Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Роман Собкович, Наталія Кульчицька

Основні методи доведення нерівностей

Івано-Франківськ

2014

ЗМІСТ

Вступ 4

Розділ 1. Основні традиційні методи доведень 7

1.1. Доведення нерівностей за допомогою означення 7

1.2. Синтетичний метод доведення нерівностей 10

1.3. Аналітичний метод доведення нерівностей 14

1.4. Доведення нерівностей методом від супротивного 18

1.5. Метод підсилення при доведенні нерівностей 20

1.6. Доведення нерівностей методом математичної індукції 26

1.7 Класичні нерівності між середніми та їх доведення 31

1.8. Наслідки з нерівності Коші та задачі на відшукання найбільших та найменших значень 39

Розділ 2. Застосування властивостей функцій та методів математичного аналізу 43

2.1. Оцінка областей визначення та множини значень. Монотонність. Екстремуми 43

2.2. Застосування властивостей квадратного тричлена 47

2.3. Застосування похідної 52

2.4. Застосування інтеграла 57

2.5. Застосування опуклості функції. Нерівність Єнсена 58

2.6. Нерівність Юнга 63

Розділ 3. Застосування методів аналітичної геометрії, векторної алгебри, тригонометрії 65

3.1. Застосування методів аналітичної геометрії 65

3.2. Застосування методів векторної алгебри 68

3.3. Застосування тригонометрії 73

Розділ 4. Застосування деяких геометричних співвідношень до доведення нерівностей 77

4.1. Геометричний спосіб доведення нерівностей між середніми квадратичним, арифметичним, геометричним та гармонічним 77

4.2. Використання співвідношень між елементами геометричних фігур 79

Розділ 5. Нерівності в геометрії 85

5.1. Нерівність трикутника 85

5.2. Застосування векторів 87

5.3. Оцінка площі 89
5.4. Екстремальна властивість центра ваги 92
5.5. Дослідження екстремальних властивостей 93
5.6. Застосування похідної 96
Список використаної та рекомендованої літератури 100

Вступ

Поряд із традиційними для елементарної математики задачами відшукання коренів різного типу рівнянь та їх систем, розв'язків нерівностей, часто можна зустрітися з необхідністю оцінювати та порівнювати певні величини. Такими можуть бути як числові вирази, так і вирази, що містять змінні. В окремих випадках може виявитися, що такі вирази зв'язані між собою відношеннями ">", "≥", "<", "≤" не для окремих множин допустимих значень змінних, а для всіх можливих таких наборів. Прикладами таких співвідношень можуть бути нерівності $a^2+b^2 \geq 2ab$, $a^2+\frac{1}{a^2} \geq 2$, $\sin x < x < tgx,$ $\left(x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $\lg\left(1+\sin^2 x\right) \geq 0$ та ін. У таких випадках говорять не про розв'язування, а про доведення нерівностей.

В процесі написання даного посібника ми ставили за мету описати основні методи розв'язування такого роду задач, тобто доведення нерівностей, а також продемонструвати їх ефективність при розв'язуванні різних вправ, значна частина яких носить олімпіадний характер.

Перш, ніж перейти до безпосереднього розгляду змісту, зробимо невелику екскурсію в історію математики.

Поняття «більше» та «менше» поряд з поняттями рівності виникли у зв'язку з необхідністю порівнювати різні величини. Поняттями нерівності користувалися ще древні греки. Зокрема ще Архімед (III ст. до н. е.), займаючись обчисленням довжини кола, встановив, що «периметр всякого круга дорівнює потроєному діаметру з надлишком, який менше сьомої частини діаметра, але більше десяти сімдесят перших». Інакше кажучи, Архімед вказав границі числа π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Добре відомі і перші геометричні нерівності: «перпендикуляр менший похилої, проведеної із одної і тієї ж точки до даної прямої», «сторона трикутника менша суми двох інших сторін», «проти більшого кута трикутника лежить більша сторона»). Вони належить ще древньогрецькій математиці і містилися в знаменитих «Началах» Евкліда.

Ряд нерівностей приводить у своєму знаменитому трактаті «Начала» Евклід. Він, наприклад, доводить, що середнє геометричне двох додатних чисел не більше їх середнього арифметичного, тобто, що вірна нерівність $\sqrt{\grave{a}b} \le \frac{a+b}{2}$.

У «Математичному збірнику» Паппа Олександрійського в III ст., доводиться: «Якщо $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ($a,\ b,\ c,\ d$ - додатні числа), то $ad > bc$». Однак всі ці міркування проводилися словесно, спираючись у більшості випадків на геометричну термінологію.

Зараз на мові нерівностей часто формулюються постановки задач в багатьох застосуваннях математики. Наприклад, багато економічних задач зводяться до дослідження систем лінійних нерівностей з великим числом змінних. Часто та чи інша нерівність служить важливим допоміжним засобом, основною лемою, яка дозволяє довести або заперечити існування якихось об’єктів (скажемо, розв’язків рівняння), оцінити їх кількість, провести класифікацію. Наприклад, щоб розв’язати рівняння

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x} = 2^{1-|y|},$$

потрібно побачити, що його ліва частина більша або рівна 2, а права – не більша 2, тобто скористатися нерівностями $a + \frac{1}{a} \ge 2,\ a > 0$ та $2^{-|a|} \le 1$. Рівність у наведеному прикладі можлива тільки у випадку, коли обидві частини рівняння приймають значення 2. А це буде виконуватися лише при $x = y = 0$.

В наш час нерівності та системи нерівностей широко використовуються як в теоретичних дослідженнях, так і при розв’язуванні важливих практичних задач. Нерівності – це не тільки допоміжний інструмент. В кожній області математики - алгебрі і теорії чисел, геометрії і топології, теорії ймовірностей та теорії функцій, математичній фізиці і теорії диференціальних рівнянь, теорії інформації та дискретній математиці - можна вказати фундаментальні результати, сформульовані у виді нерівностей. Без них не може обійтися ні фізика, ні астрономія, ні хімія.

У багатьох розділах математики, особливо у математичному аналізі, в прикладній математиці, нерівності зустрічаються значно частіше, ніж рівняння. Скажемо, розв'язки якихось практично важливих рівнянь лише в дуже рідких випадках вдається знайти точно - у вигляді числа або формули, а для наближеного розв'язання в математиці завжди потрібно вказати оцінку похибки, тобто довести деяку нерівність.

Задачі, розв'язання яких достатньо складне без застосування класичних нерівностей, - часті гості на математичних олімпіадах школярів. Розв'язання задач такого типу традиційно являє собою послідовність достатньо простих міркувань. А ось логіка та ідеї всього ланцюжка цих елементарних ланок – міркувань виходить за рамки методів та прийомів шкільного курсу. Тим більше, що процес отримання і вивчення нерівностей та їх застосувань неформальний і трудно алгоритмізується.

Досить важливим питанням методики навчання є введення в програму профільного навчання теми «Доведення нерівностей». Відповідні задачі в основному розв'язуються алгебраїчним способом, який являється одним із кращих засобів розвитку самостійного, творчого мислення. З допомогою спеціально підібраних задач, які можуть зацікавити учнів своєю видимою простотою і тим, що їх розв'язок не відразу дається в руки, можна показати учням красу, простоту та стрункість логічних міркувань. Задачі на доведення нерівностей часто розв'язуються декількома способами. Це дає можливість звертати увагу учнів не тільки на найбільш раціональний, красивий спосіб розв'язання даної задачі, але і на ті способи, які можуть застосовуватися при розв'язуванні інших задач, а в деяких випадках виявляються єдиними.

Вважаємо, що даний посібник буде корисним для учнів, вчителів математики, а також для всіх, хто хоче самостійно підвищувати свій математичний рівень.

Розділ 1. **Основні традиційні методи доведень нерівностей**

1.1. Доведення нерівностей за допомогою означення

За означенням вважається, що $a > b$ ($a < b$), якщо різниця $a - b$ є додатним (від'ємним) числом. Тому для доведення нерівності $f(a,\ b, ...,\ k) > g(a,\ b, ...,\ k)$ на заданій множині значень змінних $a,\ b, ...,\ k$ достатньо розглянути різницю $f(a,\ b, ...,\ k) - g(a,\ b, ...,\ k)$ і показати, що вона додатна при заданих значеннях змінних $a,\ b, ...,\ k$. Аналогічні міркування можна застосовувати для доведення нерівностей виду $f < g,\ \ f \geq g,\ \ f \leq g$.

Наведемо приклади таких доведень.

Задача 1.1.1. Довести, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконується нерівність

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (нерівність Коші).}$$

Доведення. Розглянемо різницю $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ і покажемо, що вона не може бути від'ємною. Маємо

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Очевидно, що вираз $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ не може бути від'ємним при довільних невід'ємних значеннях a та b. Тому різниця $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ невід'ємна. Це означає, що $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Відмітимо, що знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

Задача 1.1.2. Довести, що $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 10 + \pi > 2a + 12b + 6c$.

Доведення. Утворимо різницю

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 10 + \pi - (2a + 12b + 6c)$$

і покажемо, що вона додатна. Перегрупувавши доданки, дістаємо

$$(a^2-2a+1)+(4b^2-12b+9)+(3c^2-6c+3)+\pi-3=(a-1)^2+(2b-3)^2+3(c-1)^2+\pi-3.$$

Очевидно, що одержаний вираз додатний при довільних значеннях a, b та $\tilde{n}$. Нерівність доведена.

Задача 1.1.3. Довести, що якщо $a+b+c\geq 0$, то $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

Доведення. Перетворимо різницю $a^3+b^3+c^3-3abc$ наступним чином:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=(a+b+c)((a+b)^2-ac-bc+c^2-3ab)=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right).$$

Оскільки за умовою $a+b+c\geq 0$, то одержаний вираз не може бути від'ємним. Це завершує доведення нерівності. Знак рівності можливий у випадках, коли $a+b+c=0$ та $a=b=c$.

