**Державний вищій навчальний заклад
“Запорізький національний університет”
Міністерства освіти і науки України**

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Модуль 1

**Методичні вказівки до виконання
лабораторних робіт для студентів
напряму підготовки 6.040301 – «Прикладна математика»**

Запоріжжя

ВСТУП

Обчислювальна техніка й математичні методи розв'язання задач дозволяють замінити дорогі й трудомісткі натурні експерименти більш точними, швидкими й дешевими обчислювальними експериментами на математичних моделях із застосуванням ЕОМ. В основі обчислювального експерименту лежать розв'язки рівнянь математичної моделі чисельними методами. Чисельні методи – методи наближеного чи точного розв'язання задачі, що базуються на побудові скінченої послідовності дій над скінченою множиною чисел, результатами яких є числові значення. Для розв'язання конкретних практичних задач необхідно виконати мільйони, і навіть мільярди математичних операцій, що під силу тільки ЕОМ.

Серед чисельних методів розрізняють прямі й ітераційні. Прямі, чи точні, методи дають розв'язок за скінчене число дій, прості й найбільш універсальні, вони забезпечують обчислення за точними формулами. Проте отриманий розв'язок в результаті округлень втрачає точність і стає наближеним, причому похибка в результаті дій над округленими, тобто наближеними, числами, накопичується, стає неусувною.

Ітераційні (наближені) методи задаються у вигляді багатокрокових повторень певної послідовності дій, вихідними даними для яких є результати попереднього циклу обчислень, який називається ітерацією. Сама природа такого методу обумовлює наближеність одержуваного розв'язку, похибка якого регулюється кількістю виконаних ітерацій: чим більше ітерацій, тим менше похибка.

Не можна забувати, що отримані результати тільки тоді будуть досить достовірні, тобто будуть мати похибку в припустимих межах, якщо чисельний метод є стійким і збігається. Точність і збіжність застосовуваного чисельного методу треба досліджувати на рішеннях задач, що мають аналітичний розв'язок чи експериментальні результати.

Для складних задач розробляються чисельні методи і складаються обчислювальні програми, що утворюють бібліотеки стандартних і пакети прикладних програм, а також програмні комплекси.

Лабораторні роботи з дисципліни «Чисельні методи» призначені для закріплення й поглиблення знань, отриманих студентами при вивченні теоретичного курсу.

За кожною лабораторною роботою оформляється звіт. Зміст звіту:

1. Назва лабораторної роботи.
2. Основні теоретичні положення і розрахункові формули.
3. Вихідні дані з номером варіанта.
4. Програма розрахунку.
5. Результати.

Звіти оформляються в окремому зошиті. Звіт з кожної лабораторної роботи починається з нової сторінки. Наприкінці заняття кожен студент захищає свою лабораторну роботу.

Варіанти завдань зведені в таблиці. Номер варіанта визначається за порядковим номером студента в списку групи, при цьому для номерів від 1 до 9 ліворуч додається 0. Перша цифра цього номера визначає шифр по вертикалі, друга – шифр по горизонталі.

РОЗДІЛ 1. ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Метод Гауса

Цей метод є точним. Він заснований на зведенні матриці системи до трикутного вигляду.

Нехай потрібно розв'язати систему $A\bar{x}=\bar{b}$; тут $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ – матриця коефіцієнтів системи розмірності $n\times n$, $det\,A\neq 0$.

$\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ і $\bar{b}=(b_1,b_2,...,b_n)^T$ – вектори.

Віднімемо від другого рівняння системи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1\le i\le n \tag{1}$$

перше, помножене на таке число, щоб обернувся на нуль коефіцієнт при x_1. Потім, у такий же спосіб, віднімемо перше рівняння з третього, четвертого і т.д. Тоді виключаться всі коефіцієнти першого стовпця, що лежать нижче головної діагоналі.

Потім, за допомогою другого рівняння виключимо з третього, четвертого тощо рівнянь коефіцієнти другого стовпця. Послідовно продовжуючи цей процес, виключимо з матриці A всі коефіцієнти, що лежать нижче головної діагоналі.

Запишемо загальні формули процесу. Нехай проведено виключення коефіцієнтів з $(k-1)$-го стовпця. Тоді залишилися такі рівняння з ненульовими елементами нижче головної діагоналі:

$$\sum_{j=k}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \quad k \le i \le n \cdot \tag{2}$$

Помножимо k-й рядок на число

$$C_{mk} = \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \; m > k \tag{3}$$

і віднімемо його від m-го рядка. Перший ненульовий елемент цього рядка обернеться на нуль, а інші зміняться за формулами

$$\begin{gathered} a_{m1}^{(k+1)} = a_{m1}^{(k)} - C_{mk} a_{k1}^{(k)}, \\ b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - C_{mk} b_k^{(k)}, \\ k < m, \quad 1 \le n. \end{gathered} \tag{4}$$

Виконуючи обчислення за цими формулами при всіх зазначених індексах, виключимо елементи k-го стовпця. Назвемо таке виключення циклом процесу. Виконання всіх циклів називається прямим ходом виключення.

У результаті виконання прямого ходу одержимо систему з матрицею трикутного вигляду

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j = b_i^{(i)}, \quad 1 \le i \le n \cdot \tag{5}$$

Така система легко розв’язується за допомогою так званого зворотного ходу, суть якого така. З останнього рівняння визначаємо x_n. Підставляючи його в передостаннє рівняння, знаходимо x_{n-1} і т.д. Загальні формули зворотного ходу мають вигляд

$$x_i = \frac{1}{a_{ij}^{(i)}} \left[b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right], \quad i = n, n-1, \ldots, 1 \cdot \tag{6}$$

Виключення за формулами прямого ходу (3)-(4) не можна проводити, якщо в ході розрахунку на головній діагоналі виявиться нульовий елемент $a_{kk}^{(k)} = 0$. Але в першому стовпці проміжної системи (2) всі елементи не можуть бути нулями: це означало б, що $\det A = 0$. Перестановкою рядків можна перемістити ненульовий елемент на головну діагональ і продовжити розрахунок.

Якщо елемент на головній діагоналі $a_{kk}^{(k)}$ малий, то цей рядок домножується на великі числа C_{mk}, що призводить до значних помилок округлення при обчисленнях. Щоб уникнути цього, кожен цикл завжди починають з перестановки рядків. Серед елементів стовпця $a_{mk}^{(k)}, \quad m \ge k$ знаходять головний, тобто найбільший за модулем у k-ому стовпці, і перестановкою рядків переводять його на головну діагональ, після чого роблять виключення. У цьому суть методу Гауса з вибором головного елемента.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв’язання, оцініть похибку методу.

2. У чому суть і переваги методу Гауса з вибором головного елемента?

Завдання до лабораторної роботи № 1

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,..,6$$

методом Гауса з вибором головного елемента.

Варіанти завдань

№ варі-анта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\overline{b}$
1	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	14,35
	6,3	-0,4	-14,4	7,8	14,0	21,0	90,95
	2,1	-3,0	-1,7	9,2	7,8	24,6	129,28
	4,2	-1,7	-6,9	10,6	11,1	29,2	143,63
	-2,1	3,0	-0,6	-13,4	-0,5	0,0	-65,30
	4,2	2,6	-15,0	-5,6	13,5	0,6	-43,71
2	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	-7,31
	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	40,53
	-0,4	5,7	4,1	3,6	-0,5	2,7	26,42
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	23,24
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	52,40
	2,6	3,1	7,4	-4,1	8,2	-0,1	31,99
3	-3,7	0,2	5,3	-1,4	2,2	3,4	-3,25
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-7,1	0,7	-30,32
	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	3,5	19,01
	1,1	4,4	0,8	3,1	-2,8	-5,1	6,19
	-0,3	1,5	-1,4	6,2	1,7	0,4	7,04

	2,2	-0,1	4,5	-3,3	2,6	6,6	20,35
4	1,7 -1,3 -0,1 6,1 2,2 0,4	-0,1 -0,9 -1,3 -0,1 0,1 7,6	8,2 2,1 0,5 3,2 -0,2 2,0	-1,4 6,7 2,4 1,2 0,4 -0,3	2,3 0,0 5,6 0,7 -1,8 1,8	0,0 1,1 0,6 -0,4 5,1 2,1	41,48 6,27 16,44 40,62 5,08 3,65
5	0,9 -0,3 7,2 0,4 1,6 -1,3	-1,7 1,9 0,2 0,6 8,8 -0,8	0,3 7,4 -0,9 2,2 -0,4 0,1	6,9 -1,1 1,3 -1,2 0,7 0,6	1,2 0,9 -2,0 -0,1 2,3 5,7	-0,1 0,2 1,9 5,2 -1,1 2,0	0,78 -13,80 12,35 12,69 10,57 1,91
6	2,4 0,0 -1,9 8,3 2,2 -0,5	-1,0 0,4 1,5 -1,4 0,6 7,8	0,2 5,4 -0,7 0,0 0,0 1,1	0,0 -1,0 0,3 1,0 6,6 0,1	1,4 -1,9 7,4 2,1 -0,1 0,0	6,8 0,1 0,0 -1,7 0,4 2,4	13,12 11,74 18,81 -6,40 4,64 13,78
7	-2,5 1,6 1,2 -1,0 9,0 0,2	0,0 0,3 -1,0 8,4 0,7 -1,4	-0,4 0,0 0,7 0,2 -1,4 7,7	0,0 8,0 -0,9 -1,3 2,1 0,1	6,7 -1,1 0,0 0,0 -0,2 1,9	1,2 -0,7 5,9 2,1 -0,8 0,0	4,13 24,59 -5,39 15,64 12,98 -10,12
8	-0,9 0,7 5,9 0,0 1,2 -0,1	0,3 -0,4 0,0 1,6 -1,0 6,5	-0,5 6,4 -0,8 1,7 0,0 1,2	0,0 -2,0 1,1 -2,1 7,9 0,0	5,4 1,4 0,3 0,0 -0,2 -0,9	-1,2 0,0 0,7 6,6 0,4 -2,3	-3,19 -9,30 3,83 19,43 8,16 19,45
9	-1,4 0,4 0,7 0,0 6,7 1,2	1,7 -1,8 -0,4 -0,8 0,0 7,9	-0,1 5,1 -2,0 1,1 1,1 0,0	8,2 2,2 0,0 0,3 -1,3 -1,0	2,3 0,1 1,4 5,9 2,1 -0,2	0,0 -0,2 6,4 0,7 -0,9 0,4	-22,23 1,65 19,00 3,17 12,13 0,72
	-0,4	0,7	1,2	3,2	6,1	-0,1	-22,40

