В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський

МАТЕМАТИЧНІ олімпіади школярів України

1991–2000

В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ ШКОЛЯРІВ УКРАЇНИ 1991–2000

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як посібник для учнів загальноосвітніх навчальних закладів

Київ
"Техніка"
2003

ББК 22.1я73
М 34
УДК 51(075)

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України,
лист № 1/11-102 від 11.01.02 р.*

ецензенти:
-р фіз.-мат. наук, проф. *М. В. Карташов*
Національний університет ім. Т. Г. Шевченка);
-р пед. наук, проф. *Н. М. Шунда*
Вінницький державний педагогічний університет
. М. М. Коцюбинського);
сл. вчитель України *В. Б. Полонський*
іцей "Лідер", м. Київ)

Подаються умови та розв'язання задач математичних олімпіад школярів, що проводились в раїні у 1991 – 2000 рр.: третього та четвертого етапів Всеукраїнських олімпіад, Соросівських мпіад. Наводяться матеріали Міжнародних математичних олімпіад, в яких брала участь анда України.

Для учнів, що готуються до участі в математичних олімпіадах та прагнуть удосконалити ички в розв'язуванні складних задач. Книга буде цінним посібником для вчителів математи- керівників математичних гуртків, організаторів олімпіад і студентів педагогічних спеціаль- тей.

N 966-575-150-6

До юних математиків

Математичні змагання школярів – математичні олімпіади – дуже популярні в Україні. Вони мають вже більш ніж шестидесятирічну історію. Перша міська математична олімпіада була проведена в Києві в 1935 р. з ініціативи видатного математика академіка М. П. Кравчука. У 1936 р. Київський університет провів міську олімпіаду, в якій взяли участь учні й з деяких інших міст. Серед її переможців були харківський десятикласник Олексій Погорєлов (майбутній видатний геометр – академік Національної академії наук України та Російської академії наук) і учень десятого класу з Києва Яків Айзенштат, який став відомим учителем та методистом.

Після того, як у 1938 р. Михайла Пилиповича Кравчука було репресовано, важливу роль в організації довоєнних учнівських олімпіад відігравав уславлений вчений Микола Миколайович Боголюбов (тоді – молодий професор фізико-математичного факультету університету). Серед переможців цих олімпіад були майбутні відомі математики С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, Ю. Л. Далецький.

Після війни проведення київських міських математичних олімпіад було відновлене за пропозицією академіка М. М. Боголюбова при активній організаційній участі відомого педагога й історика математики Любові Миколаївни Граціанської. З 1945 по 1970 рр. при Київському університеті щонеділі працювали математичні гуртки, які збирали численну аудиторію школярів. Наприкінці навчального року проводилась Київська міська математична олімпіада, в якій мав можливість взяти участь будь-який школяр Києва, інколи на олімпіаду приїздили й учні з інших міст. У керівництві роботою гуртків брали активну участь студенти механіко-математичного факультету університету. Назву лише декого з них, дотримуючись певної хронології: Я. Рутицький, Ю. Березанський, В. Королюк, О. Росс, Б. Ярошевський, В. Волкова, В. Михалевич, Л. Лейфман, В. Чечик, А. Скороход, Г. Сакович, М. Малинський, А. Костюченко, В. Борок, Я. Житомирський, М. Ядренко, В. Михайловський, А. Стогній, Л. Прокопенко, І. Коваленко, В. Вишенський, З. Діденко, А. Дороговцев, В. Валах, О. Вознюк, Н. Вірченко, І. Єжов, Г. Призва та інші. Керування гуртками було прекрасною школою педагогічної майстерності для студентів. Київська міська олімпіада стала дуже популярною: в деякі роки число її учасників досягало 1200 школярів.

У 1960 р. організатори чергової Московської математичної олімпіади вирішили запросити з Києва двох школярів – дев'ятикласників Олександра Мутиліна та Юрія Дрозда, переможців Київських олімпіад. Сенсацією конкурсу стала перемога Олександра Мутиліна. Виступаючи за 10 клас, він розв'язав чотири задачі і отримав першу премію (всі інші учасники розв'язали не більше двох задач). Юрій Дрозд також показав гідний результат – отримав диплом І ступеня.

Наступного року організатори Московської олімпіади запросили команди з інших республік, і це була перша Всесоюзна математична олімпіада. Цій олімпіаді передувала перша Республіканська математична олімпіада, на якій були представлені всі регіони України. Отже, саме з 1961 р. починається відлік часу для Всеукраїнських олімпіад юних математиків як освітянських подій загальнодержавного масштабу. В організації перших олімпіад в Україні значну роль відіграв тодішній заступник міністра освіти математик Сергій Трохимович Завало, багато зусиль у подоланні організаційних труднощів докладав незабутній Антон Павлович Шатківський – методист Міністерства освіти.

Багато хто з переможців перших Всеукраїнських олімпіад стали відомими математиками. Відзначимо, наприклад, лауреата премії ім. Філдса члена-кореспондента НАН України Володимира Дрінфельда, членакореспондента НАН України Володимира Анісімова, професорів Геннадія Білого, Миколу Карташова, Юрія Богданського, Григорія Радзієвського, Андрія Дороговцева, Юрія Дрозда, доцента Олексія Толпиго.

Задачі, які пропонувалися на олімпіадах 1961–1990 рр., опубліковані в книзі "Українські математичні олімпіади" (автори: В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін, М. В. Карташов, В. І. Михайловський, Г. Й. Призва, М. Й. Ядренко).

Ви маєте нагоду познайомитися з книгою, в якій подано з докладними розв'язаннями всі задачі, що пропонувалися на заключному турі Всеукраїнських математичних олімпіад у 1991–2000 рр. Посібник містить також задачі з розв'язаннями третього етапу Всеукраїнських олімпіад (обласні олімпіади), Соросівських та Міжнародних математичних олімпіад. Отже, тепер читач має повні задачні матеріали математичних змагань, в яких брали участь обдаровані юні математики нашої країни.

Автори книги – відомі математики і викладачі, активні члени журі, невтомні ентузіасти проведення олімпіад – зробили чудовий подарунок всім любителям математики з нагоди сорокаріччя Всеукраїнських олімпіад.

Безперечно, книга є надзвичайно цінним посібником для учнів, учителів, студентів педагогічних спеціальностей, керівників гуртків, організаторів математичних олімпіад різних рівнів.

Голова журі Всеукраїнської олімпіади
юних математиків
член-кореспондент НАН України
професор М. Й. ЯДРЕНКО

Ядренко

Передмова

Учням, які захоплюються розв'язуванням нестандартних задач, вилададачам, усім любителям математики цією книгою пропонується повий звіт про математичні змагання, які проводилися в Україні за період 1991 по 2000 рр. Саме починаючи з 1991 р. учнівські математичні оліміади в незалежній Україні почали набувати власного "обличчя", і зараз же можна впевнено сказати, що зусиллями багатьох ентузіастів, серед ких чимало досвідчених вчителів, відомих науковців, студентів, аспіранів, олімпіади юних математиків нашої країни посіли одне з чільних ісць у світовій мережі наукових змагань для обдарованої молоді. Значо вдосконалено традиційні форми позакласної роботи, реалізуються ові підходи до залучення здібних юнаків та дівчат до творчої діяльності математиці. Сьогодні Україна має розгалужену мережу ліцеїв, гімназій а шкіл фізико-математичного профілю. З'явилися такі необхідні для овноцінної освітньої діяльності в галузі математики національні періодичні високоякісні видання, як журнали "У світі математики" і "Математика в школі", тижневик "Математика", вісник "Математика в школах України" тощо.

Непересічною подією для математичної освіти й олімпіадного руху стало те, що Україна з 1993 р. – офіційний учасник такого престижного форуму, яким є Міжнародні математичні олімпіади (зауважимо, що у 1992 р. команда нашої країни також брала участь у ММО, але, згідно з регламентом, мала статус спостерігача). Формування щороку збірної команди найталановитіших юних математиків, котрі мають гідно представляти математичну освіту України на світовому рівні, суттєво впливає на значимість та зміст Всеукраїнських олімпіад юних математиків, які проводяться з 1961 р. Багато років плідній роботі у складі журі заключного етапу Всеукраїнської математичної олімпіади присвятили В. І. Михайловський, В. А. Вишенський, В. П. Криволапов, Г. Й. Призва, М. В. Карташов, О. Г. Ганюшкін. Першим головою журі Всеукраїнської математичної олімпіади був професор М. О. Давидов. Понад тридцять років очолює авторитетне журі член-кореспондент Національної академії наук України професор М. Й. Ядренко, внесок якого до організації та популяризації математичних олімпіад важко переоцінити. Значну роботу з організаційно-методичного забезпечення математичних олімпіад проводить В. О. Борисова (науково-методичний центр середньої освіти Міністерства освіти і науки України). В останні роки у складі журі Всеукраїнських олімпіад активно працюють математики та викладачі з різних регіонів України, серед яких: О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. С. Мазорчук, В. В. Некрашевич, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. О. Швець (м. Київ), І. Й. Гуран, М. С. Добосевич (м. Львів), О. Ф. Крижанівський, Є. П. Нелін (м. Харків), В. М. Петечук, М. В. Ткач (м. Ужгород), В. А. Ясінський (м. Вінниця), В. П. Моторний (м. Дніпропетровськ), І. П. Нагель (м. Євпаторія), В. Ф. Санніков (м. Севастополь), І. М. Мітельман, С. М. Сапрікін (м. Одеса), І. В. Федак (м. Івано-Франківськ), В. М. Лейфура, В. П. Черкасенко (м. Миколаїв). Члени журі докладають чималих зусиль щодо створення цікавих оригінальних задач для математичних олімпіад. Визнанням рівня вітчизняних фахівців у цьому різновиді математичної діяльності є включення до завдань XXXIX (1998 р.) та XLIII (2002 р.) Міжнародних олімпіад геометричних задач, автором яких є В. А. Ясінський. Сподіваємося, що задачі українських математиків і надалі прикрашатимуть найпрестижніші учнівські наукові змагання.

Всеукраїнська олімпіада юних математиків проводиться щороку в чотири етапи. Перший етап – це шкільні олімпіади, другий – районні й міські (у містах обласного підпорядкування), третій – обласні олімпіади, олімпіади школярів міст Києва та Севастополя, олімпіада Автономної Республіки Крим тощо. Заключний – четвертий – етап збирає переможців третього етапу для визначення переможців Всеукраїнської олімпіади поточного навчального року. За підсумками заключного етапу визначаються учасники відбірково-тренувальних зборів кандидатів команди України на Міжнародну математичну олімпіаду. На таких зборах формується збірна команда у складі шести учнів, які й представлятимуть нашу країну на всесвітньому змаганні юних математиків.

За період з 1993 до 2003 рр. українські школярі на Міжнародних математичних олімпіадах вибороли вже 55 медалей: 14 золотих, 24 срібні і 17 бронзових. Це – вагоме свідчення високої якості української математичної освіти, зокрема, – високого рівня математичних змагань, котрі проводяться для обдарованих юних математиків. Окремо потрібно сказати, що накопичено й чималого досвіду в питаннях відбору та ефективної підготовки збірної команди України на ММО, причому ця система постійно осконалюється з урахуванням сучасних тенденцій математичного імпіадного руху. Підготовка призера міжнародної предметної олімпіа- є результатом напруженої сумісної багаторічної творчості талановито школяра і його наставників – вчителя, керівника гуртка, наукового нсультанта. Згідно з Указом Президента України № 169 від 5 лютого 00 р. "Про відзначення призерів і учасників Міжнародних учнівських імпіад та їх учителів" наша держава гідно вшановує педагогів, котрі дготували медалістів міжнародних олімпіад, що визнається за одне з щих досягнень у педагогічній праці.

З 1994 р. календар математичних олімпіад вищого рангу прикрасився е одним заходом – Соросівськими олімпіадами для старшокласників. країнські Соросівські олімпіади, починаючи з 1997 р., проходили в три апи (перший з яких на всіх семи олімпіадах був заочним, що дозволяло яти в ньому участь всім бажаючим) і, безперечно, сприяли значному зширенню контингенту учнів, які захоплюються розв'язуванням скланих задач, надали потрібного напряму роботі математичних гуртків, зволили педагогам, що працюють з талановитими учнями, постійно ідкувати за динамікою тематичних змін змісту олімпіад, знайомитися з айновішими набутками авторів задач. Завдяки наполегливій сумлінній боті працівників Міжнародного фонду "Відродження" (Міжнародна ауково-освітня програма), членів оргкомітетів та журі, Соросівські лімпіади перетворилися на помітні події в освітянському житті нашої раїни. Сім років Соросівських олімпіад були справжнім подарунком агатьом талановитим і професійно одержимим людям. Зауважимо таож, що фінальний тур Соросівських олімпіад з математики проводився з регламентом Міжнародної математичної олімпіади, його завдання таож були спрямовані на те, щоб майбутнім членам збірної України надаи додаткові можливості якісної підготовки до випробувань на світовому івні. Приємно, що керівництво Міжнародної науково-освітньої програи фонду "Відродження" надало авторам можливість включити до цього идання й матеріали Соросівських олімпіад.

Книга, яка пропонується вашій увазі, складається з чотирьох основих частин: завдання III етапу Всеукраїнських олімпіад (за той період, оли Міністерство освіти і науки України пропонувало єдині завдання ля проведення III етапу в усіх регіонах одночасно), завдання IV етапу Всеукраїнських олімпіад, завдання всіх етапів Соросівських олімпіад з атематики, завдання Міжнародних математичних олімпіад (починаючи олімпіади 1992 р., на якій, як було зазначено вище, вперше була предтавлена делегація нашої країни). До всіх задач подано докладні озв'язання, причому деякі задачі розв'язано в декілька способів.

Автори висловлюють щиру вдячність усім авторам задач математичних олімпіад, які проводяться для школярів України. Задачні матеріали українських учнівських олімпіад є, безперечно, яскравим свідченням таланту й методичної майстерності наших вчителів і науковців.

Ми дякуємо за сумісну плідну роботу всім фахівцям, разом з якими протягом багатьох років готуємо й проводимо різноманітні математичні учнівські змагання, відбірково-тренувальні збори для команди України на Міжнародні математичні олімпіади тощо. Саме наші колеги й друзі по спільній роботі у складі журі Всеукраїнських та Соросівських олімпіад надихнули нас на створення цієї книги.

При підготовці рукопису книги до видання авторам надали значної допомоги колишні переможці Всеукраїнської математичної олімпіади – студенти-математики Олена Усольцева, Володимир Брайман (Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка), Олег Шлєпаков (Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова).

Нам з вами пощастило бути свідками й співучасниками незабутнього періоду розбудови освітнього простору України. Автори сподіваються, що ця книга буде помітним внеском до системи роботи з математично обдарованою молоддю, дороговказом для всіх, хто прагне увійти до чарівного світу захоплюючих математичних задач. Зичимо вам, вельмишановні читачі, успіхів, натхнення й великих творчих досягнень в опануванні найчудовішої з наук – МАТЕМАТИКИ.

В. М. ЛЕЙФУРА
І. М. МІТЕЛЬМАН
В. М. РАДЧЕНКО
В. А. ЯСІНСЬКИЙ

Основні математичні позначення

$[a]$ – ціла частина числа a (тобто, найбільше ціле число, що не перевищує a)
$\{a\}$ – дробова частина числа a (тобто, $\{a\} = a - [a]$)
$\overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ – запис числа з цифрами $a_1, a_2, ..., a_n$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ $(0!=1,\ 1!=1)$
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальний коефіцієнт, $0 \le k \le n$
$f : A \to B$ – функція f визначена на множині A і набуває значення у множині B
$k \equiv l \pmod{n}$ – цілі числа k та l мають однакову остачу при діленні на натуральне число n (тобто $k - l$ ділиться без остачі на n)
$\max\ \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – найбільше число серед чисел $x_1, x_2, ..., x_n$
$\min\ \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – найменше число серед чисел $x_1, x_2, ..., x_n$
N – множина натуральних чисел
Z – множина цілих чисел
Z_+ – множина цілих невід'ємних чисел
Q – множина раціональних чисел
Q_+ – множина невід'ємних раціональних чисел
R – множина дійсних чисел
R_+ – множина невід'ємних дійсних чисел
C – множина комплексних чисел
S_F, $S(F)$ – площа фігури F

УМОВИ ЗАДАЧ

Третій етап Всеукраїнських олімпіад

Олімпіада 34
(*1994 р.*)

VII клас

III.34.1. Який з двох добутків більший –
$19\,931\,993 \cdot 199\,419\,941\,994$ чи $19\,941\,994 \cdot 199\,319\,931\,993$?

III.34.2. У кубі позначили всі вершини і центри граней, а також провели діагоналі всіх граней. Чи можна по відрізках цих діагоналей обійти всі позначені точки, побувавши в кожній з них лише один раз?

III.34.3. За круглим столом сидять 20 осіб. Вони хочуть пересісти так, щоб ті, які раніше сиділи разом, тепер були через дві особи. Чи можливо це?

III.34.4. Як посадити дев'ять дерев по три в ряду, щоб всього було десять рядів?

III.34.5. Дано 6 натуральних чисел. Всі вони різні й дають у сумі 22. Знайдіть ці числа і доведіть, що інших наборів з тих чисел, що задовольняють вказану умову, немає.

VIII клас

III.34.6. Нехай n і m – такі цілі числа, що $m^2+9mn+n^2$ ділиться на 11. Доведіть, що в цьому разі m^2-n^2 також ділиться на 11.

III.34.7. Доведіть, що не існує дійсних чисел a і b таких, що одночасно виконуються дві рівності $a=b^2+1$ та $b=a^2+1$.

III.34.8. Дано два кола T_1 і T_2, які перетинаються в двох точках A і B. Коло T_2 проходить через центр кола T_1. Дотична до кола T_2, проведена через точку B, перетинає коло T_1 у точці C (відмінній від B). Доведіть, що $AB=BC$.

III.34.9. Дано множину з $2n$ додатних чисел, про які відомо: ці числа можна розбити на n пар таким чином, що сума чисел у кожній парі буде дна й та сама; ці $2n$ чисел можна розбити на n пар (можливо, вже інших) так, що добуток чисел у кожній парі буде одним і тим самим. Доведіть, що серед чисел цієї множини не знайдеться трьох різних.

IX клас

III.34.10. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + x + y = 80, \\ yz + y + z = 80, \\ zx + z + x = 80. \end{cases}$$

III.34.11. Чи можна пронумерувати ребра куба натуральними числами від 1 до 12, використовуючи кожне число лише один раз, так, щоб суми номерів ребер, які збігаються в кожній вершині, були однаковими?

III.34.12. Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n, які задовольняють рівність $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{1\,994}$.

III.34.13. Знайдіть всі функції $f: R \to R$, для яких при будь-яких дійсних x, y виконується рівність $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

III.34.14. Нехай коло G описане навколо трикутника ABC, пряма l дотична до G у точці A. На сторонах AB і AC позначимо відповідно точки D і E так, що $AD = 6$ см, $AE = 5$ см, $EC = 7$ см і пряма DE паралельна прямій l. Знайдіть довжину відрізка BD.

X клас

III.34.15. Доведіть, що остача від ділення простого числа на 30 — просте число або 1.

III.34.16. Знайдіть всі функції $f: R \to R$, для яких при будь-яких $x \in R$ виконується рівність $x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0$.

III.34.17. Відомо, що $a \ge b \ge c \ge d \ge e \ge 0$ і $a + b + c + d + e = 100$. Яке найменше можливе значення виразу $a + c + e$?

III.34.18. В країні N міст ($N \ge 3$). Деякі з міст сполучені шляхами, кожний з яких з'єднує два міста. Відомо, що коли якісь два міста не сполучені шляхом, то знайдеться третє місто, з'єднане шляхом з кожним з цих двох. Якою може бути найменша кількість шляхів у такій країні?

√ **III.34.19.** Точки M, N, K позначено відповідно на сторонах AB, BC, CA гострокутного трикутника ABC так, що $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$. Точку перетину відрізків AN і BK позначимо через L. Доведіть, що точки C, K, L, N лежать на одному колі.

XI клас

III.34.20. Квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата як на діаметрах всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру "квітка". Доведіть, що загальна площа цієї "квітки" дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.

III.34.21. Переставивши в деякому порядку числа $1, 2, ..., 1\,994$, дістали послідовність $a_1, a_2, ..., a_{1994}$. Доведіть, що найбільше з чисел $(n-1)a_n$, $1 \le n \le 1\,994$, не менше 997^2.

III.34.22. Знайдіть всі функції $f: R \to R$, які при будь-яких дійсних x, y задовольняють рівність $f\left(x^2 + y\right) = f\left(x\right) + f\left(y^2\right)$.

III.34.23. Трикутник $A_1B_1C_1$ є в просторі ортогональною проекцією правильного трикутника ABC з довжиною сторони 1. Відомо, що $A_1B_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1C_1 < \frac{1}{2}$. Доведіть, що кут між площинами ABC та $A_1B_1C_1$ більший за $60°$.

III.34.24. Для всіх дійсних x доведіть нерівність

$$x^2 \sin x + x \cos x + x^2 + \frac{1}{2} > 0.$$

Олімпіада 35
(*1995 р.*)

VII клас

III.35.1. Доведіть, що число 100...001 (всього 1 994 нулі) не є простим.

III.35.2. По закінченні волейбольного турніру, в якому кожна команда зустрічалася з іншою двічі, з'ясувалось, що 20 % команд не одержали жодної перемоги (нічиїх у волейболі немає). Скільки всього ігор було проведено в цьому турнірі?

III.35.3. Чи можна розрізати на триклітинкові фігурки вигляду:

квадрат розмірами $1\,994 \times 1\,994$, у якого вирізана одна кутова клітинка?

III.35.4. Двоє грають у подвійні шахи, тобто всі фігури ходять як і в звичайних шахах, але кожен із шахістів робить по два ходи підряд. Доведіть, що шахіст, який грає білими фігурами, може грати так, щоб не програти (тобто другий не має виграшної стратегії).

III.35.5. Натуральні числа a і b такі, що $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ – ціле число. Нехай c – найбільший спільний дільник чисел a і b. Доведіть, що

$$c^2 \le a+b.$$

VIII клас

III.35.6. У трикутнику ABC проведено висоту AH, а O – центр описаного кола. Доведіть, що $\angle OAH = |\angle ABC - \angle BCA|$.

III.35.7. Доведіть, що число $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ ціле.

III.35.8. Доведіть, що для довільних дійсних чисел a і b виконується нерівність $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{3} \ge \frac{a^3b+ab^3}{2}$.

III.35.9. Надруковано мільйон квитків з номерами від 000000 до 999 999. Квиток з номером $\overline{abcdef}$ вважається "щасливим", якщо $af+be+cd=100$. Доведіть, що сума номерів всіх "щасливих" квитків ділиться на $1\,001$.

IX клас

III.35.10. Доведіть, що не існує чотирьох різних додатних чисел a, b, c, d таких, що $a+b=c+d$ та $a^3+b^3=c^3+d^3$.

ІІІ.35.11. Комісія проводила свої засідання 40 разів. Кожного разу в засіданні брало участь 10 чоловік, і будь-які двоє членів комісії засідали спільно не більше одного разу. Доведіть, що до складу комісії входить не менше 60 чоловік.

ІІІ.35.12. Знайдіть всі трійки цілих чисел l, m, n, для яких виконується рівність $l^2 + m^2 + n^2 - 2l + 4m - 6n = -11$.

ІІІ.35.13. У трикутнику ABC $\angle ACB = 120°$. Нехай H – ортоцентр цього трикутника, O – центр описаного кола, M – середина дуги ACB описаного кола. Доведіть, що $HM = MO$.

ІІІ.35.14. Нехай a, b, c, A, B, C – такі додатні числа, що рівняння $ax^2 - bx + c = 0$ та $Ax^2 - Bx + C = 0$ мають по два різні дійсні корені. Доведіть, що для кожного числа t, яке лежить між двома коренями рівняння $ax^2 - bx + c = 0$, та для будь-якого числа T, яке лежить між двома коренями рівняння $Ax^2 - Bx + C = 0$, виконується нерівність

$$(at + AT)\left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T}\right) < \left(\frac{b + B}{2}\right)^2.$$

X клас

ІІІ.35.15. Доведіть, що для довільного натурального $n > 3$ десятковий запис числа n^2 містить принаймні одну парну цифру.

ІІІ.35.16. Доведіть, що рівняння $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ не має дійсних коренів.

ІІІ.35.17. Точку O, що лежить всередині правильного $2n$-кутника, з'єднано з його вершинами. Отримані трикутники розфарбовано через один червоним та синім кольорами. Доведіть, що сума площ червоних трикутників дорівнює сумі площ синіх трикутників.

ІІІ.35.18. На площині задано 1 995 точок $A_1, \ldots, A_{1\,995}$. Перетворення S здійснюється в такий спосіб: для кожної точки площини спочатку будується точка, симетрична їй відносно точки A_1, потім відносно точки A_2 і т. д, і останньою – відносно точки $A_{1\,995}$. Доведіть, що існує лише одна точка, яка не змінюється при перетворенні S.

ІІІ.35.19. Квадратна таблиця розмірами $1\,995 \times 1\,995$ заповнена різними натуральними числами таким чином, що числа кожного рядка зліва направо монотонно зростають. Одного разу в кожному стовпчику числа переставили так, що вони монотонно спадали зверху вниз. Доведіть, що в кожному рядку отриманої таблиці, як і раніше, числа зліва направо монотонно зростають.

XI клас

III.35.20. Переріз деякою площиною правильної трикутної піраміди зі стороною основи a є квадратом зі стороною b. Знайдіть об'єм піраміди.

III.35.21. Про дійсне число k та послідовність дійсних чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots$ відомо, що $u_0 = 1$, $u_{1\,995} = 100$, $u_1 u_2 > 0$, $u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$ для всіх натуральних n. Знайдіть k.

III.35.22. Чи існує такий відмінний від сталої многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що $P(x) \geq 1\,995P'(x)$ для всіх дійсних x?

III.35.23. Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значень у цій самій множині. Для довільного числа n з цієї множини виконується рівність $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. Знайдіть $f(1\,995)$.

III.35.24. У деякому місті є декілька (більше, ніж один) автобусних маршрутів. Кожні два з них мають одну спільну зупинку, кожні дві зупинки з'єднує хоча б один маршрут. Знайдіть:

а) кількість маршрутів, якщо на кожному маршруті три зупинки;

б) кількість автобусних зупинок на кожному з маршрутів, якщо їх кількість дорівнює тринадцяти і на кожному маршруті не менше трьох зупинок.

Олімпіада 36
(*1996* р.)

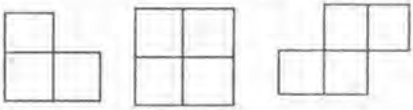
VII клас

III.36.1. Як можна відміряти 9 хв за допомогою піскових годинників на 5 та на 7 хв?

III.36.2. Сума цифр трицифрового числа, всі цифри якого різні, ділиться на сім. Крім того, саме це число ділиться на сім. Знайдіть всі такі числа.

III.36.3. Яке найбільше значення може набувати вираз $aek-$ $-afh+bfg-bdk+cdh-ceg$, якщо кожне із чисел $a,b,c,...,k$ дорівнює 1 або -1?

III.36.4. Квадрат розмірами 7×7 розрізали на фігурки трьох типів (див. рис.). Доведіть, що серед одержаних фігурок є принаймні одна фігурка з чотирьох клітинок (тобто типу 2 або 3).



1 2 3

VIII клас

III.36.5. Див. задачу III.36.1.

III.36.6. Нехай H – ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $AB=CH$. Знайдіть величину кута ACB.

III.36.7. У садку діда Панаса ростуть груші та яблуні таким чином, що для кожної яблуні знайдуться деякі дві груші на відстані рівно 10 м від неї. Чи може яблунь у садку бути більше, ніж груш?

III.36.8. На дошці написано вираз

$$*n^8*n^7*n^6*n^5*n^4*n^3*n^2*n.$$

Петрик і Оксанка грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі, замінюючи одну зірочку "*" на знак "+" або "–". Оксанка прагне, щоб отриманий після восьми ходів вираз ділився на 6 для кожного натурального n. Петрик ходить першим. Доведіть, що Оксанка може забезпечити собі перемогу незалежно від того, як ходитиме Петрик.

IX клас

III.36.9. На дошці написані числа 1, 9, 9, 6. Далі на кожному кроці дозволяється робити таку дію: вибирати з написаних на дошці три довільних числа a,b,c та дописувати три числа $a(b+c)$, $b(a+c)$, $c(a+b)$ (всі числа, що були на дошці, залишаються). Чи можна після скінченної кількості таких кроків отримати число 1996?

III.36.10. Знайдіть всі натуральні числа m,n, що задовольняють рівність $5n^2=m!-n!$.

III.36.11. Дійсні числа x, y, z задовольняють рівності: $x+y+z=6$ та $xy+yz+zx=9$. Доведіть, що числа x, y, z належать відрізку $[0;4]$.

III.36.12. У трикутнику ABC через A_1, B_1, C_1 позначимо відповідно середини сторін BC, AC, AB. Доведіть, що $\angle A_1AC = \angle ABB_1$ тоді й лише тоді, коли $\angle AC_1C = \angle AA_1B$.

III.36.13. Дано нескінченний в усі боки аркуш паперу в клітинку. Для яких натуральних n можна зафарбувати скінченну кількість клітинок на аркуші так, щоб кожна зафарбована клітинка мала рівно n зафарбованих сусідніх клітинок? (Клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину.)

X клас

III.36.14. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{-2x-x^2}+\sqrt{8-2x-x^2}=4.$$

III.36.15. На координатній площині позначено точки A, B, C з цілими координатами. Відомо, що $\angle ABC = 45°$ і на сторонах AB та BC немає цілочислових точок, крім A, B, C. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

III.36.16. Знайдіть всі пари цілих чисел p, q таких, що чотири корені рівнянь $x^2-px-1=0$ та $x^2-qx-1=0$, записані в деякому порядку, утворюють арифметичну прогресію.

III.36.17. Всередині гострокутного трикутника ABC взято точку D. Відомо, що три з радіусів кіл, описаних навколо трикутників ABC, ABD, ACD, BCD, рівні. Доведіть, що насправді рівні всі чотири радіуси.

III.36.18. Два злодії вкрали ланцюг, що складається з $2k$ срібних та $2m$ золотих кілець. Знайдіть мінімальну кількість розрізів, що потрібно зробити для справедливого розподілу ланцюга в залежності від k та m. (Поділ вважається справедливим, якщо кожний із злодіїв одержить k срібних та m золотих кілець.)

XI клас

III.36.19. Знайдіть всі пари дійсних чисел x, y, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 16^y = 48. \end{cases}$$

ІІІ.36.20. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle BAC = 100°$, відрізок BP – бісектриса. Доведіть, що $AP + PB = BC$.

ІІІ.36.21. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність $\dfrac{a}{b+2a} + \dfrac{b}{a+2b} \le \dfrac{2}{3}$.

ІІІ.36.22. Протилежні ребра трикутної піраміди $SABC$ попарно рівні: $SA = BC$, $SB = AC$, $SC = AB$. Точка O, що лежить всередині піраміди, рівновіддалена від усіх її вершин. Знайдіть суму величин двогранних кутів при ребрах OA, OB, OC тригранного кута $OABC$.

ІІІ.36.23. Послідовність чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ побудована таким чином, що $a_1 = 0$, $a_2 = k$, $a_{n+2} = k^2 \cdot a_{n+1} - a_n$ для всіх натуральних n (k – деяке натуральне число). Доведіть, що число $a_{n+1}^2 + a_n^2$ ділиться на число $a_{n+1}a_n + 1$ при всіх натуральних n.

Олімпіада 37
(1997 р.)

VIII клас

ІІІ.37.1. Шахіст зіграв 40 партій та отримав у сумі 25 очок (за кожну перемогу зараховувалося одне очко, за нічию – половину очка, а за поразку – нуль очок). Знайдіть різницю між кількістю одержаних ним перемог та кількістю поразок, яких він зазнав.

ІІІ.37.2. Знайдіть усі набори відмінних від нуля цифр a, b, c, для яких виконуватиметься рівність $\overline{a,b} \cdot c = a + b + c$ (тут запис $\overline{a,b}$ означає десятковий дріб "a цілих і b десятих").

ІІІ.37.3. Нехай AE – бісектриса трикутника ABC, а точка D належить його стороні AC, причому $\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA$. Доведіть, що DE – бісектриса кута BDC.

ІІІ.37.4. На Марсі 2000 країн, причому серед будь-яких чотирьох з них принаймні одна країна ворогує з рештою країн цієї ж четвірки. Знайдіть найменшу можливу кількість країн Марсу, що ворогують з усіма країнами відразу.

III.36.11. Дійсні числа x, y, z задовольняють рівності: $x+y+z=6$ та $xy+yz+zx=9$. Доведіть, що числа x, y, z належать відрізку $[0;4]$.

III.36.12. У трикутнику ABC через A_1, B_1, C_1 позначимо відповідно середини сторін BC, AC, AB. Доведіть, що $\angle A_1AC = \angle ABB_1$ тоді й лише тоді, коли $\angle AC_1C = \angle AA_1B$.

III.36.13. Дано нескінченний в усі боки аркуш паперу в клітинку. Для яких натуральних n можна зафарбувати скінченну кількість клітинок на аркуші так, щоб кожна зафарбована клітинка мала рівно n зафарбованих сусідніх клітинок? (Клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину.)

X клас

III.36.14. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{-2x-x^2}+\sqrt{8-2x-x^2}=4.$$

III.36.15. На координатній площині позначено точки A, B, C з цілими координатами. Відомо, що $\angle ABC = 45°$ і на сторонах AB та BC немає цілочислових точок, крім A, B, C. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

III.36.16. Знайдіть всі пари цілих чисел p, q таких, що чотири корені рівнянь $x^2-px-1=0$ та $x^2-qx-1=0$, записані в деякому порядку, утворюють арифметичну прогресію.

III.36.17. Всередині гострокутного трикутника ABC взято точку D. Відомо, що три з радіусів кіл, описаних навколо трикутників ABC, ABD, ACD, BCD, рівні. Доведіть, що насправді рівні всі чотири радіуси.

III.36.18. Два злодії вкрали ланцюг, що складається з $2k$ срібних та $2m$ золотих кілець. Знайдіть мінімальну кількість розрізів, що потрібно зробити для справедливого розподілу ланцюга в залежності від k та m. (Поділ вважається справедливим, якщо кожний із злодіїв одержить k срібних та m золотих кілець.)

XI клас

III.36.19. Знайдіть всі пари дійсних чисел x, y, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 16^y = 48. \end{cases}$$

III.36.20. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle BAC = 100°$, відрізок BP – бісектриса. Доведіть, що $AP + PB = BC$.

III.36.21. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність $\frac{a}{b+2a} + \frac{b}{a+2b} \le \frac{2}{3}$.

III.36.22. Протилежні ребра трикутної піраміди $SABC$ попарно рівні: $SA = BC$, $SB = AC$, $SC = AB$. Точка O, що лежить всередині піраміди, рівновіддалена від усіх її вершин. Знайдіть суму величин двогранних кутів при ребрах OA, OB, OC тригранного кута $OABC$.

III.36.23. Послідовність чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ побудована таким чином, що $a_1 = 0$, $a_2 = k$, $a_{n+2} = k^2 \cdot a_{n+1} - a_n$ для всіх натуральних n (k – деяке натуральне число). Доведіть, що число $a_{n+1}^2 + a_n^2$ ділиться на число $a_{n+1}a_n + 1$ при всіх натуральних n.

Олімпіада 37
(*1997 р.*)

VIII клас

III.37.1. Шахіст зіграв 40 партій та отримав у сумі 25 очок (за кожну перемогу зараховувалося одне очко, за нічию – половину очка, а за поразку – нуль очок). Знайдіть різницю між кількістю одержаних ним перемог та кількістю поразок, яких він зазнав.

III.37.2. Знайдіть усі набори відмінних від нуля цифр a,b,c, для яких виконуватиметься рівність $\overline{a,b} \cdot c = a + b + c$ (тут запис $\overline{a,b}$ означає десятковий дріб "a цілих і b десятих").

III.37.3. Нехай AE – бісектриса трикутника ABC, а точка D належить його стороні AC, причому $\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA$. Доведіть, що DE – бісектриса кута BDC.

III.37.4. На Марсі 2000 країн, причому серед будь-яких чотирьох з них принаймні одна країна ворогує з рештою країн цієї ж четвірки. Знайдіть найменшу можливу кількість країн Марсу, що ворогують з усіма країнами відразу.

III.36.11. Дійсні числа x, y, z задовольняють рівності: $x+y+z=6$ та $xy+yz+zx=9$. Доведіть, що числа x, y, z належать відрізку $[0;4]$.

III.36.12. У трикутнику ABC через A_1, B_1, C_1 позначимо відповідно середини сторін BC, AC, AB. Доведіть, що $\angle A_1AC = \angle ABB_1$ тоді й лише тоді, коли $\angle AC_1C = \angle AA_1B$.

III.36.13. Дано нескінченний в усі боки аркуш паперу в клітинку. Для яких натуральних n можна зафарбувати скінченну кількість клітинок на аркуші так, щоб кожна зафарбована клітинка мала рівно n зафарбованих сусідніх клітинок? (Клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину.)

X клас

III.36.14. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{-2x-x^2}+\sqrt{8-2x-x^2}=4.$$

III.36.15. На координатній площині позначено точки A, B, C з цілими координатами. Відомо, що $\angle ABC = 45°$ і на сторонах AB та BC немає цілочислових точок, крім A, B, C. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

III.36.16. Знайдіть всі пари цілих чисел p, q таких, що чотири корені рівнянь $x^2-px-1=0$ та $x^2-qx-1=0$, записані в деякому порядку, утворюють арифметичну прогресію.

III.36.17. Всередині гострокутного трикутника ABC взято точку D. Відомо, що три з радіусів кіл, описаних навколо трикутників ABC, ABD, ACD, BCD, рівні. Доведіть, що насправді рівні всі чотири радіуси.

III.36.18. Два злодії вкрали ланцюг, що складається з $2k$ срібних та $2m$ золотих кілець. Знайдіть мінімальну кількість розрізів, що потрібно зробити для справедливого розподілу ланцюга в залежності від k та m. (Поділ вважається справедливим, якщо кожний із злодіїв одержить k срібних та m золотих кілець.)

XI клас

III.36.19. Знайдіть всі пари дійсних чисел x, y, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 16^y = 48. \end{cases}$$

III.36.20. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle BAC = 100°$, відрізок BP – бісектриса. Доведіть, що $AP + PB = BC$.

III.36.21. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність $\frac{a}{b+2a} + \frac{b}{a+2b} \le \frac{2}{3}$.

III.36.22. Протилежні ребра трикутної піраміди $SABC$ попарно рівні: $SA = BC$, $SB = AC$, $SC = AB$. Точка O, що лежить всередині піраміди, рівновіддалена від усіх її вершин. Знайдіть суму величин двогранних кутів при ребрах OA, OB, OC тригранного кута $OABC$.

III.36.23. Послідовність чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ побудована таким чином, що $a_1 = 0$, $a_2 = k$, $a_{n+2} = k^2 \cdot a_{n+1} - a_n$ для всіх натуральних n (k – деяке натуральне число). Доведіть, що число $a_{n+1}^2 + a_n^2$ ділиться на число $a_{n+1}a_n + 1$ при всіх натуральних n.

Олімпіада 37
(*1997 р.*)

VIII клас

III.37.1. Шахіст зіграв 40 партій та отримав у сумі 25 очок (за кожну перемогу зараховувалося одне очко, за нічию – половину очка, а за поразку – нуль очок). Знайдіть різницю між кількістю одержаних ним перемог та кількістю поразок, яких він зазнав.

III.37.2. Знайдіть усі набори відмінних від нуля цифр a, b, c, для яких виконуватиметься рівність $\overline{a,b} \cdot c = a + b + c$ (тут запис $\overline{a,b}$ означає десятковий дріб "a цілих і b десятих").

III.37.3. Нехай AE – бісектриса трикутника ABC, а точка D належить його стороні AC, причому $\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA$. Доведіть, що DE – бісектриса кута BDC.

III.37.4. На Марсі 2000 країн, причому серед будь-яких чотирьох з них принаймні одна країна ворогує з рештою країн цієї ж четвірки. Знайдіть найменшу можливу кількість країн Марсу, що ворогують з усіма країнами відразу.

IX клас

III.37.5. Розв'яжіть рівняння

$$2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1.$$

III.37.6. Доведіть, що для довільного $a\in(1;\,2)$ площа фігури, яка обмежується на координатній площині xOy графіками функцій $y=1-|x-1|$ та $y=|2x-a|$, менша за $\frac{1}{3}$.

III.37.7. Відомо, що для даних цілих чисел a,b,c число $a^2+b^2+c^2$ ділиться на 6, а число $ab+bc+ac$ ділиться на 3. Доведіть, що $a^3+b^3+c^3$ ділиться на 6.

III.37.8. У чотирикутник $ABCD$ вписано коло з центром у точці O. Через точки A,B,C,D перпендикулярно до OA,OB,OC,OD проведено прямі відповідно l_A,l_B,l_C,l_D, причому $l_A\cap l_B=K$, $l_B\cap l_C=L$, $l_C\cap l_D=M$, $l_D\cap l_A=N$. Доведіть, що $KM\cap LN=O$ і знайдіть довжину відрізка ON, якщо відомо, що $OK=p$, $OL=g$, $OM=r$.

III.37.9. Дошку розмірами 8×8 з "традиційним" шаховим розфарбуванням довільно розділено на 32 двоклітинкових прямокутники – "пластинки доміно". Горизонтально розташована пластинка називається чорно-білою, якщо її ліва клітинка чорна, і біло-чорною – в іншому випадку. Доведіть, що кількість чорно-білих і біло-чорних горизонтальних пластинок доміно завжди збігається.

X клас

III.37.10. Знайдіть всі дійсні значення параметра a, для яких рівняння $|x-2|-|x+1|=a$ має принаймні один цілий розв'язок.

III.37.11. Нехай AA_1,BB_1,CC_1 – висоти трикутника ABC, а AA_2, BB_2,CC_2 – його медіани. Доведіть, що довжина замкненої ламаної $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ дорівнює периметру даного трикутника.

III.37.12. Для заданого простого числа p знайдіть всі пари цілих чисел x,y, для яких виконується співвідношення $p(x+y)=xy$.

III.37.13. На стороні AB трикутника ABC позначено точки M і N. Відомо, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ANC і BMC, є однаковими. Крім того, радіуси кіл, описаних навколо трикутників AMC та BNC, також однакові. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

ІІІ.37.14. За круглим столом сидять тридцять учнів. Кожен з них або завжди говорить правду, або ж завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є один брехун. При опитуванні дванадцять учнів сказали, що один з їхніх сусідів є брехуном, а решта учнів сказали, що обидва сусіди є брехунами. Скільки брехунів знаходиться за столом ?

XI клас

ІІІ.37.15. Знайдіть всі такі пари дійсних чисел x, y, що $x \geq y \geq 1$, причому $2x^2 - xy - 3x + y + 1 = 0$.

ІІІ.37.16. Чи можна з кубиків розмірами $1 \times 1 \times 1$ склеїти фігуру, площа поверхні якої дорівнює 1 997? (При склеюванні кубики з'єднуються таким чином, щоб їх відповідні грані повністю збігалися.)

ІІІ.37.17. Чи обов'язково є скінченною множина значень функції $f : R \to R$, якщо скінченною є множина $\{ f(x) + f(2x) \mid x \in R \}$?

ІІІ.37.18. Двоє гравців у запису $a_1 \sin x + a_2 \cos 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \cos 4x + ... + a_{1\,996} \cos 1\,996x + a_{1\,997} \sin 1\,997x = 0$ по черзі вибирають ще не обрані коефіцієнти a_i та замінюють їх будь-якими дійсними числами. Коли всі коефіцієнти замінено, то перший гравець вважатиметься переможцем, якщо отримане рівняння має корінь на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. В іншому випадку переможцем оголошується його суперник. Хто з двох гравців може забезпечити собі перемогу в даній грі?

ІІІ.37.19. Дано опуклий п'ятикутник, у якому кожна діагональ паралельна одній із сторін. Доведіть, що відношення довжини діагоналі до довжини відповідної паралельної сторони є одним і тим самим для всіх п'яти пар таких відрізків, і знайдіть величину цього відношення.

Олімпіада 38
(*1998 р.*)

VII клас

III.38.1. Дано два баки ємністю по 10 л із сольовим розчином 10 %-ї й 15 %-ї концентрації та посудини ємністю 3, 4 та 5 л. Як за допомогою переливань отримати 1 л 12 %-го сольового розчину?

III.38.2. Чи можна розмістити в таблиці розмірами 3×4 числа -1 і 1 таким чином, щоб усі сім сум чисел, що стоять в одному рядку або в одному стовпчику, були різними?

III.38.3. Скільки існує нескоротних дробів із чисельником 1 997, які менші за $\dfrac{1}{1\,997}$ і більші за $\dfrac{1}{1\,998}$?

III.38.4. Дано смужку розмірами 1×17, клітинки якої зліва направо пронумеровано послідовними натуральними числами від 1 до 17. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні, серед яких ліва має парний номер. Переможеним вважатиметься той гравець, котрий не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш: той, хто починає, чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію для такого гравця.

VIII клас

III.38.5. Сума трьох тризначних натуральних чисел $\overline{aab}, \overline{aba}, \overline{baa}$ (йдеться про десятковий запис) дорівнює 1 998. Знайдіть всі трійки таких чисел (різним літерам необов'язково відповідають різні цифри).

III.38.6. Чи буде число $11\ldots155\ldots56$ (у десятковому запису 1 998 одиниць та 1 997 п'ятірок) квадратом натурального числа?

III.38.7. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

III.38.8. На дошці з клітинками розмірами 4×4 двоє учнів грають у гру. Вони ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку, яку можна зафарбувати лише один раз. Переможеним вважатиметься той гравець, після ходу якого утвориться квадрат розмірами 2×2, що складатиметься із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш: той, хто ходить першим, чи його суперник?

IX клас

III.38.9. Доведіть, що число $11\ldots1$ (десятковий запис складається з 1 998 одиниць) ділиться на 37.

III.38.10. Див. задачу III.38.7.

III.38.11. Дано смужку розмірами 1×99. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або ж деякі дві сусідні. Переможеним вважатиметься той гравець, котрий не зможе зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш: той, хто ходить першим, чи його суперник?

III.38.12. На координатній площині xOy позначили п'ять точок $(-2;8)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ та $\left(\frac{1}{4};\frac{4}{5}\right)$. Яка найбільша кількість із цих точок може належати графіку рівняння $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$?

III.38.13. З тричленом ax^2+bx+c дозволяється робити такі дії:

1) замінити в ньому x на $x-\lambda$, де λ – довільне дійсне число;

2) замінити його на тричлен $cx^2+(b+2c)x+(a+b+c)$.

Чи можна за допомогою таких дій із тричлена x^2-3x-4 одержати тричлен x^2-2x-5?

X клас

III.38.14. Про цілі числа m та n відомо, що $\frac{n^2}{m+n}$ є цілим числом. Доведіть, що число $\frac{m^3}{m+n}$ також ціле.

III.38.15. Доведіть, що якщо в опуклому чотирикутнику суми синусів протилежних кутів рівні між собою, то цей чотирикутник – трапеція або паралелограм.

III.38.16. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z, які задовольняють рівності $x=\sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|}$, $y=\sqrt{\frac{z+1}{2}}$, $z=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$.

III.38.17. У новосформованому десятому класі деякі учні виявилися вже знайомими між собою, деякі – ще ні. В перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було кинуто 117 замріяних поглядів. Скільки у класі хлопців і дівчат, якщо всього не більше за 40 учнів?

III.38.18. Дві різні паралельні проекції просторової замкненої ламаної $ABCD$ на одну і ту саму площину є паралелограмами. Чи можна стверджувати, що $ABCD$ є паралелограмом?

XI клас

III.38.19. Дано невід'ємні дійсні числа x та y, які задовольняють умову $x-\sqrt{x} \le y-\frac{1}{4} \le x+\sqrt{x}$. Доведіть, що для цих чисел виконуються також і нерівності $y-\sqrt{y} \le x-\frac{1}{4} \le y+\sqrt{y}$.

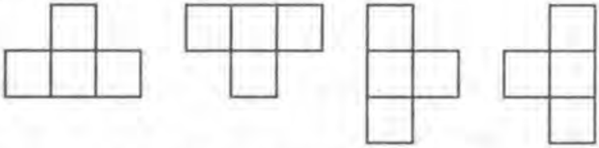
III.38.20. Розв'яжіть рівняння

$$\cos 12x = 5\sin 3x + 9\,\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x.$$

III.38.21. Відомо, що на сторонах CD і AD опуклого чотирикутника $ABCD$ існують відповідно точки K і M такі, що кожна з прямих AK та CM розтинає чотирикутник $ABCD$ на дві частини рівної площі. Нехай P – точка перетину прямих KM і BD. Знайдіть відношення площі чотирикутника $ABCD$ до площі чотирикутника $ABCP$.

III.38.22. Про функцію f, яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і приймає дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x)=\frac{1}{2}$ має принаймні один корінь та $f(x)-f(y)=$ $=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)f\left(\frac{1}{x}\right)$ для всіх $x\neq 0$ та $y\neq 0$. Знайдіть $f(-1)$.

III.38.23. Прямокутник розмірами $2^{1\,998}\times 1\,998^2$ поділено на одиничні квадратики. Доведіть, що кількість способів, за допомогою яких прямокутник можна розбити на фігурки, кожна з яких є або прямокутником із трьох клітинок, або складеною із чотирьох клітинок фігуркою вигляду



є числом непарним (способи, що відрізняються лише розташуванням фігурок, також вважаються різними).

Олімпіада 39
(*1999 р.*)

VII клас

III.39.1. Розставте в порожніх клітинках цілі числа так, щоб їх сума в будь-яких трьох клітинках, що розташовані поспіль, дорівнювала 99 (під клітинками підписано їх порядкові номери).

34							32								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

III.39.2. Чи можна розділити тринадцять аркушів паперу між шістьма учнями так, щоб при цьому кожний аркуш виявився розрізаним не більше, ніж на три частини (або взагалі не розрізався), та кожний учень отримав однакову кількість шматочків паперу?

III.39.3. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $(x;y)$, координати яких одночасно задовольняють дві рівності:

$$|x-y|=x+y,\ |x+y|=x-y.$$

III.39.4. Знайдіть максимальне значення n, для якого число $3\cdot 33\cdot 333\cdots\underbrace{33...3}_{55\text{ трійок}}$ ділиться на 3^n.

VIII клас

III.39.5. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\sqrt{x^2}}{2x^2}=1\,999.$$

III.39.6. Чи існують такі цілі числа m і n, що $(m+1\,998)\times$ $\times(m+1\,999)+(m+1\,999)(m+2\,000)+(m+1\,998)(m+2\,000)=n^2$?

III.39.7. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC. Відомо, що бісектриса кута ABC перетинає середню лінію цієї трапеції в точці P, а основу AD – у точці Q. Знайдіть величину кута APQ.

III.39.8. Дано 1 999 чисел. Відомо, що сума будь-яких дев'яносто дев'яти з цих чисел є додатною. Доведіть, що додатною є сума всіх даних чисел.

IX клас

III.39.9. Доведіть, що десятковий запис числа $1\,999^6$ містить принаймні три однакових цифри.

III.39.10. Розв'яжіть рівняння

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)=\left(1+x+x^2+x^3\right)^2.$$

III.39.11. Всередині гострокутного трикутника ABC позначили точку H так, що $AB^2+HC^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Доведіть, що H – ортоцентр трикутника ABC.

III.39.12. Нехай α – відмінне від нуля дійсне число. Відомо, що числа x_1 та x_2 є дійсними коренями рівняння $x^2+\alpha x-\frac{1}{2\alpha^2}=0$. Доведіть, що $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$.

III.39.13. Три цілих числа a,b,c записали в рядок. Під цими числами записали нову трійку чисел $a-b$, $b-c, c-a$. Числа третього рядка утворюються з чисел попереднього – другого – за таким самим правилом і т.д. Доведіть, що незалежно від вихідної трійки чисел першого рядка, серед чисел рядків, що розташовані нижче сьомого, не може зустрітися ані число 1 999, ані число 2 000.

X клас

III.39.14. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z, що задовольняють рівності $x + yz = y + zx = z + xy = 6$.

III.39.15. Дано довільний трикутник ABC. Нехай точка O – центр кола, вписаного в цей трикутник, S – центр кола, описаного навколо трикутника AOC. Доведіть, що точки B, O, S лежать на одній прямій.

III.39.16. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $(x; y)$, координати яких задовольняють умову $x^2 = y + \sqrt{y + x}$.

III.39.17. Чи існує нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ така, що для будь-якого цілого невід'ємного числа k нескінченна послідовність $k + a_1, k + a_2, k + a_3, \ldots$ містить лише скінченну кількість простих чисел (можливо, не містить жодного)?

III.39.18. У країні n^2 міст, які розташовано у вигляді квадрата розмірами $n \times n$. Відстань між сусідніми містами становить 10 км. Міста сполучаються системою доріг, що складаються із прямолінійних ділянок, які паралельні сторонам квадрата. Якою найменшою можливою може бути довжина цієї системи доріг, якщо відомо, що з довільного міста країни можна дістатися до будь-якого іншого?

XI клас

III.39.19. Розв'яжіть рівняння

$$\left(1 + x + x^2\right)\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^6\right)^2.$$

III.39.20. Нехай α та β – гострі кути $\left(\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$, для яких виконується рівність $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)$. Доведіть, що $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

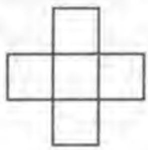
III.39.21. Чи існує функція f, яка визначена на всій множині дійсних чисел, має похідну в усіх точках та задовольняє наступні умови:

а) при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$;

б) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

III.39.22. Нехай точка P знаходиться всередині гострокутного трикутника ABC. На сторонах AC і BC цього трикутника відмітили такі точки M і K, що $\angle PMC = \angle PKC = 90°$. Доведіть, що коли точки M та K рівновіддалені від середини сторони AB, то $\angle PBC = \angle PAC$.

III.39.23. Чи можна шахівницю розмірами 7×7, із якої вилучено чотири кутові клітинки, так заповнити цілими числами (до кожної клітинки записується одне ціле число), сума яких дорівнюватиме 199 919 991 999, щоб у будь-якій п'ятиклітинковій фігурці вигляду



сума чисел була від'ємною?

Олімпіада 40
(*2000 р.*)

VII клас

III.40.1. Нехай $S(n)$ – сума цифр натурального числа n, а $S(S(n))$ – сума цифр суми цифр натурального числа n.

а) Чи існує натуральне n, для якого $n + S(n) = 2\,000$?

б) Чи існує натуральне n, для якого $n + S(n) + S(S(n)) = 2\,000$?

Відповіді обґрунтуйте.

III.40.2. Кожну точку прямої пофарбовано синім або червоним кольором. Доведіть, що на цій прямій знайдуться три різні точки A, B, C, пофарбовані одним кольором, і такі, що точка C є серединою відрізка AB.

III.40.3. На дошці в рядок записано 1 999 натуральних чисел. Доведіть, що серед них завжди можна витерти одне число так, що сума чисел, які залишилися, буде парною. Чи правильно це буде для 2 000 чисел?

III.40.4. Запишемо рівність $m - n = k$, в якій m, n, k – натуральні числа, причому m – п'ятицифрове число. Доведіть, що в такому запису принаймні одна цифра повториться (наприклад, у запису $54\,321-608=$ $=53\,713$ повторюється цифра 5).

III.40.5. Знайдіть принаймні дві пари натуральних чисел (a, b), що задовольняють рівняння $1\,999a^{1\,999}=b^{2\,000}$.

VIII клас

III.40.6. Доведіть, що число $19\,991\,999+19\,991\,998\cdot 19\,991\,999\times$ $\times 19\,992\,000$ є кубом цілого числа.

III.40.7. На дні озера б'ють з постійною потужністю джерела. Стадо з 12 слонів випиває озеро за 4 хв, а стадо з 9 слонів – за 6 хв. Певного дня до озера підійшли 6 слонів. За скільки хвилин вони вип'ють усю воду з цього озера? (Об'єм води в озері на початку водопою є завжди однаковим.)

III.40.8. Дано трапецію $ABCD$, у якій $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Відомо, що в цій трапеції відстань між серединами основ дорівнює відстані між серединами діагоналей. Доведіть, що кут ADB – тупий.

III.40.9 Чи існують цілі числа m та n такі, що $7m^2-5n^2=2\,000$?

III.40.10 Миколка та Сергійко грають у гру, по черзі записуючи цілі числа в клітинки таблиці розмірами 7×9 (7 рядків, 9 стовпчиків). Першим робить свій хід Миколка. За один хід записується одне число у вільну клітинку. Гра продовжується, поки вони не заповнять числами всю таблицю. Потім підраховуються значення $S_1, S_2, ..., S_7$ – суми чисел у рядках таблиці. Якщо серед чисел $S_1, S_2, ..., S_7$ парних більше, ніж непарних, виграє Миколка. В іншому випадку – Сергійко. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

IX клас

III.40.11. Доведіть, що всі корені рівняння $x^2-4x-2=0$ є також коренями рівняння $(x^2-3x-2)^2-3(x^2-3x-2)-x-2=0$.

III.40.12. Про ціле число n та просте число p відомо, що числа $5n-1$ та $n-10$ діляться на p. Доведіть, що число $2\,000n+13$ також ділиться на p.

ІІІ.40.13. Доведіть, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність $\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ca}+\frac{c^4}{ab}\geq a^2+b^2+c^2$.

ІІІ.40.14. У сегмент кола ω, що обмежений його хордою MN, вписано два кола. Ці кола дотикаються до дуги кола ω у точках A і B та дотикаються до MN у точках C і D. Доведіть, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.

ІІІ.40.15. У ряд виписані послідовні натуральні числа від 1 до 2 000. Двоє по черзі вписують між цими числами знак додавання "+" або множення "×" (усього вписано 1 999 знаків). Якщо кінцеве значення одержаного виразу ділитиметься на 3, то виграє той, хто ходив першим. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Знайдіть для нього виграшну стратегію.

Х клас

ІІІ.40.16. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z, для яких виконується рівність

$$\sqrt{3z^2-2y-6z-5}=\sqrt{2x-y^2+z^2-7}-\sqrt{2y-x^2+z^2-12}.$$

ІІІ.40.17. Сільський гіпнотизер Іван Карпович розводить індиків та курей. Внаслідок його експериментів десята частина індиків вважає, що вони – кури, а десята частина курей, що вони – індики. Якщо брати загалом, то п'ята частина птахів Івана Карповича вважає себе індиками. А якою є частка індиків у його господарстві насправді?

ІІІ.40.18. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC взято точки відповідно P, Q, R, а на відрізках RP, PQ, QR – точки відповідно A_1, B_1, C_1 таким чином, що $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$. Знайдіть площу трикутника PQR, якщо відомо, що площа трикутника ABC дорівнює a, а площа трикутника A_1B_1C – b.

ІІІ.40.19. На дошці записано рядок цілих невід'ємних чисел $a_0, a_1, a_2, ..., a_{10}$, кожне з яких не перевищує 10. Відомо, що кожне ціле число i ($0 \leq i \leq 10$) зустрічається серед записаних на дошці рівно a_i разів. Які саме числа записано на дошці ?

III.40.20. Задано таку функцію $f:(0;+\infty)\to R$, що для кожного $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ виконується рівність $f(\operatorname{tg}2x)=\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x$. Доведіть, що для всіх $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ справджується нерівність $f(\sin x)+f(\cos x)\geq 196$.

XI клас

III.40.21. Чи існує натуральне число, десятковий запис якого складається тільки з двійок та яке можна подати у вигляді суми кубів деяких трьох послідовних натуральних чисел?

III.40.22. Дано коло ω та попарно різні точки B, C, D на ньому. Дотична до кола ω, яку проведено через точку D, перетинає промінь CB у точці A. На продовженні відрізка BD за точкою D довільно обрано точку E. Коло, яке описане навколо трикутника CDE, перетинає пряму AD у відмінній від D точці K, а пряму AC – у відмінній від C точці F. Доведіть, що прямі KF і BD паралельні.

III.40.23. Знайдіть всі такі пари дійсних чисел a і b, що для будь-якого $x\in R$ виконується рівність $\sin 2\,000x+\sin ax+\sin bx=0$.

III.40.24. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy+yz+zx=12, \\ xyz=2+x+y+z, \end{cases}$$

якщо відомо, що $x, y, z\geq 0$.

III.40.25. Множина X складається з шести елементів. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_9$ – такі підмножини X, що кожна з них містить по три елементи. Доведіть, що існує таке "пофарбування" елементів X у два кольори (тобто, кожному елементу ставиться у відповідність один з двох кольорів), що кожна множина A_i ($1\leq i\leq 9$) буде містити принаймні два різнокольорових елементи.

Заключний етап Всеукраїнських олімпіад

Олімпіада 31
(*м. Вінниця, 1991 р.*)

VIII клас

3.31.1. Нехай n і m – натуральні числа. Знайдіть всі розв'язки рівняння $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

3.31.2. На сторонах AB і AC трикутника ABC вибрали відповідно точки M і N так, що кожна з них ділить відповідну сторону у відношенні 1:1 991 (рахуючи від вершини A). У якому відношенні точка перетину відрізків CM і BN ділить кожен із цих відрізків?

3.31.3. Двоє по черзі знімають зі столу фішки. За один раз дозволяється зняти зі столу 1, 10 або 11 фішок. Виграє той, хто зніме останню фішку. Перед початком гри на столі було 40 фішок. Хто виграє при правильній грі: той, хто починає гру, чи його суперник?

3.31.4. Для яких натуральних чисел n число $n^2 + 5$ ділиться на число $n + 5$?

3.31.5. Через кінці діаметра AB кола проведено дві прямі, через точку A – дотичну l, а через точку B – січну m. Нехай P – друга точка перетину січної m із колом. Проведемо через точку P дотичну n і позначимо через M і N точки перетину прямої l із прямими відповідно m і n. Доведіть, що трикутник MNP рівнобедрений.

3.31.6. На дошці написано 1 991 натуральне число, кожне з яких не перевищує 1 991. Якщо a і b деякі два із цих чисел і $a = b$, то дозволяється замість числа a написати число $a - b$. Із новим набором чисел можна виконувати таку саму дію і т.д.

а) Доведіть, що через щонайбільше $2 \times 1\,990$ кроків можна домогтися того, щоб серед написаних на дошці чисел 1 990 були нулями.

б) Доведіть, що спочатку можна написати на дошці такі 1 991 чисел, що буде неможливо одержати 1 990 нулів раніше, ніж через $2 \times 1\,990$ кроків.

IX клас

3.31.7. Пара металевих стрижнів, що зварені в кінцях під прямим кутом, утворює один кутик. З $n^2 + n$ кутиків виклали квадратні грати, що складаються з n^2 клітин розміром 1×1. Доведіть, що кількість кутиків, сторони яких напрямлені з вершини праворуч і вверх, дорівнює кількості кутиків, сторони яких напрямлені ліворуч і вниз.

3.31.8. Розв'яжіть рівняння $[x]\cdot\{x\}+x=2\{x\}+10$, де $[x]$ і $\{x\}$ – відповідно ціла та дробова частини числа x.

3.31.9. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC взято точки E, F, G так, що $AE/AB=x$, $BF/BC=y$, $CG/CA=z$. Площа трикутника ABC дорівнює S. Обчисліть площу трикутника EFG.

3.31.10. На площині дано точку O і два однакових квадрати F_1 і F_2 площі S. Фігура F утворена всіма такими точками B, що вектор $\overrightarrow{OB}$ можна записати у вигляді $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$, де точка A_1 належить квадрату F_1, а точка A_2 – квадрату F_2. Знайдіть найменше та найбільше можливі значення площі фігури F залежно від взаємного розташування квадратів F_1 і F_2.

3.31.11. Дано три різних додатних числа a, b, c. Доведіть нерівність $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$.

3.31.12. На сторонах довільного трикутника ABC зовні нього побудовано паралелограми $APQC$, $BMNC$, $AEFB$ так, що чотирикутник $AECK$ також є паралелограмом (K – точка перетину прямих PQ і MN). Доведіть, що площа $AEFB$ дорівнює сумі площ паралелограмів $APQC$ і $BMNC$.

3.31.13. У класі вчаться n учнів. Кожного дня двоє з них чергують. На певний період часу треба так скласти графік чергувань, щоб для будь-яких двох учнів знайшовся день, коли один з цих учнів чергує, а інший – ні. Яку найменшу кількість днів може охоплювати такий графік?

3.31.14. Відомо, що многочлен $2x^3-60x^2+ax$, де a – ціле число, при деяких трьох натуральних послідовних значеннях аргументу x набуває три послідовні натуральні значення. Знайдіть ці значення многочлена.

X клас

3.31.15. Нехай a, b, c – такі невід'ємні числа, що $a+b+c=1$. Доведіть, що для таких чисел виконується нерівність $(1+a)(1+b)\times$ $\times(1+c)\geq(1-a)(1-b)(1-c)$.

3.31.16. Нехай f – многочлен з цілими коефіцієнтами і $f(1\,991)=1$.

а) Доведіть, що не існує таких різних цілих чисел m, n, k, що $f(m)=f(n)=f(k)=0$.

б) Чи залишається твердження а) правильним, якщо обмежитися лише двома цілими числами m і n?

3.31.17. Доведіть, що з будь-якого рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює S, можна вирізати три рівних трикутника, площа кожного з яких більша, ніж $\frac{S}{4}$.

3.31.18. У просторі дано три прямі a, b і c. На прямій a взято точку M_0. З точки M_0 проведено перпендикуляр до прямої b до перетину з нею в точці M_1. З цієї точки M_1 проведено перпендикуляр до прямої c до перетину з нею в точці M_2. З точки M_2 проведено перпендикуляр знову до прямої a до перетину з нею в точці M_3 і т.д. Доведіть, що коли $M_6 = M_0$, то й $M_3 = M_0$.

3.31.19. Усі числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ більші за 1 і для будь якого k, $1 \le k \le n-1$, виконується нерівність $|a_{k+1} - a_k| < 1$. Доведіть, що $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n-1$.

3.31.20. З n^3 одиничних кубиків складено куб з ребром n. Довільно позначено більше, ніж $\frac{3n^2}{2}$ одиничних кубиків. Доведіть, що знайдеться прямокутний трикутник, вершинами якого є центри відмічених кубиків, кожний катет якого паралельний деякому ребру куба.

3.31.21. Делегати з'їзду мають обрати комісію. Кожний делегат обрав десять осіб із списку кандидатур. Делегата влаштовує комісія, якщо в ній є принаймні одна особа, обрана цим делегатом. З'ясувалось, що будь-яких шість делегатів влаштовує деяка комісія із двох осіб. Доведіть, що можна обрати комісію з десяти осіб, яка влаштовує всіх делегатів.

3.31.22. На площині α довільно вибрали точку A і коло. Від кожної точки B кола відклали перпендикуляр до площини α, довжина якого дорівнює квадратові довжини відрізка AB (всі перпендикуляри відкладаються в один бік від площини α). Доведіть, що кінці цих перпендикулярів лежать в одній площині.

3.31.23. В кожній вершині куба сиділа одна муха. Потім всі мухи злетіли та знову сіли в деякому порядку по одній в кожну вершину. Доведіть, що знайдуться три мухи, які в початковому та в кінцевому положеннях були вершинами рівних трикутників.

3.31.24. Див. задачу 3.31.15.

3.31.25. На площині задано три промені зі спільним початком, які розбивають площину на три кути, сума яких дорівнює 360°. Всередині кожного кута позначили по точці. Побудуйте за допомогою циркуля та лінійки трикутник, вершини якого лежать на даних променях (по одній на кожному) і сторони якого проходять через позначені точки.

3.31.26. Таблиця з n рядками та 6 стовпчиками, де $n \geq 2$, заповнена нулями та одиницями так, що всі її рядки різні та разом з будь-якими рядками $a_1, a_2, ..., a_6$ і $b_1, b_2, ..., b_6$ в ній міститься й рядок $a_1b_1, a_2b_2, ..., a_6b_6$. Доведіть, що в якомусь її стовпчику не менше половини цифр нулі.

3.31.27. Див. задачу 3.31.22.

3.31.28. Дано $2n$ чисел з відрізка [1; 2]. Доведіть, що їх можна розбити на дві групи – $a_1, a_2, ..., a_n$ та $b_1, b_2, ..., b_n$ так, що $\frac{n}{n+1} \leq \frac{a_1+...+a_n}{b_1+...+b_n} \leq 1$.

3.31.29. Дано дерев'яну дошку в клітинку розміром $n \times n$. Двоє гравців по черзі роблять пилкою розпили довжиною 1, що йдуть по лініях сітки. Кожний розпил має починатись з вузла сітки на краю дошки або на вже зробленому розпилі. Програє той гравець, після ходу якого дошка розпадеться на дві частини. Хто виграє при правильній грі: той, хто починає, чи його суперник?

3.31.30. Див. задачу 3.31.21.

Олімпіада 32
(*м. Чернігів, 1992 р.*)

VIII клас

3.32.1. Доведіть, що коли для чисел m і n виконується рівність $2m = n^2 + 1$, то число m можна подати у вигляді суми двох квадратів цілих чисел.

3.32.2. Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло, а центр O цього кола лежить всередині чотирикутника. Відомо, що $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Доведіть, що сума довжин перпендикулярів, опущених з точки O на сторони чотирикутника, дорівнює половині периметра чотирикутника $ABCD$.

3.32.3. На кожній грані непрозорого куба написано деяке натуральне число. Якщо кілька граней куба (одну, дві або три) можна побачити одночасно, то виписуємо суму чисел, написаних на цих гранях. Яку максимальну кількість різних чисел можна отримати в такий спосіб?

3.32.4. Відомо, що значення квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ для будь-якого цілого числа x також є цілим числом. Чи обов'язково:

а) хоча б один з коефіцієнтів a, b, c є цілим числом;

б) всі коефіцієнти a, b, c є цілими числами?

3.32.5. На площині дано чотири точки A, B, C і D. Відомо, що з точок A, C, D найближче до B лежить точка A, а із точок A, B, C найближче до D – точка C. Доведіть, що відрізки AB і CD не мають спільних точок.

3.32.6. Доведіть, що коли дійсні числа a, b і c задовольняють умову $a \geq b \geq c > 0$, то виконується нерівність

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a-4b+c.$$

IX клас

3.32.7. Сума всіх членів арифметичної прогресії $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \geq 92$, дорівнює 1 992. Яких значень може набувати сума $a_{19} + a_{92}$ залежно від числа k?

3.32.8. На кожній грані непрозорого куба написано деяке натуральне число. Якщо кілька граней куба (одну, дві або три) можна помітити одночасно, то виписуємо суму чисел, написаних на цих гранях.

а) Доведіть, що на гранях куба можна написати такі числа, щоб усі ці суми були різними.

б) Якщо всі ці суми різні, то якого найменшого значення може набувати найбільша з таких сум?

3.32.9. Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен із цілими коефіцієнтами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Доведіть, що коли жодне з чисел $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(1\,991)$ не ділиться на 1 992, то многочлен $f(x)$ не має цілих коренів.

3.32.10. На даному колі вибрано точку A, а всередині кола – точку D. Для кожного трикутника ABC, вершини B і C якого лежать на даному колі, а сторона BC проходить через точку D, будуємо точку M перетину його медіан. Знайдіть геометричне місце усіх таких точок M.

3.32.11. Двоє гравців по черзі ставлять на клітинки шахової дошки розмірами 25×25 фішки, один – білого, а другий – чорного кольору. Кожна нова фішка ставиться на вільну клітинку, забороняється лише ставити фішку на таку клітинку, для якої на всіх сусідніх із нею клітинках уже стоять фішки цього ж кольору (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону). Програє той, хто не може зробити свій черговий хід. Хто виграє при правильній грі: той, хто починає гру, чи його суперник?

3.32.12. Знайдіть всі прості числа $p \le 1\,000$, для яких $2p+1$ буде степенем натурального числа (тобто виконуватиметься рівність $2p+1=m^n$, де m і n – натуральні числа, $n\ge2$).

3.32.13. Чи можна правильний 1 992-кутник розрізати на паралелограми?

3.32.14. Перевірте, чи проходить коло $x^2+2x+y^2=1\,992$ через точку $A(42;\ 12)$, і доведіть, що це коло містить безліч точок $B(x;\ y)$, координати x і y яких є раціональними числами.

X клас

3.32.15. Доведіть, що коли для натуральних чисел m і n виконується рівність $2m=n^2+1$, то число m можна подати у вигляді суми двох квадратів цілих чисел.

3.32.16. Відрізки AA_1, BB_1 та CC_1 є бісектрисами трикутника ABC. Доведіть, що рівність $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=0$ виконується тоді й тільки тоді, коли трикутник ABC правильний.

3.32.17. Доведіть, що не існує дійсних чисел x, y, z, які б задовольняли систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+4yz+2z=0, \\ x+2xy+2z^2=0, \\ 2xz+y^2+y+1=0. \end{cases}$$

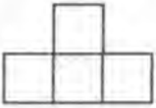
3.32.18. Дано скінченну послідовність a_1, a_2, ..., a_n дійсних чисел. Член a_k цієї послідовності називатимемо "позначеним", якщо серед чисел a_k, a_k+a_{k+1}, ..., $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n$ хоча б одне є додатним. Доведіть, що сума всіх "позначених" чисел буде додатною.

3.32.19. Знайдіть найбільше натуральне число n, для якого нерівність $\sin^n x + \cos^n x > \frac{1}{2}$ виконується для всіх чисел з відрізка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.32.20. Точки A і B лежать на сторонах опуклого многокутника F, а точка A_1 задовольняє співвідношення $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA_1}$. Позначимо через F_1 опуклий многокутник найменшої площі, який містить многокутник F і точку A_1. Доведіть, що площа многокутника F_1 не більша за подвоєну площу многокутника F.

3.32.21. Доведіть, що для будь-яких чисел a, b, c, d з відрізка $[1; 2]$ виконується нерівність $\frac{a+b}{b+c} + \frac{c+d}{d+a} \leq 4\frac{a+c}{b+d}$.

3.32.22. На шаховій дошці розмірами 100×100 розташовано у довільній орієнтації 800 зображених нижче фігурок. Кожна така фігурка повністю накриває чотири клітинки дошки і жодні дві фігурки не накривають одну й ту саму клітинку. Доведіть, що на дошку можна покласти ще одну таку фігурку так, щоб вона повністю накрила чотири вільні клітинки.



XI клас

3.32.23. Чи існує такий набір із 1 991 попарно непаралельних векторів, що має таку властивість: для будь-яких двох векторів цього набору знайдеться третій вектор, який перпендикулярний до цих двох векторів?

3.32.24. Нехай ABC – довільний трикутник. Через точку K, взяту на стороні AB, проведено пряму паралельно стороні AC до перетину зі стороною BC у точці L, і пряму паралельно BC до перетину зі стороною AC у точці M. При якому положенні точки K площа трикутника KML буде найбільшою? Чому дорівнює ця площа, якщо площа трикутника ABC дорівнює S_0?

3.32.25. У кожній вершині правильного 1 992-кутника записано додатне число, причому кожне з цих чисел дорівнює або середньому геометричному, або середньому арифметичному двох чисел, які записано в сусідніх вершинах. Відомо, що серед записаних чисел є число 26. Знайдіть решту записаних чисел.

3.32.26. Доведіть, що число $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ ірраціональне.

3.32.27. Доведіть, що коли $a > b > c$, то виконується нерівність

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$

3.32.28. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти трикутника ABC. Доведіть, що рівність $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$ виконується тоді й тільки тоді, коли трикутник ABC рівносторонній.

3.32.29. Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник $ABCD$. Бічне ребро SA перпендикулярне до площини основи. Площина, яка проходить через вершину A перпендикулярно до ребра SC, перетинає бічні ребра SB, SC, SD у точках B_1, C_1, D_1 відповідно. Доведіть, що навколо многогранника $ABCDB_1C_1D_1$ можна описати сферу.

3.32.30. Див. задачу 3.32.22.

Олімпіада 33
(*м. Рівне, 1993 р.*)

VIII клас

3.33.1. У виразі $(6*5*4*3*2*1)/(8*7)=17$ розставте замість зірочок (*) знаки "+" або "–" так, щоб отримана рівність була правильною.

3.33.2. Розв'яжіть рівняння в натуральних числах:

а) $n^2+S^2(n)=1\,993$;

б) $n^2+S^2(n)=2\,000$, де $S(n)$ – сума цифр числа n.

3.33.3. За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник ABC за його вершиною A, серединою сторони BC і основою перпендикуляра, опущеного з точки B на бісектрису кута BAC.

3.33.4. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$). Коло S з центром у точці O дотикається до прямої BC у точці B та продовження сторони AC за точкою C у точці D. Доведіть, що точка перетину прямих AB і DO лежить на колі S.

3.33.5. Нехай a, b, c – цілі числа, причому $a+b+c=1$. Доведіть, що $(a+bc)(b+ac)(c+ab)$ – квадрат цілого числа.

3.33.6. У кожній клітинці таблиці розмірами 8×8 записано по одиниці. За один крок дозволяється вибрати в таблиці будь-який квадрат 3×3 і збільшити на одиницю кожне з чисел вибраного квадрата. Доведіть, що після 33 кроків в таблиці можна буде знайти квадрат розмірами 4×4, в чотирьох кутових клітинках якого стоять числа, сума яких дорівнює 37.

IX клас

3.33.7. Доведіть, що коли при цілих значеннях x і y значення виразу $(1\,900x + 93y)(1\,900y + 93x)$ ділиться на 1 993, то воно ділиться й на $1\,993^2$.

3.33.8. Див. задачу 3.33.3.

3.33.9. З паперу в клітинку вирізано квадрат розмірами 1 993× ×1 993, з якого потім вирізано одну кутову клітинку. Два гравці по черзі відрізають від цієї фігури по лініях клітинок квадрати довільних розмірів, які відкидаються. Програє той гравець, після ходу якого фігура, що залишилася, є прямокутником довільних розмірів, або ця фігура розпалася на частини (якщо частини мають хоча б одну спільну вершину, вони не розпадаються). Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

3.33.10. Про натуральне число a збереглася інформація лише про його записи в двійковій системі числення – 1*1**** та в п`ятірковій системі числення – 1**1 (зірочки стоять на місці невідомих цифр). Відтворіть це число в десятковій системі числення.

3.33.11. Нехай $D_n(k)$ – це кількість натуральних чисел від 1 до n включно, добуток цифр яких дорівнює k. Порівняйте два числа $D_{1\,993}(16)$ та $D_{1\,993}(32)$.

3.33.12. Відомо, що $a^2+b^2+c^2=1$. Доведіть, що $(a-b)^2+(b-c)^2+$ $+(c-a)^2 \le 3$.

3.33.13. На площині дано коло ω_1, пряму l і точку M на ній. Для кожного кола ω_2, яке дотикається до прямої l у точці M, будуємо точку X перетину спільних зовнішніх дотичних (якщо такі існують) до кіл ω_1 і ω_2. Доведіть, що множина точок X належить двом прямим.

3.33.14. У кожній клітинці таблиці розмірами 8×8 записано число: у 16 клітинках на великих діагоналях – одиниці, а в усіх інших – нулі. За один крок дозволяється вибрати в таблиці будь-який квадрат 3×3 і збільшити на одиницю кожне з чисел вибраного квадрата. Доведіть, що після 121 таких кроків у таблиці можна буде знайти квадрат розмірами 4×4, в чотирьох кутових клітинках якого стоять числа, сума яких дорівнює 125.

X клас

3.33.15. Розв'яжіть рівняння

$$\mathrm{ctg}^2 x = \{\sin^2 x\} + [\cos^2 x],$$

де $\{x\}$ та $[x]$ є відповідно дробова та ціла частини числа x.

3.33.16. Двоє гравців по черзі вписують у прямокутну таблицю розмірами 1 993×1 994 (1 994 стовпчики) числа 0 або 1. Потім знаходять суми чисел кожного рядка й кожного стовпчика. Нехай $S_р$ – найбільша серед сум по рядках, $S_{ст}$ – по стовпчиках. Якщо $S_р > S_{ст}$, то виграє перший, якщо $S_{ст} \geq S_р$, то виграє другий. Хто виграє при правильній грі?

3.33.17. Функція f визначена на множині натуральних чисел і набуває натуральних значень. Чи випливає з того, що $f(x+y) = f(f(x) + f(y))$ для будь-яких x і y те, що при всіх x і y $f(x+y) = f(x+f(y))$?

3.33.18. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B = 72°$. Бісектриса AN і медіана AM перетинають бісектрису BL відповідно у точках E і D. Доведіть, що $LE/DE = BL/LD$.

3.33.19. Доведіть, що для додатних чисел a, b, c значення виразу $a^2b + b^2c + c^2a$ не більше за значення $ab^2 + bc^2 + ca^2$ або не більше за значення $a^3 + b^3 + c^3$.

3.33.20. Дві прямі розбивають квадрат на чотири фігури однакової площі. Доведіть, що точки перетину цих прямих зі сторонами квадрата є вершинами нового квадрата.

3.33.21. Побудуйте такий многочлен із цілими коефіцієнтами (нетотожний нулеві), щоб число $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}$ було його коренем.

3.33.22. Чи існує опуклий п'ятикутник F, відмінний від правильного, такий, що п'ятикутник G, вершинами якого є внутрішні точки перетину діагоналей F, подібний до F?

3.33.23. Нехай m і n – цілі числа. Доведіть, що коли число $(1\,990m+93n)(1\,990n+93m)$ ділиться на 1 993, то воно ділиться і на $1\,993^2$.

3.33.24. Нехай a, b, c – довжини сторін деякого трикутника, p – його півпериметр. Доведіть нерівність

$$\sqrt{a(p-a)}+\sqrt{b(p-b)}+\sqrt{c(p-c)}\le\sqrt{2}p.$$

3.33.25. На площині задано $2n$ точок. Двоє гравців по черзі вибирають по одній точці доти, доки вони не закінчаться. Програє той, у кого сума попарних відстаней між вибраними ним точками менша за відповідну суму суперника. Чи може хтось із гравців забезпечити собі виграш? (Вважати, що всі відстані між даними точками та всі суми попарних відстаней у різних групах точок попарно різні.)

3.33.26. Дано дві перпендикулярні мимобіжні прямі a і b. Вони перетинають три дані різні паралельні площини відповідно у точках A_1 і B_1, A_2 і B_2, A_3 і B_3 . Доведіть, що три сфери, побудовані на відрізках A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 як на діаметрах, перетинаються по одному колу.

3.33.27. Якого найменшого значення може набувати вираз $x^3+y^3+\dfrac{1}{x^2+y^2}$, якщо x і y – дійсні числа, що задовольняють умову $x+y=1$?

3.33.28. На числовій прямій кожній цілій точці поставлено у відповідність деяке дійсне число, причому точці O відповідає число 1,993. Доведіть, що для деяких 100 різних точок модуль суми відповідних чисел більший за 1.

3.33.29. Дано два нерівних кола, які дотикаються одне до одного. У більшому колі проводиться довільний діаметр AB і розглядаються довжини дотичних, проведених із точок A і B до меншого кола. Доведіть, що сума квадратів довжин цих дотичних не залежить від вибору діаметра AB.

3.33.30. У мові племені Мумбо-Юмбо використовуються дві літери М та Ю. Всі слова складаються з 11 літер. Два слова вважаються однаковими тоді й тільки тоді, коли вони мають однакові літери більше, ніж в п'яти місцях. Яка найбільша кількість різних слів може бути у мові племені Мумбо-Юмбо?

Олімпіада 34
(*м. Херсон, 1994 р.*)
VIII клас

3.34.1. Серед 101 монети є одна фальшива, яка відрізняється від інших лише вагою. Чи можна за допомогою двох зважувань на терезах без гир з'ясувати, легша вона чи важча?

3.34.2. У трапецію $ABCD$ вписано коло, яке дотикається до бічних сторін AB і CD у точках відповідно E і F. Доведіть, що $AE \cdot EB = CF \cdot FD$.

3.34.3. Двоє по черзі викреслюють з дошки розмірами $1\,993 \times 1\,994$ одну, дві або три клітинки. Після того, як зроблено $1\,000$ ходів, якщо залишок можна покрити пластинками доміно, то виграв другий гравець, а якщо ні, то – перший. Хто виграє при правильній грі (вкажіть виграшну стратегію)?

3.34.4. Задачник має 200 задач з номерами від 1 до 200. Рівень складності кожної задачі визначається кількістю простих дільників її номера. Скільки всього рівнів складності задач в цьому задачнику і скільки в ньому задач найвищого рівня?

3.34.5. На стороні гострого кута дано точку A. Побудуйте на цій самій стороні точку M таку, що відстань від неї до точки A дорівнює відстані від M до іншої сторони кута.

3.34.6. Каркас куба з ребром 1 намастили медом. Яку найменшу відстань має проповзти жук, щоб злизати увесь мед? (Жук виповзає з вершини.)

IX клас

3.34.7. Про цілі числа a_1, a_2, ..., $a_{1\,994}$ відомо, що сума довільних п'яти чисел, які стоять підряд, додатна. Чи обов'язково буде додатною сума всіх цих чисел?

3.34.8. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $\frac{a}{x} + \frac{a+b}{x+y} + \frac{a+b+c}{x+y+z}$, де a, b, c – довільні дійсні числа з відрізка $[1;2]$, а x, y, z – деяка їх перестановка.

3.34.9. Чи можна прямокутник розмірами а) 1994×4; б) 1994×6 замостити пластинками доміно розмірами 1×2 так, щоб кожна пряма, яка перетинає прямокутник, перетинала хоча б одну пластинку доміно?

3.34.10. Бісектриси зовнішніх кутів опуклого чотирикутника в перетині утворюють новий чотирикутник. Доведіть, що сума діагоналей нового чотирикутника не менша, ніж периметр вихідного чотирикутника.

3.34.11. Чи існує нескінченна арифметична прогресія, яка складається з простих чисел?

3.34.12. Всередині гострокутного трикутника ABC взята точка D така, що $\angle ADB = 180° - \angle ABC$, а $\angle ADC = 180° - \angle ACB$. Доведіть, що точка D лежить на медіані AM трикутника ABC.

3.34.13. Яке з двох чисел більше: $5^{5^{5^{5}}}$ чи $((5!)!)!$?

3.34.14. На площині дано опуклий многокутник і точка O всередині нього. Доведіть, що для будь-якого натурального $n \geq 2$ на межі цього многокутника знайдуться n різних точок A_1, $A_2, \ldots, A_n$ таких, що $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

X клас

3.34.15. Нехай для натуральних чисел k, l і m виконується нерівність $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$. Доведіть, що тоді виконується нерівність $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq \frac{41}{42}$.

3.34.16. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}$, де a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – числа з відрізка $[1;2]$, а b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 – їх перестановка.

3.34.17. На координатній площині взято такий 1994-кутник (необов'язково опуклий), що всі координати його вершин та всі довжини його сторін – цілі числа. Доведіть, що периметр цього 1994-кутника – парне число.

3.34.18. Всередині гострокутного трикутника ABC вибрали точку D так, що $\angle DAC = \angle DBC$. Нехай K та L – основи перпендикулярів, опущених з точки D відповідно на AC і BC. Доведіть, що середини відрізків AB, CD та KL лежать на одній прямій.

3.34.19. Опуклий чотирикутник, площа якого дорівнює одиниці, має дві паралельні сторони. Знайдіть найменше можливе значення довжини більшої діагоналі цього чотирикутника.

3.34.20. Послідовність натуральних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ задовольняє умову: для кожного $k \geq 1$, $a_k < a_{k+1} < a_k + 1\,994$. Доведіть, що існує безліч різних простих чисел, для кожного з яких існує член цієї послідовності, який ділиться на нього.

3.34.21. Дошку розмірами $2n \times 2n$ розбито на клітинки 1×1. Чи можна пофарбувати $2n^2$ клітинок у білий колір та $2n^2$ клітинок – у чорний так, щоб у кожному рядку та у кожному стовпчику було не менше 75 % клітинок одного кольору?

3.34.22. Див. задачу 3.34.14.

XI клас

3.34.23. Сума цифр кожного з двох послідовних 1 994-цифрових чисел a і $a+1$ ділиться на 1 994.

а) Знайдіть суму цифр кожного з чисел a і $a+1$.

б) Доведіть, що існує не менше ніж 100^{100} різних пар $(a; a+1)$ таких чисел.

3.34.24. Із $1\,994^2$ квадратних плиток розмірами 1×1, кожна з яких пофарбована в один із даних k кольорів, треба викласти квадратну мозаїку розмірами $1\,994 \times 1\,994$ таким чином, щоб вона була симетрична відносно однієї з діагоналей квадрата. Для яких k це завжди можна зробити?

3.34.25. Два кола радіусами R і r ($R > r$) дотикаються внутрішнім чином у точці M, а хорда AB більшого кола дотикається до меншого кола. Якого найбільшого значення може набувати периметр трикутника ABM?

3.34.26. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ визначена таким чином: $a_1 = a$ і для кожного $k \geq 1$ виконується рівність $a_{k+1} = a_k(2 - 1\,994 \cdot a_k)$. Для яких значень a послідовність буде обмеженою?

3.34.27. Розв'яжіть рівняння $D(n) \cdot n = \underbrace{111...11}_{1\,994}$, де через $D(n)$ позначено добуток усіх цифр десяткового запису числа n.

3.34.28. Нехай a_1 – найменше натуральне число, для якого $\frac{1}{a_1}<1$, a_2 – найменше натуральне число, для якого $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}<1$, a_3 – найменше натуральне число, для якого $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}<1$ і т. д. Доведіть, що для кожного натурального числа n виконується рівність $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.

3.34.29. У просторі дано три точки P, Q і S. Із точок P і Q проведено два промені, причому кожен із променів, проведених із точки P, перетинає обидва промені, проведені із точки Q. Відомо, що точки A, B, C, D перетину цих променів утворюють чотирикутник одиничної площі і що від піраміди $SABCD$ деякою площиною можна відрізати чотирикутну піраміду $SKLMN$, основа якої $KLMN$ є прямокутником. Доведіть, що об'єм піраміди $SABCD$ не перевищує $\frac{1}{6}PQ$.

3.34.30. Олімпіада проходить у два тури і члени журі поставили завдання: у кожному турі розсадити учасників олімпіади в аудиторіях таким чином, щоб будь-які два учасники хоча б під час одного з турів сиділи в аудиторіях із різною кількістю учасників. Чи може журі зробити це, якщо в олімпіаді бере участь: а) 9 учнів; б) 14 учнів?

Олімпіада 35
(*м. Івано-Франківськ, 1995 р.*)
VIII клас

3.35.1. Доведіть, що коли для деякого числа x виконується рівність $\{8x\}=\{15x\}$, то виконується й рівність $\{26x\}=\{75x\}$ (тут $\{a\}$ – дробова частина числа a).

3.35.2. Спочатку всередині опуклого 1995-кутника взяли кілька точок так, щоб серед узятих точок разом із вершинами не було трьох точок, які лежать на одній прямій, а потім цей многокутник розбили на трикутники з вершинами в узятих точках та вершинах многокутника. Чи може кількість цих трикутників дорівнювати 3 000?

3.35.3. Знайдіть всі цілочислові розв'язки рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{1\,995}.$$

3.35.4. Чи можна у виразі 1*2*3* ...* 1 995 = 1*9*9*5 замінити зірочки "*" знаком "+" або "–" так, щоб отримати вірну рівність?

3.35.5. На сторонах AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ можна взяти відповідно точки M і P так, що $MC \parallel AP$ і $MD \parallel BP$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є трапецією.

3.35.6. а) Чи можна числа 1, 2, 3, ..., 14, 15 розставити по колу таким чином, щоб кожні два сусідні числа відрізнялись на 4, 5, 6 або 7?

б) Чи можна числа 1, 2, 3, ..., 13, 14 розставити по колу таким чином, щоб кожні два сусідні числа відрізнялись на 3, 4 або 5?

IX клас

3.35.7. Нехай m і n – такі натуральні числа, що для всіх натуральних чисел k число $m^{2k}+n^{2k}$ ділиться на 179. Доведіть, що число $m^{1995}+n^{1995}$ також ділиться на 179.

3.35.8. В олімпіаді бере участь 100 школярів. Відомо, що в довільній групі з 99 школярів знайдеться учень, знайомий з усіма членами цієї групи. З'ясуйте, чи обов'язково знайдеться учень, знайомий з усіма учасниками олімпіади.

3.35.9. У трикутнику ABC кут при вершині B дорівнює 120°. Відомо, що $AB > BC$ та M – середина сторони AC. Позначимо через P середину ламаної ABC та через Q – точку перетину прямих BC і PM. Знайдіть величину кута PQB.

3.35.10. Для якого найменшого натурального числа n знайдеться таке натуральне число $m < n$, що в десятковому запису дробу $\frac{m}{n}$ зустрінеться фрагмент 0, ... 1 995...?

3.35.11. На координатній площині зображено три параболи $y = x^2 + p_i x + q_i$, $1 \le i \le 3$. Вони перетинають вісь абсцис відповідно в точках M_1 та M_2, M_2 та M_3, M_3 та M_4. Обчисліть коефіцієнти параболи $y = x^2 + px + q$, що проходить через точки M_1 і M_4.

3.35.12. На площині накреслено два кола з центром у точці O. Знайдіть геометричне місце точок, що є серединами відрізків, один кінець яких належить першому колу, а інший кінець – другому.

3.35.13. Нехай $S(n)$ означає суму цифр числа n. Знайдіть всі натуральні числа n, більші за 1 995, для яких виконується рівність $(S(n))^n = n^{S(n)}$.

3.35.14. На столі стоять п'ять коробок, позначених номерами 0, 1, 2, 3, 4. У коробках з номерами 1, 2, 3, 4 знаходяться відповідно p_1, p_2, p_3 та p_4 сірників. По черзі кожний з двох гравців бере кілька сірників з якоїсь коробки з додатним номером та перекладає їх у коробку, номер якої на одиницю менший. Виграє той гравець, після ходу якого всі сірники будуть в нульовій коробці. Хто виграє при правильній грі: той, хто починає гру, чи його суперник?

X клас

3.35.15. Якого найбільшого значення може набувати вираз $\dfrac{\left[\frac{x}{3}\right]}{\left[\frac{x}{4}\right]}$, якщо дійсне число x задовольняє умову $x \ge 4$?

3.35.16. У кут PCQ вписано два різних кола. Позначимо точку дотику першого кола до сторони CP через A, а точку дотику другого кола до сторони CQ – через B. Коло, описане навколо трикутника ABC, додатково перетинає перше коло в точці L, а друге – у точці K. Пряма CL перетинає перше коло ще в точці M, а пряма CK перетинає друге коло ще в точці T. Доведіть, що $AM \parallel BT$.

3.35.17. На прямій вибрали n різних точок $A_1, A_2, ..., A_n$. Нехай M – множина середин відрізків A_iA_j, $1 \le i < j \le n$. З якої найменшої кількості різних точок може складатися множина M?

3.35.18. Чи існує многочлен вигляду $f(x) = x^{1995} + a_1x^{1994} + ... + a_{1994}x + a_{1995}$ такий, що для всіх x із проміжку $\left[0; 3^{1995}\right]$ виконується нерівність $|f(x)| \le 1$?

3.35.19. Доведіть, що для довільних додатних чисел x та y виконується нерівність

$$\frac{1+3x\sqrt[3]{y}}{y} + \frac{1+3y\sqrt[3]{x}}{x} \ge 8.$$

3.35.20. Чи можна записати по колу числа:

а) 1, 2, 3, ..., 13;

б) 1, 2, 3, ..., 14

так, щоб модуль різниці будь-яких двох сусідніх чисел дорівнював 3, 4 або 5?

3.35.21. Знайдіть всі такі впорядковані трійки натуральних чисел (a,b,n), що $\left(a^2+b^2\right)^{1\,994}=(ab)^n$.

3.35.22. Чи можна вибрати на площині скінченну кількість (більше двох) різних точок так, щоб для будь-яких двох вибраних точок серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями в цих точках проходив рівно через дві інші вибрані точки?

XI клас

3.35.23. Член журі та учасник олімпіади грають у таку гру: кожен з них бере по черзі сірники з купки, в якій перед початком гри було 1 995 сірників. За своїм ходом гравець має взяти 1 або 2 сірники (але не більше, ніж за попереднім своїм ходом). Виграє той, хто бере сірники останнім. Почесне право першого ходу надається учаснику олімпіади. Хто виграє, якщо обидва гравці гратимуть найкращим чином?

3.35.24. Яку найбільшу кількість рівних плоских кутів може мати тетраедр, якщо він не є правильним?

3.35.25. Про натуральні числа m і n відомо, що кожне з чисел $m^{1\,994}+n^{1\,994}$ та $m^{1\,995}+n^{1\,995}$ ділиться на 1 995. Доведіть, що кожне з чисел m і n також ділиться на 1 995.

3.35.26. Див. задачу 3.35.18.

3.35.27. Доведіть, що система

$$\begin{cases}\left[n\sqrt{2}\right]=\left[m\sqrt{3}\right],\\ n\le 1\,995\end{cases}$$

має не менше 700 різних натуральних розв'язків $(m;\ n)$.

3.35.28. Чи існує функція f, яка одночасно задовольняє такі умови:

а) для всіх дійсних чисел x виконується рівність $f(f(x))=-x$;

б) для будь-яких $a<b$ функція f на сегменті $[a;\ b]$ набуває всіх проміжних значень між $f(a)$ та $f(b)$?

3.35.29. Якого найбільшого і якого найменшого значень може набувати добуток xyz, якщо дійсні числа x, y, z задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=6? \end{cases}$$

3.35.30. Вписана в тетраедр $ABCD$ сфера дотикається до граней BCD, ACD, ABD, ABC у точках відповідно A_1, B_1, C_1 і D_1. Відомо, що прямі AB_1 і BA_1 перетинаються. Доведіть, що прямі CD_1 та DC_1 також перетинаються.

Олімпіада 36
(м. Севастополь, 1996 р.)

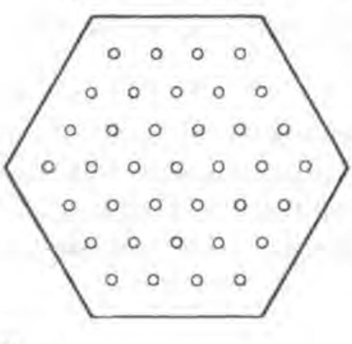
VIII клас

3.36.1. Знайдіть усі трикутники, довжини сторін яких виражаються цілими числами і які мають щонайменше дві сторони такі, що квадрат кожної з них дорівнює сумі двох інших сторін.

3.36.2. Доведіть нерівність

$$\frac{77}{60} < \frac{1}{1\,996} + \frac{1}{1\,997} + \frac{1}{1\,998} + \ldots + \frac{1}{9\,975} < \frac{25}{12}.$$

3.36.3. Чебурашка та Шапокляк по черзі фарбують вузли шестикутної дошки: Чебурашка – червоним кольором, а Шапокляк – зеленим (див. рис.). Шапокляк прагне одержати який-небудь рівносторонній трикутник із вершинами в зелених вузлах, а Чебурашка намагається їй у цьому перешкодити. Чи зможе Шапокляк досягти своєї мети, якщо починає фарбувати: а) Шапокляк; б) Чебурашка?



3.36.4. На дошці хтось позначив усі вершини правильного 1 996-кутника. Яку найменшу кількість вершин треба витерти, щоб жодні чотири з вершин, які залишаться, не були вершинами деякого: а) квадрата; б) прямокутника?

3.36.5. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких число $\left[\dfrac{n^2}{5}\right]$ є простим.

3.36.6. На колі по один бік від прямої l, яка проходить через центр кола, взяли точки C і D. Дотичні до цього кола, проведені в точках C і D, перетинаються в точці P і перетинають пряму в точках відповідно A і B, а центр кола належить відрізку AB. Доведіть, що для основи H перпендикуляра, опущеного з точки P на пряму l, виконується рівність $\angle CHP = \angle PHD$.

IX клас

3.36.7. Іван зробив із дроту по одній моделі кожного трикутника, сторони якого вимірюються цілими числами, а периметр дорівнює 1 993 см. Петро зробив так само для трикутників із периметром 1 996 см. У кого вийшло більше моделей?

3.36.8. Нехай a, b, c – додатні дійсні числа, причому $\sqrt{a}+1 \geq b$, $c > 1$. Доведіть, що $ac + \dfrac{c}{c-1} \geq b^2$.

3.36.9. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC ділить навпіл відрізок, який сполучає середини сторін AD і BC. Доведіть, що вона ділить навпіл і діагональ BD.

3.36.10. Скільки розв'язків у натуральних числах має рівняння $x(x+1) = 2y^2$?

3.36.11. Див. задачу 3.36.5.

3.36.12. Два кола c_1 і c_2 дотикаються зовні в точці M. Прямі l_1 і l_2 дотикаються до кіл c_1 і c_2 у точках відповідно A_1 і A_2 і перетинаються у точці P. Точка M лежить в середині кута A_1PA_2. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника A_1MA_2, лежить на колі, описаному навколо трикутника A_1PA_2.

3.36.13. Із прямокутної клітчастої дошки розмірами $1\,995 \times 1\,997$ випиляли 330 000 п'ятиклітинкових хрестів. Чи завжди після цього з решти дошки можна випиляти ще: а) 1 000 таких хрестів; б) 2 000 таких хрестів?

3.36.14. Для довільних додатних дійсних чисел a, b, c доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

X клас

3.36.15. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{\sin x-\sqrt{\sin x+\cos x}}=\cos x.$$

3.36.16. Три кола ω_1, ω_2, ω_3 зовні дотикаються одне до одного. Нехай A, B, C – це точки дотику кіл відповідно ω_1 і ω_2, ω_2 і ω_3, ω_3 і ω_1. Точки D та E вибрано відповідно на колах ω_1 і ω_2 таким чином, що DB є спільною дотичною до кіл ω_2 та ω_3, а EC – спільною до кіл ω_3 і ω_1. Нехай відрізки DB та EC перетинаються у точці O. Доведіть, що $OA=OB=OC$.

3.36.17. Доведіть, що коли числа a і b натуральні і серед чисел a, b, $\frac{a+b}{1996}$ немає однакових, то ці числа не можуть бути членами однієї геометричної прогресії (необов'язково сусідніми).

3.36.18. Позначимо через S множину всіх точок координатної площини з цілими координатами. Будемо говорити, що взаємно однозначне відображення P на себе зберігає відстань x, якщо для двох довільних точок з S, які знаходяться на відстані x, їх образи також знаходяться на відстані x. Чи правда, що взаємно однозначне відображення зберігатиме будь-яку відстань, якщо воно зберігає: а) відстань 1; б) відстань 2; в) відстані 2 та 3?

3.36.19. Знайдіть усі функції f, визначені на множині дійсних чисел, які набувають дійсних значень та для всіх дійсних x і y задовольняють співвідношення

$$f(x^3-y^3)=(f(x+y))^3.$$

3.36.20. Доведіть нерівність

$$\sin\frac{\pi}{20}+\sin\frac{2\pi}{20}+\ldots+\sin\frac{9\pi}{20}<\frac{99}{10}-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{10}-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{2}{10}-$$
$$-\ldots-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{9}{10}.$$

3.36.21. Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, причому кут AOB більший за $90°$. На променях OA та OB вибрали відповідно точки A_1 і B_1 так, що $A_1B_1 \parallel AB$ та $\angle A_1B_1C=\frac{1}{2}\angle ABC$. Доведіть, що прямі A_1D і B_1C перпендикулярні.

3.36.22. Центр правильного октаедра з'єднано відрізками з центрами всіх його граней. Центр кожної з граней з'єднано відрізками з серединами всіх ребер, які обмежують цю грань. Середину кожного ребра з'єднано відрізками з його кінцями. Доведіть, що кожному з одержаних відрізків можна зіставити число $+1$ або -1 так, щоб добуток чотирьох чисел, які відповідають сторонам довільного просторового чотирикутника з одержаних відрізків, дорівнював -1.

XI клас

3.36.23. Доведіть, що коли дійсні числа x і y належать проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ і задовольняють рівність

$$(1-\sin x)(1-\sin y)=\cos x\cos y,$$

тоді $x=y$.

3.36.24. Доведіть, що існує безліч таких пар натуральних чисел m і n, що кожне з чисел $1\,996m+1$, $1\,996n+1$ і $mn+1$ є точним квадратом.

3.36.25. Послідовність a_0, a_1, a_2, a_3, … дійсних чисел задовольняє умови: $a_0=1$, $a_{499}=0$ і для всіх натуральних n виконується співвідношення $a_{n+1}=2a_1a_n-a_{n-1}$.

а) Доведіть, що $|a_1|\le 1$.

б) Знайдіть $a_{1\,996}$.

3.36.26. На ребрі AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ довільно вибрали точку P. Потім на ребрі AD взяли таку точку Q, що $AP = DQ$. Доведіть, що величина двогранного кута між площинами A_1PC та A_1QC не залежить від вибору точки P.

3.36.27. Доведіть, що для всіх додатних чисел x виконується нерівність

$$\frac{\sin x}{x} + x^2 > 1.$$

3.36.28. У трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці D. Перпендикуляр до цієї бісектриси, проведений через середину M відрізка AD, перетинає пряму BC у точці N. Доведіть, що пряма NA є дотичною до кола, описаного навколо трикутника ABC.

3.36.29. Нехай для всіх дійсних чисел x функція f задовольняє співвідношення

$$(x-1)f(x+1) - (x+1)f(x-1) = 4x(x^2-1).$$

а) Доведіть, що функція f є неперіодичною.

б) Чи може функція f бути многочленом?

в) Чи може функція f бути не многочленом?

3.36.30. Доведіть, що для кожного натурального n кількість $2n$-цифрових чисел, десятковий запис яких містить n цифр 1 і n цифр 2, дорівнює кількості n-цифрових чисел, десятковий запис яких містить лише цифри 1, 2, 3 і 4 (у запису можуть зустрічатися не всі ці цифри), причому цифр 1 і 2 – порівну.

Олімпіада 37
(*м. Одеса, 1997 р.*)

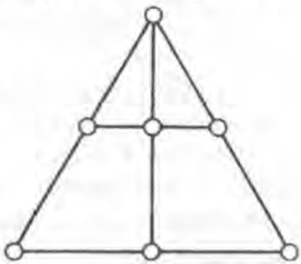
VIII клас

3.37.1. Яке з чисел більше: $4^{4^{4^{4}}}$ чи $5^{5^{5^{5}}}$?

3.37.2. На столі лежать n цукерок. Петрик та Миколка по черзі беруть зі столу кілька цукерок за таким правилом: той з хлопців, хто підходить до столу першим, може взяти одну цукерку, а той, хто підходить до столу другим, – i цукерок, де число i є дільником двійки, той, хто підходить до столу третім, може взяти i цукерок, де число i є дільником трійки, і т. д. Переможцем вважається той з хлопців, якому дістанеться остання цукерка. Хто з них може забезпечити собі перемогу, якщо Петрик бере цукерки першим ?

3.37.3. Дано такі гострокутні трикутники ABC та APQ, точки P і Q яких відмінні від вершин трикутника ABC і належать стороні BC. Доведіть, що центр кола, яке описане навколо трикутника ABC, лежить ближче до прямої BC, ніж центр кола, яке описане навколо трикутника APQ.

3.37.4. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте бісектрису даного кута за умови, що всередині цього кута не дозволяється позначати ніяких окремих точок (дозволяється лише провести саму бісектрису).



3.37.5. Двоє гравців по черзі записують по одному натуральному числу від 1 до 7 у кружечки (див. рис.), причому кожне з чисел повинно бути записане тільки один раз. Після заповнення всіх кружечків обчислюються суми чисел вздовж кожної з прямих, що зображено на рисунку. Якщо серед отриманих сум є принаймні три однакові, то переможцем визнається перший гравець, у протилежному випадку – другий. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу: той, хто починає гру, чи його суперник ?

3.37.6. Знайдіть всі натуральні числа n, для яких $2^n - n^2$ ділиться на 7.

IX клас

3.37.7. На столі лежать чотири яблука масою 600, 400, 300 і 250 г. Двоє суперників по черзі підходять до столу і беруть по одному яблуку, а потім по команді починають їсти. Наступне яблуко дозволяється брати гравцю тільки після того, як він з'їв попереднє. Швидкість "поїдання" однакова в обох суперників. Як має поводитися той, хто починає гру, щоб з'їсти якомога більше ? (Вказати, яку найбільшу кількість грамів може забезпечити собі той, хто починає гру, при протидії суперника.)

3.37.8. Знайдіть всі значення x, для яких виконується рівність

$$9^x + 4^x + 1 = 6^x + 3^x + 2^x.$$

3.37.9. У трикутник ABC вписане коло, яке дотикається до сторін AB, BC і CA у точках відповідно M, N і K. Пряма l проходить через середину D сторони CA паралельно прямій MN та перетинає прямі BC і BA у точках відповідно T і S. Доведіть, що $TC = KD = AS$.

3.37.10. Чи існує таке натуральне число a, що кожне з чисел $a, 2a, 3a, ..., 1\,997a$ є степенем натурального числа з більшим за одиницю натуральним показником?

3.37.11. Знайдіть найменше натуральне число, яке принаймні двома різними способами можна подати у вигляді $19m + 97n$, де m, n – деякі натуральні числа.

3.37.12. Клітинки довільної прямокутної дошки розфарбовано в шаховому порядку. В кожну клітинку записане деяке ціле число, причому в кожному рядку та в кожному стовпчику сума всіх чисел є парним числом. Доведіть, що парними числами є сума всіх чисел, які розташовані в клітинках білого кольору, та сума всіх чисел, які розташовані в клітинках чорного кольору.

3.37.13. Доведіть, що для кожного натурального числа n виконується нерівність

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ двійок}} + \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}}}_{n \text{ шісток}} < 5.$$

3.37.14. Відомо, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не є рівними, але $AC = A_1C_1 = b$, $BC = B_1C_1 = a$ і $BH = B_1H_1$, де BH і B_1H_1 – відповідні висоти трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $a \cdot AB + b \cdot A_1B_1 \le \sqrt{2}(a^2 + b^2)$.

X клас

3.37.15. Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9} + \dfrac{1}{x^2 - 6x + 21} + \cos 2\pi x$ на проміжку $(0; +\infty)$.

3.37.16. Кожну сторону правильного трикутника поділено точками на 1 997 рівних відрізків, і кожну вершину цього трикутника з'єднано відрізками з усіма точками поділу відповідної протилежної сторони. Скільки при цьому всередині вихідного трикутника утвориться точок перетину проведених відрізків ?

3.37.17. Дано таку числову послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ та $a_{n+3} = -a_n - a_{n+1}$ для всіх натуральних n. Доведіть, що ця послідовність є необмеженою, тобто для кожного числа M існує таке натуральне число n, що $|a_n| > M$.

3.37.18. У просторі розташовані два правильні п'ятикутники $ABCDE$ та $AEKPL$ так, що $\angle DAK = 60°$. Доведіть, що площини ACK та ALB є взаємно перпендикулярними.

3.37.19. Див. задачу 3.37.11.

3.37.20. Розв'яжіть у дійсних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{1\,997} = 1\,997, \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{1\,997}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{1\,997}^3. \end{cases}$$

3.37.21. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина сторони BC, N – довільна точка сторони AD. Нехай P – точка перетину відрізків MN та AC, а Q – точка перетину відрізків AM і BN. Доведіть, що площі трикутників BDQ та DMP рівні.

3.37.22. Позначимо через $d(n)$ найбільший непарний дільник натурального числа n та визначимо на множині всіх натуральних чисел функцію f наступним чином: $f(2n-1) = 2^n$, $f(2n) = n + \dfrac{2n}{d(n)}$ для всіх натуральних n. Знайдіть всі такі натуральні k, що $f^{(k)}(1) = 1\,997$ (тут $f^{(k)}$ є k-ою ітерацією функції f : $f^{(k)} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ разів}}$).

XI клас

3.37.23. Дано паралелограм $ABCD$, в якому $AB = 1$. Відомо, що на його стороні AD є така точка K, що $KD = 1$, $\angle ABK = 90°$, $\angle DBK = 30°$. Знайдіть довжину відрізка AD.

3.37.24. Доведіть, що серед будь-яких чотирьох попарно різних чисел з інтервалу $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ можна вибрати два таких числа x та y, щоб виконувалася нерівність

$$8\cos x\cos y\cos(x-y)+1>4(\cos^2 x+\cos^2 y).$$

3.37.25. У просторі дано 1 997 точок, для яких обчислені всі попарні відстані. Нехай m і M є відповідно найменшим і найбільшим з цих чисел. Доведіть, що $M>9m$.

3.37.26. Відомо, що рівняння (відносно змінної x) $ax^3+bx^2+cx+d=0$ має три попарно різні дійсні корені. Скільки різних дійсних коренів має рівняння

$$4(ax^3+bx^2+cx+d)(3ax+b)=(3ax^2+2bx+c)^2\ ?$$

3.37.27. Знайдіть всі дійсні x, для яких виконується рівність

$$(2+\sqrt{3})^x+1=(2\sqrt{2+\sqrt{3}})^x.$$

3.37.28. Нехай Q_+ – множина всіх додатних раціональних чисел. Знайдіть всі такі функції $f:Q_+\to Q_+$, що для довільного $x\in Q_+$ виконуються рівності $f(x+1)=f(x)+1$ та $f(x^2)=(f(x))^2$.

3.37.29. Знайдіть найменше натуральне число n, яке має наступну властивість: серед будь-яких n цілих чисел можна вибрати вісімнадцять чисел таким чином, щоб їх сума ділилася на 18.

3.37.30. На ребрах AB, BC, CD, DA довільного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено точки відповідно K, L, M, N. Доведіть, що центри сфер, описаних навколо тетраедрів A_1AKN, B_1BKL, C_1CLM, D_1DMN, є вершинами паралелограма.

Олімпіада 38
(*м. Миколаїв, 1998 р.*)
VIII клас

3.38.1. В сім'ї, яка складається з п'яти осіб (тато, мати та троє дітей), помітили, що коли перемножити вік усіх членів сім'ї, то отримаємо число 1 998. Визначіть вік кожного з членів сім'ї, якщо відомо, що тато старший за матір на десять років.

3.38.2. Площину вимощено однаковими правильними шестикутниками, серед яких довільно позначених 1 998 шестикутників. Доведіть, що серед позначених шестикутників можна вибрати 666 таких, що жодні два з них не мають спільних вершин.

3.38.3. На дошці розмірами $n \times n$ $(n \geq 2)$ у лівій нижній кутовій клітинці стоїть фішка. За один хід гравець може перемістити її на одну клітинку праворуч або на одну клітинку вгору, або на одну клітинку по діагоналі праворуч вгору. Двоє гравців по черзі роблять такі ходи, а переможцем вважається той, хто поставить фішку в правий верхній кут дошки. Хто з двох гравців може забезпечити собі перемогу: той, хто починає гру, чи його суперник?

3.38.4. Знайдіть чотири останні цифри числа $1\,997 \cdot 5^{1\,998}$ у його десятковому запису.

3.38.5. На площині задані пряма l та точки A і B, які лежать по один бік відносно прямої l. За допомогою циркуля та лінійки побудувати точку C таким чином, щоб пряма l перетинала відрізки AC і BC у точках відповідно M і N таких, що відрізок BM є висотою, а відрізок AN – медіаною трикутника ABC.

3.38.6. Доведіть, що в клітинку прямокутної таблиці розмірами 5×120 (5 стовпчиків та 120 рядків) можна вписати числа, кожне з яких належить множині $\{1;2;3;4;5\}$, таким чином, щоб одночасно виконувалися такі умови:

1) всі числа в кожному з рядків є попарно різними;
2) всі рядки попарно різні;
3) вихідну таблицю можна розділити на 24 таблиці розмірами 5×5 так, щоб, не повертаючи їх, можна було скласти таблицю 120×5 (120 стовпчиків та 5 рядків), в якій всі стовпчики попарно різні.

IX клас

3.38.7. Чи існує на координатній площині трикутник, у якому обидві координати всіх вершин, точки перетину медіан, висот, бісектрис та серединних перпендикулярів до його сторін є цілими числами?

3.38.8. Сторона AD чотирикутника $ABCD$ збігається з діаметром описаного навколо нього кола. За допомогою циркуля та лінійки побудувати який-небудь вписаний до цього кола трикутник, площа якого дорівнює площі даного чотирикутника.

3.38.9. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c, які задовольняють рівність $abc = 1$, виконується нерівність

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3.$$

3.38.10. Дано такі дійсні числа $x, y \geq 1$, що для кожного натурального числа n виконується рівність $\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{[nx]}{[ny]}$. Доведіть, що $x = y$ або x і y є натуральними числами, причому x ділиться на y.

3.38.11. Доведіть, що не існує таких цілих чисел x та y, для яких виконується рівність

$$x^3 - x = y^2 - 19y + 98.$$

3.38.12. Доведіть, що сума квадратів довжин медіан довільного трикутника не менша за квадрат його півпериметра.

3.38.13. Двоє гравців по черзі вписують у клітинки дошки розмірами $n \times n$ по одному натуральному числу згідно з такими правилами: перший гравець має право записати в клітинку найбільший спільний дільник номера рядка та номера стовпчика, на перетині яких знаходиться дана клітинка, а другий гравець має право записати в клітинку найбільше спільне кратне номера рядка та номера стовпчика, на перетині яких знаходиться клітинка. Після заповнення дошки кожне число ділиться на номер стовпчика, в якому воно розташоване, а потім підраховується добуток всіх отриманих чисел. Якщо цей добуток є меншим за одиницю, то переможцем вважається перший гравець, в іншому випадку – другий. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу: той, хто починає гру, чи його суперник ?

3.38.14. На площині дано опуклий 2 000-кутник. Доведіть, що на площині можна позначити 1 998 точок так, щоб кожен трикутник, вершини якого є вершинами даного 2 000-кутника, містив всередині (але не на сторонах) рівно одну з позначених точок.

X клас

3.38.15. Знайдіть всі пари дійсних чисел x і y, для яких виконується рівність

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

3.38.16. На стороні AC трикутника ABC обрано точку M. Нехай O – точка перетину перпендикулярів, які проведено з середин відрізків AM і MC відповідно на прямі BC і AB. Визначте, при якому положенні точки M довжина відрізка OM набуває найменшого значення.

3.38.17. На прямій задано скінченний набір відрізків, котрий задовольняє таку умову: серед будь-яких 1 998 відрізків даного набору знайдуться два таких, що мають принаймні одну спільну точку. Доведіть, що на цій прямій можна позначити 1 997 точок таким чином, щоб будь-який відрізок зазначеного набору містив хоча б одну з цих точок.

3.38.18. Функція f задана на проміжку $[1;+\infty)$ та при всіх $x \geq 1$ задовольняє умову $\frac{f(2x)}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq x$. Доведіть, що для кожного $x \geq 1$ виконується нерівність $f(x) < \sqrt{2x}$.

3.38.19. Нехай m є найменшим з чотирьох чисел $1, x^9, y^9, z^7$ ($x, y, z \geq 0$). Доведіть, що $m \leq xy^2z^3$.

3.38.20. Нехай відрізки AB і CD є діаметрами кола з центром у точці O. Точка M належить меншій з дуг CB. Прямі MA і MD перетинають хорду CB у точках відповідно P і Q. Доведіть, що сума площ трикутників CPM і MQB дорівнює площі трикутника DPQ.

3.38.21. Барон Мюнхгаузен стверджує, що довільну кількість гостей він зможе розселити по кімнатах свого будинку так, що в кожній кімнаті або всі гості будуть попарно знайомі, або попарно не знайомі. Чи правду каже барон? (Вважається, що в кожній кімнаті можна поселити довільну кількість гостей, але кількість кімнат у будинку Мюнхгаузена є скінченною.)

3.38.22. Знайдіть всі пари таких многочленів f і g, що для всіх дійсних значень x, y виконується рівність $f(xy) = f(x) + g(x)f(y)$.

XI клас

3.38.23. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{1+\{2x\}} = \left[x^2\right] + 2[x] + 3.$$

3.38.24. Висота CD трикутника ABC перетинає його бісектрису BK у точці M, а висоту KL трикутника BKC – у точці N. Коло, яке описане навколо трикутника BKN, перетинає пряму AB у відмінній від B точці P. Доведіть, що трикутник KPM є рівнобедреним.

3.38.25. Доведіть, що для будь-яких чисел $x, y, z \in (0;1]$ виконується нерівність

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz} \le \frac{3}{x+y+z}.$$

3.38.26. Задано таку функцію $f:[0;1] \to [0;1]$, що для $x, y \in [0;1]$ за умови $f(x)+y \in [0;1]$ виконується рівність $f(f(x)+y)=f(x)+f(y)$. До того ж відомо, що існує таке число $\lambda \in (0;1)$, що $f(\lambda) \ne 0$ і $f(\lambda) \ne \lambda$. Наведіть приклад такої функції f та доведіть, що для будь-якого $x \in [0;1]$ $f^{(19)}(x)=f^{(98)}(x)$ (де $f^{(k)}$ є k-ою ітерацією функції f: $f^{(k)} = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k \text{ разів}}$).

3.38.27. Визначте, скільки дійсних коренів має рівняння

$$\frac{2}{\pi}\arccos x = \sqrt{1-x^2}+1.$$

3.38.28. На дошці записані числа 1, 1 998, 1 999. За один крок дозволяється витерти одне з чисел і замість нього записати різницю між його квадратом та потроєним добутком двох інших чисел. Чи можна за допомогою кількох таких кроків із початкового набору отримати трійку чисел, сума яких дорівнює нулеві?

3.38.29. Дві кулі ω_1 та ω_2 нерівних радіусів дотикаються зовні в точці P. Дано такі відрізки AB і CD, що перша з куль дотикається до них у точках A і C, а друга – у точках B і D. Нехай M і N – ортогональні проекції середин відрізків AC і BD відповідно на пряму, що проходить через центри даних куль. Доведіть, що $PM = PN$.

3.38.30. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – така числова послідовність, що $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{n^2}{x_n}+\dfrac{x_n}{n^2}+2$, $n \ge 1$. Доведіть, що: а) $x_{n+1} \ge x_n$ при всіх $n \ge 4$; б) $[x_n] = n$ при всіх $n \ge 4$.

Олімпіада 39
(*м. Запоріжжя, 1999 р.*)

VIII клас

3.39.1. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2|x|+|y|=1, \\ \left[|x|\right]+\left[2|y|\right]=2. \end{cases}$$

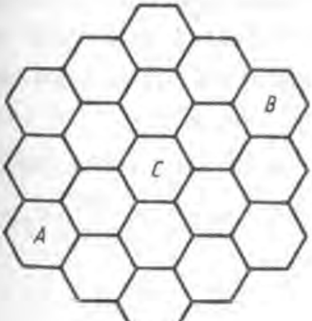
3.39.2. Чи можна в клітинки таблиці розмірами 7×7 записати цілі числа так, щоб сума чисел у всіх квадратах розмірами 2×2 та 3×3 ділилася на 1 999, а сума всіх чисел таблиці не ділилась на 1 999?

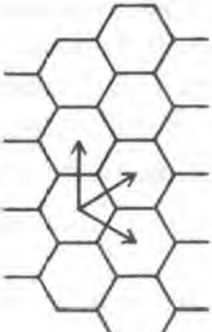
3.39.3. Чи існує таке 2 000-значне число n, яке є квадратом натурального числа і десятковий запис якого містить принаймні 1 999 п'ятірок?

3.39.4. Чи можна число 19 991 999 подати у вигляді n^4+m^3-m, де n і m – деякі цілі числа?

3.39.5. Всередині ромба $ABCD$ позначили точку N таким чином, що трикутник BNC є рівностороннім. Нехай K – точка перетину бісектриси кута ABN з відрізком AC. Доведіть, що $BK=KN+ND$.

3.39.6. Розглянемо фігуру "соняшник", яка складається з дев'ятнадцяти клітинок, кожна з яких є правильним шестикутником. У цій фігурі позначили три клітинки A, B і C (див. перший рисунок). У клітинці A розташована фішка. За один хід її можна пересунути на одну клітинку в одному з трьох напрямів, які вказані на другому рисунку. Скількома різними шляхами фішка може потрапити з клітинки A до клітинки B, якщо їй забороняється бувати у клітинці C?





3.39.7. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $\left|x^2 + xy\right| > \left|x^2 - xy\right|$.

3.39.8. Нехай x та y – такі додатні числа, для яких справджується умова $(x-1)(y-1) \geq 1$. Доведіть, що для довжин сторін a, b, c довільного трикутника виконується нерівність $a^2 x + b^2 y > c^2$.

3.39.9. Доведіть, що число 9 999 999 + 1 999 000 є складеним.

3.39.10. Бісектриси внутрішніх кутів A, B і C трикутника ABC перетинають коло ω, яке описане навколо цього трикутника, у відмінних від вершин точках відповідно A_1, B_1 і C_1. Нехай P – точка перетину прямих B_1C_1 і AB, Q – точка перетину прямих B_1A_1 та BC. Як за допомогою циркуля та лінійки відновити трикутник ABC, якщо коло ω і точки P та Q вже побудовано, і відомо з якого боку від прямої PQ лежить вершина B?

3.39.11. Розв'яжіть рівняння

$$[x] + \frac{1\,999}{[x]} = \{x\} + \frac{1\,999}{\{x\}}.$$

3.39.12. Знайдіть всі пари натуральних чисел k і l, для яких виконується рівність $\frac{k^l}{l^k} = \frac{k!}{l!}$.

3.39.13. Через фіксовану точку M, яка розташована всередині кола, проведено дві взаємно перпендикулярні хорди AC і BD. Нехай K і L – середини відрізків відповідно AB і CD. Доведіть, що значення виразу $AB^2 + CD^2 - 2KL^2$ не залежить від того, яким саме чином проведено через точку M хорди AC і BD.

3.39.14. Задано таку послідовність натуральних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $a_{a_n} + a_n = 2n$ для всіх натуральних n. Доведіть, що $a_n = n$ для всіх $n \in N$.

3.39.15. Розв'яжіть рівняння

$$\sin x \sin 2x \sin 3x + \cos x \cos 2x \cos 3x = 1.$$

3.39.16. Точка M лежить всередині трикутника ABC. Пряма, яка паралельна стороні AC і проходить через точку M, перетинає сторону AB у точці N, а сторону BC – у точці K. Пряма, яка паралельна стороні AB і проходить через точку M, перетинає сторону AC у точці D. Пряма, що паралельна стороні BC і проходить через точку M, перетинає сторону AC у точці L. Ще одна пряма проходить через точку M і перетинає сторони AB і BC у точках відповідно P і R, причому $PM = MR$. Точка Q ділить відрізок DL навпіл. Знайдіть площу трикутника PQR, якщо $\frac{CK}{CB} = a$, а площа трикутника ABC дорівнює S.

3.39.17. Нехай P – многочлен з цілими коефіцієнтами. Послідовність цілих чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє такі умови: $a_1 = a_{2\,000} = 1\,999$, $a_{n+1} = P(a_n)$ для всіх натуральних n. Знайдіть значення виразу

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{1\,999}}{a_{2\,000}}.$$

3.39.18. Двоє гравців по черзі записують у рядок цілі числа таким чином: перший записує довільне число a_1, а другий – довільне число a_2, і далі кожен по черзі записує число, яке дорівнює сумі двох попередніх. Гра закінчується тоді, коли в отриманій послідовності $a_1, a_2, a_3, \ldots$ вперше зустрінуться такі значення індексів i, j ($i \neq j$), що числа $a_i - a_j$ та $a_{i+1} - a_{j+1}$ ділитимуться на 1 999. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш ?

3.39.19. Знайдіть значення виразу

$$[\pi] + \left[\frac{[2\pi]}{2}\right] + \left[\frac{[3\pi]}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{[1\,999\pi]}{1\,999}\right].$$

3.39.20. Знайдіть всі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність

$$m^3 - n^3 = 7mn + 5.$$

3.39.21. Нехай $x_1, x_2, ..., x_6 \in [0;1]$. Доведіть, що виконується нерівність $\frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + ... +$
$+ ... + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + 5} \le \frac{3}{5}$.

3.39.22. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC, O – довільна точка всередині трикутника $A_1B_1C_1$. Позначимо через M, N, P, Q, R і S основи перпендикулярів, які проведено з точки O на прямі відповідно AA_1, BC, BB_1, CA, CC_1 і AB. Доведіть, що прямі MN, PQ і RS перетинаються в одній точці.

XI клас

3.39.23. Розв'яжіть рівняння

$$(\sin x)^{1998} + (\cos x)^{-1999} = (\cos x)^{1998} + (\sin x)^{-1999}.$$

3.39.24. Знайдіть усі значення параметра k, за яких система нерівностей

$$\begin{cases} ky^2 + 4ky - 2x + 6k + 3 \le 0, \\ kx^2 - 2y - 2kx + 3k - 3 \le 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

3.39.25. Про паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що всі його грані – ромби, а всі плоскі кути при вершині A рівні між собою. На ребрах A_1B_1, DC, BC і A_1D_1 позначили точки відповідно M, N, P і Q так, що $A_1M = BP$ і $DN = A_1Q$. Знайдіть кут між лініями перетину площини A_1BD з площинами AMN і APQ.

3.39.26. Див. задачу 3.39.18.

3.39.27. а) Чи можна число 19 991 998 подати у вигляді n^4+m^3-m, де n і m – цілі числа? б) Чи можна число 19 991 999 подати у вигляді n^4+m^3-m, де n і m – цілі числа?

3.39.28. Знайдіть всі такі функції $f:R\to R$, що $f(xy)+f(xz)-f(x)f(yz)\geq 1$ для всіх дійсних x,y,z.

3.39.29. Нехай функція $f(x)=\mathrm{tg}(a_1x+1)+\mathrm{tg}(a_2x+1)+...+\mathrm{tg}(a_{10}x+1)$, де $a_1,a_2,...,a_{10}$ – деякі додатні числа, має період $T>0$. Доведіть, що $T\geq\frac{\pi}{10}\min\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},...,\frac{1}{a_{10}}\right\}$.

3.39.30. Див. задачу 3.39.22.

Олімпіада 40
(м. Суми, 2000 р.)
VIII клас

3.40.1. Нехай k_1, k_2, ..., k_n – довільна перестановка чисел 1, 2, ..., n. Доведіть, якщо n є непарним числом, то добуток $(k_1-1)(k_2-2)\cdots(k_n-n)$ є парним числом.

3.40.2. Дано дійсні числа $a\geq 1$ та $b\geq 1$ такі, що

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Доведіть, що $a=b$.

3.40.3. Знайдіть усі четвірки натуральних чисел k, l, m, n, більші за 1, які задовольняють рівняння

$$k^l+k^m-k^n=2\,000.$$

3.40.4. Побудуйте на координатній площині множину всіх точок $(x;y)$, які задовольняють співвідношення

$$3|x|+3|y|=\big||x|-|y|\big|+6.$$

3.40.5. У трикутнику ABC провели медіану BM і бісектрису BL (точки M і L не збігаються). На прямій BM позначили точку E

таку, що $LE \parallel BC$. З точки E опустили перпендикуляр ED на пряму BL. Доведіть, що $MD \parallel AB$.

3.40.6. Двоє гравців по черзі виписують послідовно числа

$$*1,\ *2,\ *3,\ \ldots,$$

ставлячи замість зірочок знаки "+" або "–" на власний вибір. Гравець вважається переможцем, якщо після його ходу у виписаному рядочку знайдуться кілька послідовно розташованих чисел, сума яких ділиться на 2 000. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу, і якщо так, то хто саме: перший чи другий?

IX клас

3.40.7. Відомо, що число $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ділиться на 37. Визначте, чи обов'язково ділитиметься на 37 число $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_1}$?

3.40.8. Кола ω_A та ω_B дотикаються внутрішнім чином до кола ω у точках відповідно A і B (причому відрізок AB не є діаметром кола ω) та перетинаються в двох інших точках C і D. Прямі AB і CD перпендикулярні. Доведіть, що радіуси кіл ω_A та ω_B є однаковими.

3.40.9. Визначте, яку максимальну кількість трицифрових натуральних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне з них не містило однакових цифр, та будь-які два з утворених чисел мали не більше однієї спільної цифри.

3.40.10. Знайдіть всі натуральні числа, які в 2 000 разів більше суми цифр у своєму десятковому запису.

3.40.11. Знайдіть всі цілі числа n, для яких число $n^2+19n+99$ є квадратом цілого числа.

3.40.12. Доведіть, що для довільних додатних чисел a та b виконується нерівність

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{3a^2b}+\frac{1}{3ab^2}+\frac{1}{b^3}\geq\frac{64}{3(a+b)^3}.$$

3.40.13. Дано трикутник ABC, навколо якого описано коло. Нехай точки, в яких продовження медіан трикутника ABC вдруге перетинають це коло, є вершинами рівностороннього трикутника. Доведіть, що трикутник ABC також є рівностороннім.

3.40.14. Чи існують такі натуральні числа k, m і n, більші за одиницю, що прямокутна дошка розмірами $m \times n$ мала б одночасно такі властивості:

1) її можна по лініях сітки розрізати на $\frac{mn}{k}$ прямокутників розмірами $1 \times k$;

2) з неї можна по лініях сітки вирізати $\frac{mn}{k}-1$ прямокутник розмірами $1 \times k$ таким чином, щоб у залишку утворилася відмінна від прямокутника розмірами $1 \times k$ k-клітинкова фігура, в якій будь-які дві клітинки можна сполучити шляхом шахової тури (котрий "проходить" тільки по клітинках даної фігури)?

X клас

3.40.15. Відомо, що для функції f при всіх дійсних значеннях x виконується рівність $f(x+2)=\frac{f(x)}{5f(x)-1}$, причому $f(0)=2$. Знайдіть $f(2\,000)$.

3.40.16. Дано числа $\alpha, \beta \in [0; \pi]$, для яких виконується рівність $\cos\alpha+\cos\beta=-1$. Доведіть, що при цьому має місце нерівність $1 \le \sin\alpha+\sin\beta \le \sqrt{3}$.

3.40.17. На дошці записано n одиниць. За один крок дозволяється витерти будь-які два з написаних чисел (нехай це a і b) та замість них записати число $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Цю операцію повторюють, доки на дошці не залишиться одне число. Доведіть, що це число буде не меншим за $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.40.18. Гострокутний трикутник PNK вписано в коло. Діаметр NM цього кола перетинає сторону PK у точці A. На меншій з дуг PN обрано довільну точку H і навколо трикутника PAH описано коло, яке перетинає прямі MN і PN у точках відповідно B і D. На відрізку BN як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає прямі PN і NK у точках відповідно F і Q. Відрізок FQ перетинає діаметр MN у точці C. Пряма CD перетинає коло, яке описане навколо трикутника PAH, у точці E, що відмінна від D. Доведіть, що точки H, E, N лежать на одній прямій.

3.40.19. Доведіть, що для будь-якого цілого числа $n \geq 0$ число $X = 1\underbrace{0...0}_{\substack{3n+2\\ \text{нулів}}}1\,\underbrace{9...9}_{\substack{2n+2\\ \text{дев'яток}}}$ ділиться на $Y = 1\underbrace{0...0}_{n\text{ нулів}}1$.

3.40.20. Розв'яжіть систему рівнянь

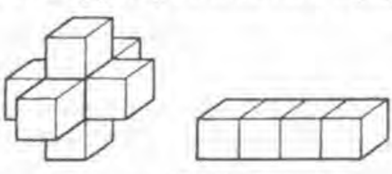
$$\begin{cases} x+y+1=\dfrac{12(x+y)}{5\sqrt{x}}, \\ x+y-1=\dfrac{4(x+y)}{5\sqrt{y}}. \end{cases}$$

3.40.21. Паралелограм $ABCD$ і ромб $AB_1C_1D_1$ мають спільний кут A. Відомо, що пряма BD паралельна прямій CC_1. Нехай P – точка перетину прямих AC і B_1C_1, а Q – точка перетину прямих AC_1 і CD. Доведіть, що кут AQP є прямим.

3.40.22. У деякий момент часу в точці O, яка є початком прямокутної системи координат xOy, знаходиться вірус грипу. Через одну хвилину він розпадається на чотири таких самих віруси, кожен з яких у ту ж мить пересувається в даній системі координат на одиницю довжини: один – догори, другий – донизу, третій – ліворуч і четвертий – праворуч. Таке перетворення відбувається щохвилини з кожним вірусом. Якщо в деякий момент часу в одній точці опиняються два або більше вірусів, то всі вони миттєво взаємознищуються. Розглянемо такий процес від початкового (нульового) моменту часу до моменту в 2 000 хв включно. Скільки разів в інтервалі часу 1...2 000 хв включно загальна кількість вірусів набуватиме свого найменшого значення?

XI клас

3.40.23. Дитячий конструктор складається з фігурок вигляду



(ліва фігурка утворена з семи кубиків розмірами $1\times1\times1$, а права – з чотирьох таких кубиків). Чи можна за допомогою цих фігурок скласти куб розмірами $11\times11\times11$, що не матиме порожнин?

3.40.24. Чи існує функція $f:R\to R$, яка задовольняє три наступні умови:

1) f диференційовна на R;

2) $f'(2\,000)=1$;

3) $(f(2\,000+x))^3=(f(2\,000-x))^2+x$ для всіх $x\in R$?

3.40.25. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти трикутника ABC. Точки дотику кола, вписаного в трикутник $A_1B_1C_1$, позначимо відповідно через A_2, B_2, C_2. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці.

3.40.26. Чи існують цілі числа m і n такі, що число $\dfrac{m^2+1}{n^2-1}$ ціле?

3.40.27. Знайдіть найменше значення функції

$$f(x)=16x^2-10\sin^2 x+\frac{81\pi^2}{x^2}$$

на всій області визначення.

3.40.28. Чи існує такий тетраедр $ABCD$, в якому $AB=AC==AD=BC$, а суми плоских кутів при вершинах B і C дорівнюють по $150°$?

3.40.29. Нехай a, b, c – невід'ємні дійсні числа такі, що $a+b+c=3$. Доведіть, що

$$2(a^3b+b^3c+c^3a)\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a-1).$$

3.40.30. У деякий момент часу в точці O, яка є початком прямокутної системи координат xOy, знаходиться вірус грипу. Через одну хвилину він розпадається на чотири таких самих віруси, кожен з яких у ту ж мить пересувається у даній системі координат на одиницю довжини: один – догори, другий – донизу, третій – ліворуч і четвертий – праворуч. Таке перетворення відбувається щохвилини з кожним вірусом. Якщо в деякий момент часу в одній точці опиняються два або більше вірусів, то всі вони миттєво взаємознищуються. Розглянемо такий процес від початкового (нульового) моменту часу до моменту в 2 000 хв включно.

а) Скільки разів в інтервалі часу 1...2 000 хв включно загальна кількість вірусів набуватиме свого найменшого значення?

б) Скільки вірусів існуватимуть у момент часу 2 000 хв (відразу після взаємознищення вірусів у цей момент часу)?

Соросівські олімпіади

Олімпіада 1

Перший етап

IX клас

С.1.1. Множину з дванадцяти чисел $A = \{3, 4, 5, ..., 13, 14\}$ розбийте на дві множини B та C з шести чисел кожну так, щоб виконувалася умова: для будь-яких двох різних чисел з B їх сума не належить B і для будь-яких двох різних чисел з C їх сума не належить C.

С.1.2. Дано правильний 72-кутник. Льоня та Костя грають у гру "Отримай правильний трикутник". Вони по черзі відмічають олівцем по одній ще невідміченій вершині 72-кутника: Льоня – червоним, Костя – синім. Починає гру Льоня, а виграє той, хто першим відмітить своїм кольором три вершини, що є вершинами деякого рівностороннього трикутника. Якщо всі вершини позначені, а такого трикутника немає, гра закінчується внічию. Доведіть, що Костя може грати так, щоб не програти.

С.1.3. Знайдіть найменше можливе значення виразу

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c},$$

де a, b, c – довільні числа з відрізка $[1; 2]$.

С.1.4. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте трикутник, якщо на площині дані його точка перетину медіан, ортоцентр та одна з вершин.

С.1.5. Знайдіть всі трійки натуральних чисел (p, q, r), що задовольняють рівність

$$\frac{1}{p}+\frac{q}{q^r-1}=1.$$

С.1.6. Дано правильний шестикутник, довжина сторони якого дорівнює 1. Яку найбільшу кількість кіл радіуса $\frac{\sqrt{3}}{4}$ можна розмістити без перекриття всередині такого шестикутника? (Кола можуть дотикатися одне до одного та до сторін шестикутника.)

С.1.7. Дано гострокутний трикутник ABC, в якому $\angle BAC < 30^\circ$. На сторонах AC та AB взято відповідно точки D і E такі, що

$\angle BDC = \angle BDE = \angle ADE = 60°$. Доведіть, що центри кіл, вписаних у трикутники ADE, BDE та BCD, не лежать на одній прямій.

С.1.8. Розташуйте на шаховій дошці розмірами 8×8 найменшу можливу кількість тур так, щоб кожна клітинка билася принаймні двома турами (вважати, що тура не б'є тієї клітинки, на якій вона стоїть, тому ця клітинка має бути під боєм ще принаймні двох інших тур. Тура б'є "через" туру, наприклад, якщо на клітинках $a2$ та $a4$ стоять тури, то клітинка $a5$ вже б'ється двічі).

С.1.9. Дано такі дійсні числа a, b, c, більші за одиницю, що $a+b+c=6$. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{b^2-1}+\frac{b}{c^2-1}+\frac{c}{a^2-1}\geq 2.$$

С.1.10. Для яких натуральних n існує натуральне число, кратне n, десятковий запис якого складається тільки з цифр 8 та 9 (можливо, тільки з цифр 8 або тільки з цифр 9)?

X клас

С.1.11. Див. задачу С.1.1.

С.1.12. Див. задачу С.1.3.

С.1.13. Див. задачу С.1.5.

С.1.14. Див. задачу С.1.6.

С.1.15. Нехай $a_1, a_2, ..., a_{1\,994}$ – дійсні числа на відрізку $[-1;\ 1]$, $s=\dfrac{a_1+a_2+...+a_{1\,994}}{1994}$. Доведіть, що для довільного натурального n, $1\leq n\leq 1\,994$, виконується нерівність

$$\left| a_1+a_2+...+a_n-ns \right| \leq 997.$$

С.1.16. Знайдіть всі функції $f: R \to R$ такі, що для будь-яких дійсних x, y виконується рівність

$$f(x+2^y)=f(2^x)+f(y).$$

С.1.17. Див. задачу С.1.7.

С.1.18. Див. задачу С.1.8.

С.1.19. Доведіть, що для всіх натуральних $n \geq 6\,000$ будь-який опуклий 1 994-кутник можна розрізати на n таких чотирикутників, що навколо кожного з них можна описати коло.

С.1.20. Див. задачу С.1.10.

XI клас

С.1.21. Доведіть, що для дійсних $x \geq 1$ виконується нерівність

$$\frac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x} \leq \frac{5}{7}.$$

С.1.22. Дано прямокутник $ABCD$, в якому $AB > BC$. На стороні CD взято таку точку L, що BL та AC перпендикулярні. Нехай K – точка перетину відрізків BL і AC. Відомо, що відрізки AL та DK перпендикулярні. Знайдіть $\angle ACB$.

С.1.23. Див. задачу С.1.6.

С.1.24. Дано шахову дошку, яка нескінченна в усі боки. Чи можна на ній розташувати нескінченну кількість ферзів так, щоб на кожній горизонталі, на кожній вертикалі та на кожній діагоналі обох напрямків (тобто на множині клітинок, розташованих під кутом 45° або 135° до горизонталі) стояло рівно по одному ферзю ?

С.1.25. Функція $f(x)$, яка визначена на множині невід'ємних дійсних чисел, набуває дійсних значень. Відомо, що $f(0) \leq 0$ та функція $f(x)/x$ неспадна для $x > 0$. Доведіть, що для довільних $x \geq 0$ та $y \geq 0$ виконується нерівність $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

С.1.26. Див. задачу С.1.16.

С.1.27. Складіть рівняння прямої, що дотикається до графіка функції $y = x^4 - x^2 + x$ принаймні в двох точках.

С.1.28. Многочлен з раціональними коефіцієнтами назвемо цілочисловим, якщо він набуває цілих значень за всіх цілих значень змінної. Для цілочислового многочлена P розглянемо послідовність $(-1)^{P(1)}, (-1)^{P(2)}, (-1)^{P(3)}, \ldots$

а) Доведіть, що ця послідовність є періодичною, періодом якої є деякий степінь двійки (тобто для деякого цілого невід'ємного k та для всіх натуральних i i-й та $(i+2^k)$-й члени послідовності рівні між собою).

б) Доведіть, що для будь-якої періодичної послідовності, що складається з (-1) і 1 та з періодом – деяким степенем двійки, існує цілочисловий многочлен P, для якого ця послідовність є $(-1)^{P(1)}$, $(-1)^{P(2)}, (-1)^{P(3)}, \ldots$

С.1.29. Див. задачу С.1.10.

С.1.30. Дано тетраедр $A_1A_2A_3A_4$ (необов'язково правильний). Точку N у просторі називатимемо точкою Серве, якщо шість точок проекції N на шість ребер тетраедра лежать в одній площині. Цю площину будемо позначати $\alpha(N)$ і називати площиною Серве точки N. Через B_{ij} позначимо відповідно середини ребер A_iA_j, $1 \le i < j \le 4$. Для даної точки M через M_{ij} позначимо точки, симетричні M відносно B_{ij}, $1 \le i < j \le 4$. Доведіть, що коли всі точки M_{ij} є точками Серве, то точка M належить всім площинам Серве $\alpha(M_{ij})$, $1 \le i < j \le 4$.

Фінальний етап

IX клас

С.1.31. Назвемо чудовим таке положення годинної та хвилинної стрілок на циферблаті, за якого через деякий час стрілки поміняються місцями. Підрахуйте загальну кількість чудових положень годинникових стрілок.

С.1.32. Трикутники MA_2B_2 та MA_1B_1 подібні між собою та однаково орієнтовані. Доведіть, що кола, описані навколо цих трикутників, та прямі A_1A_2, B_1B_2 мають спільну точку.

С.1.33. Дано квадратну дошку розмірами $1\,995 \times 1\,995$. Ці клітинки пофарбовано чорною та білою фарбами в шаховому порядку так, що кутові клітинки мають чорний колір. Павук, який сидить на одній з чорних клітинок, за один крок може переповзти в клітинку, що має спільну сторону з тією, яку він займає. Доведіть, що павук завжди може дістатися до мухи, яка нерухомо сидить у іншій чорній клітинці, побувавши в усіх клітинках дошки по одному разу.

С.1.34. Натуральні числа X та Y отримують одне з одного перестановкою цифр. Доведіть, що суми цифр чисел $5X$ та $5Y$ збігаються.

С.1.35. На майдані вишикувалися в колону 1 995 солдат, причому деякі з них стали правильно, а деякі повернулися задом наперед.

Сержант Сміт пам'ятає лише команду "ась". За цією командою кожен солдат, який бачить парну кількість обернених до нього облич, повертається на 180°, а решта залишаються нерухомі. Всі рухи за командою виконуються одночасно. Доведіть, що сержант може зорієнтувати всіх солдат в один бік.

С.1.36. У трикутнику ABC ортоцентр H лежить на вписаному колі. Чи обов'язково цей трикутник рівнобедрений?

X клас

С.1.37. Функція $f: Z \to Z$ задовольняє такі умови:

1) $f(f(n)) = n$ для всіх цілих n;

2) $f(f(n+2)+2) = n$ для всіх цілих n;

3) $f(0) = 1$.

Знайдіть значення $f(1\,995)$ та $f(-1\,994)$.

С.1.38. Дано трикутник ABC і точку O всередині нього. Відомо, що $AB \le BC \le CA$. Доведіть, що $OA + OB + OC < BC + CA$.

С.1.39. Дано квадратну дошку розмірами $1\,995 \times 1\,995$. Ці клітинки пофарбовано чорною та білою фарбами в шаховому порядку так, що кутові клітинки мають чорний колір. З дошки довільно вирізали дві чорні й одну білу клітинки. Доведіть, що решту дошки можна розбити на прямокутники розмірами 1×2.

С.1.40. Дано такі 1 995 відрізків, що із будь-яких трьох з них можна скласти трикутник. Доведіть, що, використовуючи ці 1 995 відрізків, можна скласти 664 гострокутних трикутники так, щоб кожен відрізок входив до складу не більше, ніж одного трикутника.

С.1.41. Для довільного натурального n доведіть рівність

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n^*\pi}{2n} = 2^{\frac{1-n}{2}},$$

де n^* – це найбільше непарне число, що не перевищує n.

С.1.42. Площиною повзуть кілька (не менше трьох) черепах, швидкості яких постійні за величиною та напрямком (всі рівні за величиною, але попарно різні за напрямком). Доведіть, що незалежно від початкового розташування через деякий час всі черепахи будуть у вершинах деякого опуклого многокутника.

С.1.43. Нехай функція $f: R \to R$ задовольняє такі умови:

1) для всіх $x, y \in R$ $f(x+y)=f(x)+f(y)$;

2) $f(1)=1$;

3) для всіх $x \neq 0$ $f\left(1/x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}$.

Доведіть, що для всіх $x \in R$ $f(x)=x$.

С.1.44. Множину всіх скінченних упорядкованих наборів з 0 та 1 деяким чином розбито на два класи, що не перетинаються. Доведіть, що будь-яку нескінченну послідовність з 0 та 1 можна розрізати на скінченні частини, що не перетинаються, так, що всі ці частини (крім, можливо, першої) належать до одного класу.

С.1.45. Відомо, що в трикутнику ABC $2\angle BAC + 3\angle ABC = 180°$. Доведіть, що $4(BC + CA) < 5AB$.

С.1.46. Дано тетраедр $ABCD$, в якому кожна пара мимобіжних ребер – рівні відрізки. Нехай O – центр сфери, вписаної в цей тетраедр, X – довільна точка всередині тетраедра, $X \neq O$. Пряма OX перетинає площини граней тетраедра в точках, які позначено через A_1, B_1, C_1, D_1. Доведіть, що

$$\frac{A_1X}{A_1O}+\frac{B_1X}{B_1O}+\frac{C_1X}{C_1O}+\frac{D_1X}{D_1O}=4\,.$$

С.1.47. Доведіть, що для будь-якого натурального $n > 1$ існує нескінченно багато натуральних чисел m таких, що для будь-яких цілих невід'ємних $k_1, k_2, ..., k_n$ $m \neq k_1^n + k_2^n + ... + k_n^n$.

С.1.48. Дано натуральне число n та записано в рядок n чисел, кожне з яких дорівнює 0 або 1. Потім нижче записується $n-1$ число в рядок – по одному числу під кожною парою сусідніх чисел першого рядка. При цьому під парою однакових чисел записується 0, а під парою різних – 1. Потім під другим рядком аналогічно записується третій з $n-2$ чисел і т. д., доки не отримаємо трикутну таблицю з n рядками. Для заданого n знайдіть найбільше можливе число одиниць у такій таблиці.

Олімпіада 2

Перший етап

IX клас

С.2.1. Знайдіть всі впорядковані четвірки натуральних чисел a, b, c, d, які задовольняють рівність $d^a + d^b = d^c$.

С.2.2. Чи можна викласти площину паркетом, який складається з правильних п'ятикутників зі стороною b і ромбів зі стороною b і гострим кутом 36° (фігури не можуть перекривати одна одну), якщо використовувати:

а) тільки ромби;

б) тільки п'ятикутники;

в) і п'ятикутники, і ромби?

С.2.3. Рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) вписаний у коло. На дузі AC вибрано точку D. Точка P є точкою перетину відрізків BD та AC. На відрізку CD вибрано точку Q таким чином, що $\angle APD = \angle DPQ = 60°$. Визначіть величину кута CKQ, де K – точка перетину відрізків AQ та BD.

С.2.4. Розв'яжіть рівняння

$$[x] + \left[\frac{3}{2}x\right] + [2x] = 1\,995.$$

С.2.5. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c, d

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{d} + \frac{d^3}{a} \geq \frac{1}{2}\left((a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 + (d+1)^2\right) - 4.$$

С.2.6. Знайдіть всі натуральні числа, які є точними квадратами за довільної перестановки своїх цифр (числа та цифри розглядаються у десятковому запису).

С.2.7. На координатній площині зображено коло з центром у точці $O\,(0; 0)$ та радіусом 1 995. У кожній з точок площини, що лежать усередині кола та обидві координати яких є цілими числами, сидить павук. У якийсь момент часу кожен з павуків переповзає на одиничну відстань праворуч, ліворуч, вгору або вниз, залишаючись усередині кола (павуки можуть рухатися в різні боки). Чи обов'язково після переповзання два павуки зустрінуться в одній точці?

С.2.8. На площині зображено $n>1$ прямих таким чином, що існують принаймні дві точки площини, через кожну з яких проходить не менше двох прямих. Доведіть, що існує точка площини, через яку проходять рівно дві прямі.

С.2.9. На площині відмічено 1 000 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Чи обов'язково знайдуться дві прямі, що розбивають площину на чотири частини, в кожній з яких міститься по 250 точок?

С.2.10. Опуклий чотирикутник $ABCD$ вписано в коло з центром у точці O та діаметром $d=25$ см. На сторонах AD і CD вибрано точки P та Q відповідно таким чином, що $OP \perp AD$, $OQ \perp CD$. Знайдіть довжину сторін чотирикутника, якщо відомо, що довжини відрізків AB, BC, CD, DA, OP, OQ – різні натуральні числа.

X клас

С.2.11. Розв'яжіть рівняння

$$[x]+[2x]+\ldots+[1\,995x]=1\,995.$$

С.2.12. Доведіть, що десятковий запис не менше ніж 300 чисел з набору $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots, 2^{1000}$ починається з цифри 1.

С.2.13. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC<AD$, $AB=BC=CD$) провели відрізки $CK \perp AD$ (K лежить на AD) і $KP \perp AC$ (P лежить на AC), причому KP перетинає BD у точці Q. Доведіть, що $BQ=QD$.

С.2.14. У кубі розмірами $n\times n\times n\,(n>2)$ позначено n^2 кубиків. За один крок дозволяється поміняти місцями два довільні паралельні паралелепіпеди $1\times1\times n$. Чи завжди можна за допомогою кількох таких кроків зібрати всі позначені кубики в одну грань великого куба?

С.2.15. Для $n\geq 2$ та довільних додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ доведіть нерівність

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^3}{a_n}+\frac{a_n^3}{a_1}\geq\frac{1}{2}\left((a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\ldots+(a_n+1)^2\right)-n.$$

С.2.16. На медіані BD трикутника ABC вибрали точки B_1 і B_2. Прямі AB_2, AB_1, CB_2, CB_1 перетинають сторони BC і BA відповідно в точках A_2, A_1 і C_2, C_1. Нехай M і K – точки перетину відповідно AA_2 і CC_1, CC_2 і AA_1. Доведіть, що $S_{AKB_2}+S_{MA_2A_1B_1}=S_{CB_2M}+S_{KC_2C_1B_1}$.

С.2.17. Знайдіть найменше можливе значення виразу

$$\frac{x^2}{(y+2z)(z+2y)}+\frac{y^2}{(x+2z)(z+2x)}+\frac{z^2}{(x+2y)(y+2x)},$$

якщо x, y, z – додатні числа.

С.2.18. Кілька друзів придбали по одному мотоциклу. На кожному мотоциклі було здійснено по одній поїздці вдвох, але жодна пара друзів не їздила разом двічі. Виявилося, що одна людина проїхала на двох мотоциклах лише у випадку, якщо їх власники їздили разом. Доведіть, що кожен із друзів виїжджав рівно двічі.

С.2.19. Чи існують такі дійсне число a і функція f, що для всіх дійсних x виконується рівність

$$f\left(f\left(\ldots\left(f(x)\right)\ldots\right)\right)=(x+a)^{2^{1995}}+1,$$

де функцію f застосовано 1 995 разів?

С.2.20. Чи можна множину натуральних чисел, відмінних від 1, розбити на дві непорожні підмножини таким чином, щоб для будь-яких чисел m і n (можливо, рівних) однієї із підмножин число $mn-1$ лежало в тій самій підмножині?

XI клас

С.2.21. Знайдіть всі трійки додатних чисел x, y, z, що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y^2+z^3=3, \\ x^2+y^3+z=3, \\ x^3+y+z^2=3. \end{cases}$$

С.2.22. Нехай O – центр вписаного кола прямокутного трикутника ABC, в якому $\angle C=90°$. На стороні BC взято точку D так, що ламана AOD ділить трикутник ABC на два рівновеликих чотирикутники. Поділіть чотирикутник $AODB$ на три частини, з яких можна скласти чотирикутник $AODC$.

С.2.23. Знайдіть всі функції $f: R \to R$ такі, що для будь-яких дійсних x, y

$$f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x.$$

C.2.24. На площині вибрані фіксований кут з вершиною O та фіксована точка A на одній його стороні ($A \neq O$). Нехай B – довільна точка на іншій стороні кута ($B \neq O$), а P і Q – точки дотику вписаного в трикутник AOB кола зі сторонами відповідно OB і AB. Доведіть, що всі прямі PQ (отримані для всіх можливих положень точки B) перетинаються в одній точці.

C.2.25. Доведіть, що будь-які два різних члени послідовності $1+3^{3^n}+9^{3^n}$, $n \geq 1$, є взаємно простими.

C.2.26. Для кожного $n \geq 2$ знайдіть найбільше можливе значення виразу

$$x_1^2(1-x_2)+x_2^2(1-x_3)+\ldots+x_{n-1}^2(1-x_n)+x_n^2(1-x_1),$$

якщо всі x_n – числа з відрізка $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

C.2.27. На дошці написано слово УАУУААУУААУАУ. Дозволяється викреслити будь-яке підслово УА або вписати в будь-яке місце АУ (викреслюються або вписуються дві сусідні літери). Чи можна за допомогою скінченної кількості таких операцій залишити на дошці слово УУУАА?

C.2.28. Для якого найменшого натурального n існує многочлен P степеня n, в якого коефіцієнт при x^n дорівнює одиниці та такий, що для будь-якого цілого k $P(k)$ – ціле число, яке ділиться на 1 995?

C.2.29. На площині позначено десять точок. Відомо, що серед будь-яких п'яти точок є чотири, що лежать на одному колі. Нехай K – найбільша кількість точок серед даних позначених, через які можна провести одне коло. Знайдіть найменше можливе значення K.