Задача 1.1.4. Довести, що якщо $ab>0$, то $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Доведення. Маємо

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0.$$

Задача 1.1.5. Довести, що для довільного a виконується нерівність

$$\frac{a^2}{1+a^4}\leq\frac{1}{2}.$$

Доведення. Маємо

$$\frac{a^2}{1+a^4}-\frac{1}{2}=\frac{2a^2-1-a^4}{2(1+a^4)}=-\frac{(a^2-1)^2}{2(1+a^4)}\leq 0.$$

Цим самим нерівність доведена.

Задача 1.1.6. Довести, що якщо $a+b\geq 0$, $a\neq 0,\ b\neq 0$, то

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Доведення. Знаходимо

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2}=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a^2b^2}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}\geq 0.$$

Отже, якщо $a+b\geq 0$, $a\neq 0,\ b\neq 0$, то $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Задача 1.1.7. Довести нерівність $\frac{x^3}{y^2} \ge 3x - 2y$ ($x,\ y$ - додатні числа).

Доведення. Маємо

$$\frac{x^3}{y^2} - 3x + 2y = \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{y^2} = \frac{(x-y)(x^2 + xy - 2y^2)}{y^2} = \frac{(x-y)^2(x+2y)}{y^2} \ge 0\,.$$

Зауважимо, що доведена нами нерівність використовується при доведенні інших нерівностей методом підсилення (див., наприклад, задачу 1.5.12).

Задача 1.1.8. Довести, що якщо $x > y > z$, то $x^2y + y^2z + z^2x > x^2z + y^2x + z^2y$.

Доведення. Маємо

$$x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y = xy(x-y) - (xz + yz)(x-y) + z^2(x-y) =$$
$$= (x-y)(xy - xz - yz + z^2 = (x-y)(z-y)(z-x)\,.$$

Згідно з умовою задачі перший множник одержаного виразу додатний, а два інші - від'ємні, тобто весь вираз додатний.

Задача 1.1.9. Довести нерівність $1 + 2a^4 \ge a^2 + 2a^3$.

Доведення. Доведення випливає з наступних перетворень:

$$1 + 2a^4 - a^2 - 2a^3 = 2a^3(a-1) - (a^2 - 1) = (a-1)(2a^3 - a - 1) = (a-1)^2\left(2a^2 + 1\right) \ge 0\,.$$

Знак рівності можливий лише у випадку, коли $a = 1$.

Задача 1.1.10. Довести, що якщо $a \ne 2$, то

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 4} > \frac{2}{a^3 - 8}\,.$$

Доведення. Доведення випливає із наступних співвідношень:

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 4} - \frac{2}{a^3 - 8} = \frac{a^2 + 2a + 4 - 2(a-2)}{(a-2)^2(a^2 + 2a + 4)} = \frac{a^2 + 8}{(a-2)^2((a+1)^2 + 3)} > 0\,.$$

Задача 1.1.11. Довести нерівність $a^4 + b^4 \ge ab^3 + a^3b$.

Доведення. Виконаємо перетворення:

$$a^4 + b^4 - ab^3 - a^3b = a^3(a-b) - b^3(a-b) = (a-b)^2(a^2 + ab + b^2)\,.$$

Оскільки $(a-b)^2 \ge 0$, а вираз $a^2 + ab + b^2$ приймає тільки додатні значення (дискримінант даного квадратного тричлена відносно довільної змінної від'ємний), то нерівність доведена. Знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

1.2. Синтетичний метод доведення нерівностей

Суть цього методу полягає в тому, що за допомогою певних перетворень нерівність, яку потрібно довести, виводять із деяких відомих (очевидних, або їх ще називають опорних) нерівностей. В ролі таких часто використовують нерівності:

$$\text{а) } (a-b)^2 \ge 0\text{, б) } \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \text{ при } a \ge 0,\ b \ge 0\text{, в) } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2 \text{ при } ab > 0,$$

$$\text{г) } ax^2 + bx + c > 0 \text{ при } a > 0,\ b^2 - 4ac < 0.$$

Логічна схема такого доведення виглядає у вигляді імплікацій

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n \to B,$$

де A_1 - деяка початкова вірна нерівність, A_i $(i = 2,\ 3,\ldots,\ n)$ - отримані з неї вірні нерівності, B - нерівність, яку потрібно довести. Даний метод є достатньо ефективним, проте не завжди зрозуміло, з яких очевидних нерівностей потрібно розпочинати доведення. Відповідь на це питання іноді може дати аналітичний метод, який ми розглянемо у наступному пункті.

Наведемо приклади деяких доведень, де використовується синтетичний метод.

Задача 1.2.1. Довести, що для довільних $a \ge 0,\ b \ge 0,\ \tilde{n} \ge 0,\ d \ge 0$ виконується нерівність

$$\frac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}\,.$$

Доведення. Нам відомо, що при заданих обмеженнях на змінні виконуються нерівності $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, $\frac{\tilde{n}+d}{2} \ge \sqrt{cd}$. Застосувавши нерівність Коші до лівих частин записаних нерівностей та використавши записані вище співвідношення, дістаємо

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}\ ,$$

або $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Рівність можлива тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються умови $a=b,\ c=d$ та $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$, тобто, коли $a=b=c=d$.

Задача 1.2.2. Довести, що $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ для $n=2,\ 3,\ 4,\ldots$.

Доведення. Використаємо у ролі опорних наступні нерівності Коші:

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n\cdot 1}\,,\ \frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1)\cdot 2}\,,\ \frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2)\cdot 3}\,,\ldots,$$

$$\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2\cdot(n-1)}\,,\ \frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1\cdot n}\,.$$

Перемноживши їх, дістаємо

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{n\cdot 1\cdot(n-1)\cdot 2\cdot(n-2)\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2\cdot(n-1)\cdot 1\cdot n} = n!.$$

Оскільки у першій опорній нерівності при $n>1$ рівність неможлива, то остаточно отримуємо строгу нерівність, тобто, що $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$.

Задача 1.2.3. Довести, що при $a>0,\ b>0,\ \tilde{n}>0$ виконується нерівність

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9\,.$$

Доведення. Перший спосіб. Використаємо очевидні нерівності $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2$ та $\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2$. Додавши їх, дістаємо $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 6$. Запишемо одержане співвідношення у виді

$$\left(1+\frac{a}{b}+\frac{\tilde{n}}{b}\right)+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{\tilde{n}}{a}\right)+\left(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right) \geq 9\,,$$

або

$$\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9.$$

Винісши у лівій частині нерівності за дужки вираз $a+b+c$, отримуємо нерівність, яку потрібно було довести. Знак рівності виконується при $a=b=c$.

Другий спосіб. Використаємо розглянутий вище спосіб доведення нерівностей за допомогою означення. Для цього виконаємо наступні перетворення:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-6=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\geq 0.$$

Отже, задана нерівність вірна.

Задача 1.2.4. Довести нерівність (нерівність Коші – Буняковського)

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2.$$

Доведення. Розглянемо очевидні нерівності

$$(a_1-\lambda b_1)^2\geq 0,\ (a_2-\lambda b_2)^2\geq 0,\ \ ,\ (a_n-\lambda b_n)^2\geq 0.$$

Додавши їх, отримаємо нерівність $\lambda^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq 0$, яка виконується при довільному дійсному числі λ. Оскільки старший коефіцієнт $\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ одержаного квадратного відносно λ тричлена додатний, то його дискримінант не може бути додатним. Тому

$$D=4\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2-4\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\leq 0.$$

Звідси отримуємо потрібну нерівність.

Задача 1.2.5. Довести, що для довільних додатних чисел a, b виконується нерівність $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b$.

Доведення. Використаємо, як опорні, дві очевидні нерівності $\frac{a^2}{b} \ge 2a - b$ та $\frac{b^2}{a} \ge 2b - a$. Додаючи їх, отримуємо нерівність, яку потрібно було довести. Знак рівності виконується тільки у випадку, коли $a = b$.

Задача 1.2.6. Довести, що для довільних дійсних чисел $a,\ b,\ c$ виконується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$.

Доведення. Додавши очевидні нерівності $(a-b)^2 \ge 0,\ (b-c)^2 \ge 0,\ (a-c)^2 \ge 0$, отримуємо

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab - 2bc - 2ac \ge 0.$$

З одержаного співвідношення випливає нерівність, яку ми доводимо. Рівність виконується тільки у випадку $a = b = c$.

Задача 1.2.7. Довести, що при $a_i > 0,\ i = 2,\ 3,\dots,n$ виконується нерівність

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2.$$

Доведення. Розглянемо очевидні нерівності

$$\left(\sqrt{a_1} - \frac{\lambda}{\sqrt{a_1}}\right)^2 \ge 0,\ \left(\sqrt{a_2} - \frac{\lambda}{\sqrt{a_2}}\right)^2 \ge 0,\quad ,\ \left(\sqrt{a_n} - \frac{\lambda}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \ge 0.$$

Додавши їх, отримаємо нерівність

$$\lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - 2n\lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i \ \ge 0,$$

яка виконується при довільному дійсному числі λ. Тому на дискримінант D одержаного відносно λ квадратного тричлена накладаємо умову

$$\frac{1}{4}D = n^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \le 0.$$

Звідси отримуємо потрібну нерівність. Дещо пізніше ми розглянемо інші способи доведення подібних нерівностей, зокрема із використанням скалярного добутку та його властивостей.

Задача 1.2.8. Довести, що для довільних додатних чисел $a,\ b,\ c$ виконується нерівність

$$\frac{a+b+c}{3+a+b+c} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Розв'язання. Додавши три очевидні нерівності

$$\frac{a}{3+a+b+c} < \frac{a}{1+a}, \ \frac{b}{3+a+b+c} < \frac{b}{1+b}, \ \frac{c}{3+a+b+c} < \frac{c}{1+c},$$

отримуємо потрібну нерівність.

1.3. Аналітичний метод доведення нерівностей

Іноді може виявитися, що застосування розглянутих вище прийомів не приводить до потрібного результату, оскільки доведення нерівності за означенням може не бути реалізованим через громіздкість та складність перетворень, а синтетичний метод не вдається застосувати у зв'язку з тим, що не зрозуміло, з яких опорних нерівностей доцільно розпочати доведення. Одним з можливих варіантів у цьому випадку може бути застосування аналітичного методу.