	0,3	0,0	8,0	1,6	-1,1	-0,7	-9,39
10	-0,8	-0,2	2,1	-1,4	0,7	9,0	-3,09
	0,0	6,7	1,1	2,1	-0,9	-1,3	3,94
	5,6	2,4	0,5	-1,3	-0,1	0,6	-1,69
	1,8	-0,3	2,0	7,6	0,4	2,1	21,40
	2,1	1,8	-0,3	2,0	0,4	7,6	-1,52
	0,0	1,6	6,8	0,2	-1,0	2,4	10,34
11	1,9	2,0	1,3	-0,9	7,2	0,2	10,61
	0,6	5,6	2,4	-0,1	-1,3	0,5	-1,98
	6,9	1,2	-1,0	0,3	-1,7	0,7	22,74
	2,0	0,6	0,1	5,7	-0,8	-1,3	28,30
	-1,0	1,2	0,3	-1,7	6,9	0,9	-0,65
	-0,1	-1,2	5,2	2,2	0,6	0,4	-4,52
12	5,9	0,7	0,3	1,1	-0,8	0,0	6,23
	0,2	0,9	-1,1	1,9	-0,3	7,4	25,28
	1,9	-2,0	1,3	7,2	0,2	-0,9	1,74
	1,4	6,8	0,0	0,2	-1,0	2,4	-4,26
	0,2	0,9	-1,1	1,9	7,4	-0,3	-5,94
	-0,9	0,2	7,2	1,9	-2,0	1,3	7,40
13	-1,1	2,3	0,7	-0,4	1,6	8,8	-6,04
	2,0	5,7	0,6	0,1	-0,8	-1,3	-7,38
	6,6	0,0	-2,1	1,7	1,6	0,0	15,74
	-1,0	1,2	0,3	6,9	0,9	-1,7	15,55
	2,4	0,0	0,1	1,1	7,8	-0,5	-11,76
	0,1	-1,9	5,4	-1,0	0,4	0,0	4,66
14	0,0	0,3	-0,7	1,5	-1,9	7,4	28,60
	5,7	2,0	0,6	0,1	-0,8	-1,3	-16,18
	0,4	-0,1	0,0	6,6	0,6	2,2	20,94
	1,4	6,8	0,0	0,2	-1,0	2,4	5,92
	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	-8,86
	0,0	-0,9	6,1	0,7	-1,0	1,2	7,98
15	0,0	1,9	0,1	-1,3	0,2	7,8	4,70
	-0,7	-1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	29,47
	-0,1	5,2	-1,2	2,2	0,6	0,4	6,09
	7,9	0,4	-0,2	0,0	-1,0	1,2	-27,93
	1,9	-1,7	0,3	2,1	7,9	-0,4	11,78
	0,9	0,0	6,8	-2,1	-0,9	1,3	10,44
16	-0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	13,82

	1,8 5,8 0,0	5,2 0,5 2,2	0,2 -2,4 -1,2	-0,4 0,3 8,0	0,0 1,4 -0,1	2,2 -0,1 1,7	-1,72 1,76 25,45
17	-0,1 0,0 0,4 -1,2 -0,8 6,7	0,2 2,3 -0,1 5,7 1,9 0,1	-1,0 8,4 -1,1 -0,5 -1,4 -2,1	5,2 -0,2 0,0 0,0 1,1 1,7	-1,8 1,6 8,0 0,3 0,0 1,5	0,4 -1,3 1,2 -0,9 6,6 0,0	3,42 -11,56 27,17 3,69 0,90 11,57
18	-0,2 0,0 0,4 0,6 -0,8 6,3	0,3 2,1 -0,1 6,0 2,0 -1,4	2,4 8,4 1,2 -0,4 -1,4 0,0	5,3 0,2 0,0 -1,1 -1,1 2,0	1,6 -1,8 8,1 0,9 0,1 0,4	-0,3 1,3 -1,0 0,0 6,8 -0,7	-10,57 17,30 7,62 3,85 32,76 1,95
19	2,1 1,3 -0,7 0,0 0,6 8,9	0,4 -0,8 -1,0 6,2 0,0 -0,6	7,7 -2,0 1,5 -3,1 1,2 1,3	-1,9 1,2 8,1 1,1 -0,4 -2,0	0,4 6,8 0,0 -0,8 -2,5 0,2	-1,7 0,1 0,3 -0,4 5,7 0,7	-8,87 12,52 33,09 0,19 17,56 14,12
20	-0,7 2,0 -1,2 0,2 0,4 9,1	-1,1 0,2 -0,8 7,0 -0,2 -0,5	1,6 7,8 2,0 -3,3 1,1 1,2	8,0 -2,1 0,9 1,4 -0,6 -2,4	0,0 0,2 6,6 -0,1 2,3 0,0	0,3 -1,6 0,1 0,5 5,7 -0,6	-11,48 9,85 19,77 -19,81 -4,61 19,36
21	-0,5 -2,4 0,9 0,1 7,8 1,4	-1,3 1,0 1,5 7,0 -0,3 0,6	-0,2 0,1 0,6 0,7 -1,9 5,8	2,2 6,9 -1,2 -1,1 0,4 0,1	5,6 1,6 1,0 -1,9 1,7 -0,6	0,4 0,0 6,8 1,6 2,2 -1,8	13,76 5,09 8,94 -1,50 -15,59 2,55
22	0,4 0,7 -2,2 0,1 -0,9	0,6 -0,2 -1,1 -1,4 6,8	2,2 7,1 0,0 -1,8 1,6	5,4 -1,2 0,2 2,0 -0,2	-1,2 1,9 6,8 0,0 1,2	-0,1 2,1 1,2 6,6 -1,0	-1,82 2,64 4,54 -9,40 16,54

	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	22,19
23	-1,1 -1,7 8,8 0,1 0,3 1,3	-0,8 0,9 -1,5 1,6 7,4 -2,0	0,1 6,9 0,3 -1,5 -1,9 1,9	0,6 0,3 -0,7 -2,1 1,1 7,2	5,7 -1,2 2,2 0,0 0,9 0,2	2,0 -1,0 -1,1 6,6 0,2 -0,9	0,39 -15,29 13,95 -17,54 5,60 3,68
24	2,4 2,2 7,4 -1,3 -0,5 0,1	-1,0 0,6 -1,9 -0,8 7,8 0,3	0,2 6,6 1,5 0,1 1,1 -1,0	0,0 0,0 -0,7 0,6 0,1 5,4	6,8 -0,1 0,3 2,0 0,0 -1,9	1,4 -0,4 0,0 5,7 2,4 0,1	11,18 15,68 21,01 2,79 0,69 -18,92
25	2,2 0,1 0,0 6,9 -0,4 -1,9	-0,4 0,6 0,2 -0,9 2,1 7,0	0,6 5,7 -1,0 -1,7 2,0 0,1	5,2 -1,3 0,0 1,2 -0,3 -1,6	-1,2 -0,8 6,8 0,3 1,8 0,7	0,1 2,0 1,4 -1,0 7,6 -1,1	-1,82 299,61 2,34 15,43 36,80 6,21
26	0,4 -2,3 7,9 1,2 1,4 1,2	0,6 0,1 -0,3 -1,0 8,2 -1,0	2,2 6,6 1,3 0,0 -0,1 0,7	-1,2 -0,4 -0,1 -0,2 0,0 6,1	5,2 0,0 1,8 0,4 -1,1 -0,9	-0,1 1,2 0,1 7,8 -0,7 0,0	-0,40 -13,07 14,32 1,54 6,93 13,02
27	2,2 1,6 6,2 -0,1 -0,4 1,3	-0,1 0,0 0,1 1,4 7,9 -0,9	-0,3 8,1 -2,7 0,4 2,0 -2,1	0,2 -1,2 1,2 2,1 -0,2 6,8	5,3 2,1 -0,3 0,5 -1,7 0,0	-1,7 -0,1 -0,5 5,7 1,9 0,7	-3,84 30,16 -25,78 17,58 11,30 -4,95
28	-0,9 0,4 6,6 0,1 1,2 -1,3	0,3 -1,6 0,0 1,3 8,2 1,8	0,0 5,3 1,1 1,6 0,0 -0,2	-0,5 1,0 -1,4 -2,1 -1,1 8,6	5,8 -0,2 1,7 0,2 0,1 -2,2	-1,1 -0,1 -0,6 6,7 0,2 0,0	-6,18 7,53 24,20 15,66 -6,36 -9,21
	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	0,6	-13,70