C.2.30. Двоє гравців грають у таку гру. Той, хто починає, пише будь-яку відмінну від нуля цифру. Другий гравець дописує до неї праворуч довільну цифру (при цьому утворюється двоцифрове число). Потім ходить перший гравець, і далі гравці продовжують робити ходи по черзі. За один хід дозволяється дописувати праворуч від попереднього числа довільну цифру або будь-яким чином переставляти будь-яку кількість його цифр, але так, щоб нове число було більше від попереднього. Переможцем вважається той гравець, який першим отримає число, що більше за 19951995...1 995 (тут 1 995 повторене 1 995 разів). Хто з двох гравців має виграшну стратегію? (Всі цифри та числа розглядаються в десятковій системі числення.)

Фінальний етап

IX клас

С.2.31. Натуральне число n називається "крихким", якщо існують натуральні числа a, b, x, y такі, що $a+b=n$ та $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Знайдіть усі "крихкі" натуральні числа.

С.2.32. На площині зображені деяке коло з центром у точці O та пряма l, що його не перетинає. На прямій l вибрано точки E та M таким чином, що $OE \perp l$ і $M \neq E$. Нехай A та B такі точки кола, що MA та MB – це дві дотичні до кола, які проходять через точку M. Виберемо на відрізках MA і MB відповідно точки C та D так, що $EC \perp MA$ і $ED \perp MB$. Нехай прямі CD та OE перетинаються в точці F, а прямі AB і CD – у точці K. Доведіть, що $EF=FK$.

С.2.33. Є n предметів масою від 1 до n грамів. Також є терези, на ліву шальку яких дозволяється класти будь-який предмет та довільну комбінацію гирьок, а на праву – тільки довільну комбінацію гирьок. Внаслідок зважування терези знаходяться або в рівновазі, або одна з шальок важча за іншу. Знайдіть найменшу кількість гирьок, що потрібні для визначення ваги всіх предметів.

С.2.34. Нехай a, b, c – натуральні числа, які не всі є точними кубами, а найбільший спільний дільник їх довільної пари дорівнює 1. Доведіть, що числа $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$ не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії.

С.2.35. У гострокутному трикутнику ABC на його висотах AA_1, BB_1 та CC_1 вибрали відповідно точки A_2, B_2, C_2 таким чином, що $\angle BA_2C=\angle AB_2C=\angle AC_2B=90^\circ$. Нехай A_3, B_3, C_3 – точки перетину відповідно BC_2 і CB_2, AC_2 і CA_2, AB_2 і BA_2. Доведіть, що відрізки AA_3, BB_3 і CC_3 перетинаються в одній точці.

С.2.36. Скількома способами можна виписати по колу 8 нулів та 8 одиниць так, щоб усі 16 наборів, прочитаних за рухом годинникової стрілки, з 4 знаків, записаних підряд, були різними? (Записи, що відрізняються один від одного циклічним зсувом або симетрією, вважати різними.)

X клас

С.2.37. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n>1)$ таких, що $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, виконується нерівність

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n} \le n-1.$$

С.2.38. Доведіть, що якщо для дійсних чисел a, b, c $2a + 3b + 6c = 0$, то кубічне рівняння $ax^3 + bx + c = 0$ має принаймні один корінь на інтервалі $(0; 1)$.

С.2.39. У крузі K кожну точку пофарбовано в один з m кольорів (m – довільне натуральне число). Доведіть, що для довільного $n \ge 3$ існує такий колір і такий нескінченний набір рівних між собою n-кутників, що всі їхні вершини пофарбовані в цей колір.

С.2.40. Нехай у послідовності натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ кожне натуральне число зустрічається один раз. Доведіть, що існують такі натуральні i, j, k, що $i<j<k$ і $a_i + a_k = 2a_j$.

С.2.41. Нехай $n \ge 3$ – натуральне число, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – такі дійсні числа, що $2 \le a_i \le 3$, $i = 1, \ldots, n$. Доведіть нерівність

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2} \le 2s-2n,$$

де $s = a_1 + \ldots + a_n$.

С.2.42. Нехай O і I – центри відповідно описаного і вписаного кіл нерівнобічного трикутника ABC, H – ортоцентр. Доведіть, що $\angle OIH > 90°$.

XI клас

С.2.43. Множина M складається з усіх натуральних чисел, перша та остання цифри десяткового запису котрих – одиниці, між якими довільно розташовані кілька нулів та 1 995 будь-яких однакових цифр. Чи існує у множині M число, яке є добутком двох інших чисел (можливо, однакових) із цієї множини?

С.2.44. Чи існує функція $f: R \to R$, яка одночасно задовольняє такі умови:

а) існує таке додатне число C, що для всіх $x \in R$ виконується нерівність $\left|f(x)\right| \le C$;

б) $f(1) = 1$;

в) для всіх $x \ne 0$ виконується рівність $f\left(x+\frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$?

С.2.45. У трикутній піраміді $SABC$ $\angle SAC + \angle CAB = \angle SBA$, $\angle SAB + \angle CAB = \angle SCA$, $SA = SB + SC$. Знайдіть величину кута між бісектрисами плоских кутів ASB та ASC.

С.2.46. Знайдіть найменше значення виразу

$$a^2 + (a+b)^2 + (a+b+c)^2$$

для дійсних чисел a, b, c, що задовольняють нерівність $\left|a + 2b + 3c\right| \ge 1$.

С.2.47. Дано трикутник ABC, O – центр описаного навколо нього кола. Нехай M – точка перетину описаного навколо трикутника BOC кола з прямою CA, N – точка перетину описаного навколо трикутника AOC кола з прямою CB. Точки M і N відмінні від вершин трикутника ABC. Доведіть, що точки O, M і N лежать на одній прямій.

С.2.48. Нехай $m > 2$ та $n > 2$ – натуральні числа. Знайдіть (як функцію від m та n) кількість многочленів степеня $2n - 1$ з попарно різними коефіцієнтами із множини $\{1; 2; ...; m\}$, що діляться на многочлен $x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$ (вважається, що многочлен P ділиться на многочлен Q, якщо існує такий многочлен S з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x \in R$ $P(x) = Q(x)S(x)$).

Олімпіада 3

Перший етап

IX клас

С.3.1. Доведіть, що для кожного натурального n існує множина M_n, яка складається з n різних цілих чисел і яка задовольняє умову: для трьох довільних різних чисел a, b, c, які належать M_n, многочлен $ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів.

С.3.2. Чи можна всередині прямокутника розмірами 8×6 розмістити без перекриття 50 кругів з радіусом, що дорівнює 1 (круги можуть дотикатись один до одного та до сторін прямокутника)?

С.3.3. Том і Джеррі по черзі вписують в клітинки квадратної шахівниці розмірами $1\,996 \times 1\,996$ числа $+1$ і -1 (кожен з них може використовувати як $+1$, так і -1). Після заповнення дошки підраховується сума S всіх вписаних чисел. Потім у числах, що стоять на білих клітинках, змінюється знак та знову підраховується сума D всіх чисел. Якщо $S = D = 0$, то виграє Джеррі. В протилежному випадку виграє Том. Для кого з гравців існує виграшна стратегія, якщо Том ходить першим?

С.3.4. Знайдіть всі дійсні розв'язки системи

$$\begin{cases} a^2b + ab - b - 1 = 0, \\ a^2b + b^2 - a - 1 = 0. \end{cases}$$

С.3.5. а) Знайдіть всі цілі числа N такі, щоб клітинки нескінченної квадратної дошки можна було пофарбувати в білий та чорний колір таким чином, щоб кожна біла клітинка доторкалася (мала принаймні одну спільну точку) до N білих клітинок, а кожна чорна – до N чорних.

б) Знайдіть всі цілі числа N такі, щоб клітинки нескінченної квадратної дошки можна було пофарбувати в білий та чорний колір таким чином, щоб кожна біла клітинка доторкалася до N чорних клітинок, а кожна чорна – до N білих.

С.3.6. Три кола з центрами в точках O_1, O_2, O_3 дотикаються зовнішнім чином. Пряма O_1O_2 перетинає перше коло в точці B_1, а друге коло – в точці A_2. Пряма O_2O_3 перетинає друге коло в точці B_2, а третє – в точці A_3. Пряма O_1O_3 перетинає перше коло в точці A_1, а третє – в точці B_3. Доведіть, що для довільної точки X площини виконується рівність

$$A_1X^2 + A_2X^2 + A_3X^2 = B_1X^2 + B_2X^2 + B_3X^2.$$

С.3.7. На площині позначено точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ і $B_1, B_2, \ldots, B_m$ таким чином, що $A_iB_j = \sqrt{i+j}$. Доведіть, що існують такі прямі a і b, $a \perp b$, для яких $A_i \in a$ при всіх $i = 1, 2, \ldots, n$, а $B_j \in b$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, m$.

С.3.8. Доведіть, що для довільних $x, y, z > 0$ виконується нерівність

$$\sqrt{\frac{xy}{z^2}} + \sqrt{\frac{xz}{y^2}} + \sqrt{\frac{yz}{x^2}} \le \frac{xy}{z^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{yz}{x^2}.$$

С.3.9. З паперу вирізали два однакові правильні n-кутники, $n \geq 3$. Змастили їх клеєм і хочуть склеїти в один n-кутник. Чи можна пронумерувати вершини цих n-кутників числами від 1 до n таким чином, щоб при довільному способі склеювання принаймні одна пара склеєних вершин мала б однакові номери?

С.3.10. Знайдіть всі впорядковані трійки (x, y, z) цілих чисел, які задовольняють рівність

$$\left(x^{1000} + y^{1000} + z^{1000}\right)^2 = 2\left(x^{2000} + y^{2000} + z^{2000}\right).$$

X клас

С.3.11. Знайдіть всі трійки натуральних чисел k, l, m такі, що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} N(k)+N(l)=k, \\ N(k)+N(l)+N(m)=l-4, \\ N(k)+N(l)+N(m)=\dfrac{m}{2}-2, \end{cases}$$

де $N(k)$, $N(l)$, $N(m)$ – це кількість цифр у десяткових записах чисел k, l, m відповідно.

С.3.12. Трикутник ABC має властивості: $AB = BC$, $\angle ABC = 100°$. На стороні AC взяті точки K і L такі, що $\angle KBA = \angle LBC = 30°$. Бісектриса кута CAB перетинає відрізок BK у точці P. Знайдіть у градусах величину кута KPL.

С.3.13. Знайдіть всі функції $f : R_+ \to R$, які для будь-яких дійсних x, y задовольняють рівність

$$f\left((x+y)^2\right) = f\left(x^2\right) + f\left(y^2\right) + 2xy.$$

С.3.14. Нехай для всіх натуральних n $a_n = \left[n + \sqrt{n} + \dfrac{1}{2}\right]$ і $b_n = a_n - [a_n]$. Обчисліть суму $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + nb_n$.

С.3.15. Доведіть, що для дійсного числа $x \geq 0$ і натуральних чисел k, l, m виконується нерівність $(1+x)^k + (1+x)^l + (1+x)^m \geq 6\sqrt{x}\sqrt[6]{klm}$.

С.3.16. У трикутнику ABC на сторонах AB, BC, CA можна вибрати відповідно точки C_1, A_1, B_1 так, що відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці M, а в чотирикутники AC_1MB_1, BC_1MA_1, CA_1MB_1 можна вписати кола, причому так, щоб вони дотикались одне до одного. Доведіть, що трикутник ABC – рівносторонній.

С.3.17. Вісім шахістів провели турнір в одне коло. Серед будь-яких трьох шахістів знайдуться двоє, які зіграли між собою внічию. Знайдіть найменшу можливу кількість нічиїх на цьому турнірі.

С.3.18. Знайдіть всі натуральні числа $k>1$ та прості числа p, для яких число $p\left(2^{p-1}-1\right)$ є k-м степенем деякого натурального числа.

С.3.19. У трикутнику ABC $\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$. Відомо, що існує коло K, до якого дотикаються зсередини два кола, побудовані на AB і BC як на діаметрах, і центр якого збігається з центром вписаного кола ABC. Знайдіть відношення радіуса кола K до радіуса вписаного кола ABC.

С.3.20. Чи існує послідовність натуральних чисел $\{a_n : n\geq 1\}$ (можливо не всіх різних) така, що $a_{a_n}=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2$ для всіх $n\geq 2$?

XI клас

С.3.21. Див. задачу С.3.11.

С.3.22. Нехай $n\geq 2$, a_1, a_2, $\ldots$, a_n – додатні числа, $M=\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Доведіть, що $M(a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n)\geq\frac{n+1}{n-1}(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$. До правої частини нерівності входить сума всіх попарних добутків a_ia_j, $1\leq i<j\leq n$.

С.3.23. Доведіть, що для будь-якого натурального числа m знайдуться цілі числа a і b такі, що $|a|\leq m$, $|b|\leq m$ і $0<a+b\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$.

С.3.24. Позначимо через x_n, $n\geq 1$, точку мінімуму функції $f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{n\cos(nx)}{n^2+1}$. Доведіть, що для кожного числа $c>\sqrt{2}$ знайдеться натуральне число n_0 таке, що $|x_n|<\frac{c}{\sqrt{n}}$ для всіх $n\geq n_0$

С.3.25. Див. задачу С.3.17.

С.3.26. У трикутнику ABC точка D є основою висоти, проведеної з A, а точки E і F – це центри кіл, вписаних у трикутники відповідно

ABD і ACD. Пряма EF перетинає прямі AB і AC у точках відповідно K та L. Знайдіть необхідні та достатні умови на кути трикутника для того, щоб $AK=AL$. (Умови мають бути лінійними рівняннями для $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ і, зокрема, не містити тригонометричних функцій.)

С.3.27. Функцію $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ називатимемо цілою раціональною функцією, якщо h і g – деякі многочлени зі старшими коефіцієнтами, які дорівнюють 1. Знайдіть всі цілі раціональні функції f, які для всіх дійсних x з області визначення функцій $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ задовольняють рівність $f\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=1$.

С.3.28. Дана послідовність $a_n=3^n-2^n$, $n\geq 1$. Чи можна з неї вилучити певним чином три різних числа, які були б трьома послідовними членами деякої геометричної послідовності?

С.3.29. Див. задачу С.3.19.

С.3.30. Дана таблиця розмірами $1\,996\times 1\,996$, в кожній клітинці якої записане дійсне число. Двоє гравців, Олекса та Володя, вибирають по черзі рядки в таблиці (серед тих, що не були вибрані раніше). Гра закінчується, коли будуть вибрані всі рядки (кожний з них вибере 998 рядків). Після цього Олекса підраховує квадрат суми чисел, що стоять у першому стовпчику в усіх вибраних ним рядках, квадрат суми чисел, що стоять у другому стовпчику в усіх вибраних ним рядках, і т. д. Нарешті, Олекса знаходить кінцевий результат – суму 998 обчислених квадратів. Володя аналогічно знаходить свій кінцевий результат, використовуючи вибрані ним рядки. Виграє той, хто буде мати більший кінцевий результат. Якщо результати рівні, то фіксується нічия. Доведіть, що Олекса, який починає гру, може грати так, щоб не програти.

Фінальний етап

IX клас

С.3.31. Нехай ABC – довільний рівнобедрений трикутник, у якому $AB=AC$. Позначимо A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного в нього кола зі сторонами відповідно BC, AC, AB. Доведіть, що гострий кут між прямими BB_1 і CC_1 не перевищує $60°$.

C.3.32. Позначимо $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Доведіть, що для довільного натурального n виконується нерівність $S(n^2) \le (S(n))^2$.

C.3.33. Квадрат розмірами $(n-1)\times(n-1)$ розбито на $(n-1)^2$ одиничних квадратиків. Кожну з n^2 вершин цих одиничних квадратиків треба розфарбувати жовтим чи блакитним кольором. Знайдіть кількість різних розфарбувань, при котрих кожен одиничний квадратик має дві жовті вершини (ми називаємо різними розфарбування, які відрізняються кольором принаймні в одній точці).

C.3.34. Знайдіть найбільшу можливу кількість послідовних натуральних чисел, кожне з яких має чотири натуральні дільники.

C.3.35. Всередині кута BAC вибрали дві різні точки M і N так, що відстань від точки M до сторони AB дорівнює відстані від точки N до сторони AC, причому точка A лежить на прямій MN. На бісектрисі кута BAC вибрали деяку точку K. Виявилось, що пряма MK перетинає пряму AB у точці P, а пряма NK перетинає пряму AC у точці Q. Доведіть, що прямі PQ і MN паралельні.

C.3.36. Доведіть, що для довільних натуральних чисел a, b, c та довільних невід'ємних чисел x, y, z виконується нерівність

$$(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz) \le (a+b+c)^3\, xyz.$$

X клас

C.3.37. Доведіть, що в довільному многокутнику знайдуть дві сторони з такими довжинами a і b, що $\left[\dfrac{a}{b}\right]=1$.

C.3.38. Чотири цілих числа розташовані по колу. За кожним кроком заміняємо кожне число на різницю між ним і наступним (за годинниковою стрілкою). Чи можливо після 1 996 кроків з якоїсь початкової четвірки чисел отримати таку четвірку a, b, c, d, що всі числа $|bc-ad|$, $|ac-bd|$, $|ab-cd|$ є простими?

C.3.39. (Війна в місті). Приїхавши задля встановлення миру, генерал Качур виявив, що місто Страшний має вигляд прямокутника розмірами $m\times n$, розділеного вулицями на mn одиничних квадратів-кварталів (його сторони теж є вулицями). Лінія фронту між військами Уряду та повстанцями Бабаєва є ламаною, що проходить по вулицях, з'єднуючи дві протилежні вершини прямокутника, і має довжину $m+n$. Кожного дня повстанці захоплюють ще якісь два суміжні прифронтові квартали, змінюючи лінію фронту, але залишаючи незмінною її довжину. Коли така операція стане неможливою, Бабаєв погодиться на перемир'я. Доведіть, що Качур може визначити, як проходитиме лінія фронту на момент укладення перемир'я, знаючи лише, як вона проходить на момент його приїзду.

С.3.40. У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює $60°$. На променях CD і AD вибрали точки відповідно P і Q такі, що $AP \parallel CQ$. Знайдіть величину кута PBQ.

С.3.41. Для яких натуральних n можна відмітити частину клітинок у квадратній таблиці розмірами $n \times n$, щоб у кожній з $2(2n-1)$ її діагоналей (довжиною від 1 до 12 клітинок) містилась непарна кількість відмічених?

С.3.42. У країні Голівудії більше, ніж три міста. Кожні два з'єднані єдиною дорогою, рух якою дозволено лише в якомусь єдиному напрямку. Злочинець Ганібал Лектор мандрує Голівудією, кожного дня змінюючи місце перебування, доки це можливо. Поліція його заарештує, якщо тільки знатиме, в якому місті він знаходиться. Уряд дозволив тимчасово перекрити частину доріг у країні за вибором поліції, але так, щоб для кожного міста залишились відкритими дві належні йому дороги (дорога належить місту, якщо вона входить чи виходить з нього). Чи можна бути впевненим, що тепер Лектора заарештують?

XI клас

С.3.43. Чи існує функція $f: R \to R$, що задовольняє такі умови:

а) множина значень f збігається з R;

б) для всіх $x \in R$ виконується рівність $f(f(x)) = (f(x)+1)(x+1)$?

С.3.44. Коло ω проходить через вершини B і C трикутника ABC і перетинає сторони AB і AC в їх внутрішніх точках, які позначено відповідно C_1 і B_1. Нехай O – точка перетину відрізків BB_1 і CC_1, M – середина BC. Доведіть, що коли $AO \perp BC$, то трикутник MB_1C_1 – рівнобедрений.

С.3.45. Див. задачу С.3.39.

С.3.46. При якому найменшому n можна пофарбувати клітинки таблиці розмірами $1\,996 \times 1\,996$ в n кольорів (кожна клітинка фарбується в один колір) так, щоб виконувались такі умови:

а) усі 1 996 клітинок однієї з діагоналей (і тільки вони) пофарбовані в колір l;

б) будь-які дві клітинки, симетричні відносно цієї діагоналі, пофарбовані в однаковий колір;

в) будь-які дві клітинки, що знаходяться в одному рядку по різні боки від клітинки кольору 1, пофарбовані в різні кольори?

С.3.47. При яких цілих $a \neq 0$ кількість розв'язків у дійсних числах системи рівнянь

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 + 27 = a(x + y + z), \\ (x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y) = 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \\ (x - y)^a (y - z)^a + (y - z)^a (z - x)^a + (z - x)^a (x - y)^a = 0 \end{cases}$$

є простим числом? (Розв'язок системи – це упорядкована трійка чисел $(x,\ y,\ z)$, що її задовольняє.)

С.3.48. Дано тригранний кут з вершиною S. Площина π перетинає ребра цього кута в точках $A,\ B,\ C$. Дві кулі, що вписані в даний тригранний кут, дотикаються до площини π у точках P і Q і лежать по різні боки від неї. Доведіть, що бісектриси кутів PAQ, PBQ, PCQ перетинаються в одній точці.

Олімпіада 4

Перший етап

VIII клас

С.4.1. Чи можна на площині взяти чотири точки так, щоб будь-які три з них були вершинами тупокутного трикутника?

С.4.2. Знайдіть всі дійсні розв'язки рівняння

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x - 4y - 4z + 14 = 0.$$

С.4.3. Скількома нулями закінчується число $9^{1\,997} + 1$?

С.4.4. Двоє гравців по черзі кладуть сірники в синю та червону коробки. Перший гравець (той, хто розпочинає гру) кожним своїм ходом може покласти один сірник до синьої коробки або два – до червоної. Другий може покласти два сірники до синьої коробки або один – до червоної. Перед початком гри коробки порожні. Виграє той, після ходу якого хоча б в одній з коробок виявиться понад 1 997 сірників. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

С.4.5. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в двох точках A і B. Хорда BC кола ω_1 перетинає коло ω_2 у точці E $(B \neq E)$, хорда BD кола ω_2 перетинає коло ω_1 у точці F $(B \neq F)$. Відомо, що $DF = CE$. Доведіть, що відстані від точки A до відрізків DF і CE однакові.

С.4.6. Знайдіть всі натуральні числа k, для яких існують натуральні числа m і n такі, що $m^2 + n^2 = kmn$.

С.4.7. На одній з клітинок квадратної дошки розмірами $n \times n$ стоїть фішка. За один хід можна пересунути фішку на одну з наступних клітинок:

1) сусідню зверху;

2) сусідню праворуч;

3) сусідню ліворуч униз по діагоналі.

Доведіть, що з будь-якої клітинки не можна перевести фішку на сусідню праворуч клітинку так, щоб при цьому фішка побувала в кожній клітинці дошки лише один раз.

С.4.8. Дано трикутник ABC, в якому $\angle ABC = 120°$. На сторонах AB і BC у зовнішній бік побудовані рівносторонні трикутники ABP і BCR. Точки M і K – це середини сторін відповідно AB і BC. Рівносторонній трикутник MKQ побудовано так, що точки Q і B лежать по один бік від прямої MK. Доведіть, що точки P, Q і R належать одній прямій.

С.4.9. Для додатних чисел a, b, c знайдіть найменше можливе значення виразу

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}.$$

С.4.10. На дошці записані числа $1\,001^2, 1\,002^2, 1\,003^2, \ldots, 1\,997^2$. На кожному кроці дозволяється стерти будь-які три числа a, b, c і замість них записати число $\frac{a}{3}$ (якщо $a \le b \le c$). Доведіть, що коли після кількох таких операцій на дошці залишиться лише одне число, то воно буде менше за 2 007.

С.4.11. За яких цілих значень параметра a квадратне рівняння $x^2+2ax+3=0$ має два цілі корені?

С.4.12. Знайдіть всі функції $f: R \to R$ такі, що $f^2(x)+f(x)f(y)=$ $=x^2+xy$ для всіх дійсних значень x, y.

С.4.13. Трикутник ABC рівносторонній, O – ортоцентр, точки K і M лежать на сторонах відповідно AB і AC таким чином, що $\angle KOM=$ $=60°$. Доведіть, що периметр трикутника AKM дорівнює довжині сторони трикутника ABC.

С.4.14. Знайдіть усі дійсні значення x, для яких виконується рівність

$$[x]+\frac{1}{\{x\}}=\{x\}+\frac{1}{[x]}.$$

С.4.15. У країні жила певна кількість лицарів, кожні два з яких приятелювали або ворогували між собою, причому кожен мав n ворогів (n – натуральне число). Серед лицарів діяв принцип: "Ворог мого друга – мій ворог". Одного разу один лицар розлютився, викликав на бій і повбивав усіх своїх ворогів, після чого в країні залишилося d лицарів. Доведіть, що n ділиться на d.

С.4.16. Нехай a, b, c, d – цілі числа, причому a, b, c утворюють геометричну прогресію в зазначеній послідовності, а b, c і d – арифметичну прогресію. Крім того, $a+b+c+d=4\cdot 3^{1997}$. Знайдіть ці числа.

С.4.17. На сторонах трикутника ABC побудовано квадрати $BCKM$, $BAQT$, $ACNP$ у зовнішніх бік. Доведіть нерівності $5P_1<2P_2<6P_1$, де P_1 – периметр трикутника ABC, P_2 – периметр шестикутника $MKNPQT$.

С.4.18. Знайдіть усі многочлени P з дійсними коефіцієнтами, для яких при всіх дійсних значеннях x одночасно виконуються дві нерівності:

$$P(x+1997)\le P(x)+1997;$$
$$P(x+1996)\ge P(x)+1996.$$

С.4.19. Квадратну таблицю розмірами 150×150 заповнено числами 1 і -1. Модуль суми всіх чисел у таблиці не перевищує 7 000. Чи може модуль суми чисел у кожному прямокутнику розмірами 3×5 бути:

а) не меншим за 3;

б) більшим за 3? (Розглядаються і горизонтальні, і вертикальні прямокутники вказаного розміру.)

С.4.20. Нехай $S(n)$ – сума цифр натурального числа n (у десятковому запису). Доведіть, що:

а) для довільного натурального числа m знайдеться таке натуральне число a, що числа $S(a), S(2a), S(3a), ..., S(ma)$ усі парні;

б) не існує такого натурального числа a, що $S(ka)$ парне для всіх натуральних k.

X клас

С.4.21. Розв'яжіть у дійсних числах систему

$$\begin{cases} x - y^2 + 2y = 2, \\ y - z^2 + 2z = 2, \\ z - x^2 + 2x = 2. \end{cases}$$

С.4.22. На колі, описаному навколо правильного восьмикутника $P_1P_2...P_8$, довільно вибрано точку Q. Доведіть, що сума шостих степенів відстаней від точки Q до діагоналей P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7 і P_4P_8 не залежить від положення точки Q.

С.4.23. Чи існують у просторі п'ять точок таких, що будь-які три з них є вершинами гострокутного трикутника?

С.4.24. На площині є 1 997 точок, будь-які три з яких не лежать на одній прямій. Двоє гравців по черзі проводять по одному відрізку з кінцями в цих точках (з кожної точки може виходити довільна кількість відрізків, але будь-які дві точки можна з'єднувати лише один раз). Виграє той гравець, після ходу якого з кожної точки виходитиме хоча б один відрізок. Хто може забезпечити собі виграш у цій грі: той, хто починає, чи його суперник?

С.4.25. Нехай P – точка перетину діагоналей AC і BD, вписаного в коло чотирикутника $ABCD$. Через точку P проведена пряма, яка перетинає сторону AB у точці E, а сторону CD – у точці F так, що $2\frac{PE}{PF} - 1 = \frac{AE \cdot BE}{DF \cdot CF}$. Доведіть, що $PE = PF$.

С.4.26. Для кожного дійсного значення параметра a знайдіть всі функції $f : R \to R$, які для всіх x, y задовольняють рівність

$$x^2 f(y) + yf\left(x^2\right) = f(xy) + a.$$

С.4.27. У правильному трикутнику кожна сторона поділена на 13 рівних частин, точки поділу з'єднані всіма можливими відрізками, паралельними сторонам трикутника. Розглядаються 105 точок – вузлів утвореної сітки разом з точками поділу й вершинами трикутника. Серед цих 105 точок довільно відмічено 65. Доведіть, що знайдеться правильний трикутник з вершинами у позначених точках.

С.4.28. Нехай

$$f(x)=\frac{7|x|}{2\left|\sin^{1997}x\right|+7|x|^4}+\frac{3}{|x|^3}.$$

Доведіть, що при всіх $x \neq 0$ виконується нерівність

$$\left|f(x)+\frac{1}{2}\right|-\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{9}{1+|x|^3}.$$

С.4.29. Доведіть, що рівняння $x^3 - kxy + y^3 = m$ відносно x, y (k і m – параметри, які приймають цілі значення) має безліч розв'язків у цілих числах тоді і тільки тоді, коли $k^3 + 27m = 0$.

С.4.30. Для заданого n знайдіть найменше можливе значення виразу

$$\frac{a_1^{\ 2}+a_2}{a_1+a_2^{\ 2}}+\frac{a_2^{\ 2}+a_3}{a_2+a_3^{\ 2}}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{\ \ 2}+a_n}{a_{n-1}+a_n^{\ 2}}+\frac{a_n^{\ 2}+a_1}{a_n+a_1^{\ 2}},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – довільні дійсні числа, більші або рівні 1.

Другий етап

IX клас

С.4.31. Скільки існує різних упорядкованих трійок (a, b, n) натуральних чисел, кожне з яких не більше за 1 997, що задовольняють співвідношення

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n\ ?$$

С.4.32. Чи можливо розфарбувати клітинки квадрата розмірами 6×6 у чорний та білий кольори таким чином, щоб кількість чорних клітинок довільного квадрата 3×3 була більша за кількість білих клітинок цього квадрата, а кількість білих клітинок довільного квадрата 5×5 була більша за кількість чорних клітинок цього квадрата?

С.4.33. Дано правильний п'ятикутник $ABCDE$ (тобто п'ятикутник, у якому всі сторони рівні, а всі кути дорівнюють 108°). На його сторонах AB, BC, CD, DE вибрано точки M, N, K і P відповідно таким чином, що $BM=BN=CK=PE$. Прямі MN і KP перетинають діагональ BD у точках відповідно R і Q. Доведіть, що навколо чотирикутника, який утворюється внаслідок перетину кутів PRC і EQN, можна описати коло.

С.4.34. Послідовність натуральних чисел a_1, a_2, a_3,... утворена таким чином: $a_1=1\,997$ і для кожного натурального n виконується рівність $a_{n+1}=19a_n+96$. Чи можуть шість послідовних елементів цієї послідовності бути простими числами?

С.4.35. Доведіть нерівність $\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\geq\frac{3}{r}$, де h_a, h_b, h_c – висоти деякого трикутника, а r – радіус кола, вписаного в цей трикутник.

X клас

С.4.36. Знайдіть значення виразу

$$\left[2\sqrt{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+...+1997\cdot1998\cdot1999}\right].$$

С.4.37. Вписане в трикутник ABC коло з центром O дотикається до сторін AB, BC, CA у точках відповідно M, N, K. Відрізки OA, OB, OC перетинають це коло в точках відповідно R, P, Q. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{4}\left(KM\cdot PQ+MN\cdot QR+NK\cdot PR\right)<S<KR\cdot PN+MP\cdot QK+NQ\cdot RM,$$

де S – площа шестикутника $KRMPNQ$.

С.4.38. Знайдіть всі функції f, що визначені на множині всіх цілих чисел і приймають лише цілі невід'ємні значення, які задовольняють умови:

1) $f(mn)=f(m)f(n)$;

2) $f(m+n) \le 1997(f(m)+f(n))$;

3) $f(1997)=0$

для всіх цілих значень m і n.

С.4.39. На площині задано коло ω і точку A зовні нього. З точки A до кола ω проведено дотичні AB і BC (B і C – точки дотику). Точки P і Q лежать на колі ω, а точка S – на відрізку BC так, що точки A, S, P, C лежать на колі ω_1, точки A, S, B, Q – на колі ω_2. При якому положенні точки S кут PSQ має найбільшу величину? (Жодні дві з точок P, S, Q, B, C не збігаються. Кола ω_1, ω_2 і точки P, Q не фіксовані.)

С.4.40. (Шпигунські пристрасті). У невеличкому місті Секретську діють 79 німецьких і 91 англійський шпигун. Кожна пара шпигунів підтримує між собою зв'язок через піцерію або кав'ярню, або не підтримує взагалі. Кожний шпигун підтримує зв'язки з усіма шпигунами іншої країни і двома шпигунами-земляками. Задля конспірації жодні три шпигуни не підтримують попарних зв'язків через один і той самий пункт. Англійці Бонд і Смарт мають зв'язок через піцерію. Де відбудеться зустріч німців Шлага і Плейшнера, призначена опівдні?

XI клас

С.4.41. На площині дано трикутник ABC і точка M, відмінна від точок A, B, C. Доведіть, що площа трикутника, вершинами якого є точки перетину медіан трикутників MAB, MBC та MCA, не залежить від положення точки M (при фіксованому ABC).

С.4.42. Нехай A – кількість 5-елементних множин натуральних чисел із сумою чисел, що не перевищує 100, B – кількість 10-елементних множин натуральних чисел із сумою чисел, що не перевищує 150. (У кожній множині всі числа різні. Множини, що відрізняються лише послідовністю чисел, вважаємо однаковими.) Доведіть, що $\frac{B}{A} > 2$.

С.4.43. Доведіть, що коли натуральні числа m і n задовольняють рівність $m^2+n^2-2(1996+1997)mn=4n$, то число $1\,997m+1$ – квадрат натурального числа.

С.4.44. На площині дано прямокутний трикутник ABC, в якому $\angle BCA = 90°$, $BC < AC$, I – центр вписаного кола, O – середина AB. На стороні AC взята точка Q така, що $CQ = CB$, а на стороні AB – точка P така, що $BP = BC$. Бісектриса прямого кута трикутника ABC перетинає пряму QP у точці S. Пряма, що проходить через S і перпендикулярна до QI, перетинає пряму BQ у точці R. Доведіть, що точки I, R, O лежать на одній прямій.

С.4.45. Доведіть, що для всіх натуральних n виконується нерівність

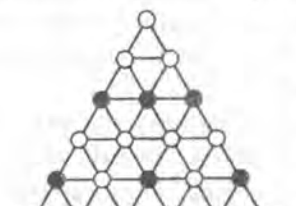
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq (2n+1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2.$$

Фінальний етап

IX клас

С.4.46. Про дійсні числа a, b, c відомо, що вони відмінні від нуля і $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$. Які значення може приймати вираз $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$?

С.4.47. Правильний трикутник ABC поділено на 36 однакових трикутники прямими, паралельними його сторонам. У кожній з 28-ми вершин цих трикутників знаходиться фішка, один бік якої білий, а другий – чорний. Десять фішок лежать чорним боком догори (див. рис.), а решта – білим. За один крок дозволяється перевернути на другий бік фішки, що лежать на одній з прямих, паралельних сторонам трикутника ABC, і хоча б одна з фішок цього набору має бути на одній із сторін трикутника ABC. Яку найменшу кількість кроків треба зробити, щоб усі фішки лежали білим боком догори?



С.4.48. Всередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) взяли точку M так, що $\angle MBA = 20°$, $\angle MAC = 30°$, $\angle MCB = 40°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

С.4.49. На всіх сторонах опуклого п'ятикутника $A_1A_2A_3A_4A_5$, що мають однакову довжину, зовні побудовано правильні трикутники

$A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, ..., $A_5A_1B_5$. Нехай C_i є центром трикутника (тут вважаємо $A_6 = A_1$). Доведіть, що п'ятикутник $C_1C_2C_3C_4C_5$ опуклий.

С.4.50. Нехай a_n ($n \geq 1$) позначає кількість різних способів, за допомогою яких можна викласти прямокутну таблицю розмірами $2 \times n$ (2 рядки, n стовпчиків) пластинками доміно (пластинки розмірами 1×2). Вираз b_n ($n \geq 1$) позначає кількість різних способів, за допомогою яких можна викласти горизонтальну прямокутну таблицю розмірами $2 \times n$ пластинками доміно і кожну з яких не можна відобразити за допомогою симетрії відносно вертикальної осі в деяку іншу пластинку, що належить даній прямокутній таблиці. Виразити b_n через a_i, $i \geq 1$.

С.4.51. Доведіть, що існує натуральне число, куб якого закінчується на 19 981 997.

X клас

С.4.52. У будинку мешкають 200 чоловік. Деякі з них приятелюють між собою. Кількість пар друзів у кожній трійці чоловік є непарною. Знайдіть найменшу можливу кількість пар друзів серед мешканців будинку.

С.4.53. На сторонах AB, BC, CD і DA чотирикутника $ABCD$ з непаралельними протилежними сторонами відмічено точки відповідно K, N, P, M. При цьому $KP \perp MN$ і $\frac{AK}{KB} = \frac{DP}{PC} = \frac{AD}{BC}$, $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = \frac{AB}{DC}$. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло.

С.4.54. Про ціле число n відомо, що $5n$ можна подати у вигляді $2x^2 + 3y^2$, де x і y – цілі числа. Доведіть, що числа $3n$ і $2n$ також можна подати в такому вигляді.

С.4.55. Знайдіть найменше число λ, при якому для всіх невід'ємних a, b, c виконується нерівність $a + b + c - \lambda\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

С.4.56. Чи можна клітинки квадратної таблиці розмірами 1 997×
×1 997 заповнити попарно різними цілими числами так, щоб сума чисел у кожному рядку і в кожному стовпчику дорівнювала 1 997?

С.4.57. На дошці зображено многокутник (необов'язково опуклий), кожна сторона якого не є вертикальною. Нехай A – кількість вершин многокутника, для кожної з яких кут многокутника при цій вершині менший за розгорнутий, і сторони цього кута лежать праворуч від вертикальної прямої, що проходить через цю вершину. Нехай B – кількість вершин многокутника, для кожної з яких кут многокутника при цій вершині менший за розгорнутий, і сторони цього кута лежать ліворуч від вертикальної прямої, що проходить через цю вершину. Доведіть, що $A - B = 1$.

XI клас

С.4.58. Країна Дистанція має n міст, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Відстанню між двома частинами A і B цієї країни назвемо найменшу відстань між містом частини A і містом частини B. Нехай d – таке число, що для будь-якого розбиття Дистанції на дві частини, відстань між ними не перевищує d. Доведіть, що можна побудувати $n-1$ доріг, кожна з яких з'єднає два міста, і при цьому виконуватимуться умови:

1) довжина кожної дороги не перевищує d;

2) цими дорогами з будь-якого міста країни можна проїхати до будь-якого іншого.

С.4.59. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з $\angle ABC = 100°$ взято точку D так, що $\angle ABD = 25°$, $\angle ACD = 5°$. На продовженні променя BA за точкою A відмітили точку E так, що $AE + CD = AC$. Чи будуть перетинатися промені AD і EC?

С.4.60. а) Чи існують функції $f: R \to R$, $g: R \to R$ такі, що для всіх $x \in R$ виконуються рівності: $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$?

б) Чи існують функції $f: R \to R$, $g: R \to R$ такі, що для всіх $x \in R$ виконуються рівності: $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$?

С.4.61. Дано тетраедр $SABC$. Нехай O – центр сфери, яка проходить через вершину S і перетинає ребра SA, SB, SC відповідно в точках A_1, B_1, C_1 таких, що навколо многогранника $ABCA_1B_1C_1$ можна описати сферу. Доведіть, що пряма SO перпендикулярна до площини ABC.

С.4.62. Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$. Доведіть, що $x + y + z \le 2 + xyz$.

С.4.63. Доведіть, що для кожного натурального числа $n > 1$ існує таке натуральне число m, що для деяких цілих чисел k_1, k_2, ..., k_{m+4}, відмінних від нуля, виконуватимуться рівності

$$mn = k_1 + k_2 + ... + k_{m+4} = k_1^{1997} + k_2^{1997} + ... + k_{m+4}^{1997}.$$

Олімпіада 5

Перший етап

VIII клас

C.5.1. Зграя мавп розташувалася по колу. Кожна мавпа має певну кількість бананів і ананасів. Відомо, що жодні дві мавпи, які не знаходяться поруч, не в змозі відразу поділити загальну кількість бананів і ананасів (окремо тих та інших), що вони мають, порівну між собою, залишивши ласощі цілими. Скільки мавп може бути в цій зграї?

C.5.2. За якого найменшого натурального n серед будь-яких послідовних натуральних чисел знайдеться таке число, сума цифр якого ділиться на 7?

C.5.3. У тарабарській абетці k літер. Словами тарабарці вважають ті й лише ті послідовності літер, які можна утворити, використовуючи такі правила: кожна літера абетки є словом; якщо w – слово, а x – така літера абетки, що кількість входжень x в w не більша за кількість входжень до w будь-якої іншої літери абетки, тоді wx – також слово.

Скільки існує n-літерних слів у тарабарській мові?

C.5.4. Скількома способами одну гривню можна розміняти монетами? Нагадаємо, що в Україні в обігу знаходяться монети вартістю 1, 2, 5, 10, 25 та 50 коп.

C.5.5. Дано квадрат $ABCD$. Точки M і L – відповідно середини сторін BC і CD. Коло з центром у точці A і радіусом AB перетинається в точках B і S з колом, центр якого знаходиться в точці M, а радіус дорівнює MB. Пряма MS перетинає сторону CD у точці P, від якої зовні квадрата на прямій MS відклали рівні відрізки PT і PL. Доведіть, що трикутник ALT – рівнобедрений.

C.5.6. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b і c, для яких $abc = 1$, виконується нерівність

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{a^3+c^3+1}\le 1.$$

C.5.7. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAC = \angle DBC = 30°$, $\angle BCA = 20°$ і $\angle BDC = 70°$. Доведіть, що $ABCD$ – трапеція.

C.5.8. Дано нескінченний в усі боки папір у клітинку зі стороною 1 см. В одному з вузлів цього паперу сидить муха, а в двох інших вузлах, відстань між якими 1 см, сидить по павуку. Муха може повзати по межах клітинок зі швидкістю 1 см/с, павуки – лише по діагоналях клітинок зі швидкістю x см/с. Як муха, так і павуки можуть змінювати напрям свого руху або зупинятися (і залишатися будь-який час нерухомими), але лише у вузлах клітинок. Крім того, павуки мають миттєву реакцію. За яких значень x можна гарантувати, що павуки спіймають муху?

С.5.9. Чи існують натуральні числа n і m такі, що число $\sqrt{n+\sqrt{m}}+\sqrt{m+\sqrt{n}}$ також натуральне?

С.5.10. На великому прийомі в посольстві зібралося 1 998 осіб. Відомо, що серед довільної четвірки цих осіб знайдуться троє, які знайомі один з одним, або ж троє, які один з одним не знайомі. Доведіть, що серед цих людей можна знайти 999, які або знайомі один з одним, або ж один з одним не знайомі.

IX клас

С.5.11. Розв'яжіть рівняння $[19x]+98[x]=1998$.

С.5.12. У чотирикутнику $ABCD$ на діагоналі AC взяли точки M, K, P, Q так, що $AM = AB$, $CK = CB$, $AP = AD$, $CQ = CD$. При цьому середини відрізків KM і PQ збігаються. Доведіть, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло.

С.5.13. Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ – попарно різні натуральні числа:

а) доведіть нерівність $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3 \geq (a_1+a_2+...+a_n)^2$;

б) знайдіть усі набори $a_1, a_2, ..., a_n$, для яких виконується рівність.

С.5.14. Кілька мафіозі зібралися на переговори за круглим столом. Не дійшовши згоди, всі вони одночасно вихопили зброю і кожен одним пострілом застрелив когось з інших. Балістична експертиза виявила, що кожні два мафіозі, які сиділи за столом поруч, застрелили двох мафіозі, які теж сиділи за столом поруч. Доведіть, що якісь два мафіозі застрелили один одного, якщо відомо, що принаймні в одного із застрелених влучила більше ніж одна куля.

С.5.15. Відомо, що $x^3 + 1\,500x$ і $x^4 + 2\,000x^2$ – цілі числа. Доведіть, що x також є цілим числом.

С.5.16. Доведіть, що не існує ненульових дійсних чисел a, b, c, для яких кожні два з рівнянь

$$ax^2+bx+c=0;$$

$$bx^2+cx+a=0;$$

$$cx^2+ax+b=0$$

мають спільний корінь, причому спільні корені різних пар рівнянь відрізнялися б один від одного.

С.5.17. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a^2+bc}{a^2+ab}+\frac{b^2+ca}{b^2+bc}+\frac{c^2+ab}{c^2+ca}\geq 3.$$

С.5.18. Доведіть, що існує безліч натуральних чисел n таких, що число $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ непарне.

С.5.19. Площа кожного прямокутного трикутника ABC і MNK дорівнює S, $\angle C = \angle K = 90°$. Трикутники розташовані на площині так, що катети AC і KM лежать на одній прямій, точки B і N лежать по один бік від цієї прямої, а промені CA і KM протилежно напрямлені. Доведіть, що площа перетину цих трикутників не перевищує $\frac{2}{3}S$.

С.5.20. Чи можна відмітити на площині скінченну кількість точок так, щоб виконувалися такі умови:

1) не існує прямої, яка проходить через усі відмічені точки;

2) якщо A, B, C – відмічені точки, які не лежать на одній прямій, то центр кола, що через них проходить, також відмічена точка?

X клас

С.5.21. Доведіть, що для правильного 1998-кутника $A_1A_2 \ldots A_{1998}$ виконується рівність $A_1A_{668} = A_1A_{666} + A_1A_2$.

С.5.22. Доведіть, що дана система не має розв'язків у цілих числах:

$$\begin{cases} k^2+2l=19; \\ l^2+2m=9; \\ m^2+2k=8. \end{cases}$$

С.5.23. Дано вираз $*x^{1998} + *x^{1997} + \ldots + *x + *$. Два гравці роблять по черзі свої ходи, кожного разу замінюючи у виразі одну довільну зірочку на ціле число, яке буде відповідним коефіцієнтом многочлена. Гра продовжується, доки всі коефіцієнти не будуть визначені. Якщо утворений при цьому многочлен матиме хоча б один цілий корінь, то той, хто починав гру, програє, у протилежному випадку – виграє. Хто з двох гравців може забезпечити собі виграш?

С.5.24. Чи обов'язково в нескінченній послідовності різних натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots$ знайдуться три різних числа a, b, c такі, що $a + b$ ділиться на c?

С.5.25. Дано трикутник ABC, в якому $\angle C = 60°$, $CB < CA$. На стороні AC взято точку D таку, що $AD = BC$. Нехай M і N – середини відрізків відповідно AB і DC, K – точка перетину прямих MN і BC, AP – висота трикутника ABC, яка перетинає пряму MN у точці Q. Коло, описане навколо трикутника AQC, перетинає сторону AB у точці T. Доведіть, що у колі, описаному навколо трикутника ABC, діаметр, який проходить через вершину B, перпендикулярний до прямої TK.

С.5.26. Для яких значень d існує опуклий чотирикутник із такими властивостями:

1) його периметр дорівнює 1;

2) сума його діагоналей дорівнює d;

3) на кожній його стороні можна вибрати по точці (відмінній від вершин) так, що обрані точки будуть вершинами квадрата.

С.5.27. Доведіть, що для чисел x, y, z з відрізка $[0; 1]$ виконується нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}}+\frac{y}{\sqrt{1+zx}}+\frac{z}{\sqrt{1+xy}} \le \sqrt{2(x+y+z)}\,.$$

С.5.28. Знайдіть усі можливі пари таких многочленів P, Q з цілими коефіцієнтами, що $Q(0) = 0$ і для всіх x $P(Q(x)) = (x-1)(x-19)\times$ $\times(x-199)(x-1\,998)$.

С.5.29. Числа 1, 2, ..., 1 998 поділено на 5 груп (серед яких можуть бути й порожні). Доведіть, що можна знайти шість таких чисел a, b, c, d, e, f, що належать одній групі і задовольняють рівність $a + b + c =$ $= d + e + f$.

С.5.30. Знайдіть усі функції двох змінних $f(x, y)$, що визначені для всіх додатних x, y і приймають додатні значення та для всіх додатних x, y, z задовольняють умови:

1) $f(x, y) + f(x, z) = f(x, y + z + 1)$;

2) $f(x, y)f(y, x) = xy$.

Другий етап

IX клас

С.5.31. За один крок з п'яти написаних на дошці чисел можна вибрати будь-які чотири, скажімо a, b, c, d (у будь-якій послідовності), витерти п'яте число, а на його місце записати число $1a + 9b + 9c + 8d$. У початковий момент на дошці написано п'ять одиниць. Чи можна за кілька кроків одержати числа 1, 19, 199, 1 998, 3 961?

С.5.32. Доведіть, що нерівність

$$a+b+c \geq a\frac{c+1}{a+1}+b\frac{a+1}{b+1}+c\frac{b+1}{c+1}$$

виконується для довільних додатних дійсних чисел a, b і c.

С.5.33. У коло вписано два прямокутники $ABCD$ і $BMDN$. На цьому колі довільно вибрано точку P і через неї проведено дві прямі l_1 та l_2, які паралельні відповідно AB і BM. Позначимо через Q і S точки перетину l_1 відповідно з AD і BC, а через T і F – точки перетину l_2 відповідно з BN і DM. Доведіть, що $TS \perp QF$.

С.5.34. Замок Дракона має один вихід і складається з великої (але скінченної) кількості кімнат, з кожної з яких одні чи кілька дверей ведуть до інших кімнат. Принц заходить до Замку з наміром визволити сховану там Царівну. Він діє за таким правилом: зайшовши до чергової кімнати, промовляє лічилку "Еники-беники їли вареники", рахуючи двері за годинниковою стрілкою від тієї, в яку він увійшов. У деякий момент він зустрічає Дракона в одному з глухих кутів (кімната з одними дверима) і вбиває його. Через деякий час він знаходить Царівну, але вона застерігає, що ще ніхто не вибирався із заплутаного лабіринту Замку Дракона, крім того, вона переконана, що помре з переляку, якщо зайде до кімнати з мертвим Драконом. Принц упевнений, що продовжуючи діяти за своїм правилом, вони і вихід знайдуть, і Дракона не зустрінуть. Царівна в цьому сумнівається. Хто з них правий?

С.5.35. На сторонах правильного трикутника ABC зовні його побудовані трикутники AC_1B, BA_1C і CB_1A такі, що $\angle C_1BA = \angle B_1CA = 20°$, $\angle A_1BC = \angle B_1AC = 25°$, $\angle C_1AB = \angle A_1CB = 15°$ Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$.

X клас

С.5.36. Див. задачу С.5.31.

С.5.37. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdots\frac{1996}{1997}<\frac{1}{10\sqrt[3]{1999}}.$$

С.5.38. У країні, де налічується 2^{1998} жителів, є 2^{1997} страхових компаній. Чи можуть жителі обрати собі страхові компанії так, щоб середня кількість клієнтів у компанії дорівнювала 2^{1997}, а для довільних двох компаній – становила 2^{1997} жителів, які є клієнтами лише однієї з цих компаній? (Одна людина може обрати собі кілька страхових компаній або не обирати жодної.)

С.5.39. Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x+y+z=5$ та $x^2+y^2+z^2=9$. Доведіть, що

$$4\le xyz\le\frac{112}{27}.$$

С.5.40. У трикутнику ABC $\angle ABC=120°$. Відомо, що AA_1, BB_1, CC_1 – бісектриси. Відрізки B_1C_1 і AA_1 перетинаються в точці A_2, а відрізки B_1A_1 і CC_1 – у точці C_2. Доведіть, що проекції відрізків A_2C_1 і C_2A_1 на пряму AC рівні між собою.

XI клас

С.5.41. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x-1}{1997}+\sqrt{\frac{x-2}{1996}}+\sqrt[3]{\frac{x-3}{1995}}=\frac{x-1997}{1}+\sqrt{\frac{x-1996}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x-1995}{3}}.$$

С.5.42. Квадрат зі стороною 100 поділено на квадратні клітинки зі сторонами 1. На цьому квадраті викладено 1 000 однакових круглих монет радіуса 1 так, що центри всіх монет лежать у вершинах клітинок. Всі монети знаходяться всередині квадрата, не накладаються одна на одну, можуть дотикатися одна до одної і до сторін квадрата. Доведіть, що всередені квадрата можна покласти ще 50 таких монет зі збереженням усіх зазначених умов.

С.5.43. Нехай a, b, c, d – додатні дійсні числа такі, що $abcd=1$. Доведіть, що

$$\frac{1+ab}{1+b}+\frac{1+bc}{1+c}+\frac{1+cd}{1+d}+\frac{1+da}{1+a}\geq 4.$$

С.5.44. У просторі дано два ромби $ABCD$ і $EFGH$. Відомо, що:

1) площини ABC і EFG паралельні;

2) відрізок AE перпендикулярний до площин ABC і EFG;

3) кути BAD і FEH рівні та однаково орієнтовані (один і той самий поворот у просторі відносно прямої AE переводить B у D і F у H).

Нехай P і Q – середини відрізків відповідно BH і DF. Доведіть, що прямі PQ і CG – взаємно перпендикулярні.

С.5.45. Нехай P – множина, що складається з усіх натуральних чисел n, для яких виконується нерівність

$$\left\{n\sqrt{2}\right\}+\left\{\sqrt{2}\right\}>1.$$

Усі числа з P виписано в порядку зростання. Яке число стоїть у цій послідовності на 1 998-му місці?

Фінальний етап

IX клас

С.5.46. Через вершини B і C трикутника ABC провели коло, яке перетинає сторони AB і AC відповідно в точках M і N. Через вершину A провели пряму l так, що вона перетинає коло, описане навколо трикутника ABC у точці P, а пряму MN – у точці K (K лежить зовні описаного кола). Доведіть, що точки P, K, B, M лежать на одному колі.

С.5.47. У кожній вершині опуклого 1 998-кутника розташовані жетони, на кожному з яких написане ціле число (на різних жетонах числа можуть бути і різними, і однаковими). Сума всіх цих чисел дорівнює 1. Вибирають вершину і збирають жетони, рухаючись проти годинникової стрілки доти, доки сума чисел на зібраних жетонах додатна. Чи можна вибрати вершину так, щоб, стартуючи з неї, зібрати всі жетони?

С.5.48. Доведіть, що для натурального числа $n>1$ число $\dfrac{(n-1)!}{n(n+1)}$ буде цілим парним числом тоді й лише тоді, коли n та $n+1$ є складеними числами.

С.5.49. Нехай $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$. Доведіть, що

$$\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b}\geq\frac{5}{3}.$$

С.5.50. Всередині гострого кута з вершиною O довільно відмічені дві різні точки A і B. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте пряму l так, щоб вона проходила через точку B та перетинала сторони кута в таких точках X та Y, що $\angle XAY = 90°$.

С.5.51. Скільки серед перших десяти тисяч натуральних чисел є таких, які закінчуються нулем і можуть бути подані у вигляді $5^n + 6^m + 7^k$, де m, n, k – натуральні числа?

X клас

С.5.52. Доведіть, що всі натуральні числа можна розфарбувати в чотири кольори так, що будь-які числа i, j, для яких $|i-j|$ дорівнює 2, 3 або 5, мають різні кольори. Доведіть, що в три кольори так розфарбувати неможливо.

С.5.53. Про функцію $f: R \to R$ відомо, що $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ при $0 \leq x \leq 2$ та $f(x)=f(x+2)$ для всіх $x \in R$. Доведіть, що для дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ таких, що $x_1+x_2+...+x_n=1$, виконується нерівність $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\geq 1$.

С.5.54. Доведіть, що якщо всередині гострокутного трикутника ABC існує точка P така, що $\angle PBA = \angle PCB$, $\angle PBC = \angle PAC$, то $AB < \sqrt{2}AC$.

С.5.55. Знайдіть усі натуральні числа n, які мають 16 дільників $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{16} = n$ таких, що $d_6 = 18$ і $d_9 - d_8 = 17$.

С.5.56. Гострокутний трикутник ABC з $\angle ABC = 60°$ вписано в коло. Нехай H – точка перетину висот AD і CP, N – точка перетину прямої CP з колом $(N \neq C)$. З точки C на пряму AN опущено перпендикуляр. Точка K – основа перпендикуляра, M – точка його перетину з прямою AB. Доведіть, що $S_{HPBD} = S_{AKM} + S_{AHC}$ (S_F позначає площу фігури F).

С.5.57. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, для яких $f(x+y)=$ $=\max(f(x), y)+\min(x, f(y))$ для всіх дійсних x, y.

С.5.58. Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x + y + z = 0$. Доведіть, що виконується нерівність $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} y \cdot \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} z \times \times \operatorname{arctg} x \le 0$.

С.5.59. Всередині гострокутного трикутника ABC відмічено точки M і N так, що $\angle BMC = 90°$, $\angle MBA = \angle NBC$, $\angle MCA = \angle NCB$. З точки N опущено перпендикуляри NP і NQ на сторони відповідно AB та AC. Доведіть, що $AM \perp PQ$.

С.5.60. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (k, l, m), що задовольняють умову $k^{l^m} \cdot l^{m^k} \cdot m^{k^l} = 1998^{1997} klm$. Тут вважаємо $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$.

С.5.61. Відомо, що для даного натурального числа n існують раціональні числа p і q такі, що $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{3}$. Доведіть, що $n = k^3$ або $n = 3k^3$ для деякого натурального k.

С.5.62. По колу в деякій послідовності розставлені числа 1, 2, ..., 1 998. Доведіть, що серед них знайдуться два числа a, b, які стоять підряд або через одне, і такі, що $|a - b| < 750$.

С.5.63. Нехай σ – сфера, описана навколо довільного тетраедра $ABCD$, σ_A, σ_B, σ_C, σ_D – сфери, що вписані в тригранні кути тетраедра з вершинами відповідно A, B, C, D та дотикаються внутрішнім чином до σ у точках відповідно A_1, B_1, C_1, D_1. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перетинаються в одній точці.

Олімпіада 6

Перший етап

VIII клас

С.6.1. Нехай p, q, r – прості числа такі, що $2p > q$, $q > 2r$ і $q > p + r$. Доведіть, що $p + q + r \ge 20$.

С.6.2. Про дійсні числа x та y відомо, що $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = 1999$. Знайдіть значення виразу $\dfrac{x^4+y^4}{x^4-y^4} + \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$.

С.6.3. До натурального числа n додали 72 і в сумі дістали число, записане тими самими цифрами, що й число n, але у зворотному порядку. Знайдіть усі числа n, що задовольняють вказану умову.

С.6.4. Нехай CH – висота трикутника ABC, O – центр кола, описаного навколо нього. Точка T – проекція точки C на пряму AO. Доведіть, що пряма TH ділить сторону BC навпіл.

С.6.5. Розв'яжіть у натуральних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} a^4 + 14ab + 1 = n^4, \\ b^4 + 14bc + 1 = m^4, \\ c^4 + 14ca + 1 = k^4. \end{cases}$$

С.6.6. Два гравці по черзі записують усі правильні нескоротні дроби зі знаменниками від 1 до 1 999 і при цьому пишуть знак "+" чи "–" перед кожним дробом. Після того як будуть виписані всі такі дроби, знаходять їх суму. Якщо ця сума – ціле число, то виграє той, хто останнім зробив запис, інакше виграє його суперник. Хто зможе забезпечити собі виграш?

С.6.7. Доведіть, що за будь-яких додатних дійсних x та y виконується нерівність

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{9}{4xy}.$$

С.6.8. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – різні прості числа ($n \geq 2$). Із цих чисел складені всі можливі добутки, що містять парну кількість співмножників (усі співмножники – різні). Нехай S_n – сума всіх таких добутків. Наприклад, $S_4 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4$. Доведіть, що $S_n + 1$ ділиться на 2^{n-2}.

С.6.9. Нехай $ABCDEF$ – опуклий шестикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, а точки M, N, K, L, P, Q – середини сторін відповідно AB, BC, CD, DE, EF, FA. Доведіть, що коли $MN + KL + PQ = NK + PL + MQ$, то прямі QK, NP, ML перетинаються в одній точці.

С.6.10. Кожна точка площини пофарбована в один із 1 999 кольорів. Доведіть, що на цій площині існують чотири прямі загального положення (жодні дві з яких непаралельні і жодні три не перетинаються в одній точці), всі шість точок перетину яких однокольорові.

С.6.11. Доведіть, що не існує натурального числа k такого, що $k^{1999} - k^{1998} = 2k + 2$.

С.6.12. Розв'яжіть рівняння

$$[x]\{x\} = 1999x.$$

С.6.13. Квадратний тричлен $x^2 + bx + c$ має два корені, що належать інтервалу (2; 3). Доведіть, що $5b + 2c + 12 < 0$.

С.6.14. Чи існує функція $f: R \to R$, що задовольняє обидві такі умови:

1) якщо $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$;

2) для всіх дійсних x виконується нерівність $f\left(x^2 - 1998x\right) - \left(f\left(2x - 1999\right)\right)^2 \geq \frac{1}{4}$?

С.6.15. Через довільну внутрішню точку K трапеції $ABCD$ проведена пряма, що перетинає основи BC і AD у точках відповідно P і Q. Кола, описані навколо трикутників BPK і DQK, перетинаються, крім точки K, ще й у точці L. Доведіть, що точка L лежить на діагоналі BD.

С.6.16. На поле для "морського бою" (квадрат 10×10) виставляють десять "кораблів" у такій послідовності: спочатку один "корабель" розмірами 1×4, потім два, три і чотири відповідно розмірами 1×3, 1×2, 1×1. Правила не дозволяють "кораблям" торкатися один одного навіть вершинами. Чи може так трапитися, що коли частину "кораблів" уже виставлено, наступного немає де розмістити?

С.6.17. У гострокутному трикутнику ABC точки P, N, M є основами висот, проведених із вершин відповідно C, A, B. Довжини проекцій сторін AB, BC, CA на прямі відповідно MN, PM, NP є рівними між собою. Доведіть, що трикутник ABC – правильний.

С.6.18. Нехай для кожного n α_n позначає кут з інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює n. Доведіть, що

$$\sqrt{1+1^2}\sin\left(\alpha_1 - \alpha_{1000}\right) + \sqrt{1+2^2}\sin\left(\alpha_2 - \alpha_{1000}\right) + \ldots +$$

$$+ \sqrt{1+2000^2}\sin\left(\alpha_{2000} - \alpha_{1000}\right) = \sin\alpha_{1000}.$$

С.6.19. Центр кола, радіус якого дорівнює r, лежить на бісектрисі прямого кута A на відстані a від його сторін ($a > r$). Дотична до кола перетинає сторони кута в точках B і C. Знайдіть найменше можливе значення площі трикутника ABC.

С.6.20. Нехай x, y, z – дійсні числа з інтервалу (0; 1). Доведіть, що

$$\frac{1}{x(1-y)}+\frac{1}{y(1-z)}+\frac{1}{z(1-x)}\geq\frac{3}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}.$$

X клас

С.6.21. Для дійсних чисел $x, y \in [1;\ 2]$ доведіть нерівність

$$3(x+y)\geq 2xy+4.$$

С.6.22. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\pi-2}{2}+\frac{2}{1+\cos\left(2\sqrt{x}\right)}+\arcsin\left(x^3-8x-1\right)=\operatorname{tg}^2\sqrt{x}-\sqrt{x^4+x^3-5x^2-8x-24}.$$

С.6.23. Для яких пар простих натуральних чисел (p, q) значення виразу $\frac{p}{q}+\frac{q+1}{p+1}$ є натуральним числом?

С.6.24. Доведіть, що для довільного трикутника виконується нерівність $r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2\geq 2S$, де r – радіус кола, вписаного в трикутник, r_a, r_b, r_c – радіуси трьох його зовнівписаних кіл, S – площа трикутника.

С.6.25. Доведіть, що многочлен $x^{1999}+x^{1998}+\ldots+x^3+x^2+ax+b$ за будь-яких дійсних значень коефіцієнтів $a > b > 0$ не має цілого кореня.

С.6.26. На колі дано точки A і B. За допомогою циркуля й лінійки побудуйте на цьому колі точки C, D, E, що лежать по один бік від прямої AB і для яких п'ятикутник з вершинами A, B, C, D, E має найбільшу можливу площу.

С.6.27. У клітинках квадратної таблиці розмірами 10×10 довільно розставлено числа 1, 2, 3, …, 99, 100 (кожне число використано лише один раз). Доведіть, що в таблиці існують три клітинки, сума чисел в яких не перевищує 182, а центри утворюють рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого паралельні краям таблиці.

С.6.28. Знайдіть найменший додатний період функції

$$f(x)=\sin(1998x)+\sin(2000x).$$

С.6.29. Дано гострокутний трикутник ABC, в якому P, M, N – середини сторін відповідно AB, BC, AC. Всередині трикутника взято точку H і з неї опущено перпендикуляри HK, HS, HQ на сторони відповідно AB, BC, AC ($K\in AB$, $S\in BC$, $Q\in AC$). З'ясувалося, що $MK=MQ$, $NS=NK$, $PS=PQ$. Доведіть, що H – точка перетину висот трикутника ABC.

С.6.30. Доведіть, що для кожного цілого числа $n\geq 1$ існує таке дійсне число α, що для будь-якого цілого $m\geq 1$ число $[\alpha^m]+1$ ділиться на n.

Другий етап

IX клас

С.6.31. З пункту A у напрямі до пункту B о 10-й годині виїхали автомобіль і мотоцикліст, а через півгодини з пункту B виїхав велосипедист (у напрямі до пункту A) і вийшов пішохід (у напрямі від пункту A). Автомобіль зустрів велосипедиста об 11-й годині і ще через півгодини наздогнав пішохода, а мотоцикліст наздогнав пішохода о 12-й годині 30 хвилин. О котрій годині зустрілися мотоцикліст і велосипедист? (Швидкості і напрями руху всіх учасників сталі.)

С.6.32. Чи може рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$ мати лише від'ємні корені, якщо відомо, що $a+2b+4c=-\dfrac{1}{2}$?

С.6.33. На сторонах BC і AC рівнобедреного трикутника ABC ($AB=BC$) відмітили відповідно точки E і D так, що $DE\parallel AB$. На продовженні сторони CB за точкою B довільно відмітили точку K. Нехай P – це точка перетину прямих AB і KD, Q – точка перетину прямих AK і DE. Доведіть, що CA – бісектриса $\angle PCQ$.

С.6.34. Чи існують цілі числа k і l, для яких

$$\frac{(k-3)(k-2)(k-1)k+1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)+1}=l(l+1)+(l+1)(l+2)+(l+2)l?$$

С.6.35. Нехай β – дане дійсне число. Послідовність цілих чисел $a_1,a_2,a_3,\ldots$ є такою, що $a_1=(\beta]$ і $a_{n+1}=(a_n+\beta]$ для всіх $n\geq 1$.

Доведіть, що сума $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_n}{n}$ є цілим числом для будь-якого натурального n. (Тут для дійсного числа β через $(\beta]$ позначається найменше ціле число, яке не менше за β).

X клас

С.6.36. Для дійсного числа α позначимо $(\alpha]$ найменше ціле число, яке не менше за α. Знайдіть усі дійсні значення x, при яких виконується рівність

$$(\sin x]^2+(\cos x]^2=|\operatorname{tg} x|+|\operatorname{ctg} x|.$$

С.6.37. На площині довільно відмічено 37 точок. Доведіть, що серед них обов'язково знайдуться або дві точки на відстані, більшій за 6, або дві точки на відстані, меншій за 1,5.

С.6.38. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, для яких

1) $|f(x)|\geq 1$ при всіх дійсних x,

2) $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ для всіх дійсних x і y.

С.6.39. Чи можна стверджувати, що два трикутники рівні, якщо рівними є радіуси вписаних кіл, радіуси описаних кіл та площі цих трикутників?

С.6.40. На колі ω відмітили дві різні точки A і B. Розглядаються всі точки X кола ω, відмінні від A і B. Нехай Y – середина хорди AX, а Z – проекція точки A на пряму BX. Доведіть, що всі прямі YZ проходять через певну фіксовану точку, яка не залежить від вибору точки X.

XI клас

С.6.41. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+\arcsin y=y^2+\arcsin x, \\ x^2+y^2-3x=2y\sqrt{x^2-2x-y}+1. \end{cases}$$

С.6.42. З міста A о 10-й годині в одному напрямі виїхали автобус і велосипедист, а через 15 хв їм назустріч з міста B виїхав мотоцикліст. Автобус проїхав повз пішохода о 10-й годині 30 хвилин, зустрів мотоцикліста об 11-й годині і прибув до міста B о 12-й годині. Мотоцикліст зустрів велосипедиста через 15 хв після зустрічі з автобусом і ще через 15 хв наздогнав пішохода. Коли зустрілися велосипедист і пішохід? (Швидкості і напрями руху всіх учасників сталі, пішохід і мотоцикліст рухалися в напрямі до міста A.)

С.6.43. В опуклий чотирикутник $ABCD$ вписано коло, що дотикається до його сторін AB, BC, CD і DA у точках відповідно M, N, P і K. Нехай O – центр вписаного кола, а площа чотирикутника $MNPK$ дорівнює S. Доведіть нерівність $2S \le OA \cdot OC + OB \cdot OD$.

С.6.44. Для простих чисел p, q і натуральних чисел n, k, r виконується рівність $p^{2k} + q^{2n} = r^2$. Доведіть, що число r просте.

С.6.45. Знайдіть усі многочлени P з дійсними коефіцієнтами такі, що для всіх дійсних x виконується рівність

$$(1+2x)P(2x) = (1+2^{1\,999}x)P(x).$$

Фінальний етап

IX клас

С.6.46. Яке з двох чисел більше: $\sqrt{1\,997} + 2\sqrt{1\,999} + 2\sqrt{2\,001} + \sqrt{2\,003}$ чи $2\sqrt{1\,998} + 2\sqrt{2\,000} + 2\sqrt{2\,002}$?

С.6.47. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного в гострокутний трикутник ABC кола зі сторонами BC, AC і AB відповідно, а A_2, B_2, C_2 – відповідно точки перетину висот трикутників AB_1C_1, A_1BC_1 і A_1B_1C. Доведіть, що прямі A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 перетинаються в одній точці.

С.6.48. На координатній площині задано параболу $y = x^2$ і точки $A(x_1, x_1^2)$, $B(x_2, x_2^2)$ такі, що $x_1 = -998$, $x_2 = 1999$. Послідовно будуються відрізки BX_1, AX_2, BX_3, AX_4, …, $BX_{1\,997}$, $AX_{1\,998}$, де X_k – точки з координатами $(x_k; 0)$, $1 \le k \le 1998$, і x_3, x_4, …, $x_{2\,000}$ – абсциси точок перетину параболи з відрізками відповідно BX_1, AX_2, …, $BX_{1\,997}$, $AX_{1\,998}$. Знайдіть значення $\dfrac{1}{x_{1\,999}} + \dfrac{1}{x_{2\,000}}$.

С.6.49. Для дійсних чисел $x \geq 0$ і $y \geq 0$ доведіть нерівність

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

С.6.50. Дано коло ω і на ньому три різні точки A, B, C. Побудуйте за допомогою циркуля та лінійки точку D, що лежить на колі ω, таку, щоб у чотирикутник $ABCD$ можна було вписати коло (точки A, B, C, D мають бути розміщені на колі ω у зазначеній послідовності).

С.6.51. Послідовність цілих чисел a_1, a_2, a_3, ... така, що $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ і для кожного натурального $n \geq 1$

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2\,001a_{n+1} - 1\,999a_n, \text{ якщо добуток } a_{n+1}a_n \text{ – парне число,} \\ a_{n+1} - a_n, \text{ якщо добуток } a_{n+1}a_n \text{ – непарне число.} \end{cases}$$

Чи існує таке натуральне m, що $a_m = 2\,000$?

X клас

С.6.52. Знайдіть усі функції $f: R \to R$ такі, що для будь-яких x, y і z виконується рівність $f(x)f(y)f(z) - f(xyz) = xy + yz + xz + x + y + z$.

С.6.53. У трикутнику ABC точка X є проекцією точки дотику вписаного кола до сторони BC на середню лінію, паралельну BC. Відомо, що $\angle BAC \geq 60°$. Доведіть, що кут BXC є тупим.

С.6.54. Деякі пари міст країни з'єднані авіалініями, а деякі не з'єднані. Але в кожному місті є аеропорт, з якого можна дістатися до будь-якого іншого міста, зробивши не більш як одну пересадку. Турист, якому заманеться здійснити кругову подорож по кількох містах країни, змушений буде облетіти не менше п'яти міст. Доведіть, що з кожного міста країни виходить одна й та сама кількість авіаліній. (Якщо є авіалінія з одного міста до другого, то є й із другого до першого. Кругова подорож – це маршрут, що проходить не менш, як по трьох містах, починається і закінчується в одному й тому самому місті, інші міста в ньому не повторюються.)

С.6.55. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в точках A і B. На колі ω_2 взято точку C таким чином, що CA – дотична до кола ω_1. Через точку A проведено пряму, яка перетинає кола ω_1 і ω_2 у точках відповідно M і N.

відмінних від точки A. Точка P – середина відрізка AC, Q – середина MN, а S – точка перетину прямої BQ з колом ω_1, відмінна від точки B. Доведіть, що прямі AS і PQ паралельні.

С.6.56. Для яких значень $k \geq 2$ множину натуральних чисел можна розфарбувати в k кольорів таким чином, що в ній не знайдеться жодної однокольорової нескінченної арифметичної прогресії, але для довільних двох кольорів знайдеться прогресія, кожен з членів якої пофарбовано в один із цих двох кольорів?

С.6.57. Задано натуральне число n. Знайдіть найбільшу можливу довжину такого інтервалу числової прямої, що для довільно взятих з нього чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ многочлен $x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ не має коренів на всій дійсній осі (вважається, що лівий і правий кінці інтервалу не належать йому).

XI клас

С.6.58. На дошці написано 16 різних натуральних чисел, жодне з яких не перевищує 30. Доведіть, що серед цих чисел обов'язково знайдуться два взаємно простих.

С.6.59. Знайдіть суму всіх можливих добутків натуральних чисел вигляду $k_1k_2...k_{999}$, де в кожному добутку $k_1 < k_2 < ... < k_{999} \leq 1\,999$, і немає k_i та k_j таких, що $k_i + k_j = 1\,999$.

С.6.60. Три сфери $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ перетинаються по одному колу ω. Нехай A – довільна точка, що лежить на колі ω. Промінь AB перетинає сфери $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ у точках відповідно B_1, B_2, B_3, а промінь AC перетинає сфери $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ у точках C_1, C_2, C_3 ($B_i \neq A$, $C_i \neq A$, $i = 1, 2, 3$). Відомо, що B_2 – середина відрізка B_1B_3. Доведіть, що C_2 – середина відрізка C_1, C_3.

С.6.61. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Через його вершину B під прямим кутом до AB проведено пряму l. На прямій AC взято довільну, відмінну від вершин трикутника, точку D і через неї під прямим кутом до AC проведено пряму, яка перетинає l у точці F. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника BCD, лежить на колі, описаному навколо трикутника ABD.

С.6.62. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – дійсні числа з відрізка $[1; \sqrt{2}]$, $n \geq 2$. Доведіть, що виконується нерівність

$$\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_2^2-1}}{x_3}+\dots+\frac{\sqrt{x_n^2-1}}{x_1}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}n.$$

С.6.63. Нехай P – многочлен із цілими коефіцієнтами. Відомо, що число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ є його коренем. Доведіть, що число $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ також є його коренем.

Олімпіада 7

Перший етап

VIII клас

С.7.1. Розв'яжіть рівняння

$$2\,000x^3 = x^2 + x + \frac{1}{3}.$$

С.7.2. Точка D лежить на стороні BC гострокутного трикутника ABC і не є його вершиною. Чи можуть всі трикутники ABC, ABD, ADC бути одночасно рівнобедреними?

С.7.3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}1\,998x+1\,999y=(x-y)^2,\\ 1\,999y+2\,000z=(y-z)^2,\\ 2\,000z+1\,998x=(z-x)^2.\end{cases}$$

С.7.4. Випробування нової моделі автомобіля показали, що шини на колесах повністю зношуються через 12, 15, 18 або 20 тис. км залежно від їх розміщення (шини однакові, під час випробувань їх місцями не міняли). Чи можна, маючи чотири нові шини, проїхати відстань 16 тис. км, якщо при цьому дозволяється переставляти місцями будь-які колеса?

С.7.5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Відомо, що $AO = BO$, $BC = CD$ і $AC = OD$. Знайдіть $\angle BAC$.

С.7.6. На дошці записано вираз

$$19\,992{*}{*}{*}2{*}{*}1.$$

Миколка й Олежка грають у гру, по черзі підставляючи замість зірочок одну з цифр від 0 до 9 включно. Першим робить хід Миколка. Гра продовжується доти, доки всі зірочки будуть замінені на цифри. Якщо утворене число ділиться на 13, виграє Миколка. В іншому разі – Олежка. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

С.7.7. Площину розбито на однакові рівносторонні трикутники (кожна вершина є спільною для шести трикутників). У кожному трикутнику записане довільне число. Доведіть, що за будь-якого заповнення числами знайдеться такий трикутник, що записане в ньому число не менше принаймні шести чисел, записаних у 12 сусідніх трикутниках. Трикутники вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну вершину.

С.7.8. Знайдіть усі додатні числа x, що задовольняють рівність $x[x]+[x]\{x\}+\{x\}x=2\,000$.

С.7.9. Нехай M і N – відповідно середини сторін BC і AD опуклого чотирикутника $ABCD$, P – точка перетину відрізків AM і BN, Q – точка перетину відрізків DM і CN. Доведіть, що пряма PQ ділить відрізок MN навпіл тоді й тільки тоді, коли виконується рівність

$$\frac{AP}{PM}+\frac{BP}{PN}+\frac{CQ}{QN}+\frac{DQ}{QM}=4.$$

С.7.10. Дев'ять восьмикласників відвідують предметні гуртки. Відомо, що будь-які два з них відвідують хоча б один спільний гурток, а кожен учень ходить на заняття не більш як трьох гуртків. Доведіть, що є гурток, який відвідують не менш як п'ять учнів.

IX клас

С.7.11. Знайдіть усі трійки дійсних чисел x, y, z, які задовольняють рівняння

$$2(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z.$$

С.7.12. Знайдіть числове значення дробу $\frac{3a-b}{a-b}$, коли відомо, що $b>a>0$ і $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$.

С.7.13. У площині опуклого чотирикутника $ABCD$ відмічено такі точки M і N, що чотирикутники $DBCM$ і $DACN$ – паралелограми. Доведіть, що площа трикутників ACM і DBN однакова.

С.7.14. Точки O_1, O_2, O_3 є центрами кіл відповідно ω_1, ω_2, ω_3, причому точка O_3 – середина відрізка O_1O_2, а радіуси кіл ω_1 і ω_2 однакові. Дотична l до кола ω_3 паралельна відрізку O_1O_2 і перетинає коло ω_1 у точках N і H, а коло ω_2 – у точках A і B, причому точки A і H лежать між точками N і B. Коло ω_3 перетинається з колом ω_1 у точках M і Q, а з колом ω_2 – у точках K і P, причому точки P і Q лежать ближче до прямої l, ніж точки K і M. Точка D (відмінна від K) – це точка перетину прямої AK з колом ω_3. Доведіть, що точки N, D, Q лежать на одній прямій.

С.7.15. У гострокутному трикутнику ABC відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 – висоти, $\angle A = 45°$. Доведіть, що висота AK трикутника AB_1C_1 дорівнює половині периметра трикутника $A_1B_1C_1$.

С.7.16. Навколо трикутника ABC описано коло ω. Точка I – центр вписаного кола. Точка T (відмінна від A) – це точка перетину прямої AI з колом ω. Пряма, що проходить через точку I перпендикулярно до прямої AT, перетинає коло ω у точках P і Q. Прямі TP і TQ перетинають відрізок BC у точках M і N. Доведіть, що кути IMT та INT рівні.

С.7.17. Доведіть, що для будь-яких дійсних додатних чисел x та y виконується нерівність

$$\frac{(x+y)^{16}}{x^9y^7} \geq \frac{16^{16}}{9^9 \cdot 7^7}.$$

С.7.18. Нехай $f(x)=2x^2-1$. Розв'яжіть рівняння $f(f(...f(f(x))...))=x$, де функцію f застосовано 2 000 разів.

С.7.19. Знайдіть усі монотонні (тобто неспадні або незростаючі) функції f, задані на множині дійсних додатних чисел, які набувають дійсних додатних значень і для будь-яких $x > 0$, $y > 0$ задовольняють рівність $f(xf(y)) = yf(x)$.

С.7.20. У підземній країні гномів деякі міста-печери з'єднані між собою переходами-тунелями. Круговий шлях по містах країни – це маршрут, який проходить у тунелях. Він починається і закінчується в одному й тому самому місті, і жодне інше місто не відвідується двічі. Відомо, що будь-які два міста гномів належать деякому круговому шляху. Доведіть, що будь-які два тунелі належать деякому круговому шляху.

X клас

С.7.21. При якому x функція $f(x) = [x^2] - \{2\,000x\}$ набуває найбільшого значення на множині [0;2000)?

С.7.22. Дано числа x, y, z, що задовольняють систему

$$\begin{cases} \dfrac{16xy}{z(x+2y)} + \dfrac{16xz}{y(x+2z)} + \dfrac{32yz}{xy+yz+zx} = -63, \\ \dfrac{xy}{x+2y} + \dfrac{xz}{x+2z} + \dfrac{2xyz}{xy+yz+zx} = 125. \end{cases}$$

Знайдіть значення виразу $\dfrac{xyz}{xy+2yz+zx}$.

С.7.23. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які для будь-яких дійсних x, y задовольняють рівність $f(x+y) = \{f(x)\} + \{f(y)\}$.

С.7.24. Чи завжди з шести відрізків можна скласти тетраедр, якщо з будь-яких трьох із них можна скласти трикутник?

С.7.25. Нехай f – диференційовна функція, яка задана на множині всіх дійсних чисел і не є тотожним нулем. Доведіть, що виконується хоча б одне з таких тверджень:

1) для деякого дійсного x $f(x) \cdot \sin x > 0$;

2) для деякого дійсного x $f'(x) \cdot \cos x < 0$ (f' – похідна функції f).

С.7.26. Нехай h_a, h_b, h_c – висоти трикутника, r – радіус вписаного в нього кола. Доведіть, що виконується нерівність

$$\frac{h_a + r}{h_a - r} + \frac{h_b + r}{h_b - r} + \frac{h_c + r}{h_c - r} \ge 6.$$

С.7.27. Нехай $d_1, d_2, \ldots, d_k$ – усі такі дільники натурального числа n, що $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких $k \geq 4$ і виконується рівність $n = d_1 + d_2^2 + d_3^3 + d_4^4$.

С.7.28. Доведіть, що число $\dfrac{170}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + 1}$ можна подати у вигляді суми кубічних коренів із цілих чисел.

С.7.29. Дано трикутник ABC. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного в нього кола до сторін відповідно BC, CA, AB. На променях AB і AC взято точки C_B, B_C відповідно так, що $AC_B = CA_1$, $AB_C = BA_1$. Позначимо через l_A пряму, що проходить через точку A перпендикулярно до $B_C C_B$. Аналогічно визначаються прямі l_B (при цьому в попередніх позначеннях зроблена така заміна: $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$) та l_C (зроблена така заміна: $A \to C$, $C \to B$, $B \to A$). Доведіть, що прямі l_A, l_B, l_C перетинаються в одній точці.

С.7.30. Є група з $n \geq 3$ осіб, деякі члени якої знайомі між собою. Відомо, що для будь-яких двох осіб A і B з групи знайдуться особи C, D, …, E, F такі, що можна утворити ланцюжок знайомств: A знайомий відповідно із C, C з D, …, E з F, F з B (довжина ланцюжка довільна). За один день одна людина знайомить між собою всіх своїх знайомих. Для даного n знайдіть найменше можливе k таке, що за k днів можна перезнайомити між собою всіх людей будь-якої групи з n осіб із вказаними властивостями. З самого початку відомо, хто з ким знайомий. Якщо A знайомий з B, то B знайомий з A. Кожного дня можемо вибирати людину, що буде знайомити своїх знайомих.

Другий етап

IX клас

С.7.31. Розв'яжіть рівняння

$$n^2 - 10n + 21 = p,$$

де n – натуральне число, p – просте число.

С.7.32. Комп'ютер Незнайки вміє виконувати лише дві операції з натуральними числами:

1) замінити n на $\frac{n}{2}$, якщо n парне;

2) замінити n на $\frac{n+2\,001}{2}$, якщо n непарне.

Чи правда, що Незнайко, починаючи з $n=1$, може одержати на своєму комп'ютері будь-яке натуральне число, менше за 2 001?

С.7.33. У країні Кмітляндії деякі міста з'єднані між собою дорогами (кожна дорога з'єднує два різні міста). Відомо, що з кожного міста виходить три або п'ять доріг та існують такі два міста, з яких виходить різна кількість доріг. Чи може бути в цій країні:

а) 2 000 міст;

б) 2 001 місто?

С.7.34. Нехай H – ортоцентр трикутника ABC $(AB \neq AC)$. Позначимо через M і N середини відрізків відповідно BC і AH, а через K – точку перетину прямої MN з бісектрисою кута BAC. Доведіть, що $\angle AKH = 90^\circ$.

С.7.35. Знайдіть усі пари (a, b) натуральних чисел a і b такі, що число $4a^2b^4 - 4a + b^2$ є квадратом цілого числа.

X клас

С.7.36. $ABCDE$ – правильний п'ятикутник зі стороною 1. Знайдіть площу правильної п'ятикутної зірки, окресленої замкненою ламаною $ACEBDA$.

С.7.37. Розв'яжіть рівняння

$$(x-1)(500x-501)(1\,000x-1\,001)^2 = 2\,001.$$

С.7.38. Дано трикутник ABC, в якому $AB = BC$. Точка O – центр описаного кола, точка I – центр вписаного кола трикутника. Точка D лежить на стороні BC, причому прямі DI та AB паралельні. Доведіть, що прямі DO і CI перпендикулярні.

С.7.39. Про квадратний тричлен із старшим коефіцієнтом 1 відомо, що він має два цілі корені і що його значення в точці 2 000 дорівнює простому числу p. Знайдіть найбільше значення цього тричлена на відрізку $[1\,999;\ 2\,001]$.

С.7.40. Таблицю розмірами $2\,000\times2\,000$ заповнено дійсними числами таким чином, що для будь-якого натурального числа $n\geq2$ та будь-якого набору натуральних чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (необов'язково різних), жодне з яких не перевищує 2 000, виконується така умова: добуток n чисел, які стоять у клітинках таблиці з координатами $(i_1; i_2)$, $(i_2; i_3)$, ..., $(i_{n-1}; i_n)$ та $(i_n; i_1)$, дорівнює $2\,000^n$. Для якого найбільшого натурального K можна напевно стверджувати, що серед чисел таблиці є K однакових?

XI клас

С.7.41. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}+\ldots+$$

$$+\frac{2\,000x}{(x+1)(2x+1)\ldots(2\,000x+1)}>1.$$

С.7.42. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точка O – це точка перетину діагоналей AC і BD, точка M – середина сторони AB. Відомо, що $BO=OD$. Прямі CM і BD перетинаються в точці P, прямі AP і BC – у точці N, прямі NO і AD – у точці Q. Доведіть, що точка Q – середина сторони AD.

С.7.43. На столі лежить деякий набір з 2 001 монети, серед яких можуть бути монети номіналом 2, 5, 10, 25 та 50 коп. Кожен із двох гравців має необмежену кількість монет вартістю 1, 2, 5, 10 та 25 коп. Гра проводиться за такими правилами: по черзі кожен з гравців бере одну довільну монету з тих, що лежать на столі, і будь-яким чином розмінює її на монети меншого номіналу (просто замінювати на таку саму монету не дозволяється). Розміняти 1 коп. вже не можна. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто може забезпечити собі перемогу: той, хто починає гру, чи його суперник?

С.7.44. Знайдіть усі такі функції $f: Z\to Z$, що для будь-яких $m, n\in Z$ виконується рівність $f(m+f(f(n)))=f(m)+n$.

С.7.45. Про дійсні числа a, b, c та x, y, z відомо, що $a+b+c=$ $=x+y+z=ax+by+cz=0$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$, $x^2+y^2+z^2\neq 0$.

Знайдіть усі можливі значення виразу $\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$.

Фінальний етап

IX клас

С.7.46. Знайдіть усі прості числа p, для яких існують такі натуральні числа m і n, що $p^m-n^3=1$.

С.7.47. Через точку, розташовану всередині круга радіуса R, провели дві взаємно перпендикулярні хорди, кожна з яких знаходиться на відстані a від центра круга. Знайдіть площу середньої за значенням частини круга.

С.7.48. Шахова тура обійшла всі клітинки дошки розмірами $n\times n$ (деякі клітинки вона могла відвідати кілька разів, кінець її шляху необов'язково збігається з початком). Знайдіть найменшу можливу кількість поворотів на прямий кут такого шляху тури.

С.7.49. Відомо, що існує натуральне число n таке, що число $n^2+n+17\,998$ ділиться на просте число $p>3$. Доведіть, що тоді існує таке натуральне число m, що число $m^2+m+2\,000$ також ділиться на те саме просте число $p>3$.

С.7.50. Всередині прямокутної трапеції $ABCD$ ($\angle B=\angle C=90^\circ$) відмітили таку точку M, що $AM=AB$ і $DM=DC$. Нехай P і Q – проекції точок B і C на пряму AD. Доведіть, що трикутник PMQ – рівнобедрений.

С.7.51. Знайдіть таке найбільше натуральне число n, що нерівність

$$\left.n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}}\right\}(k\ \text{разів})\le \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}(k+2\ \text{рази})$$

виконується при всіх натуральних k.

X клас

С.7.52. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 2\operatorname{tg} y, \\ \operatorname{tg} y + 3\operatorname{ctg} y = 2\operatorname{tg} z, \\ \operatorname{tg} z + 3\operatorname{ctg} z = 2\operatorname{tg} x. \end{cases}$$

С.7.53. Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Точки A_1, B_1, C_1 симетричні точці H відносно прямих BC, CA, AB відповідно. Відомо, що відрізок CA_1 дорівнює одній зі сторін трикутника ABC і утворює з нею кут 30°. Знайдіть величини кутів трикутника ABC.

С.7.54. Знайдіть усі прості числа p, для яких числа $\dfrac{p+1}{2}$ і $\dfrac{p^2+1}{2}$ є точними квадратами.

С.7.55. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a, b, c, x, y, z, для яких $a+b+c=x+y+z=1$, виконується нерівність

$$\frac{ax^2}{b+c}+\frac{by^2}{c+a}+\frac{cz^2}{a+b}+\frac{1}{2}\geq 2(xy+yz+zx).$$

С.7.56. Чотири промені, що розташовані на площині, виходять з однієї точки. Вони перетинають пряму l у чотирьох різних точках, відтинаючи три відрізки. Довжини двох крайніх із цих відрізків дорівнюють x та y. Знайдіть довжину середнього, якщо відомо, що ці самі чотири промені аналогічно відтинають три рівні відрізки якоїсь прямої l_0.

С.7.57. Множину всіх десятицифрових чисел, записаних лише цифрами 1, 2, 3, розбили на підмножини A, B і C таким чином, що кожні два числа, усі десять розрядів яких неоднакові, належать до різних підмножин. Відомо, що число 1 111 111 111 належить підмножині A, числа 1 112 111 111 і 2 222 222 222 – підмножині B. До якої з підмножин належить число 1 231 231 231?

XI клас

С.7.58. Чи існують натуральні числа k, l, m, n, для яких виконується рівність многочленів $\left(x^2+x+1\right)^k+\left(x^2-1\right)^l=(2x+1)^m+\left(x^2-1\right)^n$?

С.7.59. Функція $f:[0;1]\to[0;1]$ така, що $|f(x)-f(y)| \le \le \dfrac{|x-f(x)|+|y-f(y)|}{2}$ для всіх x, $y \in [0;\ 1]$. Відомо, що кожне з рівнянь $f(x)=0$ та $f(x)=1$ має хоча б один корінь. Знайдіть усі корені рівняння $f(x)=x$.

С.7.60. Всередині квадрата $ABCD$, довжина сторони якого дорівнює 1, довільно відмічено точки P і Q. Доведіть, що

$$\sqrt{2}\left(PA+QC\right)+PQ+PB+QD \ge \sqrt{10}\,.$$

С.7.61. На координатній площині в початку координат розташована фішка. На кожному кроці дозволяється пересувати її на одиницю довжини вгору, вниз, праворуч або ліворуч. При цьому по кожному відрізку довжини 1 дозволяється проходити не більш як два рази. Нехай A – кількість різних маршрутів фішки довжиною 250, при яких після 250-го кроку фішка опиняється в початку координат (необов'язково вперше після першого кроку). Маршрути, що відрізняються хоча б одним кроком фішки, вважаються різними. Знайдіть найбільше натуральне n, для якого число A ділиться на 2^n.

С.7.62. Доведіть, що не існують натуральні числа k, l, m, для яких виконується рівність

$$k+l+m^3=4klm\,.$$

С.7.63. Нехай ω – сфера, що дотикається до всіх ребер тетраедра $SABC$, O – її центр. Відомо, що A_1, B_1, C_1 – центри сфер, вписаних відповідно в тетраедри $SOBC$, $SOCA$, $SOAB$, а A_2, B_2, C_2 – точки перетину прямих OA_1, OB_1, OC_1 з гранями SBC, SCA, SAB відповідно, а площина $A_2B_2C_2$ паралельна площині ABC. Доведіть, що трикутник ABC – рівносторонній.

Міжнародні олімпіади

Олімпіада 33
(*Росія, 1992 р.*)

M.33.1. Знайдіть всі цілі числа a, b, c такі, що $1 < a < b < c$ та число $(a-1)(b-1)(c-1)$ є дільником числа $abc-1$.

M.33.2. Знайдіть всі функції $f: R \to R$ такі, що $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ для всіх x, $y \in R$.

M.33.3. У просторі задано дев'ять точок, жодні три з яких не лежать в одній площині. Всі ці точки попарно з'єднані відрізками. Відрізок може бути пофарбований в синій або червоний колір, або залишитися непофарбованим. Знайдіть найменше значення n таке, що при будь-якому зафарбуванні будь-яких n відрізків знайдеться трикутник, всі сторони якого будуть мати один колір.

M.33.4. На площині задано коло C, пряма L, яка дотикається до C, та точка M, що знаходиться на L. Знайдіть множину всіх точок P, що задовольняють таку умову: існують дві точки Q, R, які лежать на L, такі, що M – середина QR, а коло C вписане в трикутник PQR.

M.33.5. Нехай $Oxyz$ – прямокутна система координат у просторі, S – скінченна множина точок простору та S_x, S_y, S_z – множини ортогональних проекцій всіх точок S на площини відповідно Oyz, Ozx, Oxy. Доведіть, що $|S|^2 \le |S_x||S_y||S_z|$. (Через $|A|$ позначається кількість елементів скінченної множини A.)

M.33.6. Для будь-якого додатного цілого числа n через $S(n)$ позначимо найбільше ціле число таке, що при будь-якому k, $1 \le k \le S(n)$, число n^2 може бути подане у вигляді суми k квадратів цілих додатних чисел.

а) Доведіть, що $S(n) \le n^2 - 14$ при будь-якому $n \ge 4$.

б) Знайдіть ціле число n таке, що $S(n) = n^2 - 14$.

в) Доведіть, що існує нескінченно багато цілих чисел n таких, що $S(n) = n^2 - 14$.

Олімпіада 34
(*Туреччина, 1993 р.*)

М.34.1. Нехай $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, де $n>1$ – натуральне число. Доведіть, що f не можна подати у вигляді добутку двох многочленів, кожний з яких степеня не меншого за 1 та всі коефіцієнти якого – цілі числа.

М.34.2. Задано гострокутний трикутник та точку D всередині нього таку, що $\angle ADB=\angle ACB+90^\circ$ і $AC\cdot BD=AD\cdot BC$.

а) Обчисліть значення відношення $\dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$.

б) Доведіть, що дотичні, проведені в точці C до кіл, описаних навколо трикутників ACD і BCD, перпендикулярні.

М.34.3. На нескінченній шаховій дошці ведеться така гра. Спочатку n^2 фішок займають квадратне поле розмірами $n\times n$ по одній фішці в кожній клітинці. Хід полягає в тому, що якась фішка перестрибує в горизонтальному або у вертикальному напрямку через одну сусідню зайняту клітинку на вільну клітинку одразу за нею. При цьому фішка, через яку перестрибнули, знімається з дошки. Знайдіть всі значення n, за яких у такій грі можна залишити на дошці лише одну фішку.

М.34.4. Для трьох точок P, Q, R на площині через $m(PQR)$ позначимо найменшу з довжин висот трикутника PQR (якщо точки P, Q, R лежать на одній прямій, то $m(PQR)=0$). Нехай на площині задано точки A, B, C. Доведіть, що для будь-якої точки X цієї площини $m(ABC)\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$.

М.34.5. З'ясуйте, чи існує функція $f:N\to N$ така, що:

1) $f(1)=2$;

2) $f(f(n))=f(n)+n$ для всіх $n\in N$;

3) $f(n)<f(n+1)$ для всіх $n\in N$.

М.34.6. Нехай n – натуральне число, більше за 1. По колу розташовані n ламп $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$. Кожна лампа може бути в стані "увімкнута" чи "вимкнута". Послідовність кроків $S_0, S_1, ..., S_i, ...$ визначається таким чином. Крок S_j впливає лише на стан лампи L_j (і не впливає на стан інших ламп) так, що коли L_{j-1} "увімкнута", то S_j

змінює стан L_j: якщо L_j була "увімкнута", то стане "вимкнута"; якщо L_j була "вимкнута", то стане "увімкнута"; якщо L_{j-1} "вимкнута", то S_j нічого не змінює (лампи пронумеровані за модулем n, тобто $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ і т. д.).

Спочатку всі лампи знаходяться в стані "увімкнута". Доведіть, що:

а) існує натуральне число $M(n)$ таке, що після $M(n)$ кроків знову всі лампи будуть в стані "увімкнута";

б) якщо n – число вигляду 2^k, то після $n^2 - 1$ кроків знову всі лампи будуть в стані "увімкнута";

в) якщо n – число вигляду $2^k + 1$, то після $n^2 - n + 1$ кроків знову всі лампи будуть в стані "увімкнута".

Олімпіада 35
(*Гонконг, 1994 р.*)

М.35.1. Нехай m і n – цілі додатні числа. Нехай $a_1, a_2, ..., a_m$ – різні елементи множини $\{1; 2; ...; n\}$ такі, що для будь-яких індексів i, j, що задовольняють умови $1 \le i \le j \le m$ і $a_i + a_j \le n$, існує індекс k, $1 \le k \le m$, для якого $a_i + a_j = a_k$. Доведіть, що

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}.$$

М.35.2. Дано рівнобедрений трикутник ABC, в якому $AB = AC$. Припустимо, що:

1) M – середина BC і O – така точка на прямій AM, що OB і AB перпендикулярні;

2) Q – довільна точка відрізка BC, відмінна від точок B та C;

3) точка E лежить на прямій AB, точка F – на прямій AC і при цьому точки E, Q і F різні та лежать на одній прямій.

Доведіть, що OQ та EF перпендикулярні тоді й лише тоді, коли $QE = QF$.

М.35.3. Для будь-якого цілого додатного числа k через $f(k)$ позначимо кількість всіх елементів множини $\{k+1;\ k+2;\ \dots;\ 2k\}$, двійкове подання кожного з яких містить три одиниці.

а) Доведіть, що для кожного цілого додатного числа m існує хоча б одне ціле додатне число k таке, що $f(k)=m$.

б) Знайдіть всі цілі додатні числа m, для кожного з яких існує єдине k, що задовольняє умову $f(k)=m$.

М.35.4. Знайдіть всі впорядковані пари $(m,\ n)$ цілих додатних чисел такі, що $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ є цілим числом.

М.35.5. Нехай S – множина всіх дійсних чисел, строго більших за -1. Знайдіть всі функції $f: S \to S$, що задовольняють умови:

1) $f(x+f(y)+xf(y)) = y+f(x)+yf(x)$ для всіх $x,\ y \in S$;

2) $\dfrac{f(x)}{x}$ строго зростає на кожному з інтервалів $-1<x<0$ та $x>0$.

М.35.6. Покажіть, що існує множина A, що складається з цілих додатних чисел і має наступну властивість: для кожної нескінченної множини S простих чисел існує ціле число $k \geq 2$, а також існують два цілих додатних числа $m \in A$ та $n \notin A$ такі, що обидва є добутками k різних елементів множини S.

Олімпіада 36
(*Канада, 1995 р.*)

М.36.1. Нехай A, B, C, D – точки на прямій, що лежать у вказаному порядку. Кола з діаметрами AC та BD перетинаються в точках X та Y. Прямі XY та BC перетинаються в точці Z. Нехай P – точка на прямій XY, відмінна від Z. Пряма CP перетинає коло з діаметром AC у точках C і M, а пряма BP перетинає коло з діаметром BD у точках B і N. Доведіть, що прямі AM, DN і XY перетинаються в одній точці.

М.36.2. Нехай a, b, c – додатні дійсні числа такі, що $abc=1$. Доведіть, що

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

М.36.3. Знайдіть всі цілі $n > 3$, для яких існують n точок $A_1, A_2, ..., A_n$ на площині та дійсні числа $r_1, r_2, ..., r_n$, що задовольняють такі умови:

1) з точок $A_1, A_2, ..., A_n$ жодні три не лежать на одній прямій;

2) для будь-якої трійки i, j, k $(1 \le i < j < k \le n)$ площа трикутника $A_iA_jA_k$ дорівнює $r_i + r_j + r_k$.

М.36.4. Знайдіть найбільше значення x_0, для якого існує послідовність додатних дійсних чисел $x_0, x_1, ..., x_{1\,995}$, що задовольняє такі умови:

1) $x_0 = x_{1\,995}$;

2) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ для всіх $i = 1, 2, ..., 1\,995$.

М.36.5. Нехай $ABCDEF$ – опуклий шестикутник, в якому $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ та $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Нехай G і H – дві точки всередині шестикутника такі, що $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Доведіть, що $AG + GB + GH + DH + HE \ge CF$.

М.36.6. Нехай p – непарне просте число. Знайдіть кількість підмножин A множини $\{1; 2; ...; 2p\}$ таких, що:

1) A містить рівно p елементів;

2) сума всіх елементів з A ділиться на p.

Олімпіада 37
(*Індія, 1996 р.*)

М.37.1. Нехай $ABCD$ – прямокутна дошка зі сторонами $AB = 20$, $BC = 12$. Дошку розбито на 20×12 одиничних квадратів. Нехай r – задане додатне ціле число. За один хід монету можна пересунути з одного квадрата до іншого тоді й тільки тоді, коли відстань між центрами цих квадратів дорівнює $\sqrt{r}$. Знайдіть послідовність ходів, що переводить монету з квадрата, одна з вершин якого A, до квадрата, одна з вершин якого B.

а) Доведіть, що це завдання не може бути виконане, коли r ділиться на 2 або на 3.

б) Доведіть, що це завдання може бути виконане, якщо $r = 73$.

в) Чи можна виконати завдання, якщо $r = 97$?

М.37.2. Нехай P – точка всередині трикутника ABC така, що $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Нехай D і E – центри кіл, вписаних у трикутники відповідно APB і APC. Доведіть, що прямі AP, BD і CE перетинаються в одній точці.

М.37.3. Нехай $S = \{0; 1; 2; 3; ...\}$ – множина невід'ємних цілих чисел. Знайдіть всі функції f, які визначені на S та набувають своїх значень в S, такі, що $f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ для всіх m, $n \in S$.

М.37.4. Додатні цілі числа a і b такі, що числа $15a + 16b$ та $16a - 15b$ є квадратами додатних цілих чисел. Знайдіть найменше можливе значення, якого може набувати мінімум з цих двох квадратів.

М.37.5. Нехай $ABCDEF$ – опуклий шестикутник такий, що AB паралельна ED, BC паралельна FE і CD паралельна AF. Позначимо через R_A, R_C, R_E радіуси кіл, описаних навколо трикутників відповідно FAB, BCD, DEF, а через P – периметр шестикутника. Доведіть, що

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}.$$

М.37.6. Нехай n, p, q – додатні цілі числа, для яких $n > p+q$. Нехай $x_0, x_1, ..., x_n$ – цілі числа, що задовольняють такі умови:

1) $x_0 = x_n = 0$;

2) для кожного цілого i, $1 \leq i \leq n$, виконується одна з рівностей $x_i - x_{i-1} = p$ або $x_i - x_{i-1} = -q$.

Доведіть, що існує пара таких індексів (i, j), $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$, що $x_i = x_j$.

Олімпіада 38
(*Аргентина, 1997 р.*)

М.38.1. Площина розбита на одиничні квадрати, вершини яких знаходяться в точках з цілочисловими координатами. Квадрати пофарбовані почергово в чорний та білий кольори (тобто в шаховому порядку). Для кожної пари натуральних чисел m і n розглядається прямокутний трикутник з вершинами в цілочислових точках, катети якого мають довжини m і n та проходять по сторонах квадратів. Нехай S_1 і S_2 – площі відповідно чорної і білої частин трикутника. Покладемо $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

а) Обчисліть $f(m,n)$ для всіх натуральних чисел m і n, які або обидва парні, або обидва непарні.

б) Доведіть, що $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ для всіх m і n.

в) Покажіть, що не існує константи C такої, що $f(m,n)<C$ для всіх m і n.

М.38.2. У трикутнику ABC кут A є найменшим. Точки B і C ділять коло, описане навколо цього трикутника, на дві дуги. Нехай U – внутрішня точка тієї дуги з кінцями B і C, яка не містить точки A. Серединні перпендикуляри до відрізків AB і AC перетинають пряму AU у точках відповідно V та W. Прямі BV і CW перетинаються в точці T. Доведіть, що $AU=TB+TC$.

М.38.3. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – дійсні числа, які задовольняють такі умови: $|x_1+x_2+...+x_n|=1$ та $|x_i|\le\frac{n+1}{2}$, $i=1,2,...,n$. Доведіть, що існує перестановка $y_1, y_2, ..., y_n$ чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ така, що

$$|y_1+2y_2+...+ny_n|\le\frac{n+1}{2}.$$

М.38.4. Таблиця розмірами $n\times n$, заповнена числами з множини $S=\{1,2,...,2n-1\}$, називається "срібною", якщо для кожного $i=1,2,...,n$ об'єднання i-го рядка та i-го стовпчика містить всі числа з S.

Покажіть, що:

а) не існує "срібної" таблиці для $n=1\,997$;

б) "срібні" таблиці існують для нескінченної кількості значень n.

М.38.5. Знайдіть всі пари (a,b) цілих чисел $a\ge1$, $b\ge1$, які задовольняють рівняння $a^{(b^2)}=b^a$.

М.38.6. Для кожного натурального числа n позначимо через $f(n)$ кількість способів подання числа у вигляді суми степенів числа 2 із цілими невід'ємними показниками. Подання, що відрізняються лише порядком доданків, вважаються однаковими. Наприклад, $f(4)=4$, оскільки число 4 може бути подане такими чотирма способами: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1.

Доведіть, що для кожного цілого числа $n\ge3$

$$2^{n^2/4}<f(2^n)<2^{n^2/2}.$$

Олімпіада 39
(*Тайвань, 1998 р.*)

M.39.1. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні, а протилежні сторони AB та DC – непаралельні. Серединні перпендикуляри до сторін AB і DC перетинаються в точці P, що лежить всередині $ABCD$. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло тоді й тільки тоді, коли площі трикутників ABP та CDP рівні.

M.39.2. На змаганні виступили m учасників, які були оцінені n суддями, де n – непарне, $n \geq 3$. Кожний суддя виставив кожному з учасників одну з двох оцінок – "задовільно" або "незадовільно". Число k таке, що для будь-яких двох суддів знайдуться не більше, ніж k учасників, що отримали в цих двох суддів однакові оцінки. Доведіть, що $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$.

M.39.3. Нехай $d(n)$ – кількість всіх різних натуральних дільників числа n (включаючи 1 та саме n). Знайдіть всі натуральні числа k такі, що $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ для деякого n.

M.39.4. Знайдіть всі пари (a, b) натуральних чисел такі, що $a^2 + a + b$ ділиться на $ab^2 + b + 7$.

M.39.5. Нехай I – центр кола, вписаного в трикутник ABC. Позначимо через K, L, M точки, в яких це коло дотикається до сторін відповідно BC, CA, AB. Пряма, що проходить через точку B паралельно прямій MK, перетинає прямі LM і LK у точках відповідно R і S. Доведіть, що кут RIS – гострий.

M.39.6. Розглянемо всі такі функції $f: N \to N$, що $f(t^2 f(s)) = sf^2(t)$ для всіх натуральних s та t. Знайдіть найменше можливе значення $f(1\ 998)$.

Олімпіада 40
(*Румунія, 1999 р.*)

M.40.1. Знайдіть всі скінченні множини S точок площини, що містять не менше трьох точок та задовольняють наступну умову: для будь-яких двох різних точок A та B з S серединний перпендикуляр до відрізка AB є віссю симетрії множини S.

М.40.2. Нехай n – дане ціле число, $n \geq 2$.

а) Визначіть найменшу константу C таку, що нерівність

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

виконується для всіх дійсних чисел $x_1, ..., x_n \geq 0$.

б) Для цієї константи C визначіть, коли виконується рівність.

М.40.3. Розглянемо квадратну дошку розмірами $n \times n$, де n – дане парне натуральне число, розбиту на n^2 одиничних квадратів. Два різних одиничних квадрата назвемо сусідніми, якщо вони мають спільну сторону. N одиничних квадратів на дошці відмічено таким чином, що кожний квадрат (відмічений або невідмічений) має хоча б один відмічений сусідній квадрат. Визначіть найменше можливе значення N.

М.40.4. Знайдіть всі пари (n, p) натуральних чисел такі, що p – просте, $n \leq 2p$ та $(p-1)^n + 1$ ділиться на n^{p-1}.

М.40.5. Два кола Γ_1 та Γ_2, що містяться всередині кола Γ, дотикаються до нього в точках відповідно M та N. Коло Γ_1 проходить через центр кола Γ_2. Пряма, що проходить через дві точки перетину Γ_1 та Γ_2, перетинає Γ в точках A та B. Прямі MA та MB перетинають Γ_1 в точках відповідно C та D. Доведіть, що CD дотикається до Γ_2.

М.40.6. Знайдіть всі функції $f: R \to R$ такі, що $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ для всіх $x, y \in R$.

Олімпіада 41
(*Республіка Корея, 2000 р.*)

М.41.1. Кола Γ_1 і Γ_2 перетинаються в точках M і N. Пряма l – спільна дотична до Γ_1 і Γ_2 така, що M розташована до l ближче, ніж N. Пряма l дотикається до Γ_1 у точці A, а до Γ_2 – у точці B. Пряма, що проходить через M паралельно l, перетинає вдруге коло Γ_1 у точці C, а коло Γ_2 – у точці D. Прямі CA і DB перетинаються в точці E, прямі AN і CD – у точці P, прямі BN і CD – у точці Q. Доведіть, що $EP = EQ$.

М.41.2. Додатні числа a, b, c такі, що $abc = 1$. Доведіть, що

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

М.41.3. Задано натуральне число $n \ge 2$. Спочатку на горизонтальній прямій сидять n блох, не всі в одній точці. Для додатного дійсного числа λ означимо стрибок таким чином: вибираються дві блохи, що сидять у довільних точках A і B, причому A розташована ліворуч від B, і блоха, що сидить в A, стрибає праворуч від B в розташовану на даній прямій точку C таку, що $\frac{BC}{AB} = \lambda$. Визначіть всі значення λ такі, що для будь-якої точки M на цій прямій та для будь-якого початкового розташування n блох існує скінченна послідовність стрибків, після яких усі блохи опиняться праворуч від точки M.

М.41.4. Фокусник має 100 карток, пронумерованих числами від 1 до 100. Він розташовує всі картки в трьох ящиках: червоному, білому та синьому так, щоб в кожному ящику знаходилася хоча б одна картка. Один із глядачів вибирає два з трьох ящиків, виймає з них по одній картці і оголошує суму номерів витягнутих карток. Знаючи цю суму, фокусник визначає той ящик, з якого картки не виймались. Скількома різними способами можна розкласти картки по ящиках так, щоб цей фокус завжди виходив? (Способи, при яких хоча б одна картка потрапляє до різних ящиків, вважаються різними.)

М.41.5. Чи існує натуральне число n таке, що має 2 000 різних простих дільників, і $2^n + 1$ ділиться на n?

М.41.6. Нехай AH_1, BH_2, CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторін BC, CA, AB у точках відповідно T_1, T_2, T_3. Прямі l_1, l_2, l_3 є образами прямих H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 при симетрії відносно прямих відповідно T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Доведіть, що прямі l_1, l_2, l_3 утворюють трикутник з вершинами на колі, вписаному в трикутник ABC.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Третій етап Всеукраїнських олімпіад

Олімпіада 34
(*1994 р.*)

III.34.1. *Вказівка.* $19\,931\,993 \cdot 199\,419\,941\,994 = 1\,993 \cdot 1\,994 \cdot 10\,001 \times$
$\times 100\,010\,001 = 19\,941\,994 \cdot 199\,319\,931\,993$.

III.34.2. *Відповідь.* Не можна. Припустимо, що існує шлях, який проходить через всі позначені точки рівно по одному разу. Всього позначених точок – 14, і цей шлях проходить через 13 відрізків. Тому знайдеться грань, на якій шлях проходить не менше ніж через три відрізки. Але тоді шлях проходить через центр цієї грані принаймні двічі. Одержали суперечність.

III.34.3. *Відповідь.* Можна. Пронумеруємо осіб числами $1, 2, 3, ..., 20$. Тоді їм слід сісти так, як зображено на рис. III.34.1.

III.34.4. Див. рис. III.34.2.

III.34.5. *Відповідь.* $1, 2, 3, 4, 5, 7$. *Вказівка.* Нехай $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 <$ $< x_5 < x_6$ – дані числа, тоді $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 4$, $x_5 \geq 5$, $x_6 \geq 6$. Тому $22 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + x_6 \geq (1+2+3+4+5) + x_6 = 15 + x_6$, звідси $x_6 \leq 7$.

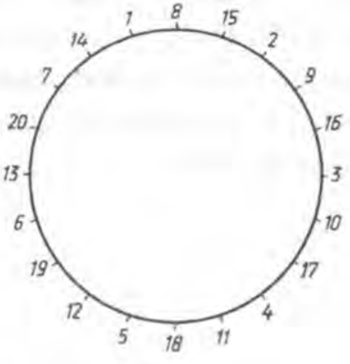


Рис. III.34.1

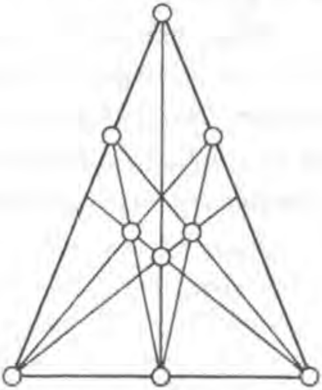


Рис. III.34.2

III.34.6. Оскільки $m^2+9mn+n^2=(m-n)^2+11mn$, то на 11 ділиться і $(m-n)$ і $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$.

III.34.7. *Вказівка.* Очевидно, що a і b – додатні. З першої рівності дістаємо, що $\frac{a}{b}=b+\frac{1}{b}\ge 2$, з другої – $\frac{b}{a}=a+\frac{1}{a}\ge 2$. Суперечність.

III.34.8. *Вказівка.* Якщо $\angle ABC=\alpha$ (рис. III. 34.3), то $\angle AO_2B=2\alpha$, $\angle AO_1B=180^\circ-\frac{1}{2}\angle AO_2B=180^\circ-\alpha$, $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AO_1B=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, звідси $\angle BAC=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, тобто трикутник ABC – рівнобедрений (де O_1,O_2 – центри кіл відповідно T_1,T_2).

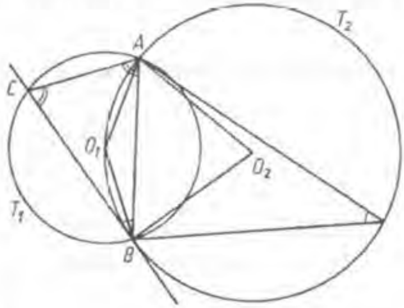


Рис. III.34.3

III.34.9. *Вказівка.* Нехай спочатку маємо $a_1+a_{n+1}=a_2+a_{n+2}=...=a_n+$ $+a_{2n}=2b$. Вважаємо, що $a_i=b-c_i, a_{n+i}=b+c_i$ $(i=1,2,...,n)$. Щоб дістати однакові добутки в парах, треба найменше число помножити на найбільше, друге знизу значення на друге зверху і т. д. Тому дістанемо рівні добутки $(b-c_i)(b+c_i)=b^2+c_i^2$ $(i=1,2,...,n)$. Звідси всі c_i рівні між собою.

III.34.10. *Відповідь.* $x=y=z=8$ або $x=y=z=-8$. *Вказівка.* $xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$, отже, дана система рівносильна системі $(x+1)(y+1)=(y+1)(z+1)=(z+1)(x+1)=81$.

III.34.11. *Відповідь.* Не можна. Припустимо, що можна. У кожній з 8-ми вершин напишемо число, яке дорівнює сумі номерів ребер, що збігаються в ній. Тоді сума всіх написаних чисел, з одного боку, ділиться на 8, а з другого, – дорівнює $2(1+2+...+12)=12\cdot 13$ (оскільки кожне ребро входить рівно в дві вершини) і не ділиться на 8. Суперечність.

III.34.12. З рівності $m=\left(\sqrt{1994}-\sqrt{n}\right)^2=1994-2\sqrt{1994n}+n$ випливає, що число $1994n=2\cdot 997n$ – точний квадрат, тобто $n=1994a^2$, де $a\in N$. Аналогічно $m=1994b^2, b\in N$. Отже, $\sqrt{1994}=\sqrt{m}+\sqrt{n}=$ $=\sqrt{1994}(a+b)\ge\sqrt{1994}(1+1)$. Суперечність.

III.34.13. *Відповідь.* $f(x)=\frac{1}{2}-x$. Нехай $f(0)=a$. Підставивши $x=z+a, y=0$ в рівність

$$f(x-f(y))=1-x-y, \qquad (1)$$

отримаємо

$$f(z)=1-z-a. \qquad (2)$$

З рівності (1), використовуючи рівність (2), знаходимо $1-x-y=$ $=f(x-f(y))=1-(x-f(y))-a=1-(x-(1-y-a))-a=2-x-y-2a$, звідси $a=\frac{1}{2}$. Отже, $f(z)=1-z-a=\frac{1}{2}-z$. Знайдена функція задовольняє умову.

III.34.14. *Відповідь.* $BD=4$. Оскільки $DE \parallel l$, то $\angle ADE=\angle MAD$, де M – точка на прямій l (рис. III.34.4). Але $\angle MAD=\angle MAB=$ $=\angle ACB$. Таким чином, $\Delta ADE \sim \Delta ACB$. Звідси $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ і $AB=\frac{AC \cdot AE}{AD}=10$, $BD=AB-AD=4$.

III.34.15. Нехай p – дане просте число. Випадок $p<30$ є очевидним. За умови $p \geq 30$, числа p та 30 – взаємно прості, отже остача і 30 – взаємно прості. Перебором перевіряємо, що всі числа, менші за 30 і взаємно прості з 30, є простими або одиницею.

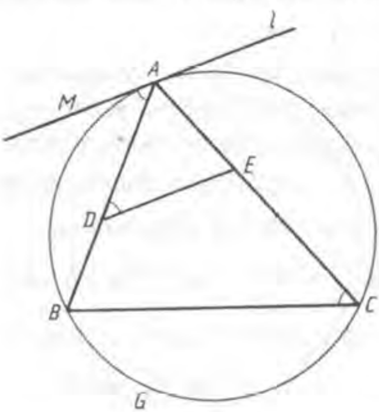


Рис. III.34.4

III.34.16. *Відповідь.* $f(x)=x$. Із умови дістанемо, що $f(x)+f(-x)=0$. Врахувавши даний результат, матимемо $2x+2f(-x)=0$, $f(-x)=-x$. Функція $f(x)=x$ задовольняє умову.

III.34.17. *Відповідь.* 50. *Вказівка.* $a+c+e \geq \frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}+e \geq \frac{1}{2}(a+b+c+$ $+d+e)=50$. При $a=b=c=d=25$, $e=0$ маємо $a+c+e=50$.

III.34.18. *Відповідь.* $N-1$. Нехай місто A з'єднане шляхами з k містами і не сполучене з $N-k-1$. Для того щоб виконувалась умова задачі, від кожного з цих $N-k-1$ міст має бути хоча б один шлях до міст, з'єднаних з A. Маємо $N-k-1$ цих шляхів і ще k шляхів, що виходять з A. Загальна кількість не менше $N-1$. Якщо тепер з'єднати якесь місто з усіма іншими, то умова задачі виконується, і всього шляхів буде $N-1$.

III.34.19. *Вказівка.* З $\angle AMN+\angle ACN=180°$ і $\angle BMK+\angle BCK=180°$ випливає, що навколо $AMNC$ і $BMKC$ можна описати кола. Тому $\angle ANC=\angle AMC$, $\angle BKC=\angle BMC$, звідси $\angle ANC+\angle BKC=180°$.

III.34.20. Сума площ півкіл без площі квадрата буде рівною площі "квітки".

III.34.21. Серед 997 різних натуральних чисел $a_{998}, a_{999}, \ldots, a_{1\,994}$ знайдеться число $a_j\,(998 \le j \le 1994)$, яке не менше 997. Тому $(j-1)a_j \ge 997^2$.

III.34.22. *Відповідь.* $f(x)=0$, $x\in R$. Підставивши $y=x-x^2$ у рівність

$$f\left(x^2+y\right)=f(x)+f(y^2), \tag{1}$$

одержимо $f(x^2+x-x^2)=f(x)+f((x-x^2)^2)$ або

$$f((x-x^2)^2)=0 \text{ при всіх } x\in R. \tag{2}$$

Звідси випливає, що для кожного $z\ge 0$ $f(z)=0$. Оскільки $y^2\ge 0$, то $f\left(y^2\right)=0$. Отже, підставивши $x=0$ в рівність (1), дістанемо $f(y)=f(0)+f(y^2)=0$ при всіх $y\in R$. Слід зробити перевірку.

III.34.23. Нехай $S_{ABC}, S_{A_1B_1C_1}$ – площі трикутників відповідно ABC та $A_1B_1C_1$, φ – кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}\le\frac{\frac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1C_1}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 60°}<\frac{1}{2}, \text{ звідси } \varphi>60°.$$

III.34.24. Якщо $\sin x+1=0$, то $\cos x=0$, тому $x^2\sin x+x\cos x+x^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$. Нехай $\sin x+1>0$. Тоді $x^2\sin x+x\cos x+x^2+\frac{1}{2}=\left(x\sqrt{\sin x+1}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+1}}\right)^2-\frac{\cos^2 x}{4(\sin x+1)}+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}-\frac{\cos^2 x}{4(\sin x+1)}=\frac{\sin x+1}{4}>0$.

Олімпіада 35
(*1995 р.*)

ІІІ.35.1. Дане число ділиться на 11.

ІІІ.35.2. *Відповідь.* 20. *Вказівка.* Кількість команд, які не одержали жодної перемоги, не перевищує 1, оскільки дві команди при зустрічі розігрують між собою одну перемогу.

ІІІ.35.3. а) *Відповідь.* Можна. *Вказівка.* Прямокутник розмірами 2×3 можна розрізати на дві вказані фігурки.

б) *Відповідь.* Не можна. Пофарбуємо дошку в три кольори, як зображено на рис. ІІІ.35.1. Тоді кожна фігурка розмірами 1×3 має по одній клітинці кожного кольору. Якщо припустити, що дошку можна розрізати на вказані фігурки, то кількість клітинок кожного кольору має бути однаковою, але це не так.

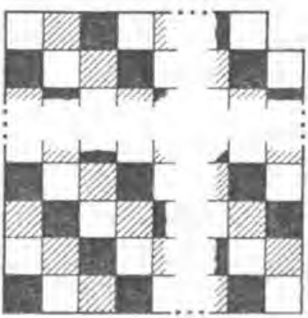


Рис. ІІІ.35.1

ІІІ.35.4. Припустимо, що твердження задачі не є правильним, тобто другий шахіст має виграшну стратегію. Тоді перший шахіст теж має виграшну стратегію: перший хід – хід конем, другий – повернути цього коня назад, на початкове місце. Далі першому гравцю треба застосувати виграшну стратегію другого шахіста. Отримана суперечність доводить твердження задачі.

ІІІ.35.5. Нехай $\frac{a}{c}=a_1, \frac{b}{c}=b_1; a_1$ і b_1 – цілі числа. За умовою задачі число $M=\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{ca_1+1}{cb_1}+\frac{cb_1+1}{ca_1}$ – ціле. Тому ціле й число $(M+2)a_1b_1-(a_1+b_1)^2=\frac{a_1+b_1}{c}$, тобто a_1+b_1 ділиться на c, звідси $a_1+b_1\ge c$. Отже, $a+b=c(a_1+b_1)\ge c\cdot c=c^2$.

ІІІ.35.6. У трикутнику ABC або кут B, або кут C – гострий. Нехай $\angle B=\beta<90^\circ$. Тоді $\angle BAH=90^\circ-\beta$, $\angle OAC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle OAC=$ $=90^\circ-\beta$, а $\angle OAH=\left|\angle BAC-(\angle BAH+\angle OAC)\right|=\left|\angle BAC-180^\circ+2\beta\right|=$ $=\left|\angle BAC-180^\circ+2\angle ABC\right|=\left|\angle ABC-\angle BAC\right|$.

III.35.7. Оскільки $35-8\sqrt{19}=\left(\sqrt{19}-4\right)^2$ і $\sqrt{19}-4>0$, то

$$\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{(\sqrt{19}-4)^2}}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8(\sqrt{19}-4)}}=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{35-8\sqrt{19}}}=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{(\sqrt{19}-4)^2}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{19}-(\sqrt{19}-4)}=2.$$

III.35.8. Користуючися нерівністю $x^2+y^2\ge 2xy$, дістанемо:

$$a^4+a^2b^2+b^4=\frac{3}{4}(a^4+b^4)+a^2b^2+\frac{1}{4}(a^4+b^4)\ge\frac{3}{4}(a^4+b^4)+a^2b^2+\frac{1}{4}2a^2b^2=$$

$$=\frac{3}{4}(a^4+a^2b^2)+\frac{3}{4}(b^4+a^2b^2)\ge\frac{3}{4}\cdot 2a^2\cdot ab+\frac{3}{4}\cdot 2b^2\cdot ab=\frac{3}{2}(a^3b+ab^3).$$

III.35.9. *Вказівка.* Якщо число $\overline{abcdef}$ – "щасливе", то число $\overline{defabc}$ – теж "щасливе", причому сума цих чисел $\overline{abcdef}+\overline{defabc}=$ $=1\,001\left(\overline{abc}+\overline{def}\right)$ ділиться на $1\,001$.

III.35.10. За умовою задачі $0=(a+b)^3-(c+d)^3=(a^3+b^3-c^3-d^3)+$ $+3ab(a+b)-3cd(c+d)=3ab(a+b)-3cd(a+b)=3(a+b)(ab-cd)$, але $a+b>0$, тому $ab=cd$. Позначимо $p=a+b=c+d$, $q=ab=cd$. Залишається розглянути рівняння $x^2-px+q=0$.

III.35.11. Нехай k – кількість членів комісії, m_j – кількість засідань, у яких брав участь j-й член комісії ($j=1, 2, ..., k$). Тоді $m_1+m_2+...+m_k=10\cdot 40=400$. Але $m_j\le\dfrac{k-1}{9}$ ($j=1, 2, ..., k$), оскільки в засіданні кожного разу брали участь десять чоловік, і жодні двоє з них не засідали спільно більше одного разу. Таким чином, $400=m_1+...+m_k\le k\cdot\dfrac{k-1}{9}$, звідси $k\ge 60$.

III.35.12. *Вказівка.* Дана рівність рівносильна рівності $(l-1)^2+$ $+(m+2)^2+(n-3)^2=3$. Звідки $|l-1|=|m+2|=|n-3|=1$.

III.35.13. *Вказівка.* $\angle AHB = 60°, \angle AOB = 120°$. Тому точки A, O, B, H лежать на одному колі $(\angle AHB + \angle AOB = 180°)$, причому $MA = MO = MB$, тобто M – центр цього кола. Звідси $MO = MH$.

III.35.14. Позначимо $f(x) = ax^2 - bx + c$, $F(x) = Ax^2 - Bx + C$. Квадратні тричлени f та F мають додатні корені (якщо $x \le 0$, то $f(x) = ax^2 + b(-x) + c > 0$, аналогічно $F(x) > 0$). Таким чином, $t > 0$ і $T > 0$. Оскільки $a > 0$ і t лежить між коренями рівняння $f(x) = 0$, то $f(t) < 0$, тобто $at^2 - bt + c < 0$, звідси $at + \frac{c}{t} < b$. Аналогічно доводиться, що $AT + \frac{C}{T} < B$. З останніх двох нерівностей маємо: $b + B > \left(at + \frac{c}{t}\right) + \left(AT + \frac{C}{T}\right) = (at + AT) + \left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T}\right) \ge 2\sqrt{(at + AT)\left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T}\right)}$, звідси $\left(\frac{b+B}{2}\right)^2 > (at + AT)\left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T}\right)$.

III.35.15. *Вказівка.* Якщо n – непарне число ($n > 3$), то передостання цифра числа n^2 – парна.

III.35.16. Якщо x – корінь, то $x \ge 0$ і $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = (x-3)^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 = 0$, звідси $x - 3 = \sqrt{x} - 2 = 0$, що неможливо.

III.35.17. Нехай a – сторона $2n$-кутника, d_1 і d_2 – суми відстаней від точки O до відповідно червоних та синіх сторін. Тоді сума площ червоних трикутників дорівнює $\frac{1}{2}d_1 a$, а синіх – $\frac{1}{2}d_2 a$. Тому достатньо довести, що $d_1 = d_2$. За умови $n = 2$ маємо: $d_1 = d_2 = a$.

При $n > 2$ продовження червоних і синіх сторін утворюють правильні n-кутники, причому вони рівні. Нехай S – площа цих n-кутників, b – довжина їх сторін. Тоді $\frac{1}{2}d_1 b = S = \frac{1}{2}d_2 b$, звідси $d_1 = d_2$.

III.35.18. *Вказівка.* Точка з координатами $(x; y)$ при симетрії відносно точки $(p; q)$ переходить у точку $(2p - x; 2q - y)$. Якщо

$(p_i;q_i)$ – координати точки $A_i\,(i=1,...,1995)$, то перетворення S переводить точку $(x;y)$ у точку $(2p_{1995}-2p_{1994}+2p_{1993}-...+2p_1-x;$ $2q_{1995}-2q_{1994}+2q_{1993}-...+2q_1-y)$.

III.35.19. Припустимо, що твердження задачі є хибним. Нехай у k-му рядку число a_k з i-го стовпчика більше за число b_k з j-го стовпчика ($i<j$). Позначимо $a_1>a_2>...>a_{k-1}>a_k$ – числа, що стоять в i-му стовпчику над числом a_k; $b_k>b_{k+1}>...>b_n$ ($n=1995$) – числа, що стоять в j-му стовпчику під числом b_k. Нехай до того, як переставляли числа, в одному рядку з числом a_p з i-го стовпчика стояло число b'_p з j-го стовпчика: $b'_p>a_p\ge a_k$ ($p=1,2,...,k$).

Таким чином, у j-му стовпчику є набір різних чисел $b_1', b_2', ..., b_k'$, які більші за a_k ($a_k>b_k>b_{k+1}>...>b_n$). Отже, в j-му стовпчику є набір з $k+(n-k+1)=n+1$ різних чисел $b'_1, b'_2, ..., b'_k, b_k, b_{k+1}, ..., b_n$, але їх рівно n. Суперечність.

III.35.20. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}\sqrt{\left(\frac{b}{a-b}\right)^2-\frac{1}{3}}$. *Вказівка.* Дана площина паралельна двом протилежним ребрам піраміди.

III.35.21. *Відповідь.* $k=10$. *Вказівка.* Доведіть, що всі члени послідовності не дорівнюють нулеві. Якщо $u_1=a$, то з рівності $u_{n+1}=k\frac{u_n}{u_{n-1}}$ послідовно знаходимо $u_0=1,\ u_1=a, u_2=ka,\ u_3=k^2, u_4=\frac{k^2}{a},\ u_5=\frac{k}{a}$, $u_6=1,\ u_7=a, ...,$ тобто послідовність $\{u_n\}$ періодична з періодом 6. Звідси $u_{1995}=u_3=k^2=100$, але $ku_1^2=u_1u_2>0$ і $k>0$. Тобто $k=\sqrt{100}=10$.

III.35.22. Так, існує. Наприклад, $p(x)=x^2+1995^2$.

III.35.23. *Відповідь.* $f(1995)=1996$. За умовою задачі

$$f(f(n))=2n+3-f(n). \qquad (1)$$

Тому $0\le f(f(0))=3-f(0)$, звідси $3\ge f(0)\ge 0$. Розглянемо всі можливі випадки значень $f(0)$:

1) $f(0)=0$, тоді $3=f(f(0))+f(0)=f(0)+0=0$ – суперечність;

2) $f(0)=1$, тоді, користуючись (1), послідовно знаходимо $f(1)=f(f(0))=2$, $f(2)=f(f(1))=3$, $f(3)=f(f(2))=4$, …, $f(1\,995)=$ $=f(f(1\,994))=1\,996$;

3) $f(0)=2$, користуючись (1), знаходимо $f(2)=f(f(0))=1$, $f(1)=$ $=f(f(2))=6$, $f(6)=f(f(1))=-1<0$ – суперечність;

4) $f(0)=3$, $f(3)=f(f(0))=0$, $f(0)=f(f(3))=9$ – суперечність.

Отже, $f(0)=1$ і $f(1\,995)=1\,996$.

III.35.24. *Відповідь.* а) $3(3-1)+1=7$; б) розв'язок рівняння $n(n-1)+$ $+1=13$, тобто $n=4$. Позначимо маршрут набором зупинок, через які він проходить. Розглянемо два довільні маршрути $A_1A_2...A_m$ і $B_1B_2...B_n$, $A_1=B_1$, всі інші зупинки $A_2,...,A_m,B_2,...,B_n$ – різні. Нехай C – будь-яка зупинка, що не належить цим двом маршрутам (така знайдеться, оскільки кожен маршрут має не менше трьох зупинок і з кожним іншим маршрутом має одну спільну зупинку), k – кількість маршрутів, що проходять через зупинку C.

Через C та A_i ($i=1,2,...,m$) проходить один маршрут. Тому $k=m$. Аналогічно доводиться, що $k=n$.

Отже, два довільні маршрути мають однакову кількість зупинок, а саме по n зупинок; при цьому через кожну зупинку проходить n маршрутів.

Тепер легко підрахувати, що кількість маршрутів дорівнює $n(n-1)+1$, де n – кількість зупинок на кожному маршруті.

Олімпіада 36
(*1996 р.*)

III.36.1. Одночасно пустити обидва годинника. Як тільки мине час на 5-хвилинному годиннику, одразу його перевернути, потім знов його перевернути як тільки вийде час на 7-хвилинному годиннику.

III.36.2. *Відповідь.* 329,392,518,581. *Вказівка.* Нехай $\overline{abc}$ – таке число. За умовою число $M=a+b+c$ ділиться на 7 і $\overline{abc}=100a+$ $+10b+c=7(14a+b)+(2a+3b+c)$ ділиться на 7, звідси число $N=2a+$ $+3b+c$ ділиться на 7. Тому число $|N-2M|=|b-c|$ ділиться на 7, але

$0<|b-c|\le 9$, отже $|b-c|=7$. Таким чином, можливі такі випадки: $b=0$ і $c=7$; $b=7$ і $c=0$; $b=1$ і $c=8$; $b=8$ і $c=1$; $b=2$ і $c=9$; $b=9$ і $c=2$. Далі слід врахувати те, що $a+b+c$ ділиться на 7 і цифри a,b,c – різні.

III.36.3. *Відповідь*. 4. У даному виразі кожен з шести доданків дорівнює або 1, або -1, тому його значення не перевищує 6. Якщо значення виразу дорівнює 6, то кожний доданок дорівнює 1, але цього бути не може, оскільки добуток всіх доданків число від'ємне: $-(abcdefghk)^2<0$. Таким чином, значення виразу не може дорівнювати 6, до того ж воно завжди парне. Таким чином, значення виразу не більше 4. Для $a=c=f=1$, $b=d=e=g=h=k=-1$ значення виразу дорівнює 4.

III.36.4. *Вказівка*. Нехай x – загальна кількість фігурок типів 2 і 3 (вони містять $4x$ клітинок), y – кількість фігурок типу 1 ($3y$ клітинок). Тоді $4x+3y=7^2=49$. Пофарбуємо 16 клітинок дошки так, як зображено на рис. III.36.1. Очевидно, що кожна фігурка містить у собі не більше однієї пофарбованої клітинки. Тому загальна кількість фігурок не менша, ніж кількість пофарбованих клітинок, $x+y\ge 16$. Таким чином,

$$\begin{aligned} &4x+3y=49,\\ &x+y\ge 16. \end{aligned}$$

Отже, $x=1$.

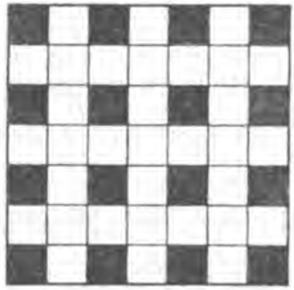


Рис. III.36.1

III.36.5. Див. розв'язання задачі III.36.1.

III.36.6. *Відповідь*. 45° або 135°.

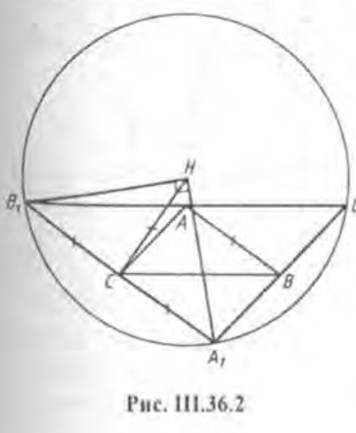


Рис. III.36.2

Проведемо через точки A, B, C прямі, паралельні сторонам відповідно BC, CA, AB (рис. III.36.2). Ці прямі утворюють трикутник $A_1B_1C_1$. Прямі AH, BH, CH – серединні перпендикуляри до сторін B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, тому H – центр описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Оскільки $A_1C=$ $=B_1C=AB=CH$, то $\angle A_1HB_1=90^\circ$, тому $\angle A_1C_1B_1=45^\circ$ або $\angle A_1C_1B_1=135^\circ$. Тобто $\angle ACB=\angle A_1B_1C_1$.

III.36.7. Так, може (рис. III.36.3). Шестикутник $ABCDEF$ – правильний зі стороною 10 м, G – його центр; A, D, G – груші; B, C, E, F – яблуні.

III.36.8. *Вказівка.* Зауважимо, що число $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ ділиться на 6. Тому Оксані достатньо грати так, щоб числа n^8 і n^4, n^7 і n^3, n^6 і n^2, n^5 і n були з різними знаками.

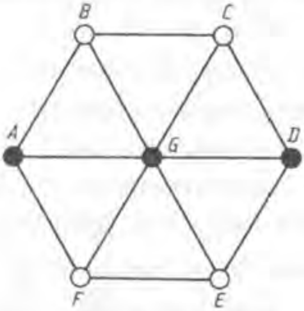


Рис. III.36.3

III.36.9. *Відповідь.* Ні, не можна. *Вказівка.* На кожному кроці дописані числа ділитимуться на 3.

III.36.10. *Відповідь.* $n=1$, $m=3$. Оскільки $m! - n! = 5n^2 > 0$, то $m \geq n+1$. Тому $5n^2 = m! - n! \geq (n+1)! - n! = n^2(n-1)!$, звідси $5 \geq (n-1)!$ або $n \leq 3$. Перевірка показує, що підходить лише $n=1$.

III.36.11. *Вказівка.* Корені многочлена $p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = t^3 - 6t^2 + 9t - a$, де $a = xyz$. Тобто числа x, y, z – розв'язки рівняння $t^3 - 6t^2 + 9t = a$ (1). Графік функції $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t = t(t-3)^2$ зображено на рис. III. 36.4. Для того щоб рівняння (1) мало три дійсних корені, необхідно, щоб $0 \leq a \leq 4$, при цьому всі корені лежать на відрізку $[0;4]$.

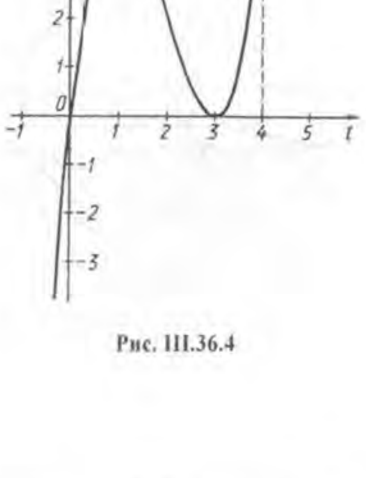


Рис. III.36.4

III.36.12. *Вказівка.* Нехай O – точка перетину медіан AA_1, BB_1 і CC_1. Тоді $\angle A_1AC = \angle C_1A_1O$ і $\angle ABB_1 = \angle A_1AC = \angle C_1A_1O$, оскільки точки O, A_1, B, C_1 лежать на одному колі. Рівність $\angle AC_1C = \angle AA_1B$ також рівносильна тому, що точки O, A_1, B, C_1 лежать на одному колі.

III.36.13. *Відповідь.* Для $n=1$, $n=2$, $n=3$.

Розглянемо верхню ліву зафарбовану клітинку. Вона має не більше чотирьох зафарбованих сусідніх клітинок. Таким чином, $n \le 4$. Випадки $n=1, n=2$ та $n=3$ можливі (рис. III.36.5). Доведемо, що за умови $n=4$ це неможливо. Припустимо протилежне. Нехай зафарбовані клітинки займають N вертикалей. Пронумеруємо ці вертикалі зліва направо числами $1, 2, ..., N$. Позначимо через A_j найвищу клітинку в j-й вертикалі ($j=1, 2, ..., N$). Оскільки клітинка A_1 має чотири зафарбованих сусідніх клітинки, то клітинки B_1, B_2, C_2, D_2 зафарбовані (рис. III.36.6). Клітинка C_2 вже має чотири зафарбованих сусідніх клітинки, тому клітинки C_3, D_3 не зафарбовані. Але клітинка D_2 має чотири зафарбованих "сусіди", отже клітинки E_2, E_3 зафарбовані.

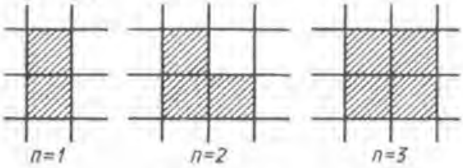


Рис. III.36.5

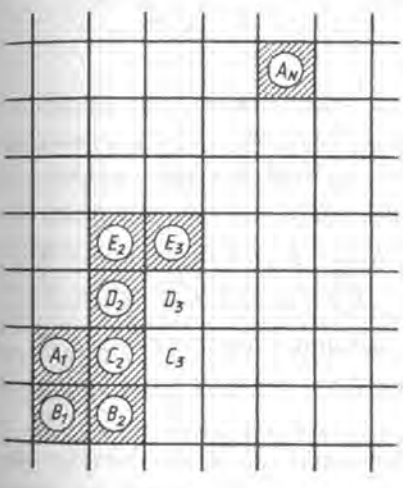


Рис. III.36.6

Таким чином, клітинка A_2, що розташована не нижче клітинки E_2, знаходиться вище за клітинку A_1 принаймні на дві клітинки і т.д. Отже, остання клітинка A_N вища за всі зафарбовані клітинки і є крайньою праворуч. Але тоді вона не може мати більше, ніж три сусідніх зафарбованих клітинки. Суперечність.

III.36.14. *Відповідь.* $x=-1$. Маємо $\sqrt{-2x-x^2}+\sqrt{8-2x-x^2}=\sqrt{1-(x+1)^2}+$ $+\sqrt{9-(x+1)^2} \le 1+3=4$. Рівність досягається лише при $x=-1$.

III.36.15. Без обмеження загальності можемо вважати, що B має координати (0; 0). Нехай A має координати (k; l), тоді k і l взаємно прості. Точка D на промені BC, для якої трикутник ABD прямокутний рівнобедрений, має координати ($k-l$, $l+k$) або ($k+l$, $l-k$). Тоді точка C має координати $\left(\frac{k-l}{d}, \frac{l+k}{d}\right)$ або $\left(\frac{k+l}{d}, \frac{l-k}{d}\right)$, де d – найбільший спільний дільник $k+l$ та $l-k$. Тоді d – спільний дільник $2k$ та $2l$, $d=1$ або $d=2$, C збігається з D або з серединою BD. У першому випадку $\angle BAC=90^\circ$, у другому $\angle BCA=90^\circ$.

III.36.16. *Відповідь.* Шуканих p, q не існує. Нехай арифметична прогресія має вигляд a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, де $d\geq 0$. Тоді $a<0$, $a+d<0$, $a+2d>0$, $a+3d>0$. Отже, всі члени прогресії різні та $p\neq q$.

Нехай $p<q$. Легко отримати, що a, $a+2d$ – корені рівняння $x^2-px-1=0$, $a+d$, $a+3d$ – корені рівняння $x^2-qx-1=0$. За теоремою Вієта $a(a+2d)=(a+d)(a+3d)=-1$. Звідси $a=-\frac{3}{2}d$, $d=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $a=-\sqrt{3}$. Проте за теоремою Вієта $p=a+(a+2d)=-2\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}$ – неціле число, ми отримали суперечність.

III.36.17. Нехай R_{ABC}, R_{ABD}, R_{BCD}, R_{ACD} – радіуси кіл, описаних навколо вказаних трикутників. Нехай $R_{ABC}=R_{ABD}=R_{BCD}$. Тоді точки, симетричні D відносно AB та BC, лежать на колі, описаному навколо трикутника ABC. Отримуємо, що $\angle ADB=180^\circ-\angle ACB$, $\angle BDC=180^\circ-\angle BAC$. Тоді $R_{ACD}=R_{ABC}$. Нехай $R_{ABD}=R_{BCD}=R_{ACD}=R$. Якщо $R>R_{ABC}$, то $\angle ADB>180^\circ-\angle ACB$, $\angle BDC>180^\circ-\angle BAC$ та $\angle ADC>180^\circ-\angle ABC$. Отже, $\angle ADB+\angle BDC+\angle ADC>360^\circ$, що неможливо. Якщо $R<R_{ABC}$, то аналогічно отримуємо, що $\angle ADB+\angle BDC+\angle ADC<360^\circ$, і також маємо суперечність.

III.36.18. *Відповідь.* Два розрізи. Очевидно, що одного розрізу недостатньо. Пронумеруємо кільця числами 1, 2, …, $2k+2m$. Розглянемо всі набори з послідовних кілець $\{(1, 2, \ldots, k+m), (2, 3, \ldots, k+m+1), \ldots, (k+m+1, k+m+2, \ldots, 2k+2m)\}$. Якщо в першому наборі є менше, ніж k срібних кілець, то в останньому – більше, і навпаки. Оскільки в сусідніх наборах кількість срібних кілець відрізняється не більше, ніж на 1, то в деякому наборі срібних кілець рівно k, і достатньо вирізати цю ділянку ланцюга двома розрізами.

III.36.19. *Відповідь.* $x=y=1$. *Вказівка.* Після логарифмування рівностей, система перетворюється в лінійну відносно x і y.

III.36.20. Оскільки кут BAC – тупий, то $AB = AC$; $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$, $\angle ABP = \angle PBC = 20^\circ$. Розглянемо на стороні BC точку M таку, що $BM = BP$ (рис. III.36.7). З рівнобедреного трикутника BPM знаходимо $\angle PMB = 80^\circ$. Отже, $\angle PAB + \angle PMB = 180^\circ$, тобто точки A, B, M, P лежать на одному колі. Звідси $AP = PM$, оскільки $\angle ABP = \angle MBP$. Але трикутник PMC – рівнобедрений, оскільки $\angle MPC = \angle PMB - \angle PCM = 40^\circ = \angle PCM$. Отже, $PM = MC$. Таким чином, $BC = BM + MC = BP + MP = BP + AP$.

III.36.21. Позначимо $x = b + 2a > 0$, $y = a + 2b > 0$. Тоді $a = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$,

$b = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x$. Отже, $\frac{a}{b+2a} + \frac{b}{a+2b} = \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y}{x} + \frac{\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x}{y} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \le$

$\le \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{2}{3}$.

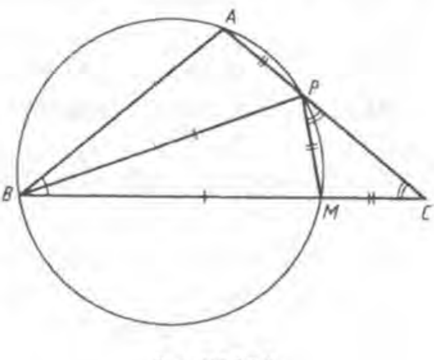


Рис. III.36.7

III.36.22. *Відповідь.* 360°. Оскільки піраміда $OABC$ рівна пірамідам $OBAS, OSCB, OCSA$, то сума двогранних кутів тригранного кута $OABC$ дорівнює сумі двогранних кутів пірамід $OBAS, OSCB, OCSA$, що прилягають до їх спільного ребра OS, тобто 360°.

III.36.23. *Вказівка.* Доведіть, що $a_{n+1}^2 + a_n^2 = k^2(a_{n+1}a_n + 1)$.

Олімпіада 37
(*1997 р.*)

III.37.1. Нехай x, y, z – відповідно кількість перемог, нічиїх та поразок у даного шахіста. Тоді $x + y + z = 40$, $x + \frac{1}{2}y = 25$, звідси $x - z = x - (40 - x - y) = 2\left(x + \frac{1}{2}y\right) - 40 = 10$.

III.37.2. Оскільки добуток $b\cdot c$ закінчується нулем, то $b=5$ або $c=5$. Після нескладного перебору отримаємо шукані набори: $a=6, b=5, c=2$; $a=2, b=6, c=5$.

III.37.3. Досить показати, що точка E рівновіддалена від прямих DB та DC. Нехай точки X, Y, Z – ортогональні проекції точки E на прямі відповідно AB, DB, DC. За умовою задачі $EX = EZ$, але $\angle XBC = \angle BCA + \angle BAC = \angle DBC$, звідси випливає, що $EX = EY$.

III.37.4. *Відповідь.* 1 997 країн. Нехай країни A та B не ворогують між собою. Тоді будь-які дві інші країни C і D ворогують та щонайбільше одна країна не ворогує з A або B. Якщо 1 997 країн ворогують з усіма країнами, умова задачі, очевидно, виконується.

III.37.5. Вихідне рівняння рівносильне рівнянню $\left(x-\sqrt{x^2-3x}\right)^2=1$. Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що єдиним коренем цього рівняння є $x=-\frac{1}{5}$.

III.37.6. Розв'язуючи рівняння $|2x-a|=1-|1-x|$, нескладно отримати, що зазначені графіки мають дві різні спільні точки $A\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$ і $C\left(\frac{a+2}{3};\frac{4-a}{3}\right)$. Отже, для площі S чотирикутника $ABCD$ (рис.III. 37.1) маємо $S=\frac{1}{6}\left(2-(a-2)^2\right)<\frac{1}{3}$.

III.37.7. Оскільки $x^3 \equiv x(\mathrm{mod}\,6)$, то $a^3+b^3+c^3 \equiv a+b+c(\mathrm{mod}\,6)$. Залишається скористатися тотожністю $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

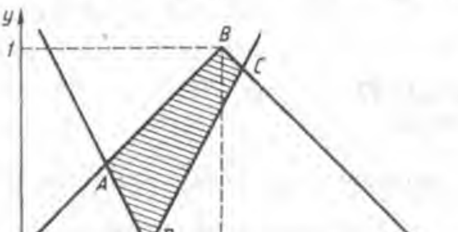


Рис. III.37.1

III.37.8. Доведемо, що $O\in NL$, тобто $\angle NOK+\angle LOK=180^\circ$ або $\angle ONK+\angle NKO+\angle OKL+\angle KLO==180^\circ$. Зазначимо, що промені AO, BO, CO, DO є бісектрисами внутрішніх кутів чотирикутника

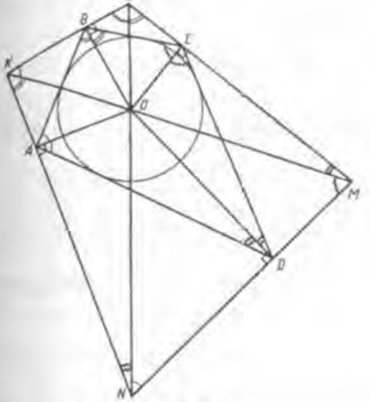


Рис. III. 37.2

−1	+2	−3	+4	−5	+6	−7	+8
+1	−2	+3	−4	+5	−6	+7	−8
−1	+2	−3	+4	−5	+6	−7	+8
+1	−2	+3	−4	+5	−6	+7	−8
−1	+2	−3	+4	−5	+6	−7	+8
+1	−2	+3	−4	+5	−6	+7	−8
−1	+2	−3	+4	−5	+6	−7	+8
+1	−2	+3	−4	+5	−6	+7	−8

Рис. III. 37.3

$ABCD$, а навколо кожного з чотирикутників $OAND$, $ODMC$, $OCLB$, $OBKA$ можна описати коло. Це дає можливість позначити рівні кути так, як показано на рис. III.37.2, чим потрібне співвідношення і доводиться. Аналогічно доводиться, що $O \in MK$. У чотирикутнику $NKLM$ $\angle N + \angle L = \angle M + \angle K$, тобто навколо нього можна описати коло. Отже, за відомою теоремою про пропорційність відрізків хорд, що перетинаються всередині кола, $ON \cdot OL = OM \cdot OK$. Звідси одержимо $ON = \dfrac{p \cdot r}{q}$.

III.37.9. Розставимо числа на шахівниці так, як показано на рис. III.37.3. Сума чисел, які опиняються під будь-якою вертикально розташованою плиткою, дорівнює нулеві, сума всіх записаних у клітинках дошки чисел теж дорівнює нулеві. Впроваджене розфарбування "відрізняє" горизонтальні чорно-білі плитки від біло-чорних: під кожною плиткою першого типу сума чисел дорівнює (−1), а під кожною плиткою другого типу – (+1). Звідси випливає, що кількість плиток обох типів однакова.

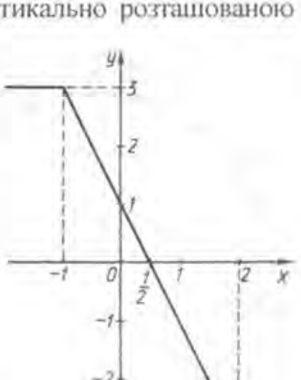


Рис. III.37.4

III.37.10. Для розв'язання задачі доцільно розглянути графік функції $y = |x-2| - |x+1|$ (рис. III.37.4). Дане рівняння має принаймні один цілий корінь тоді і тільки тоді, коли $a \in \{-3; -1; 1; 3\}$.

III.37.11. Легко помітити, що довжина кожної ланки ламаної є половиною довжини гіпотенузи відповідного прямокутного трикутника.

III.37.12. Принаймні одне з чисел x, y ділиться на просте число p. Нехай x ділиться на p, тобто $x = kp,\ k \in Z$. Звідси $y = \dfrac{kp}{k-1}$. Оскільки НСД$(k; k-1) = 1$, то $p \vdots (k-1)$. Розглянемо чотири випадки: $k = 2,\ k = 0,\ k = p+1,\ k = 1-p$. Враховуючи те, що x, y входять до вихідного рівняння симетрично, маємо $(2p; 2p)$, $(0;0)$, $(p+1; p(p+1))$, $(p(p+1); p+1)$, $(p-1; p(1-p))$, $(p(1-p); p-1)$.

III.37.13. Скористаємося теоремою синусів $\dfrac{AC}{\sin\angle AMC} = \dfrac{BC}{\sin\angle BNC}$, $\dfrac{AC}{\sin\angle ANC} = \dfrac{BC}{\sin\angle BMC}$. Оскільки $\sin\angle ANC = \sin\angle BNC$, $\sin\angle BMC = \sin\angle AMC$, то $AC = BC$.

III.37.14. Виберемо напрямок обходу стола та будемо розглядати всі трійки учнів, які розташовані за столом поспіль. Нескладно переконатися, що кожен учень вірно називає кількість брехунів у трійці, яку утворюють він сам та обидва його сусіди. Згідно з умовою задачі, при опитуванні було названо $18 \cdot 2 + 12 = 48$ брехунів. При цьому кожен брехун згадувався тричі, оскільки він входить до трьох трійок. Отже, брехунів може бути тільки $\dfrac{48}{3} = 16$. Наведемо приклад (рис. III.37.5).

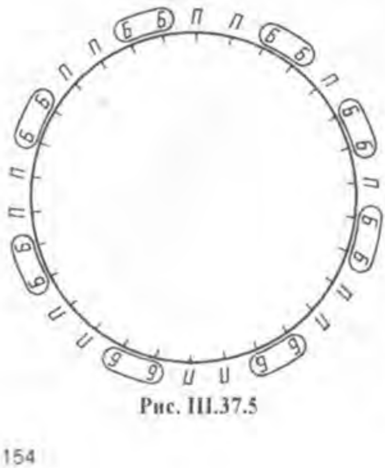


Рис. III.37.5

III.37.15. Запишемо вихідне співвідношення у вигляді $(x-1)(x-y) + (x-1)^2 = 0$, звідси дістанемо єдину пару, що задовольняє умову: $x = 1,\ y = 1$.

III.37.16. Одержати фігуру, площа поверхні якої є непарне число, неможливо, оскільки площа поверхні фігури, котра утворюється описаним склеюванням, має відрізнятися на парне число від суми площ поверхонь всіх кубиків, з яких вона складається.

III.37.17. *Відповідь*. Ні. Нехай $f(0)=0$, при $x\in\left[2^n;\ 2^{n+1}\right)$ покладемо $f(x)=(-1)^n n$, $(n\in Z)$ і при $x<0$ вважатимемо, що $f(x)=f(-x)$.

III.37.18. Покажемо, яким чином той, хто починає гру, може забезпечити собі перемогу. Першим ходом він довільно замінює коефіцієнт a_1, а потім, користуючись тим, що серед решти коефіцієнтів їх кількість з парними і з непарними номерами є число парне, забезпечує собі можливість зробити останнім заміну серед коефіцієнтів $a_2, a_4, ..., a_{1\,996}$. Тому перший гравець може зробити так, щоб $f(0)=0$, оскільки $f(0)=a_2+a_4+...+a_{1\,996}$.

