Запорізький національний університет
Міністерства освіти і науки України

Методичні матеріали для забезпечення самостійної роботи студентів

за курсом

«ТЕОРІЯ КООПЕРАТИВНИХ ІГОР»

для здобувачів вищої освіти магістра

спеціальності 122 Комп'ютерні науки

освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»

Запоріжжя
2019

План

Вступ

У наші дні в різних соціально-економічних сферах діяльності людини часто виникають задачі прийняття рішень в умовах конфліктів та конкурентної боротьби, коли декілька, у загальному випадку, раціонально діючих суб’єктів здійснюють колективне прийняття рішень, причому виграш кожного залежить не тільки від обраної ним стратегії, але й від рішень інших учасників та результатів експериментів.

Серед направлень теорії ігор особливе місце займають кооперативні ігри.

Існує багато задач прийняття рішень, які зводяться до рішення одного з варіантів кооперативної гри: прийняття управлінських рішень в умовах конкурентних ринків, кооперація виробників одного товару в рамках технологічного процесу, планування обчислень в грід-системі та ін.

Кожна подібна задача описується за допомогою відповідної ігрової моделі.

Кооперативна гра – гра, в якій група гравців — коаліції — можуть об'єднувати свої зусилля. Цим вона відрізняється від некооперативних ігор, в яких коаліції неприйнятні і кожен зобов'язаний грати за себе. У ній досліджуються умови, при яких об'єднання гравців в максимальну коаліцію є доцільним, а окремі гравці не будуть мати бажання створювати менші угруповання або діяти індивідуально. [4]

Нехай $N = \{1, \ldots, n\}$ — множина всіх гравців. Будь-яка непуста підмножина $S \subset N$ називається **коаліцією**.

Характеристичною функцією гри n осіб [3] будемо називати дійсну функцію v, яка визначена на коаліціях $S \subset N$, при цьому для будь-яких непересічних коаліцій T, S ($T \subset N$, $S \subset N$) виконується нерівність

$$v(T) + v(S) \leq v(T \cup S), v(\emptyset) = 0 \qquad (1)$$

Властивість (1) називається властивістю **супераддитивності**. [3] Вона необхідна для змістової інтерпретації числа $v(T)$ як гарантованого виграшу коаліції T у випадку, коли вона діє незалежно від інших гравців. При такій інтерпретації нерівність (1) означає, що коаліція $S \cup T$ має не менше можливостей, ніж дві непересічні коаліції S і T, діючі незалежно.

З супераддитивності v отримуємо, що для будь-яких непересічних коаліцій $S_1, \ldots, S_k$

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \leq v(N).$$

Звідси, зокрема, випливає, що не існує такого розбиття множини N на коаліції для того, щоб сумарний гарантований виграш цих коаліцій перевищував максимальний виграш всіх гравців $v(N)$. [4]

Надалі під кооперативної грою будемо розуміти просто пару (N, v), де v — характеристична функція, що задовольняє нерівності (1), оскільки змістовна інтерпретація характеристичної функції, що обґрунтовує властивість (1), не має принципового значення.

Приклад 1. *(Гра «джаз-оркестр».)* Директор клуба обіцяє 100 руб. співакові S, піаністу P і ударнику D за спільний виступ. Дует співака та піаніста він оцінює в 800$., ударника та піаніста в 650$ та одного піаніста — у 300$. Інші дуети та солісти не розглядаються, оскільки присутність фортепіано директор клубу вважає обов'язковим. Дует співак - ударник заробляє 500$, а співак — в середньому 200$ за вечір. Ударник один нічого не може заробити.

Позначаючи цифрами 1, 2, 3 гравців S, P и D відповідно, ми маємо справу з кооперативною грою (N, v), де $N = \{1,2,3\}$, $v(1,2,3) = 1000$, $v(1,3) = 500$, $v(1) = 200$, $v(1,2) = 800$, $v(2,3) = 650$, $v(2) = 300$, $v(3) = 0$.

Основна задача кооперативної теорії ігор n осіб полягає в побудові реалізованих принципів оптимального розподілу максимального сумарного виграшу $v(N)$ між гравцями.