29	-0,3 6,8 -0,7 -1,0 1,3	1,6 0,1 0,4 8,1 -1,8	5,3 -1,1 2,0 0,0 0,2	2,4 -1,4 0,0 1,2 8,4	0,3 2,0 -1,4 -0,1 2,1	-0,2 -0,8 6,3 0,4 0,0	20,17 12,52 17,02 -18,95 30,19
30	0,4 0,3 5,7 0,7 0,1 -1,7	-0,8 0,0 -1,5 0,2 6,8 0,4	0,0 8,1 -0,4 -2,0 1,2 -1,9	1,1 1,5 1,2 1,3 -2,0 7,7	6,2 -1,0 0,0 -0,6 -0,8 0,4	-3,1 -0,7 0,6 8,9 1,2 2,1	15,05 -21,52 0,99 18,45 1,48 10,18

РОЗДІЛ 2. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Метод простих ітерацій

Цей найпростіший ітераційний метод розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в тому, що система рівнянь $A\bar{x} = \bar{b}$ перетворюється до вигляду

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c} \qquad (1)$$

і її розв’язок знаходиться як границя послідовності

$$\bar{x}^{n+1} = B\bar{x}^{n} + \bar{c}, \quad n = 0,1,... \qquad (2)$$

Ітераційний процес (2) збігається до розв’язку системи зі швидкістю геометричної прогресії, якщо норма матриці $\|B\| < 1$. При цьому, початкове наближення $\bar{x}^0$ можна вибирати довільно. На практиці за початкове наближення $\bar{x}^0$ беруть стовпець вільних членів $\bar{c}$.

Нагадаємо визначення основних норм у просторах векторів і матриць. Якщо в просторі векторів $\bar{x} = (x_1,..., x_m)^T$ введена норма $\|\bar{x}\|$, то погодженою з нею нормою в просторі матриць A називають норму

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \|A\bar{x}\| / \|\bar{x}\| \ .$$

Найбільш вживані в просторі векторів наступні норми

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max_{1\le j\le m}|x_j|,$$

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{m}|x_j|,$$

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}|x_j|^2} = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})},$$

а погодженими з ними нормами в просторі матриць є відповідно норми

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\right);$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right);$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le m}\lambda^i_{A^*A}},$$

тут λ^i_D – власне значення матриці D, A^* – матриця, сполучена до матриці A.

Для приведення вихідної системи до вигляду (1) практично роблять наступне. Із заданої системи виділяють рівняння з коефіцієнтами при невідомих, модулі яких більші від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих у рівнянні. Кожне виділене рівняння вписують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним.

З останніх невикористаних і виділених рівнянь системи складають незалежні між собою лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб був дотриманий зазначений вище принцип комплектування нової системи, й усі вільні рядки виявилися заповненими. При цьому треба подбати, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, що є рівнянням нової системи.

Якщо коефіцієнти й вільні члени даної системи є наближеними числами, написаними з p знаками, то для одержання розв’язку з m числом десяткових знаків

$(m \le p)$ слід в значеннях послідовних наближень утримувати $m+1$ десяткових знаків і послідовні наближення обчислювати до їхнього збігу, після чого треба округлити результат на один знак.

Приклад.

Методом простої ітерації з точністю до двох вірних десяткових знаків після коми розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +x_4 & -3 & =0, & (A) \\ x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & -2 & =0, & (\acute{A}) \\ 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & -4x_4 & -1 & =0, & (\hat{A}) \\ 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +4 & =0, & (\tilde{A}) \end{cases}$$

Розв’язок. У рівнянні $(\acute{A})$ коефіцієнт при x_3 за модулем більше від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих, тому його можна прийняти за третє рівняння нової системи. Коефіцієнт при x_1 в рівнянні $(\tilde{A})$ також більше від суми модулів інших коефіцієнтів рівняння $(\tilde{A})$, тому можна прийняти це рівняння за перше рівняння нової системи. Таким чином, нова система має такий вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0, & (I) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & (II) \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0, & (III) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & (IV) \end{cases}$$

Аналізуючи дану систему, легко помітити, що для одержання рівняння (II) з максимальним за модулем коефіцієнтом при x_2 досить скласти різницю $(A)-(\acute{A})$:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 = 0 \ \ (II) \ .$$

Тепер у нову систему ввійшли рівняння $(A),(\acute{A})$ і $(\tilde{A})$, тому в рівняння (IV) обов'язково повинне ввійти рівняння $(\hat{A})$ даної системи. Підбором переконуємося, що за рівняння (IV) можна взяти лінійну комбінацію $2(A)-(\acute{A})+2(B)-(\tilde{A})$, тобто

$$3x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3-9x_4-10=0\ \ (IV)\ .$$

У підсумку одержали перетворену систему рівнянь (I)-(IV) еквівалентну даній. Розв'язавши цю систему щодо діагональних невідомих, будемо мати систему:

$$\begin{cases} x_1 = & 0\cdot x_1 & -0{,}2x_2 & +0{,}1x_3 & -0{,}2x_4 & -0{,}4, \\ x_2 = & -0{,}2x_1 & +0\cdot x_2 & -0{,}2x_3 & +0\cdot x_4 & +0{,}2, \\ x_3 = & 0{,}2x_1 & -0{,}4x_2 & +0\cdot x_3 & +0{,}2x_4 & -0{,}4, \\ x_4 = & 0{,}333x_1 & +0\cdot x_2 & -0\cdot x_3 & +0\cdot x_4 & -1{,}111, \end{cases}$$

для знаходження розв'язку якої можна застосувати метод простої ітерації, тому що для неї виконується достатня умова збіжності. За нульове наближення коренів системи приймемо стовпець вільних членів, тобто $x_1^{(0)}=-0{,}4$; $x_2^{(0)}=0{,}2$; $x_3^{(0)}=-0{,}4$; $x_4^{(0)}=-1{,}111$. Підставляючи ці значення в праві частини рівнянь останньої системи, одержимо перші наближення коренів:

$$x_1^{(1)}=-0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}1(-0{,}4)-0{,}2(-1{,}111)-0{,}4\approx -0{,}258;$$
$$x_2^{(1)}=-0{,}2(-0{,}4)-0{,}2(-0{,}4)+0{,}2\approx 0{,}360;$$
$$x_3^{(1)}=0{,}2(-0{,}4)-0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}2(-1{,}111)-0{,}4\approx -0{,}782;$$
$$x_4^{(1)}=0{,}333(-0{,}4)-1{,}111\approx -1{,}244\ .$$

Далі, підставляючи ці знайдені наближення знову в праві частини системи, одержимо другі наближення коренів:

$$x_1^{(2)}=-0{,}301\ ;\ \ x_2^{(2)}=0{,}408;\ \ x_3^{(2)}=-0{,}844;\ \ x_4^{(2)}=-1{,}197.$$

Після нової підстановки будемо мати треті наближення коренів і т.д.

Для одержання коренів з необхідною точністю в одержуваних наближеннях утримуємо три знаки після коми й ітерації виконуємо доти, поки утримувані знаки в результатах перестануть змінюватися. Зведемо результати обчислень у таблицю

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,4	0,2	-0,4	-1,111
1	-0,258	0,360	-0,782	-1,244
2	-0,301	0,408	-0,844	-1,197
3	-0,327	0,429	-0,863	-1,212
4	-0,330	0,438	-0,879	-1,220
5	-0,332	0,442	-0,885	-1,221
6	-0,333	0,443	-0,887	-1,222
7	-0,333	0,444	-0,888	-1,222
8	-0,333	0,444	-0,889	-1,222
9	-0,333	0,444	-0,889	-1,222

Як видно з таблиці, на сьомому кроці ітерацій утримувані десяткові знаки в результатах перестали змінюватися. Округляючи отримані значення коренів на один знак, одержуємо $x_1 \approx -0{,}33$; $x_2 \approx 0{,}44$; $x_3 \approx -0{,}89$; $x_4 \approx -1{,}22$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв'язання, оцініть похибку методу.
2. Які умови збіжності ітерацій до точного розв'язку є достатніми?
3. В чому полягає умова закінчення ітераційного процесу?