Його суть полягає в тому, що після ряду перетворень нерівності, яку потрібно довести, отримують деяку очевидну вірну нерівність. На мові логіки ми реалізовуємо наступну схему такого пошуку:

$$B \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n,$$

де B - нерівність, яку потрібно довести, A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ - отримані з неї нерівності, A_n - кінцева вірна нерівність. Реалізація такої схеми носить назву ***аналізу Евкліда***. Природно, що відшукання нерівності A_n не може завершити доведення, оскільки імплікація $B \to A_n$ може бути вірною і у випадку, коли твердження B - хибне. Тому наступним етапом доведення повинно бути обґрунтування можливості здійснення зворотних міркувань, тобто істинності імплікацій

$$A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_2 \to A_1 \to B.$$

Фактично тепер ми реалізовуємо схему синтетичного методу, причому початкова опорна нерівність цього методу (у нашому випадку – це твердження A_n) відома.

Наведемо приклади подібних доведень.

Задача 1.3.1. Довести, що для довільних $a \ge 0,\ b \ge 0$ виконується нерівність

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

(задача 1.1.1, розв'язання якого тут реалізується іншим методом)**.**

Доведення. Виконаємо наступні перетворення даної нерівності:

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}\,,$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \ge 0\,,$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0\,.$$

Одержана нерівність вірна для довільних $a \ge 0,\ b \ge 0$. Тепер очевидно, що з неї можна одержати попередню нерівність, з якої в свою чергу – нерівність, що потрібно було довести.

Задача 1.3.2. Довести, що для довільних чисел $a \ge 0,\ b \ge 0$ виконується нерівність

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Доведення. Очевидно, що якщо $a+b=0$, то виконується рівність і твердження вірне. При $a+b \ne 0$ задача зводиться до доведення нерівності $a^2-ab+b^2 \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ або нерівності $3a^2-6ab+3b^2 \ge 0$, яка очевидна.

Інший спосіб доведення цієї нерівності, що використовує ідеї опуклості функції, буде наведено у розділі 2.5 (задача 2.5.2).

Задача 1.3.3. Довести, що для довільних $a \ge 0,\ b \ge 0$ виконується нерівність $\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$.

Доведення. Після піднесення до квадрату обох частин нерівності, маємо

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \le (a+b)^2 \Rightarrow a^2+b^2 \le a^2+2ab+b^2.$$

Отримуємо вірну нерівність $2ab \ge 0$. Очевидно, що крім неї, вірними будуть і кожна з попередніх нерівностей.

Задача 1.3.4. Довести, що для довільних $a > 0,\ b > 0$ виконується нерівність

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}\ .$$

Доведення. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \ge \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 .$$

Звідси отримуємо

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \ge a + b \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 (a+b) \ge 0\ .$$

Одержана нерівність відповідно до умови задачі вірна, і з неї тепер можна отримати всі попередні нерівності у зворотному порядку, а серед них – і задану.

Задача 1.3.5. Довести, що якщо $a + b \ge 0$, то $ab(a+b) \le a^3 + b^3$.

Доведення. Знайдемо різницю правої та лівої частин:

$$a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 = a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a-b)^2 (a+b) \ge 0\ .$$

Тепер, використавши отриману нерівність в ролі початкової і рухаючись у зворотному порядку, отримуємо нерівність, яку потрібно було довести.

Задача 1.3.6. При яких значеннях параметра k нерівність

$$a^2 + 2ab + 2b^2 + b + k > 0$$

виконується при довільних $a,\ b$?

Розв'язання. Маємо

$$a^2 + 2ab + 2b^2 + b + k = (a+b)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{1}{4}\ .$$

Одержаний вираз буде додатним при довільних $a,\ b$, якщо $k > \frac{1}{4}$.

Задача 1.3.7. Довести, що при $n \ge 1$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\ .$$

Доведення. Перетворимо нерівність до виду $1+\sqrt{n(n-1)}<\sqrt{n(n+1)}$, звідки, після піднесення до квадрату, отримуємо

$$2\sqrt{n(n-1)}<2n-1 \Leftrightarrow 4n^2-4n<(2n-1)^2 .$$

Очевидно, що одержана нерівність вірна, а також те, що можливе виконання перетворень у зворотному порядку. Це доводить задану нерівність.

Задача 1.3.8. Знайти найменше значення виразу $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7$.

Розв'язання. Перетворимо заданий вираз наступним чином:

$$2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7=(x-2y)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+2 .$$

Тепер видно, що найменше значення виразу дорівнює 2 і досягається воно при $x=2,\ y=1$. Фактично ми довели нерівність $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7\geq 2$.

Задача 1.3.9. Довести нерівність $x^{10}+x^2+1\geq 3x^4$.

Доведення. Виконаємо наступні перетворення виразу:

$$x^{10}+x^2+1-3x^4=(x^2-1)x^8+(x^2-1)x^6+(x^2-1)x^4-(x^2-1)\cdot 2x^2-(x^2-1)=$$

$$=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4-2x^2-1)=$$

$$=(x^2-1)\cdot\left((x^2-1)x^6+(x^2-1)\cdot 2x^4+(x^2-1)\cdot 3x^2+(x^2-1)\right)=$$

$$=(x^2-1)^2\cdot(x^6+2x^4+3x^2+1).$$

Одержаний вираз не може бути від'ємним, що доводить задану нерівність. Очевидно, що знак рівності буде тільки у випадку, коли $x=\pm 1$.

Задача 1.3.10. Знайти найменше значення функції

$$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

Розв'язання. Перетворимо вираз, перемножуючи два крайні та два середні множники:

$$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)=(x^2+5x+5)^2-1.$$

Очевидно, що значення функції буде найменшим, коли найменшим є перший доданок, тобто при тих значеннях x, які є коренями рівняння $x^2+5x+5=0$. Знаходимо $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$. При знайдених значеннях

$$f_{\min}=f\left(\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}\right)=-1.$$

1.4. Доведення нерівностей методом від супротивного

Доведення нерівностей цим способом полягає в тому, що заперечується початкове твердження, тобто знак > ($\geq$, <, $\leq$) у нерівності замінюється на $\leq$ (відповідно <, $\geq$, >). Після цього обґрунтовують, що таке співвідношення неможливе.

Наведемо приклади.

Задача 1.4.1. Довести, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0,\ \tilde{n} \geq 0,\ d \geq 0$ виконується нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}\ .$$

Доведення. Припустимо, що при деяких значеннях параметрів $a,\ b,\ c$ та d виконується нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Після піднесення до квадрату обох невід'ємних частин нерівності та очевидних спрощень, одержуємо

$$ad + bc < 2\sqrt{abcd} \Leftrightarrow \frac{ad+bc}{2} < \sqrt{(ad)\cdot(bc)}\ ,$$

що суперечить нерівності Коші. Отже, наше припущення невірне. А це доводить початкову нерівність. Рівність можлива, якщо для заданих чисел виконується умова $ad = bc$.

Задача 1.4.2. Довести, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ та $\tilde{n} \geq 0,$ виконується нерівність

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ .$$

Доведення. Припустимо, що існує набір невід'ємних чисел $a,\ b$ та c, для яких виконується нерівність

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ .$$

Піднесемо до квадрату невід'ємні частини нерівності. Одержуємо $(a+b+c)^2 > 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, звідки дістаємо $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc<0$ або

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (c-b)^2 < 0\ ,$$

що неможливо. Тому початкова нерівність вірна. Рівність можлива, якщо для заданих чисел виконується умова $a = b = c$.

Задача 1.4.3. Довести, що при $a \neq b$ і $ab > 0$ число $\sqrt{a}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - 1\right) + \sqrt{b}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}} - 1\right)$ додатне.

Доведення. Перепишемо задане число у виді $\dfrac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{b}$ і припустимо, що воно не є додатним. Тоді виконується нерівність

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \leq a + b.$$

Звідси дістаємо $a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 \leq 0$ або

$$a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 = a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)^2(a + b) \leq 0.$$

Отримане співвідношення не виконується при жодних значеннях змінних, що задовольняють умову задачі. Таким чином, початкове припущення є невірним. Отже, задане число додатне.

Задача 1.4.4. Довести, що для всіх дійсних значень x виконується нерівність

$$(x-6)(x-9)(x^2 - 5x + 4) + x^2 + 73 \geq 10x.$$

Доведення. Нехай $(x-6)(x-9)(x^2 - 5x + 4) + x^2 + 73 < 10x$. Перетворимо різницю виразів у лівій та правій частині нерівності наступним чином:

$$\begin{aligned}(x-6)(x-9)(x^2 - 5x + 4) + x^2 + 73 - 10x = (x-6)(x-9)(x-1)(x-4) + x^2 + 73 - 10x = \\ = (x^2 - 10x + 9)(x^2 - 10x + 24) + x^2 - 10x + 73 = t(t+15) + t + 64 = (t+8)^2 < 0,\end{aligned}$$

де $t = x^2 - 10x + 9$. Очевидно, що одержане співвідношення неможливе, а це говорить про невірність припущення і доводить задану нерівність.

Задача 1.4.5. Якщо $a + b \geq 0$, то $ab(a+b) \leq a^3 + b^3$. Довести.

Доведення. Припустимо, що виконується нерівність $ab(a+b) > a^3 + b^3$, тобто, що вираз $a^3 + b^3 - ab(a+b)$ від'ємний. Перетворимо одержаний вираз. Маємо

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2.$$

Оскільки, відповідно до умови задачі, одержаний вираз не може бути від'ємним, то припущення невірне.

1.5. Метод підсилення при доведенні нерівностей.

Нехай нам потрібно довести нерівність $A > B$, де A, B - деякі числові вирази або вирази із змінними. Вважатимемо, що є очевидною, або легко доводиться нерівність $A_1 > B_1$. Якщо нам вдасться довести нерівності $A > A_1$ та $B_1 > B$, то, очевидно, що задача буде розв'язаною. Це випливає з ланцюжка нерівностей $A > A_1 > B_1 > B$. Іноді такий ланцюжок може бути довшим, а іноді навіть коротшим, якщо $A_1 = B_1$. Наприклад, щоб довести числову нерівність $\log_6 7 > \log_{2013} 2012$, достатньо зауважити, що $\log_6 7 > 1$, а $\log_{2013} 2012 < 1$. Такий прийом у доведеннях нерівностей називають методом підсилення.

