - 1300 задач
  - проверена правильность ответов и решений
- 

Уточнить цены и заказать необходимые книги в издательстве можно

**эл. почтой по адресу:** info@professija.ru  
**по телефону/факсу:** (812) 140-12-60, 316-27-93  
**почтой по адресу:** 191002, С.-Петербург, а/я 600