Завдання до лабораторної роботи № 2

Методом простої ітерації з точністю до двох знаків після коми розв'яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij} x_j = b_i \ , \ \ i = 1,2,..,6.$$

Варіанти завдань

№ варіанта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\overline{b}$
1	2,1 0,0 5,2 -0,6 1,3 0,4	0,3 2,2 -1,0 1,5 0,2 0,0	4,4 -3,4 0,4 3,2 0,0 -2,7	-0,1 0,3 0,7 -2,1 0,8 1,4	1,4 -0,8 1,1 1,6 6,1 -1,8	0,0 1,4 -0,1 0,6 -1,4 3,1	-2,25 4,07 3,69 -8,02 -16,33 18,06
2	3,3 -0,1 -2,1 0,4 4,7 0,0	4,2 7,2 3,0 0,0 -0,6 0,2	0,7 1,8 -0,6 1,9 3,3 -1,6	5,4 -2,3 -3,4 6,1 7,1 2,4	2,1 1,1 -0,5 -0,8 1,9 0,7	1,6 0,3 0,0 -2,1 -4,6 5,7	24,87 7,81 0,20 11,00 0,12 22,04
3	0,4 4,8 -2,1 0,6 6,3 4,2	7,6 -5,2 3,3 2,4 -0,4 -1,7	2,0 -2,3 -0,4 -1,7 1,4 6,9	-0,3 1,6 3,4 3,0 0,8 0,0	1,8 0,8 -0,5 -8,0 0,0 1,1	2,1 -3,5 0,0 1,1 1,0 9,2	29,95 -20,33 2,11 -1,91 7,01 17,25

4	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	2,68
	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-6,17
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	-35,57
	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	-25,65
	8,4	-1,6	0,0	0,7	-1,8	1,2	8,50
	1,6	8,7	-0,2	0,8	-2,0	1,1	-14,46
5	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	11,83
	-2,7	1,9	-5,9	1,3	-2,2	1,0	16,24
	8,8	-1,5	0,3	-0,7	1,2	-2,1	18,64
	2,1	3,6	-1,5	-2,1	0,0	4,6	-37,76
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	-7,90
	2,3	-2,0	3,9	4,2	0,2	-1,9	-8,78
6	3,4	-1,0	2,2	1,0	4,8	1,4	20,16
	2,2	0,6	6,8	0,0	-0,1	-0,4	-1,58
	4,4	-2,9	-1,5	-0,7	1,3	0,8	15,62
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	-0,39
	-2,5	5,8	1,1	3,1	0,0	2,4	-11,95
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-12,82
7	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	9,43
	-2,1	3,6	4,7	-1,3	-2,8	2,0	7,77
	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	-6,20
	4,9	-1,9	-2,7	1,2	0,3	-1,0	10,28
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	16,05
	-2,9	4,0	1,1	-1,6	3,7	-1,1	-9,78
8	3,4	1,6	2,2	-1,2	4,2	-2,1	20,72
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	6,52
	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	13,20
	2,2	-1,0	3,0	-1,2	3,4	5,8	5,70
	1,4	8,9	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	-4,31
	3,2	-2,0	1,7	4,1	-1,9	0,4	0,23

9	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-6,11
	2,6	0,0	4,1	-1,2	2,1	-0,1	-18,21
	6,3	0,1	-2,7	0,2	-1,3	-0,5	-2,48
	-3,1	2,4	1,4	2,1	0,5	3,7	13,14
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	21,60
	3,3	-1,9	-2,1	4,8	0,0	1,7	2,68
10	-3,9	2,3	0,0	-1,5	3,8	-4,1	15,40
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	2,83
	4,6	0,7	2,1	-1,4	2,7	-3,6	35,68
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	-10,10
	2,2	5,2	0,9	-1,1	-2,1	1,2	-0,95
	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-29,34
11	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,2	0,6	-2,06
	-2,3	3,6	4,3	2,4	0,3	-1,2	2,86
	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	16,15
	-2,7	1,4	2,0	0,0	-3,4	4,3	-6,29
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-10,12
	3,3	-1,8	2,2	4,4	2,1	0,0	34,53
12	0,3	-0,9	0,0	1,1	6,3	-3,0	-18,47
	1,3	0,8	4,1	2,5	-3,0	-1,7	-11,85
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,69
	2,7	3,2	-2,0	1,3	-3,6	4,9	33,99
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	14,64
	-4,7	2,4	-3,9	-3,9	0,4	2,1	24,29
13	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-26,32
	1,7	-2,2	4,1	-3,2	1,9	2,1	13,22
	-2,0	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	23,50
	3,1	-2,4	-3,8	2,0	0,0	4,6	-20,28
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	13,06
	4,5	2,4	-2,0	3,9	-1,1	4,1	-29,17

14	-3,5 -2,4 3,9 0,1 -0,9 1,4	-1,3 1,0 1,5 7,1 6,8 -0,6	-2,2 0,1 2,6 0,7 1,6 -8,8	1,4 6,9 -1,2 -1,1 -0,2 2,1	3,6 1,6 1,0 -1,9 1,2 -0,6	0,4 0,0 -4,8 1,6 -1,0 2,8	-22,69 -13,35 11,33 -17,57 -23,88 -30,08
15	2,1 -2,2 0,1 2,4 -0,7 7,5	0,4 -3,1 -1,4 -3,4 2,9 0,4	7,7 0,8 -1,8 1,1 4,6 -2,0	-1,9 4,2 2,0 -4,1 3,2 0,9	0,4 -3,8 0,0 0,9 1,6 -1,1	-1,7 1,2 6,6 2,1 -0,8 0,1	-19,76 -15,45 1,03 -20,28 3,86 14,59
16	4,9 1,3 -2,7 0,2 1,0 9,1	-2,7 -0,8 1,4 7,0 -2,1 -0,5	0,9 -2,0 3,3 -1,5 3,6 1,2	1,4 1,2 -2,5 -0,1 4,4 -2,4	-3,5 6,8 0,0 -2,3 0,9 0,0	0,0 0,1 -0,8 1,0 2,5 -0,6	-29,45 3,41 20,11 -7,93 -21,21 -28,18
17	0,1 -3,4 0,3 1,9 -0,8 -1,7	0,0 1,2 0,0 -4,1 1,1 0,4	0,9 -2,7 8,1 0,0 -2,8 -1,9	-1,1 4,8 1,5 -2,0 -1,4 7,7	6,0 -3,9 -1,0 3,7 0,1 0,4	2,3 0,9 -0,7 0,9 2,2 2,1	3,13 -4,70 -9,75 13,91 2,47 6,41
18	1,2 -3,7 0,9 -1,6 4,8 7,5	0,0 1,3 1,5 -2,4 -1,9 0,4	-0,4 2,8 0,6 -3,7 1,8 -2,0	6,6 -1,7 -1,2 4,1 -0,2 0,9	0,1 -4,2 1,0 0,0 -3,5 -1,1	-2,5 0,0 6,8 2,9 0,0 0,1	16,04 19,46 25,20 9,52 11,16 33,70

19	-3,7 0,4 1,9 -7,8 0,4 2,3	0,9 0,6 -2,3 -0,3 -0,2 1,7	4,1 2,2 -3,5 -1,9 1,1 0,9	-2,2 5,4 2,0 0,4 -0,6 3,4	1,9 -1,2 0,4 1,7 2,3 -4,4	0,0 -0,1 -4,2 2,2 5,7 -1,9	21,55 -22,09 2,71 12,63 -4,15 -27,60
20	1,2 -3,9 0,0 2,4 -4,1 0,0	0,0 2,6 -0,9 0,8 3,7 1,9	-0,4 4,1 6,1 -2,9 2,5 0,1	6,6 -0,8 0,7 3,3 -1,1 -1,3	0,1 2,4 -1,0 0,9 2,2 0,2	-2,5 1,6 1,2 -1,6 3,0 7,8	-10,39 12,90 -10,26 4,21 -3,00 -15,20
21	1,7 -0,7 2,8 -0,1 7,9 1,8	-0,8 -1,1 1,4 5,2 0,4 -2,4	-2,1 0,0 -1,0 -1,2 -0,2 3,5	1,1 0,3 -2,6 2,2 0,0 -1,1	0,4 8,1 -0,7 0,6 -1,0 0,8	0,0 1,3 3,1 -0,4 1,2 2,7	14,51 20,69 1,51 -8,76 3,98 -5,78
22	1,9 -0,9 2,1 -4,6 1,5 -0,5	-1,7 0,0 3,3 -2,8 0,6 0,3	0,3 6,8 -4,0 1,3 2,2 1,3	2,1 -2,1 1,7 3,5 -0,4 2,9	-7,9 -0,9 1,1 0,9 1,8 0,1	-0,4 1,3 2,4 0,0 -2,3 6,2	16,42 0,66 8,48 24,85 -14,05 35,58
23	1,8 -2,1 0,9 -4,4 5,8 0,0	-5,2 1,7 -1,4 2,9 0,5 2,2	0,2 -1,6 0,2 -3,5 -2,4 -1,2	-0,4 2,8 -2,1 1,9 0,3 8,0	0,0 -3,4 1,8 2,4 1,4 -0,1	2,2 0,0 -3,4 1,6 -0,1 1,7	-1,16 -25,32 11,05 -14,78 25,47 -9,90

24	-2,6	1,7	0,4	-2,3	3,1	0,0	-23,91
	1,4	-3,2	-2,9	0,7	-1,8	2,2	16,04
	-0,1	0,2	-1,0	5,2	-0,8	1,4	9,91
	0,0	2,1	8,4	-0,2	1,6	-1,3	1,18
	3,6	-4,1	0,7	2,4	1,9	-3,2	45,77
	0,4	-0,1	-1,1	0,0	8,0	1,2	-1,15
25	-1,2	5,7	-0,5	0,2	-0,1	-0,9	11,76
	-0,8	1,9	-1,4	1,1	0,0	6,6	43,81
	4,5	-3,4	1,9	-2,8	3,7	0,0	-29,38
	2,6	1,8	-2,1	0,9	-1,1	-0,6	13,52
	6,7	-0,1	-1,2	1,7	0,5	0,0	11,10
	-1,5	2,0	0,8	0,0	-2,3	1,9	11,96
26	-0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	-0,3	-11,76
	4,6	-3,0	-2,7	0,0	-1,9	3,5	-4,58
	1,1	2,9	0,8	-3,1	0,7	-2,3	7,68
	0,0	2,1	8,4	0,2	-1,8	1,3	-3,34
	0,4	-0,1	1,2	0,0	8,1	-1,0	30,76
	-2,8	1,5	-3,1	-2,2	0,0	3,3	20,42
27	1,9	-4,6	0,0	3,8	-2,4	1,2	10,07
	0,6	6,0	-0,4	-1,1	0,9	0,0	-18,17
	-0,8	2,0	-1,4	-0,1	1,1	6,8	-12,57
	2,4	-3,9	1,6	4,1	-2,7	-1,0	15,23
	-1,1	0,0	0,5	1,7	0,8	0,0	3,21
	6,3	-1,4	0,0	2,0	0,4	-0,7	11,36
28	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-8,75
	-0,8	1,2	0,0	2,0	-1,6	0,4	4,72
	3,1	-2,8	-3,6	1,4	0,9	-2,2	3,07
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	-6,8	0,1	19,48
	-0,7	1,0	1,5	-8,1	0,0	0,3	-11,57
	0,9	0,0	0,1	0,0	1,2	-0,8	-2,73