При застосуванні цього методу часто використовують співвідношення $a^2 + b^2 \ge 2ab$, $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ при $a \ge 0,\ b \ge 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$ при $ab > 0$, $\dfrac{a^2}{b} \ge 2a - b$ при $b > 0$, $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a}{b+1}$ при $a > 0,\ b > 0$.

Наведемо приклади подібних доведень.

Задача 1.5.1. Довести нерівність

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\left(1-\frac{1}{2013^3}\right) > \frac{1}{2}.$$

Доведення. Маємо

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^3}\right) > \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right) =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\ldots(2013-1)(2013+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 2013^2} = = \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2012\cdot 2014}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 2013^2} = \frac{2014}{2\cdot 2013} > \frac{1}{2}.$$

Задача 1.5.2. Довести, що при $n = 2,\ 3,\ 4, \ldots$ виконується нерівність

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Доведення. Маємо

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Додаючи дані нерівності, дістаємо

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

Отже, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$

Задача 1.5.3. Довести нерівність

$$43<\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}<44.$$

Доведення. Позбудемося ірраціональності у знаменниках дробів. Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2},\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=\sqrt{2013}-\sqrt{2012},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2013}-\sqrt{2012}\right)=\sqrt{2013}-1.$$

Для доведення нерівності залишається зауважити, що

$$\sqrt{2013}-1<\sqrt{45^2}-1=44;\quad \sqrt{2013}-1>\sqrt{44^2}-1=43.$$

Задача 1.5.4. Довести нерівність $513^{18}>624^{17}$.

Розв'язання.

$$513^{18}>512^{18}=2^{162}>2^{161}=128^{23}>125^{23}=5^{69}>5^{68}=625^{17}>624^{17}.$$

Задача 1.5.5. Довести нерівність

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<5,$$

якщо у кожному з доданків використано 2013 радикалів.

Доведення.

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<$$

$$<\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5.$$

Задача 1.5.6. Для додатних чисел $a,\ b$ довести нерівність $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{a^2}\geq a+b$.

Доведення. Використовуючи двічі нерівність $\dfrac{x^2}{y}\geq 2x-y$, де $x>0,\ y>0$, отримуємо

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\geq\frac{a}{b}(2a-b)+\frac{b}{a}(2b-a)=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)\geq$$

$$\geq 2\bigl(2a-b+2b-a\bigr)-(a+b)=a+b,$$

що і потрібно було довести.

Задача 1.5.7. Довести нерівність $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2013}>5$.

Доведення. Очевидні нерівності

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\ \ldots,$$

$$\frac{1}{513}+\frac{1}{514}+\ldots+\frac{1}{1024}>512\cdot\frac{1}{1024}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+\ldots+\frac{1}{2013}>0.$$

Додавши їх та перший доданок суми, тобто число $\dfrac{1}{2}$, дістаємо потрібну нерівність.

Задача 1.5.8. Порівняти числа $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ та $2\sqrt{n}$ при $n\geq 1$.

Розв'язання. Порівняємо квадрати цих додатних чисел, тобто вирази $2n+2\sqrt{n^2-1}$ та $4n$ або числа $\sqrt{n^2-1}$ та n. Очевидно, що $\sqrt{n^2-1}<\sqrt{n^2}=n$, тому перше із заданих чисел менше.

Задача 1.5.9. Довести, що $100!<50^{100}$.

Доведення. Очевидно, що $1\cdot 50\cdot 99\cdot 100<50^4$, $2\cdot 98<50^2$, $3\cdot 97<50^2,\ldots$, $49\cdot 51<50^2$. Перемноживши ці нерівності, отримаємо, що $100!<50^{100}$.

Задача 1.5.10. Довести, що $a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$.

Доведення. Очевидно, що $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, …, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Тому

$$a^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}.$$

Отже, $a<\frac{1}{10}$.

Задача 1.5.11. Довести, що для всіх додатних чисел a, b, c, для яких $abc=1$, виконується нерівність

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Доведення. При $y>0$ із очевидної нерівності $(x-y)^2\geq 0$ випливає, що $\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$. Використаємо одержане співвідношення для перетворення доданків заданої нерівності. Дістаємо:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{a^{-2}}{ab+ac}+\frac{b^{-2}}{ab+bc}+\frac{c^{-2}}{ac+bc}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{2}{a}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\left(\frac{2}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{\left(\frac{2}{c}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{4}\left(\left(\frac{4}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{4}{b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{4}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.$$

При виконанні перетворень для чисел $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ у кінці доведення використано нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, які ми більш детально розглянемо в пункті 1.7. Рівність у заданому співвідношенні досягається тільки при $a=b=c=1$.

Задача 1.5.12. Довести, що для довільних додатних чисел x, y виконується нерівність $\frac{x^4}{y^3}\geq 4x-3y$.

Доведення. Використовуючи нерівність $\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$, отримуємо

$$\frac{x^4}{y^3}=\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\geq\frac{1}{y}\cdot(2x-y)^2=\frac{4x^2}{y}-4x+y\geq 4(2x-y)-4x+y=4x-3y\,.$$

Зауважимо, що нерівності, одну з яких ми доводимо, та друга, яку використовуємо при доведенні, є частинним випадком нерівності $\frac{x^n}{y^{n-1}}\geq nx-(n-1)y$, яка випливає з тотожності

$$x^n-nxy^{n-1}+(n-1)y^n=(x-y)^2(x^{n-2}+2x^{n-3}y+3x^{n-4}y^2+\ldots+(n-2)xy^{n-3}+(n-1)y^{n-2})\,.$$

Задача 1.5.13. Для чисел a, b, c, кожне з яких не менше 1, довести нерівність $\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}\geq 1$.

Доведення. Відповідно до умови маємо $\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{2};\ \frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{2}$. Тому

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}=\frac{1}{\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}}=\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}}\geq\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1.$$

Рівність досягається тільки при $a=b=c=1$.

Задача 1.5.14. Для чисел a, b, c, кожне з яких не менше 2, довести нерівність $\left(a^3+b\right)\left(b^3+c\right)\left(c^3+a\right)\geq 125abc$.

Доведення. Очевидно, що при $a\geq 2$ виконується нерівність $a^3\geq 4a$. Аналогічно при $b\geq 2$ маємо $b^3\geq 4b$ і при $c\geq 2$ $c^3\geq 4c$. Тому

$$\left(a^3+b\right)\left(b^3+c\right)\left(c^3+a\right)\geq\left(4a+b\right)\left(4b+c\right)\left(4c+a\right)=$$
$$=\left(a+a+a+a+b\right)\left(b+b+b+b+c\right)\left(c+c+c+c+a\right)\geq 5\sqrt[5]{a^4b}\cdot 5\sqrt[5]{b^4c}\cdot 5\sqrt[5]{c^4a}=125abc\,.$$

Рівність досягається при $a=b=c=2$.

Задача 1.5.15. Довести, що $2^{m+n-2}\geq mn$ для всіх натуральних чисел m та n.

Доведення. Очевидно, що задача зводиться до доведення нерівності $2^k\geq 2k,\ k\in N$, оскільки після підстановки в неї значень $k=m$ та $k=n$ і перемноження одержаних нерівностей отримуємо співвідношення, що доводиться. Тепер маємо, що при $k=1$ виконується знак рівності, а при $k>1$, використовуючи біном Ньютона, дістаємо

$$2^k=(1+1)^k=1^k+k\cdot 1^{k-1}\cdot 1+\ldots+k\cdot 1\cdot 1^{k-1}+1^k\geq 2k\,.$$

Задача 1.5.16. Знайти найбільше та найменше значення виразу $\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}$, якщо числа $a,\ b,\ c$ належать відрізку $[2,\ 3]$.

Доведення. Виконаємо наступні перетворення:

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} = \frac{1}{\frac{a+b+b+c}{(a+b)(b+c)}} = \frac{1}{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}}.$$

Згідно з умовою задачі маємо

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3+3} \le \frac{1}{b+c} \le \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4},\ \frac{1}{6} = \frac{1}{3+3} \le \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, величина знаменника $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$ змінюється у межах від $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{2}$, а величина заданого виразу – від 2 до 3. Найбільше та найменше значення досягаються при $a=b=c=2$ та $a=b=c=3$.

Задача 1.5.17. Сума двох додатних чисел $a,\ b$ дорівнює 2013. Довести, що ці числа задовольняють нерівність $a^5 + b^5 \ge 2013a^2b^2$.

Доведення. Запишемо задане в умові співвідношення у виді $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2} \ge 2013$ та, використовуючи двічі нерівність $\frac{x^2}{y} \ge 2x - y$, перетворимо його ліву частину. Отримуємо

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2} \ge \frac{a}{b}(2a-b) + \frac{b}{a}(2b-a) = 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) - (a+b) \ge$$

$$\ge 2(2a - b + 2b - a) - (a+b) = a + b = 2013,$$

що і потрібно було довести.

Задача 1.5.18. Довести, що для всіх $a \in (0,\ 1)$ виконується нерівність

$$a^5 + (1-a)^5 \ge (a^2 - a)^2.$$

Доведення. Запишемо нерівність у виді $\frac{a^3}{(1-a)^2} + \frac{(1-a)^3}{a^2} \ge 1$. Тепер, міркуючи, як і у попередній задачі, отримуємо

$$\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{(1-a)^3}{a^2}\ge\frac{a}{1-a}(2a-1+a)+\frac{1-a}{a}(2-2a-a)=2\left(\frac{a^2}{1-a}+\frac{(1-a)^2}{a}\right)-1-1\ge$$

$$\ge 2\big(2a-1+a+2-2a-a\big)-2=0\,,$$

що і потрібно було довести.

Задача 1.5.19. Якщо m, n, k - натуральні числа, то $mn+nk+mk\le 3mnk$. Довести.