Нехай α_i — сума, яку отримує гравець i при розподіленні максимального сумарного виграшу $v(N)$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, який задовольняє умовам

$$\alpha_i \geq v(\{i\}), i \in N; \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N), \qquad (3)$$

де $v(\{i\})$ — значення характеристичної функції для одноелементної коаліції $S = \{i\}$, називається **поділом.** [1]

Наприклад, для прикладу 1 поділом буде вектор $x = (350, 450, 200)$.

Побудуємо множину всіх поділів гри «Джаз-оркестр»:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \\ x_1 \geq 200 \\ x_2 \geq 300 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо x_3 та використаємо умову, що x_3 невід'ємне, отримаємо:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 + 1000 \\ x_1 \geq 200 \\ x_2 \geq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 1000 \end{cases}$$

Відповідна область на координатній площині зображена на рис. 1. Зафарбований трикутник і є множиною всіх поділів гри.

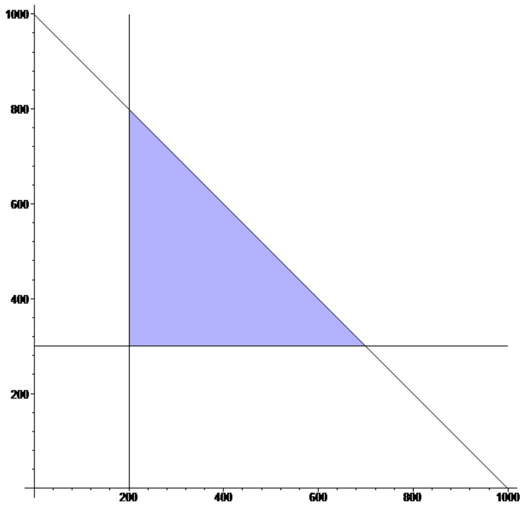

рис. 1

Умова (2) називається умовою індивідуальної раціональності і означає, що, беручи участь в коаліції, кожен гравець отримує щонайменше стільки, скільки він міг би отримати, діючи самостійно і не піклуючись про підтримку будь-яких інших гравців. Повинна також виконуватися умова (3), так як у разі $\sum_{i \in N} \alpha_i < v(N)$ існує розподіл α', при якому кожен гравець $i \in N$ отримає більше, ніж його доля α_i. Якщо ж $\sum_{i \in N} \alpha_i > v(N)$, то гравці з N ділять між собою виграш, який неможна реалізувати, і тому вектор α є нездійснюваним. [1] Отже, вектор α може вважатися допустимим тільки при виконанні умови (3), яка називається умовою колективної (або груповий) раціональності.

На підставі умов (2), (3) для того, щоб вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ був поділом в кооперативній грі (N, v), необхідно та достатньо виконання рівності $\alpha_i = v(\{i\}) + \gamma_i, i \in N,$ причому $\gamma_i \geq 0, i \in N, \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

Гра (N, v) називається суттєвою [1], якщо

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N). \qquad (4)$$

В протилежному випадку гра (N, v) називається несуттєвою.

Для будь-якого поділу α через $\alpha(S)$ будемо позначати величину $\sum_{i \in S} \alpha_i = \alpha(S)$, а множину всіх поділів — через D. Несуттєва гра має єдиний поділ $\alpha = (v(\{1\}), v(\{2\}), \ldots, v(\{n\})$.

У будь-якій суттєвій грі з більш ніж одним гравцем множина поділів є нескінченною. Тому будемо аналізувати такі ігри за допомогою відношення домінування.

Поділ $\boldsymbol{\alpha}$ **домінує** [2] поділ β по коаліції S, якщо

$$\alpha_i > \beta_i, i \in S, \alpha(S) \leq v(S). \qquad (5)$$

Перше з умов у означенні (5) означає, що поділ α краще поділу β для всіх членів коаліції S, а друге відображує можливість реалізації поділу α коаліцією S.

Кажуть, що поділ α домінує поділ β якщо існує коаліція S, для якої $\alpha \underset{S}{\geq} \beta$. Домінування поділу β поділом α позначається як $\alpha \succeq \beta$.

Домінування неможливо по одноелементній коаліції та множині всіх гравців N. Дійсно, з $\alpha \underset{i}{\geq} \beta$ випливало б $\beta_i < \alpha_i \leq v(\{i\})$, що суперечить умові (2). А з $\alpha \underset{i}{\geq} \beta$ випливало б, що $\alpha_i > \beta_i$ для всіх $i \in N$ і тому $\sum_{i \in N} \alpha_i > \sum_{i \in N} \beta_i = v(N)$, що суперечить умові (3). [3]

Для розглянутого прикладу можемо записати:

$\alpha = (350,450,200), \qquad \beta = (300,400,300), \qquad S = \{1,2\}$

Неважко бачити, що $\alpha \overset{\geq}{\underset{S}{}} \beta$.