29	2,5 0,0 -1,8 0,6 8,9 -3,3	-1,8 6,2 2,1 0,0 -0,6 2,9	-3,4 2,3 0,7 1,2 1,3 -4,1	0,0 1,1 -1,5 -0,4 -2,0 1,8	2,9 -0,8 2,4 -2,5 0,2 0,0	1,4 -0,4 0,1 5,7 0,7 -2,5	-10,68 10,44 20,68 -7,83 -32,61 7,49
30	-0,7 2,5 -1,1 2,0 -1,2 3,6	-1,1 1,7 0,9 -0,2 -0,8 2,7	1,6 -3,1 2,2 7,8 2,0 -3,3	8,0 0,0 -1,4 2,1 0,9 -1,8	0,1 -1,2 2,6 0,1 -6,6 0,0	-0,3 2,1 -0,7 -1,6 0,1 2,1	21,43 -1,33 -7,79 21,91 4,83 -6,21

РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

3.1. Загальні положення

Якщо алгебраїчне рівняння достатньо складне, то його корені рідко вдається знайти точно. Тому важливого значення набувають способи наближеного знаходження коренів рівняння й оцінки їхньої точності.

Нехай дано рівняння

$$f(x)=0 , \tag{1}$$

де $f(x)$ визначена і неперервна в певному скінченому чи нескінченному інтервалі.

Усяке значення ξ, що перетворює функцію $f(x)$ на нуль, тобто таке, що $f(\xi)=0$, називається коренем рівняння (1) чи нулем функції $f(x)$.

Наближене знаходження дійсних коренів рівняння (1) звичайно складається з таких етапів:

1) відділення коренів, тобто встановлення проміжків $[\alpha, \beta]$, що містять один і тільки один корінь рівняння (1);

2) уточнення наближених коренів, тобто доведення їх до заданого ступеня точності.

Для відділення коренів корисна відома теорема з математичного аналізу. Відповідно до цієї теореми, якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$, приймає значення різних знаків, тобто $f(\alpha)f(\beta)<0$, то всередині цього відрізка міститься непарне число дійсних коренів. Ясно, що корінь виявиться єдиним, якщо всередині цього відрізка функція $f(x)$ крім того ще й монотонна, тобто її похідна існує і зберігає знак усередині інтервалу (α, β).

Таким чином, якщо існує неперервна похідна $f'(x)$ і її нулі легко обчислюються, то для відділення коренів рівняння (1) можна вчинити так:

1) знайти корені рівняння $f'(x)=0$, тим самим ми визначимо кінці інтервалів монотонності функції $f(x)$;

2) оцінити значення функції $f(x)$ на кінцях знайдених інтервалів монотонності й вибрати ті з них, на кінцях яких значення функції набуває різних знаків. Вони і будуть шуканими інтервалами.

Корисно пам'ятати, що алгебраїчне рівняння n-го ступеня $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0, \quad (a_0 \neq 0)$ має не більше ніж n дійсних коренів. Тому якщо для такого рівняння ми одержимо $n+1$ зміну знаків, то всі його корені будуть відділеними.

Розглянемо кілька прикладів відділення коренів алгебраїчного рівняння:

Приклад 1. Відділити корені рівняння

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 = 0 \ .$$

Розв'язок. Область визначення даної функції $(-\infty;\infty)$.

Знайдемо корені рівняння $f'(x)=0$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2.$$

Одержуємо такі інтервали монотонності функції $f(x)$ – $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;\infty)$.

Визначимо знаки функції $f(x)$ на кінцях кожного з цих інтервалів:

$$f(-\infty)<0\ ,\quad f(0)>0,\quad f(2)<0,\quad f(\infty)>0\,.$$

На кінцях кожного з інтервалів монотонності значення даної функції набуває різних знаків, отже в кожному інтервалі міститься по одному дійсному кореню розглянутого рівняння.

Приклад 2. Відділити корені рівняння

$$f(x)=x^5+5x^4+15x^3-41=0\ .$$

Розв'язок. Область визначення функції $(-\infty;\infty)$.

Функція $f'(x)=5x^4+20x^3+45x^2=5x^2\left(x^2+4x+9\right)$ набуває невід'ємного значення. Отже функція $f(x)$ монотонна у своїй області визначення. Визначаючи знаки функції $f(x)$ на кінцях інтервалу монотонності $f(-\infty)<0$, $f(\infty)>0$, робимо висновок, що вона має в цьому інтервалі дійсний корінь.

Уточнити розташування кореня можна за допомогою методів розв'язання, що будуть розглянуті нижче.

3.2. Метод Ньютона (дотичних)

Цей метод дуже ефективний для розв’язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Його основна перевага полягає в тому, що при порівняно простій схемі обчислень він має швидку збіжність.

Нехай єдиний корінь ξ рівняння

$$f(x)=0 \tag{1}$$

розташований усередині інтервалу $[\alpha,\beta]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і зберігають визначені знаки $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Відповідно до методу Ньютона корінь вихідного рівняння відшукується як границя ітераційної послідовності

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ \ (i=0,1,2,...). \tag{2}$$

Початкове наближення $x_0\in[\alpha,\beta]$ і повинне задовольняти умові

$$f(x_0)f''(x_0)>0\ . \tag{3}$$

Геометрично метод Ньютона еквівалентний заміні рівняння кривої $y=f(x)$ рівнянням дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $x=x_i$. За наближене значення кореня береться абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю Ox.

Для оцінки точності наближення x_i можна скористатися формулою

$$|x_i-\xi|\le\frac{|f(x_i)|}{m_1}\ , \tag{4}$$

де $|f'(x)|\ge m_1>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$, (5)

ξ – точне значення кореня.

Знайдемо, наприклад, з точністю $\varepsilon=0{,}0001$ корінь рівняння $x^3-3x^2+3=0$. Виконавши процедуру відділення коренів так, як описано вище (див. Розділ 3. Загальні положення) одержимо три інтервали $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$, що містять корінь. Знайдемо корінь, розташований в інтервалі $(0;2)$. Цей інтервал методом бісекції зменшимо так, щоб його довжина була $\leq 0{,}1$.

Маємо:

$$x_1 = \frac{0+2}{2} = 1, \quad f(x_1) = 1 > 0 \Rightarrow \ \xi \in [1;2];$$

$$x_2 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5, \quad f(x_2) = -0{,}375 < 0 \Rightarrow \ \xi \in [1;1{,}5];$$

$$x_3 = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25, \quad f(x_3) = 0{,}2656 > 0 \Rightarrow \ \xi \in [1{,}25;1{,}5];$$

$$x_4 = \frac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375, \quad f(x_4) = -0{,}0727 < 0 \Rightarrow$$

$\xi \in [1{,}25;1{,}375]$;

$$x_5 = \frac{1{,}25+1{,}375}{2} = 1{,}3125, \quad f(x_5) = 0{,}093 > 0 \Rightarrow$$

$\xi \in [1{,}3125;1{,}375]$.

Довжина отриманого інтервалу

$$|1{,}375 - 1{,}3125| = 0{,}0625 < 0{,}1 \ .$$

Подальше уточнення кореня проведемо методом Ньютона.

Друга похідна $f''(x)$ на цьому інтервалі більше нуля, перша похідна $f'(x)$ – менше нуля. За початкове наближення x_0 візьмемо лівий кінець інтервалу, тобто $x_0 = 1{,}3125$. Тоді

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}3125 - \frac{0{,}093}{(-2{,}707)} = 1{,}3469, \quad f(x_1) = 0{,}00115.$$

Обчислимо значення першої похідної $f'(x)$ на другому кінці інтервалу й оцінимо похибку отриманого наближення $f'(1{,}375) \approx 2{,}578$, тобто $m_1 = 2{,}578$.

$$\left|x_1-\xi\right|\le\frac{\left|f(x_1)\right|}{m_1}=\frac{0{,}00115}{2{,}578}\approx 0{,}00445>0{,}0001\ .$$

Точність, з якою обчислене перше наближення, недостатня. Тому робимо наступний крок

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1{,}3496-\frac{0{,}0015}{(-2{,}639)}=1{,}3473,\quad f(x_2)=2\cdot 10^{-7}\ ,$$

$$\left|x_2-\xi\right|\le\frac{\left|f(x_2)\right|}{m_1}=\frac{2\cdot 10^{-7}}{2{,}578}\approx 7{,}76\cdot 10^{-8}<0{,}0001\ .$$

Як видно з оцінки похибки другого наближення, ми одержали значення кореня з похибкою, що не перевищує задану.