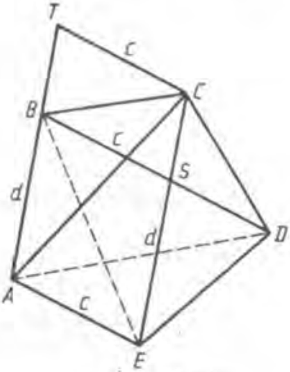


Рис. III.37.6

III.37.19. Нехай $S=DB\cap CE$, $T\in AB$, $CT\parallel AE$ (рис. III.37.6). Будемо використовувати такі позначення: $AB=ES=d$, $AE=BS=CT=c$, $\dfrac{SC}{AB}=x$. Розглядаючи відповідні пари подібних трикутників, отримуємо $SD=x\cdot c$, $BT=x\cdot d$. Оскільки $\dfrac{SD}{TC}=\dfrac{SE}{TA}$, то $\dfrac{x\cdot c}{c}=\dfrac{d}{d(1+x)}$, $x>0$. Звідси $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отже, шукане відношення є $x+1=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ і, очевидно, є однаковим для всіх пар відрізків, зазначених в умові.

Олімпіада 38
(*1998 р.*)

III.38.1. Для отримання 12%-го розчину треба змішати дві частини 15%-го розчину та три частини 10%-го розчину. Можлива послідовність дій відображена у таблиці.

Послідовність	Посуд, л		
	3	4	5
1	3 л 10%-го розчину	4 л 15%-го розчину	–
2	–	2 л 15%-го розчину	5 л 12%-го розчину
3	2 л 15%-го розчину	4 л 12%-го розчину	1 л 12%-го розчину

III.38.2.

1	1	1
–1	1	1
–1	–1	1
–1	–1	–1

III.38.3. *Відповідь.* 1 996. Оскільки $\frac{1}{1997}-\frac{1997}{m}>0$, $\frac{1}{1998}-\frac{1997}{m}<0$, то $1997\cdot1997<m<1997\cdot1998$. Отже, $m=1997\cdot1997+k$, $k\in\{1;2\ldots;1996\}$. Для всіх таких m дріб $\frac{1997}{m}$ буде нескоротним, оскільки число 1 997 є простим.

III.38.4. Доведемо, що перемогу може забезпечити собі той, хто починає. Розіб'ємо клітинки з номерами 2–17 на чотири групи, у кожній з яких по чотири послідовних клітинки. Перший гравець спочатку закреслює першу клітинку, а потім діє таким чином: якщо другий гравець закреслює клітинку з парним номером, то перший – іншу клітинку з парним номером з цієї ж групи; якщо другий закреслює клітинку з непарним номером, то перший – іншу клітинку з непарним номером з цієї ж групи; якщо другий закреслює дві клітинки, то перший – решту клітинок цієї ж групи. Очевидно, що перший гравець при цьому завжди матиме можливість зробити свій черговий хід.

III.38.5. *Відповідь.* $(882;828;288)$, $(774;747;477)$, $(666;666;666)$, $(558;585;855)$.

III.38.6. Нескладно довести, що дане число дорівнює $\left(\frac{10^{1998}+2}{3}\right)^2$.

III.38.7. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола зі сторонами відповідно BC, AC, AB. Бісектриса кута A буде перпендикулярною до B_1C_1, оскільки $AC_1=AB_1$, таку ж властивість матиме і пряма, яку проведено через точку A_1. Отже, вказані прямі містять висоти трикутника $A_1B_1C_1$, а отже – перетинаються в одній точці.

III.38.8. Перемогу зможе забезпечити собі той учень, який починає гру другим. Розставимо у таблиці числа 1, 2, ..., 8 так, як показано на рис. III.38.1. Після будь-якого ходу першого гравця, другий має зафарбувати іншу клітинку з таким самим номером.

III.38.9. Дане число ділиться на $111 = 37 \cdot 3$.

III.38.10. Див. розв'язання задачі III.38.7.

III.38.11. Перемогу може забезпечити собі той, хто починає. Першим ходом він закреслює "центральну" клітинку, а потім використовує симетричну відносно цієї клітинки стратегію.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

Рис. III.38.1

III.38.12. Розглянемо точки $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$, $(2;4)$, $(1;2)$, $(3;1)$, $\left(4;\frac{5}{4}\right)$. Нескладно визначити, що серед цих точок максимальна кількість таких, які лежать на одній прямій, – три. Це й буде відповіддю на запитання задачі.

III.38.13. Зауважимо, що $a(x-\lambda)^2 + b(x-\lambda) + c = ax^2 + (b-2a\lambda)x + $ $+(a\lambda^2 - b\lambda + c)$. Негативна відповідь на запитання задачі випливає з того, що $b^2 - 4ac = (b-2a\lambda)^2 - 4a(a\lambda^2 - b\lambda + c) = (b+2c)^2 - 4c(a+b+c)$. При даних перетвореннях можуть утворюватися і многочлени, степінь яких менший за 2. Це ніяким чином не відбивається на доведенні (у таких випадках просто вважаємо відповідні "зникаючі" коефіцієнти нульовими), але зі зрозумілих причин уникаємо використання терміну "дискримінант".

III.38.14. Цілим буде навіть число $\frac{m^2}{m+n}$, оскільки цілим числом буде його різниця з $\frac{n^2}{m+n}$.

III.38.15. Позначимо послідовно величини кутів чотирикутника через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Тоді $\sin\alpha + \sin\gamma = \sin\beta + \sin\delta$. Врахувавши, що $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$, отримаємо співвідношення $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin\frac{\beta+\delta}{2}$. Звідси випливає, що $0 = \sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta - \sin\delta = 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\sin\frac{\beta+\delta}{2}\cos\frac{\beta-\delta}{2} =$ $= -4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{4}$. Отже, $\alpha+\delta = \beta+\gamma = \pi$ або $\alpha+\beta = \gamma+\delta = \pi$.

III.38.16. *Відповідь.* $x=0, y=1, z=1$. З умови випливає, що $z>0,\ y>0, x\geq 0$. Якщо $x=0$, то $z=1, y=1$. Якщо $x>0$, то $0<z<1$, $\frac{\sqrt{2}}{2}<y<1$. Тому $\left|\frac{1-y}{1+y}\right|=\frac{1-y}{1+y}$, тобто $y^2=\frac{1+z}{2}, z^2=\frac{1}{1+\frac{1-y}{1+y}}=\frac{1+y}{2}$.

Віднімаючи ці рівності, одержуємо $y=z=-\frac{1}{2}$ або $y=z=1$, що не задовольняє вказані умови.

III.38.17. У кожній парі дівчина-хлопець буде один замріяний погляд, тому для загального числа замріяних поглядів маємо рівність $117=mn$, де m, n – відповідно кількість хлопців і дівчат. Умову задачі задовольняють тільки такі випадки: $m=9, n=13$ або $m=13, n=9$.

III.38.18. Доведемо, що $ABCD$ – паралелограм. Нехай M і N – середини відрізків відповідно AC і BD. Припустимо, що точки M і N не збігаються. Розглянемо перше проектування вздовж прямої l_1. Оскільки точки M і N проектуються, очевидно, в одну й ту саму точку, то $MN \parallel l_1$. Аналогічно, якщо друге проектування здійснюється вздовж прямої l_2, то $MN \parallel l_2$. Прийшли до суперечності, оскільки прямі l_1 і l_2 не є паралельними. Отже, точки M і N збігаються.

III.38.19. Доведення випливає з того, що $x-\sqrt{x}\leq y-\frac{1}{4}\leq x+\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|x-y+\frac{1}{4}\right|\leq\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(x-y+\frac{1}{4}\right)^2\leq x \Leftrightarrow \left(x-y-\frac{1}{4}\right)^2\leq y \Leftrightarrow \left|x-y-\frac{1}{4}\right|\leq$$

$$\leq\sqrt{y} \Leftrightarrow y-\sqrt{y}\leq x-\frac{1}{4}\leq y+\sqrt{y}.$$

III.38.20. *Відповідь.* $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z$. Запишемо вихідне рівняння у вигляді $\left(3\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x\right)^2+5(1+\sin 3x)+(1-\cos 12x)=0$. Отже, мають одночасно виконуватися рівності $3\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$, $\sin 3x=-1$, $\cos 12x=1$.

III.38.21. Оскільки $S(CMD)=S(AKD)$, то $S(CKA)=S(CMA)$. Таким чином, $MK \parallel AC$, $S(CKA)=S(CPA)$, $S(ABCK)=S(ABCP)$. Отже, $S(ABCP)=$ $=\frac{1}{2}S(ABCD)$.

III.38.22. *Відповідь.* $f(-1)=\frac{1}{2}$. Нехай $f(-1)=a$. Для всіх $x\neq 0$ $f(x)-a=af(x)-af\left(\frac{1}{x}\right)$. Підставляючи в останнє функціональне співвідношення вираз $\frac{1}{x}$ замість x, маємо $f\left(\frac{1}{x}\right)-a=af\left(\frac{1}{x}\right)-af(x)$. Тепер отримаємо $f(x)(1-2a)=a(1-2a)$. Якщо $a\neq\frac{1}{2}$, то для всіх $x\neq 0$ $f(x)=a$, що суперечить умові. Зауважимо, що такі функції f, про які йдеться в умові, дійсно існують.

III.38.23. Доведемо відповідне твердження для прямокутників розмірами $2^m\times 1998^2$ $(m\geq 0)$, застосовуючи метод індукції по m. Для $m=0$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується при $m=k$. Нехай $m=k+1$. Проведемо уявну пряму l, яка розбиває прямокутник P_{k+1} розмірами $2^{k+1}\times 1998^2$ на два прямокутники розмірами $2^k\times 1998^2$. Розглянемо спочатку всі розбивання прямокутника P_{k+1}, які містять принаймні одну фігурку, що розтинається прямою l. Сукупність всіх таких розбивань розпадається на пари незбіжних розбивань, котрі взаємно симетричні відносно прямої l, і тому містить парну кількість розбивань, яку позначимо через N. Всі інші розбивання прямокутника P_{k+1} породжують відповідні розбивання двох прямокутників розмірами $2^k\times 1998^2$. За припущенням індукції, кожен з цих прямокутників розбивається непарним числом способів, яке позначимо через L. Таким чином, кількість способів розбивання прямокутника P_{k+1} дорівнює L^2+N і є числом непарним.

Олімпіада 39
(*1999 р.*)

III.39.1. Наведемо приклад потрібного розміщення чисел:

34	33	32	34	33	32	34	33	32	34	33	32	34	33	32	34
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

III.39.2. Нехай кожен учень отримає k цілих аркушів, m половинок та n третинок. При $k=1, m=1, n=2$ виконуватиметься потрібне співвідношення $13=6k+\frac{6m}{2}+\frac{6n}{3}=6k+3m+2n$.

III.39.3. Оскільки $x+y\geq 0$, то $x-y=x+y$ і $y=0$. Звідси одержимо, що $x\geq 0$. Отже, шуканою множиною точок є промінь $\{(x;y)\,|\,x\geq 0,\ y=0\}$ на осі абсцис.

III.39.4. Позначимо задане число через A. Тоді $A=3^{55}\cdot 1\cdot 11\cdot 111\cdots\underbrace{11...1}_{55\text{ одиниць}}$.

Зауважимо, що в такому добутку серед множників, десятковий запис котрих складається тільки з одиниць, є рівно вісімнадцять чисел, які діляться на 3: дванадцять чисел вигляду $\underbrace{11...1}_{3k\text{ одиниць}}$, де $k\in\{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14;\ 16;\ 17\}$, і шість чисел вигляду $\underbrace{11...1}_{9k\text{ одиниць}}$, де $k\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Звідси вже нескладно отримати, що шукане значення $n=55+12+4\cdot 2+2\cdot 3=81$.

III.39.5. *Відповідь.* $x=-\frac{1}{1999}$.

III.39.6. Таких цілих чисел m і n не існує. Дійсно, якщо $k=m+1999$, то ліва частина даної рівності набуває вигляду $3k^2-1$, що є неможливим.

III.39.7. Нескладно показати, що трикутник ABQ є рівнобедреним, а точка P – середина його основи AB (рис. III.39.1). Отже, $\angle APQ=90^\circ$.

III.39.8. Досить довести, що серед даних 1 999 чисел є принаймні 19 додатних (зауважимо, що $1999=99\cdot 20+19$). Розіб'ємо набір даних 1 999 чисел на 20 груп по 99 чисел у кожній та одну групу, яка складається з 19 чисел. У кожній з 20 груп, що містять по 99 чисел, є хоча б одне додатне число, оскільки в такій групі сума чисел є додатною.

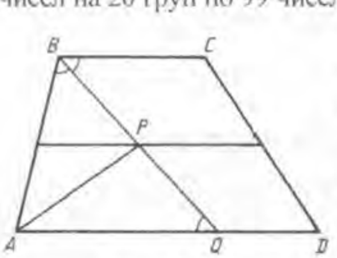


Рис. III.39.1

III.39.9. Нескладно довести, що десятковий запис даного числа складається з 20 цифр. Якщо серед них не буде трьох однакових, то дане число складається з розташованих у деякому порядку цифр

0, 0, 1, 1, ..., 9, 9, а тому ділиться на 3. Проте число 1 999 не ділиться на 3, що й приводить до протиріччя. Дане число дорівнює $1\,999^6 = 63\,808\;239\,840\,059\,988\,001$.

III.39.10. *Відповідь.* $x=0$. Легко перевірити, що $x=1$ не є коренем даного рівняння, а тому вихідне рівняння рівносильне рівнянню $\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)=\left(1-x^4\right)^2$.

III.39.11. Опустимо перпендикуляри CC_1 та HH_1 до сторони AB. Тоді $AC_1^2-BC_1^2=\left(AC^2-CC_1^2\right)-\left(BC^2-CC_1^2\right)=AC^2-BC^2=AH^2-BH^2=$
$=\left(AH_1^2+HH_1^2\right)-\left(BH_1^2+HH_1^2\right)=AH_1^2-BH_1^2$.

Звідси випливає, що $BC_1=BH_1$ і точки C_1 та H_1 збігаються. Отже, точка H належить прямій CC_1. Аналогічно доводиться, що точка H лежить і на двох інших прямих, що містять висоти трикутника.

III.39.12. Використовуючи теорему Вієта, отримаємо $x_1^4+x_2^4=$
$$=\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)^2-2x_1^2x_2^2=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-\frac{1}{2\alpha^4}=2+\left(\alpha^4+\frac{1}{2\alpha^4}\right)\ge 2+\sqrt{2}.$$

III.39.13. У четвертому рядку будуть записані числа $3(c-b)$, $3(a-c)$, $3(b-a)$. Тому числа четвертого і всіх наступних рядків мають ділитися на 3.

III.39.14. З даних рівностей випливає, що $(x-y)(1-z)=0$, $(x-z)(1-y)=0$. *Відповідь.* $(2;2;2),(-3;-3;-3)$, $(1;1;5)$, $(1;5;1)$, $(5;1;1)$.

III.39.15. Нехай W – відмінна від O точка перетину прямої BO з колом, яке описане навколо трикутника AOC (рис. III.39.2). Тоді $\angle OCW=\angle OCA+\angle ACW=\frac{1}{2}\angle ACB+\angle AOW=$
$=\frac{1}{2}\angle ACB+\angle OAB+\angle OBA=\frac{1}{2}\left(\angle ACB+\angle BAC+\right.$
$\left.+\angle ABC\right)=90^\circ$. Це означає, що відрізок OW – діаметр кола і точка S належить йому.

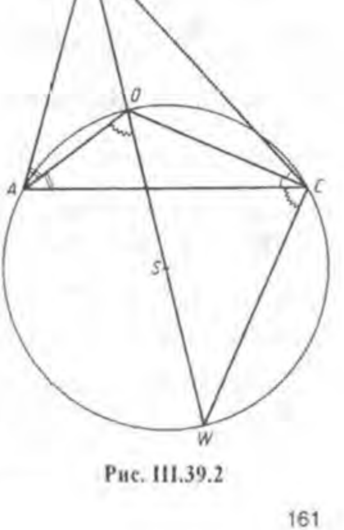


Рис. III.39.2

III.39.16. З умови випливає, що $y+x\geq 0$. Нехай $u=y+x$, тоді $x^2=u-$ $-x+\sqrt{u}$. Тобто $\left(x-\sqrt{u}\right)\left(x+\sqrt{u}+1\right)=0$. Звідси $x=\sqrt{u}$ або $x=-\sqrt{u}-1$. Таким чином, шуканою множиною точок координатної площини є множина $M=\left\{(x;y)\mid x\geq 0,\ y=x^2-x\right\}\cup\left\{(x;y)\mid x\leq -1,\ y=x^2+x+1\right\}$.

III.39.17. Потрібну властивість має, наприклад, послідовність $a_n=(n!)^3$, $n\geq 1$.

III.39.18. *Відповідь.* $10\left(n^2-1\right)$ км. З елементарної теорії графів добре відомо (доведення можна знайти в будь-якому посібнику з цієї дисципліни), що кожен N-вершинний граф, який є деревом, містить $N-1$ ребро. Отже, система доріг, про яку йдеться в умові задачі, не може складатися менше, ніж з n^2-1 ділянок. Залишається побудувати систему доріг з n^2-1 ділянок, яка б задовольняла умову. Для цього можна, наприклад, взяти всі "горизонтальні" і "вертикальні" ділянки, з яких утворюється одна із сторін квадрата.

III.39.19. *Відповідь.* $x=0$, $x=-1$. Легко перевірити, що $x=1$ не є коренем даного рівняння, а тому вихідне рівняння рівносильне рівнянню $\left(1-x^3\right)\left(1-x^{11}\right)=\left(1-x^7\right)^2$. Звідси $x^3\left(x^4-1\right)^2=0$.

III.39.20. Рівність, подану в умові, можна переписати у вигляді $\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)+\sin\beta(\sin\beta-\cos\alpha)=0$. Якщо $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, то $0<\alpha<$ $<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$. Тоді обидві різниці у лівій частині останньої рівності є від'ємними, і, внаслідок цього, всупереч умові від'ємним буде значення виразу $\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)+\sin\beta(\sin\beta-\cos\alpha)$. Випадок $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ розглядається аналогічно.

III.39.21. Доведемо, що такої функції не існує. Припустимо протилежне і розглянемо функцію $F(x)=f(x)-f(x+\sin x)$, $x\in R$. За умовою задачі $F(x)\geq 0$ при всіх $x\in R$. Оскільки при всіх $n\in Z$ $F(n\pi)=0$, то за теоремою Ферма $F'(n\pi)=0$ при всіх $n\in Z$. Отже, $f'(n\pi)-(1+\cos n\pi)f'(n\pi)=0$, $n\in Z$, звідси $f'(n\pi)=0$, $n\in Z$. Отримали суперечність з умовою задачі.

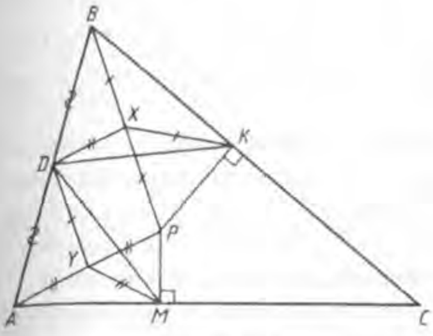


Рис. III.39.3

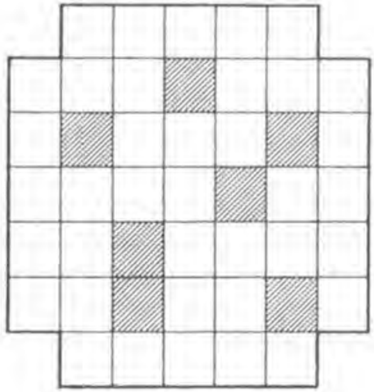


Рис. III.39.4

III.39.22. Позначимо через D, Y, X середини відрізків відповідно AB, AP, BP. Тоді $MY = AY = PY$, $KX = BX = PX$ і чотирикутник $PYDX$ є паралелограмом (рис. III.39.3). Звідси випливає, що $\Delta MDY = \Delta DKX$ (за трьома сторонами) та $\angle DXK = \angle MYD$. Оскільки $\angle DXP = \angle DYP$, то $\angle PXK = \angle PYM$. Отже, $2\angle PBK = 2\angle PAM$, $\angle PBC = \angle PAC$.

III.39.23. Покажемо, що таке зробити можна. Спочатку позначимо на даній шахівниці сім клітинок таким чином, щоб будь-яка п'ятиклітинкова фігурка зазначеного вигляду містила принаймні одну позначену клітинку (рис. III.39.4). Нехай $m = \dfrac{199\,919\,991\,999}{3}$, $m \in N$. У кожній з позначених клітинок запишемо число $5m$, а в інших клітинках $- m$. Тоді для кожної п'ятиклітинкової фігурки сума чисел дорівнюватиме $4m + (-5m) < 0$ або $3m + 2(-5m) < 0$. При цьому сума всіх записаних чисел становить $38m + 7(-5m) = 3m = 199\,919\,991\,999$.

Олімпіада 40
(*2000 р.*)

III.40.1. а) Оскільки $n = 2\,000 - S(n)$, то $n \leq 1\,999$, а $S(n) \leq 28$. Звідси випливає, що $n \geq 1\,972$. Якщо $n = 1\,972$, то $S(n) = 19$ і $n + S(n) = 1\,972 + 19 = 1\,991 < 2\,000$. Тоді легко зрозуміти, що $n = 1\,972 + 9 = 1\,981$ буде задовольняти рівність, про яку йдеться в умові, оскільки сума його цифр також дорівнює 19.

б) Відомо, що число та сума його цифр мають одну й ту саму остачу при діленні на 3. Наприклад, числа $n=1972$, $S(n)=19$, $S(S(n))=10$ мають при діленні на 3 остачу 1. Тому число $A=n+S(n)+S(S(n))$ завжди ділиться на 3. Але число 2 000 такої властивості не має. Отже, такого значення n не існує.

III.40.2. Виберемо на прямій початок відліку, напрям і одиницю масштабу. Припустимо, що твердження задачі не виконується. Візьмемо точки A і B відповідно з координатами 0 і 1 (рис. III.40.1). Нехай ці точки пофарбовано у синій колір. Тоді точки D і C відповідно з координатами –1 та 2 мають бути пофарбовані у червоний колір.

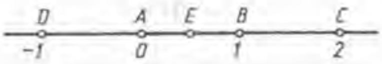


Рис. III.40.1

Розглянемо точку E з координатою $\frac{1}{2}$. Точка E є серединою відрізка AB, кінці якого є синіми точками. Водночас, точка E є серединою відрізка CD, кінці якого пофарбовано у червоний колір. Отже, точка E буде мати або синій, або червоний колір. Суперечність.

III.40.3. Якщо всі 1 999 чисел мають однакову парність, то витираємо довільне число, оскільки сума 1 998 чисел однакової парності є числом парним. Розглянемо числа S_1 і S_2, які відповідно є сумами всіх парних і непарних чисел. Якщо сума S_2 є непарним числом, то витираємо довільне непарне число серед написаних на дошці непарних чисел. Якщо S_2 є парним числом, то витираємо довільне парне число серед записаних парних чисел на дошці. Для 2 000 чисел твердження задачі справджується не завжди. Наприклад, коли серед 2 000 чисел всі дорівнюють одиниці.

III.40.4. Якщо число n є двоцифровим або трицифровим, то число k буде не менш, ніж чотирицифровим. Отже, для запису рівності $m-n=k$ буде використано не менш одинадцяти цифр, проте серед них знайдуться, щонайменше, дві однакові. Якщо число n є п'ятицифровим, то запис числа k буде містити хоча б одну цифру, отже, і в цьому випадку принаймні одна цифра повториться. Залишилося розглянути випадок, коли число n є чотирицифровим і число k є одноцифровим, або навпаки. Але тоді $m=n+k \le 9\,999+9=10\,008$. Отже, для цих випадків однаковими цифрами будуть нулі, оскільки $10\,000 \le m \le 10\,008$.

III.40.5. Шукатимемо ці пари у вигляді степенів з основою 1 999, а саме, покладемо $a = 1999^n$, $b = 1999^m$. Підставляючи ці подання в рівняння $1999a^{1999} = b^{2000}$, дістанемо $1999(1999^n)^{1999} = (1999^m)^{2000}$ або $1999^{1999n+1} = 1999^{2000m}$.

Тоді $2000m = 1999n + 1$, звідси $m = 1999(n-m) + 1$. Позначимо $n - m = k$. Отже, $m = 1999k + 1$, $n = 2000k + 1$. Якщо $k = 0$, то отримаємо пару (1 999, 1 999), при $k = 1$ одержимо $(1999^{2001}, 1999^{2000})$.

III.40.6. Позначимо $n = 19\,991\,999$. Тоді $n + n(n-1)(n+1) = n + n^3 - -n = n^3$. Отже,

$$A = 19\,991\,999 + 19\,991\,998 \cdot 19\,991\,999 \cdot 19\,992\,000 = 19\,991\,999^3.$$

III.40.7. *Відповідь.* 12 хв. Нехай a – початковий об'єм озера, x – об'єм води, що випиває за одну хвилину один слон, y – продуктивність джерел за хвилину, t – час (у хвилинах).

За час t хв об'єм озера збільшується на $y \cdot t$ і становитиме $a + yt$. Саме такий об'єм води за час t вип'ють шість слонів. Тому маємо рівняння

$$6xt = a + yt. \qquad (1)$$

Міркуючи аналогічно, відповідно до умови задачі, дістанемо ще два рівняння

$$48x = a + 4y, \qquad (2)$$

$$54x = a + 6y. \qquad (3)$$

Звідси $y = 3x$. Тоді рівняння (1) подамо у вигляді $3x \cdot t = a$. З рівняння (2) знаходимо $a = 48x - 4y = 36x$. Таким чином, маємо $3xt = 36x$. Оскільки $x > 0$, то $3t = 36$ або $t = 12$ хв.

III.40.8. Позначимо через K, L, M, N середини відрізків відповідно DC, AB, AC і DB (рис. III.40.2). З умови задачі випливає, що MK є середньою лінією трикутника ADC.

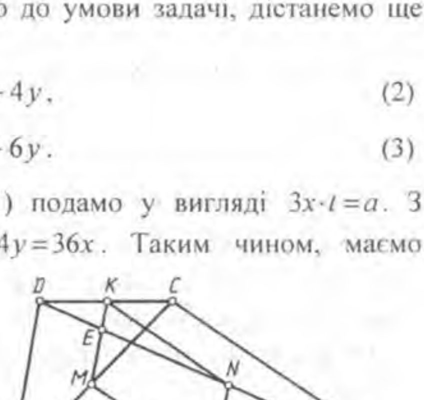


Рис. III.40.2

Тому $MK \parallel AD$ і $MK = \frac{1}{2}AD$. У трикутнику ADB відрізок NL є середньою лінією, тобто $NL \parallel AD$ і $NL = \frac{1}{2}AD$. Отже, в чотирикутнику $MKNL$ протилежні сторони є рівними і паралельними. Це означає, що $MKNL$ є паралелограмом, у якого рівні діагоналі. Звідси випливає, що $MKNL$ є прямокутником. Нехай E – точка перетину BD і MK. Оскільки $MK \parallel AD$, то $\angle ADB = \angle MEN$. Але кут MEN є зовнішнім для трикутника EKN, у якого $\angle EKN = 90°$. Отже, $\angle MEN > 90°$. Тому кут ADB є тупим.

ІІІ.40.9. Перепишемо рівність таким чином:

$$7m^2 = 5(n^2 + 400). \qquad (1)$$

Оскільки числа 7 і 5 є взаємно простими, m^2 ділиться на 5. Отже, $m = 5k$, $k \in Z$. Тоді рівність (1) можна подати у вигляді

$$n^2 = 5(7k^2 - 80). \qquad (2)$$

З рівності (2) випливає, що n^2 ділиться на 5, отже, $n = 5l$, $l \in Z$. Підставивши $n = 5l$ в рівність (2), дістанемо

$$7k^2 = 5(l^2 + 16). \qquad (3)$$

Звідси $k = 5q$, $q \in Z$, а тому

$$35q^2 = l^2 + 16. \qquad (4)$$

Число l при діленні на 7 може давати остачі 0, ±1, ±2, ±3. Тому остачею при діленні l^2 на 7 можуть бути лише числа 0, 1, 2, 4. Це означає, що $l^2 + 16$ не може ділитись на 7, тобто рівність (4) немає розв'язків у цілих числах.

ІІІ.40.10. Виграє Миколка. Подамо можливі виграшні стратегії Миколки.

І спосіб. Першим своїм ходом Миколка записує число 1 у центральну клітинку таблиці. Якщо Сергійко запише в деяку клітинку число a, то Миколка має записати число $a+1$ у клітинку, яка є центрально симетричною до клітинки, що містить число a. Кожній клітинці першого рядка можна поставити у відповідність клітинку сьомого рядка, яка буде центрально симетричною до неї, і навпаки. Тому перший і сьомий рядки таблиці будемо називати центрально симетричними. Клітинки цих рядків можна розбити на дев'ять центрально симетричних пар. Сума чисел у кожній парі таких клітинок буде непарною, оскільки $a+(a+1)=2a+1$. Тоді число S_1+S_2 є непарним, отже, сума S_1 або S_2 є парною. Аналогічно числа S_2+S_6, S_3+S_5 також будуть непарними і в кожній з цих пар одна сума буде парною. Якщо Сергійко виконує хід у деяку клітинку четвертого рядка, то Миколка у відповідь записує довільне число в будь-яку з вільних клітинок цього ж четвертого рядка. Клітинок у рядку непарна кількість, тому останню вільну клітинку четвертого рядка буде заповнювати Миколка, тобто він у змозі забезпечити парність суми S_4. Отже, чотири із семи чисел S_1, S_2, ..., S_7 будуть парними.

II спосіб. Миколка, який розпочинає гру, може першим записати число в деякі клітинки, щонайменше, чотирьох рядків із семи. Якщо, наприклад, Миколка записав число в деяку клітинку першого рядка, а Сергійко у відповідь записав першим число в деяку клітинку другого рядка, то Миколка має записати наступне число в клітинку одного з рядків, які не були заповнені ще жодним числом, і т. д. Якщо Сергійко робить хід у клітинку одного з чотирьох рядків, у кожному з яких Миколка першим записав деяке число, то Миколка у відповідь робить хід у вільну клітинку цього самого рядка. Оскільки число клітинок у кожному рядку є непарним, то останню клітинку в цих рядках буде заповнювати Миколка, і, отже, він зможе отримати парні суми чисел у цих рядках.

III.40.11. *I спосіб.* Якщо x_0 – корінь першого рівняння, то $x_0^2=4x_0+2$. Тоді маємо $(x_0^2-3x_0-2)^2-3(x_0^2-3x_0-2)-x_0-2=$ $=(4x_0+2-3x_0-2)^2-3(4x_0+2-3x_0-2)-x_0-2=x_0^2-4x_0-2=0$.

II спосіб. Якщо x_0 – корінь першого рівняння, то $x_0^2-3x_0-2=x_0$. Тоді $(x_0^2-3x_0-2)^2-3(x_0^2-3x_0-2)-x_0-2=(x_0^2-3x_0-2)-x_0=x_0-x_0=0$.

III.40.12. Якщо числа $A_1=5n-1$ і $A_2=n-10$ діляться на p, то тоді на p будуть ділитися і всі числа вигляду $A=k_1A_1+k_2A_2$, де $k_1,k_2\in Z$.

Маємо $A = k_1(5n-1) + k_2(n-10) = (5k_1 + k_2)n - (k_1 + 10k_2)$. Виберемо числа k_1 і k_2 такі, що $5k_1 + k_2 = 0$. Нехай, наприклад, $k_1 = 1$, $k_2 = -5$. Тоді число $A = -(1-50) = 49$ також буде ділитися на p. Тому $p = 7$. Число $2\,000n + 13 = 400(5n-1) + 413$ ділиться на $p = 7$, оскільки $413 = 7 \cdot 59$.

III.40.13. *I спосіб*. За нерівністю Коші будемо мати

$$\frac{a^4}{bc} + bc \ge 2a^2, \quad \frac{b^4}{ac} + ca \ge 2b^2, \quad \frac{c^4}{ab} + ab \ge 2c^2.$$

Додаючи отримані нерівності, дістанемо

$$\frac{a^4}{bc} + bc + \frac{b^4}{ac} + ca + \frac{c^4}{ab} + ab \ge 2a^2 + 2b^2 + 2c^2. \qquad (1)$$

З нерівності трьох квадратів маємо

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac. \qquad (2)$$

Додавши нерівності (1) і (2), отримаємо

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ab} + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac \ge 2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ac,$$

звідси випливає справедливість нерівності, про яку йдеться в умові задачі.

II спосіб. З нерівності $(m-n)^2 \ge 0$ випливає, що

$$\frac{m^2}{n} \ge 2m - n, \text{ де } n > 0. \qquad (3)$$

Покладемо в нерівність (3) $m = a^2$, $n = bc$. Тоді $\dfrac{a^4}{bc} \ge 2a^2 - bc$.

Аналогічно дістаємо нерівності $\dfrac{b^4}{ac} \ge 2b^2 - ac$, $\dfrac{c^4}{ab} \ge 2c^2 - ab$. Додаючи ці нерівності, отримаємо

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ab} \ge 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ac) =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \ge a^2 + b^2 + c^2,$$

оскільки вираз в дужках є невід'ємним.

III спосіб. Розглянемо набори, що складаються з наступних трійок чисел

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{bc}};\frac{b^2}{\sqrt{ac}};\frac{c^2}{\sqrt{ab}}\right) \text{ і } \left(\sqrt{bc};\sqrt{ac};\sqrt{ab}\right).$$

Застосуємо до цих двох наборів нерівність Коші – Буняковського. Отримаємо

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{bc}}\cdot\sqrt{bc}+\frac{b^2}{\sqrt{ac}}\cdot\sqrt{ac}+\frac{c^2}{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{ab}\right)^2 \le \left(\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}\right)(bc+ac+ab)\le$$

$$\le\left(\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}\right)(a^2+b^2+c^2),$$

звідси

$$(a^2+b^2+c^2)^2\le\left(\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}\right)(a^2+b^2+c^2),$$

або

$$\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}\ge a^2+b^2+c^2,$$

що й треба було довести.

III.40.14. *I спосіб.* Нехай O_1 і O_2 – центри даних вписаних кіл, O – центр кола ω, A і C лежать на колі з центром O_1, B і D – на колі з центром O_2 (рис. III.40.3). Позначимо через W точку перетину прямої AC та ω, $W \ne A$. Оскільки A – точка дотику кіл, то A, O, O_1 лежать на одній прямій. Трикутники AO_1C та AOW є рівнобедреними, тому $O_1C \parallel OW$.

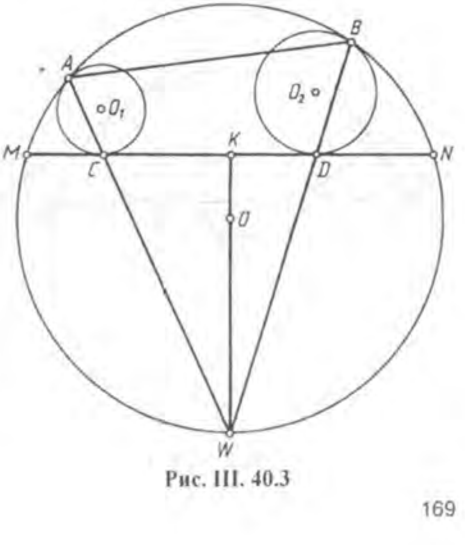


Рис. III. 40.3

Оскільки $O_1C \perp MN$, то $WO \perp MN$. Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл точкою перетину K. Тому W є центром дуги MWN. Аналогічно доводимо, що пряма BD також перетинає коло в точці W. Позначимо $\angle ABW = \alpha$. Тоді за властивістю вписаних кутів $\angle AOW = \angle AO_1C = 2\alpha$. Звідси випливає, що $\angle MCA = \alpha$, як кут між дотичною MN і хордою AC кола з центром O_1. Отже, маємо $\angle DCW = \angle MCA = \alpha$, $\angle ABD = \angle ABW = \alpha$, тобто $\angle DCW = \angle ABD$. Це означає, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.

II спосіб. Проведемо дотичні до кола ω у точках A і B (рис. III.40.4). Позначимо через K точку перетину цих дотичних, $M_1 = AK \cap MN$, $N_1 = BK \cap MN$. Трикутники M_1AC, AKB і BDN_1 є рівнобедреними за властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки. Нехай $\angle KM_1N_1 = \varphi$, $\angle AOB = \psi$. Оскільки $AO \perp M_1K$, $BO \perp KN_1$, то $\angle AKB = \angle M_1KN_1 = 180° - \psi$. Тоді $\angle BN_1D = 180° - (180° - \psi) - \varphi = \psi - \varphi = \alpha$. $\angle BDN_1 = \angle BDN_1 = \angle DBN_1 = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

З іншого боку, $\angle CAB = 180° - \angle M_1AC - \angle KAB = 180° - \left(90° - \dfrac{\varphi}{2}\right) - \dfrac{\psi}{2} = 90° + \dfrac{\varphi - \psi}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Отже, $\angle CAB = \angle BDN$.

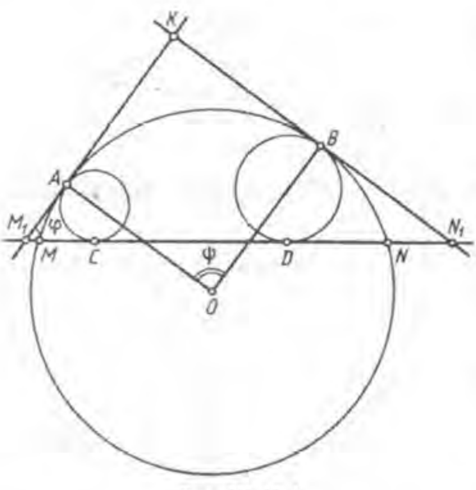


Рис. III.40.4

Пропонуємо читачеві розглянути й інші випадки взаємного розміщення кіл з центрами O_1 і O_2, а саме: а) одна із дотичних у точці A або в точці B є паралельною хорді MN; б) обидві дотичні до кола ω у точках A і B перетинають пряму MN у точках, які лежать ліворуч від точки M (праворуч від точки N).

III.40.15. Замінимо кожне з чисел від 1 до 2 000 на його остачу від ділення на 3.

Всього маємо 1 999 місць для знаків. Спочатку відокремимо дві пари місць: перше і друге, передостаннє і останнє. Решту місць для знаків розіб'ємо на трійки вигляду $0*1*2*0$, де замість зірочок гравці будуть вписувати знак додавання "+" або множення "×". Зауважимо, що таких трійок буде непарна кількість, оскільки $(1999-4):3=665$.

Покажемо, що гравець, який ходить першим, може діяти таким чином, щоб у кожній трійці останній знак записував би саме він.

Першим своїм ходом гравець, який розпочинає гру, ставить знак у будь-якій трійці, якщо другий гравець ставить знак в цій самій трійці замість однієї з двох зірочок, то перший гравець поставить знак замість останньої зірочки цієї самої трійки. Якщо ж другий гравець поставить знак у іншій трійці знаків, то перший гравець також має вибрати вільну трійку місць (зірочок) і поставити там знак. Оскільки число трійок є непарним, то другий гравець врешті-решт буде змушений повертатися до тих трійок, де він вже замінив одну зірочку на знак, і ставити знак замість однієї з двох зірочок, що лишилися в цих трійках. Тоді перший гравець і в таких трійках буде записувати останній знак. А тепер детальніше подамо виграшну стратегію для гравця, який розпочинає гру (першого гравця).

Перший гравець повинен поставити певний знак у будь-якій трійці. Тоді в цій трійці залишається дві зірочки. Якщо другий гравець записує знак замість однієї з цих двох зірочок, то останній знак у цю трійку перший гравець має записувати так, щоб кількість знаків множення в трійці не дорівнювала одиниці:

$$0\times1*2*0\to0\times1\times2*0\to0\times1\times2\times0$$
$$0\times1*2*0\to0\times1+2*0\to0\times1+2\times0$$
$$0\times1*2*0\to0\times1*2+0\to0\times1\times2+0$$
$$0+1*2*0\to0+1+2*0\to0+1+2+0$$
$$0+1*2*0\to0+1\times2*0\to0+1\times2\times0$$
$$0*1+2*0\to0\times1+2*0\to0\times1+2\times0$$
$$0*1+2*0\to0+1+2*0\to0+1+2+0$$
$$0*1\times2*0\to0\times1\times2*0\to0\times1\times2\times0$$
$$0*1\times2*0\to0+1\times2*0\to0+1\times2\times0.$$

Зазначимо, що коли другий гравець запише знак в одну з двох пар, які відокремили, то перший запише в цю пару той самий знак, а саме:

$$(1+2+0;\ 1\times2\times0;\ 0+1+2;\ 0\times1\times2).$$

III.40.16. Внаслідок піднесення обох частин вихідної рівності до квадрата, отримаємо

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2+$$

$$+2\sqrt{2x-y^2+z^2-7}\sqrt{2y-x^2+z^2-12}=0.$$

Звідси $x=1, y=2, z=3$. Перевіркою встановлюємо, що при цьому дійсно задовольняється умова задачі.

III.40.17. Нехай у гіпнотизера є x курей та y індиків. Індиками себе вважають $\frac{1}{10}x$ курей та $\frac{9}{10}y$ індиків. Отже, за умовою, $\frac{1}{10}x+\frac{9}{10}y=\frac{1}{5}(x+y)$. Звідси випливає, що $y=\frac{1}{8}(x+y)$. Таким чином, індики складають восьму частину господарства гіпнотизера.

III.40.18. Нескладно довести (зробіть це самостійно), що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ є гомотетичними. Нехай точка $O=AA_1\cap BB_1\cap CC_1$ – центр такої гомотетії. тоді ΔABC є образом $\Delta A_1B_1C_1$, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Вважатимемо, що відрізки PO, RO, QO перетинають відрізки A_1B_1, A_1C_1, C_1B_1 у точках відповідно P_1, R_1, Q_1, при цьому $\frac{OP_1}{OP}=\frac{OR_1}{OR}=\frac{OQ_1}{OQ}=\sqrt{\frac{b}{a}}$. Звідси отримаємо

$$\frac{S(\Delta OP_1B_1)+S(\Delta OP_1A_1)+S(\Delta OR_1A_1)+S(\Delta OR_1C_1)+S(\Delta OQ_1C_1)+S(\Delta OQ_1B_1)}{S(\Delta OPB_1)+S(\Delta OPA_1)+S(\Delta ORA_1)+S(\Delta ORC_1)+S(\Delta OQC_1)+S(\Delta OQB_1)}=$$

$=\sqrt{\frac{b}{a}}$, тобто $\frac{S(\Delta A_1B_1C_1)}{S(\Delta PQR)}=\sqrt{\frac{b}{a}}$ і $S(\Delta PQR)=\sqrt{ab}$.

III.40.19. З умови задачі випливає, що

$$a_0+a_1+...+a_{10}=11. \tag{1}$$

Крім того, $a_0 + a_1 + ... + a_{10} = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + ... + 10 \cdot a_{10}$, звідси

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + ... + 9a_{10}. \qquad (2)$$

За умови $a_0 \in \{0;1;2\}$ потрібних послідовностей не існує. Нехай $a_0 = k$, $k \geq 3$. Тоді $a_k \geq 1$, але з рівності (2) випливає, що $k \geq (k-1)a_k$, $a_k \leq 1 + \frac{1}{k-1} < 2$. Таким чином, $a_k = 1$, і з рівності (2) одержуємо співвідношення $a_2 + 2a_3 + ... + (k-2)a_{k-1} + ka_{k+1} + ... + 9a_{10} = a_0 - (k-1)a_k = 1$. Отже, $a_2 = 1$, $a_3 = ... = a_{k-1} = a_{k+1} = ... = a_{10} = 0$. Одиниця серед записаних чисел зустрінеться двічі, тобто $a_1 = 2$. З рівності (1) отримаємо $k+2+1+1=11$, $k = 7$. Перевірка свідчить, що набір (7; 2; 1; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0) задовольняє умову.

III.40.20. Якщо $u = \text{tg}\,2x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, то $f(u) = \frac{16}{u^4} + \frac{16}{u^2} + 2$ для довільного $u > 0$. Нехай $y = \sin x$, $z = \cos x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді, враховуючи рівність $y^2 + z^2 = 1$, дістанемо $f(y) + f(z) = 4\left(\frac{2}{y^2 z^2} - 1\right)^2$. Оскільки $yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{1}{2}$, то $f(y) + f(z) \geq 4 \cdot 7^2 = 196$, що і потрібно було довести.

III.40.21. Насамперед зазначимо, що куб натурального числа за $\bmod 4$ може бути конгруентним лише числам –1, 0, 1. Натуральне число, десятковий запис якого складається тільки з двійок, має остачу 2 за $\bmod 4$. Отже, справедливим є більш загальне твердження: не існує натурального числа, десятковий запис якого складається тільки з двійок і який можна подати у вигляді суми кубів кількох послідовних натуральних чисел. Твердження задачі для суми кубів саме трьох послідовних натуральних чисел випливає з того, що якщо число $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2 + 2)$ $(n \in N)$ є парним, то воно ділиться і на чотири.

III.40.22. Незалежно від характеру розташування точок B, C, D на колі ω твердження задачі, як нескладно переконатися, випливатиме з того, що $\angle CBD = \angle CDK = \angle CFK$.

III.40.23. Нехай $f(x)=\sin 2\,000x+\sin ax+\sin bx,\ x\in R$. Тоді при всіх $x\in R$ $f'(x)=0$ і $f'''(x)=0$, звідси для $x=0$ одержимо рівність $2\,000+a+b=2\,000^3+a^3+b^3=0$. Розв'язуючи таку систему рівнянь, одержуємо $a=0,\ b=-2\,000$ або $a=-2\,000,\ b=0$. Перевірка є очевидною.

III.40.24. За нерівністю Коші маємо $12=xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, $xyz=2+x+y+z\geq 4\sqrt[4]{2xyz}$. З цих двох нерівностей випливає, що $xyz=8$. Отже, $2+x+y+z=4\sqrt[4]{2xyz}$. Враховуючи умову досяжності рівності у нерівності Коші, дістаємо $x=y=z=2$. При цьому виконуються обидві рівності вихідної системи.

III.40.25. Оскільки $C_6^3=20$, то існуватиме така трьохелементна підмножина $Y\subset X$, яка не збігається з жодною з множин $A_1, A_2, ..., A_9, X\setminus A_1, X\setminus A_2, ..., X\setminus A_9$. Для того щоб задовольнити умову задачі, достатньо пофарбувати всі елементи множини Y в один колір, а всі елементи множини $X\setminus Y$ – у другий колір.

Заключний етап Всеукраїнських олімпіад

Олімпіада 31
(м. Вінниця, 1991 р.)

3.31.1. *Відповідь.* $m = 3$, $n = 4$. Розкривши дужки в правій частині даного рівняння, матимемо $n!+1=(m!)^2-2m!+1$, $n!=m!(m!-2)$. Очевидно, що $m>2$. Тоді $m!\geq 6=3!$ і $n!>m!$, звідси $n>m$. Поділивши обидві частини на $m!$, маємо

$$\frac{n!}{m!}=m!-2. \qquad (1)$$

Ліва частина має вигляд $\frac{n!}{m!}=(m+1)\cdots n$. Якщо в цьому добутку є хоча б три множники, то він буде обов'язково ділитися на 3 як добуток трьох послідовних натуральних чисел. Але при $m>2$ число $m!$ ділиться на 3, тоді як $m!-2$ не ділиться. Отже, рівність (1) не виконуватиметься. Тому маємо всього два можливі випадки: 1) ліва частина в рівності (1) дорівнює $m+1$, якщо $n=m+1$; 2) $(m+1)(m+2)$, якщо $n=m+2$. Розглянемо їх окремо.

1) $m+1=m!-2$; $m+3=m!$;

$1+\frac{3}{m}=\frac{m!}{m}=(m-1)!$.

Права частина є цілим числом, ліва буде набувати цілих значень тільки при $m=3$, а тоді $n=4$.

2) $(m+1)(m+2)=m!-2$.

З двох чисел $m+1$ і $m+2$, які не повинні ділитися на 3, одне дає остачу 1 при діленні на 3, друге – остачу 2. Тоді їх добуток дає остачу 2, але $m!-2$ має давати остачу 1, оскільки $m!$ ділиться на 3. Отже, у даному випадку розв'язків немає.

3.31.2. Проведемо через M пряму паралельну прямій BC (рис. 3.31.1). Вона перетне AC у точці N_1, причому за теоремою Фалеса $\frac{AN_1}{N_1C}=\frac{1}{1991}$. Отже, $N=N_1$. Трикутники AMN і ABC подібні з коефіцієнтом подібності 1992. Трикутники MON і BOC також подібні

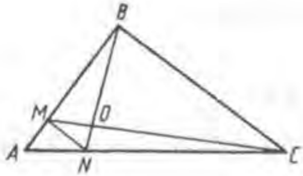


Рис. 3.31.1

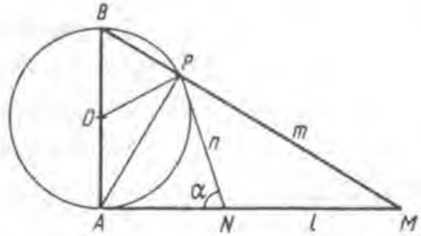


Рис. 3.31.2

$(MN \| BC)$ і $\dfrac{MO}{OC} = \dfrac{MN}{BC} = 1992$, звідси точка O ділить CM у відношенні 1 : 1992.

3.31.3. Розв'язуватимемо задачу "з кінця". Якщо припустити, що на столі залишилася одна фішка, то ситуація є виграшною для того гравця, чия черга ходити. Він бере цю фішку і виграє. Якщо залишилося дві фішки – ситуація програшна для того, чия черга ходити. Будемо записувати числа 1, 2, 3, ... із знаками "+" або "–" в залежності від того, виграшною чи програшною є дана ситуація для гравця, який робить хід. Тоді, якщо гравець певним ходом (знявши 1, 10 або 11 фішок) може створити програшну ситуацію для свого суперника (бо його черга ходити), то для нього початкова ситуація є виграшною. Тепер можна з'ясувати по черзі для всіх чисел 1, 2, 3, 4, … виграшною чи програшною є ситуація для даної кількості фішок на столі. Для чисел від 1 до 9 знаки "+" або "–" розставляються по черзі. Числа 10, 11, 12, 13, …, 19 є виграшними, 20 – програшним (будь-яким ходом можна досягнути лише чисел 9, 10 і 19, які є виграшними для суперника). Помітивши закономірність (знаки через 20 чисел повторюються), можемо легко продовжувати розставлення знаків. Неважко переконатися, що число 40 має знак "–", тобто за правильної гри другий гравець виграє.

3.31.4. Оскільки $n^2 + 5 = n^2 - 25 + 30 = (n+5)(n-5) + 30$, то число 30 має ділитися на $n + 5$, звідси $n = 1$, $n = 5$, $n = 10$, $n = 25$.

3.31.5. Позначимо $\alpha = \angle ANP$ (рис. 3.31.2). Доведемо, що кут NPM дорівнює $\dfrac{\alpha}{2}$ (тоді, за властивістю зовнішнього кута, $\angle PMN = \dfrac{\alpha}{2}$).

Кут POA дорівнює $360° - 90° - 90° - \alpha = 180° - \alpha$, кути OBP і OPB у рівнобедреному трикутнику дорівнюють по половині зовнішнього кута POA, тому $\angle OPB=\dfrac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$. Тоді $\angle MPN=180^\circ-$ $-\angle OPN-\angle OPB=180^\circ-90^\circ-\left(90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$, що й потрібно було довести.

3.31.6. а) Зауважимо, що за один крок ми або можемо змінити найбільше з чисел, або (якщо таких чисел кілька) отримати нуль, віднявши від одного з таких чисел інше. Зменшувати можна щонайбільше 1 990 разів (з 1 991 до 1), нулів отримати можна стільки само. Всього кроків 2·1 990, і після їх виконання обов'язково будемо мати не менше 1 990 нулів.

б) Запишемо на дошці числа 1 991, $\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{1\,990\ \text{одиниць}}$. Щоб одержати ще один нуль, можна тільки віднімати від одиниці одиницю (всі числа, крім одного, завжди будуть не більші за 1). Тому потрібно, по-перше, зменшити число 1 991 до 1 (за один крок зменшуємо лише на 1, а кроків всього 1 990). Ці 2·1 990 кроків є обов'язковими, а виконувати їх можна в довільному порядку.

3.31.7. Кожному окремому стрижню такої ґратки поставимо у відповідність деяке число в такий спосіб, як це наведено на рис. 3.31.3. Зауважимо, що кожен стрижень ґратки належить тільки одному кутику.

Сума чисел, які розташовані симетрично відносно діагоналі, що йде праворуч і вниз, дорівнює нулеві. Відповідно і сума всіх чисел таблиці дорівнює нулеві. Будемо рахувати цю суму, беручи по два числа (які відповідають одному кутику, тобто двом з'єднаним стрижням). Бачимо, що в кутику, де стрижні напрямлено вгору та праворуч, сума чисел завжди дорівнює −1, якщо вниз та ліворуч – сума чисел дорів-

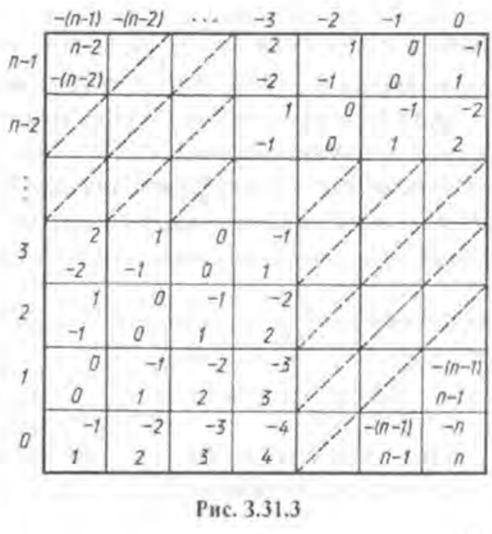


Рис. 3.31.3

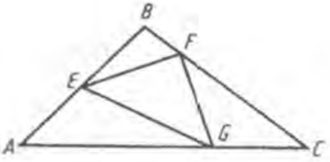


Рис. 3.31.4

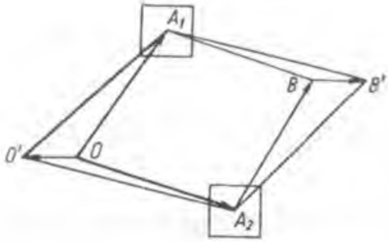


Рис. 3.31.5

нює +1, а в двох інших випадках – сума чисел дорівнює 0. Тому загальна сума має дорівнювати кількості кутиків першого типу, взятій зі знаком "+", і кількості кутиків другого типу зі знаком "–". Оскільки ця сума, як ми вже зазначили, дорівнює нулеві, то шукані кількості є однаковими.

3.31.8. *Відповідь.* $6\frac{4}{5}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{2}{7}$, $9\frac{1}{8}$, 10. Позначимо $[x]=n$ ($n\in Z$), а $\{x\}=\alpha$ (тоді $0\le\alpha<1$). Рівняння перепишеться у вигляді $n\alpha+n+\alpha=2\alpha+10$, звідси $\alpha=\frac{9}{n-1}-1$. Подвійна нерівність $0\le\frac{9}{n-1}-1<1$ є еквівалентною системі нерівностей $\begin{cases} n\le 10, \\ n>5{,}5. \end{cases}$ Відшукавши ті значення $n\in N$, за яких α потрапляє до проміжку $[0;\ 1)$, а це значення 6, 7, 8, 9, 10, одержуємо відповідні значення α, а отже й x.

3.31.9. Напрям пошуку розв'язання полягає в тому, щоб знайти площі трикутників *AEG*, *BEF*, *CFG* (рис. 3.31.4) і відняти їх від S. Оскільки кут A є спільним для ΔAEG і ΔABC, а площу трикутника можна подати як напівдобуток двох його сторін на синус кута між ними, то площу трикутника ΔAEG можна виразити через $S=S_{\Delta ABC}$ та відношення $\frac{AE}{AB}=x$ і $\frac{AG}{AC}=1-z$. Справді, $S_{\Delta AEG}=\frac{1}{2}AE\cdot AG\sin A$, $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$, а тому $S_{\Delta AEG}=S\cdot x(1-z)$.

Аналогічно знаходяться площі трикутників *BEF*, *GFC*. Звідси легко отримаємо відповідь $S_{\Delta EFG}=S(1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y))$.

3.31.10. Неважко зрозуміти, що площа фігури F не залежить від положення точки O (рис. 3.31.5), оскільки якщо перенести O у точку O', то образом точки B буде точка B' така, що $\overline{OB'} = \overline{OO'} + \overline{O'B'} = \overline{OO'} + \overline{O'A_1} + \overline{O'A_2} = \overline{OO'} + \overline{OA_1} + \overline{O'O} + \overline{OA_2} + \overline{O'O} = (\overline{OA_1} + \overline{OA_2}) + \overline{O'O} = \overline{OB} + \overline{O'O}$. Тобто всі точки B переміщуються на один і той самий вектор $\overline{O'O}$. Отже, маємо паралельне перенесення фігури F, а тому її площа залишається без зміни. Аналогічно можна перенести паралельно і квадрати. Зсунемо один з них до положення, коли дві його сторони є продовженнями двох сторін іншого квадрата. Застосуємо метод координат: напрямимо вісь Ox через центри квадратів так, щоб початок координат був серединою відрізка, який сполучає центри, вісь Oy перпендикулярно до Ox. Точкою O позначимо початок координат. Тоді, якщо сторона квадратів $2a$, а відстань між їх центрами $2b$, то точки $A_1 \in F_1$ матимуть такі координати: абсциси будь-які від $b-a$ до $b+a$, а ординати (незалежно від абсцис) будь-які від $-a$ до a. Аналогічно в квадраті F_2 абсциси будь-які від $-(b+a)$ до $-(b-a)$, а ординати від $-a$ до a. Оскільки $\overline{OB} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$, то координати точки B будуть сумою відповідних координат точок A_1 і A_2.

Отже, абсциса B може набувати будь-яких значень від мінімального $b-a+(-(b+a)) = -2a$ до максимального $b+a+(-(b-a)) = 2a$ (рис. 3.31.6). Ордината, аналогічно, також від $-2a$ до $2a$. Фігура, в якій точки мають такі координати, є квадратом розмірами $4a \times 4a$, його площа $S = 16a^2 = 4S$.

Розглянемо тепер випадок, коли сторони квадратів не є паралельними. Тоді фігура F (рис. 3.31.7) матиме вигляд восьмикутника з однаковими сторонами $2a$, а кути по черзі будуть дорівнювати $90°+\alpha$ та $180°-\alpha$, де α – кут між сторонами квадратів F_1 та F_2. Його площа дорівнюватиме $S = 8a^2(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = 2S(1+\sqrt{2}\sin(\alpha+45°))$, де

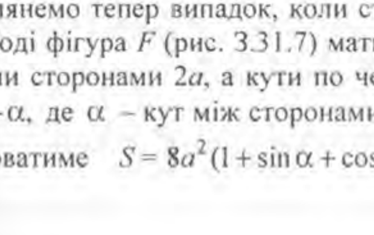


Рис. 3.31.6

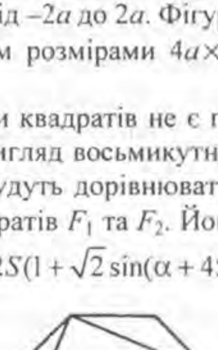


Рис. 3.31.7

$0 \le \alpha \le 45°$, в силу симетрії виразів $90°+\alpha$ та $180°-\alpha$ відносно $\alpha = 45°$.

Тоді $\min S_F = 4S$ при $\alpha = 0$, $\max S_F = 2S(1+\sqrt{2})$ при $\alpha = 45°$, бо $f(\alpha) = \sin(\alpha + 45°)$ строго зростає на відрізку $[0°; 45°]$.

3.31.11. Позначимо найбільше з цих чисел через b, а найменше і середнє відповідно через c і a. Тоді $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$. Оскільки $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}>\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{c}-\frac{c}{a}>\frac{a}{c}-\frac{c}{b}$, то $\frac{ab-c^2}{ac}>\frac{ab-c^2}{bc}$. Остання нерівність є очевидною, тому що $b > a$.

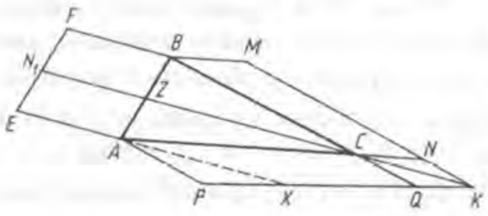


Рис. 3.31.8

3.31.12. Продовжимо пряму KC до перетину з відрізками AB і EF відповідно в точках Z і N_1 (рис. 3.31.8). Оскільки $KC||EA||FB$, то паралелограм $AEFB$ розбивається на два менших. Доведемо, що їх площі дорівнюють S_{APQC} і S_{BMNC}.

Продовжимо пряму EA до перетину з прямою PQ у точці X. Тоді $AXKC$ – паралелограм і його площа дорівнює площі паралелограма $APQC$ (основи і висоти є однаковими). Оскільки $EA=KC=AX$, то площі паралелограмів $AXKC$ і AEN_1Z також є однаковими (основи і висоти в них є рівними). Отже, $S_{AEN_1Z} = S_{APQC}$. Аналогічно доводиться, що $S_{BZN_1F} = S_{BMNC}$, звідси й одержимо потрібну рівність.

3.31.13. *Відповідь.* $\left[\frac{2n}{3}\right]$. Позначимо учнів точками, і якщо в якийсь день чергує дана пара учнів, то з'єднаємо відповідні точки відрізком. Тоді на мові графів задачу можна сформулювати ще так: яку найменшу кількість відрізків треба провести, щоб для кожної пари точок знайшлася третя точка, що з'єднана відрізком з однією з точок пари.

Розглянемо можливий граф. Якщо на ньому деякі m точок з'єднані в групу якимись відрізками, то з цих відрізків можна залишити всього $m-1$, щоб тільки група не розпалася. Група по дві точки не може бути.

може бути лише з однією точкою. Тоді всі вимоги умови задачі задовольняються. Отже, якщо всі m точок розбити на групи з $m_1, m_2, \ldots, m_k$ точок ($m_1+m_2+\ldots+m_k=n$), то найменша можлива кількість відрізків дорівнює $(m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_k-1)=n-k$, звідси видно, що кількість k груп нам треба зробити найбільш можливою. Беручи групи по три точки, одержимо відповідь $2k$, якщо $n=3k$. За умови $n=3k+1$ можна взяти одну окрему точку і знову k груп по три точки, відповідь буде $2k$. Якщо $n=3k+2$, то одну з груп треба брати з чотирьох точок, і відповідь буде $2k+1$. Всі ці відповіді можна об'єднати однією формулою $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

3.31.14. *І спосіб.* Нехай $f(n)=m$, $f(n+1)=m+1$, $f(n+2)=m+2$, де n, m – деякі натуральні числа. Оскільки $f(n)-n=m-n$, $f(n+1)-(n+1)=m-n$, $f(n+2)-(n+2)=m-n$, то складемо різницю $2x^3-60x^2+ax-x$. Тоді при заданих значеннях x ця різниця є сталою і дорівнює $m-n$. Позначимо її через c. Розглянемо многочлен $2x^3-60x^2+ax-x-c$. Він має коренями вказані три значення: $x=n$, $x=n+1$, $x=n+2$, тобто $2x^3-60x^2+ax-x=2(x-n)(x-(n+1))(x-(n+2))$. Порівнюючи коефіцієнти при x^2, одержимо $n=9$. Після цього неважко знайти шукані значення. Вони дорівнюють 1 989, 1 990, 1 991.

ІІ спосіб. Нехай $n-1$, n, $n+1$ – послідовні цілі числа, для яких даний многочлен набуває цілих значень відповідно $m-1$, m, $m+1$

$$\begin{cases} 2(n-1)^3-60(n-1)^2+a(n-1)=m-1, \\ 2n^3-60n^2+an=m, \\ 2(n+1)^3-60(n+1)^2+a(n+1)=m+1. \end{cases} \qquad (1)$$

Додаючи перше і третє рівняння та віднімаючи подвоєне друге, дістанемо

$$2(n-1)^3-60(n-1)^2+a(n-1)+2(n+1)^3-60(n+1)^2+$$
$$+a(n+1)-4n^3+120n^2-2an=0.$$

Після очевидних перетворень знаходимо $n=10$. Підставляючи $n=10$ в перші два рівняння системи (1) та віднімаючи їх, знаходимо $a=599$. Тоді з другого рівняння системи (1) дістаємо $m=1\,990$.

3.31.15. Зауважимо, що $1+a=(1-b)+(1-c)$. Тоді за нерівністю Коші будемо мати $(1+a)=((1-b)+(1-c))\geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. Написавши також аналогічні нерівності для $1+b$ та $1+c$ та перемноживши всі такі нерівності, одержимо потрібну.

3.31.16. а) Нехай $f(x)=a_1x^s+a_2x^{s-1}+...+a_sx+a_{s+1}$, де $a_1, ..., a_{s+1}$ – цілі числа. Оскільки повинно бути $f(1991)=a_1 1991^s+a_2 1991^{s-1}+$ $+...+a_s 1991+a_{s+1}=1$, $f(m)=a_1m^s+a_2m^{s-1}+...+a_sm+a_{s+1}=0$, то, віднімаючи від першої рівності другу, маємо $a_1(1991^s-m^s)+$ $+a_2(1991^{s-1}-m^{s-1})+...+a_s(1991-m)=1$. Всі доданки в лівій частині діляться на різницю $1991-m$, а тому й 1 має ділитися на це число. Аналогічно 1 має ділитися на $1991-n$ і $1991-k$. Але 1 не може ділитися на три різні числа $1991-m$, $1991-n$ і $1991-k$.

б) Такий приклад неважко придумати, з'ясувавши в пункті а), що $1991-m$ і $1991-n$ мають дорівнювати 1 та –1. Тому $m=1990$, $n=1992$, а многочлен підходить такий: $f(x)=-(x-1990)(x-1992)$.

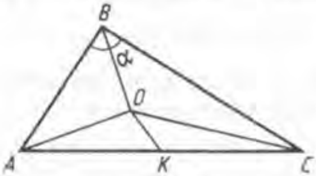


Рис. 3.31.9

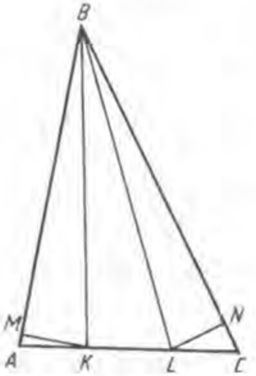


Рис. 3.31.10

3.31.17. Для двох випадків – коли кут при вершині трикутника більший за 60° або не більший – можна запропонувати два різні способи його розрізу.

а) $\alpha>60°$. Точка O є точкою перетину бісектрис, $AK=AB$ (рис. 3.31.9). Трикутники AOB, BOC і AOK рівні, а трикутник OKC має площу меншу за їхню площу (його основа KC менша від AK – основи трикутника AOK, бо $AC<2AB$). Тому площа кожного з рівних трикутників більша за $\frac{S}{4}$.

б) $\alpha\leq 60°$. Кут α ділимо на три рівні частини, а трикутники AMK і BNL дорівнюють трикутнику BKL (рис. 3.31.10). Неважко довести, що $\frac{BC}{BL}<\frac{2}{\sqrt{3}}<\frac{3}{2}$. Тоді площа трикутника CLN є меншою за половину площі трикутника BLN (можна порівняти їх основи BN і NC). Звідси знову випливає, що площі вирізаних трикутників більші за $\frac{S}{4}$.

3.31.18. *І спосіб.* Позначимо кути між прямими a і b, b і c, c і a відповідно через α, β і γ (рис. 3.31.11).

Тоді $M_1M_4 = M_0M_3\cos\alpha$, $M_2M_5 = M_1M_4\cos\beta$, $M_3M_6 = M_2M_5\cos\gamma$, звідси $M_3M_6 = M_0M_3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, $M_0M_6 = M_0M_3 + M_3M_6 = M_0M_3(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$. Косинуси кутів α, β, γ – величини невід'ємні. Тому з рівності $M_0M_6 = 0$ випливає $M_0M_3 = 0$.

ІІ спосіб. Лема. Нехай P' і Q' – основи перпендикулярів, опущених з точок P' і Q' на пряму l. Тоді $PQ \ge P'Q'$, причому рівність має місце тільки у випадку, коли $PQ \parallel l$.

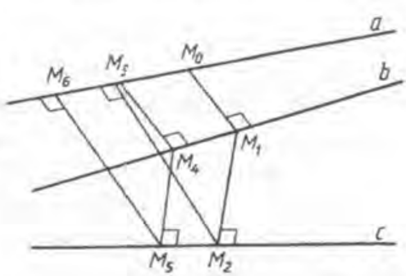


Рис. 3.31.11

Доведення. Очевидно, що відрізки $P'P$ і $Q'Q$ лежать у площинах, перпендикулярних до прямої l. Ці площини є паралельними, відстань між ними дорівнює $P'Q'$, отже, відстань між точками P і Q є не меншою $P'Q'$, причому дорівнює відстані між площинами тільки у випадку, коли відрізок PQ є перпендикулярним до них, тобто $PQ \parallel l$. Лему доведено.

А тепер знову розглянемо поставлену задачу. За лемою маємо $M_3M_6 \le M_2M_5 \le M_1M_4 \le M_3M_0$. Точки M_6 і M_0 збігаються, тому всі нерівності перетворюються на рівності. Це можливо лише у випадку, коли $a \parallel b \parallel c$. Отже, всі побудови відбувалися, насправді, в одній площині, яка є перпендикулярною до цих прямих і має з прямою a лише одну спільну точку $M_0 = M_3 = M_6$.

3.31.19. Розставимо між даними n числами a_1, a_2, a_3, ..., a_n знаки "<" або "$\ge$". Нехай серед них k знаків "<", решта $n-k-1$ знаків "$\ge$". Якщо між числами a_i та a_{i+1} міститься знак "<", то $\frac{a_i}{a_{i+1}} < 1$, а якщо "$\ge$", то $\frac{a_i}{a_{i+1}} < 2$, бо $|a_{i+1} - a_i| = a_i - a_{i+1}$, а тому $a_i - a_{i+1} < 1$, звідси

$a_i < 1 + a_{i+1} < 2a_i$. Таким чином, можемо оцінити всі доданки суми $S = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$, крім останнього. Для оцінки відношення $\frac{a_n}{a_1}$ запишемо $\frac{a_n}{a_1} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1}{a_1}$.

У чисельнику серед різниць $a_i - a_{i+1}$ буде $n-1-k$ від'ємних і k різниць таких, що $a_i - a_{i+1} < 1$, $1 \le i \le n-1$. Тому

$$\frac{a_n}{a_1} < \frac{a_n + 1}{a_1} = 1 + \frac{k}{a_1} < 1 + k .$$

Тоді $S < k + 2(n-k-1) + k + 1 = 2n - 1$, що й потрібно було довести.

3.31.20. Припустимо протилежне: такого прямокутного трикутника не існує. Це означає, що який би ми не взяли позначений кубик, з трьох стовпчиків по n кубиків (вертикальному, по довжині та по ширині куба), в яких він знаходиться, максимум в одному ще є позначений кубик, а решта два стовпчики не містять позначених кубиків. Інакше три позначені кубики утворили б потрібний трикутник. Поставимо у відповідність кожному позначеному кубику два стовпчики, в яких він знаходиться і в яких більше немає позначених кубиків. Розглянемо загальну кількість кубиків у цих стовпчиках. Вона є більшою за $\frac{3}{2}n^2 \cdot 2n = 3n^3$. Але, з іншого боку, кожний кубик (позначений або непозначений) міг бути порахований максимум тричі, адже він міститься в трьох стовпчиках. Отже, загальна їх кількість не може бути більшою за $3n^3$. Отримана суперечність і доводить правильність твердження задачі.

3.31.21. Припустимо супротивне: кожна комісія не влаштовує хоча б одного делегата. Візьмемо деякого делегата a та запропонований ним склад комісії F з десяти осіб. Якби решта складів (запропонованих іншими делегатами) перетиналися зі складом F, то це і був би потрібний нам склад, який би всіх влаштовував. Отже, нехай є делегат b і його склад G такий, що $F \cap G = \varnothing$. Розділимо F і G на половини по п'ять осіб: $F = F_1 \cup F_2$, $G = G_1 \cup G_2$. Позначимо через x_1 делегата, якого не влаштовує такий склад комісії з десяти осіб: $F_1 \cup G_1$. Аналогічно x_2 – делегат, якого не влаштовує склад $F_2 \cup G_1$,

$x_3 - F_1 \cup G_2$, $x_4 - F_2 \cup G_2$. Доведемо, що тоді для шістьох делегатів a, b, x_1, x_2, x_3, x_4 не існує комісії з двох осіб, яка б їх усіх влаштовувала. Справді, нехай таку комісію утворено, і вона задовольняє a і b. Тоді до її складу повинна входити принаймні одна особа з F і одна особа з G. Нехай ці особи належать відповідно половинам F_1 і G_1 (решта випадків розглядається аналогічно). Тоді така комісія не влаштовує делегата x_1. Отримали суперечність, а тому твердження задачі є справедливим.

3.31.22. Для розв'язання цієї задачі скористаємося методом координат. Помістимо початок координат у точку A, вісь Ax проведемо через центр O кола, вісь Ay – перпендикулярно до неї в даній площині α, вісь Az – перпендикулярно до площини α в той бік, в який відкладаються перпендикуляри (рис. 3.31.12). Тоді, якщо центр кола має координати O (a, 0, 0), то координати x і y довільної точки B кола задовольняють рівність $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, де r – радіус кола. Кінець перпендикуляра, про який йдеться в умові задачі, буде мати координати $M(x, y, z)$, де $z = |MB| = |AB|^2 = x^2 + y^2$. Оскільки $z = x^2 + y^2$ і $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = r^2$, то $z - 2ax + a^2 - r^2 = 0$. Таким чином, координати кінців перпендикулярів задовольняють рівняння $z - 2ax + a^2 - r^2 = 0$, що є рівнянням площини.

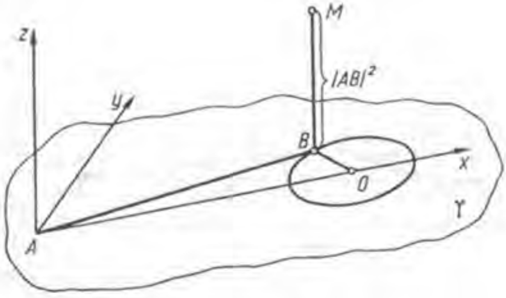


Рис. 3.31.12

3.31.23. Очевидно, можна вважати, що принаймні одна муха своє положення не змінила (в кінцевому положенні куб можна відповідним чином повернути). Позначимо цю муху через A. Зауважимо, що коли одна зі сторін трикутника, складеного з вершин куба зі стороною a, дорівнює $a\sqrt{3}$, то дві інші сторони дорівнюють a і $a\sqrt{2}$. Позначимо через B муху, яка в початковому положенні знаходилась з мухою A на діагоналі куба (тобто $AB = a\sqrt{3}$). Тоді, якщо муха B своє положення також не змінила, то умову задачі разом з мухами A та B задовольнятиме будь-яка третя муха C. Якщо муха B змінила положення, то за третю муху C оберемо ту, яка прилетіла на колишнє місце мухи B (тоді $AC = a\sqrt{3}$ після перельоту). В обох випадках трикутник ABC має в початковому і кінцевому положеннях сторони a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$.

3.31.24. Див. розв'язання задачі 3.31.15.

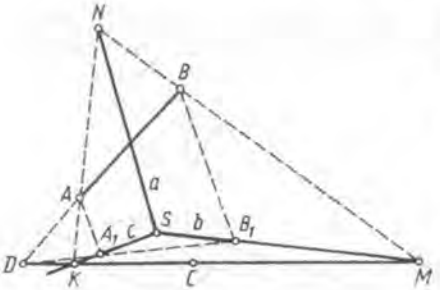


Рис. 3.31.13

3.31.25. Уявимо собі плоску картину як просторову, тобто три промені – це зображення тригранного кута, позначені точки – зображення точок A, B, C, що лежать на гранях цього кута (рис. 3.31.13). Тоді нам потрібно побудувати переріз тригранного кута площиною ABC. Це можна зробити методом "слідів", а саме: проведемо через точки A і B паралельно a прямі, що перетинають промені c і b у точках A_1 і B_1. Точка D, в якій перетинаються прямі AB і A_1B_1, належить, по-перше, прямій AB (тобто площині ABC), по-друге, прямій A_1B_1 (тобто відповідній грані кута). Отже, пряма CD є зображенням перетину площини ABC і грані (площина SA_1B_1) тригранного кута. Закінчити побудову вже неважко. Справді, точку M дістаємо як точку перетину прямих SB_1 і DC, які належать площині грані SA_1B_1. Точка $N = (BM) \cap a$. Точка $K = (NA) \cap c$. Отже, трикутник KMN, як це випливає з побудови, є шуканим.

3.31.26. При $n = 2$ твердження є очевидним, тому будемо вважати, що $n > 2$. Нехай в таблиці є рядок, в якому міститься тільки один нуль, і який має вигляд (0, 1, 1, ..., 1). Тоді разом з кожним рядком $(1, a_2, \ldots, a_6)$ таблиця буде містити і рядок $(0, a_2, \ldots, a_6)$, тобто в першому стовпчику буде не менше половини нулів.

Нехай в таблиці є рядок, що містить два нулі і має вигляд (0,0,1,1,1,1). Позначимо через b_{ij} кількість рядків таблиці, які розпочинаються з $i, j\ (i = 0,1;\ j = 0,1)$. Як і в першому випадку, $b_{00} \ge b_{11}$. Нехай з двох чисел b_{01} і b_{10} більшим є b_{01}, тобто $b_{01} \ge b_{10}$. Тоді перший стовпчик буде містити $b_{00} + b_{01}$ нулів і $b_{10} + b_{11}$ одиниць, причому $b_{00} + b_{01} \ge b_{10} + b_{11}$ і $(b_{00} + b_{01}) + (b_{10} + b_{11}) = n$ і цей стовпчик задовольняє умову.

Нехай тепер кожний рядок, за винятком, можливо, рядка $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, містить не менше трьох нулів. Зауважимо, що у всіх цих рядках по три нулі бути не може. Справді, оскільки $n > 2$, то знайдуться два різні рядки з нулями і їх добуток буде містити більше трьох нулів. Викреслимо з таблиці, якщо потрібно, рядок $(1,1,1,1,1,1)$. Тоді в таблиці розмірами $(n-1)\times 6$, що залишилася, більше половини клітинок будуть містити нулі. Це означає, що існує стовпчик, в якому кількість нулів буде більшою за $\frac{1}{2}(n-1)$. Але тоді кількість нулів є не меншою за $\frac{n}{2}$, що й треба було довести.

3.31.27. Див. розв'язання задачі 3.31.22.

3.31.28. Умову задачі можна сформулювати ще так: розділити дані $2n$ чисел на "половини" так, щоб друга "половина" була трохи більшою (в розумінні суми її чисел), але не набагато – не більше, ніж у $\frac{n+1}{n}$ разів. Таке міркування допомагає обрати напрям пошуку розв'язання, який полягає ось у чому. Розташуємо всі числа у неспадному порядку і позначимо їх через $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, тобто $1 \le a_1 \le b_1 \le$ $\le a_2 \le b_2 \le \ldots \le a_n \le b_n \le 2$. Тоді $a_1 + \ldots + a_n \le b_1 + \ldots + b_n$, а тому права нерівність з умови задачі виконується. Доведемо, що й ліва нерівність справджується також. Вона рівносильна такій нерівності

$$n(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \le (n+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

або

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \qquad (1)$$

Нерівність (1) можна доводити різними способами. Наприклад, використати те, що $b_1 \le a_2$, $b_2 \le a_3$, …, $b_{n-1} \le a_n$. Тоді $b_1 + b_2 + \ldots + b_n -$ $- a_1 - a_2 - \ldots - a_n \le b_n - a_1 \le 2 - 1 = 1$. Отже, в нерівності (1) ліворуч стоїть число, що не перевищує 1. Але в правій частині стоїть середнє арифметичне чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, яке не менше за 1: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge$ $\ge \frac{1 + \ldots + 1}{n} = 1$. Звідси й випливає потрібна нам нерівність (1).

3.31.29. Нехай гравці роблять розпили, після яких дошка не розпадається.

Кожний новий розпил, очевидно, повинен досягати ще одного з $(n-1)^2$ внутрішніх "вузлів" дошки (вершини квадратика). З іншого боку, якщо до якогось з таких вузлів розпили не дійшли, то можна зробити ще один розпил так, щоб дошка не розпалася: провести від такого "вільного" вузла лінію до якогось розпилу по сторонах квадратиків і продовжити згаданий розпил на одиницю по цій лінії.

З вищевказаних міркувань випливає, що за правильної гри всього до розпадання дошки можна зробити рівно $(n-1)^2$ розпилів незалежно від того, в якому порядку вони виконувались. Тому $((n-1)^2+1)$-й хід буде програшний. Отже, при парному n виграє перший гравець (програє другий), а при непарному – другий.

3.31.30. Див. розв'язання задачі 3.31.21.

Олімпіада 32
(м. Чернігів, 1992 р.)

3.32.1. Оскільки $n^2 = 2m-1$, то n є числом непарним. Подамо його у вигляді $n = 2k+1$. Тоді $2m = (2k+1)^2+1 = 4k^2+4k+2$, $m = 2k^2+2k+1 = k^2+k^2+2k+1 = k^2+(k+1)^2$.

3.32.2. Нехай $ABCD$ – чотирикутник, вписаний в коло з центром O. $OH_1 \perp AB$, $OH_2 \perp CD$ (рис. 3.32.1). У рівнобедреному трикутнику AOB висота OH_1 є одночасно бісектрисою і медіаною. Тому

$$BH_1 = \frac{1}{2}BA, \quad \beta = \angle BOH_1 = \frac{1}{2}\angle BOA = \frac{1}{2}(180° - \angle COD) =$$
$$= 90° - \angle COH_2 = \angle OCH_2 = \alpha.$$

Отже, $\alpha = \beta$. Це означає, що прямокутні трикутники OCH_2 і BOH_1 є рівними, оскільки гіпотенузи CO і BO є рівними як радіуси. Тому $OH_1 = CH_2 = \frac{1}{2}CD$, $OH_2 = BH_1 = \frac{1}{2}AB$. Аналогічні міркування проводимо для перпендикулярів OH_3 і OH_4 ($OH_3 \perp AD$, $OH_4 \perp CB$). Дістанемо $OH_3 = \frac{1}{2}CB$, $OH_4 = \frac{1}{2}AD$. Тоді $OH_1+OH_2+OH_3+OH_4 = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$, що й потрібно було довести.

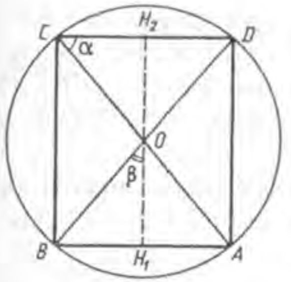


Рис. 3.32.1

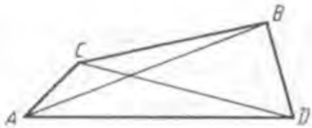


Рис. 3.32.2

3.32.3. Одночасно можна помітити або тільки одну грань (6 способів), або дві суміжні грані, які мають спільне ребро (12 способів), або три грані, які мають спільну вершину (8 способів). Отже, всього маємо $6+12+8=26$ сум. Числа на гранях можна записати так, щоб усі ці суми були різними, наприклад, $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

3.32.4. а) Нехай $f(x)=ax^2+bx+c$. Якщо $x=0$, то $f(0)=c$. Отже, вільний член – ціле число, бо $f(0)$ за умовою є цілим числом.

б) Ні, необов'язково. Розглянемо многочлен $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$, для якого $a=b=\frac{1}{2}c=0$. Втім $f(x)=\frac{x(x+1)}{2}$, звідси є очевидним, що такий квадратний тричлен набуває цілих значень для будь-якого цілого значення x.

3.32.5. З умови задачі випливає, що мають виконуватися нерівності

$$AB<BC, \tag{1}$$
$$AB<BD, \tag{2}$$
$$CD<DA, \tag{3}$$
$$CD<DB. \tag{4}$$

Випадок, коли будь-які три з чотирьох даних точок лежать на одній прямій, є неможливим, оскільки тоді не буде виконуватися одна з нерівностей (1) – (4).

Наприклад, якщо точка C належить відрізку AB, то $AB \geq BC$, що суперечить нерівності (1). Розглянемо тепер випадок, коли жодні три із даних точок не лежать на одній прямій (рис. 3.32.2). Якщо відрізки AB і CD перетинаються, то чотирикутник $ABCD$ буде опуклим. Тоді, принаймні, один з чотирьох його кутів буде не менше, ніж 90°. Нехай це буде кут BCA ($90° \le BCA < 180°$). Тоді в трикутнику ABC сторона AB буде більша, ніж BC, тобто $AB > BC$, що суперечить нерівності (1).

Таким чином, припущення про те, що відрізки AB і CD мають спільну точку, суперечить умові. Тому відрізки AB і CD не перетинаються.

3.32.6. Оцінимо окремо кожний доданок, який записано в лівій частині даної нерівності, беручи до уваги, що $a \ge b \ge c > 0$. Для першого доданка будемо мати

$$\frac{a^2-b^2}{c} = \frac{a+b}{c}(a-b) \ge \frac{c+c}{c}(a-b) \ge 2a-2b. \qquad (1)$$

Другий доданок подамо у вигляді $\frac{c^2-b^2}{a} = \frac{c+b}{a}(c-b)$. Далі помножимо обидві частини нерівності $\frac{c+b}{a} \le 2$ на число $c-b$, яке не є додатним $(c-b \le 0)$. Дістанемо

$$\frac{c+b}{a}(c-b) \ge 2(c-b) \text{ або } \frac{c^2-b^2}{a^2} \ge 2c-2b. \qquad (2)$$

Третій доданок запишемо у вигляді $\frac{a^2-c^2}{b} = \frac{a+c}{b}(a-c)$.

Оскільки $\frac{a+c}{b} > 1$, то помноживши на число $a-c \ge 0$, дістанемо

$$\frac{a+c}{b}(a-c) \ge a-c \text{ або } \frac{a^2-c^2}{b} \ge a-c. \qquad (3)$$

Додавши почленно нерівності (1) – (3), одержимо шукану нерівність. При $a=b=c$ нерівність перетворюється на рівність.

3.32.7. Позначимо різницю арифметичної прогресії через d, а суму $a_{19} + a_{92}$ – через b. Скориставшися відомими формулами суми n перших членів арифметичної прогресії та загального члена, дістанемо

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2}k = \frac{a_1 + a_1 + (k-1)d}{2}k = 1992,$$
$$a_1 + 18d + a_1 + 91d = b.$$

Тепер задачу можна переформулювати таким чином: для яких значень b система

$$\begin{cases}\dfrac{2a_1+(k-1)d}{2}k=1992,\\ 2a_1+109d=b\end{cases}$$

відносно невідомих a_1 і d має розв'язок ?

Отриману систему запишемо ще так

$$\begin{cases}2a_1+(k-1)d=\dfrac{2\cdot 1992}{k},\\ (110-k)d=b-\dfrac{2\cdot 1992}{k}.\end{cases}$$

Очевидно, що у випадку $k\neq 110$ остання система має розв'язок для будь-яких значень b. Якщо $k=110$, то розв'язок існує за умови $\left(b-\dfrac{2\cdot 1992}{110}\right)=0$, тобто лише для $b=\dfrac{1992}{55}$.

3.32.8. Запишемо на двох протилежних гранях числа 1 і 2. Тепер розглянемо другу пару протилежних граней. На одній з цих граней запишемо число 3 (рис. 3.32.3). Це не суперечить вимогам задачі, оскільки грані з числами 1 і 2 одночасно побачити неможливо. На грані, яка є протилежною до грані з числом 3, не можна записати число 4 або 5, бо маємо пари граней із спільними ребрами і такі, що $1+3=4$ або $2+3=5$.

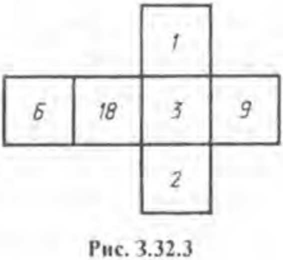


Рис. 3.32.3

Тому на грані, що є протилежною до грані з числом 3, запишемо число 6. Найменше число, яке можна записати на одній з граней третьої пари, дорівнює 9. Виконавши невеличкий перебір, переконуємося, що найменшим числом, яке можна записати в останній грані, є число 18. Таким чином, якщо числа на гранях записати так, як показано на рис. 3.32.3, то легко перевірити, що всі 26 можливих сум (див. розв'язання задачі 3.32.3) будуть різними і найбільша з них дорівнюватиме 26. Оскільки всі ці суми повинні бути натуральними числами, то 26 і є шуканим числом.

3.32.9. Будемо розв'язувати задачу методом від супротивного, а саме: припустимо, що жодне з чисел $f(0), f(1), f(2), ..., f(1991)$ не ділиться на 1 992, проте існує хоча б один цілий корінь у многочлена f. Позначимо цей корінь через m. Нехай k – остача від ділення m на 1 992. Тоді $f(k) = f(k) - f(m)$, оскільки $f(m) = 0$. Покажемо, що $f(k)$ ділиться на $k - m$.

Справді, $f(k) = f(k) - f(m) = a_0(k^n - m^n) + a_1(k^{n-1} - m^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(k - m)$.

Оскільки вираз $x^i - m^i$ ділиться на $k - m$ при будь-якому натуральному i, то $f(k)$ ділиться на $k - m$, а отже і на 1 992, оскільки $m = 1992q + k$, де $0 \le k < 1992$. Це означає, що хоча б одне з чисел $f(0), f(1), f(2), ..., f(1991)$ перетворюється на нуль. Отримали суперечність.

Зауваження. Оскільки пряма теорема і протилежна до оберненої є рівносильними, тобто імплікації $A \Rightarrow B$ і $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ є еквівалентними, то задачу можна переформулювати таким чином: нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен з цілими коефіцієнтами $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$. Доведіть, що коли многочлен $f(x)$ має хоча б один цілий корінь, то хоча б одне з чисел $f(0), f(1), f(2), ..., f(1991)$ ділиться на 1 992.

3.32.10. Нехай O – центр даного кола (рис. 3.32.4). Через точку D проведемо хорду BC. З центра даного кола O опустимо перпендикуляр на сторону BC трикутника ABC. Основою цього перпендикуляра буде точка K – середина BC. Оскільки трикутник OKD є прямокутним, то точка K лежить на колі ω_1, побудованому на OD як на діаметрі. Тому геометричним місцем точок K буде коло ω_1 з центром у точці O_1, яка є серединою відрізка OD. Нехай K_1 є другою точкою перетину прямої AD з колом ω_1 (якщо AD є дотичною до кола, то вважатимемо, що $K_1 = D$).

Очевидно, що кожна відмінна від K_1 точка кола ω_1 буде серединою сторони BC деякого трикутника ABC, що задовольняє умову задачі. Оскільки точка M перетину медіан трикутника ABC лежить на відрізку AK і ділить його у відношенні 2:1, то шуканим геометричним місцем точок буде коло ω_2, яке одержують з кола ω_1 гомотетією, з центром у точці A і коефіцієнтом $\frac{2}{3}$, за винятком однієї вилученої точки. Цією точкою буде точка K_2, яку дістаємо при даній гомотетії з точки K_1.

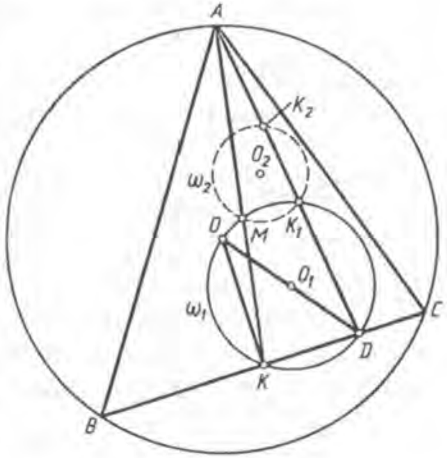


Рис. 3.32.4

3.32.11. Виграє той гравець, який розпочинає гру. Справді, виділимо одну із клітинок, а решту розіб'ємо на частини розмірами 1×2 (рис. 3.32.5). Розглянемо такий випадок: правий верхній кут дошки покрито квадратом розмірами 1×1, а решту дошки – прямокутниками розмірами 1×2. Той, хто розпочинає, першу фішку ставить у виділену клітинку, а кожну наступну – у вільну клітинку тієї частини розмірами 1×2, в яку попереднім ходом поставив свою фішку другий гравець. Очевидно, що це завжди можна зробити.

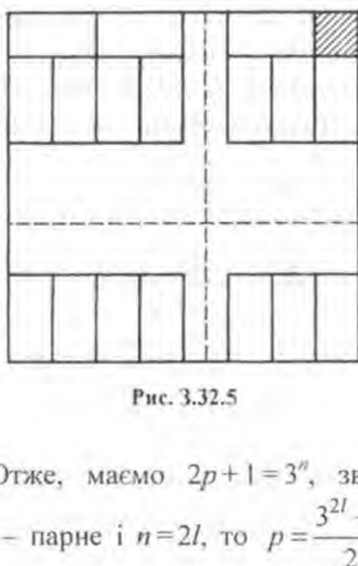


Рис. 3.32.5

3.32.12. Якщо $2p+1=m^n$, то m – непарне і $m=2k+1$. Тоді $2p+1=(2k+1)^n=2kA+1$, де $A>1$. Тому $p=kA$, а оскільки p – просте число, то $k=1$ і $m=3$. Отже, маємо $2p+1=3^n$, звідси $p=\frac{3^n-1}{2}$. Якщо припустити, що n – парне і $n=2l$, то $p=\frac{3^{2l}-1}{2}=$ $=\frac{9^l-1}{2}$, $l\geq1$, $l\in N$, звідси випливає, що $p \vdots 4$. Але це неможливо, оскільки p – просте число. Отже, $p\neq2l$. Залишилося перебрати ті непарні значення $n>2$, для яких виконується нерівність $3^n\leq2\,001$. Якщо $n=3$, то $p=13$. Якщо $n=5$, то $p=121$. Але 121 не є простим числом. Якщо

$n=7$, то $p=1\,093>1\,000$. Таким чином, задача має єдиний розв'язок $p=13$.

3.32.13. Доведемо, що будь-який центрально-симетричний опуклий многокутник можна розрізати на паралелограми. Справді, нехай $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ – такий многокутник (очевидно, що кількість його вершин має бути парною) і O – центр його симетрії (рис. 3.32.6). Зокрема, $\overline{A_iO}=\overline{OA_{n+i}}$ для $i=1,2,\ldots,n$. Від кожної з вершин $A_3, A_4, \ldots, A_n$ відкладемо вектор $\overline{A_1A_2}$, що дорівнює $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$, тобто побудуємо вектори $\overline{A_3B_3}=\overline{A_4B_4}=\ldots=\overline{A_nB_n}=$ $=\overline{A_1A_2}=\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$. Далі "відріжемо" від многокутника $A_1A_2\ldots A_{2n}$ утворені таким чином $(k-1)$ паралелограми $A_1A_2A_3B_3$, $B_3A_3A_4B_4$, ..., $B_nA_nA_{n+1}A_{n+2}$.

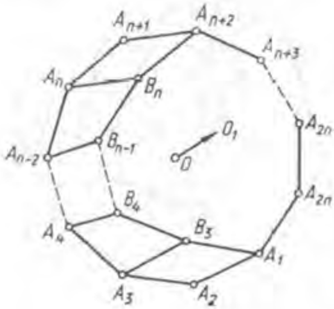


Рис. 3.32.6

Отримаємо $(2n–2)$-кутник $A_1B_3B_4\ldots B_nA_{n+2}A_{n+3}\ldots A_{2n}$, який також буде центрально-симетричним з центром симетрії в точці O_1 і такий, що $\overline{OO_1}=\frac{1}{2}\overline{A_2A_1}$, оскільки

$$\overline{B_iO_1}=\overline{B_iA_i}+\overline{A_iO}+\overline{OO_1}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_iO}+\overline{OO_1}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_iO}+\frac{1}{2}\overline{A_2A_1}=$$

$$=\overline{A_iO}+\overline{A_1A_2}-\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}=\overline{A_iO}+\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}=\overline{OA_{n+i}}+\overline{O_1O}=\overline{O_1A_{n+i}},$$

де $i=3, 4, \ldots, n$.

Аналогічно маємо $\overline{A_1O_1}=\overline{O_1A_{n+2}}$.

Далі такі дії виконуємо доти, доки не дістанемо центрально-симетричний чотирикутник, тобто паралелограм.

3.32.14. Розглянемо довільну пряму $y-12=k(x-42)$, що проходить через точку A і має своїм кутовим коефіцієнтом k – раціональне число. Для відшукання абсциси x_0 точки B $(x_0; y_0)$, яка є другою точкою перетину прямої $y-12=k(x-42)$ з колом $x^2+2x+y^2=1\,992$, отримаємо рівняння $x_0^2+2x_0+(k(x_0-42)+12)^2=1\,992$, яке після очевидних перетворень набуває вигляду $ax_0^2+bx_0+c=0$, де a, b, c є раціональними коефіцієнтами, якщо k – раціональне число. Один з коренів $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ цього рівняння дорівнює 42, тобто є числом раціональним. Звідси випливає, що число $\sqrt{b^2-4ac}$ є раціональним, а тому і другий корінь рівняння також раціональне число. Таким чином, абсциса x_0 точки $B(x_0;\ y_0)$ є числом раціональним. Але тоді раціональним числом буде і ордината y_0 точки $B(x_0; y_0)$, оскільки $y_0=k(x_0-42)+12$, а число k є раціональним. Зазначимо, що через точку A можна провести безліч прямих вигляду $y-12=k(x-42)$ із раціональним коефіцієнтом k.

Зауваження. Слушним є таке загальне твердження, яке пропонуємо довести читачеві самостійно: якщо невироджену криву l задано рівнянням виду $ax^2+bx+cy^2+dy+c=0$ і точка A $(\alpha;\ \beta)$ з раціональними координатами належить цій кривій, то для кожної прямої $y-\beta=k(x-\alpha)$, що проходить через точку A, інша точка її перетину з кривою l матиме раціональні координати тоді й тільки тоді, коли кутовий коефіцієнт k буде раціональним числом. Саме цю ідею і було використано для кола $(x+1)^2+y^2=1\,993$ і точки A (42; 12).

3.32.15. Див. розв'язання задачі 3.32.1.

3.32.16. Нехай виконується рівність

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}\,. \qquad (1)$$

Доведемо, що трикутник ABC є правильним. Позначимо $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Оскільки бісектриса BB_1 трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки, пропорційні двом прилеглим сторонам, то $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$. Виразимо вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. Наприклад, для $\overrightarrow{BB_1}$ матимемо $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}$.

Вектори $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{B_1C}$ є однаково напрямленими, а тому $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{AB_1}=\frac{\overrightarrow{B_1C}}{B_1C}$.

Тобто $\overrightarrow{AB_1}=\frac{AB_1}{B_1C}\overrightarrow{B_1C}=\frac{c}{a}\overrightarrow{B_1C}$. Отже,

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BA}+\frac{c}{a}\overrightarrow{B_1C}\,. \qquad (2)$$

З іншого боку,

$$\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}. \tag{3}$$

Підставивши (3) в (2), дістанемо

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \frac{c}{a}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}),$$

звідси

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC}.$$

Аналогічно отримаємо

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CC_1} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CA}.$$

Згідно з (1) маємо

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c} - \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}\right)\overrightarrow{AB} + \\ &+\left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{a+c} - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

тому що $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ не є колінеарними, а тому рівність (4) буде виконуватись лише тоді, коли коефіцієнти при $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ дорівнюватимуть нулеві: $\frac{b}{b+c} - 1 + \frac{a}{a+b} = 0$, $\frac{c}{b+c} + \frac{c}{a+c} - 1 = 0$. З першої рівності дістанемо $a = c$, а з другої $b = a$. Отже, $a = b = c$, тобто трикутник ABC є правильним.

Оскільки в правильному трикутнику бісектриси одночасно є і медіанами, то

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{2} =$$
$$= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}}{2} + \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}}{2} = 0.$$

3.32.17. Нехай $x=0$ або $z=0$, тоді з третього рівняння маємо $y^2+y+1=0$, що неможливо, оскільки $y^2+y+1=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. Отже, $x\neq 0$ і $z\neq 0$. Оскільки $y^2+y+1>0$, то з третього рівняння випливає, що $xz<0$, тобто x і z мають протилежні знаки. Перепишемо перше та друге рівняння системи таким чином:

$$\begin{cases} 2z(1+2y)=-x^2, \\ x(1+2y)=-2z^2. \end{cases}$$

Помітимо, що правильними є нерівності $2z(1+2y)<0$ і $x(1+2y)<0$, а тому $2xz(1+2y)^2>0$, звідси випливає $xy>0$, тобто x і y мають бути одного знака. Суперечність.

3.32.18. Зазначимо, що всі додатні числа є "позначеними". Нехай a_k – "позначений" член з найменшим номером k, а m – найменше число для якого $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_m>0$. Тоді для будь-якого p такого, що $k\leq p<m$, з нерівності $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_p<0$ випливає нерівність $a_{p+1}+\ldots+a_m>0$, тобто a_{p+1} є "позначений" член. Отже, всі члени a_k, $a_{k+1},\ldots,a_m$ є "позначеними", а їх сума є додатною. Повторюючи ці міркування для послідовності a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_n і т. д., розіб'ємо всі "позначені" члени на групи, у кожній з яких сума буде додатною.

Зауваження. Номер m, для якого $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_m>0$, необов'язково вибирати найменшим. Зрозуміло, що тоді додатною буде і сума всіх "позначених" членів, що знаходяться між a_k і a_m (з лівої частини нерівності $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_m>0$ вилучимо деякі від'ємні числа). Далі будемо розглядати "позначений" член з найменшим номером після a_m і т. д.

3.32.19. Позначимо $f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x$, де $n=1$, 2, ..., і покладемо $x=\frac{\pi}{4}$. Тоді $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin^n\frac{\pi}{4}+\cos^n\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $n=1,2,\ldots$

Послідовність $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $n=1,2,\ldots$, є спадною, а тому $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+$ $+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\leq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{2}$ для всіх $n\geq 4$.

Таким чином, ми довели, що для кожної функції f_n з номером $n \geq 4$ на відрізку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ знайдеться хоча б одна точка $x_0 = \frac{\pi}{4}$ така, що $f_n(x_0) \leq \frac{1}{2}$, де $n = 4, 5, \ldots$ Зауважимо, що для всіх натуральних n $f_n(0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Крім того, для всіх $0 < x < \frac{\pi}{2}$ виконуються нерівності $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > f_4(x)$. Але $f_4(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Отже, маємо $f_3(x) = \sin^3 x + \cos^3 x > \frac{1}{2}$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Тому шуканим числом буде $n = 3$.

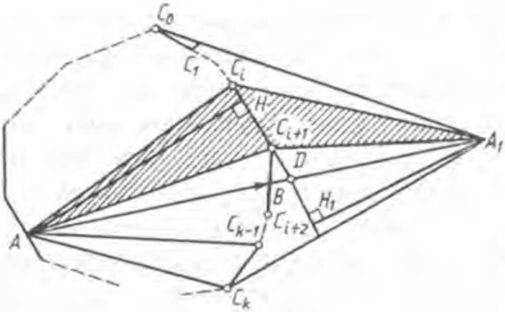


Рис. 3.32.7

3.32.20. *І спосіб.* Многокутник F_1 відрізняється від даного многокутника F тим, що містить додатково кілька трикутників $A_1C_0C_1$, $A_1C_1C_2$, ..., $A_1C_iC_{i+1}$, ..., $A_1C_{k-1}C_k$ (рис. 3.32.7). Очевидно, що точка D перетину прямих C_iC_{i+1} і AA_1 лежить між точками B і A_1. Опустимо з точок A і A_1 перпендикуляри AH і A_1H_1 на пряму C_iC_{i+1}. Тоді з подібності трикутників AHD і A_1H_1D маємо $\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{AD}{DA_1} \geq 1$, звідси $S_{\Delta AC_iC_{i+1}} \geq S_{\Delta A_1C_iC_{i+1}}$.

Оскільки остання нерівність виконується для кожного $0 \leq i \leq k-1$, то $S_{F_1} = S_F + S_{\Delta A_1C_0C_1} + S_{\Delta A_1C_1C_2} + \cdots + S_{\Delta A_1C_kC_{k-1}} \leq S_F + S_{\Delta AC_0C_1} + S_{\Delta AC_1C_2} + \cdots + S_{\Delta AC_kC_{k-1}} \leq S_F + S_F = 2S_F$.

ІІ спосіб. Легко помітити, що у многокутнику F знайдуться вершини C_0 і C_k такі, що відрізки A_1C_0 і A_1C_k будуть сторонами F_1. При цьому трикутники A_1BC_0 і A_1BC_k будуть містити всю частину F_1, яка знаходиться зовні F. З рівності $AB = BA_1$ випливає рівність площ $S_{\Delta ABC_0} = S_{\Delta A_1BC_0}$ та $S_{\Delta ABC_k} = S_{\Delta A_1BC_k}$. Нарешті, залишилося скористатися тим, що $S_{\Delta ABC_0} + S_{\Delta ABC_k} \le S_F$.

3.32.21. Для доведення нерівності досить переконатися, що кожний доданок лівої частини не перевищує $2\dfrac{a+c}{b+d}$. Нехай $\dfrac{a+b}{b+c} \le$ $\le 2\dfrac{a+c}{b+d}$. Тоді $(a+b)(b+d) \le 2(a+c)(b+c)$, звідси $ad + bd + b^2 \le ab +$ $+2ac + 2bc + 2c^2$. Після перетворень одержимо $a(2c-d) + b(2c-d) +$ $+(2c^2 - b(b-a)) \ge 0$.

Залишається помітити, що оскільки числа a, b, c, d лежать у проміжку $[1;2]$, то $2c \ge d, 2c^2 \ge 2, b(b-a) \le 2$.

Нехай $\dfrac{c+d}{d+a} \le 2\dfrac{a+c}{b+d}$. Тоді після перетворень дістанемо $d(2a-b) +$ $+c(2a-b) + (2a^2 - d(d-c)) \ge 0$.

Остання нерівність є правильною, оскільки $2a \ge b, 2a^2 \ge 2, d(d-c) \le 2$.

3.32.22. Розглянемо довільну фігурку, яку покладено на шахову дошку (рис. 3.32.8).

Рис. 3.32.8

Позначимо точками ті клітинки дошки, які накрила фігурка, а також ті, які мають спільну сторону з клітинками фігурки. Якщо центральна клітинка іншої фігурки не збігається з жодною позначеною на рисунку точкою, то такі фігурки не перекриватимуться, тобто не будуть накривати одну й ту саму клітинку. Таким чином, кожна фігурка, яку покладено на шахову дошку, "забороняє" $8 + 4 = 12$ клітинок дошки. Крім того, якщо центральна клітинка фігурки лежить у внутрішньому квадраті розмірами 98×98, то фігурка не виходить за межі дошки. Оскільки $98^2 - 12 \cdot 800 = 4$, то залишається ще чотири вільних клітинки для центральної клітинки нової фігурки, яку можна покласти на дошку так, що вона не буде перекриватися з жодною із фігурок, розташованих на дошці.

3.32.23. Існує. Візьмемо в площині $\frac{1990}{2}=995$ пар взаємно перпендикулярних векторів і один вектор, який перпендикулярний до цієї площини. З урахуванням означення перпендикулярності, неважко впевнитися, що такий набір векторів задовольняє умову задачі.

3.32.24. Нехай

$$\frac{KB}{AB}=x, \quad \frac{AK}{AB}=y.$$

Тоді $x+y=1$. Позначимо $S_{\Delta ABC}=S_0$, $S_{\Delta KBL}=S_1$, $S_{\Delta AKM}=S_2$, $S_{\Delta KLM}=S_3$ (рис. 3.32.9). Легко помітити, що $\Delta BKL \sim \Delta BAC$ і $\Delta AKM \sim \Delta ABC$. Оскільки площі подібних трикутників відносяться як квадрати відповідних сторін, то $\frac{S_1}{S_0}=\frac{KB^2}{AB^2}=x^2$, $\frac{S_2}{S_0}=\frac{AK^2}{AB^2}=y^2$. Враховуючи, що $KLCM$ – паралелограм, то $S_{\Delta LMC}=S_{\Delta KLM}=S_3$, а тому $S_1+S_2+2S_3=S_0$, звідси $S_3=\frac{1}{2}(S_0-S_1-S_2)=\frac{1}{2}(S_0-S_0x^2-S_0y^2)=$
$=\frac{1}{2}S_0(1-x^2-(1-x)^2)=S_0(x-x^2)=S_0\left(\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right).$

Отже, найбільшого значення $S_{\Delta KLM}$ набуває тоді, коли $x=\frac{1}{2}$, і це значення дорівнює $S_{\Delta KLM}=\frac{1}{4}S_0$. При цьому точка K є серединою сторони AB.

3.32.25. Нехай число a (рис. 3.32.10) є найменшим серед усіх записаних чисел. Тоді $b\geq a$ і $c\geq a$.

Нехай $b\geq a$. Маємо за умовою задачі $a=\sqrt{bc}$ або $a=\frac{b+c}{2}$. Оскільки $b\geq a$, то для кожного з цих випадків отримаємо $a\geq c$. Але тоді $a=c$, оскільки водночас $a\leq c$. Тепер легко переконатися, що $b=a$. Для числа c маємо $c=\frac{a+d}{2}$ або $c=\sqrt{ad}$. Тоді для кожного з цих ви-

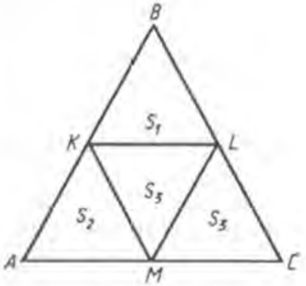


Рис. 3.32.9

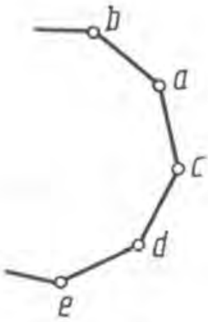


Рис. 3.32.10

падків $c=d$, оскільки $a=c$. Аналогічно отримаємо $d=e$ і т. д. Отже, всі записані числа рівні між собою і дорівнюють 26.

3.32.26. Позначимо $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ і нехай $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{m}{n}$, де $m\in Z$, $n\in N$. Тоді $n\alpha=m\pi$, тобто кут $\varphi=n\alpha$ є кратним π. Звідси випливає, що серед чисел виду $\operatorname{tg}k\alpha$, $k\in N$, буде лише скінченне число різних значень. Справді, розглянемо множину чисел $M=\{\operatorname{tg}\alpha,$ $\operatorname{tg}2\alpha, ..., \operatorname{tg}n\alpha\}$ і покажемо, що ця множина вичерпує всі можливі значення, які можуть набувати числа виду $\operatorname{tg}k\alpha$, $k\in N$. Справді, нехай l – натуральне число таке, що $l\geq n$. Тоді $l=nt+r$, де $0\leq r<n$, а тому $\operatorname{tg}l\alpha=\operatorname{tg}(n\alpha t+\alpha r)=\operatorname{tg}(mt\pi+\alpha r)=\operatorname{tg}\alpha r$. Зауважимо, що $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{24}{7}$, $\operatorname{tg}4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{48\cdot 7}{17\cdot 31}$. Помічаємо, що $\operatorname{tg}2\alpha$ виражається нескоротним дробом, але вже з більшим за модулем парним чисельником, ніж $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{tg}4\alpha$ є також нескоротний дріб, але вже з більшим парним чисельником, ніж $\operatorname{tg}2\alpha$. Взагалі, має місце така *лема*: якщо $\operatorname{tg}\beta=\frac{p}{q}$ – нескоротний дріб із парним чисельником, то $\operatorname{tg}2\beta$ також нескоротний дріб із парним (але вже більшим) чисельником. Справді, $\operatorname{tg}2\beta=\frac{2pq}{(q-p)(q+p)}$, де $q-p$, $q+p$ – непарні числа.

Покажемо, наприклад, що p і $q-p$ є взаємно простими. Припустимо супротивне: нехай d – спільний дільник чисел p і $q-p$. Тоді $p=k_1d$, $q-p=k_2d$. Тобто $q=p+k_2d=(k_1+k_2)d$, звідси маємо $\frac{p}{q}=\frac{k_1d}{(k_1+k_2)d}$. Це означає, що дріб $\frac{p}{q}$ є скоротним. Суперечність. Аналогічно легко показати, що дроби $\frac{p}{q+p},\frac{q}{q-p},\frac{q}{q+p}$ є нескоротними. Лему доведено.

Але тоді за лемою маємо, що в послідовності $\{\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}2\alpha,\ \operatorname{tg}4\alpha,\ ...,\ \operatorname{tg}2^{n-1}\alpha,\ ...\}$ всі члени мають бути різними. Суперечність.

3.32.27. Враховуючи, що $a>b>c$ маємо такі нерівності

$$\frac{a^2}{a-b}\geq\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b,$$
$$\frac{b^2}{b-c}\geq\frac{b^2-c^2}{b-c}=b+c.$$

Зауважимо, що принаймні одна з цих нерівностей є строгою, оскільки числа b і c не можуть одночасно дорівнювати нулеві. Тоді, додаючи ці нерівності, дістанемо шукану нерівність

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+b+b+c=a+2b+c.$$

3.32.28. Нехай $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. Побудуємо вектор $\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{AA_1}$ (рис. 3.32.11). Тоді $\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{BB_1}+B_1B_2=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{CC_1}$. Це означає, що $BB_2=C_1C$ і $BB_2\parallel C_1C$, а тому чотирикутник BB_2CC_1 – паралелограм. Оскільки $CC_1\perp AB$, то BB_2CC_1 є прямокутником, а отже $\angle BB_2C=90°$. Тому точки B_1 і B_2 лежать на колі, побудованому на BC як на діаметрі.

Оскільки $B_1B_2\perp BC$, то точки B_1 і B_2 є симетричними відносно BC, а тому $BB_1=BB_2=CC_1$. Аналогічно доводимо, що $BB_1=AA_1$. Оскільки висоти AA_1, BB_1, CC_1 рівні між собою, то трикутник ABC – рівносто-

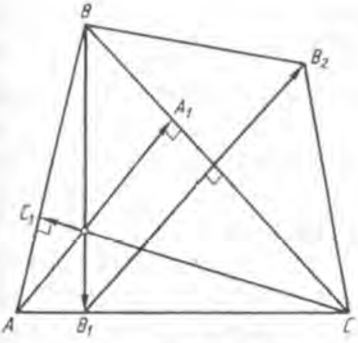


Рис. 3.32.11

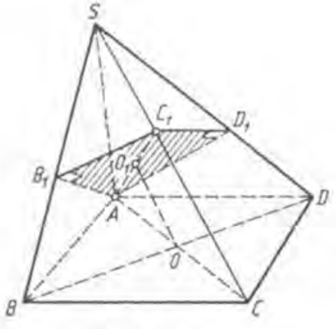


Рис. 3.32.12

онній. Обернене твердження легко довести, оскільки в рівносторонньому трикутнику висоти є одночасно і медіанами.

3.32.29. Зауважимо, що кожен переріз кулі площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, який проведено з центра кулі до площини перерізу. Тому спочатку доведемо, що навколо чотирикутника $AB_1C_1D_1$ можна описати коло (рис. 3.32.12). Оскільки $CB \perp AB$ і AB – проекція SB на площину основи, то за теоремою про три перпендикуляри $SB \perp BC$. Тому $CB \perp (SAB)$, а отже, і $(SBC) \perp (SAB)$. За умовою площина SBC проходить через пряму SC, перпендикулярну до площини $AB_1C_1D_1$. Тому за ознакою перпендикулярності двох площин маємо $(SBC) \perp (AB_1C_1D_1)$. Якщо дві площини перпендикулярні до третьої площини, то лінія їх перетину також є перпендикулярною до цієї площини. Тому $AB_1 \perp (SBC)$ і $\angle C_1B_1A = 90°$. Площини SAD і $AB_1C_1D_1$ є перпендикулярними до площини SCD. Тому лінія AD_1 їх перетину перпендикулярна до площини SCD і $\angle C_1D_1A = 90°$. Отже, O_1 – середина AC_1 – центр кола, описаного навколо $AB_1C_1D_1$, тобто $O_1A = O_1B_1 = O_1C_1 = O_1D_1$. Нехай O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Тоді O – середина AC і тому $O_1O \parallel SC$. Отже, $O_1O \perp (AB_1C_1D_1)$, звідси $OA = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OB = OC = OD$. Це означає, що точка O є центром сфери, описаної навколо цього многогранника.

3.32.30. Див. розв'язання задачі 3.32.22.

Олімпіада 33
(м. Рівне, 1993 р.)

3.33.1. Зрозуміло, що в знаменнику має стояти знак "–". Справді, якщо поставити знак "+", то в чисельнику дістанемо число $(8+7)\cdot 17=255$. Отже, $8-7=1$. Тоді в чисельнику має бути 17. Оскільки, $6+5+4+3+2+1=21$, то змінити знак " + " на знак " – " можна лише в однієї цифри. Дійсно, якщо взяти до уваги варіант $6+5+4+3-2-1$, то матимемо в чисельнику 15. Після цього для перевірки залишаються дві цифри: 2 або 1, тобто $6+5+4+3+2-1=19$; $6+5+4+3-$ $-2+1=17$. Отже, знаки можна розставити єдиним способом $(6+5+4+3-2+1)/(8-7)=17$.

3.33.2. *I спосіб.* а) Зазначимо, що будь-яке натуральне число n при діленні на 3 дає ту саму остачу, що і сума його цифр.

Якщо n ділиться на 3, то $n=3k_1$. Тоді $S(n)=3k_2$, звідси $n^2+S^2(n)=9k_1^2+9k_2^2=9(k_1^2+k_2^2)=9k$, де k, k_1 і k_2 – натуральні числа. Таким чином, число $n^2+S^2(n)$ ділиться на 9. Але число 1 993 такої властивості не має.

Якщо n не ділиться на 3, то $n=3k_1\pm 1$, звідси $n^2=9k_1^2\pm 6k_1+1=$ $=3(3k_1^2\pm 2k_1)+1=3k+1$.

Тоді $S^2(n)$ також при діленні на 3 дає в остачі одиницю, тобто $S^2(n)=3l+1$, а тому $n^2+S^2(n)=3k+1+3l+1=3(k+l)+2=3m+2$, де k, l, m – натуральні числа.

Однак число 1 993 при діленні на 3 дає в остачі 1. Таким чином, для жодного натурального n число $n^2+S^2(n)$ не дорівнює 1 993.

б) $n^2=2\,000-S^2(n)<2\,000$, $n<\sqrt{2\,000}$, звідси $n\le 44$. Якщо $n\le 44$, то $S(n)\le S(39)=12$, а тому $n^2=2\,000-S^2(n)\ge 2\,000-144=1\,856$, звідси $n\ge\sqrt{1\,856}$, тобто $n\ge 44$. Таким чином, $44\le n\le 44$. Звідси $n=44$. Перевіркою переконуємося, що це значення є шуканим.

II спосіб. а) Оскільки $n\le 44$, то $n=10a+b$, звідси $a\le 4$. При цьому рівність набуває вигляду $(10a+b)^2+(a+b)^2=1993$.

Якщо $a\le 3$, то $39^2+12^2=1\,665<1\,993$.

За умови $a=4$, $(40+b)^2+(4+b)^2=1993$, звідси $2b^2+88b=377$.

Остання рівність не виконується при жодному b, оскільки ліворуч знаходиться парне число, а праворуч – непарне;

б) $(40+b)^2+(4+b)^2=2000$ або $b^2+44b-192=0$, звідси $b=4$.

Отже, $n=44$.

III спосіб. а) Переконавшися, що $n<50$ і $n>39$, позначимо $n=\overline{4b}$.

Якщо b – парне, то $n^2=2k$ і $S^2(n)=2m$. Отже, $n^2+S^2(n)$ – парне, а 1993 – непарне число. Тому рівність неможлива. Якщо b – непарне, то $n^2=2k+1$ і $S^2(n)=2m+1$, звідси випливає, що і в цьому випадку $n^2+S^2(n)$ є парним. Тому розв'язків рівняння не існує.

б) Так само, як і при розгляді способу II.

3.33.3. *Аналіз.* Припустимо, що трикутник ABC є шуканим. Нехай B_1 – точка перетину прямих BK і AC (рис. 3.33.1). З рівності прямокутних трикутників ABK і AKB_1 випливає, що $BK=KB_1$. Отже, симетричним образом точки B відносно бісектриси AL є точка B_1, що належить прямій AC. Оскільки точка K є серединою відрізка BB_1, то KM – середня лінія в трикутнику CBB_1, тобто $MK||AC$. Позначимо через N точку перетину прямих MK і AB. Тоді за теоремою Фалеса точка N – середина AB.

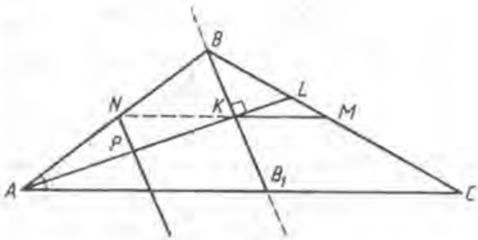


Рис. 3.33.1

Побудова. Через точки K і M проводимо пряму. Побудуємо серединний перпендикуляр до відрізка AK. Точка N перетину цих прямих – середина сторони AB шуканого трикутника. Через точку K проводимо пряму $l||NP$, P – середина відрізка AK. Точка перетину прямих l і AN – вершина B шуканого трикутника. Через точку A проведемо пряму паралельну MK. Точка перетину цієї прямої з прямою BM – вершина C шуканого трикутника. Пропонуємо читачеві знайти інші варіанти побудови трикутника ABC.

Доведення. За побудовою $AP=PK$ і $NP||BK$. За теоремою Фалеса $AN=NB$, за побудовою $NM||AC$. За теоремою Фалеса $BM=MC$. Отже, M – середина сторони BC. Нехай B_1 – точка перетину прямих BK і AC. За побудовою $NK||AC$. За теоремою Фалеса $BK=KB_1$. З рівності прямокутних трикутників BAK і KAB_1 випливає, що $\angle BAK=\angle KAB_1$, тобто AK є бісектрисою кута A. Тому точка K є проекцією вершини B на бісектрису AL. Отже, трикутник ABC – шуканий.

Дослідження. Оскільки в умові задачі зазначено, що трикутник треба відновити, то це означає, що він існував. Якщо точки K і M збігаються, то задача матиме безліч розв'язків. Результат не залежить від того, де розташована точка K – всередині трикутника чи зовні.

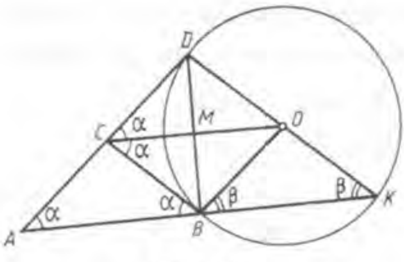


Рис. 3.33.2

3.33.4. *І спосіб.* Позначимо через K точку перетину променів AB і DO (рис. 3.33.2). З рівності прямокутних трикутників CDO і COB випливає, що $CD = CB$. Проведемо $CM \perp BD$ ($CM \subset CO$). Оскільки ΔDCB рівнобедрений, то CM є одночасно медіаною і бісектрисою $\angle DCB$. Отже, CM – середня лінія ΔDAB. Тому $CM \| AB$, звідси $AB \perp DB$. Таким чином, кут DBK – прямий, тому має спиратися на діаметр, звідси випливає, що точка K лежить на колі.

ІІ спосіб. Нехай $\alpha = \angle CAB$, тоді $\angle DCB = 2\alpha$ – як зовнішній кут ΔACB. Точка O лежить на бісектрисі $\angle DCB$, CO – бісектриса, тому $\angle DCO = \frac{1}{2}\angle DCB = \alpha = \angle CAB$. Отже, $CO \| AB$. Із симетрії маємо: $DB \perp CO$. Тому $AB \perp DB$.

ІІІ спосіб. ΔADK – прямокутний ($DO \perp AD$). Тому $\angle AKD = 90° - \alpha = \beta$, $\angle OBC = 90°$. Тоді $\angle OBK = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha = \beta$. Отже, $\angle OBK = \angle OKB$. Це означає, що $OK = OB$, тобто точка K лежить на колі.

3.33.5. *І спосіб.* $a + bc = 1 - b - c + bc = (1-b) - c(1-b) = (1-b)(1-c)$; $b + ac = 1 - a - c + ac = (1-a)(1-c)$; $c + ab = (1-a)(1-b)$. Тоді $(a+bc) \times (b+ac)(c+ab) = \left((1-a)(1-b)(1-c)\right)^2$.

ІІ спосіб. $a + bc = a(a+b+c) + bc = a^2 + ab + ac + bc = a(a+c) + b(a+c) = (a+c)(a+b)$.

3.33.6. Розглянемо квадрат розмірами 4×4, що знаходиться в центрі таблиці розмірами 8×8, та зафарбуємо його кутові клітинки (рис. 3.33.3). За один крок лише до одного з чотирьох чисел у пофарбованих клітинках додається 1. Таким чином, після кожного кроку

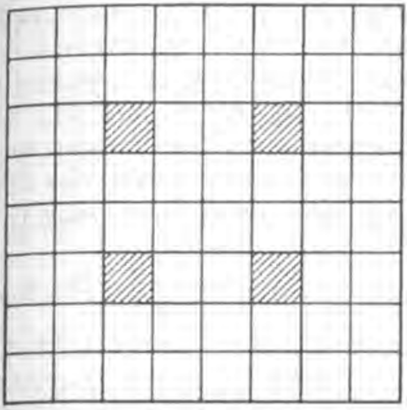


Рис. 3.33.3

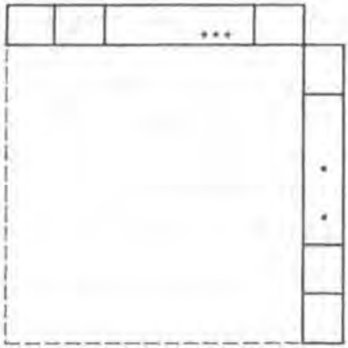


Рис. 3.33.4

сума цих чисел збільшується на 1. Тому через 33 кроки у пофарбованих клітинках будуть записані числа, сума яких дорівнює $4+33=37$.

3.33.7. 1 993 – просте число. Тому, якщо добуток ділиться на 1 993, то принаймні один із множників ділиться на 1 993. Сума цих множників $(1\,900x+93y)(1\,900y+93x)=1\,993(x+y)$ ділиться на 1 993. Тому, якщо один із множників ділиться на 1 993, то й другий ділиться. Отже, добуток ділиться на $1\,993^2$.

3.33.8. Див. розв'язання задачі 3.33.3.

3.33.9. Перший гравець. Його перший хід – вирізати квадрат розмірами $1\,992\times1\,992$ так, щоб залишилася фігура, зображена на рис. 3.33.4. Після кожного ходу другого на одній з половинок перший має робити аналогічний хід на іншій половинці.

3.33.10. Нехай $a=\overline{1a_11a_2a_3a_4a_5}=1\cdot2^6+a_1\cdot2^5+1\cdot2^4+a_2\cdot2^3+a_3\cdot2^2+$ $+a_4\cdot2+a_5=80+32a_1+8a_2+4a_3+2a_4+a_5$, де всі $a_i\in\{0;1\}$, $i=1, 2, \ldots, 5$. Звідси випливає, що $a\le127$. З іншого боку, $a=\overline{1b_1b_21}_{(5)}=1\cdot5^3+$ $+b_1\cdot5^2+b_2\cdot5+1=126+25b_1+5b_2$, де всі $b_j\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $j=1;\ 2$. Звідси маємо, що $a\ge126$. Отже, $a=126$ або $a=127$. Тоді з умови задачі випливає, що $a=126$.

3.33.11. Зауважимо спочатку, що шукані числа можуть мати лише цифри 1, 2, 4, 8, оскільки $16=2^4$ і $32=2^5$. Серед одноцифрових чисел шуканих немає тому, що $32>16>9$. Серед двоцифрових чисел добуток цифр, що дорівнює 16, мають числа 28, 44, 82. Числа 48 і 84 мають добуток цифр, що дорівнює 32. Серед трицифрових чисел добуток цифр, що дорівнює 16, мають числа 128, 144, 182, 218, 224, 242, 281, 414, 422, 441, 812, 821. Серед трицифрових чисел добуток цифр, що дорівнює 32, мають числа 148, 184, 228, 244, 282, 418, 424, 442, 481, 814, 822, 841. Серед чотирицифрових чисел, які не перевищують 1 993, шукані числа будуть мати першою цифрою лише 1. Тому їх кількість збігається з відповідною кількістю серед трицифрових, тобто таких чисел також буде порівну. Таким чином, $D_{1\,993}(16) = 1 + D_{1\,993}(32) > D_{1\,993}(32)$.

3.33.12. Скористаємося тотожністю $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+$ $+2ac+2dc$. Тоді отримаємо: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)-$ $-(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)=3$. Рівність досягається, наприклад, при $a=0,\quad b=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad c=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.33.13. Нехай O_1 – центр даного кола ω_1, O_2 – центр побудованого кола ω_2. Зрозуміло, що точка X лежить на прямій O_1O_2 і $\frac{XO_1}{XO_2}=\frac{R}{r}$, де R – радіус кола ω_1, r – радіус кола ω_2. Множиною всіх точок O_2 буде пряма n ($n \perp l$), що проходить через M. Проведемо через O_1 пряму $m \perp l$. Вона перетинає коло ω_1 у двох фіксованих точках A і B. Можливі два випадки:

1) Якщо точки M і A лежать по один бік від прямої O_1O_2, то пряма MA проходить через точку X, оскільки $\angle MO_2X = \angle AO_1X$ і $\frac{XO_1}{XO_2}=\frac{R}{r}=\frac{O_1A}{O_2M}$ і тому $\Delta O_2MX \sim \Delta O_1AX$.

2) Якщо точки M і B лежать по один бік від прямої O_1O_2, то пряма MB проходить через точку X.

Отже, точка X лежить або на прямій MA, або на прямій MB.

3.33.14. За один крок в одній із пофарбованих клітинок записане там число збільшується на 1, а в інших – ні. Тому за 121 крок у пофарбованих клітинках будуть записані числа, сума яких дорівнює $4+121=125$.

3.33.15. Зауважимо, що $\sin^2 x \ne 0$, тобто $\cos^2 x \ne 1$, а тому $0 \le \cos^2 x < 1$, звідси $[\cos^2 x]=0$. Розглянемо два випадки: а) $0<\sin^2 x<1$; б) $\sin^2 x = 1$.

Якщо $0<\sin^2 x<1$, то $\{\sin^2 x\}=\sin^2 x$ і рівняння набуває вигляду $\mathrm{ctg}^2 x=\sin^2 x$ або $\sin^4 x+\sin^2 x-1=0$. Звідси $\sin^2 x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ або $\cos 2x=2-\sqrt{5}$. Отже, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2-\sqrt{5})+\pi k,\ k\in Z$.

Якщо $\sin^2 x=1$, то $\{\sin^2 x\}=0$ і рівняння набуває вигляду $\mathrm{ctg}^2 x=0$, звідси $\cos^2 x=0$, тобто $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

3.33.16. Покладемо $n=997$, тоді таблиця матимемо розміри $(2n-1)\times 2n$. Покажемо, що при правильній грі виграє другий гравець. Якщо перший гравець вписує число a у деяку клітинку певного рядка ($a=1$ або $a=0$), то другий гравець повинен вписати в деяку іншу клітинку цього самого рядка число $1-a$. Причому такий хід у відповідь після ходу першого гравця завжди може зробити другий гравець, оскільки клітинок у кожному рядку парна кількість. Тоді після заповнення таблиці кожний рядок міститиме n одиниць, тобто сума чисел у кожному рядку дорівнюватиме n, а тому $S_р=n$. Всього в таблиці буде $k=(2n-1)n$ одиниць. Врешті-решт доведемо, що для отриманої таблиці буде виконуватися нерівність $S_{ст}\geq S_р$. Для доведення цього твердження скористаємося методом від супротивного. Нехай $S_{ст}<S_р=n$. Тоді $S_{ст}\leq n-1$, а отже сума чисел в цих стовпчиках таблиці не перевищує $(n-1)2n$, тобто одиниць у такій таблиці не більше, ніж $(n-1)2n$. Але тоді має виконуватися нерівність $k\leq 2n(n-1)$ або $(2n-1)n\leq 2n(n-1)$, що неможливо. Отже, $S_{ст}\geq S_р$.

3.33.17. Ні, не випливає. Наведемо відповідний приклад. З цією метою побудуємо функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо}\ \ x=2k,\ \ k\in N;\\ 2, & \text{якщо}\ \ x=2k-1,\ \ k\in N.\end{cases} \tag{1}$$

Розглянемо випадки: 1) $x=2n$, $y=2m$, де $n\in N$, $m\in N$. Тоді $f(x)=f(2n)=1$, $f(y)=f(2m)=1$, $f(x+y)=f(2(m+n))=1$, $f(f(x)+$ $+f(y))=f(f(2n)+f(2m))=f(1+1)=f(2)=1$, тобто

$$f(x+y)=f(f(x)+f(y)); \tag{2}$$

2) $x=2n$, $y=2m-1$. Тоді $f(x)=1$, $f(y)=f(2m-1)=2$. $f(x+y)=$ $=f(2(n+m)-1)=f(2k-1)=2$, де $k=n+m$; $f(f(x)+f(y))=f(1+2)=$ $=f(3)=2$, тобто рівність (2) виконується;

3) $x=2n-1$, $y=2m-1$. Тоді $f(x)=2$, $f(y)=2$; $f(x+y)=$ $=f(2(m+n)-2)=f(2l)=1$, де $l=n+m-1$; $f(f(x)+f(y))=$ $=f(2+2)=f(4)=1$, тобто рівність (2) також виконується.

Отже, для функції (1) рівність (2) справджується для будь-яких натуральних чисел x і y. Проте при $x=2$, $y=1$ маємо $f(x+y)=f(3)=2$, $f(x+f(y))=f(2+f(1))=f(2+2)=f(4)=1$, тобто $f(2+1)\neq f(2+f(1))$.

3.33.18. Оскільки $\angle A=\angle B=72°$, AN і BL є бісектрисами, то трикутники ANB і BAL є рівнобедреними з кутами при основі, які дорівнюють $72°$ (рис. 3.33.5). Отже, $\Delta ACB\sim\Delta ALB$, а тому

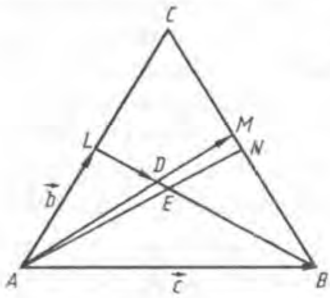


Рис. 3.33.5

$$\frac{AL}{AB}=\frac{AB}{AC}. \tag{1}$$

Позначивши $AB=c$, $\dfrac{AC}{AB}=\varphi$, перепишемо (1) таким чином $AL=\dfrac{c}{\varphi}$. Введемо вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AL}=\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2}{AL}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AL}}{AL}=\left(\dfrac{AB}{AL}\right)^2\vec{b}=\varphi^2\vec{b}$, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{c}+\varphi^2\vec{b}\right)$. Вектор $\overrightarrow{LD}$ дорівнює $\overrightarrow{LD}=x(\vec{c}-\vec{b})$, де $x=\dfrac{LD}{LB}$. Тоді $\overrightarrow{AD}=(1-x)\vec{b}+x\vec{c}$. Вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AM}$ є колінеарними, а тому їх відповідні координати є пропорційними, тобто маємо $\dfrac{1-x}{\varphi^2}=\dfrac{x}{1}$, звідси $x=\dfrac{1}{\varphi^2+1}$. Таким чином, отримали відношення

$$\frac{BL}{LD}=\varphi^2+1. \tag{2}$$

Далі з подібності трикутників ALE та ALB маємо $\frac{LE}{AL}=\frac{AL}{LB}$, $\frac{LE}{LB}=\left(\frac{AL}{LB}\right)^2=\left(\frac{AL}{AB}\right)^2=\frac{1}{\varphi^2}$, тобто $\overline{LE}=\frac{1}{\varphi^2}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$. Тоді $\overline{DE}=\overline{LE}-$ $-\overline{LD}=\left(\frac{1}{\varphi^2}-\frac{1}{\varphi^2+1}\right)\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$, $\overline{DE}=\frac{1}{\varphi^2+1}\frac{\vec{c}-\vec{b}}{\varphi^2}=\frac{1}{\varphi^2+1}\overline{LE}$. Це означає, що

$$\frac{LE}{DE}=\varphi^2+1. \qquad (3)$$

Порівнюючи ліві частини рівностей (2) і (3), дістанемо шукане відношення.

3.33.19. За нерівністю Коші маємо $ab^2+a^3\geq 2\sqrt{ab^2\cdot a^3}=2a^2b$, $bc^2+b^3\geq 2b^2c$, $ca^2+c^3\geq 2c^2a$. Додавши ці три нерівності, дістанемо

$$\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+a^3+b^3+c^3\geq 2(a^2b+b^2c+c^2a)$$

або

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq\frac{\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+\left(a^3+b^3+c^3\right)}{2}.$$

Нехай $m=a^2b+b^2c+c^2a$, $n=ab^2+bc^2+ca^2$, $k=a^3+b^3+c^3$. Якщо $n\geq k$, то $m\leq\frac{n+k}{2}\leq\frac{2n}{2}=n$. Якщо $k\geq n$, то $m\leq k$. Отже, твердження задачі є правильним.

3.33.20. Нехай $ABCD$ – даний квадрат, O – його центр (рис. 3.33.6). Оскільки двома прямими квадрат розбито на чотири фігури однакової площі, то кожна з цих прямих ділить його на дві фігури, площі яких також однакові. Внаслідок того, що квадрат – центрально-симетрична фігура і центром його симетрії є точка O, неважко переконатися, що кожна з цих прямих проходить через центр

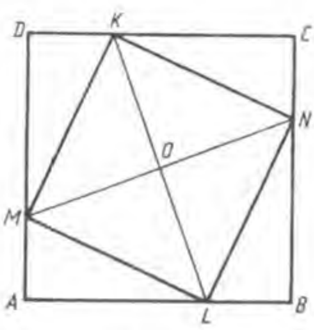


Рис. 3.33.6

квадрата. Якщо одна з прямих є діагоналлю квадрата, то і друга пряма, яка ділить разом з першою прямою квадрат на чотири рівновеликі фігури, також має бути діагоналлю (другою діагоналлю) квадрата.

Нехай тепер одна з прямих перетинає сторони AB і CD в точках L і K, а друга пряма перетинає сторони AD і BC в точках M і N. Проведені прямі розбивають квадрат на чотири чотирикутники $MALO$, $LBNO$, $NCKO$, $KDMO$. Неважко переконатися, що чотирикутник $MALO$ дорівнює чотирикутнику $NCKO$, а чотирикутник $KDMO$ дорівнює чотирикутнику $LBNO$ (як симетричні відносно точки O).

Доведемо рівність чотирикутників $MALO$ і $KDMO$. Оскільки $S_{MALO} = S_{KDMO}$ і $S_{OML} = S_{OMK}$ ($OL=OK$, M – спільна вершина), то $S_{MAL} = S_{KDM}$.

Доведемо, що трикутники MAL і KDM рівні. Позначимо сторону квадрата $ABCD$ через a, $DK = x$, $MA = y$. Оскільки $BL = DK$, дістаємо $\frac{1}{2}y(a-x) = \frac{1}{2}x(a-y)$, звідси $x = y$, тобто $DK = AM$. Тоді $AL = DM$, оскільки $AL = a - LB = a - x$, $DM = a - AM = a - y = a - x$. Отже, трикутники MAL і KDM рівні і при цьому $MK = ML$. Враховуючи, що трикутник LMK рівнобедрений і MO – його медіана ($LO = OK$), помітимо, що $MO \perp KL$. Отже, прямі KL і MN, які проходять через центр квадрата O, є перпендикулярними і ділять квадрат на чотири рівні фігури, які суміщуються поворотом на $90°$ навколо центра O. Тому $MO = KO = ON = OL$. Це означає, що точки K, N, L, M є вершинами квадрата.

3.33.21. Зазначене число позначимо через x,

$$x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2,$$

тоді

$$\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)x = \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right) = 1.$$

Звідси $\left(3 - 3\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)\sqrt[3]{6} - 2\right)x^3 = 1$, або $\left(1 - \frac{3}{x}\sqrt[3]{6}\right)x^3 = 1$. $3\sqrt[3]{6}x^2 = x^3 - 1$, $x^6 \cdot 27 \cdot 6 = \left(x^3 - 1\right)^3$, $x^9 - 165x^6 + 3x^3 - 1 = 0$.

3.33.22. Існує. Розглянемо ортогональну проекцію правильного п'ятикутника на площину, непаралельну площині п'ятикутника. З того, що при проектуванні зберігаються відношення паралельних відрізків і паралелограми переходять у паралелограми, випливає, що отриманий при проектуванні п'ятикутник буде шуканим.

3.33.23. Див. розв'язання задачі 3.33.7.

3.33.24. *І спосіб.* За нерівністю Коші маємо $\sqrt{\frac{a}{2}(p-a)} \le$ $\le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+(p-a)\right)$; $\sqrt{\frac{b}{2}(p-b)} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}+(p-b)\right)$; $\sqrt{\frac{c}{2}(p-c)} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}+(p-c)\right)$.

Додаючи ці нерівності, дістанемо $\sqrt{\frac{a}{2}(p-a)} + \sqrt{\frac{b}{2}(p-b)} +$ $+\sqrt{\frac{c}{2}(p-c)} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}+3p-(a+b+c)\right) = \frac{1}{2}(p+3p-2p) = p$, тобто $\sqrt{a(p-a)} + \sqrt{b(p-b)} + \sqrt{c(p-c)} \le p\sqrt{2}$.

ІІ спосіб. Розглянемо дві трійки чисел: $\left(\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}\right)$ і $\left(\sqrt{p-a},\right.$ $\left.\sqrt{p-b},\ \sqrt{p-c}\right)$ та застосуємо до них нерівність Коші–Буняковського

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{p-a} + \sqrt{b}\cdot\sqrt{p-b} + \sqrt{c}\cdot\sqrt{p-c} \le \sqrt{a+b+c}\,\times$$

$$\times\sqrt{p-a+p-b+p-c} = \sqrt{2p}\cdot\sqrt{3p-2p} = p\sqrt{2}\,.$$

3.33.25. Пронумеруємо точки $A_1, A_2, ..., A_{2n-1}, A_{2n}$. Для кожної точки A_i, $i=1, 2, ..., 2n$, розглянемо суму відстаней до всіх інших точок $A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_{2n}$. Нехай $d_{ij} = A_i A_j$ – відстань між точками A_i та A_j, $i \ne j$. Зрозуміло, що $d_{ij} = d_{ji}$. Позначимо $S_1 = \sum\limits_{j=2}^{2n} d_{1j}$ суму відстаней від точки A_1 до всіх інших точок $A_2, A_3, ..., A_{2n-1}, A_{2n}$, а через $S_2 = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne 2}}^{2n} d_{2j}$ –

суму відстаней від точки A_2 до всіх інших точок $A_1, A_3, ..., A_{2n-1}, A_{2n}$ і взагалі $S_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2n} d_{kj}$ – суму відстаней від точки A_k до всіх інших точок $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_{k+1}, ..., A_{2n-1}, A_{2n}$. Отже, отримали $2n$-елементну множину чисел $S = \{S_1, S_2, ..., S_{2n-1}, S_{2n}\}$. Впорядкуємо множину S за спаданням: $S_1' > S_2' > S_3' > ... > S_{2n-1}' > S_{2n}'$. Числа $S_1', S_2', S_3', ..., S_{2n-1}', S_{2n}'$ утворюють деяку перестановку чисел з множини S. Гравець, який розпочинає першим, своїм ходом вибирає точку з максимальним значенням S_k $(\max S_k = S_1')$. Якщо другий гравець вибирає точку, якій відповідає сума S_2', то перший гравець – точку з сумою відстаней S_3' і т.д. Отже, перший гравець має виграшну стратегію, яка полягає в тому, щоб при кожному своєму ході серед точок, що залишилися, обирати точку з найбільшою сумою відстаней. Тоді після гри для всіх точок, обраних першим гравцем, сума таких сум S_{I} буде більшою за суму таких сум S_{II} для точок, обраних другим гравцем. У нерівності $S_{\text{I}} > S_{\text{II}}$ ліворуч і праворуч по одному разу враховано кожну відстань між точками, обраними різними гравцями. Тому ці відстані можна відкинути.

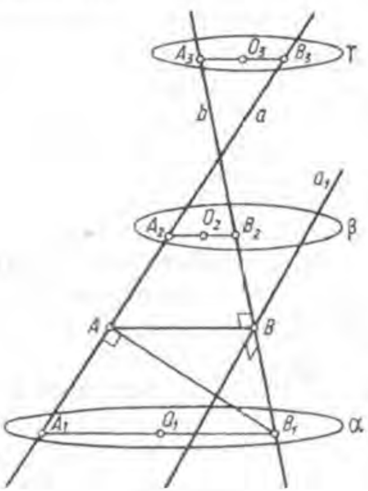


Рис. 3.33.7

3.33.26. Нехай α, β, γ – три дані різні паралельні площини, а точки O_1, O_2, O_3 – відповідно середини відрізків A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (рис. 3.33.7).

Покажемо спочатку, що точки O_1, O_2, O_3 лежать на одній прямій. Справді, якщо ми зміщуємо пряму a на вектор $\vec{x}$, паралельний трьом обраним площинам, то кожна з точок O_1, O_2, O_3 зміщується на $\frac{1}{2}\vec{x}$. При цьому, якщо ці три точки лежали на одній прямій, то ця їх властивість зберігається.

Якщо змістити пряму a на вектор $\vec{x} = \overline{A_1B_1}$, то прямі a і b перетнуться.

В цьому випадку середини відповідних відрізків лежать на одній прямій.

Нехай AB – спільний перпендикуляр прямих a і b, $A \in a$, $B \in b$. Покажемо, що $\angle A_1AB_1 = 90^\circ$. Справді, нехай a_1 – проекція прямої a на площину δ, яка проходить через пряму b паралельно прямій a. Пряма a_1 проходить через точку B і є перпендикулярною до прямої b, оскільки за умовою $a \perp b$. Пряма AB_1 є похилою до площини δ, BB_1 – проекція цієї прямої на площину δ. За теоремою про три перпендикуляри $a_1 \perp AB_1$. Але $a \| a_1$, тому $a \perp AB_1$. Також легко переконатися, що $\angle A_1BB_1 = 90^\circ$. Це означає, що точки A і B лежать на сфері, побудованій на відрізку A_1B_1 як на діаметрі (аналогічно – на A_2B_2, A_3B_3). Отже, три сфери мають центри на одній прямій (тому їх перетин – фігура обертання) та дві різні спільні точки. Це означає, що ці три сфери перетинаються по одному колу.

3.33.27. Оскільки $x+y=1$, то $x^3+y^3=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=1-3xy$, $x^2+y^2=1-2xy$. Нехай $xy=t$. Тоді $t=x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, тобто $t \le \frac{1}{4}$, а отже, задача зводиться до дослідження функції $f(t)=1-3t+\frac{1}{1-2t}$, де $t \in \left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$, на найменше значення. Знайдемо похідну $f'(t)=-3+\frac{2}{(1-2t)^2}$ та прирівняємо її до нуля. Отримаємо $\frac{2}{(1-2t)^2}=3$, звідси $t_{1,2}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow t_1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}<\frac{1}{4}$, $t_2=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}>\frac{1}{4}$. Оскільки $f'(0)=-1<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)=5>0$, то точка $t_1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ є точкою мінімуму, а значення функції f в цій точці буде найменшим серед усіх її значень на множині $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)=1-\frac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{6}+12}{2\sqrt{6}}=\sqrt{6}-\frac{1}{2}.$$

3.33.28. Припустимо, що для будь-якого набору із 100 точок, які мають цілі координати, модуль суми відповідних чисел не перевищує одиниці. Розглянемо деякий набір, до складу якого входить точка O та 99 точок: $A_1, A_2, \ldots, A_{99}$. Числа, які їм відповідають, позначимо a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Оскільки $a_0 = 1{,}993$ і $\left|a_0+\sum_{k=1}^{99}a_k\right|\le 1$, то $\sum_{k=1}^{99}a_k\le -0{,}993$.

Тоді серед 99 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ знайдеться хоча б одне число a_{k_0} таке, що $a_{k_0}\le -\frac{0{,}993}{99}<-0{,}01\quad (1\le k_0\le 99)$. Справді, коли б такого числа не знайшлося, то ми б мали: $a_0+\sum_{k=1}^{99}a_k\ge 1{,}993-99\cdot 0{,}01=1{,}003>1$.

Але ця сума не повинна перевищувати одиниці.

Тепер розглянемо інший набір із 100 точок: $O_1, B_1, B_2, \ldots, B_{99}$, причому жодна з точок B_i ($i = 1, 2, \ldots, 99$) не збігається з жодною із точок A_k ($k=1, 2, \ldots, 99$). Тоді серед чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{99}$ знайдеться хоча б одне b_{i_0} таке, що $b_{i_0}<-0{,}01\quad (1\le i_0\le 99)$.

Нарешті розглянемо набір із 100 точок, яким відповідають числа $b_{i_0}, a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Оцінимо суму цих чисел $b_{i_0}+\sum_{k=1}^{99}a_k<-0{,}01-0{,}993=-1{,}003$.

Суперечність, оскільки $\left|b_{i_0}+\sum_{k=1}^{99}a_k\right|>1$.

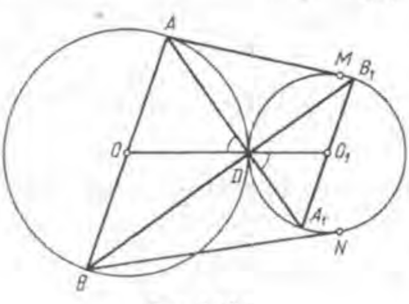


Рис. 3.33.8

3.33.29. Нехай D – точка дотику кіл, AB – діаметр більшого кола, A_1 і B_1 – відповідно другі точки перетину прямих AD і BD з меншим колом, O та O_1 – відповідно центри більшого та меншого кіл, AM та BN – дотичні до кола з центром у точці O_1, A_1B_1 – діаметр меншого кола, оскільки $\angle B_1DA_1=90°$ (рис. 3.33.8).

Позначимо $AO = OB = OD = R$, $DO_1 = O_1B_1 = O_1A_1$. Легко помітити, що прямокутні трикутники ABD і A_1DB_1 є подібними тому, що $\angle DAO = \angle ODA = \angle A_1DO_1 = \angle DA_1O_1$.

З подібності цих трикутників випливає, що $\frac{DA_1}{DA} = \frac{r}{R}$, $\frac{DB_1}{DB} = \frac{r}{R}$.

Для дотичної AM і січної AA_1 можна записати $AM^2 = AD \cdot AA_1$. Для дотичної BN і січної BB_1 також маємо $BN^2 = BD \cdot BB_1$. Тоді

$$AM^2 + BN^2 = AD \cdot AA_1 + BD \cdot BB_1 = AD \cdot AD\left(1 + \frac{r}{R}\right) +$$
$$+ BD \cdot BD\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \left(1 + \frac{r}{R}\right)\left(AD^2 + BD^2\right) = \left(1 + \frac{r}{R}\right)AB^2 =$$
$$= \left(1 + \frac{r}{R}\right)4R^2 = 4(R^2 + Rr).$$

Таким чином, сума квадратів дотичних, проведених з точок A і B до меншого кола, виражається через сталі величини – радіуси кіл, а отже, не залежить від вибору діаметра AB.

3.33.30. Нехай $\{x_1, ..., x_m\}$ – набір з усіх m слів племені, $d(x_i, x_j)$ – кількість літер, які не збігаються в словах x_i та x_j. Оскільки для $i \neq j$, $d(x_i, x_j) \geq 6$, то $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} d(x_i, x_j) \geq 6m(m-1)$.

Випишемо наші слова в рядках таблиці розмірами $m\times 11$. Якщо в l-му стовпчику міститься k_l літер М та $(m - k_l)$ літер Ю, то цей стовпчик дасть $2k_l(m - k_l)$ пар літер, які не збігаються. Тому матимемо $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} d(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{11} 2k_l(m - k_l) \leq \sum_{l=1}^{11} \frac{1}{2}m^2 = \frac{11}{2}m^2$. Отже, отримали подвійну нерівність $6(m-1)m \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} d(x_i, x_j) \leq \frac{11}{2}m^2$. Звідси $6(m-1)m \leq \frac{11}{2}m^2$, тобто $m \leq 12$.

Нарешті, наведемо приклад словника з 12 словами: ММММММММММ, ЮМЮЮММMЮЮЮМ, МЮМЮЮМММЮЮЮ.

ЮМЮМЮЮММЮЮ, ЮЮМЮМЮЮММЮ, ЮЮЮМЮМЮЮММ, ЮММЮЮМЮМЮЮМ, МЮММЮЮМЮМЮЮ, ЮМЮММЮЮМЮМЮ, ЮЮМЮММЮЮМЮМ, МЮЮМЮММЮЮМЮ, ЮМЮЮМЮММЮЮМ. Отже, найбільша кількість слів у мові племені Мумбо–Юмбо може бути 12.

Олімпіада 34
(*м. Херсон, 1994 р.*)

3.34.1. Відокремимо одну монету, а інші 100 розділимо на дві купи, по 50 монет у кожній, і зважимо їх. Якщо ці купи не рівні, то за вагою фальшива монета в одній з них. Далі беремо одну із цих куп та розділимо її на дві частини, по 25 монет у кожній, і зважимо їх (це друге зважування). Якщо ці купи рівні (за вагою), то серед них немає фальшивої монети, тобто вона в нерозділеній купі, і за допомогою першого зважування можемо зробити правильний висновок про те, чи легше вона за справжню, чи важча. Якщо купи (по 25 монет) не рівні, то фальшива монета серед них. Отже, за допомогою першого зважування визначаємо вагу фальшивої монети відносно справжньої.

3.34.2. Нехай O – центр вписаного кола. Оскільки точка O лежить на бісектрисі кута, в який вписане коло, то $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAD$ і $\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC$, тобто $\angle BAO+\angle ABO=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle ABC)=\frac{1}{2}180°=90°$, $\angle AOB=90°$ (рис. 3.34.1). Оскільки $OE\perp AB$ і $OE=R$, де R – радіус кола, то з прямокутного трикутника AOB знаходимо $AE\cdot EB=OE^2=R^2$. Аналогічно з прямокутного трикутника COD маємо $CF\cdot FD=OF^2=R^2$. Звідси й випливає твердження задачі.

3.34.3. Розіб'ємо дошку на пластинки доміно. Після цього зрозуміло, як потрібно грати другому гравцеві, щоб виграти. Після чергового ходу першого гравця другий гравець має викреслювати клітинки, які відповідають другим половинкам доміно, перші половинки яких перед цим викреслив перший гравець. Зрозуміло, що при такій грі другого гравця, після $1\,000$ ходів, залишок буде покритий пластинками доміно.

3.34.4. Спочатку доведемо, що у збірнику відсутні задачі, рівень складності яких більший за 3. Припустимо, що це не так. Тоді серед

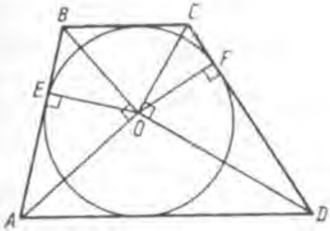


Рис. 3.34.1

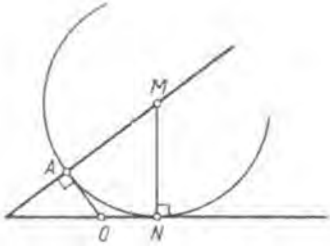


Рис. 3.34.2

цілих чисел від 1 до 200 існує таке число, яке ділиться на щонайменше чотири різних простих числа. Отже, воно не менше за добуток $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, що неможливо, оскільки це число має бути не більше за 200. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$, де $p_1 < p_2 < p_3$ – прості числа, α_1, α_2, α_3 – цілі додатні числа такі, що $1 \le n \le 200$. Нам потрібно підрахувати кількість таких трійок чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Якщо $p_1 \ge 5$, то $n \ge 5 \cdot 7 \cdot 11 > 200$. Отже, $p_1 = 2$ або $p_1 = 3$. Далі перебором встановлюємо, що кількість задач найвищого рівня дорівнює 31.

3.34.5. Нехай MN – перпендикуляр, опущений з точки M на другу сторону кута (рис. 3.34.2). Тоді коло з центром M і радіусом MA дотикається до другої сторони кута в точці N. Через точку A проведемо пряму, яка перпендикулярна до першої сторони кута. Позначимо через O точку перетину цієї прямої з другою стороною кута. Тоді за властивістю дотичних маємо, що $OA = ON$. Звідси й випливає спосіб побудови точки N, а далі й побудови точки M. Задача має два розв'язки.

3.34.6. Зауважимо, що жук має проповзати ребра повністю, тобто не мати на них точок розвороту (це випливає з того, що шлях повинен бути найменшим). Кожну вершину він має проповзти принаймні двічі. А це означає, що для шести вершин, крім першої та останньої, він проповзатиме одне ребро з трьох, які з неї виходять, щонайменше двічі. Таких ребер три. Отже, мінімальний шлях жука складається з 15-ти ребер. Дійсно, наприклад, $1-5-6-7-8-5-6-2-1-$ $-4-3-2-3-7-8-4$ (мається на увазі, що вершини нижньої основи пронумеровані числами 1, 2, 3, 4, а вершини верхньої – відповідно числами 5, 6, 7 і 8).

3.34.7. Необов'язково. Розглянемо числа $-a$, $-a$, $-a$, $-a$, b, $-a$, ..., $-a$, b, $-a$, $-a$, $-a$, $-a$ (на місцях, кратних 5, стоїть число

b $(b>0)$, на всіх інших $-a$ $(a>0)$). Ця послідовність задовольняє умову задачі, якщо $4a<b$. Сума всіх чисел буде від'ємною, якщо $1\,596a>398b$, звідси $\frac{398}{1\,596}<\frac{a}{b}<\frac{1}{4}$. Можна взяти $a=797$, $b=3\,192$, тоді $\frac{1}{2}\left(\frac{398}{1\,596}+\frac{1}{4}\right)=\frac{797}{3\,192}$.