Доведення. Доведення випливає із співвідношення $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le 3$, оскільки кожен з трьох доданків у лівій частині не перевищує 1. Рівність можлива тільки у випадку $m=n=k=1$.

1.6. Доведення нерівностей методом математичної індукції

Метод математичної індукції ґрунтується на принципі математичної індукції, що формулюється так: деяке твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального n, якщо:

1) воно істинне для $n=1$;

2) з того, що $A(n)$ істинне для довільного натурального $k=n$ випливає, що воно істинне для наступного натурального числа $n=k+1$.

Сформульований принцип належить до аксіом натуральних чисел.

Кожне доведення методом математичної індукції передбачає реалізацію трьох етапів: на першому показуємо, що істинним є твердження $A(1)$; на другому припускаємо, що істинним є твердження $A(k)$ і, виходячи з цього, доводимо, що істинним є твердження $A(k+1)$. Виконані міркування дозволяють стверджувати, що твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального n. Відповідний висновок є третім етапом і завершує доведення.

Іноді використовують узагальнений принцип математичної індукції: твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального $n\ge m$, якщо воно вірне для натурального числа $n = m$ і з того, що $A(n)$ істинне для довільного натурального $n = k \geq m$ випливає, що воно істинне для наступного натурального числа $n = k + 1$.

Описаний метод широко використовується при обґрунтуванні різних математичних тверджень, зокрема при доведенні нерівностей. Розглянемо це на прикладах.

Задача 1.6.1. Довести, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ та натурального числа n виконується нерівність

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Доведення. Очевидно, що при $n = 1$ виконується рівність, тому дане твердження вірне. Нехай воно істинне при деякому натуральному числі $k = n$, тобто вірно, що $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k + b^k}{2}$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що вірною є також нерівність $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$. Оскільки ліва частина, згідно з припущенням, обмежена виразом

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2},$$

то для доведення достатньо показати, що $\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$. Для цього розглянемо різницю

$$(a^k + b^k)(a+b) - 2(a^{k+1} + b^{k+1}) = ab^k + ba^k - a^{k+1} - b^{k+1} = \left(a^k - b^k\right)\left(b - a\right).$$

Одержаний вираз при $a \geq 0,\ b \geq 0$ завжди від’ємний або дорівнює 0 (при $a = b$), тому $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$. Згідно з принципом математичної індукції вірною є також початкова нерівність $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$.

Задача 1.6.2. Довести, що для довільного натурального числа $n \geq 10$ виконується нерівність

$$2^n - n^3 > 23.$$

Доведення. При $n = 10$ отримуємо нерівність $2^{10} - 10^3 > 23$, яка вірна. Нехай вона вірна при деякому натуральному числі $k = n \geq 10$, тобто виконується нерівність $2^k - k^3 > 23$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що вірною є також нерівність $2^{k+1} - (k+1)^3 > 23$. Дістаємо

$$2^{k+1} - (k+1)^3 - 23 = 2\left(2^k - k^3 - 23\right) + k^3 - 3k^2 - 3k - 1 + 23 =$$

$$= 2\left(2^k - k^3 - 23\right) + k^3 - 3k^2 - 3k + 22.$$

Перший доданок одержаного виразу додатний за індуктивним припущенням. Оцінимо суму інших доданків, тобто вираз $f(k) = k^3 - 3k^2 - 3k + 22$. Функція $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 22$ має похідну $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$ та екстремуми у точках $x = 1 \pm \sqrt{2}$, і, очевидно, зростає на проміжку $\left[1 + \sqrt{2},\ +\infty\right)$. Переконавшись, що $f(10) > 0$, можемо стверджувати, що при $k \geq 10$ виконується нерівність $f(k) = k^3 - 3k^2 - 3k + 22 > 0$. Посилання на принцип математичної індукції завершує доведення.

Задача 1.6.3. Довести, що $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n \geq 5$.

Розв'язання. При $n = 5$ отримуємо нерівність $2^5 > 25$, яка вірна. Нехай вона вірна при деякому натуральному числі $k = n \geq 5$, тобто виконується нерівність $2^k > k^2$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що вірною є також нерівність $2^{k+1} > (k+1)^2$. Маємо

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 > (k+1)^2,$$

оскільки $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 > 0$ при $k \geq 5$. На основі принципу математичної індукції стверджуємо, що задана в умові нерівність вірна.

Задача 1.6.4. Довести, що для довільного натурального числа n виконується нерівність

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}.$$

Доведення. При $n = 1$ отримуємо вірну нерівність $1 > \frac{1}{2}$. Нехай вона вірна при деякому натуральному числі $k = n$, тобто нехай виконується нерівність

$$S(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}.$$

Використовуючи це припущення, покажемо, що вірною є також нерівність

$$S(k+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}.$$

Очевидно, що $S(k+1)=S(k)+P(k)$, де $P(k)=\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$. Вираз $P(k)$ являє собою суму 2^k дробів, кожний з яких більший, ніж $\frac{1}{2^{k+1}}$. Отже,

$$P(k)=\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $S(k)>\frac{k}{2}$ (за припущенням) і $P(k)>\frac{1}{2}$. Тому $S(k+1)=S(k)+P(k)>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$, тобто $S(k+1)>\frac{k+1}{2}$. На основі принципу математичної індукції стверджуємо що задана в умові нерівність виконується для довільного натурального числа n.

Задача 1.6.5. Довести, що для довільного натурального числа $n\geq 2$ та для довільних дійсних чисел a_i $(i=2,\ 3,\ldots,n)$ виконується нерівність

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

Доведення. При $n=2$ нерівність $|a_1+a_2|\leq|a_1|+|a_2|$ вірна. Справді, вона вірна у випадку, коли одне з чисел (або обидва) рівні 0. У випадку, коли обидва числа додатні або обидва від’ємні, виконується знак рівності. Якщо ж числа різних знаків, то дістаємо строгу нерівність. Можливі і інші доведення цього факту, наприклад, аналітичним методом або методом доведення від супротивного.

Нехай нерівність вірна при деякому натуральному $n=k$, тобто виконується співвідношення $|a_1+a_2+\ldots+a_k|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|$. Тоді

$$|a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}|=|(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1}|\leq|a_1+a_2+\ldots+a_k|+|a_{k+1}|\leq$$
$$\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|+|a_{k+1}|,$$

що, згідно з принципом математичної індукції, завершує доведення.

Задача 1.6.6. Довести, що для $x > -1$ при всіх натуральних n виконується нерівність $(1+x)^n \geq 1+nx$ (нерівність Бернуллі).

Доведення. При $n=1$ виконується знак рівності, тому твердження вірне. Нехай виконується нерівність $(1+x)^k \geq 1+kx$. Тоді

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = kx^2 + (k+1)x + 1) \geq 1 + (k+1)x$$

і, відповідно до принципу математичної індукції, нерівність вірна.

Задача 1.6.7. Довести методом математичної індукції, що при $n \geq 2$

$$\sqrt{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}.$$

Доведення. При $n=2$ отримуємо вірну числову нерівність $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Припустимо, що вірна нерівність $\sqrt{k} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k-2}$ і покажемо, що

$$\sqrt{k+1} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k+1}{2k}.$$

Із припущення маємо $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{k} \cdot \frac{2k+1}{2k}$. Покажемо, що $\sqrt{k} \cdot \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{k+1}$. Аналізуючи різницю квадратів лівої та правої частин, дістаємо $\frac{k(2k+1)^2}{4k^2} - (k+1) = \frac{(2k+1)^2 - 4k(k+1)}{4k} = \frac{1}{4k} > 0$, що доводить потрібне твердження. Отже, відповідно до принципу математичної індукції, нерівність доведена.

Задача 1.6.8. Довести, що $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$ для всіх натуральних $n \geq 2$.

Доведення. При $n=2$ отримуємо вірну числову нерівність $4 > 1 + 2\sqrt{2}$. Нехай виконується нерівність $2^k > 1 + k\sqrt{2^{k-1}}$. Покажемо, що звідси випливає вірність співвідношення $2^{k+1} > 1 + (k+1)\sqrt{2^k}$. Маємо

$$2^{k+1} - 1 - (k+1)\sqrt{2^k} > 2 \cdot \left(1 + k\sqrt{2^{k-1}}\right) - 1 - (k+1)\sqrt{2^k} = 1 + \sqrt{2^k}\left(k(\sqrt{2}-1) - 1\right).$$

Одержаний вираз додатний при $k \geq 3$. Таким чином із припущення, що нерівність вірна при $n=k$ випливає, що вона вірна при $n=k+1$. Згідно з принципом математичної індукції нерівність виконується при довільному натуральному $n \geq 2$.

1.7. Класичні нерівності між середніми та їх доведення

Середнім для дійсних чисел $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ назвемо довільне дійсне число x, яке не перевищує найбільшого із заданих чисел та не менше від найменшого. Тобто

$$\min x_i \le x \le \max x_i,\ \ i=1,\ 2,...,\ n.$$

Якщо $\min x_i < \max x_i$, то середніх є безліч. Із середніми величинами часто зустрічаються у статистиці, фізиці, техніці. Їх використання зумовлене необхідністю оцінювати результати багаторазових вимірювань одних і тих самих величин, а також багаторазового визначення дослідним шляхом одних і тих самих параметрів.

Можна обґрунтувати, що середнім для дробів $\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},...,\ \frac{a_n}{b_n}$ з додатними знаменниками є число $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}$, для додатних чисел $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ середніми є величини $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$, $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}$, $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$, $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$.

З множини всіх середніх, як правило, виділяють ті, які отримують в результаті певних цілеспрямованих обчислень. У математиці такими вважають середнє арифметичне, середнє геометричне, середнє квадратичне та середнє гармонічне. Всі вони пов’язані між собою певними залежностями, які ми називаємо класичними нерівностями між середніми.

Розглянемо детальніше класичні нерівності між середніми. Як уже було зауважено, для n додатних чисел x_i такими є:

$$\text{середнє арифметичне } A_n=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n};$$

$$\text{середнє геометричне } G_n=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n};$$

середнє квадратичне $K_n = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$;

середнє гармонічне $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$.