Корені, розташовані в двох інших інтервалах $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$ знаходяться аналогічно.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод Ньютона.
2. Наведіть формулу для контролю похибки методу Ньютона.
3. Дайте геометричну інтерпретацію методу.
4. В чому полягає умова вибору нульового наближення?

3.3. Метод градієнтного спуску

Нехай маємо систему рівнянь

$$f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0,\ \ (i=1,2,\dots,n) \tag{1}$$

чи в матричній формі

$$F(\bar{x})=0\ , \tag{2}$$

де $F=(f_1,\,f_2,\dots,\,f_n)^T$, $\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Припустимо, що функції $f_i(x_1, x_2,..., x_n)$ дійсні й неперервно-диференційовані в їхній загальній області визначення. Розглянемо функцію

$$\Phi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x_1, x_2,.., x_n) \right]^2 = \left(F(\bar{x}), F(\bar{x})\right) . \qquad (3)$$

Очевидно, що кожний розв'язок системи (1) перетворює на нуль функцію $\Phi(\bar{x})$; навпаки, числа $x_1, x_2,..., x_n$, для яких функція $\Phi(\bar{x})$ дорівнює нулю, є коренями системи (1). Таким чином, задача зводиться до знаходження мінімуму скалярної функції багатьох змінних $\Phi(\bar{x})$.

Одним з методів мінімізації функцій багатьох змінних є метод градієнтного спуску. Якщо $\bar{x}^{(k)}$ – деяке наближення до розв'язку системи, то в методі градієнтного спуску ми одержуємо нове наближення $\bar{x}^{(k+1)}$, рухаючись за напрямком найбільшої миттєвої швидкості зміни функції $\Phi(\bar{x})$ в точці $\bar{x}^{(k)}\left(grad\Phi\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)$ до точки, де значення $\Phi\left(\bar{x}^{(k+1)}\right)$ мінімальне, тобто

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \lambda_k grad\Phi\left(\bar{x}^{(k)}\right) , \qquad (4)$$

де λ_k вибирається з умови мінімуму $\Phi\left(\bar{x}^{(k+1)}\right)$.

Якщо λ – мала величина, квадратом і вищими ступенями якої можна знехтувати, то, розкладаючи функції $f_i(x_1, x_2,..., x_n)$ за степенями λ з точністю до лінійних членів і виражаючи $grad\,\Phi(x)$ через матрицю Якобі $W(\bar{x})$, одержимо таке представлення розрахункової формули методу градієнтного спуску

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \mu_k W^T\left(\bar{x}^{(k)}\right) F\left(\bar{x}^{(k)}\right), \left(k = 0,1,2,...\right) , \qquad (5)$$

де $W(\bar{x}) = \dfrac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ матриця Якобі вектор-функції $F(\bar{x})$.

$$\mu_k = \frac{\left(F\left(\bar{x}^{(k)}\right), W\left(\bar{x}^{(k)}\right) W^T\left(\bar{x}^{(k)}\right) F\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)}{\left(W\left(\bar{x}^{(k)}\right) W^T\left(\bar{x}^{(k)}\right) F\left(\bar{x}^{(k)}\right),\ W\left(\bar{x}^{(k)}\right) W^T\left(\bar{x}^{(k)}\right) F\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)} . \qquad (6)$$

Слід зазначити, що ітераційний процес, побудований за методом градієнтного спуску, збігається до точного розв’язку, якщо початкове наближення $x^{(0)}$ обране з досить малого околу кореня.

Приклад.

Методом градієнтного спуску приблизно обчислити корені системи

$$\begin{cases} x + x^2 - 2yz = 0{,}1; \\ y - y^2 + 3xz = -0{,}2; \\ z + z^2 + 2xy = 0{,}3, \end{cases}$$

розташовані в околі початку координат.

Розв’язок. Маємо $\bar{x}^{(0)} = (0{,}0{,}0)^T$.

Тут $F = \begin{pmatrix} x + x^2 - 2yz - 0{,}1 \\ y - y^2 + 3xz + 0{,}2 \\ z + z^2 + 2xy - 0{,}3 \end{pmatrix}$ і $W = \begin{pmatrix} 1+2x & -2z & -2y \\ 3z & 1-2y & 3x \\ 2y & 2x & 1+2z \end{pmatrix}$.

Підставляючи нульове наближення, будемо мати:

$$F\left(\bar{x}^{(0)}\right) = (-0{,}1;0{,}2;-0{,}3)^T \text{ і } W\left(\bar{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

За формулами (5) і (6) одержуємо перше наближення

$$\mu_0 = \frac{\left(F\left(\overline{x}^{(0)}\right), F\left(\overline{x}^{(0)}\right)\right)}{\left(F\left(\overline{x}^{(0)}\right), F\left(\overline{x}^{(0)}\right)\right)} = 1 \text{ і}$$

$$\overline{x}^{(1)} = \overline{x}^{(0)} - 1 \cdot E \cdot F\left(\overline{x}^{(0)}\right) = (0{,}1; -0{,}2; 0{,}3)^T .$$

Аналогічно знаходимо друге наближення $\overline{x}^{(2)}$.

Маємо:

$$F\left(\overline{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad W\left(\overline{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Звідси:

$$W^T\left(\overline{x}^{(1)}\right)F\left(\overline{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad W\left(\overline{x}^{(1)}\right)W^T\left(\overline{x}^{(1)}\right)F\left(\overline{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}2748 \\ 0{,}2098 \\ 0{,}1632 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$\mu_1 = \frac{0{,}13 \cdot 0{,}2748 + 0{,}05 \cdot 0{,}2098 + 0{,}05 \cdot 0{,}1632}{0{,}2748^2 + 0{,}2098^2 + 0{,}1632^2} = \frac{0{,}054374}{0{,}14619797} = 0{,}3719$$

і

$$\overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} - 0{,}3719 \begin{pmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0327 \\ -0{,}2007 \\ 0{,}2453 \end{pmatrix}.$$

Для контролю обчислимо відхил

$$F\left(\overline{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}032 \\ -0{,}017 \\ -0{,}007 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод розв’язання.
2. В чому полягає основна ідея методу градієнтного спуска?
3. Які умови закінчення ітераційного процесу?
4. Що може відбутися при невдалому виборі нульового наближення?
5. Дайте геометричну інтерпретацію методу.

Завдання до лабораторної роботи № 3

Методом Ньютона з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$ обчисліть всі дійсні корені рівняння

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0\ .$$

Значення коефіцієнтів a_i $(i = 1,2,3,4)$ вибираються з таблиці варіантів. Номер варіанта, що являє собою двозначне число, задається викладачем. Перша цифра номера варіанта визначає значення шифру по вертикалі, друга – по горизонталі.

Шифр по верти-калі	0	1		3	4	5	6	7	8	9
a_1	1,6	-2,4	0,8	3,6	-1,2	6,4	-2,8	1,2	-0,4	5,2

	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_2	5,1	3,3	-6,3	-1,5	5,7	6,3	1,2	-6,9	5,4	-2,1
a_3	0,2	0	0,8	0	-1,2	0,4	0	-0,6	1,0	0

a_4	-2	3	7	-1	-4	6	-3	8	9	-5

Завдання до лабораторної роботи № 4

Методом градієнтного спуску при заданому початковому наближенні $\overline{x}^{(0)}$ знайдіть наближені корені системи

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1^2 + a_{12}\cdot x_2\cdot x_3 + a_{13}\cdot x_2\cdot x_4 + a_{14}\cdot x_1 = b_1, \\ a_{21}\cdot x_2^2 + a_{22}\cdot x_1\cdot x_3 + a_{23}\cdot x_3\cdot x_4 + a_{24}\cdot x_2 = b_2, \\ a_{31}\cdot x_3^2 + a_{32}\cdot x_1\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_2\cdot x_4 + a_{34}\cdot x_3 = b_3, \\ a_{41}\cdot x_4^2 + a_{42}\cdot x_1\cdot x_2 + a_{43}\cdot x_2\cdot x_3 + a_{44}\cdot x_4 = b_4. \end{cases}$$

За умову закінчення ітераційного процесу прийміть $\left\| F\left(\overline{x}^{(i)}\right)\right\|_\infty < 0{,}01$.