3.34.8. $\frac{a}{x}+\frac{a+b}{x+y}+\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{a}{x}+\frac{a+b}{x+y}+1$. Нехай m, n, k – така перестановка чисел a, b, c з відрізка $[1;2]$, що $m\le n\le k$, тоді $\frac{a}{x}\le\frac{k}{m}\le\frac{2}{1}=2$, $\frac{a+b}{x+y}\le\frac{n+k}{m+n}\le\frac{n+2}{1+n}=1+\frac{1}{1+n}\le 1+\frac{1}{1+1}=1{,}5$. Таким чином, значення даного виразу не перевищує 4,5. Досягається це значення при $a=2$, $b=c=1$ і $x=y=1$, $z=2$.

3.34.9. а) Ні. Досить розглянути лише лінії, які проходять по межах між пластинками доміно. Кожна така лінія розбиває прямокутник на дві частини з парною кількістю клітинок. Тому, якщо така лінія перетне пластинки доміно, то вона має перетинати їх парну кількість. Крім того, різні прямі не можуть перетнути одну й ту саму пластинку. Проте вказаних прямих всього $1\,993+3=1\,996$ і вони мають перетнути не менше, як $1\,996\cdot 2=3\,992$ пластинок. Кількість пластинок, які покривають прямокутник, $1\,994\cdot 2=3\,988<3\,992$. Отже, серед цих прямих при будь-якому покритті знайдеться пряма, яка не перетинає жодної пластинки.

б) Так. Самостійно вкажіть потрібне покриття.

3.34.10. Нехай M – точка перетину прямих, що містять сторони AD і BC даного чотирикутника $ABCD$, а N – точка перетину прямих, що містять сторони AB і CD. Нехай O_1, O_2, O_3, O_4 – вершини нового чотирикутника. Тоді ці точки є центрами відповідних кіл, що зображені на рис. 3.34.3. Позначимо через P, S, L та Q, T, K відповідні точки дотику кіл O_1 і O_2. За властивістю дотичних маємо $PQ=PB+BC+CQ=SB+BC+CT$, а $LK=LA+AD+DK=SA+AD+DT$. Додавши почленно ці рівності та врахувавши, що $PQ=LK$, одержуємо $PQ=LK=\frac{1}{2}P_{ABCD}$. Оскільки PQ – проекція O_1O_3 на пряму

BC, то $O_1O_3 \geq PQ = \frac{1}{2} P_{ABCD}$. Аналогічно доводиться, що $O_2O_4 \geq \frac{1}{2} P_{ABCD}$. Додавши почленно останні дві нерівності, одержимо $O_1O_3 + O_2O_4 \geq P_{ABCD}$.

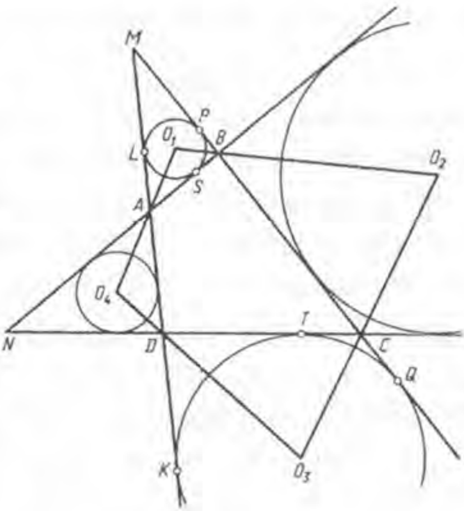


Рис. 3.34.3

3.34.11. Нехай така прогресія існує і d – її різниця. Тоді в інтервалі $[(a+2)!+2;\ (a+2)!+(a+2)]$, де a – натуральне число, знаходиться $a+1$ цілих чисел (це всі цілі числа з даного інтервалу) і всі вони не є простими. Оскільки d – різниця прогресії, то при $a > d$ (a – досить велике), у цьому інтервалі опиниться хоча б один член прогресії. Суперечність.

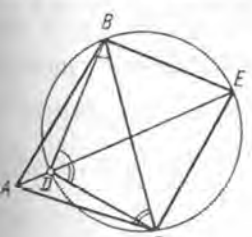


Рис. 3.34.4

3.34.12. Опишемо коло навколо трикутника BDC. Нехай AD перетинає це коло в точці E, $E \neq D$ (рис. 3.34.4). Тоді $\angle ABC = \angle BDE = \angle BCE$. Звідси випливає, що $AB \parallel CE$. Аналогічно доводиться, що $AC \parallel BE$, тобто $ABEC$ – паралелограм. Тому AE і BC перетинаються в точці, яка ділить їх навпіл. Звідси й випливає твердження задачі.

3.34.13. Скористаємось такою нерівністю $n! < n^n$ для натуральних $n \geq 2$. Виконавши наступні оцінки, одержуємо, з одного боку, $((5!)!)! = (120!)! < (120^{120})! < (10^{360})! < (10^{360})^{10^{360}} = 10^{360 \cdot 10^{360}}$, а з іншого боку, $5^{5^{5^5}} = (5^2)^{\frac{1}{2} \cdot 5^{5^5}} > 10^{\frac{1}{2} \cdot 5^{5^5}} > 10^{5^{5^5 - 1}} = 10^{5^{3124}} = 10^{(5^2)^{1562}} > 10^{10^{1562}}$. Отже, перше число, яке записане в умові задачі, більше за друге.

3.34.14. Позначимо многокутник через M, а його внутрішню частину через D (M – це межа D). Доведемо твердження задачі за допомогою методу математичної індукції. Спочатку для $n=2$. Нехай M' і D' – відповідно образи фігур M і D при симетрії відносно точки O. Тоді D і D' перетинаються, бо $O \in D$ і $O \in D'$. Отже, M і M' перетинаються (інакше $D \subset D'$ або $D' \subset D$, чого не може бути, оскільки площі D і D' рівні). Нехай $A_1 \in M \cap M'$, A_2 – точка, симетрична точці A_1 відносно O. Тоді $A_2 \in M$, оскільки $A_1 \in M'$. Точка A_1 переходить в A_2, а M' в M при симетрії відносно точки O, тобто $A_2 \in M$. Таким чином, точки A_1 і A_2 лежать на M і O – середина відрізка A_1A_2, а це означає, що A_1 і A_2 – шукані: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$ (при цьому $A_1 \neq A_2$, інакше $A_1 = A_2 = O$ і $O \in M$, але O лежить всередині M, тобто $O \notin M$). Припустимо, що твердження задачі доведено для $n \geq 2$. Доведемо його для $n+1$. Нехай A_1 – найближча точка многокутника M до точки O. Тоді A_1 не може бути вершиною многокутника, тобто A_1 лежить на його стороні. Дійсно, нехай A_1' – це вершина, а P і Q – сусідні для неї вершини. Тоді $\angle PA_1O \geq 90°$ (якщо $\angle PA_1O < 90°$, то на стороні PA_1 існує точка R, розташована між проекцією точки O на пряму PA_1 і точкою A_1, і $OR < OA_1$, що суперечить тому, що A_1 – найближча). Аналогічно $\angle OA_1Q \geq 90°$. Тоді кут при вершині A_1 дорівнює $\angle PA_1O + \angle QA_1O \geq 90° + 90° = 180°$, що неможливо, оскільки многокутник M опуклий. Отже, A_1 лежить на стороні PQ многокутника M. Розглянемо точку O' таку, що $n \cdot \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OA_1} = \vec{0}$. Тоді $OO' = \frac{1}{n} \cdot OA_1 < OA_1$, тобто O' лежить всередині многокутника (інакше відрізок OO' перетинає многокутник у точці X такій, що $OX \leq OO' < OA_1$, але A_1 – найближча, тобто виникає суперечність). Тоді за припущенням індукції знайдуться n різних точок A_2, A_3, …, A_{n+1} таких, що $\overrightarrow{O'A_2} + \overrightarrow{O'A_3} + \ldots + \overrightarrow{O'A_{n+1}} = \vec{0}$. Тоді сума $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_{n+1}} = \overrightarrow{OA_1} + (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_2}) + \ldots + (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_{n+1}}) = (\overrightarrow{OA_1} + n \cdot \overrightarrow{OO'}) + (\overrightarrow{O'A_2} + \ldots + \overrightarrow{O'A_{n+1}}) = \vec{0}$. Зауважимо, що коли жодна з точок A_2, …, A_{n+1} не збігається з A_1, то точки A_1, A_2, …, A_{n+1} – шукані (вони різні і $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_{n+1}} = \vec{0}$). Але можливо, що одна з точок

$A_2, \ldots, A_{n+1}$ збігається з A_1. Нехай, наприклад, $A_2 = A_1$. Замінимо точки A_1 і A_2 на дві інші так, щоб сума $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ не змінилась і нові $n+1$ точок будуть різними. Тоді $n+1$ точок будуть шуканими. Дійсно, точка $A_1 = A_2$ розташована всередині відрізка PQ. Оскільки точок $A_3, \ldots, A_{n+1}$ – скінченна кількість, то всередині відрізка PQ існує відрізок MN, всередині якого розташована точка A_1, і не містить точок $A_3, \ldots, A_{n+1}$. Всередині відрізка MN вибираємо точки A_1' і A_2'так, щоб точка $A_1 = A_2$ була серединою відрізка $A_1'A_2'$. Тоді точки $A_1', A_2', A_3, \ldots, A_{n+1}$ – різні, що й завершує доведення.

3.34.15. Нехай $k \le l \le m$. Якщо $k \ge 4$, подана сума не перевищує $\frac{3}{4}$. За умови $k=3$, $l \ge 3$, $m \ge 4$ вираз не більший за $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$. Якщо $k=2$, то або $l=3$ ($m \ge 7$ і наша сума не перевищує $\frac{41}{42}$), або $l \ge 4$ ($m \ge 5$ і наша сума не більша за $\frac{19}{20}$).

3.34.16. *Відповідь.* $7\frac{13}{15}$. Оскільки a_1 більше за інших зустрічається в чисельниках, його треба брати найбільшим серед a_k, аналогічно a_2 – друге за значенням і т. д. Тобто $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_5$. З аналогічних міркувань $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_5$. Отже, приходимо до виразу $\frac{a_1}{a_5}+\frac{a_1+a_2}{a_5+a_4}+\ldots+1$ і a_1 лише в чисельниках, a_5 – лише в знаменниках, тому $a_1=2$, $a_5=1$. Розклавши останній дріб як $1+\frac{1}{1+a_4+a_3+a_2}$, отримаємо a_4 лише у знаменниках і тому $a_4=1$. Далі аналогічно $a_3=1$ і одержуємо $6+\frac{5}{6}a_2+\frac{1}{3+a_2}$. Максимальне значення цього виразу досягається при $a_2=2$ (знаходимо, наприклад, за допомогою похідної).

3.34.17. Нехай сторона a має проекції відповідно a_x та a_y, тоді $a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2 = (a_x+a_y)^2 - 2a_x a_y$. Легко помітити, що парність a та

$a_x + a_y$ однакова. Сума проекцій $\sum a_x$ є парним числом (сума береться по всім сторонам), оскільки в кожну точку осі Ox проектується парна кількість сторін. Аналогічно, парною буде й сума $\sum a_y$. Звідки випливає парність суми довжин сторін.

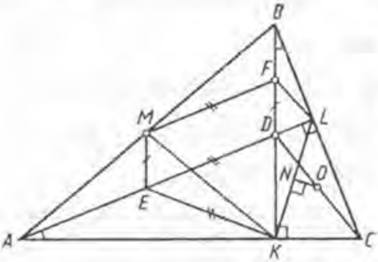


Рис. 3.34.5

3.34.18. Нехай M, N, O, E, F – відповідно середини відрізків AB, KL, CD, AD, BD (рис. 3.34.5). Оскільки точки K та L лежать на колі з центром O, то ON – серединний перпендикуляр до KL. Щоб довести, що $M \in ON$, досить показати, що $KM = LM$. Чотирикутник $EMFD$ – паралелограм, трикутники AKD і BLD прямокутні. Тому $MF = ED = EK$, $ME = FD = FL$, а $\angle MEK = \angle MED + 2\angle KAD = \angle MFD + 2\angle LBD = \angle MFL.$ Трикутники MEK і LFM рівні, отже, $KM = LM$.

3.34.19. Нехай a та b – довжини паралельних сторін, d_1 та d_2 – довжини діагоналей, p_1 та p_2 – відповідно проекції діагоналей на сторону a, h – висота (відстань між паралельними сторонами), $a \geq b$, $d_1 \geq d_2$. Тоді $p_1 + p_2 = a + b$, $p_1 \geq \frac{1}{2}(a+b)$, $d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{S^2}{h^2} + h^2 = \frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$, де $S = 1$ – площа чотирикутника. Тому $d_1 \geq \sqrt{2}$. Для одиничного квадрата $d_1 = \sqrt{2}$.

3.34.20. Припустимо, що числа a_k мають лише прості дільники p_1, p_2, ..., p_n. Розглянемо число $b = p_1^{11} \cdot p_2^{11} \cdots p_n^{11}$. Хоча б одне з чисел $b+1$, $b+2$, ..., $b+1\,993$ є членом даної послідовності. Нехай це $b+m$, $1 \leq m \leq 1\,993$. Тоді $b+m = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$, де хоча б одне $i_k \geq 11$. Тоді, очевидно, m буде ділитися на відповідне $p_k^{11} \geq 2^{11} > 1\,993$. Але $m \leq 1\,993$. Суперечність.

3.34.21. *Відповідь.* Для парних n – можна, для непарних n – ні.

Для парних n дошку розмірами $4k \times 4k$ розіб'ємо на 16 однакових частин (кожна буде квадратом $k \times k$) і пофарбуємо чорним кольором кожну з них, крім третьої в першому (верхньому) ряду, четвертої в другому ряду, першої в третьому ряду та другої в четвертому (нижньому) ряду цих частин. Таке пофарбування дошки задовольняє умову задачі.

Розглянемо непарні n. Припустимо, що дошку вдалося пофарбувати потрібним чином. Можемо вважати, що не менше n рядків – "білі", тобто мають не менше 75 % білих клітинок, і всі вони розташовані у верхній частині дошки. Тоді у верхній половині дошки не більше $\frac{n^2}{2}$ чорних клітинок, а оскільки n непарне, чорних клітинок строго менше $\frac{n^2}{2}$. Кожний "чорний" стовпчик має не менше $\frac{n}{2}$ чорних клітинок у верхній половині дошки, тому кількість таких стовпчиків менша за n. Тоді маємо більше n "білих" стовпчиків, кожний з яких має не менше $\frac{n}{2}$ білих клітинок. Тому в нижній половині дошки більше $\frac{n^2}{2}$ білих клітинок і у верхній не менше $\frac{3n^2}{2}$. Всього – більше за $2n^2$. Отримали суперечність.

3.34.22. Див. розв'язання задачі 3.34.14.

3.34.23. а) Очевидно, що останньою цифрою числа a є 9. Запишемо a у вигляді $a = \overline{a_1...a_k 99...9}$, де $a_k \neq 9$, і позначимо $s = a_1 + ... + a_k$. За умовою існують такі натуральні числа p і q, що

$$s + 9(1\,994 - k) = 1\,994p, \qquad (1)$$

$$s + 1 = 1\,994q, \qquad (2)$$

звідси $9(1\,994 - k) = 1\,994(p - q) + 1$. Оскільки числа a і $a+1$ – 1 994-цифрові, то $1 \leq q < p < 9$, звідси $1 \leq p - q \leq 7$. Легко перевірити, що за цих обмежень число $1\,994(p-q)+1$ ділиться на 9 лише тоді, коли $p - q = 7$. Звідси $p = 8$, $q = 1$ і сума цифр числа a дорівнює $1\,994 \cdot 8$, а сума цифр числа $a+1$ дорівнює $1\,994$.

б) Оскільки $p=8$ і $q=1$, то з (1) і (2) випливає, що $s=1\,993$ і $k=443$. Виберемо довільно цифри a_2, a_3, …, a_{201} (очевидно, що це можна зробити $10^{200}=100^{100}$ способами). Тоді для 243 цифр a_1, a_{202}, a_{203}, …, a_{443}, що залишилися, із нерівностей $0\le a_2+a_3+...+a_{201}\le 200\cdot 9=1\,800$ отримаємо $193\le a_1+a_{202}+...+a_{443}\le$ $\le 1\,993$.

Оскільки $243\cdot 9=2\,187>1\,993$, то вибрати цифри a_1, a_{202}, …, a_{443} так, щоб виконувалася остання подвійна нерівність і умови $a_1\ne 0$, $a_{443}\ne 9$, можна завжди. Отже, цифри a_2, a_3, …, a_{201} числа a можуть бути заданими довільно, а інші цифри a_1, a_{202}, …, a_{443} можуть бути підібраними так, щоб $a_1+a_2+...+a_{443}=1\,993$, і тоді суми цифр чисел a і $a+1$ діляться на $1\,994$ кожна, причому це можна зробити $10^{200}=100^{100}$ способами. Тому різних пар потрібних чисел $(a,a+1)$ буде не менше, ніж 100^{100}.

3.34.24. Позначимо через n_i кількість плиток кольору i ($i=1,2,3,...,k$). Якщо n_i – непарне, то принаймні одна плитка кольору i повинна міститися на діагоналі симетрії. Звідси одразу випливає, що при $k>1\,995$ досить розглянути випадок $n_1=...=n_{k-1}=1$, $n_k=1\,994^2-k+1$, який показує, що потрібне замощення неможливе. Якщо ж $k\le 1\,995$, то потрібну мозаїку завжди викласти можна. З умови $n_1+...+n_k=1\,994^2$ випливає, що непарних чисел серед n_1, …, n_k – парна кількість, а тому непарних чисел серед n_1, …, n_k не більше, ніж 1 994. Спочатку викладаємо на діагональ по одній плитці кожного з тих кольорів, для яких число n_i – непарне. Якщо після цього на діагоналі ще залишилися вільні місця, то їх парна кількість. Замощуємо ці місця довільно, беручи кожного разу по дві плитки однакового кольору. Після такого замощення діагоналі залишиться парна кількість плиток кожного кольору, тому викласти мозаїку можна.

3.34.25. Нехай O_1 – центр кола ω_1 з радіусом R, O_2 – центр кола ω_2, радіус якого дорівнює r, M – точка дотику цих кіл, P – точка дотику хорди AB до кола ω_2, C – друга точка перетину хорди AM із колом ω_2, D – друга точка перетину прямої O_1M із колом ω_2 (рис. 3.34.6).

Із подібності трикутників MCO_2 і MAO_1 маємо $\frac{CM}{AM}=\frac{r}{R}$, звідси $\frac{AC}{AM}=\frac{R-r}{R}$. Із подібності трикутників ACP і APM (кожен із кутів AMP і CPA вимірюється половиною дуги CP) маємо $\frac{AC}{AP}=\frac{AP}{AM}$, звідси $AP^2=AC\cdot AM=AM^2\cdot\frac{AC}{AM}=$ $=AM^2\cdot\frac{R-r}{R}$.

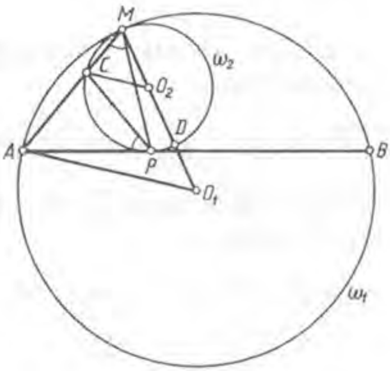


Рис. 3.34.6

Отже, $AM=AP\cdot\sqrt{\frac{R}{R-r}}$. Аналогічно доводиться, що $BM=BP\cdot\sqrt{\frac{R}{R-r}}$.

Тому периметр трикутника AMB дорівнює $AB\left(1+\sqrt{\frac{R}{R-r}}\right)$. Отже, периметр буде найбільшим тоді , коли хорда AB буде найдовшою.

Якщо точка O_1 лежить зовні кола ω_2, то хорда AB буде найдовшою тоді, коли вона проходить через O_1. У цьому випадку шуканий периметр дорівнює $2R\left(1+\sqrt{\frac{R}{R-r}}\right)$. Якщо точка O_1 лежить на колі ω_2 або всередині нього, то хорда AB буде найдовшою тоді, коли вона дотикатиметься до кола ω_2 у точці D. У цьому випадку шуканий периметр дорівнює $4\sqrt{r(R-r)}\left(1+\sqrt{\frac{R}{R-r}}\right)$.

3.34.26. Очевидно, що коли $a=0$ або $a=\frac{1}{1\,994}$, то послідовність $\{a_n\}$ є сталою, а коли $a=\frac{2}{1\,994}$, то вона стає сталою вже на другому кроці. Далі, якщо деякий член a_k послідовності $\{a_n\}$ від'ємний, то із нерівності $a_k<0$ випливає $2-a_k>2$, $a_{k+1}<0$ і тому $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}>2$. Отже, в цьому випадку послідовність необмежено зростає за абсолютною величиною.

Якщо $a_k>\frac{2}{1\,994}$, то $2-1\,994a_k<0$ і $a_{k+1}<0$, а далі проводимо попередні міркування. Тому і в цьому випадку послідовність необмежено зростає.

Якщо $0<a_k<\frac{1}{1\,994}$, то $0<1\,994a_k<1$, $1<2-1\,994a_k<2$ і $0<a_{k+1}<\frac{2}{1\,994}$.

За умови $\frac{1}{1\,994}<a_k<\frac{2}{1\,994}$, маємо $1<1\,994a_k<2$, $0<2-1\,994a_k<1$ і $0<a_{k+1}<\frac{2}{1\,994}$. Отже, послідовність $\{a_n\}_{n\geq 1}$ буде обмеженою тоді й лише тоді, коли $0\leq a\leq\frac{2}{1\,994}$.

3.34.27. Позначимо число $\underbrace{111...11}_{1\,994}$ через N. Оскільки N має ділитися на кожну цифру числа n, то серед цифр числа n не повинні зустрічатися цифри 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Крім того, із подільності числа $a=111\,111$ на 7 випливає, що число $N=a\cdot 10^{1\,888}+$ $+a\cdot 10^{1\,982}+...+a\cdot 10^2+11$ не ділиться на 7. Тому цифрами числа n можуть бути лише одиниці. Але тоді $D(n)=1$, і рівняння має єдиний розв'язок $n=N$.

3.34.28. Легко підрахувати, що $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=43$ і для інших n, крім нерівності $\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}<1$, має місце рівність $\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n-1}=1$.

Твердження задачі тепер легко доводиться індукцією по n із використанням очевидної рівності $\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2 - a_n}$;

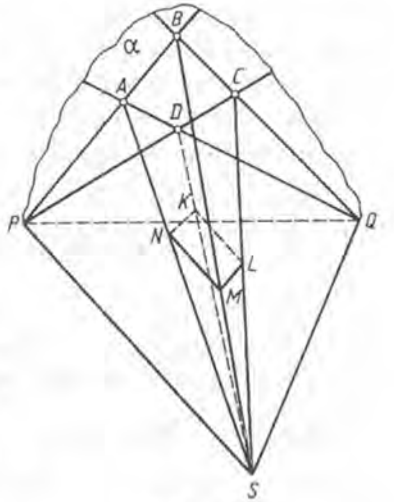


Рис. 3.34.7

3.34.29. Очевидно, що точки P, Q, A, B, C і D лежать в одній площині (позначимо її через α). Нехай $KLMN$ – прямокутний переріз піраміди $SABCD$ деякою площиною (рис. 3.34.7). Площини SAB і SCD перетинаються по прямій SP. Із паралельності прямих MN і KL випливає, що $MN \parallel KL \parallel SP$. Аналогічно доводиться, що $NK \parallel ML \parallel SQ$. Але $MN \perp NK$, тому $SP \perp SQ$. Останнє означає, що точка S лежить на сфері, побудованій на відрізку PQ як на діаметрі. Але тоді відстань від точки S до площини α (яка містить пряму PQ) не перевищує $\frac{1}{2}PQ$. Звідси

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}h \le \frac{1}{3}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{6}PQ.$$

3.34.30. а) Ні. Нехай кількість учасників дорівнює n. Розглянемо довільний тур і випишемо кількість учасників у кожній аудиторії. Нехай a_1, a_2, …, a_k – всі різні серед виписаних чисел. Тоді $n \ge a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, звідси $k \le \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}$.

Зауважимо також, що всі учасники, які під час одного з турів сидять в аудиторіях з однією і тією самою кількістю учасників, під час іншого туру мають сидіти в аудиторіях із різною кількістю учасників. Тому загальна кількість учасників в аудиторіях з однією і тією самою кількістю учасників під час одного з турів не повинна перевищувати числа k для іншого туру. Оскільки для $n = 9$ маємо $k \le 3$, то в кожній аудиторії має сидіти не більше трьох учасників. Але тоді повинно бути не більше однієї аудиторії з трьома учасниками, не більше однієї аудиторії з двома учасниками та не більше трьох аудиторій з одним учасником. Тобто загальна кількість учасників не може перевищувати $3+2+1+1+1=8$.

б) Може. Вкажемо один із способів:

I тур. $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7\}$, $\{8,9\}$, $\{10,11\}$, $\{12\}$, $\{13\}$, $\{14\}$;

II тур. $\{1,5,8,12\}$, $\{2,6,9\}$, $\{3,10\}$, $\{7,13\}$, $\{4\}$, $\{11\}$, $\{14\}$.

Олімпіада 35
(*м. Івано-Франківськ, 1995 р.*)

3.35.1. Із $\{8x\}=\{15x\}$ випливає $8x-[8x]=15x-[15x]$ або $7x=[15x]-[8x]$. Отже, $7x$ є цілим числом. Але тоді різниця

$$\{75x\}-\{26x\}=75x-[75x]-26x+[26x]=7\cdot 7x-[75x]+[26x]$$

також є цілим числом. Оскільки кожне з чисел $\{75x\}$ і $\{26x\}$ лежить на проміжку $[0;1)$, то $7\cdot 7x-[75x]+[26x]=0$ і $\{75x\}=\{26x\}$.

3.35.2. Ні, не може. Справді, нехай n – кількість відрізків нашої фігури (сторін 1 995-кутника і відрізків, що ділять многокутник на трикутники). Кожен з $n-1\,995$ відрізків, що не є стороною многокутника, є стороною двох трикутників, а кожна сторона 1 995-кутника є стороною одного трикутника. Отже, кількість трикутників у розбитті дорівнює

$$\frac{2(n-1\,995)+1\,995}{3}=\frac{2n-1\,995}{3}=2\cdot\frac{n}{3}-665.$$

Це число буде цілим лише тоді, коли n ділиться на 3. Але тоді воно буде непарним, а тому не може дорівнювати парному числу 3 000.

3.35.3. Доведемо, що коли цілі числа x, y, z задовольняють співвідношення

$$x^2+y^2+z^2=2^n, \tag{1}$$

де $n\geq 2$, то всі вони парні. Справді, нехай це не так. Квадрат непарного числа є числом непарним, а права частина в (1) – парне число. Тому єдино можливим залишається випадок, коли два числа з x, y,

z (наприклад x і y) – непарні, а третє число – парне. Нехай $x=2x_1+1$, $y=2y_1+1$, $z=2z_1$, де x_1, y_1, z_1 – цілі. Тоді (1) набуває вигляду

$$(2x_1+1)^2+(2y_1+1)^2+(2z_1)^2=2^n,$$

звідси

$$2(x_1^{\ 2}+x_1+y_1^{\ 2}+y_1+z_1^{\ 2})=2^{n-1}-1.$$

Але при $n\geq 2$ права частина останньої рівності є непарним числом, що суперечить парності лівої частини. Отримана суперечність доводить, що всі числа x, y, z – парні. Але тоді їх можна записати у вигляді $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$, де x_1, y_1, z_1 – цілі числа і від рівняння (1) перейти до рівняння $x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}=2^{n-2}$.

Застосовуючи ці міркування кілька разів, від початкового рівняння $x^2+y^2+z^2=2^{1\,995}$ можна перейти до рівняння $a^2+b^2+c^2=2$, де $x=2^{997}a$, $y=2^{997}b$, $z=2^{997}c$. Цілочислові розв'язки останнього рівняння вже очевидні: $(\pm 1,\pm 1,0)$, $(\pm 1,0,\pm 1)$, $(0,\pm 1,\pm 1)$ (знаки можна вибирати довільно). Отже, розв'язками початкового рівняння будуть набори $\left(\pm 2^{997},\ \pm 2^{997},\ 0\right)$, $\left(\pm 2^{997},\ 0,\ \pm 2^{997}\right)$, $\left(0, \pm 2^{997},\ \pm 2^{997}\right)$ (всього 12 розв'язків).

3.35.4. Ні, не можна. Незалежно від способу розставлення знаків ліва частина виразу буде непарним числом (вона містить непарну кількість непарних доданків), а права – парним.

3.35.5. Нехай E – точка перетину відрізків MC і BP, а K – точка перетину відрізків MD і AP, тоді $\angle MBE=\angle AMK$ як відповідні кути при перетині паралельних прямих BE і MK січною AB (рис. 3.35.1). Аналогічно $\angle BME=\angle MAK$. Тому ΔBME і ΔMAK подібні і

$$\frac{BE}{ME}=\frac{MK}{AK}. \qquad (2)$$

Аналогічно доводиться подібність ΔCPE і ΔPDK, а також рівність

$$\frac{PK}{KD}=\frac{CE}{EP}. \qquad (3)$$

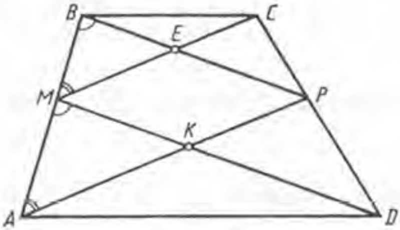


Рис. 3.35.1

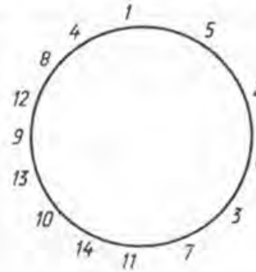


Рис. 3.35.2

Перемноживши рівності (2) і (3), отримаємо

$$\frac{BE}{ME}\cdot\frac{PK}{KD}=\frac{MK}{AK}\cdot\frac{CE}{EP}. \qquad (4)$$

Але чотирикутник $MEPK$ – паралелограм, тому $ME=KP$, $MK=EP$.

З (4) випливає, що

$$\frac{BE}{KD}=\frac{CE}{AK}.$$

Враховуючи, що $\angle BEC=\angle MEP=\angle MKP=\angle AKD$, приходимо до висновку, що ΔBEC і ΔAKD – подібні. Тому $\angle CBE=\angle KDA$. Звідси

$$\angle CBA+\angle BAD=\angle CBE+\angle EBM+\angle MAK+\angle KAD=$$
$$=\angle KDA+(180^\circ-\angle BEM-\angle BME)+\angle MAK+\angle KAD=$$
$$=\angle KDA+(180^\circ-\angle MKA-\angle MAK)+\angle MAK+\angle KAD=$$
$$=\angle KDA+(180^\circ-\angle MKA)+\angle KAD=$$
$$=\angle KDA+\angle DKA+\angle KAD=180^\circ.$$

Оскільки кути CBA і BAD – внутрішні різносторонні при перетині прямих AD і BC прямою AB та їх сума дорівнює 180°, то $AD \parallel BC$ і $ABCD$ – трапеція.

3.35.6. а) Не можна. Розглянемо числа 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 15. Цих чисел 8, а місць на колі 15. Тому, як би ми не розставляли числа на колі, принаймні два числа з цього набору будуть стояти поряд. Але різниця між довільними двома числами з цього набору не дорівнює жодному з чисел 4, 5, 6 або 7.

б) Можна. Один із прикладів такого розташування чисел (по колу) такий: $1, 5, 2, 6, 3, 7, 11, 14, 10, 13, 9, 12, 8, 4$ (рис. 3.35.2). Зауважимо, що у цьому прикладі кожні два сусідні числа відрізняються на 3 або 4.

3.35.7. З умови випливає, що права частина тотожності

$$(m+n)(m^{1995}+n^{1995})=(m^{1996}+n^{1996})+mn(m^{1994}+n^{1994})$$

ділиться на 179. Тому добуток $(m+n)(m^{1995}+n^{1995})$ також ділиться на 179. Оскільки 179 – просте число, то на 179 має ділитися один із множників. Якщо це $m^{1995}+n^{1995}$, то все доведено. Якщо ж це $m+n$, то твердження задачі випливає з тотожності

$$m^{1995}+n^{1995}=(m+n)(m^{1994}-m^{1993}n+m^{1992}n^2-...+n^{1994}).$$

3.35.8. Необов'язково. Розглянемо випадок, коли між собою не знайомі лише 1-й і 2-й, 3-й і 4-й, ..., 99-й і 100-й учні. Тоді кожен школяр не знайомий рівно з одним учасником олімпіади, але в довільній групі з 99-ти школярів знайдеться учень, знайомий з усіма членами цієї групи.

3.35.9. На продовженні сторони AB відкладемо точку L так, щоб $BC=BL$ (рис. 3.35.3). Тоді $AP=PL$, оскільки P – середина ламаної ABC. Крім того, $AM=MC$ за умовою. Тому за теоремою про середню лінію $CL \parallel PM$. Звідси випливає, що $\angle PQB=\angle BCL$. З іншого боку, за побудовою точки L трикутник CBL є рівнобедреним, у якого кут при вершині B дорівнює $\angle CBL=180°-120°=60°$. А це означає, що трикутник CBL правильний. Отже, $\angle PQB=\angle BCL=60°$.

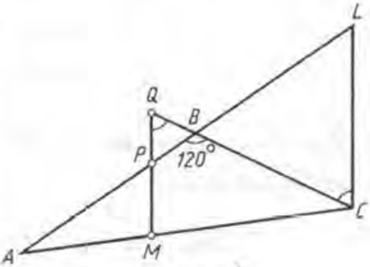


Рис. 3.35.3

3.35.10. Нехай $\frac{m}{n}=0,\ a_1a_2...a_k1995...$ Тоді

$$\frac{10^k m}{n}-\overline{a_1a_2...a_k}=0,1\,995...=\frac{m_1}{n}.$$

Звідси

$$0,000\,5=\frac{1}{5}-0,1\,995\geq\frac{1}{5}-0,1\,995...=\frac{1}{5}-\frac{m_1}{n}=\frac{n-5m_1}{5n}\geq\frac{1}{5n},$$

оскільки різниця $\frac{1}{5}-\frac{m_1}{n}$ додатна, а чисельник $n-5m_1$ є цілим числом. Отже, $0,0005\geq\frac{1}{5n}$ і $n\geq 400$.

Якщо $n=400$, то

$$\frac{n-5m_1}{5n}=\frac{400-5m_1}{5\cdot 400}=\frac{80-m_1}{400}\geq\frac{1}{400}=0,002\,5>0,000\,5,$$

що суперечить доведеному вище. Отже, $n\geq 401$. З іншого боку, $\frac{80}{401}=0,199\,501...$, тому шуканим числом є $n=401$.

3.35.11. Позначимо через x_i абсцису точки M_i, $i=1,2,3,4$. Тоді за теоремою Вієта

$$x_1+x_2=-p_1,\ x_1x_2=q_1,$$
$$x_2+x_3=-p_2,\ x_2x_3=q_2,$$
$$x_3+x_4=-p_3,\ x_3x_4=q_3,$$

а шукана парабола має вигляд $y=x^2-(x_1+x_4)x+x_1x_4$. Із лівої колонки рівнянь знаходимо

$$x_1+x_4=(x_1+x_2)+(x_3+x_4)-(x_2+x_3)=p_2-p_1-p_3.$$

Якщо $q_2\neq 0$, то із правої колонки рівнянь отримуємо

$$x_1x_4=\frac{x_1x_2\cdot x_3x_4}{x_2x_3}=\frac{q_1q_3}{q_2}.$$

Якщо $q_2=0$, то або $x_2=0$, або $x_3=0$. У випадку $x_2=0$ маємо

$$q_1=0,\quad x_1=-p_1,\quad x_3=-p_2,\quad x_4=-p_3-x_3=-p_3+p_2,$$

звідси $x_1x_4=p_1(p_3-p_2)$.

У випадку $x_3=0$ аналогічно отримуємо $q_3=0$ і $x_1x_4=p_3(p_1-p_2)$. Отже, $p=-(x_1+x_4)=p_1-p_2+p_3$ і

$$q=x_1x_4=\begin{cases}\dfrac{q_1q_3}{q_2}, \text{ якщо } q_2\neq 0,\\ p_1(p_3-p_2), \text{ якщо } q_2=q_1=0,\\ p_3(p_1-p_2), \text{ якщо } q_2=q_3=0.\end{cases}$$

3.35.12. Нехай радіус зовнішнього кола γ_1 дорівнює R, а внутрішнього кола γ_2 – r. Зафіксуємо на зовнішньому колі точку A. Коли точка B рухається по внутрішньому колу, то середина M відрізка AB описує коло γ_3, гомотетичне γ_2, з центром гемотетії A та коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ (рис. 3.35.4). Його центром буде точка O_A – середина відрізка AO, а радіус дорівнює $\frac{r}{2}$. Точки перетину кола γ_3 з відрізком AO позначимо через K і L.

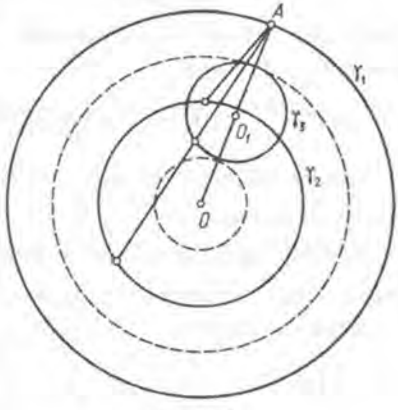


Рис. 3.35.4

Якщо тепер точка A почне рухатися по колу γ_1, то точка O_A пробігатиме коло γ_4 радіуса $\frac{R}{2}$ з центром у точці O, а точки кола γ_3 пробігатимуть кільце з центром у точці O і зовнішнім радіусом $OK=OO_A+O_AK=\frac{R}{2}+\frac{r}{2}=\frac{R+r}{2}$ та внутрішнім радіусом $OL=OO_A-O_AL=\frac{R}{2}-\frac{r}{2}=\frac{R-r}{2}$. Очевидно, що будуть "задіяні" всі точки цього кільця.

Отже, шуканим геометричним місцем точок буде кільце з центром у точці O і зовнішнім радіусом $\frac{R+r}{2}$ та внутрішнім радіусом $\frac{R-r}{2}$.

3.35.13. Нехай n лежить у межах $10^{k-1} \le n < 10^k$. Тоді $S(n) \le 9k$. Очевидно, що числа виду $n = 10^m$ для $m \ge 3$ не задовольняють умову задачі. Тому можна вважати, що $S(n) \ge 2$. При цих обмеженнях маємо

$$(S(n))^n \ge 2^n \ge 2^{10^{k-1}} \text{ і } n^{S(n)} < (10^k)^{9k} = 10^{9k^2}.$$

Зауважимо, що $1\,995 > 10^3 = 10^{4-1}$ і доведемо, що для всіх $k \ge 4$ виконується нерівність $2^{10^{k-1}} > 10^{9k^2}$.

Оскільки $2^4 = 16 > 10$, то досить довести нерівність $2^{10^{k-1}} > (2^4)^{9k^2}$ або рівносильну їй нерівність

$$10^{k-1} > 36k^2. \qquad (1)$$

Для $k = 4$ отримаємо $10^{4-1} = 1\,000 > 36 \cdot 16 = 576$. Припустимо тепер, що для $n = k$ нерівність (1) виконується, і доведемо її для $n = k+1$. Справді,

$$10^{(k+1)-1} = 10 \cdot 10^{k-1} > 10 \cdot 36k^2 > 36 \cdot 4k^2 = 36(2k)^2 > 36(k+1)^2.$$

Таким чином, для всіх $n \ge 10^3$ маємо $(S(n))^n > n^{S(n)}$, тому шуканих n не існує.

3.35.14. Доведемо, що у випадку $p_1 = p_3$ другий гравець завжди може виграти. Його відповідь на можливі ходи першого гравця видно з наступної схеми:

$$(p_0 + k, p_1 - k, p_2, p_3, p_4) \to (p_0 + k, p_1 - k, p_2 + k, p_3 - k, p_4),$$
$$(p_0, p_1 + k, p_2 - k, p_3, p_4) \to (p_0 + k, p_1, p_2 - k, p_3, p_4),$$
$$(p_0, p_1, p_2 + k, p_3 - k, p_4) \to (p_0 + k, p_1 - k, p_2 + k, p_3 - k, p_4),$$
$$(p_0, p_1, p_2, p_3 + k, p_4 - k) \to (p_0, p_1, p_2 + k, p_3, p_4 - k).$$

Таким чином, перший гравець своїм ходом обов'язково порушує рівність сірників у першій та третій коробках, а другий гравець завжди має можливість своїм наступним ходом цю рівність відновити. Оскільки в заключній позиції кількість сірників в першій та третій коробках однакова (дорівнює 0), то другий гравець при такій стратегії завжди виграє.

Якщо ж $p_1 \neq p_3$, то перший гравець своїм першим ходом завжди може вирівняти кількість сірників у першій та третій коробках, і ми отримаємо проаналізовану вище ситуацію зі зміною номерів гравців.

Отже, у випадку $p_1 = p_3$ виграє другий гравець, в усіх інших випадках – перший.

3.35.15. Зауважимо, що на проміжках $[4,6)$, $[6,8)$, $[8,9)$ і $[9,12)$ значення виразу дорівнює відповідно 1, 2, 1 і $\frac{3}{2}$. Якщо ж $x \geq 12$, то

$$\frac{\left[\frac{x}{3}\right]}{\left[\frac{x}{4}\right]} \leq \frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{4}-1} = \frac{4}{3} + \frac{16}{3(x-4)} \leq \frac{4}{3} + \frac{16}{3 \cdot 8} = 2.$$

Тому найбільше значення даного виразу дорівнює 2.

3.35.16. До кола, описаного навколо ΔABC (рис. 3.35.5), проведемо в точці C дотичну CD (точки D і Q лежать по різні боки від прямої CP). Із властивостей кутів, що спираються на рівні дуги, маємо $\angle CAM = \angle ALM = \angle ACD$.

Отже, $AM \parallel CD$. Аналогічно доводиться, що $BT \parallel CD$, а тому $AM \parallel BT$.

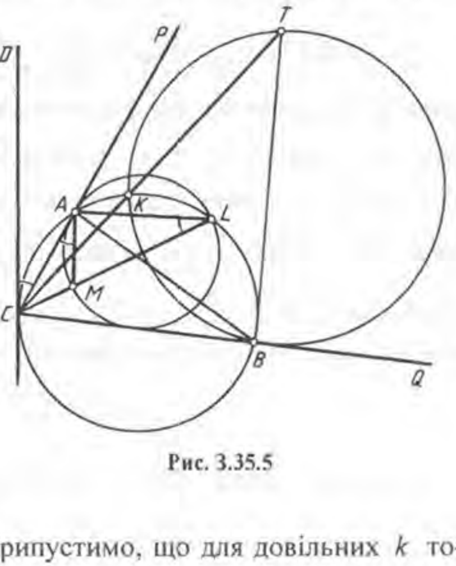


Рис. 3.35.5

3.35.17. Якщо $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$, то множина M складається з точок A_2, A_3, ..., A_{n-1} і середин відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. У цьому випадку M містить $2n-3$ точки.

За допомогою математичної індукції доведемо, що M не може містити менше $2n-3$ точок. Для $n=2$ це очевидно. Припустимо, що для довільних k точок це вже доведено, і розглянемо $k+1$ точку A_1, A_2, ..., A_k, A_{k+1}. Без обмеження загальності можна вважати, що пряма горизонтальна, а точки пронумеровані зліва направо. За припущенням множина M_1 середин відрізків із кінцями в точках A_1, A_2, ..., A_k містить не менше $2k-3$ точок. Легко помітити, що середини відрізків $A_{k-1}A_{k+1}$ та A_kA_{k+1} не збігаються та лежать праворуч від усіх точок із множини M_1. Тому множина M середин відрізків із кінцями в точках A_1, A_2, ..., A_k, A_{k+1} містить у порівнянні з M_1 ще принаймні дві нові точки. Тобто загальна кількість точок в M не менша, ніж $(2k-3)+2=2(k+1)-3$.

3.35.18. Такого многочлена не існує.

Лема. Якщо $n \geq 2$ і многочлен

$$f_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_0$$

на деякому проміжку $\left[c,c+3^n\right]$ задовольняє нерівність $|f_n(x)| \leq 1$, то існує такий многочлен

$$f_{n-1}(x)=x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1},$$

що на деякому проміжку $\left[d,d+3^{n-1}\right]$ виконується нерівність $|f_{n-1}(x)| \leq 1$.

Доведення. Вважатимемо, що f_n має на проміжку $\left[c,c+3^n\right]$ корінь x_0 (якщо це не так, то на вказаному проміжку або $-1 \leq f_n(x)<0$, або $0<f_n(x) \leq 1$, і $f_n(x)$ можна замінити на многочлен $f_n^*(x)=$ $=f_n(x)-f_n(c)$, який задовольняє умову леми і має на проміжку $\left[c,c+3^n\right]$ корінь $x=c$). Розглянемо многочлен $f_n^*(x)=f_n(x+x_0)$. Оскільки $f_n^*(0)=f_n(x_0)=0$, то вільний член многочлена f_n^* дорівнює нулеві і многочлен має вигляд

$$f_n^*(x)=x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x.$$

Очевидно також, що на проміжку $\left[c-x_0,c-x_0+3^n\right]$ многочлен f_n^* задовольняє нерівність

$$|f_n^*(x)|=|x|\cdot|x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1}| \leq 1.$$

Але тоді на кожному з проміжків $[c-x_0,-1]$ і $\left[1,c-x_0+3^n\right]$ (один з цих проміжків може бути порожнім) многочлен

$$f_{n-1}(x)=x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

задовольняє нерівність $|f_{n-1}(x)|\le 1$, бо на цих проміжках $|x|\ge 1$. Оскільки довжина принаймні одного з цих проміжків не менша, ніж $\dfrac{3^n-2}{2}\ge 3^{n-1}$ (ця нерівність легко доводиться за допомогою методу математичної індукції), то многочлен f_{n-1} і є шуканим. Лему доведено.

Якби многочлен f з умови задачі існував, то, застосувавши 1 994 рази лему, одержали б многочлен $f_1(x)=x+b$, який на деякому проміжку $[d,d+3]$ задовольняв би нерівність $|f_1(x)|\le 1$. Але це неможливо, оскільки

$$|f_1(d)-f_1(d+3)|=|d+b-(d+3)-b|=3.$$

Зауваження. Цю задачу можна розв'язати й за допомогою розкладання многочлена в добуток лінійних та незвідних квадратичних множників.

3.35.19. Застосовуючи нерівність Коші для середнього арифметичного і середнього геометричного, отримуємо

$$\frac{1+3x\sqrt[3]{y}}{y}=\frac{1}{y}+\frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}+\frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}+\frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}\ge 4\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}\right)^3}=4\cdot\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}.$$

Аналогічно доводиться нерівність

$$\frac{1+3y\sqrt[3]{x}}{x}\ge 4\cdot\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}.$$

Застосовуючи нерівність Коші ще раз, матимемо

$$4\cdot\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}+4\cdot\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}\ge 2\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}\cdot 4\cdot\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}}=8,$$

що і треба було довести.

3.35.20. а) Не можна. Справді, за умовою задачі жодні два з чисел $1, 2, 3, 11, 12, 13$ не можуть стояти поруч. Але на колі всього 13 місць, тому 5 із проміжків між цими числами повинні містити по одному місцю, і лише один проміжок – два місця. Число 4 з перерахованих вище чисел може мати своїм сусідом лише число 1, а 10 – лише число 13. Тому 4 і 10 повинні розміщуватися на тому проміжку, який має 2 місця. Але тоді числа 4 і 10 будуть стояти поруч, що суперечить умові задачі.

б) Див. розв'язання задачі 3.35.6. б).

3.35.21. Легко перевірити, що рівність $a=b=1$ неможлива, тому $ab \geq 2$. Із нерівності $a^2+b^2 \geq 2ab$ маємо

$$(ab)^n = (a^2+b^2)^{1\,994} \geq (2ab)^{1\,994} > (ab)^{1\,994},$$

звідси $n > 1\,994$.

Припустимо, що $a \neq b$. Розкладемо a і b на прості множники. Тоді знайдеться таке просте число p, що $a = p^k a_1$, $b = p^m b_1$, a_1 і b_1 не діляться на p та $m \neq k$. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $k > m$. Тоді рівняння

$$(p^{2k}a_1^{\,2} + p^{2m}b_1^{\,2})^{1\,994} = (p^k a_1 \cdot p^m b_1)^n$$

матиме вигляд

$$(p^{2(k-m)}a_1^{\,2} + b_1^{\,2})^{1\,994} = p^{n(k+m)-2m\cdot 1\,994}(a_1 b_1)^n. \qquad (1)$$

Із $n > 1\,994$ і $k > m$ випливає $n(k+m) - 2m\cdot 1\,994 = (nk - 1\,994m) + m(n - 1\,994) > 0$, тому права частина рівності (1) ділиться на p. У той же час ліва частина на p не ділиться, оскільки в сумі $p^{2(k-m)}a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$ на p ділиться лише перший доданок. Отже, припущення $a \neq b$ призводить до суперечності.

Нехай тепер $a = b$. Тоді $(a^2+a^2)^{1\,994} = (a^2)^n$, звідси $a^{n-1\,994} = 2^{997}$. Отже, a має вигляд $a = 2^l$ для деякого натурального l. Але тоді $2^{l(n-1\,994)} = 2^{997}$ і $l(-1\,994) = 997$. Оскільки 997 – просте число, то або $l=1$ і $n - 1\,994 = 997$, або $l = 997$ і $n - 1\,994 = 1$. Отже, шуканими будуть лише такі трійки $(2^1, 2^1, 2\,991)$ і $(2^{997}, 2^{997}, 1\,995)$.

3.35.22. Можна. Наведемо такий приклад. Із кожної вершини квадрата $A_1A_2A_3A_4$ зі стороною a, як із центра, проведемо коло радіусом a (рис. 3.35.6). Ті точки B_1, B_2, B_3, B_4 перетину цих кіл, які лежать всередині квадрата, разом із вершинами квадрата утворюють шукану множину (B_1 – перетин кіл (A_3, a) і (A_2, a), B_2 – перетин кіл (A_3, a) і (A_4, a), B_3 – перетин кіл (A_4, a) і (A_1, a)).

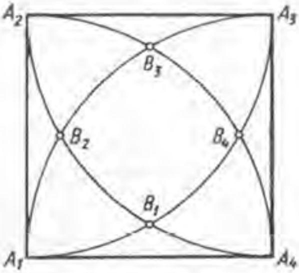


Рис. 3.35.6

Справді, із симетрії конфігурації точок випливає, що досить пересвідчитися у виконанні умови задачі лише для серединних перпендикулярів до відрізків A_1A_2, A_1A_3, A_1B_1, A_1B_4, B_1B_2, B_1B_3. Очевидно, що серединні перпендикуляри до відрізків A_1A_2, A_1A_3, B_1B_2, B_1B_3 містять відповідно точки B_2 і B_4, A_2 і A_4, A_1 і A_3, B_2 і B_4.

Трикутник $A_1A_2B_4$ є рівностороннім, тому $\angle A_1A_2B_4 = 60°$. Але тоді $\angle A_3A_2B_4 = 30°$. Аналогічно $\angle B_1A_2A_1 = 30°$, звідси $\angle B_1A_2B_4 = 30°$. Оскільки кути $A_1A_2B_1$, $B_1A_2B_4$ і $B_4A_2A_3$ – центральні, то дуги A_1B_1, B_1B_4 і A_3B_4 – рівні, а тому рівні й хорди A_1B_1, B_1B_4 і A_3B_4. Із міркувань симетрії $B_1B_2 = B_1B_4$ і $A_1B_2 = A_1B_1$. Отже, трикутник $A_1B_1B_2$ – правильний. Звідси із рівності $A_1A_2 = B_1A_2 = a$ випливає, що серединний перпендикуляр до A_1B_1 містить точки A_2 і B_2. Крім того, із рівностей $A_1B_1 = B_1B_4$ і $A_1A_2 = B_4A_2 = a$ випливає, що точки A_2 і B_1 лежать на серединному перпендикулярі до A_1B_4.

3.35.23. Виграє член журі. Оскільки $1\,995 = 498 \cdot 4 + 3$, то його стратегія може бути такою: доки учасник олімпіади бере по два сірники, самому теж брати по два сірники. Тоді перед кожним ходом учасника олімпіади в купці буде $4k+3$ сірники. Коли в купці залишиться лише три сірники, то незалежно від ходу учасника олімпіади останні сірники зможе забрати член журі. Якщо ж на якомусь ході учасник візьме один сірник, то члену журі треба ще один раз взяти два сірники, а далі вже брати по одному. Тепер перед кожним ходом учасника в купці лишатиметься парна кількість сірників і гравці матимуть право брати лише по одному сірнику. Отже, і в цьому випадку останній сірник забере член журі.

Пропонуємо проаналізувати цю гру у випадку, коли в купці було n сірників.

3.35.24. Вісім рівних плоских кутів має тетраедр, складений з чотирьох однакових рівнобедрених трикутників. Доведемо, що більше восьми однакових плоских кутів може мати лише правильний тетраедр. Справді, пронумеруємо грані і позначимо через a_i кількість цих кутів на i-й грані. Із нерівності $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 8$ випливає, що принаймні одне з чисел a_i дорівнює 3. Але тоді відповідна грань є правильним трикутником, а її кути дорівнюють по $60°$. Трикутник може мати лише 0, 1 або 3 кути по $60°$, тобто в нерівності $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 8$ кожен з доданків може дорівнювати 0, 1 або 3. Тому принаймні три з цих доданків дорівнюють 3. Але в тетраедрі, три грані якого є правильними трикутниками, всі ребра рівні і він є правильним.

3.35.25. Спочатку доведемо наступну лему.

Лема. Якщо кожне з чисел $m^k + n^k$ й $m^{k+1} + n^{k+1}$ ділиться на просте число $p \geq 3$, то кожне з чисел m і n також ділиться на p.

Доведення. Із рівності

$$(m^{k+1} + n^{k+1}) - m(m^k + n^k) = n^k(n - m)$$

випливає, що або n ділиться на p (тоді й m ділиться на p), або на p ділиться різниця $n - m$. В останньому випадку n і m при діленні на p дають однакову остачу a. Але тоді з подільності на p числа $m^k + n^k$ випливає подільність на p числа $a^k + a^k = 2a^k$. Оскільки 2 не ділиться на p, то на p має ділитися число a, тобто $a = 0$. Лему доведено.

Оскільки $1\,995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, то кожне з чисел $m^k + n^k$ і $m^{k+1} + n^{k+1}$ ділиться на прості числа 3, 5, 7 і 19. Із леми випливає, що кожне з чисел m і n також має ділитися на всі ці прості числа, тобто і на 1 995.

3.35.26. Див. розв'язання задачі 3.35.18.

3.35.27. Пофарбуємо на числовій осі точки виду $\left[n\sqrt{2}\right]$, $n = 1, 2, ..., 1\,995$, у зелений колір, а точки вигляду $\left[m\sqrt{3}\right]$, $m = 1, 2, ...$ –

у червоний. Тоді розв'язкам системи відповідають точки, пофарбовані в обидва кольори. Оскільки $\sqrt{2}<1,45$, $\sqrt{3}<1,75$, то $\left[1\,995\cdot\sqrt{2}\right]<[1\,995\cdot 1,45]=2\,892$. Тому інтервал $[1;2\,892]$ містить всі "зелені" точки. Він також містить принаймні $[2\,892/1,75]=1\,652$ "червоні" точки. Але тоді принаймні $1995+1\,652-2\,892=755$ точок з цього інтервалу будуть пофарбовані в обидва кольори.

Зауваження. Використовуючи точніші оцінки для $\sqrt{2}$ і $\sqrt{3}$, цим же методом можна довести, що система має принаймні 800 розв'язків.

3.35.28. Із рівності $f(x_1)=f(x_2)$ випливає рівність $f(f(x_1))=$ $=f(f(x_2))$, тобто $-x_1=-x_2$. Тому функція f набуває кожного свого значення лише один раз. Доведемо тепер, що f – монотонна функція. Справді, в противному випадку існували б такі числа $a<b<c$, що $f(a)<f(b)>f(c)$ (або $f(a)>f(b)<f(c)$). Але тоді з неперервності f випливає, що кожного значення на проміжку $[\max(f(a),f(c));$ $f(b)]$ функція f набуває принаймні двічі, що суперечить доведеному на початку (другий випадок розглядається аналогічно).

Якщо f – монотонно спадна, то

$$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)\Rightarrow f(f(a))<f(f(b)).$$

Якщо ж f – монотонно зростаюча, то

$$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)\Rightarrow f(f(a))<f(f(b)).$$

Отже, якби потрібна функція f існувала, то функція $f\circ f$ була б монотонно зростаючою. Але функція $g(x)=-x$ є монотонно спадною. Тому потрібної функції не існує.

3.35.29. Оскільки

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)=5,$$

то x, y і z можна розглянути як корені рівняння відносно t

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-4t^2+5t+a=0, \tag{1}$$

де $a = -xyz$. Тому задачу можна переформулювати так: знайти найменше і найбільше значення a, для яких рівняння (1) має три дійсні корені.

Без обмежень загальності можна вважати, що $x \le y \le z$. Очевидно, що змінюючи a, ми зміщуємо графік функції $y = t^3 - 4t^2 + 5t + a$ по вертикалі. Тому a набуватиме найменшого значення тоді, коли $x = y$ (похідна функції $y' = 3t^2 - 8t + 5$ дорівнює нулеві при $t = 1$ (точка максимуму) і при $t = \frac{5}{3}$ (точка мінімуму), тобто $x \le 1 \le y \le \frac{5}{3} \le z$). Із системи

$$\begin{cases} x = y < z, \\ x + y + z = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

знаходимо: $x = y = 1$, $z = 2$.

Аналогічно a набуватиме найбільшого значення тоді, коли $y = z$, тобто коли $x = \frac{2}{3}$, $y = z = \frac{5}{3}$. Отже,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{27} \le xyz \le 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

3.35.30. За властивостями відрізків дотичних (рис. 3.35.7), проведених до сфери з однієї точки, маємо:

$$AB_1 = AC_1 = AD_1, \quad BA_1 = BC_1 = BD_1,$$
$$CA_1 = CB_1 = CD_1, \quad DA_1 = DB_1 = DC_1.$$

За рівністю трьох сторін $\Delta BA_1D = \Delta BC_1D$. Тому $\angle BA_1D = \angle BC_1D = \alpha$. Аналогічно доводиться, що

$$\angle CA_1D = \angle CB_1D = \beta, \quad \angle BA_1C = \angle BD_1C = \gamma,$$
$$\angle AB_1D = \angle AC_1D = \delta, \quad \angle AB_1C = \angle AD_1C = \varepsilon,$$
$$\angle AC_1B = \angle AD_1B = \tau.$$

Записуючи суму кутів з вершинами у точках A_1, B_1, C_1, D_1, одержимо систему рівнянь

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta + \delta + \varepsilon = \alpha + \delta + \tau = \gamma + \varepsilon + \tau = 360°,$$

з якої знаходимо: $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \tau$, $\gamma = \delta$.

Прямі BA_1 і AB_1 (за умовою задачі) можуть перетинатися лише в деякій точці M ребра CD. У трикутниках DA_1M і DB_1M маємо $MA_1 = MB_1$ (як відрізки проведених з M дотичних до вписаної в тетраедр сфери), сторона MD спільна, а рівність $DA_1 = DB_1$ наведена раніше. Тому $\Delta DA_1M = \Delta DB_1M$ і $\angle DA_1M = \angle DB_1M$. Але тоді $\angle DA_1B = \angle DB_1A$ (як доповняльні кутів DA_1M і DB_1M до 180°), тобто $\alpha = \delta$. Отже, $\alpha = \delta = \varepsilon = \gamma$.

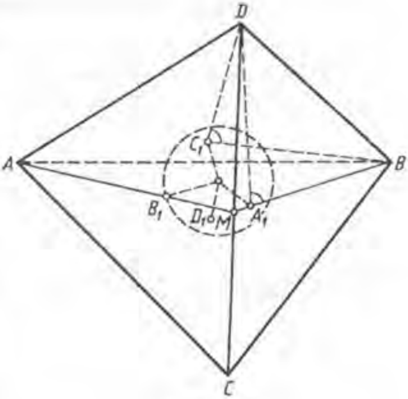


Рис. 3.35.7

Нехай N – точка перетину прямих DC_1 і AB. Рівність трикутників AC_1N і AD_1N доводиться аналогічно рівності трикутників DA_1M і DB_1M. Тому $\angle AC_1N = \angle AD_1N$. Звідси

$$\angle CD_1A + \angle AD_1N = \varepsilon + \angle AD_1N = \varepsilon + \angle AC_1N = \delta + \angle AC_1N =$$

$$= \angle DC_1A + \angle AC_1N = 180^\circ.$$

Отже, точки C, D_1 і N лежать на одній прямій. А це означає, що прямі CD_1 і DC_1 перетинаються в точці N, що і треба було довести.

Олімпіада 36
(*м. Севастополь, 1996 р.*)

3.36.1. Нехай сторони шуканого трикутника дорівнюють a, b, c, причому $a^2 = b + c$, $b^2 = a + c$ і $a \geq b$. Якщо $a > b$, то $b^2 = a + c > b + c = a^2$, що неможливо. Отже, $a = b$. Тоді за нерівністю трикутника $c < 2a$, звідки $a^2 - a = a^2 - b = c < 2a$. Отже, $a^2 < 3a$ і $a < 3$. Якщо $a = 1$, то $c = a^2 - a = 0$, що неможливо. Тому $a = b = 2$, але тоді $c = 2$. Отже, умову задачі задовольняє лише рівносторонній трикутник зі стороною 2.

3.36.2. Запишемо очевидні нерівності:

$$1\,995\cdot\frac{1}{1\,995}>\frac{1}{1\,996}+\frac{1}{1\,997}+\ldots+\frac{1}{2\cdot1\,995}>1\,995\cdot\frac{1}{2\cdot1\,995},$$

$$1\,995\cdot\frac{1}{2\cdot1\,995}>\frac{1}{2\cdot1\,995+1}+\frac{1}{2\cdot1\,995+2}+\ldots+\frac{1}{3\cdot1\,995}>1\,995\cdot\frac{1}{3\cdot1\,995},$$

$$1\,995\cdot\frac{1}{3\cdot1\,995}>\frac{1}{3\cdot1\,995+1}+\frac{1}{3\cdot1\,995+2}+\ldots+\frac{1}{4\cdot1\,995}>1\,995\cdot\frac{1}{4\cdot1\,995},$$

$$1\,995\cdot\frac{1}{4\cdot1\,995}>\frac{1}{4\cdot1\,995+1}+\frac{1}{4\cdot1\,995+2}+\ldots+\frac{1}{5\cdot1\,995}>1\,995\cdot\frac{1}{5\cdot1\,995}.$$

Якщо ці нерівності почленно додати, то одержимо

$$\frac{25}{12}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{1\,996}+\frac{1}{1\,997}+\ldots+\frac{1}{9\,975}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{77}{60}.$$

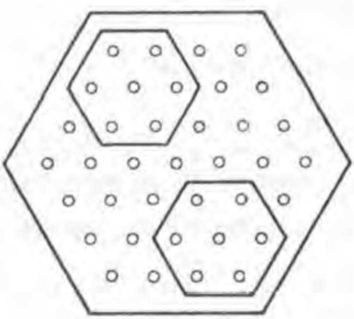


Рис. 3.36. 1

3.36.3. Шапокляк може досягти мети в обох випадках. Розглянемо рис. 3.36.1. Перед ходом Шапокляк принаймні в одному з виділених шестикутників не буде жодного зафарбованого вузла. Першим ходом Шапокляк фарбує центральний вузол такого шестикутника. Перед другим ходом Шапокляк у шестикутнику буде не більше одного червоного вузла, і Шапокляк фарбує будь-який вузол шестикутника, який не сусідить із цим червоним вузлом. Перед третім ходом Шапокляк у шестикутнику принаймні один із сусідів другого зеленого вузла буде ще непофарбованим. Пофарбувавши його, Шапокляк одержить рівносторонній трикутник із зеленими вершинами .

3.36.4. а) 499 вершин. Четвірки вершин, які утворюють квадрати, попарно не перетинаються. Тому з кожних $\frac{1\,996}{4}=499$ таких четвірок треба витерти по одній вершині.

б) 997 вершин. Чотири вершини будуть вершинами прямокутника тоді й тільки тоді, коли вони розпадаються на дві пари симетричних відносно центра 1 996-кутника вершин. Тому має залишитися не більше однієї такої пари. Отже, найменша кількість вершин, яку треба витерти, дорівнює $\frac{1\,996}{2}-1=997$.

3.36.5. $n=4,5,6$. Справді, в залежності від остачі від ділення на 5 можливі лише такі випадки: а) $n=5k$. Число $\left[\frac{n^2}{5}\right]=5k^2$ буде простим лише тоді, коли $k=1$, тобто для $n=5$.

б) $n=5k\pm1$. Число $\left[\frac{n^2}{5}\right]=k(5k\pm2)$ буде простим лише тоді, коли $k=1$, тобто для $n=4$ або $n=6$.

в) $n=5k\pm2$. Тоді $\left[\frac{n^2}{5}\right]=k(5k\pm4)$. Якщо $k\geq2$, то обидва множники k і $5k\pm4$ більші за 1 і число $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ не є простим. Якщо ж $k=1$, то $\left[\frac{(5-2)^2}{5}\right]=1$ і $\left[\frac{(5+2)^2}{5}\right]=9$, тобто знову не є простими числами.

3.36.6. Нехай O – центр даного кола (рис. 3.36.2). Оскільки $\angle PCO=\angle PDO=\angle PHO=90°$, то точки P, D, H, O, C лежать на колі γ, побудованому на діаметрі PO. Відрізки PD і PC рівні як дотичні до початкового кола, тому рівні й стягувані ними дуги кола γ. Але тоді $\angle CHP=\angle PHD$ як вписані в коло γ кути, що спираються на рівні дуги.

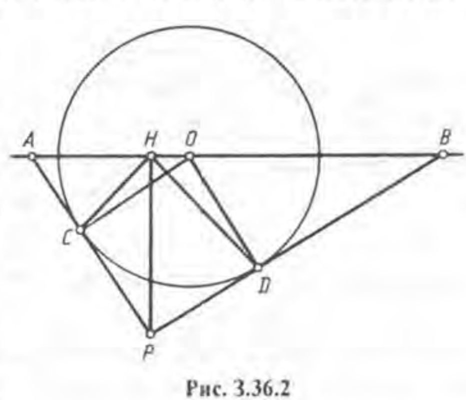


Рис. 3.36.2

3.36.7. Нехай $x\leq y\leq z$ – сторони трикутника з периметром 1 993. Оскільки з нерівності $x+y>z$ випливає нерівність $(x+1)+(y+1)>(z+1)$, то відрізки $x+1$, $y+1$, $z+1$ будуть сторонами трикутника з периметром 1 996. Навпаки, якщо $a \le b \le c$ – сторони трикутника з периметром 1 996, то відрізки $a-1$, $b-1$, $c-1$ будуть сторонами трикутника з периметром 1 993. Справді, $a-1>0$, оскільки при $a=1$ для цілих чисел b і c виконувалися б нерівності $1+b>c$ і $1+c>b$, але тоді $b=c$, що суперечить умові $1+b+c=1\,996$. Нерівність трикутника також виконується, оскільки з нерівності $a+b>c$ (a, b, c – натуральні числа) випливає нерівність $(a-1)+(b-1) \ge c-1$. Але рівність $(a-1)+(b-1)=c-1$ є неправильною, тому що $(a-1)+(b-1)+(c-1)=1\,993$ – непарне число. Отже, між трикутниками з периметром 1 993 і трикутниками з периметром 1 996 є взаємно однозначна відповідність, тобто Іван і Петро зробили однакову кількість моделей.

3.36.8. За нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним

$$a(c-1)+\frac{1}{c-1} \ge 2\sqrt{a}.$$

Тому $ac+\dfrac{c}{c-1}=a(c-1)+\dfrac{1}{c-1}+a+1 \ge 2\sqrt{a}+a+1=(\sqrt{a}+1)^2 \ge b^2$.

3.36.9. Нехай M, N, K – середини сторін AD, BC і CD, а O, P, Q – відповідно точки перетину діагоналі AC з відрізками BD, MN, NK (рис. 3.36.3). Оскільки MK – середня лінія ΔACD, то $MK \parallel AC$. З того, що P – середина відрізка MN і $PQ \parallel MK$, випливає, що PQ – середня лінія ΔMNK. Тому Q – середина сторони NK і $NQ=QK$.

Рис. 3.36.3

Оскільки KN – середня лінія ΔDBC, то $KN \parallel DB$, а тому KQ і QN – відповідно середні лінії трикутників DOC і BOC. Але тоді $DO=2KQ=2QN=OB$, тобто O – середина діагоналі BD.

3.36.10. Безліч. Для доведення досить вказати довільну нескінченну серію розв'язків. Таку серію можна побудувати різними способами, відштовхуючись, наприклад, від очевидного розв'язку $x=y=1$.

I спосіб. Якщо $x=a$, $y=b$ – розв'язок, то $x=4a^2+4a$, $y=(4a+2)b$ – також розв'язок.

II спосіб. За умови $x=a$, $y=b$ – розв'язок, то $x=3a+4b+1$, $y=2a+3b+1$ – також розв'язок.

Очевидно, що в кожній серії всі розв'язки різні.

Зауваження. Якщо дане діофантове рівняння записати у вигляді $(2x+1)^2-2(2y)^2=1$, то розв'язання задачі легко одержується із теорії рівняння Пелля.

3.36.11. Див. розв'язання задачі 3.36.5.

3.36.12. Нехай Q – друга точка перетину проведеної через точку M спільної дотичної до кіл із чотирикутником A_1MA_2P (рис. 3.36.4). Тоді $\angle A_1MA_2=\angle A_1MQ+\angle QMA_2=\angle MA_1P+\angle MA_2P=\frac{1}{2}(360°-\angle A_1PA_2)=$ $=180°-\frac{1}{2}\angle A_1PA_2$.

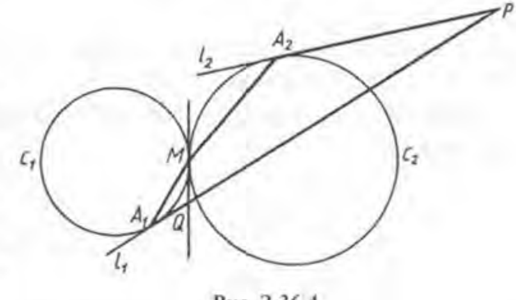


Рис. 3.36.4

Зокрема, кут A_1MA_2 тупий. Але тоді центр O описаного навколо трикутника A_1MA_2 кола і точка M лежать по різні сторони прямої A_1A_2. Тому $\angle A_1OA_2=$ $=360°-2\angle A_1MA_2=\angle A_1PA_2$.

Оскільки точки M і P також лежать по різні сторони прямої A_1A_2, а відрізок A_1A_2 із точок O і P видно під одним і тим самим кутом, то точки A_1, A_2, O і P лежать на одному колі. Отже, точка O лежить на колі, описаному навколо ΔA_1A_2P.

3.36.13. В обох випадках – ні. Справді, будемо випилювати хрести так, як зображено на рис. 3.36.5. Дошка містить 152 горизонтальні смуги завширшки 12 клітинок (такі, як нижня), 13 смуг завширшки 13 (такі, як верхня) і 153 вертикальні смуги завширшки 13 (такі, як ліва). Легко підрахувати, що на рисунку зображено 329 175 хрестів. Всі

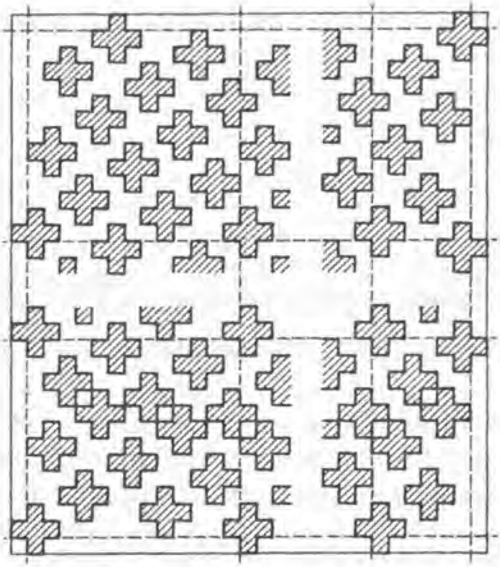


Рис. 3.36.5

хрести, які можна випиляти додатково із залишків дошки, будуть розташовані біля країв дошки. Причому частини дошки, з яких можна випиляти хрести, не перетинаються, і з кожної можна зробити лише один хрест. Тому кількість хрестів, які ще можна додатково випиляти, не залежить від способу і порядку їх випилювання. Загальна кількість хрестів, які ще можна випиляти, дорівнює $153 \cdot 2 + 1$, $153 \cdot 2 + 1$, $165 \cdot 2$, $152 + 13 \cdot 2$ відповідно знизу, зверху, ліворуч і праворуч. Отже, при зображеному способі випилювання можна одержати не більше як 329 175 + +1 122 = 330 297 хрестів.

3.36.14. За нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{(b+2c)a}{9} \geq \frac{2}{3}a^2,\ \frac{b^3}{c+2a} + \frac{(c+2a)b}{9} \geq \frac{2}{3}b^2,$$

$$\frac{c^3}{a+2b} + \frac{(a+2b)c}{9} \geq \frac{2}{3}c^2.$$

Додавши ці нерівності, одержимо

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2d} + \frac{1}{3}(ab+bc+ca) \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Звідси, враховуючи, що $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, маємо

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq$$

$$\geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{3}(ab+bc+ca) \geq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

3.36.15. З умови задачі випливає, що $\cos x \geq 0$ та

$$\sin x \geq \sqrt{\sin x+\cos x} \geq \sqrt{\sin x}.$$

Звідси $\sin x=0$ або $\sin x=1$. Підстановкою в рівняння переконуємося, що всі x, для яких $\sin x=0$, не задовольняють рівняння, а всі x, для яких $\sin x=1$, задовольняють. Отже, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in Z$.

3.36.16. З властивостей дотичних, проведених до кола з однієї точки, випливає, що досить довести, що OA буде дотичною хоча б до одного з кіл ω_1 і ω_2 (рис. 3.36.6). Припустимо, що це не так. Тоді пряма OA перетне коло ω_1 у точці $X \neq A$ та коло ω_2 у точці $Y \neq A$. За теоремою про дотичну та січну, які проведені до кола з однієї точки, маємо $OX \cdot OA=OC^2$, $OY \cdot OA=OB^2$. Оскільки $OC=OB$ як дотичні до кола ω_3, проведені з точки O, то $OX=OY$, звідки $X=Y$. Але кола ω_1 і ω_2 мають лише одну спільну точку A. Одержана суперечність доводить твердження задачі.

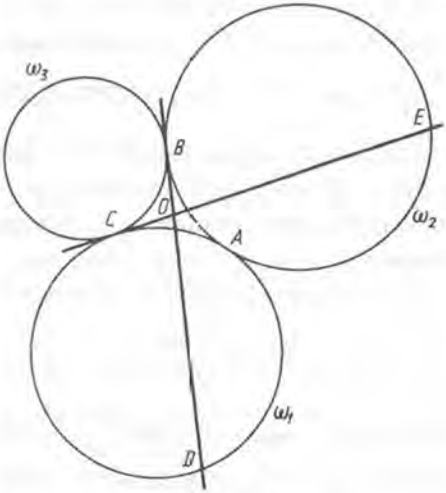


Рис. 3.36.6

3.36.17. Без обмеження загальності можна вважати, що $a<b$. Очевидно, можливі лише два випадки:

$$a<\frac{a+b}{1\,996}<b$$

або

$$\frac{a+b}{1\,996}<a<b.$$

Розглянемо перший випадок. Якщо q – знаменник відповідної прогресії, то для деяких натуральних чисел $m > n$

$$\frac{a+b}{1\,996} = aq^n, \quad b = aq^m.$$

Виключаючи з цих співвідношень q, маємо

$$(a+b)^m = 1\,996^m\, b^n a^{m-n} = 2^{2m} \cdot 499^m \cdot b^n \cdot a^{m-n}.$$

З цієї рівності і властивостей подільності випливає, що кожне відмінне від 2 і 499 просте число p має зустрічатися в розкладах чисел a і b в однакових степенях. Розділивши ліву й праву частини цієї рівності на всі такі p, одержимо рівність вигляду

$$(2^i \cdot 499^j + 2^k \cdot 499^l)^m = 2^{2m} \cdot 499^m \cdot 2^{i(m-n)} \cdot 499^{j(m-n)} \cdot 2^{kn} \cdot 499^{nl}.$$

Розділимо обидві частини останньої рівності на $2^{m \cdot \min(i,k)}$. Тоді ліворуч одержимо непарне число, а праворуч (оскільки $m > 0$) – парне. Ця суперечність доводить, що в першому випадку потрібної прогресії не існує.

Аналогічно і в другому випадку, виключаючи q із співвідношень

$$a = \frac{a+b}{1\,996} q^n, \qquad b = \frac{a+b}{1\,996} q^m, \quad n < m,$$

одержуємо рівність $1\,996^{m-n} a^m = b^n (a+b)^{m-n}$. Позначимо через d найбільший спільний дільник чисел a і b. Тоді можемо записати $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, де числа a_1 і b_1 – взаємно прості. Підставляючи ці вирази для a і b в останню рівність, одержуємо

$$1\,996^{m-n} a_1^{\,m} = b_1^{\,n} (a_1 + b_1)^{m-n}.$$

Число $a_1 + b_1$ також взаємно просте з a_1, тому права частина цієї рівності ділиться на a_1 лише у випадку $a_1 = 1$. Але легко перевіряється, що для жодного дільника b_1 числа 1 996 рівність $1\,996^{m-n} = b_1^{\,n}(1+b_1)^{m-n}$ не виконується.

3.36.18. а) Нехай відображення P зберігає відстань 1. Тоді P переводить вершини $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$ одиничного квадрата відповідно у такі точки A_1, B_1, C_1, D_1 із цілими координатами, що $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = 1$. Але тоді $A_1B_1C_1D_1$ також одиничний квадрат, і деяким рухом T площини вершини квадрата $ABCD$ можна перевести у відповідні вершини квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Далі індукцією за параметром $n = \max(|a|,|b|)$ легко довести, що для кожної точки $(a;b)$ з S її образи при відображенні P і при рухові T збігаються.

Це означає, що на множині S відображення P збігається з рухом T. Але рух площини зберігає всі відстані.

б) Ні. Легко перевірити, що відображення P множини S, визначене правилом

$$P(2m;2n) = (2m+1;2n),$$

$$P(2m+1;2n) = (2m;2n),$$

$$P(2m;2n+1) = (2m;2n+1),$$

$$P(2m+1;2n+1) = (2m+1;2n+1),$$

зберігає відстань 2. Але при відображенні точки $(0;0)$ і $(0;1)$ переходять відповідно в точки $(1;0)$ і $(0;1)$. Отже, відстань 1 не зберігається.

в) Враховуючи а), досить довести, що відображення зберігає відстань 1. Нехай для точок A і B із множини S $AB = 1$. Замінивши, в разі потреби, систему координат, можемо вважати, що це точки $A(0;0)$ і $B(1;0)$. Розглянемо ще точки $C(-2;0)$, $D(2;0)$, $E(4;0)$. Нехай A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 – їх образи при відображенні. З міркувань а) випливає, що точки A_1, C_1, D_1, E_1 лежать на одній прямій, причому $C_1A_1 = A_1D_1 = D_1E_1 = 2$. Аналогічно точки C_1, B_1 і E_1 також лежать на одній прямій і $C_1B_1 = B_1E_1 = 3$. Але тоді $A_1B_1 = 1$.

3.36.19. Для $x = y = 0$ маємо $f(0) = (f(0))^3$, звідси $f(0) = 0$ або $f(0) = \pm 1$. Для $x = -y = \sqrt[3]{\frac{t}{2}}$ маємо $f(t) = (f(0))^3 = f(0)$, тобто функція f в усіх точках набуває одне й те саме значення $f(0)$. Тому шуканими можуть бути лише три функції $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ і $f(x) \equiv -1$. Легко помітити, що всі вони задовольняють співвідношення в умові задачі.

3.36.20. Нерівність рівносильна такій:

$$\frac{1}{10}\left(\sin\frac{\pi}{20}+\sin\frac{2\pi}{20}+\ldots+\sin\frac{9\pi}{20}+\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{1}{10}+\arcsin\frac{2}{10}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\arcsin\frac{9}{10}\right)\right)<1-\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

Для доведення останньої нерівності досить розглянути графік функції $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ на відрізку $[0;1]$ (рис. 3.36.7). Тоді ліва частина нерівності дорівнює сумі площ всіх заштрихованих прямокутників, а права – площі одиничного квадрата, з якого викинули чорний квадратик.

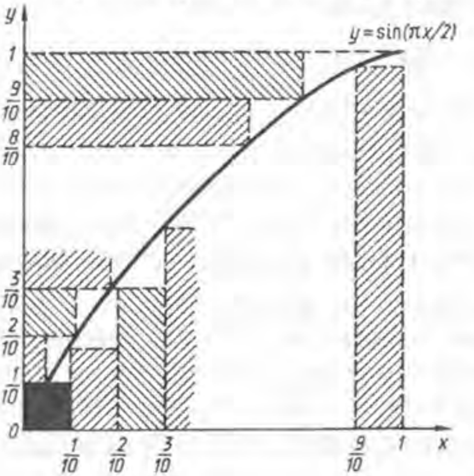


Рис. 3.36.7

3.36.21. Позначимо через P точку перетину прямих A_1D і B_1C (рис. 3.36.8), а через A_2 і B_2 – відповідно точки перетину прямої A_1B_1 з прямими AD і BC. Нехай $\angle ABO=\alpha$, $\angle OBC=\beta$, $\angle BB_1C=\gamma$. Оскільки $AB\parallel A_1B_1$, то $OB_1A_1=\alpha$. За умовою $\angle A_1B_1C=\frac{1}{2}\angle ABC$, тобто $\alpha+\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, звідси $\beta=\alpha+2\gamma$.

Оскільки OBC – зовнішній кут трикутника CBB_1, то $\angle BCB_1=\beta-\gamma=$ $=\alpha+\gamma=\angle CB_1B_2$, звідси $CB_2=B_1B_2$. З паралельності

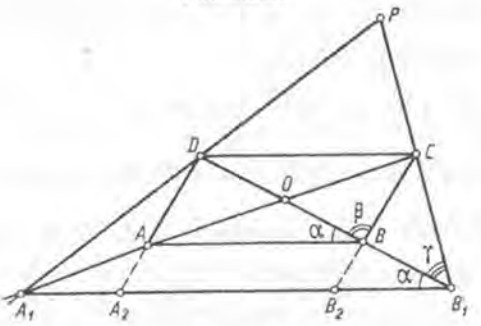


Рис. 3.36.8

прямих A_1B_1, AB і CD випливає подібність трикутників B_2BB_1 і CBD та трикутників CAD і A_1AA_2. Тому

$$\frac{B_1B_2}{CD}=\frac{BB_2}{BC}=\frac{AA_2}{AD}=\frac{A_1A_2}{CD}.$$

Звідси одержуємо $B_1B_2 = A_1A_2$. Враховуючи, що $A_2D = B_2C$, маємо $A_1A_2 = A_2D$. Отже, $\angle PA_1B_1 = \angle DA_1A_2 = \frac{1}{2}\angle DA_2B_1 = \frac{1}{2}\angle CB_2B_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - -\angle B_2CB_1 - \angle B_2B_1C) = 90^\circ - (\alpha+\gamma) = 90^\circ - \angle CB_1B_2 = 90^\circ - \angle PB_1A_1$.

Але тоді $\angle A_1PB_1 = 180^\circ - \angle PA_1B_1 - \angle PB_1A_1 = 90^\circ$.

3.36.22. Доведемо твердження задачі для довільного опуклого многогранника, в якому на кожному ребрі, на кожній грані і в самому многограннику вибрано по внутрішній точці і проведено потрібні відрізки так, як в умові задачі.

Зіставимо всім відрізкам, які сполучають внутрішню точку многогранника з внутрішніми точками граней, число $+1$. Оберемо на кожній грані напрямок обходу її ребер (за годинниковою стрілкою, якщо дивитися на грань із внутрішньої точки многогранника) і довільно напрямок на кожному ребрі многогранника. Якщо для ребра T грані S напрямок, який задається обходом ребер грані S, збігається з напрямком T, то відрізку, який з'єднує внутрішню точку грані S із внутрішньою точкою ребра T, зіставляється число $+1$ (і число -1 у протилежному випадку). Нарешті, відрізку, що з'єднує внутрішню точку ребра з його початком, зіставляємо $+1$, а відрізку, що з'єднує її з кінцем ребра, – число -1. Виконання вимог умови задачі тепер легко перевіряється.

3.36.23. Переходячи до половинних кутів, маємо

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)^2=\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{y}{2}-\sin^2\frac{y}{2}\right).$$

Для x, y з проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\neq 0,\quad \cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\neq 0.$$

Тому після спрощення одержуємо

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\right),$$

звідси

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$$

і $x=y$.

3.36.24. Нехай

$$1\,996m+1=a^2, \quad 1\,996n+1=b^2, \qquad mn+1=c^2. \tag{1}$$

Оскільки

$$m=\frac{a^2-1}{1\,996},$$

то числа $a-1$ і $a+1$ парні, і одне з них ділиться на 499. Звідси $a\pm1=2\cdot499p$ і

$$m=p\left(499p\pm1\right). \tag{2}$$

Аналогічно

$$n=q\left(499q\pm1\right). \tag{3}$$

Тепер остання з рівностей (1) набуває вигляду

$$p\left(499p\pm1\right)q\left(499q\pm1\right)=\left(c-1\right)\left(c+1\right).$$

Множники лівої частини згрупуємо по два таким чином:

$$p(499q\pm1)=499pq\pm p,$$

$$q(499p\pm1)=499pq\pm q.$$

Отже, якщо в рівностях (2) і (3) вибрати однакові знаки, а p і q задовольняють умову $|p-q|=2$, то m і n задовольняють умову задачі. При цьому

$$c=499pq\pm\frac{p+q}{2}.$$

Очевидно, що таких p і q існує безліч.

3.36.25. а) Якщо $a_1 > 1$, то послідовність (a_n) монотонно зростає. Справді, в цьому випадку $a_1 > a_0$, а для $k \geq 1$ маємо

$$a_{k+1} = 2a_1 a_k - a_{k-1} > 2a_k - a_{k-1} = a_k + (a_k - a_{k-1}) > a_k .$$

Якщо $a_1 < -1$, то послідовність $b_n = (-1)^n a_n$ також задовольняє рекурентне співвідношення з умови задачі

$$b_{k+1} = (-1)^{k+1} a_{k+1} = (-1)^{k+1}(2a_1 a_k - a_{k-1}) =$$
$$= 2(-1)a_1(-1)^k a_k - (-1)^{k-1} a_{k-1} = 2b_1 b_k - b_{k-1},$$

і, оскільки $b_1 > 1$, послідовність b_n монотонно зростає. Але $b_n = |a_n|$. Отже, в обох випадках $|a_{499}| > 1$. Тому з $a_{499} = 0$ випливає $|a_1| \leq 1$.

б) Оскільки $|a_1| \leq 1$, існує таке α, що $a_1 = \cos\alpha$. Тоді за індукцією легко довести, що $a_n = \cos n\alpha$. Справді, для $n = 0$ і $n = 1$ це правильно. Далі виконуємо просту перевірку:

$$a_{n+1} = 2a_1 a_n - a_{n-1} = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha =$$

$$= \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha = \cos(n+1)\alpha .$$

За умовою $a_{499} = \cos 499\alpha = 0$. Тому

$$a_{1\,996} = \cos 1\,996\alpha = 2\cos^2 998\alpha - 1 = 2(2\cos^2 499\alpha - 1)^2 - 1 = 1 .$$

3.36.26. Оскільки $AP = DQ$, то $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{DQ}{QA}$ (рис. 3.36.9). Розглянемо ортогональну проекцію куба на площину, перпендикулярну діагоналі A_1C (рис. 3.36.10). Тоді кут $Q'C'P'$ буде шуканим.

Ортогональна проекція зберігає відношення відрізків прямої, тому $\dfrac{A'P'}{P'B'} = \dfrac{D'Q'}{Q'A'}$ і $Q'A' = P'B'$. Але тоді $\Delta Q'C'A' = \Delta P'C'B'$ і $\angle Q'C'A' = \angle P'C'B'$, звідси $\angle Q'C'P = \angle A'C'B' - \angle P'C'B' + \angle Q'C'A' = 60° - \angle P'C'B' + \angle P'C'B' = 60°$.

Зауваження. Цю задачу нескладно розв'язати й методом координат.

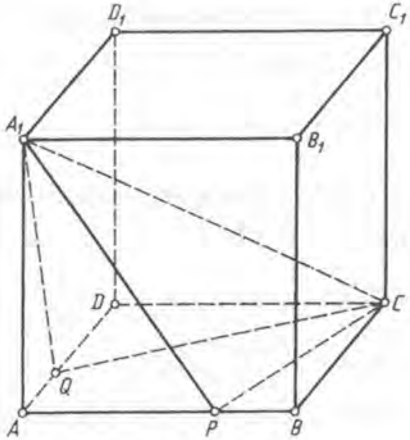


Рис. 3.36.9

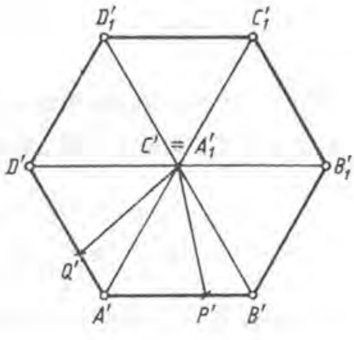


Рис. 3.36.10

3.36.27. Для $x \geq \frac{\pi}{2}$ нерівність очевидна. Якщо x належить проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то, використовуючи послідовно нерівності $\operatorname{tg} x > x$ і $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, які виконуються на цьому проміжку, маємо

$$\frac{\sin x}{x} + x^2 > \cos x + x^2 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} + x^2 > 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 > 1.$$

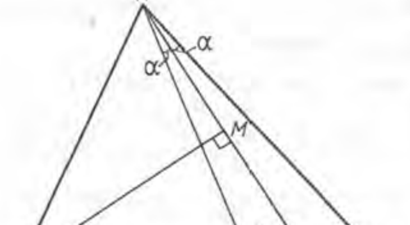


Рис. 3.36.11

3.36.28. Позначимо $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (рис.3.36.11). Тоді $\angle ADN = \alpha + \beta$ як зовнішній кут трикутника ABD. Трикутник ADN рівнобедрений, тому $\angle NAC = \beta$. За рівністю кутів трикутники NAC і NAB подібні. Тому $\frac{NC}{NA} = \frac{NA}{NB}$, звідси $NA^2 = NC \cdot NB$. Отже, NA дорівнює довжині дотичної, проведеної з точки N до кола, описаного навколо трикутника ABC. Оскільки точка A лежить на цьому колі, то NA – дотична.

3.36.29. а) Припустимо, що функція f періодична з періодом $T>0$. Тоді для довільного цілого числа k

$$4kT((kT)^2-1)=(kT-1)f(kT+1)-(kT+1)f(kT-1)=$$

$$=(kT-1)f(1)-(kT+1)f(-1)=kT(f(1)-f(-1))-(f(1)+f(-1)).$$

Останнє означає, що кожне ціле число k є коренем кубічного рівняння

$$4T^3x^3-T(4+f(1)-f(-1))x+(f(1)-f(-1))=0,$$

що, очевидно, неможливо.

б) Якщо f – многочлен, то з того, що в правій частині співвідношення стоїть многочлен степеня 3, випливає, що степінь f має бути не менший за 3. Підставляючи в співвідношення замість $f(x)$ многочлен x^3+ax^2+bx+c і прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x зліва і справа, після очевидних викладок маємо $a=c=0$, b – довільне. Отже, кожний многочлен виду $f(x)=x^3+bx$ задовольняє умову.

в) При $x\neq\pm1$ співвідношення з умови задачі можна переписати таким чином:

$$\frac{f(x+1)}{x+1}-\frac{f(x-1)}{x-1}=4x=(x+1)^2-(x-1)^2,$$

звідси

$$\frac{f(x+1)}{x+1}-(x+1)^2=\frac{f(x-1)}{x-1}-(x-1)^2.$$

Тоді для функції $g(x)=f(x)/x-x^2$ маємо $g(x+1)=g(x-1)$, тобто g періодична з періодом 2 (за винятком, можливо, точок $x=0$, ±2, ±4,...). Але тоді (можливо, за винятком тих самих точок) має виконуватися рівність $f(x)=x^3+xg(x)$.

3.36.30. Якщо $2n$-цифровому числу $a=\overline{a_1a_2...a_{2n}}$ зіставити у відповідність n-цифрове число $b=\overline{b_1b_2...b_n}$, k-та цифра b_k якого визначається парою цифр $\overline{a_{2k-1}a_{2k}}$ числа a за правилом $11\mapsto 1$, $22\mapsto 2$, $21\mapsto 3$, $12\mapsto 4$, то це відображення буде взаємнооднозначною відповідністю між числами першого виду і числами другого виду. Справді, в парах цифр $\overline{a_{2k-1}a_{2k}}$ числа a, які відповідають цифрам 3 і 4 числа b, цифр 1 і 2 порівну. Але цифр 1 і 2 у числі a порівну, тому має залишитися однакова кількість пар вигляду 11 і 22. Тому кількість цифр 1 і 2 в числі b буде однаковою. Отже, побудоване відображення справді зіставляє кожному числу першого виду число другого виду. Очевидно, різним числам зіставляються різні числа. Крім того, за кожним числом b другого виду число a легко відновлюється, і воно буде числом першого виду.

Олімпіада 37
(*м. Одеса, 1997 р.*)

3.37.1. Оскільки $4^{256}>9\,377$, то виконуються такі нерівності:

$$5^{5^{5^5}}=5^{5^{3\,125}}<5^{8^{3\,125}}=5^{2^{9\,375}}<16^{2^{9\,375}}=2^{2^{9\,377}}<4^{4^{4^{256}}}=4^{4^{4^{4^4}}}.$$

3.37.2. При $n=1$ переможцем буде Петрик. Доведемо, що при $n>1$ перемогу собі здатний забезпечити Миколка. Дійсно, за умовою Петрик може брати тільки непарну кількість цукерок, а Миколка, роблячи ходи з парними номерами, легко досягає того, щоб після його ходів на столі завжди залишалася парна кількість цукерок. Отже, цукерки можуть скінчитися тільки після ходу Миколки.

3.37.3. Нехай точка P належить відрізку BQ, O і O_1 – відповідно центри кіл, які описано навколо трикутників ABC і APQ. Нехай точки B_1, P_1, Q_1, C_1 є серединами відрізків відповідно AB, AP, AQ, AC. Тоді, як неважко переконатися, підраховуючи кути, точка O лежить всередині трапеції BB_1C_1C, а точка O_1 – всередині трикутника B_1C_1O. Звідси й випливає твердження задачі.

3.37.4. Потрібно за допомогою циркуля та лінійки побудувати бісектрису вертикального кута.

3.37.5. Покажемо, як той, хто починає гру, може забезпечити собі перемогу. Число 4 він поставить у верхній кружечок, а потім на кожен хід числом X другого гравця відповідатиме ходом числом $Y = 8 - X$ у кружечок, котрий єдиний залишився вільним на лінії, що сполучає верхній кружечок з кружечком, в який щойно поставили число X.

3.37.6. Помітимо, що $2^n \equiv 2^{n+3} \pmod 7$, $n^2 \equiv (n+7)^2 \pmod 7$. Це означає, що остача при діленні на 7 числа $2^n - n^2$ залежить тільки від остачі при діленні числа n на 21. Безпосередня перевірка показує, що умову задачі задовольняють всі натуральні числа n вигляду $n = 21m + r$, де m – довільне ціле невід'ємне число, а r – довільне число з множини $\{2; 4; 5; 6; 10; 15\}$.

3.37.7. Гравець, який починає гру, має спочатку взяти яблуко масою 250 г, а потім – масою 600 г, якщо його не взяв другий, і масою 300 г, якщо другий узяв яблуко масою 600 г, причому у такому випадку перший гравець зможе взяти й яблуко масою 400 г. Ця стратегія забезпечуватиме першому гравцеві можливість з'їсти принаймні 850 г яблук. Розгляд всіх інших варіантів показує, що більшої кількості грамів перший гравець собі гарантувати не може.

3.37.8. Вихідне співвідношення можна записати у вигляді $(2^x - 3^x)^2 + (2^x - 1)^2 + (3^x - 1)^2 = 0$. Отже, воно виконується тільки при $x = 0$.

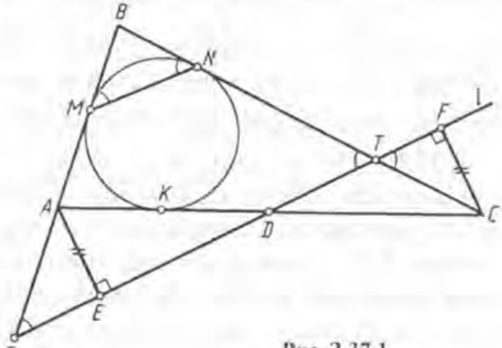


Рис. 3.37.1

3.37.9. Нехай точки E і F – відповідно ортогональні проекції на пряму l точок A і C (рис. 3.37.1). Тоді $\angle ASE = \angle BMN = \angle BNM = \angle BTE = \angle FTC$ і, оскільки $AD = DC$, то $AE = CF$ та $\Delta ASE = \Delta CTF$. Звідси випливає, що $TC = AS$. Зауважимо, що $TC = AS = \frac{1}{2}|AB - BC|$. Оскільки $AK = \frac{AB + AC - BC}{2}$, то $KD = |AD - AK| = \left|\frac{AC}{2} - \frac{AB + AC - BC}{2}\right| = \frac{1}{2}|AB - BC|$.

3.37.10. Доведемо методом математичної індукції, що для довільного натурального числа n існує таке натуральне число a, що кожне число у послідовності $a, 2a, ..., na$ є степенем деякого натурального числа з більшим за одиницю натуральним показником. Для $n=1$ це твердження є очевидним. Припустимо, що дане твердження виконується для $n=k$, тобто для певного натурального числа a маємо: $m \cdot a = b_m^{s_m}$ ($b_m \in N, s_m \in N \setminus \{1\}$), $m = \overline{1, k}$. Нехай $L = \left(\left(k+1\right)a\right)^P$, де $P = \text{НСК}(s_1; ...; s_k)$. Тоді, очевидно, кожне число в послідовності $1 \cdot aL, 2 \cdot aL, ..., k \cdot aL, (k+1) \cdot aL$ є степенем деякого натурального числа з більшим за одиницю натуральним показником, що і завершує доведення. Аналогічно доводиться, що для кожного натурального числа n існує зростаюча арифметична прогресія довжини n, кожний член якої є степенем деякого натурального числа з більшим за одиницю натуральним показником.

3.37.11. Нехай $19m_1 + 97n_1 = 19m_2 + 97n_2$ $(m_1 > m_2)$. Тоді $19(m_1 - m_2) = 97(n_2 - n_1)$. Зауважимо, що числа 19 та 97 є простими, а тому $(m_1 - m_2) \vdots 97$ і $m_1 \geq 98$. Звідси отримуємо, що $19m_1 + 97n_1 \geq 19 \cdot 98 + 97 = 1\,959$. Залишається переконатися, що число 1 959 задовольняє умову задачі: $1\,959 = 19 \cdot 98 + 97 \cdot 1 = 19 \cdot 1 + 97 \cdot 20$.

3.37.12. Пронумеруємо всі рядки та всі стовпчики натуральними числами (починаючи від одиниці) у "звичайний" спосіб – зліва направо та знизу вверх. Можемо вважати, що ліва нижня кутова клітинка є чорною. Обчислимо суму всіх чисел, які розташовані в рядках з парними номерами, і додамо до такої суми суму всіх чисел, які розташовані в стовпчиках з непарними номерами. Отримаємо, згідно з умовою, парне число. Кожна з білих клітинок враховуватиметься парну кількість разів (нуль або два), а кожна з чорних клітинок – тільки один раз. Звідси й отримуємо твердження задачі.

3.37.13. Потрібна нерівність випливає з очевидних оцінок:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+2}}} = 2,$$

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+3}}} = 3.$$

3.37.14. Із умови задачі випливає, що $\angle A_1C_1B_1 = 180° - \angle ACB$. Отже, за теоремою косинусів $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ACB$, $A_1B_1^{\,2} = a^2 + b^2 + 2ab\cos\angle ACB$. Звідси випливає, що $AB^2 + A_1B_1^{\,2} = 2\left(a^2 + b^2\right)$. Скористаємося нерівністю Коші–Буняковського: $a \cdot AB + b \cdot A_1B_1 \le \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} = \sqrt{2}(a^2+b^2)$.

3.37.15. При $x > 0$ виконується нерівність $\frac{x}{x^2+9} \le \frac{1}{6}$, а при довільному дійсному значенні x маємо $x^2 - 6x + 21 \ge 12$, $\cos 2\pi x \le 1$. Таким чином, $f(x) \le \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 1 = \frac{5}{4}$. Оскільки $f(3) = \frac{5}{4}$, то найбільшим значенням функції f на зазначеному проміжку і буде число $\frac{5}{4}$.

3.37.16. Доведемо, що шукана кількість точок перетину дорівнює $3 \cdot 1996^2$. Для цього покажемо, що серед проведених відрізків немає трійки чевіан. Припустимо супротивне і вважатимемо, що у даному трикутнику ABC $AB = BC = AC = 1997$, а відрізки AM, BN, CK $\left(BM = m,\ CN = n,\ AK = k;\ m, n, k \in \{1; 2; \ldots; 1996\}\right)$ мають спільну точку, яка розташована всередині трикутника ABC. Тоді, згідно з теоремою Чеви, $\frac{k}{1997-k} \cdot \frac{m}{1997-m} \cdot \frac{n}{1997-n} = 1$. Звідси отримуємо, що $2mnk \,\vdots\, 1997$, що є неможливим, оскільки число 1 997 просте, а натуральні числа m, n, k менші за 1 997.

3.37.17. Припустимо, що послідовність, яка розглядається, є обмеженою. Оскільки всі члени послідовності є цілими числами, то ми можемо вибрати її максимальний член, і нехай $k = \min\{m \in N \mid a_n \le a_m,\ \forall n \in N\}$ $(k > 3)$, $a_{k-2} = a$, $a_{k-1} = b$, $a_k = c$. При цьому, очевидно, $c > a$. Розглянемо такі послідовні члени даної послідовності: a, b, c, $-a-b$, $-b-c$, $a+b-c$, $a+2b+c$, $2c-a$. Проте нерівність $2c - a \le c$ виконуватися не може. Отримали суперечність.

3.37.18. При розв'язанні буде використано той факт, що в правильному п'ятикутнику кожна діагональ паралельна відповідній стороні (доведіть це самостійно). Оскільки $KL = BD$, $KL \parallel AE \parallel BD$, то $BLKD$ – паралелограм і $DK \parallel BL$. Нехай точки G,T,Q,W – відповідно середини відрізків AE,CD,DE,EK (рис. 3.37.2). Достатньо довести, що $(GTW) \perp (TQW)$. Помітимо, що трикутник AKD правильний. А тому точка Q рівновіддалена від вершин трикутника GTW та її ортогональна проекція на площину цього трикутника збігатиметься з центром описаного навколо нього кола. Отже, згідно з ознакою перпендикулярності площин, твердження задачі буде встановлено, якщо покажемо, що $\angle WGT = 90°$. Дійсно, точки E і D рівновіддалені від кінців відрізка AK, а тому ці точки належать до серединної площини цього відрізка. Отже, $ED \perp AK$ і $TG \perp GW$, що і завершує доведення.

3.37.19. Див. розв'язання задачі 3.37.11.

3.37.20. Наслідком даної системи є рівність $\left(x_1^3 - 1\right)\left(x_1 - 1\right) + \ldots +$ $+\left(x_{1\,997}^3 - 1\right)\left(x_{1\,997} - 1\right) = 0$, тобто $\left(x_1 - 1\right)^2\left(x_1^2 + x_1 + 1\right) + \ldots + \left(x_{1\,997} - 1\right)^2 \times$ $\times\left(x_{1\,997}^2 + x_{1\,997} + 1\right) = 0$. Оскільки $u^2 + u + 1 > 0$ при всіх u, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1\,997} = 1$. Перевірка показує, що при цьому виконуються обидві рівності системи.

3.37.21. Для розв'язання задачі досить довести, що трикутники QND і PND рівновеликі, тобто $QP \parallel ND$. А це випливає з того, що $\frac{NQ}{QB} = \frac{AN}{MB} = \frac{AN}{MC} = \frac{NP}{PM}$ (рис. 3.37.3).

3.37.22. Розглянемо таку послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1$, $a_n = f(a_{n-1})$, $n \geq 2$. Нам потрібно знайти всі натуральні k, для яких $a_{k+1} = 1\,997$. Нехай $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність так званих "трикутних" чисел, тобто $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 0$. Для натурального числа n візьмемо найбільше "трикутне" число T_p, для якого виконується нерівність $T_p < n$. Тобто подамо n у вигляді $n = T_p + q$, $1 \leq q \leq p+1$, – таке подання для числа n єдине. Нескладно довести, що число a_n виражається через щойно визначені числа p і q таким чином: $a_n = (2q-1) \cdot 2^{p+1-q}$.

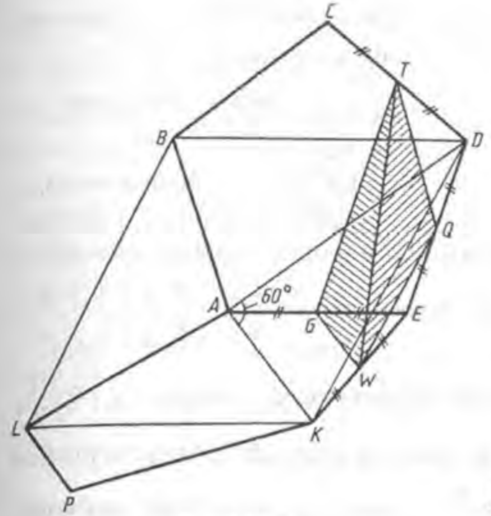


Рис. 3.37.2

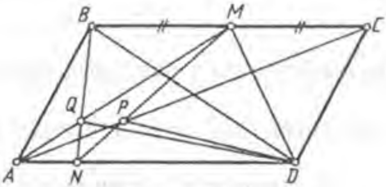


Рис. 3.37.3

Для цього скористаємося методом математичної індукції по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що воно виконується для $n=m$ і доведемо його для $n=m+1$. Подамо число m у вигляді $m=T_p+q$. Нехай $a_m=(2q-1)\cdot 2^{p+1-q}$. Розглянемо два випадки: $q=p+1; q<p+1$. У першому випадку $m+1=T_{p+1}+1$, $a_{m+1}=f(a_m)=$ $=f(2q-1)=2^q=2^{p+1}=(2\cdot 1-1)\cdot 2^{(p+1)+1-1}$. Для другого випадку $m+1=T_p+(q+1)$, $a_{m+1}=f(a_m)=f\left(2\cdot\dfrac{a_m}{2}\right)=(2q-1)\cdot 2^{p-q}+\dfrac{2\cdot(2q-1)\cdot 2^{p-q}}{2q-1}=$ $=(2q+1)\cdot 2^{p-q}=(2(q+1)-1)\cdot 2^{p+1-(q+1)}$. Отриманий вираз для a_n свідчить, що $a_{k+1}=1997$ тоді і тільки тоді, коли $k+1=\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$ і $2p+1=1997$. Звідси знаходимо, що $k=499\,499$.

3.37.23. Нехай $AK=x, BD=y$ (рис. 3.37.4). Тоді за теоремою синусів $\dfrac{KD}{\sin\angle KBD}=\dfrac{y}{\sin\angle BKD}$. З урахуванням того, що $\sin\angle BKD=$ $=\sin\angle BKA=\dfrac{1}{x}$, маємо $y=\dfrac{2}{x}$. Використаємо теорему косинусів для

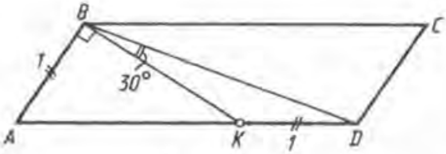


Рис. 3.37.4

трикутника ABD і одержимо співвідношення $(1+x)^2 = 1 + y + y^2$. Звідси знаходимо, що $x = \sqrt[3]{2}$ і $AD = 1 + \sqrt[3]{2}$.

3.37.24. Виконуючи нескладні тригонометричні перетворення, переконуємося в еквівалентності вихідної нерівності та нерівності $\cos^2(x-y) > \frac{3}{4}$. Розглянемо проміжки $\left(0;\frac{\pi}{6}\right]$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$, $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. Принаймні два з чотирьох попарно різних чисел із інтервалу $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ потрапляють до одного з трьох зазначених проміжків. Модуль різниці цих двох чисел x, y менший за $\frac{\pi}{6}$, і, внаслідок цього, для них виконується нерівність $\cos^2(x-y) > \frac{3}{4}$.

3.37.25. Оточимо кожну з даних точок кулею радіусом $\frac{m}{2}$ (з центром у точці, що розглядається). Жодні дві з цих куль не матимуть спільних внутрішніх точок. Припустимо, що $M \le 9m$. Тоді всі кулі можна розташувати всередині деякого куба з ребром $l = 9m + 2\cdot\frac{m}{2} = 10m$. Проте такий куб містить не більше за 1 936 точок, оскільки
$$\frac{(10m)^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{m}{2}\right)^3} < 1936.$$

3.37.26. Доведемо, що рівняння $4(ax^3+bx^2+cx+d)(3ax+b) = (3ax^2+2bx+c)^2$ має два різних дійсних корені. Нехай $u<v<w$ – корені многочлена $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Тоді $P(x)=a(x-u)\times(x-v)(x-w)$ $(a\ne 0)$. Помітимо, що $4(ax^3+bx^2+cx+d)(3ax+b) - (3ax^2+2bx+c)^2 = 2P(x)\cdot P''(x) - \left(P'(x)\right)^2$. Отже, потрібно показати,

що многочлен $Q(x)=2P(x)\cdot P''(x)-\left(P'(x)\right)^2$ має два різних корені. Оскільки $Q'(x)=2P(x)\cdot P'''(x)=12a^2(x-u)(x-v)(x-w)$, то можемо навести таблицю, що характеризує функцію Q:

x	$(-\infty;u)$	u	$(u;v)$	v	$(v;w)$	w	$(w;+\infty)$
Q'	–	0	+	0	–	0	+
Q	↓	min	↑	max	↓	min	↑

Залишається зауважити, що $Q(u)=-\left(P'(u)\right)^2<0$, $Q(v)=$ $=-\left(P'(v)\right)^2<0$, $Q(w)=-\left(P'(w)\right)^2<0$ (оскільки u,v,w – прості корені многочлена P) та $\lim\limits_{x\to-\infty}Q(x)=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=+\infty$. Це означатиме, що многочлен Q має тільки два дійсних корені: один на інтервалі $(-\infty;u)$, другий на інтервалі $(w;+\infty)$.

3.37.27. Запишемо вихідне рівняння в рівносильному вигляді: $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1$. Число $x=2$ є єдиним коренем такого рівняння, оскільки кожен доданок у лівій частині рівняння є строго спадною показниковою функцією.

3.37.28. Доведемо, що єдиною функцією, що задовольняє умову задачі, є функція $f(x)=x,\ x\in Q_+$. Очевидно, що $f(1)=1$. До того ж, методом математичної індукції легко встановлюється, що $f(n)=n$, $n\in N$, та $f(x+n)=f(x)+n$, $n\in N$, $x\in Q_+$. Далі, підставляючи $x=q+\frac{p}{q}$ $(p,q\in N)$ у рівність $f(x^2)=(f(x))^2$, отримуємо $f\left(q^2+2p+r^2\right)=\left(f(q+r)\right)^2$, $r=\frac{p}{q}$. Останнє співвідношення можемо записати таким чином: $q^2+2p+f(r^2)=q^2+2qf(r)+\left(f(r)\right)^2$. Звідси знаходимо, що $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$ для довільних $p,q\in N$. Перевірка є очевидною.

3.37.29. Набір тридцяти чотирьох цілих чисел, який складається з сімнадцяти нулів та сімнадцяти одиниць, свідчить, що шукане число n більше за 34. Покажемо, що $n=35$ задовольняє умову задачі, тобто серед будь-яких тридцяти п'яти цілих чисел можна вибрати вісімнадцять чисел таким чином, щоб їх сума ділилася на 18. Обґрунтуємо це, використовуючи цікаву форму математичної індукції – "мультиплікативну" індукцію. Позначимо через P_n таке твердження: серед будь-яких $2n-1$ цілих чисел можна вибрати n чисел таким чином, щоб їх сума ділилася на n (тобто, щоб їх середнє арифметичне було цілим числом). Доведемо, що якщо справджуються твердження P_k та P_m, то виконується і твердження P_{km}. Нехай дано набір $2km-1$ цілих чисел. Послідовно виберемо, відповідно до припущення P_m, $2k-1$ m-числових груп, у кожній з яких середнє арифметичне є цілим числом (при цьому залишається ще $m-1$ число). Розглянемо $2k-1$ отриманих середніх арифметичних. Серед них, за припущенням P_k, можна вибрати k чисел, сума яких ділиться на k. Кожному з цих k чисел відповідатимуть по m чисел вихідного набору, сума яких ділиться на m. Тоді, очевидно, сума отриманих km чисел ділиться на km. Для розв'язання задачі потрібно переконатися в тому, що вірним є твердження P_{18}. Але це випливає з того, що $18=2\cdot3\cdot3$, а твердження P_2 та P_3 (зробіть перевірку самостійно) є вірними. До речі, твердження P_n виконується для довільного натурального числа n. Для цього достатньо дане твердження довести для простих n (див. журнал "Квант", 1971 р., № 7, 8, розв'язання задачі М45).

3.37.30. Скористаємося векторним методом. Будемо називати вектор $\overline{XY}$ проекцією вектора $\overline{AB}$ на пряму l, якщо точки X і Y є ортогональними проекціями на дану пряму точок відповідно A і B (у такій ситуації писатимемо $\overline{XY}=\text{Пр}_l\,\overline{AB}$). Нескладно довести (зробіть самостійно), що мають місце такі властивості: 1) для будь-яких дійсних чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ та векторів $\overline{u_1},\dots,\overline{u_n}$ виконується рівність $\text{Пр}_l\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{u_k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\,\text{Пр}_l\overline{u_k}$; 2) якщо для трьох некомпланарних прямих k, l, m $\text{Пр}_k\,\overline{u}=\text{Пр}_k\,\overline{v}$, $\text{Пр}_l\,\overline{u}=\text{Пр}_l\,\overline{v}$, $\text{Пр}_m\,\overline{u}=\text{Пр}_m\,\overline{v}$, то $\overline{u}=\overline{v}$.

Нехай O_A, O_B, O_C, O_D – відповідно центри сфер, які описано навколо тетраедрів A_1AKN, B_1BKL, C_1CLM, D_1DMN, $\bar{u}=\overline{O_AO_D}$, $\bar{v}=\overline{O_BO_C}$. Розглянемо три некомпланарні прямі $k=AA_1$, $l=AB$, $m=AD$. Тоді $\text{Пр}_k\,\bar{u}=\text{Пр}_k(\overline{O_AA}+\overline{AD}+\overline{DO_D})=\dfrac{1}{2}\overline{A_1A}+\text{Пр}_k\,\overline{AD}+\dfrac{1}{2}\overline{DD_1}=\text{Пр}_k\,\overline{AD}.$ Аналогічно $\text{Пр}_k\,\bar{v}=\text{Пр}_k\,\overline{BC}$. Отже, $\text{Пр}_k\,\bar{u}=\text{Пр}_k\,\bar{v}$. Далі $\text{Пр}_l\,\bar{u}-\text{Пр}_l\,\bar{v}=$ $=\text{Пр}_l(\bar{u}-\bar{v})=\text{Пр}_l(\overline{O_AO_D}-(\overline{O_BO_A}+\overline{O_AO_D}+\overline{O_DO_C}))=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})=\bar{0}$,

$\text{Пр}_m\,\bar{u}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\text{Пр}_m\,\bar{v}$. Таким чином, ми довели, що $\overline{O_AO_D}=$ $=\overline{O_BO_C}$, чим і встановлюється твердження задачі.

Олімпіада 38
(*м. Миколаїв, 1998 р.*)

3.38.1. Оскільки $1998=2\cdot3\cdot3\cdot37$, то перебором нескладно встановити, що татові 37 років, матері – 27, одній дитині 2 роки, а вік кожного з двох інших дітей – по одному року.

3.38.2. Розставимо числа 1, 2, 3 у даних шестикутниках так, як показано на рис. 3.38.1. При цьому шестикутники, котрі містять однакові числа, не матимуть жодної спільної вершини. Залишається зауважити, що серед 1 998 позначених шестикутників принаймні в третині записане одне і те саме число.

3.38.3. Пофарбуємо клітинки дошки в два кольори так, як показано на рис. 3.38.2. Клітинки, які пофарбовані чорним кольором є виграш-

Рис. 3.38.1

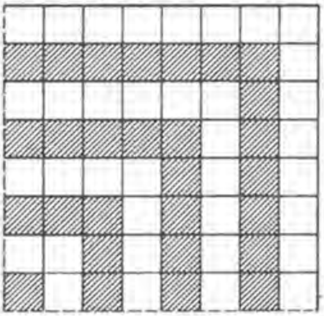


Рис. 3.38.2

ними: гравець, який робить хід із такої клітинки, може, як легко переконатися, забезпечити собі перемогу. При парних n перемогу може забезпечити собі гравець, який починає, оскільки ліва нижня кутова клітинка пофарбована чорним кольором. При непарних n навпаки – перемогу може забезпечити собі його суперник.

3.38.4. Оскільки $5^{n+4} \equiv 5^n (\bmod 10^4)$ при $n \geq 4$, то нескладними обчисленнями одержимо $1997 \cdot 5^{1998} \equiv 1997 \cdot 5625 \equiv 3125 (\bmod 10^4)$.

3.38.5. Проведемо аналіз: якщо точка O є серединою відрізка AB, то відрізок ON – середня лінія трикутника ABC ($ON \parallel AC$), точка M є точкою перетину прямої l з побудованим на відрізку AB як на діаметрі колом, оскільки $\angle AMB = 90°$. Звідси і випливає шукана побудова. Задача може мати один або два розв'язки, а може взагалі їх не мати.

3.38.6. Розглянемо 24 рядка таблиці, які мають номери 1, 6, 11, ..., 111, 116. Заповнимо ці рядки різними переставленнями елементів набору (1, 2, 3, 4, 5), в яких на першому місці стоятиме одиниця (кількість таких переставлень становить 24). Рядок з номером $5k+1+i$ $(0 \leq k \leq 23, 1 \leq i \leq 4)$ заповнюємо циклічним зсувом набору, який розташовано у рядку з номером $5k+1$, – на i елементів ліворуч. Розіб'ємо таблицю на 24 квадратних таблиці розмірами 5×5 і складемо з них (не повертаючи їх) горизонтально таблицю розмірами 120×5 (порядок викладення цих таблиць розмірами 5×5 обирається довільно). Залишається помітити, що в будь-якій з отриманих таблиць розмірами 5×5 стовпчик з номером j, прочитаний зверху вниз, збігатиметься з її рядком з номером j, який читається зліва направо (всюди в розв'язанні вважається, що рядки пронумеровано зверху вниз, а стовпчики – зліва направо).

3.38.7. Прикладом трикутника з потрібними властивостями є трикутник ABC, в якому $A(0;0)$, $B(18;0)$, $C(0;24)$.

3.38.8. Проведемо хорду $AE \parallel BD$ $(AE = BD)$ (рис. 3.38.3). Доведемо, що трикутник ACE є шуканим. Дійсно, якщо F – точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, то

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle CFD = \frac{1}{2} AC \cdot AE \cdot \sin \angle CAE = S(ACE).$$

3.38.9. За умовою $abc = 1$. Тоді, використовуючи нерівність Коші, отримаємо

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ac}{1+c}=\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1+c}{c(1+a)}\cdot\frac{1+a}{a(1+b)}\cdot\frac{1+b}{b(1+c)}}=3.$$

3.38.10. Оскільки $x, y \geq 1$, то $[x]$ ділиться на $[y]$ (це випливає з умови задачі при $n=1$). Припустимо спочатку, що $\{x\}>0$, тоді для деякого натурального числа n виконується рівність $\left[n\{x\}\right]=1$. Для такого n маємо співвідношення $\left[\frac{x}{y}\right]=\frac{[nx]}{[ny]}=\frac{\left[n[x]+n\{x\}\right]}{[ny]}=$ $=\frac{n[x]+1}{[ny]}$, тобто $[ny]\cdot\left[\frac{x}{y}\right]=$

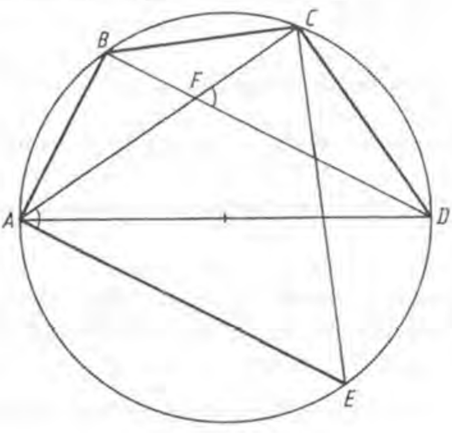


Рис. 3.38.3

$=n[x]+1$, $[ny]\cdot\frac{[x]}{[y]}=n[x]+1$ (оскільки $\left[\frac{x}{y}\right]=\frac{[x]}{[y]}$). З урахуванням того, що $[x]\ \vdots\ \frac{[x]}{[y]}$, одержимо $1\ \vdots\ \frac{[x]}{[y]}$ і $[x]=[y]$. Таким чином, $\left[\frac{x}{y}\right]=1$, $x\geq y$ і отримаємо нерівність $\{x\}\geq\{y\}$. Припустимо, що $\{x\}>\{y\}$. Тоді для деякого натурального числа n виконується нерівність $\left[n(\{x\}-\{y\})\right]>0$, котра спричинює суперечність: $1=\frac{[nx]}{[ny]}=\frac{n[x]+\left[n\{x\}\right]}{n[y]+\left[n\{y\}\right]}=$

$$=\frac{n[x]+\left[n\{y\}+n\left(\{x\}-\{y\}\right)\right]}{n[y]+\left[n\{y\}\right]}\geq\frac{n[x]+\left[n\{y\}\right]+\left[n\left(\{x\}-\{y\}\right)\right]}{n[y]+\left[n\{y\}\right]}>1$$ (тут

використано відому властивість цілої частини числа: $[u+v]\geq[u]+[v]$

при всіх дійсних u і v). Отже, для розглянутого випадку $\{x\}=\{y\}$ і $x=y$. Нехай тепер $\{x\}=0$, тобто x є натуральним числом. Доведемо, що тоді і y є натуральним числом (те, що у такому випадку x ділиться на y є очевидним). Для цього, з урахуванням рівності $\left[\frac{x}{y}\right]=\frac{[x]}{[y]}$, достатньо показати, що $\left[\frac{x}{y}\right]=\frac{x}{y}$. Дійсно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[n\{y\}]}{n}=\{y\}$ (це випливає з нерівності $\{y\}-\frac{1}{n}<\frac{[n\{y\}]}{n}\le\{y\}$, $n\in N$), і залишається скористатися тим, що згідно з умовою задачі для натурального x при всіх $n\in N$ виконується співвідношення $\left[\frac{x}{y}\right]=\frac{x}{[y]+\frac{1}{n}[n\{y\}]}$. Пропонуємо читачеві самостійно обміркувати, як останню частину доведення викласти без "формального" використання граничного переходу.

3.38.11. Твердження задачі випливає з того, що $x^3-x\equiv 0(\operatorname{mod}3)$, але $y^2-19y+98\equiv 1(\operatorname{mod}3)$ при $y\equiv 2(\operatorname{mod}3)$ і $y^2-19y+98\equiv 2(\operatorname{mod}3)$ при $y\equiv 0(\operatorname{mod}3)$, $y\equiv 1(\operatorname{mod}3)$.

3.38.12. Скористаємося відомими формулами, які виражають довжини медіан m_a,m_b,m_c трикутника через довжини a,b,c його сторін, і одержимо, що

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{4}\ge 0 .$$

3.38.13. Доведемо, що другий гравець може забезпечити собі перемогу. Якщо число n парне, то він має на кожен хід першого гравця відповідати ходом у симетричну відносно головної діагоналі клітинку (на хід у клітинку, яка розташована на головній діагоналі, потрібно відповідати довільним ходом також на цю діагональ). Якщо число n є непарним, то другий гравець у випадку, коли можна зробити відповідні ходи, має діяти так само, як описано вище, а коли потрібний хід виявляється неможливим, потрібно зробити просто будь-який хід. Оскільки, як відомо, для довільних натуральних чисел a і b має місце рівність НСД$(a;b)\cdot$НСК$(a;b)=a\cdot b$, то добуток всіх чисел у таблиці дорівнюватиме $(n!)^n$. Очевидно, що після ділення отримаємо в добутку число 1, що й означатиме перемогу другого гравця.

3.38.14. Нехай $A_1A_2...A_{2\,000}$ – даний опуклий 2 000-кутник. Для кожного $k\in\{2;3;...;1\,999\}$ виберемо довільну точку B_k, яка міститься всередині перетину трикутників $A_1A_kA_{2\,000}$ та $A_{k-1}A_kA_{k+1}$. Покажемо, що одержана в такий спосіб множина $\{B_k\}_{k=2}^{1\,999}$ є шуканою. Розглянемо трикутник $A_pA_qA_r$ $(1\le p<q<r\le 2\,000)$. При цьому півпряма A_qA_p (початок півпрямої виключається) лежить всередині кута $A_1A_qA_{q-1}$, а півпряма A_qA_p – всередині кута $A_{2\,000}A_qA_{q+1}$. Звідси одержимо, що трикутник $A_pA_qA_r$ цілком містить перетин трикутників $A_1A_qA_{2\,000}$ та $A_{q-1}A_qA_{q+1}$, і точка B_q лежить всередині трикутника $A_pA_qA_r$. Зазначимо, що лише при $k\in\{p;q;r\}$ трикутники $A_pA_qA_r$ та $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ мають спільні внутрішні точки, а для $k\in\{p;r\}$ трикутники $A_1A_kA_{2\,000}$ та $A_pA_qA_r$ не мають спільних внутрішніх точок. Отже, при $k\ne q$ точка B_k не лежатиме всередині трикутника $A_pA_qA_r$.

3.38.15. Потрібно розглянути всі можливі випадки щодо знаків чисел x і y. *Відповідь*. Шуканою множиною пар $(x;y)$ є множина

$$\{(\pi m;\pi n)\,|\,m,n\in Z,\ mn<0\}\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi m;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\,|\,m,n\in Z,\ m,n\ge 0\right\}.$$

3.38.16. Виконаємо перетворення гомотетії H_M^2. При цьому образами проведених перпендикулярів будуть прямі, які містять висоти трикутника ABC (рис. 3.38.4), а тому $F=H_M^2(O)$ – ортоцентр трикутника ABC і $OM=\frac{1}{2}MF$.

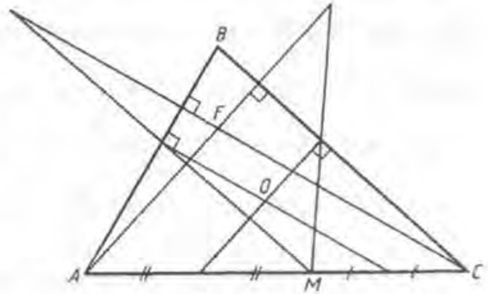


Рис. 3.38.4

Отже, найменшого значення довжина відрізка OM набуватиме, коли відрізок BM є висотою трикутника ABC.

3.38.17. Нехай A – даний набір відрізків, а $B_0 = \{e\}$ – сукупність всіх тих відрізків з набору A, які не покривають жодного відрізка з цього набору. Для $k = 1, 2, ...$ послідовно, доки це залишається можливим, визначатимемо відрізок e_k як відрізок з "найбільшим" правим кінцем серед усіх відрізків сукупності B_{k-1} та сукупність відрізків $B_k = \{e \in B_{k-1} \mid e \cap e_{k-1} = \varnothing\}$. Побудований набір (ланцюжок) відрізків $e_1, e_2, ...$ складається не більше, ніж з 1 997 відрізків, оскільки $e_k \cap e_m = \varnothing \ (k \neq m)$. Для кожного відрізка $e \in B_0$ існує такий номер i, що $e \in B_i \setminus B_{i+1}$. Це означає, що відрізок e має спільні точки з відрізком e_{i+1}, а оскільки e_{i+1} – відрізок з "найбільшим" правим кінцем серед усіх відрізків сукупності B_i, то його правий кінець розташований ліворуч від правого кінця відрізка e. Крім того, відрізок e не може бути повністю покритим відрізком e_{i+1}, тому лівий кінець відрізка e_{i+1} належить відрізкові e. Таким чином, кожен відрізок сукупності B_0 містить лівий кінець одного з відрізків ланцюжка $e_1, e_2, ...$ Кожен відрізок набору A покриває деякий відрізок сукупності B_0, який, у свою чергу, містить лівий кінець деякого відрізка з ланцюжка $e_1, e_2, ...$ Отже, якщо взяти всі ліві кінці відрізків $e_1, e_2, ...$ і додати до них, у випадку необхідності, кілька довільних точок (щоб загальна кількість точок становила 1 997), то отримаємо множину з потрібною властивістю.

3.38.18. Достатньо довести за допомогою методу математичної індукції, що для кожного натурального числа n при $x \in \left[2^{n-1}; 2^n\right)$ виконується нерівність $f(x) < \sqrt{2x}$. Для $x \in [1;2)$ $f(x) \leq x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2x}$. Припустимо тепер, що для всіх $x \in \left[2^{n-1}; 2^n\right)$ виконується нерівність $f(x) < \sqrt{2x}$. Тоді для $x \in \left[2^n; 2^{n+1}\right)$ одержимо $f(x) \leq \sqrt{2} f\left(\frac{x}{2}\right) < \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2x}$ (врахувавши, що $\frac{x}{2} \in \left[2^{n-1}; 2^n\right)$).

3.38.19. Для $z \le 1$ маємо такі нерівності: $m \le x^9$, $m^2 \le y^{18}$, $m^6 \le z^{42} \le z^{27}$. Звідси й отримаємо нерівність $m^9 \le x^9 y^{18} z^{27}$, тобто $m \le xy^2 z^3$. При $m = 1$ твердження задачі є очевидним. Залишається розглянути випадок, коли $m < 1$, $z > 1$. Тоді $m^9 < m^3 \le x^9 y^{18} < x^9 y^{18} z^{27}$, і $m < xy^2 z^3$.

3.38.20. Зазначимо, що $ACBD$ – прямокутник. Нехай P', Q' – такі точки, що $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{CA}$ (рис. 3.38.5). Тоді $S(ACM) + S(MBD) = \frac{1}{2} S(ACBD)$. Отже,

$$S(CPM) + S(MQB) = S(ACM) + S(MBD) - \big(S(ACP) + S(BDQ)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(S(ACBD) - 2\big(S(ACP) + S(BDQ)\big)\big) = \frac{1}{2} S\left(PQQ'P'\right) = S(DPQ).$$

3.38.21. Доведемо, що барон каже неправду. Нехай у будинку барона n кімнат. Розглянемо компанію, що складається з $n+1$ груп, у кожній з яких $n+1$ гість, причому будь-які два гості з однієї групи знайомі між собою, а гості з різних груп між собою не знайомі. Таку компанію барон розселити не зможе. Дійсно, як би не розселяв своїх гостей Мюнхгаузен, у кожній кімнаті знайдуться двоє знайомих, які належать до однієї групи. Отже, у кожній кімнаті всі гості мають бути попарно знайомі. Це означатиме, що у кожну кімнату треба поселяти лише гостей з однієї групи, але це неможливо, оскільки груп гостей більше за кількість кімнат.

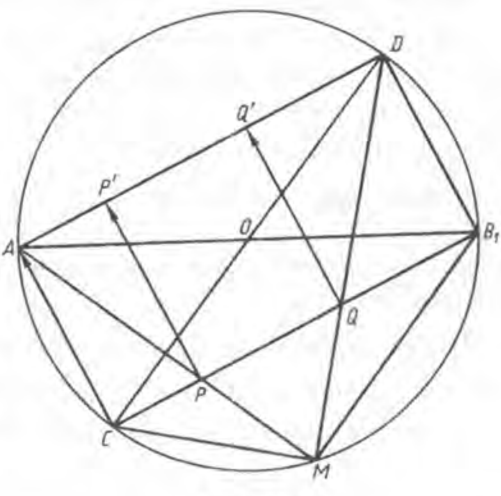


Рис. 3.38.5

3.38.22. Якщо $f(0) = 0$, то, поклавши $y = 0$, отримаємо, що f є нуль-многочленом. Зауважимо, що коли f є нуль-многочленом, то вихідне функціональне співвідношення виконується для будь-якого многочлена g.

Нехай $f(0) \neq 0$. Тоді $f(u) = f(0)(1 - g(u))$ при всіх $u \in R$. Підставимо цей вираз для многочлена f у вихідне функціональне співвідношення і одержимо $g(xy) = g(x)g(y)$ при всіх $x, y \in R$. З теорії функціональних рівнянь Коші добре відомо, що або g – нуль-многочлен, або ж при всіх $x \in R$ $g(x) = x^n$ $(n \in N)$. Перевіркою встановлюємо, що остаточна відповідь є такою: f – нуль-многочлен, g – довільний многочлен, або f – довільна стала, g – нуль-многочлен, або $f(x) = C(1 - x^n)$ (C – довільне ненульове число), $g(x) = x^n$ ($n \in N$).

3.38.23. *Відповідь.* $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$. Помітимо, що число $\{2x\}$ є цілим, тобто $\{2x\} = 0$. Отже, $x = k$ $(k \in Z)$ або $x = k + \frac{1}{2}$ $(k \in Z)$. У першому з цих випадків приходимо до рівняння $k^2 + 2k + 3 = 0$, яке не має коренів, у другому випадку одержимо рівняння $k^2 + 3k + 2 = 0$, звідки $k = -1$, $k = -2$.

3.38.24. Доведемо, що $PM = PK$. Оскільки $\angle DBM = \angle LBK$ і трикутники DBM і LBK є прямокутними, то $\angle NMK = \angle DMB = \angle LKB$ (рис. 3.38.6). До того ж, $\angle BPN = \angle BKN$ (ці кути спираються на одну дугу). Звідси випливає, що $MK \perp PN$ та, очевидно, точки M і K є симетричними відносно прямої PN.

3.38.25. При $x \in (0;1]$ $x^2 + xy \leq 1 + y$, тобто $\dfrac{x}{1 + y + zx} \leq \dfrac{1}{x + y + z}$. Аналогічно оцінюються й інші доданки лівої частини нерівності, яку потрібно довести.

3.38.26. Візьмемо довільне число $\beta \in (0;\lambda)$. Умову задачі задовольняє така функція f, що $f(x) = 0$, $x \in [0;\beta]$ і $f(x) = 1$, $x \in (\beta;1]$.

Розглянемо функцію f з властивостями, про які йдеться в умові задачі. Нехай $f(0) = a$. Припустимо спочатку, що $a \in (0;1]$. Тоді методом математичної індукції встановлюємо, що для довільного

$n\in N$ $f^{(n)}(a)=(n+1)a$, оскільки $f(a)=f(f(0)+0)=$ $=f(0)+f(0)=2a$ і т.д. Отже, починаючи з деякого n, буде виконуватися нерівність $f^{(n)}(a)>1$, що для функції $f:[0;1]\to[0;1]$ є неможливим. Отже, $a=0$, і, очевидно, при всіх $x\in[0;1]$ має місце рівність $f(f(x))=f(x)$ чим і забезпечується доведення потрібного співвідношення.

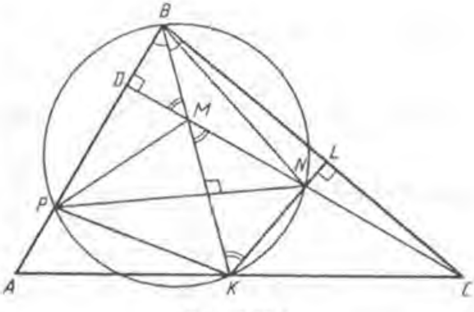


Рис. 3.38.6

3.38.27. Дане рівняння має один корінь. Для того щоб переконатися у цьому, пропонуємо читачеві самостійно розглянути графіки та властивості функцій $y=\dfrac{2}{\pi}\arccos x$ і $y=\sqrt{1-x^2}+1$.

3.38.28. Нескладно переконатися, що після кожного кроку сума S записаних на дошці чисел задовольнятиме умову $S\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. Отже, відповідь на запитання задачі є негативною.

3.38.29. Нехай $\omega_1(O_1;R_1),\omega_2(O_2;R_2)$ – дані кулі. Нехай K,G,F,L – відповідно середини відрізків AB,BD,DC,CA. Оскільки при зазначеному в умові задачі проектуванні середина відрізка проектується в середину відрізка-проекції, то достатньо довести, що точка O перетину діагоналей паралелограма $KGFL$ проектується в точку P. Дійсно, $O_1A\perp AB$, $O_2B\perp AB$, а тому $O_1K^2-O_2K^2=\left(R_1^2+\dfrac{AB^2}{4}\right)-$ $-\left(R_2^2+\dfrac{AB^2}{4}\right)=O_1P^2-O_2P^2$. Тобто, $PK\perp O_1O_2$. Аналогічно доводиться, що $PF\perp O_1O_2$. Звідси випливає, що навіть відрізок KF, який містить точку O, проектується в точку P.

3.38.30. Доведемо методом математичної індукції, що при $n\geq 4$ виконуються нерівності $n\leq x_n\leq\dfrac{n^2}{n-1}$. Базу індукції перевіряємо безпосереднім підрахунком. Якщо $n \le x_n \le \frac{n^2}{n-1}$, то, внаслідок спадання функції $f_n(x)=\frac{x}{n^2}+\frac{n^2}{x}+2$ на проміжку $\left(0;n^2\right]$ (доведіть цей факт самостійно), $f_n(n)\ge f_n(x_n)\ge f_n\left(\frac{n^2}{n-1}\right)$. Звідси випливає, що $\frac{(n+1)^2}{n}\ge$ $\ge x_{n+1}\ge\frac{1}{n-1}+n+1>n+1$, чим і обґрунтовується індукційний крок. Тепер зауважимо, що $x=\frac{n^2}{n-1}$ – нерухома точка функції f_n, а тому при $n\ge 4$

$$x_{n+1}=f_n(x_n)\ge f_n\left(\frac{n^2}{n-1}\right)=\frac{n^2}{n-1}\ge x_n. \tag{1}$$

Для доведення твердження пункту б) задачі потрібно для x_n установити більш "тонку" оцінку зверху: $x_n<n+1$ ($n\ge 4$). Для $n=4$ і $n=5$ перевіряємо безпосередньо. Покажемо, як потрібна нерівність при $n\ge 6$ одержується з попередніх оцінок. Враховуючи (1), при $n\ge 5$ маємо $n<\frac{(n-1)^2}{n-2}\le x_n\le\frac{n^2}{n-1}<n^2$, $x_{n+1}=f_n(x_n)\le f_n\left(\frac{(n-1)^2}{n-2}\right)$. Залишається нескладними перетвореннями переконатися в тому, що виконується нерівність $f_n\left(\frac{(n-1)^2}{n-2}\right)<n+2=(n+1)+1$, тобто і для $n\ge 6$ $x_n<n+1$.

Олімпіада 39
(*м. Запоріжжя, 1999 р.*)

3.39.1. *Відповідь.* (0; 1), (0; –1). З першого рівняння даної системи випливає, що $|y|\le 1$ і $0\le|x|<\frac{1}{2}$. Із другого рівняння отримуємо, що $\left[2|y|\right]=2$, тобто $1\le|y|<\frac{3}{2}$. Отже, $|y|=1$ і $|x|=0$. Залишається зробити перевірку.

3.39.2. *Відповідь.* Так, можна (рис. 3.39.1).

1	−1	1	−1	1	−1	1
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	0	0	0	0	0	0
1	−1	1	−1	1	−1	1
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	0	0	0	0	0	0
1	−1	1	−1	1	−1	1

Рис. 3.39.1

3.39.3. Доведемо, що такого числа n не існує. Якщо n складається лише з п'ятірок, то n ділиться на 5, але не ділиться на 25, і тому не може бути точним квадратом. Отже, одна з цифр числа n відмінна від п'ятірки. Позначимо її через a. Ця цифра розташована на останньому або передостанньому місці в десятковому запису числа n, бо інакше n ділиться на 5, але не ділиться на 25. А тепер покажемо, як можна організувати перебір. Відмітимо, що $a \notin \{0;3;6;9\}$, оскільки $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, що неможливо для квадратів цілих чисел; $a \neq 1$, бо інакше $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, що також є неможливим для квадратів цілих чисел; $a \neq 7$, бо, як нескладно переконатися, квадрат цілого числа не закінчується на 75 або 57; $a \notin \{4;8\}$, оскільки числа 45 і 85 діляться на 5, але не діляться на 25, а числа 54 і 58 діляться на 2, але не діляться на 4; $a \neq 2$, бо тоді n закінчується на 552 або 525, проте закінчення на 2 неможливе для квадратів цілих чисел, а число, десятковий запис якого закінчується на 525, дає остачу 5 при діленні на 8, що також неможливо для квадратів цілих чисел (доведіть це самостійно).

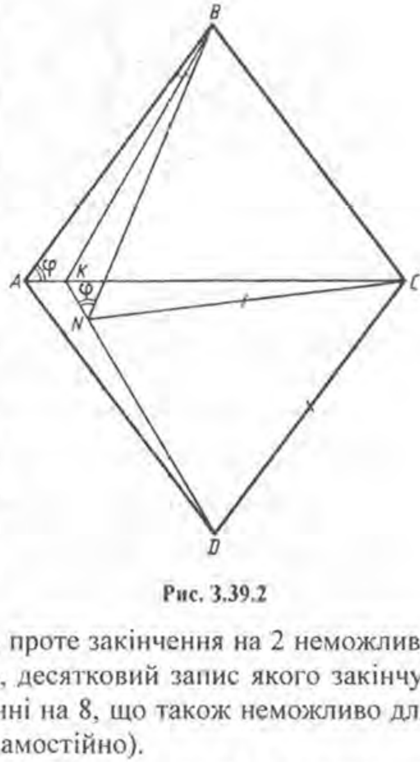


Рис. 3.39.2

3.39.4. Доведемо, що відповідь на запитання задачі є негативною. Дійсно, $n^4 \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, $m^3 - m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, але ж $19\,991\,999 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$.

3.39.5. Нескладно показати, що точка N лежить всередині трикутника ACD (рис. 3.39.2). Зауважимо, що трикутники AKB і NKB

є рівними (за двома сторонами та кутом між ними). Нехай $\varphi = \angle BNK = \angle BAK$, тоді $\angle NCD = 2\varphi - 60^\circ$. Враховуючи, що трикутник NCD рівнобедрений (оскільки $CN = CD$), знаходимо $\angle CND = \frac{1}{2}(180^\circ - (2\varphi - 60^\circ)) = 120^\circ - \varphi$. Отже, $\angle KND = \varphi + 60^\circ + (120^\circ - \varphi) = 180^\circ$. Тобто точка N належить відрізкові KD. Звідси $KN + ND = KD$, і, оскільки $BK = KD$, то $BK = KN + ND$, що і треба було довести.

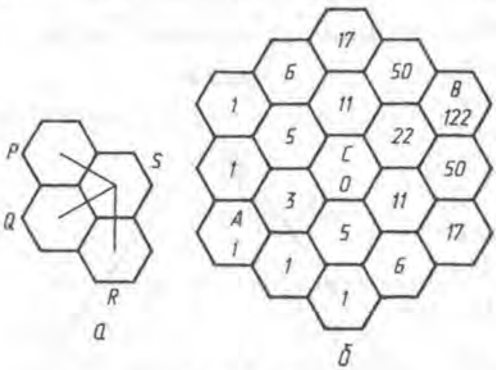


Рис. 3.39.3

3.39.6. *Відповідь.* 122 шляхи. Зазначимо спочатку, що в клітинку S можна потрапити лише з клітинок P, Q і R (рис. 3.39.3, *а*). При цьому $s = p + q + r$, де s, p, q, r відповідно кількості різних шляхів, які ведуть з клітинки A до клітинок S, P, Q, R. Отже, записавши в клітинку A число 1, а в клітинку C – число 0, ми поступово зможемо заповнити відповідними числами всі клітинки "соняшника" (рис. 3.39.3, *б*). Те число, котре опиниться після такого заповнення в клітинці B, і є шуканою кількістю шляхів.

3.39.7. Зауважимо, що $\left|x^2 + xy\right| > \left|x^2 - xy\right| \Leftrightarrow (x^2 + xy)^2 - (x^2 - xy)^2 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xy > 0$. Отже, потрібно відмітити перший та третій координатні кути, не включаючи їх границі.

3.39.8. При $x, y > 0$ із нерівності $(x-1)(y-1) \geq 1$ випливає нерівність $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1$. Використовуючи нерівність Коші–Буняковського і нерівність трикутника, отримуємо

$$a^2x + b^2y \geq (a^2x + b^2y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \left(a\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + b\sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = (a+b)^2 > c^2.$$

3.39.9. Твердження задачі випливає з таких перетворень:

$$9\,999\,999+1\,999\,000=10^7+1\,999\cdot10^3-1=10^3(10^4+1\,999)-1=$$

$$=11\,999\cdot10^3-1=(12\cdot10^3-1)10^3-1=12\cdot10^6-10^3-1=$$

$$=(3\cdot10^3-1)(4\cdot10^3+1)=2\,999\cdot4\,001.$$

Зауважимо, що 2 999 і 4 001 – прості числа.

3.39.10. Оскільки $\angle B_1C_1C+$ $+\angle CC_1A_1+\angle C_1A_1A=\angle B_1BC+$ $+\angle CAA_1+\angle C_1CA=90°$, то $A_1A\perp B_1C_1$. Аналогічно доводиться, що $B_1B\perp A_1C_1$ і $C_1C\perp A_1B_1$. Нехай I – точка перетину бісектрис трикутника ABC. Пряма B_1C_1 містить одночасно і висоту, і бісектрису трикутника AIB_1 ($\angle AB_1C_1=\angle C_1B_1B$), і тому вона є серединним перпендикуляром відрізка AI (рис. 3.39.4). Отже, $\angle CAI=$ $=\angle PAI=\angle PIA$ і $PI\parallel AC$. Аналогічно доводиться, що $IQ\parallel AC$. Нехай відрізок PQ міститься на хорді ST $(ST\parallel AC)$. Тоді точка B_1 є серединою дуги ST (точка B_1 обирається таким чином, щоб вона з точкою B лежала по різні боки від прямої PQ). Знаючи точку B_1, вже легко знайти точки A_1 і C_1 та відновити розташування вершин трикутника ABC.

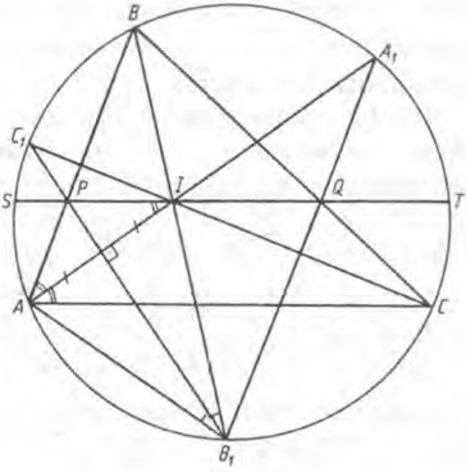


Рис. 3.39.4

3.39.11. З умови випливає, що $[x]\neq0$ та $\{x\}\neq0$. Запишемо вихідне рівняння у вигляді $(\{x\}-[x])\left(1-\dfrac{1999}{[x]\{x\}}\right)=0$. Рівність $[x]=\{x\}$ виконуватися, очевидно, не може, а тому $\{x\}=\dfrac{1999}{[x]}$. Залишається зауважити, що для будь-якого натурального $n > 1999$ число $x = n + \frac{1999}{n}$ задовольняє умову задачі.

3.39.12. *Відповідь.* $\{(n;n) \mid n \in N\} \cup \{(1;2)\} \cup \{(2;1)\}$. Очевидно, що при $k = l$ дана рівність виконується. Нехай $k < l$. Тоді початкове співвідношення можна переписати у такому вигляді: $k^l \cdot (k+1) \times$ $\times (k+2) \cdots (l-1) = l^{k-1}$. Натуральне число l ділиться на $l-1$ тільки при $l = 2$, а тому $k = 1$. Зазначимо, що k і l входять до вихідного співвідношення симетрично.

3.39.13. Скористаємося методом координат, вважаючи коло одиничним, а його центр O – початком координат. Нехай координатні осі паралельні хордам AC і BD, і точка M має координати $M(a;b)$ (рис. 3.39.5). Тоді $B\left(a;\sqrt{1-a^2}\right)$, $D\left(a;-\sqrt{1-a^2}\right)$, $A\left(-\sqrt{1-b^2};b\right)$, $C\left(\sqrt{1-b^2};b\right)$, $K\left(\frac{a-\sqrt{1-b^2}}{2};\frac{b+\sqrt{1-a^2}}{2}\right)$, $L\left(\frac{a+\sqrt{1-b^2}}{2};\frac{b-\sqrt{1-a^2}}{2}\right)$.

Твердження задачі є наслідком того, що, як легко переконатися, $AB^2 + CD^2 = 4$, $KL^2 = 2 - \left(a^2 + b^2\right) = 2 - OM^2$.

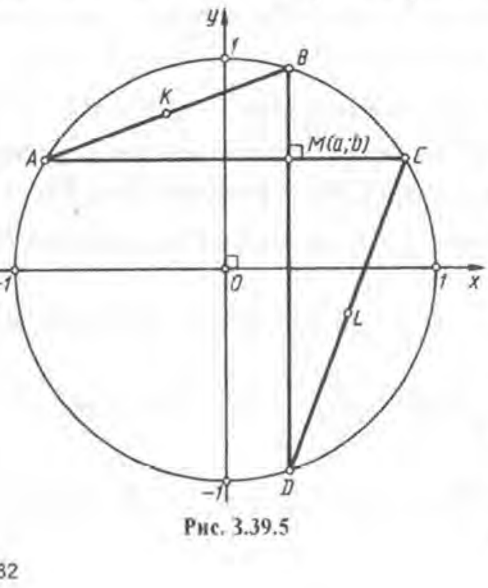


Рис. 3.39.5

3.39.14. Зазначимо, що всі члени даної послідовності є попарно різними, бо якщо $a_m = a_n$, то $a_{a_m} = a_{a_n}$ і $2m = 2n$. Доведемо твердження задачі методом математичної індукції. Оскільки $a_{a_1} + a_1 = 2$, то $a_1 = 1$. Нехай твердження виконується для всіх $n < k$. Доведемо його для $n = k$. Якщо $a_k < k$, то, за припущенням індукції, $a_{a_k} = a_k$, що неможливо. Якщо $a_k > k$, то

$a_{a_k} \ge k$. Дійсно, за умови $a_{a_k} < k$ виконується рівність $a_{a_k} = a_{a_{a_k}}$, яка рівносильна неможливій рівності $a_{a_k} = a_k$ $\left(a_{a_k} < k,\ a_k > k\right)$. Але при $a_{a_k} \ge k$, $a_{a_k} + a_k > 2k$, що також суперечить умові. Отже, доведено, що $a_k = k$.

3.39.15. *Відповідь.* $x = \pi m,\ m \in Z$. Оскільки $|\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x| \le |\sin x \cdot \sin 2x| + |\cos x \cdot \cos 2x|$, то кожен корінь вихідного рівняння міститься серед розв'язків сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} |\cos x| = 1, \\ |\cos 3x| = 1. \end{array}\right.$$

Залишається розв'язати таку сукупність рівнянь та зробити перевірку.

3.39.16. Оскільки $BR \parallel ML$, то $S(BML) = S(RML)$. Аналогічно $S(BMD) = S(PMD)$. Отже, $S(DPRL) = S(DBL)$. Позначивши через PP', RR' та MM' висоти трикутників відповідно DPQ, LRQ і DML (рис. 3.39.6), одержуємо $S(DPQ) + S(LRQ) = \frac{1}{2} PP' \cdot DQ + \frac{1}{2} RR' \cdot QL = \frac{1}{2}(PP' + RR') \cdot \frac{1}{2} DL = \frac{1}{2} MM' \cdot DL = S(DML)$ (врахувавши, що $MM' = \frac{1}{2}(PP' + RR')$). Таким чином, $S(PQR) = S(DBL) - S(DML)$. Як нескладно показати, $MM' = a \cdot BB'$ (де BB' – висота трикутника ABC) і $DL = a \cdot AC$. Отже, звідси випливає, що $S(PQR) = (a - a^2)S$.

3.39.17. Якщо P – многочлен з цілими коефіцієнтами, то для будь-яких цілих чисел c і d $P(c) - P(d)$ ділиться на $c - d$. Нехай $a_0 = a_{1999}$ і $x_i = a_i - a_{i-1}$ для всіх $i \in N$. Для кожного $i \in N$ маємо $x_{i+1} = a_{i+1} - a_i = P(a_i) - P(a_{i-1}) = (a_i - a_{i-1})r_i = x_i r_i$,

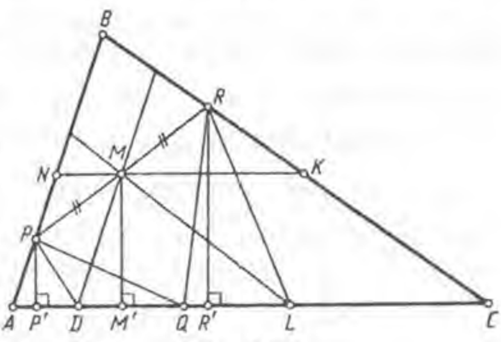


Рис. 3.39.6

де $r_i \in Z$. Припустимо, що $x_i \neq 0$ при всіх $i \in N$. Тоді $r_i \neq 0$ та $|x_{i+1}| \geq |x_i|$ при всіх $i \in N$. При цьому, оскільки $|x_1| = |x_{2\,000}|$, то $|x_1| = |x_2| = ... = |x_{2\,000}|$. Нехай a_m – найменше серед чисел $a_0, a_1, a_2, ..., a_{1\,999}, a_{2\,000}$ (якщо таких чисел кілька, візьмемо будь-яке з них). Тоді $x_m = a_m - a_{m-1} \leq 0$, $x_{m+1} = a_{m+1} - a_m \geq 0$, $|x_m| = |x_{m+1}|$, $a_{m-1} = a_{m+1}$ ($1 \leq m \leq 1\,999$). Враховуючи, що $a_{i+1} = P(a_i)$, одержуємо $a_{m-1} = a_{m+1} = = a_{m+3} = ...$, $a_m = a_{m+2} = a_{m+4} = ...$ Звідси випливатиме, що $a_{1\,999} = a_{2\,001} = = P(a_{2\,000}) = P(a_1) = a_2 = a_4 = ... = a_{1\,998}$. Але тоді $x_{1\,999} = 0$, що суперечить припущенню. Таким чином, ми довели, що існує таке $i \in N$, що $x_i = 0$, тобто $a_i = a_{i-1}$. У такому випадку $a_1 = a_2 = ... = a_{2\,000} = 1\,999$, і шукане значення дорівнює 1 999.

3.39.18. Будемо через $\overline{x}$ позначати остачу від ділення цілого числа x на 1 999. Нехай задано таку цілочислову послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ при $n \geq 1$. Тоді, як нескладно показати, послідовність $\{\overline{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ є періодичною. Дійсно, розглянемо таку послідовність пар остач: $(\overline{u_1};\overline{u_2})$, $(\overline{u_2};\overline{u_3})$, $(\overline{u_3};\overline{u_4})$,... Різних пар остач по $\bmod 1\,999$ є скінченна кількість, а тому якась пара повинна повторитися. Враховуючи рекурентне співвідношення, отримуємо, що першою має повторитися саме пара $(\overline{u_1};\overline{u_2})$. Звідси випливає, що гра, про яку йдеться в умові задачі, є скінченною. Доведемо, що другий гравець може забезпечити собі перемогу. Наведемо виграшну стратегію: якщо $a_1 \equiv 0 (\bmod 1\,999)$, то другий гравець записує будь-яке $a_2 = a \not\equiv 0 (\bmod 1\,999)$; якщо ж $a_1 = a \not\equiv 0 (\bmod 1\,999)$, то другий гравець записує будь-яке $a_2 \equiv 0 (\bmod 1\,999)$. Розглянемо перший з цих двох випадків (другий аналогічно розберіть самостійно). При цьому послідовність ходів до першого повторення першої пари остач має такий вигляд (за $\bmod 1\,999$): $\underbrace{0;\ a;\ a;\ 2a;\ 3a;\ ...;-2a;\ a;\ -a;\ 0;\ a}_{n\text{ ходів}}$. Зазначимо, що $a_{n-k} \equiv (-1)^{k+1} a_k (\bmod 1\,999)$ $(2 \le k \le n-2)$, а тому, оскільки $2a \not\equiv 0 (\bmod 1\,999)$, число n є парним, що і завершує доведення.

3.39.19. Як відомо, при $\alpha \ge 0$, $m \in N$ виконується рівність $\left[\frac{[\alpha]}{m}\right] = \left[\frac{\alpha}{m}\right]$ (доведіть це самостійно). Тому значення нашої суми становить $1\,999[\pi] = 1\,999 \cdot 3 = 5\,997$.

3.39.20. Введемо позначення $a = m - n$, $b = mn$. Тоді вихідне рівняння можна буде переписати як $a^3 + 3ab = 7b + 5$, звідки $b = \frac{5 - a^3}{3a - 7}$. Число a ціле, а b має бути натуральним, тому в останньому дробі чисельник та знаменник повинні мати один і той самий знак. Легко переконатися, що це можливо лише при $a = 2$. Тоді $b = 3$, звідки знаходимо, що $m = 3, n = 1$.