Ці середні величини знаходяться у співвідношеннях

$$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n .$$

Є ряд способів їх доведення. В даному посібнику ми розглянемо три із них, причому два доведення будуть наведені дещо пізніше у відповідності до методів доведень. Зараз зупинимося на першому. Спочатку доведемо наступне твердження.

Лема. Якщо добуток n додатних чисел $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ дорівнює 1, то їхня сума не менша від n, тобто $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$. Причому рівність має місце лише тоді, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Доведення виконаємо, користуючись методом математичної індукції. При $n = 2$ нам потрібно показати, що для двох додатних чисел $x_1,\ x_2$ таких, що $x_1 x_2 = 1$, виконується нерівність $x_1 + x_2 \geq 2$. Справді,

$$x_1 + x_2 - 2 = x_1 + \frac{1}{x_1} - 2 = \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \geq 0 .$$

Очевидно, що знак рівності виконується при $x_1 = 1$. Але тоді і $x_2 = 1$, тобто $x_1 = x_2$.

Нехай для k додатних чисел таких, що $x_1 x_2 \ldots x_k = 1$, виконується нерівність $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k$. Причому рівність має місце лише тоді, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$. Покажемо, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$, якщо тільки $x_i > 0$ і $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = 1$.

Можливі два випадки:

1) всі числа x_i рівні між собою, тобто $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1} = 1$. Тоді $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1$;

2) не всі числа x_i рівні. У цьому випадку серед них знайдуться числа як більші, так і менші 1. Для зручності міркувань вважатимемо $x_1 > 1,\ x_{k+1} < 1$.

Поклавши $y_1 = x_1 x_{k+1}$, отримуємо, що $x_1 x_2 ... x_k x_{k+1} = y_1 x_2 ... x_k = 1$. Тому, згідно з припущенням, для чисел $y_1,\ x_2,...,\ x_k$ виконується нерівність $y_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$. Звідси

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = (y_1 + x_2 + ... + x_k) + x_1 + x_{k+1} - y_1 > (k+1) + x_1 + x_{k+1} - y_1 - 1 =$$
$$= (k+1) + x_1 + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} - 1 = (k+1) + (x_1 - 1)(1 - x_{k+1}) \geq k + 1.$$

Згідно з принципом математичної індукції лема доведена.

Дану лему застосуємо при доведенні нерівностей $K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$. Їх можна виконувати різними способами. Ми використаємо метод математичної індукції. При цьому базою (початковим етапом доведення) для її використання служитимуть нерівності $K_2 \geq A_2 \geq G_2 \geq H_2$, тобто нерівності

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Розглянемо їх доведення.

Серед різних можливих способів доведення нерівності $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2}$ виберемо, наприклад, методом від супротивного. Нехай $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} < \frac{x_1 + x_2}{2}$. Після піднесення до квадрату невід'ємних виразів в обох частинах нерівності отримуємо $2x_1^2 + 2x_1^2 < (x_1 + x_2)^2$ або $(x_1 - x_2)^2 < 0$, що невірно. Зроблене нами припущення невірне, отже, нерівність доведена.

Нерівність Коші $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$ ми доводили раніше.

Нерівність між середнім геометричним та середнім гармонічним можна довести, підставивши у нерівність Коші $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ значення $a = \frac{1}{x_1},\ b = \frac{1}{x_2}$.

Дістаємо $\sqrt{\frac{1}{x_1 x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}$, звідки знаходимо, що $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$. Зауважимо, що середнє геометричне двох чисел $\sqrt{ab}$ іноді називають середнім пропорційним, оскільки у цьому випадку це число є розв'язком рівняння $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$.

Доведення нерівностей $K_n \ge A_n \ge G_n \ge H_n$ при $n>2$ розіб'ємо на доведення співвідношень $A_n \ge G_n$, $K_n \ge A_n$ та $G_n \ge H_n$.

Розпочнемо з доведення нерівності $A_n \ge G_n$ або $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$.

Візьмемо n додатних чисел $\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p},...,\frac{x_n}{p}$, де $p=\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$. Очевидно, що їх добуток дорівнює 1. В силу доведеної нами леми, $\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p}+...+\frac{x_n}{p} \ge n$, причому рівність має місце лише тоді, коли $\frac{x_1}{p}=\frac{x_2}{p}=...=\frac{x_n}{p}$. Звідси $p \le \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$, тобто

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

Рівність має місце лише при умові, що $x_1=x_2=...=x_n$.

Для доведення співвідношення $K_n \ge A_n$ або $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$ припустимо, що воно вірне при $n=k$, тобто, що виконується нерівність $\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2}{k}}$, або $(x_1+x_2+...+x_k)^2 \le k(x_1^2+x_2^2+...+x_k^2)$.
Покажемо, що з цього припущення випливає вірність нерівності

$$\frac{x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}}{k+1} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2+x_{k+1}^2}{k+1}},$$

або

$$(x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1})^2 \le (k+1)(x_1^2+x_2^2+...+x_k^2+x_{k+1}^2).$$

Маємо

$$(x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1})^2 = (x_1+x_2+...+x_k)^2 + 2(x_1+x_2+...+x_k)x_{k+1} + x_{k+1}^2 \le$$

$$\le k\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2\right)+2\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)x_{k+1}+x_{k+1}^2=$$
$$(k+1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2+x_{k+1}^2\right)-\left(x_1-x_{k+1}\right)^2-\left(x_2-x_{k+1}\right)^2-\ldots-\left(x_k-x_{k+1}\right)^2\le$$
$$\le (k+1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2+x_{k+1}^2\right).$$

Таким чином, згідно з принципом математичної індукції, нерівність $K_n \ge A_n$ доведена.

Доведення співвідношення $G_n \ge H_n$ або $\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \ge \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}$

випливає з нерівності $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ з використанням замін $a_1=\dfrac{1}{x_1},\ a_2=\dfrac{1}{x_2},\ldots,\ a_n=\dfrac{1}{x_n}$.

Таким чином, нерівності $K_n \ge A_n \ge G_n \ge H_n$ доведено. Зауважимо, що знак рівності у них виконується лише у випадку, коли $x_1=x_2=\ldots=x_n$

Співвідношення між середніми часто використовують при доведенні інших нерівностей. Наведемо приклади.

Задача 1.7.1. Довести, що для довільних додатних чисел x, y, z виконується нерівність

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{y}\right)\ge 8.$$

Доведення. Використавши нерівність Коші, запишемо три вірні нерівності:

$$1+\frac{y}{x}\ge 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{y}{x}}=2\sqrt{\frac{y}{x}},\ 1+\frac{x}{z}\ge 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{x}{z}}=2\sqrt{\frac{x}{z}},\ 1+\frac{z}{y}\ge 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{z}{y}}=2\sqrt{\frac{z}{y}}.$$

Перемноживши їх, отримаємо

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{y}\right)\ge 8\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}}=8.$$

Задача 1.7.2. Довести, що для довільних чисел $a\ge 0,\ b\ge 0$ виконується нерівність

$$\frac{a^4+b^4}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що ця нерівність є частинним випадком нерівності

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2},$$

яка була доведена нами раніше за допомогою методу математичної індукції. Виберемо інший спосіб доведення.

Із вірної нерівності $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$, що пов’язує середні квадратичне та арифметичне, отримуємо $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$. Покажемо, що $\frac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$, чим самим доведемо і початкову нерівність. Справді, після простих перетворень отримуємо $2\left(a^4+b^4\right)-\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2 \ge 0$.

Задача 1.7.3. Довести, що для довільних чисел $a_i > 0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ n$ виконується нерівність

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} > n.$$

Доведення. Для чисел $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_3},\ldots,\frac{a_n}{a_1}$ використаємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним. Отримаємо нерівність

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}}=1,$$

звідки випливає необхідне твердження.

Задача 1.7.4. Довести, що для довільних чисел $a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0$ виконується нерівність

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9abc.$$

Доведення. Для кожного з двох множників у лівій частині застосуємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним. Отримаємо

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Перемноживши одержані співвідношення, дістаємо нерівність, що потрібно довести.

Задача 1.7.5. Довести, що для довільних додатних чисел a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Доведення.. Виконаємо наступні перетворення цієї нерівності:

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{a+c}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}+3,$$

$$\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}.$$

Застосуємо до виразів в одержаному співвідношенні нерівність між середнім арифметичним та середнім гармонічним. Отримуємо:

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)}{3}\geq$$

$$\geq\frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}}=\frac{3}{2},$$

звідки дістаємо шукану нерівність.

Задача 1.7.6. Довести, що при $a_i>0,\ i=2,\ 3,\dots,n$ виконується нерівність

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2.$$

Доведення.. Використаємо нерівність $A_n\geq G_n$ для доданків першого та другого множника. Дістаємо дві нерівності

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n},$$

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}}.$$

Перемноживши одержані співвідношення, отримуємо потрібний результат.

Задача 1.7.7. Довести, що при $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконується нерівність

$$\frac{a^3+b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4.$$

Доведення. Перепишемо нерівність у виді $\frac{a^3+b^6+8}{3} \geq 2ab^2$ і для перетворення її лівої частини для чисел $a^3,\ b^6,\ 8$ використаємо нерівність $A_3 \geq G_3$. Дістаємо нерівність $\frac{a^3+b^6+8}{3} \geq \sqrt[3]{8a^3b^6} = 2ab^2$, що і потрібно було довести.

Задача 1.7.8. Довести, що при $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконується нерівність

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

Розв'язання. Перепишемо нерівність у виді $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{ab}$ і для перетворення її лівої частини використаємо нерівність $A_5 \geq G_5$. Дістаємо співвідношення $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}} = \sqrt[5]{ab}$, яке доводить задану нерівність.