Варіанти завдань

№ варіанта	Матриця коефіцієнтів системи a_{ij}				Стовпець вільних членів b_i	Початкове наближення коренів $x_i^{(0)}$
1	-4,1 0,6 -3,4 0,5	2,4 -1,2 0,4 -2,8	1,3 3,1 -0,1 1,4	-0,7 2,9 -1,1 3,3	-18,12338 4,89797 -30,61106 -3,70831	-1,1 2,2 -3,3 0,0
2	2,4 -1,8 0,4 -3,2	3,1 -4,2 1,9 0,2	-0,8 2,6 -0,5 1,1	1,5 0,7 -2,6 0,9	-4,06003 -16,26196 -6,20337 -3,44529	1,3 -1,1 3,0 0,3
3	1,5 -0,4 2,1 -1,6	0,9 3,6 -0,3 2,5	-2,2 1,7 -2,9 0,7	3,2 -2,8 1,4 -0,1	11,10436 -10,36585 -0,27533 -16,43394	-0,5 1,0 -2,5 3,0
4	-2,8 1,4 -0,1	0,6 -2,2 1,5	1,9 -0,8 2,6	-3,1 1,2 -0,9	-2,74332 6,78768 -0,35866	0,9 2,1 1,6

	3,5	-0,6	-1,7	2,4	-7,91985	-0,1
5	1,1 -3,4 2,5 -0,1	4,0 -0,7 1,9 -0,8	-2,3 1,2 -3,0 2,5	-0,5 2,4 0,8 -1,0	7,25672 -9,89640 16,31988 -1,00392	1,6 -0,3 2,5 -1,7
6	4,5 -0,6 1,1 -3,0	1,2 -2,0 0,8 -2,7	-0,6 1,3 -2,1 0,4	2,1 -3,2 0,2 -1,3	19,99632 -12,18632 -14,24772 -22,48474	-2,5 1,6 -0,7 3,3
7	2,4 -1,2 0,1 -2,0	0,9 -3,0 1,8 -0,5	-1,8 -2,3 0,4 1,6	0,2 1,7 -2,2 0,8	0,53615 -10,59093 -5,46305 -5,47281	0,9 -2,3 1,5 -0,8
8	0,8 -1,0 2,1 0,0	-1,1 3,4 -0,6 2,5	-0,4 1,8 -2,0 0,4	2,7 -0,2 1,9 -3,1	17,47656 -33,53480 9,65912 -9,05794	3,1 -0,6 -2,5 2,0
9	-3,4 2,1 0,0 -4,0	0,0 -1,9 3,4 1,9	1,2 -0,4 1,1 -0,2	-2,1 1,6 -0,7 2,4	-3,65902 0,76205 -1,16126 -15,32033	-0,1 0,2 1,8 -1,4
10	0,6 -1,9 2,0 -0,4	-2,1 3,4 -0,8 1,9	3,0 -1,5 2,4 -0,2	-0,1 2,4 -0,5 2,5	-0,57180 6,32067 5,10568 1,30491	-0,2 0,8 -0,3 2,3
11	2,7 -1,5 0,3 1,6	0,6 -1,4 2,2 -0,1	-1,5 -0,8 0,5 -2,4	-0,8 2,0 -1,8 0,5	12,31117 9,43067 18,78237 13,59151	2,6 2,1 -2,9 0,4
12	-0,5 1,0 -2,6 0,8	2,9 -0,8 1,5 -2,4	0,2 -2,5 0,8 1,2	-1,4 0,6 -2,2 0,5	2,02812 6,82786 -5,96430 10,15452	0,7 -2,0 -0,4 1,9
13	-1,2 0,5 -2,4 1,8	0,6 -2,2 1,6 -0,5	-0,5 1,4 -1,7 2,0	1,8 -0,9 2,5 -1,2	-1,89552 -0,51975 -4,79314 17,82578	-1,7 0,9 2,4 -2,6
14	-2,5 0,6 -0,5 1,4	0,2 1,5 -2,4 -3,2	1,8 -0,4 -1,6 0,5	-0,2 1,2 0,4 -2,0	-32,82288 -3,47712 14,80896 18,41504	3,6 -1,4 -0,5 2,5
	0,9	-1,0	2,2	-0,5	1,24605	-2,4

15	-1,5 3,0 -2,8	2,0 -0,5 1,2	-1,4 0,8 -1,0	0,4 -2,6 0,5	-3,02800 1,17404 -8,58912	0,6 1,4 -1,6
16	1,9 -0,6 -3,2 1,1	-0,7 2,4 -0,1 0,5	-1,5 0,4 2,5 1,8	2,0 -0,5 1,4 -2,2	4,99613 -9,27880 -43,01664 11,28333	0,9 -2,5 -2,9 1,8
17	0,6 -2,5 1,4 -0,5	-2,8 1,2 -1,5 2,0	3,4 -0,6 2,2 -1,6	0,5 1,8 -0,4 0,2	4,43632 4,15527 9,58114 0,39000	-1,3 0,3 -2,5 0,0
18	1,2 -2,6 0,5 -4,1	-0,5 1,4 -2,1 0,6	2,8 -3,0 1,1 -0,5	-3,2 0,5 -2,6 1,2	-2,42752 3,16474 8,81720 -26,58144	3,2 -1,3 0,4 -2,5
19	1,6 -2,0 0,8 -1,2	-0,5 4,1 -1,5 0,4	3,2 -0,8 2,4 -2,5	2,1 -1,5 0,1 -0,6	-2,90940 -3,30594 -1,82784 -6,36048	-0,7 -2,0 -1,0 0,0
20	-0,4 1,1 -3,5 -4,0	-2,5 3,2 -0,1 0,2	1,8 -2,6 1,4 -0,5	-2,0 0,5 -2,6 1,1	0,42576 -30,21898 -16,27821 -6,42578	3,0 0,4 -2,6 -1,0
21	2,4 1,5 -0,8 1,2	-1,6 0,9 1,1 -2,8	-2,5 1,2 2,4 -0,5	0,7 2,6 -0,5 2,0	-2,28288 1,84254 -7,93506 11,00036	0,6 -1,5 1,1 1,9
22	0,4 -1,5 2,0 0,1	1,9 0,6 -4,1 3,0	-2,4 1,2 0,5 1,4	0,5 2,4 1,6 -2,5	0,30678 -4,21839 -8,45331 1,53789	1,2 2,5 -0,5 1,6
23	1,7 -0,1 2,6 1,5	0,6 2,5 -1,2 0,2	2,1 3,0 2,1 -1,7	-1,5 1,8 -0,5 2,2	-5,66937 -4,99050 13,15266 8,54615	0,7 1,5 -2,2 1,0
24	4,0 2,6 -0,5 1,9	-0,5 1,3 3,0 0,8	2,1 0,6 1,2 -0,5	0,2 -1,5 -2,4 1,2	18,84720 3,40392 -22,47560 -6,43244	-2,5 2,0 2,2 -0,3
25	-2,5 0,8 2,1	1,6 1,1 -1,2	2,1 -3,0 0,5	0,1 1,5 -2,7	-37,97268 2,22006 6,74865	3,5 0,0 -1,0

	1,4	0,5	2,2	0,3	6,29984	2,1
26	0,5 3,0 1,9 -2,8	2,7 -2,2 0,5 1,3	-0,1 1,5 2,4 0,7	1,2 2,6 -0,4 2,5	-0,86703 14,43240 -12,59653 -9,05877	1,0 -2,5 0,2 1,5
27	1,1 0,9 -2,0 2,5	-0,6 3,0 0,5 1,1	2,2 -1,6 2,7 0,4	-1,5 2,4 1,1 -1,9	1,68870 10,30449 1,29780 2,89248	2,2 1,4 1,0 0,6
28	2,3 1,7 -0,2 1,4	1,4 0,9 2,6 -0,4	0,7 1,3 1,5 2,0	-1,1 2,2 -0,3 1,5	4,26706 24,95169 -11,60306 6,61972	-0,7 3,5 0,6 -1,5
29	0,9 4,1 -1,1 0,4	-0,9 1,4 2,2 3,0	1,7 -0,4 -3,3 1,5	2,0 2,7 1,1 -2,2	1,28439 10,74725 -17,52025 -8,26131	1,5 -2,0 -1,0 0,7
30	1,2 2,5 0,1 -2,4	-0,7 1,4 3,0 0,7	3,1 -2,1 1,6 2,5	2,4 0,9 -2,2 1,8	1,15208 13,88584 -0,20264 -11,25706	2,5 1,0 1,6 -2,0

РОЗДІЛ 4. ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦЬ

4.1. Проблема власних значень

При розв’язанні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення матриці A.

Нехай дана квадратна матриця $A=[a_{ij}]$. Розглянемо лінійне перетворення

$$\bar{y} = A\bar{x} \qquad (1)$$

де $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – n-мірні вектори якогось n-мірного простору.

Вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ називається власним вектором матриці A, якщо

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \;. \qquad (2)$$

Число λ називається власним значенням чи характеристичним числом матриці A, що відповідає даному власному вектору $\bar{x}$. Власні вектори матриці A є ненульовими розв'язками матричного рівняння

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \text{ чи } (A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}, \qquad (3)$$

де матриця $(A - \lambda E)$ називається характеристичною матрицею. Рівняння (3) являє собою однорідну систему, що має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$\det(A - \lambda E) = 0. \qquad (4)$$

Визначник (4) називається характеристичним (віковим) визначником матриці A, а рівняння (4) називається характеристичним (віковим) рівнянням матриці A.

Для знаходження власних значень і власних векторів можна розгорнути характеристичний визначник (4) у рівняння n-го ступеня й розв'язати це рівняння одним із чисельних методів, або використати ітераційний метод для обчислення коренів характеристичного рівняння і власних векторів без попереднього розгортання характеристичного визначника.

4.2. Пошук власних значень і власних векторів матриць методом простих ітерацій

Приклад 1. Обчислити власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0 \ .$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо:

$\lambda_1 = 1;\ \ \lambda_2 = 4;\ \ \lambda_3 = 7$ – власні числа.