3.39.21. З належності чисел $x_1, x_2, ..., x_6$ відрізкові $[0;1]$ випливає, що ліва частина даної нерівності не перевищує

$$\frac{x_1^3}{x_1^5 + x_2^5 + ... + x_6^5 + 4} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_2^5 + ... + x_6^5 + 4} + ... + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + ... + x_6^5 + 4} =$$

$$= \frac{x_1^3 + x_2^3 + ... + x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + ... + x_6^5 + 4}.$$

Залишається довести, що $\frac{x_1^3 + x_2^3 + ... + x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + ... + x_6^5 + 4} \le \frac{3}{5}$. Справедливість останньої нерівності випливає з того, що при $t \ge 0$ має місце оцінка $3t^5 + 2 \ge 5\sqrt[5]{t^5 \cdot t^5 \cdot t^5 \cdot 1 \cdot 1} = 5t^3$.

3.39.22. Позначимо через A_0, B_0, C_0 центри прямокутників відповідно OMA_1N, OPB_1Q, OSC_1R та розглянемо гомотетію $H_O^{\frac{1}{2}}$ з центром у точці O і коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$ (рис. 3.39.7). Тоді $\Delta A_0B_0C_0 = H_O^{\frac{1}{2}}(\Delta A_1B_1C_1)$, звідси випливає, що бісектриси трикутника

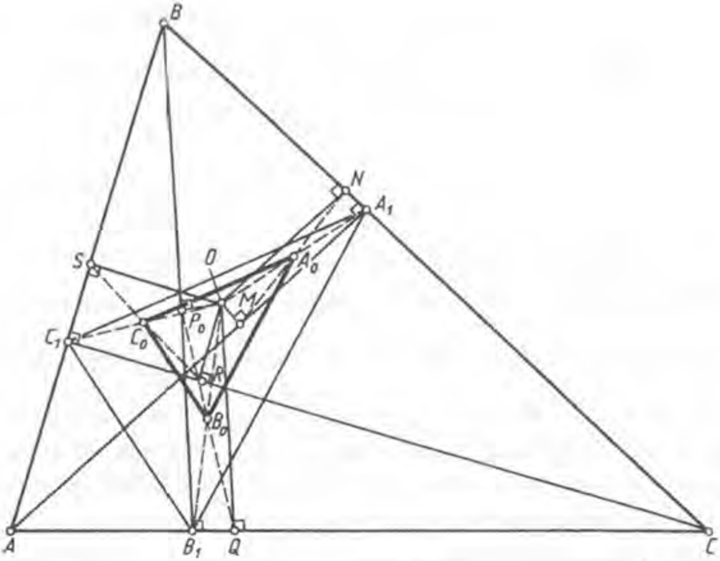


Рис. 3.39.7

$A_0B_0C_0$ паралельні відповідним висотам трикутника ABC. Тепер легко помітити, що пряма OC_1 симетрична прямій SR відносно бісектриси кута C_0 трикутника $A_0B_0C_0$, пряма OB_1 симетрична прямій PQ відносно бісектриси кута B_0 трикутника $A_0B_0C_0$, а пряма OA_1 симетрична прямій MN відносно бісектриси кута A_0 трикутника $A_0B_0C_0$. Звідси і випливає, згідно з так званою ізотомічно спряженою формою теореми Чеви (див., наприклад, розд. 11, § 4 книги: Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. I. – М.: Наука, 1986, задача 11.28), що прямі MN, PQ, SR перетинаються в одній точці.

3.39.23. *Відповідь.* $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. Розглянемо функцію $f(t) = t^{1998} - t^{-1999}$, $t \in [-1;0) \cup (0;1]$. За допомогою похідної переконуємося, що така функція є зростаючою на кожному з проміжків $[-1;0)$ та $(0;1]$. При цьому $f(t) < f(1) = 0$ для всіх $t \in (0;1)$ та $f(t) > f(-1) = 0$ для всіх $t \in (-1;0)$. Вихідне рівняння можна подати у вигляді $f(\sin x) = f(\cos x)$, що, як легко переконатися з урахуванням означених вище властивостей функції f, є рівносильним рівнянню $\sin x = \cos x$.

3.39.24. Дану систему можна подати у вигляді

$$\begin{cases} kv^2 - 2u + 2k + 1 \le 0, \\ ku^2 - 2v + 2k + 1 \le 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $u = x - 1$ і $v = y + 2$. Якщо пара $(u_0; v_0)$ – розв'язок системи (1), то пара $(v_0; u_0)$ також є її розв'язком. Тому нерівність $ku^2 - 2u + 2k + 1 \le 0$ повинна мати єдиний розв'язок. Звідси $k = \frac{1}{2}$. Покажемо, що при $k = \frac{1}{2}$ система (1) насправді має єдиний розв'язок. Маємо систему

$$\begin{cases} v^2 - 4u + 4 \le 0, \\ u^2 - 4v + 4 \le 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Звідси отримуємо, що $0 \ge (u-2)^2 + (v-2)^2$. Залишається помітити, що пара $(2;2)$ є розв'язком системи (2).

3.39.25. З умови задачі випливає, що трикутник A_1BD є правильним. Нехай $M_1 = AM \cap A_1B$, $N_1 = AN \cap BD$, $P_1 = AP \cap BD$, $Q_1 = AQ \cap A_1D$, $O = P_1Q_1 \cap M_1N_1$ (зауважимо, що $P_1Q_1 = (A_1BD) \cap (APQ)$, а $M_1N_1 = (A_1BD) \cap (AMN)$ (рис. 3.39.8, *а*)). Нескладно показати, що $A_1M_1 = BP_1$ і $A_1Q_1 = DN_1$. Отже, навколо чотирикутника BP_1OM_1 (рис. 3.39.8, *б*) можна описати коло (оскільки $\angle OM_1B = \angle OP_1D$), а тому $\angle P_1ON_1 = \angle M_1BP_1 = 60°$.

3.39.26. Див. розв'язання задачі 3.39.18.

3.39.27. а) Нескладно довести (зробіть це самостійно), що $n^4 + m^3 - m \not\equiv 8 (\mathrm{mod}\, 10)$.

б) Див. розв'язання задачі 3.39.4.

3.39.28. Нехай $x = y = z = 0$, тоді $f(0) = 1$; при $x = y = z = 1$ маємо $f(1) = 1$. Якщо покладемо $y = z = 0$, то отримуємо, що при всіх $x \in R$

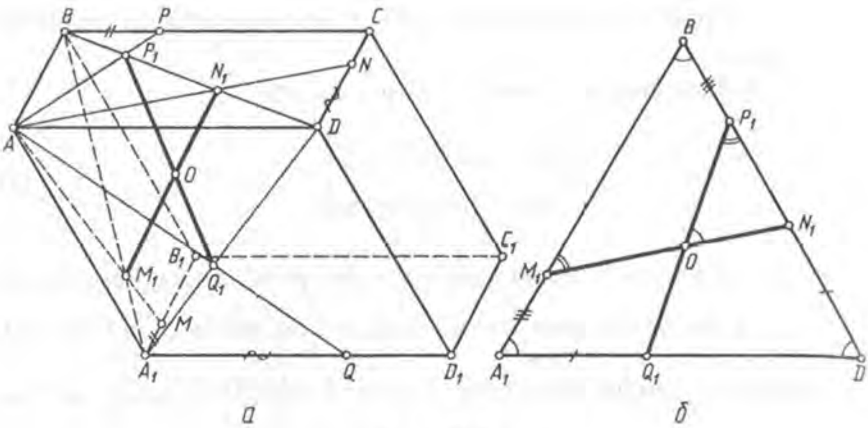


Рис. 3.39.8

$f(x) \le 1$. Проте при $y = z = 1$ маємо нерівність $f(x) \ge 1$ для всіх $x \in R$. Отже, $f(x) = 1$ для всіх $x \in R$. Перевірка є очевидною.

3.39.29. Розглянемо функції $f_i(x) = \operatorname{tg}(a_i x + 1)$ ($i = \overline{1, 10}$). Зауважимо, що $D(f_i) = R \setminus \left\{ \frac{1}{a_i}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{a_i} n \,\middle|\, n \in Z \right\}$, і, до того ж, $D(f) = R \setminus \left\{ x_{in} = \frac{1}{a_i}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{a_i} n \,\middle|\, 1 \le i \le 10,\ n \in Z \right\}$.

Нехай $x_0 \in R \setminus D(f)$. Тоді, очевидно, $x_0 + T, x_0 + 2T, ..., x_0 + 10T \in$ $\in R \setminus D(f)$. Існують два таких натуральних числа k і l ($1 \le k < l \le 10$), що для деякого $i_0 \in \{1; 2; ...; 10\}$ $x_0 + kT, x_0 + lT \in R \setminus D(f_{i_0})$. Тоді $(l - k)T = \frac{\pi}{a_{i_0}} m$ ($m \in N$), а тому справджуються нерівності

$$T \ge \frac{\pi}{a_{i_0}(l-k)} \ge \frac{\pi}{10} \min\left\{ \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_{10}} \right\}.$$

Зауваження. Насправді виконується нерівність $T \ge \pi \cdot \min\left\{ \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_{10}} \right\}$. Дійсно, нехай $b = \min\left\{ \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_{10}} \right\}$, тоді

$\alpha = \max\left\{x_{in} \middle| \ 1 \le i \le 10,\ n \le -1\right\} = -b\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$, $\beta = \min\left\{x_{in} \middle| \ 1 \le i \le 10,\right.$ $\left.n \ge 0\right\} = b\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. Зрозуміло, що функція f визначена на інтервалі $(\alpha;\beta)$ і монотонно зростає на ньому, а тому $T \ge \beta - \alpha =$ $= \pi \cdot b = \pi \cdot \min\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_{10}}\right\}$.

3.39.30. Див. розв'язання задачі 3.39.22.

Олімпіада 40
(*м. Суми, 2000 р.*)

3.40.1. Оскільки при непарному $n = 2m+1$ серед чисел 1, 2, 3, …, n є лише m парних, то серед $m+1$ чисел $k_1, k_3, k_5, \ldots, k_n$ знайдеться хоча б одне непарне. Нехай це k_{2i+1}. Відповідний співмножник $k_{2i+1} - (2i+1)$ нашого добутку є тоді парним, а отже парний і весь добуток.

3.40.2. Дана рівність елементарними перетвореннями зводиться до

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \left(\sqrt{ab} - 1\right) = 0.$$

3.40.3. *Відповідь.* $k = 2$, $l = 4$, $n = 6$, $m = 11$ або $k = 2$, $l = 11$, $m = -4$, $n = 6$. Очевидно, що число k парне.

Якщо $l = m$, то $k^n\left(2k^{l-n} - 1\right) = 2^4 \cdot 5^3$, звідси $k^n = 2^4$, $k^{l-n} = \frac{5^3+1}{2} = 63$, що неможливо.

Якщо $l = n$, то $k^m = 2\,000$, що неможливо. Аналогічно – у випадку $m = n$.

За умови $l < m < n$ маємо $k^l\left(1 + k^{m-l} + k^{n-l}\right) = 2^4 \cdot 5^3$, звідси $k^l = 2^4$, $k^{m-l} - k^{n-l} = 5^3 - 1 = 124$, що неможливо, оскільки $k^{m-l} < k^{n-l}$, аналогічно у випадку $m < l < n$.

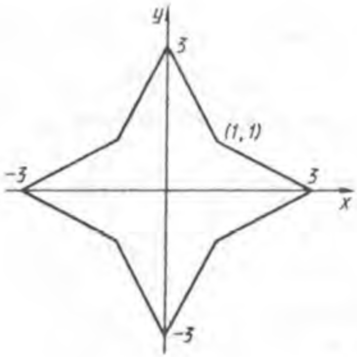


Рис. 3.40.1

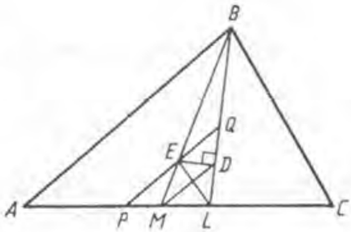


Рис. 3.40.2

Якщо $n<l<m$, то $k^n\left(k^{l-n}+k^{m-n}-1\right)=2^4\cdot 5^3$, звідси $k^n=2^4$, $k^{l-n}\left(1+k^{m-l}\right)=5^3+1=2\cdot 63$. Отже, $k^{l-n}=2$, $k^{m-l}=63-1=62$, що неможливо. Аналогічно – у випадку $n<m<l$.

При $l<n<m$ маємо $k^l\left(1+k^{m-l}-k^{n-l}\right)=2^4\cdot 5^3$, звідси $k^l=2^4$, $k^{n-l}\left(k^{m-n}-1\right)=5^3-1=2^2\cdot 31$. Отже, $k^{n-l}=2^2$, $k^{m-n}=31+1=32$, і дістаємо послідовно $k=2$, $l=4$, $n=6$, $m=11$. Аналогічно для випадку $m<n<l$.

3.40.4. Див. рис. 3.40.1.

3.40.5. Проведемо через точку E пряму, паралельну прямій AB, до її перетину з прямими AC і BL у точках відповідно P і Q (рис. 3.40.2). $\angle EQD=\angle ABL=\angle CBL=\angle ELD$, а отже трикутник EQL рівнобедрений з основою QL, звідки $QD=DL$. За теоремою Фалеса $\frac{MP}{MA}=\frac{ME}{MB}=\frac{ML}{MC}$, але $MA=MC$, звідси $MP=PL$.

Отже, MD – середня лінія трикутника PQL, тому $MD\|PQ\|AB$.

3.40.6. Перший гравець може забезпечити собі перемогу. Першим своїм ходом він ставить "+", і надалі ставить "+" після кожного знака "–", поставленого його суперником. Якщо другий у свою чергу ставить "+" , то перший поставить наступним ходом "–" і виграє, оскільки $+1+2-3=0$ і $-n+(n+1)+(n+2)-(n+3)=0$ при $n\geq 1$.

Якщо ж другий гравець весь час ставитиме знаки "–", то перший поставить у свою чергу "–" перед числом 1 001 і виграє, бо $-998+999-1\,000-1\,001=-2\,000$. А до цього моменту умова завершення гри не трапиться тому, що

$$S_m=+1-2+3-4+\ldots+(-1)^{m+1}m=\begin{cases} k, & \text{при} \quad m=2k-1, \\ -k, & \text{при} \quad m=2k, \end{cases}$$

і $S_{m_1}-S_{m_2}$ не ділиться на 2 000 при жодних значеннях $1\leq m_2<m_1\leq$ $\leq 1\,000$.

3.40.7. Нехай $x=\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$. Тоді $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}=10^5a_1+x$ та $B=\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_1}=10x+a_1$. Отже, $10A-B=10^6a_1+10x-(10x+a_1)=$ $=999\,999a_1$. Оскільки 999 999 ділиться на 37, то $(10A-B)\vdots 37$, а тому й B ділиться на 37.

3.40.8. Нехай точки O, O_A, O_B – відповідно центри кіл ω, ω_A, ω_B. За умовою $AB\perp CD$, тому $O_AO_B\parallel AB$. Очевидно, що $O_A\in AO$ та $O_B\in BO$. Трикутник OAB є рівнобедреним, звідси $O_AA=O_BB$.

3.40.9. Якщо деяка цифра зустрічається принаймні в чотирьох числах, тоді всі інші цифри в них різні, і повинно бути принаймні дев'ять цифр, з яких дані числа складені. Але ж ми маємо у своєму розпорядженні лише вісім цифр. Таким чином, кожна цифра може належати до запису здебільшого трьох чисел. Отже, зазначена кількість чисел не більша за $8=\dfrac{8\cdot 3}{3}$. Наведемо приклад набору, який складається з восьми чисел: 123, 145, 167, 348, 268, 578, 356, 247.

3.40.10. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Потрібно знайти всі такі натуральні числа n, що $n = 2\,000S(n)$. Добре відомо, що $9 \mid (n - S(n))$, звідси $9 \mid 1999S(n)$, тобто $9 \mid S(n)$. Нехай k – кількість цифр числа n; $k \geq 5$, оскільки $n \geq 2\,000 \cdot 9 = 18\,000$. Також $S(n) \leq 9k$ і $10^{k-1} \leq n \leq 18\,000k$, що, очевидно, можливо лише при $k = 5$ і $k = 6$. Тому $S(n) \leq 9 \cdot 6 = 54$, тобто $S(n) \in \{9;\ 18;\ 27;\ 36;\ 45;\ 54\}$. Далі перевіркою переконуємося, що єдиним числом, що задовольняє умову, є $n = 18\,000$.

3.40.11. *Відповідь.* $n \in \{-18,\ -10,\ -9,\ -4\}$. Нехай $n^2 + 19n + 99 = m^2$, $m \in Z$ (можемо вважати, що $m \geq 0$). Цю рівність запишемо у вигляді $(2n+19)^2 = 4m^2 - 35$. Отже, $(2m - 2n - 19)(2m + 2n + 19) = 35$.

3.40.12. За нерівністю Коші $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{3a^2b} + \frac{1}{3ab^2} + \frac{1}{b^3} = \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{1}{3ab}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3b^3}} + \frac{2}{3ab}\sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{8}{3\sqrt{(ab)^3}}$. Залишається помітити, що нерівність $\frac{8}{3\sqrt{(ab)^3}} \geq \frac{64}{3(a+b)^3}$ еквівалентна нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

3.40.13. Позначимо через O точку перетину медіан трикутника ABC. Нехай продовження медіан, які виходять з вершин A, B, C перетинають описане коло в точках відповідно P, Q, R (рис. 3.40.3). Трикутник PRO подібний до трикутника CAO за двома кутами, оскільки $\angle PAC = \angle PRC$ і $\angle RCA = \angle RPA$. Отже, $\frac{PR}{CA} = \frac{PO}{CO}$. Аналогічно встановлюємо, що $\frac{PQ}{AB} = \frac{PO}{BO}$. Оскільки $PR = PQ$, то з

Рис. 3.40.3

одержаних рівностей маємо $\frac{AB}{AC}=\frac{BO}{CO}=\frac{m_b}{m_c}$. Використовуючи відому формулу, за якою довжини медіан виражаються через довжини сторін трикутника, матимемо $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{2AB^2+2BC^2-AC^2}{2AC^2+2BC^2-AB^2}$. Тобто $\left(AC^2-AB^2\right)\times$ $\times\left(2BC^2-AB^2-AC^2\right)=0$. Аналогічно одержуємо ще дві рівності: $\left(AC^2-BC^2\right)\left(2AB^2-BC^2-AC^2\right)=0$, $\left(BC^2-AB^2\right)\left(2AC^2-AB^2-BC^2\right)=0$. Звідси випливає (доведіть це самостійно), що $AB=BC=CA$.

3.40.14. Доведемо, що відповідь на запитання задачі негативна. Припустимо супротивне і позначимо відмінну від прямокутника розмірами $1\times k$ k-клітинкову фігуру, про яку йдеться в умові задачі, через F. Пофарбуємо клітинки нашої дошки розмірами $m\times n$ у k кольорів у "класичний" діагональний спосіб, але так, щоб якісь дві клітинки фігури F, котрі мають тільки одну спільну вершину (такі дві клітинки у відмінній від прямокутника розмірами $1\times k$ фігурі F обов'язково присутні!), виявилися однаково пофарбованими. Цього, очевидно, завжди можна досягти при будь-якому розташуванні фігури F, оскільки напрямок діагонального розфарбування можна обирати довільно. При такому розфарбуванні кожен прямокутник розмірами $1\times k$ містить по одній клітинці кожного з k кольорів, але зауважимо, що тоді й у k-клітинковій фігурі F мають бути клітинки всіх кольорів (за умовою задачі дошку розмірами $m\times n$ можна розрізати на фігурки, кожна з яких є прямокутником $1\times k$). Отримали суперечність.

3.40.15. Легко показати, що при всіх $x\in R$ $f(x)=f(x+4)$. Таким чином, $f(2\,000)=2$.

3.40.16. Із умови задачі випливає, зокрема, що $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$, $\frac{\pi}{2}\le\beta\le\pi$, а отже, $\alpha-\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Залишається скористатися таким співвідношенням: $(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=$ $=2-(\cos\alpha+\cos\beta)^2+2\cos(\alpha-\beta)=1+2\cos(\alpha-\beta)$.

3.40.17. Оскільки $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geq\left(\dfrac{a+b}{ab\sqrt{2}}\right)^2$, то сума квадратів, обернених до записаних на дошці чисел, не збільшуватиметься при проведенні вказаної операції. Таким чином, коли на дошці залишиться єдине число X, то для нього буде виконуватися нерівність $\dfrac{1}{X^2}\leq n$.

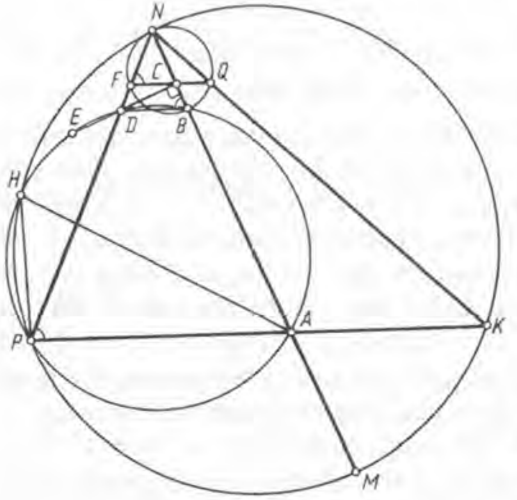


Рис. 3.40.4

3.40.18. Якщо два кола дотикаються внутрішнім чином, то, як відомо, вони є гомотетичними відносно точки дотику. Отже, $FQ \parallel PK$. Зауважимо, що точки N і E можуть лежати як по один бік відносно прямої MH, так і по різні боки відносно цієї прямої (рис. 3.40.4 відповідає першому з цих випадків). Звідси випливає, що $\angle KPN=\angle QFN=\angle DBC$, адже чотирикутник $APDB$ є вписаним. Тоді чотирикутник $BCFD$ також є вписаним, а тому $\angle BCD=\angle BFD=90^\circ$ і $MC\perp CE$. Оскільки $\angle MHN=90^\circ$, то для завершення доведення (в обох зазначених випадках) досить показати, що $\angle MHE=90^\circ$. А це, у свою чергу, буде доведено, якщо ми встановимо належність точок M,H,E,C одному колу. Останнє, як нескладно помітити (для обох випадків), є наслідком рівності кутів HMC та HPD.

3.40.19. Нехай $k=10^{n+1}$. Тоді $X=k^5+2k^2-1$, $Y=k+1$. Твердження задачі отримуємо внаслідок рівності

$$k^5+2k^2-1=(k+1)\left(k^4-k^3+k^2+k-1\right).$$

3.40.20. *Відповідь.* $x=4$, $y=1$. Нехай $t=x+y$, при цьому, очевидно, $t>1$. Тоді $x=\dfrac{144t^2}{25(t+1)^2}$, $y=\dfrac{16t^2}{25(t-1)^2}$ і для знаходження значення t отримаємо рівняння

$$t=\frac{144t^2}{25(t+1)^2}+\frac{16t^2}{25(t-1)^2}.$$

Тобто

$$1=\frac{144}{25\left(t+\frac{1}{t}+2\right)}+\frac{16}{25\left(t+\frac{1}{t}-2\right)}.$$

Із останнього рівняння легко знайти, що $t=5$.

3.40.21. Нехай $O=CQ\cap PC_1$, $R=AD\cap CC_1$ (рис. 3.40.5). Оскільки $AB_1C_1D_1$ – ромб, то трикутник QOC_1 рівнобедрений і $OQ=OC_1$. За теоремою Фалеса точка D є серединою відрізка AR. Відрізок CD є медіаною трикутника ACR, а відрізок CO – медіаною трикутника PCC_1 (адже $PC_1 \parallel AR$). Таким чином, $OC_1=OQ=OP$ і точка O є центром описаного навколо трикутника PQC_1 кола. Отже, $\angle AQP=90°$, що і потрібно було довести.

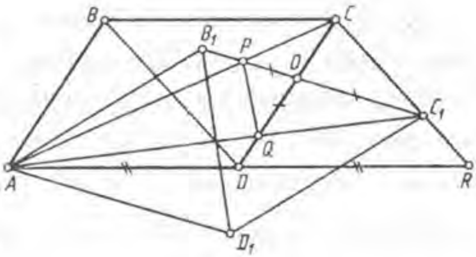


Рис. 3.40.5

Зауваження. Твердження задачі буде встановлено, якщо довести, що $PQ \parallel B_1D_1$. Це можливо зробити за допомогою методу координат. Спочатку спроектуємо "конструкцію", про яку йдеться в умові задачі, на деяку площину таким чином, щоб $\angle BAD$ "перетворився" на прямий (при цьому паралельними проекціями даного ромба та паралелограма будуть прямокутники).

3.40.22. *Відповідь.* 11 разів. Індукцією по n доведемо, що в момент часу $t=2^n$ $(n\geq 0)$ хвилин на координатній площині залишаються

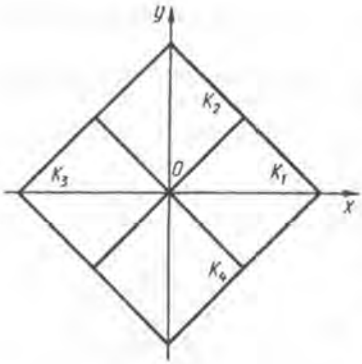


Рис. 3.40.6

рівно чотири віруси – "центри" – у точках з координатами $\left(2^n;\ 0\right)$, $\left(-2^n;\ 0\right)$, $\left(0;\ 2^n\right)$, $\left(0;\ -2^n\right)$, а на проміжку часу $\left[2^n+1;\ 2^{n+1}-1\right]$ загальна кількість вірусів буде більше за чотири, причому "колонії" вірусів, що породжуються чотирма зазначеними "центрами", між собою не "конфліктуватимуть" (адже на такому проміжку часу ці "колонії" містяться строго всередині квадратів відповідно K_1, K_2, K_3, K_4 (рис. 3.40.6)). База індукції при $n=0$ є очевидною. Припускаючи, що твердження доведено для $n=k$, встановимо його для $n=k+1$. Отже, нехай у момент часу $t=2^k$ залишилося чотири віруси, якими започатковано відповідні "колонії". До кожної з цих чотирьох "колоній" вірусів можемо для моменту часу $t=2^{k+1}$ застосувати індукційне припущення (вважаючи момент часу $t=2^k$ початковим) і переконатися, враховуючи правило взаємознищення вірусів, що при $t=2^{k+1}$ загальна кількість вірусів становитиме саме чотири (у точках з координатами $\left(2^{k+1};\ 0\right)$, $\left(-2^{k+1};\ 0\right)$, $\left(0;\ 2^{k+1}\right)$, $\left(0;\ -2^{k+1}\right)$ опиниться по одному вірусу, котрі залишаться, а всі віруси, що потраплять у точки з координатами $(0;0)$, $\left(2^k;\ 2^k\right)$, $\left(-2^k;\ 2^k\right)$, $\left(2^k;\ -2^k\right)$, $\left(-2^k;\ -2^k\right)$ зникають). Залишається зауважити, що моменти часу $t=2^n$ $\left(n\geq 0\right)$ хвилин на вказаному в умові задачі проміжку зустрічаються одинадцять разів.

3.40.23. *Відповідь*. Не можна. Пофарбуємо одиничні кубики куба розмірами $11\times 11\times 11$ у чорний та білі кольори в шаховому порядку (одиничні кубики із спільною гранню повинні мати різний колір). Тоді різниця чорних та білих кубиків, зайнятих будь-якою з двох даних фігур, буде ділитися на 5. У той же час в усьому кубі розмірами $11\times 11\times 11$ ця різниця дорівнює 1 обо -1.

3.40.24. *Відповідь.* Не існує. Диференціюванням рівності 3) умови, одержимо

$$3f^2(2\,000+x)f'(2\,000+x)=-2f(2\,000-x)f'(2\,000-x)+1.$$

При $x=0$ отримаємо $f(2\,000)=1$ або $f(2\,000)=\frac{1}{3}$. Поклавши в рівності 3) $x=0$, матимемо суперечність зі знайденими значеннями $f(2\,000)$.

3.40.25. Нехай H – ортоцентр трикутника ABC (рис. 3.40.7). Тоді H є центром кола, вписаного в $A_1B_1C_1$. Чотирикутник ABA_1B_1 є вписаним, тому $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. Тоді $\angle A_2B_1H = 90° - \angle ABC$, $\angle A_2HB_1 = \angle ABC$. Оскільки чотирикутник $B_1A_2HC_2$ вписаний, $\angle A_2C_2B_1 = \angle ABC$. Значить $A_2C_2 \parallel AC$. Аналогічно доводимо, що $A_2B_2 \parallel AB$ і $B_2C_2 \parallel BC$. Твердження задачі випливає з існування гомотетії, що переводить $A_2B_2C_2$ у ABC.

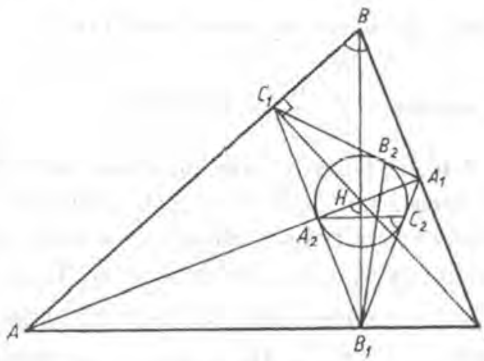


Рис. 3.40.7

3.40.26. *Відповідь.* Не існують. Нехай m та n задовольняють умову. Число m^2+1 не може ділитися на 4, тому n парне. Тоді $n^2-1=4l-1$ для деякого $l \in N$. Число n^2-1 матиме хоча б один простий дільник вигляду $p=4k-1$, $k \in N$, він буде й дільником m^2+1. Покажемо, що тоді p можна подати у вигляді суми квадратів двох цілих чисел.

Розглянемо всі пари (r,s) цілих чисел такі, що $0 \le r$, $s<\sqrt{p}$. Оскільки кількість таких пар більша за p, знайдуться пари (r_1,s_1) і (r_2,s_2), для яких числа r_1+ms_1 та r_2+ms_2 мають однакову остачу при діленні на p. Тоді для $u = r_1 - r_2$, $v = s_1 - s_2$ число $u + mv$ ділиться на p. Оскільки $u^2 + v^2 = (u - mv)(u + mv) + v^2(m^2 + 1)$, то $u^2 + v^2$ ділиться на p. З того, що $u^2 < p$, $v^2 < p$, p – просте, випливає, що $u^2 + v^2 = p$. Водночас неможливо, щоб $u^2 + v^2 = 4k - 1$.

Зауваження. Задача легко розв'язується за допомогою теорії квадратичних лишків.

3.40.27. Маємо, що $f(x) = \left(4x - \frac{9\pi^2}{x}\right)^2 + \left(72\pi^2 - 10\sin^2 x\right)$. Найменше значення першого доданка дорівнює 0, другого – $72\pi^2 - 10$. Обидва ці значення досягаються при $x = \frac{3\pi}{2}$. Тому найменше значення дорівнює $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 72\pi^2 - 10$.

3.40.28. Припустимо, що такий тетраедр існує, тоді з умови задачі випливає, що $\angle ABD + \angle CBD = \angle ACD + \angle BCD = 90°$. Розглянемо розгортку трьох граней тетраедра, в яких D є вершиною, "розділивши" при цьому вершину A на A_1 і A_2. Тоді A_1BCA_2 – квадрат, трикутник A_1A_2D – правильний. Звідси отримаємо, що $\angle BA_1D = \angle CA_2D = 30°$. Тобто $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$, що неможливо, оскільки плоский кут тригранного кута менший за суму двох інших плоских кутів.

3.40.29. Маємо, що для будь-якого невід'ємного t $2t^3 + 1 \ge 3t^2 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1) \ge 0$. Тому $2a^3b + b \ge 3a^2b$, $32b^3c + c \ge 3b^2c$, $2c^3a + b \ge 3c^2a$. Додамо почленно ці нерівності та використаємо те, що $a + b + c = 3$.

3.40.30. а). *Відповідь*. 11 раз. Див. розв'язання задачі 3.40.22.

б) *Відповідь*. 4 096 вірусів. *І спосіб*. Індукцією по m доводимо, що через $2^{k_1} + 2^{k_2} + ... + 2^{k_m}$ хвилин, $k_1 > k_2 > ... > k_m \ge 0$, на площині після взаємознищення лишаються 4^m вірусів. При $m = 1$ справедливість даного твердження була доведена при розв'язанні пункта а). Нехай воно доведене при всіх $m < t$ і $l = 2^{k_1} + 2^{k_2} + ... + 2^{k_t}$. За припущенням індукції в момент $l - 2^{k_t}$ хвилин буде 4^{t-1} вірусів, які назвемо "центрами". Протягом наступних $2^{k_{t-1}}-1$ хвилин віруси, породжені різними "центрами", не будуть взаємознищуватися. Через $2^{k_{t-1}}$ хвилин кожний з 4^{t-1} "центрів" дасть по 4 віруси, що знаходяться від центра на відстані 2^{k_t}. Так отримаємо 4^t віруси. Твердження індукції доведено.

Відповідь випливає з того, що $2\,000 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4$.

II спосіб. Нехай $F(t)$ – кількість вірусів у момент часу t (відразу після взаємознищення вірусів у цей момент часу). Очевидно (див. розв'язання задачі 3.40.22), що для $t \in \left[2^k; 2^{k+1}\right)$, $k \in Z$, $k \geq 0$, виконується рівність $F(t) = 4F(t-2^k)$. Далі, оскільки $2\,000 = 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4$, то $F(2\,000) = 4\,096$.

Зауваження. Нескладно також індукцією по m довести, що при $k_1 > k_2 > ... > k_m \geq 0$ $F(2^{k_1} + 2^{k_2} + ... + 2^{k_m}) = 4^m$.

Соросівські олімпіади

Олімпіада 1

Перший етап

С.1.1. Наприклад: $B=\{3,4,5,6,12,13\}$, $C=\{7,8,9,10,11,14\}$.

С.1.2. Розіб'ємо вершини даного 72-кутника на 24 трійки, де кожна трійка – вершини правильного трикутника. Якщо якась точка трійки позначається червоним і в трійці немає синіх точок, Костя одразу робить хід у цю трійку. Якщо синя точка там вже є, Костя робить хід будь-куди. Костя завжди має можливість так ходити, до того ж при цьому не утвориться правильний трикутник з червоних вершин.

С.1.3. *Відповідь.* 1. Позначимо $a+b=x$, $b+c=y$. Тоді даний вираз є $\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\geq\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$ (тут враховано, що $x\geq 2$, $y\geq 2$). Значення 1 досягається при $a=b=c=1$.

С.1.4. Нехай ABC – шуканий трикутник, в якому відома вершина A, точка перетину медіан M та ортоцентр H. Насамперед знаходимо A_1 – середину BC, відобразивши A відносно M з коефіцієнтом $-\frac{1}{2}$. Через A_1 перпендикулярно до AH проводимо пряму BC. Відобразивши H відносно M з коефіцієнтом $-\frac{1}{2}$, знаходимо центр описаного кола O. Знаючи його радіус OA, на прямій BC знаходимо вершини B і C.

С.1.5. *Відповідь.* (3, 2, 2) та (2, 1, 3). З рівняння видно, що $p\geq 2$, $r\geq 2$. Звідси $\frac{q}{q^r-1}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow(r-2)q\leq 1$. Тому $r=2$ або $r=3$. У першому випадку дане рівняння еквівалентними перетвореннями зводиться до $(p-2)(q-1)=1$ і маємо $p=3$, $q=2$. У другому випадку обов'язково $q=1$ і $p=2$.

С.1.6. *Відповідь.* Три кола. Проведемо з центра шестикутника відрізки до вершин через одну так, що розбиваємо даний шестикутник на три ромби. У кожного з цих ромбів радіус вписаного кола дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{4}$, тому три кола вписати можна. Якщо вдасться вписати чотири кола, то з чотирьох центрів два будуть належати якомусь одному з ромбів, причому хоча б один з них лежатиме не на межі ромба. Ці центри розташовуються на відстані, що не менша $\frac{\sqrt{3}}{4}$ від сторін шестикутника, тобто в шестикутнику, який удвічі менший за даний з тим же центром. Відстань між центрами кіл не менша за $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Дві точки в одному ромбі не можуть задовольняти всі ці вимоги.

С.1.7. Позначимо центри вписаних кіл трикутників ADE, BDE та BCD через O_1, O_2, та O_3 і радіуси – відповідно через r_1, r_2, та r_3. Також позначимо $a = BC$, $b_1 = CD$, $b_2 = AD$, $c_1 = BE$, $c_2 = AE$, $d = BD$, $e = DE$. Оскільки $O_2D \perp AC$, то досить довести, що $O_2D > r_1$ та $O_2D > r_3$. Неважко підрахувати, що $O_2D = \frac{d+e-c_2}{\sqrt{3}}$, $r_1 = \frac{b+e-c_1}{2\sqrt{3}}$, $r_3 = \frac{b_1+d-a}{2\sqrt{3}}$. Наприклад, $O_2D > r_1$ випливає з $e > b_2 - c_1$ (нерівність трикутника в AED) та $d > c_2$ (в $\Delta\, BED$ $\angle BED > 60° = \angle BDE$). Подібним чином доводимо, що $O_2D > r_3$.

С.1.8. Досить 12 тур, розставлених, наприклад, на клітинах a2, a3, a4, b1, c1, d1, e8, f8, g8, h5, h6, h7. Доведемо, що меншої кількості не вистачить. Якщо на якійсь горизонталі немає тури, то на кожній вертикалі їх не менше двох, разом – не менше 16. Аналогічно міркуємо, якщо деяка вертикаль не містить тури. Тепер розглянемо тури, що стоять по одній на горизонталі (їх має бути не менше 5, інакше всього тур буде не менше 12). Якщо всі ці тури стоять на одній вертикалі, то на інших вертикалях має бути ще хоча б по одній турі, разом – не менше 5 + 7 = 12. Отже, ці тури займають не менше двох вертикалей. Аналогічно тури, що стоять по одній на вертикалях, займають не менше двох горизонталей. Легко помітити, що на кожній з цих чотирьох ліній має бути не менше трьох тур, і разом не менше дванадцяти.

С.1.9. Неважко довести, що для $x_1 \le x_2 \le x_3$ та $y_1 \le y_2 \le y_3$ вираз $x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + x_3y_{i_3}$ (i_1, i_2, i_3 попарно різні) набуває найменшого значення, коли $i_1 = 3$, $i_2 = 2$, $i_3 = 1$. Тому ліва частина даної нерівності не менша за $\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{b^2-1}+\frac{c}{c^2-1}$ (a, b та c беремо як x_k, $\frac{1}{a^2-1}, \frac{1}{b^2-1}$ і $\frac{1}{c^2-1}$ – як y_k). Далі $\frac{a}{a^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)$. Додаємо аналогічні рівності для b та c і маємо: $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=\left(\frac{1}{a-1}+a-1\right)+$ $+\left(\frac{1}{b-1}+b-1\right)+\left(\frac{1}{c-1}+c-1\right)-3\geq 2+2+2-3=3$ (тут скористалися тим, що $a+b+c=6$). $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq 1$, оскільки $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\times$ $\times(x+y+z)\geq 9$.

С.1.10. Зрозуміло, що числа n, кратні 5, умову задачі не задовольняють. Доведемо, що всі інші n нас влаштовують. Спочатку розглянемо $n=2^k$. Для $a\in\{2,4,6,8\}$ через M_a позначаємо те число з чотирьох 2^{k+1}, 2^{k+2}, 2^{k+3}, 2^{k+4}, що закінчується на a. Візьмемо M_8. Тоді на кожному кроці в запису взятого числа знаходимо саму праву цифру, відмінну від 8 та 9, і нехай це X на l-му місці праворуч. Беремо з чисел $X+2$, $X+4$, $X+6$, $X+8$ те $X+a$, запис якого закінчується на 8 або 9, і до взятого числа додаємо $M_a 10^{l-1}$. Це робимо доти, поки не будемо мати останніми $k+1$ цифрами – 8 або 9. Відкинувши всі цифри, крім $k+1$ останньої, одержимо потрібне число, кратне 2^k. Для довільного n, що не ділиться на 5, $n=2^k m$, де m і 10 взаємно прості. Через N_1 позначимо число, кратне 2^k, тільки з цифрами 8 та 9 у запису. Через N_i позначимо число, що утворюється записом N_1 i разів одне за одним, $i\geq 1$. Потім визначаємо N_i та N_j, $i>j$, з однаковою остачею при діленні на m та беремо N_i-N_j. Відкинувши в кінці запису нулі, одержуємо потрібне число.

С.1.11. Див. розв'язання задачі С.1.1.

С.1.12. Див. розв'язання задачі С.1.3.

С.1.13. Див. розв'язання задачі С.1.5.

С.1.14. Див. розв'язання задачі С.1.6.

С.1.15. $|a_1+a_2+...+a_n-ns|=\left|(a_1+a_2+...+a_n)-n\frac{a_1+a_2+...+a_{1994}}{1994}\right|=$

$$=\left|\frac{1-n}{1994}(a_1+a_2+...+a_n)-n\frac{a_{n+1}+...+a_{1994}}{1994}\right|\le\frac{1-n}{1994}n+n\frac{1994-n}{1994}=$$
$$=n\frac{1994-n}{997}\le 997.$$

С.1.16. *Відповідь*. $f(x)=0$. Взявши $x=y=0$, отримаємо $f(0)=0$. Для $y=0$ маємо $f(x+1)=f(x)+f(1)$ та $f(x+n)=f(x)+nf(1)$. Для $y=2$ $f(x+4)=$ $=f(2^x)+f(2)=f(0+2^x)+2f(1)=f(x)+3f(1)$. З іншого боку, $f(x+4)=$ $=f(x)+4f(1)$, тому $f(1)=0$ і $f(x+1)=f(x)$. Маємо $f(2^{y+1})=f(0+2^{y+1})=$ $=f(1)+f(y+1)=f(y)$. З іншого боку, $f(2^{y+1})=f(2^y+2^y)=f(y)+f(2^{2^y})$, тому $f(2^{2^y})=0$. Будь-яке число $z>1$ має вигляд $z=2^{2^y}$, де $f(z)=0$. Для інших чисел використовуємо потрібну кількість разів рівність $f(z-1)=f(z)$. Робимо перевірку.

С.1.17. Див. розв'язання задачі С.1.7.

С.1.18. Див. розв'язання задачі С.1.8.

С.1.19. Від даного трикутника ABC можна відрізати вписаний чотирикутник BCC_1B_1, взявши $B_1\in AC$ та $C_1\in AB$ так, щоб $\angle AB_1C_1=\angle B$ і $\angle AC_1B_1=\angle C$. Трикутник можна розбити на три вписані чотирикутники, опустивши три перпендикуляри з довільної внутрішньої точки на сторони трикутника. Даний 1 994-кутник спочатку розіб'ємо на 1 992 трикутники. Вказаним чином ці трикутники розіб'ємо на $3\cdot 1\,992=5\,976$ чотирикутників. Збільшувати кількість чотирикутників можна на один, якщо попередньо від одного з трикутників відрізати вписаний чотирикутник у вищеописаний спосіб.

С.1.20. Див. розв'язання задачі С.1.10.

С.1.21. Поділивши чисельник та знаменник на 3^x, отримаємо в чисельнику спадну функцію, а в знаменнику – зростаючу. Тому при $x=1$ наш вираз набуває найбільшого значення на множині $[1,+\infty)$ і воно дорівнює $\frac{5}{7}$.

С.1.22. *Відповідь*. $\angle ACB=2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}\right)$. Позначимо $\angle KAL=\alpha$. Чотирикутник $KADL$ вписаний, тому $\angle KDL=\alpha$, $\angle LAD=\alpha$, $\angle LCA=\pi/2-2\alpha$. Відомо, що для довільного гострокутного трикутника, наприклад PQR, виконується співвідношення $\frac{QR_1}{R_1P}=$

$=\dfrac{\sin\angle QRR_1\cdot\cos\angle PRR_1}{\cos\angle QRR_1\cdot\sin\angle PRR_1}$, де RR_1 – його висота. Записавши такі відношення для $\dfrac{BK}{KL}$ з трикутників ABL та CBL, отримаємо рівність

$$\frac{\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\cos 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\sin 2\alpha}.$$

Розв'язуємо це рівняння.

С.1.23. Див. розв'язання задачі С.1.6.

С.1.24. Так, можна. Першого ферзя ставимо довільно. Потім ставимо ще вісім ферзів так, щоб вони били дві горизонталі, сусідні з вже зайнятою, дві сусідні вертикалі та чотири сусідні діагоналі, і при цьому не били один одного. Відтак продовжуємо цей процес нескінченно, щоразу займаючи ще по дві горизонталі, по дві вертикалі та по чотири діагоналі (можливо, інколи потрібно буде для цього не вісім ферзів, а менше – відповідна лінія вже битиметься).

С.1.25. Нехай $x>0$ та $y>0$ (при $x=0$ або $y=0$ нерівність випливає з $f(0)\le 0$). Тоді із зростання $\dfrac{f(x)}{x}$ маємо $\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{f(x+y)}{x+y}$ і $\dfrac{f(y)}{y}\le\dfrac{f(x+y)}{x+y}$, звідси відповідно $f(x)\le\dfrac{x}{x+y}f(x+y)$, $f(y)\le\dfrac{y}{x+y}f(x+y)$. Додаємо ці дві нерівності і одержуємо потрібну.

С.1.26. Див. розв'язання задачі С.1.16.

С.1.27. *Відповідь.* $y=x-\dfrac{1}{4}$. Адже маємо $x^4-x^2+x\ge x-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0$. Нерівність виконується всюди, і лише в двох точках $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ маємо рівність. Як легко довести, це й будуть точки дотику.

С.1.28. а) Нехай $P(x)=\dfrac{P_1(x)}{m}$, де P_1 – многочлен з цілими коефіцієнтами, m – натуральне число. Нехай $m=2^n\cdot l$, де l – непарне. Тоді $P_1(x+2^{n+1})-P_1(x)$ ділиться на 2^{n+1}, тому $P(x+2^{n+1})-P(x)$ ділиться на 2. Числа $P(x+2^{n+1})$ та $P(x)$ одночасно парні або непарні. Тому дана послідовність має період, на довжину якого число 2^{n+1} має ділитися.

б) Для довжини періоду 2^n проводимо індукцію за n. При $n = 0$ шуканими многочленами будуть тотожні константи 1 та – 1. Нехай твердження доведено для n і дано послідовність з періодом 2^{n+1}: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$, де $|\varepsilon_i| = 1$.

Нехай P_1 – многочлен для послідовності $\{\varepsilon_{2i-1}, i \geq 1\}$, а P_2 – многочлен для $\{\varepsilon_{2i}, i \geq 1\}$ (вони існують, оскільки взяті послідовності мають період 2^n). Тоді для $\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$ можна взяти $P(x) = x^m P_1\left(\frac{x+1}{2}\right) + (x+1)^m P_2\left(\frac{x}{2}\right)$, де m обираємо більшим, ніж степені P_1 і P_2, щоб P був цілочисловим.

С.1.29. Див. розв'язання задачі С.1.10.

С.1.30. Нехай M_{ij} є точкою Серве. Даний тетраедр позначимо $A_i A_j A_k A_l$, причому A_l обираємо так, що $M_{ij} A_l$ не є діаметром описаної сфери тетраедра. Тоді площина Серве $\alpha(M_{ij})$ та площина $A_i A_j A_k$ не збігаються. Три проекції M_{ij} на сторони трикутника $A_i A_j A_k$ лежать на одній прямій – перетині вказаних площин. З теореми Симсона випливає, що проекція M_{ij} на $A_i A_j A_k$ (цю точку позначимо через N_{ij}) лежить на описаному колі трикутника $A_i A_j A_k$. Тому, якщо через M_{ijk} позначимо проекцію M на $A_i A_j A_k$, то симетричний образ M_{ijk} відносно B_{ij} лежить на описаному колі. Аналогічно на цьому колі лежать образи M_{ijk} відносно B_{jk} і B_{ki}. Отже, M_{ijk} – ортоцентр $A_i A_j A_k$ і $N_{ij} A_i \perp A_k A_i$, $N_{ij} A_j \perp A_k A_j$. Тому проекціями M_{ij} на $A_k A_i$ і $A_j A_k$ є точки відповідно A_i та A_j. Аналогічно, розглядаючи M_{ij} та трикутники $A_i A_k A_l$, $A_j A_k A_l$, отримаємо $M_{ij} A_i \perp A_i A_k$, $M_{ij} A_j \perp A_j A_k$. Зокрема, $M_{ij} A_i A_j$ перпендикулярна до $A_k A_l$ (лінії перетину $A_i A_k A_l$ і $A_j A_k A_l$). Тому проекція M_{ij} на $A_k A_l$ лежить в $M_{ij} A_i A_j$.

Отже, $\alpha(M_{ij}) = M_{ij} A_i A_j$. Легко помітити, що $M \in M_{ij} A_i A_j$, і, отже, лежить у площині Серве $\alpha(M_{ij})$.

Фінальний етап

С.1.31. *Відповідь.* 143. Нехай годинник показує 12 год. Через t год годинна стрілка пройде шлях $30°t$, а хвилинна – $360°t$. Якщо через t_1 год утворилося чудове положення ($t_1 < 12$), то знайдеться $t_2 < 12$ таке, що положення $(30°t_2, 360°t_2)$ утворене з попереднього перестановкою стрілок. Тобто існують такі цілі k та l, що

$$\begin{cases} 360^\circ t_1 - 30^\circ t_2 = 360^\circ k, \\ 360^\circ t_2 - 30^\circ t_1 = 360^\circ l, \\ 0 \le t_{1,2} < 12. \end{cases}$$

З цієї системи отримуємо $t_1 = \dfrac{12}{143}(12k + l)$, $t_2 = \dfrac{12}{143}(k + 12l)$. Отже,

$$\begin{cases} 0 \le 12k + l < 143, \\ 0 \le 12l + k < 143. \end{cases}$$

Легко помітити, що ця система має лише невід'ємні розв'язки, причому l, $k \le 11$. Якщо хоча б одне з l і k менше за 11, то нерівності виконуються. Отже, загальна кількість чудових положень $(12)^2 - 1 = 143$.

С.1.32. Для розв'язку треба розглянути три окремі випадки: 1) відрізки AA_1 і BB_1 перетинаються; 2) продовження відрізка BB_1 перетинає відрізок AA_1; 3) перетинаються продовження відрізків AA_1 і BB_1. Розглянемо, наприклад, перший з них (інші розглядаються аналогічно, з невеликими змінами). Нехай кола, описані навколо трикутників, перетинаються в точках N і M (рис. С.1.1). Сполучаємо точку N з точками A_2, A_1, B_2, B_1. Пари кутів MNB_1 і MA_1B_1, A_2NM і A_2B_2M, A_2NB_2 і A_2MB_2 рівні, як вписані в коло і такі, що спираються на одну й ту саму хорду. $\angle MA_1B_1 = \angle MA_2B_2$, оскільки трикутники MA_1B_1 і MA_2B_2 подібні за умовою. Тому $\angle B_2NB_1 = \angle B_2NA_2 + \angle A_2NM + \angle MNB_1 = \angle A_2MB_2 + \angle A_2B_2M + \angle B_2A_2M = \pi$, а отже, точки B_2, N і B_1 лежать на одній прямій. Те саме для точок A_2, N, A_1.

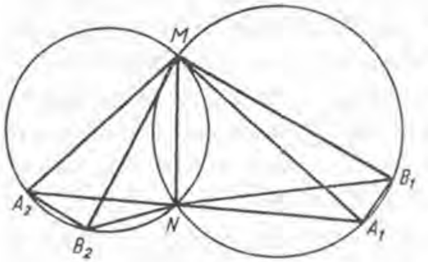


Рис. С.1.1

С.1.33. За допомогою методу математичної індукції доведемо аналогічне твердження для всіх квадратних дощок розмірами $(2n + 1) \times (2n + 1)$. База $n = 1$. Можливі три варіанти (рис. С.1.2).

Індуктивний крок: $2n + 1 \to 2n + 3$. "Відріжемо" від нашого квадрата з усіх боків смугу завширшки в одну клітинку. Отримаємо квадрат розмірами $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Якщо і павук, і муха знаходяться в цьому квадраті, то, за припущенням індукції, потрібний шлях існує. Розріжемо довільну його ділянку, що прилягає до межі квадрата, та рухаючись від одного кінця, обійдемо смугу, яку ми щойно відрізали. Наша подорож закінчиться в клітинці, сусідній з другим обрізаним кінцем, а отже, з'єднавши, отримаємо потрібний шлях. Якщо і павук, і муха знаходяться на відрізаній смузі, то рухаємо павука по цій смузі до місця, де сидить муха, а потім робимо крок у внутрішній квадрат і так само рухаємо муху в той самий бік до місця, де сидів павук, і прямуємо у внутрішній квадрат, де використовуємо припущення індукції.

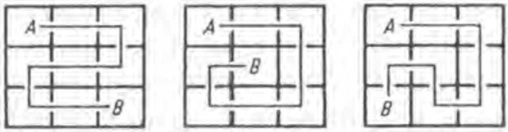


Рис. С.1.2

Якщо один з них знаходиться у відрізаній смузі, а інший – у внутрішньому квадраті, то, за винятком випадку, коли вони стоять поряд у кутових клітинах, перший може обійти смугу та вступити у внутрішній квадрат, звівши задачу до припущення індукції. Випадок, що залишився, розбирають аналогічно.

С.1.34. Для чисел $\overline{a_1 0 a_2 0 \ldots a_n 0} = A$ та $\overline{b_1 0 b_2 0 \ldots b_n 0} = B$, утворених одне з одного перестановкою цифр, твердження очевидне. Отже, нам досить довести, що, коли $X = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$, то суми цифр чисел $5X$ та $5\,\overline{a_1 0 a_2 0 \ldots a_n 0}$ однакові. Запишемо множення в стовпчик:

$$\begin{array}{r} a_1 \ldots a_n \\ \underline{\qquad 5} \\ Y_1 X_1 \\ Y_2 X_2 \\ \vdots \\ \underline{Y_n X_n} \\ S_{n+1} \ldots S_2 S_1, \end{array}$$

причому $X_i = 0$ або 5 та $Y_i = 0, 1, 2, 3, 4$. Очевидно $5\,\overline{a_1 0 a_2 0 \ldots a_n 0} = \overline{Y_n X_n Y_{n-1} X_{n-1} \ldots Y_1 X_1 0}$. Легко помітити, що $S_i = X_i + Y_{i-1}$, а отже, $S_1 + \ldots + S_{n+1} = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 + \ldots + X_n + Y_n$.

С.1.35. Назвемо групою підмножину солдат, які стоять поруч і однаково орієнтовані, і назвемо ключем максимальну групу. Очевидно, що ніяка група не може розділитися після руху за командою, тобто досить довести, що кількість ключів збігається.

Нехай це не так. Розглянемо ключ A з кількістю солдатів $|A|$. Якщо $|A|$ – непарне число, то два сусідні ключі бачать перед собою різну за парністю кількість облич, а тому після чергової команди ключ A збігається з одним з них. Звідси маємо, що $|A|$ – парне число, а оскільки 1 995 – непарне, то один з крайніх ключів містить непарну кількість солдат. Тому цей ключ бачить перед собою парну кількість облич і неодмінно має обернутися. Сусідній ключ, що дивиться на нього (можливо, через один крок), залишається на місці, а отже, ключі неодмінно збігаються.

С.1.36. Розглянемо правильний трикутник ABC (рис. С.1.3). У ньому, очевидно, точка перетину висот збігається з центром вписаного кола, а отже, лежить всередині його. Нехай B_1 – середина BC. У трикутнику AB_1CB_1 – точка перетину висот і, очевидно, лежить зовні вписаного кола. Отже, з міркувань неперервності, якщо будемо рухати точку B вздовж відрізка BB_1 до точки B_1, неодмінно настане момент, коли точка перетину висот отриманого трикутника буде лежати на вписаному колі. Оскільки один з кутів отриманого трикутника дорівнює 60°, а інший <60°, то цей трикутник не може бути рівнобедреним.

С.1.37. Підставивши $n = 0$ в умову 1) знаходимо $f(f(0)) = 0$, тобто $f(1) = 0$ (за умовою 3). З умов 1) і 2) випливає $f(f(n)) = f(f(n+2)+2)$ для всіх цілих n. Далі, використовуючи умову 1), одержуємо

$$f(n) = f(n+2) + 2. \qquad (1)$$

Далі індукцією за n (в обидва боки) доведемо, що $f(n) = 1 - n$, для всіх цілих n.

База індукції $f(0) = 1$ і $f(1) = 0$ – доведено.

Індукційний перехід. Припустимо, що $f(n) = 1 - n$, доведемо, що $f(n+2) = 1 - (n+2)$ та $f(n-2) = 1 - (n-2)$.

Доведення. Двічі використовуючи (1), одержуємо $f(n+2) = f(n) - 2 = 1 - n - 2 = 1 - (n+2)$ і $f(n-2) = f((n-2)+2) + 2 = f(n) + 2 = 1 - n + 2 = 1 - (n-2)$, що й треба було довести.

Індукційний перехід ми здійснювали з кроком 2, але база індукції була перевірена для двох сусідніх значень, таким чином, методом математичної індукції довели, що $f(n) = 1 - n$ для всіх цілих n. Тому $f(1\,995) = 1 - 1\,995 = -1\,994$; $f(-1\,994) = 1 - (-1\,994) = 1\,995$.

С.1.38. *І спосіб.* Проведемо пряму через точку O паралельно AB (рис. С. 1.4). Нехай M – точка перетину з BC, K – з AC. ΔABC і ΔKMC – подібні, тому $KM \leq MC \leq$ $\leq CK$. З нерівності трикутника випливає, що $OB < OM + MB$, $AO < AK + KO$. Один з кутів COM і COK тупий, а тому або $CO < CM$, або $CO < CK$, отже, завжди $CO < CK$. З наведених нерівностей маємо $AO + BO + CO < OM + MB + AK + OK +$ $+ CK = KM + CK + BM + AK \leq CM + CK +$ $+ BM + AK = BC + CA$.

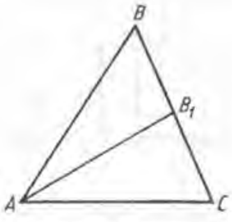


Рис. С.1.3

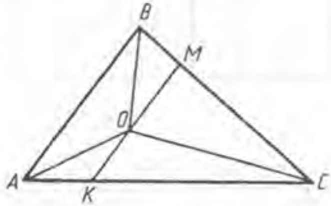


Рис. С.1.4

ІІ спосіб. Проводимо через точку O прямі, паралельні AC і BC (рис. С.1.5). Причому A_2, C_2 – точки перетину другої прямої відповідно з AB і BC , а B_1, C_1 – точки перетину другої прямої відповідно з AB і AC. OC_2CC_1 – паралелограм, $OC <$ $< OC_2 + CC_2 = CC_1 + CC_2$.

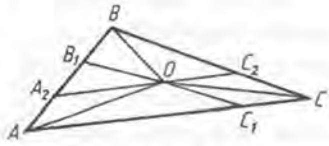


Рис. С.1.5

Аналогічно, як і в попередньому доведенні, $\Delta AB_1C_1 = \Delta A_2BC_2 = \Delta ABC$ і $AO < AC_1$, $BO < BC_2$. Додавши всі нерівності, отримуємо $OA + OB + OC < CC_1 + AC_1 + CC_2 +$ $+ BC_2 = BC + CA$.

С.1.39. Доведемо твердження задачі для довільної дошки розмірами $m \times n$, де m і n – непарні натуральні числа більші за 1. Здійснимо індукцію за $m + n$. Базу індукції – випадок $m = n = 3$ – перевіряємо безпосередньо (рис. С.1.6).

Припустимо, що довели твердження для всіх m, $n \geq 3$ непарних і таких, що $m + n < S$, де S – парне число не менше 6. Доведемо його для довільних непарних m, n $m \geq 3$, $n \geq 3$, де $m + n = S$. Будемо вважати для визначеності, що $m \geq n$. Нехай у нас є дошка $m \times n$, пофарбована, як в умові задачі з вирізаними двома чорними і однією білою клітинками. Розглянемо смугу розмірами $2 \times n$, прилеглу до краю дошки довжиною n (є дві можливості розташування такої смуги). Будемо замощувати цю смугу прямокутниками 1×2. Розіб'ємо смугу на прямокутники 1×2 розрізами, паралельними стороні смуги довжиною 2. Потім, якщо в якомусь із

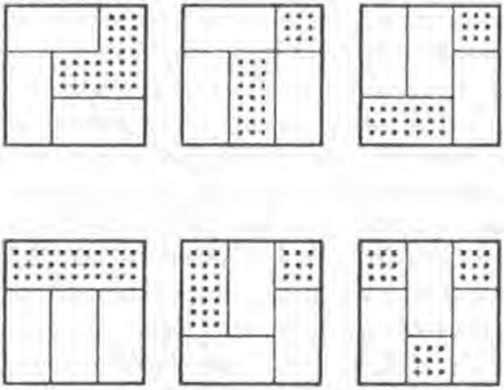


Рис. С.1.6

прямокутників виявиться дірка, розташована на краю дошки, ми замостимо цю ділянку дошки, як на рис. С. 1.7. Внаслідок цього "займемо" клітинку такого самого кольору, як і дірка. Може так статися, що на цій "зайнятій" клітинці вже є дірка. Випадок $m = 3$ вже розглянули, а оскільки ця ситуація можлива лише для двох чорних дірок, то при $m > 3$ можемо цієї ситуації уникнути, відрізавши смугу $2 \times n$ з іншого боку. У випадку, коли дірка не на краю дошки, замощуємо цю ділянку, як показано на рис. С.1.8. У цьому разі також "займаємо" клітинку поза смугою такого ж кольору, як і дірка. Причому в ситуації, коли заміщення вищенаведеними способами неможливе, поводяться аналогічно, як і в попередніх випадках. Ще можлива ситуація, коли чорна і біла клітинки поруч, тоді, поклавши в довільному місці поза смугою прямокутник 1×2, "займемо" чорну і білу клітинки. Отже, можемо замостити смугу, "зайнявши" клітинки поза смугою так, що в частині дошки, яка залишилася, буде також дві чорні і одна біла клітинки, що "зайняті", або є дірками. Цю частину, за припущенням індукції, можемо замостити прямокутниками 1×2. Отже, твердження задачі доведено.

Ще можна розв'язати цю задачу зведенням до задачі С.1.33.

С.1.40. *І спосіб.* Виберемо довільні п'ять відрізків. Доведемо, що серед них існують три, з яких можна скласти гострокутний трикутник. Припустимо, що це не так. Нехай $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ – довжини

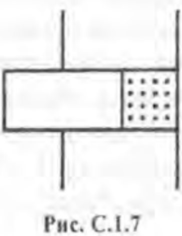


Рис. С.1.7

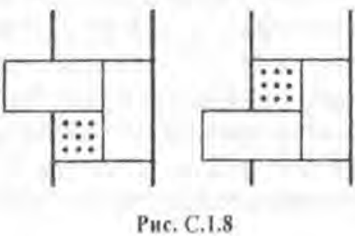


Рис. С.1.8

цих відрізків. Оскільки з них не можна скласти гострокутного трикутника, то $a_5^2 \geq a_4^2 + a_3^2$, $a_4^2 \geq a_3^2 + a_2^2$, $a_3^2 \geq a_2^2 + a_1^2$. Звідси випливає, що $a_5^2 \geq a_4^2 + a_3^2 \geq (a_3^2 + a_2^2) + a_3^2 = 2a_3^2 + a_2^2 \geq 2(a_2^2 + a_1^2) + a_2^2 = 3a_2^2 + 2a_1^2 \geq a_2^2 + 2a_1a_2 + a_1^2 = (a_1 + a_2)^2$, тобто $a_5 \geq a_2 + a_1$. Але це суперечить тому, що з відрізків довжиною a_1, a_2, a_5 можна скласти трикутник.

Вибравши довільно п'ять відрізків, беремо три, з яких складаємо гострокутний трикутник. З 1 995 – 3 = 1 992, що залишилися, виконуємо таку саму операцію і т.д. Нарешті з шести беремо п'ять, з яких вибираємо три і складаємо гострокутний трикутник.

II спосіб. Лема. Якщо в трикутнику довжина сторін $a \leq b \leq c$ і $c < a\sqrt{2}$, то трикутник гострокутний.

Доведення. Справді, якщо $c < a\sqrt{2}$, то $c < b\sqrt{2}$, тому $c^2 < a^2 + b^2$, тобто трикутник гострокутний. Нехай d – найбільший відрізок з наших 1 995. У нашій множині не більше ніж один відрізок має довжину з проміжку $\left[0, \dfrac{d}{2}\right]$. Справді, якщо $a \in \left[0, \dfrac{d}{2}\right]$ і $b \in \left[0, \dfrac{d}{2}\right]$, то $a + b \leq d$ і з відрізків a, b, d не можна скласти трикутник. Якщо три відрізки мають довжини, що належать проміжку $\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}}, d\right]$, то з них можна скласти гострокутний трикутник за лемою. Аналогічно і для проміжку $\left(\dfrac{d}{2}, \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right]$. Розіб'ємо множину відрізків довжиною із $\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}}, d\right]$ на трійки (залишаться невикористаними не більше ніж 2 + 2 + 1 = 5 відрізків, але оскільки 1 995: 3, то насправді їх не більше трьох. Що й потрібно було довести.

С.1.41. Спочатку доведемо рівність для непарного n.

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ \dots\ \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ \times$$
$$\times\sin\frac{(n-3)\pi}{2n}\ \dots\ \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^{-1} =$$
$$= \sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\ \dots\ \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}\ \times$$

$$\times\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^{-1}=2^{\frac{1-n}{2}}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6\pi}{2n}\ldots\sin\frac{2(n-2)\pi}{2n}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^{-1}=2^{\frac{1-n}{2}}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^{-1}=2^{\frac{1-n}{2}}.$$

Отже, для непарного n ми довели.

Нехай $n=2^k\,m$, де m – непарне. Доведемо рівність індукцією за k. Для $k=0$ довели. Нехай довели для деякого k, доведемо для $k+1$. Нехай $n=2^{k+1}\,m$.

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{*}\pi}{2n}\times$$

$$\times\cos\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{*}\pi}{2n}=2^{\frac{n}{4}}\sin\frac{\pi}{2\frac{n}{2}}\sin\frac{3\pi}{2\frac{n}{2}}\ldots\sin\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{*}\pi}{2\frac{n}{2}}=2^{-\frac{n}{4}}\cdot2^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}}=2^{\frac{1-n}{2}}.$$

(Ми скористалися припущенням індукції про правильність рівності для $\frac{n}{2}$.)

С.1.42. Очевидно, що через скінченність множини черепах для доведення досить показати , що кожна черепаха з певного моменту буде завжди поза опуклою оболонкою решти черепах. Для цього розглянемо пряму, по якій повзе одна з черепах, і спроектуємо кожну черепаху на цю пряму. Оскільки черепахи повзуть із сталою й однаковою швидкістю, але в різних напрямках, то швидкості проекцій черепах строго менші за швидкість черепахи, на шлях якої ми їх проектуємо. Тому ця черепаха через деякий час обжене всі ці проекції і залишатиметься за межами опуклої оболонки решти черепах.

С.1.43. Підставивши $y=0$, отримаємо $f(0)=0$, звідси $f(x)+f(-x)=$ $=f(0)=0$. Потім маємо $f(x-y)=f(x)+f(-y)=f(x)-f(y)$. При $x\neq0$, $x\neq1$, з одного боку, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}f(1-x)=\frac{1-f(x)}{(1-x)^2}$. З іншого боку, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(1+\frac{x}{1-x}\right)=1+f\left(\frac{x}{1-x}\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 f\left(\frac{1-x}{x}\right)=$

$$=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\frac{1}{x^2}f(x)-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}.$$

Порівнявши два отриманих вирази, одержимо $f(x)=x$. При $x=0$ і $x=1$ рівність $f(x)=x$ випливає з вищедоведеного та умови задачі.

С.1.44. Нехай дана послідовність $\{a_1, a_2, ...\}$ з 0 та 1. Позначимо через A множину елементів a_k з даної послідовності таких, що всі скінченні частини даної послідовності, які починаються з a_k, належать до першого класу (з двох класів розбиття).

Якщо множина A скінченна, то візьмемо елемент a_n такий, що $a_k \notin A$ для всіх $k \geq n$. Тоді беремо частину, що починається в a_n і належить до другого класу (вона існує, оскільки $a_n \notin A$). Потім беремо наступну частину з другого класу, що буде починатися одразу після закінчення попередньої частини, потім третю і т.д. Спочатку в нас залишиться ще частина $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$, але для нас не має значення, до якого класу вона належить.

Якщо ж A нескінченна, $A=\{a_{k_1}, a_{k_2}, ...\}$, то маємо розбиття $\{a_1, ..., a_{k_1-1}\}$, $\{a_{k_1}, ..., a_{k_2-1}\}$, $\{a_{k_2}, ..., a_{k_3-1}\}$, ... Тут всі частини, починаючи з другої, належать до другого класу.

С.1.45. Позначимо $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Нехай α, β, γ – відповідно величини кутів, що лежать проти цих сторін. Тоді з умови $2\alpha+3\beta=\pi$ маємо $\beta=2\gamma-\pi$, $\alpha=2\pi-3\gamma$. Звідси $\gamma\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ і $\cos\gamma\in\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. За теоремою синусів і за допомогою нескладних перетворень визначаємо, що

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin(2\pi-3\gamma)+\sin(2\gamma-\pi)}{\sin\gamma}=-4\cos^2\gamma-2\cos\gamma+1.$$

Легко підрахувати, що для $f(x)=-4x^2-2x+1$ $f(x)\leq\frac{5}{4}$ на інтервалі $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

С.1.46. Оскільки мимобіжні ребра рівні, то чотири грані тетраедра – рівні трикутники. Значення площі такої грані позначимо через S.

Будемо вважати, що $A_1 \in BCD$, $B_1 \in ACD$, $C_1 \in ABD$, $D_1 \in ABC$. Проекції точки X на ці площини позначимо відповідно через X_1, X_2, X_3, X_4, проекції точки O – відповідно через O_1, O_2, O_3, O_4. Через r позначимо радіус вписаної сфери. Тоді

$$\frac{A_1X}{A_1O} = \frac{X_1X}{O_1O} = \frac{\frac{1}{3}X_1 \cdot X \cdot S}{\frac{1}{3}rS} = \frac{V_{X_1BCD}}{\frac{1}{4}V_{ABCD}}.$$

Записавши аналогічні рівності для B_1, C_1, D_1, маємо

$$\frac{A_1X}{A_1O} + \frac{B_1X}{B_1O} + \frac{C_1X}{C_1O} + \frac{D_1X}{D_1O} = \frac{V_{X_1BCD} + V_{X_2ACD} + V_{X_3ABD} + V_{X_4ABC}}{\frac{1}{4}V_{ABCD}} =$$

$$= \frac{V_{ABCD}}{\frac{1}{4}V_{ABCD}} = 4.$$

С.1.47. Для даного n і довільного $k \geq n$ оцінимо кількість чисел $m \leq k^n - 1$, для яких існує зображення $m = k_1^n + \ldots + k_n^n$. З нерівності $m \leq k^n - 1$ випливає, що всі $k_i \leq k - 1$. Будемо вважати, що $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$. Якщо $k_1 = 0$, то інші – $(n-1)$ число мають не більше k можливих значень від 0 до $k - 1$. Разом одержимо не більше k^{n-1} різних сум $k_1^n + \ldots + k_n^n$. Якщо $k_1 \geq 1$, то всі $k_i \geq 1$, і кожне з даних n чисел має значення не більше від $(k-1)$ можливих значень від 1 до $k - 1$. Так ми отримаємо не більше $(k-1)^n$ різних сум. Разом у поданому вигляді одержуємо не більше $k^{n-1} + (k-1)^n$ чисел на відрізку $[1, k^n - 1]$, де всього $k^n - 1$ чисел. Тобто $k^n - 1 - k^{n-1} - (k-1)^n = (k-1)k^{n-1} - (k-1)^n - 1 = (k-1)(k^{n-1} - (k-1)^{n-1}) - 1 \geq k - 1 - 1$.

Очевидно, що при зростанні k останній вираз у наших перетвореннях може набувати яких завгодно великих значень.

С.1.48. *Відповідь.* $\left[\frac{n(n+1)+1}{3}\right]$. Число, яке потрібно знайти в задачі, позначимо через X_n. Перебором легко перевірити, що $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 4$, це збігається з поданою відповіддю. Для доведення, що $X_n \leq \left[\frac{n(n+1)+1}{3}\right]$, досить встановити, що в разі збільшення n на три в трьох верхніх рядках будемо отримувати не менше третини нулів. Для значення $n+3$ випишемо три верхні рядки:

$$\begin{matrix} a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n+2} \ a_{n+3} \\ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n+1} \ b_{n+2} \\ c_1 \ c_2 \dots c_{n+1}. \end{matrix}$$

Легко перевірити, що або серед чисел a_k, b_k, c_k буде нуль, або серед чисел a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1} буде не менше двох нулів, $1 \le k \le n$. Так можемо виділити трійки та шістки чисел, у кожній з яких не менше третини нулів. Після цього в трьох перших рядках лишиться праворуч трикутник із стороною 2 або 3. А для $n = 2$ та $n = 3$ ми вже переконалися, що не менше третини цифр – нулі. Залишається переконатися, що одержимо значення $X_n = \left[\dfrac{n(n+1)+1}{3}\right]$. Приклад:

$$\begin{matrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Тут продовжуємо цей трикутник до того n, яке нам потрібне. Ліва сторона трикутника знизу вгору має вигляд 10110110..., де цифри повторюються з періодом 3. У рядках трикутника також маємо період 3 з повторюванням груп 101, 011 і 110.

Олімпіада 2

Перший етап

С.2.1. Вважатимемо $a \le b$, тоді $1 + d^{b-a} = d^{c-a}$. Звідси маємо $b - a = 0$, тобто $2d^b = d^c$. Отже, $d = 2$, $a = b = n$, $c = n+1$, $n \in N$.

С.2.2. а) У цьому випадку відповідь є очевидною (рис. С.2.1);

б) кут п'ятикутника дорівнює 108°, але 360° не ділиться на 108° без остачі. Отже, п'ятикутники не використовують;

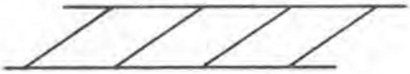


Рис. С.2.1

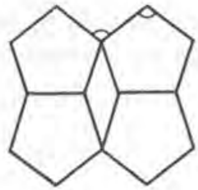


Рис. С.2.2

в) $2\cdot 108+36=252=2\beta+36^\circ$, звідси $\angle\alpha=360^\circ-252^\circ=108^\circ$ (рис. С.2.2). Отже, намальовані смуги вкладаються одна в одну і утворюють шуканий паркет.

С.2.3. Нехай ABC – даний трикутник і P, K, Q, D такі, як в умові задачі (див. рис. С. 2.3). Тоді $\angle ADB=\angle ACB=\angle BAC=\angle BDC=\alpha$, $\angle APD=\angle DPQ=60^\circ$, а отже, $AQ\perp DP$. Звідси $\angle DPQ=30^\circ$ і $\angle PCD=60^\circ-\alpha$. Розташуємо ΔDPC на координатній площині так, як показано на рис. С. 2.4, причому $P=(-1,0)$, $K=(0,0)$, $Q=\left(0,\sqrt{3}\right)$, $D=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha},0\right)$, тоді рівняння прямої CP $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$, рівняння прямої CD $y=-\operatorname{tg}\alpha x+\sqrt{3}$, а отже, координати точки $C\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{3}};\dfrac{3-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Отримуємо рівняння прямої CK

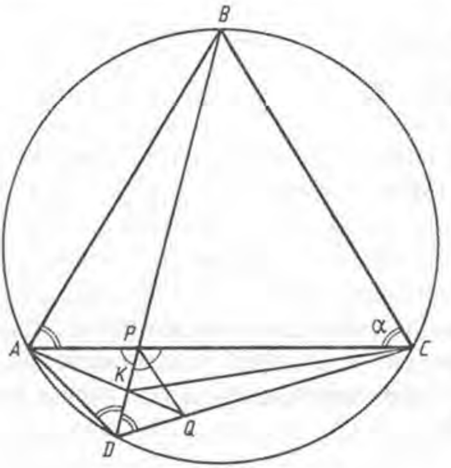


Рис. С.2.3

$y=-\dfrac{3-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{3}}x$ або $-x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}y$, звідси маємо шуканий кут $\beta=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}\right)$.

С.2.4. Позначимо $x=2y$, маємо $[2y]+[3y]+[4y]=1995$. Для фіксованого $n\in N$ розглянемо:

1) $y\in\left[n,n+\frac{1}{4}\right)$; 2) $y\in\left[n+\frac{1}{4},n+\frac{1}{3}\right)$;

3) $y\in\left[n+\frac{1}{3},n+\frac{1}{2}\right)$, 4) $y\in\left[n+\frac{1}{2},n+\frac{2}{3}\right)$;

5) $y\in\left[n+\frac{2}{3},n+\frac{3}{4}\right)$; 6) $y\in\left[n+\frac{3}{4},n+1\right)$.

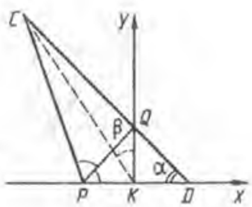


Рис. С.2.4

У кожному з випадків отримуємо

1) $9n=1995$; 2) $9n+1=1995$; 3) $9n+2=1995$;

4) $9n+4=1995$; 5) $9n+5=1995$; 6) $9n+6=1995$.

Оскільки $1995=9\cdot 221+6$, то маємо випадок 6), а отже, $n=221$ та $y\in\left[221\frac{3}{4},222\right)$, $x\in\left[443\frac{1}{2},444\right)$.

С.2.5. За властивістю циклічних нерівностей (або нерівностей з впорядкованими наборами) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}\geq a^2+b^2+c^2+d^2$, але $a^2+b^2+c^2+d^2\geq\frac{1}{2}\left((a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2+(d+1)^2\right)-4$ рівносильна очевидній нерівності $\frac{1}{2}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2\right)\geq 0$.

С.2.6. *Відповідь.* 1, 4, 9. З однозначних чисел задовольняють умову числа 1, 4, 9. Нехай n не більше за двозначне число, тоді з $a^2\not\equiv 2, 3, 7, 8 \pmod{10}$ випливає, що n не містить цифр 2, 3, 7, 8. Якщо $a^2\equiv 5 \pmod{10}$, то $a^2\equiv 25 \pmod{100}$, а отже, a не містить 5. Аналогічно, якщо в запису n є 0 або 4, то n складається лише з 4, що неможливо. Далі цифри 1, 6, 9 можуть бути лише по одній, причому 1 та 9 одночасно неможливі. Числа 96, 61 не є квадратами.

С.2.7. Так, обов'язково. Припустимо протилежне. Нехай N_1 – це сума модулів абсцис і N_2 – сума модулів ординат усіх павуків. Позначимо $N=N_1+N_2$. У разі нашого припущення число N не змінюється після переповзання павуків. Але кількість павуків непарна, а це означає, що після переповзання N має змінити парність. Суперечність.

С.2.8. Нехай l – пряма, яка має більше однієї точки перетину (така існує). Серед точок перетину, що не лежать на ній, виберемо найближчу – A (рис. С.2.5). Нехай твердження задачі хибне. Тоді через A

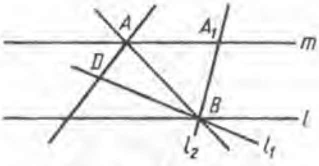


Рис. С.2.5

проходить не менше трьох прямих. Якщо всі вони перетинають l, то за допомогою третьої прямої, що проходить через точку перетину середньої і l, отримуємо суперечність. В іншому випадку нехай $m \ni A, m \parallel l$. Якщо B – точка перетину однієї з прямих і l, тоді існує l_1 або l_2, що проходить через B. Для l_1 отримаємо точку D – суперечність. Для l_2 – точку A_2, з якою проводимо аналогічні міркування. Далі все випливає із скінченності числа прямих.

С.2.9. Спочатку знаходимо пряму l, по обидва боки якої розташовано по 500 точок. Виберемо m, непаралельну l таким чином, що всі точки розташовані по один бік від m. Рухаємо m таким чином, щоб вона відраховувала по одній точці з кожного боку l. Це можна завжди зробити або відрахувавши точку з потрібного боку за допомогою паралельного зсуву прямої l, або поворотом прямої навколо точки, яку ми зустріли на протилежному боці. Змінюючи точку обертання, відрахуємо точку з потрібного боку, а далі, завдяки загальному положенню точок, зсунемо пряму назад на деяку відстань. Таким чином, кількість точок з другого боку залишиться без змін.

С.2.10. Маємо (рис. С.2.6) $OD^2 = OQ^2 + DQ^2$, $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = OQ^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2$, $25^2 = 4OQ^2 + CD^2$ і $OD^2 = OP^2 + PD^2$, $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = OP^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2$, $25^2 = 4OP^2 + AD^2$. Звідси легко отримати $OQ = 12$, $CD = 7$ або $OQ = 10$, $CD = 15$ і $OP = 12$, $AD = 7$ або $OP = 7$, $AD = 12$. Оскільки $AD \neq CD$, маємо $AD = 7$, $CD = 15$. Тоді $OQ = 10$ і $OP = 12$. Позначимо $\angle ODP = \alpha$ та $\angle ODQ = \beta$. $\cos\angle ADC = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\frac{3}{5}$. За теоремою косинусів для ΔABC, $AC^2 = 7^2 + 15^2 + 2\cdot 7\cdot 15\cdot\frac{3}{5} = 400$, а отже $AC=20$.

Оскільки чотирикутник $ABCD$ є вписаним, маємо $\angle ADC + \angle ABC = 180°$, а отже, $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$. За теоремою косинусів $20^2 = AB^2 + BC^2 - \frac{6}{5} \cdot AB \cdot AC$. Нехай $p \neq q \in N$ такі, що $AB = p$, $BC = q$. Тоді $p^2 - \frac{6}{5}pq + q^2 - 20^2 = 0$ і $5p^2 - 6qp + 5q^2 - 5 \cdot 20^2 = 0$. За умови $f(p) = 5p^2 - 6qp + 5q^2 - 5 \cdot 20^2 = 0$ – поліном від p.

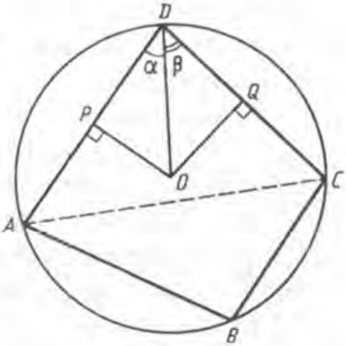


Рис. С.2.6

Дискримінант дорівнює $64\left(25^2 - q^2\right)$, а отже, $f\left(p\right) = 0 \Leftrightarrow 25^2 - q^2 > 0$, тоді $p = \frac{1}{10}\left(6q \pm 8\sqrt{25^2 - q^2}\right)$, $p \in N$. Тобто $q = 7$, 15, 20 або 24. Але $BC \neq AD$ і $BC \neq DC$, з чого $q = 20$ або $q = 24$. Якщо $q = 20$, то $p_1 = 24$ і $p_2 = 0 \Rightarrow AB = 24$. Якщо $q = 24$, то $p_1 = 20$ і $p_2 = \frac{88}{10} \Rightarrow AB = 20$. Таким чином, довжина сторін $ABCD$ дорівнює відповідно 7, 15, 20 та 24 см.

С.2.11. Функція $f(x) = [x] + [2x] + ... + [1\,995x]$ неспадна. Неважко пересвідчитись у тому, що при $\frac{2}{1\,331} \leq x < \frac{1}{665}$ для $1 \leq k \leq 665$ $[kx] = 0$, для $666 \leq k \leq 1\,330$ $[kx] = 1$, для $1\,331 \leq k \leq 1\,995$ $[kx] = 2$, тому для таких x $f(x) = 1\,995$. З іншого боку, при $x < \frac{2}{1\,331}$, наприклад, $[1\,331x] < 2 = \left[1\,331 \cdot \frac{2}{1\,331}\right]$, тому $f\left(x\right) < f\left(\frac{2}{1\,331}\right) = 1\,995$.

При $x = \frac{1}{665}$ $f(x) > 1\,995$. Тому розв'язком рівняння будуть всі числа з проміжку $\left[\frac{2}{1\,331}, \frac{1}{665}\right)$.

С.2.12. Число 2^n починається з цифри 1 тоді й лише тоді, коли існує натуральне m таке, що $10^m \le 2^n < 2 \cdot 10^m$, а ця нерівність еквівалентна нерівності $5 \cdot 10^{m-1} \le 2^{n-1} < 10^m$. Якщо ж 2^n не починається з одиниці, то існує натуральне m таке, що $2 \cdot 10^m \le 2^n < 10^{m+1}$. Отже, $10^m \le 2^{n-1} < 5 \cdot 10^m$. Таким чином, 2^n починається з цифри 1 тоді й лише тоді, коли 2^{n-1} має в десятковому запису на одну цифру менше, ніж 2^n. Тому в нашій послідовності $1,2,4,...,2^{1\,000}$ чисел, що починаються з 1, буде рівно стільки, скільки цифр у числа $2^{1\,000}$, але $2^{1\,000}=1\,024^{100} > 1\,000^{100} = 100^{300}$. Звідси легко випливає твердження задачі.

С.2.13. Оскільки $AB = BC = CD$, то трикутник BCD рівнобедрений, тому $\angle CDB = \angle CBD = \angle BDA$, отже, DB – бісектриса кута CDA (рис. С. 2.7). Проведемо висоту CQ_1 у трикутнику BCD, через Q_1 проведемо пряму, що проходить через точку K. Навколо CQ_1KD можна описати коло, тому $\angle CDQ_1 = \angle CKQ_1 = \angle CAK$ ($\angle CAK = \angle BDA = \angle CDB$, бо $AB = BC = CD$). Але $\angle CKQ = \angle CAD$ (бо $\angle CPK = 90°$ і $\angle CKA = 90°$), тому $Q = Q_1$. Отже, CQ – висота в BCD, тому вона є медіаною.

С.2.14. Доведемо, що коли в площині є менше, ніж n^2 позначених кубиків, то дозволеними діями можемо збільшити їх число. Цим ми доведемо, що зможемо зібрати всі n^2 кубиків у одну площину. Нехай у площині α є непозначений кубик, а поза площиною α – позначений. Дозволеними діями, не зачіпаючи площини α, позначений кубик можна поставити поряд з непозначеним з площини α в сусідній площині β. Розглянемо два мимобіжних стовпчики, по одному в площинах α і β, один з яких містить непозначений кубик в α, а другий – позначений у β. Оскільки $n > 2$, то існує ще третя площина γ, відмінна від α і β. Поміняємо стовпчик в α з паралельним йому в γ, а потім стовпчик в β з паралельним йому в γ так, щоб позначений кубик став на місце в площині γ, зайняте непозначеним кубиком під час першої заміни. Потім поміняємо стовпчики в γ і α. Внаслідок таких замін позначений кубик з β стане на місце непозначеного в α, а решта кубиків α залишиться на місці.

С.2.15. Маємо нерівності $\dfrac{a_i^3}{a_{i+1}} + a_{i+1} + 1 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{a_i^3}{a_{i+1}} \cdot a_{i+1} \cdot 1} = 3a_i$. Додавши їх, отримаємо $\sum \dfrac{a_i^3}{a_{i+1}} \ge 2\sum a_i - n$. Також $\dfrac{a_i^3}{a_{i+1}} + a_i a_{i+1} \ge 2a_i^2$ -

Урахувавши, що $a_i \cdot a_{i+1} \le \frac{a_i^2 + a_{i+1}^2}{2}$, маємо $\sum \frac{a_i^3}{a_{i+1}} \ge \sum a_i^2$. Додавши дві отримані нерівності, одержимо потрібну.

С.2.16. Доведемо наступну *лему*.

Якщо в трикутнику ABC на медіані BD вибрати довільну точку B_1 і провести AA_1 і CC_1 (рис. С.2.8), то тоді $C_1A_1 \parallel AC$. Лема є справедливою, адже за теоремою Чеви $\frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1$. Оскільки $AD=DC$, то $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BA_1}{A_1C}$, тобто $C_1A_1 \parallel AC$. За цією лемою з трикутника AB_1C $KM \parallel AC$, тоді $AKMC$ – трапеція, тому

$$S_{AKB_2} = S_{CMB_2}. \tag{1}$$

Оскільки AC_2A_2C – трапеція, то $S_{AC_2B_2} = S_{CB_2A_2}$. Тоді з урахуванням (1) отримаємо

$$S_{AKC_2} = S_{CMA_2}. \tag{2}$$

Враховуючи, що AC_1A_1C – трапеція, то $S_{AB_1C_1} = S_{CB_1A_1}$, а тому з урахуванням (2), маємо

$$S_{KC_2C_1B_1} = S_{MA_2A_1B_1}. \tag{3}$$

З (1) та (3) одержимо потрібне.

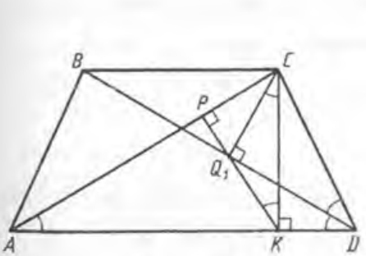


Рис. С.2.7

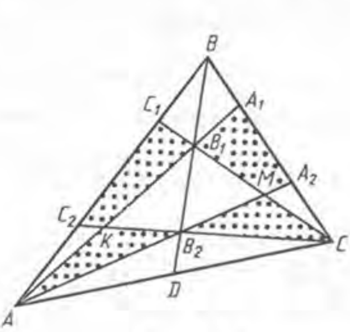


Рис. С.2.8

С.2.17. Оскільки

$$(x+2y)(y+2x)=2\left(x^2+y^2\right)+5xy\le 2\left(x^2+y^2\right)+5\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{9\left(x^2+y^2\right)}{2},$$

то наш вираз не менший за

$$\frac{2x^2}{9\left(y^2+z^2\right)}+\frac{2y^2}{9\left(x^2+z^2\right)}+\frac{2z^2}{9\left(x^2+y^2\right)}\ge\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}.$$

Рівність досягається при $x = y = z$. Отже, найменше значення становить $\frac{1}{3}$. (Ми скористалися відомою нерівністю $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.)

С.2.18. Нехай k-й мотоцикліст їздив m_k разів, тоді: по-перше, $\sum_{k=1}^{n} m_k = 2n$; по-друге, кожній парі власників двох мотоциклів, на яких їздив k-й мотоцикліст, відповідає мотоцикл, на якому ці два власники їздили. Таких пар буде $\frac{m_k(m_k-1)}{2}$, тому $\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k(m_k-1)}{2}=n$. Отже, $\sum_{k=1}^{n} m_k^2 - m_k = 2n$ і $\sum_{k=1}^{n} m_k = 2n$. Тому $\sum_{k=1}^{n}(m_k-2)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(m_k^2-4m_k+4\right)=$ $=\sum_{k=1}^{n}\left(m_k^2-m_k-3m_k+4\right)=2n-6n+4n=0$, отже, $m_k = 2$ для кожного k.

С.2.19. *Відповідь*. Наприклад, $f(x)=x^2 - 2x + 2$. Нехай $f(x)=x^2-$ $-2x+2$. Позначимо $f_1=f$, $f_{n+1}=f\ (f_n)$, $n\ge 1$. Доведемо тотожність $f_n(x)\equiv(x-1)^{2^n}+1$, використовуючи метод математичної індукції. Це справедливо при $n=1$. Нехай доведено при $n=k$, $k\ge 1$. Тоді

$$f_{k+1}(x)=f_k^2(x)-2f_k(x)+2=(f_k(x)-1)^2+1=\left((x-1)^{2^k}\right)^2+1=(x-1)^{2^{k+1}}+1,$$

$x\in R$, що і треба було довести.

С.2.20. *Відповідь*. Не можна. Доведемо від супротивного. Припустимо, що можна. Нехай A, B – ці підмножини. Якщо $a\in A$, то $a^2-1\in A$, якщо ж $a\in B$, то $a^2-1\in B$. А тому, якщо $a^2-1\in A$, то $a\in A$ (аналогічно для B). Нехай $2\in A$, тоді $3\in A$, $3^2-1=8\in A$, $2\cdot 8-1=15=4^2-1\in A$, тому $4\in A$. Доведемо за індукцією, що всі непарні числа, а також всі числа вигляду 2^n, належать A. База індукції: $2\in A$, $3\in A$, $4\in A$. Нехай $3,5,7,...,2^n-1\in A$, $2,4,...,2^n\in A$. Доведемо, що 2^n+1, $2^n+3,..., 2^n+(2^n-$ $-1)\in A$ і $2^n\in A$. Нехай a непарне, $2^n<a<2^{n+1}-2$, тоді $a+1$ парне і не є степенем двійки. Тому $a+1=2^b\cdot c$, де c – непарне, $c\neq 1$, $b\neq 0$ і $c<2^n$, $2^b\in A$, $c\in A$, тому $a=c\cdot 2^b-1\in A$. $2^{n+1}=4\cdot 2^n-1\in A$. Отже, всі непарні числа, менші 2^{n+1}, належать A. Якщо n парне, то 2^{n+1} у разі ділення на 3 дає остачу 2 (бо 4^k дає остачу 1). Тому покладемо $c=\dfrac{2^{n+1}+1}{3}$, тоді $1<c<2^n$, c – непарне. Отже, $c\in A$. Але $3\in A$ і $2^{n+1}=3c-1\in A$. Якщо n непарне, то 2^{n+2} дає при діленні на 3 остачу 2. Тому нехай $c=\dfrac{2^{n+2}+1}{3}$, маємо $1<c<2^{n+1}$, c – непарне, тому $c\in A$, отже, $2^{n+2}=3c-$ $-1\in A$. Але $2^n\in A$, тому $2^{2n+2}-1=2^n2^{n+2}-1\in A$, тобто $\left(2^{n+1}\right)^2-1\in A$, отже, $2^{n+1}\in A$. Доведення за індукцією завершено. Нехай тепер $a\in N$, a – непарне, тоді a^2-1 – парне, $a^2-1>1$, отже, $a^2-1\in A$, тому $a\in A$. Таким чином, A належать всі числа, тому B – порожня множина. Маємо суперечність. Отже, таке розбиття неможливе.

С.2.21. *Відповідь.* (1,1,1). Дана трійка чисел задовольняє систему рівнянь. Зробимо припущення, що існують й інші розв'язки системи. Припустимо, що серед наших чисел не всі дорівнюють одиниці. Вони не можуть бути всі більші або всі менші за одиницю. Нехай у нас є одне число, менше за одиницю, і нехай $x<1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$ (можемо так вважати, оскільки система не змінюється при циклічній перестановці змінних). Тоді $3=x+y^2+z^3>x^3+y+z^2=3$, що неможливо. Припустимо, що у нас є два числа, менших за одиницю: $x<1$, $y<1$, $z\geq 1$. Тоді $3=x+y^2+z^3>x^2+y^3+z=3$. Знову отримали суперечність. Отже, трійка чисел (1, 1, 1) є єдиним розв'язком системи.

С.2.22. Нехай радіус вписаного кола трикутника ABC дорівнює r (рис. С.2.9). Візьмемо на стороні BC точку D_1 таку, що $BD_1=r$. Через E та F позначимо точки дотику вписаного кола зі сторонами

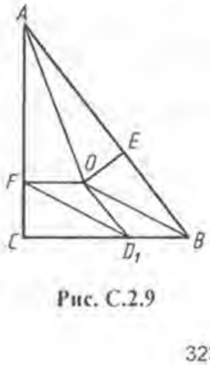


Рис. С.2.9

відповідно AB і AC. Тоді $OE = OF = r = BD_1$, BD_1FO – паралелограм, $FD_1 = OB$. Маємо, що $\Delta AOF = \Delta AOE$ (як прямокутні за катетом та гіпотенузою), $\Delta CFD_1 = \Delta BOE$ (також за катетом та гіпотенузою), $\Delta D_1FO = \Delta OBD_1$. Тому частини, на які ламана AOD_1 ділить ΔABC, є рівновеликими. Легко помітити, що умова задачі однозначно задає положення точки D на BC. Тому $D_1 = D$, а вказані три пари рівних трикутників задають потрібне розбиття.

С.2.23. *Відповідь.* $f(x) = a\sin x,\ a\in R$. $f(x) = f\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) =$
$$= f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x.$$
Тому $f(x) = a\sin x,\ a\in R$. З іншого боку, така функція для всіх $a\in R$ задовольняє наше рівняння.

С.2.24. Нехай I – центр вписаного в ΔAOB кола, H – основа перпендикуляра, опущеного з A на бісектрису кута AOB (очевидно, що положення H не залежить від положення B), $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle OAB = 2\beta$ (рис. С.2.10). Доведемо, що пряма PQ проходить через точку H. Прямокутні трикутники OPI і OAH подібні, тому $\frac{OP}{OH} = \frac{OI}{OA}$, $\frac{OP}{OI} = \frac{OH}{OA}$. Подібними є трикутники OPH і OAI. Звідси $\angle OPH = \angle OIA$. З ΔOAI і ΔOAB отримаємо $\angle OPH = \angle OIA = \pi - (\alpha+\beta) = \pi - \frac{\pi - \angle OBA}{2} = \frac{\pi + \angle OBA}{2}$. З іншого боку, з чотирикутника $PBQI$ (рис. С.2.11) маємо $\angle PIQ = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\angle PBQ\right) = \pi - \angle OBA$. Оскільки ΔPIQ рівнобічний, $\angle IPQ = \frac{\pi - \angle PIQ}{2} = \frac{\angle OBA}{2}$. Тому $\angle OPQ = \frac{\pi + \angle OBA}{2} = \angle OPH$ і пряма PQ проходить через точку H.

С.2.25. Позначимо $a_n = 9^{3^n} + 3^{3^n} + 1$. Маємо $3^{3^n} - 1 = \left(3^{3^{n-1}}\right)^3 - 1 =$
$$= \left(3^{3^{n-1}} - 1\right)a_{n-1} = \left(3^{3^{n-2}} - 1\right)a_{n-2}a_{n-1} = \ldots = \left(3^3 - 1\right)a_1a_2\ldots a_{n-1}.$$
Тому, якщо a_n і a_k ($k < n$) мають спільний дільник d, то a_n і $3^{3^n} - 1$ також мають

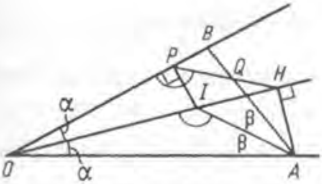


Рис. С.2.10

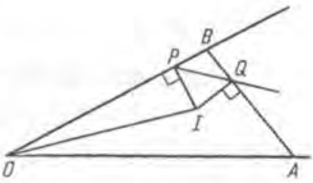


Рис. С.2.11

спільний дільник d. Але $a_n = \left(3^{3^n} - 1\right)\left(3^{3^n} + 2\right) + 3$, тому d має бути дільником числа 3. Але d не може дорівнювати 3, оскільки a_n не ділиться на 3. Отже, $d = 1$.

С.2.26. *Відповідь.* $\frac{n}{6}$ – для парного n; $\frac{9n-1}{54}$ – для непарного n. Зафіксуємо k, $1 \le k \le n$. Даний вираз як функція від x_k є квадратичною функцією, що має вигляд $px_k^2 + qx_k + r$, де $p > 0$. Найбільшого значення на проміжку така функція набуває на одному з його кінців. Тому за будь-яких інших дозволених x_i, $i \ne k$, узявши потрібне із значень $x_k = \frac{1}{3}$ або $x_k = \frac{2}{3}$, можемо тільки збільшити наш вираз. Тому надалі будемо шукати максимум даного виразу, коли всі x_k дорівнюють $\frac{1}{3}$ або $\frac{2}{3}$. Кількість таких наборів скінченна, тому є набір, який максимізує значення виразу. В такому наборі не може бути трійки $x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \frac{2}{3}$ (далі писатимемо $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ і вважатимемо $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$). Адже, замінивши її на трійку $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, збільшимо значення даного виразу (замість доданків $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2$ з'являться доданки $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2$, а інші доданки не зміняться). Також не може бути трійки $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, оскільки заміна її на $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ збільшить вираз. Якщо $n>2$, то в максимальному наборі має бути хоча б одне число $\frac{2}{3}$. Тепер відзначимо, що в такому наборі не можуть послідовно стояти два числа $\frac{1}{3}$, адже тоді знайдеться трійка $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, заміна якої на $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ збільшить вираз. Отже, в максимальному наборі стоять по одному числа $\frac{1}{3}$, розділені поодинокими $\frac{2}{3}$ або парами $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Тепер зазначимо, що пар $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ може бути не більше однієї. Адже інакше візьмемо числа набору між двома такими послідовними парами $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, ..., \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ і замінимо ці числа на такі, що послідовно змінюються $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Легко перевірити, що значення виразу в цьому разі збільшиться. Для парного $n>2$ кількість пар $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ може бути тільки парною, тому в максимальному наборі їх немає. Максимальний набір – це $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, ..., \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, і значення виразу дорівнює $\frac{n}{6}$. Перебором переконуємося, що це є максимумом і для $n=2$. За непарного n обов'язково є хоча б одна пара $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, але в максимальному наборі вона тільки одна. Цей набір є $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, ..., \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, і значення виразу дорівнює $\frac{9n-1}{54}$.

С.2.27. *Відповідь*. Ні, не можна. Адже дозволеними операціями не можна змінити останню літеру У в даному слові на літеру А, яка стоїть останньою в потрібному слові.

С.2.28. *Відповідь.* $n = 19$. Вираз $(x+1)^n - x^n$ є многочленом $(n-1)$-го степеня відносно x із старшим коефіцієнтом, що дорівнює n. Це легко показати, використавши біном Ньютона, або методом індукції за допомогою рівності $(x+1)^n - x^n = (x+1)\left((x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right)$. Тепер індукцією за n покажемо, що коли значення многочлена $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ в кожній цілій точці ділиться на ціле число m, то $n!a_0$ ділиться на m. Нехай це твердження правильне для $(n-1)$, і розглянемо многочлен $Q(x+1) - Q(x) = a_0((x+1)^n - x^n) + a_1((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}$. Це многочлен $(n-1)$-го степеня із старшим коефіцієнтом na_0, а його значення діляться на m при всіх цілих x. За припущенням індукції, на m має ділитися $(n-1)!(na_0) = n!\,a_0$. База індукції для $n = 1$ легко перевіряється. Тому в умові задачі для даного $P(x)$ $n!$ ділиться на $1\,995 = 3\cdot5\cdot7\cdot19$. Оскільки число 19 просте, $n \geq 19$. Але існує приклад многочлена 19-го степеня, що задовольняє умову задачі, $P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-18)$. Тут для кожного цілого x в добутку знайдуться числа, що діляться на 3, 5, 7, 19. Тому добуток ділитиметься на 1 995.

С.2.29. *Відповідь.* $k = 9$. Спочатку доведемо, що $k \geq 5$. Якщо $k = 4$, то знайдуться чотири точки, що не лежать на одному колі. Через кожні три точки з цих чотирьох проведемо коло, отримавши чотири різних кола. Якщо до взятої четвірки додавати ще одну точку, то чотири з п'яти цих точок мають лежати на одному колі. Тому ця п'ята точка має лежати на одному з уже проведених кіл. У нас проведено чотири кола, а додавати можемо $10 - 4 = 6$ різних точок. Тому знайдеться коло, на яке попадуть ще принаймні дві точки, і $k \geq 5$.

Тепер припустимо, що $5 \leq k \leq 8$. Тоді знайдуться п'ять точок (нехай це A_1, A_2, A_3, A_4, A_5), що містяться на одному колі, та дві точки (нехай це A_6, A_7), що не лежать на ньому. Візьмемо точки A_1, A_2, A_3, A_6, A_7. Кожна з точок A_6, A_7 не лежить на колі, де знаходяться три точки A_1, A_2, A_3. Тому є коло, на якому містяться точки A_6, A_7 та дві з трьох точок A_1, A_2, A_3 (нехай це будуть A_1 і A_2). Тепер розглянемо точки A_3, A_4, A_5, A_6, A_7. З аналогічних міркувань, на одному колі лежать точки A_6, A_7 і дві з трьох точок A_3, A_4, A_5 (нехай це будуть A_3 і A_5). Тепер візьмемо точки A_2, A_3, A_4, A_6, A_7. З них жодні чотири точки не лежать на одному колі. Адже перебором легко переконатися, що які б чотири з цих точок не взяти, то три з них міститимуться на якомусь з уже проведених кіл, а дві інші з п'ятірки – не на ньому. Тому $k \geq 9$.

Приклад, коли дев'ять точок лежать на одному колі, а одна точка – не на ньому, свідчить, що можливий варіант, коли $k = 9$.

С.2.30. *Відповідь*. Гравець, який розпочинає гру, має виграшну стратегію. Опишемо її. Надалі називатимемо число великим, якщо в ньому є цифри, що більші за 1, і малим – у протилежному випадку. Називатимемо число парноцифровим, якщо в ньому парна кількість цифр і непарноцифровим – у іншому випадку. Непереставним називатимемо число, цифри якого не можна переставити так, щоб воно збільшилося (тобто цифри числа монотонно не збільшуються зліва направо). Одноперестaвним називатимемо число, для якого існує лише одне більше число, утворене перестановкою його цифр (легко довести, що з будь-якого набору не всіх однакових цифр можна скласти одноперестaвне число).

Стратегія першого гравця полягає в тому, щоб своїми ходами утворювати число одного з чотирьох типів:

а) велике парноцифрове непереставне;

б) велике непарноцифрове одноперестaвне;

в) мале непарноцифрове непереставне;

г) мале парноцифрове одноперестaвне.

При цьому: 1) він не повинен дописувати цифри, що менші за останню в отриманому числі; 2) починаючи з трицифрових чисел, після ходів першого, найменша цифра числа має зустрічатися не менше двох разів.

Першим своїм ходом перший гравець ставить 1, другий дописує цифру X, після чого перший знову дописує X (якщо $X \leq 1$) або 1 (якщо $X \geq 2$). Відповідно отримують числа типу в) або б), і виконуються умови 1) і 2).

Нехай після ходу першого гравця утворилося число типу а) або в). Потім другий може лише дописати цифру. Якщо число лишилося непереставним, то перший повторює хід другого і знову отримує число типу а) або в). Якщо ж дописана другим гравцем цифра більша за останню, то отримане число не може бути непереставним або одноперестaвним (використовуємо умову 2).

Тепер залежно від парності кількості цифр та наявності цифр, що більші за одиницю, перший гравець перестановкою робить число одного з потрібних чотирьох типів.

Нехай після ходу першого гравця утворилося число типу б) або г). Якщо далі другий переставить цифри, то він отримає непереставне число і, повторюючи останню цифру, перший отримає число типу а) або в). Якщо другий гравець допише цифру, яка не перевищує найменшої, то перший повторює хід другого і залишає число типу б) або г). Якщо другий дописує цифру, що перевищує найменшу, то перший перестановкою отримає число типу а), в) або б) (якщо другий з малого числа зробив велике). Також в усіх випадках виконуються умови 1) і 2).

Тепер розглянемо кінець гри. Нехай $M = 1\,995 \cdot 4$. Після якогось ходу першого гравця буде отримано число з $M-3$ цифрами (типу б) або в)) чи з $M-2$ цифрами (типу а) або г)).

Нехай це а) з $M-2$ цифрами. Його перша цифра не менша, ніж 2. Другий гравець має дописати цифру. Наступним ходом перший дописує довільну цифру і виграє.

Нехай це г) з $M-2$ цифрами. Якщо другий гравець переставляє цифри, то він отримує непереставне число. Тепер перший повторює останню цифру і також отримує непереставне число. Другий дописує цифру і отримує мале M-значне число, а перший, дописавши довільну цифру, виграє. Якщо другий дописує $(M-1)$-у цифру, меншу від 2, то далі перший утворює $(M-1)$-значне непереставне число. Тоді дописує цифру другий гравець, потім перший і виграє. Якщо другий гравець дописує $(M-1)$-у цифру X, що не менша за 2, то далі перший утворює число, яке має вигляд $1X1...10...0$. Або другий дописує цифру, і перший за допомогою перестановки виграє, або другий ставить X на перше місце, і перший дописує довільну цифру.

Нехай це б) з $M-3$ цифрами. Тоді за будь-якого ходу другого гравця перший може отримати число типу а) з $M-2$ цифрами. Цей варіант ми вже розглянули.

Нехай це в) з $M-3$ цифрами. Якщо другий гравець дописує цифру, що не менша за 2, то перший перестановкою робить число типу а) з $M-2$ цифрами і виграє. Якщо другий гравець дописує цифру не більшу за останню, то далі перший дописує 0, отримує $(M-1)$-значне число типу в), і своїм наступним ходом виграє. Якщо другий гравець дописує цифру, яка більша за останню, але не більша за 2, то це буде 1 після не менш як двох нулів. Перший гравець робить $(M-2)$-значне число типу г) і виграє, як показано вище.

С.2.31. Доведемо, що натуральне число є "крихким" тоді і лише тоді, коли воно є складеним. Справді, нехай $n = a + b$ і $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, тоді $ay = b(a - x)$. Якщо $(a,b) = 1$, тоді $b | y$, що суперечить $\frac{y}{b} < 1$. Отже, $(a,b) = k > 1$ та $k | n$, $k \neq n$. А це означає, що n складене. З іншого боку, якщо $n = pq$, p, $q > 1$, можемо покласти $a = p$, $b = (q-1)p$, $x=1$, $y = (p-1)(q-1)$.

С.2.32. За умовою задачі, навколо п'ятикутника $AOBEM$ і чотирикутника $EDCM$ можна описати кола. Звідси $\angle EAK = \angle EMB = \angle ECK$, це означає, що навколо чотирикутника $EKAC$ також можна описати коло. Звідси $\angle EKA = 90°$, а тому навколо чотирикутника $EDBK$ можна описати коло. Отримуємо $\angle EKF = \angle EBD = \angle EOM$. Зауважимо, що $OM \parallel EK$, а тому $\angle EOM = \angle FEK$. Таким чином, трикутник EFK є рівнобедреним, тобто $FE = KF$.

С.2.33. *Відповідь*. Найменше ціле x таке, що $n < 3^x$. Кожну з гир можна покласти або на ліву шальку терезів, або на праву, або взагалі нікуди не покласти. Отже, у тому випадку, коли маємо x гир, можливі 3^x варіантів їх розташування на терезах. З них один варіант відповідає порожнім терезам, а половина тих, що залишилися, – від'ємній вазі. Отже, за допомогою x гир можливо точно визначити вагу (тобто врівноважити терези) не більше як для $\frac{1}{2}\left(3^x - 1\right)$ предметів. Також можна встановити, що вага деякого предмета знаходиться в певному інтервалі, якщо при двох спробах зважити предмет з різними наборами гир у першому випадку переважає ліва шалька терезів, а у другому – права. Таким чином, ураховуючи те, що початкова вага предметів нам відома, ми не можемо за допомогою x гир розрізнити більш як 3^x предмети. З іншого боку, якщо $3^{x-1} < n < 3^x$, тоді за допомогою набору $2, 2\cdot3, 2\cdot9, \ldots, 2\cdot3^{x-1}$ можемо розрізнити всі предмети.

С.2.34. Припустимо протилежне, тобто $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}} = \frac{m}{n}$, де m, n – якісь цілі числа. Тоді існують раціональні числа Γ_1 та Γ_2 такі, що $\sqrt[3]{b} = \Gamma_1\sqrt[3]{a} + \Gamma_2\sqrt[3]{c}$. Піднесемо останню рівність до куба: $b = \Gamma_1^3 a +$

$+\Gamma_2^3 c+3\Gamma_1\Gamma_2\sqrt[3]{abc}$. За умовою задачі число $\sqrt[3]{abc}$ не може бути раціональним. Отже, приходимо до суперечності.

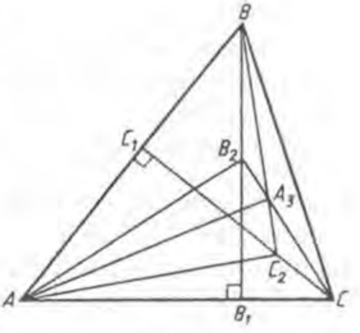


Рис. С.2.12

С.2.35. $\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$, а тому $AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1$ (рис. С.2.12). З прямокутних трикутників AB_2C і AC_2B отримуємо $AB_2^2 = AB_1 \cdot AC$, $AC_2^2 = AC_1 \cdot AB$. Отже, $AB_2 = AC_2$, а $\Delta AA_3B_2 = \Delta AA_3C_2$, як прямокутні трикутники зі спільною гіпотенузою AA_3 і однаковими катетами AB_2 та AC_2. Звідси AA_3 – бісектриса кута B_1AC_2, а отже, вона є серединним перпендикуляром до відрізка B_2C_2. Тобто AA_3, BB_3, CC_3 перетинаються в одній точці, як серединні перпендикуляри ABC.

С.2.36. *Відповідь.* 2·2·16=256 послідовностей. Очевидно, що обов'язково мають зустрітись фрагменти 100 001 та 011 110. Подивимось на взаємне розташування послідовності з чотирьох нулів та з чотирьох одиничок.

а) 00001111 _ _ _ _ _ _ _ _

У разі такого розташування умову задовольняють лише чотири послідовності, а саме:

0000111101001011
0000111101011001
0000111100101101
0000111101100101.

б) 0000_1111 _ _ _ _ _ _ _

Очевидно, таке розташування неможливе.

в) 0000_ _1111 _ _ _ _ _ _

У разі такого розташування умову задовольняють лише дві послідовності:

0000101111001101
0000101111010011.

г) 0000 _ _ _1111 _ _ _ _ _

У разі такого розташування умову задовольняють лише дві послідовності:

0000100111101011
0000110111100101.

д) 0000 _ _ _ _ 1111 _ _ _ _

Очевидно, таке розташування неможливе.

Інші послідовності одержують із цих за допомогою симетрії та циклічного зсуву.

С.2.37. Доведемо нерівність, застосовуючи метод індукції для n. У разі $n = 2$ при $a_1a_2 = 1$ маємо нерівність $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}\le 1$, яка еквівалентна нерівності $1 + a_1 + 1 + a_2 \le 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2$. Але $a_1a_2 = 1$, тому $1 + a_1 + 1 + a_2 = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2$. Отже, за умови $n = 2$ нерівність виконується. Нехай вона виконується при $n = k$, доведемо її для $n = k + 1$. Для цього спочатку доведемо нерівність $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\le\dfrac{1}{1+ab}+1$ для довільних додатних a і b. Дана нерівність еквівалентна нерівності $(1 + a + 1 + b)(1 + ab) \le (1 + a)(1 + b)(2 + ab)$ або $2 + 2ab + a + a^2b + b + ab^2 \le 2 + ab + 2ab + a^2b^2 + 2a + a^2b + 2b + ab^2$. Отже, $\dfrac{1}{1+a_1}+\ldots+\dfrac{1}{1+a_k}+\dfrac{1}{1+a_{k+1}}\le\dfrac{1}{1+a_1}+\ldots+\dfrac{1}{1+a_{k-1}}+\dfrac{1}{1+a_ka_{k+1}}+1\le k-1+1=k$. Доведення за індукцією завершено.

С.2.38. Припустимо протилежне, тоді функція $P(x) = ax^3 + bx + c$ зберігає знак на інтервалі $(0,1)$. Нехай вона додатна (коли від'ємна, доведення аналогічне). Маємо $P\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ і за неперервністю $P(0) \ge 0$, $P(1) \ge 0$. Тоді $\dfrac{5}{3}P(0)+\dfrac{8}{3}P\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{3}P(1)=2a+3b+6c>0$, що суперечить умові.

С.2.39. Розглянемо якесь коло, що лежить у нашому крузі, і правильний mn-кутник, вписаний у це коло. Деякі його n вершин забарвлені в один колір. Обертатимемо правильний mn-кутник навколо свого центра на кути, що менші за $\dfrac{360^\circ}{mn}$. Отримаємо нескінченний набір многокутників, у кожному з яких є n одноколірних вершин. Але кольорів і способів вибрати n вершин у mn-кутника скінченна кількість, тому серед побудованих одноколірних n-кутників є нескінченна множина конгруентних n-кутників, вершини яких пофарбовано одним кольором.

С.2.40. Існує таке $j>1$, що $a_1>a_n$, $1<n<j$, і $a_1<a_j$. Для деякого $k>1$ маємо $a_k=2a_j-a_1$, $a_k>a_j>a_1$, тому $k>j$, числа $i=1, j, k$ – шукані.

С.2.41. $a_1^2+a_2^2-a_3^2=(a_1+a_2)^2-a_3^2-2a_1a_2=(a_1+a_2-a_3)(a_1+a_2+a_3)-$ $-2a_1a_2$, тому треба довести, що $\dfrac{2a_1a_2}{a_1+a_2-a_3}+\cdots+\dfrac{2a_na_1}{a_n+a_1-a_2}\geq 2n+S$.

Позначимо $a_i=d_i+2$, тоді $d_i\in[0,\ 1]$. Нам треба довести: $\dfrac{2d_1d_2+4(d_1+d_2+2)}{d_1+d_2-d_3+2}+\cdots+\dfrac{2d_nd_1+4(d_n+d_1+2)}{d_n+d_1-d_2+2}\geq 2n+(d_1+\cdots+d_n+2)$,

тобто $\dfrac{2d_1d_2+4d_3}{d_1+d_2-d_3+2}+\cdots+\dfrac{2d_nd_1+4d_2}{d_n+d_1-d_2+2}\geq d_1+d_2+\cdots+d_n$, $1\leq d_1+$ $+d_2-d_3+2\leq 4$, тому $\dfrac{2d_1d_2+4d_3}{d_1+d_2-d_3+2}+\cdots+\dfrac{2d_nd_1+4d_2}{d_n+d_1-d_2+2}\geq\dfrac{4d_3}{4}+\dfrac{4d_4}{4}+$ $+\cdots+\dfrac{4d_2}{4}=d_1+d_2+\cdots+d_n$.

С.2.42. *Лема.* Нехай у трикутнику ABC $AB<BC$. Тоді проекція I на AC лежить між проекціями O і H на AC, причому проекція H лежить між A і проекцією I.

Доведення. Нехай H_1 і O_1 – проекції H і O на AC (рис. С.2.13). Тоді BH_1 і BO_1 – відповідно висота і медіана. Нехай BL – бісектриса. Через те, що $AB<BC$, то $AL<CL$, оскільки $\dfrac{AL}{AB}=\dfrac{CL}{CB}$. Отже, $AL\leq\dfrac{AL+CL}{2}=AO_1$, а це означає, що L лежить між A і O_1. Оскільки $AB<BC$, то $\angle BCA<\angle BAC$, тому $\angle ABH_1<\angle CBH_1$, бо $\angle ABH_1+\angle BAC=\angle CBH_1+$ $+\angle BCA=90°$. $\angle ABH_1<\dfrac{\angle ABH_1+\angle CBH_2}{2}=\angle ABL$. Отже, H_1 лежить між A і L, а це означає, що L лежить між H_1 і O_1. Таким чином, BL лежить всередині трикутника BH_1O_1, а отже, і I лежить всередині цього трикутника. Трикутник BH_1O_1 прямокутний, тому і проекція I на AC лежить на відрізку H_1O_1 і H_1 лежить між A і нею. Лему доведено.

Припустимо, що ΔABC – нерівнобічний (бо в протилежному випадку $\angle OIH=180°$) і $AB<BC<AC$ (рис. С.2.14). H_1 і H_2 – відповідно проекції H на AB і AC, а O_1 і O_2 – відповідно проекції O на AB і AC. Тоді, за доведеною лемою, I лежить всередині паралелограма, утвореного перпендикулярами з H_1 і O_1 до AC і з H_2 і O_2 до AB. Причому H і O – протилежні

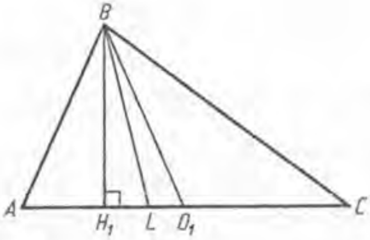


Рис. С.2.13

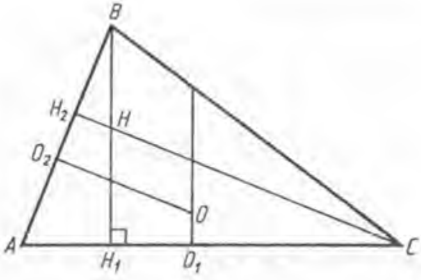


Рис. С.2.14

вершини цього паралелограма і це вершини гострого кута, оскільки згаданий кут дорівнює куту BAC, який, очевидно, є гострим. Якщо побудуємо коло з діаметром на OH, тоді весь паралелограм, а отже й точка I, лежить строго всередині кола, тому кут OIH – тупий.

С.2.43. *Відповідь.* Ні, не існує. Усі числа з множини M у разі ділення на 3 дають остачу 2. Добуток двох таких чисел дає остачу 1 при діленні на 3, і тому він не може належати множині M.

С.2.44. *Відповідь.* Ні, не існує. Припустимо, що функція f задовольняє три задані умови. Нехай m – найменше натуральне число таке, що для всіх $x \in R$ $f(x) \le \frac{m}{4}$. З умов 2), 3) випливає, що $f(2) = f\left(1+1^2\right) = f(1) + \left(f(1)\right)^2 = 2$ і тому $m \ge 8$. Знайдеться x_0 таке, що $f(x_0) > \frac{m-1}{4}$. Тоді $\left(f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right)^2 = f\left(x_0 + \frac{1}{x_0^2}\right) - f(x_0) < \frac{m}{4} - \frac{m-1}{4} = \frac{1}{4}$, $\left|f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right| < \frac{1}{2}$. Використавши умову 3) для $x = \frac{1}{x_0}$, отримаємо $\left(\frac{m-1}{4}\right)^2 < \left(f(x_0)\right)^2 = f\left(\frac{1}{x_0} + x_0^2\right) - f\left(\frac{1}{x_0}\right) < \frac{m}{4} + \frac{1}{2}$. Тому $\left(\frac{m-1}{4}\right)^2 < \frac{m}{4} + \frac{1}{2}$, $m^2 - 6m + 7 < 0$. Але для $m \ge 8$ це неможливо, адже навіть $m^2 - 6m = m(m-6) > 0$.

С.2.45. *Відповідь.* 60°. Нехай SP і SQ – відповідно бісектриси плоских кутів ASB і ASC, $SP = a$, $SQ = b$, $PQ = c$ (рис. С.2.15). Розгорнемо

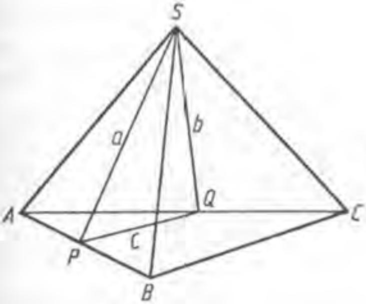


Рис. С.2.15

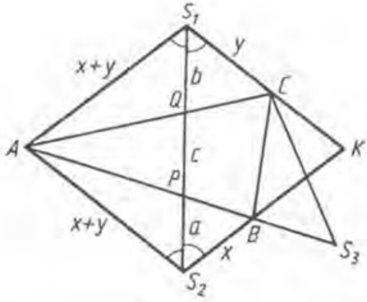


Рис. С.2.16

грані даної піраміди на площину ABC, у цьому разі вершина S перейде у точки S_1, S_2, S_3 (рис. С.2.16). Оскільки $\angle S_1AC+\angle CAB=\angle S_2BA$, то $AS_1 \parallel BS_2$. З $\angle S_2AB+\angle CAB=\angle S_1CA$ випливає, що $AS_2 \parallel S_1C$. Позначимо через K точку перетину прямих S_1C і S_2B. $AS_1=AS_2$, отже, AS_1KS_2 – ромб, точки S_1, Q, P, S_2 лежать на одній прямій – діагоналі ромба. Нехай $S_2B=x$, $S_1C=y$, тоді $AS_1=AS_2=x+y$ (за умовою задачі). $\Delta APS_1 \sim \Delta BPS_2$ і тому $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{x}{x+y}$. $\Delta AQS_2 \sim \Delta CQS_1$, звідси $\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{y}{x+y}$. Тому $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}=1$, $c^2=a^2+b^2-ab$. З ΔSPQ (рис. С.2.15) випливає, що $\cos\angle PSQ=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$, $\angle PSQ=60°$.

С.2.46. *Відповідь.* $\dfrac{1}{11}$. З умови задачі та нерівності Коші–Буняковського отримаємо $1\le\left|a+2b+3c\right|^2=\left|3(a+b+c)-(a+b)-a\right|^2\le$ $\le\left(3^2+1^2+1^2\right)\left((a+b+c)^2+(a+b)^2+a^2\right)$. Тому $(a+b+c)^2+(a+b)^2+$ $+a^2\ge\dfrac{1}{11}$. У разі $a=\dfrac{1}{11}$, $b=0$, $c=\dfrac{4}{11}$ значення нашого виразу дорівнює $\dfrac{1}{11}$.

С.2.47. Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема. Нехай два кола перетинаються у точках P і Q, причому перше коло проходить через центр O другого. Через точку P проведено довільну пряму, що перетинає перше коло у точці R, а друге – у точці S. Тоді $RS=RQ$. Справді, $\angle OPS=\angle OSP$ і $\angle OQS=\angle OSQ$ як кути при основі

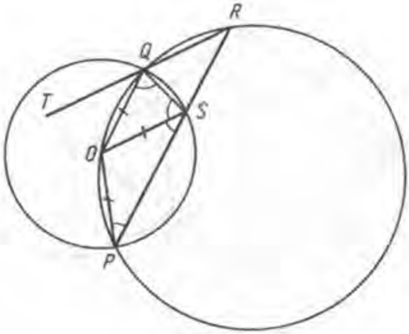


Рис. С.2.17

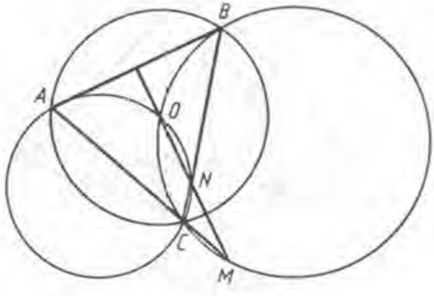


Рис. С.2.18

рівнобедрених трикутників (рис. С.2.17). $\angle OPS = 180° - \angle OQR = \angle OQT$, оскільки чотирикутник $OPRQ$ вписаний. Тому, $\angle RQS = \angle RSQ$, $RS = RQ$. Аналогічно доводять лему в тому випадку, коли точка P лежить на відрізку RS (тут окремо треба розглянути ситуації $O \in \Delta QRS$ та $O \notin \Delta QRS$). Тепер доведемо твердження задачі. Застосувавши лему до кіл ABC, AOC та прямої BC, дістанемо рівність $NA = NB$ (рис. С.2.18). Використовуючи лему до кіл ABC, BOC і прямої AC, отримаємо $MA = MB$. Також $OA = OB$ як радіуси описаного кола. Тому точки O, M, N лежать на одній прямій – на серединному перпендикулярі до відрізка AB.

С.2.48. Нехай $P(x) = a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_1x + a_0$ – це многочлен з коефіцієнтами з $\{1,2,...,m\}$, який ділиться на $Q(x) = x^{n-1} + ... + x + 1$. Тоді $(x-1)P(x) = a_{2n-1}x^{2n} + (a_{2n-2} - a_{2n-1})x^{2n-1} + ... + (a_0 - a_1)x - a_0$ має ділитися на $(x-1)Q(x) = x^n - 1$. У цьому разі замість x^{n+k} можемо записати x^k, зберігши при цьому подільність на $x^n - 1$ (адже $(x^{n+k} - x^k) \vdots (x^n - 1)$). Таким чином, на $x^n - 1$ має ділитися многочлен $(a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{n-2} - a_{n-1}) \times$ $\times x^{n-1} + ... + (a_n - a_{n+1} + a_0 - a_1)x + (a_{2n-1} - a_0 + a_{n-1} - a_n)$. Останній многочлен має степінь, що менший за n, і тому з його подільності випливає, що це тотожний нуль. Отже, подільність $P(x)$ на $Q(x)$ еквівалентна виконанню системи рівностей

$$\begin{cases} a_{2n-1} + a_{n-1} = a_{2n-2} + a_{n-2}, \\ a_{2n-2} + a_{n-2} = a_{2n-3} + a_{n-3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n+1} + a_1 = a_n + a_0. \end{cases}$$

(З цих рівностей випливає і те, що $a_{2n-1} + a_{n-1} = a_n + a_0$.) Як бачимо, всі парні суми в системі мають одне і те саме значення, яке позначимо через k. Для кожного k кількість шуканих многочленів – це кількість подань k у вигляді n парних сум різних доданків з урахуванням того, що в парах можемо міняти місцями доданки, а також між собою ці пари. Всі $2n$ доданків у парах мають бути різними числами з множини $\{1, 2, ..., m\}$ і тому $m \geq 2n$. Додавши всі n пар, отримаємо такий результат: $nk \geq 1+2+...+2n = n(2n+1)$, тому $k \geq 2n+1$. Вибір пари означає для даного k вибір меншого доданка. Для $k \leq m$ менший доданок може бути будь-яким числом від 1 до $\left[\frac{k-1}{2}\right]$, і їх вибір можна зробити для n пар $C^n_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ способами. Для $k > m$ менший доданок лежить від $k-m$ до $\left[\frac{k-1}{2}\right]$, і n можемо обрати $C^n_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ способами. Врахуємо також $n!$ перестановок пар та 2^n перестановок у парах, і для $m \geq 2n$ отримаємо кількість $n!2^n\left(\sum\limits_{k=2n+1}^{m} C^n_{\left[\frac{k-1}{2}\right]} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m-2n+1} C^n_{\left[\frac{2m-k+1}{2}\right]}\right)$.

Олімпіада 3

Перший етап

С.3.1. Покладемо $a_i = 1\,000 + 1\,000\,n + i$, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді для будь-якого многочлена $ax^2 + bx + c$, де $\{a,b,c\} \subset \{a_i\}_{i=1}^{n}$, маємо $b^2 - 4ac \leq 1\,001^2(n+1)^2 - 4 \cdot 1\,000^2 \cdot (n+1)^2 < 0$.

С.3.2. Ні, не можна. Адже площа 50 вказаних кіл буде більшою за площу даного прямокутника.

С.3.3. Виграє Джері. Для цього після кожного ходу Тома, який поставив число a в ij-ту клітинку дошки, Джері має поставити число $-a$ в довільну mk-ту клітинку дошки таку, що числа $i+j$ і $m+k$ мають однакову парність. Після заповнення дошки подібним чином $S=D=0$.

С.3.4. *Відповідь.* $(0, -1)$; $(1, 1)$; $(-1, -1)$. Додамо обидві рівності та віднімемо їх: $ab - b - b^2 + a = 0$, звідси $b = \dfrac{-a}{a-1-b}$. З першого рівняння $b = \dfrac{1}{a^2+a-1}$, а тому $\dfrac{-a}{a-1-b} = \dfrac{1}{a^2+a-1}$, тобто $b = a^3 + a^2 - 1$. Звідси маємо

$$\begin{aligned}&(a^3 + a^2 - 1)(a^2 + a - 1) = 1,\\ &a(a-1)(a+1)^3 = 0,\\ &a = 0, b = -1,\\ &a = 1, b = 1,\\ &a = -1, b = -1.\end{aligned}$$

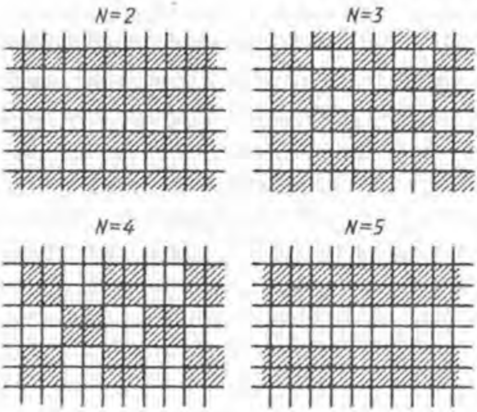


Рис. С.3.1

С.3.5. *Відповідь:* а) $N = 2, 3, 4, 5$; б) $N = 3, 4, 5, 6$.

а) Очевидно $0 \le N \le 8$. Значення $N = 0, 1, 8$ неможливі. Нехай $N = 7, 6$. Тоді у довільної білої клітинки є 7(6) білих сусідів, тобто 1(2) чорних. Отже, у деякої чорної клітинки не менше 3 білих сусідів, що неможливо. Потрібне пофарбування для $N = 2, 3, 4, 5$ наведено на рис. С.3.1.

б) Зводиться до а) заміною N на $8 - N$.

С.3.6. 1) Доведемо, що для двох діаметрів AB і CD деякого кола та для довільної точки X площини $AX^2 + BX^2 = CX^2 + DX^2$. Нехай O – центр кола та $OX = x$ (рис. С.3.2). За теоремою косинусів

$$x^2 + R^2 - 2xR\cos\alpha = AX^2,\ x^2 + R^2 + 2xR\cos\alpha = BX^2,$$

звідси $AX^2 + BX^2 = 2(x^2 + R^2) = CX^2 + DX^2$.

2) Позначимо через F, G, H точки дотику відповідно другого і третього, першого і другого, першого і третього кіл. Маємо

$$\begin{aligned}A_1X^2 + FX^2 &= B_1X^2 + HX^2,\\ A_2X^2 + GX^2 &= B_2X^2 + FX^2,\\ A_3X^2 + HX^2 &= B_3X^2 + GX^2.\end{aligned}$$

C.3.7. Оскільки $A_iB_j = \sqrt{i+j}$, то всі A_i і B_j різні. Для точок A_1, A_2, B_j виконується $A_2B_j^2 - A_1B_j^2 = 1$, а тому всі B_j лежать на деякій прямій b, перпендикулярній до A_1A_2. Так само всі A_i лежать на деякій прямій a, перпендикулярній до B_1B_2.

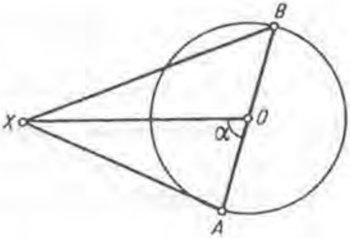


Рис. C.3.2

C.3.8. Доведемо більш сильну нерівність

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x} \le 2\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{yz}{x^2}\right).$$

Можна вважати $x \le y \le z$, тоді $xy \le xz \le yz$ та $\frac{1}{z^2} \le \frac{1}{y^2} \le \frac{1}{x^2}$ і наша нерівність випливає з нерівностей для впорядкованих наборів

$$xy\frac{1}{x^2}+xz\frac{1}{z^2}+yz\frac{1}{y^2} \le xy\frac{1}{z^2}+xz\frac{1}{y^2}+yz\frac{1}{x^2},$$

$$xy\frac{1}{y^2}+xz\frac{1}{x^2}+yz\frac{1}{z^2} \le xy\frac{1}{z^2}+xz\frac{1}{y^2}+yz\frac{1}{x^2}.$$

C.3.9. *Відповідь*. а) При $n = 2k+1$ – можна; б) при $n = 2k$ – не можна. Можна вважати, що вершини першого n-кутника пронумеровано 1, 2, ..., n за годинниковою стрілкою.

а) Для $n = 2k+1$ пронумеруємо другий n-кутник 1, 2, .., n проти годинникової стрілки. Нехай вершина k другого n-кутника склеюється з вершиною m першого. Для $m = 2t+1$ збігаються вершини з номерами $k+1+t$. Для $m = 2t$ збігаються вершини з номером t.

б) Нехай $n = 2k$. Припустимо, що потрібна нумерація існує. При деякому склеюванні вершині i в першому n-кутнику відповідає вершина a_i в другому. Нехай l_i – відстань (у сторонах за годинниковою стрілкою) від i-ї до a_i-ї вершини в першому n-кутнику. Тоді $\{l_1, ..., l_n\} = \{0, 1, ..., n\}$. Нумерацію $a_1, ..., a_n$ можна одержати з 1, 2, ..., n перестановкою сусідніх вершин. Для початкової нумерації $l_1 + ... + l_n = 0$. Переставляючи вершини a_i та a_i+1 легко помітити, що сума l_i може лише зрости або зменшитися на n (або не змінитися). Отже $l_1+...+l_n$ кратне n, але $0+1+...+(n-1) = k(n-1)$ не ділиться на n.

С.3.10. Перепишемо рівняння у вигляді $(x^{500}+y^{500}+z^{500})\,(x^{500}+y^{500}-z^{500})\,(x^{500}-y^{500}+z^{500})\,(y^{500}-x^{500}+z^{500})=0$.

Згідно з елементарною теорією рівняння Ферма $x^n+y^n=z^n$ для $n=4$ розв'язками останнього будуть тільки набори $(\pm a, a, 0)$ та всі можливі їх перестановки, де a – ціле число.

С.3.11. *Відповідь.* $k=2$, $l=8$, $m=12$. Спочатку відзначимо, що для всіх натуральних $q\ge 5$ $N(q)\le\frac{q}{5}$. Для однозначних q це перевіряється безпосередньо. Якщо q має r знаків у запису, $r\ge 2$, то $N(q)=r$, $\frac{q}{5}\ge r$, $\frac{q}{5}\ge\frac{10^{r-1}}{5}=2\cdot 10^{r-2}$. Нерівність $2\cdot 10^{r-2}\ge r$ виконується для $r=2$, і при кожному наступному зростанні r на одиницю ліва частина збільшується в десять разів, а права – в меншу кількість.

З рівнянь системи маємо $k\ge 2$, $l\ge 7$, $m=2l-4\ge 10$. Припустимо, що $N(k)\ge 2$, $k\ge 10$. Тоді з першого рівняння і відзначеного нами випливає, що $k\le\frac{k+l}{5}$, $4k\le l$. З другого рівняння $l-4=k+N(2l-4)\le$ $\le\frac{l}{4}+\frac{2l-4}{5}$, звідси $l\le 9$. Це суперечить тому, що $k\ge 10$ і $l\ge k$. Тому $N(k)=1$. З другого рівняння маємо $l-4=1+N(l)+N(2l-4)\le$ $\le 1+\frac{l}{5}+\frac{2l-4}{5}$, звідси $l\le 10$. Підставивши в останню рівність значення 7, 8, 9 і 10 замість l, переконуємося, що підходить лише $l=8$. Звідси $m=12$, $k=2$.

С.3.12. *Відповідь.* 80°. Нехай Q – це точка перетину BL і бісектриси кута CAB. Легко підрахувати, що $\angle BAP=20°$, $\angle QBA=70°$, $\angle AQB=$ $=90°$. У трикутнику ABL відрізок AQ є висотою і бісектрисою, а значить пряма AQ є віссю симетрії. $\angle KPL=\angle PBL+\angle PLB=40°+40°=80°$.

С.3.13. *Відповідь.* $f(z)=z$, $z\ge 0$. Підставивши $x=y=0$, отримаємо $f(0)=0$. Якщо підставимо $y=-x$, одержимо $0=f(0)=2f(x^2)-2x^2$, звідси $f(x^2)=x^2$. Тому для всіх невід'ємних z $f(z)=z$. Робимо перевірку.

С.3.14. *Відповідь.* $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Нехай $m^2\le k\le m^2+m$, $m\in N$. Тоді $m\le\sqrt{k}<m+\frac{1}{2}$, $k+m+\frac{1}{2}\le k+\sqrt{k}+\frac{1}{2}<k+m+1$, $a_k=\left[k+\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right]=k+m$.

Далі маємо $m^2+m \le a_k \le m^2+2m$, $m<\sqrt{a_k}<m+1$, $\left[\sqrt{a_k}\right]=m$, $b_k=a_k-\left[\sqrt{a_k}\right]=$ $=k+m-m=k$. Аналогічно розглядається випадок, коли m^2+m+ $+1 \le k \le m^2+2m$, $m \in N$. Тоді $m+\dfrac{1}{2}<\sqrt{k}<m+1$, $a_k=k+m+1$, $\left[\sqrt{a_k}\right]=m+1$, $b_k=k$. Отже, завжди $b_k=k$ і $b_1+2b_2+...+nb_n=1^2+$ $+2^2+...+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

С.3.15. Маємо $(1+x)^k \ge 1+kx$. Також $(1+x)^l \ge 1+lx$, $(1+x)^m \ge 1+$ $+mx$. Звідси $(1+x)^k+(1+x)^l+(1+x)^m \ge 3+(k+l+m)x \ge 2\sqrt{3(k+l+m)x} \ge$ $\ge 2\sqrt{3x}\left(3\sqrt[3]{klm}\right)^{1/2}=6\sqrt{x}\sqrt[6]{klm}$ (тут в двох останніх нерівностях скористалися нерівностями Коші для двох та для трьох чисел).

С.3.16. Маємо $AE=AQ=AF$, $AT=AL$, звідси $TE=LF$ і аналогічно $LF=PN$ (рис. С.3.3). Якщо $C_1L=C_1S=C_1F$, то C_1, B_1, A_1 – середини відрізків відповідно LF, TE, PN. З урахуванням того, що ці відрізки рівні, $MQ=MR=MS$, запишемо $\Delta AMC_1=\Delta AMB_1$ за трьома сторонами. Отже, AM – це бісектриса кута BAC. Провівши аналогічні міркування для інших вершин, отримаємо, що M – центр вписаного кола ΔABC. Також випливає, що $AB-AC=BA_1-A_1C$ і тому A_1 має збігатися з точкою дотику BC і вписаного кола ΔABC. Тобто $MA_1 \perp BC$, і бісектриса кута BAC збігається з висотою, $AB=AC$. Аналогічно доводимо, що $AB=BC$.

С.3.17. *Відповідь*. 12. Якщо кожний шахіст зіграв не менше трьох партій внічию, то всього отримуємо не менше, ніж $\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=$ $=12$ нічиїх. Припустимо, що знайдеться шахіст A, який має дві нічиї. Тоді знайдуться п'ять шахістів, з якими він грав не внічию, і всі десять партій між собою ці п'ять гравців повинні були закінчити мирною угодою (це випливає з умови задачі, коли разом з парою

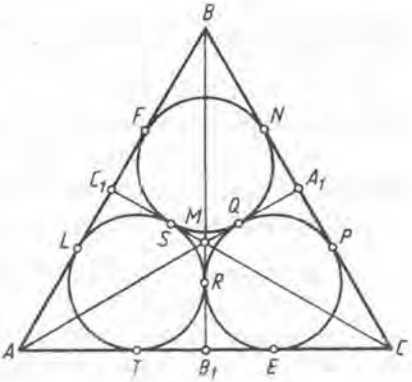


Рис. С.3.3

таких шахістів розглядаємо A). Всього отримаємо не менше, ніж $2+10=12$ нічиїх. Якщо знайдеться гравець A, який має не більше однієї нічийної партії, то знайдуться шість гравців, які всі партії між собою закінчили внічию. Це вже нам дасть $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15$ нічийних підсумків. Приклад турніру з 12 нічиїми, що задовольняє умову задачі, можна отримати, коли наші вісім шахістів можна розбити на дві четвірки так, що в кожній четвірці всі партії між собою гравці закінчували внічию.

С.3.18. *Відповідь.* $k=2$, $p=3$ і $k=2$, $p=7$. Нехай $p(2^{p-1}-1)=x^k$, де $x\in N$. Очевидно, що $p\neq 2$, тому p – непарне, $p=2q+1$, x ділиться на p. Нехай $x=py$, звідси $2^{p-1}-1=\frac{x^k}{p}$, $(2^q-1)(2^q+1)=p^{k-1}\cdot y^k$. Числа 2^q-1 та 2^q+1 взаємно прості, і тому хоча б одне з них має бути k-м степенем натурального числа. Розглянемо два випадки.

1) $2^q-1=z^k$, $z\in N$. Тоді $2^q=z^k+1$. Для парних k z^k+1 не може ділитися на 4, тому можливе лише $q=1$, звідси $p=3$, $p(2^{p-1}-1)=3^2$. Для непарних k, $k=2l+1$, маємо $2^q=z^{2l+1}+1=(z+1)(z^{2l}-z^{2l-1}+\ldots-z+1)$, і $z+1=2^{\alpha}$, $0\le\alpha<q$. Але тоді $2^q=(2^{\alpha}-1)^{2l+1}+1$. Далі відзначимо, що $(2^{\alpha}-1)^{2l+1}+1=2^{\alpha+1}\cdot A+2^{\alpha}$, $A\in N$. Це можна довести за допомогою бінома Ньютона або розглянувши подання

$$(2^{\alpha}-1)^{2l+1}+1-2^{\alpha}=(2^{\alpha}-1)((2^{\alpha}-1)^{2l}-1),$$

і остання різниця має ділитися на $(2^{\alpha}-1)^2-1$. Оскільки $2^{\alpha+1}\cdot A+2^{\alpha}$ ділиться на 2^{α} і ні на який вищий степінь двійки, отримуємо суперечність з рівністю $2^q=2^{\alpha+1}\cdot A+2^{\alpha}$, $0\le\alpha<q$.

2) $2^q+1=z^k$, $z\in N$. Тоді $2^q=z^k-1$ і для непарного k доводимо неможливість цієї рівності так, як і в першому випадку. Якщо $k=2l$, то маємо $2^q=(z^l-1)(z^l+1)$ і обидва множники, які відрізняються на два, мають бути степенями двійки. Це можливо лише для $z^l-1=2$, звідси $q=3$, $p=7$ і тоді $p(2^{p-1}-1)=21^2$.

С.3.19. *Відповідь.* $\frac{2}{3}\left(\sqrt{7}+2\right)$. Позначимо $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Нехай I – центр вписаного кола ΔABC, N – точка дотику вписаного кола до сторони AC, M – середина AC. Через r_1 позначимо радіус кола K, r – радіус вписаного кола ΔABC. Доведемо спочатку, що $a=b$. З умови дотику кіл випливає, що $IM = r_1 - \frac{b}{2}$. З прямокутного трикутника INM маємо $MN^2 = \left(r_1 - \frac{b}{2}\right)^2 - r^2$. Також $AN = \frac{b+c-a}{2}$, $MN = |AM - AN| = \frac{|c-a|}{2}$. Звідси

$$(c-a)^2 = (2r_1 - b)^2 - 4r^2. \qquad (1)$$

Аналогічно доводимо, що $(c-b)^2 = (2r_1 - a)^2 - 4r^2$. Віднімаючи два отриманих рівняння, одержимо $(b-a)(2c-a-b) = (b-a)(a+b-4r_1)$. Якщо $a \neq b$, то $2c - a - b = a + b - 4r_1$, $b - 2r_1 = c - a$ і з (1) маємо $r=0$. Прийшли до суперечності. Знаючи, що трикутник рівнобедрений і $\cos\angle BAC = \frac{3}{4}$, легко підрахувати, що $r = \frac{3b}{4\sqrt{7}}$, $c = \frac{3b}{2}$. Враховуючи, що $b < 2r_1$, з (1) маємо $r_1 = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{(c-b)^2 + 4r^2}\right)$ і після нескладних підрахунків отримуємо $\frac{r_1}{r} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{7} + 2\right)$.

С.3.20. *Відповідь*. Не існує. Припустимо, що послідовність $\{a_n\}$ задовольняє умову. Вона не може бути постійною, починаючи з деякого місця, оскільки тоді для досить великого n $a_{a_n} = 0$. Отже, існує номер l такий, що $a_{l+1} > a_l$. З умови задачі $a_{i+1}a_{i-1} > a_i^2$ для всіх $i \geq 2$. Перемноживши ці рівності для $i = l+1, l+2, \ldots, k$, отримаємо $\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{a_{l+1}}{a_l}$. Позначивши $\frac{a_{l+1}}{a_l} = \delta$, $\delta > 1$, одержимо $\frac{a_{k+1}}{a_k} > \delta$ для $k > l$. Тому $a_k > a_l\delta^{k-l}$ для $k > l$ і послідовність a_k буде зростаючою, починаючи з деякого номера. Також неважко тепер показати, що $a_k > k^4$ і $a_k > k+2$ для досить великих k. Тепер маємо, що для таких індексів $a_{k+1}^2 > a_{k+1}a_{k-1} = a_{a_n} + a_k{}^2 > a_{a_k} > a_k{}^4$. звідси $a_{k+1} > a_k^2$. Також $a_{k+1}^2 > a_{a_k} > a_{k+2} > a_{k+1}^2$. Отримали суперечність.

С.3.21. Див. розв'язання задачі С.3.11.

С.3.22. $M\sum_{k=1}^{n} ka_k = M\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=k}^{n} a_p\right) \ge \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\sum_{p=k}^{n} a_p\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2} + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \ge$

$\ge \frac{2}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \frac{n+1}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j.$

При цьому використали, що $M \ge a_k$, $a_i^2 + a_j^2 \ge 2a_i a_j$.

С.3.23. Нехай $f(x, y) = x + y\sqrt{2}$, $S = \{f(a, b)$: $0 \le a \le m$, $0 \le b \le m$, a, $b \in Z\}$. Маємо $(m+1)^2$ елементів S, всі вони різні і лежать на проміжку від 0 до $\left(1+\sqrt{2}\right)m$. Поділимо відрізок $\left[0,\left(1+\sqrt{2}\right)m\right]$ на m^2+2m однакових частин довжиною $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)m}{m^2+2m} = \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$. Серед $(m+1)^2 = (m^2+2m)+1$ елементів S знайдуться два $f(a_1,b_1)$ і $f(a_2,b_2)$, що попадуть до однієї частини. Нехай $f(a_1,b_1) > f(a_2,b_2)$, тоді $0 < f(a_1,b_1) - f(a_2,b_2) \le \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$ і $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ задовольняють умову задачі.

С.3.24. Нехай $c^2 = 2+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $c > 0$. Досить довести, що при досить великих N точка x з $|x| \ge \frac{c}{\sqrt{n}}$ не може бути точкою мінімуму $f_n(x)$. А для цього досить показати, що $f_n(x) > f_n(0) = \frac{n}{n^2+1}$. Для $|x| \ge \frac{c}{\sqrt{n}}$ маємо $f_n(x) \ge \frac{\left(c^2/n\right)}{\left(c^2/n\right)+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{2+\varepsilon}{2+\varepsilon+n} - \frac{n}{n^2+1}$. Нерівність $\frac{2+\varepsilon}{2+\varepsilon+n} - \frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+1}$ зводиться до нерівності вигляду $\varepsilon n^2 + pn + q > 0$, де $\varepsilon > 0$. Взявши N_0 більшим за більший корінь тричлена (або довільним, якщо коренів немає), отримаємо необхідне твердження.

С.3.25. Див. розв'язання задачі С.3.17.

С.3.26. *Відповідь.* $\angle B = \angle C$ або $\angle A = 90°$, або $|\angle B - \angle C| = 90°$. Якщо $\angle B = \angle C$, то рівність $AK = AL$ очевидна. Нехай $\angle A = 90°$, $K' \in AB$ і $AK' = AD = AL'$, E' та F' – точки перетину $K'L'$ з бісектрисами кутів відповідно BAD і CAD. Тоді $\Delta AK'E' = \Delta ADE'$, $\Delta ADF' = \Delta AL'F'$ і, оскільки

$\angle AK'E' = \angle AL'F' = 45°$, маємо $\angle ADE' = \angle ADF' = 45°$. Тому DE' і DF' є бісектрисами кутів, $E' = E$, $F' = F$, $K' = K$, $L' = L$, $AK = AL$.

Тепер припустимо, що $AK = AL$. Нехай D' – точка на прямій AD така, що $AK = AL = AD'$. Припустимо, що $D' \neq D$. Тоді $\Delta AKE = \Delta AD'E$, $\Delta ALF = \Delta AD'F$, звідси $\angle ED'A = \angle AKL = \angle ALK = \angle FD'A$, $\angle ED'D = \angle FD'D$, $\angle EDD' = \angle FD'D = 45°$, $\Delta ED'D = \Delta FD'D$, $DE = DF$, $EF \parallel BC$. Далі легко доводиться, що ΔABC рівнобедрений. Якщо $D' = D$, то $\Delta ADE = \Delta AKE$, $\angle AKE = \angle ADE = 45°$, аналогічно $\angle ALF = 45°$, звідси $\angle A = 90°$. Коли кут B або кут C тупий, маємо рівність $|\angle B - \angle C| = 90°$.

С.3.27. *Відповідь.* 1. $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x-1}$. Нехай $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, де дріб нескоротний, $h(x) = \sum_{k=0}^{q} a^k x^k, g(x) = \sum_{k=0}^{r} b_k x^k$, $a_q = b_r = 1$. Тоді $f\left(\frac{1}{x}\right)$ буде подана у вигляді відношення двох взаємно простих многочленів, і степінь кожного з них не буде перевищувати max $\{q, r\}$.

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{h\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)}{g\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} a_k \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)^k}{\sum_{k=0}^{r} b_k \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)^k} = \frac{\sum_{k=0}^{q} a_k \left(g(x)\right)^k \left(h(x)\right)^{q-k}}{\sum_{k=0}^{r} b_k \left(g(x)\right)^k \left(h(x)\right)^{r-k}} \left(h(x)\right)^{r-q}.$$

У чисельнику степінь кожного многочлена – доданка з $a_k \neq 0$ – дорівнює $kr + (q-k)q$, у знаменнику при $b_k \neq 0$ – $kr + (r-k)q$.

Якщо $q = r$, то або в чисельнику, або в знаменнику залишиться член x^{q^2} з ненульовим коефіцієнтом (якби він скоротився і в чисельнику, і в знаменнику, то $\sum_{k=0}^{q} a^k = 0, \sum_{k=0}^{r} b^k = 0, h(x)$ і $g(x)$ мали б корінь $x = 1$, дріб $\frac{h(x)}{g(x)}$ був би скоротний).

Якщо $q > r$, то в знаменнику, помноженому на $(h(x))^{q-r}$, буде член степеня не меншого за $qr + q - r$ (він буде отриманий при $k = r$).

Якщо $q < r$, то в чисельнику при $k = q$ отримаємо член з x^{qr+r-q}. У будь-якому випадку $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ буде нескоротним дробом двох многочленів, хоч один з яких має степінь не менший за $qr+|q-r|$.

Оскільки $f\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=1$, повинно бути $\max\{q,r\}\geq qr+|q-r|$. Це, очевидно, неможливо при $\max\{q,r\}\geq 2$. Отже, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, де коефіцієнти можуть дорівнювати нулеві, а старші ненульові доданки повинні мати коефіцієнт 1. Розглянемо окремі випадки.

1) $a=c=0$. Тоді $b=d=1$, $f(x)=1$ задовольняє умову;

2) $c=0$, $a\neq 0$. Тоді $a=d=1$, $f(x)=x+b$. Перевірка показує, що жодні такі f не задовольняють умову;

3) $a=0$, $c\neq 0$. Тоді $f(x)=\dfrac{1}{x+d}$. Підстановкою знаходимо $d=0$ і $f(x)=\dfrac{1}{x}$ задовольняє умову;

4) $a\neq 0$, $c\neq 0$. Тоді $f(x)=\dfrac{x+b}{x+d}, b\neq d$. Зробивши підстановку, отримаємо

$$\frac{bx+1}{dx+1}\frac{(b+1)x+d+b^2}{(d+1)x+d+bd}=1.$$

Прирівнявши вільні члени чисельника і знаменника, будемо мати $d+b^2=d+bd$, звідси $b=0$. Далі легко отримуємо $d=-1$. Маємо $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

С.3.28. *Відповідь.* Не можна. Дана послідовність зростає, адже $3^{n+1}-2^{n+1}>3^n-2^n \Leftrightarrow 2\cdot 3^n>2^n$, що очевидно для $n\geq 1$. Для $m<n$ доведемо, що $a_m a_{2n-m}<a_n^2<a_m a_{2n-m+1}$. Звідси буде випливати, що для всіх m, n, k таких, що $a_m a_k\neq a_n^2$, матимемо $a_m a_{2n-m}<a_n^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (3^m-2^m)(3^{2n-m}-2^{2n-m})<(3^n-2^n)^2 \Leftrightarrow (3^{n-m}-2^{n-m})^2>0$, що очевидно. Далі маємо $a_m a_{2n-m+1}>a_n^2 \Leftrightarrow (3^m-2^m)(3^{2n-m+1}-2^{2n-m+1})>(3^n-2^n)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2n}+2^{2n}+2\cdot 6^n-2^m\cdot 3^{2n-m+1}-3^m\cdot 2^{2n-m+1}>0 \Leftrightarrow (3^{m-1}-2^{m-1})(2\cdot 3^{2n-m+1}-$ $-2^{2n-m+1})+2\cdot 2^n\cdot 3^{m-1}(3^{n-m+1}-2^{n-m+1})>0$, що виконується.

С.3.29. Див. розв'язання задачі С.3.19.

С.3.30. Розглянемо рядки таблиці як вектори в 1 996-вимірному координатному просторі. Тоді гра зводиться до наступної: Олексій та Володя по черзі вибирають вектори і виграє той, в кого довжина суми вибраних векторів більша. У 1 996-вимірному просторі, як і в двовимірному, сума векторів – це вектор з координатами-сумами відповідних координат, довжина вектора – це квадратний корінь із суми квадратів координат. Скалярний добуток, перпендикулярність, проекція також визначаються через координати. Нехай $\vec{S}$ – сума всіх 1 996 векторів. На кожному ході Олексій має брати той вектор серед залишених, у якого найбільша проекція на $\vec{S}$ (проекції розглядаємо із знаками – повністю аналогічно до двовимірної ситуації). Нехай в кінці сума векторів Олексія дорівнює $\vec{a}$, Володі – $\vec{b}$. Покладемо $\vec{a}=\vec{x}_1+\vec{y}_1$, $\vec{b}=\vec{x}_2+\vec{y}_2$, де $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ колінеарні $\vec{S}$, а $\vec{y}_1$ і $\vec{y}_2$ перпендикулярні до $\vec{S}$. Оскільки $\vec{a}+\vec{b}=\vec{S}$, то $\vec{y}_1+\vec{y}_2=0$, $|\vec{y}_1|=|\vec{y}_2|$. Із стратегії гри випливає, що $|\vec{x}_1|\geq|\vec{x}_2|$. Тому $|\vec{a}^2|=|\vec{x}_1|^2+|\vec{y}_1|^2\geq|\vec{x}_2|^2+|\vec{y}_2|^2=|\vec{b}|^2$.

Фінальний етап

С.3.31. Спочатку доведемо, що якщо в довільному трикутнику PQR $PQ=2PR$, то $\angle PQR$ не перевищує $30°$. Дійсно, розглянемо коло з центром у точці P та радіусом PR. Воно перетинає сторону PQ посередині. Якщо QT – дотична до кола, то $\angle PQT=30°$. Але $\angle PQR\leq\angle PQT=30°$.