Задача 1.7.9. Для додатних чисел $a,\ b,\ c$ довести нерівність

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

Доведення. Для перетворення чисельників у кожному доданку лівої частини використаємо нерівність між середнім квадратичним та середнім арифметичним. Отримуємо:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} + \frac{(b+c)^2}{2(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{2(c+a)} = a+b+c.$$

Задача 1.7.10. При додатних $a,\ b,\ c$ знайти найменше значення виразу

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}.$$

Розв'язання. Насамперед покажемо, що для перших трьох доданків виконується нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Для цього виконаємо наступні перетворення:

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{a+c}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}+3,\ \left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}.$$

Тепер, застосувавши нерівність між середнім арифметичним та середнім гармонічним, отримуємо:

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)}{3}\geq\frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}}=\frac{3}{2}.$$

Групу з інших трьох доданків перетворимо так:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 2+2+2=6.$$

Таким чином, найменше значення виразу дорівнює $\frac{15}{2}$. Досягається воно при $a=b=c$.

Задача 1.7.11. При додатних $a,\ b,\ c$ довести нерівність

$$\frac{a^4+b^4+c^4+16}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq\frac{8}{3}.$$

Доведення. Користуючись двічі нерівністю Коші, дістаємо

$$2a^4+b^4+16\geq 2a^4+8b^2\geq 8a^2b.$$

Аналогічно отримуємо ще дві нерівності

$$2b^4+c^4+16\geq 8b^2c,\quad 2c^4+a^4+16\geq 8c^2a.$$

Додаючи одержані три нерівності, отримуємо

$$3(a^4+b^4+c^4+16)\geq 8(a^2b+b^2c+c^2a),$$

звідки випливає нерівність, яку ми доводимо.

1.8. Наслідки з нерівності Коші та задачі на відшукання найбільших та найменших значень

Повернемося до нерівності $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$, де $x_i\geq 0$. Як було зауважено вище, знак рівності тут виконується тоді і тільки тоді, коли всі значення x_i рівні. Звідси можна отримати два цікавих факти, які мають ряд застосувань.

1. Якщо добуток $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ є сталою величиною, то сума $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ приймає найменше значення. При $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \tilde{n}$ це значення дорівнює $n\sqrt[n]{c}$.

2. Якщо сума $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ є сталою величиною, то добуток $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ приймає найбільше значення. При $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \tilde{n}$ воно дорівнює $\left(\frac{\tilde{n}}{n}\right)^n$.

Наведені міркування дозволяють доводити окремі нерівності з новими постановками задач.

Задача 1.8.1. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$\arcsin^3 x + \arccos^3 x .$$

Розв'язання. Нехай $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$. Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = y .$$

Значення функції буде найменшим, коли найбільшим буде значення добутку $\alpha\beta$.

Оскільки $\beta \geq 0$, то найбільше значення $\alpha\beta$ потрібно шукати при $\alpha > 0$. Із нерівності Коші маємо $\alpha \cdot \beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$. Але $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$, тому $\alpha \cdot \beta \leq \frac{\pi^2}{16}$.

Найбільше значення $\alpha \cdot \beta$ прийматиме при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. Тоді: $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і найменше значення функції буде $y_{\min} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}$.

Найменше значення $\alpha\beta$ очевидно буде при $\alpha < 0$. При $x = -1$ маємо $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$. Враховуючи ці значення, бачимо, що добуток буде мінімальним, оскільки α приймає мінімальне значення, а β - максимальне. Отже, при $x = -1$ функція приймає найбільше значення

$$y_{\max} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi^3}{8} .$$

Таким чином, найбільшим значенням буде $\frac{7\pi^3}{8}$, а найменшим $\frac{\pi^3}{32}$.

Задача 1.8.3. Знайти найбільше значення виразу $a^2 \cdot b^4$, якщо $4a^2 + b^2 = 16$.

Розв'язання. Згідно з умовою вираз $4a^2 b^4$ (а, отже, і $a^2 b^4$) прийматиме найбільше значення при $4a^2 = b^2$, тобто при $a^2 = 2$. При цьому $a^2 \cdot b^4 = 2 \cdot 64 = 128$.

Задача 1.8.4. Знайти найменше значення виразу $4a^2 + b^2$, якщо $ab = 3$.

Розв'язання. Оскільки добуток виразів $4a^2$ та b^2 є сталим (із умови випливає, що $4a^2 \cdot b^2 = 36$), то вираз прийматиме найменше значення при $4a^2 = b^2$, тобто при $b = 2a$. При цьому $a^2 = \frac{3}{2}$, звідки $4a^2 + b^2 = 12$.

Задача 1.8.5. Знайти найбільше значення функції $y = \frac{x^2}{x^4 + 4}$.

Розв'язання. При $x = 0$ значення функції дорівнює 0. При $x \neq 0$ запишемо вираз для функції у виді $y = \frac{1}{x^2 + \frac{4}{x^2}}$. Дослідимо, коли знаменник виразу найменший. Зауваживши, що добуток виразів x^2 та $\frac{4}{x^2}$ є сталим числом, робимо висновок, що знаменник найменший при $x^2 = \frac{4}{x^2}$, тобто при $x^2 = 2$. Значення функції при цьому є максимальним і буде дорівнювати $\frac{1}{4}$.

Задача 1.8.6. Довести, що для довільних чисел $a_i > 0,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n$ виконується нерівність

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} > n.$$

Доведення. Ми уже розглядали доведення даної нерівності, використовуючи нерівність Коші. Зупинимося на інших міркуваннях. Оскільки добуток чисел $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_n}{a_1}$ є сталою величиною, то їхня сума буде

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_1}} = n.$$

Задача 1.8.7. Оцінити значення виразу $\sin^{2012} x + \cos^{2012} x$.

Розв'язання. Нехай $\sin^2 x = \alpha$, $\cos^2 x = \beta$. Тоді

$$\alpha^{1006} + \beta^{1006} \geq 2\sqrt{\alpha^{1006} \cdot \beta^{1006}} = 2(\alpha\beta)^{503}$$

і сума прийматиме найменше значення, коли добуток $\alpha\beta$ найбільший. Оскільки вираз $\alpha + \beta = 1$ є сталим, то максимальне значення буде при $\alpha = \beta$, тобто, коли $\sin^2 x = \cos^2 x$ або при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Значення заданого виразу у цьому випадку дорівнює $\frac{1}{2^{1005}}$. Одержали нижню оцінку виразу. Верхня оцінка випливає з нерівностей $\sin^{2012} x + \cos^{2012} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Рівність досягається у точках $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Таким чином, $\frac{1}{2^{1005}} \leq \sin^{2012} x + \cos^{2012} x \leq 1$.

Розділ 2. **Застосування властивостей функцій при доведенні нерівностей**

2.1. Оцінка областей визначення та множини значень. Монотонність. Опуклість

При доведенні нерівностей в окремих випадках доцільно проаналізувати область визначення та множину значень заданих в умові виразів. Цього іноді може виявитися достатньо для розв'язання задачі.

Задача 2.1.1. Довести нерівність

$$\sqrt[3]{x^2-4x-4y}<1+\sqrt[3]{(x-2)^2-4y-3}.$$

Доведення. Нема потреби робити певні перетворення при доведенні даної нерівності. Достатньо, порівнюючи підкореневі вирази, побачити, що при довільних x та y виконується нерівність $x^2-4x-4y<(x-2)^2-4y-3$. Тому ліва частина приймає значення менші, ніж права.

Задача 2.1.2. При $x \ge y$ довести нерівність

$$2\lg\left(x^2-2xy+y^2+10\right)+3\sqrt{x-y}-2y+y^2 \ge 1.$$

Доведення. Очевидно, що

$$2\lg\left(x^2-2xy+y^2+10\right)=2\lg\left((x-y)^2+10\right)\ge 2\lg 10=2,\ 3\sqrt{x-y}\ge 0,$$

$$y^2-2y=(y-1)^2-1\ge -1.$$

Тому ліва частина виразу приймає значення більші або рівні 1. Отже, нерівність виконується на всій області допустимих значень, тобто при $x \ge y$. Знак рівності досягається при $x=y=1$.

Задача 2.1.3. Довести нерівність

$$5\sqrt{x^2-3x+2}-3\sqrt[4]{-2x^2+5x-3}+x+1 \le \left|\ln a+\log_a e\right|.$$

Доведення. Проаналізуємо область визначення виразу. Для його лівої частини вона визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0, \\ -2x^2 + 5x - 3 \ge 0 \end{cases}$$

з єдиним розв’язком $x = 1$. При знайденому значенні ліва частина нерівності набуває значення 2. Залишається зауважити, що в правій частині нерівності є сума двох обернених чисел, яка не менша 2. Знак рівності досягається при $a = e$.

Задача 2.1.4. Довести нерівність

$$\sqrt{x+2} + 9\sqrt[4]{x-7} + 2x - 15 \ge 6y - y^2 - 7\,.$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що ліва частина нерівності визначена на проміжку $[7,\ +\infty)$ і, монотонно зростаючи на цьому проміжку, приймає найменше значення у точці $x = 7$. Це значення дорівнює 2. Записавши праву частину нерівності у виді $2 - (y-3)^2$, бачимо, що значення цього виразу не перевищують 2, причому рівність двом досягається в єдиній точці $y = 3$. Порівнюючи множини значень обох частин заданого виразу, робимо висновок, що рівність можлива тільки при $y = 3,\ x = 7$. Для інших значень змінних нерівність буде строгою.

Задача 2.1.5. Довести, що на всій області визначення виразу виконується нерівність

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}}}} \ge \frac{1}{4},$$

де кількість радикалів – довільне число $n \ge 2$.

Доведення. Очевидно, що структура виразу дозволяє суттєво спростити його, використовуючи перетворення лівої частини за допомогою співвідношення

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = x + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ми виберемо інший підхід, який є простішим. Побачивши, що вираз $f(x) = x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}}}$ монотонно зростає на всій своїй області визначення $x \in \left[-\frac{1}{4},\ +\infty\right)$, знаходимо його найменше значення. Воно, як легко бачити, при $x = -\frac{1}{4}$ дорівнює $\frac{1}{4}$. Цим самим нерівність доведена.

При доведенні деяких нерівностей використовуються властивості опуклих функцій. Зокрема, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вгору, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ виконується нерівність $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Якщо ж функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вниз, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ виконується нерівність $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Наведемо приклади.