Розглянемо принципи оптимального розподілу максимального сумарного виграшу між гравцями.

Можливий наступний підхід. Нехай гравці в кооперативній грі (N, v) прийшли до такої угоди про розподіл виграшу всієї коаліції N при якому жоден з поділів не домінує α^*. Тоді такий розподіл стійкий в тому сенсі, що жодної з коаліцій S не є вигідним відділятись від інших гравців і розподіляти між членами коаліції виграш $v(S)$. Це міркування наводить на думку про доцільність розгляду безлічі поділів, що не домінують.

Множина поділів, що не домінують, кооперативної гри (N, v) називається її **С-ядром.** [5]

Має місце наступна теорема, яка характеризує С-ядро.

Теорема 1. [4] Для того, щоб поділ α належив С-ядру, необхідно та достатньо виконання для всіх $S \subseteq N$ нерівностей

$$v(S) \leq \alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i \qquad (6)$$

З теореми випливає, що С-ядро є замкненою, опуклою підмножиною множини всіх поділів (С-ядро може бути порожньою множиною).

Розглянемо С-ядро на вже відомому прикладі з джаз-оркестром.

$$\begin{cases} x_1 \geq 200 \\ x_2 \geq 300 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 800 \\ x_1 + x_3 \geq 500 \\ x_2 + x_3 \geq 650 \end{cases}$$

Після деяких перетворень системи нерівностей, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 \geq 200 \\ x_2 \geq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 1000 \\ x_1 + x_2 \geq 800 \\ x_2 \leq 500 \\ x_1 \leq 350 \end{cases}$$

Даній системі обмежень відповідає зафарбована область, що зображена на рис. 2. Ця множина є С-ядром для гри «Джаз-оркестр».

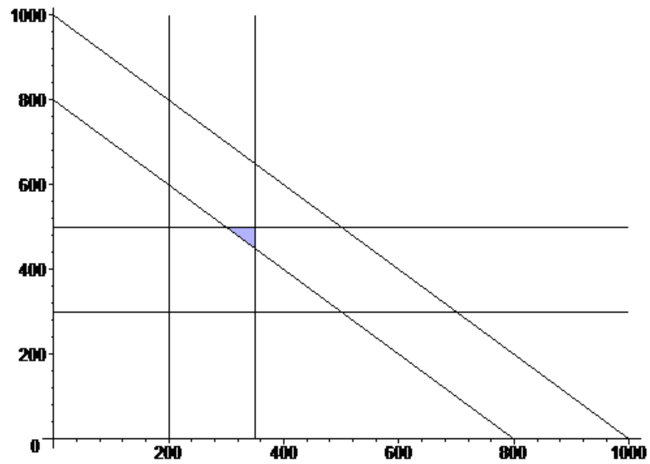

Рис. 2

До принципів оптимальності відноситься вектор Шеплі. Вектор Шеплі визначається аксіоматично.

Носієм гри (N, v) називається така коаліція T, що $v(S) = v(S \cap T)$ для будь-якої коаліції $S \subset N$. [4]

Змістовно визначення стверджує, що будь-який гравець, який не належить носію, є «йолопом», тобто не може нічого внести ні в яку коаліцію.

Розглянемо довільну перестановку P упорядкованої множини гравців $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. З цією перестановкою пов'язана підстановка π, тобто така взаємно однозначна функція π: $N \to N$, що для $i \in N$ значення $\pi(i) \in N$ представляє собою елемент з N, в який переходить $i \in N$ у перестановці P. [4]

Нехай (N, v) — гра n осіб. P — перестановка множини N, а π — відповідна їй підстановка. Тоді через $(N, \pi v)$ позначимо таку гру (N, u), що для будь-якої коаліції $S \subset N$, $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_s)\}) = v(S)$$

По суті гра $(N, \pi v)$ відрізняється від гри (N, v) лише тим, що в останній гравці помінялись ролями згідно з перестановкою $\mathbf{P}$.