Розглянемо тепер трикутник CBB_1. Маємо $CB_1=CA_1=A_1B$, а отже, $CB=2CB_1$. Звідси $\angle CBB_1=\alpha\leq 30°$. Далі $\angle BCC_1=\alpha\leq 30°$ як симетричний куту CBB_1. Тому $\angle BOC_1=\angle CBB_1+\angle BCC_1\leq 60°$.

С.3.32. Спочатку зауважимо, що для довільних двох цифр a і b виконується $S(ab)\leq ab$. Далі для довільного натурального числа k виконується нерівність $S(k+10^l)\leq S(k)+1$, оскільки в числі $k+10^l$ лише одна цифра збільшується на одиницю, а решта або не змінюється, або зменшується з 9 на 0 при перенесенні у вищий розряд. Звідси одразу отримуємо $S(k+m)\leq S(k)+S(m)$ для довільних натуральних k і m. Нехай $n=a_1 10^l+a_2 10^{l-1}+...+a_l 10^1+a_{l+1}$, де a_i – цифри числа n.

Тоді, згідно з нашими зауваженнями, маємо $n^2 = \left(a_1 10^l + a_2 10^{l-1} + \right.$ $\left. + ... + a_l 10^1 + a_{l+1}\right)\left(a_1 10^l + a_2 10^{l-1} + ... + a_l 10^1 + a_{l+1}\right) = a_1^2 10^{2l} + a_1 a_2 10^{2l-1} +$ $+ ... + a_{l+1}^2$. Оскільки a_i – цифри, маємо $S(a_i a_j 10^s) \le a_i a_j$. Отже, $S\left(n^2\right) \le a_1^2 + 2a_1 a_2 + ... + a_{l+1}^2 = S^2(n)$.

С.3.33. Якщо маємо дві сусідні точки одного кольору, тоді колір усіх точок в їх смужці $2\times n$ однозначно визначається, тобто наступні мають бути іншого кольору і т. д.

Розфарбуємо нижні n точок. Якщо при цьому дві сусідні точки мають однаковий колір, можемо визначити колір їх смуги, а потім і колір інших точок (бо нижня межа вже розфарбована). Зрозуміло, що кожна точка матиме колір, відмінний від її "сусідки" знизу. Таких розфарбувань $2^n - 2$, оскільки існує рівно два розфарбування нижньої лінії такі, що кольори довільних двох сусідніх точок різні.

Якщо нижня лінія точок розфарбована в один з двох виключених випадків, зрозуміло, що кольори точок у довільній горизонтальній лінії будуть чергуватися. Кожна лінія може бути розфарбована двома способами. Отже, всього розфарбувань $2^n - 2 + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

С.3.34. *Відповідь*. Три числа. Доведемо спочатку, що чотирьох таких чисел бути не може. Дійсно, якщо число має чотири дільники, тоді воно має вигляд p^3 або pq, де p, q – різні прості числа. Якби існувало чотири числа такого вигляду, одне з них мало б ділитися на 4, а отже дорівнювало б 8. Але ні 7, ні 9 не мають чотирьох дільників. Тому чотирьох чисел вказаного вигляду немає. Приклад $33=3\cdot 11$, $34=2\cdot 17$, $35=5\cdot 7$ показує, що три таких числа існують.

С.3.35. Проведемо через точку M пряму, паралельну прямій AB, а через точку N пряму, паралельну прямій AC. Нехай T позначає точку перетину цих прямих. Оскільки відстань від точки M до сторони AB дорівнює відстані від точки N до сторони AC, то точка T рівновіддалена від сторін кута BAC. Отже, $T \in AK$. Оскільки $TN \parallel AQ$, маємо $\frac{KN}{NQ} = \frac{KT}{TA}$. Аналогічно з того, що $MT \parallel AB$, маємо $\frac{KM}{MP} = \frac{KT}{TA}$. Тому $\frac{KN}{NQ} = \frac{KM}{MP}$. Звідси випливає, що $PQ \parallel MN$.

С.3.36. За нерівністю Коші маємо $\dfrac{ax+by+cz}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{x^a y^b z^c}$, $\dfrac{bx+cy+az}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{x^b y^c z^a}$, $\dfrac{cx+ay+bz}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{x^c y^a z^b}$.

Перемноживши ці нерівності, отримаємо потрібне нам твердження.

С.3.37. Запишемо довжини сторін n-кутника в порядку зростання: $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Нехай умова не виконується. Тоді $a_1 \leq \dfrac{a_2}{2}, \ldots, a_{n-1} \leq \dfrac{a_n}{2}$. Звідси $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \leq \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \dfrac{1}{2}\right)a_n < a_n$, що неможливо, оскільки довжина ламаної не може бути менша за довжину відрізка, який з'єднує її кінці.

С.3.38. Вже після першої операції сума чисел дорівнює нулеві. З $a + b + c + d = 0$ випливає, що $d = -a - b - c$, $|ab - cd| = |a+c||b+c|$, $|ac - bd| = |b+c||a+b|$, $|ad - bc| = |a+b||a+c|$, $|ab - cd||ac - bd||ad - bc| = |a+b|^2|b+c|^2|a+c|^2$, але добуток трьох простих чисел не може бути повним квадратом.

С.3.39. Пофарбуємо на карті квартали міста в шаховому порядку. Різниця R між кількістю чорних і білих кварталів, що належать уряду, не змінюється внаслідок операцій повстанців. Ситуація перемир'я має вигляд, показаний на рис. С.3.4, де $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Неважко показати, що для різних значень k значення R також є різні, тому k визначається за R однозначно.

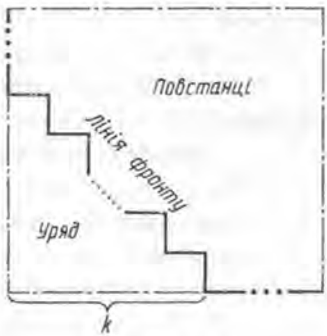


Рис. С.3.4

С.3.40. Легко довести, що точка D лежить між P та C і між Q та A. $S_{ADC}=S_{PDQ}$, оскільки $AP \parallel CQ$. Звідси $DP \cdot DQ = AD \cdot DC = BD^2$ і трикутники PDB і BDQ подібні, тобто $\angle DPB = \angle DBQ$. Оскільки $AB \parallel PD$, то маємо $\angle DPB = \angle ABP$, тому $\angle ABP = \angle DBQ$. Далі $\angle PBQ = \angle PBD + \angle DBQ = \angle PBD + \angle ABP = \angle ABD = 60°$.

С.3.41. *Відповідь*. Для непарних n. Для непарного n слід позначити всі клітинки першої та останньої горизонталей та центральну клітинку. Припустимо, що нам вдалося зробити це для парного n. Розфарбувавши дошку в шаховому порядку, розглянемо чорні клітинки. В одному напрямку вони складають n діагоналей, а в іншому $n - 1$. Тому, з одного боку, серед них парна кількість позначених, а з іншого – непарна. Суперечність.

С.3.42. Злочинця Лектора буде зловлено, якщо для кожної системи напрямків доріг існуватиме цикл вигляду, що показаний на рис. С.3.5, де $p + q + 2$ – кількість міст, $p \geq 0$, $q \geq 0$. Поліція знатиме, що через $\max\{p, q\}+1$ день Лектор буде в місті B. Доведемо індукцією за кількістю міст, що такий цикл завжди знайдеться.

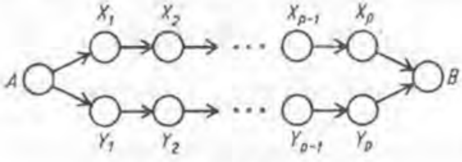


Рис. С.3.5

Для чотирьох міст досить перебрати всі варіанти. Нехай доведено до n міст. Покажемо, що в зображений на рис. С.3.5 цикл можна включити ще одне місто ($p + q + 2 = n$). Назвемо це $n + 1$ місто C. Маємо $p + q = n - 2 \geq 2$, також $\max\{p,q\} \geq 1$. Нехай, для визначеності, $p \geq 1$.

1) Якщо дорога веде від C до A, то перекриємо AX_1 і залишимо відкритими AC і CX_1.

2) Якщо не 1) і дорога веде від B до C, то перекриємо X_pB і залишимо X_pC та CB.

3) Нехай не 1) і не 2), то існує $1<k<p+1$ таке, що дорога веде від X_{k-1} до C і від C до X_k (позначили $X_0 = A$, $X_{p+1}=B$). Перекриємо $X_{k-1}X_k$ і залишимо X_kC і $X_{k-1}C$.

В усіх випадках буде одержано цикл потрібного вигляду.

С.3.43. З першої умови випливає, що знайдеться $y \in R$ таке, що $f(y)= -1$. Підставимо це y в подане рівняння і отримаємо $f(f(y)) = 0$, тобто $f(-1) = 0$. Після підстановки в задане рівняння $x=-1$ матимемо, що $f(f(-1)) = 0$, тобто $f(0) = 0$. Тепер підставимо в рівняння $x = 0$ і одержимо $f(0) = 1 \neq 0$. Ця суперечність доводить, що потрібної функції f не існує.

С.3.44. Оскільки B_1 і C_1 – точки сторін AC і AB, то точка O лежить всередині трикутника ABC. Нехай D – це точка перетину прямих AO і BC. Оскільки O лежить всередині ΔABC, то точка D знаходиться на стороні BC і AD – висота трикутника ABC.

Якщо $AB = AC$, то твердження задачі легко отримується через розглядання симетрії відносно прямої AD.

Нехай $AB > AC$. На відрізку BC розглянемо точку C_2 таку, що $C_2D = DC$ (рис. С.3.6). Тоді C_2 лежить між B і D (оскільки $BD > CD$) і $\angle ACO=\angle AC_2O$ (позначимо величину цих кутів через α). Також

$\angle C_1BB_1 = \angle C_1CB_1 = \alpha$ як вписані кути і з рівності $\angle AC_2O = \angle ABO$ випливає, що точки A, O, C_2, B лежать на одному колі. Тому $\angle AOB = \angle AC_2B$. Якщо позначити $\angle OBD = \beta$, $\angle OCD = \gamma$, то одержимо рівність $\frac{\pi}{2} + \beta = \pi - (\alpha + \gamma)$. Звідси $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, тобто $\angle BC_1C = \angle BB_1C = \frac{\pi}{2}$. А це означає, що точки B_1 і C_1 лежать на колі, центр якого знаходиться на BC і, отже, збігається з M. Тому $MB_1 = MC_1 = \frac{BC}{2}$.

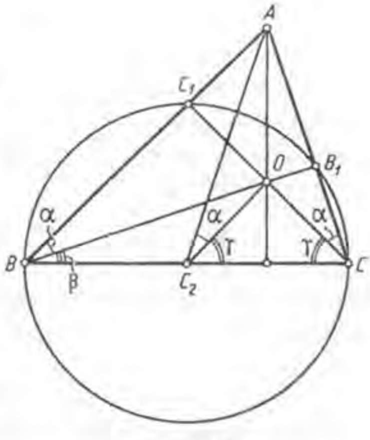


Рис. С.3.6

С.3.45. Див. розв'язання задачі С.3.39.

С.3.46. *Відповідь*. 12. Вважатимемо, що діагональ кольору *1* йде з лівого верхнього кута квадрата в правий нижній. Позначимо через $A_i, 1 \le i \le 1\,996$, множину кольорів, якими пофарбовані клітинки i-го рядка ліворуч від діагоналі кольору *1*. Тоді для $i \ne j$ буде $A_i \ne A_j$. Нехай $i < j$, тоді клітинка в i-му рядку, j-му стовпчику матиме колір, що не входить у множину A_i (адже ця клітинка знаходиться праворуч від діагоналі кольору *1*, і використовуємо третю умову). А з другої умови випливає, що ця клітинка пофарбована так само, як і одна з клітинок j-го рядка, і цей колір входить до множини A_j. Звідси маємо, що $A_i \ne A_j$. Всі A_i є підмножинами множини з $n - 1$ кольору (колір *1* до A_i не входить). Тому кількість різних A_i не перевищує кількості всіх підмножин такої множини, $1\,996 \le 12^{n-1}$, $n \ge 12$.

Тепер побудуємо приклад розфарбування 12 кольорами. Спочатку візьмемо квадрат K_1 розмірами 2×2, пофарбований двома кольорами, що задовольняє умову задачі. Якщо вже побудований квадрат K_n розмірами $2^n \times 2^n$, то вдвічі більший K_{n+1} фарбується так, як показано на рис. С.3.7 (ліва верхня та права нижня чверті фарбуються як K_n, права верхня та ліва нижня – $(n+2)$-м кольором). Легко помітити, що кожний такий K_n пофар-

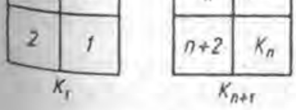


Рис. С.3.7

бований $n+1$ кольором і задовольняє умову задачі. Так можна отримати квадрат $2\,048 \times 2\,048$ з 12 кольорами. Вирізавши з його лівого верхнього кута квадрат розмірами $1\,996 \times 1\,996$, отримаємо фігуру, що задовольняє умову.

С.3.47. *Відповідь.* $a = 2$. Друге рівняння системи переписується у вигляді

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0,$$

звідси $x = y = z$. Використовуючи цю рівність, перше рівняння системи можна записати таким чином:

$$x^4 - 3ax^2 + 9 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння як біквадратне, знаходимо, що при $a < 2$ воно розв'язків не має, для $a = 2$ – два, а при $a > 2$ – чотири розв'язки. Тому нас влаштовує лише $a=2$. Відзначимо, що автором задачі було запропоноване інше розв'язання, в якому використовувалося і третє рівняння.

С.3.48. Спочатку доведемо дві леми.

Лема 1. Нехай сфера дотикається до граней двогранного кута у точках M і N. Довільні точки X та Y лежать на ребрі двогранного кута. Тоді $\angle MXY = \angle NXY$, $\angle MYX = \angle NYX$.

Доведення. Рівності випливають з того, що вказані пари кутів симетричні відносно бісекторної площини даного двогранного кута (ця симетрія переводить M у N, залишаючи X та Y незмінними).

Лема 2. У тригранний кут $SABC$ (S – вершина) вписана сфера, яка дотикається до граней SBC, SCA і SAB в точках відповідно A_1, B_1 і C_1. Тоді величину кута ASB_1 можна виразити через величини плоских кутів даного тригранного кута.

Доведення. Позначимо $\alpha = \angle BSC$, $\beta = \angle ASC$, $\gamma = \angle ASB$, $x = \angle ASB_1 = \angle ASC_1$, $y = \angle BSA_1 = \angle BSC_1$, $z = \angle CSA_1 = \angle CSB_1$ (вказані пари кутів рівні за лемою 1). Тоді $x + y = \gamma$, $y + z = \alpha$, $z + x = \beta$. Звідси $x = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$.

(Вигляд цього виразу буде використано далі.)

Розв'язання задачі. Виберемо точку S' на продовженні відрізка SA за точкою A (рис. С.3.8). Тоді перша сфера, яка дотикається до π в точці P, вписана в тригранний кут $ASBC$ (A – вершина), а друга, яка дотикається до π в точці Q, вписана в тригранний кут $AS'BC$ (A –

вершина). Тоді з виразу, отриманого в лемі 2, маємо $\angle PAC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle SAC - \angle SAB)$, $\angle BAQ = \frac{1}{2}(\angle S'AB + \angle BAC - \angle S'AC)$.

Звідси $\angle PAC - \angle BAQ = \frac{1}{2}((\angle SAC + \angle S'AC) - (\angle SAB + \angle S'AB)) = \frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$.

Отже, $\angle PAC = \angle BAQ$ і бісектриса кута PAQ збігається з бісектрисою кута BAC. Аналогічно доводимо, що бісектриси кутів PBQ і PCQ є бісектрисами відповідно кутів ABC та ACB. Тепер твердження задачі випливає з того, що бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці.

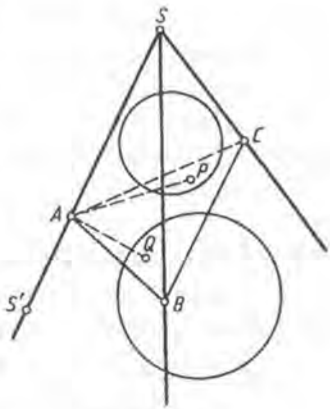


Рис. С.3.8

Олімпіада 4

Перший етап

С.4.1. *Відповідь.* Так. Наприклад, можна взяти точки A, B, C, D такі, що $\angle ABC > 90°$, тоді точка D лежить на висоті, опущеній з точки B на відрізок AC.

С.4.2. *Відповідь.* $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$. Дане рівняння набуває вигляду $(x-y-1)^2 + (x+y-3)^2 + (z-2)^2 = 0$. Звідси $x - y = 1$, $x + y = 3$, $z = 2$. З двох перших рівнянь легко знайти значення x і y.

С.4.3. *Відповідь.* Одним нулем. Неважко написати послідовність двох останніх цифр степеней дев'ятки: 09, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09,..., далі останні пари цифр періодично повторюються. Знайшовши цей період, можна підрахувати, що 9^{1997} закінчується на 69, а $9^{1997}+1$ буде закінчуватися на 70. Цю задачу можна розв'язати й іншим способом: записати даний вираз як $(10-1)^{1997}+1$ і використати біном Ньютона.

С.4.4. *Відповідь.* Другий гравець. Виграшна стратегія другого гравця може полягати в тому, щоб під час кожного свого ходу класти сірники в ту саму коробку, куди щойно поклав свої сірники перший гравець. Така пара ходів буде збільшувати кількість сірників у відповідній коробці на три. Кількість сірників вигляду $3n$ буде виникати лише після ходів другого гравця, а перший цю кількість може за свій хід збільшувати на один або два сірники. Оскільки число 1 998 ділиться на три, цієї кількості першим досягне другий гравець.

С.4.5. З властивості вписаних кутів маємо, що $\angle ADB = \angle AEC$, $\angle ACE = \angle AFD$. Оскільки $DF = CE$, то трикутники AFD і AEC рівні, тобто рівні й висоти, опущені до DF і CE з точки A.

С.4.6. *Відповідь.* $k = 2$. З даного рівняння випливає, що m^2 ділиться на n і n^2 ділиться на m. Якщо в розкладі на прості множники числа m є простий множник p, то він є і в розкладі числа n. Нехай в розклад чисел m і n входять відповідно p^α і p^β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$). Припустимо, що $\alpha \neq \beta$. Тоді для визначеності будемо вважати, що $\alpha > \beta$. За умови $m = m_1 p^\alpha$, $n = n_1 p^\beta$ (m_1 і n_1 не діляться на p) дане рівняння набуває вигляду $p^{2\beta}\left(m_1^{\,2} p^{2\alpha-2\beta} + n_1^{\,2}\right) = p^{\alpha+\beta} \cdot k m_1 n_1$, де 2β – це максимальний степінь p, на який ділиться ліва частина, тобто $2\beta \geq \alpha + \beta$, $\beta \geq \alpha$, а це суперечить припущенню, що $\alpha > \beta$. Отже, $\alpha = \beta$. У розкладах чисел m і n присутні одні й ті самі прості множники в однакових степенях. Тому $m = n$, звідки $k = 2$. З іншого боку, для $k = 2$ будь-які натуральні $m = n$ дають розв'язок.

С.4.7. Припустимо, що такий обхід можливий. Нехай при цьому k, l, m – числа переміщень фішки відповідно 1, 2, 3-го виду. Загальна кількість ходів має дорівнювати $n^2 - 1$, кількість переміщень вгору – кількості переміщень униз, кількість переміщень праворуч має бути на одну більше за кількість переміщень ліворуч. Звідси маємо рівності $k + l + m = n^2 - 1$, $k = m$, $l = m + 1$, отже $n^2 = 3m + 2$, але квадрати цілих чисел не можуть давати остачу 2 при діленні на 3. Тобто наше припущення неправильне.

С.4.8. Оскільки $\angle ABC = 120°$, точки P, B, C лежать на одній прямій і точки R, B, A також лежать на одній прямій. Якщо $\angle PAR = \angle ARC = 60°$, то $PA \| RC$. Нехай Q' – середина PR, N – середина BR (рис. С.4.1). Тоді $Q'N = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}AB$, $NK = \frac{1}{2}BC$. Оскільки

$Q'N \parallel PB$ і $NK \parallel RC$, то $\angle Q'NK = 120°$. Трикутники $Q'NK$ і MBK рівні за двома сторонами та кутом між ними. Отже, $Q'K = MK$. Аналогічно доводиться, що $Q'M = MK$ і трикутник $Q'MK$ рівносторонній. Тому $Q' = Q$ і точка Q лежить на відрізку PR.

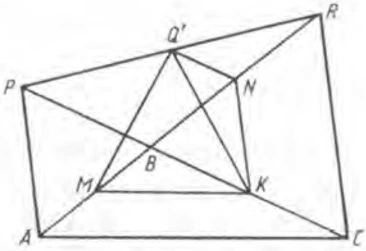


Рис. С.4.1

С.4.9. *Відповідь.* 7,5. Позначимо всю суму через S. Тоді

$$2S = \left(\frac{2a}{b+c} + \frac{b+c}{2a}\right) + \left(\frac{2b}{a+c} + \frac{a+c}{2b}\right) + \left(\frac{2c}{a+b} + \frac{a+b}{2c}\right) +$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}\right) \geq 2+2+2+\frac{3}{2}\left(\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right) \geq 6 + \frac{3}{2}\cdot 3\cdot 2 = 15.$$

(Тут використовувалося, що для додатних x, y буде $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.) Тобто $S \geq 7{,}5$, але, з іншого боку, для $a = b = c$ $S = 7{,}5$.

С.4.10. Якщо $a \leq b \leq c$, то $\frac{3}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. При вказаних діях сума всіх чисел, обернених до написаних на дошці, не буде зменшуватися. Коли залишиться одне число S, то для нього

$$\frac{1}{S} \geq \frac{1}{1\,001^2} + \frac{1}{1\,002^2} + \dots + \frac{1}{1997^2} > \frac{1}{1\,001 \cdot 1\,002} + \frac{1}{1\,002 \cdot 1\,003} + \dots +$$

$$+\frac{1}{1997 \cdot 1998} = \frac{1}{1\,001} - \frac{1}{1\,002} + \frac{1}{1\,002} - \frac{1}{1\,003} + \dots +$$

$$+\frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} = \frac{1}{1\,001} - \frac{1}{1\,998}.$$

Тому $S < \left(\frac{1}{1\,001} - \frac{1}{1\,998}\right)^{-1}$ і залишається підрахувати, що останній вираз менший за 2 007.

С.4.11. *Відповідь.* $a = \pm 2$. Якщо x_1 і x_2 – корені, то за теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = -2a. \end{cases}$$

Число 3 можна розкласти в добуток двох цілих чисел двома способами: $3 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3)$. Відповідно для суми є два варіанти: $-2a = 1+3 = 4$, $a = -2$ та $-2a = (-1) + (-3) = -4$, $a = 2$.

С.4.12. *Відповідь.* Функції $f(x) = x$ та $f(x) = -x$. При $x = y = 1$ матимемо $2f^2(1) = 2$. Звідси $f(1) = 1$ або $f(1) = -1$. Підставляючи тепер $x = 1$, у першому випадку дістанемо $f(y) = y$, в другому $-f(y) = y$ для всіх дійсних y. Перевірка підтверджує, що обидві знайдені функції задовольняють умову.

С.4.13. Промінь OK (рис. С.4.2) проходить між променями OB і OA, тому $\angle KOA \le \angle BOA = 120°$. Так само $\angle MOA \le 120°$, $\angle KOA + \angle MOA \le 240°$, а за умовою $\angle KOM = 60° < 360° - 240°$. Отже, промінь OA проходить між сторонами кута KOM (те, що точки K і M лежать по різні боки від прямої OA очевидно, оскільки промінь AO проходить між променями AB і AC). Отже, $\angle KOA + \angle AOM = \angle KOM = 60°$. Звідси $\angle AOM \le 60°$, $\angle MOC = \angle AOC - \angle AOM = 120° - \angle AOM \ge 60°$. Тому, відкладаючи від променя OM кут $60°$ у бік точки C, проведемо промінь, що перетне відрізок MC у деякій точці L, $\angle MOL = 60°$. Тепер зрозуміло, що трикутники KOA і LOC рівні за другого ознакою ($\angle LOC = \angle AOC - \angle AOM - \angle MOL = 120° - \angle AOM - 60° = 60° - \angle AOM = \angle KOA$, $\angle KAO = \angle LCO = 30°$, $AO = CO$), трикутники KOM і LOM рівні за першою ознакою ($KO = LO$ з рівності трикутників KOA і LOC, $\angle KOM = \angle LOM = 60°$, сторона MO – спільна). Звідси $AK + KM + MA = CL + LM + MA = CA$, що й потрібно було довести.

Рис. С.4.2

С.4.14. *Відповідь.* $x = -a + \dfrac{1}{a}$, де a – довільне натуральне число. Оскільки $[x] \ne 0$, $\{x\} \ne 0$, має місце нерівність $[x] < [x] + \dfrac{1}{\{x\}} = \{x\} + \dfrac{1}{[x]} < 2$.

Також $[x]\neq 1$, тому що $\{x\}\neq \frac{1}{\{x\}}>1$. Отже, x – від'ємне число. Нехай $x=-a+b$, де a – натуральне число,

$$b=\{x\},\quad -a+\frac{1}{b}=b-\frac{1}{a},\quad b-\frac{1}{b}=-a+\frac{1}{a},\quad b^2-\left(-a+\frac{1}{a}\right)b-1=0,$$

$$b=\frac{-a+\frac{1}{a}\pm\sqrt{\left(-a+\frac{1}{a}\right)^2+4}}{2}=\frac{1}{2}\left(-a+\frac{1}{a}\pm\sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{a^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-a+\frac{1}{a}\pm\left(a+\frac{1}{a}\right)\right).$$

При значенні з мінусом рівність не виконується. Отже, $b=\frac{1}{2}\left(-a+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}\in(0,1)$.

С.4.15. З лицарського принципу випливає, що весь загал лицарів поділений на клани, що ворогують між собою, але всередині яких лицарі товаришують. За умовою всі мали однакову кількість ворогів, отже, в усіх кланах була однакова кількість лицарів, а саме – d. Тепер очевидно, що n ділиться на d, бо множина ворогів складалася для лицаря з кланів, до яких він не належав.

С.4.16. *Відповідь.* $\left(3^{1997};3^{1997};3^{1997};3^{1997}\right)$, $\left(3^{1997};-3^{1997};3^{1997};3^{1998}\right)$, $\left(3^{1998};3^{1997};3^{1996};-3^{1996}\right)$, $\left(3^{1998};-3^{1997};3^{1996};5\cdot 3^{1996}\right)$, $\left(4\cdot 3^{1997};0;0;0\right)$ (останній вираз можна не рахувати, оскільки геометричні прогресії з нульовим знаменником звичайно не розглядають).

Насамперед, $a\neq 0$, оскільки інакше $b=c=d=0$ і $a+b+c+$ $+d\neq 4\cdot 3^{1997}$. Легко показати, що $c=\frac{b^2}{a}$, $d=\frac{2b^2}{a}-b$.

$$a+b+c+d=a+\frac{3b^2}{a}=4\cdot 3^{1997},$$
$$a^2+3b^2=4\cdot 3^{1997}\cdot a. \tag{1}$$

Звідси $a > 0$. Припустимо, що a не ділиться на $3^{1\,997}$. Тоді $a = a_1 \cdot 3^k$, де a_1 – натуральне число, яке не ділиться на 3, k – ціле, $0 \le k \le 1\,996$. Маємо з (1) $b^2 = 3^{2k-1}\left(-a_1^2 + 4\cdot 3^{1\,997-k} a_1\right)$, тому b ділиться на 3^k, $b = b_1 \cdot 3^k$, b_1 – ціле. Тоді з (1) випливає, що $a_1^2 = 3\left(a_1 \cdot 4 \cdot 3^{1\,996-k} - b_1^{\,2}\right)$ і a_1 ділиться на 3, що суперечить припущенню. Ми довели, що a ділиться на $3^{1\,997}$, тому $a = a_0 \cdot 3^{1\,997}$, де a_0 – натуральне число. Аналогічно знайдемо, що $b = b_0 \cdot 3^{1\,997}$, b_0 – ціле число. Тоді з (1) $a_0^2 + 3b_0^2 = 4a_0 \cdot a_0^2 \le a_0^2 + 3b_0^2 = 4a_0$, тому $a_0 \le 4$. Перебираючи варіанти $a_0 = 1,...,4$, дістанемо п'ять розв'язків, за якими відновлюємо четвірки (a, b, c, d) і перевіряємо.

С.4.17. 1) $P_2 < MKCNPAQTBM = 3P_1$ (рис. С.4.3), звідси $2P_2 < 6P_1$.

2) Помітимо, що $QP = 2M_a$, $TM = 2M_b$, $KN = 2M_c$, де M_a, M_b, M_c відповідно – медіани, проведені до сторін BC, CA, AB (добудуйте самостійно паралелограми APA_1Q і ABA_2C і з'ясуйте, що вони рівні, і так само для інших сторін). У результаті цього виявляється, що нерівність $5P_1 < 2P_2$ еквівалентна нерівності $M_a + M_b + M_c > \frac{3}{4}P_1$. Доведемо її. Відомо, що медіани AA', BB', CC' (рис. С.4.4) перетинаються в одній точці O і діляться у співвідношенні 2 : 1. Тому

$$M_a + M_b + M_c = \frac{3}{4}\left(\left(AO + OB\right) + \left(OB + OC\right) + \left(OC + OA\right)\right) >$$
$$> \frac{3}{4}\left(AB + BC + CA\right) = \frac{3}{4}P_1.$$

С.4.18. *Відповідь.* $P(x) = x + b$, b – довільне дійсне число. Розглянемо многочлен $G(x) = P(x + 1\,997) - P(x)$. Він обмежений при всіх дійсних x числом 1 997, тому він є константою. Отже, $P(x)$ – лінійний многочлен, $P(x) = ax + b$. Тобто $1\,997a \le 1\,997$ і $1\,996a \le 1\,996$, звідки $a = 1$. Коефіцієнт b може бути довільним.

С.4.19. а) Може. Приклад: поділимо таблицю на 900 квадратів розмірами 5×5, кожен з яких заповнюємо таким чином:

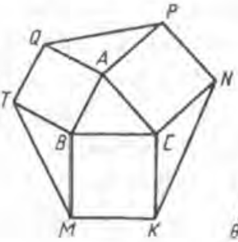


Рис. С.4.3

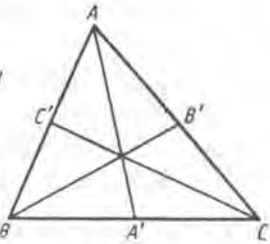


Рис. С.4.4

1	1	1	1	1
1	–1	–1	–1	1
1	–1	–1	–1	1
1	–1	–1	–1	1
1	1	1	1	1

б) Не може. Доведемо це. У таблиці не можуть одночасно існувати рядок із самих лише 1 та стовпчик із самих лише −1. Будемо вважати, не обмежуючи загальності, що в таблиці немає рядка з самих лише 1. Надалі розглядатимемо лише горизонтальні прямокутники розмірами 3×5 і 3×150. Припустимо протилежне до відповіді, тобто, що модуль суми чисел у кожному прямокутнику 3×5 перевищує 3. Тоді кожна з цих сум за модулем ≥ 5 (бо вони непарні). Розглянемо довільний прямокутник 3×5 і прямокутник, що лежить на одну позицію праворуч чи ліворуч. У них неоднакові лише три клітинки, отже, суми чисел відрізняються не більше, ніж на 6, тому мають один і той самий знак (бо $5-(-5) = 10 > 6$). Це означає, що у кожному прямокутнику 3×150 і в усіх прямокутниках 3×5 знак суми чисел один і той самий. А звідси вже випливає, що сума чисел у ньому за модулем ≥ 150 (його можна розбити на 30 прямокутників 3×5, а $5 \cdot 30 = 150$). Розглянемо тепер довільний прямокутник 3×150 і прямокутник, що лежить на одну позицію вгору чи вниз. Вони відрізняються 150 клітинками, тому суми їх чисел відрізняються не більше, ніж на 300. Але і 300 – різниця недосяжна, бо вона могла б виникнути лише в тому разі, коли якийсь рядок містив самі лише −1, а інший (на три позиції нижче або вище) – самі лише 1, чого немає за припущенням. Отже, суми чисел у цих двох прямокутниках 3×150 відрізняються менше, ніж на 300, тому мають один і той самий знак (бо $150-(-150) = 300$). Це означає, що в усіх прямокутниках 3×150 таблиці знак суми чисел один і той самий. А звідси вже випливає, що сума чисел у таблиці за модулем $\geq 7\,500$ (її можна розбити на 50 прямокутників 3×150, а $150 \cdot 50 = 7\,500$). Але $7\,500 > 7\,000$, що суперечить умові.

С.4.20. а) Досить взяти $a = 10^S + 1$, де S – таке натуральне число, що $m < 10^S$.

б) Нехай натуральне a задане.

Лема 1. Знайдеться натуральне k_1 таке, що $k_1 a = x_1 x_2 \ldots x_n p\, g\, \underbrace{00\ldots0}_{m \text{ нулів}}$,

де $p \neq 9$, $q \neq 0$ (нулів на кінці може й не бути, "іксів" спереду також, p може бути при цьому нулем).

Доведення. Якщо a має саме такий вигляд, то $k_1 = 1$. Якщо ні, то $k_1 = 11$.

Лема 2. Знайдеться натуральне k_2 таке, що $k_2 a = 9 y_1 y_2 \ldots y_l$ (y на кінці може й не бути).

Доведення. Нехай l таке, що $a \leq 10^l$. Візьмемо за k_2 найменше з натуральних чисел, для якого $k_2 a \geq 9 \cdot 10^l$. Тепер, якщо $S(k_1 a)$ і $S(k_2 a)$ парні, то $S(ka)$ непарне для $k = k_1 \cdot 10^l + k_2 \cdot 10^m$. Отже, $S(ka)$ не може бути парним для всіх натуральних k.

С.4.21. *Відповідь.* (1, 1, 1) і (2, 2, 2). Якщо $x = y = z$, то матимемо рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, звідси $x = 1$ або $x = 2$ і підходять трійки (1, 1, 1) та (2, 2, 2). Якщо, наприклад, $x = y$, то $z = x^2 - 2x + 2 = y^2 - y + 2 = x$ і отримаємо випадок $x = y = z$, який щойно розглянули. Тепер нехай усі змінні мають різні значення, і, наприклад, z – найбільша серед них. Ці всі значення не менші за 1 ($x = (y-1)^2 + 1$ і аналогічно y та z). Тому $z = \left(y-1\right)^2 + 1 < \left(z-1\right)^2 + 1 = y, z < y$. Дістали суперечність, тобто в цьому випадку розв'язків немає.

С.4.22. Нехай O – центр кола, його радіус дорівнює 1, $\angle P_1OQ = \varphi$. Тоді відстані від точки Q до діагоналей P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7, P_4P_8 дорівнюватимуть відповідно $\left|\sin\varphi\right|$, $\left|\sin\left(\varphi - 45^\circ\right)\right|$, $\left|\sin\left(\varphi - 90^\circ\right)\right|$, $\left|\sin\left(\varphi - 135^\circ\right)\right|$. Сума шостих степенів дорівнює

$$\sin^6\varphi+\sin^6\left(\varphi-45^\circ\right)+\sin^6\left(\varphi-90^\circ\right)+\sin^6\left(\varphi-135^\circ\right)=$$

$$=\sin^6\varphi+\sin^6\left(\varphi-45^\circ\right)+\cos^6\varphi+\cos^6\left(\varphi-45^\circ\right)=$$

$$=\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)^3-3\sin^2\varphi\cos^2\varphi\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)+$$

$$+\left(\sin^2\left(\varphi-45^\circ\right)+\cos^2\left(\varphi-45^\circ\right)\right)^3-3\sin^2\left(\varphi-45^\circ\right)\cos^2\left(\varphi-45^\circ\right)\times$$

$$\times\left(\sin^2\left(\varphi-45^\circ\right)+\cos^2\left(\varphi-45^\circ\right)\right)=$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi+1-\frac{3}{4}\sin^2\left(2\varphi-90^\circ\right)=$$

$$=2-\frac{3}{4}\left(\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=\text{const}.$$

С.4.23. *Відповідь.* Так, існують. Наприклад, візьмемо точки A, B, C, S_1, S_2 такі, що ABC – правильний трикутник з центром O. S_1 і S_2 лежать по різні боки від площини ABC так, що $S_1S_2\perp ABC$, $O\in S_1S_2$, $S_1O=\frac{1}{2}AB$. Тут легко перевірити, що в будь-якому трикутнику з цих п'яти точок сума квадратів двох сторін перевищує квадрат третьої.

С.4.24. *Відповідь.* Гравець, який починає.

Очевидно, що програє той гравець, який до множини точок (кінців відрізків) додасть 1 995-ту точку (наступним ходом його суперник з'єднає 1 996-ту та 1 997-му точки). Тому після того, як у цій множині виявиться 1 994 точки, перший гравець має продовжувати проводити відрізки між цими точками. Оскільки кількість усіх можливих відрізків з 1 994-ма вершинами непарна $\left(\frac{1}{2}\cdot 1\,993\cdot 1\,994\right)$, то провести відрізок до 1 995-ї точки доведеться другому гравцю. До того, як у множині з'єднаних точок буде 1 994 точки, перший гравець може ходити довільно, тільки не перевищуючи число 1 994.

С.4.25. Позначимо $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABD=\beta$, $\angle APE=\varphi$, $\angle BPE=\psi$ (рис. С.4.5). Тоді маємо, що $\angle BDC=\alpha$, $\angle ACD=\beta$, $\angle CPF=\varphi$, $\angle DPF=\psi$. $\angle DPF=\psi$. З теореми синусів отримаємо

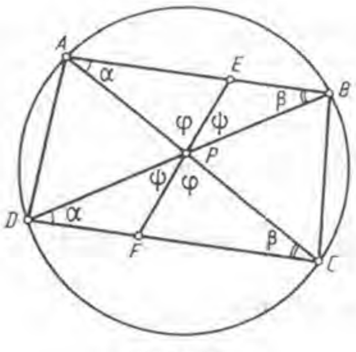


Рис. С.4.5

$$\frac{PE^2}{AE\cdot BE}=\frac{PE}{AE}\cdot\frac{PE}{BE}=\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\psi},$$

$$\frac{PF^2}{DF\cdot CF}=\frac{PF}{DF}\cdot\frac{PF}{CF}=\frac{\sin\alpha}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{PE^2}{AE\cdot BE}=\frac{PF^2}{DF\cdot CF},\ \left(\frac{PE}{PF}\right)^2=\frac{AE\cdot BE}{DF\cdot CF}.$$

З умови задачі одержуємо, що

$$\left(\frac{PE}{PF}\right)^2=2\frac{PE}{PF}-1,\ \left(\frac{PE}{PF}-1\right)^2=0,\ PE=PF.$$

С.4.26. *Відповідь.* Для $a=0$ $f(x)=0$, при $a\neq 0$ розв'язків немає.

Підставивши $x=y=1$ у дане рівняння, одержимо $2f(1)=f(1)+a$, звідси $f(1)=a$. Якщо підставимо $x=1$, $y=-1$, отримаємо $f(-1)-f(1)=f(-1)+a$, звідки $f(1)=-a$. Тому $a=-a$, розв'язки можуть існувати тільки при $a=0$. Нехай тепер $a=0$. Як ми щойно довели, $f(1)=a=0$. Підставивши $y=1$ в умову, отримаємо $f\left(x^2\right)=f(x)$. Врахувавши це, при $x=y$ з даного рівняння приходимо до $x^2f(x)+xf(x)=f(x)$ або $\left(x^2+x-1\right)f(x)=0$. Оскільки для всіх $x^2+x-1>0$, то для всіх x $f(x)=0$. Така функція задовольняє умову задачі.

С.4.27. Припустимо, що потрібного трикутника не існує. Нехай довжина сторони початкового правильного трикутника дорівнює 13.

Доведемо, що серед будь-яких десяти точок – вузлів накресленої сітки, що утворюють правильний трикутник із стороною 3, – знайдуться чотири непозначених. Серед трьох вершин цього трикутника із стороною 3 знайдеться одна непозначена. Інші дев'ять вузлів розділяються на три трикутники зі стороною 1 (рис. С.4.6), і в кожному з них має бути ще по одній непозначеній точці.

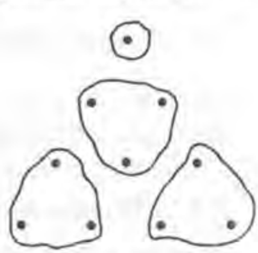


Рис. С.4.6

У початковому трикутнику зі стороною 13 можна виділити дев'ять розглянутих трикутників із стороною 3. Перший займе 10 верхніх вузлів – у рядках з першого по четвертий. Ще три такі трикутники займуть рядки з шостого по дев'ятий, ще п'ять – з одинадцятого по чотирнадцятий рядок (рис. С.4.7).

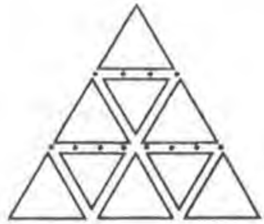


Рис. С.4.7

У цих трикутниках має бути 36 непозначених точок. Але ще маємо 15 невикористаних точок у п'ятому і десятому рядках. Їх можна розділити на п'ять трійок – вершин правильних трикутників із стороною 5 та сторонами, паралельними сторонам початкового трикутника. Вони нам дадуть ще п'ять непозначених точок, і загальна кількість таких вузлів має бути не меншою за 41. А за умовою задачі їх $105 - 65 = 40$. Суперечність. Отже, наше припущення хибне.

С.4.28. Позначимо

$$g(x) = \frac{1+|x|^3}{9}\left(\left|f(x)+\frac{1}{2}\right| - \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\right),\ x \neq 0.$$

При $|x| > 2$ маємо

$$0 < f(x) \leq \frac{7|x|}{7|x|^4} + \frac{3}{|x|^3} = \frac{4}{|x|^3} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Тому в цьому разі

$$\left|f(x)+\frac{1}{2}\right| = f(x)+\frac{1}{2},\ \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - f(x).$$

Далі отримаємо

$$g(x) = \frac{1+|x|^3}{9}\cdot 2f(x) \leq \frac{1+|x|^3}{9}\cdot 2\cdot\frac{4}{|x|^3} = \frac{8}{9}\left(\frac{1}{|x|^3}+1\right) < \frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}+1\right) = 1.$$

При $0 < |x| \leq 2$ одержимо

$$g(x) \leq \frac{1+|x|^3}{9}\left|f(x)+\frac{1}{2} - f(x)+\frac{1}{2}\right| = \frac{1+|x|^3}{9} \leq \frac{1+8}{9} = 1$$

(тут ми скористалися нерівністю трикутника $|a|-|b|\le|a-b|$). Отже, при всіх $x\ne 0$ $g(x)\le 1$, що і вимагалося довести.

С.4.29. Припустимо, що $k^3+27m=0$. Тоді k ділиться на 3 і для $k=3n$ $m=n^3$. Наше рівняння набуде вигляду

$$x^3+y^3+n^3-3nxy=0,$$
$$(x+y+n)\left(x^2+y^2+n^2-xy-xn-yn\right)=0.$$

Будь-які x, y такі, що $x+y=-n$, дадуть розв'язок даного рівняння. Нехай тепер $k^3+27m\ne 0$. Покладемо $s=x+y$, $t=xy$. Тоді $x^3+y^3=$ $=s^3-3ts$ і задане рівняння набуде вигляду

$$s^3-3ts-kt=m,$$
$$t(3s+k)=s^3-m.$$

Якщо вихідне рівняння мало безліч цілочислових розв'язків x, y, то і це рівняння матиме безліч цілочислових розв'язків s, t (адже кожній парі s, t відповідає єдина пара x, y з точністю до перестановки).

Якщо $3s+k=0$, то з перетвореного рівняння маємо $s^3-m=0$, звідки $m=s^3=\left(-\frac{k}{3}\right)^3$ і $k^3+27m=0$. Тому в нашому випадку для всіх розв'язків $3s+k\ne 0$. Отже,

$$t=\frac{s^3-m}{3s+k},$$
$$27t=\frac{27s^3-27m}{3s+k}=\frac{27s^3+k^3-k^3-27m}{3s+k}=9s^2-3sk+k^2-\frac{k^3+27m}{3s+k}.$$

Тут число $27t$ має бути цілим, а $k^3+27m\ne 0$. Тому s може приймати лише скінченну кількість значень (щоб $3s+k$ було дільником чисельника дробу), і з останнього виразу маємо скінченну кількість значень t.

С.4.30. *Відповідь.* n. Для $a_1=a_2=\ldots=a_n$ значення виразу дорівнює n. Доведемо, що меншим воно бути не може. Скористаємося методом індукції за n. Для $n=2$ отримаємо

$$\frac{a_1^2+a_2}{a_1+a_2^2}+\frac{a_2^2+a_1}{a_2+a_1^2}\geq 2,$$

оскільки для $x>0$ $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

Нехай наше твердження виконується для $n=k$, доведемо його для $n=k+1$. Наш вираз не змінюється при циклічних перестановках, тому можна вважати $a_{k+1}=\max\{a_1,a_2,...,a_{k+1}\}$. Щоб обґрунтувати крок індукції, досить довести, що

$$\frac{a_{k+1}^2+a_1}{a_{k+1}+a_1^2}+\frac{a_k^2+a_{k+1}}{a_k+a_{k+1}^2}\geq 1+\frac{a_k^2+a_1}{a_k+a_1^2}. \tag{1}$$

Позначимо:

$a_{k+1}=x,\ a_{k+1}^2=X=x^2,\ a_1=a,\ a_1^2=A=a^2,\ a_k^2=B=b^2\left(x\geq a,\ b\geq 1\right)$.

Нерівність (1) перетворюється до вигляду

$$\frac{X+a}{x+A}+\frac{B+x}{b+X}\geq\frac{B+a}{b+A}+1\,. \tag{2}$$

Далі використаємо рівність

$$\frac{1}{b+A}=\frac{X+x}{(A+x)(X+b)}+\frac{(X-A)(x-b)}{(A+x)(X+b)(A+b)}$$

(її можна легко перевірити, помноживши на спільний знаменник).

Оскільки права частина (2) дорівнює $\frac{A+B+a+b}{A+b}$, то рівність (2) матиме вигляд

$$\frac{X+a}{A+x}+\frac{B+x}{X+b}\geq\frac{(X+x)(A+B+a+b)}{(A+x)(X+b)}+\frac{(X-A)(x-b)(A+B+a+b)}{(A+x)(X+b)(A+b)},$$

$$\begin{gathered}\frac{X+a}{A+x}+\frac{B+x}{X+b}-\frac{(X+x)(A+B+a+b)}{(A+x)(X+b)}\geq\\ \geq\frac{(X-A)(x-b)}{(A+x)(X+b)(A+b)}(A+B+a+b),\end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{(x-a)(x-b)+(X-A)(X-B)}{(A+x)(X+b)} \geq \frac{A+B+a+b}{A+b}\frac{(X-A)(x-b)}{(A+x)(X+b)}. \quad (3)$$

Відмітимо, що $x+1 \geq \frac{A+B+a+b}{A+b} \Leftrightarrow x \geq \frac{a+b}{A+b} \Leftrightarrow xa^2+bx \geq a+b^2$ виконується, оскільки $xa^2 \geq a,\ bx \geq b^2$ для $x \geq a,\ b \geq 1$. Тепер для доведення (3) досить показати, що

$$\frac{(X-A)(X-B)}{(A+x)(X+b)} \geq (x+1)\frac{(X-A)(x-b)}{(A+x)(X+b)} \Leftrightarrow x^2-b^2 \geq$$
$$\geq (x+1)(x-b) \Leftrightarrow x+b \geq x+1$$

також виконується при $x \geq b, X \geq A$. Доведення завершено.

Другий етап

С.4.31. Нехай (a, b, n) – множина, що задовольняє умову задачі. Тоді $a^2+b^2-nab=0$. Розв'язавши останнє рівняння як квадратне відносно a, дістанемо

$$a_{1,2}=\frac{nb \pm \sqrt{n^2b^2-4b^2}}{2}.$$

Раціональне число з останньої формули можна мати лише за умови $n^2-4=m^2$ для деякого невід'ємного цілого числа m. Звідси $(n-m)(n+m)=4$ і $n=2$, $m=0$. Отже, $n=2$. З цього відразу випливає, що $a=b$. Отримаємо 1 997 розв'язків (x, x, 2), де x – довільне натуральне число, що не перевищує 1 997.

С.4.32. Так, можливо. Наводимо один з можливих варіантів розфарбування:

ч	б	ч	ч	б	ч
б	б	ч	б	б	ч
ч	б	ч	ч	б	ч
ч	б	ч	ч	б	ч
ч	б	б	ч	б	б
ч	б	ч	ч	б	ч

С.4.33. З побудови випливає, що $\angle BMN = \angle BNM = 36°$ (рис. С.4.8). Оскільки $\angle CDB = 36°$, то маємо $\angle NRD = 72°$ (як зовнішній кут трикутника BNR). Через те що $\angle NCD = 108°$, то навколо чотирикутника $RNCD$ можна описати коло. Отже, $\angle NRC = \angle NDC$. За побудовою $CNPD$ – рівнобічна трапеція, звідси $\angle CPN = \angle CDN$. Тобто навколо $RNCP$ можна описати коло, отже точки R, N, C, P, D лежать на одному колі. Оскільки $NC = DP$, то $\angle DRP = \angle CRN$, тобто $\angle NRD = \angle CRP = 72°$. Так само доводиться, що $\angle PQB = \angle EQN = 108°$, звідси і випливає потрібне твердження.

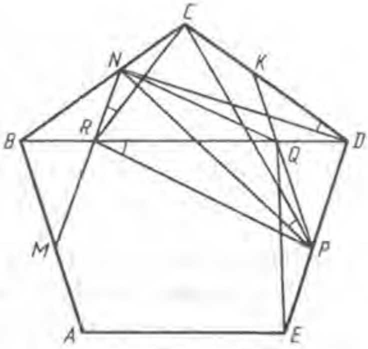


Рис. С.4.8

С.4.34. *Відповідь*. Ні. Розглянемо послідовність b_i, $i \geq 1$, визначену таким чином: b_i є остачею від ділення a_i на 7. Тоді $b_1 = 2$, $b_{n+1} \equiv 5b_n + 5 \pmod 7$. Тобто $b_2 = 1$, $b_3 = 3$, $b_4 = 6$, $b_5 = 0$, $b_6 = 5$, $b_7 = 2$. Тепер можна помітити, що ця послідовність є періодичною з періодом 6, причому серед її елементів трапляється 0. Це означає, що один із довільних шести послідовних елементів a_i ділиться на 7 (і, очевидно, більше 7).

С.4.35. Позначимо площу трикутника через S, а його сторони через a, b, c. Скористаємося формулами $2S = h_a a = h_b b = h_c c$, $S = pr$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$. Після рівносильних перетворень нерівності матимемо

$$\frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r},$$

$$\frac{a}{2(S - ar)} + \frac{b}{2(S - br)} + \frac{c}{2(S - cr)} \geq \frac{3}{r},$$

$$\frac{ar}{S - ar} + \frac{br}{S - br} + \frac{cr}{S - cr} \geq 6,$$

$$\left(\frac{ar}{S - ar} + 1\right) + \left(\frac{br}{S - br} + 1\right) + \left(\frac{cr}{S - cr} + 1\right) \geq 9,$$

$$\frac{S}{S-ar}+\frac{S}{S-br}+\frac{S}{S-cr}\geq 9,$$

$$S\left(\frac{1}{S-ar}+\frac{1}{S-br}+\frac{1}{S-cr}\right)\geq 9.$$

Зауваживши, що $S=(S-ar)+(S-br)+(S-cr)$ і $S-ar>0$, $S-br>0$, $S-cr>0$, можна помітити, що остання нерівність випливає з класичної нерівності $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ для додатних x, y, z.

С.4.36. *Відповідь.* 399 400. Нехай $n = 1\,997$. Застосовуючи метод індукції, доводимо, що

$$1\cdot 2\cdot 3+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Отже, наш вираз запишемо

$$\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]=\left[\sqrt{\left(n^2+3n+1\right)^2-1}\right]=n^2+3n=$$
$$=1\,997\cdot 2\,000=399\,400,$$

оскільки $\left(n^2+3n\right)^2\leq\left(n^2+3n+1\right)^2-1<\left(n^2+3n+1\right)^2$.

С.4.37. Нехай $\alpha=\angle KOP$, $\beta=\angle NOQ$, $\gamma=\angle MOP$.

Використовуючи формулу для площі, теорему косинусів та тригонометричні тотожності, перепишемо задану нерівність таким чином:

$$r^2\left(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}+\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\right)<r^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)<$$
$$<4r^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

Ліва частина подвійної нерівності є очевидною, бо $0°<\alpha, \beta, \gamma<90°$. Справедливість правої частини випливає з наступних перетворень:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\ldots=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\ldots=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)+\ldots=$$

$$=4\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right).$$

(Три крапки позначають члени з переставленими циклічно змінними.)

С.4.38. *Відповідь.* 1) $f(m)=0$ для всіх m;

2) $f(m)=\begin{cases}0, \text{ коли } m \text{ ділиться на } 1997,\\ 1, \text{ коли } m \text{ не ділиться на } 1997.\end{cases}$ З умов 1)–3) випливає, що для довільних n і k $f(1997n+k)\le 1997f(k)$.

Насамперед це означає, що функція f обмежена: $f(m)\le M$ для всіх m, де $M=1997\cdot\max\{f(0),\ldots,f(1996)\}$; коли $f(k)=0$, то $f(1997n+k)=0$ для всіх n (зокрема, $f(1997n)=0$). Для $1\le k\le 1\,996$ при діленні на 1 997 чисел із набору 0, k, $2k$, ..., $1\,996k$ одержують усі можливі остачі (адже всього їх 1 997 і жодні два числа при діленні не дають одну і ту саму остачу – інакше їх різниця $l_2k-l_1k=(l_2-l_1)k$ ділилася б на 1 997, що неможливо, бо $1\le l_2-l_1\le 1\,996$, $1\le k\le 1\,996$, а 1 997 – просте). Тому за умовою 1) або $f(m)=0$ для всіх m, або $f(m)\ne 0$ при m, що не ділиться на 1 997. Перший випадок (тотожний нуль) задовольняє всі умови. Розглянемо другий. Нехай $f(m)\ge 2$ для деякого m. Тоді за умовою 1) $f\left(m^s\right)\ge 2^s$ для всіх натуральних s, що суперечить обмеженості функції f. Отже, єдиний випадок, що залишається – це коли $f(m)=0$ при m, яке ділиться на 1 997, і $f(m)=1$, якщо не ділиться. Цей випадок також задовольняє всі умови.

С.4.39. *Відповідь.* Ні при якому. Нехай D – точка перетину променя CQ з колом ω_2, де $Q\ne D$. За властивостями кутів біля дотичних і кутів, вписаних у коло, $\angle SDC=\angle SBQ=\angle CBQ=\angle ACD$ і $\angle ADC=$ $=\angle ADQ=\angle ABQ=\angle BCD$. Звідси $AD\parallel SC$ і $AC\parallel SD$. Отже, $ASCD$ – паралелограм, і промінь CQ проходить через точку M – середину відрізка AS. Аналогічно доводиться, що промінь BP теж проходить через точку M. Крім того, маємо, що $\angle PSA = \angle PCA = \angle PBC$ і $\angle QSA = \angle QBA = \angle QCB$. Отже, $\angle PSQ = \angle PBC + \angle QCB = 180° - \angle BMC$. Отже, кут PSQ буде найбільшим, коли кут BMC буде найменшим. Геометрична множина точок M, що відповідають точкам S на відрізку BC, є середньою лінією трикутника ABC, паралельною стороні BC. Легко показати, що значення кута BMC тим менше, чим далі точка M знаходиться від середини цієї середньої лінії. Тому кут PQS збільшується з віддаленням точки S від середини відрізка BC. Але S не може збігатися з B чи з C ! Отже, найбільшого значення кут PSQ за умов задачі не досягає.

С.4.40. *Відповідь.* У піцерії. Групу $S_1, ..., S_n$ шпигунів-земляків назвемо циклом, якщо S_1 зв'язаний з S_2, S_2 з S_3, ..., S_{n-1} з S_n, S_n знову з S_1. Очевидно, весь гарнізон німецьких шпигунів складається з кількох циклів, причому серед них є цикл з непарною кількістю членів: $N_1, ..., N_{2k+1}$. Аналогічне виконується для англійців.

Нехай існують англійці A_1, A_2, A_3 такі, що A_1 і A_2 підтримують зв'язок через кав'ярню, а A_2 і A_3 – через піцерію. A_2 зв'язаний з $N_1, ..., N_{2k+1}$, тому він зв'язаний через один пункт (нехай через піцерію) з якимись двома із них, які спілкуються між собою (нехай з N_1 і N_2). Виходить, що A_2, A_3, N_1, N_2 усі зв'язані попарно, причому A_2 з A_3, N_1, N_2 – через піцерію. Зрозуміло, що за умовою конспірації це неможливо. Отже, у кожному циклі англійців зв'язки підтримуються через один і той самий пункт. Те саме вірне і для німців.

Нехай тепер $A_1, ..., A_m$ – англійський цикл, до якого входять Бонд і Смарт. Усі зв'язки в ньому підтримуються через піцерію. Якби зв'язки в німецькому циклі $N_1, ..., N_{2k+1}$ йшли через кав'ярню, то за умовою конспірації між циклом $A_1, ..., A_m$ і циклом $N_1, ..., N_{2k+1}$ не могло бути більше ніж $m \cdot k$ зв'язків через кав'ярню і $\frac{m}{2}(2k+1)$ – через піцерію, сума яких становить не більше, ніж $2km + \frac{m}{2}$, тоді як насправді всього зв'язків $(2k+1)m = 2km + m$. Отже, зв'язки у циклі $N_1, ..., N_{2k+1}$ підтримуються через піцерію. Аналогічні міркування показують, що зв'язки в англійському циклі, що складається з непарної кількості членів, теж підтримуються через піцерію. На основі аналогічних міркувань маємо, що зв'язки в німецькому циклі, до якого входять Шлаг і Плейшнер, також йдуть через піцерію. (Звичайно ж, ми довели, що всі зв'язки між шпигунами-земляками підтримуються через один і той самий пункт.)

С.4.41. Нехай A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, AC, AB відповідно. Точки M_1, M_2, M_3 – точки перетину медіан трикутників MBC, MAC, MAB відповідно. Тоді $M_1M_2 = \frac{2}{3}A_1B_1 = \frac{1}{3}BA$, $M_2M_3 = \frac{2}{3}B_1C_1 = \frac{1}{3}CB$, $M_1M_3 = \frac{2}{3}A_1C_1 = \frac{1}{3}CA$. Тому сторони трикутника $M_1M_2M_3$ у три рази менші за відповідні сторони ABC, і його площа завжди в дев'ять разів менша.

С.4.42. Візьмемо деякий набір чисел, врахований в A, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Поставимо йому у відповідність два набори: $\{1, 2, 3, 4, 5, a_1 + 5, a_2 + 5, ..., a_5 + 5\}$ та $\{2, 3, 4, 5, 6, a_1 + 6, a_2 + 6, ..., a_5 + 6\}$. Оскільки $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \le 100$, у кожному з цих наборів сума елементів не перевищує 150, і вони входять до кількості B. Усі отримані десятки чисел будуть різними. Тому $\frac{B}{A} \ge 2$.

С.4.43. З даної рівності маємо

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = n(1+1997m), \quad \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = n(1+1996m).$$

Перемножуючи, дістанемо

$$\left(\frac{m^2-n^2}{4}\right)^2 = n^2(1+1997m)(1+1996m),$$

$$\left(\frac{m^2-n^2}{4n}\right)^2 = (1+1997m)(1+1996m).$$

Раціональне число a в квадраті є цілим лише тоді, коли a є цілим. Тому $(1+1997m)(1+1996m)$ є квадратом цілого числа. Числа $1 + 1\,997m$ і $1 + 1\,996m$ взаємно прості (оскільки їх різниця взаємно проста з ними). Тому кожне з них (і, зокрема, $1+1\,997m$) є точним квадратом.

С.4.44. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (рис. С.4.9). Опустимо перпендикуляри IK на AB, IT на AC, OL на AC, OM на IT. На відрізку OM

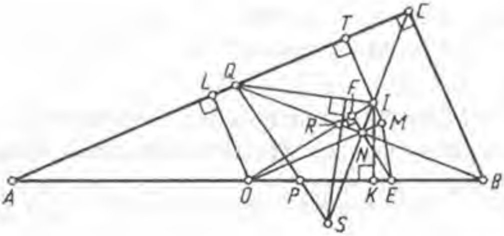


Рис. С.4.9

відкладемо $ON = OK$, на OB відкладемо $OE = OM$. Тоді $EK = MN$, $EM \parallel NK$, звідси $\angle OMK = \angle OEN$. Відрізок OI з точок M і K видно під одним і тим самим кутом 90°, тому точки O, I, M, K лежать на одному колі, $\angle OIK = \angle OMK = \angle OEN$. Якщо F – точка перетину прямих EN і OI, то $EF \perp OI$.

Доведемо, що трикутники AQP і ONE подібні. З $ON \parallel AQ$ випливає, що $\angle QAP = \angle NOE$.

Точки K і T – це точки дотику вписаного кола ABC до сторін, тому $TC = \dfrac{a+b-c}{2}$, $KB = \dfrac{a+c-b}{2}$, звідки $OE = OM = LT = \dfrac{b}{2} - \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{c-a}{2} = \dfrac{1}{2}AP$, $ON = OK = \dfrac{c}{2} - \dfrac{a+c-b}{2} = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{1}{2}AQ$. Звідси випливає подібність, причому $QP \parallel EN$. Оскільки $EN \perp OI$, то $QP \perp OI$. У рівнобедреному трикутнику QCB проведено бісектрису CI, тобто $QB \perp CS$. У трикутнику QIS висоти QB, IO, SR перетинаються в одній точці R. Тому R лежить на IO.

Твердження задачі також можна довести методом координат.

С.4.45. Має місце рівність для $n \in N$

$$\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)},$$

яку можна довести методом індукції. Використовуючи нерівність Коші, одержимо

$$\frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\right) \geq$$

$$\geq \left(\frac{(1\cdot 2\cdots n)^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq (2n+1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2.$$

С.4.46. Задана система рівнянь рівносильна сукупності двох умов: $a=b=c\neq 0$ і $a+b+c=0$, де $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. Дійсно, $a^2-bc=$ $=b^2-ac\Leftrightarrow(a-b)(a-b+c)=0$. У цих двох випадках вираз набуває відповідно значень 1, 5 і –3.

С.4.47. Цифрою 0 позначимо фішку в центрі трикутника ABC, а цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 – фішки, сусідні з фішкою 0 (рис. С.4.10). За один крок перевертають фішку 0 і одну з фішок 1, 2, 3, 4, 5, 6. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що це фішка 1. Однак зауважимо, що вона має бути перевернута принаймні ще один раз. Відзначимо, що жодні дві з зазначених фішок не лежать на одній прямій, паралельній стороні ΔABC. Тому всі ці фішки будуть перевернуті на різних кроках. Отже, загальна кількість кроків буде не менше 2 + 1 + + 1 + 1 = 5. З іншого боку, неважко побудувати послідовність з п'яти кроків, яка приводить до потрібної конфігурації.

С.4.48. Побудуємо правильний трикутник AKC (точки K і B лежать по один бік від AC). Нехай $\angle MCA=\alpha$ (рис. С.4.11), тоді $\angle CMA=$ $=150°-\alpha=\angle AMK$, оскільки $\Delta MAC=\Delta MAK$ за двома сторонами та кутом між ними. Але $\angle AMB=180°-20°-(40°+\alpha-30°)=150°-\alpha$. Отже, точки B, K, M лежать на одній прямій. Якщо $B\neq K$, тоді $\angle ABC=$ $=2\cdot 20°=40°$, $\angle CAB=BCA=70°$. За умови $B=K$, $\angle ABC=\angle CAB=$ $\angle BCA=60°$. Легко помітити, що в обох випадках точка M існує.

С.4.49. Доведемо твердження задачі для довільного опуклого n-кутника з рівними сторонами (у нас $n=5$). Зафіксуємо $i\in\{1, 2, ..., n\}$.

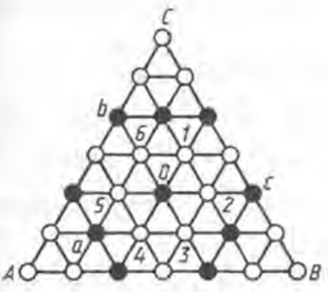


Рис. С.4.10

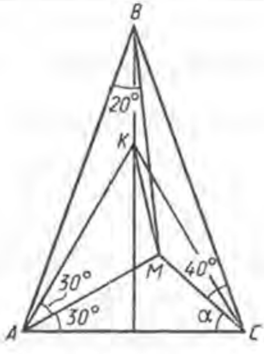


Рис. С.4.11

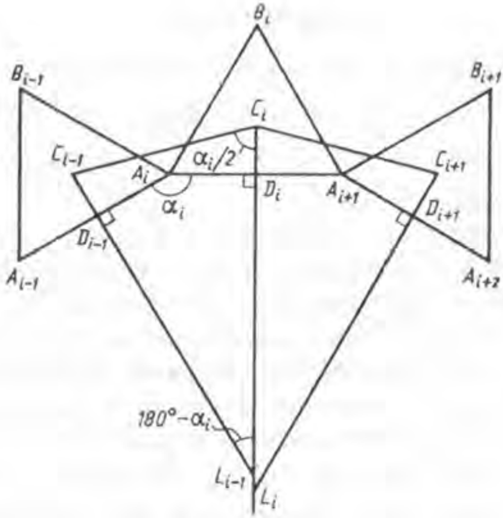


Рис. С.4.12

Позначимо через D_i – середину сторони A_iA_{i+1} і проведемо прямі C_iD_i (рис. С.4.12). Нехай L_i є точкою перетину прямих C_iD_i і $C_{i+1}D_{i+1}$ і $\alpha_i = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1} < 180°$. З чотирикутника $D_{i-1}A_iD_iL_{i-1}$ маємо $\angle D_{i-1}L_{i-1}D_i =$ $= 180° - \alpha_i$. Оскільки $\Delta C_{i-1}L_{i-1}C_i$ є рівнобедреним ($C_{i-1}L_{i-1} = C_iL_{i-1}$), то $\angle C_{i-1}C_iL_{i-1} = \dfrac{\alpha_i}{2}$. Звідси $\angle C_{i-1}C_iC_{i+1} = \dfrac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} < \dfrac{180° + 180°}{2} = 180°$. Що й потрібно було довести.

С.4.50. *Відповідь.* $b_{2k+1} = a_k + a_{2k+1}$, $b_{2k} = a_{k+1} + a_{2k}$. Позначимо через d_k, $k \geq 1$, кількість різних способів, якими можна викласти прямокутну таблицю розмірами $2 \times k$, які збігаються при симетрії відносно вертикальної осі. Тоді $a_n - d_n$ – це кількість способів розміщення, які не збігаються при симетрії, тому $b_n = d_n + \dfrac{a_n - d_n}{2} = \dfrac{a_n + d_n}{2}$. Якщо $n = 2k + 1$ і розміщення симетричне, то посередині стоїть вертикальна пластинка, отже, $d_{2k+1} = a_k$. За умови $n = 2k$, вісь симетрії або перетинає пластинки, або ні. Відповідна кількість розміщень буде a_{k-1} або a_k. Тобто $d_{2k} = a_{k-1} + a_k = a_{k+1}$. Ця рівність випливає з тих міркувань, що останній стовпчик дошки $2 \times k + 1$ може бути заповнений або вертикальною або двома горизонтальними пластинками.

С.4.51. Доведемо більш загальний факт: для довільного числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, яке не ділиться на 2 і 5, існує натуральне число, куб якого закінчується на $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Застосовуємо метод індукції за n. При $n=1$ маємо $1^3=1$, $7^3=343$, $3^3=27$, $9^3=729$. Нехай існує число, куб якого закінчується на $\overline{ba_2\ldots a_n}$. Підберемо цифру c так, щоб $b+c$ закінчувалось на a_1. Оскільки m не ділиться на 2 і 5, то $3m^2$ може закінчуватись лише на 1, 3, 7. Отже, існує k таке, що $3km^2$ закінчується на c. Тепер легко помітити, що $\left(m+k\cdot 10^{n-1}\right)^3$ закінчується на $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$.

С.4.52. *Відповідь.* 9 900. Якщо A відповідно приятелює з B, а B з C, то A має приятелювати з C. Тому вся множина людей розбивається на підмножини, в кожній з яких усі приятелюють між собою, а люди з різних підмножин не приятелюють. Але не може бути трьох людей, які попарно не приятелюють, тому цих підмножин не більше двох. Вважатимемо, що їх дві, але одна з них, можливо, порожня. Нехай у першій n чоловік, тоді в другій $200-n$ чоловік, усього пар друзів $M(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{(200-n)(199-n)}{2}$. Цей квадратний тричлен досягає мінімуму при $n=100$, $M(100)=9\,900$.

С.4.53. Через точку M проведемо пряму, паралельну AB, до її перетину з відрізком BD у точці E (рис. С.4.13). Тоді $\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{BE}{ED}$, отже, $EN \parallel DC$. Отримаємо $ED=AB\cdot\dfrac{MD}{AD}=AB\cdot\dfrac{NC}{BC}=DC\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{NC}{BC}=$ $=DC\cdot\dfrac{BN}{BC}=EN$, тобто трикутник MEN рівнобедрений і $\angle EMN=$ $=\angle ENM$. З цього випливає, що пряма MN паралельна бісектрисі кута BFC, де F – точка перетину прямих AB і CD (рис. С.4.14). Аналогічно KP паралельна бісектрисі кута BGA, де G – точка перетину прямих AD і BC. Отже, самі бісектриси кутів BFC і BGA взаємно перпендикулярні. Нехай O – точка їх перетину. Тепер вже легко визначити, що $\angle BAD=90°-\dfrac{1}{2}\angle BGA+\dfrac{1}{2}\angle BFC$, $\quad\angle BCD=90°-\dfrac{1}{2}\angle BFC+\dfrac{1}{2}\angle BGA$, звідси $\angle BAD+\angle BCD=180°$ і чотирикутник $ABCD$ – вписаний.

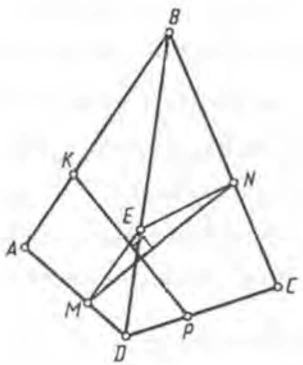


Рис. С.4.13

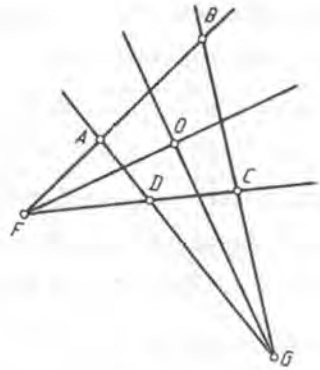


Рис. С.4.14

С.4.54. Можна легко переконатися, що квадрат цілого числа при діленні на 5 може давати остачу лише 0, 1 або 4, і якщо $2x^2+3y^2$ ділиться на 5, то x^2 і y^2 дають одну остачу при діленні на 5, тобто $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ділиться на 5. Можемо вважати, що $x-y$ ділиться на 5 (інакше просто поміняємо знак у числі y). Тоді запишемо $x=5x_1+v,\ \ y=5y_1+v,$ де x_1, y_1, v – цілі числа, причому $0\le v\le 4$. Маємо

$$n=\frac{1}{5}\left(2x^2+3y^2\right)=5\left(2x_1^2+3y_1^2\right)+2\left(2x_1+3y_1\right)v+v^2,$$

звідси

$$3n=30x_1^2+45y_1^2+12x_1v+18y_1v+3v^2=3\left(2x_1+3y_1+v\right)^2+2\left(3x_1-3y_1\right)^2,$$

$$2n=20x_1^2+30y_1^2+8x_1v+12y_1v+2v^2=3\left(2x_1-2y_1\right)^2+2\left(2x_1+3y_1+v\right)^2-$$

шукані подання.

С.4.55. *Відповідь.* $\lambda\ge\sqrt{3}-1$. Поклавши $a=b=c=1$, дістанемо оцінку $\lambda\ge\sqrt{3}-1$. Доведемо, що при $\lambda\ge\sqrt{3-1}$, нерівність виконується для всіх невід'ємних a, b, c

$$a+b+c-\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{ab+bc+ca}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2\le\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{ab+bc+ca}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca \le \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0.$

С.4.56. Виділимо в таблиці квадрат розмірами $1\,996 \times 1\,996$ і заповнимо його числами 1, 2, 4, 8, ..., $2^{1\,996 \times 1\,996}$. У вільне місце кожного рядка, в якому вже 1 996 клітинок заповнені, запишемо різницю між 1 997 і сумою цих 1 996 чисел. Так само зробимо і для стовпчиків. Заповнена таким чином таблиця задовольняє всі умови задачі.

С.4.57. Будемо обходити многокутник за годинниковою стрілкою (рис. С.4.15), обертаючи при цьому одиничний вектор напрямку нашого руху (відкладаючи його від якоїсь сталої точки) при кожному повороті (у той бік, в який цей поворот менший за 180°). Тоді кутові першого типу (яких A) відповідає перехід цього вектора через напрямок "вгору" за годинниковою стрілкою, а другого типу (яких B) – проти годинникової стрілки. Оскільки сумарно при обході многокутника наш вектор мусить зробити один оберт за годинниковою стрілкою, то $A - B = 1$.

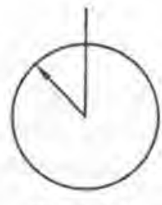


Рис. С.4.15

С.4.58. Зафіксуємо довільно місто, проведемо з нього всі дороги, довжина яких не перевищує d (це будуть дороги до міст першої групи). З міст першої групи до ще не зайнятих міст проведемо всі дороги, довжина яких не перевищує d (так дістанемо міста другої групи). Потім для кожного міста другої групи залишимо лише одну дорогу, що йде до нього з першої групи. І робимо так далі: кожне наступне місто лише однією проведеною дорогою буде з'єднуватися з нашими попередньо вибраними групами міст. Процес цей скінченний, оскільки скінченна кількість міст. Припустимо, що дороги будуть проведені не до всіх міст країни, а це значить, що відстань між двома частинами (містами) більша за d.

Залишається помітити, коли проведеними таким чином дорогами охоплені всі міста, то кількість доріг дорівнює $n - 1$. Дійсно, кожна проведена дорога буде збільшувати кількість приєднаних міст на одиницю, а починали ми з 1 міста і 0 доріг.

С.4.59. Нехай H – вершина правильного трикутника ABH (рис. С.4.16). Тоді $BH = AB = BC$, $\angle HBC = 100° - 60° = 40°$. Трикутник HBC – рівнобедрений, тому $\angle BHC = 70°$. Також $\angle DBH = 60° - 25° = 35°$, $\angle DBC = 35° + 40° = 75°$, $\angle BCA = \angle BAC = 40°$, $\angle DCB = 40° - 5° = 35°$, $\angle BDC = 180° - \angle DBC - \angle DCB = 70°$. Тому $\angle BDC = \angle BHC$, точки B, D, H, C лежать на одному колі. Тоді маємо, що $\angle BHD = \angle BCD = 35° =$

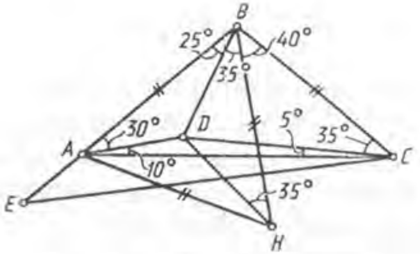


Рис. С.4.16

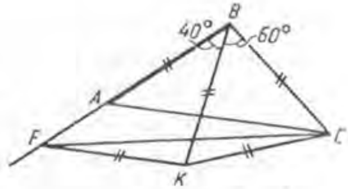


Рис. С.4.17

$= \angle DBH$, $DB = DH$, а також $BA = BH$. Тому AD – це серединний перпендикуляр до BH. $\angle BAD = 30°$, $\angle DAC = 10°$.

Розглянемо трикутник BDC: $\angle DBC = 75°$, $\angle BDC = 70°$. Тому $CD > BC$. Нехай F – точка на промені BA зовні відрізка BAтака, що $AF = AC - AB$, і тоді $AF > AC - CD = AE$ (рис. С.4.17). Якщо K – це вершина правильного трикутника BKC, тоді $\angle FBK = 40°$, і трикутники KBF і BAC рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тому $KF = BC = KC = KB$, K – центр описаного кола трикутника FBC. Тоді $\angle BFC = \dfrac{1}{2}\angle BKC = 30°$, $\angle CFK = \angle KCF = 40° - 30° = 10°$. $\angle ACF = 60° - 40° - 10° = 10° = \angle DAC$, $AD \| CF$. Тому промені AD і EC не перетинаються.

С.4.60. *Відповідь.* а) Не існують. З другого рівняння маємо, що $g(f(-1)) = -1$, $g(f(0)) = 0$, $g(f(1)) = 1$. З першого рівняння $f(-1) = f(g(f(-1))) = f^2(-1)$, $f(0) = f(g(f(0))) = f^2(0)$, $f(1) = f(g(f(1))) = f^2(1)$. Тому кожне з чисел $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ дорівнює 0 або 1. Серед них знайдуться два рівних, нехай це $f(a) = f(b)$. Тоді $g(f(a)) = g(f(b))$, $a^3 = b^3$, $a = b$. Маємо суперечність.

б) Існують. Прикладом можуть бути такі функції:

для $x > 1$ $\quad f(x) = 2^{2^{\log_4 \log_4 x}}$, $g(x) = 4^{4^{\log_2 \log_2 x + 1}}$;

при $x = 1$ $\quad f(1) = g(1) = 1$;

для $0 < x < 1$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$, $g(x) = \dfrac{1}{g\left(\dfrac{1}{x}\right)}$;

при $x=0 \quad f(0)=g(0)=0;$

для $x<0 \quad f(x)=f(-x),\ g(x)=g(-x).$

С.4.61. Доведемо, що $SO \perp AB$. Перетнемо дану конфігурацію площиною SAB і дістанемо фігури, зображені на рис. С.4.18 (O_1 – ортогональна проекція точки O на цю площину). Проведемо дотичну l до кола, яке описане навколо трикутника SA_1B_1 (O_1 – його центр). Тоді $\angle KSB_1=$ $=\angle SA_1B_1$ (вони вимірюються половиною кутової міри дуги SB_1). Але $\angle SA_1B_1=\angle B_1BA$, оскільки навколо чотирикутника AA_1B_1B можна описати коло. Отже, $l \parallel AB$, бо кути KSB і SBA рівні. Оскільки l – дотична, то $O_1S \perp l$, тобто $SO_1 \perp AB$. За теоремою про три перпендикуляри одержуємо, що $SO \perp AB$. Аналогічно можна довести, що $SO \perp AC$. Звідси й випливає, що $SO \perp ABC$.

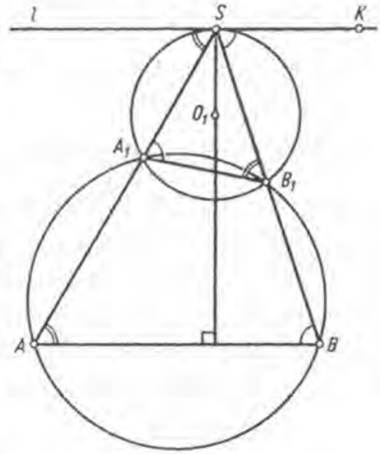


Рис. С.4.18

С.4.62. Нехай числа x, y, z невід'ємні. Позначимо $A=2+$ $+xyz-(x+y+z)$, $B=x^2+y^2+z^2-2$.

Маємо дві можливості:

1) $(x-1)(y-1)(z-1)\geq 0$. Тоді $2A+B=(x+y+z-2)^2+2(x-1)\times$ $\times(y-1)(z-1)\geq 0$. Оскільки $B\leq 0$, то $A\geq 0$.

2) $(x-1)(y-1)(z-1)<0$. Якщо будь-яке з чисел $x-1$, $y-1$, $z-1$ від'ємне, то два інші додатні, і нерівність $B\leq 0$ не виконується. Тому $0\leq x<1$, $0\leq y<1$, $0\leq z<1$. Маємо, що $A=(1-x)(1-y)+(1-xy)(1-z)\geq 0$.

Тепер припустимо, що серед чисел x, y, z є від'ємне (нехай $z<0$). Тоді $x+y\leq 1+\dfrac{x^2+y^2}{2}<1+\dfrac{2}{2}=1$ (використали, що $(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$).

Крім того, $xy\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}<1$. Тому $z(xy-1)>0$, або $xyz>z$. Звідси $2+xyz>x+y+z$.

С.4.63. Включимо до набору з k_i число $-(n+2)^2$, $(n+2)^{1997}+(n+2)$ чисел, які дорівнюють $n+2$, та p чисел, що дорівнюють -1 (значення p знайдемо пізніше). Тоді $\sum_i k_i=(n+2)^{1998}-p=\sum_i k_i^{1997}$. Загальна кількість взятих чисел $m+4=(n+2)^{1997}+(n+2)+1+p$. Тому треба, щоб виконувалася рівність $mn=\left((n+2)^{1997}+(n+2)+p-3\right)n=\sum_i k_i=(n+2)^{1998}-p$.

З цієї рівності маємо умову для p: $p(n+1)=(n+2)^{1998}-n(n+2)^{1997}-$ $-n(n+2)+3n$. Легко помітити, що цей вираз додатний. Щоб довести, що потрібне p існує, досить довести, що останній вираз ділиться на $n+1$. Для перевірки подільності можемо кожне число замінити на інше число з такою самою остачею при діленні на $n+1$ (тобто n можна замінити на (-1), $n+2$ на 1). Дістанемо $1-(-1)1-(-1)1-3=0$, звідки й випливає потрібна подільність.

Олімпіада 5

Перший етап

С.5.1. З умови відразу випливає, що у довільних двох мавп, які не знаходяться поруч, непарними є або загальна кількість бананів, або загальна кількість ананасів. Існує чотири різні за парністю способи надання одній мавпі бананів та ананасів. А саме: парна кількість бананів, парна кількість ананасів; непарна кількість бананів, парна кількість ананасів; парна кількість бананів, непарна кількість ананасів; непарна кількість бананів, непарна кількість ананасів. Зрозуміло, що у довільних мавп, які не знаходяться поруч, відповідні способи не можуть бути однаковими. З цього випливає, що у трьох мавп поспіль способи також не можуть бути однаковими. Оскільки способів усього чотири, маємо, що мавп не може бути більше восьми. Розташування по колу в порядку (п,п), (п,п), (п,н), (п,н), (н,п), (н,п), (н,н), (н,н) дає приклад восьми мавп, що задовольняють умову задачі. Зрозуміло, що викресливши з них будь-яку кількість, отримаємо зграю, яка знову задовольняє умову задачі. Отже, мавп може бути не більше восьми.

С.5.2. *Відповідь.* Шукане число $n = 13$. Серед довільних тринадцяти послідовних натуральних чисел, принаймні сім належать одному десятку, вони відмінні лише значеннями останніх цифр. Сума цифр цих чисел – сім послідовних натуральних чисел, одне з яких ділиться на 7.

Навпаки, серед дванадцяти чисел 994, 995, ..., 1 005 немає жодного, сума цифр якого ділилася б на 7.

С.5.3. Першу літеру слова можна вибрати k способами. Другу літеру – вже $k-1$ способом і так далі до k-ї літери, яку можна вибрати єдиним способом. Далі, $k+1$ літеру знов можна вибрати k способами, $k+2$ літеру вибрати $k-1$ способами і так далі. Користуючися тепер основним правилом комбінаторики, знаходимо, що кількість слів завдовжки в n літер дорівнюватиме $(k!)^{n \operatorname{div} k} \cdot \frac{k!}{(k-(n \bmod k))!}$, де $n \operatorname{div} k$ позначає цілу частину частки від ділення n на k, а $n \bmod k$ – остачу від ділення n на k.

С.5.4. Позначимо через $a_k (b_k, c_k, d_k)$ кількість способів видати k копійок без використання монети 50 копійок (також 25, 10 і 5 копійок). Тоді $S = 1 + a_{50} + a_{100} = 1 + 1 + b_{25} + b_{50} + 1 + b_{25} + b_{50} + b_{75} + b_{100} = 3 + 2b_{25} + 2b_{50} + b_{75} + b_{100} = 3 + 2(c_5 + c_{15} + c_{25}) + 2(1 + c_{10} + c_{20} + c_{30} + c_{40} + c_{50}) + (c_5 + c_{15} + ... + c_{75}) + (1 + c_{10} + c_{20} + ... + c_{100}) = 6 + 3c_5 + 3c_{10} + 3c_{15} + 3c_{20} + 3c_{25} + 3c_{30} + c_{35} + 3c_{40} + c_{45} + 3c_{50} + c_{55} + c_{60} + c_{65} + c_{70} + c_{75} + c_{80} + c_{90} + c_{100} = 40 + d_{100} + d_{95} + 2d_{90} + 2d_{85} + 3d_{80} + 4d_{75} + 5d_{70} + 6d_{65} + 7d_{60} + 8d_{55} + 11d_{50} + 12d_{45} + 15d_{40} + 16d_{35} + 19d_{30} + 22d_{25} + 25d_{20} + 28d_{15} + 31d_{10} + 34d_5$. Легко помітити, що $d_k = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$. Отже, $S = 40 + 51 + 48 + 2 \cdot 46 + 2 \cdot 43 + 3 \cdot 41 + 4 \cdot 38 + 5 \cdot 36 + 6 \cdot 33 + 7 \cdot 31 + 8 \cdot 28 + 11 \cdot 26 + 12 \cdot 23 + 15 \cdot 21 + 16 \cdot 18 + 19 \cdot 16 + 22 \cdot 13 + 25 \cdot 11 + 28 \cdot 8 + 31 \cdot 6 + 34 \cdot 3 = 40 + 51 + 48 + 92 + 86 + 123 + 152 + 180 + 198 + 217 + 224 + 286 + 276 + 315 + 288 + 304 + 286 + 275 + 224 + 186 + 102 = 3\,953$.

С.5.5. $\Delta ABM = \Delta ASM$, оскільки $AB = AS$ як радіуси, $MB = MS$ як радіуси і AM – спільна. Крім того, оскільки $MB = MS$, то MS є дотичною до кола з центром у точці A і радіусом AB. Звідси $SP = PD$ як дотичні до кола. Отже, $ST = SP + PT = DP + PL = DL = BM$. Тепер уже трикутники AMS і ATS рівні, тому що $MS = BM = ST$, $\angle ASM =$

$=\angle AST = 90°$ і AS – спільна. Маємо $AT = AM$. Але $AM = AL$, оскільки $ABCD$ – квадрат. Остаточно дістанемо $AL = AT$.

С.5.6. Для додатних x, y маємо $0 \le (x+y)(x-y)^2 = x^3 + y^3 - xy(x+y)$. Отже, $x^3 + y^3 \ge xy(x+y)$. Звідси $a^3 + b^3 + 1 \ge \frac{a+b}{c} + 1 = \frac{a+b+c}{c}$, тобто $\frac{1}{a^3+b^3+1} \le \frac{c}{a+b+c}$. Аналогічно маємо $\frac{1}{b^3+c^3+1} \le \frac{a}{a+b+c}$ і $\frac{1}{c^3+a^3+1} \le \frac{b}{a+b+c}$. Додавши ці нерівності, дістанемо $\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \le \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = 1$.

С.5.7. Розглянемо центр E кола, описаного навколо трикутника ABC. Оскільки $\angle ABC = 130°$, точки B і E лежать по різні боки від AC. Далі, $\angle BEC = 2\angle BAC = 60°$. Крім того, $BE = EC$. Отже, трикутник BEC – правильний. Оскільки $\angle DBC = 30°$, відразу маємо $\Delta BDC = \Delta BDE$. Тому $\angle BDE = 70°$. Але $\angle BEA = 2\angle BCA = 40°$, $\angle BAE = 90° - \frac{1}{2}\angle BEA = 70°$, $\angle CAE = 70° - \angle BAC = 40°$. Це означає, що точки D і A лежать по різні боки від EC і $\angle CAE + \angle CDE = 40° + 140° = 180°$, тобто чотирикутник $ACDE$ – вписаний. Оскільки BD – бісектриса кута CBE, маємо $DC = DE$, звідки AD – бісектриса кута CAE. Отже, $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle CAE = 20° = \angle BCA$. Звідси $BC \parallel AD$, що й треба було довести.

С.5.8. *Відповідь.* При $x \ge 2\sqrt{2}$ см / с. Спочатку доведемо, що павуки обов'язково спіймають муху при $x = 2\sqrt{2}$ (звідси випливатиме правильність твердження і для $x > 2\sqrt{2}$). Оскільки під час руху мухи в довільний бік за одну секунду павуки можуть подолати (в клітинках) відстань вдвічі більшу за муху, легко помітити, що за деякий час вони зможуть переміститися в таку позицію, коли два павуки і муха будуть розташовані у вершинах деякої клітинки. Муха може рухатися в чотирьох напрямах. Якщо вона прямує прямо на павука, той сидітиме і чекатиме на неї, якщо рухатиметься в протилежний бік, то миттєво зреагувавши і пробігши дві діагоналі (відстань $-2\sqrt{2}$), павук спіймає муху. Якщо ж вона буде переміщатися в бік іншої вершини квадрата або в протилежний, то павук пройде одну діагональ і сидітиме у вершині, чекаючи на муху (яка, за умовою, не зможе змінити напрям руху або зупинитися).

Тепер доведемо, що за умови $x<2\sqrt{2}$ можна вибрати такі розташування та рух мухи, що павуки її не спіймають. Доведемо, що муха, яка знаходиться у вузлі (неспіймана), може вибрати напрям руху так, щоб не бути спійманою через секунду. Якщо за секунду павуки не зможуть дістатися до її вузла, вона може просто чекати. Якщо ні, то вона може рухатися в одному з чотирьох напрямів. За умовою задачі, павуки розміщені й ходять так, що до всіх чотирьох вузлів, до яких може дістатися муха, може переміститися тільки один з павуків. Якщо в цей момент часу павук нерухомий, муха просто рухається в напрямі якнайдалі від цього павука. За такої стратегії до місця призначення мухи павуку потрібно буде пройти принаймні дві діагоналі, а отже, він дістанеться до вузла пізніше за неї, бо його швидкість менша за $2\sqrt{2}$. Якщо ж павук рухається, муха має зробити те саме, вважаючи, що павук сидить у місці свого призначення. Ті самі міркування і згадка про те, що павук не може зупинитися або змінити напрям руху, доводять, що муху не з'їдять через секунду. Це означає, що муха зможе уникнути загибелі.

С.5.9. Спочатку доведемо, що з натуральності чисел a, b, x, y і $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}=p$ випливає, що x і y є повними квадратами. Маємо $a^2x=p^2+b^2y-2pb\sqrt{y}$, звідки $\sqrt{y}$ є раціональним числом, а це означає, що y є повним квадратом. Аналогічно доводимо, що x є повним квадратом.

Тепер доведемо, що з натуральності чисел a, b, c, x, y, z і $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}=p$ випливає, що x, y і z є повними квадратами.

Маємо $a^2x+b^2y+2ab\sqrt{xy}=p^2+c^2z-2pc\sqrt{z}$. Використовуючи попередні міркування, отримаємо, що xy і z є повними квадратами, але із симетрії видно, що x, y і z є повними квадратами. Нехай $\sqrt{n+\sqrt{m}}+\sqrt{m+\sqrt{n}}=t$, де t, n, $m\in N$. Тоді число $\sqrt{n}+\sqrt{m}+$ $+2\sqrt{\left(n+\sqrt{m}\right)\left(m+\sqrt{n}\right)}=q$ також натуральне.

Звідси $4\left(nm+m\sqrt{m}+n\sqrt{n}+\sqrt{nm}\right)=q^2+m+n-2q\sqrt{m}-2q\sqrt{n}+2\sqrt{nm}$.
Застосовуючи до останньої рівності попередній результат, дістанемо, що як n, так і m є повними квадратами $n=k^2$, $m=l^2$. Тому $t=\sqrt{k^2+l}+\sqrt{l^2+k}$. Використовуючи попередні міркування, матимемо, що k^2+l і l^2+k є повними квадратами, але це неможливо, тому що при $a \le b$ маємо $b^2 < b^2+a \le b^2+b < (b+1)^2$.

С.5.10. Доведемо методом індукції за k, що довільну компанію з k людей, кожна четвірка яких містить або трьох попарно знайомих, або трьох попарно незнайомих людей, можна розмістити в двох кімнатах так, щоб в одній з кімнат усі були між собою попарно знайомі, а в іншій – попарно незнайомі. Твердження задачі легко випливатиме з цього результату та принципу Діріхле.

За умови $k=4$ твердження очевидне. Зробимо індукційний крок $k \to k+1$. Виділимо одну людину (позначимо її A). За припущенням індукції, тих, хто залишився, можна розсадити у дві кімнати. Виберемо таке розміщення у цих двох кімнатах, щоб сумарна кількість людей з першої (де всі один одного знають), які незнайомі з A, та з другої, що знайомі з A, була найменш можливою. Якщо A знає всіх у першій кімнаті, її можна посадити туди. Якщо вона не знає нікого в другій кімнаті, її можна розмістити там. Нехай B з першої кімнати незнайома з A, а C з другої кімнати знайома з A. Тоді для довільного $D \neq B$ з першої кімнати маємо четвірку A, B, C, D. З умови отримуємо, що D і C знайомі. Аналогічно матимемо, що B має бути незнайома з кожною людиною другої кімнати, відмінною від C. Отже, B і C можна поміняти місцями, після чого сумарна кількість людей з першої кімнати, які незнайомі з A, та з другої, що знайомі з A, зменшиться. Це суперечить вибору розміщення по кімнатах. Отже, A можна помістити до однієї з кімнат.

С.5.11. Для довільного дійсного x маємо $x=k+\dfrac{\alpha}{19}$, де k – деяке ціле число, α – дійсне і $0 \le \alpha < 19$. Тоді $[19x]=[19k+\alpha]=19k+[\alpha]$, а $98[x]=98k$. Отже, $117k+[\alpha]=1\,998$, а оскільки $[\alpha] \in \{0, 1, 2, ..., 18\}$, то $1\,998-[\alpha] \in \{1\,998, 1\,997, ..., 1\,980\}$.

Серед цих чисел на 117 ділиться лише одне 1 989, тобто $k=17$, $[\alpha]=9$. Отже,

$$17\frac{9}{19} \le x < 17\frac{10}{19}.$$

С.5.12. Якщо в трикутнику ABC точки M і K обрано на стороні AC так, що $AM = AB$ і $CK = CB$, то середина KM є точкою дотику кола, вписаного в трикутник ABC. Доведемо це. Позначимо $BC = a$; $AB = c$; $AC = b$. Тоді $AK = AC - BC$, тому $KM = AB - (AC - BC) = AB + BC - AC$, $KO = \dfrac{AB + BC - AC}{2}$, а $AO = AK + KO = AC - BC + \dfrac{AB + BC - AC}{2} =$ $= \dfrac{AC + AB - BC}{2} = p - BC$, де p – півпериметр, тому O – дійсно точка дотику вписаного кола до сторони.

Таким чином, з умови задачі випливає, що кола, вписані в трикутники ABC і ADC, дотикаються до діагоналі AC в одній точці, а саме посередині відрізків KM і PQ.

Знайдемо відстань d між точками дотику кіл, вписаних у трикутники ABC і ADC, до діагоналі AC. Нехай x – відстань від вершини C до точки дотику вписаного кола до сторони BC, y – відстань від цієї самої точки до точки дотику вписаного кола до сторони CD. Позначимо через z і t – відстані від вершини A до точок дотику вписаних кіл до сторін відповідно AB і AD. Тоді $d = x - y$; $d = z - t$.

Додавши ці рівності, дістанемо $2d = \left|(x+z)-(y+t)\right| = \left|(BC + AD)-\right.$ $\left.-(AB + CD)\right|$. Тому $d = \dfrac{1}{2}\left|(BC + AD) - (AB + CD)\right|$. Оскільки $d = 0$, то $BC + AD = AB + CD$.

С.5.13. а) Доведемо нерівність методом математичної індукції за n.

База індукції. При $n = 1$ нерівність набуває вигляду $a_1^3 \ge a_1^2$, яка виконується, оскільки числа a_i – натуральні, тобто $a_1 \ge 1$.

Крок індукції. Нехай нерівність виконується для $n = k$ різних натуральних чисел. Доведемо, що вона справджується і для $n = k + 1$ чисел. Оскільки в нерівності не має значення порядок доданків, можна вважати, що $a_1 < a_2 < ... < a_k < a_{k+1}$. Тоді $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_k^3 + a_{k+1}^3 \ge (a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 +$ $+ a_{k+1}^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})^2 - 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + ... + a_k) - a_{k+1}^2 + a_{k+1}^3 \ge$ $\ge (a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})^2$. Для доведення останньої нерівності досить довести, що $a_{k+1}^3 - a_{k+1}^2 \ge 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + ... + a_k)$, яка в свою чергу випливає з $\dfrac{a_{k+1}\left(a_{k+1}-1\right)}{2} \ge a_1 + a_2 + ... + a_k$. Доведемо її. Зрозуміло, що $\dfrac{a_{k+1}\left(a_{k+1}-1\right)}{2} = 1+2+3+...+\left(a_{k+1}-1\right)$. Але $1+2+3+...+\left(a_{k+1}-1\right) \ge a_1 +$ $+a_2 + ... + a_k$, оскільки $a_1 < a_2 < ... < a_k < a_{k+1}$ і $\{a_1, a_2, ..., a_k\} \subseteq \{1, 2, ..., a_{k+1}-1\}$. Доведення кроку індукції завершено.

б) З доведення п. а) випливає, що рівність виконується тоді, коли $a_1 = 1$ і $a_{k+1} - 1 = a_k$. Тобто, коли $a_i = i$, $i = 1, 2, ..., n$ (і для перестановок цієї послідовності).

С.5.14. З умови випливає, що хтось з бандитів залишився живим. Починаючи з нього, пронумеруємо всіх за годинниковою стрілкою: $1, 2, 3, ..., n$. Номер бандита, якого застрелив перший, більший за його номер. Номер бандита, якого застрелив n-й, менший за його номер. Нехай k – найменший номер бандита, що застрелив бандита з номером, меншим за його номер, і нехай ця жертва має номер l. Маємо $1 < l < k$. За умовою $(k-1)$-й бандит застрелив $(l-1)$-го або $(l+1)$-го бандита, за вибором k номер жертви бандита $k-1$ має бути більшим за $k-1$. Нерівність $l-1 > k-1$ неможлива, отже, бандит номер $k-1$ застрелив бандита номер $l+1$ і $l+1 > k-1$. Із цих нерівностей випливає, що $k-l=1$. Отже, $k-1=l$, $l+1=k$, тобто k і $k-1$ застрелили один одного.

С.5.15. Якщо $x^3 + 3px = m$ і $x^4 + 4px^2 = n$, де m і n – цілі числа, а p – натуральне, то число x – ціле. Доведемо це.

Помічаємо, що число n – невід'ємне. Нехай $h = n + 4p^2$. Число h – натуральне і $\left(x^2 + 2p\right)^2 = h$. Звідси $x^2 + 2p = \sqrt{h}$ (бо $x^2 + 2p > 0$). Тому $x = \pm\sqrt{\sqrt{h} - 2p}$. Оскільки функція $f(x) = x^3 + 3px$ непарна, достатньо розглянути випадок $x = \sqrt{\sqrt{h} - 2p}$. Маємо

$$\sqrt{\sqrt{h}-2p}\left(\sqrt{h}-2p+3p\right) = m;$$

$$\left(\sqrt{h}-2p\right)\left(\sqrt{h}+p\right)^2 = m^2;$$

$$\left(h-3p^2\right)\sqrt{h} = m^2 + 2p^3.$$

Оскільки $m^2+2p^3>0$, то $h-3p^2\neq 0$, тобто $\sqrt{h}=\dfrac{m^2+2p^3}{h-3p^2}\in Q$.

Відомо, що коли $a\in Q$ і $a^2\in Z$, то $a\in Z$. Отже, $\sqrt{h}$ та $y=\sqrt{h}-2p$ – цілі числа. Тоді $(y+2p)\left(y^2+4py+p^2\right)=m^2+2p^3$, тобто $y(y+3p)^2=m^2$.

Якщо $m=0$, то $x^3+1\,500x=0$, тобто $x=0\in Z$.

Нехай $m\neq 0$, тоді $y+3p\neq 0$ і число $\sqrt{y}=\dfrac{|m|}{|y+3p|}$ раціональне додатне. Тому $\sqrt{y}=t$ – натуральне число, але тоді $y=t^2$ і $h=\left(t^2+2p\right)^2$.

Отже, $x=\sqrt{\sqrt{h}-2p}=\sqrt{t^2+2p-2p}=t$, тобто x – ціле число, що й треба було довести.

С.5.16. Позначимо $u=\dfrac{b}{a}, v=\dfrac{c}{b}, w=\dfrac{a}{c}$ і припустимо, що перше рівняння має корені x_1, x_2, друге – x_2, x_3, а третє – x_1, x_3. За теоремою Вієта $x_1+x_2=-u, x_2+x_3=-v, x_1+x_3=-w$. Розв'язавши цю систему, дістанемо $x_1=\dfrac{v-u-w}{2}$, $x_2=\dfrac{w-v-u}{2}$, $x_3=\dfrac{u-v-w}{2}$.

Застосовуючи теорему Вієта, маємо

$$4x_1x_2=4\frac{c}{a}=4uv=(v-u-w)(w-v-u);$$

$$4x_2x_3=4\frac{a}{b}=4vw=(w-v-u)(u-v-w);$$

$$4x_3x_1=4\frac{b}{c}=4wu=(v-u-w)(u-v-w).$$

Після додавання цих рівностей (дві праві частини) і тотожних перетворень, дістанемо $(v+u+w)^2=0$. Тобто $v+u+w=0$. Очевидно, що $vuw=1$.

Обчислимо вираз $vu+uw+wv=\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{-x_2-x_3}{x_2x_3}+\dfrac{-x_3-x_1}{x_1x_3}+$

$+\dfrac{-x_1-x_2}{x_1x_2}=-2\dfrac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=-2\dfrac{uv+vw+wu}{x_1x_2x_3}$.

Але $(x_1x_2x_3)^2 = x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot x_3x_1 = (uvw)^2 = 1$. Тому $x_1x_2x_3 = \pm 1$ і $vu + uw + wv = 0$. Отже, u, v, w є коренями рівняння $(x-u)(x-v)\times$ $\times(x-w) = x^3 - (u+v+w)x^2 + (vu+uw+vw)x - uvw = x^3 - 1 = 0$.

Але це рівняння має лише один дійсний корінь. Суперечність.

С.5.17. Спочатку доведемо, що для довільних додатних x, y, z виконується нерівність

$$\frac{x^2+yz}{x^2+xy} \geq \frac{z}{x} \cdot \frac{x+y}{y+z}.$$

Дана нерівність еквівалентна таким нерівностям:

$$(x^2+yz)(y+z)x \geq (x^2+xy)(x+y)z;$$
$$(x^2+yz)(xy+xz) \geq (x^2+xy)(zx+zy).$$

Розкривши дужки та звівши подібні, дістанемо еквівалентну нерівність $x^3y + xyz^2 \geq 2x^2yz$, яка випливає з нерівності Коші для двох чисел.

Доведемо нерівність з умови задачі. Згідно доведеної раніше нерівності та нерівності Коші для трьох чисел отримаємо

$$\frac{a^2+bc}{a^2+ab} + \frac{b^2+ca}{b^2+bc} + \frac{c^2+ab}{c^2+ca} \geq \frac{c}{a} \cdot \frac{a+b}{b+c} + \frac{a}{b} \cdot \frac{b+c}{c+a} + \frac{b}{c} \cdot \frac{a+c}{a+b} \geq 3.$$

С.5.18. Доведемо, що числа вигляду $n = 2 \cdot 9^k$, $k = 1, 2, \ldots$ є шуканими. Для цього спочатку доведемо таку лему.

Лема. Для довільного натурального k число $\dfrac{2^{3^k}+1}{3^{k+1}}$ – ціле.

Доведення леми. Скористаємося методом математичної індукції.

База індукції. За умови $k = 1$, одержимо $\dfrac{2^{3^1}+1}{3^2} = 1$ – ціле число.

Крок індукції. Маємо $\dfrac{2^{3^{k+1}}+1}{3^{k+2}}=\dfrac{\left(2^{3^k}+1\right)\left(2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1\right)}{3^{k+2}}=\dfrac{2^{3^k}+1}{3^{k+1}}\times$
$\times\dfrac{2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1}{3}$ – ціле число, оскільки $\dfrac{2^{3^k}+1}{3^{k+1}}$ – ціле число за припущенням, а $2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1\equiv(-1)^{2\cdot 3^k}-(-1)^{3^k}+1\equiv 0\pmod 3$.

Далі, при $n=2\cdot 3^{2k}$, де $k=1, 2, \ldots$ матимемо $\left[\dfrac{2^n}{n}\right]=\left[\dfrac{2^{2\cdot 3^{2k}-1}}{3^{2k}}\right]$. Але за лемою $\dfrac{2^{3^{2k}\cdot 2-1}+2^{3^{2k}-1}}{3^{2k}}$ – ціле і парне число. Тому, віднявши його від останньої рівності, дістанемо, що число $\left[\dfrac{2^n}{n}\right]$ має таку саму парність, як і число $\left[\dfrac{-2^{3^{2k}-1}}{3^k}\right]$.

Крім того, з леми легко отримати $\dfrac{2^{3^{2k}-1}+\dfrac{3^{2k}+1}{2}}{3^{2k}}$ – ціле непарне число (непарне, оскільки $3^{2k}+1$ не ділиться на 4). Додавши це число до $\left[\dfrac{-2^{3^{2k}-1}}{3^k}\right]$, дістанемо число, що має протилежну з $\left[\dfrac{2^n}{n}\right]$ парність: $\left[\dfrac{-2^{3^{2k}-1}}{3^k}\right]+\dfrac{2^{3^{2k}-1}+\dfrac{3^{2k}+1}{2}}{3^{2k}}=\left[\dfrac{3^{2k}+1}{2\cdot 3^{2k}}\right]=0$ при всіх $k=1,\ 2,\ \ldots,$ тобто парне число. Тому при всіх $n=2\cdot 9^k$, $k=1, 2, \ldots$, число $\left[\dfrac{2^n}{n}\right]$ – непарне.

С.5.19. Зауважимо, що коли трикутники ABC і MNK перетинаються не по п'ятикутнику, то, рухаючи їх вздовж прямої p, можемо збільшити площу їх перетину (рис. С.5.1).

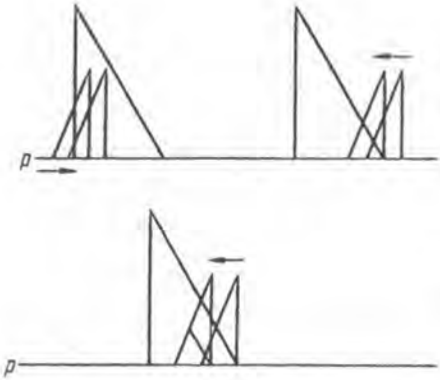


Рис. C.5.1

Розглянемо випадок, зображений на рис. C.5.2, відповідно позначимо точки R, T, G. Нехай $NK = x$, $BC = y$, $KC = z$, тоді $AC = \dfrac{2S}{y}$, $KM = \dfrac{2S}{x}$. Оскільки трикутники ARK і ABC подібні, то $RK = BC \cdot \dfrac{AK}{AC}$. Отже, $RK = y \cdot \dfrac{\frac{2S}{y} - z}{\frac{2S}{y}} = y - \dfrac{y^2 z}{2S}$. Аналогічно $GC = x - \dfrac{x^2 z}{2S}$.

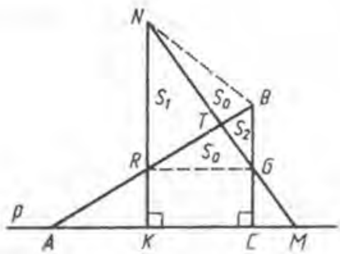


Рис. C.5.2

Розглянемо трапецію $NBGR$. Нехай $S_0 = S_{\Delta RTG}$, $S_1 = S_{\Delta NTR}$, $S_2 = S_{\Delta BTG}$, тоді з подібності ΔNRT і ΔGBT маємо $NT \cdot BT = RT \cdot GT$, а отже, $S_{\Delta NTB} = S_0$ і $S_0^2 = S_1 S_2$. Тобто $S_0 = \sqrt{S_1 S_2} \le \dfrac{S_1 + S_2}{2}$. Звідси отримаємо $S_0 \le \dfrac{1}{4} S_{NBGR}$. Таким чином, $S_{KRTGC} \le \dfrac{1}{4} \cdot S_{NBGR} + S_{KRGC} =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{z^2}{4S}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{z}{2} \cdot \left(x + y - \frac{z}{2S}\left(x^2 + y^2\right)\right) = \frac{z}{2}(x + y) - \frac{3}{4} \cdot \frac{z^2}{4S}\left(x^2 + y^2\right) \le \frac{2}{3} S,$$

бо $\left(\left(zx - \dfrac{4}{3} S\right)^2 + \left(zy - \dfrac{4}{3} S\right)^2\right) \cdot \dfrac{3}{16S} \ge 0$.

C.5.20. Вказаним чином відмітити точки неможливо. Припустимо, що це не так. Тоді треба позначити не менше трьох точок (оскільки не виконувалася б перша умова). Розглянемо для кожної трійки неколінеарних точок A, B, C кути трикутника ABC. Серед цих кутів виберемо найбільший кут XYZ. Доведемо, що він тупий. Нехай є деякий трикутник PQR з відміченими вершинами. Якщо він тупокутний, то кут XYZ теж тупий.

Якщо трикутник PQR прямокутний, то середина гіпотенузи відмічена, але тоді один з двох трикутників, на які ділиться наш прямокутний трикутник медіаною – тупокутний, тому існує тупокутний трикутник з відміченими вершинами, і кут XYZ – тупий.

Якщо ΔPQR – гострокутний, то точка O (центр описаного кола) відмічена і лежить всередині нього. Тому один з трьох кутів з вершиною в точці O – тупий (їх сума дорівнює 360°). Отже, в усіх випадках кут XYZ – тупий.

Розглянемо три випадки.

1) Нехай $\angle XYZ < 150°$. Виберемо серед усіх кутів такий кут $\angle X_1Y_1Z_1 = \angle XYZ$, для якого відстань X_1Z_1 найменша. Нехай O_1 – центр кола, описаного навколо трикутника $X_1Y_1Z_1$. Оскільки кут $X_1Y_1Z_1$ тупий, то O_1 і Y_1 лежать по різні боки від X_1Z_1, і $\angle X_1O_1Z_1 = 360° - 2\angle X_1Y_1Z_1$. Тому один з кутів $\angle X_1O_1Y_1$, $\angle Y_1O_1Z_1$ не перевищує $\frac{1}{2}\angle X_1O_1Z_1 = 180° - \angle X_1Y_1Z_1$. Нехай $\angle X_1O_1Y_1 \le 180° - \angle X_1Y_1Z_1$ і O_2 – центр кола, описаного навколо трикутника $X_1O_1Y_1$. Тоді O_2 лежить всередині трикутника $X_1O_1Y_1$, тому що він рівнобедрений і гострокутний, і $\angle Y_1O_2O_1 = 2\angle O_1X_1Y_1 = 180° - \angle X_1O_1Y_1 \ge 180° - (180° - \angle X_1Y_1Z_1) = \angle X_1Y_1Z_1$. Отже, $\angle Y_1O_2O_1 = \angle X_1Y_1Z_1$. Але $O_1Y_1 < X_1Z_1$, оскільки $\angle X_1Y_1Z_1 < 150°$, а $\angle X_1O_1Z_1 = 360° - 2\angle X_1Y_1Z_1 > 60°$, тобто $\angle O_1X_1Z_1 = \angle O_1Z_1X_1 < 60°$, що суперечить тому, що X_1Z_1 – найменша відстань.

2) Якщо $\angle XYZ > 150°$, то суперечність дістанемо так само, лише розглядатимемо максимальну відстань X_1Z_1 і доведемо, що $O_1Y_1 > X_1Z_1$.

3) Приймемо $\angle XYZ = 150°$. У такий же спосіб доводиться, що $\angle YO'O \ge \angle XYZ$, де O і O' – центри кіл, описаних навколо трикутників XYZ і XOY (за умови $\angle XOY \le \angle YOZ$). Але кут XYZ – найбільший, тому $\angle YO'O = \angle XYZ$. Звідси випливає, що $\angle XOY = \angle ZOY = 180° - \angle XYZ$, тобто $XY = ZY$ і $\angle XOY = \angle ZOY = 30°$, $\angle XO'Y = 60°$. Нехай W – центр кола, описаного навколо трикутника $XO'Y$. Оскільки трикутник $XO'Y$ рівносторонній, то $XY > YW$. Тому $ZY > YW$ і $\angle YWZ > \angle YZW$. Але $\angle YWZ + \angle YZW = 60°$. Звідси випливає, що $\angle YWZ > 30°$, тобто $\angle XWZ > 150° = \angle XYZ$. Суперечність.

С.5.21. Позначимо $n = 666$. Будемо вважати, що радіус кола, описаного навколо 1 998-кутника, дорівнює 1. Записавши довжини даних відрізків через відповідні центральні кути, перетворимо рівність з умови до такої рівності:

$$\sin(n+1)\frac{\pi}{3n}=\sin(n-1)\frac{\pi}{3n}+\sin\frac{\pi}{3n}.$$

Тепер маємо

$$\sin(n+1)\frac{\pi}{3n}-\sin(n-1)\frac{\pi}{3n}=2\sin\frac{\pi}{3n}\cos\frac{\pi}{3n}=\sin\frac{\pi}{3n}.$$

С.5.22. Додавши три дані рівності, матимемо $(k+1)^2+(l+1)^2+$ $+(m+1)^2=39$.

Перебором легко встановити, що число 39 не можна подати у вигляді суми квадратів трьох цілих чисел. (Також можна дістати суперечність, розглядаючи остачі за модулем 4.)

С.5.23. Забезпечити собі виграш може той, хто починає гру. Його перший хід – замінити останню зірочку на будь-яке ненульове число. Наступні ходи до останнього – довільні.

Нехай останнім своїм ходом він має визначити коефіцієнт a_j, це буде остання незамінена зірочка. Цілими коренями многочлена можуть бути лише дільники вільного члена. Для кожного такого дільника є єдине значення a_j (не обов'язково ціле), за якого цей дільник стає коренем.

Треба визначити всі такі a_j (їх буде скінченна кількість) і взяти будь-яке інше значення.

С.5.24. Не обов'язково. Покладемо $a_1 = 3$, $a_{n+1}=(a_1 a_2 \ldots a_n)^2+1$ для $n \geq 1$. Легко помітити, що $a_{n+1} > 2a_n > a_n+1$.

Візьмемо три різних числа a, b, c із даної послідовності. Нехай $a > b$.

Якщо $c < b$, то з означення послідовності випливає, що $a + b$ при діленні на c дає остачу 2 і тому не ділиться.

Якщо $b < c < a$, то $a + b$ дає остачу $b+1$ і в цьому випадку $b+1 < c$.

Якщо $a < c$, то $2a < c$, $a + b < c$ і подільності також немає.

С.5.25. Позначимо на промені AC точку R таку, що $CR = CB$ (рис. С.5.3). Тоді MN – середня лінія трикутника ARB. $\angle ARB =$

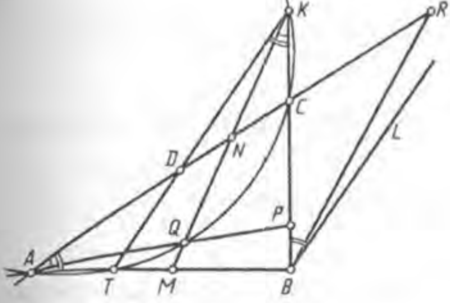


Рис. С.5.3

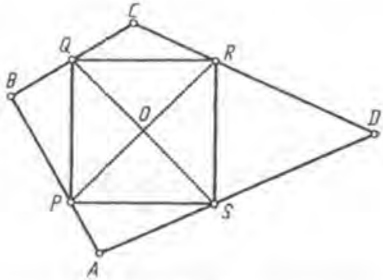


Рис. С.5.4

$= \angle CNK$, $\angle CBR = \angle CKN$ і, оскільки трикутник BCR – рівнобедрений, трикутник NCK є рівнобедреним. З того, що $\angle ACB = 60°$ випливає $\angle KNC = \angle NKC = 30°$. Оскільки $AP \perp CB$, то $\angle CAP = 30°$. Точки A, Q, C, K лежать на одному колі. В колі, описаному навколо трикутника AQC, маємо $\angle CAT = \angle TKC$.

Проведемо дотичну BL через точку B до кола, описаного навколо трикутника ABC. Тоді $\angle CBL = \angle CAT = \angle TKC$ і тому $BL \parallel TK$. Оскільки діаметр кола, що проходить через B, буде перпендикулярним до BL, отримуємо твердження задачі.

С.5.26. Доведемо, що такий чотирикутник існує тоді і лише тоді, коли $d \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Використаємо відому нерівність Птолемея: для будь-яких чотирьох точок площини A, B, C, D $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$. Нехай тепер $ABCD$ – даний чотирикутник, $PQRS$ – вписаний у нього квадрат, O – центр квадрата (рис. С.5.4). Застосовуючи нерівність Птолемея до O, P, B, Q, маємо $OP \cdot BQ + OQ \cdot BP \geq OB \cdot PQ$, звідси $BQ + BP \geq OB\sqrt{2}$. Аналогічно $CQ + CR \geq OC\sqrt{2}$, $DR + DS \geq OD\sqrt{2}$, $AP + AS \geq OA\sqrt{2}$. Додавши ці нерівності, дістанемо $1 \geq (OA + OC + OB + OD)\sqrt{2} \geq (AC + BD)\sqrt{2} \geq d\sqrt{2}$.

З іншого боку, якщо X – точка перетину діагоналей $ABCD$, то $XA + XB > AB$, $XB + XC > BC$, $XC + XD > CD$, $XD + XA > AD$. Додавши ці нерівності, одержимо $2d > 1$, $d > \frac{1}{2}$. Доведемо, що для кожного

$d \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ такий чотирикутник існує. Розглянемо ромб зі стороною $\frac{1}{4}$ і гострим кутом α. Тоді сума його діагоналей дорівнює $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$. Ця функція неперервна на проміжку $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ і тому приймає всі значення з проміжку $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Також легко переконатися, що в будь-який такий ромб можна вписати квадрат.

С.5.27. Використаємо відому нерівність Коші – Буняковського

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

підставивши в неї

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right), \ (b_1, b_2, b_3) = \left(\sqrt{\frac{x}{1+yz}}, \sqrt{\frac{y}{1+zx}}, \sqrt{\frac{z}{1+xy}}\right).$$

Тоді

$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}} + \frac{y}{\sqrt{1+zx}} + \frac{z}{\sqrt{1+xy}} \le \sqrt{x+y+z} \cdot \sqrt{\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy}}. \quad (1)$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $0 \le x \le y \le z \le 1$.
Тоді

$$1 + xy \le 1 + zx \le 1 + yz, \ \frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \le \frac{x+y+z}{1+xy}. \quad (2)$$

З умови отримаємо

$$(1-x)(1-y) \ge 0, x + y \le 1 + xy \le 1 + 2xy. \quad (3)$$

Із (2) і (3) дістанемо

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \le \frac{1+2xy+1}{1+xy} = 2. \quad (4)$$

Із (1) та (4) маємо потрібну нерівність.

С.5.28. Нехай $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$, $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+$ $+...+b_0$, де m і n – натуральні числа, a_i і b_i – цілі числа.

Оскільки $Q(0)=0$, $b_0=0$ і тому $a_0=P(0)=P(Q(0))=1\cdot19\cdot199\cdot1\,998$. Також з умови задачі випливає, що $a_nb_m=1$ і $mn=4$. Розглянемо окремі випадки.

1) $a_n=1, b_m=1$. Наведемо тут різні можливості.

а) $m=4$, $n=1$. Тоді $P(x)=x+1\cdot19\cdot199\cdot1\,998$, $Q(x)=(x-1)(x-19)\times$ $\times(x-199)(x-1\,998)-1\cdot19\cdot199\cdot1\,998$.

б) $m=1$, $n=4$. Тоді $Q(x)=x$, $P(x)=(x-1)(x-19)(x-199)(x-1\,998)$.

в) $m=2$, $n=2$. Тоді $P(x)=x^2+a_1x+1\cdot19\cdot199\cdot1\,998$, $Q(x)=x^2+b_1x$. Оскільки $P(Q(1))=P(Q(19))=P(Q(199))=P(Q(1\,998))=0$ і $P(x)$ може приймати однакові значення не більше, ніж при двох різних x, то $Q(1)$, $Q(19)$, $Q(199)$, $Q(1\,998)$ розбиваються на дві пари однакових значень. Якщо $Q(x)=Q(y)$, то $x+y=-b_1$. Але, наприклад, $1+1\,998\neq$ $\neq19+199$, тому неможливо $Q(1)=Q(1\,998)$ і $Q(19)=Q(199)$. Аналогічно неможливі й інші пари рівностей. Отже, у цьому випадку потрібних многочленів не існує.

2) $a_n=-1$, $b_m=-1$. Аналогічно, розглянувши такі самі можливості для значень m і n, знаходимо ще тільки одну відповідь $P(x)=-x+$ $+1\cdot19\cdot199\cdot1\,998$, $Q(x)=-x(x-1)(x-19)(x-1\,998)+1\cdot19\cdot199\cdot1\,998$.

С.5.29. Розглянемо множини $A_1=\{1,...,11\}$, $A_2=\{12,..., 22\}$, ..., $A_{181}=\{1\,981,...,1\,991\}$. З принципу Діріхле випливає, що кожна множина A_i має не менше 3 елементів в одній з наших груп. Із 181 множини можна вибрати 37, для яких ця група одна й та сама. Потім розглянемо $111=3\cdot37$ чисел – вказаних елементів з наших 37 множин.

Позначимо ці числа з групи A_{n_i}, $1\le i\le37$, через x_i, y_i, z_i, вважаючи, що $x_i<y_i<z_i$. Різниця z_i-x_i може набувати значень 2, 3, ..., 10. Існує значення різниці d, яке серед цих 37 груп зустрічається не менше 5 разів.

Нехай $d<10$. Легко перевірити, що кожне натуральне число $d<10$ може бути подане у вигляді суми двох натуральних чисел не більше, ніж чотирма способами. Серед п'яти однакових значень d існують два однакових подання $d=z_i-x_i=(z_i-y_i)+(y_i-x_i)$ та $d=z_j-x_j=$ $=(z_j-y_j)+(y_j-x_j)$ і $y_i-x_i=y_j-x_j$ або $y_i-x_i=z_j-y_j$. Тоді відповідно $y_i - x_i + z_j - y_j = z_t - x_t$ або $y_j - x_j + y_i - x_i = z_t - x_t$ (де x_t, z_t взяті з іншої групи A_{n_t} з різницею $z_t - x_t = d$), і звідси маємо потрібне подання.

Якщо $d = 10$, то або одержимо два однакових подання $d = (z_i - y_i) + (y_i - x_i)$, $d = (z_j - y_j) + (y_j - x_j)$ (і міркуємо, як і вище), або кожне подання 1+ 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5 зустрічається лише один раз. Тоді можемо вибрати числа з $a - d = 1$, $b - e = 2$, $f - c = 3$ і $a + b + c = d + e + f$.

С.5.30. З умови 2) маємо $f(x,x) \cdot f(x,x) = x^2$. Звідси $f(x,x) = x$ (адже $f(x,x) > 0$). Доведемо, що для всіх $r > 0$, $x > 1$ з $rx > 1$ виконується рівність

$$f(x-1, rx-1) = r(x-1). \tag{1}$$

Для натуральних значень r це доводиться за індукцією. Для $r = 1$ рівність (1) доведена. Крок індукції від r до $r + 1$ дістанемо з умови 1) додаванням рівностей $f(x-1, rx-1) = r(x-1)$ та $f(x-1, x-1) = x-1$.

Для раціональних $r = \dfrac{p}{q}$ (p і q – натуральні числа) отримаємо

$$qf\left(x-1, \frac{p}{q}x-1\right) = f\left(x-1, \frac{p}{q}x-1\right) + \ldots + f\left(x-1, \frac{p}{q}x-1\right) =$$

$$= f(x-1, px-1) = p(x-1)$$

(Використали умову 1) $q-1$ разів і рівність (1).) Тому для раціональних r рівність (1) також виконується. Покажемо, що $f(x, y)$ є функцією неспадною по y.

За умови $y > z$ для деякого натурального n $y - z > \dfrac{1}{n}$. Отже,

$$nf(x,y) = f(x, ny + n - 1) = f(x, (nz + n - 1) + 1 + t) =$$

$$= f(x, nz + n - 1) + f(x,t) > f(x, nz + n - 1) = nf(x,z).$$

Звідси $f(x, y) > f(x, z)$ (оскільки $t = ny - nz - 1 > 0$ і $f(x, t) > 0$).

Для довільного $r>0$ і раціональних r_1, r_2 з умови $r_1<r<r_2$, одержимо $r_1(x-1)=f(x-1,r_1x-1)<f(x-1,rx-1)<f(x-1,r_2x-1)=r_2(x-1)$. Можемо вибирати r_1 і r_2 як завгодно близькими до r, отже, $f(x-1,rx-1)=r(x-1)$. Рівність (1) доведено.

Для будь-яких $a>0$, $b>0$ існують x, r такі, що $x-1=a$, $rx-1=b$, тобто $x=a+1$, $r=\dfrac{b+1}{a+1}$. Тоді $f(a,b)=f(x-1,rx-1)=r(x-1)=$ $=\dfrac{a(b+1)}{a+1}$. Перевіркою переконуємося, що ця функція задовольняє умови задачі.

Другий етап

С.5.31. Якщо числа a, b, c і d непарні, число $a+9b+9c+8d$ також непарне. Спочатку на дошці було записано п'ять непарних чисел, отже, після кожного кроку має залишатися п'ять непарних чисел. Оскільки число 1 998 парне, вказані в умові задачі числа на дошці отримати не можна.

С.5.32. Розглянемо різницю

$$(a+b+c)-\left(a\frac{c+1}{a+1}+b\frac{a+1}{b+1}+c\frac{b+1}{c+1}\right)=(a+b+c)-\left((a+1)+(b+1)\frac{c+1}{a+1}+\right.$$

$$\left.+(c+1)\frac{b+1}{c+1}\right)+\left(\frac{c+1}{a+1}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}\right)=\left(\frac{c+1}{a+1}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}\right)-3\geq 0.$$

Остання нерівність справедлива, оскільки

$$\left(\frac{c+1}{a+1}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}\right)\geq 3\sqrt[3]{\frac{c+1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{b+1}{c+1}}=3.$$

С.5.33. Оскільки $\angle PSB=\angle PTB=90°$, точки B, S, T, P лежать на одному колі. Звідси $\angle PBT=\angle PST$. Крім того, $\angle PBT=\angle PBN=\angle PDN$. Аналогічно точки P, Q, F, D лежать на одному колі і $\angle SQF=\angle PDF$. Таким чином, $\angle QST+\angle SQF=\angle NDP+\angle PDF=\angle NDF=90°$. Звідси $ST\perp QF$.

С.5.34. Правий Принц, оскільки його правило оборотне. Справді, не вийшовши із Замку і діючи за правилом, Принц не може двічі увійти до одних і тих самих дверей, бо, застосовуючи обернене правило, він обов'язково прийде до входу в Замок. Оскільки кількість кімнат скінченна і Дракон знаходиться у глухому куті, Принц благополучно виведе Царівну із Замку.

С.5.35. Нехай W – точка перетину AC_1 і CA_1. Зрозуміло, що $WA = WC$. Оскільки $BA = BC$, пряма WB є бісектрисою кута AWC. Нехай B' – точка перетину бісектрис трикутника C_1WA_1, тоді B' належить променю WB. Крім того, $\angle C_1B'A_1 = 90° + \frac{1}{2}\angle C_1WA_1 = \angle C_1BA_1$. Отже, точка B' збігається з точкою B. Тому $\angle BC_1A_1 = \angle WC_1B = 15° + + 20° = 35°$.

Аналогічно $\angle AC_1B_1 = 35°$. Тому $\angle A_1C_1B_1 = \angle AC_1B - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = = (180° - 15° - 20°) - 35° - 35° = 75°$.

Так само $\angle C_1A_1B_1 = (180° - 25° - 15°) - 40° - 40° = 60°$ і $\angle A_1B_1C_1 = = (180° - 20° - 25°) - 45° - 45° = 45°$.

С.5.36. Див. розв'язання задачі С.5.31.

С.5.37. Нехай $A = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdots\frac{1996}{1998}$, $B = \frac{2}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{10}\cdots\frac{1997}{1999}$, $C = \frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{9}{11}\cdots\frac{1998}{2000}$. Очевидно, що $A < B < C$. Звідси $A^3 < ABC = = \frac{1}{1999\cdot 1000}$. Отже, $A < \frac{1}{10\sqrt[3]{1999}}$.

С.5.38. Доведемо методом індукції, що для довільного $n > 1$ число клієнтів 2^n можна розподілити між 2^{n-1} компаніями так, щоб середня кількість клієнтів у компанії дорівнювала 2^{n-1}, а для довільних двох компаній становила б 2^{n-1} жителів, які є клієнтами лише однієї з цих компаній.

Для $n = 2$ один із можливих розподілів клієнтів наведено в таблиці.

1	1
1	0
0	1
0	0

Тут рядкам відповідають жителі, а стовпчикам – компанії. На перетині стовпчика і рядка стоїть 1 тоді, коли відповідний житель є клієнтом відповідної компанії, і 0 – у протилежному випадку.

Припустимо, що довели наше твердження для n, доведемо його для $n+1$. Нехай A – таблиця, що побудована за вищеописаними правилами для 2^{n+1} жителів і 2^n компаній. Побудуємо загальну таблицю (тут $\overline{A}$ – таблиця з елементами, відмінними від відповідних елементів A).

A	A
A	$\overline{A}$

Доведемо, що розподіл клієнтів згідно вищенаведеної таблиці задовольняє умову задачі. Якщо таблиця A має однакову кількість одиниць і нулів, то і в загальній таблиці буде так само. Тому в отриманому розподілі середня кількість клієнтів у компанії дорівнюватиме 2^n.

Залишилося довести, що в довільних двох стовпчиках половина відповідних цифр однакові. Якщо ці два стовпчики знаходяться в першій половині таблиці або в другій одночасно, то рівність цифр випливатиме із припущення індукції безпосередньо. Якщо вони лежать у різних половинах таблиці, то або в них повністю збігаються цифри у верхній частині і протилежні в нижній (а тому половина цифр однакових), або у верхній частині половина цифр однакові за припущенням, а внизу матимемо пари однакових цифр там, де були пари різних цифр зверху, тобто також половину.

С.5.39. З умови маємо $y+z=5-x$ і $y^2+z^2=9-x^2$.

Оскільки $(y+z)^2 \le 2(y^2+z^2)$, то $(5-x)^2 \le 2(9-x^2)$, тобто $x \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Аналогічно доводиться, що $y \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$ і $z \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$. Тому одержуємо $(x-1)(y-1)(z-1) \ge 0$, тобто $xyz \ge (xy+yz+zx)-(x+y+z)+1=$ $=8-5+1=4$, бо $(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$. Рівність виконується, наприклад, при $x=y=2$, $z=1$. З іншого боку, $\left(\frac{7}{3}-x\right)\times$ $\times\left(\frac{7}{3}-y\right)\left(\frac{7}{3}-z\right)\ge 0$, тобто $xyz \le \frac{343}{27}-\frac{49}{9}(x+y+z)+\frac{7}{3}(xy+yz+zx)=$

$=\frac{343}{27}-\frac{245}{9}+\frac{56}{3}=\frac{112}{27}=4\frac{4}{27}$. Рівність виконується, наприклад, для $x=y=\frac{4}{3}, z=\frac{7}{3}$.

С.5.40. Проекції C_1A_2 і C_2A_1 на AC будуть рівними тоді і лише тоді, коли будуть рівними проекції відрізків A_2A_1 і C_2C_1 на AC.

Позначимо $\angle BAC=\alpha$, тоді $\angle BCA=60°-\alpha$, а $\angle AA_1C=120°+\frac{\alpha}{2}$.

З теореми синусів для трикутника AA_1C маємо $\frac{AA_1}{AC}=\frac{\sin(60°-\alpha)}{\sin\left(120°+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Отже, $AA_1=\frac{AC\sin(60°-\alpha)}{\sin\left(120°+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Отримаємо, що $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BC}=\frac{\sin 120°}{\sin\alpha}$. Аналогічно $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC}=\frac{\sin(60°-\alpha)}{\sin\alpha}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sin(60°-\alpha)}{\sin 120°}$.

Якщо завантажимо точку A масою $2\sin\alpha$, а точки B і C відповідно масами $\sin 120°$ і $\sin(60°-\alpha)$, то центр мас точок B і C знаходитиметься у точці A_1. Отже, центр мас усієї системи лежатиме на відрізку AA_1. З іншого боку, він має знаходитися на відрізку C_1B_1, оскільки C_1 – центр мас точок B і A, коли остання завантажена масою $\sin\alpha$. Так само і точка B_1 буде центром мас точок C і A, коли остання завантажена масою $\sin\alpha$. Таким чином, центр мас системи лежить у точці A_2. Отже, $\frac{AA_2}{A_2A_1}=\frac{\sin(60°-\alpha)+\sin 120°}{2\sin\alpha}$. Тобто

$$A_2A_1=\frac{AA_1\cdot 2\sin\alpha}{\sin(60°-\alpha)+\sin 120°+2\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2AC\sin(60°-\alpha)\sin\alpha}{\sin\left(120°+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin(60°-\alpha)+\sin 120°+2\sin\alpha\right)}.$$

Проекція A_2A_1 на AC дорівнює $A_2A_1\cos\frac{\alpha}{2}$, тобто

$$\frac{2AC\sin(60°-\alpha)\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(120°+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin(60°-\alpha)+\sin 120°+2\sin\alpha\right)}.$$

Виконаємо перетворення: $\sin(60° - \alpha) + \sin\alpha = \sin 60°\cos\alpha - \cos 60°\sin\alpha + \sin\alpha = \sin 60°\cos\alpha + \cos 60°\sin\alpha = \sin(60° + \alpha)$.

Крім того, $\sin(60°+\alpha)+\sin\alpha+\sin 120° = 2\sin(30°+\alpha)\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \sqrt{3}\left(\sin(30°+\alpha)+\sin 30°\right) = 2\sqrt{3}\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}$.

Остаточно проекція A_2A_1 на AC дорівнює

$$\frac{AC\sin(60°-\alpha)\sin\alpha}{\sqrt{3}\sin\left(120°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Для проекції C_2C_1 на AC дістанемо такий самий вираз, лише замість α треба взяти $60° - \alpha$. Тоді чисельник дробу не зміниться, а знаменник матиме вигляд

$$\sqrt{3}\sin\left(120°+\frac{60°-\alpha}{2}\right)\sin\left(30°+\frac{60°-\alpha}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(150°-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(180°-150°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(180°-60°+\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(120°+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Отже, проекції C_2C_1 і A_2A_1 на AC рівні.

С.5.41. *Відповідь.* $x = 1\,998$. Областю допустимих значень даного рівняння є множина $[1\,996; +\infty)$. Легко перевірити, що для $x \in [1\,996,\ 1\,998)$ перший, другий і третій доданки лівої частини відповідно більші за перший, другий і третій доданки правої частини, тому рівність неможлива. Три протилежні нерівності виконуються при $x \in (1\,998, +\infty)$, отже, серед цих x коренів немає. Для $x = 1\,998$ рівність виконується.

С.5.42. Для кожної монети розглянемо дев'ять точок – вершини чотирьох клітинок, які частково покриває монета. В усіх інших вершинах клітинок можемо розташовувати центр іншої монети, і ця монета не буде перекриватися з нашою. Так кожна монета "забороняє" дев'ять вершин для розташування центрів інших монет (при цьому різні монети можуть "заборонити" одну і ту саму вершину). Всього матимемо $99 \times 99 = 9\,801$ вершин клітинок всередині даного квадрата. Покладені 1 000 монет "заборонять" не більше 9 000 вершин. Тому є можливість ще докладати монети, і кожна нова монета "заборонить" ще не більше 9 вершин. Отже, можна докласти принаймні 801 : 9 = 89 монет.

С.5.43. Покладемо $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{t}$ для деяких додатних x, y, z, t, тоді $d = \frac{t}{x}$. Маємо

$$\frac{1+ab}{1+b} + \frac{1+bc}{1+c} + \frac{1+cd}{1+d} + \frac{1+da}{1+a} = \frac{z+x}{z+y} + \frac{t+y}{t+z} + \frac{x+z}{x+t} + \frac{y+t}{y+x} =$$

$$= (x+z)\left(\frac{1}{z+y} + \frac{1}{x+t}\right) + (y+t)\left(\frac{1}{z+t} + \frac{1}{x+y}\right) =$$

$$= (x+z)\frac{x+y+z+t}{(z+y)(x+t)} + (y+t)\frac{x+y+z+t}{(z+t)(x+y)} \geq$$

$$\geq (x+z)\frac{x+y+z+t}{\frac{1}{4}(x+y+z+t)^2} + (y+t)\frac{x+y+z+t}{\frac{1}{4}(x+y+z+t)^2} = 4.$$

Ми скористалися відомою нерівністю $uv \leq \frac{1}{4}(u+v)^2$.

C.5.44. Нехай O_1 і O_2 – точки перетину діагоналей даних ромбів (рис. C.5.5). Тоді PO_1QO_2 – ромб. $BF = DH$, оскільки за умовою при повороті у просторі відносно прямої AE на $\angle BAD$ перший відрізок переходить у другий. За властивістю середньої лінії трикутника маємо, що $PO_2 \parallel BF \parallel O_1Q$, $O_1P \parallel DH \parallel QO_2$, $PO_2 = O_1Q = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}DH = O_1P = QO_2$. Звідси випливає, що $O_1O_2 \perp QP$.

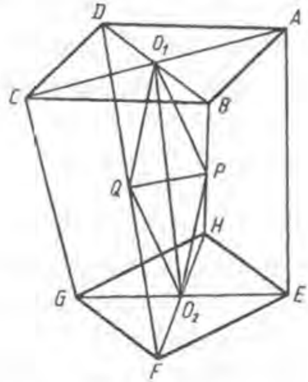


Рис. C.5.5

Оскільки $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{HF}\right)$, PQ паралельна площинам ABC та EFG. Враховуючи, що $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AE}\right)$, $PQ \perp AE$, $PQ \perp O_1O_2$, то, розглянувши скалярний добуток відповідних векторів, дістанемо, що $PQ \perp CG$.

C.5.45. *Відповідь.* 4 823. Позначимо $\lambda = 1 + \sqrt{2}$. Легко помітити, що для всіх натуральних n виконується рівність $\left\{n\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{2}\right\} = \{n\lambda\} + \{\lambda\}$. Відмітимо, що $\{n\lambda\} = \left\{\frac{n}{\lambda}\right\}$. Дійсно, для зазначеного λ $n\lambda - \frac{n}{\lambda} = 2n$, звідки і випливає дана рівність. Таким чином, множина P складається з усіх натуральних n, для яких $\left\{\frac{n}{\lambda}\right\} + \frac{1}{\lambda} > 1$.

Доведемо, що ця нерівність виконується тоді і лише тоді, коли $n = [\lambda p]$ для деякого натурального p.

Необхідність. Якщо вказана нерівність виконується, то, поклавши $p = \left[\frac{n}{\lambda}\right] + 1$, матимемо $\frac{n}{\lambda} - p + 1 + \frac{1}{\lambda} > 1$. Звідси $n + 1 > \lambda p$. Але, з іншого боку, $p > \frac{n}{\lambda}$, тобто $\lambda p > n$. Отже, $[\lambda p] = n$.

Достатність. Якщо $n = [\lambda p]$, то $\lambda p > [\lambda p]$, оскільки λ ірраціональне число, а p – натуральне. Звідси $p > \frac{[\lambda p]}{\lambda} = \frac{n}{\lambda} > \frac{\lambda p - 1}{\lambda} > p - 1$. Тобто

$\left[\dfrac{n}{\lambda}\right]=p-1$. Тоді одержимо $\left\{\dfrac{n}{\lambda}\right\}+\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-p+1+\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{[\lambda p]-\lambda p+1}{\lambda}+1>1$, оскільки $[\lambda p]>\lambda p-1$.

Таким чином, до множини P входять лише числа $[\lambda]$, $[2\lambda]$, $[3\lambda]$. На 1 998-му місці стоятиме число $[1\ 998\lambda]=1\ 998+[1\ 998\sqrt{2}\,]=4\ 823$ (останню рівність дістанемо нескладними підрахунками).

Фінальний етап

С.5.46. Спочатку треба довести, що точка P лежить між точками A і K. Для цього доведемо, що дотична до описаного кола в точці A паралельна прямій MN. Дійсно, $\angle ABC=\angle MNA$, $\angle ABC=\angle CAT$ (рис. С.5.6). Звідси випливає, що $MN \parallel AT$. Розглянемо два можливих випадки.

1. Нехай точка N лежить між точками M і K (рис. С.5.7), тоді $\angle ACB=\angle APB$ (як вписані, що спираються на одну і ту саму дугу), а $\angle ACB=\angle AMN$ (оскільки чотирикутник $BMNC$ – вписаний). Отже, $\angle AMK=\angle APB$, тобто $\angle BMK=\angle BPK$, причому точки M і P лежать по один бік від прямої BK. Отже, точки B, M, P, K лежать на одному колі.

2. Нехай точка M лежить між точками K і N (рис. С.5.8), тоді $\angle KMB=\angle NCB$ і $\angle KPB=\angle ACB$ (оскільки чотирикутники $BMNC$ та $PBCA$ – вписані). Отже, $\angle KPB=\angle KMB$, причому точки P і M лежать по один бік від прямої KB. Звідси випливає, що точки B, M, P, K лежать на одному колі.

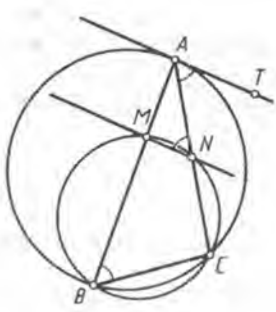


Рис. С.5.6

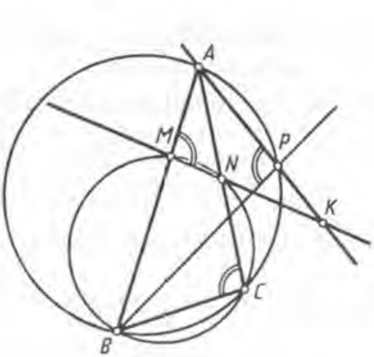


Рис. С.5.7

С.5.47. *Відповідь.* Можна. За допомогою методу математичної індукції доведемо аналогічне твердження для довільного натурального n $(n \ge 2)$.

База. При $n = 2$ твердження задачі очевидне.

Індуктивний перехід. Нехай твердження задачі виконується для деякого $n = k$. Доведемо, що тоді воно справджується і для $n = k+1$. Виберемо дві сусідні вершини з жетонами, на яких записані числа $p \ge 0$ і $q \le 0$ (такі вершини завжди існують, бо сума всіх вказаних чисел дорівнює 1). Замінимо ці два жетони одним, з числом, що дорівнює сумі $p+q$, і перейдемо до k-кутника. За припущенням індукції існує вершина, стартуючі з якої, можна зібрати всі жетони. Ця вершина підходить і для відповідного (попереднього) $(k+1)$-кутника.

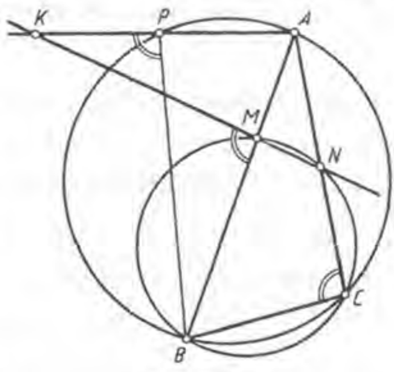


Рис. С.5.8

С.5.48. Для $n = 2, 3, 4$ умова задачі перевіряється безпосередньо. Далі доведемо таку лему.

Лема. Якщо n – складене число і $n > 4$, то число $\dfrac{(n-1)!}{n}$ – парне, а якщо n – просте, то воно не ціле.

Доведення леми. Дійсно, якщо n – просте число, $p \ge 5$, то число $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)(n-1)$ не ділиться на p, оскільки всі його множники менші за p. Якщо n – складене, його можна подати у вигляді добутку двох натуральних чисел, кожне з яких більше за одиницю і менше за n.

Нехай $n = k \cdot l$. Тоді можливі два випадки.

1. Якщо $1 < k < l < n$, то $l < n-2$. При $l \ge n-2$ маємо $n = kl \ge$ $\ge 2(n-2) = 2n-4$, що можливо лише при $n \le 4$. Отже, $l < n-2$.

Але тоді $\dfrac{(n-1)!}{n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)(k+1) \cdots (l-1)(l+1) \cdots (n-2)(n-1)$ – ціле парне число, оскільки одне з чисел $n-2$ або $n-1$ буде парним.

2. За умови $1 < k = l < n$, виконується нерівність $2l < n-2$. Дійсно, якщо $2l \ge n-2$, то $n = l^2 \ge \dfrac{(n-2)^2}{4}$, що неможливо за умови $n > 8$.

Отже, $1 < l < 2l < n-2$. Але в цьому випадку $n = l^2$ і $\frac{(n-1)!}{n} =$
$= 1\cdot 2\cdot 3\cdots(l-1)(l+1)\cdots(2l-1)\,2(2l+1)\cdots(n-2)(n-1)$ – ціле парне n число. Доведення леми завершено.

Тепер зрозуміло, що коли n або $n+1$ – прості числа, то число $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$ – неціле, оскільки $(n-1)!$ не ділиться на $n(n+1)$. Якщо n і $n+1$ – складені числа, то дане число $\frac{(n-1)!}{n(n+1)} = \frac{(n-1)!}{n} + \frac{n!}{n+1} - (n-1)!$ є цілим і парним, оскільки числа $\frac{(n-1)!}{n}$, $\frac{n!}{n+1}$ та $(n-1)!$ цілі й парні.

C.5.49. Враховуючи, що $a+b+c=1$, маємо $\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+$
$+\frac{c}{1+a+b}=\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}$. Позначимо $2-a=x$, $2-b=y$, $2-c=z$, тоді $a=2-x$, $b=2-y$, $c=2-z$, причому $x>1$, $y>1$, $z>1$. Дістанемо

$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}=\frac{2-x}{x}+\frac{2-y}{y}+\frac{2-z}{z}=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3.$$

Враховуючи, що $x+y+z=6-(a+b+c)=5$, матимемо

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3=\frac{2}{5}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3\ge\frac{2}{5}\cdot 9-3=\frac{3}{5},$$

оскільки для будь-яких додатних x, y, z виконується відома нерівність $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$.

C.5.50. Нехай шукана пряма l перетинає сторони кута в точках X і Y (рис. C.5.9). Опустимо перпендикуляри з точки A на прямі OX, OY, XY, при цьому $AM\perp OX$, $AN\perp OY$, $AK\perp XY$. Тоді навколо чотирикутників $AMXK$ і $ANYK$ можна описати кола. Звідси випливає, що $\angle MKA=\angle MXA$, а $\angle NKA=\angle NYA$, тобто $\angle MKN=\angle MXK+$
$+\angle NYA=360°-270°-\alpha=90°-\alpha$. Таким чином, з одного боку точка K лежить на колі з діаметром AB, а з другого боку вона знаходиться

на геометричному місці точок, для кожної з яких відрізок MN видно під кутом $90° - \alpha$ (це будуть дві дуги кіл, які симетричні відносно прямої MN). Звідси й випливає потрібна побудова.

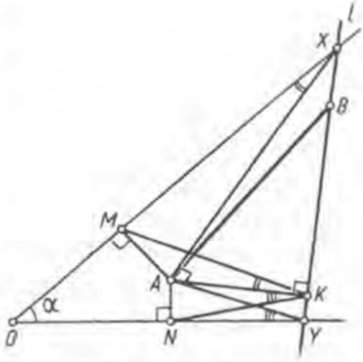


Рис. С.5.9

С.5.51. Оскільки числа виду 5^n і 6^m у десятковому запису закінчуються відповідно цифрами 5 і 6, то число 7^k має закінчуватися цифрою 9. Врахуємо, що 7^k закінчується дев'яткою лише тоді, коли k при діленні на 4 дає в остачі 2. Але за умови $k \geq 6$, $7^k \geq 7^6 = 117\,649$. Отже, $k = 2$ та кількість чисел указаного виду збігається з кількістю розв'язків нерівності $5^n + 6^m \leq 9\,951$ у натуральних числах (за умови, що ліва частина при різних n і m буде різною).

Якщо $n = 1$, то $6^m \leq 9\,946 \Rightarrow m \leq 5$, оскільки $6^5 = 7\,776$, а $6^6 = 46\,656$; для $n = 2$ маємо $6^m \leq 9\,926 \Rightarrow m \leq 5$; при $n = 3$, $6^m \leq 9\,821 \Rightarrow m \leq 5$; якщо $n = 4$, то $6^m \leq 9\,326 \Rightarrow m \leq 5$; для $n = 5$ маємо $6^m \leq 6\,826 \Rightarrow m \leq 4$, тому що $6^4 = 1\,296$, а $6^5 = 7\,776$; при $n \geq 6$, $5^n \geq 15\,625$, що суперечить нерівності, яку розв'язуємо.

Отже, нерівність $5^n + 6^m \leq 9\,951$ має $5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 24$ розв'язки в натуральних числах.

Залишилося перевірити, чи не існує таких натуральних чисел p, q, r, s, що $p < q$, $r < s$ і $5^p + 6^s = 5^q + 6^r$. Це можна зробити безпосередньо (адже числа p, q, r, s менші за 6) або методом від супротивного.

С.5.52. 1) Розфарбуємо всі натуральні числа в чотири кольори за таким правилом: числа, які при діленні на 4 мають однакову остачу, фарбуємо одним кольором. Тоді будь-які два числа i, j, які при діленні на 4 мають різні остачі, будуть пофарбовані в різні кольори. Якщо числа $i \neq j$ одного кольору, то $|\ i - j\ | = 4k$, $k \in N$, а отже, не може дорівнювати 2, 3 або 5. Числа i, j пофарбовано у різні кольори.

2) Припустимо, що розфарбування в три кольори можливе. Нехай n – довільне натуральне число. За умовою числа $n + 3$, $n + 5$, $n + 8$ мають бути пофарбованими в попарно різні кольори. Трійка чисел n, $n + 3$, $n + 5$ також має бути пофарбованою в попарно різні кольори. Звідси випливає, що числа n і $n + 8$ пофарбовані в один колір. Аналогічні міркування для трійок $n + 3$, $n + 6$, $n + 8$ та $n + 1$, $n + 3$, $n + 6$ показують, що числа $n + 1$ і $n + 8$ пофарбовані в один колір. Отже, два довільних послідовних числа n, $n +1$ є числами одного кольору. Це означає, що всі натуральні числа мають один колір. Суперечність.

С.5.53. Спочатку доведемо, що

$$f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_1+x_2) \qquad (1)$$

для всіх дійсних x_1 і x_2. Оскільки функція f періодична з періодом $T=2$, достатньо довести правильність цієї нерівності для $0<x_1,x_2\leq 2$.

Якщо $x_1+x_2=0$, то $x_1=x_2=0$ і нерівність (1) виконується.

За умови $x_1+x_2\in(0,\ 2]$, виконуються нерівності

$$(x_1+x_2)f(x_1)\geq x_1 f(x_1+x_2), \qquad (2)$$

$$(x_1+x_2)f(x_2)\geq x_2 f(x_1+x_2). \qquad (3)$$

Дійсно, (2) $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2(-x_1^{\,2}+2x_1)\geq x_1^{\,2}(-(x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)(2-x_1)\geq x_1(2-(x_1+x_2))\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)\geq 2x_1\Leftrightarrow x_2\geq 0$.

Аналогічно доводиться нерівність (3).

Додавши почленно нерівності (2) і (3), дістанемо (1) (оскільки $x_1+x_2>0$).

Якщо $x_1+x_2>2$, то $f(x_1)+f(x_2)=f(2-x_1)+f(2-x_2)\geq f(4-(x_1+$ $+x_2))=f(x_1+x_2)$, що завершує доведення (1).

Застосовуючи індукцію по n доводимо, що $f(x_1)+f(x_2)+...+$ $+f(x_n)\geq f(x_1+x_2+...+x_n)$.

Оскільки $x_1+x_2+...+x_n=1$, то $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\geq f(1)=1$.

С.5.54. Побудуємо на промені AC точку E таку, що $PA = PE$ (це можна зробити, оскільки кут PAC менший за гострий кут BAC) (рис. С.5.10).

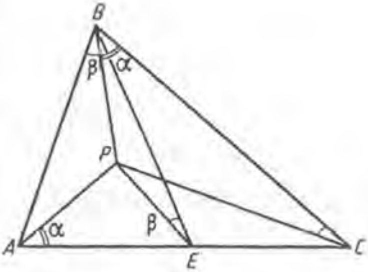


Рис. С.5.10

Якщо E лежить на відрізку AC, то $\angle PEC + \angle PBC = (180° - \alpha) + \alpha = 180°$, тобто точки B, P, E, C лежать на одному колі.

Якщо ж ні, то $\angle PEC = \angle PBC = \alpha$ і точки B, P, E, C також лежать на одному колі.

У будь-якому випадку $\angle BEP = \beta$ і $\angle BEA = \alpha + \beta = \angle ABC$. За двома кутами трикутник ABE подібний трикутнику ACB. Тому $AE \cdot AC = AB^2$. Але, якщо точка P лежить всередині гострокутного трикутника ABC, вона проектується на сторону AC, а не на її продовження. Отже, $AE < 2\,AC$. Тобто $\dfrac{AB^2}{AC} < 2AC$. Звідки $AB < \sqrt{2}AC$, що й треба було довести.

Зауваження. Можна описати навколо трикутника BPC коло, яке перетне відрізок AC або його продовження в точці E. Тоді AB є дотичною до кола, бо $\angle ABP = \angle PCB$, а отже, $AB^2 = AE \cdot AC$.

С.5.55. *Відповідь.* $n = 2\cdot 3^3 \cdot 37$ і $n = 2\cdot 3^3 \cdot 71$. Нехай $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – різні прості числа. Тоді $d(n) = (m_1 + 1) \times$ $\times (m_2 + 1) \cdots (m_k + 1)$. Оскільки $d(n) = 16$, то в розкладі числа n не більше трьох простих чисел. Справді, якщо їх чотири, то $(m_1 + 1) \times$ $\times (m_2 + 1)(m_3 + 1)(m_4 + 1) = 16$, тобто $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ і $n = p_1 p_2 p_3 p_4$, але це суперечить умові, оскільки n має ділитися на $18 = 2 \cdot 3^2$. Отже, $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2}$ або $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}$.

Якщо $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2}$, то $(m_1 + 1)(m_2 + 1) = 16$, звідки $m_1 = 7$, $m_2 = 1$, або $m_1 = 1$, $m_2 = 7$, або $m_1 = 3$, $m_2 = 3$. Тоді $n = 2^7 \cdot 3$, що неможливо, оскільки n ділиться на 18, або $n = 2 \cdot 3^7$, або $n = 2^3 \cdot 3^3$. Останні два випадки також є неможливими, тому що $d_9 - d_8 = 17$, проте 17 не ділиться ані на 2, ані на 3.

Якщо $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}$, то $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $m_2 \ge 2$, оскільки $d_6 = 18$. Маємо $(m_1+1)(m_2+1)(m_3+1) = 16$, звідки $m_2 = 3$, $m_1 = m_3 = 1$.

Отже, $n = 2 \cdot 3^3 \cdot p$, де p – просте число, $p \ne 2$, $p \ne 3$. Якщо кожний з двох дільників d_8 і d_9 ділиться на 17, то $p = 17$; якщо $p \ne 17$, то беремо до уваги, що $d_8 d_9 = n = 2 \cdot 3^3 \cdot p$ і одне з чисел d_8, d_9 не ділиться на 3. Тому це числа $2 \cdot 3^3$ та p або 3^3 та $2p$. Якщо одне з них $2 \cdot 3^3 = 54$, то інше або 54 + 17 = 71, або 54 – 17 = 37. Якщо одне з них $3^3 = 27$, то інше або $27 + 17 = 44 = 2 \cdot 22$ та 22 – не просте число, або $27 - 17 = 10 < d_6$. Тому останні два випадки не підходять. Розглянемо інші випадки:

1) $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 17$; $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = 9$, $d_6 = 17 (d_6 \ne 18)$;

2) $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$; $d_6 = 18$, $d_7 = 27$, $d_8 = 37$, $d_9 = 54$;

3) $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71$; $d_6 = 18$, $d_7 = 27$, $d_8 = 54$, $d_9 = 71$.

С.5.56. Нехай точка K належить відрізку AN (рис. С.5.11). $\angle ANC = \angle ABC = 60^\circ$ – як вписані, що спираються на одну дугу. Тоді в прямокутному трикутнику NPA $\angle NAP = 30^\circ$. Легко помітити, що трикутник MBC рівносторонній. Оскільки

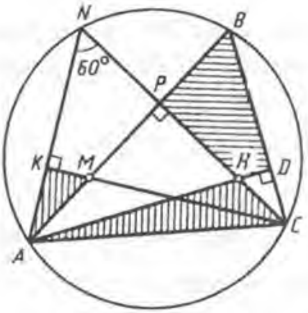


Рис. С.5.11

$$S_{HPBD} = S_{ABD} - S_{APH}, \qquad (1)$$

$$S_{AKM} + S_{AHC} = S_{AKM} + S_{APC} - S_{APH}, \qquad (2)$$

то досить довести, що

$$S_{ABD} = S_{APC} + S_{AKM}. \qquad (3)$$

Позначимо $AM = x$, $MP = y$. Одержимо $S_{APC} = \frac{1}{2} AP \cdot PC = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)y$,

$S_{AKM} = \frac{1}{2} AK \cdot KM = \frac{\sqrt{3}}{8} x^2$, $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{\sqrt{3}}{8}(x+2y)^2$.