Знайдемо власні вектори. Підставимо $\lambda = 1$ в (3) і, розписавши його, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (3-1)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & =0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +(5-1)x_3 & =0 \\ 2x_1 & +(4-1)x_2 & -2x_3 & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & & =0 \\ & -2x_2 & +4x_3 & =0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & =0 \\ & -2x_2 & +4x_3 & =0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & =0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = -1$; $x_3 = -1/2$;

$$\bar{x}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{cases} (3-4)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & =0 \\ 2x_1 & +0x_2 & -2x_3 & =0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +x_3 & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & & =0 \\ 2x_1 & & -2x_3 & =0 \\ & -2x_2 & +x_3 & =0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = 1/2$; $x_3 = -1$

$$\bar{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = 7$$

$$\begin{cases} (3-7)x_1 & +2x_2 & +0x_3 & =0 \\ 2x_1 & +(4-7)x_2 & -2x_3 & =0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +(5-7)x_3 & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & & =0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & =0 \\ & -2x_2 & -2x_3 & =0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; \ \ x_2 = -1; \ \ x_3 = 2$$

$$\bar{x}^3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Приклад 2. Використати метод ітерацій для визначення найбільшого за модулем власного числа матриці $A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 2{,}3 & 1{,}2 \\ 2{,}3 & 0{,}6 & 1{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 3{,}8 \end{pmatrix}$ і відповідного йому власного вектора.

Розв'язок. 1. Будуємо послідовність векторів $\bar{y}^{k+1} = A\bar{y}^k \quad (k = 0,1,2,...)$, де $\bar{y}^0$ – довільний вектор; тоді $\lambda_1 \approx y_i^{(k+1)} / y_i^{(k)}$, де $y_i^{(k+1)}$ і $y_i^{(k)}$ – однойменні координати двох послідовних векторів.

Всі обчислення наведені у таблиці.

A	1,6	2,3	1,2	$\dfrac{y_1^{(k+1)}}{y_1^{(k)}}$	$\dfrac{y_2^{(k+1)}}{y_2^{(k)}}$	$\dfrac{y_3^{(k+1)}}{y_3^{(k)}}$
	2,3	0,6	1,5			

	1,2	1,5	3,8			
$\bar{y}^0$	1	1	1			
$\bar{y}^1$	5,1	4,4	6,5	5,11	5,48	5,76
$\bar{y}^2$	26,08	24,12	37,42	5,45	5,41	5,60
$\bar{y}^3$	142,108	130,586	209,672	5,484	5,511	5,548
$\bar{y}^4$	$7{,}793\cdot 10^2$	$7{,}197\cdot 10^2$	$1{,}163\cdot 10^3$	5,5151	5,5148	5,5321
$\bar{y}^5$	$42{,}98\cdot 10^3$	$3{,}969\cdot 10^3$	$6{,}434\cdot 10^3$	5,5205	5,5225	5,5267
$\bar{y}^6$	$2{,}372\cdot 10^4$	$2{,}191\cdot 10^4$	$3{,}556\cdot 10^4$	5,5233	5,5235	5,5251
$\bar{y}^7$	$1{,}310\cdot 10^5$	$1{,}210\cdot 10^5$	$1{,}964\cdot 10^5$	5,5240	5,5241	5,5246
$\bar{y}^8$	$7{,}239\cdot 10^5$	$6{,}688\cdot 10^5$	$10{,}85\cdot 10^2$	5,5242	5,5243	5,5244
$\bar{y}^9$	$3{,}999\cdot 10^6$	$3{,}694\cdot 10^6$	$5{,}996\cdot 10^6$	5,5243	5,5243	5,5244
$\bar{y}^{10}$	$2{,}209\cdot 10^7$	$2041\cdot 10^7$	$2{,}312\cdot 10^7$	5,5243	5,5243	5,5243
$\bar{y}^{11}$	$1{,}220\cdot 10^8$	$1{,}127\cdot 10^8$	$1{,}830\cdot 10^8$			

Отже, $\lambda_1 = 5{,}5243.$

2. Власний вектор $\bar{x}^1$ визначається з рівності $\bar{x}^1 \approx \bar{y}^k$. Отже, $\bar{x}^1 \approx \bar{y}^{11} = \left(1{,}2047\cdot 10^8;\quad 1{,}12753\cdot 10^8;\quad 1{,}830184\cdot 10^8\right)$

Питання для самоперевірки

1. Що називається власним значенням матриці?
2. Що називається власним вектором матриці?
3. Які існують методи знаходження найменшого й найбільшого власного значення?
4. Наведіть основне рівняння проблеми власних значень.

Завдання до лабораторної роботи №5

Знайти власні числа і власні вектори матриці:

№ 1.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

№ 2.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

№ 4.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 5.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 6.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 7.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 8.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

№ 9.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 10.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 11.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 12.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 13.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 12\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

№ 14.

$$A=\begin{pmatrix}5 & -7 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 12 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

№ 15.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 23\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

№ 16.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 7 & -2 & 9\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

№ 17.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 16\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

№ 18.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 7\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

№ 19.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

№ 20.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 21\\ 21 & 2 & 16\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

№ 21.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$$

№ 22.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 4 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

№ 23.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

№ 24.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & 2\end{pmatrix}$$

№ 25.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

№ 26.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 6 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

№ 27.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 7 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

№ 28.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 9 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

№ 29.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

№ 30.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

РОЗДІЛ 5. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

5.1. Постановка задачі інтерполяції

При розв'язанні багатьох практичних задач, що виникають у різних областях, постає необхідність у використанні теорії наближення функцій або теорії апроксимації функцій.

Суть задачі апроксимації така. Нехай дана деяка невідома в аналітичному сенсі функція $y=f(x)$ і відома лише її поведінка (наприклад, дискретні значення в точках $f(x_i)$) на певному відрізку $[a,b]$. Таку функцію надалі будемо називати апроксимованою функцією. Треба побудувати іншу функцію $y=F(x)$, апроксимуючу функцію, яка б була близька до функції $y=f(x)$ з певною похибкою. При цьому потрібне виконання таких вимог: наявність дискретних значень функції $y_i=f(x_i)$; визначення класу апроксимуючих функцій, з яких конструюється функція $y = F(x)$; вид критерію згоди між функціями $y = f(x)$ і $y = F(x)$; оцінка похибки апроксимації.

Вид функції $y = F(x)$ залежить від класу розв'язуваних задач. Наприклад, при дослідженні напружено-деформованого стану методом скінченних елементів у задачах механіки деформованого тіла апроксимуючі функції представляються комбінацією функцій $1, x, \ldots, x^n$, або сплайнами. Експонентні функції мають широке застосування у фізиці при вивченні явищ типу розпаду і нагромадження, а тригонометричні функції – у механіці при коливальних процесах.

Критерій згоди або близькості апроксимованої й апроксимуючої функцій визначається з умови мінімуму відстаней між ними. Наприклад, найпоширенішим критерієм є критерій Чебишева:

$$\rho = \max_{0 \le i \le n} \left| f(x_i) - F(x_i) \right| \to \min \to 0 \ .$$

Інший критерій може бути записаний у вигляді:

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - F(x_i) \right]^2 \to \min \ .$$

Метод апроксимації, заснований на другому критерії, має назву методу найменших квадратів.

Якщо при використанні критерію Чебишева прийняти $\rho = 0$, то це буде означати, що значення апроксимованої й апроксимуючої функцій у вузлових точках відрізка $[a, b]$ збігаються. Цей спосіб апроксимації називається інтерполюванням або інтерполяцією.

Питання оцінки похибки апроксимації безумовно залежать від попередніх трьох вимог і розглядаються окремо для конкретного процесу апроксимації.

5.2. Наближене відновлення функції за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа

Нехай відомі значення деякої функції f в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Введемо позначення:

$$f_i = f(x_i), \quad i = 0,1,...,n.$$

Наприклад, ці значення отримані з експерименту чи знайдені за допомогою досить складних обчислень.

Виникає задача наближеного відновлення функції f в довільній точці x. Часто для розв'язання цієї задачі будується алгебраїчний многочлен $L_n(x)$ ступеня n, що у точках x_i приймає задані значення, тобто

$$L_n(x_i) = f_i, \quad i = 0,1,...,n$$

і називається інтерполяційним. Точки x_i, $i = 0,1,...n$ називаються вузлами інтерполяції.

Наближене відновлення функції f за формулою

$$f(x) \approx L_n(x)$$

називається інтерполяцією функції f. Якщо x розташований поза мінімальним відрізком, що містить усі вузли інтерполяції, то заміну функції f за зазначеною формулою називають також екстраполяцією.

Приклад. Нехай задані такі значення функції $f(x)$: $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 16$.

Для заданої таблиці значень функції $f(x)$ побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа у вигляді

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} .$$

Розв'язок. Тут $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

Ясно, що $\omega'(x_k) = \prod_{i \neq k}(x_k - x_i)$.

Для нашого прикладу $\omega(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

$$\omega'(1)=(1-2)(1-3)(1-4)=-6\ ;\ \ \omega'(2)=2\,;\ \ \omega'(3)=-2\,;\ \ \omega'(4)=6\,.$$

Тоді

$$L_3(x)=-\frac{4}{6}(x-2)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-3)(x-4)-2(x-1)(x-2)(x-4)+$$
$$+\frac{16}{6}(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+3x+4\,.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі інтерполяції.
2. Наведіть умови інтерполяції.
3. Наведіть формулу для оцінки похибки.
4. Дайте геометричну інтерпретацію процесу інтерполяції.

Завдання до лабораторної роботи № 6

У лабораторній роботі потрібно за заданою таблицею значень функції $f(x)$ приблизно обчислити значення цієї функції в заданій точці $\bar{x}$ за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа $L_4(x)$.