За допомогою цих визначень можна викласти аксіоматику Шеплі. Спочатку зауважимо, що так як кооперативні ігри n осіб, по суті, ототожнюються з дійсними (характеристичними) функціями, то можна говорити про суму двох або більшого числа ігор, а також про множення гри на число.

Поставимо у відповідність кожній кооперативній грі (N, v) вектор $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \dots, \varphi_n[v])$, компоненти якого будемо інтерпретувати як виграші, що були отримані гравцями в результаті угоди або рішення арбітра. При цьому будемо вважати, що вказана відповідність задовольняє наступним аксіомам. [4]

Аксіоми Шеплі.

1. Якщо S — будь-який носій гри (N, v), то

$$\sum_{i \in S} \varphi_i[v] = v(S).$$

2. Для будь-якої підстановки π та $i \in N$

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v].$$

3. Якщо (N, u) та (N, v) — дві будь-які кооперативні гри, то

$$\varphi_i[u + v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v].$$

Нехай φ — функція, яка ставить у відповідність згідно з аксіомами 1 — 3 кожної гри (N, v) вектор $\varphi[v]$. Тоді $\varphi[v]$ називається вектором значень або вектором Шеплі гри (N, v).

Виявляється, що цих аксіом достатньо для визначення єдиним чином значень для всіх ігор *n* осіб.

Теорема 2. Існує єдина функція φ, визначена для всіх ігор (N, v) та яка задовольняє аксіомам 1 — 3.

Доведення теореми опирається на наступні результати. [5]

Лема. Нехай для будь-якої коаліції $S \subset N$ гра (N, w_s) визначається наступним чином:

$$w_s(T) = \begin{cases} 0, S \not\subset T, \\ \mathbf{1}, S \subset T. \end{cases} \quad (7)$$

Тоді для гри (N, w_s) аксіоми 1, 2 однозначно визначають вектор $\varphi[w_s]$:

$$\varphi_i[w_s] = \begin{cases} \frac{1}{s}, i \in S, \\ 0, i \notin S, \end{cases} \quad (8)$$

де $S = |S|$ — число гравців в S.

Гра з характеристичною функцією w_S, визначеної в (7), називається простою грою n осіб. Таким чином, лема стверджує, що для простої гри (N, w_s) вектор Шеплі визначається формулою (8). Вектор Шеплі для гри (N, w_s) визначається єдиним чином. [4]

Наслідок з теореми 2.

Якщо $c \geq 0$, то

$$\varphi_i[cw_s] = \begin{cases} \frac{c}{s}, i \in S, \\ 0, i \notin S. \end{cases}$$

Доведення є очевидним. Таким чином, $\varphi_i[cw_s] = c\varphi_i[w_s]$ для $c \geq 0$.

Тепер покажемо, що якщо $\sum_s c_s w_s$ є характеристичною функцією, то

$$\varphi_i(\sum_s c_s w_s) = \sum_s \varphi_i(c_s w_s) = \sum_s c_s \varphi_i(w_s). \quad (9)$$

У випадку $c_s \geq 0$ перша рівність в (9) постулюється аксіомою 3, друга випливає з наслідку. [1] Далі, якщо u, v та $u - v$ — характеристичні функції, то згідно з аксіомою 3 маємо $\varphi[u - v] = \varphi[u] - \varphi[v]$. Звідки випливає справедливість (9) для будь-яких c_s. Дійсно, якщо $\sum_s c_s w_s$ — характеристична функція, то

$$v = \sum_s c_s w_s = \sum_{\{s|c_s \geq 0\}} c_s w_s - \Big(\sum_{\{s|c_s < 0\}} (-c_s) w_s \Big),$$

тому

$$\varphi[v] = \varphi\left[\sum_{\{s|c_s \geq 0\}} c_s w_s\right] - \varphi\left[\sum_{\{s|c_s < 0\}} (-c_s) w_s\right] =$$

$$= \sum_{\{s|c_s \geq 0\}} c_s \varphi[w_s] - \sum_{\{s|c_s < 0\}} (-c_s) \varphi[w_s] = \sum_s c_s \varphi[w_s].$$

Компоненти поділу Шеплі $x^{Sh} = (x_1^{Sh}, \dots, x_n^{Sh})$ обчислюються за формулою

$$x_i^{Sh} = \sum_{S:i \in S} \frac{(n - |S|)!\,(|S| - 1)!}{n!} (v(S) - v(S \backslash \{i\}),$$

де $|S|$ - кількість гравців в коаліції S, $S \backslash \{i\}$ – коаліція без гравця i.