Але $S_{APC} + S_{AKM} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)y + \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}(4xy + 4y^2 + x^2) = \frac{\sqrt{3}}{8}(x+2y)^2$.

Випадок, коли точка K лежить на продовженні відрізка AN, розглядається аналогічно.

С.5.57. За умови $y = 0$ матимемо, що для всіх дійсних x

$$f(x) = \max(f(x), 0) + \min(x, f(0)). \qquad (1)$$

Якщо для деякого $x_0 < 0$ $f(x_0) \ge 0$, то $\max(f(x_0), 0) = f(x_0)$, а $\min(x_0, f(0)) \le x_0 < 0$. Тоді за допомогою (1) одержуємо $f(x_0) = \max(f(x_0), 0) + \min(x_0, f(0)) < f(x_0) + 0 = f(x_0)$, що неможливо. Отже, $f(x) < 0$ при всіх дійсних $x < 0$.

Припустимо, що для всіх дійсних $x > 0$ $f(x) < 0$, тоді з (1) випливає $f(x) = 0 + \min(x, f(0)) = \min(x, f(0)) < 0$. Оскільки $x > 0$ і $\min(x, f(0)) < 0$, то $\min(x, f(0)) = f(0)$ і $f(0) < 0$. Але тоді для всіх дійсних $x > 0$ і $y > 0$ маємо $f(x + y) = f(0) < 0$, а з іншого боку, $f(x + y) = \max(f(x), y) + \min(x, f(y)) = y + f(0) > f(0) = f(x + y)$. Маємо суперечність.

Отже, існує таке дійсне $x_0 > 0$, при якому $f(x_0) \ge 0$. Тоді з (1) випливає, що $f(x_0) = f(x_0 + 0) = \max(f(x_0), 0) + \min(x_0, f(0)) = f(x_0) + \min(x_0, f(0))$. Звідси маємо, що $\min(x_0, f(0)) = 0$. Оскільки $x_0 > 0$, то

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

Тому для всіх $x > 0$ $f(x) = \max(f(x), 0) \ge 0$. Отже, для всіх $x > 0$ $f(2x) = \max(f(x), x) + \min(x, f(x)) = x + f(x)$, $f(3x) = \max(f(x), 2x) + \min(x, f(2x)) = \max(f(x), 2x) + x$, оскільки $\min(x, f(2x)) = x$.

З іншого боку, $f(3x) = \max(f(2x), x) + \min(2x, f(x)) = f(2x) + \min(2x, f(x)) = x + f(x) + \min(2x, f(x))$. Отже, $\max(f(x), 2x) = f(x) + \min(2x, f(x))$, тобто $f(x) = \max(f(x), 2x) - \min(2x, f(x)) = |f(x) - 2x|$. Оскільки $x > 0$, то $f(x) = 2x - f(x)$ (інакше $x = 0$). Звідси

$$f(x) = x \text{ при всіх } x > 0. \qquad (3)$$

Нехай тепер $x < 0$, а $y > 0$ таке, що $x + y > 0$.

Тоді $x + y = f(y + x) = \max(f(y), x) + \min(y, f(x)) = \max(y, x) + \min(y, f(x)) = y + \min(y, f(x))$.

Звідси $x = \min(y, f(x))$. Оскільки $x \neq y$ $(x < y)$, то

$$x = f(x) \text{ для всіх } x < 0. \tag{4}$$

Із (2), (3), (4) випливає, що $f(x) = x$ для всіх дійсних x. Перевірка показує, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

С.5.58. Якщо змінити знаки всіх трьох чисел x, y, z або переставити ці числа, то значення виразу $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} y \cdot \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} z \times$ $\times \operatorname{arctg} x$ не змінюється. Тому можна вважати, що $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 0$. Оскільки $z = -x - y$ та функція $\operatorname{arctg} x$ непарна, нерівність з умови можна записати таким чином: $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} y \leq -\operatorname{arctg} z \cdot (\operatorname{arctg} x +$ $+ \operatorname{arctg} y) = \operatorname{arctg}(x+y) \cdot \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+y) \cdot \operatorname{arctg} y$.

Для невід'ємних x, y та зростаючої функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ця нерівність є очевидною.

С.5.59. Нехай QM перетинає AB у точці T, R – точка перетину BM і QN (рис. С.5.12). Оскільки $\angle RMC = \angle RQC = 90°$, то точки R, M, Q, C лежать на одному колі. Тоді $\angle MRQ = \angle MCQ = \angle NCM$ (за умовою). Звідси випливає, що точки R, B, C, N також лежать на одному колі. Тому $\angle QMC = \angle QRC = \angle NBC = \angle MBT$. Звідси маємо $\angle BTM = \angle BMQ - \angle MBT =$ $= \angle BMQ - \angle QMC = 90°$, тобто $QM \perp AB$. Аналогічно доводиться, що $PM \perp AC$, тобто M – ортоцентр трикутника APQ. Звідси $AM \perp PQ$.

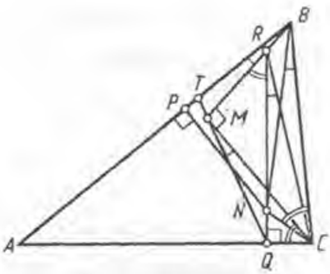


Рис. С.5.12

С.5.60. *Відповідь*. $(1, 1998^{1997}, 2)$, $(2, 1, 1998^{1997})$, $(1998^{1997}, 2, 1)$, $(1, 1998, 1998)$, $(1998, 1, 1998)$, $(1998, 1998, 1)$. За циклічної перестановки змінних рівність не змінюється. Тому можна вважати, що $k \leq l$ і $k \leq m$.

Розглянемо окремі випадки.

1. Якщо $k = 1$, то $l^{m-1} = 1998^{1997}$. Оскільки $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, то $l = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 37^{\gamma}$ для деяких невід'ємних цілих α, β, γ. Для них маємо

$$\alpha(m-1) = 1997,\ \beta(m-1) = 3 \cdot 1997,\ \gamma(m-1) = 1997.$$

Число 1 997 – просте, тому можливі лише такі розв'язки: $m=2$, $\alpha=\gamma=1997$, $\beta=3\cdot1997$ і $m=1998$, $\alpha=\gamma=1$, $\beta=3$. *Відповідь.* $(1,\ 1998^{1997},\ 2)$ і $(1,\ 1998,\ 1998)$. Також можна взяти їх циклічні перестановки і мати ще чотири трійки.

2. Якщо $k>1$, то $l>1$, $m>1$. З умови випливає, що k, l або m діляться на 37. Для визначеності розглянемо випадок, коли k ділиться на 37 (для l і m міркування абсолютно аналогічні).

Оскільки $k\geq37$ і $m\geq2$, то $m^k-1\geq2^{37}-1>3\cdot1997$. Якщо p – деякий простий дільник l, то до виразу $k^{l^m-1}\cdot l^{m^k-1}\cdot m^{k^l-1}$ p входить у степені, не меншому за $2^{37}-1$, а до 1998^{1997} – не більшому за $3\cdot1997$. Маємо суперечність, тому рівність у цьому разі неможлива.

С.5.61. Піднесемо обидві частини одної рівності до куба і дістанемо еквівалентну рівність

$$n=p^3+3q^3+3p^2q\sqrt[3]{3}+3pq^2\sqrt[3]{9}. \qquad (1)$$

Нехай $n=9$, $\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{9}=a+b\sqrt[3]{3}$, де $a,\ b\in Q$. Тоді, використовуючи (1), дістанемо

$$9-a^3-3b^3-3a^2b^2=(3a^2b+3ab^3)\sqrt[3]{3}. \qquad (2)$$

Оскільки $\sqrt[3]{3}$ – ірраціональне число, то (2) можливе лише тоді, коли

$$\begin{cases}9-a^3-3b^3-3a^2b^2=0,\\ 3a^2b+3ab^3=0,\end{cases}$$

де a, b – раціональні. З другого рівняння цієї системи випливає, що $a=0$, $b=0$, або $a=-b^2$.

Якщо $a=0$, з першого рівняння системи одержимо $b^3=3$, що неможливо при $b\in Q$. За умови $b=0$, $a^3=9$, що також неможливо при $a\in Q$.

Якщо $a=-b^2$, з першого рівняння системи випливає $9+b^6-3b^3-$ $-3b^6=0$, тобто $2b^6+3b^3-9=0$. Звідси $b^3=-3$ або $b^3=\dfrac{3}{2}$, що неможливо для $b\in Q$.

Отже, для $n = 9$ не існує таких $a, b \in Q$, що $\sqrt[3]{9} = a + b\sqrt[3]{3}$. Припустимо, що $n \neq 9$. Тоді з (1) при $p \neq 0$ і $q \neq 0$ отримаємо $\sqrt[3]{9} = \dfrac{n - p^3 - 3q^3}{3pq^2} - \dfrac{p}{q}\sqrt[3]{3}$, що неможливо.

Отже, $p = 0$ або $q = 0$, тобто $n = 3q^3$ або $n = p^3$. Оскільки n ціле, то p і q також цілі.

С.5.62. Розіб'ємо множину чисел 1, 2, ..., 1 998 на три множини:

$A_1 = \{1, 2, ..., 750\}$, $A_2 = \{751, 752, ..., 1\,500\}$, $A_3 = \{1\,501, 1\,502, ..., 1\,998\}$.

Припустимо, що існує перестановка, яка не задовольняє умову задачі. Тоді числа з однієї групи не можуть стояти поруч або через одне (різниця будь-яких двох чисел з однієї групи менша за 750). Тому в послідовності множини чергуються або як $A_1, A_2, A_3, A_1, A_2, A_3, ...$, або як $A_1, A_3, A_2, A_1, A_3, A_2, ...$ (множини періодично повторюються через кожні дві). Оскільки в цих множинах неоднакова кількість чисел, таке розміщення неможливе.

С.5.63. Доведемо спочатку допоміжне твердження.

Лема. Композицією двох гомотетичних перетворень простору з центрами O_1 і O_2 ($O_1 \neq O_2$) буде гомотетичне перетворення, центр якого лежить на прямій O_1O_2.

Доведення. Обґрунтуємо твердження, застосовуючи метод координат. Розглянемо довільну точку A простору і проведемо площину через O_1, O_2, A. Введемо на ній систему координат так, щоб мати $O_1(0, 0), O_2(1, 0)$. Позначимо через k_1 і k_2 відповідно коефіцієнти гомотетії з центрами O_1 і O_2. Якщо $k_1 = 1$ або $k_2 = 1$, твердження леми очевидне, далі вважаємо коефіцієнти відмінними від 1.

Розглянемо тепер точку $A(x, y)$. При першій гомотетії вона перейде в точку $A_1(k_1x, k_1y)$. При другій гомотетії точка A_1 перейде в $A_2((k_1x - 1)k_2 + 1, k_1k_2y)$. Підрахунки показують, що точка A перейде в A_2 при гомотетії з центром $O_3\left(\dfrac{1-k_2}{1-k_1k_2}, 0\right)$ і коефіцієнтом k_1k_2.

Точка O_3 лежить на одній прямій з O_1 і O_2. Лема доведена.

Тепер позначимо через σ_0 вписану сферу даного тетраедра $ABCD$. Існують гомотетії з центрами A і A_1, перша з яких переводить сферу G_0 в G_A, а друга – G_A в G. Тому за доведеною лемою центр гомотетії, що переводить σ_0 в σ (очевидно, він єдиний) лежить на прямій AA_1. Аналогічно він лежить на прямих BB_1, CC_1, DD_1, які перетинаються в цій точці.

Олімпіада 6

Перший етап

С.6.1. З нерівності $q > p + r$ випливає, що $q > p$ і $q > r$. З перших двох нерівностей маємо $p > r$. Отже, $q > p > r$. Оскільки p, q і r – прості числа, то $r \ge 2$, $p \ge 3$ і $q \ge 5$. Тому $q > p + r \ge 2 + 3 = 5$, тобто $q \ge 7$. Якщо $q = 7$, то $r < \frac{1}{2}q = 3{,}5$, тобто $r \in \{2,3\}$, а $p > \frac{1}{2}q = 3{,}5$, отже, $p \ge 5$. Оскільки $q > p$, то $p = 5$. Але тоді $q > p + r \ge 5 + 2 = 7$, тобто $q > 7$ – суперечність. Отже, $q \ge 11$. Враховуючи умову задачі, маємо $p > \frac{1}{2}q \ge 5{,}5$, тому $p \ge 7$. Таким чином $p + q + r \ge 7 + 11 + 2 = 20$, що й треба було довести.

С.6.2. *Відповідь.* $\dfrac{(k^2+4)^2+16k^2}{4k(k^2+4)}$, де $k = 1\,999$. Нехай $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = k$, тоді $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \dfrac{k}{2}$. За цією самою властивістю отримаємо $\dfrac{k}{2} + \dfrac{2}{k} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}$. Звідси випливає, що $\dfrac{x^4+y^4}{x^4-y^4} = \dfrac{k^2+4}{4k}$. Після цього відповідь знаходиться легко.

С.6.3. *Відповідь.* 19. Позначимо шукане число таким чином: $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$.

Тоді за умовою

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_0 + 72 = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + ... + a_n, \quad (1)$$

$$a_0 \geq a_n,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1. \quad (2)$$

З (1) дістанемо, що $2 \equiv (a_n - a_0)(\mathrm{mod}\,10)$.

Враховуючи (2), знаходимо $a_n - a_0 = -8 \Rightarrow a_n = 1, a_0 = 9$. Далі з (1) випливає, що $72 = (a_0 - a_n)10^n + (a_1 - a_{n-1})10^{n-1} + ... + (a_n - a_0) > 8 \cdot 10^n - 10^n = 7 \cdot 10^n$. Звідси $n \leq 1$, тобто $n = 1$. А це означає, що є лише одне число, яке задовольняє умову задачі – це 19.

С.6.4. Нехай трикутник ABC (рис. С.6.1) – гострокутний (інші випадки розглядаються аналогічно). Проведемо $OM \perp AC$, тоді $\angle AOM = \angle ABC$ (наслідок з теореми про вписаний кут). З прямокутних трикутників AMO і CHB випливає, що $\angle TAC = \angle BCH$.

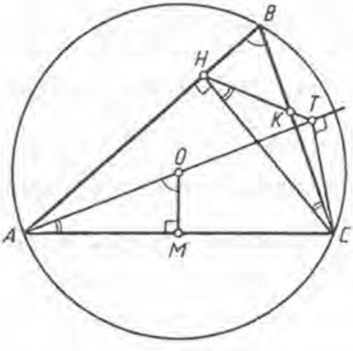


Рис. С.6.1

Оскільки $\angle AHC = \angle ATC = 90°$, то точки A, H, T, C лежать на одному колі. Звідси маємо $\angle THC = \angle TAC$ (оскільки кути вписані і спираються на спільну дугу). Отже, $\angle THC = \angle BCH$, тобто трикутник HKC – рівнобедрений, K – точка перетину TH і BC. $\angle KHC = 90° - \beta$, де $\beta = \angle ABC$.

Тоді $\angle BHK = \angle BKH = \beta$, тобто $KB = KH = KC$. А це означає, що K – середина BC.

С.6.5. *Відповідь.* $a = b = c = 1$, $n = m = k = 2$. Оскільки a, d, c, n, m, k – натуральні числа, то з рівнянь системи маємо, що $n > a$, $m > b$, $k > c$, тобто $n \geq a+1$, $m \geq b+1$, $k \geq c+1$. Звідси випливає, що виконується система нерівностей

$$\begin{cases} a^4 + 14ab + 1 \geq (a+1)^4, \\ b^4 + 14bc + 1 \geq (b+1)^4, \\ c^4 + 14ca + 1 = (c+1)^4. \end{cases}$$

Перетворимо першу нерівність системи наступним чином: $a^4+14ab+1 \ge a^4+4a^3+6a^2+4a+1$,

$$7b \ge 2a^2+3a+2. \qquad (1)$$

Аналогічно перетворюємо другу і третю нерівності системи

$$7c \ge 2b^2+3b+2, \qquad (2)$$

$$7a \ge 2c^2+3c+2. \qquad (3)$$

Додавши почленно (1), (2), (3), дістанемо $(a-1)^2+(b-1)^2+$ $+(c-1)^2 \le 0$.

Звідси випливає, що $a=b=c=1$, причому знак рівності досягається в усіх нестрогих нерівностях. Тому $n=m=k=2$. Перевірка показує, що знайдені числа задовольняють дану систему рівнянь.

С.6.6. Помічаємо, що коли $\frac{a}{b}<1$ і НСД$(a, b)=1$, то, згідно з алгоритмом Евкліда, НСД$(a, b)=$ НСД$(b-a, b)=1$, тобто $\frac{b-a}{b}$ – правильний нескоротний дріб.

Звідси маємо, що коли $\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \ldots, \frac{a_i}{b}$ – усі правильні нескоротні дроби зі знаменником b, то $\frac{b-a_1}{b}, \frac{b-a_2}{b}, \ldots, \frac{b-a_i}{b}$ – такі самі дроби. Таким чином, коли $b>2$, то кількість цих дробів – парне число, тобто i – парне.

Оскільки $b>1$, то для $b=2$ існує лише один нескоротний дріб $\frac{1}{2}$.

Виграшну стратегію має перший гравець: першим своїм ходом він записує $\frac{1}{2}$, а потім на запис $\pm\frac{a_k}{b}$ відповідає записом $\pm\frac{b-a_k}{b}$, якщо $b\ne 4$, $b>2$. Якщо ж з'явиться запис $\pm\frac{1}{4}$ чи $\pm\frac{3}{4}$, то він відповідає відповідно записом $\mp\frac{3}{4}$ чи $\mp\frac{1}{4}$. Оскільки $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\mp\frac{3}{4}=$

$=\begin{cases}0\\1\end{cases}$, $a\pm\frac{a_k}{b}\mp\frac{b-a_k}{b}=\begin{cases}+1\\-1\end{cases}$, то в результаті сума одержаних дробів буде цілим числом і всього таких дробів – непарна кількість. А це означає, що гру завершить перший гравець і він її виграє.

С.6.7. Виконаємо рівносильні перетворення запропонованої нерівності

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\geq\frac{9}{4xy},$$

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)^2-2xy}{x^2y^2}\geq\frac{9}{4xy}.$$

Нехай $(x+y)^2=a,\ xy=b$, тоді остання нерівність має вигляд $\frac{1}{a}+\frac{a-2b}{b^2}\geq\frac{9}{4b}$. Помноживши обидві частини цієї нерівності на $4ab^2$, дістанемо еквівалентну нерівність $4b^2+4a(a-2b)\geq 9ab \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (4a-b)(a-4b)\geq 0$.

Остання нерівність є правильною, оскільки за нерівністю Коші $x+y\geq 2\sqrt{xy}$. Отже, $a\geq 4b>\frac{b}{4}$.

С.6.8. Введемо такі позначення:

$A_n=(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n)$, $B_n=(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)$, $n>1$, $n\in N$. Додавши A_n і B_n та розкривши дужки, матимемо, що добутки, які містять непарну кількість співмножників, взаємно знищаться, а добутки, що містять парну кількість співмножників, повторяться двічі, тобто

$$S_n+1=\frac{A_n+B_n}{2}. \tag{1}$$

Але p_1, p_2, ..., p_n – попарно різні, тому не менше, ніж $n-1$ з них – непарні. Тоді $A_n\vdots 2^{n-1}$, $B_n\vdots 2^{n-1}$, а з (1) маємо $(S_n+1)\vdots 2^{n-2}$.

С.6.9. Спочатку доведемо такі твердження.

Лема 1. Нехай дано трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$, в яких $A_1B_1=A_2B_2$, $B_1C_1=B_2C_2$. Тоді, якщо $\angle B_1>\angle B_2$, то $A_1C_1>A_2C_2$.

Доведення. Оскільки $\angle B_1 > \angle B_2$, то $\cos\angle B_1 < \cos\angle B_2$. Звідси за теоремою косинусів $A_1C_1 > A_2C_2$.

Лема 2. Нехай дано два опуклі чотирикутники $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$, в яких $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $C_1D_1 = C_2D_2$, $\angle B_1 < \angle B_2$, $\angle C_1 \le \angle C_2$. Тоді $A_1D_1 < A_2D_2$.

Доведення. Будуємо відрізок $C_1Y = C_1D_1$ (рис. С.6.2) так, щоб чотирикутник $A_1B_1C_1Y$ був опуклий і $\angle B_1C_1Y = \angle B_2C_2D_2 \ge \angle B_1C_1D_1$.

Тоді $\angle A_1C_1Y \ge \angle A_1C_1D_1$ і, використовуючи лему 1, маємо $A_1Y \ge A_1D_1$.

Будуємо відрізок $B_1X = B_1A_1$ так, щоб чотирикутник XB_1C_1Y був опуклим і $\angle C_1B_1X = \angle C_2B_2A_2 > \angle C_1B_1A_1$, а отже, $\angle YB_1X > \angle YB_1A_1$. Тоді за лемою 1 маємо $XY > A_1Y$.

Отже, $XY > A_1Y \ge A D_1$. Оскільки чотирикутники XB_1C_1Y і $A_2B_2C_2D_2$ рівні між собою, то $A_2D_2 = XY > A_1D_1$, що й треба було довести.

Лема 3. В опуклому шестикутнику $G_1G_2G_3G_4G_5G_6$, у якого протилежні сторони попарно рівні, не можуть одночасно виконуватися нерівності $\angle G_2 > \angle G_5$ і $\angle G_3 \ge \angle G_6$.

Доведення. Справді, коли б це було так, то згідно з лемою 2 для чотирикутників $G_1G_2G_3G_4$ і $G_4G_5G_6G_1$ виконувалася б нерівність $G_1G_4 > G_1G_4$ – суперечність.

Тепер перейдемо до нашої задачі (рис. С.6.3). Припустимо, що $\angle A > \angle D$, тоді (лема 3) $\angle B < \angle E$ і $\angle C > \angle F$.

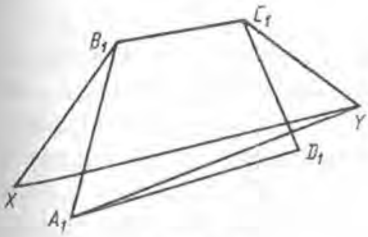


Рис. С.6.2

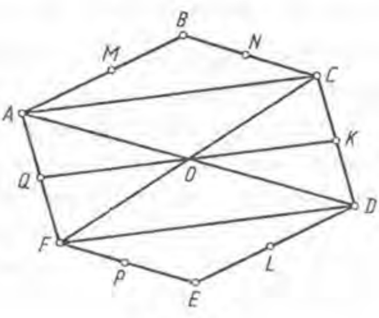


Рис. С.6.3

Але тоді (лема 1) $FB > CE$, $BD > EA$, $FD > AC$. Звідси випливає, що $MN + KL + PQ = \frac{1}{2}(AC + AE + CE) < \frac{1}{2}(BD + BF + DF) = NK + PL + MQ$, а це суперечить умові задачі.

Аналогічно доводиться неможливість випадку $\angle A < \angle D$. Отже, $\angle A = \angle D$. Потім так само доводимо, що $\angle B = \angle E$ і $\angle C = \angle F$. З рівності трикутників ABC і DEF випливає, що $AC = FD$. Оскільки $AF = CD$, то $ACDF$ – паралелограм, QK – його середня лінія, яка проходить через точку O перетину його діагоналей та ділиться нею навпіл. Отже, PN і ML також проходять через точку O, тобто прямі перетинаються в одній точці, що й треба було довести.

С.6.10. Спочатку доведемо *теорему Рамсея*. Якщо ребра повного графа з n вершинами пофарбувати в k кольорів, то для довільного t при досить великому n існує t вершин графа, всі ребра між якими мають однаковий колір.

Доведення. Оберемо деяку вершину A_1. Розглянемо ребра, що виходять із неї, оберемо серед них ребра того кольору φ_1, ребер якого найбільше. Залишимо в графі лише вершини, які є кінцями цих ребер і вершину A_1. Далі виберемо деяку вершину A_2. Розглянемо всі ребра, що виходять із неї, крім ребра A_1A_2. Знову оберемо серед них ребра того кольору φ_2, ребер якого найбільше, і відкинемо всі інші вершини (що не є кінцями цих ребер), залишивши також A_1 і A_2. Обираємо вершину A_3 і т. д.

Оскільки число вершин кожного разу зменшується не більше, ніж у k разів, то при досить великому n дістанемо не менше, ніж $kt+1$ точок A_i. За принципом Діріхле серед A_i $(i = 1, \ldots, kt+1)$ знайдуться принаймні t вершин, для яких відповідні кольори φ_i однакові. Вони і є шуканими вершинами.

А тепер переходимо до нашої задачі. Проведемо на площині n прямих загального положення. Поставимо їм у відповідність n вершин деякого повного графа. Пофарбуємо кожне ребро цього графа в той колір, який має точка перетину відповідних прямих. За теоремою Рамсея, при достатньо великому n у цьому графі знайдеться повний однокольоровий підграф з чотирьох вершин. Відповідні йому чотири прямі й будуть шуканими.

С.6.11. При $k = 1$ рівність не виконується.

Нехай $k \geq 2$, тоді $k^{1999} - k^{1998} = (k-1)k^{1998} \geq k^{1998} \geq 4k^{1996} \geq 4k \geq 3k + 2 > 2k + 2$, отже, рівність неможлива.

С.6.12. *Відповідь.* $x = 0$ або $x = -\frac{1}{2\,000}$. Рівність виконується при $x = 0$. За умови $x > 0$ маємо $0 \leq [x] \leq x$, $0 \leq \{x\} < 1$. Звідси $[x]\{x\} \leq x < 1\,999x$, отже, в цьому разі рівність неможлива. Нехай тепер $x < 0$, тоді $x = -p + \alpha$, де $p = -[x]$ натуральне число, $\alpha = \{x\}$. Наше рівняння при цьому має вигляд $\alpha(-p) = 1\,999(-p + \alpha)$ або $\alpha = \frac{1\,999p}{1\,999 + p}$. Оскільки $\alpha < 1$, то $\frac{1\,999p}{1\,999 + p} < 1$, $p < \frac{1\,999}{1\,998}$. Звідси $p = 1$, $\alpha = \frac{1\,999}{2\,000}$ або $x = -\frac{1}{2\,000}$. Це значення x також задовольняє рівняння.

С.6.13. Нехай x_1, x_2 – ці корені. Оскільки $2 < x_1 < 3$, $2 < x_2 < 3$, то $(x_1 - 2)(x_2 - 3) < 0$, $(x_1 - 3)(x_2 - 2) < 0$. Звідси $(x_1 - 2)(x_2 - 3) + (x_1 - 3) \times (x_2 - 2) < 0$, $2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 12 < 0$. Залишається згадати, що за теоремою Вієта $x_1x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$.

С.6.14. *Відповідь.* Не існує. За умови $x = 1$ маємо $f(-1\,997) - f^2(-1\,997) \geq \frac{1}{4}$, $\left(f(-1\,997) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$, $f(-1\,997) - \frac{1}{2} = 0$, $f(-1\,997) = \frac{1}{2}$.

При $x = 1\,999$ аналогічно одержуємо $f(1999) = \frac{1}{2}$. Отже, $f(-1\,997) = f(1\,999)$, що суперечить першій умові.

С.6.15. Нехай $\angle BPK = \varphi$, тоді $\angle KQD = \varphi$ (бо $BC \parallel AD$). Оскільки точки D, Q, L, K лежать на одному колі, то $\angle KLD = \angle KQD = \varphi$ (рис. С.6.4). Враховуючи, що чотирикутник $BLKP$ вписаний, маємо $\angle BLK = 180° - \varphi$. Отже, $\angle BLD = \angle BLK +$

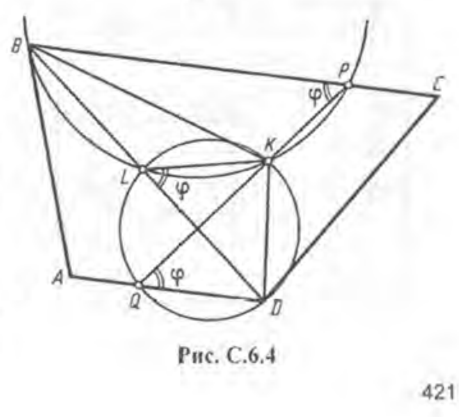


Рис. С.6.4

$+\angle KLD = 180° - \varphi + \varphi = 180°$, тобто точка L лежить на діагоналі BD.

Випадок, коли точка K лежить всередині трикутника ABD, розглядається аналогічно.

С.6.16. *Відповідь.* Ні, не може. Доведемо, що якщо вже виставлено кілька "кораблів", то є де розмістити й наступний. Очевидно, що достатньо показати як можна розташувати а) "корабель" 1×4, б) другий з "кораблів" 1×3, в) третій з 1×2, г) четвертий з 1×1, коли попередні вже виставлені довільно. Розглянемо ці випадки:

а) "корабель" 1×4 можна поставити горизонтально у верхній лівий кут поля;

б) оскільки розміщено лише два "кораблі", то серед горизонтальних позицій 1×3 у лівому верхньому, правому верхньому та правому нижньому кутах поля принаймні одна буде придатною для розташування "корабля";

в) кожен з п'яти розміщених "кораблів" стоїть або горизонтально, або вертикально, тому принаймні три з них – в одному напрямі. Нехай цей напрям горизонтальний. Жоден з "кораблів" не може "забороняти" одночасно якісь дві з показаних на рис. С.6.5 позицій A, B, C, D, E. Отже, якщо всі ці позиції "заборонені", то кожен з п'яти розміщених "кораблів" торкається однієї з них або перетинає її. Звідси випливає, що жоден з горизонтально розташованих "кораблів" не торкається четвертої знизу горизонталі. А вертикальні "кораблі" не можуть "заборонити" всі три позиції X, Y, Z, оскільки жоден з них не може "забороняти" дві з цих позицій одночасно, а всього вертикальних кораблів не більше двох. Отже, серед восьми позначених на рис. С.6.5

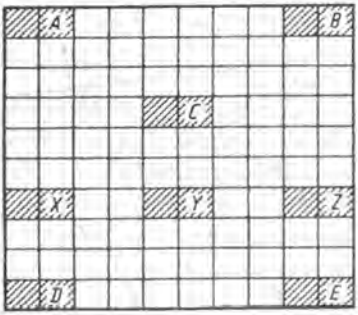


Рис. С.6.5

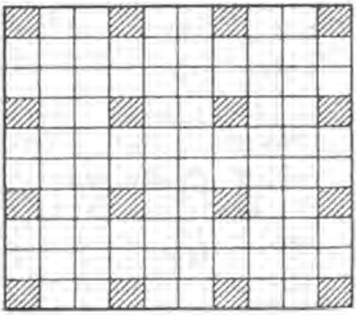


Рис. С.6.6

позицій 1×2 принаймні одна буде придатною для розташування "корабля";

г) серед 16 позицій 1×1 (рис. С.6.6) хоча б одна буде придатною для розміщення останнього "корабля", тому що жоден з розташованих "кораблів" 1×4, 1×3 та 1×2 не може "забороняти" більше двох, а 1×1 – більше однієї з цих позицій. Отже, разом вони не можуть "забороняти" більше, ніж 15 позицій.

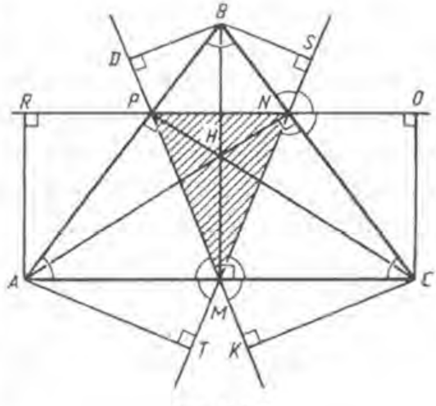


Рис. С.6.7

С.6.17. Нехай точки T, S – проекції точок A, B на пряму MN, D, K – проекції B, C на PM, Q, R – проекції C, A на NP відповідно (рис. С.6.7). Оскільки трикутник ABC гострокутний, то точки P, N, M лежать на його сторонах, а точки D, S, Q, K, T, R – за межами трикутника ABC. Оскільки $\angle AMB = \angle ANB$, то точки A, B, N, M лежать на одному колі, звідси $\angle AMN = 180° - \angle ABC$, $\angle NMC = \angle ABC$. Аналогічно доводиться, що $\angle PMA = \angle ABC$. Тому $\angle NMC = \angle PMA = \angle KMC$ і MC – бісектриса кута KMN. Аналогічно NC – бісектриса кута QNM, отже, C – центр зовнівписаного кола відносно трикутника MPN. Те саме доводиться для точок A і B. Нехай коло, вписане в трикутник PMN, дотикається до його сторін MP, PN і NM відповідно у точках O, L, E (рис. С.6.8). Оскільки $PO = PL$ і $PK = PQ$, то $OK = LQ$. Враховуючи, що $MK = MF$ та $MO = ME$, то $OK = 2MF + FE$. Також $LQ = 2EN + FE$, звідси $MF = EN$, $MK = EN$. Аналогічно $DP = LN$. Але $LN = EN$, отже, $DP = MK$. Схожим чином доводиться, що $TM = NS$.

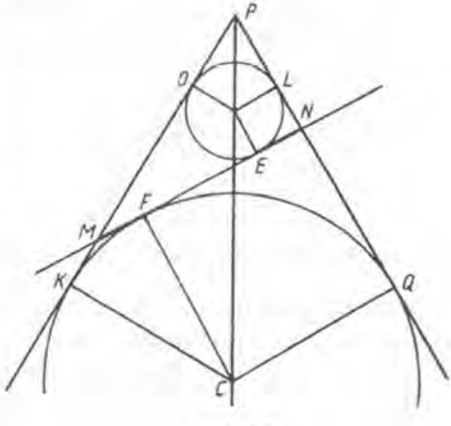


Рис. С.6.8

З рівностей прямокутних трикутників DBM і SBM випливає, що $DM = SM$, але за умовою $DK = ST$, тому $TM = MK$.

Отже, $TM = NS = DP = MK = QN = PR$. Звідси $PN = NM = MP$. Тому трикутник PNM правильний і його кути мають по $60°$. За доведеною раніше рівністю та $\angle PMN = 60°$ маємо $\angle PMA = \angle NMC = \angle ABC$ і так само $\angle BAC = \angle ACB = 60°$. Отже, трикутник ABC дійсно правильний, що й треба було довести.

С.6.18. Застосовуючи формули $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ і $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, отримаємо $\cos\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $\sin\alpha_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. За формулою синуса різниці двох кутів знаходимо

$$\sum_{n=1}^{2\,000}\sqrt{1+n^2}\sin\left(\alpha_n - \alpha_{1\,000}\right) = \sum_{n=1}^{2\,000}\left(n\cdot\frac{1}{\sqrt{1\,000^2+1}} - \frac{1\,000}{\sqrt{1\,000^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1000^2+1}}\left(\sum_{n=1}^{2\,000} n - 2\,000\cdot 1\,000\right) = \frac{1\,000}{\sqrt{1\,000^2+1}} = \sin\alpha_{1\,000}.$$

С.6.19. *Відповідь.* $a^2 - r^2$ при $a < \sqrt{2}r$, $\left(\sqrt{2}a - r\right)^2$ при $a \ge \sqrt{2}r$.

1. Серед прямих, що проходять через фіксовану точку M усередині прямого кута A, трикутник найменшої площі відтинає та пряма, відрізок якої між сторонами цього кута ділиться точкою M навпіл. Для доведення розглянемо прямі BC і B_1C_1, де $BM = MC$ (рис. С.6.9). Нехай для визначеності точка B лежить між точками A і B_1. Проведемо через B перпендикуляр до AB до його перетину з B_1C_1 в точці D. $\Delta MC_1C = \Delta MDB$, тому $S_{AC_1B_1} - S_{ACB} = S_{BDB_1} > 0$.

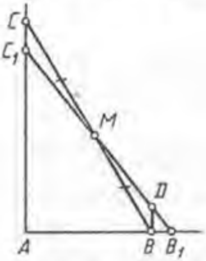


Рис. С.6.9

2. Нехай дотична BC відтинає трикутник найменшої площі, M – точка дотику. Тоді $BM = MC$. Справді, якщо це не так, то проведемо через M пряму B_1C_1 так, щоб $B_1M = MC_1$ (це завжди можна зробити), тоді згідно з п. 1 $S_{AB_1C_1} < S_{ABC}$. Але пряма B_1C_1 є січною по

відношенню до кола, отже, паралельна їй дотична відтинає ще менший трикутник AB_2C_2 і BC не відтинає трикутник найменшої площі.

3. Якщо $a < \sqrt{2}r$, то існують три дотичні, які діляться точкою дотику навпіл і відтятий трикутник лежить зовні кола. Справді, нехай O – центр кола, $AO = \sqrt{2}a$, тому $r < AO < 2r$, і, якщо описати з A як із центра коло радіусом r, то обидва кола перетнуться в двох симетричних відносно AO точках M та M'. Розглянемо точку M (рис. С.6.10), $\angle MAO = \angle MOA$, оскільки $MA = MO$. Звідси $\angle MAN = \angle MON$. Але $\angle MON = \angle MCN$ як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Отже, $\angle MAN = \angle MCN$, звідки $AM = MC$. Аналогічно доводиться, що $AM = MB$. Тому $BM = MC$ (так само і для точки M'). Очевидно, що дотична, яка проходить через точку K перетину кола з бісектрисою, теж ділиться нею навпіл (рис. С.6.11). Отже, три дотичні нарахували. Обертаючи вищенаведене міркування, легко показати, що інших таких дотичних немає.

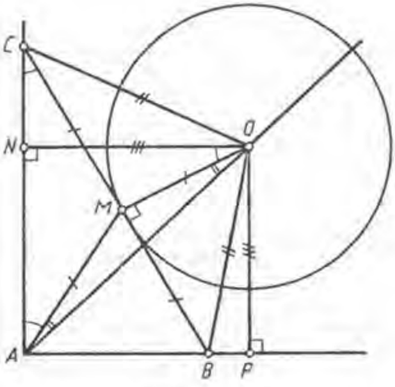


Рис. С.6.10

4. Якщо $a \geq \sqrt{2}r$, то така дотична лише одна, та, що проходить через точку K. Дійсно, ця дотична задовольняє умову, а обернення доведення з п. 3 показує, якщо $M \neq K$ і $BM = MC$, то $AM = MO$, що за умови $a \geq \sqrt{2}r$ неможливо.

5. Шуканий мінімум існує, бо площа відтятого трикутника змінюється неперервно, коли точка дотику M рухається від точки, яка лежить найближче до однієї сторони кута до точки найближчої до іншої сторони кута, а біля цих граничних положень прямує до нескінченності.

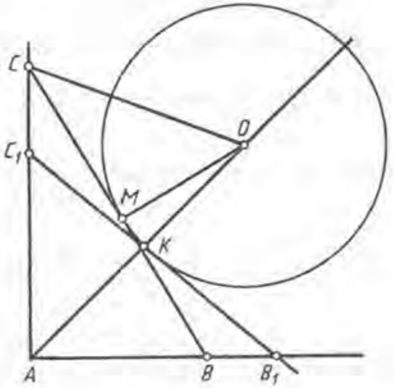


Рис. С.6.11

6. Отже, шуканий мінімум – це площа найменшого з трьох відтятих

трикутників з п. 3 і єдиного з п. 4. У п. 3 $\Delta CNO = \Delta BPO$, а $S_{COB} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2r = r^2$.

Звідси $S_{ABC} = S_{ACOB} - r^2 = S_{ANOP} - r^2 = a^2 - r^2$. Для точки K (рис. С.6.11) у п. 3 і п. 4 $S_{AB_1C_1} = AK^2 = (AO - r)^2 = \left(\sqrt{2}a - r\right)^2$. У п. 3 маємо $\left(\sqrt{2}a - r\right)^2 - \left(a^2 - r^2\right) = \left(a - \sqrt{2}r\right)^2 > 0$, звідки $S_{ABC} < S_{AB_1C_1}$.

С.6.20. Перетворення показує, що $\frac{1}{x(1-y)} =$
$= \frac{1}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}\left(\frac{z}{1-y} + \frac{1-z}{x} - 1\right)$ і аналогічні рівності для $\frac{1}{y(1-z)}$ та $\frac{1}{z(1-x)}$. Звідси ліва частина нерівності, що треба довести, дорівнює $\frac{1}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}\left(\frac{z}{1-y} + \frac{1-z}{x} + \frac{y}{1-x} + \frac{1-y}{z} + \frac{x}{1-z} + \right.$
$\left. + \frac{1-x}{y} - 3\right) \geq \frac{3}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$, оскільки $\frac{z}{1-y} + \frac{1-z}{x} + \frac{y}{1-x} +$
$+ \frac{1-y}{z} + \frac{x}{1-z} + \frac{1-x}{y} \geq 6$ за нерівністю Коші для шести додатних чисел.

С.6.21. Дана нерівність перетворюється до вигляду $(x-1)\times$
$\times(2-y) + (2-x)(y-1) \geq 0$, яка є очевидною для $x, y \in [1;2]$.

С.6.22. *Відповідь.* $x = 2\sqrt{2}$. Змінимо дане рівняння еквівалентними перетвореннями $\frac{\pi}{2} + \frac{1-\cos\left(2\sqrt{x}\right)}{1+\cos\left(2\sqrt{x}\right)} + \arcsin\left(x^3 - 8x - 1\right) = \mathrm{tg}^2\left(\sqrt{x}\right) -$
$-\sqrt{x^4 + x^3 - 5x^2 - 8x - 24}$, $\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(x^3 - 8x - 1\right) + \sqrt{x^4 + x^3 - 5x^2 - 8x - 24} = 0$.

(Тут ми врахували, що $\frac{1-\cos\left(2\sqrt{x}\right)}{1+\cos\left(2\sqrt{x}\right)} = \mathrm{tg}^2\left(\sqrt{x}\right)$.) Тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \arcsin\left(x^3 - 8x - 1\right) = 0, \\ x^4 + x^3 - 5x^2 - 8x - 24 = 0. \end{cases}$$

З першої рівності одержуємо $x^3 - 8x - 1 = -1$, $x = 0$ або $x = \pm 2\sqrt{2}$. Другу рівність задовольняє лише $x = 2\sqrt{2}$.

С.6.23. *Відповідь.* Усі пари (p, p), де p – просте число, $p = 2$, $q = 3$, та всі пари $(q^2 + q - 1,\ q)$, де $q^2 + q - 1$ і q – прості числа. Значення $p = q$ очевидно задовольняють умову. Нехай $p \neq q$. Позначимо $A = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q+1}{p+1}$, нехай це значення ціле. Тоді цілим буде $(p+1)A = \dfrac{p(p+1)}{q} + q + 1$, тому $p(p+1)$ ділиться на q. Оскільки p просте, $p \neq q$, $p+1$ має ділитися на q, $p = kq - 1$, $k \in N$. Тоді $A = k + \dfrac{-k+q+1}{kq}$, $-k + q + 1 = 0$, або $-k + q + 1 \geq kq$, або $-k + q + 1 \leq -kq$.

У першому випадку маємо $p = q^2 + q - 1$. У другому – $k \leq 1$. Звідси $k = 1$, $q = 3$, $p = 2$. Останній випадок є неможливим для $q > 1$.

С.6.24. Нехай ABC – даний трикутник, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, O_a – центр зовнівписаного кола, що дотикається до сторони BC і має радіус r_a, O – центр вписаного кола (рис. С.6.12). Тоді площа дорівнює

$$S = S_{AO_aB} + S_{AO_aC} - S_{BO_aC} = \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = (p-a)r_a.$$

Звідси $r_a = \dfrac{S}{p-a}$. Аналогічно для інших радіусів $r_b = \dfrac{S}{p-b}$, $r_c = \dfrac{S}{p-c}$. З нерівності Коші для чотирьох доданків отримуємо

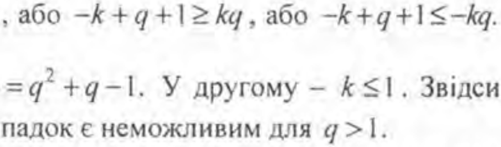


Рис. С.6.12

$$r^2 + r_a{}^2 + r_b{}^2 + r_c{}^2 \geq 4\sqrt{rr_ar_br_c} = 4\frac{S^2}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = 4S,$$

що є навіть сильнішою нерівністю, ніж твердження задачі.

С.6.25. Для додатних a, b невід'ємне x не може бути коренем. Значення $x \leq -1$ не може бути коренем, оскільки для нього $x^{1999} + x^{1998} \leq 0$, ..., $x^3 + x^2 \leq 0$, $ax + b < 0$ (в останній нерівності використано умову $a > b > 0$).

С.6.26. Нехай точки C, D, E послідовно лежать на колі від B до A (тобто маємо п'ятикутник $ABCDE$), точка O – центр даного кола, r – його радіус, $\alpha_1 = \angle AOB$, $\alpha_2 = \angle BOC, ..., \alpha_5 = \angle EOA$. Легко помітити, що у випадку, коли площа п'ятикутника є найбільшою, точка O лежить всередині $ABCDE$. Тоді площа $ABCDE$ дорівнює $\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + ... + \sin\alpha_5)$, де α_1 нам відоме і $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 2\pi - \alpha_1$. За нерівністю Єнсена $\sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4 + \sin\alpha_5 \leq 4\sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5}{4}$, причому рівність досягається лише при $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$ (ці твердження можна обґрунтувати, використовуючи нерівність $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \leq 2\sin\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, і беручи доданки парами). Тому площа буде найбільшою, якщо $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \frac{2\pi - \alpha_1}{4}$. Побудова таких кутів з вершиною O для даного α_1 є очевидною.

С.6.27. Цю таблицю можна розбити на 16 прямокутників розмірами 2×3 і один прямокутник розміром 1×4. Для цього, наприклад, спочатку ділимо частину таблиці 10×6 на прямокутники 2×3, а із залишених клітинок 9×4 виділяємо такі самі прямокутники. Кожний прямокутник 2×3 можна розбити на два триклітинкових прямокутних трикутники, вказаного в умові вигляду. Так отримаємо 32 трикутники, сума чисел в яких не перевищує $5 + 6 + ... + 99 + 100$. Зробивши нескладні підрахунки, бачимо, що знайдеться трикутник із сумою чисел, не більшою за 157, що є навіть кращою оцінкою, ніж вимагається в умові.

С.6.28. *Відповідь.* $T = \pi$. Якщо T є періодом f, то T буде і періодом її похідних f', f''. Позначимо $p = 1\ 998$, $q = 2\ 000$, тоді

$$f(x)=\sin px+\sin qx, \quad f''(x)=-p^2\sin px-q^2\sin qx,$$
$$p^2 f(x)+f''(x)=\left(p^2-q^2\right)\sin qx,$$
$$q^2 f(x)+f''(x)=\left(q^2-p^2\right)\sin px.$$

Отже, T є періодом функцій $\sin px$ і $\sin qx$. Тому $T=\frac{2\pi}{p}\cdot p_1=\frac{2\pi}{q}\cdot q_1$ для деяких натуральних p_1, q_1. Тоді $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p}{q}=\frac{999}{1\,000}$, і найменші можливі значення для них $p_1=999$, $q_1=1\,000$, $T=\pi$. (Легко помітити, що π справді є періодом f.)

С.6.29. Доведемо, що $\angle BAH=\angle BCH$ (рис. С.6.13). Нехай F – середина AH, L – середина HC. Оскільки медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині, то $KF=AF=FH$, $SL=HL=LC$. NL і NF – середні лінії ΔAHC, тому $NL=KF$, $NF=SL$. За умовою $KN=SN$, тому $\Delta KFN=\Delta SLN$ за трьома сторонами і як наслідок $\angle KFN=\angle SLN$. З того, що кути HFN і HLN рівні як протилежні кути паралелограма, випливає рівність кутів KFH і SLH. Оскільки це кути при центрах описаних кіл навколо трикутників KAH і SCH, то $\angle BAH=\angle BCH$ як половини вищевказаних кутів.

Аналогічно $\angle CAH=\angle CBH$, $\angle ABH=\angle ACH$. Позначимо $x=\angle CAH$, $y=\angle BAH$, $z=\angle ABH$ (рис. С.6.14). Тоді $2x+2y+2z=180°$, $x+y+z=90°$. Кути між прямими AH, BH, CH та відповідними протилежними сторонами ΔABC дорівнюють $180°-x-y-z=90°$. Тому H – точка перетину висот.

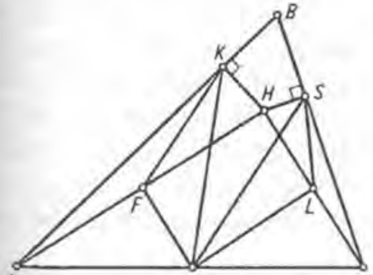


Рис. С.6.13

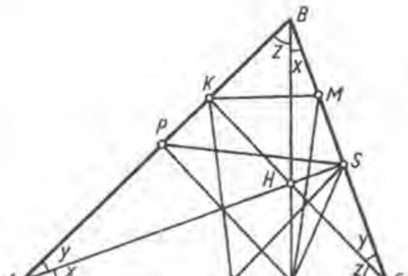


Рис. С.6.14

С.6.30. Очевидно, що достатньо розглянути випадок, коли $n \geq 2$. Доведемо, що $\alpha = n + \sqrt{n^2 - n}$ задовольняє умову задачі. Розглянемо також $\beta = n - \sqrt{n^2 - n}$, тоді $\alpha + \beta = 2n$, $\alpha\beta = n$.

Доведемо, що для будь-якого цілого $m \geq 1$ число $\alpha^m + \beta^m$ ціле і ділиться на n. Застосуємо індукцію по m. Легко перевірити, що для $m = 1$ і $m = 2$ дане твердження правильне. Також виконуються рівності

$$\alpha^m + \beta^m = (\alpha+\beta)\left(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}\right) - \alpha\beta\left(\alpha^{m-2} + \beta^{m-2}\right) =$$
$$= n\left(2\left(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}\right) - \left(\alpha^{m-2} + \beta^{m-2}\right)\right), \quad m \geq 3.$$

З цього й випливає потрібний результат.

Маємо $\alpha > n$, $\beta = \dfrac{n}{\alpha}$, тому $0 < \beta < 1$. Отже, для всіх $m \geq 1$ $0 < \beta^m < 1$, $\left[\alpha^m\right] + 1 = \alpha^m + \beta^m$ і дане α задовольняє умову задачі.

Другий етап

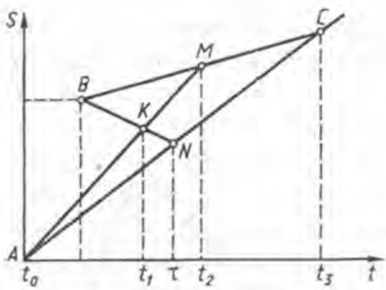


Рис. С.6.15

С.6.31. *Відповідь.* $\dfrac{5}{4}$ год. Розглянемо прямокутну координатну систему, де по осі абсцис будемо відкладати час у годинах, а по осі ординат – шлях (рис. С.6.15). Побудуємо графіки руху: AM – графік руху автомобіля, AC – мотоцикліста, BC – пішохода і BN – велосипедиста. Покладемо $t_0 = 10$, $t_1 = 11$, $t_2 = 11{,}5$, $t_3 = 12{,}5$ год. Нехай τ – час зустрічі мотоцикліста і велосипедиста. З умови випливає, що в трикутнику ABC точка M – середина BC і $\dfrac{AK}{KM} = \dfrac{2}{1}$. Тому точка K є точкою перетину медіан, а отже, $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{1}$. Це означає, що $\tau-t_0=t_3-\tau$. Звідси $\tau=\frac{t_0+t_3}{2}=11\frac{1}{4}$ год. Отже, зустріч відбулася об 11 год 15 хв.

Задачу можна розв'язати і алгебрично, а саме: позначимо швидкості автомобіля, мотоцикліста, велосипедиста і пішохода відповідно через v_1, v_2, v_3, v_4, відстань між A і B – через S. Складаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_1+\frac{1}{2}v_3=S, \\ \frac{3}{2}v_1=S+v_4, \\ \frac{5}{2}v_2=S+2v_4. \end{cases}$$

Звідси

$$v_3=\frac{2}{3}(S-2v_4), \qquad (1)$$

$$v_2=\frac{2}{5}(S+2v_4). \qquad (2)$$

Нехай t – час зустрічі мотоцикліста і велосипедиста. Тоді

$$tv_2+\left(t-\frac{1}{2}\right)v_3=S. \qquad (3)$$

Підставляючи (1) і (2) в (3), дістанемо $t=\frac{5}{4}$ год.

С.6.32. Підставимо $a=-2b-4c-\frac{1}{2}$ у рівняння

$$x^3+\left(-2b-4c-\frac{1}{2}\right)x^2+bx+c=x^3-\frac{1}{2}x^2+b\left(x-2x^2\right)+\left(1-4x^2\right)c=0.$$

Звідси легко помітити, що $x=\frac{1}{2}$ є додатним коренем рівняння.

С.6.33. Позначимо $\angle BAC=\alpha$, $\angle PCA=\beta$ (рис. С.6.16). Тоді $\angle CPB=$ $=\alpha+\beta$. Оскільки $DE\parallel AB$, то $DE=EC$, тому $\frac{PB}{EC}=\frac{PB}{ED}=\frac{KB}{KE}=$

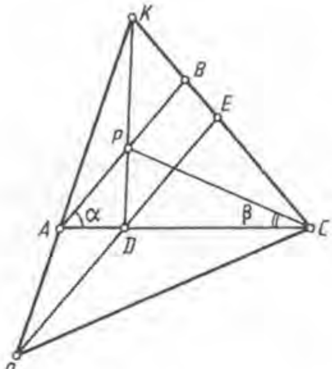


Рис. С.6.16

$= \dfrac{AB}{QE} = \dfrac{BC}{QE}$. Отже, трикутники PBC і CEQ є подібними, оскільки $\dfrac{PB}{BC} = \dfrac{QE}{EC}$ і $\angle PBC = \angle QEC$. Але тоді $\angle ECQ = \angle CPB = \alpha + \beta$, звідки випливає, що $\angle DCQ = \beta = \angle PCD$. Отже, CA є бісектрисою кута PCQ.

С.6.34. Нехай такі k і l існують. Оскільки добуток трьох послідовних чисел завжди ділиться на три і $l(l+1) + l(l+2) + (l+1)(l+2) = 3(l+1)^2 - 1$, то рівняння можна подати у вигляді $(3K+1) = (3M+1)(3N+2)$, де K, M, N – цілі числа, що неможливо. Суперечність. Отже, таких цілих k і l не існує.

С.6.35. Нехай $\beta = k + \varepsilon$, де $k \in Z$, $0 \le \varepsilon \le 1$. Тоді $a_1 = (\beta] = k + 1$. Якщо $m \in Z$, то $(\beta + m] = (k + m + \varepsilon] = k + 1 + m = (\beta] + m$. Оскільки a_n є цілим числом, то $a_{n+1} = (a_n + \beta] = a_n + (\beta] = a_n + a_1$. За принципом математичної індукції маємо $a_n = na_1$.

Отже, $a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \ \ldots \ + \dfrac{a_n}{n} = \underbrace{a_1 + a_1 + \ \ldots \ + a_1}_{n} = na_1 = a_n \in Z$, що й треба було довести.

С.6.36. За нерівністю Коші $|\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x| \ge 2\sqrt{|\operatorname{tg} x| \cdot |\operatorname{ctg} x|} = 2$. З іншого боку, $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$, звідки $(\sin x]^2 + (\cos x]^2 \le 2$. Отже, задана в умові рівність виконується тоді і лише тоді, коли $|(\sin x]| = |(\cos x]| = |\operatorname{tg} x| = |\operatorname{ctg} x| = 1$. Перевіривши всі випадки, одержимо відповідь: $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

С.6.37. У довільно взятій прямокутній декартовій системі координат на площині через позначену точку з найменшою ординатою проведемо пряму, паралельну осі абсцис, та пряму, паралельну осі ординат, через відмічену точку з найменшою абсцисою. Тепер проведемо пряму, паралельну першій, на відстані 6 вище за неї, і пряму, паралельну другій, на відстані 6 правіше за неї. Чотири проведені прямі є сторонами квадрата 6×6. Якщо він (разом з межею) не містить усіх відмічених точок, то за побудовою знайдуться дві з них на відстані більшій, ніж 6. Якщо ж усі 37 відмічених точок містяться в одержаному квадраті, то, розбивши його на 36 квадратиків 1×1, за принципом Діріхле дістанемо, що якісь дві точки знаходяться всередині одного квадратика, тому відстань між ними не перевищує його діагоналі $\sqrt{2}$. Оскільки $\sqrt{2} < 1{,}5$, твердження задачі доведено.

С.6.38. *Відповідь.* Функція $f(x) = 1$ для всіх $x \in R$ та функція $f(x) = -1$ для всіх $x \in R$. Оскільки умова 2) виконується для всіх x, y, то значення виразу $1 + f(x)f(y)$ завжди є відмінним від нуля. Помноживши на цей вираз умову 2), після перетворень одержаного рівняння при $y = 0$ дістанемо формулу $\left(f^2(x) - 1\right)f(0) = 0$, яка має бути правильною для всіх x. Внаслідок умови 1) маємо $f(0) \neq 0$, отже, $f^2(x) - 1 = 0$, тобто $f(x) = \pm 1$ для кожного дійсного x. Перевірка показує, що функції-константи $f(x) \equiv 1$ та $f(x) \equiv -1$ задовольняють обидві умови. А чи може бути так, що $f(x_1) = 1$, а $f(x_2) = -1$ в якихось точках x_1, x_2 ? Ні, бо тоді при $x = x_1$, $y = -x_2$ умова 2) не має сенсу.

С.6.39. *Відповідь.* Так. Нехай a, b, c – сторони одного трикутника, а a_1, b_1, c_1 – сторони другого трикутника. З відомих формул $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, $R = \dfrac{abc}{4S}$ та $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де r і R – радіуси відповідно вписаного і описаного кіл, S – площа трикутника, а $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, і таких самих формул для a_1, b_1, c_1, з урахуванням умови задачі, перетвореннями легко вивести, що

$$\begin{cases} a+b+c = a_1 + b_1 + c_1, \\ ab + bc + ca = a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1, \\ abc = a_1b_1c_1. \end{cases}$$

Розкривши дужки, можна переконатись, що для всіх $x \in R$ виконується рівність

$$(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a_1)(x-b_1)(x-c_1). \quad (1)$$

Зокрема, $(a_1-a)(a_1-b)(a_1-c)=0$, звідки $a_1=a$, або $a_1=b$, або $a_1=c$. Нехай буде $a_1=a$ (в іншому випадку позначимо сторони a, b, c так, щоб назву a дістала та, що дорівнює a_1). Скоротивши рівність многочленів (1) на $x-a_1$, дістанемо

$$(x-b)(x-c)=(x-b_1)(x-c_1) \quad (2)$$

для всіх дійсних x. Зокрема, $(b_1-b)(b_1-c)=0$, тому $b_1=b$ або $b_1=c$. Нехай $b_1=b$ (інакше поміняємо назви сторін b і c). Скоротивши (2) на $x-b_1$, одержимо $(x-c)=(x-c_1)$ для всіх дійсних x, звідки $c_1=c$. Таким чином, трикутники є рівними за третьою ознакою.

С.6.40. Позначимо літерою M точку перетину прямої YZ з колом ω_1, яке побудуємо на AB як на діаметрі (M беремо відмінну від Z).

Для того розташування точок, яке показане на рис. С.6.17, $\angle AZM=\angle AZY=\angle ZAY=90^\circ-\angle BXA$, бо ZY – це медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника AZX. Оскільки кут BXA сталий (він спирається на сталу дугу AB кола ω), то виходить, що кут AZM теж сталий. Отже, сталою є дуга AM кола ω_1, тому положення точки M не залежить від вибору точки X. Розгляд інших варіантів взаємного розташування точок показує, що всі прямі YZ проходять через ту саму точку M, що й треба було довести.

С.6.41. *Відповідь.* $x=y=-\frac{1}{5}$. Перше рівняння системи еквівалентне рівності $x^2-\arcsin x=y^2-\arcsin y$. Функція $f(x)=x^2-\arcsin x$ монотонно спадає на [–1; 1], це легко перевірити за допомогою похідної. Тому з записаної рівності маємо $y=x$. Зробивши таку підстановку до другого рівняння системи, дістанемо $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$, $(x-\sqrt{x^2-3x})^2=1$. Також враховуємо, що $x\in[-1;1]$.

С.6.42. *Відповідь.* 10 год 50 хв. Побудуємо графіки руху. Суцільними лініями на рис. С.6.18 зображені графіки пересування: AF – автобуса, AD – велосипедиста, CE – мотоцикліста, LN – пішохода. З

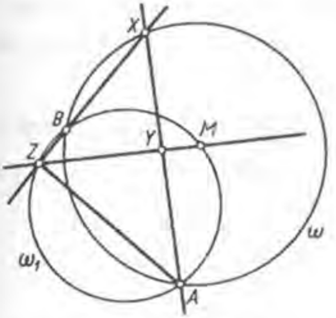


Рис. С.6.17

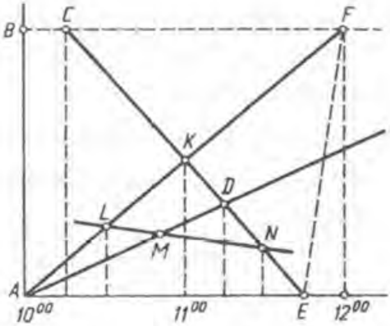


Рис. С.6.18

умови випливає, що у трикутнику AFE точка K – середина сторони AF, тому $CK = KE$ і $\frac{KD}{DE} = \frac{1}{2}$. Отже, D – точка перетину медіан трикутника AFE.

Тепер розглянемо трикутник AKN. З умови випливає, що $AL = LK$, $KD = DN$. Тому потрібна нам точка $M = LN \cap AD$ – точка перетину медіан трикутника AKN, $AM = \frac{2}{3}AD$. Велосипедист зустрів пішохода через $\frac{2}{3} \cdot 75 = 50$ хв після початку свого руху.

С.6.43. Навколо чотирикутника $OMBN$ можна описати коло з діаметром OB, тому $MN \le OB$ (рис. С.6.19). Аналогічно $NP \le OC,\ PK \le OD,\ KM \le OA$. Звідси $MN \cdot PK + KM \cdot NP \le OB \cdot OD + OA \cdot OC$.

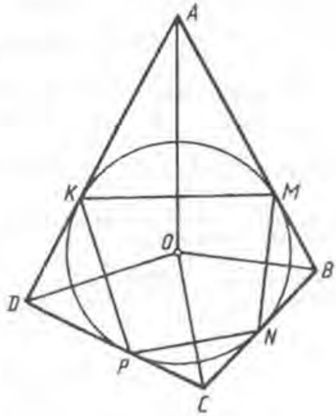


Рис. С.6.19

Оскільки чотирикутник $MNPK$ вписаний в коло, до нього можна застосувати теорему Птолемея. Враховуючи те, що площа чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними, маємо $S \le \frac{1}{2} KN \cdot NP = \frac{1}{2}(MN \times$ $\times PK + KM \cdot NP) \le \frac{1}{2}(OB \cdot OD + OA \cdot OC)$.

Тому $2S \le OA \cdot OC + OB \cdot OD$.

С.6.44. З розгляду остач квадратів цілих чисел при діленні на 3 випливає, що p або q ділиться на 3. Оскільки це прості числа, одне з них дорівнює 3, нехай $p=3$.

Припустимо, що q непарне. Тоді $p^{2k}+q^{2n}=r^2$ буде давати остачу 2 при діленні на 4, що неможливо для квадратів. Тому q парне, $q=2$. Маємо

$$3^{2k}+2^{2n}=r^2,\ 9^k=\left(r-2^n\right)\left(r+2^n\right).$$

Якщо обидва вирази в дужках діляться на 3, то і їх різниця 2^{n+1} має ділитися на 3, що неправильно. Отже, $r-2^n=1$. Приходимо до рівностей $3^{2k}+2^{2n}=2^n+1$, $9^k-1=2^{n+1}$.

Якщо $k=2i$, то число $9^k-1=\left(9^i-1\right)\left(9^i+1\right)$ містить простий непарний дільник. Отже, k має бути непарним, $k=2i-1$. Тоді приходимо до рівності $9\left(81^{i-1}-1\right)=8\left(2^{n-2}-1\right)$.

Ліва частина для всіх натуральних i ділиться на 16, права – тільки при $n=2$. Тоді $i=k=1$, $r=5$. Знайдені значення задовольняють умову. Єдине можливе значення $r=5$ є простим числом.

С.6.45. Нехай $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Прирівнюючи коефіцієнти при старших степенях x в рівності умови, дістанемо $2\cdot 2^n a_0=2^{1\,999}a_0$. Звідси $n=1\,998$.

Підстановкою переконуємося, що $x=-\frac{1}{2}$ є коренем P. Наступна підстановка $x=-\frac{1}{2^2}$ показує, що це значення є коренем P і т. д. Маємо, що всі $x=-\frac{1}{2^k}$, $1\le k\le 1\,998$, є коренями нашого многочлена. Оскільки його степінь дорівнює 1 998, многочлен має вигляд

$$P(x)=a_0\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2^2}\right)...\left(x+\frac{1}{2^{1998}}\right),$$

де a_0 – довільне дійсне число. Перевірка показує, що всі такі многочлени задовольняють умову задачі.

С.6.46. Доведемо, що при всіх натуральних n виконується нерівність

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}. \qquad (1)$$

Дійсно,

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}},$$

а $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$ для всіх натуральних n.

Поклавши в (1) значення $n=1998$, 2 000 і 2 002, дістанемо $\sqrt{1\,999}+$ $+\sqrt{1\,997}<2\sqrt{1\,998}$, $\sqrt{2\,001}+\sqrt{1\,999}<2\sqrt{2\,000}$, $\sqrt{2\,003}+\sqrt{2\,001}<2\sqrt{2\,002}$.

Додавши почленно ці нерівності, одержимо, що перше число менше від другого.

С.6.47. Нехай I – центр вписаного кола. Оскільки $IB_1 \perp AC$ і $C_1A_2 \perp AC$, то $IB_1 \parallel C_1A_2$. Аналогічно доводимо, що $IC_1 \parallel B_1A_2$. Отже, $A_2B_1IC_1$ – ромб. Аналогічно доводимо, що $C_1IA_1B_2$ і $A_1IB_1C_2$ також ромби, причому їх сторони дорівнюють r – радіусу вписаного кола. Оскільки $C_1A_2 \parallel A_1C_2$ і $C_1A_2=A_1C_2=r$, то $A_2C_2A_1C_1$ – паралелограм. Тому його діагоналі A_1A_2 і C_1C_2 перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Аналогічно доводимо, що відрізок B_1B_2 ділить відрізок A_1A_2 також навпіл, тобто A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 перетинаються в одній точці, що й треба було довести.

С.6.48. *Лема.* Якщо $P\left(p,p^2\right)$ і $Q\left(q,q^2\right)$ є точками координатної площини $\left(p^2 \neq q^2, p \neq 0, q \neq 0\right)$ і $R(r,0)$ є точкою перетину прямої PQ і осі абсцис, то $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

Справді, з умови колінеарності точок P, Q і R випливає, що $1 \neq \frac{p^2}{q^2}=\frac{p-r}{q-r}$, $(p-q)(pq-r(p+q))=0$, $r=\frac{pq}{p+q}$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Тоді

за лемою маємо $\dfrac{1}{x_{2k-1}}=\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_{2k+1}}$, $\dfrac{1}{x_{2k}}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_{2k+2}}$, $k\ge 1$, оскільки за побудовою послідовності $x_{2k+1}^2\ne x_2^2$ і $x_{2k+2}^2\ne x_1^2$. Тому $\dfrac{1}{x_{2k+1}}+$
$+\dfrac{1}{x_{2k+2}}=\left(\dfrac{1}{x_{2k-1}}+\dfrac{1}{x_{2k}}\right)-\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=\ldots=(1-k)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)$, $\dfrac{1}{x_{1999}}+\dfrac{1}{x_{2000}}=$
$=-998\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=-998\left(-\dfrac{1}{998}+\dfrac{1}{1999}\right)=\dfrac{1001}{1999}$.

С.6.49. Якщо $x=0$ або $y=0$, то нерівність є очевидною. Нехай $x>0$, $y>0$, тоді $x^4+1\ge 2x^2$ і $y^3+y\ge 2y^2$. Додавши ці нерівності, дістанемо $x^4+y^3+y+1\ge 2x^2+2y^2$. Тому $x^4+y^3+x^2+y+1\ge 3x^2+2y^2\ge$ $\ge 2\sqrt{6}xy$. Враховуючи, що $2\sqrt{6}>\dfrac{9}{2}$, одержуємо потрібну нерівність.

С.6.50. У чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли він опуклий і суми довжин його протилежних сторін однакові. Тому задача зводиться до побудови точки D, яка лежатиме на дузі AC, що не містить точку B, так, що $AB+CD=BC+AD$.

Припустимо, що побудова точки D здійснена. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $AB>BC$ (у випадку $AB=BC$ задача тривіальна). Тому $AB-BC=AD-CD>0$, тобто $AD>CD$. На відрізку AD відмітимо таку точку D_1, що $DD_1=CD$. Тоді $AD_1=AD-DD_1=$ $=AD-CD=AB-BC$ і $\angle AD_1C=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle ABC$, тобто точку D_1 можна одержати, побудувавши трикутник ACD_1 (за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них – це відома задача). Якщо є точка D_1, легко побудувати точку D. Доведення правильності такої побудови і дослідження зробіть самостійно.

С.6.51. Поставимо у відповідність кожному числу a_n число r_n таке, що $a_n\equiv r_n \pmod 4$, $r_n\in\{0, 1, 2, 3\}$. Тоді маємо нову послідовність цілих невід'ємних чисел $r_1, r_2, r_3, \ldots$, яка відповідає заданій.

Якщо існує таке натуральне число m, що $a_m=2\,000$, то $r_m=0$. Але $r_1=1$, $r_2=2$ і для кожного $n\ge 1$

$$r_{n+2}=\begin{cases} r_{n+1}+r_n, \text{ якщо } r_{n+1}\in\{0,\ 2\} \text{ або } r_n\in\{0,\ 2\},\\ r_{n+1}-r_n, \text{ якщо } r_{n+1}\in\{1,\ 3\} \text{ та } r_n\in\{1,\ 3\}.\end{cases}$$

Тому $r_3=3,\ r_4=1,\ r_5=2,\ r_6=3,\ \dots,$ тобто послідовність чисел $\{r_n,\ n\ge 1\}$ періодична і не містить числа 0. Отже, не існує такого натурального числа m, що $a_m=2\,000$.

С.6.52. *Відповідь.* $f(x)=x+1$. Підставимо $x=y=z=1$. Позначивши $a=f(1)$, дістанемо $a^3-a=6$, $(a-2)(a^2+2a+3)=0$, $a=2$ (оскільки тричлен a^2+2a+3 не має коренів). Тепер підставимо $y=z=1$, для довільного x з огляду на знайдене $f(1)=2$ дістанемо $3f(x)=3x+3$. Звідси $f(x)=x+1$. Перевірка показує, що ця функція дійсно задовольняє рівняння.

С.6.53. Нехай R, P, Q – точки дотику вписаного кола до сторін трикутника відповідно BC, CA, AB. Позначимо довжини: $x=AQ=AP$, $y=BR=BQ$, $z=CP=CR$. За теоремою косинусів для кута BAC та умовою задачі маємо $AB^2+AC^2-BC^2\le\frac{1}{2}\cdot 2AB\cdot AC$. Після перетворень одержуємо нерівність $x(x+y+z)\le 3yz$. Кут BXC є тупим, якщо $XR^2<zy$. Але XR дорівнює половині висоти, опущеної на BC, отже, з урахуванням формули Герона для площі трикутника дістаємо $XR=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}$. Таким чином, щоб довести, що кут BXC є тупим, досить обґрунтувати нерівність $\dfrac{xyz(x+y+z)}{(y+z)^2}<yz$, тобто $x(x+y+z)<y^2+z^2+2yz$. А це правильно, бо вище довели, що $x(x+y+z)\le 3yz$, а $3yz<y^2+z^2+2yz$ внаслідок того, що $(y-z)^2+yz>0$.

С.6.54. Нехай A і B – довільні два міста, які не з'єднані авіалінією. Тоді знайдеться місто C, з'єднане з ними обома. Нехай $A_1,\ \dots, A_n$ – усі відмінні від C міста, з'єднані авіалінією з A, а $B_1, \ldots, B_k$ – усі відмінні від C міста, з'єднані з B. Жодні два з позначених нами міст не збігаються, інакше мали б круговий шлях менш, ніж через п'ять міст. З цієї ж причини шлях із A до B_1 (не більш, ніж з однією пересадкою) має проходити через одне з міст $A_1, \ldots, A_n$, і це правильно для кожного i від 1 до k. При цьому одне місто A_j, $1 \le j \le n$, не може бути з'єднане авіалінією з двома різними B_i, $1 \le i \le k$, бо інакше існує круговий шлях через чотири міста A_j, B_{i_1}, B, B_{i_2}. Зі сказаного випливає, що $n \ge k$. Аналогічні міркування показують, що $k \ge n$, отже, $k = n$. Таким чином, довели, що з двох міст, не з'єднаних між собою авіалінією, виходить однакова кількість авіаліній.

Нехай тепер C і D – довільні два міста, з'єднані авіалінією, а $C_1, \ldots, C_l$ – усі відмінні від D міста, з'єднані з C, а $D_1, \ldots, D_m$ – всі відмінні від C міста, з'єднані з D. Якщо $m = 0$ (другий набір порожній), то всі міста країни будуть з'єднані з C і не з'єднані між собою. Тоді неможливо здійснити жодну кругову подорож, а це суперечить умові. Аналогічно і $l \ne 0$. Але як перелетіти із C_1 в D_1, зробивши не більше однієї пересадки? Має існувати місто E, відмінне від усіх позначених, зв'язане і з C_1, і з D_1, але не зв'язане з C та D. За першим пунктом доведення – з E виходить така сама кількість авіаліній, як із C, і така сама, як із D. Отже, твердження задачі правильне і для міст C і D, тому його доведено повністю.

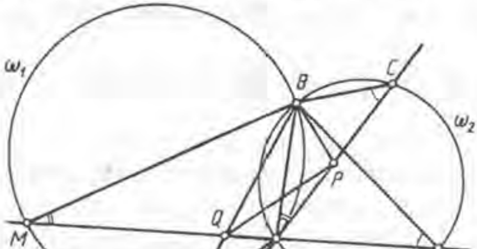


Рис. С.6.20

С.6.55. За властивістю вписаних у коло кутів та кута між хордою і дотичною маємо $\angle BMN = \angle BAC$ і $\angle BNM = \angle BCA$, тобто трикутники MBN і ABC подібні (рис. С.6.20). Оскільки P – середина AC, а Q – середина MN, то за пропорційністю сторін і рівністю кутів трикутники MBQ і ABP також подібні. Звідси $\angle BQM = \angle BPA$ і $\angle BQA = 180° - \angle BPA$. Отже, чотирикутник $QBPA$ – вписаний. Тому $\angle BQP = \angle BAP = \angle BSA$, що й доводить паралельність прямих QP і SA.

С.6.56. Потрібне розфарбування існує для кожного $k \geq 2$. Опишемо його приклад. Поставимо у відповідність кожній парі кольорів число від 1 до $\frac{k(k-1)}{2}$ (різним парам відповідають різні числа). Для кожного числа i розфарбуємо наступним чином у відповідні два кольори арифметичну прогресію з першим членом i та різницею $\frac{k(k-1)}{2}$: перший член фарбуємо в перший колір, два наступних – у другий, три наступних – знову в перший, чотири наступних – знову в другий і так далі. Очевидно, що вся множина натуральних чисел буде розфарбованою і для кожної пари кольорів є відповідна двокольорова прогресія.

Однокольорових прогресій не існує. Дійсно, якщо прогресія $a+nd$, $n \geq 0$, однокольорова, то і прогресія $a+nd\frac{k(k-1)}{2}$, $n \geq 0$, також однокольорова. Але вона повністю міститься в одній із вищезазначених прогресій з різницею $\frac{k(k-1)}{2}$, яка за побудовою містить як завгодно довгі ланцюги чисел, пофарбованих в інший колір. Ця суперечність доводить, що означене нами розфарбування задовольняє умову задачі.

С.6.57. *Відповідь.* $\left(1,\ 1+\frac{1}{n}\right)$. Нехай (B, C) – інтервал, що задовольняє умову. Візьмемо з нього довільні два числа q та r і вважатимемо, що всі коефіцієнти при непарних степенях многочлена дорівнюють q, а при парних (крім старшого) – однакові. Якщо наш многочлен не має коренів, то він набуває лише додатних значень, отже, $P(-1) > 0$, тобто $1 - nq + nr > 0$. Звідси $q - r < \frac{1}{n}$. Тому $c - b < \frac{1}{n}$, оскільки q і r можемо вибрати з інтервалу довільно.

Покажемо, що інтервал $\left(1,\ 1+\frac{1}{n}\right)$ задовольняє умову (тоді з вищедоведеного випливатиме, що він – найдовший). Нехай коефіцієнти P лежать (крім старшого) у цьому інтервалі. Тоді для $x \geq 0$, очевидно, $P(x) > 0$. Нехай $x < 0$, тоді

$$P(x) > t^{2n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)t^{2n-1} + t^{2n-2} - \left(1+\frac{1}{n}\right)t^{2n-3} + \ldots - \left(1+\frac{1}{n}\right)t + 1, \quad (1)$$

де $t = -x > 0$. Залишилося довести нерівність

$$\frac{t^{2n} + t^{2n-2} + \ldots + t^2 + 1}{n+1} \geq \frac{t^{2n-1} + t^{2n-3} + \ldots + t}{n} \quad (2)$$

для всіх $t > 0$, бо з неї випливатиме $P(x) > 0$ внаслідок (1).

Для кожного k від 1 до n нерівності

$$t^{2n} + 1 \geq t^{2n-2k+1} + t^{2k-1};\ n\left(t^{2k} + t^{2k-2}\right) \geq 2nt^{2k-1} \quad (3)$$

є правильними для всіх $t > 0$: перша, оскільки $\left(1 - t^{2k-1}\right)\times$ $\times\left(1 - t^{2n-2k+1}\right) \geq 0$, друга через те, що $t^{2k-2}(t-1)^2 \geq 0$. Підсумувавши всі нерівності (3) за k від 1 до n і розділивши на $2n(n+1)$, одержимо нерівність (2).

С.6.58. *І спосіб.* Припустимо, що твердження задачі є хибним, тобто будь-яка пара чисел має дільник $d \neq 1$. Якщо серед наведених в умові чисел є число вигляду p^n, де p – просте число, n – натуральне число, то всі числа мають ділитися на p і найбільше з них є не меншим за $16p \geq 32$, що суперечить умові. Виключивши з розгляду всі числа такого вигляду, а також одиницю, одержимо, що серед виписаних можуть бути лише такі числа: 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30.

Як бачимо, всього таких чисел менше, ніж 16. Отримали суперечність, яка і доводить твердження задачі.

ІІ спосіб. Розіб'ємо всі натуральні числа від 1 до 30 на пари $(31-j, j)$, де $j = 1, 2, \ldots, 15$. Отже, маємо 15 пар, а на дошці записано 16 різних чисел. Тому щонайменше два з них потраплять до однієї пари $(31-j_0, j_0)$, де j_0 – деяке натуральне число $(1 \leq j_0 \leq 15)$. Але НСД $(31-j_0, j_0)$ = НСД $(31, j_0) = 1$, бо 31 – просте число.

С.6.59. Спочатку вилучимо з розгляду число 1 999, а натуральні числа від 1 до 1 998 розіб'ємо на пари $(j, 1\,999 - j)$, $j = 1, 2, \ldots, 999$. Далі число $1\,999^{999}$ подамо у вигляді добутку

$$1\,999^{999} = (1 + 1\,998)(2 + 1\,997)\cdots(999 + 1\,000). \quad (1)$$

Якщо розкрити дужки цього добутку, то одержимо суму 2^{999} доданків, які є всіма можливими добутками із 999 чисел. Причому кожне з чисел, що входить до добутку, є меншим за 1 999 і сума будь-яких з них не дорівнює 1999.

Тепер будемо розглядати доданки, в кожному з яких множником є число 1 999. Щоб порахувати суму всіх таких добутків, де 1 998 множників є числа менші від 1 999 і один множник дорівнює 1 999, у правій частині (1) кожну дужку послідовно будемо замінювати на 1 999. Діючи в такий спосіб, дістанемо 999 таких числових рівностей:

$$1\,999^{999} = 1\,999(2+1\,997)\cdots(999+1\,000),$$

$$1\,999^{999} = 1\,999(1+1\,998)\cdots(999+1\,000),$$

....

$$1999^{999}=(1+1\,998)(2+1\,997)\cdots 1\,999(998+1\,001).$$

Розкриваючи дужки у правих частинах цих рівностей, дістанемо всі добутки, які задовольняють умову задачі і містять множником число 1 999. Тому шукана сума $S = 1\,999^{999} + 999\cdot 1\,999^{999} = 1\,000\cdot 1\,999^{999}$.

С.6.60. Нехай O_1, O_2, O_3 – центри сфер відповідно $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, AM_1, AM_2, AM_3 – їх діаметри. Оскільки дані сфери перетинаються по колу ω, то точки O_1, O_2, O_3 лежать на одній прямій, яка є перпендикулярною до площини кола ω.

Гомотетія H_A^2 з центром A і коефіцієнтом $k = 2$ відображає точки O_1, O_2, O_3 у точки відповідно M_1, M_2, M_3. Оскільки O_1, O_2, O_3 – колінеарні, то M_1, M_2, M_3 – також колінеарні, тобто лежать на одній прямій, яка є перпендикулярною до площини ω.

Оскільки $\angle AB_1M_1 = \angle AB_2M_2 = \angle AB_3M_3 = 90^\circ$, то прямі B_1M_1, B_2M_2, B_3M_3 лежать у паралельних площинах, кожна з яких перпендикулярна до променя AB. Точка B_2 – середина відрізка B_1B_3, тому за теоремою Фалеса (у просторі) M_2 – середина відрізка M_1M_3.

Далі, оскільки $\angle AC_1M_1 = \angle AC_2M_2 = \angle AC_3M_3 = 90^\circ$, то прямі C_1M_1, C_2M_2, C_3M_3 лежать у площинах, паралельних між собою і перпендикулярних до променя AC.

Через те, що M_2 – середина відрізка M_1M_3, то за теоремою Фалеса C_2 – середина C_1C_3, що і треба було довести.

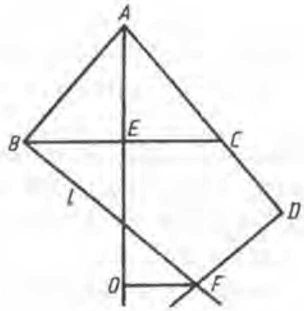


Рис. С.6.21

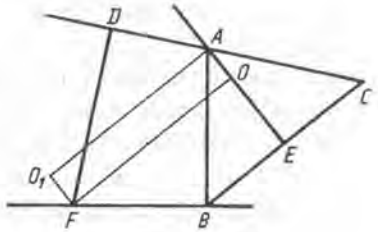


Рис. С.6.22

С.6.61. Проведемо AE – бісектрису кута BAC і опустимо з точки F перпендикуляр FO на пряму AE, де O – основа перпендикуляра.

Трикутники AFB, AFD, AFO – прямокутні, тому точки A, B, F, D і O лежать на колі, яке описане навколо трикутника ABD, AF – його діаметр. Можливими є два випадки: 1) точки C і D лежать на прямій AC по один бік від точки A (рис. С.6.21); 2) точки C і D лежать на прямій AC по різні боки від точки A (рис. С.6.22).

У першому випадку $\angle BAC = \angle BAD$ і AO – бісектриса кута BAD, тому O є серединою дуги BOD, звідки $OB = OD$.

Доведемо, що і в другому випадку $OB = OD$. Для цього проведемо бісектрису кута BAD і позначимо точку її перетину з колом, описаним навколо трикутника ABD, через O_1. Тоді $O_1B = O_1D$. Кути BAC і BAD суміжні, а тому $AO_1 \perp AO$. Це означає, що OO_1 є діаметром кола, описаного навколо трикутника ABD, і $OB = OD$.

Оскільки $OB = OC$, бо $AB = AC$, а AE – бісектриса, то $OB = OD = OC$. Таким чином, точка O лежить на колі, описаному навколо трикутника ABD, і є центром кола, описаного навколо трикутника BCD.

Зауваження. Якщо точку F не брати до уваги, то твердження задачі також правильне.

С.6.62. *І спосіб.* Оцінимо кожний доданок лівої частини даної нерівності, беручи до уваги умову $x_i \le \sqrt{2}$ та застосовуючи нерівність Коші до чисел $a = \dfrac{\sqrt{x_i^2 - 1}}{x_i}$ і $b = \dfrac{1}{x_{i+1}}$ для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$ (при $i = n$ покладемо $x_{n+1} = x_1$). Будемо мати

$$\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{x_2}=x_1\cdot\left(\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x_1^2-1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right),$$

$$\frac{\sqrt{x_2^2-1}}{x_3}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\right),\ \dots,\ \frac{\sqrt{x_{n-1}^2-1}}{x_n}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{x_n^2}\right),$$

$$\frac{\sqrt{x_n^2-1}}{x_1}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{x_n^2}+\frac{1}{x_1^2}\right).$$

Додаючи почленно всі такі нерівності, дістанемо твердження задачі.

II спосіб. Покладемо $x_i^2=a_i\in[1;\ 2]$ і застосуємо нерівність Коші–Буняковського для двох наборів із n дійсних чисел $\left\{\sqrt{a_i-1},\ \ 1\le i\le n\right\}$ та $\left\{\frac{1}{\sqrt{a_{i+1}}},\ \ 1\le i\le n\right\}$, $\ a_{n+1}=a_1$.

Одержимо

$$\sqrt{a_1-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\sqrt{a_2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_3}}+\ldots+\sqrt{a_n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}}\le$$

$$\le\sqrt{(a_1-1+a_2-1+\ldots+a_n-1)}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i-n\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i-n\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{2}{a_i}\right)}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^n a_i-n+\sum_{i=1}^n\frac{2}{a_i}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i+\frac{2}{a_i}\right)-n\right)\le\frac{1}{2\sqrt{2}}(3n-n)=\frac{\sqrt{2}}{2}n,$$

оскільки $a_i+\frac{2}{a_i}\le 3\Leftrightarrow(a_i-1)(a_i-2)\le 0$ для $1\le a_i\le 2,\quad i=1,2,\dots,n.$

С.6.63. Розглянемо число z вигляду

$$z=\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt{3},\tag{1}$$

де $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – раціональні числа.

Зауважимо, що подання числа z у вигляді (1) є єдиним. Справді, нехай $z=\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}+\gamma_1\sqrt{3}$, де $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ – також раціональні числа. Тоді

$$\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}+\gamma_2\sqrt{3}=0, \tag{2}$$

де $\alpha_2=\alpha_1-\alpha,\ \ \beta_2=\beta_1-\beta,\ \ \gamma_2=\gamma_1-\gamma$ – раціональні числа.

З рівності (2) маємо $\left(\alpha_2+\gamma_2\sqrt{3}\right)^2=\left(-\beta_2\sqrt{2}\right)^2$ або $\alpha_2\gamma_2\sqrt{3}=r$, де $r=\left(2\beta_2^2-\alpha_2^2-3\gamma_2^2\right)\in Q$. Тоді $\alpha_2=0$ або $\gamma_2=0$, інакше $\sqrt{3}=\dfrac{r}{\alpha_2\gamma_2}\in Q$, що неможливо. Якщо $\alpha_2=0$, то $\beta_2\sqrt{2}+\gamma_2\sqrt{3}=0$. Звідси випливає, що $\beta_2=\gamma_2=0$. Якщо $\gamma_2=0$, то $\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}=0$. Тому $\alpha_2=\beta_2=0$. Отже, $\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0$ або $\alpha=\alpha_1,\ \ \beta=\beta_1,\ \ \gamma=\gamma_1$.

Позначимо $z=\delta+\gamma\sqrt{3}$, де $\delta\in K=\left\{\alpha+\beta\sqrt{2};\ \ \alpha,\beta\in Q\right\}$, $\gamma\in Q$. Число $\bar{z}=\delta-\gamma\sqrt{3}$ назвемо спряженим до числа $z=\delta+\gamma\sqrt{3}$.

Легко помітити, що 1) $\bar{0}=0$; 2) $\bar{\alpha}=\alpha$, де $\alpha\in Q$; 3) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$. Перевіримо, що 4) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$.

Справді, $z_1z_2=\left(\delta_1\delta_2+3\gamma_1\gamma_2\right)+\left(\delta_1\gamma_2+\delta_2\gamma_1\right)\sqrt{3}$, де вирази в дужках є числами з множини K.

Тоді $\overline{z_1z_2}=\left(\delta_1\delta_2+3\gamma_1\gamma_2\right)-\left(\delta_1\gamma_2+\delta_2\gamma_1\right)\sqrt{3}=\left(\delta_1-\gamma_1\sqrt{3}\right)\left(\delta_2-\gamma_2\sqrt{3}\right)=$ $=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$. Зокрема маємо 5) $\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n$.

Нехай $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ \ a_0\neq 0,\ \ a_i\in Z,\ \ 0\le i\le n$.

Якщо $z=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, то $\bar{z}=\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Тоді $P(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$, а отже, $\overline{P(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=0$. Тобто $\overline{a_0\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n+a_1\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+}$ $\overline{+a_n}=0$. Звідси за властивостями 1) – 5) дістаємо $a_0\left(\overline{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^n+$ $+a_1\left(\overline{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\left(\overline{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)+a_n=0$ або $a_0\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^n+$ $+a_1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+a_n=0$.

Отже, $P(\sqrt{2}-\sqrt{3})=0$, що й треба було довести.

Олімпіада 7

Перший етап

С.7.1. Рівняння подамо у вигляді $6\,001x^3=(x+1)^3$. Звідси $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6\,001}-1}$.

С.7.2. *Відповідь.* Так, можуть. Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC $\angle A=\angle B=72°$ і AD є бісектрисою.

С.7.3. Додаючи почленно перше й третє рівняння системи і віднімаючи друге, дістанемо

$$1\,998x=(x-y)(x-z). \qquad (1)$$

Аналогічно одержимо $1999y=(y-x)(y-z)$ і $2000z=(z-x)(z-y)$. Нехай $x\ge y\ge z$. Тоді $x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0$, тобто $y\le 0\le z\le y$. Звідси випливає, що $y=z=0$, а $x\ge 0$. З рівняння (1) знаходимо $x=0$ або $x=1\,998$, тобто отримуємо два розв'язки системи: (0; 0; 0) і (1 998; 0; 0). Розглядаючи інші випадки впорядкування чисел x, y, z, знайдемо ще два розв'язки системи (0; 1 999; 0) та (0; 0; 2 000). Залишилося виконати перевірку.

С.7.4. Для проїзду 180 тис. км необхідно використати на кожній із чотирьох позицій відповідно 15, 12, 10 та 9 коліс. Всього 46.

А тому максимальна відстань, яку можна проїхати, маючи 4 нових колеса, не перевищує $\dfrac{4}{46}\cdot 180=\dfrac{360}{23}=15\dfrac{15}{23}$ тис. км.

С.7.5. Виберемо на відрізку OD точку F так, щоб $BO=FD$. Тоді $\Delta BOC=\Delta CFD$ за двома сторонами і кутом між ними, а тому $OC=CF$.

Оскільки $OF=OD-BO,\ OC=AC-AO$, то з умови випливає, що $OC=OF=CF$, тобто ΔOCF – рівносторонній, отже, $\angle BAC=60°$.

С.7.6. Розглянемо десятковий запис числа: $\overline{19\,992xyz2tl1}=10^{11}+$
$+9\cdot10^{10}+9\cdot10^9+9\cdot10^8+2\cdot10^7+x\cdot10^6+y\cdot10^5+z\cdot10^4 2\cdot10^3 t\cdot10^2+l\cdot10+1$.

Позначимо через r_n остачу від ділення числа 10^n на 13, де $n=1, 2, \ldots$ Тоді $r_1=10,\ r_2=9,\ r_3=12,\ r_4=3,\ r_5=4,\ r_6=1,\ r_7=10$. Далі матимемо $r_8=r_2=9,\ r_9=r_3=12,\ r_{10}=r_4=3,\ r_{11}=r_5=4$. Тепер число, що розглядається, можна подати у вигляді $13k+x+4y+$ $+3z+9t+10l+265$, де $k=k_1+k_2+...+k_{11}$, $10^n=13k_n+r_n$, $n=1, 2, ..., 11$. Оскільки при діленні 265 на 13 остача дорівнює 5, то знайдене число ділитиметься на 13, якщо $(5+x)+(4y+9t)+(3z+10l)$ ділитиметься на 13. Звідси випливає, що Миколка зможе виграти, якщо замість зірочки на позиції x підставить цифру 8, а потім повторюватиме ходи суперника ($y=t$, $z=l$).

С.7.7. Складність задачі полягає в тому, що послідовність чисел при заповненні може необмежено зростати вздовж будь-яких напрямів. Тому перейдемо до розгляду обмеженої фігури, яка має вигляд правильного шестикутника зі стороною, що дорівнює подвоєній стороні правильного трикутника і яку розбито на правильні трикутники. Кожний трикутник такої фігури має не менше 6 сусідніх. Далі розглянемо найбільше з чисел, які записано в трикутниках, що складають дану фігуру.

С.7.8. Нехай $x=n+\alpha$, де $[x]=n$, $n\geq 0$ і $0\leq\alpha<1$. Якщо $\alpha=0$, то $n^2=2\,000$, що неможливо. Якщо $0<\alpha<1$, то $\alpha^2+3n\alpha+n^2-2\,000=0$. За умови $n\geq 45$ $\alpha^2+3n\alpha+n^2-2\,000>0$. Отже, $n\leq 44$. Оскільки $0<\alpha<1$, то $0=\alpha^2+3n\alpha+n^2-2\,000<n^2+3n-1999<0$. Якщо $n\leq 43$, то $n^2+3n-1999<0$. Отже, $n=44$. Тоді маємо $\alpha^2+132\alpha-64=0$. Звідси $\alpha=-66+2\sqrt{1105}$, тобто $x=2\sqrt{1105}-22$.

С.7.9. Спочатку доведемо таке допоміжне *твердження*: якщо пряма перетинає сторони AB і BC у точках відповідно S і T, а медіану BM – у точці O (рис. С.7.1), то виконується рівність $\frac{AB}{BS}+\frac{CB}{BT}=2\frac{MB}{BO}$.

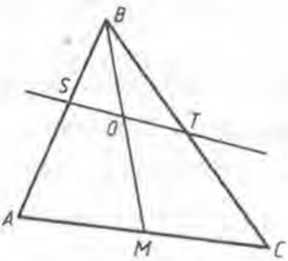


Рис. С.7.1

Доведення. Оскільки BM – медіана трикутника ABC, то $2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, тобто $2\frac{MB}{BO}\cdot\overrightarrow{BO}=\frac{AB}{BS}\cdot\overrightarrow{BS}+\frac{CB}{BT}\cdot\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{BO}=\alpha\cdot\overrightarrow{BS}+$ $+\beta\cdot\overrightarrow{BT}$, де $\alpha=\dfrac{\frac{AB}{BS}}{2\frac{MB}{BO}}$, $\beta=\dfrac{\frac{CB}{BT}}{2\frac{MB}{BO}}$.

Оскільки точки S, O, T – колінеарні, то $\alpha+\beta=1$. Отже, $\frac{AB}{BS}+$ $+\frac{CB}{BT}=2\frac{MB}{BO}$.

Нехай O – точка перетину MN і PQ. Застосовуючи доведене твердження до трикутника AMD, дістанемо $\frac{MA}{MP}+\frac{MD}{MQ}=2\frac{MN}{MO}$.

Звідси випливає, що $\frac{MA}{MP}-1+\frac{MD}{MQ}-1=2\left(\frac{MN}{MO}-1\right)$, або

$$\frac{AP}{PM}+\frac{DQ}{QM}=2\frac{NO}{OM}. \tag{1}$$

Аналогічно для ΔBNC

$$\frac{BP}{PN}+\frac{CQ}{QN}=2\frac{OM}{NO}. \tag{2}$$

Додаючи співвідношення (1) і (2), отримаємо твердження задачі, бо $2\left(\frac{NO}{OM}+\frac{OM}{NO}\right)=4$ тоді і тільки тоді, коли $MO=ON$.

С.7.10. Якщо є учень, який відвідує менше, ніж три гуртки, то на підставі принципу Діріхле один із цих гуртків відвідує також не менше чотирьох учнів із решти восьми. Тому надалі вважатимемо, що кожен з учнів відвідує гуртки з деяких трьох предметів. Тоді можливі три випадки.

1) Деякі два учні, наприклад Y_1 і Y_2, відвідують три спільні гуртки, наприклад, G_1, G_2, G_3. Тоді щонайменше три учні з решти семи повинні відвідувати один із цих трьох гуртків.

2) Деякі два учні відвідують два спільні гуртки. Нехай, наприклад, для учнів Y_1 і Y_2 гуртки G_1 і G_2 є спільними та G_3 і G_4 є третіми гуртками відповідно для Y_1 і Y_2. Припустимо, що є учень Y_3, який відвідує гуртки G_1, G_2, G_5. Якщо серед решти 6 учнів є більше двох, які відвідують гуртки G_1 або G_2, то все доведено. Якщо ні, то серед них є чотири учні, які не відвідують ані G_1, ані G_2. Але тоді ці четверо

повинні відвідувати гуртки G_3, G_4, G_5, бо кожні два учні мають відвідувати хоча б один спільний гурток. За умови, що гуртки G_1 і G_2 є спільними лише для двох учнів, розглянемо пару G_3 і G_4. Якщо деякі три учні відвідують обидва ці гуртки, то все доведено – як і вище. Якщо ні, то знайдуться 5 учнів, які не відвідують G_3 або G_4. Але тоді ці 5 учнів повинні відвідувати один з двох гуртків G_1 або G_2, щоб мати спільний гурток з учнями Y_1 і Y_2. Звідси випливає, що гурток G_1 або G_2 відвідують щонайменше три учні, крім Y_1 та Y_2.

3) Будь-які два учні відвідують лише один спільний гурток. Нехай Y_1 відвідує гуртки G_1, G_2, G_3. Решта 8 учнів мають відвідувати або G_1, або G_2, або G_3, а тому один із цих гуртків відвідують не менше трьох учнів, наприклад, гурток G_1 відвідують учні Y_2, Y_3, Y_4. Покажемо, що всі 9 учнів відвідують гурток G_1. Припустимо супротивне. Нехай, наприклад, учень Y_5 відвідує спільний з учнем Y_1 гурток G_2. Тоді учень Y_5 повинен мати з учнями Y_2, Y_3, Y_4 різні спільні гуртки, відмінні від G_2 (бо будь-які два учні мають спільним лише один гурток), тобто відвідувати 4 гуртки, що неможливо.

С.7.11. *Відповідь*. (1; 2; 3). Введемо таке позначення: $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y-1}=b$, $\sqrt{z-2}=c$. Тоді задане рівняння можна переписати у вигляді $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$. Звідси $a=1$, $b=1$, $c=1$, отже, $x=1$, $y=2, z=3$.

С.7.12. За умовою $\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{5}{2}$ або $(2a-b)(a-2b)=0$. Звідси $b=2a$ і $\dfrac{3a-b}{a-b}=\dfrac{3a-2a}{a-2a}=-1$.

С.7.13. Площа кожного з цих трикутників дорівнює площі всього чотирикутника $ABCD$. Справді, якщо h_1 і h_2 – це висоти ΔADB і ΔCBD, опущені на їх спільну сторону BD, то $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(h_1+h_2)\times$ $\times BD=\dfrac{1}{2}h\cdot MC=S_{AMC}$, де h – висота ΔAMC, опущена на MC. Аналогічно $S_{ABCD}=S_{DBN}$.

С.7.14. Оскільки кути MQN і MHN вписані в коло ω_1 і спираються на спільну хорду, вони рівні.

Внаслідок симетрії $\angle MHN = \angle KAB$. Отже, $\angle MQN = \angle KAB$. Тепер слід розглянути два випадки.

1) Точка A лежить між точками N та H. При цьому точки K, N і D лежать по один бік прямої MQ. Як вписані в коло ω_3 $\angle MQD + \angle MKD = 180°$. Оскільки прямі KM і l паралельні ($KM \parallel O_1O_2$ внаслідок симетрії), то $\angle MKD + \angle KAB = 180°$.

Отже, $\angle MQD = \angle KAB = \angle MQN$. Звідси випливає твердження задачі.

2) Точка H лежить між точками N та A. При цьому точка N лежить по один бік MQ, а точки K і D – по інший. Як і в п.1 $\angle MQD + \angle MKD = 180°$. Внаслідок паралельності KM і l $\angle MKD = \angle KAB$. Отже, $\angle MQD + {}$ ${}+\angle MQN = 180°$. Звідси випливає твердження задачі.

С.7.15. Чотирикутник ABA_1B_1 – вписаний, тому $\angle A + \angle BA_1B_1 = 180°$. Звідси $\angle B_1A_1C = \angle A = 45°$. Аналогічно доводиться, що $\angle C_1B_1A = \angle B$. Оскільки $\angle B > \angle ABB_1 = 45°$, то на відрізку AK можна взяти точку P таку, що $\angle KB_1P = 45°$, і при цьому матимемо $\angle PB_1A = \angle A_1BB_1$. Зрозуміло, що $\angle PAB_1 + \angle PB_1A = \angle KPB_1 = 45° = \angle B_1A_1C = \angle A_1B_1B + \angle A_1BB_1$. Звідси $\angle PAB_1 = \angle A_1B_1B$. Оскільки $AB_1 = B_1B$ (бо $\angle ABB_1 = \angle A = 45°$), то $\Delta PAB_1 = \Delta A_1B_1B$ за другою ознакою. Звідси $AK = AP + PK = B_1A_1 + B_1K$. Аналогічно доводиться, що $AK = C_1A_1 + C_1K$. Отже, $2AK = B_1A_1 + {}$ ${}+C_1A_1 + B_1C_1$.

С.7.16. Покажемо, що $\angle IMT = \angle INT = 90°$. Без обмеження загальності можна вважати, що точка P лежить по той самий бік прямої AT, що й точка B. Маємо $\angle BPT = \angle BAT = \angle CAT = \angle CBT$, тому ΔTMB і ΔTBP подібні. Звідси $TM \cdot TP = TB^2$ і $\angle BIT = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = {}$ ${}=\frac{1}{2}(180° - \angle C)$, $\angle TBI = 180° - \angle BIT - \angle BTI = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle C) - {}$ ${}-\angle C = \frac{1}{2}(180° - \angle C) = \angle BIT$. Тому $BT = TI$. Отже, $TM \cdot TP = TI^2$. Звідси ΔMTI подібний до ΔITP, а $\angle IMT = \angle PIT = 90°$. Аналогічно доводиться, що $\angle INT = 90°$.

С.7.17. Використаємо нерівність Коші для 16 чисел $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{16}}{16}\geq\sqrt[16]{x_1x_2\ldots x_{16}}$, $x_i\geq 0$. Поклавши в ній $x_1=x_2=\ldots=$ $=x_9=\frac{x}{9}$, $x_{10}=x_{11}=\ldots=x_{16}=\frac{y}{7}$, маємо $\frac{x+y}{16}\geq\sqrt[16]{\frac{x^9y^7}{9^97^7}}$. Звідси випливає нерівність, яку треба було довести.

С.7.18. При $|x|>1$ маємо $|f(x)|=\left|2x^2-1\right|>x^2>|x|$, тому рівняння не може мати таких розв'язків і можна вважати, що $|x|\leq 1$. Позначивши $x=\cos t$ для деякого t, одержимо $f(x)=2\cos^2 t-1=\cos 2t$ і $f\left(f\left(\ldots f\left(f(x)\right)\ldots\right)\right)=\cos 2^{2\,000}t$ (функцію f застосовано 2 000 разів). З рівняння $\cos 2^{2\,000}t=\cos t$ випливає $t=\frac{2k\pi}{2^{2\,000}\pm 1}$, $k\in Z$, і, відповідно, $x=\cos\frac{2k\pi}{2^{2\,000}\pm 1}$, $0\leq k\leq\frac{1}{2}\left(2^{2\,000}\pm 1-1\right)$, всього $2^{2\,000}$ коренів.

С.7.19. *Відповідь.* $f(x)=x$ та $f(x)=\frac{1}{x}$. Підставивши $x=y=1$, дістанемо $f\left(f(1)\right)=f(1)$. Звідси $f\left(f\left(f(1)\right)\right)=f\left(f(1)\right)=f(1)$. Якщо підставимо $x=1$, $y=f(1)$, одержимо $f\left(f\left(f(1)\right)\right)=\left(f(1)\right)^2$. Отже, $f(1)=\left(f(1)\right)^2$, тому $f(1)=1$.

Підставивши $x=1$, отримаємо $f\left(f(y)\right)=y$ для всіх $y>0$. Після підстановки $f(x)$ замість x, дістанемо $f\left(f(x)f(y)\right)=yf\left(f(x)\right)=yx$. Звідси $f(x)f(y)=f\left(f\left(f(x)f(y)\right)\right)=f(xy)$ для довільних $x>0$, $y>0$.

Розглянемо два випадки.

1. Функція f не спадає. Якщо $f(x)>x$ для якогось $x>0$, то $f\left(f(x)\right)\geq f(x)$ внаслідок монотонності, отже, $x\geq f(x)$ – суперечність. За умови $f(x)<x$ теж одержимо суперечність. Отже, $f(x)=x$ для всіх $x>0$, і ця функція задовольняє умову.

2. Функція f не зростає. Якщо $f(x)>\frac{1}{x}$ для деякого $x>0$, то

$f(f(x)) \le f\left(\frac{1}{x}\right)$, отже, $f\left(\frac{1}{x}\right) \ge x$. Перемноживши ці нерівності, маємо $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) > 1$. Але ж $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 1$ – суперечність. Аналогічно $f(x) < \frac{1}{x}$ призводить до суперечності. Отже, $f(x) = \frac{1}{x}$ для всіх $x < 0$, що задовольняє умову.

С.7.20. Доведемо спочатку, що будь-який тунель і місто належать деякому круговому шляху. Для міста і тунелю, що виходить з нього, це очевидно. Розглянемо місто A і тунель BC, що з'єднує відмінні від A міста B і C. Нехай z – круговий шлях, що проходить через міста A і B. Якщо місто C лежить на z, то, об'єднавши шлях із міста C у B через A з тунелем BC, матимемо шуканий. Нехай місто C не лежить на z. З кругового шляху, на якому лежать міста A і C, можна виділити шлях із C в A, що не містить B. Нехай D – перше місто на ньому, яке належить z. Об'єднавши цей шлях із C у D, тунель BC і шлях із D в B по z через місто A, дістанемо шуканий круговий шлях. Використовуючи доведене твердження, неважко довести і твердження задачі. Це робиться цілком аналогічно до попередніх міркувань із заміною міста A на тунель A_1A_2.

С.7.21. *Відповідь.* $x = \sqrt{2\,000^2 - 1}$. Значення цілої частини змінюється не менш як на 1, дробова частина завжди строго менша за 1. Тому функція матиме найбільше значення тоді, коли найбільшою із можливих буде ціла частина в даному виразі. Оскільки $x^2 < 2\,000^2$ і може як завгодно близько "підійти" до $2\,000^2$, максимум буде при $[x^2] = 2\,000^2 - 1$. Отже, мають виконуватися нерівності $2\,000^2 - 1 \le x^2 < 2\,000^2$, $2\,000^2 > 2\,000x \ge 2\,000\sqrt{2\,000^2 - 1} > 2\,000^2 - 1$. Функція $h(x)=\{2\,000x\}$ строго зростає на вказаній множині, максимум функції досягається в тому разі, коли значення дробової частини найменше, тобто, якщо $x = \sqrt{2\,000^2 - 1}$.

С.7.22. *Відповідь.* 2 000. З умови випливає, що $xyz \ne 0$. Поділимо перше рівняння на 16 і додамо 4

$$\frac{xy}{z(x+2y)}+1+\frac{xz}{y(x+2z)}+1+\frac{2yz}{xy+yz+zx}+2=\frac{1}{16},$$

$$(xy+xz+2yz)\left(\frac{1}{z(x+2y)}+\frac{1}{y(x+2z)}+\frac{2}{xy+yz+zx}\right)=\frac{1}{16}. \qquad (1)$$

З другого рівняння системи маємо

$$\frac{1}{z(x+2y)}+\frac{1}{y(x+2z)}+\frac{2}{xy+yz+zx}=\frac{125}{xyz}.$$

Підставивши останню рівність у рівняння (1), отримуємо

$$(xy+xz+2yz)\frac{125}{xyz}=\frac{1}{16},\ \frac{xyz}{xy+xz+2yz}=2\,000.$$

С.7.23. *Відповідь.* $f(x)=0$. При $x=y=0$ з рівняння умови маємо $f(0)=2\{f(0)\}$. Оскільки $f(0)=[f(0)]+\{f(0)\}$, то $[f(0)]=\{f(0)\}$, $\{f(0)\}$ є цілим числом, яке може бути лише нулем. Тому $f(0)=0$.

При $y=0$ з рівняння умови випливає, що $f(x)=\{f(x)\}$. Тому $0\leq f(x)<1$. Умову можна переписати у вигляді $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Звідси для будь-якого дійсного x і натурального n маємо $f(nx)=nf(x)$. Якщо для деякого x $f(x)>0$, можна знайти n таке, що $f(nx)=nf(x)\geq 1$, одержуємо суперечність. Отже, для всіх x можливе лише $f(x)=0$. Перевірка показує, що така функція задовольняє умову.

С.7.24. *Відповідь.* Ні, не завжди. Наведемо такий приклад. Візьмемо п'ять відрізків завдовжки п'ять і один – завдовжки дев'ять одиниць. З будь-яких трьох із них можна скласти трикутник.

Припустимо, що з них склали тетраедр $ABCD$, у якому $AD=9$. Нехай K – середина AD, тоді $BK=CK=\frac{\sqrt{19}}{2}$ (можемо вважати ці відрізки висотами в рівнобедрених трикутниках ABD і ACD). Але тоді не виконується нерівність для довжин сторін у трикутнику BKC, а саме одержимо $BK+CK=\sqrt{19}<5=BC$.

С.7.25. Припустимо, що твердження задачі хибне. Тоді для всіх дійсних x $f(x)\sin x \le 0$, $f'(x)\cos x \ge 0$. Звідси $\left(f(x)\cos x\right)' = f'(x)\cos x - f(x)\sin x \ge 0$, функція $f(x)\cos x$ не може спадати. З іншого боку, в усіх точках $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, буде $f(x)\cos x = 0$. Тоді $f(x)\cos x = 0$ для всіх $x \in R$, диференційовна функція f дорівнює нулеві всюди, крім відміченої послідовності точок, і тому є тотожним нулем. Це суперечить умові задачі.

С.7.26. Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника, до яких проведені висоти відповідно h_a, h_b, h_c, S – площа даного трикутника. Тоді

$$\frac{h_a + r}{h_a - r} + \frac{h_b + r}{h_b - r} + \frac{h_c + r}{h_c - r} = \frac{2S + ar}{2S - ar} + \frac{2S + br}{2S - br} + \frac{2S + cr}{2S - cr} = \frac{ar + br + cr + ar}{ar + br + cr - ar} +$$

$$+ \frac{ar + br + cr + br}{ar + br + cr - br} + \frac{ar + br + cr + cr}{ar + br + cr - cr} = \frac{2a + b + c}{b + c} + \frac{2b + c + a}{c + a} + \frac{2c + a + b}{a + b} =$$

$$= \left(\frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{a + b}\right) + \left(\frac{a + c}{b + c} + \frac{b + c}{c + a}\right) + \left(\frac{b + a}{c + a} + \frac{c + a}{a + b}\right) \ge 2 + 2 + 2 = 6.$$

Тут використано те, що сума двох додатних взаємно обернених чисел не менша за 2.

С.7.27. *Відповідь.* $n = 288$ і $n = 10\,130$. Спочатку відмітимо, що n – парне число. Справді, якщо це не так, то всі його дільники d_i також є непарними числами, а n внаслідок даної в умові рівності має бути парним.

Оскільки n парне, то $d_2 = 2$, тобто $n = 5 + d_3^3 + d_4^4$. Значення d_3 або d_4 має обов'язково бути парним. Розглянемо два можливих випадки:

1) $d_3 = 2a$, $a > 1$. Тоді a – дільник числа n і $1 < a < d_3$. Звідси маємо $a = d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $n = 69 + d_4^4$. З останньої рівності, зокрема, випливає, що d_4 непарне. Отже, при діленні d_4^4 на 4, остача дорівнює 1 і n на 4 не ділиться. Це суперечить тому, що $d_3 = 4$ є дільником n;

2) $d_4 = 2a$, $a > 1$. Тоді a – дільник числа n і $1 < a < d_4$. Звідси випливає, що $a = d_2 = 2$ або $a = d_3$.

Якщо $a=d_2=2$, то $2=d_2<d_3<d_4=4$. Отже, $d_3=3$, $n=1+2^2+$ $+3^3+4^4=288$. Перевірка показує, що $n=288$ задовольняє умову задачі.

Якщо $a=d_3$, то $n=5+a^3+16a^4$. Оскільки n ділиться на a, маємо $a=5$. Тоді $n=1+2^2+5^3+10^4=10130$, що також задовольняє умову задачі.

С.7.28. Введемо позначення $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+1$. Тоді $x-1=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$, $(x-1)^3=3-2-3\sqrt[3]{6}(x-1)$, $3\sqrt[3]{6}(x-1)=1-(x-1)^3$, $162(x-1)^3=\left(1-(x-1)^3\right)^3$, $(x-1)^9-3(x-1)^6+165(x-1)^3-1=0$. Нескладно підрахувати, що вільний член цього многочлена дорівнює -170, а сама рівність має вигляд $a_0x^9+a_1x^8+...+a_8x-170=0$, де всі a_k – цілі числа. Звідси маємо $\frac{170}{x}=a_0x^8+a_1x^7+...+a_8$, що й треба було довести. Адже будь-яке значення x^k можна записати в потрібному вигляді, а цілі множники a_k внести під знак кубічного кореня.

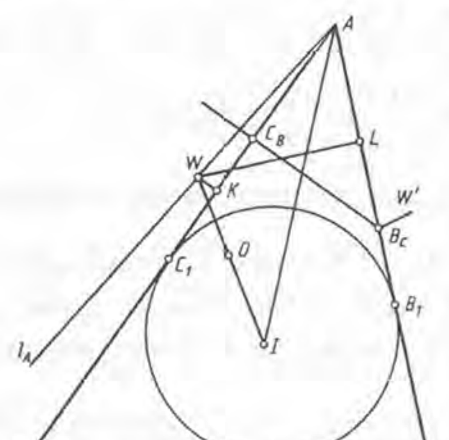


Рис. С.7.2

С.7.29. Для рівнобедреного трикутника правильність твердження задачі очевидна, тому розглянемо випадок нерівнобедреного трикутника ABC. Позначимо через O центр описаного кола, через I – центр кола, вписаного у $\Delta\ ABC$ (рис. С.7.2).

Нехай симетрія відносно точки O переводить точку I в точку W. Доведемо, що $AW \perp B_CC_B$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що точки O і B лежать по один бік прямої AI.

Нехай точки K і L – основи перпендикулярів, опущених з точки W відповідно на AB і AC. Точка O є серединою WI, вона проектується в середину відрізка C_1K. Оскільки точка O є центром описаного кола, вона одночасно проектується в середину AB. Отже, $AB_C = BA_1 = BC_1 = AK$. Точка C_1 лежить всередині відрізка AB, тому й точка K знаходиться всередині AB. Позначимо через W' образ точки W при симетрії відносно прямої AI. Оскільки $AB_C = AK$, точки K і B_C є симетричними відносно прямої AI. Тому $W'B_C \perp AC$. Аналогічно доводимо, що $W'C_B \perp AB$.

Звідси випливає, що точки A, C_B, W', B_C лежать на колі з діаметром AW', $\angle C_BB_CA = \angle C_BW'A$. Промінь AI є бісектрисою кута BAC і кута WAW', тому $\angle WAB_C = \angle W'AC_B$. Звідси маємо $\angle WAB_C + \angle AB_CC_B = \angle W'AC_B + \angle AW'C_B = 180° - \angle W'C_BA = 90°$, тому $AW \perp B_CC_B$.

Отже, l_A проходить через точку W. Аналогічно доводимо, що прямі l_B та l_C також проходять через точку W. Отже, ці прямі перетинаються в одній точці.

С.7.30. *Відповідь.* $n-2$. Кожній людині поставимо у відповідність деяку вершину n-вершинного графа, вершини якого будемо сполучати ребрами тоді і лише тоді, коли відповідні люди знайомі між собою. За умовою цей граф є зв'язним, тобто з будь-якої його вершини до іншої існує шлях по ребрах графа. Треба знайти, за яку найменшу кількість дозволених операцій даний граф можна перетворити на повний, тобто граф, у якому будь-які дві вершини сполучено ребром.

Доведемо за індукцією, що $n-2$ днів завжди вистачить. Легко перевірити, що це виконується для $n=3$ і $n=4$. Нехай твердження доведено для всіх кількостей вершин, менших за n, і дано граф з n вершинами. Візьмемо в графі найдовший можливий незамкнений шлях без самоперетинів $V = \{v_1, v_2, ..., v_t\}$ (v_i позначають вершини графа, перераховані за порядком слідування), для зв'язного графа $t \geq 3$. Нехай U – множина всіх вершин графа, що не належать V і сполучені з v_2 (можливо, вона порожня). Проведемо дозволену операцію у вершині v_2 (тобто перезнайомимо між собою всіх знайомих людини v_2). Отримаємо повний підграф з множиною вершин $U \cup \{v_1, v_2, v_3\}$. Будь-яка вершина, що не належить V і U, не сполучається ребром з жодною вершиною U, інакше існував би шлях через v_2, довший за V.

Тому, відкинувши всі вершини U та v_1, v_2, одержимо зв'язний граф, кількість вершин якого не більше, ніж $n-2$. За припущенням індукції, його можна перетворити на повний, не більш як за $n-4$ операції. Потім познайомимо всіх знайомих людини v_3, після чого отриманий граф буде повним. Всього проведемо не більше, ніж $n-2$ операції.

Покажемо, що існують n-вершинні графи, які не можна зробити повними менше, ніж за $n-2$ операції. Для $n = 3$ і $n = 4$ такими будуть графи з $n-1$ ребром, що послідовно сполучають усі дані вершини. Для $n \geq 5$ розглянемо замкнений цикл без самоперетинів, що проходить по всіх вершинах графа.

Довільний граф G називатимемо ланцюговим, якщо множину всіх його ребер можна розбити на частини $V_1, V_2, ..., V_l$ ($l \geq 3$), кожна з яких є повним графом. Крім того, по одній спільній вершині мають V_1 і V_2, V_2 і V_3, ..., V_{l-1} і V_l, V_l і V_1, а інших спільних вершин V_k не мають. Прикладом ланцюгового графа є вищевказаний простий цикл, у ньому $l = n$, кожний V_k має дві вершини і ребро, що їх сполучає.

При дозволених операціях ланцюговий граф переходить у ланцюговий. Кількість l його повних підграфів V_k або не зміниться (якщо операція проводилась у вершині, що не є спільною для різних підграфів V_k), або зменшиться на одиницю. Після $n-3$ операцій n-вершинний простий цикл перейде в ланцюговий граф з не менш як трьома частинами V_k. Такий граф не може бути повним, тому $n-3$ операцій не вистачить.

С.7.31. Запишемо дане рівняння у вигляді $(n-3)(n-7) = p$. Оскільки p є простим числом, то можливими є такі випадки:

$$1)\ \begin{cases} n-3=1, \\ n-7=p; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} n-7=1, \\ n-3=p; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} n-3=-1, \\ n-7=-p; \end{cases} \quad 4)\begin{cases} n-7=-1, \\ n-3=-p. \end{cases}$$

Системи 1) і 4) розв'язків не мають, бо p не може бути від'ємним. Система 2) має розв'язок $n=8; p=5$. Система 3) має розв'язок $n=2; p=5$.

С.7.32. Зауважимо, що результатами операцій такого комп'ютера можуть бути лише натуральні числа, менші за 2 001. Тому число 667 можна одержати тільки як $\frac{1334}{2}$, і навпаки, число 1 334 – лише як $\frac{667+2\,001}{2}$. Тому жодне з цих чисел до появи іншого з'явитися на Незнайковому комп'ютері не може. А отже, всі натуральні числа, менші за 2001, одержати неможливо.

С.7.33. *Відповідь.* а) Так, може; б) ні, не може.

а) На рис. С.7.3 зображено схему доріг для 2 000 міст. Тут A_i – міста, $i = 1, 2, 3, \ldots, 2\,000$. Місто A_1 з'єднане з містом A_2, A_2 – з A_3, …, A_{1999} – з A_1 (велике кільце). Крім того, A_1 сполучено з A_{998}, A_2 – з A_{999}, …, A_{997} – з $A_{1\,994}$, а місто $A_{2\,000}$ сполучено з містами $A_{1\,995}$, $A_{1\,996}$, $A_{1\,997}$, $A_{1\,998}$, $A_{1\,999}$. Легко перевіряється, що ця схема доріг задовольняє всі умови задачі.

б) Відомо, що якщо з кожного міста A_i виходить n_i доріг, то їх кількість буде $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \ldots + n_{2\,001})$.

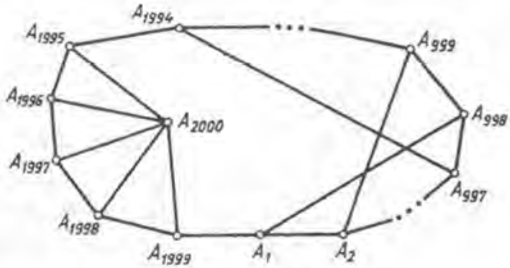


Рис. С.7.3

За умовою задачі кожне n_i дорівнює 3 або 5 (непарні числа), тому число $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \ldots + n_{2\,001})$ не буде цілим.

С.7.34. Побудуємо два кола з діаметрами BC і AH (рис. С.7.4). Легко довести, що вони перетинаються в двох точках E і Z, які є основами висот BE і CZ. Тоді точки N і M рівновіддалені від кінців відрізка ZE, тобто пряма MN – серединний перпендикуляр відрізка ZE. Звідси

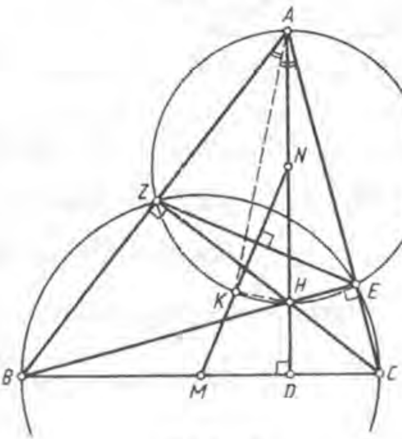


Рис. С.7.4

випливає, що пряма MN перетинає дугу ZHE в її середині, тобто в точці K (оскільки AK – бісектриса $\angle BAC$). Отже, $\angle AKH = 90°$ (як вписаний, що спирається на діаметр AH).

С.7.35. *Відповідь.* $(k;\ 1)$, $(k^2;\ 2k)$, де $k \in N$. Якщо $b=1$, то $4a^2b^2 - 4a + b^2 = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$ – квадрат цілого числа. Отже, пари вигляду $(k;\ 1)$, де k – будь-яке натуральне число, задовольняють умову задачі.

За умови $b \geq 2$ мають місце нерівності $\left(2ab^2-1\right)^2 < 4a^2b^4 - -4a + b^2 < \left(2ab^2+1\right)^2$.

Тому $4a^2b^4 - 4a + b^2 = (2ab^2)^2$. Звідси $4a = b^2$, тобто $b = 2k$ і $a = k^2$. Отже, умову задачі задовольняють ще й пари $(k^2;\ 2k)$, де k – будь-яке натуральне число.

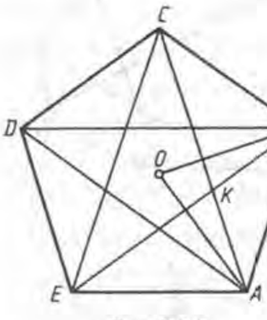


Рис. С.7.5

С.7.36. З урахуванням симетрії шукана площа дорівнює $5\left(S_{\Delta AOB} - S_{\Delta AKB}\right)$, де O – центр п'ятикутника, K – точка перетину діагоналей AC і BE (рис. С.7.5). Визначивши кути вказаних рівнобедрених трикутників AOB і AKB ($\angle ABK = 36°$, $\angle ABO = 54°$), одержимо $S_{\Delta AOB} = \dfrac{\text{tg}54°}{4}$, $S_{\Delta AKB} = \dfrac{\text{tg}36°}{4}$. Звідси площа зірки дорівнює $\dfrac{5}{4}\left(\text{tg}54° - \text{tg}36°\right)$.

С.7.37. Дане рівняння рівносильне такому: $\left(1\,000x - 1\,000\right)\times$ $\times\left(1\,000x - 1\,002\right)\left(1\,000x - 1\,001\right)^2 = 4\,002\,000$. Поклавши $y = 1\,000x - -1\,001$, одержимо біквадратне рівняння $y^4 - y^2 - 4\,002\,000 = 0$, з якого знаходимо $y^2 = 2\,001$. Отже, $x_{1,2} = \dfrac{1\,001 \pm \sqrt{2\,001}}{1\,000}$ – всі корені вихідного рівняння.

С.7.38. Відмітимо точки H і E – середини сторін відповідно AC і BC (рис. С.7.6). Тоді точки O та I лежать на прямій BH, $OE \perp BC$, $HE \parallel AB \parallel ID$. Трикутники BOE і BCH подібні, трикутники BID і BHE – також. З цього випливає, що $\frac{BD}{DE} = \frac{BI}{IH} = \frac{BC}{CH} = \frac{BO}{OE}$. Отже, OD – бісектриса кута BOE, тому $\angle DOE = \frac{1}{2}\angle BOE = \frac{1}{2}\angle BCH = \angle ICD$, $\angle ODC = 90° - \angle ICD$, і прямі DO та CI насправді перпендикулярні.

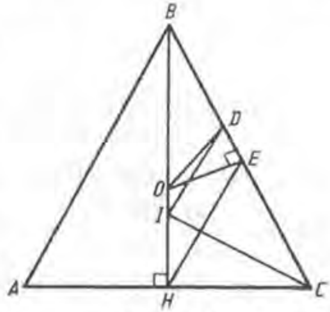


Рис. С.7.6

С.7.39. Нехай $x_1 < x_2$ – корені тричлена. Тоді він має вигляд $(x - x_1)(x - x_2)$. У точці 2 000 маємо $(2\,000 - x_1)(2\,000 - x_2) = p$. Оскільки число p просте, то $2\,000 - x_1 = p$, $2\,000 - x_2 = 1$ або $2\,000 - x_1 = -1$, $2\,000 - x_2 = -p$. Отже, тричлен має вигляд $(x - 2\,000 + p) \times$ $\times (x - 1\,999)$ або $(x - 2\,001)(x - 2\,000 - p)$. Перший досягає найбільшого значення на [1 999, 2 001] у точці 2 001, а другий – у точці 1 999, і ці найбільші значення однакові: $2(p + 1)$.

С.7.40. Нехай $n_{(i,j)}$ – число, яке стоїть у клітинці з координатами (i, j). Взявши для довільного $1 \le i \le 2\,000$ значення $n = 3$, $i_1 = i_2 = i_3 = i$, одержимо рівність $n^3_{(i,i)} = 2\,000^3$. Звідси $n_{(i,i)} = 2\,000$. Отже, всі числа, що стоять на діагоналі таблиці, рівні між собою, і таких чисел 2 000. Тому $K \ge 2\,000$. Приклад заповнення таблиці за правилом $n_{(i,j)} = 2\,000^{1+i-j}$, $1 \le i,\ j \le 2\,000$, свідчить про те, що $K \le 2000$, оскільки в цій таблиці немає 2 001 однакового числа.

С.7.41. Оскільки

$$\frac{kx}{(x+1)(2x+1)\cdots(kx+1)} = \frac{(kx+1)-1}{(x+1)(2x+1)\cdots(kx+1)} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)(2x+1)\cdots((k-1)x+1)} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)\cdots(kx+1)},$$

то ліва частина нерівності після перетворень матиме вигляд

$$1-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\cdots(2\,000x+1)}>1.$$

Тому $x\in\left(-1,\,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},\,-\frac{1}{4}\right)\cup\cdots\cup\left(-\frac{1}{1999},\,-\frac{1}{2\,000}\right)$.

С.7.42. Застосувавши теорему Чеви для трикутника ABC, знайдемо, що $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CO}{OA}=1$. Оскільки $AM=MB$, то $\frac{BN}{NC}=\frac{AO}{CO}$ і $NO\parallel AB$ (цю паралельність також можна вивести, застосувавши гомотетію з центром у точці C та відоме твердження про колінеарність середин двох основ і точки перетину діагоналей трапеції). Далі з теореми Фалеса і рівності $BO=OD$ випливає $AQ=QD$.

С.7.43. *Відповідь.* Гравець, який починає гру. Відмітимо, що у випадку, коли кількість монет кожного номіналу (крім однокопієчних, кількість яких для нас не має значення) парна, виграє той, хто ходить другим. Для виграшу йому достатньо повторювати ходи свого суперника. Покажемо, що гравець, який починає, завжди може створити для себе таку виграшну ситуацію.

Загальна кількість монет на початку гри непарна. Оскільки маємо 5 різних номіналів, непарною може бути кількість монет: 1) одного номіналу; 2) трьох номіналів; 3) п'яти номіналів.

Розглянемо ці випадки. У першому з них гравець, який починає, має взяти монету з групи непарної кількості і розміняти її на однокопієчні. У другому й третьому випадках гравець, який починає, має взяти монету найбільшого номіналу з групи непарної кількості і розміняти її, додаючи по одній монеті до інших груп непарної кількості. Залишок треба додати однокопієчними монетами. Так гравець, який починає, може створити для себе ситуацію, коли після його ходу кількість монет кожного виду є парною, а потім виграти.

С.7.44. *Відповідь.* $f(m)=m$. Покажемо, що якщо $f(n_1)=f(n_2)$, то $n_1=n_2$. Справді, з рівняння умови маємо $n_1+f(m)=f(m+f(f(n_1)))=$ $=f(m+f(f(n_2)))=n_2+f(m)$. Звідси отримуємо зазначену рівність.

Якщо $n=0$, то $f(m+f(f(0)))=f(m)$. Тому $m+f(f(0))=m$, $f(f(0))=0$. При $m=f(0)$ отримуємо $f(f(0)+f(f(n)))=n+f(f(0))=n$.

Звідси, підставивши $n=f(k)$, одержимо $f(f(0))+f(f(f(k)))=f(k)$. Тому $f(0)+f(f(f(k)))=k$ або $f(f(f(k)))=k-f(0)$. Після підстановки в останню рівність $k=0$ дістанемо $f(0)=f(f(f(0)))=-f(0)$. Звідси $f(0)=0$, тому $f(f(f(k)))=k$ для всіх $k\in Z$.

Підставимо в умову $n=f(k)$. Тоді $f(m+k)=f(m+f(f(f(k))))=$ $=f(m)+f(k)$ для всіх $k,\ m\in Z$. Звідси отримуємо, що $f(m)=mf(1)$. Оскільки $f(f(f(k)))=k$, то $\left(f(1)\right)^3=1,\quad f(1)=1,\quad f(m)=m$. Перевірка показує, що ця функція задовольняє умову.

С.7.45. *Відповідь.* $\frac{2}{3}$. Розглянемо в просторі три вектори $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{v}=(x,\ y,\ z)$ і $\vec{w}=(1,\ 1,\ 1)$. З умови випливає, що вони ненульові і попарно перпендикулярні. Тоді вираз $\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ – це квадрат косинуса кута між вектором $\vec{u}$ й віссю Ox, $\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$ – квадрат косинуса кута між вектором $\vec{v}$ й віссю Ox, а $\frac{1}{3}=\frac{1^2}{1^2+1^2+1^2}$ – квадрат косинуса кута між вектором $\vec{w}$ й віссю Ox. Відомо (і це нескладно довести), що сума квадратів косинусів кутів, які утворює довільна пряма з ребрами прямокутного тригранного кута, дорівнює 1.

Отже,

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1^2}{1^2+1^2+1^2}=1.$$

Звідси $\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2}{3}$.

С.7.46. Дане рівняння еквівалентне рівнянням

$$p^m=1+n^3,$$

$$p^m=(1+n)(1-n+n^2).$$

Якщо $n=1$, то $p=2$ і $m=1$. За умови $n>1$ числа $1+n$ та $1-n+n^2$ натуральні, а з того, що p – просте число, випливає, що існують такі натуральні числа k і l, що $m=k+l$ і

$$\begin{cases} 1+n=p^k, \\ 1-n+n^2=p^l. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо $n=p^k-1$. Підставивши це значення в друге рівняння системи, одержимо

$$1-(p^k-1)+(p^k-1)^2=p^l,$$

$$1-p^k+1+p^{2k}-2p^k+1=p^l,$$

$$p^{2k}-3(p^k-1)=p^l.$$

Оскільки числа p і p^k-1 взаємно прості, то з останньої рівності випливає, що 3 ділиться на p, тобто $p=3$. Далі легко знаходимо $m=n=2$. Перевірка показує, що знайдені значення p задовольняють умову задачі.

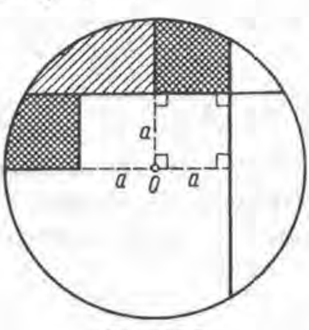


Рис. С.7.7

С.7.47. Виділені на рис. С.7.7 фігури рівні, бо вони утворюються одна з одної поворотом на 90° навколо точки O. Отже, шукана фігура рівновелика четвертині круга, з якої вирізано квадрат зі стороною a. Тому шукана площа дорівнює $S=\frac{1}{4}\pi R^2-a^2$.

С.7.48. *Відповідь.* $2n-2$. Доведемо, що меншої кількості поворотів бути не може.

Усі відрізки ламаної – шлях тури – розглядатимемо як вертикальні або горизонтальні (рис. С.7.8). Також будемо розглядати горизонталі та вертикалі (довжини n) клітинок нашої дошки.

Припустимо, що кожна горизонталь містить хоча б один горизонтальний відрізок ламаної. Тоді маємо не менше n горизонтальних відрізків у різних горизонталях. При переході від одного такого відрізка до іншого має бути хоча б одна вертикальна ділянка, і в такому переході є не менше двох поворотів (горизонтальний – вертикальний – горизонтальний). Всього не менше $2(n-1)$ поворотів. Припустимо тепер, що є горизонталь без горизонтального відрізка. Тоді кожна її клітинка перетинається вертикальним відрізком (можливо кількома). Отже, можемо виділити n вертикальних відрізків, що лежать у різних вертикалях. Як і вище, будемо мати не менше $2(n-1)$ поворотів.

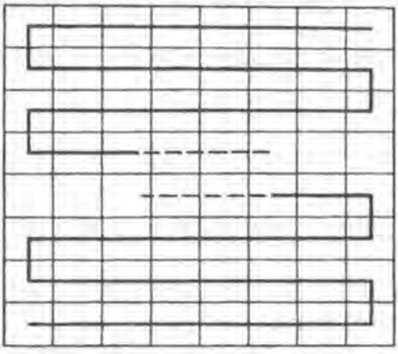


Рис. С.7.8

С.7.49. Нехай n_0 таке, що $n_0^2 + n_0 + 17\,998$ ділиться на $p > 3$. Тоді для $n = n_0 + p$ і для $n = n_0 + 2p$ число $n^2 + n + 17\,998$ також ділиться на p. Але з трьох чисел n_0, $n_0 + p$ і $n_0 + 2p$ одне можна подати у вигляді $3k_0 + 1$.

Тоді $(3k_0+1)^2 + (3k_0+1) + 17\,998 = 9k_0^2 + 9k_0 + 18\,000 = 9(k_0^2 + k_0 + 2\,000)$ ділиться на p. Оскільки p просте і $p > 3$, то $k_0^2 + k_0 + 2\,000$ ділиться на p, тобто k_0 – шукане число m.

С.7.50. Побудуємо два кола: перше радіусом AB з центром у точці A, друге радіусом DC з центром у точці D. (рис. С.7.9). З умови задачі випливає, що пряма BC є спільною дотичною до цих кіл, а точка M – одна із точок їх перетину.

Нехай N – друга точка перетину цих кіл, а F – точка перетину прямих BC і MN. Внаслідок симетрії кіл відносно їх лінії центрів AD відрізок MN перпендикулярний до прямої AD, тобто $MN \parallel BP \parallel CQ$. Далі, застосовуючи двічі теорему про квадрат дотичної, одержимо $FB^2 = FM \times FN = FC^2$.

Отже, $FB = FC$ і за теоремою Фалеса пряма MN – серединний перпендикуляр відрізка PQ. Звідси й випливає твердження задачі.

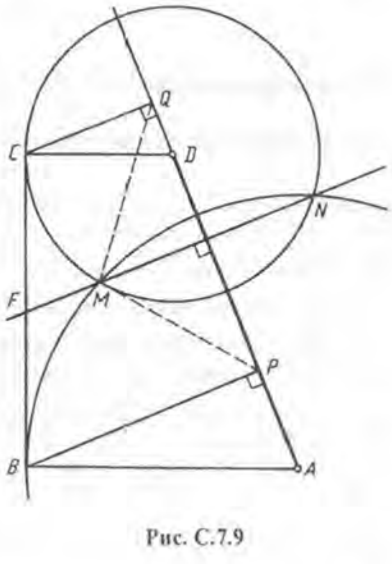


Рис. С.7.9

С.7.51. *Відповідь.* $n = 5$. Використаємо таку лему.

Лема. Нехай $a, b \in N$, $\frac{a}{b} \ge 3$, $b \ge 3$. Тоді виконується нерівність $\frac{2^a}{5^b} \ge 3$.

Доведення. Дійсно, оскільки $\frac{8}{5} > 1$ і $\left(\frac{8}{5}\right)^3 = \frac{512}{125} > 3$, то при $b \ge 3$ маємо нерівність $\frac{2^a}{5^b} \ge \frac{2^{3b}}{5^b} = \left(\frac{8}{5}\right)^b \ge \left(\frac{8}{5}\right)^3 \ge 3$. Лему доведено.

Якщо $n > 5$ і $k = 3$, то $n^{n^n} \ge 6^{6^6} > 4^{6^6} = 2^{2\cdot 2^6 \cdot 3^6} = 2^{2^7\cdot 9^3} > 2^{2^7 \cdot 8^3} = 2^{2^{16}} = 2^{2^{2^{2^2}}}$, що суперечить умові задачі. Отже, $n \le 5$.

Доведемо методом математичної індукції, що за будь-якого $k \in N$ виконується нерівність

$$\frac{\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}(k+2)\text{ рази}}{\left.5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}\right\}(k\text{ разів})} \ge 3. \qquad (1)$$

База індукції. При $k = 1$ маємо $\frac{2^{2^2}}{5} = \frac{16}{5} > 3$.

Крок індукції. Нехай при $k = m$ нерівність (1) виконується. Тоді за лемою для $a = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}(m+2)$ рази і для $b = \left.5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}\right\}(m$ разів$)$ нерівність (1) виконується і для $k = m + 1$.

Таким чином, шукане найбільше $n = 5$.

С.7.52. Помічаємо, що $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$, і $\operatorname{tg} z$ повинні мати один і той самий знак. Нехай вони всі додатні. Тоді за нерівністю Коші $2\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x \ge 2\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot 3\operatorname{ctg} x} = 2\sqrt{3}$. Отже, $\operatorname{tg} y \ge \sqrt{3}$. Аналогічно $\operatorname{tg} z \ge \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x \ge \sqrt{3}$. Тому $3\operatorname{ctg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x} \le \sqrt{3} \le \operatorname{tg} x$. Отже, $2\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x \le 2\operatorname{tg} x$. Звідси $\operatorname{tg} y \le \operatorname{tg} x$, аналогічно і $\operatorname{tg} z \le \operatorname{tg} y$,

$\operatorname{tg} x \le \operatorname{tg} z$. З останніх трьох нерівностей випливає, що $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$. Тоді з рівнянь системи знаходимо, що $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg}^2 x = 3$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, аналогічно і $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = \sqrt{3}$. Для від'ємних значень маємо $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = -\sqrt{3}$. Звідси $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $y = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $z = \dfrac{\pi}{3} + \pi m$, де k, n, m – цілі, або $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $z = -\dfrac{\pi}{3} + \pi m$, де k, n, m – цілі. Перевіркою переконуємося, що всі знайдені трійки задовольняють систему.

С.7.53. A_1C не може дорівнювати AC або BC, бо $A_1C = HC$ за побудовою, а відрізок HC менший за висоту, проведену з вершини C, яка, у свою чергу, менша за прилеглі сторони AC і BC (рис. С.7.10). Отже, $A_1C = AB$, і кут між прямими A_1C і AB дорівнює $30°$. Нехай D – основа висоти, проведеної з вершини B. Трикутники ABD і HCD рівні за гіпотенузою і гострим кутом, отже, $BD = CD$ і $\angle C = 45°$. Нехай E – основа висоти, проведеної з вершини A. Трикутник AEC – рівнобедрений, тому трикутники ABE та CA_1E рівні за катетом і гіпотенузою, звідси $\angle BAD = \angle A_1CD$ і $45° < \angle BAC = \angle A_1CA < 90°$. Отже, якщо позначити точку перетину прямих A_1C і AB через F, то вийде, що трикутник AFC – рівнобедрений з основою AC, точка B лежить на AF, точка A_1 – на FC. Тому $\angle A = 0{,}5(180° - 30°) = 75°$, $\angle B = 180° - 75° - 45° = 60°$.

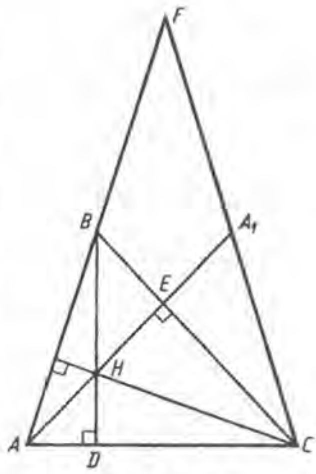


Рис. С.7.10

С.7.54. Нехай $\dfrac{p+1}{2} = m^2$, $\dfrac{p^2+1}{2} = n^2$, де $m, n \in N$. Тоді маємо $0 < m < n < p$, $n^2 - m^2 = \dfrac{p(p-1)}{2}$. Крім того, $p \ne 2$, отже, p – непарне, а $(n-m)(n+m) = p \cdot \dfrac{p-1}{2}$. Враховуючи записану вище нерівність і те, що число p просте, дістаємо $n+m=p$, $n-m=\frac{p-1}{2}$. Віднявши від першої рівності другу, одержуємо $2m=\frac{p+1}{2}=m^2$, $m=2$, $p=7$. Це значення справді задовольняє умову задачі: $\frac{7+1}{2}=2^2$, $\frac{7^2+1}{2}=5^2$.

С.7.55. Додавши до лівої й правої частин нерівності вираз $x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}$, матимемо, з урахуванням додаткових умов, рівносильну нерівність $\frac{x^2}{1-a}+\frac{y^2}{1-b}+\frac{z^2}{1-c}\geq\frac{1}{2}$. Ця нерівність є наслідком нерівності Коші – Буняковського:

$$\left(\frac{x^2}{1-a}+\frac{y^2}{1-b}+\frac{z^2}{1-c}\right)((1-a)+(1-b)+(1-c))\geq$$

$$\geq\left(\frac{x}{\sqrt{1-a}}\sqrt{1-a}+\frac{y}{\sqrt{1-b}}\sqrt{1-b}+\frac{z}{\sqrt{1-c}}\sqrt{1-c}\right)^2=\left(x+y+z\right)^2=1.$$

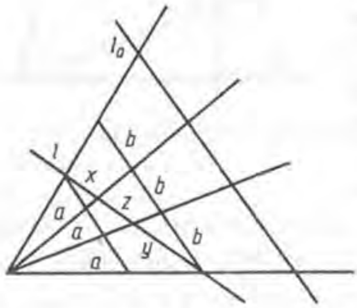


Рис. С.7.11

С.7.56. Через дві крайні точки перетину прямої l з променями проведемо прямі, паралельні l_0. На них також буде відітнуто по три рівні відрізки. Нехай довжини цих відрізків дорівнюють a і b. Позначимо довжину невідомого відрізка через z. Тоді внаслідок подібності трикутників (рис. С.7.11) маємо $\frac{x+z}{y}=\frac{2a}{b}$; $\frac{x}{z+y}=\frac{a}{2b}$. Звідси $\frac{x+z}{y}=\frac{4x}{z+y}$, $\left(x+z\right)\left(z+y\right)=4xy$, $z^2+\left(x+y\right)z-3xy=0$.

Розв'язавши останнє рівняння відносно z і вибравши додатний корінь, одержимо $z=\frac{-\left(x+y\right)+\sqrt{x^2+14xy+y^2}}{2}$.

С.7.57. Оскільки $1\,111\,111\,111 \in A$, $1\,112\,111\,111 \in B$, то $2\,323\,322\,322 \in C$, $3\,233\,233\,233 \in C$. Оскільки $1\,111\,111\,111 \in A$, $3\,233\,233\,233 \in C$, то $2\,322\,322\,322 \in B$. А оскільки $2\,323\,322\,322 \in C$, $2\,322\,322\,322 \in B$, то $1\,231\,231\,231 \in A$.

С.7.58. *Відповідь.* Не існують. Припустимо, що дана рівність виконується. Підставивши в цю рівність $x=1$, дістанемо $3^k = 3^m$. Звідси $k = m$. З рівності многочленів випливає рівність їх похідних. Тому маємо $k(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{k-1} + 2lx\left(x^2-1\right)^{l-1} = 2m(2x+1)^m + 2nx\left(x^2-1\right)^n$.

Підставивши у цю рівність $x = 1$, одержимо рівність $k = 2m$, що суперечить знайденій вище.

С.7.59. *Відповідь.* $x=\frac{1}{2}$. Нехай $f(a)=0,\ f(b)=1$. Позначимо дану в умові нерівність (*). Покладемо в нерівності (*) $x=a,\ y=b$. Тоді $1=|f(a)-f(b)| \le \frac{|a-0|+|b-1|}{2}$. Звідси $|a|+|b-1|\ge 2$. Оскільки $a, b \in [0;1]$, це можливо лише за умови $a = 1$, $b = 0$.

Покажемо, що $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Якщо $f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$, то при $x=\frac{1}{2},\ y=0$ з нерівності (*) випливає

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-1\right| \le \frac{\left|\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|0-1|}{2},\ 1-f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)+1}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \ge \frac{1}{2}.$$

Маємо суперечність. Якщо $f\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}$, то при $x=\frac{1}{2},\ y=1$ з нерівності (*) аналогічно отримуємо $f\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}$. Тому залишається єдина можливість $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Доведемо, що інших коренів рівняння $f(x)=x$ не має. Нехай $f(c)=c,\ c\neq\frac{1}{2}$. З нерівності (*) випливає $0<\left|c-\frac{1}{2}\right|=$

$$=\left|f(c)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le\frac{|c-f(c)|+\left|\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{2}=0.$$ Ця суперечність завершує розв'язання.

Зауваження. Функція, що задовольняє умову задачі, існує. Наприклад, $f(x)=1-x$.

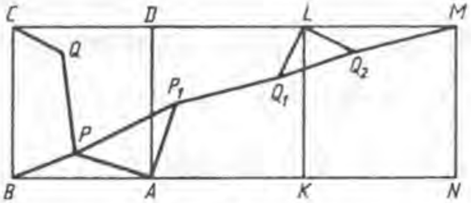


Рис. С.7.12

С.7.60. Повернувши квадрат на 90° відносно точки A у від'ємному напрямі, отримаємо квадрат $ADLK$. Потім аналогічним поворотом відносно точки L одержимо квадрат $KLMN$ (рис. С.7.12). Нехай точки P і Q при першому повороті перейдуть у точки відповідно P_1 і Q_1, при другому – точка Q_1 перейде в точку Q_2. З рівнобедрених прямокутних трикутників APP_1 і LQ_1Q_2 маємо $PP_1=PA\sqrt{2}$, $Q_1Q_2=LQ_1\sqrt{2}=QC\sqrt{2}$. Тому ліва частина даної в умові нерівності дорівнює довжині ламаної $BPP_1Q_1Q_2M$. Ця довжина не менша за відстань між точками B і M, тобто за $\sqrt{10}$.

С.7.61. *Відповідь.* $n=2$. Зафіксуємо напрям першого кроку фішки. Для визначеності вважатимемо, що цей крок зроблено вправо. Кількість маршрутів з таким першим кроком дорівнює $\frac{A}{4}$. Покажемо, що число $\frac{A}{4}$ непарне.

Кожному маршруту, що має хоча б один крок у вертикальному напрямі (вгору чи вниз) поставимо у відповідність інший маршрут, симетричний даному відносно горизонтальної осі координат. Так шляхи, що не лежать повністю на горизонтальній осі, розбиваються на пари. Тому їх кількість парна.

Розглянемо маршрути, що повністю лежать на горизонтальній осі координат. Оскільки по кожному відрізку завдовжки 1 дозволяється проходити не більш як два рази, такий шлях має проходити до деякої точки $(i, 0)$, $1 \le i \le 125$, потім до точки $(i - 125, 0)$ і повертатися до початку координат. Маємо 125 таких маршрутів.

Таким чином, число $\dfrac{A}{4}$ ціле і непарне.

С.7.62. *Лема.* Нехай p – непарне просте число, a – натуральне число таке, що a^2+1 ділиться на p. Тоді $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Доведення. Маємо $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$, $a^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p}$.

Числа a і p – взаємно прості. Згідно з малою теоремою Ферма $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Тому $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$, $(p-1)/2$ парне, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Розв'язання задачі. Перепишемо дане рівняння у вигляді $k+m^3 = l(4km-1)$. Бачимо, що $k+m^3$ ділиться на $4km-1$. Отже, $(2m^2)^2+1 = 4m(k+m^3)-(4km-1)$ ділиться на $4km-1$. Згідно з лемою всі прості дільники числа $(2m^2)^2+1$ мають вигляд $4i+1$, де i ціле число. Тому такий вигляд мають і всі прості дільники числа $4km-1$. Але рівність $4km-1=(4i_1+1)(4i_2+1)\cdots(4i_n+1)$ неможлива (остачі при діленні на 4 чисел у лівій і правій частинах різні).

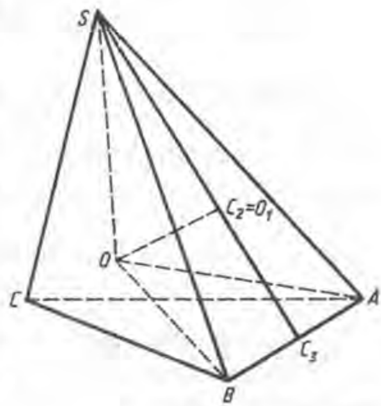


Рис. С.7.13

С.7.63. Розглянемо точку O_1 – проекцію точки O на грань SAB (рис. С.7.13). Відстані від точки O до прямих SA, SB, AB рівні, тому відстані від точки O_1 до цих прямих рівні між собою. Отже, точка O_1 – центр кола, вписаного в трикутник SAB.

Також рівні між собою три двогранні кути між площинами SOB і SAB, SOA і SAB, OAB і SAB (кожний із них дорівнює $\operatorname{arctg}\dfrac{OO_1}{r}$, де r – радіус кола, вписаного в трикутник SAB). Точка C_1 лежить на перетині бісекторних площин вищевказаних двогранних кутів. Тому рівні між собою три двогранні кути між площинами: SC_1B і SAB, SC_1A і SAB, C_1AB і SAB (кожний із них дорівнює $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{OO_1}{r}$). Отже, проекція точки C_1 на площину SAB також буде знаходитися на однакових відстанях від прямих SA, SB, AB і збігатися з точкою O_1.

Таким чином, точка C_1 лежить на OO_1, точка C_2 збігається з O_1 і є центром кола, вписаного в трикутник SAB. Аналогічно B_2 є центром кола, вписаного у трикутник SAC, A_2 – центром кола, вписаного в трикутник SBC.

Позначимо через C_3 точку перетину прямих SC_2 і AB (тобто основу бісектриси кута ASB). Використовуючи відношення між відрізками, на які бісектриса ділить протилежну сторону, маємо

$$\frac{SC_2}{C_2C_3}=\frac{SB}{BC_3}=\frac{SB}{AB}\frac{BC_3+C_3A}{BC_3}=\frac{SB}{AB}\left(1+\frac{SA}{SB}\right)=\frac{SB+SA}{AB}.$$

Усі ребра тетраедра $SABC$ дотикаються до однієї сфери. Довжини дотичних, проведених до сфери з однієї точки, рівні. Позначимо через l_S, l_A, l_B, l_C довжини дотичних, проведених до даної сфери з точок відповідно S, A, B, C. Тоді

$$\frac{SC_2}{C_2C_3}=\frac{SB+SA}{AB}=\frac{l_S+l_B+l_S+l_A}{l_A+l_B}=1+\frac{2l_S}{l_A+l_B}=1+\frac{2l_S}{AB}.$$

Так само можна виразити аналогічні відношення і для інших граней. Оскільки площина $A_2B_2C_2$ паралельна ABC, ці відношення будуть рівними. Тому $AB = BC = CA$.

Олімпіада 33
(Росія, 1992 р.)

М.33.1. *Відповідь.* $a=2,\ b=4,\ c=8$ і $a=3,\ b=5,\ c=15$.

І спосіб. За умовою $M=\dfrac{abc-1}{(b-1)(c-1)}$ є цілим числом, яке ділиться на $a-1$. Оцінимо M зверху та знизу. Маємо $M>\dfrac{abc-ac}{(b-1)(c-1)}=$ $=\dfrac{ac}{c-1}>a$. Отже, $M\ge a+1$.

З іншого боку, $M<\dfrac{abc}{(b-1)(c-1)}=\left(a+\dfrac{a}{b-1}\right)\dfrac{c}{c-1}\le(a+1)\dfrac{c}{c-1}=$ $=a+1+\dfrac{a+1}{c-1}\le a+2$. Звідси $M\le a+1$. Таким чином, $M=a+1$. Оскільки $\dfrac{M}{a-1}=1+\dfrac{2}{a-1}$ є цілим числом, то a може дорівнювати лише 2 або 3.

Якщо $a=2$, то з рівності $M=a+1$ дістанемо $c=3+\dfrac{5}{b-3}$. Звідси випливає, що $b=4,\ \ c=8$.

Якщо $a=3$, то аналогічно отримаємо $c=4+\dfrac{11}{b-4}$. Звідси $b=5$, $c=15$.

ІІ спосіб. Покладемо $a-1=x,\ \ b-1=y$ і $c-1=z$. Тоді xyz є дільником числа $(x+1)(y+1)(z+1)-1$, де $1\le x<y<z$ і

$$p=\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-1}{xyz}-1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy},$$

де p є цілим числом.

Оскільки $x\ge1,\ y\ge2,\ z\ge3$, то маємо $p\le1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=$ $=\dfrac{17}{6}<3$. Тому $p=1$ або $p=2$.

Нехай $p=1$, тоді

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=1. \qquad (1)$$

Якщо $x\geq 3$, то $y\geq 4, z\geq 5$ і $p\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{59}{60}<1$, що неможливо. Отже, $x=2$. Тоді з рівності (1) дістанемо $(y-3)(z-3)=11$. Останню рівність задовольняє лише одна пара $(y,z)=(4,14)$, оскільки $y<z$.

Нехай $p=2$, тобто

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=2. \qquad (2)$$

Якщо $x\geq 2$, то $y\geq 3$, $z\geq 4$ і ліва частина рівності (2) буде менше за 2, що неможливо. Тому $x=1$. Тоді з рівності (2) дістанемо $(y-2)\times$ $\times(z-2)=5$. Звідси маємо тільки одну пару $(y,z)=(3,7)$, оскільки $y<z$.

М.33.2. *Відповідь.* $f(x)=x$. *I спосіб.* Покладемо $s=f(0)$. При $x=0$ і $y=0$ з даного рівняння дістанемо відповідно

$$f(f(y))=y+s^2 \qquad (1)$$

для всіх дійсних y і

$$f(x^2+s)=f^2(x) \qquad (2)$$

для всіх дійсних x.

Поклавши $x=0$ в рівність (2), дістанемо

$$f(s)=s^2. \qquad (3)$$

Додаючи рівності (2) і (3), маємо $s^2+f(x^2+s)=f^2(x)+f(s)$.

"Подіємо" на обидві частини останньої рівності функцією f, і, враховуючи рівності (1) і (3), отримаємо $x^2+s+s^4=s+(x+s^2)^2$, звідси $s=0$. Підставляючи $s=0$ в (1) і (2), дістанемо

$$f(f(y))=y \tag{4}$$

і

$$f(x^2)=f^2(x). \tag{5}$$

З рівності (5) випливає, що $f(x)\geq 0$ при $x\geq 0$. Якщо $f(x_0)=0$ для деякого x_0, то $0=f^2(x_0)=f(x_0^2)=f(x_0^2+f(x_0))=x_0+f(x_0^2)=x_0$. Таким чином, $f(x)>0$, якщо $x>0$.

Виконуючи заміну $y\to f(y)$ у вихідному рівнянні та застосовуючи (4) і (5), знаходимо $f(x^2+y)=f(x^2)+f(y)$, а отже, $f(x+y)=$ $=f(x)+f(y)$ при $x\geq 0$ і будь-якому дійсному y.

Нехай $x>y$. Тоді $x-y>0$ і $f(x-y)>0$, а тому $f(x)=f(x-y+y)=$ $=f(x-y)+f(y)>f(y)$. Таким чином, функція f є строго зростаючою. Якщо $f(x)>x$, то $x=f(f(x))>f(x)$. Суперечність. Аналогічно з $f(x)<x$ випливає, що $x<f(x)$. Тому $f(x)=x$ для всіх дійсних x. Робимо перевірку.

II спосіб. Підставимо $x=0$ в рівняння умови. Тоді з рівності $f(f(y))=y+f^2(0)$ випливає, що відображення $f: R\to R$ є бієктивним (тобто взаємно однозначним). Припустимо, що існує $x_0\in R$ таке, що $f(x_0)\neq x_0$. Розглянемо два випадки.

а) Нехай $f(x_0)>x_0$. Тоді знайдеться $y_0\in R$ таке, що $f(x_0)=$ $=x_0+f^2(y_0)=f(f(x_0)+y_0^2)$. Оскільки відображення $f: R\to R$ є бієктивним, то $x_0=f(x_0)+y_0^2$, тобто $f(x_0)\leq x_0$. Суперечність.

б) Нехай існує $x_1\in R$ таке, що $f(x_1)<x_1$. Тоді знайдеться $y_1\in R$ таке, що $x_1=f(x_1)+y_1^2$. Тоді $f(x_1)=f(f(x_1)+y_1^2)=x_1+f^2(y_1)$. Отже, $f(x_1)\geq x_1$. Суперечність.

Отже, можливим є лише випадок, коли $f(x)=x$ для будь-якого дійсного числа x. Перевіркою переконаємося, що дана функція задовольняє рівняння.

М.33.3. Оскільки $C_9^2=36$, то дев'ять точок з'єднуються 36 відрізками. Якщо пофарбовано 33 відрізки, то три – залишаються непофарбованими. Виберемо такі три точки з дев'яти, які є кінцями трьох

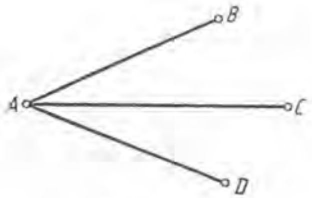


Рис. М.33.1

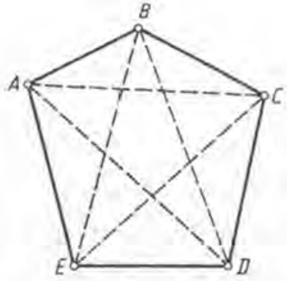


Рис. М.33.2

непофарбованих відрізків. Тоді решта шість точок з'єднані між собою пофарбованими відрізками. Покажемо, що серед них знайдеться однокольоровий трикутник.

Розглянемо довільну із шести вказаних точок. З цієї точки проводимо п'ять відрізків до п'яти інших точок. Серед них знайдуться три відрізки одного кольору (рис. М.33.1), наприклад AB, AC, AD.

Тоді один з чотирьох трикутників ABC, ACD, ABD і BCD має сторони, які пофарбовано одним кольором. Цим доведено, що $n \leq 33$.

Для того, щоб показати, що $n = 33$, побудуємо граф з 9 точок і 32 ребер, в якому будь-які три точки утворюють різнокольоровий трикутник.

Почнемо з графа G_5, який має п'ять вершин A, B, C, D, E (рис. М.33.2). Суцільні лінії позначають синій колір, а пунктирні – червоний.

Далі додамо ще одну вершину F до графа G_5. Зафіксуємо якусь небудь вершину, наприклад A, і з'єднаємо вершину F з вершинами B, C, D, E, причому кольори відрізків FB, FC, FD, FE будемо узгоджувати з кольорами відрізків AB, AC, AD, AE так, щоб дістати граф G_6, який не містить однокольорових трикутників.

Діючи у такий спосіб, отримаємо послідовно графи G_7, G_8, G_9. Граф G_9 буде шуканим (рис. М.33.3). Він має 32 ребра і жодні три вершини цього графа не утворюють однокольоровий трикутник.

М.33.4. *І спосіб.* Нехай T, S, B – точки дотику кола зі сторонами відповідно PQ, PR, QR, K – точка на QR така, що $BM = MK$ (рис. М.33.4).

Доведемо, що точка P лежить на продовженні відрізка KA, де $AB \perp QR$, $OA = OB$. З рівностей $SR = BR$, $BM = MK$ випливає, що $QK = SR$. Оскільки $QT = QB$, то $QT + BK = SR$, а тому $S_{\Delta QOT} + S_{\Delta BOK} =$

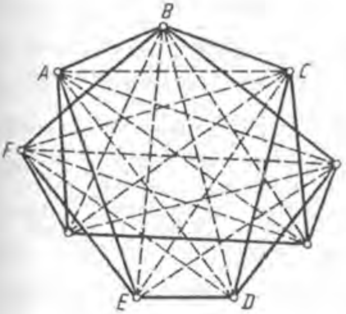


Рис. М.33.3

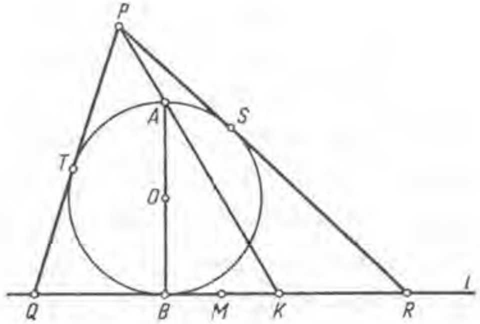


Рис. М.33.4

$= S_{\Delta SOR}$ Тоді матимемо $S_{QPOK} = S_{POKR}$, оскільки $S_{\Delta QOB} = S_{\Delta KOR}$, $S_{\Delta TOP} = S_{\Delta POS}$; $S_{\Delta QPB} = S_{PAKR}$, бо $S_{\Delta POB} = S_{\Delta POA}$, $S_{\Delta KOB} = S_{\Delta KOA}$.

Оскільки $QB = KR$, то $S_{\Delta PAK} = 0$. Це означає, що точки P, A, K лежать на одній прямій.

Нехай тепер коло вписано в трикутник PQR, а точка P знаходиться на продовженні відрізка KA. Доведемо, що $QM = MR$. Позначимо через h відстань від точки P до прямої l, через r – радіус кола. Тоді

$$\frac{1}{2}h(QB-KR) = S_{\Delta QPB} - S_{\Delta KPR} = S_{QPOK} - S_{POKR} = S_{QTOK} - S_{KOSR} =$$

$$= \frac{1}{2}r(TQ + QB + BK - KR - SR) = r(QB-KR).$$

Оскільки $h > 2r$, то $GB - KR = 0$, звідки $QM = MR$.

Таким чином, шуканою множиною точок є промінь, який утворюється продовженням відрізка KA і не містить свого початку – точки A.

II спосіб. Нехай P – точка, що задовольняє умову задачі. Точки дотику кола C та прямих l, PR, PQ позна-

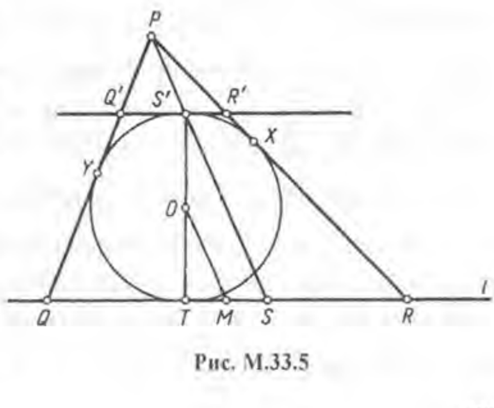


Рис. М.33.5

чимо відповідно через T, X, Y (рис. М.33.5). Нехай O – це центр C, TS' – діаметр цього кола. Проведемо через S' пряму паралельну l, що перетне PQ у точці Q', PR – у точці R'. Перетин прямих PS' та l позначимо через S. $PX = PY$, $R'S' = R'X$ і $Q'S' = Q'Y$ як дотичні. Звідси $R'S' - S'Q' = PQ' - PR'$. Трикутники PQR і $PQ'R'$ подібні, причому S ділить PQ у такому ж відношенні, у якому S' ділить $R'Q'$. Тому для трикутника PQR маємо, що $RS - SQ = PQ - PR$. Врахувавши рівність довжин дотичних, проведених з однієї точки, отримуємо $PQ - PR = YQ - XR = QT - RT$. Отже, $RS - SQ = QT - RT$. Звідси $RT = QS$ і серединою RQ є точка M, яка є також серединою ST. Відрізок OM є середньою лінією трикутника STS' і паралельний SS'. Таким чином, точка P обов'язково належить променю, що проведено з S' паралельно OM (сама точка S' не включається). Такою й буде шукана множина.

Залишається перевірити, що кожна точка вказаного променя задовольняє умову задачі. Для цього з точки P проведемо дотичні до C, їх точки перетину з прямою l позначимо через P і Q, як і раніше обираємо точки P' та Q'. Через S позначимо перетин PS' і l. Повторюючи вже наведені міркування, отримаємо $RT = QS$. Оскільки PS паралельна прямій OM, а O – середина $S'T$, то M – середина ST. Отже, M буде й серединою QR, тобто точка P задовольняє умову задачі.

М.33.5. Доведення проведемо індукцією за числом точок множини S. Нехай $|S_x| = a$, $|S_y| = b$, $|S_z| = c$. Якщо $|S| = 1$, то $a = b = c = 1$, тобто для одноточкової множини S твердження задачі виконується.

Припустимо, що це твердження справджується для всіх скінченних множин, у яких $|S| < n$, де $n > 1$.

Розглянемо тепер довільну множину S таку, що $|S| = n$.

Оскільки S є скінченною множиною, то існує площина σ, яка паралельна одній з координатних площин і не проходить через точки множини S. Площина σ поділяє S на дві непорожні множини S_1 і S_2, причому якщо $|S_1| = n_1$ і $|S_2| = n_2$, то $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$ і $n_1 + n_2 = n$.

Позначимо $|S_{ix}| = a_i, |S_{iy}| = b_i, |S_{iz}| = c_i,\ i = 1, 2$.

За припущенням індукції маємо $|S_1|^2 \le a_1 b_1 c_1,\quad |S_2|^2 \le a_2 b_2 c_2$.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що площина σ паралельна площині Oxy.

Очевидно, що $a_1 + a_2 = a,\ b_1 + b_2 = b,\ c_1 \le c,\ c_2 \le c$.

Тоді за нерівністю Коші – Буняковського

$$|S|^2 = (|S_1| + |S_2|)^2 \le \left(\sqrt{a_1 b_1 c_1} + \sqrt{a_2 b_2 c_2}\right)^2 \le \left(\sqrt{a_1 b_1}\cdot\sqrt{c_1} + \sqrt{a_2 b_2}\cdot\sqrt{c_2}\right)^2 \le$$
$$\le c\left(\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{b_1} + \sqrt{a_2}\cdot\sqrt{b_2}\right)^2 \le c\left(a_1 + a_2\right)\left(b_1 + b_2\right).$$

Отже, $|S|^2 \le abc$.

Зауваження. Твердження задачі і метод її доведення можна поширити на випадок n-вимірного простору.

М.33.6. *І спосіб.* а) Досить показати, що число n^2 не можна подати у вигляді суми $n^2 - 13$ квадратів цілих чисел. Якщо таке подання існує, то сума квадратів на 13 перевищує кількість доданків (тут і всюди далі при розв'язуванні задачі розглядаються лише доданки, які є квадратами цілих чисел). Доданок $4^2 = 16$ (або більший) дає вже перевищення суми над кількістю доданків 15 або більше. Таким чином, можливі лише доданки 3^2, 2^2 або 1^2, які дають перевищення відповідно 8, 3 або 0. Але число 13 не можна подати у вигляді суми кількох чисел рівних 8, 3 або 0.

б) Таким числом є, наприклад, $n = 13$. Маємо $169 = 144 + 25 = 64 + 64 + 16 + 16 + 9$ та $169 = 64 + 64 + 25 + 16 = 64 + 64 + 16 + 16 + 4 + 4 + 1$. Використовуючи рівність $\left(2^k\right)^2 = \left(2^{k-1}\right)^2 + \left(2^{k-1}\right)^2 + \left(2^{k-1}\right)^2 + \left(2^{k-1}\right)^2$, можемо збільшувати кількість доданків на три, і всі нові доданки при таких замінах будуть мати вигляд $\left(2^k\right)^2$. Так отримуємо розбиття на $3m + 2$ $(0 \le m \le 53)$ і $3m + 1$ $(0 \le m \le 56)$ доданків.

Також маємо $169 = 144 + 16 + 9$, $144 = 2^4 \cdot 9$. Використовуючи подання $(2l)^2 = l^2 + l^2 + l^2 + l^2$, можемо збільшувати кількість доданків на три, поки не дійдемо до рівності $169 = 17\cdot 9 + 16\cdot 1 = 14\cdot 9 + 6\cdot 4 + 19\cdot 1 =$

$=14\cdot 9+5\cdot 4+23\cdot 1$. Далі з останнього чи передостаннього виразу маємо $3\cdot 9=3\cdot(4+4+1)$ та $4=1+1+1+1$ і так дійдемо до рівності $169=2\cdot 9+151\cdot 1$ (153 доданки). Ще розкладемо на 36 квадратів $169=1\cdot 36+10\cdot 9+6\cdot 4+19\cdot 1$ і так отримаємо всі розклади на $3m$ доданків, $1\le m\le 51$.

в) Такими числами, наприклад, будуть $n=13\cdot 2^k$, k – цілі невід'ємні. Доведемо це індукцією за k. Для $k=0$ в попередньому пункті вже довели, що $S(13)=13^2-14$.

Нехай для $k-1$ відомо, що $S\left(13\cdot 2^{k-1}\right)=169\cdot 4^{k-1}-14$. Доведемо аналогічну рівність для k, $k\ge 1$. Маємо $\left(13\cdot 2^k\right)^2=\left(12\cdot 2^k\right)^2+\left(5\cdot 2^k\right)^2=\left(12\cdot 2^k\right)^2+\left(4\cdot 2^k\right)^2+\left(3\cdot 2^k\right)^2=\left(13\cdot 2^{k-1}\right)^2+\left(13\cdot 2^{k-1}\right)^2+\left(13\cdot 2^{k-1}\right)^2+\left(13\cdot 2^{k-1}\right)^2$.

За припущенням індукції, в останній сумі кожний доданок можна розкласти як суму від двох до $\left(13\cdot 2^{k-1}\right)^2-14$ доданків. Таким чином, можемо отримати будь-який розклад нашого числа на $\left(13\cdot 2^{k-1}\right)^2-56$ і менше доданків.

Число n^2 можна подати як суму n^2 одиниць. Замінюючи $1+1+1+1$ на 2^2, кількість доданків можна зменшувати на три, а замінюючи суму дев'яти одиниць на 3^2 – на вісім. Тому, поки в розкладі будуть знаходитися дев'ять одиниць, можемо отримувати розклади в $n^2-(3l+8m)$ доданків. Легко перевірити, що будь-яке ціле число від 14 до 55 включно подається у вигляді $3l+8m$.

Припустимо, що в розкладі на n^2-55 або більше доданків маємо не більше восьми одиниць, тоді хоча б n^2-63 доданків не менші за 4. Приходимо до нерівності $n^2\ge 4\left(n^2-63\right)+8$, яка не виконується для $n=13\cdot 2^k$. Тому потрібні дев'ять одиниць завжди будемо мати.

II спосіб. а) Припустимо, що $S(n)\ge n^2-13$. Тоді n^2 є сумою n^2-13 квадратів натуральних чисел: $n^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$, $k=n^2-13$. Серед чисел $x_1, x_2, ..., x_k$ можуть зустрічатись лише 1, 2 і 3, оскільки інакше $x_1^2+\ldots+x_k^2 \geq 4^2+k-1=n^2+2$. Позначимо через l кількість двійок, а через m – кількість трійок серед чисел $x_1, x_2, ..., x_k$. Тоді $k+13=$ $=n^2=x_1^2+...+x_k^2=4l+9m+(k-l-m)$, звідки $3l+8m=13$. Легко переконатися, що дане рівняння не має розв'язків серед цілих невід'ємних чисел. Отже, $S(n) \leq n^2-14$.

б) Зрозуміло, що $n>4$. Зауважимо, що 5, 10, 13 – це числа, для яких n^2 є сумою двох квадратів. Числа 5^2 і 10^2 не можна подати як суму трьох квадратів, а 13^2 можна. Покажемо, що 169 можна подати як суму k квадратів для будь-якого k від 2 до 155. Для $2 \leq k \leq 5$ маємо $169=12^2+5^2=12^2+3^2+4^2=4^2+6^2+6^2+9^2=2^2+2^2+5^2+6^2+10^2$.

Якщо в рівностях $169=3 \cdot 5^2+9^2+3^2+2^2=6 \cdot 5^2+2 \cdot 3^2+1^2$ змінювати 5^2 на 3^2+4^2 або $4^2+2^2+2^2+1^2$, то отримаємо подання числа 169 у вигляді суми k квадратів при $6 \leq k \leq 25$. Якщо $26 \leq k \leq 155$, то для подання числа 169 досить доданків 1^2, 2^2 і 3^2. Справді, зафіксуємо таке k і позначимо через l кількість доданків, що дорівнюють 2^2, а через m – кількість доданків 3^2. Тоді існування подання $169=l \cdot 2^2+m \cdot 3^2+$ $+(k-l-m) \cdot 1^2$ рівносильне існуванню розв'язків рівняння

$$3l+8m=169-k, \qquad (1)$$

де $l+m \leq k, \quad l \geq 0, \quad m \geq 0$.

Покажемо, що рівняння (1) має розв'язки серед цілих невід'ємних чисел.

Нехай m_1 – найбільше ціле число таке, що $8m_1 \leq 155-k$. Тоді $14 \leq 169-k-8m_1 \leq 21$. Рівняння $3x+8y=t$ має розв'язки серед цілих невід'ємних чисел x і y для будь-якого цілого числа t від 14 до 21. Тому існують цілі числа $l_0 \geq 0$, $m_0 \geq 0$ такі, що $3l_0+8m_0=169-k-8m_1$. Покладемо $l=l_0$, $m=m_0+m_1$. Ці числа l і m є шуканими, бо

$$m_1 \leq \frac{155-k}{8} \leq \frac{139}{8} < 18, \quad l+m \leq 7+2+m_1 \leq 26 \leq k.$$

в) Нехай для натурального числа $n \geq 13$ виконується рівність $S(n)=n^2-14$. Доведемо, що вона виконується і для числа $13n$, тобто $S(13n)=(13n)^2-14$. Подамо n^2 у вигляді l квадратів

$$n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2,\ 1 \le l \le n^2 - 14.$$

Тоді $(13n)^2 = 13^2 x_1^2 + \ldots + 13^2 x_l^2$. Підставляючи замість 13^2 різні його подання у вигляді сум від 1 до 155 квадратів, дістанемо подання числа $(13n)^2$ у вигляді сум з будь-якою від 1 до 155 кількістю квадратів. Залишилося довести, що $(13n)^2$ можна подати як суму k квадратів при $155(n^2 - 14) \le k \le 169n^2 - 14$.

Але для цього випадку в поданнях за допомогою суми квадратів досить використати лише доданки $1^2, 2^2$ і 3^2. У цьому легко переконатися, міркуючи аналогічно до п. б). Отже, послідовність чисел $n = 13^k$, $k = 1, 2, \ldots$, задовольняє рівність $S(n) = n^2 - 14$.

Зауваження. Твердження п. в) можна довести, ґрунтуючися на теоремі Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Кожне натуральне число можна подати у вигляді суми не більше, ніж чотирьох квадратів натуральних чисел.

Доведемо спочатку, що будь-яке число $n > 169$ можна подати у вигляді суми п'яти квадратів. За теоремою Лагранжа число $n - 169$ можна подати у вигляді суми одного, двох, трьох або чотирьох квадратів. Додаючи до нього подання числа 169 у вигляді суми відповідно чотирьох, трьох, двох або одного квадрата, дістанемо відповідне подання n як суми п'яти квадратів. Тепер за індукцією доведемо, що будь-яке натуральне число $n \ge 169$ можна подати у вигляді суми k квадратів натуральних чисел при $5 \le k \le n - 14$. Для числа 169 (база індукції) це доведено у п. б). Якщо $n \ge 169$ можна подати у вигляді суми k квадратів, де $5 \le k \le n - 14$, то число $n + 1$ можна подати у вигляді суми $k + 1$ квадратів. Оскільки $6 \le k + 1 \le (n + 1) - 14$, а подання цілих чисел, більших за 169, у вигляді суми п'яти квадратів є можливим, то твердження справджується і для числа $n + 1$. Як наслідок маємо, що будь-яке натуральне число $n \ge 13$ задовольняє умову $S(n) = n^2 - 14$ тоді й тільки тоді, коли n^2 можна подати у вигляді суми двох, трьох і чотирьох квадратів натуральних чисел. Такими числами є, наприклад, числа $13m$, де $m = 1, 2, \ldots$

Олімпіада 34
(*Туреччина, 1993 р.*)

М.34.1. *І спосіб.* Припустимо, що

$$\begin{aligned} f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3 = \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k\right)\times \\ \times\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

де всі коефіцієнти a_i, b_j – цілі числа, $k + m = n$. Оскільки $a_0 b_0 = 3$, то один із співмножників за модулем дорівнює 3, а другий – 1. Нехай $|a_0| = 3, |b_0| = 1$. Зазначимо, що раціональні корені многочлена $x^n + 5x^{n-1} + 3$ є цілими числами і дільниками вільного члена. Тому легко переконатися, що цей многочлен не має раціональних коренів, а тому не може містити у своєму розкладі лінійних множників. Отже, $1 < k < n - 1$.

Порівнюючи в тотожності (1) коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 = 3, \\ &a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \\ &a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{k-1} b_0 + a_{k-2} b_1 + \ldots = 0, \\ &b_0 + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \ldots = 0. \end{aligned}$$

З перших k рівностей випливає, що всі числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ діляться на 3. Тоді з останньої рівності дістанемо, що b_0 також ділиться на 3. Суперечність, оскільки $|b_0| = 1$.

Зауваження. Можна скористатися вищенаведеним методом для доведення так званої узагальненої ознаки Ф. Ейзенштейна: нехай $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен з цілими коефіцієнтами, причому існує таке просте p, що $a_n \not\equiv 0 \pmod p$, а для деякого $m \le n - 1$ $a_1 \equiv 0 \pmod p$ при всіх $i = 0, 1, \ldots, m$, але $a_0 \not\equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$. Тоді існує такий незвідний многочлен P степеня більшого за m та деякий многочлен $q(x)$, для яких виконується рівність $f(x)=P(x)q(x)$ для всіх $x\in R$.

II спосіб. Нехай виконується тотожність (1), де $k\geq 1$, $m\geq 1$, і нехай $|a_0|=3$ і $|b_0|=1$. Позначимо $f(x)=P(x)q(x)$, де $P(x)=a_0+a_1x+$ $+...+a_{k-1}x^{k-1}+x^k$, $q(x)=b_0+b_1x+...+b_{m-1}x^{m-1}+x^m$.

Оскільки $f(\pm 1)\neq 0$, то степінь многочлена q є більшим за одиницю (бо інакше $q(0)=\pm 1$, звідси випливало б, що в розкладі многочлена f присутні множники $x-1$ або $x+1$). Розкладемо многочлен q на множники над полем комплексних чисел:

$q(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$. Тоді $|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_m|=|q(0)|=1$.

Зауважимо, що $f(\alpha_j)=0$, $1\leq j\leq m$. Тому $a_j^{n-1}(\alpha_j+5)=-3$, $1\leq j\leq m$.

Перемноживши всі такі рівності, дістанемо

$$\left|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\cdots(\alpha_m+5)\right|=3^m.$$

Це означає, що $|q(-5)|=3^m$, $m>1$. Але $3=|f(-5)|=|P(5)|\cdot|q(-5)|$, що неможливо, бо $|q(-5)|=3^m$ і $m>1$. Отже, многочлен f не можна подати у вигляді добутку двох многочленів з цілими коефіцієнтами.

М.34.2. *I спосіб.* Спочатку доведемо твердження п. б). Проведемо дотичні DT і DS до кіл ADC та BDC (рис. М.34.1). Тоді $\angle ADT=\angle ACD$, $\angle BDS=\angle BCD$. Звідси випливає, що $\angle SDT=\angle BDA-$ $-(\angle BDS+\angle ADT)=90°+\angle C-(\angle BCD+$ $+\angle DCA)=90°$.

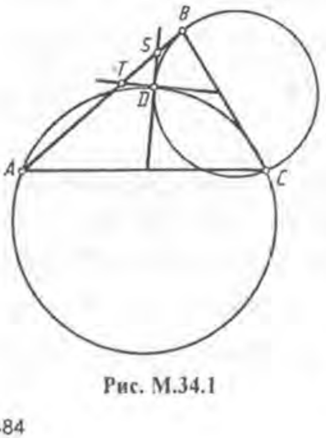


Рис. М.34.1

Кут між дотичними до кіл у точці їх перетину D дорівнює куту між дотичними до цих кіл у точці їх перетину C. Отже, твердження п. б) доведено.

Розглянемо тепер інверсію з центром у точці C і радіусом 1. Кола ACD і BCD

при інверсії перейдуть у взаємно перпендикулярні прямі $A'D'$ і $B'D'$, причому матимемо за властивостями інверсії

$A'B' = \dfrac{AB}{AC \cdot BC}$, $A'D' = \dfrac{AD}{AC \cdot DC}$, $B'D' = \dfrac{BD}{BC \cdot DC}$. Оскільки за умовою $AC \cdot BD = AD \cdot BC$, то $A'D' = B'D'$, а тому $A'B' = \sqrt{2}B'D'$. Тоді дістанемо $\sqrt{2} = \dfrac{A'B'}{B'D'} = \dfrac{AB}{AC \cdot BC} \cdot \dfrac{BC \cdot DC}{BD} = \dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

II спосіб. Позначимо $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$. Тоді $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$. Нехай $\angle DBA = \alpha$, тоді $\angle DBC = \beta - \alpha$. Покладемо $BD = x$, тоді $AD = \dfrac{bx}{a}$.

За теоремою косинусів для трикутника ADB дістанемо $c^2 = \dfrac{b^2x^2}{a^2} + x^2 - \dfrac{2bx^2}{a}\cos(\angle C + 90°) = \dfrac{x^2}{a^2}\left(b^2 + a^2 + 2ab\sin\angle C\right)$. Звідси $x = \dfrac{ac}{\sqrt{d}}$, де $d = a^2 + b^2 + 2ab\sin\angle C$.

Позначимо $\beta = \angle DAB$, тоді за теоремою синусів для трикутника ABD матимемо $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{a}{b}$. Зауважимо, що $\beta = 180° - -(\angle C + 90° + \alpha) = 90° - \angle C - \alpha$, а тому $\sin\beta = \cos(\angle C + \alpha)$; $\dfrac{a}{b} = = \dfrac{\cos(\angle C + \alpha)}{\sin\alpha} = \cos\angle C \operatorname{ctg}\alpha - \sin\angle C$. Звідси $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b\sin\angle C + a}{b\cos\angle C}$. Таким чином, маємо $\sin\alpha = \dfrac{b\cos\angle C}{\sqrt{d}}$, $\cos\alpha = \dfrac{b\sin\angle C + a}{\sqrt{d}}$. За теоремою косинусів для трикутника BCD знаходимо $CD^2 = BD^2 + +BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos(\angle B - \alpha) = \dfrac{a^2c^2}{d} + a^2 - \dfrac{2a^2c}{\sqrt{d}}\cos(\angle B - \alpha)$. Але $\cos(\angle B - \alpha) = \dfrac{(b\sin\angle C + a)\cos\angle B + b\sin\angle B\cos\angle C}{\sqrt{d}} = \dfrac{b\sin\angle A + a\cos\angle B}{\sqrt{d}}$.

Оскільки $BD^2 = \dfrac{a^2c^2}{d}$, то $\dfrac{CD^2}{BD^2} = \dfrac{c^2 + d - 2c(b\sin\angle A + a\cos\angle B)}{c^2} = = \dfrac{2b^2}{c^2}$, бо $a\sin\angle C = c\sin\angle A$. Отже, $\dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{c}{b} \cdot \sqrt{2}\dfrac{b}{c} = \sqrt{2}$.

III спосіб. а) З умови випливає, що $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}$. Проведемо з точки D відрізок DE, який за довжиною дорівнює BD і розбиває кут ADB так, що $\angle EDB=90°$ (рис. M.34.2).

Тоді $\angle EDA=\angle ACB$, а також $\frac{ED}{AD}=\frac{BC}{AC}$, тому трикутники AED та ABC подібні. Маємо $\angle EAD=\angle BAC$ (звідси $\angle EAB=\angle DAC$) та $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$. Отже, трикутники EAB і DAC подібні. Звідси випливає, що $\frac{BE}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Але $BE=BD\sqrt{2}$, тому $\sqrt{2}\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ та $\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}=\sqrt{2}$.

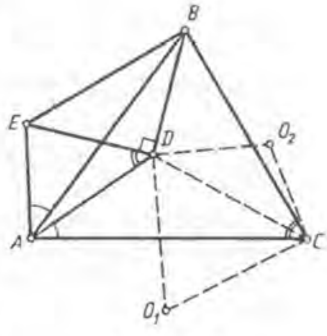


Рис. M.34.2

б) Нехай O_1 та O_2 є центрами описаних кіл трикутників відповідно ADC і BDC. Тоді $\angle DO_1C=2\angle DAC$, з рівнобедреного трикутника CDO_1 маємо $\angle DCO_1=90°-\angle DAC$. Аналогічно $\angle DCO_2=90°-\angle DBC$. Отже, $\angle O_2CO_1=180°-(\angle DAC+\angle DBC)$. Сума кутів неопуклого чотирикутника $ADBC$ дорівнює $360°$, $\angle ADB=\angle ACB+90°$, звідси $\angle DAC+\angle DBC=90°$ та $\angle O_1CO_2=90°$. Отже, дотичні до кіл, описаних навколо ADC і BDC, проведені через C – це прямі відповідно O_2C та O_1C, а вони перпендикулярні.

M.34.3. Розглянемо спочатку випадок, коли n ділиться на 3. Кожній клітинці шахової дошки поставимо у відповідність пару цілих чисел (i,j), які будемо називати координатами клітинки.

Множину всіх клітинок розіб'ємо на три підмножини: A_0 містить клітинки, сума координат яких ділиться на 3, A_1 – ті клітинки, після ділення суми координат яких на 3 маємо остачу 1, A_2 – сума координат, при діленні її на 3 одержуємо остачу 2. Позначимо через $R_i(j)$ кількість фішок, які розташовані в клітинках множини A_i після j-го ходу, $i=0,1,2$; $j=0,1,2,\ldots$ Легко помітити, що $R_0(0)=R_1(0)=R_2(0)=\frac{n^2}{3}$, тобто всі $R_i(0)$ мають однакову парність. Якщо виконати будь-який хід, то одне з чисел $R_0(j), R_1(j), R_2(j)$ збільшується на 1, а два інших зменшуються на 1. Тому для будь-якого j числа $R_0(j), R_1(j), R_2(j)$ мають однакову парність. Якби гра завершилася відповідно до вимог умови, то $R_i(n^2-1)=1$ для деякого значення i, а для двох інших значень $R_i(n^2-1)=0$. Суперечність. Отже, якщо $n=3k$, то за будь-якої гри не можливо залишити на дошці лише одну фішку. Тепер індукцією по n доведемо, що коли n не ділиться на 3, то гра може завершитися з однією фішкою на дошці.

Для $n=1$ і $n=2$ твердження є очевидним. Далі зауважимо таке: якщо множина фішок на дошці містить чотири фішки у вигляді літери L (рис. М.34.3), а клітинка, яка симетрична фішці 4 відносно фішки 3 є порожньою, то ряд фішок 1, 2, 3 можна вилучити.

Рис. М.34.3

Справді, фішка 4 стрибає через фішку 3, 1 – через 2 і 4 – через 1. Отже, фішки 1, 2, 3 вилучаються, а фішка 4 повертається до вихідного розташування. Припустимо, що твердження задачі виконується для всіх значень, які є меншими, ніж n і при діленні на 3 мають остачу 1 або 2. У квадраті розмірами $n\times n$, $n>3$, відповідно до зауваження, вилучаємо спочатку смугу $3\times(n-3)$ праворуч зверху, потім смугу $(n-3)\times 3$ праворуч знизу і, нарешті, квадрат 3×3 ліворуч знизу (рис. М.34.4).

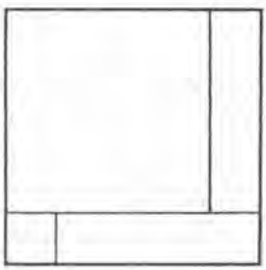


Рис. М.34.4

Дістанемо квадрат розмірами $(n-3)\times$ $\times(n-3)$, для якого твердження задачі є правильним за припущенням індукції. Таким чином, гра може завершитися з однією фішкою на дошці тоді й тільки тоді, коли n не ділиться на 3.

М.34.4. Якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то $m(ABC)=0$

і нерівність виконується для будь-якої точки X на площині. Якщо A, B і C не лежать на одній прямій, то площина розбивається на сім областей $R_0, R_1, \ldots, R_6$ (рис. М.34.5).

Розглянемо всі можливі випадки розташування точки X.

Випадок 1. Припустимо, що точка X лежить в R_0, включаючи й межу (рис. М.34.6).

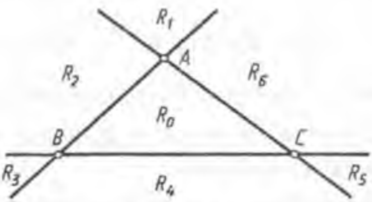


Рис. М.34.5

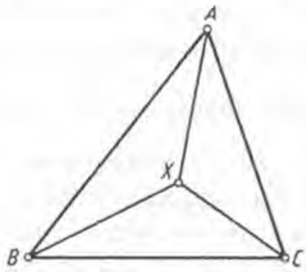


Рис. М.34.6

Нехай BC є найбільшою стороною трикутника ABC. Тоді висота, яку проведено до BC, є найменшою. Для площі маємо рівність $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABX} + S_{\Delta AXC} + S_{\Delta XBC}$. Розділивши на $\frac{1}{2}$ BC та враховуючи, що будь-яка сторона кожного з трикутників не перевищує BC, отримаємо

$$m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC). \qquad (1)$$

Випадок 2. Припустимо, що точка X лежить в R_1, R_3 або R_6, включаючи межу (рис. М.34.7).

Тоді трикутник ABC повністю лежить всередині трикутника XBC, AXC або ABX.

Зрозуміло, що найменша висота трикутника ABC, тобто найменша ширина смуги, в якій можна розмістити трикутник ABC, є меншою або дорівнює найменшій висоті більшого трикутника. Знову отримаємо нерівність (1), бо $m(ABC)$ не перевищує одного з доданків правої частини (1).

Випадок 3. Припустимо, що точка X лежить в одній з областей, що досі не розглядалися, наприклад, в R_2 (рис. М.34.8). Відрізок CX

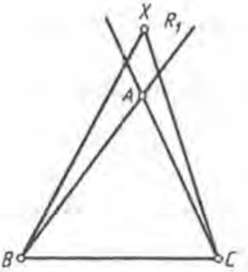


Рис. М.34.7

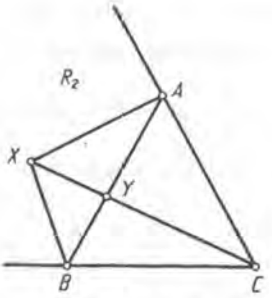


Рис. М.34.8

перетинає сторону AB у точці Y. Тоді, за доведеним вище, маємо $m(ABY) \le m(ABX)$, $m(AYC) \le m(AXC)$, $m(YBC) \le m(XBC)$. Отже, $m(ABC) \le m(ABY) + m(AYC) + m(YBC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.

М.34.5. *І спосіб.* Маємо $f(1) = 2$. Тоді, згідно з умовою 2), послідовно визначаємо:

$$f(2) = f(f(1)) = f(1) + 1 = 3,$$

$$f(3) = f(f(2)) = f(2) + 2 = 3 + 2 = 5,$$

$$f(5) = f(f(3)) = f(3) + 3 = 5 + 3 = 8, \ \ldots$$

Легко довести за індукцією для натуральних чисел, що для членів послідовності Фібоначчі a_k маємо $a_{k+1} = f(a_k), k \ge 1$.

Залишилося визначити нашу функцію для натуральних чисел, які не є членами послідовності Фібоначчі, тобто визначити $f(4)$, $f(6), f(7), \ldots$

Зауважимо, що коли $n \in N$ є членом послідовності Фібоначчі, то $f(n)$ – наступний за ним член цієї послідовності. Відомо, що $f(n) \approx n\varphi$, де $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Тому введемо до розгляду допоміжну функцію $g(n) = n\varphi$, визначену на всій множині натуральних чисел. Тоді

$$g(g(n)) = g(n)\varphi = = \varphi^2 n = (\varphi + 1)n = \varphi n + n = g(n) + n.$$

Але функція $g(n)$ не набуває цілих значень, бо φ – число ірраціональне. Порівнюючи значення функцій $f(n)$ і $g(n)$ для $n=1,2,3,...$ помічаємо, що за модулем вони відрізняються менше, ніж на $\frac{1}{2}$. Тому можна припустити, що функція

$$f(n)=\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right], \tag{1}$$

де $n\in N$ ($[x]$ – ціла частина x), є шуканою. Покажемо, що це саме так. З цією метою скористаємося такими властивостями цілої частини:

а) $[x+y]\geq[x]+[y]$,

б) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=m\Leftrightarrow|x-m|<\frac{1}{2}$,

де x, y – довільні ірраціональні числа, m – ціле число.

Маємо

$$f(1)=\left[\varphi+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right]=2;$$

$$f(n+1)=\left[\varphi(n+1)+\frac{1}{2}\right]=\left[(\varphi n+\frac{1}{2})+\varphi\right]\geq\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]+[\varphi]=f(n)+1.$$

З властивості б) маємо, що

$$|f(n)-g(n)|<\frac{1}{2} \tag{2}$$

для всіх натуральних n, де $g(n)=n\varphi, n\in N$.

Нехай $|f(f(n))-f(n)-n|=r$.

Тоді $r\leq\left|g\left(f(n)\right)-f(n)-n\right|+\left|f\left(f(n)\right)-g\left(f(n)\right)\right|<\left|g\left(f(n)\right)-\right.$ $\left.-f(n)-n\right|+\frac{1}{2}.$

Звідси $r-\frac{1}{2}<\left|\varphi\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]-\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]-n\right|=\left|(\varphi-1)\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]-n\right|=$

$$=\left|\frac{1}{\varphi}\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]-n\right|=\frac{1}{\varphi}\left|\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]-\varphi n\right|=\frac{1}{\varphi}|f(n)-g(n)|<\frac{1}{2\varphi}<\frac{1}{2}.$$

Отже, $0\le r<1$. Але r має бути цілим. Тому $r=0$. Це означає, що $f(f(n))-f(n)-n=0$, тобто $f(f(n))=f(n)+n$. Таким чином, функція $f(n)=\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]$, де $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, задовольняє всі умови задачі.

II спосіб. Покажемо, що така функція існує. Покладемо $f(1)=2$, $f(2)=3$. Далі, для послідовних натуральних чисел $k=1,\ 2,\ \ldots$ визначимо $f(n)$ для всіх $n: f(k)<n\le f(k+1)$. При цьому перевіримо виконання умов:

1) $f(f(k))=f(k)+k$;

2) для всіх n $f(n+1)-f(n)$ має дорівнювати 1 або 2.

Візьмемо спочатку $k=1$, тоді $f(k)=2,\ f(k+1)=3$. Для $n=3$ візьмемо $f(3)=5$. Умови 1) та 2) виконуються.

Нехай визначили $f(n)$ для всіх $n\le f(k)$. Зробимо наступний крок для $f(k)<n\le f(k+1)$. З умов 1) та 2) маємо, що $f(k)\ge k+1$, тому $f(k+1)$ вже визначено. За умовою 2) $f(k+1)-f(k)$ дорівнює 1 або 2. Якщо $f(k+1)=f(k)+1$, то $f(f(k+1))=f(k)+k+2$. Якщо $f(k+1)=$ $=f(k)+2$, то покладемо $f(f(k)+1)=f(k)+k+2$, $f(f(k+1))=$ $=f(k)+k+3$. Так визначимо $f(n)$ для всіх $n\le f(k+1)$. Легко помітити, що $f(f(k+1))=f(k+1)+k+1$, 1) та 2) продовжують виконуватися, і можемо робити наступний крок. Так визначаються значення $f(n)$ для всіх n.

III спосіб. За індукцією отримаємо

$$f(F_n)=f(F_{n-1})+F_{n-1}=F_n+F_{n-1}=F_{n+1}, \tag{3}$$

де F_n є n-й член послідовності Фібоначчі. Тому функцію f можна означити для всіх чисел Фібоначчі. Тепер потрібно означити функцію f для решти натуральних чисел.

З огляду на (3), функцію f можна подати у вигляді

$$f(k) = k + g(k), \tag{4}$$

де $g(k)$ – деяка функція, що набуває цілочислових значень. Оскільки f має бути строго зростаючою, то функція g має бути неспадною і такою, що $g(F_n) = F_{n-1}$. Якщо для деяких натуральних чисел p і q маємо $f(p) = q$, то, згідно з (4), покладемо $f(q) = q + g(q) = q + p$, тобто будемо визначати $g(q)$ таким чином, щоб числа $g(q) = p$ належали до множини $M = \{p : f(p) = q\} = \{f^{-1}(q)\}$.

У випадку, коли $f^{-1}(q)$ не є визначеною, можна змінити конструкцію функції g з огляду на те, що вона не є спадною, в такий спосіб

$$g(q) = \max\{p : f(p) \le q\}.$$

Тепер природним виглядає таке означення $f : N \to N$

$$f(n) = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ n + \max\{j < n : f(j) \le n\}, & n > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Якщо $m < n$, то з нерівності $f(j) \le m$ випливає нерівність $f(j) \le n$.

Тому виконується нерівність $\max\{j < m : f(j) \le m\} \le$ $\le \max\{j < n : f(j) \le n\}$. Це означає, що $f(m) < f(n)$, тобто функція (5) є строго зростаючою. Зауважимо, що $f(n) > n$ для всіх $n \in N$, а отже, $f(f(n)) = f(n) + \max\{j < f(n) : f(j) \le f(n)\} = f(n) + n$.

Таким чином, функція f, яку подано у вигляді (5), задовольняє умови задачі.

IV спосіб. Нехай $f : N \to N$ зростаюча функція, що задовольняє умову 2). Будь-яка ітераційна послідовність $\{m, f(m), f(f(m)), \ \ldots \}$ є послідовністю Фібоначчі. Побудуємо такі послідовності:

F^1: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

F^2: 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, ...

F^3: 7, 11, 18, 29, 47, 76 ...

F^4: 9, 14, 23, 37, 60, 97, ...

F^5: 12, 19, 31, 50, 81, 131, ...

F^6: 15, 24, 39, 63, ...

F^7: 17, 27, 44, 71, ...

Послідовність $\{F^1\}$ є послідовністю Фібоначчі, перший член якої $m_1 = 1 = F_1^1$, а другий $2 = F_1^2$. Послідовність $\{F^2\}$ є послідовністю Фібоначчі, перший член якої $m_2 = 4 = F_1^2$.

Зауважимо, що 4 є найменшим натуральним числом, яке не належить до послідовності $\{F^1\}$. Другий член F_2^2 послідовності $\{F^2\}$ вибираємо за правилом: оскільки $f(3) = 5$, то вимагатимемо, щоб $f(4) > f(3)$, а тому покладемо $f(4) = 6$.

Послідовність $\{F^3\}$ є послідовністю Фібоначчі, перший член якої $m_3 = 7 = F_1^3$. Це найменше число, яке не міститься серед членів послідовностей $\{F^1\}$ і $\{F^2\}$. Другий член F_2^3 послідовності $\{F^3\}$ виберемо за правилом: оскільки $f(6) = 10$ і має бути $f(7) > f(6)$, то покладемо $f(7) = 11 = F_2^3$.

Продовжуючи цей процес, побудуємо послідовності $\{F^1\}, \{F^2\}, ..., \{F^k\}$. Тоді існує послідовність $\{F^{k+1}\}$, у якої $m_{k+1} = F_1^{k+1}$ є найменше натуральне число, яке не міститься серед членів послідовностей $\{F^1\}, \{F^2\}, ..., \{F^k\}$. Другий член F_2^{k+1} послідовності $\{F^{k+1}\}$ вибираємо за правилом $F_2^{k+1} = F_{j+1}^i + 1$, де $F_j^i = m_{k+1} - 1$, $1 \le i \le k$.

Значення функції $f(n)$ при $n=1, 2, ..., 18$ наведемо в таблиці

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	18	19	21	23	24	26	27	29

Тепер звернемо увагу на умови, що забезпечують монотонність побудованої в такий спосіб функції f. Будемо говорити, що послідовність F^i перемежовується з послідовністю F^j, якщо існує $k \geq 1$ такий, що $F^j_{k+n-1} < F^i_n < F^j_{k+n}$, $n \geq 1$.

Неважко показати, що будь-яка з побудованих вище послідовностей Фібоначчі перемежовується з усіма послідовностями Фібоначчі, що їй передують.

Таким чином, існує послідовність послідовностей Фібоначчі F^1, F^2, F^3, ... така, що кожна з них перемежовується з усіма, що їй передують і перший член m послідовності F^k є найменше натуральне число, яке не є членом жодної з послідовностей F^1, F^2, ..., F^{k-1}. Будь-яке натуральне число є членом точно однієї з цих послідовностей. Отже, функція $f: N \to N$, яку побудовано за допомогою послідовності послідовностей Фібоначчі, є строго зростаючою і задовольняє дане функціональне рівняння.

М.34.6. *І спосіб.* а) Якщо відомий стан системи після кроку S_j, то однозначно визначається стан системи після кроку S_{j-1}, S_{j-2} і т. д. Адже якщо після S_j лампа L_{j-1} вимкнута, то після S_{j-1} стан системи не змінився. Якщо після S_j лампу L_{j-1} увімкнуто, то після S_{j-1} стан лампи L_j був іншим.

Кількість всіх можливих станів системи є скінченною (не більша за 2^n). Тому після достатньої кількості кроків деякий стан повториться двічі – нехай це буде після K і N кроків, $K < N$. З вищенаведених міркувань випливає, що стани системи були однаковими після $K-1$ та після $N-1$ кроків, були однаковими після $K-2$ та після $N-2$ кроків, ..., після 0 та $N-K$ кроків. Отже, після $N-K$ кроків система повернеться до початкового стану.

б) Позначимо через 1 стан лампи "увімкнута", через 0 – стан лампи "вимкнута" (будемо, наприклад, писати $L_0 = 1$). Запишемо в рядок лампи L_{n-1}, L_0, L_1, ..., L_{n-2} і під ними, заповнюючи рядок за рядком, будемо записувати стан L_0 після S_0, L_1 після S_1, ..., L_{n-2} після S_{n-2}, у наступному рядку – L_{n-1} після S_{n-1}, L_0 після S_n, L_1 після S_{n+1} і т. д.

Для $n = 2$ маємо

$$\begin{array}{cc} L_{-1} & L_0 \\ & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Після третього кроку система повернулася до початкового стану.

Далі індукцією за k доведемо, що для $n = 2^k$ після $(n^2 - 1)$-го кроку система повернеться до початкового стану, причому в усіх рядках, крім останнього, під L_{n-2} буде стояти нуль.

Щойно ми перевірили правильність цього твердження для $k = 1$. Нехай воно виконується для k, доведемо його для $k+1$. Позначимо $m = 2^k$, тоді $2m = 2^{k+1}$.

Розіб'ємо всю множину ламп на дві половини: L_{2m-1}, L_0, L_1, ..., L_{m-2} та L_{m-1}, L_m, L_{m+1}, ..., L_{2m-2}. Після перших $2m$ кроків матимемо $L_{m-2} = 0$, $L_{2m-2} = 0$. Оскільки $L_{2m-2} = 0$, то перша половина наших ламп буде змінювати свій стан так, ніби це окрема множина з m ламп. З припущення індукції для m ламп випливає, що постійно матимемо $L_{m-2} = 0$, тобто L_{m-2} не впливатиме на другу половину. Оскільки і друга половина буде змінюватись незалежно, то постійно матимемо $L_{2m-2} = 0$. Так буде продовжуватися, доки всі лампи L_{2m-1}, L_0, L_1, ..., L_{m-2} не повернуться до стану "увімкнута" (легко пересвідчитися, що перед цим матимемо $L_{2m-1} = L_{m-1} = 1$, інші $L_i = 0$). Ці зміни можна записати так:

$$\begin{array}{ccccccccccc} L_{2m-1} & L_0 & L_1 & \ldots & L_{m-3} & L_{m-2} & L_{m-1} & L_m & \ldots & L_{2m-3} & L_{2m-2} \\ & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}$$

За припущенням індукції, на ці зміни в першій половині ламп було витрачено m^2-1 кроків, отже m^2-1 кроків було зроблено і в другій половині. Потім ще після m кроків отримаємо $L_{m-2}=0$, в другій половині і далі будуть лишатися лише нулі, і друга половина не вплине на зміни серед L_{2m-1}, L_0, L_1, ..., L_{m-2}. Отже, ці зміни будуть такі:

L_{2m-1}	L_0	L_1	…	L_{m-3}	L_{m-2}	L_{m-1}	L_m	…	L_{2m-3}	L_{2m-2}
	0	1	…	1	0	0	0	…	0	0
………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………
1	0	0	…	0	0	1	0	…	0	0
1	1	1	…	1	1	1	1	…	1	1

Тут один крок знадобиться спочатку для L_{2m-1}, потім m^2-1 кроків потрібно здійснити, щоб в першій половині всі лампи повернулися до стану "увімкнута", і також m^2-1 кроків будуть витрачені на другу половину ламп (щоправда, там вони нічого не змінюватимуть).

Отже, всього буде витрачено $2(m^2-1)+1+2(m^2-1)=(2m)^2-1$ кроків. При цьому завжди $L_{2m-2}=0$, крім початкового та кінцевого станів. Крок індукції обґрунтовано.

в) Будемо наші лампи записувати в порядку L_1, L_2, ..., L_{n-1}, L_0.

Нехай $n=2^k+1$. Після n кроків маємо $L_{n-1}=0$, $L_0=0$. На $(n+1)$-му кроці L_0 не вплине на стан інших ламп, лампи L_1, L_2, ..., L_{n-1} будуть змінюватися так, ніби L_0 немає. Для $n-1=2^k$ ламп в п. б) довели, що остання з них (такою буде L_{n-1}) вимкнута завжди, крім початку і кінця. Тому і L_0 надалі не змінить свого стану, буде завжди вимкнута і не впливатиме на інші лампи. Маємо такі зміни:

L_1	L_2	…	L_{n-2}	L_{n-1}	L_0
1	0	…	1	0	0
………	………	………	………	………	………
1	0	…	0	0	0
1	1	…	1	1	1

Щоб повернути до початкового стану 2^k ламп, потрібно 2^k разів обійти коло (див. п. б)). Тому тут $n-1=2^k$ разів обійдемо коло, виконуючи при кожному обході n кроків і ще один крок, потрібний на саму першу дію з лампою L_0. Всього маємо $n(n-1)+1=n^2-n+1$ кроків.

II спосіб. Розв'яжемо цю задачу засобами лінійної алгебри. Нехай $X=\{0,1\}^n$ – n-вимірний арифметичний векторний простір над полем з двох елементів $\{0,1\}$. Існує взаємно однозначна відповідність між станами ламп і векторами $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in X$, а саме: $a_i = 0$, якщо лампу L_i вимкнуто і $a_i = 1$, якщо лампа L_i є увімкнутою. Позначимо через R і T такі лінійні перетворення в просторі X : R: $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \to (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_0)$, T: $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \to (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_{n-1} + a_0)$. Легко помітити, що R і T є оберненими і операцію S_j, про яку йдеться в умові, можна подати як композицію цих перетворень: $S_j = R^{-(j+1)}TR^j$. Звідси $S_{m-1}S_{m-2}\cdots S_0 = R^{-m}T^m$ для будь-якого цілого невід'ємного m. Стан векторів $V(m)$, $m \geq 0$, визначимо за індукцією таким чином: $V(0)=(1,1,...,1)$, $V(m)=S_{m-1}(V(m-1))$. Маємо $V(m)=S_{m-1}\,S_{m-2}\cdots S_0(V(0))=R^{-m}\,T^m\,(V(0))$. Оскільки перетворення R^{-m} не змінює вектор $V(0)$, то для виконання рівності $V(m)=$ $=V(0)$ досить, щоб $T^m = I$, де I – тотожне перетворення простору X. Оскільки X є скінченною множиною і T – взаємно однозначне перетворення, то таке число m обов'язково існує. Отже, твердження а) доведено. Перетворення T задовольняє рівняння $T^n = T^{n-1}+I$. Тоді, покладаючи $S=T^{-1}$, знаходимо $S^n=S+I$. Зауважимо, що $T^m=$ $=I$ тоді й тільки тоді, коли $S^m = I$.

Нехай $n=2^k$. Тоді $S^{n^2}=(S^n)^n-(S+I)^{2^k}=S^{2^k}+I=S^n+I=S+I+I=S$ і $S^{n^2-1}=I$. Тому $T^{n^2-1}=I$ і твердження б) доведено.

Нехай $n=2^k+1$. Оскільки $n-1$ є степенем двійки, то $S^{n^2-n}=(S^n)^{n-1}=(S+I)^{2^k}=S^{n-1}+I$, звідси $S^{n^2-n+1}=S^n+S=S+I+S=I$. Отже, $T^{n^2-n+1}=I$ і твердження в) доведено.

Олімпіада 35
(*Гонконг, 1994 р.*)

M.35.1. Нехай $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}, a_1 > a_2 > ... > a_m$. Доведемо, що $a_i + a_{m+1-i} \geq n+1$ для всіх i. Справді, якщо $a_i + a_{m+1-i} \leq n$ для деякого i, то $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < ... < a_i + a_{m+1-i} \leq n$. Але всі i чисел $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, ..., a_i + a_{m+1-i}$ не можуть належати A, бо в A існує лише $i-1$ різних чисел $a_1 > a_2 > ... > a_{i-1}$, більших за a_i. Звідси випливає, що $2(a_1 + a_2 + ... + a_n) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + ... + (a_m + a_1) \geq m(n+1)$, тобто $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$.

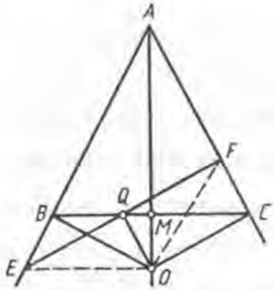


Рис. M.35.1

M.35.2. *I спосіб.* Припустимо спочатку, що $OQ \perp EF$. Тоді чотирикутники $BOQE$ і $OQCF$ є вписаними до кіл з діаметрами відповідно EO і OF, а тому $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OCQ = \angle OFQ$, тобто трикутник EOF є рівнобедреним і $EQ = QF$ (рис. M.35.1).

Покажемо тепер, що правильним є й обернене твердження. Міркування проведемо методом від супротивного. Нехай $EQ = QF$. Припустимо, що OQ не є перпендикуляр до EF. Позначимо через Q' точку перетину перпендикуляра, проведеного з точки O на EF, з прямою BC. Проведемо через точку Q' пряму $E'F' \parallel EF$. Тоді, за доведеним вище, $E'Q' = Q'F'$. Позначимо через K точку перетину $Q'A$ з EF. Тоді $EK = KF$. Але $K \neq Q$, отже $EQ \neq QF$. Суперечність.

Зауваження 1. Точка Q, середина EF, лежить на відрізку BC. Справді, оскільки $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$, то $\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE})$. Вектори $\overrightarrow{CF}$ і $\overrightarrow{BE}$ рівні за довжиною, тому вектор, який є їх півсумою, напрямлений по бісектрисі кута між їх напрямами.

Зауваження 2. Обернене твердження задачі можна довести ще так. Нехай $EQ = QF$. Тоді $\frac{EQ}{QF} = \frac{AE \sin\angle EAQ}{AF \sin\angle FAQ}, \frac{CQ}{QB} = \frac{\sin\angle FAQ}{\sin\angle EAQ}$, звідси

$$\frac{CQ}{QB}=\frac{AE}{AF}. \tag{1}$$

Оскільки точки E, Q, F лежать на одній прямій, то за теоремою Менелая маємо

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{FC}{FA}=1. \tag{2}$$

З рівностей (1) і (2) отримуємо $FC = BE$. Оскільки $OC = OB$ і $\angle OCF = \angle OBE = 90°$, то трикутники OCF і OBE є рівними, а тому $OE = OF$. Звідси випливає, що $OQ \perp EF$, оскільки ΔEOF – рівнобедрений і Q – середина EF.

II спосіб. Виберемо систему координат, в якій точка M є початок, а BC лежить на осі абсцис. Позначимо координати точок A, B, C відповідно через $(0,a),(-b,0)$ і $(b,0)$. Запишемо рівняння прямих AB і AC відповідно: $ax-by+ab=0$ і $ax+by-ab=0$. Оскільки $OB \perp AB$, то рівняння прямої OB має вигляд $bx+ay+b^2=0$. Точка O має координати $\left(0,-\frac{b^2}{a}\right)$, бо лежить на осі ординат. Нехай координатами точок E, F, Q є відповідно $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ і $(q,0)$, де $q \neq \pm b$. Тому $OQ \perp EF$ тоді й тільки тоді, коли $\frac{b^2}{aq}\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$, звідси

$$b^2(y_2-y_1)+aq(x_2-x_1)=0. \tag{3}$$

Припустимо, що $QE = QF$. Тоді $2q=x_1+x_2$, $0=y_1+y_2$. Оскільки E лежить на AB і F – на AC, то дістанемо відповідно

$$ax_1-by_1+ab=0,\quad ax_2+by_2-ab=0. \tag{4}$$

Додаючи ці рівняння, отримаємо $a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)=0$ або $b(y_1-y_2)=2qa$. Маємо також, що $a(x_1-x_2)-b(y_1+y_2)+2ab=0$, звідси $x_1-x_2=-2b$, бо $y_1+y_2=0$. Таким чином, $OQ \perp EF$. Навпаки, якщо $OQ \perp EF$, то маємо (3) і правильними є рівняння (4). Це можна записати ще так: $-a(x_1+x_2)-q(y_1+y_2)+2qa=0$ або $\frac{x_1+x_2}{2}\frac{1}{q}+$ $+\frac{y_1-y_2}{2}\frac{1}{a}=1$. Звідси випливає, що Q є серединою EF.

М.35.3. а) Позначимо через B_k множину тих чисел від 1 до k, двійковий запис яких містить точно три одиниці, а через $g(k)$ – число елементів множини B_k. Зрозуміло, що $g(k)$ є неспадною функцією і $f(k)=g(2k)-g(k)$. Тому $f(k+1)-f(k)=g(2k+2)-g(k+1)-$ $-(g(2k)-g(k))=g(2k+2)-g(2k)-(g(k+1)-g(k))$. Зрозуміло, що $2k+2\in B_{2k+2}$ тоді й тільки тоді, коли $k+1\in B_{k+1}$. Тому різниця $f(k+1)-f(k)$ не може збільшитися одразу на 2, бо

$$f(k+1)-f(k)=\begin{cases}1, \text{ якщо } 2k+1\in B_{2k+2};\\ 0, \text{ якщо ні}.\end{cases}$$

Оскільки $f(k)$ необмежено зростає, то ця функція набуває значень всіх натуральних чисел.

б) Рівняння $f(k)=m$ має єдиний розв'язок для деякого m тоді й тільки тоді, коли $f(k+1)-f(k)=1=f(k)-f(k-1)$, тобто $2k\pm1\in B_{2k+2}$ і числа k та $k-1$ мають по дві одиниці у двійковому запису, іншими словами, $k=2^n+2,\ n\geq 2$. При цьому $m=f(2^n+2)=1+\frac{1}{2}n(n-1)$, де $n=2,3,\ldots$ Це й є всі потрібні значення m. Наведемо таблицю значень функцій $g(k)$ та $f(k)$ для $2\leq k\leq 2$.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(k)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
$f(k)$	0	0	1	1	2	3	3	3	4	5	5

М.35.4. *Відповідь.* $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(5,2)$, $(2,5)$, $(5,3)$, $(3,5)$. Доведемо спочатку, що пара (m,n) задовольняє умову задачі тоді і тільки тоді, коли цю властивість має й пара (n,m). Дійсно, оскільки НСД $(mn-1;\ m^3)=1$, то $\left(n^3+1\vdots mn-1\right)\Leftrightarrow\left(m^3\left(n^3+1\right)\vdots mn-1\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left(m^3n^3+m^3=m^3n^3-1+m^3+1\vdots mn-1\right)\Leftrightarrow\left(m^3+1\vdots mn-1\right)$.

Досить, таким чином, вважати, що $m \geq n$.

Розглянемо три випадки:

а) $m = n$, тоді $\frac{n^3+1}{mn-1} = n + \frac{1}{n-1}$, звідси $m = n = 2$;

б) $n = 1$, $m > n$. Отримуємо пари $(2,1)$, $(3,1)$;

в) $n \geq 2$, $m > n$. Нехай $x = \frac{n^3+1}{mn-1} + 1 = \frac{n\left(n^2+m\right)}{mn-1}$. Якщо $x \in N$, то $x \vdots n$ (бо НСД$(n;\ mn-1) = 1$), і можемо записати $\frac{n^3+1}{mn-1} = kn-1$, $k \in N$.

Тоді $kn - 1 < \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$, $(k-1)n < 1 + \frac{1}{n-1}$. Звідси випливає, що $k = 1$. При цьому $n^3 + 1 = (n-1)(mn-1)$, $m = \frac{n^2+1}{n-1} = n + 1 + \frac{2}{n-1}$. Отже, $n = 2$ або $n = 3$. Обидва ці значення n дають $m = 5$ (перевіряється безпосередньо). З урахуванням зазначеної вище симетрії отримаємо відповідь.

М.35.5. Припустимо, що $f: S \to S$ є шуканою функцією. Тоді з умови 2) випливає, що рівняння $f(x) = x$ може мати щонайбільше три корені, а саме: можливо, один корінь з інтервалу $(0,1)$, можливо, один корінь з проміжку $(0,\infty)$ і, можливо, $x = 0$.

Нехай $f(u) = u$ для деякого $u \in (-1,0)$. Покладемо в умові 1) $x = y = u$, дістанемо $f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$.

Якщо $-1 < u < 0$, то $0 < u + 1 < 1$, а тому $u^2 + 2u = (u+1)^2 - 1$ також належить інтервалу $(-1,0)$. Отже, $u^2 + 2u = u$, звідси $u = 0$ або $u = -1$. Проте ці корені не належать інтервалу $(-1,0)$. Якщо припустимо, що $f(v) = v$ для деякого $v \in (0,\infty)$, то, міркуючи аналогічно, покажемо, що рівняння $f(x) = x$ також не має коренів і на проміжку $(0,\infty)$.

Таким чином, лише $x = 0$ може бути коренем рівняння $f(x) = x$. З іншого боку, покладаючи в умові 1) $x = y$, дістанемо

$f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x)$ для всіх x з множини S, а тому $x+(1+x)f(x)=0$, звідси $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$.

Покажемо, що дана функція задовольняє умови задачі. Очевидно, що $\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{x+1}$ зростає на проміжках $(-1,0)$ і $(0,\infty)$.

Для будь-яких x і y з множини S маємо

$$y+(1+y)f(x)=y-\frac{x(1+y)}{1+x}=\frac{y-x}{1+x}$$

і

$$f(x+(1+x)f(y))=f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)=-\frac{\dfrac{x-y}{1+y}}{1+\dfrac{x-y}{1+y}}=\frac{y-x}{1+x}.$$

Таким чином, єдиною функцією, яка задовольняє умови задачі, є функція $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$.

М.35.6. Нехай A – множина добутків різних простих чисел виду $q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdots q_{q_1}$, де $q_1<q_2<\ldots<q_{q_1}$, тобто таких, що число співмножників дорівнює найменшому з них: $A=\{2\cdot3, 2\cdot5, 2\cdot7, \ldots, 3\cdot5\cdot7, 3\cdot5\cdot11, \ldots 5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17, \ldots\}$. Тоді для будь-якої множини $S=\{p_1,p_2,p_3,\ldots\}$ простих чисел, де $p_1<p_2<p_3<\ldots$, покладемо $k=p_1$, $m=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_{p_1}$, $n=p_2\cdot p_3\cdots p_{p_1+1}$. Очевидно, що $m\in A$, $n\notin A$.

Олімпіада 36
(*Канада, 1995 р.*)

М.36.1. *І спосіб.* Проведемо відрізок $AU\parallel BP$, де точка U лежить на прямій XY (рис. М.36.1). Оскільки $\Delta AUZ\sim\Delta BPZ$, маємо $\dfrac{ZP}{ZU}=\dfrac{ZB}{ZA}$.

За властивістю хорд кола маємо

$$ZA\cdot ZC=ZX\cdot ZY=ZB\cdot ZD. \qquad (1)$$

Звідси $\dfrac{ZP}{ZU}=\dfrac{ZC}{ZD}$. Тому $\Delta CPZ \sim \Delta DUZ$, $DU \parallel CP$. Оскільки $AM \perp CP$, то $AM \perp DU$ і аналогічно $DN \perp AU$. Також $XY \perp AD$. Прямі AM, DN та XY перетинаються в одній точці, оскільки містять висоти ΔADU.

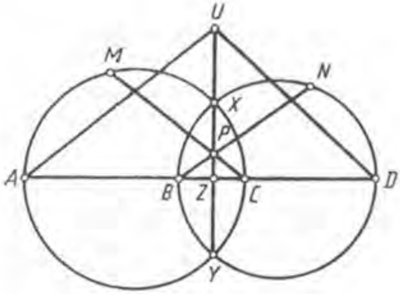


Рис. М.36.1

II спосіб. З рівності (1) маємо $k=\dfrac{AZ}{BZ}=\dfrac{DZ}{CZ}$.

Нехай H – ортоцентр трикутника BPC. При гомотетії з центром Z і коефіцієнтом k пряма BH переходить у пряму AM, CH – в DN, а отже. H переходить у точку Q, яка є точкою перетину прямих AM, XY і DN.

М.36.2. *I спосіб.* Позначимо $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{1}{b}, z=\dfrac{1}{c}$. Тоді $xyz = 1$ і $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(a+c)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

Позначимо цю суму через S. Застосуємо нерівність Коші–Буняковського для таких двох наборів:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}},\frac{y}{\sqrt{z+x}},\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right) \text{ і } \left(\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}\right).$$

Матимемо

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}\sqrt{z+x}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}\right)^2 \le ((y+z)+$$
$$+(z+x)+(x+y))\cdot S.$$

Звідси

$$S \ge \frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}\frac{x+y+z}{3}\ge\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}.$$

II спосіб. Застосуємо нерівність $\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$, $a\in R, b>0$ для оцінки доданків лівої частини:

$$\frac{1}{x^3(y+z)}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{xy}{xyz}+\frac{xz}{xyz}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}=\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}\ge\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right).$$

Звідси $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{1}{4}\left(4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\right.$

$\left.-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{1}{2}3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.$

Рівність досягається тільки при $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c},$ тобто при $a=b=c=1$.

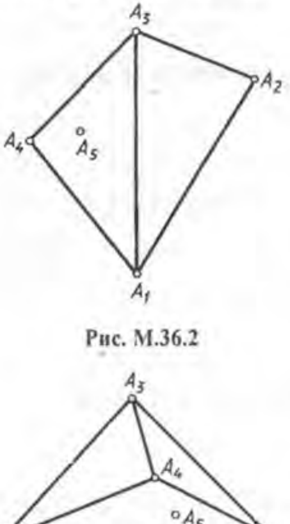


Рис. М.36.2

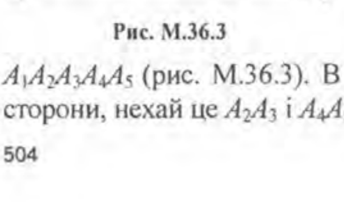


Рис. М.36.3

М.36.3. *Відповідь.* n = 4. Якщо взяти чотири вершини квадрата одиничної площі як точки A_1, A_2, A_3, A_4 та числа $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{6}$, то умова задачі виконується (рис. М.36.2).

Припустимо, що для n = 5 існують точки та числа, що задовольняють умову. Далі площу трикутника $A_iA_jA_k$ будемо позначати через (ijk).

Спочатку помітимо, що якщо $A_iA_jA_kA_l$ є опуклий чотирикутник, то $r_i + r_k = r_j + r_l$. Дійсно, площа цього чотирикутника дорівнює (ijk) + (kli) = (jkl) + (lij). Тому $2r_i + r_j + 2r_k + r_l = r_i + 2r_j + r_k + 2r_l$, $r_i + r_k = r_j + r_l$.

Тепер припустимо, що опуклою оболонкою п'яти наших точок є п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. М.36.3). В ньому існують дві несуміжні непаралельні сторони, нехай це A_2A_3 і A_4A_5. Тоді (234) ≠ (235), звідси $r_4 \ne r_5$. Оскільки

$A_1A_2A_3A_4$ і $A_1A_2A_3A_5$ є опуклими чотирикутниками, маємо $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ та $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$, звідси $r_4 = r_5$. Отримали суперечність.

Нехай опуклою оболонкою наших п'яти точок є чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$. Припустимо, що точка A_5 лежить всередині $\Delta A_3A_4A_1$. Тоді $(351) < (341)$, звідси $r_5 < r_4$. Але $A_1A_2A_3A_5$ є опуклим чотирикутником і, як і в попередньому випадку, отримуємо суперечність.

Залишилося розглянути випадок, коли опуклою оболонкою є трикутник, і нехай це $\Delta A_1A_2A_3$. Припустимо, що точка A_5 лежить всередині $\Delta A_1A_2A_4$. Тоді $(125) < (124)$, $r_5 < r_4$. Але $(124) + (234) + (314) = (123) = (125) + (235) + (315)$, звідси $r_4 = r_5$, і знову маємо суперечність.

Внаслідок того, що $n = 5$ не задовольняє умову задачі, випливає й те, що не підходять всі $n > 5$.

М.36.4. *Відповідь.* $x_0 = 2^{997}$. Друга умова еквівалентна рівності $2x_i^2 - \left(x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}}\right)x_i + 1 = 0$. Розв'язуючи це квадратне рівняння відносно x_i, знаходимо два корені $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$ та $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$. Тепер легко перевірити за індукцією, що для всіх $i \geq 0$ $x_i = 2^{k_i} x_0^{\varepsilon_i}$ для деякого цілого k_i з $|k_i| \leq i$ та $\varepsilon_i = (-1)^{k_i + i}$. Спочатку переконуємося, що це є правильним для $i = 0$, коли $k_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$. Крок індукції від $i - 1$ до i робимо, розглядаючи окремо кожен з двох способів знаходження x_i з x_{i-1}.

Таким чином, маємо $x_0 = x_{1\,995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$ з $|k| \leq 1\,995$ та $\varepsilon = (-1)^{k+1\,995}$. Якщо k непарне, то $2^k = 1$, $k = 0$ – отримали суперечність. Тому k має бути парним, $\varepsilon = -1$ та $x_0^2 = 2^k$. Оскільки k парне та $|k| \leq 1\,995$, буде $k \leq 1\,994$ та $x_0 \leq 2^{997}$. Але значення $x_0 = 2^{997}$ можливе. Для цього x_0 будуємо послідовність так, що $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$ для $i = 1, 2, \ldots, 1\,994$ і $x_{1\,995} = \dfrac{1}{x_{1\,994}}$. Тут маємо $x_0 = x_{1\,995}$.

М.36.5. Помітимо, що BCD і EFA є правильними трикутниками (рис. М.36.4). Тому $BA = BD$, $EA = ED$ і чотирикутник $ABDE$ симетричний відносно прямої BE. Нехай C' та F' – точки, симетричні відповідно точкам C та F відносно BE. Трикутники ABC' і DEF' правильні.

Оскільки $\angle BGA = 120° = 180° - \angle AC'B$, точка G лежить на колі, описаному навколо ΔABC. За теоремою Птолемея для вписаного чотирикутника $AGBC'$ маємо $AB \cdot GC' = AG \cdot BC' + BG \cdot AC'$. З того, що $AB = BC' = AC'$ отримуємо $GC' = AG + BG$. З аналогічних міркувань $HF' = DH + EH$. Тепер маємо

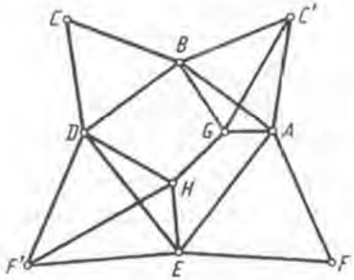


Рис. М.36.4

$$CF = C'F' \le C'G + GH + HF' =$$
$$= AG + GB + GH + DH + HE.$$

М.36.6. *Відповідь.* $\dfrac{C_{2p}^{p} - 2}{p} + 2$.

І спосіб. Для кожної множини A через $s(A)$ позначатимемо суму елементів A. Множина $\{1, 2, ..., 2p\}$ має всього C_{2p}^{p} p-елементних підмножин. Виділимо дві з них: $B = \{1, 2, ..., p\}$ та $C = \{p+1, p+2, ..., 2p\}$. Очевидно, що $s(B) \equiv s(C) \equiv 0 \pmod p$.

Тепер розглянемо p-елементні підмножини $A \subset \{1, 2, ..., 2p\}$, відмінні від B і C. Всього їх $C_{2p}^{p} - 2$. Всі A розіб'ємо на класи таким чином. Множини A та A' будуть належати до одного класу, якщо $A \cap C = A' \cap C$, а множина $A' \cap B$ може бути утворена з множини $A \cap B$ додаванням до кожного елемента $A \cap B$ одного і того ж числа m, $0 \le m < p$ (якщо сума елемента та m перевищує p, беремо замість суми остачу від ділення цієї суми на p). Формально це можна записати так: для деякого m, $0 \le m < p$,

$$A' \cap B = \{x + m : x \in A \cap B, x + m \le p\} \cup \{x + m - p : x \in A \cap B, x + m > p\}.$$

Якщо $A \cap B$ має n елементів, то $s(A') - s(A) \equiv mn \pmod p$. З теорії подільності для простого p відомо, що всі числа mn, $0 \le m < p$, мають різні остачі при діленні на p. Тому множини A', отримані з A для різних m, $0 \le m < p$, будуть всі різні. Отже, кожний клас містить рівно p множин.

Для простого p і n, $0 < n < p$, числа $0, n, 2n, ..., (p-1)n$ разом дають всі можливі остачі при діленні на p. Тому знайдеться рівно одне m таке, що для відповідної множини A' буде $s(A' \cap B) + s(A \cap C) \equiv 0$

(mod p). Отже, в кожному класі з p множин рівно в однієї сума елементів буде ділитись на p. Так отримуємо $\frac{C_{2p}^p - 2}{p}$ множин, до яких ще треба додати дві множини B і C.

II спосіб. Нехай λ – один з первісних коренів степеня p з 1, наприклад, $\lambda = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$. Знайдемо суму

$$\sigma = \sum \lambda^{i_1 + \ldots + i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \lambda^j, \qquad (1)$$

де n_j – число підмножин, для яких $i_1 + i_2 + \ldots + i_p \equiv j(\mathrm{mod}\, p)$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ – всі p-елементні підмножини множини $\{1, 2 \ldots, 2p\}$. Сума σ дорівнює коефіцієнту зі знаком мінус при степені z^p многочлена $(z-\lambda)(z-\lambda^2)\cdots(z-\lambda^{2p}) = ((z-1)(z-\lambda)\cdots(z-\lambda)^{p-1})^2 = (z^p - 1)^2 = z^{2p} - 2z^p + 1$, а тому $\sigma = 2$. Тому з рівності (1) випливає, що λ – корінь многочлена $(n_0 - 2) + n_1 z + \ldots + n_{p-1} z^{p-1} = 0$.

Але (оскільки p – просте) єдиними многочленами з раціональними коефіцієнтами степеня меншого, ніж p, які мають корінь λ, є многочлени виду $A\left(1 + z + \ldots + z^{p-1}\right)$, де A – довільне число. Тому $n_0 - 2 = n_1 = n_2 = \ldots = n_{p-1}$.

Звідси отримуємо $n_0 = p^{-1}(C_{2p}^p - 2) + 2$, бо $n_0 + n_1 + \ldots + n_{p-1} = C_{2p}^p$.

Олімпіада 37
(*Індія, 1996 р.*)

М.37.1. Пронумеруємо одиничні квадрати парами чисел (i,j), $1 \le i \le 20$, $1 \le j \le 12$, як на координатній площині. Тоді з квадрата (i, j) перейти до квадрата $(i + a, j + b)$ можна тоді й лише тоді, коли $a^2 + b^2 = r$.

а) Якщо r парне, то числа a і b будуть мати однакову парність, сума $a + b$ має ділитися на 2. Тому в квадратах (i,j), в які може потрапити монета, парність сум $i + j$ буде одна й та сама. Отже, не можна з квадрата (1,1) потрапити до квадрата (20,1).

Якщо $a^2 + b^2 = r$, де r ділиться на 3, то a і b мають ділитися на 3 (це легко перевірити перебором можливих остач чисел a і b). Тоді координати (i, j) квадрата з монетою можна змінювати лише на числа, кратні трьом, і знову не можна потрапити з квадрата (1,1) до квадрата (20,1) ($20 - 1 = 19$ не ділиться на 3).

б) $73 = 3^2 + 8^2$, тому з квадрата (i, j) можна переходити до $(i \pm 3, j \pm 8)$ або $(i \pm 8, j \pm 3)$. Можливий, наприклад, такий шлях:

$$(1,1) \to (4,9) \to (12,6) \to (20,3) \to (17,11) \to (9,8) \to (1,5) \to (9,2) \to$$
$$\to (12,10) \to (4,7) \to (12,4) \to (20,1).$$

в) Число 97 подається у вигляді суми двох квадратів єдиним способом: $97 = 4^2 + 9^2$. Тому з квадрата (i, j) можна переходити тільки до $(i \pm 4, j \pm 9)$ або $(i \pm 9, j \pm 4)$. Позначимо через K множину всіх квадратів (i, j) таких, що $1 \le i \le 20$, $5 \le i \le 8$, через L – множину всіх інших даних квадратів. Тоді хід вигляду $(\pm 9, \pm 4)$ переведе нас із квадрата з множини K до квадрата з множини L, і навпаки, хід вигляду $(\pm 4, \pm 9)$ можливий тільки в квадратах з L, і залишає нас у множині L.

Обидва квадрати (1,1) та (20,1) належать L. Тому для виконання завдання з L до K треба перейти стільки ж разів, як і з K до L, і загальна кількість переходів буде парною. Кожний перехід з однієї множини до іншої змінює першу координату на ± 9 і тим самим змінює її парність. Отже, одержуємо парну кількість змін парності, але числа 1 та 20 мають різні остачі при діленні на 2. Тому дане завдання виконати не можна.

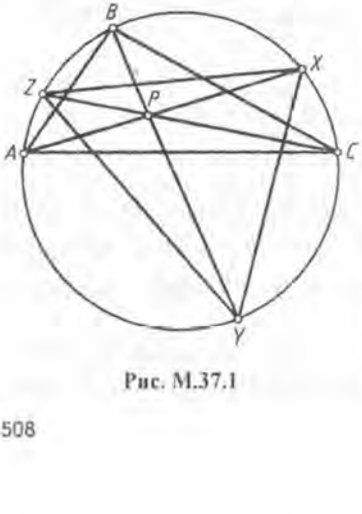


Рис. М.37.1

М.37.2. *І спосіб.* У задачі вимагається довести, що бісектриси кутів ABP і ACP перетинаються на AP (рис. М.37.1). Нехай Γ – це коло, описане навколо трикутника ABC, і прямі AP, BP, CP перетинають Γ ще в точках відповідно X, Y, Z. Умова $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ еквівалентна умові $\angle PAC + \angle PBC = \angle PAB + \angle PCB$ (це перевіряється розгляданням кутів у трикутниках PAB, PBC, PCA). Остання рівність еквівалентна рівності $\angle XZY =$

$=\angle XYZ$ (скористалися властивістю вписаних кутів, які спираються на одну дугу). Таким чином, $XY = XZ$. Знову використавши рівність відповідних вписаних кутів, одержимо, що ΔBPC подібний до ΔZPY і $\frac{BC}{ZY}=\frac{BP}{ZP}=\frac{PC}{PY}$. Нехай $BP\cdot PY=a$, тоді $a=PC\cdot ZP=AP\cdot PX$. Далі маємо за властивістю хорд, що перетинаються, $\frac{BC}{ZY}=\frac{BP}{ZP}=\frac{BP\cdot PC}{a}$, звідси $YZ=a\frac{BC}{BP\cdot PC}$.

Аналогічно $XY=a\frac{AB}{AP\cdot BP}$, $XZ=a\frac{AC}{AP\cdot PC}$.

З того, що $XY = XZ$, випливає $\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{PC}$. Бісектриси кутів ABP і ACP ділять відрізок AP в одному й тому ж відношенні, і тому перетинають AP в одній і тій самій точці.

II спосіб. Лема (наслідок теореми Чеві). Три чевіани трикутника перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли спряжені до них чевіани (симетричні відносно бісектрис відповідних кутів) перетинаються в одній точці. Доведення цієї леми випливає з теореми синусів і теореми Чеві. Точку перетину спряжених чевіан будемо називати спряженою.

Позначимо через Q точку перетину чевіан, симетричних CP, AP і BP відносно бісектрис кутів ACB, BAC, ABC (рис. М.37.2).

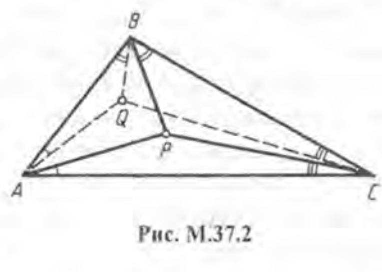


Рис. М.37.2

Доведемо, що $\angle AQB=\angle AQC$. Дійсно, з умови задачі випливає, що $\angle APB-\angle ACB=360°-\angle BPC-\angle APC-\angle ACB=(180°-\angle BCP-$ $-\angle BPC)+(180°-\angle ACP-\angle CPA)=\angle PBC+\angle PAC$.

Аналогічно знаходимо, що $\angle APC-\angle ABC=\angle PAB+\angle PCB$.

Звідси маємо $\angle AQB=180°-\angle QAB-\angle QBA=180°-\angle PAC-\angle PBC=$ $=180°-\angle PAB-\angle PCB=180°-\angle QAC-\angle QCA=\angle AQC$.

Отже, $\angle AQB=\angle AQC$, а тому точка F, яка є центром кола, вписаного в трикутник BQC, лежить на AQ.

Залишилося довести, що точка F є спряженою до точки перетину прямих AP, BD і CE. Це справді так, бо за означенням чевіана AQ, а отже, і AF, є спряженою до AP. Оскільки $\angle CBF = \frac{1}{2}\angle CBQ = = \frac{1}{2}\angle PBA = \angle DBA$ і аналогічно, якщо $\angle FCB = \angle ECA$, то BD і CE є спряженими відповідно до BF і CE. Звідси за лемою випливає твердження задачі.

М.37.3. Підставляючи $m = n = 0$, маємо $f(0) = 0$. Внаслідок підстановки $m = 0$ далі одержуємо $f(f(n)) = f(n)$ для всіх $n \in S$. Тому дане рівняння зводиться до

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n). \qquad (1)$$

Бачимо, що коли f не є тотожний нуль, тоді f має ненульові нерухомі точки (тобто k такі, що $f(k) = k$). Нехай a – найменша ненульова нерухома точка.

Нехай $a = 1$, тобто $f(1) = 1$. Тоді, підставляючи $n = 1$ в (1), маємо $f(m+1) = f(m)+1$, і за індукцією легко встановлюємо, що $f(m) = m$ для всіх $m \in S$.

Нехай $a > 1$. Внаслідок підстановки $n = a$ в (1) одержуємо $f(m + a) = f(m) + a$, звідси $f(ka) = ka$ для всіх натуральних k. Доведемо, що всі нерухомі точки розглядуваної функції мають вигляд ka. Припустимо, що є така точка вигляду $ka + r$, $0 < r < a$. Тоді, використовуючи (1), маємо $ka + r = f(ka + r) = f(f(ka) + r) = f(r) + f(ka) = f(r) + + ka$.

Звідси $r = f(r)$, $0 < r < a$, але a була вибрана як найменша ненульова нерухома точка.

Оскільки всі нерухомі точки мають вигляд ka і числа $f(n)$ для всіх $n \in S$ є нерухомими точками, то всі значення $f(n)$ будуть ділитися на a. Як зазначалося, $f(ka + r) = f(r) + ka$, $0 < r < a$. Отже, будь-яка функція f, що задовольняє рівняння, визначається таким чином: $f(0) = 0$, для $0 < r < a$, $f(r) = n_r a$, де $n_1, ..., n_{a-1}$ – довільні невід'ємні цілі числа, і $f(ka + r) = ka + n_r a$. Тепер перевіримо, що всі такі функції задовольняють умову задачі. Візьмемо довільні $m = ka + r$, $n = la + q$ $(0 \le r, q < a)$. Тоді $f(m + f(n)) = f(ka + r + f(la + q)) = f(ka + r + la + n_q a) = = f((k + l + n_q)a + r) = (k + l + n_q)a + n_r a = (ka + n_r a) + (la + n_q a) = = f(m) + f(n) = f(f(m)) + f(n)$.

Остання рівність є правильною, оскільки точки вигляду $(k + n_r)a$ за визначенням f є нерухомими.

Умову задачі також задовольняє функція, що тотожно дорівнює нулеві (такий вигляд відокремили на початку розв'язування).

М.37.4. *Відповідь.* 481^2. *I спосіб.* Нехай $15a + 16b = r^2$, $16a - 15b = s^2$, де $r, s \in N$. Тоді $r^2 - 31s^2 = 481(b - a) = 13 \cdot 37(b - a)$.

Вираз $r^2 - 31s^2$ має ділитися на 13. Перебираючи остачі, які можуть давати квадрати цілих чисел при діленні на 13, знаходимо, що це можливо лише у випадку, коли r і s діляться на 13. Аналогічним перебором переконуємося, що r і s діляться на 37. Тому ці числа не менші за $13 \cdot 37 = 481$. З іншого боку, для $a = 481 \cdot 31$, $b = 481$ маємо $r = s = 481$.

II спосіб. З рівностей $15a+16b=x^2, 16a-15b=y^2$ випливає, що $x^4+y^4=(15^2+16^2)(a^2+b^2) = 481(a^2+b^2)$, де $481 = 13 \cdot 37$. Зазначимо, якщо $m^4 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 13)$, $m \in N$, то $m^{12} \equiv (-1)^3 \equiv (-1)(\mathrm{mod}\, 13)$. Але за малою теоремою Ферма маємо $m^{12} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 13)$. Суперечність. Аналогічно можна довести, що порівняння $m^4 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 37)$ є неможливим, бо і для цього випадку $m^{36} \equiv (-1)^9 \equiv (-1)(\mathrm{mod}\, 37)$. Розглядаючи порівняння $x^4 + y^4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$ бачимо, що можливі два випадки: 1) $x \equiv y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$; 2) $x \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$, $y \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$. Випадок 2) є неможливим, оскільки $m^4 \not\equiv -1 (\mathrm{mod}\, 13)$, якщо $m^4 + n^4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$ і $n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$. Тому, з огляду на те, що 13 є простим числом, отримаємо, що існує $k \in N$, для якого $nk \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 13)$. Але тоді $(mk)^4 \equiv -(nk)^4 \equiv -1$.

Таким чином, $x \equiv y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 13)$ і аналогічно $x \equiv y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 37)$.

Оскільки 13 і 37 є взаємно простими, то x і y є кратними $13 \cdot 37 = 481$.

Через те, що $x > 0$, $y > 0$, маємо $x \geq 481, y \geq 481$, тобто $x^2 \geq 481^2, y^2 \geq 481^2$, а отже, найменше з чисел x^2, y^2 є не меншим за 481^2.

Значення 481^2 досягається при $x^2 = y^2 = 481^2$.

М.37.5. Позначимо через a, b, c, d, e, f довжини сторін відповідно AB, BC, CD, DE, EF, FA (рис. М.37.3). Зауважимо, що протилежні

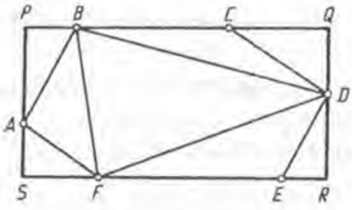


Рис. М.37.3

кути шестикутника попарно рівні. Продовжимо сторони BC і EF та проведемо відрізки $AP \perp BC$, $AS \perp EF$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$. Тоді $PQRS$ – прямокутник та $BF \geq PS = QR$. Тому $2BF \geq PS + QR$, тобто $2BF \geq$ $\geq (a \sin \angle B + f \sin \angle C) + (c \sin \angle C +$ $+ d \sin \angle B)$.

Аналогічно, продовжуючи інші пари протилежних сторін, одержуємо $2DB \geq (c \sin \angle A + b \sin \angle B) + (e \sin \angle B + f \sin \angle A)$, $2FD \geq (e \sin \angle C +$ $+ d \sin \angle A) 4 - (a \sin \angle A + b \sin \angle C)$.

Через $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ позначено величини кутів шестикутника при відповідних вершинах. Далі,

$$R_A = \frac{BF}{2\sin\angle A},\ R_C = \frac{DB}{2\sin\angle C},\ R_E = \frac{FD}{2\sin\angle B}.$$

Внаслідок маємо

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq a\left(\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} + \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}\right) + b\left(\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C} + \frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}\right) +$$

$$+ \ldots \geq 2(a + b + \ldots) = 2P.$$

Звідси випливає шукана нерівність.

Зазначимо, що коли шестикутник $ABCDEF$ правильний, тоді маємо рівність.

М.37.6. Будемо вважати числа p і q взаємно простими (якщо це не так, то поділимо p, q та всі x_i на найбільший спільний дільник p і q, при цьому нерівність $p + q < n$ залишиться правильною).

Нехай для k індексів $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $x_i - x_{i-1} =$ $= p$ і для $n-k$ індексів $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ – рівність $x_i - x_{i-1} = -q$. З того, що $x_0 = x_n$ випливає $kp = (n - k)q$. Тому для деякого $a \in N$ маємо $k = aq$, звідси $n - k = ap$, $n = a(p + q)$, $a > 1$.

Позначимо через $f(j)$, $0 \leq j \leq n - p - q$, кількість індексів $i \in \{j + 1, \ldots,$ $j + p + q\}$ таких, що $x_i - x_{i-1} = p$. Неважко помітити, що

$$x_j > x_{j+p+q} \Leftrightarrow f(j) < q,$$
$$x_j = x_{j+p+q} \Leftrightarrow f(j) = q,$$
$$x_j < x_{j+p+q} \Leftrightarrow f(j) > q.$$

Також для всіх j $|f(j)-f(j-1)|\le 1$. Отже, якщо не знайдеться j з $f(j)=q$, то або всі $f(j)>q$, або всі $f(j)<q$. Якщо, наприклад, всі $f(j)>q$, то маємо $0=x_0<x_{p+q}<x_{2(p+q)}<\ldots<x_{a(p+q)}=0$ – суперечність. Якщо ж всі $f(j)<q$, то аналогічно $0=x_0>x_{a(p+q)}=0$, що також неможливо. А тому існують $f(j)=q$ і тоді $x_j=x_{j+p+q}$.

Олімпіада 38
(*Аргентина, 1997 р.*)

М.38.1. *Відповідь.* $f(m,n)=0$, коли m і n обидва парні; $f(m,n)=\frac{1}{2}$, коли m і n обидва непарні. а) Зробимо симетричне відображення з центром, який є серединою гіпотенузи даного трикутника. Як легко перевірити, при цьому чорні квадрати перейдуть у чорні, білі – в білі, а початковий трикутник разом зі своїм образом утворять прямокутник. Для цього прямокутника модуль різниці площ буде вдвічі більшим, ніж для трикутника. Як легко підрахувати, для прямокутника з парними сторонами цей модуль дорівнює 0, з непарними – 1.

б) Якщо m і n обидва парні чи непарні, то твердження випливає з п. а). Припустимо, що m непарне, а n парне. Нехай ABC – даний трикутник з $BC=m$, $AC=n$. Візьмемо на стороні BC точку K таку, що $BK=1$. Тоді $f(m,n)\le f(m-1,n)+S_{ABK}=S_{ABK}$. Тут враховано, що $m-1$ та n обидва парні.

в) Підрахуємо $f(2m+1,2m)$. Нехай ABC – даний трикутник з $BC=2m+1$, $AC=2m$. Візьмемо на стороні BC точку K таку, що $BK=1$. Оскільки $f(2m,2m)=0$, $f(2m+1,2m)$ дорівнюватиме модулю різниці площ білої та чорної частин ABK. Загальна площа ABK дорівнює m. Вважатимемо, що відрізок AK йде по чорних квадратах. Тоді біла частина складається з кількох трикутників $BKN_{2m}, M_{2m-1}K_{2m-1}N_{2m-1},\ldots,M_1K_1N_1$, кожен з яких подібний до BCA (рис. М.38.1). Їх загальна площа дорівнює

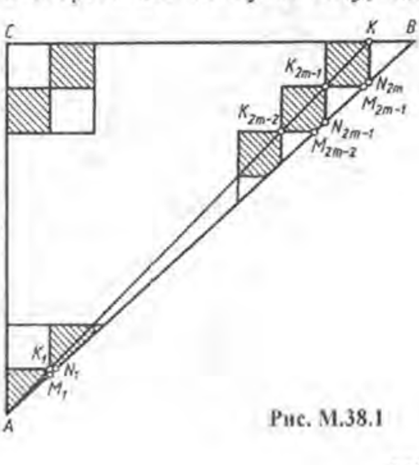


Рис. М.38.1

$$S_b = \frac{1}{2}\frac{2m}{2m+1}\left(\left(\frac{2m}{2m}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{2m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2m}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4m(2m+1)}(1^2 + 2^2 + \ldots + (2m)^2) =$$

$$= \frac{1}{4m(2m+1)}\frac{1}{6}2m(2m+1)(4m+1) = \frac{4m+1}{12}.$$

Тут використали відому формулу суми квадратів кількох перших натуральних чисел. Тепер маємо, що площа чорної частини ABK дорівнює

$$S_r = m - \frac{4m+1}{12} = \frac{8m-1}{12}.$$

Звідси $f(2m+1,\ 2m) = S_r - S_b = \frac{2m-1}{6}$. Значення цієї функції необмежені.

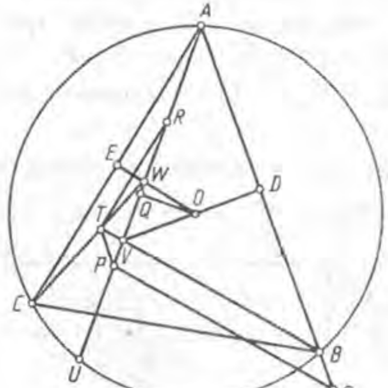


Рис. М.38.2

М.38.2. *І спосіб.* Серединні перпендикуляри DV і EW, які проведено до сторін AB і AC, перетинаються у точці O центра кола, описаного навколо ΔABC (рис. М.38.2). Зауважимо, що $AV = BV$, $AW = CW$. Проведемо $TP \parallel AB$ і $TR \parallel AC$. Тоді $PV = VT$, $TW = WR$ і прямі OV і OW є серединними перпендикулярами до відрізків відповідно PT і RT. Звідси маємо, що $OP = OT = OR$, а тому перпендикуляр OQ до основи PR рівнобедреного трикутника OPR одночасно є і медіаною, тобто $PQ = QR$. Оскільки AU є хордою кола з центром O, і, за побудовою, $OQ \perp AU$, то $AU = 2AQ$. Але тоді $AU = AP + PR$, бо $AP = AQ + PQ$ і $AR = AQ - QR$.

Насамкінець проведемо $PS \parallel VB$, $S \in AB$. Тоді з рівності $AV = BV$ випливає, що $AP = PS = BT$, оскільки $PSBT$ є паралелограмом.

Аналогічно доводимо, що $AR = CT$. Таким чином, остаточно маємо $BT + CT = AP + AR = AU$, що й потрібно було довести.

II спосіб. Трикутники ABV і ACW рівнобедрені, $\angle ABV = \angle VAB$, $\angle ACW = \angle WAC$. Оскільки кут A найменший в трикутнику ABC, то $\angle ABV < \angle B$, $\angle ACW < \angle C$, промені BV і CW проходять через ΔABC, точка T лежить всередині цього трикутника.

Продовжимо BT і CT до перетину з колом у точках відповідно B_1 та C_1. Розглянувши симетрію відносно серединних перпендикулярів хорд, легко довести, що $UC_1 \| AC$, $B_1U \| AB$ і $CC_1 = AU$. Розглянемо вписаний шестикутник ACB_1UC_1B (його сторони перетинаються між собою, але для нас це не має значення). Ми вже знайшли в ньому дві пари паралельних протилежних сторін. За теоремою Паскаля сторони і третьої пари протилежних сторін паралельні, тобто $CB_1 \| C_1B$. Тому $\angle BC_1T = \angle TB_1C = \angle TBC_1$, $TB = TC_1$, $TB + TC = TC_1 + TC = CC_1 = AU$.

М.38.3. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що такої перестановки не існує, тобто для будь-якої перестановки $z_1, z_2, ..., z_n$ даних чисел x_i матимемо $|S| = |z_1 + 2z_2 + ... + nz_n| > \frac{n+1}{2}$.

У разі необхідності можна змінити знаки чисел та їх нумерацію, а тому надалі вважатимемо, що $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ і $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.

Розглянемо перестановки $x_1, x_2, ..., x_n$ та $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ і нехай $S_1 = x_1 + 2x_2 + ... + nx_n$, $S_2 = x_n + 2x_{n-1} + ... + nx_1$. Якщо для деякої перестановки $z_1, z_2, ..., z_n$ поміняти місцями z_k і z_{k+1}, то для відповідних сум дістанемо

$$S'_{k+1} - S'_k = (z_1 + 2z_2 + ... + kz_{k+1} + (k+1)z_k + ... + nz_n) - \\ -(z_1 + 2z_2 + ... + kz_k + (k+1)z_{k+1} + ... + nz_n) = z_k - z_{k+1}$$

за умови, що $z_{k+1} \ge z_k$. Отже, якщо послідовно поміняти місцями у вихідній перестановці x_1 з x_2, x_1 з x_3,..., x_1 з x_n, далі x_2 з x_3,..., x_2 з x_n,..., x_{n-1} з x_n, то дістанемо перестановку, для якої $S_2 \le S_1$.

Оскільки $|S_1 + S_2| = (n+1)|x_1 + x_2 + ... + x_n| = n+1$ і числа S_1 і S_2 лежать зовні відрізка $\left[-\frac{n+1}{2}; \frac{n+1}{2}\right]$, то це можливо лише при $S_1 > \frac{n+1}{2}$, $S_2 < -\frac{n+1}{2}$.

З іншого боку, $\left|S'_{k+1}-S'_k\right|=\left|z_{k+1}-z_k\right|\le\left|z_{k+1}\right|+\left|z_k\right|\le n+1$, бо $\left|x_i\right|\le\frac{n+1}{2}$. Тому, якщо $S'_k>\frac{n+1}{2}$, то і $S'_{k+1}>\frac{n+1}{2}$ (інакше з нерівності $S'_{k+1}<-\frac{n+1}{2}$ випливало б, що $\left|S'_{k+1}-S'_k\right|>n+1$).

Оскільки $S_1>\frac{n+1}{2}$, то це означає, що внаслідок зазначених перестановок отримаємо $S_2>\frac{n+1}{2}$. Суперечність.

Зауважимо, що при кожній заміні пари (z_k,z_{k+1}) на пару (z_{k+1},z_k) значення відповідної суми змінюється на $\left|z_{k+1}-z_k\right|\le n+1$. Якщо виконуючи послідовність таких операцій з перестановки, що має суму $S_2>\frac{n+1}{2}$, дістанемо перестановку з сумою $S_1<-\frac{n+1}{2}$, то одне з проміжних значень обов'язково потрапить до відрізка $\left[-\frac{n+1}{2};\frac{n+1}{2}\right]$. Перестановка, що відповідатиме цьому значенню і буде шуканою.

М.38.4. а) Припустимо, що "срібна" матриця для $n=1\,997$ існує. Візьмемо елемент x з множини $\{1,2,...,2n-1\}$, який не зустрічається на діагоналі. Числа i і j називатимемо спареними, якщо в i-му рядку число x стоїть в j-му стовпчику або в j-му рядку число x стоїть в i-му стовпчику. З умови задачі випливає, що для кожного i, $1\le i\le n$, спарене j визначається однозначно. Таким чином, всі можливі значення i, $1\le i\le n$, розбиваються на пари. При непарному n це неможливо.

б) Покажемо, що "срібні" таблиці існують для всіх $n=2^k$, $k\in N$. Для $n=2$ можна взяти

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Якщо побудовано таблицю A_k для $n=2^k$, то далі беремо

$$A_{k+1}=\begin{bmatrix}A_k & B_k\\ C_k & A_k\end{bmatrix}.$$

Тут B_k – це таблиця розмірами $2^k \times 2^k$, в якій на місці (i,j), $1 \le i$, $j \le 2^k$, стоїть сума остачі $i+j$ при діленні на 2^k і числа 2^{k+1}. В C_k на місці (i,j), $1 \le i$, $j \le 2^k$, ставимо суму остачі $i+j$ при діленні на 2^k і числа $2^{k+1}+2^k$. Тепер у кожному рядку та кожному стовпчику B_k зустрічаються по одному разу числа 2^{k+1}, $2^{k+1}+1,\ldots,2^{k+1}+2^k-1$, в C_k – числа $2^{k+1}+2^k, 2^{k+1}+2^k+1,\ldots,2^{k+1}-1$. Оскільки таблиця A_k "срібна" з числами $1,2,\ldots,2^{k+1}-1$, таблиця A_{k+1} буде також "срібною" і матиме розміри $2^{k+1} \times 2^{k+1}$.

Наведемо ще один з можливих способів побудови "срібних" таблиць. Пронумеруємо числами від 0 до 2^n-1 рядки і стовпчики таблиці (згори донизу і зліва направо). Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b означимо число $a \oplus b$ таким чином. Запишемо числа a і b у двійковій системі, додаючи, у разі необхідності, зліва нулі так, щоб двійкові записи містили однакове число розрядів. Далі додамо ці числа "стовпчиком" у двійковій системі, не беручи до уваги перенесень, тобто додавання виконуємо у кожному розряді окремо:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

Наприклад, для $a = 7 = 111_2$, $b = 12 = 1100_2$ маємо

$$\begin{array}{r} \oplus \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

Оскільки $1011_2 = 11$, то $a \oplus b = 7 \oplus 12 = 11$. Легко помітити, що при $0 \le a, b \le 2^n$, матимемо $0 \le a \oplus b \le 2^n$. У клітинку, яка міститься на перетині i-го рядка та j-го стовпчика, запишемо число a_{ij}, яке означимо таким чином:

$$a_{ij} = \begin{cases} i \oplus j + 1, \text{ якщо } i \ge j, \\ i \oplus j + 2^n, \text{ якщо } i < j. \end{cases}$$

Отримана в такий спосіб таблиця буде "срібною". Наприклад, для $n = 2^2 = 4$ маємо

1	5	6	7
2	1	7	6
3	4	1	5
4	3	2	1

М.38.5. *Відповідь.* $(1,1), (27,3), (16,2)$. Нехай числа a і b задовольняють дане рівняння, d – їх найбільший спільний дільник, $a = du$, $b = dv$, u і v взаємно прості. Дане рівняння еквівалентне:

$$(du)^{dv^2} = (dv)^u. \qquad (1)$$

Порівнюючи dv^2 та u, розглянемо три випадки.

1) Нехай $dv^2 = u$. З (1) випливає, що $u = v$. Оскільки ці числа взаємно прості, $u = v = 1$. З $dv^2 = u$ маємо $d = 1$. Отже, $a = b = 1$.

2) Нехай $dv^2 > u$. З (1) маємо

$$d^{dv^2 - u} \cdot u^{dv^2} = v^u. \qquad (2)$$

Бачимо, що v^u ділиться на u^{dv^2}. Оскільки u і v взаємно прості, $u = 1$, то (2) перепишемо у вигляді $d^{dv^2 - 1} = v$. Якщо $d = 1$, одержуємо $v = 1$, що суперечить $dv^2 > u$. Якщо $d \ge 2$, то

$$d^{dv^2 - 1} \ge 2^{2v^2 - 1} \ge 2^{2v - 1} > v.$$

Останню нерівність можна легко довести за індукцією для всіх натуральних v.

3) Нехай $dv^2 < u$. Зазначимо, що тоді $d < u$. Рівність (1) перепишемо у вигляді

$$u^{dv^2} = d^{u - dv^2} v^u, \qquad (3)$$

u^{dv^2} ділиться на v^u, і з того, що u та v взаємно прості випливає, що $v=1$; (3) набуває вигляду

$$u^d = d^{u-d}. \qquad (4)$$

Оскільки $d<u$, з (4) маємо $u-d>d$. Також з (4) випливає, що u і d мають однаковий набір простих дільників. Нехай простий дільник p в степені α входить до розкладу u, а в степені β – до розкладу d. Тоді з (4) одержуємо $\alpha d=\beta(u-d)$, звідси $\alpha>\beta$. Отже, u ділиться на d, $u=kd$ для деякого натурального k. Зазначимо, що $k\geq 3$, оскільки $u-d>d$. Тепер з (4) отримуємо

$$k=d^{k-2}. \qquad (5)$$

Бачимо, що d не дорівнює 1, тому $d\geq 2$.

Якщо $k=3$, то з (5) $d=3,\quad u=9,\quad a=27,\quad b=3$.

Якщо $k=4$, то з (5) $d=2,\quad u=8,\quad a=16,\quad b=2$.

Якщо $k\geq 5$, то $d^{k-2}\geq 2^{k-2}>k$ і (5) не виконується. Остання нерівність для $k\geq 5$ легко доводиться за індукцією.

М.38.6. Спочатку зауважимо, що для $k\in N$

$$f(2k+1)=f(2k), \qquad (1)$$

адже в розкладі $2k+1$ обов'язково присутня 1, вилучивши яку, отримуємо розклад числа $2k$. І навпаки, з розкладу $2k$ можна отримати розклад $2k+1$, додавши одну 1. Це – взаємно однозначна відповідність.

Також зауважимо, що

$$f(2k)=f(2k-1)+f(k), \qquad (2)$$

адже розклад $2k$, в якому є 1, зводиться до розкладу $2k-1$ вилученням цієї 1. Розклад, в якому немає 1, зводиться до розкладу числа k діленням усіх доданків на 2.

З (1) та (2) випливає, що функція f не є спадною і також для $n\in N$

$$f(2n)=f(0)+f(1)+...+f(n) \qquad (3)$$

(в наших міркуваннях вважаємо $f(0)=1$). Тепер маємо, що для $n\geq 2$

$$f(2n)=2+\big(f(2)+f(3)+...+f(n)\big)\leq 2+(n-1)f(n)\leq nf(n).$$

Звідси для $n \ge 1$ маємо

$$f\left(2^n\right) \le 2^{n-1} \cdot f\left(2^{n-1}\right) \le 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f\left(2^{n-2}\right) \le$$

$$\le \ldots \le 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} f\left(2\right) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2$$

(тут враховано, що $f(2)=2$). Оскільки $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ для $n \ge 3$, оцінку зверху доведено.

Далі використаємо нерівність

$$f(b+1) - f(b) \ge f(a+1) - f(a) \qquad (4)$$

для цілих a, b однієї парності з $b \ge a \ge 0$. Для двох парних чисел це виконується, оскільки обидві частини нерівності дорівнюють нулеві. Для двох непарних чисел, як випливає з (2), різниці в нерівності дорівнюють $f\left(\frac{b+1}{2}\right)$ та $f\left(\frac{a+1}{2}\right)$, і залишається згадати про монотонність *f*.

Візьмемо натуральні числа r і k, $r \ge k$, r парне і підставимо в (4) всі пари чисел $a = r - j$, $b = r + j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Додавши всі ці нерівності, отримаємо $f(r+k) - f(r) \ge f(r+1) - f(r-k+1)$.

Оскільки r парне, $f(r+1) = f(r)$ і тому

$$f(r+k) + f(r-k+1) \ge 2f(r).$$

Визначимо суму всіх таких нерівностей для $k = 1, 2, \ldots, r$:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \ge 2rf(r).$$

Покладаючи $r = 2^{m-2}$, з (3) одержуємо $f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2})$.

Звідси, якщо n непарне, $n \ge 3$, то $f(2^n) > 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \times$ $\times f(2^{n-4}) > \ldots > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+2} f(2) = 2^{\frac{(n+1)(n-1)}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}$.

Аналогічно для парного n

$$f(2^n) > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+3} f(4) = 2^{\frac{(n+2)(n-2)}{4}} \cdot 4 > 2^{\frac{n^2}{4}}.$$

Олімпіада 39
(*Тайвань, 1998 р.*)

М.39.1. *І спосіб.* Нехай діагоналі AC і BD перетинаються в точці E (рис. М.39.1). Не втрачаючи загальності, вважаємо, що точка P належить ΔABE. Позначимо через M і N основи перпендикулярів, проведених з P відповідно до AC і BD. Позначаючи далі через $[P]$ площу многокутника P, маємо

$$2[ABP] = 2[ABE] - 2[PAE] - 2[PBE] = (AM + PN)(BN + PM) - (AM + PN)PM - (BN + PM)PN = AM \cdot BN - PM \cdot PN,$$

$$2[CDP] = 2[CDE] + 2[PCE] + 2[PDE] = (CM - PN)(DN - PM) + (CM - PN)PM + (DN - PM)PN = CM \cdot DN - PM \cdot PN.$$

Тому

$$2([ABP] - [CDP]) = AM \cdot BN - CM \cdot DN. \qquad (1)$$

З умови випливає, що $PA = PB$ і $PC = PD$. Нехай чотирикутник $ABCD$ є вписаним. Тоді P є центром його описаного кола, M і N – середини відрізків відповідно AC і BD. З рівностей $AM = CM$, $BN = DN$ та (1) випливає, що $[ABP] = [CDP]$.

Тепер нехай $[ABP] = [CDP]$. Тоді з (1) маємо $AM \cdot BN = CM \cdot DN$. Припустимо, що $PA \neq PC$ і для визначеності вважаємо $PA > PC$. Тоді $AM > CM$ і $BN > DN$, оскільки $PB > PD$. Звідси $AM \cdot BN > CM \cdot DN$, маємо суперечність. Отже, $PA = PC$, точка P є рівновіддаленою від A, B, C та D і є центром описаного кола нашого чотирикутника.

ІІ спосіб. Нехай AC і BD перетинаються в точці E (рис. М.39.2). Вважатимемо, що точка P лежить в ΔBEC. Позначимо $\angle ABE = \varphi$ і

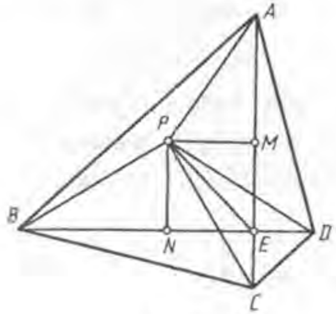


Рис. М.39.1

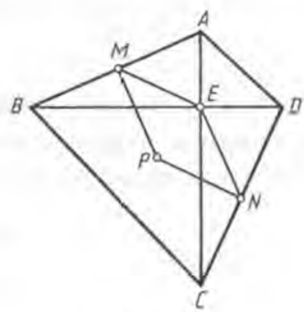


Рис. М.39.2

$\angle ACD = \psi$. Трикутники ABP і CDP є рівнобедреними. Якщо M і N є серединами відповідно їх основ AB і CD, то $PM \perp AB$ і $PN \perp CD$. Зауважимо, що точки M, N і P не є колінеарними. Оскільки ME є медіаною в прямокутному трикутнику ABE, то $ME = BM$, а тому $\angle BEM = \varphi$, $\angle AME = 2\varphi$ і $\angle EMP = 90° - 2\varphi$. Аналогічно $\angle NEC = \psi$, $\angle DNE = 2\psi$ і $\angle ENP = 90° - 2\psi$. Таким чином, $\angle MEN = 90° + \varphi + \psi$, а тому безпосереднім обчисленням дістанемо $\angle NPM = 360° - (\angle EMP + {}$ ${}+ \angle MEN + \angle ENP) = 90° + \varphi + \psi = \angle MEN$.

Оскільки $AB = 2EM$ і $CD = 2EN$, то $[ABP] = [CDP]$ тоді й тільки тоді, коли $EM \cdot PM = EN \cdot PN$ або $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{PN}{PM}$. Отже, $\Delta\, EMN \sim \Delta\, PNM$, бо $\angle MEN = \angle NPM$. Звідси випливає, що чотирикутник $EMPN$ є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли $\angle EMP = \angle ENP$, тобто коли $90° - 2\varphi = 90° - 2\psi$ або $\varphi = \psi$. Це означає, що чотирикутник $ABCD$ є вписаним у коло.

III спосіб. Виберемо за осі координат прямі AC і BD і позначимо координати точок A, B, C і D відповідно $(0,a)$, $(b,0)$, $(0,c)$ і $(d,0)$. Точка E є початком цієї системи координат. Оскільки серединні перпендикуляри до сторін AB і CD мають одну спільну точку, то система рівнянь

$$\begin{cases} 2bx - 2ay = b^2 - a^2, \\ 2dx - 2cy = d^2 - c^2 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок

$$x_0 = \frac{-c(b^2 - a^2) + a(d^2 - c^2)}{2(ad - bc)},\ y_0 = \frac{-d(b^2 - a^2) + b(d^2 - c^2)}{2(ad - bc)}. \qquad (1)$$

Зрозуміло, що (x_0, y_0) є координатами точки P. Оскільки ця точка міститься всередині чотирикутника $ABCD$, то трикутники ABP і CDP є однаково орієнтованими. Отже, $[ABP] = [CDP]$ тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ b & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ d & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Рівність (2) є еквівалентною рівності

$$ax_0 + by_0 - ab = cx_0 + dy_0 - cd. \qquad (3)$$

Підставляючи (1) в (3), дістанемо $(ac - bd)((a-c)^2 + (b-d)^2) = 0$.

Згідно вибору системи координат маємо, що пари чисел a і c, b і d є протилежними за знаками. Тому $ac = bd$, або $AE \cdot CE = BD \cdot DE$. Остання умова є необхідною і достатньою для того, щоб навколо чотирикутника $ABCD$ можна було описати коло.

М.39.2. Оскільки існують C_n^2 різних пар суддів і в кожній парі не більше k збігів оцінок, загальна кількість збігів не перевищує kC_n^2.

Нехай i-й учасник для $1 \le i \le m$ отримав незадовільну оцінку в x_i суддів та задовільну – в y_i суддів, де $x_i + y_i = n$. Тоді кількість пар суддів, які виставили однакові оцінки цьому учаснику, дорівнює

$$C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - n\right) = \frac{1}{4}[(n-1)^2 - 1].$$

Оскільки n – непарне, за нижню оцінку тут може бути взяте $\frac{1}{4}(n-1)^2$. Розглядаючи загальну кількість збігів, отримуємо

$$kC_n^2 \ge \sum_{i=1}^{m}\left(C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2\right) \ge \frac{m(n-1)^2}{4}.$$

Записавши C_n^2 як $\frac{n(n-1)}{2}$, отримаємо потрібну нерівність.

М.39.3. *І спосіб.* Для взаємно простих натуральних чисел a і b буде $d(ab) = d(a)d(b)$. Нехай $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_t^{m_t}$, де $p_1, p_2, \dots, p_t$ – різні прості числа. Тоді $d(n) = (m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_t+1)$, $d(n^2) = (2m_1+1)(2m_2+1)\cdots(2m_t+1)$. Звідси випливає, що $d(n^2)$ є обов'язково непарним, тому умову задачі можуть задовольняти лише непарні k. Тепер доведемо, що такими є всі непарні числа. Для цього досить показати, що

$$k = \frac{2m_1+1}{m_1+1} \cdot \frac{2m_2+1}{2m_2+1} \cdots \frac{2m_t+1}{m_t+1}$$

для деяких натуральних чисел $m_1, m_2, \dots, m_t$.

Використаємо індукцію по k. Доведемо твердження: якщо число x задовольняє умову, то таким буде і $2^m x - 1$ для всіх $m \geq 1$. Нехай l є таким, що $\frac{d(l^2)}{d(l)} = x$. Для $m = 1$ візьмемо $n = p^{x-1} l$, де p – просте число, що не є дільником l. Тоді $\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2x-1}{x} \cdot x = 2x - 1$. Для $m > 1$ візьмемо $n = p_1^{2^{m-1}3x-2} p_2^{2^{m-2}3^2 x-2} \cdots p_{m-1}^{2\cdot 3^{m-1}x-2} p_m^{3^{m-1}x-1} l$, де $p_1, p_2, ..., p_m$ – довільні прості числа, на які не ділиться l. У цьому випадку

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2^m 3x-3}{2^{m-1}3x-1} \cdot \frac{2^{m-1}3^2 x-3}{2^{m-2}3^2 x-1} \cdots \frac{2^2 3^{m-1} x-3}{2\cdot 3^{m-1} x-1} \cdot \frac{2\cdot 3^{m-1} x-1}{3^{m-1} x} \cdot x = 2^m x - 1.$$

Наше твердження доведено.

Тепер покажемо, що кожне непарне число задовольняє умову задачі. Число 1 є таким, оскільки $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$. Для довільного непарного числа $k > 1$ можемо записати $k + 1 = 2^m x$, де $x < k$ – непарне. Оскільки число x задовольняє умову, таким буде і $k = 2^m x - 1$.

II спосіб. Нехай k довільне непарне число, $k > 1$. За індукцією доведемо, що знайдеться n таке, що $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$. Покладемо $k + 1 = 2^r k_0$ для деякого непарного $k_0 < k$. За припущенням індукції існує n_0 таке, що $\frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = k_0$. Покладемо $x_0 = (2^r - 1)k_0 - 1$ і $x_i = 2^i x_0$, $i = 1, 2, ..., r$. Зауважимо, що $2x_i = x_{i+1}$ для $i = 0, 1, ..., r-1$. Нехай тепер $p_0, p_1, ..., p_{r-1}$ різні прості числа, які є взаємно простими з числом n_0. Розглянемо число $n = p_0^{x_0} \cdots p_{r-1}^{x_{r-1}} \cdot n_0$. Покажемо, що це число є шуканим. Справді,

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2x_0+1}{x_0+1} \cdots \frac{2x_i+1}{x_i+1} \cdots \frac{2x_{r-1}+1}{x_{r-1}+1} \frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} =$$

$$= \frac{x_1+1}{x_0+1} \cdots \frac{x_{i+1}+1}{x_i+1} \cdots \frac{x_r+1}{x_{r-1}+1} k_0 = \frac{x_r+1}{x_0+1} k_0.$$

Залишилося зауважити, що

$$\frac{x_r+1}{x_0+1}k_0=\frac{x_r+1}{(2^r-1)k_0}k_0=\frac{2^r x_0+1}{2^r-1}=\frac{2^r(x_0+1)}{2^r-1}-1=2^r k_0-1=k.$$

Отже, $\frac{d(n^2)}{d(n)}=k$, що й треба було довести.

М.39.4. *Відповідь.* $(a,b)=(7c^2,7c)$, $c=1,2,...$ і $(a,b)=(11,1)$, $(a,b)=(49,1)$. Якщо a^2b+a+b ділиться на ab^2+b+7 , то таку подільність має і число $b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7)=b^2-7a$.

Оскільки $a\ge 1$, то $b^2-7a<ab^2+b+7$. Тому, якщо $b^2-7a\ge 0$, то $b^2-7a=0$. Тоді b ділиться на 7 і (a, b) = $(7c^2,7c)$ для деякого натурального числа c. Легко переконатись, що кожна така пара задовольняє умову.

Нехай $b^2-7a<0$. Тоді $7a-b^2$ ділиться на ab^2+b+7, $0<7a-b^2<7a$. Це можливо тільки для b = 1 або b = 2, оскільки інакше $ab^2+b+7>9a$.

Для b = 1 отримуємо, що $7a-1$ має ділитися на a + 8. Маємо $7a-1=7(a+8)-57$, $57=1\cdot 57=3\cdot 19$, звідси можливими є тільки a = 11 або a = 49. Перевірка показує, що (11,1) та (49,1) задовольняють умову.

Для $b=2$ $7a-4$ має ділитися на $4a+9$. Оскільки $4(7a-4)=7(4a+9)-79$ і 79 не мають дільників вигляду $4a+9$, то у цьому випадку розв'язків немає.

М.39.5. *І спосіб.* Оскільки прямі MK і RS паралельні, в трикутнику BRM (рис. М.39.3) маємо $\alpha=\angle BMR=90°-\frac{\angle A}{2}$, $\beta=\angle MBR=90°-\frac{\angle B}{2}$, $\gamma=\angle BRM=90°-\frac{\angle C}{2}$.

Звідси за теоремою синусів

$$\frac{BR}{BM}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{\sin\left(90°-\frac{\angle A}{2}\right)}{\sin\left(90°-\frac{\angle C}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle C}{2}}\text{ або }BR=\frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle C}{2}}\cdot BM.\quad(1)$$

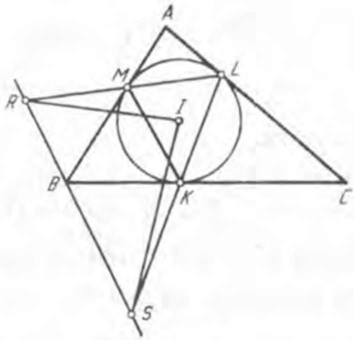


Рис. М.39.3

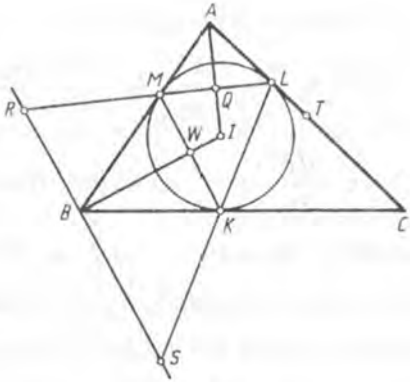


Рис. М.39.4

Аналогічно в трикутнику BKS маємо

$$\angle BKS = 90° - \frac{\angle C}{2},\ \angle BSK = 90° - \frac{\angle A}{2},\ \angle KBS = 90° - \frac{\angle B}{2},$$

$$\frac{BS}{BK} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{\cos\frac{\angle A}{2}},\ BK = BM \text{ (як дотичні)},$$

звідси

$$BS = \frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{\cos\frac{\angle A}{2}}\cdot BK = \frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{\cos\frac{\angle A}{2}}\cdot BM. \qquad (2)$$

Відмітимо, що $BI \perp RS$ і $IM \perp AB$. Тоді, враховуючи (1) і (2), отримуємо

$$IR^2 + IS^2 - RS^2 = (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BS^2) - (BR + BS)^2 =$$
$$= 2\,(BI^2 - BR\cdot BS) = 2\,(BI^2 - BM^2) = 2IM^2 > 0.$$

З теореми косинусів випливає, що кут RIS є гострим.

II спосіб. Позначимо через W, Q середини відповідно MK і ML. (рис. М.39.4). Тоді $Q \in AI$, $W \in BI$, $AI \perp ML$, $BI \perp MK$. Спочатку доведемо, що $AW \perp RI$ і $CW \perp SI$. Оскільки $\angle RBI = \angle RQI = 90°$, то точки R, B, I, Q лежать на одному колі, а тому $\angle BRI = \angle BQI$. Трикутники AIM і BIM є прямокутними, а тому $IQ \cdot IA = MI^2 = IW \cdot IB$, звідси $\frac{IQ}{IW} = \frac{IB}{IA}$. Це означає, що трикутники AIW і BIQ подібні. Звідси випливає, що $\angle BRI = \angle BQI = \angle AWI$. Оскільки $BR \perp IW$, то $RI \perp AW$. Аналогічно доводимо, що $SI \perp CW$. Таким чином, $\angle RIS = 180° - \angle AWC$. Тепер залишилося довести, що $\angle AWC$ є тупим. Нехай T є серединою відрізка AC. Тоді $2\overrightarrow{WT} = \overrightarrow{WC} + \overrightarrow{WA} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{MA}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{KC}$ і $\overrightarrow{MA}$ не є колінеарними, то $WT < \frac{KC+MA}{2} = \frac{CL+AL}{2} = \frac{AC}{2}$. Це означає, що точка W міститься всередині кола з діаметром AC, а тому $\angle AWC > 90°$.

Зауваження. Твердження про те, що $AW \perp RI$ можна довести ще так. Оскільки $\angle RBI = \angle RQI = 90°$, то коло, описане навколо чотирикутника $RBIQ$, є ортогональним до діаметра RI. Розглянемо інверсію відносно кола, вписаного в ΔABC. Оскільки інверсія переводить точки B і Q у точки відповідно W і A, то коло, описане навколо $RBIQ$, перейде в пряму AW. Оскільки інверсія залишає без зміни пряму RI, то дістаємо, що $AW \perp RI$.

М.39.6. *Відповідь.* 120. Позначимо через S множину функцій, що задовольняють умову задачі. Нехай f – одна з них, і позначимо $f(1) = a$. Поклавши в рівності з умови $t = 1$ та $s = 1$, отримаємо

$$f(f(s)) = a^2 s,\ f(at^2) = f^2(t) \text{ для всіх } s, t \in N.$$

Далі маємо

$$(f(s)f(t))^2 = (f(s))^2 f(at^2) = f(s^2 f(f(at^2))) = f(s^2 a^2 at^2) =$$
$$= f(a(ast)^2) = (f(ast))^2.$$

Звідси випливає, що $f(ast) = f(s)f(t)$ для всіх s, t, зокрема, $f(as) = af(s)$ і тому

$$af(st) = f(s)f(t) \text{ для всіх } s, t \in N. \tag{1}$$

Тепер доведемо, що $f(t)$ ділиться на a для всіх $t \in N$. Для простого числа p позначимо через p^α та p^β найбільші степені p, на які діляться відповідно a та $f(t)$. Застосовуючи індукцію з (1), легко вивести, що $(f(t))^k = a^{k-1} f(t^k)$ для всіх $k \in N$. Найбільший степінь p, на який ділиться

$(f(t))^k$, є $p^{k\beta}$, на який ділиться $a^{k-1} - p^{(k-1)\alpha}$. Тому $k\beta \geq (k-1)\alpha$ для всіх $k \in N$, що є можливим тільки при $\beta \geq \alpha$. Це правильно для кожного простого числа p, і тому $f(t)$ ділиться на a.

Покладемо тепер $g(t) = \dfrac{f(t)}{a}$, отримавши нову функцію $g: N \to N$. Результати, отримані для f, переписуються таким чином:

$$g(a) = a, \quad g(st) = g(s)g(t), \; g(g(s)) = s \text{ для всіх } s, t \in N. \qquad (2)$$

Тут, фактично, $g(st) = g(s)g(t)$ є еквівалентним (1) і $g(g(s)) = s$ випливає з того, що $ag(g(s)) = g(a)g(g(s)) = g(ag(s)) = g(f(s)) = = \dfrac{f(f(s))}{a} = \dfrac{a^2 s}{a} = as$.

З (2) отримуємо, що $g(t^2 g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = s(g(t))^2$ для всіх $s, t \in N$. Отже, g також є функцією з S та її значення не перевищують відповідні значення f. Тому можемо розглядати лише функції g, які задовольняють (2).

Тепер відзначимо той важливий факт, що значення такої функції g від простого числа також є простим числом. Дійсно, нехай p – просте число і $g(p) = uv$ для деяких натуральних u, v. Тоді з (2) маємо, що $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$, тому одне з чисел $g(u)$ або $g(v)$ дорівнює 1. Якщо, наприклад, $g(u) = 1$, то обов'язково $u = g(g(u)) = g(1) = 1$, звідси випливає, що число $g(p)$ просте.

Щоб визначити потрібне найменше значення, візьмемо довільну функцію g, що задовольняє (2). Така функція є взаємно однозначною (з того, що $g(s) = g(t)$, випливає $s = g(g(s)) = g(g(t)) = t$), і тому відображає різні прості числа в різні. Тобто нижню межу значення $g(1\,998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)(g(3))^3 g(37)$ отримуємо, коли $g(2)$, $g(3)$, $g(37)$ є трьома найменшими простими числами 2, 3, 5, причому $g(3) = 2$. Отже, $g(1\,998) \geq 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$ для всіх $g \in S$.

З іншого боку, існує функція $g \in S$ з $g(1\,998) = 120$. Покладемо $g(1) = = 1$ та визначимо g на простих числах таким чином: $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$ та $g(p) = p$ для всіх простих $p \neq 2, 3, 5, 37$. Для довільного $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \in N$ візьмемо $g(n) = g\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = = g^{\alpha_1}(p_1) g^{\alpha_2}(p_2) \cdots g^{\alpha_k}(p_k)$.

Рівності (2) виконуються (для $a = 1$), тому $g \in S$. Також $g(1\,998) = 120$.

Олімпіада 40
(*Румунія, 1999 р.*)

М.40.1. *Відповідь.* S – множина вершин довільного правильного многокутника. Нехай точка M – центр ваги точок множини S. При симетрії відносно серединного перпендикуляра до відрізка AB ($A, B \in S$) S переходить у себе, отже і M переходить у себе. Тому $MA = MB$, M рівновіддалена від всіх даних точок, всі точки S лежать на одному колі з центром в M. Позначимо ці точки по порядку $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Розглянемо дві півплощини з межею A_1A_3. При симетрії відносно серединного перпендикуляра до A_1A_3 кожна з цих півплощин переходить у себе. Тому точка A_2 може перейти тільки в саму себе, звідси $A_1A_2 = A_2A_3$. Аналогічно $A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_nA_1$, S може бути тільки множиною вершин деякого правильного многокутника. З іншого боку, будь-яка така S задовольняє умову.

М.40.2. *Відповідь.* $C = \dfrac{1}{8}$. Нехай кількість ненульових x_i дорівнює $m \geq 3$, $0 = x_n = \ldots = x_{m+1} \leq x_m \leq x_{m-1} \leq \ldots \leq x_1$. У даному наборі x_i, $n \geq i \geq 1$, пару значень x_m, x_{m-1} замінимо на 0, $x_m + x_{m-1}$, інші залишимо незмінними. При цьому, очевидно, значення в правій частині даної нерівності залишиться незмінним. Покажемо, що значення в лівій частині може тільки зростати. Різниця між отриманою після заміни та попередньою величиною лівої частини дорівнює

$$\sum_{1\leq j\leq m-2}\Big((x_m+x_{m-1})x_j((x_m+x_{m-1})^2+x_j^2)-x_mx_j(x_m^2+x_j^2)-x_{m-1}x_j(x_{m-1}^2+$$

$$+x_j^2)\Big)-x_mx_{m-1}(x_m^2+x_{m-1}^2)>x_mx_{m-1}\left(2(x_m+x_{m-1})\sum_{1\leq j\leq m-2}x_j-x_m^2-x_{m-1}^2\right)\geq$$

$$\geq x_mx_{m-1}\Big(2(x_m+x_{m-1})x_{m-2}-x_m^2-x_{m-1}^2\Big)\geq x_mx_{m-1}\Big((x_m+x_{m-1})^2-x_m^2-$$

$$-x_{m-1}^2\Big)>0$$

(тут використано, що $2x_{m-2} > x_m + x_{m-1}$). Потрібне зростання встановлено. Відмітимо, що остання нерівність є строгою. Продовжимо таку операцію, поки не залишиться два ненульових члена. Так отримаємо, що досить знайти таку сталу C, що для будь-яких a, b

$$ab\,(a^2+b^2)\leq C(a+b)^4.$$

Підставивши $a = b$, отримаємо $C \geq \frac{1}{8}$. З іншого боку, при $C = \frac{1}{8}$ нерівність виконується, оскільки $8ab(a^2 + b^2) - (a + b)^4 = -(a - b)^4 \leq 0$.

Ця рівність можлива тільки при $a = b$. Отже, рівність даних в умові виразів для визначеної константи можлива лише за наявності в точності двох ненульових x_i, що є рівними між собою.

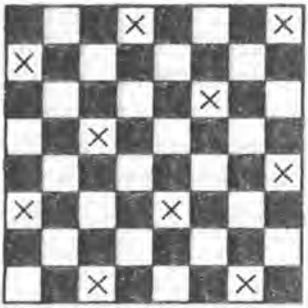


Рис. М.40.1

М.40.3. *Відповідь.* $N = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$. Пофарбуємо клітинки дошки в чорний та білий кольори в шаховому порядку. Очевидно, що тільки чорні клітинки можуть бути сусідами білих і навпаки. Позначимо через $f(n)$ величину, яку треба знайти за умовою задачі, $f_w(n)$ – найменшу кількість білих клітинок, що треба відмітити, щоб кожна чорна клітинка мала відміченого сусіда, $f_b(n)$ – аналогічну кількість чорних клітинок, що повинні бути сусідами для всіх білих. Оскільки n парне, за симетрією дошки маємо $f_w(n) = f_b(n)$, а також $f(n) = f_w(n) + f_b(n)$.

Для визначеності назвемо головною діагоналлю дошки діагональ, що йде з лівого верхнього кута до правого нижнього. Нехай вона складається з чорних клітинок, $n = 2k$. Всі білі клітинки розіб'ємо на "відрізки", паралельні головній діагоналі. Розглянемо їх, починаючи з лівого нижнього кута. Вони послідовно матимуть довжини 1, 3 ..., $2k$–1, $2k$–1, ... 3,1. Тепер розглянемо "відрізки" білих клітинок, паралельні головній діагоналі, що у вказаній послідовності стоять на парних місцях. У кожному такому відрізку з білих клітинок відмітимо клітинки через одну, включаючи крайні (на рис. М.40.1 наведено приклад для $n = 8$).

Кількість відмічених білих клітинок дорівнюватиме

$$2 + 4 + ... + k + ... + 3 + 1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Тепер маємо, що кожна чорна клітинка має сусідню відмічену білу. Тому

$$f_w(n) \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Розглянемо $\frac{k(k+1)}{2}$ відмічених білих клітинок. Жодні дві з них не мають спільного чорного сусіда. Тому

$$f_b(n) \geq \frac{k(k+1)}{2}.$$

З відміченої вище симетрії випливає, що $f_w(n) = f_b(n) = \frac{k(k+1)}{2}$.

М.40.4. *Відповідь.* (2, 2), (3, 3) та (1, p), де p – довільне просте число. При $n = 1$ всі пари вигляду (1,p) задовольняють умову. Для $p = 2$ ще маємо розв'язок (2,2).

Нехай тепер $n \geq 2$ та $p \geq 3$. Доведемо, що тоді p ділиться на n. Число $(p-1)^n + 1$ непарне і ділиться на n, тому n непарне, $n < 2p$. Позначимо через q найменший простий дільник n, маємо $q \geq 3$. Оскільки $(p-1)^n + 1$ ділиться на q, буде $(p-1)^n \equiv -1 \pmod q$ та НСД(q, $p-1$) = 1. Оскільки n не має простих дільників менших за q, НСД(n, $q-1$) = 1. Тоді існують цілі числа a, b такі, що $an + b(q-1) = 1$. Оскільки $q-1$ парне, a має бути непарним. Очевидно, що одне з чисел a, b додатне, друге – від'ємне.

За малою теоремою Ферма $(p-1)^{q-1} \equiv 1 \pmod q$. Тепер розглянемо два випадки.

1) $a > 0$, $b < 0$. Тоді

$$p-1 \equiv (p-1)^{1+(-b)(q-1)} \equiv (p-1)^{an} \equiv ((p-1)^n)^a \equiv (-1)^a \equiv -1 (\operatorname{mod} q).$$

Тут послідовно використані мала теорема Ферма, рівність для визначення a і b, умова задачі, непарність a.

2) $a < 0$, $b > 0$. Тоді аналогічно

$$p-1 \equiv -(p-1)(-1)^{-a} \equiv -(p-1)((p-1)^n)^{-a} \equiv -(p-1)^{1+(-a)n} \equiv$$
$$\equiv -(p-1)^{b(q-1)} \equiv -1 (\operatorname{mod} q).$$

В обох випадках $p - 1 = -1 \pmod q$, звідки $p = 0 \pmod q$, тобто p ділиться на q. Для простого p це можливо лише при $p = q$. Оскільки n ділиться на q і $n < 2p = 2q$, буде $n = p$.

Отже, на $n^{p-1} = p^{p-1}$ має ділитися значення

$$(p-1)^n + 1 = (p-1)^p + 1 = p^2\left(p^{p-2} - C_p^1 p^{p-3} + \ldots + C_p^{p-3} p - C_p^{p-2} + 1\right)$$

(використали запис $(p-1)^p$ через біном Ньютона). При $p \geq 3$ всі доданки в дужках, крім останнього, діляться на p, а отже, вся сума на p не ділиться. Тобто найбільший степінь p, на який ділиться $(p-1)^p+1$, дорівнює p^2. Таким чином, $p-1 \leq 2$, $p \leq 3$. Для випадку $p=3$, $n=p=3$ задовольняють умову задачі.

М.40.5. Доведемо спочатку допоміжне твердження.

Лема. Нехай коло γ_1 дотикається до кола γ у точці A та до хорди MN кола γ у точці B (рис. М.40.2). Нехай C – середина дуги MN, що не містить A. Тоді точки A, B, C лежать на одній прямій і $CA \cdot CB = CM^2$.

Доведення леми. Гомотетія з центром A, що переводить γ_1 в γ, переводить пряму MN в паралельну дотичну кола γ, тобто в дотичну в точці C. Також подібні трикутники ACM і MCB. Звідси випливає твердження леми.

Розв'язання задачі. Нехай O_1 та O_2 – центри відповідно Γ_1 та Γ_2, t_1 та t_2 – їх спільні дотичні (рис. М.40.3). Позначимо через α та β дуги, відрізані від Γ прямими t_1 та t_2, що не мають спільних точок з Γ_1 і Γ_2.

Розглянемо гомотетію з центром у точці M, що переводить Γ_1 в Γ. Вона також переводить CD у AB. З леми випливає, що A та B – середини дуг α та β. Також маємо, що $CD \parallel AB \perp O_1O_2$, O_2 – середина дуги CD кола Γ_1. Відрізок AB містить спільну хорду Γ_1 і Γ_2, оскільки A та B лежать на радикальній осі цих кіл.

Нехай X – точка, в якій t_1 дотикається Γ_2. Тоді $\angle XCO_2 = \angle CDO_2 = \angle DCO_2$. Точка O_2 лежить на бісектрисі кута XCD, CD збігається з другою дотичною, проведеною до Γ_2 з C.

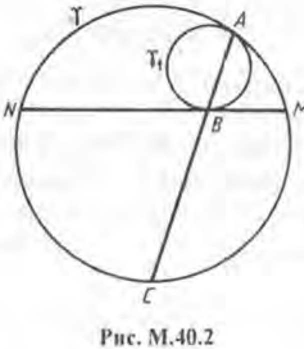


Рис. М.40.2

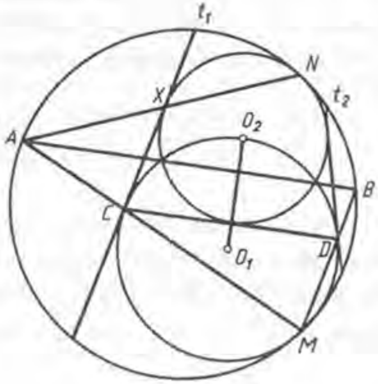


Рис. М.40.3

Дана задача також може бути розв'язана за допомогою обчислень. Після обґрунтування того, що $CD \parallel AB \perp O_1O_2$ можна підрахувати положення проекцій відповідних точок на пряму O_1O_2.

М.40.6. *Відповідь.* $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Покладемо $f(0) = c$. Підстановка до даного рівняння $x = y = 0$ нам дає, що $f(-c) = f(c) + c - 1$, тому $c \neq 0$. Підстановкою $x = f(y)$ отримуємо

$$c = f(f(y)) + f^2(y) + f(f(y)) - 1; \;\; f(f(y)) = \frac{c+1}{2} - \frac{f^2(y)}{2}.$$

Підставивши в рівність умови $y = 0$, отримаємо

$$f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1.$$

Для даного ненульового c вибором x можемо зробити праву частину такою, щоб вона дорівнювала будь-якому наперед заданому значенню z. Тому для кожного $z \in R$ існують y_1 і y_2 такі, що $z = f(y_1) - f(y_2)$. З рівняння умови тоді маємо

$$f(z) = f(f(y_1) - f(y_2)) = f(f(y_2)) + f(y_1)f(y_2) + f(f(y_1)) - 1 =$$
$$= \frac{c+1}{2} - \frac{f^2(y_2)}{2} + f(y_1)f(y_2) + \frac{c+1}{2} - \frac{f^2(y_1)}{2} - 1 =$$
$$= c - \frac{(f(y_1) - f(y_2))^2}{2} = c - \frac{z^2}{2}.$$

Звідси також отримуємо $c = \frac{c+1}{2}$, $c = 1$. Підстановка показує, що функція $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ задовольняє умову.

Олімпіада 41
(*Республіка Корея, 2000 р.*)

М.41.1. Нехай K – точка перетину прямих l і MN (рис. М.41.1). Тоді $KA^2 = KM \cdot KN = KB^2$, K – середина відрізка AB. Пряма $PQ \parallel AB$, M є серединою відрізка PQ, тому досить довести, що $EM \perp PQ$.

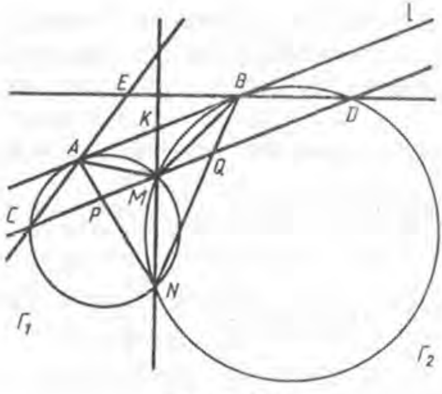


Рис. М.41.1

Оскільки $l \parallel CD$, точки A і B є серединами відповідних дуг CM і DM. Маємо $\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$, $\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle ABE$.

Тому прямі AM і AE, BM і BE симетричні відносно l, їх точки перетину E і M симетричні відносно l, $EM \perp l$. Отже, $EM \perp PQ$.

М.41.2. З умови $abc = 1$ випливає, що можна записати $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ для деяких додатних x, y, z. Задана нерівність набуває вигляду

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \le 1 .$$

Домноживши на xyz, отримуємо

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \le xyz .$$

Тепер покладемо $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$. Треба довести, що

$$uvw \le \frac{u+v}{2}\frac{v+w}{2}\frac{w+u}{2}.$$

Сума будь-яких двох з чисел u, v, w є додатною, тому серед них не більш ніж одне від'ємне число. Якщо маємо тільки одне від'ємне число серед них, то ліва частина останньої нерівності менша від нуля, права – більша, тому нерівність виконується. Якщо всі ці числа невід'ємні, використовуємо очевидні нерівності

$$\sqrt{uv} \le \frac{u+v}{2},\ \sqrt{vw} \le \frac{v+w}{2},\ \sqrt{wu} \le \frac{w+u}{2}.$$

Перемноживши їх, отримаємо потрібне твердження.

М.41.3. *Відповідь.* $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$. Доведемо спочатку, що всі вказані значення λ задовольняють умову. Точки, в яких сидять блохи, позначимо зліва направо через $A_1, A_2, ..., A_n$. Нехай $d = \min\{A_k A_{k+1}, 1 \leq k \leq n-1\}$. Кожного разу обиратимемо найлівішу блоху, і вона буде стрибати через найправішу. При першому стрибку блоха в A_1 стрибатиме через блоху в A_n, точку її "приземлення" позначимо через A_{n+1}. Тоді

$$A_n A_{n+1} = \lambda A_1 A_n = \lambda\left(A_1 A_2 + A_2 A_3 + ... + A_{n-1} A_n\right) \geq \lambda(n-1)d \geq d .$$

Усі інші відстані між сусідніми блохами залишаються незмінними і також не меншими за d. Тому при таких діях і вказаних значеннях λ найменша відстань між блохами не буде зменшуватись. Оскільки тепер найлівіша блоха розташована в A_2 і $A_1 A_2 \geq d$, на цьому і кожному наступному кроці положення найлівішої блохи буде не менш ніж на d зміщуватись у правий бік. Для будь-якої точки M на прямій після деякої кількості стрибків всі блохи будуть праворуч від M.

Тепер покажемо, що при $\lambda < \frac{1}{n-1}$ умова не буде виконуватись. Доведемо це навіть для довільного розташування n блох. Дану пряму вважатимемо числовою, кожній точці поставимо у відповідність дійсне число. Нехай s_k – сума чисел, що відповідають положенням блох після k стрибків, w_k – найбільше з цих чисел (тобто значення, що відповідає розташуванню найправішої блохи). Відмітимо, що $s_k \leq n w_k$. Досить довести, що послідовність w_k, $k \geq 0$, обмежена.

Нехай при $(k+1)$-му стрибку блоха з точки A стрибає в C через B, і цим точкам відповідають числа a, b, c. Тоді $s_{k+1} = s_k + c - a$. За умовою $c - b = \lambda(b-a)$, звідси $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Тому $s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$. Якщо $c > w_k$, то $c = w_{k+1}$. Оскільки $b \leq w_k$, матимемо $s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k)$. Відмітимо, що записана оцінка правильна й у випадку $c \leq w_k$, адже тоді $w_{k+1} - w_k = 0$, інші різниці тут додатні.

Звідси маємо, що $\frac{1+\lambda}{\lambda}w_{k+1}-s_{k+1}\le\frac{1+\lambda}{\lambda}w_k-s_k$. Тому послідовність $z_k=\frac{1+\lambda}{\lambda}w_k-s_k$, $k\ge0$, незростаюча, всі $z_k\le z_0$. Тобто $\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}-n\right)w_k+$ $+(nw_k-s_k)\le z_0$. Оскільки $s_k\le nw_k$, отримуємо $\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}-n\right)w_k\le z_0$. При $\lambda<\frac{1}{n-1}$ маємо нерівність $\frac{1+\lambda}{\lambda}-n>0$, тому послідовність w_k обмежена.

М.41.4. *Відповідь*. 12 способів. Позначимо розташування карток у червоному, білому та синьому ящиках відповідно літерами **ч**, **б**, **с**. Треба знайти кількість розташувань, при яких не можна отримати одну і ту ж суму номерів вибором двох карток із різних ящиків. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай для деякого i картки з числами i, $i+1$, $i+2$ розташовані в трьох різних ящиках, вважатимемо, що відповідно в **ч, б** і **с**. Оскільки $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, картка $i+3$ не може бути ані в **б**, ані в **с**, отже вона в **ч**. Аналогічно $i-1$ може бути лише в **с**. Продовжуючи такі міркування, визначимо, що картки з числами 1, 2, …, 100 повинні бути в ящиках у циклічному порядку: **с, ч, б, с, ч, б, с** … Тобто всі числа, що мають однакову остачу при діленні на 3, повинні бути на картках в одному ящику. Легко переконатись, що будь-яке таке розташування задовольняє умову, адже при додаванні двох різних чисел за модулем 3 можливі лише рівності $0=1+2$, $1=1+0$, $2=2+0 \pmod 3$ і за значенням суми однозначно відновлюються доданки. Кожне таке розташування повністю визначається розміщенням карток 1, 2, 3 в трьох різних ящиках, і їх кількість дорівнює 6.

Випадок 2. Не існує трьох сусідніх чисел різних кольорів. Нехай картка 1 в **ч**, i є найменшим числом, картка якого знаходиться не в червоному ящику. Для визначеності вважатимемо, що в білому. Найменше число на картці в синьому ящику позначимо через k. Оскільки розташування в **ч, б, с** неможливе, то $i+1<k$.

Припустимо, що $k<100$. Запишемо $i+k=(i-1)+(k+1)$, тому картка $k+1$ повинна бути в **ч**. Оскільки $i+(k+1)=(i+1)+k$, то картка $i+1$ має бути в **с**. Отримали суперечність з вибором k як найменшого числа в синьому ящику, тому $k=100$.

Оскільки $(i-1)+100=i+99$, картка 99 має бути в білому ящику. Якщо деяка картка j, $1<j<100$, є в **ч**, то з рівності $j+99=(j-1)+100$ маємо, що $j-1$ повинна бути в **с**, але найменше число в синьому ящику дорівнює 100. Тому всі картки j, $1<j<100$, розташовані в білому ящику. Отже, маємо розміщення карток **ч, б, б**, ..., **б, б, с**. Легко переконатися, що при будь-якому розташуванні такого вигляду фокус буде виходити.

Оскільки таке розміщення визначається положенням карток 1, 2, 100 у трьох різних ящиках, тут також маємо 6 способів.

М.41.5. Доведемо, що таке n існує. Розглянемо числа $a_k=2^{3^{k-1}}+1$, $k\geq 1$. Запишемо $a_{k+1}=2^{3^k}+1=(a_k-1)^3+1=a_k\left(a_k^2-3a_k+3\right)$.

Маємо, що кожне a_{k+1} ділиться на a_k. Оскільки a_1 ділиться на 3, з записаної рівності випливає, що кожне a_k ділиться на 3, на 3 ділиться й вираз $a_k^2-3a_k+3$. Тобто a_{k+1} має ділитися на більший степінь трійки, ніж a_k, тому кожне a_k ділиться на 3^k.

Покажемо, що серед простих дільників a_{k+1} буде хоча б один, що не є дільником a_k. Число $a_k^2-3a_k+3$ не є степенем трійки, оскільки воно ділиться на 3, але не ділиться на 9 (адже a_k кратне трьом). Існує просте $p\neq 3$, що є дільником $a_k^2-3a_k+3$. Якби одночасно p було й дільником a_k, воно було б дільником числа 3, що невірно. Отже, кожне a_{k+1} має хоча б на один простий дільник більший, ніж a_k.

Існує a_m, що має не менше 1 999 простих дільників, відмінних від 2 та 3. Візьмемо з них деякі $p_1, p_2, ..., p_{1\,999}$. Тоді число $n=3^{m-1}p_1p_2...p_{1\,999}$ задовольняє умову задачі. Оскільки $p_1p_2...p_{1\,999}$ непарне, $2^n+1=\left(2^{3^{m-1}}\right)^{p_1p_2...p_{1\,999}}+1$ ділиться на $a_m=2^{3^{m-1}}+1$, а тому й на кожне з чисел 3^{m-1}, p_1, p_2, ..., $p_{1\,999}$. Очевидно, що n має рівно 2 000 різних простих дільників.

М.41.6. Спочатку покажемо, що прямі l_1, l_2, l_3 паралельні сторонам відповідно BC, CA, AB. Наприклад, доведемо, що $l_3\parallel AB$.

Нехай у даному трикутнику $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$ (рис. М.41.2). Трикутник CT_1T_2 рівнобедрений, $\angle CT_1T_2=\alpha+\beta$, кут між прямими AB та T_1T_2 дорівнює $|\angle B-\angle CT_1T_2|=|\beta-\alpha|$. Оскільки навколо чотирикутника ABH_1H_2 можна описати коло, $\angle CH_1H_2=\angle A=2\alpha$, кут між прямими AB та H_1H_2 дорівнює $|\angle B-\angle CH_1H_2|=2|\beta-\alpha|$. Тому кут між T_1T_2 та H_1H_2 дорівнює $|\beta-\alpha|$. Внаслідок симетрії відносно T_1T_2 пряма H_1H_2 переходить в пряму, паралельну AB (адже кут між H_1H_2 та її образом також дорівнює $2|\beta-\alpha|$).

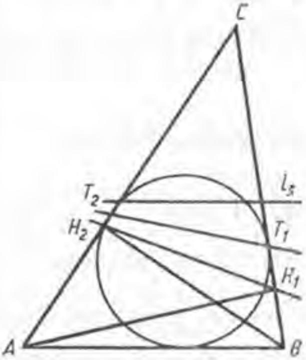


Рис. М.41.2

Сторони трикутника, утвореного прямими l_1, l_2, l_3, паралельні сторонам ABC. Тому існує гомотетія, що переводить один трикутник в інший. Розглянемо гомотетію, що переводить описане коло трикутника ABC в його вписане коло. Покажемо, що це й є те перетворення, що переводить один трикутник в інший. Тим самим отримаємо твердження задачі, оскільки при цьому трикутник ABC переходить у трикутник з вершинами на вписаному колі ABC.

Існують дві гомотетії, що переводять одне коло в інше. Розглянемо ту, центр якої лежить на відрізку, що з'єднує центри кіл (гомотетію з від'ємним коефіцієнтом). Нехай при цій гомотетії точки A, B, C переходять в A', B', C'. Покажемо, що пряма $A'B'$ є симетричним образом H_1H_2 при симетрії відносно T_1T_2, тобто збігається з l_3. Абсолютно аналогічно доводиться, що $B'C'$ та $C'A'$ збігаються з l_1 та l_2.

Досить довести, що точки T_1 та T_2 лежать на бісектрисі кута, утвореного прямими H_1H_2 та $A'B'$. Підрахуємо, що відстані від T_1 і T_2 до цих двох прямих рівні, звідси випливатиме потрібний факт.

Нехай O та I – центри описаного та вписаного кіл трикутника ABC, R та r – відповідно їх радіуси. Вказана гомотетія, очевидно, має коефіцієнт $-\dfrac{r}{R}$, нехай її центр лежить у точці F, $F\in OI$. Через

$d(X,l)$ позначимо відстань від точки X до прямої l. Легко помітити, що $d(O,AB)=R\cos 2\gamma$, $d(I,AB)=r$. Підрахуємо, що $d(F,AB)=$ $=\frac{Rr}{R+r}(1+\cos 2\gamma)$, і відстань між паралельними прямими AB та $A'B'$ дорівнює $r(1+\cos 2\gamma)$. Далі $d(T_1,AB)=BT_1\sin 2\beta=r\operatorname{ctg}\beta\sin 2\beta=r(1+\cos 2\beta)$, тому $d(T_1,A'B')=r\left|\cos 2\gamma-\cos 2\beta\right|$.

Нехай T – основа перпендикуляра, опущеного з T_1 на H_1H_2. Тоді $TT_1=T_1H_1\sin\angle T_1H_1T$. Навколо чотирикутника ABH_1H_2 можна описати коло, тому $\angle T_1H_1T=\angle A=2\alpha$. Оскільки $T_1H_1=\left|CH_1-CT_1\right|=$ $=\left|AC\cos 2\gamma-r\operatorname{ctg}\gamma\right|$, то $d(T_1,H_1H_2)=\left|AC\cos 2\gamma-r\operatorname{ctg}\gamma\right|\sin 2\alpha$. Записавши $AC=AT_2+CT_2=r(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)$, одержимо $(AC\cos 2\gamma-r\operatorname{ctg}\gamma)\times$ $\times\sin 2\alpha=r\cos 2\gamma\sin 2\alpha(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)-r\operatorname{ctg}\gamma\sin 2\alpha=r\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos 2\gamma-$ $-r\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\gamma(1-\cos 2\gamma)=r(1+\cos 2\alpha)\cos 2\gamma-r\sin 2\alpha\sin 2\gamma=r\cos 2\gamma+$ $+r\cos(2\alpha+2\gamma)=r(\cos 2\gamma-\cos 2\beta)$.

Тому $d(T_1,H_1H_2)=r\left|\cos 2\gamma-\cos 2\beta\right|=d(T_1,A'B')$. Цілком аналогічно знаходимо, що $d(T_2,H_1H_2)=r\left|\cos 2\alpha-\cos 2\gamma\right|=d(T_2,A'B')$.

Список рекомендованої літератури

1. **Всероссийские** математические олимпиады школьников / Г. Н. Яковлев, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. – М.: Просвещение, 1992. – 383 с.

2. **Гєнкін С. А.** Ленінградські математичні гуртки / С. А. Гєнкін, І. В. Ітенберг, Д. В. Фомін: У 2 ч. – К.: ТВіМС, 1997. – Ч. 1–2.

3. **Задачі** міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – Львів: Євросвіт, 1999. – 128 с.

4. **Київські** математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач / В. А. Вишенський, М. В. Карташов, В. І. Михайловський, М. Й. Ядренко. – К.: Либідь, 1993. – 144 с.

5. **Лейфура В. М.** Математичні задачі евристичного характеру. – К.: Вища шк., 1992. – 91 с.

6. **Международные** математические олимпиады / Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М.: Дрофа, 1998. – 160 с.

7. **Обласні** математичні олімпіади / І. М. Конет, В. Г. Паньков, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 304 с.

8. **Прасолов В. В.** Задачи по планиметрии. В 2 ч. – М.: Наука, 1991. – Ч. 1–2.

9. **Українські** математичні олімпіади. Довідник / В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін, М. В. Карташов та ін. – К.: Вища шк., 1993. – 415 с.

Зміст

Навчально-методичний посібник

Лейфура Валентин Миколайович,
Мітельман Ігор Михайлович,
Радченко Вадим Миколайович,
Ясінський В'ячеслав Андрійович

Редактор *О. В. Боброва*
Оформлення художника *В. О. Гурлєва*
Художній редактор *С. В. Анненков*
Коректори *І. В. Іванюсь, О. О. Куценко*
Комп'ютерна верстка *Л. О. Ємець*

Підписано до друку 28.11.2003 р.
Формат $60\times84^1/_{16}$. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний
Умов. друк. арк. 31,62.
Обл.-вид. арк. 31,18. Тираж 4000 прим. Зам. № 3-486.

Видавництво "Техніка".
04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
України суб'єктів видавничої справи
ДК № 357 від 12.03.2001 р.

Віддруковано
на Білоцерківській книжковій фабриці.
09117 м. Біла церква, вул. Леся Курбаса, 4.

M34 **Математичні** олімпіади школярів України: 1991 – 2000 рр.: Навч.-метод. посібник / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – К.: Техніка, 2003. – 541 с.: іл.

ISBN 966-575-150-6

Подаються умови та розв'язання задач математичних олімпіад школярів, що проводились в Україні у 1991 – 2000 рр.: третього та четвертого етапів Всеукраїнських олімпіад, Соросівських олімпіад. Наводяться матеріали Міжнародних математичних олімпіад, в яких брала участь команда України.

Для учнів, що готуються до участі в математичних олімпіадах та прагнуть удосконалити навички в розв'язуванні складних задач. Книга буде цінним посібником для вчителів математики, керівників математичних гуртків, організаторів олімпіад і студентів педагогічних спеціальностей.

ББК 22.1я73

МАТЕМАТИЧНІ
олімпіади
ШКОЛЯРІВ
УКРАЇНИ

«Техніка»