Знайдемо вектор Шеплі для кооперативної гри «Джаз-оркестр» (приклад 1). Перший гравець перебуває в коаліціях $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$.

$$x_1^{Sh} = \frac{(3-1)!\,(1-1)!}{3!}(200 - 0) + \frac{(3-2)!\,(2-1)!}{3!}(800 - 300) +$$

$$+ \frac{(3-2)!\,(2-1)!}{3!}(500 - 0) + \frac{(3-3)!\,(3-1)!}{3!}(1000 - 650) =$$

$$= \frac{2 \cdot 200 + 500 + 500 + 2 \cdot 350}{6} = 350$$

Аналогічно обчислюються компоненти вектора Шеплі для другого та третього гравців: $x_2^{Sh} = 475$, $x_3^{Sh} = 175$. Тому маємо: $x^{Sh} = (350{,}475{,}175)$.

Приклад 2. Розподіл витрат між членами кооперативу.

Нехай *N* споживачів мають побудувати сховища для рідкого палива. Витрати на будівництво – деяка зростаюча функція від об'єму сховищ, а в моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_m$ потреби кожного споживача у паливі задані функцією $f_i(t)$.

Приймати паливо у сховища можна у проміжки між його споживанням. Тоді об'єм сховищ, який задовольняє усім потребам споживачів, дорівнює:

$$\sum_{i=1}^{n} \max_i f_i(t).$$

Кожний споживач палива може об'єднатись з будь-яким іншим для побудови спільного сховища. Якщо утвориться коаліція, то об'єм сховища буде складати $\sum_{i \in S} \max_i f_i(t)$, а витрати на його будівництво складатимуть:

$$F\left(\sum_{i \in S} \max_i f_i(t)\right).$$

Треба визначити кількість сховищ та коаліцій, які будуть їх будувати, а також розподілити витрати на побудову сховищ між членами коаліцій.

Нехай споживачів три. Тоді функція - витрати, які понесе кожна з коаліцій при спільному будівництві сховища.

$$v(1) = 2, \quad v(2) = 3, \quad v(3) = 2.5, \quad v(1{,}2) = 4, \quad v(1{,}3) = 3.9,$$
$$v(2{,}3) = 5, \quad v(1{,}2{,}3) = 6.$$

Компоненти вектора Шеплі для цих даних: $x_{\{1,2,3\}}^{Sh} = (\frac{28}{20}, \frac{49}{20}, \frac{43}{20})$.

Розглянемо «підігри», в яких кількість гравців дорівнює двом, та порахуємо компоненти вектора Шеплі для цих ігор:

$$x^{Sh}_{\{1,2\}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right); \;\; x^{Sh}_{\{1,3\}} = \left(\frac{17}{10}, \frac{22}{10}\right); \;\; x^{Sh}_{\{2,3\}} = \left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

Кожен з гравців при участі в підігрі несе значно більші витрати, ніж при співробітництві втрьох.

Приклад 3. Корпорація акціонерів.

Розглядається корпорація з чотирьох акціонерів, які мають акції відповідно в наступних кількостях: $a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 = 30,\ a_4 = 40$. Будь-яке рішення затверджується акціонерами, які мають в сумі строгу більшість акцій. Прийняте рішення – виграш, який дорівнює 1, якщо рішення не прийняте, виграш дорівнює 0.

$$\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right)$$

$\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}$ – виграшні коаліції, інші об'єднання акціонерів не є виграшними, тобто виграш дорівнює нулю.

Побудуємо вектор Шеплі для цієї гри. Для першого гравця є тільки одна коаліція $S = \{1,2,3\}$, яка виграє, а коаліція $S\backslash\{1\} = \{2,3\}$ не виграє, тому

$$x^{Sh}_1 = \frac{(4-3)!(3-1)!}{4!} = \frac{1}{12}$$

Для другого гравця $\{2,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$ – виграшні, але $\{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}$ без другого гравця не є виграшними:

$$x^{Sh}_2 = \frac{(4-2)!(2-1)!}{4!} + \frac{(4-3)!(3-1)!}{4!} + \frac{(4-2)!(3-1)!}{4!} = \frac{3}{12}$$

Аналогічно для третього та четвертого гравців отримаємо:

$$x^{Sh}_3 = \frac{3}{12}, \; x^{Sh}_4 = \frac{5}{12}.$$

Тоді вектор Шеплі матиме вигляд: $x^{Sh} = \left(\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}\right)$.

Висновки.

- Кооперативна гра моделює вибір коаліції.
- Розв'язок кооперативної гри вказує множину найкращих способів поділу спільного виграшу.
- Розв'язок кооперативної гри у формі вектора Шеплі дозволяє врахувати справедливий поділ.
- Проста кооперативна гра – модель поділу влади.
- Кооперативні ігри моделюють вибір коаліції та розподі виграшу між гравцями.

Питання для самоконтролю

1. Властивість суперадитивності визначається наступною нерівністю:

   а) $v(T) - v(S) \leq v(T \cup S), v(\emptyset) = 0$

   б) $v(T) + v(S) \leq v(T \cup S), v(\emptyset) = 0$

   в) $v(T) + v(S) \geq v(T \cup S), v(\emptyset) = 0$

   г) $v(T) - v(S) \geq v(T \cup S), v(\emptyset) = 0$

2. Поділ –це

   а) Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, який задовольняє умовам

$$\alpha_i \geq v(\{i\}), i \in N;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N)$$

   б) Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, який задовольняє умовам

$$\alpha_i \leq v(\{i\}), i \in N;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N)$$

   в) Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, який задовольняє умовам

$$\alpha_i = v(\{i\}), i \in N; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N)$$

3. Необхідно закінчити речення: У будь-якій суттєвій грі з більш ніж одним гравцем множина поділів ...

   а) дорівнює кількості коаліцій у грі.

   б) є нескінченною.

   в) є непустою множиною.

   г) менше або дорівнює кількості коаліцій у грі.

4. Умова індивідуальної раціональності означає, що, беручи участь в коаліції, кожен гравець

   а) отримує щонайменше стільки, скільки він міг би отримати, діючи самостійно і не піклуючись про підтримку будь-яких інших гравців.

   б) отримує щонайбільше стільки, скільки він міг би отримати, діючи самостійно і не піклуючись про підтримку будь-яких інших гравців.

   в) гарантовано отримує більше, ніж стільки, скільки він міг би отримати, діючи самостійно і не піклуючись про підтримку будь-яких інших гравців.

   г) отримує стільки ж, скільки він міг би отримати, діючи самостійно і не піклуючись про підтримку будь-яких інших гравців.

5. С-ядро – це…

   а) множина поділів кооперативної гри *(N,v)*, що домінують.

   б) множина поділів кооперативної гри *(N,v)*, що містять елемент $\alpha_i > \beta_i, i \in S, \alpha(S) \leq v(S)$.

   в) множина поділів кооперативної гри *(N,v)*, що не домінують.

6. Носієм гри (N, v) називається така коаліція T, що

   а) $v(S) = v(S \cap T)$ для будь-якої коаліції $S \subset N$.

   б) $v(S) \leq v(S \cap T)$ для будь-якої коаліції $S \subset N$.

   в) $v(S) \geq v(S \cap T)$ для будь-якої коаліції $S \subset N$.

7. Друга аксіома Шеплі має вигляд

а) Якщо (N,u) та (N,v) — дві будь-які кооперативні гри, то

$\varphi_i[u+v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v]$.

б) Для будь-якої підстановки π та $i \in N$

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v].$$

в) Якщо S — будь-який носій гри (N,v), то

$$\sum_{i \in S} \varphi_i[v] = v(S).$$

8. За формулою

$$x_i^{Sh} = \sum_{S: i \in S} \frac{(n-|S|)!\,(|S|-1)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\}),$$

де $|S|$ - кількість гравців в коаліції S, $S \setminus \{i\}$ – коаліція без гравця i, обчислюються

а) коефіцієнти характеристичної функції гри *(N,v)*.

б) компоненти С-ядра

в) компоненти поділу Шеплі

Використана література

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., 1967
2. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.,1985
3. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М., 1981
4. *Петросян Л.А., Данилов Н.Н.* Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск, 1985
5. Теория игр: Учебное пособие для ун-тов:/ Л.А.Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М.:Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998.-304с.: ил.