Задача 2.1.6. Порівняти числа:

а) $3^{2014} + 5^{2014}$ та $2 \cdot 4^{2014}$,

б) $\sqrt[2014]{3} + \sqrt[2014]{5}$ та $2 \cdot \sqrt[2014]{4}$.

Розв'язання. У випадку а) розглянемо функцію $f(x) = x^{2014}$, яка є опуклою вниз. Тому, використавши нерівність $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, дістаємо, що

$$3^{2014} + 5^{2014} > 2 \cdot 4^{2014}.$$

У випадку б) розглядаємо функцію $f(x) = \sqrt[2014]{x}$, яка є опуклою вгору. Використавши нерівність $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, дістаємо $\sqrt[2014]{3} + \sqrt[2014]{5} < 2 \cdot \sqrt[2014]{4}$.

Задача 2.1.7. Числа $a,\ b,\ c$ задовольняють нерівності

$$a + b + c > 0,\ ab + bc + ac > 0,\ abc > 0.$$

Довести, що всі вони додатні.

Доведення. Насамперед зауважимо, що числа $a,\ b,\ c$ є коренями кубічного рівняння

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc = 0.$$

Очевидно, що для від'ємних x ліва частина рівняння приймає від'ємні значення. Отже, корені можуть бути тільки додатними, що завершує доведення.

В окремих випадках у залежності від постановки задачі доцільно досліджувати необхідні умови. Наприклад, необхідною умовою того, щоб рівняння $x^2 - ax - 3a = 0$ мало два корені, сума яких більша 2, а добуток був більший 3, відповідно до теореми Вієта, є виконання системи нерівностей $\begin{cases} a > 2, \\ -3a > 3 \end{cases}$. У даному випадку система несумісна і поставлена задача розв'язків не має. Але, якщо ми цю ж задачу сформулюємо для рівняння $x^2 - ax + 3a = 0$ і отримаємо систему $\begin{cases} a > 2, \\ 3a > 3 \end{cases}$ із розв'язками $a > 2$, то одержаної нерівності ще не достатньо, щоб вважати задачу розв'язаною. Обов'язково потрібно врахувати умову існування коренів у вигляді нерівності $D = a^2 - 12a \geq 0$. Звідси, оскільки $a > 2$, отримуємо $a \geq 12$.

Зауважимо, що відшукання необхідних умов не є обов'язковим етапом розв'язування задач. Наприклад, при розв'язуванні нерівності $\sqrt{x^2 - ax} > a^2$ нема потреби займатися знаходженням її області визначення, оскільки нерівність $x^2 - ax > a^4$ рівносильна заданій.

Розглянемо подібну до попередньої наступну задачу.

Задача 2.1.8. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - 4x + a^2 - 1 = 0$ має два корені, які обидва більші від 1?

Помилковий розв'язок, запропонований авторами даної задачі в одному із навчальних посібників, виглядає так. Умова задачі рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 2, \\ x_1 x_2 > 1, \\ D = 16 - 4(a^2 - 1) > 0 \end{cases} \quad (x_1,\ x_2 \text{ - корені рівняння}),$$

звідки, оскільки перша нерівність системи виконується (сума коренів дорівнює 4), а друга записується у виді $a^2 - 1 > 1$, отримуємо розв'язок $\sqrt{2} < |a| < \sqrt{5}$.

Помилка у наведених міркуваннях полягає у тому, що записана система виражає необхідну, але не достатню умову того, що обидва корені більші від 1. Адже, щоб добуток двох чисел був більший 1, зовсім не обов'язково, щоб кожне з них перевищувало 1. Правильний розв'язок може виглядати наступним чином. Оскільки абсциса вершини параболи $y = x^2 - 4x + a^2 - 1$ дорівнює 2 і розташована правіше точки $x = 1$, то для відшукання розв'язку задачі достатньо вимагати, щоб виконувалися умови $y(1) > 0$ та $D > 0$. Розв'язавши систему нерівностей $\begin{cases} a^2 - 4 > 0, \\ a^2 - 5 < 0 \end{cases}$, отримуємо $2 < |a| < \sqrt{5}$.

Задача 2.1.9. При яких значеннях параметра a точка $x = 1$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + 5a$?

Розв'язання. Згідно з умовою задачі, похідна $y' = 3x^2 - 6ax + 3a^2$ у точці $x = 1$ повинна перетворюватись у 0. Це дозволяє отримати значення $a = 1$. Проте, як легко переконатися, функція $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ у точці $x = 1$ екстремуму не має.

Отже, точка $x = 1$ при жодному значенні параметра a не може бути точкою екстремуму заданої функції.

Задача 2.1.10. При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a + 2 = 0$ буде найменшою?

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = a,\ x_1x_2 = a + 2$. Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a + 2) = (a - 1)^2 - 5,$$

але стверджувати, що значення $a = 1$, при якому одержаний вираз приймає мінімальне значення, є шуканим, ще рано. Потрібно додатково дослідити умову існування дійсних коренів. Знаходимо $D = a^2 - 4a - 8 \ge 0$, звідки $a \le 2 - \sqrt{12}$ та $a \ge 2 + \sqrt{12}$. Як бачимо, число $a = 1$ одержаним інтервалам не належить. Тому, оскільки на знайдених інтервалах функція $(a - 1)^2 - 5$ монотонна, мінімальне значення виразу $x_1^2 + x_2^2$ буде в одній із точок $a = 2 \pm \sqrt{12}$. Очевидно, що такою точкою є $a = 2 - \sqrt{12}$.

2.2. Застосування властивостей квадратного тричлена

Ідея прийому доведень із застосуванням властивостей квадратного тричлена, полягає в наступному. Нехай у випадку, коли у нерівності наявний квадратний тричлен відносно деякої змінної, встановлено, що він не має коренів. Тоді при умові додатності старшого коефіцієнта потрібно, щоб дискримінант цього тричлена був від'ємним.

Навпаки, якщо нам вдається показати, що корені є, то цим самим ми фактично обґрунтовуємо, що дискримінант квадратного тричлена не може бути від'ємним. Іноді питання наявності коренів може виявитися дещо складнішим і тоді можна пробувати з'ясовувати, чи існують значення змінних, при яких вираз приймає значення різних знаків. Цього у випадку неперервності функції було б достатньо, щоб стверджувати факт наявності коренів.

Наведемо приклади задач.

Задача 2.2.1. Якщо $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0$, то $\sqrt{(a+b)(c+d)} \leq \frac{a+b+c+d}{2}$. Довести.

Доведення. Якщо $a = b = 0$, то нерівність очевидна. Нехай $a + b > 0$. Зведемо нерівність до виду $(a+b+c+d)^2 - 4(a+b)(c+d) \geq 0$ та розглянемо квадратне рівняння $(a+b)x^2 - (a+b+c+d)x + (c+d) = 0$. Очевидно, що рівняння має корені (зокрема коренем є значення $x = 1$). Тому дискримінант D рівняння задовольняє умову $D = (a+b+c+d)^2 - 4(a+b)(c+d) \geq 0$, звідки отримуємо потрібну нерівність $\sqrt{(a+b)(c+d)} \leq \frac{a+b+c+d}{2}$. Рівність можлива при рівних значеннях всіх змінних.

Задача 2.2.2. Для невід'ємних чисел $a_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ 2013)$ довести нерівність $\sqrt{\sum_{i=1}^{1000} a_i \cdot \sum_{i=1001}^{2013} a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{2013} a_i}{2}$.

Доведення. Нехай $\sum_{i=1}^{1000} a_i > 0$. Запишемо нерівність у виді

$$\left(\sum_{i=1}^{2013} a_i\right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^{1000} a_i \cdot \sum_{i=1001}^{2013} a_i \geq 0$$

та розглянемо квадратне рівняння $\sum_{i=1}^{1000} a_i x^2 - \sum_{i=1}^{2013} a_i x + \sum_{i=1001}^{2013} a_i = 0$. Очевидно, що рівняння має корені (зокрема коренем рівняння є значення $x = 1$). Тому дискримінант D рівняння задовольняє умову $D=\left(\sum_{i=1}^{2012} a_i\right)^2-4\cdot\sum_{i=1}^{1000} a_i\cdot\sum_{i=1001}^{2012} a_i\geq 0$.

Звідси отримуємо потрібну нерівність. Рівність можлива при рівних значеннях всіх змінних.

Задача 2.2.3. Довести, що при всіх $a>1,\ b>1$ виконується нерівність

$$\left(a^2+b^2+a+b\right)^2>8ab(a+b).$$

Розв'язання. Розглянемо квадратний тричлен

$$f(x)=2x^2-\left(a^2+b^2+a+b\right)x+ab(a+b).$$

Знайдемо його значення в точках $x=a$ та $x=b$. Маємо:

$$f(a)=2a^2-\left(a^2+b^2+a+b\right)a+ab(a+b)=a^2-a^3+a^2b-ab=a(1-a)(a-b),$$

$$f(b)=2b^2-\left(a^2+b^2+a+b\right)b+ab(a+b)=b^2-b^3+b^2a-ab=b(1-b)(b-a).$$

Тепер, оскільки при $a\neq b$

$$f(a)\,f(b)=ab(1-a)(1-b)(a-b)(b-a)=-ab(a-1)(b-1)(a-b)^2<0,$$

то можна стверджувати, що в точках $x=a$ та $x=b$ функція приймає значення різні за знаком. Тому на відповідному проміжку існує корінь квадратного тричлена. Отже, його дискримінант $D=\left(a^2+b^2+a+b\right)^2-8ab(a+b)$ додатний, а це доводить задану нерівність.

При $a=b$ нерівність набуває виду $\left(2a^2+2a\right)^2>16a^3$ або $(a+1)^2>4a$. Записавши її у виді $(a-1)^2>0$, бачимо, що при $a>1$ вона вірна.

Задача 2.2.4. Довести, що для всіх дійсних значень a виконується нерівність $\left(a^3+a^2+2\right)^2\geq 4\left(a^3+1\right)\left(a^2+1\right)$.

Розв'язання. Різницю $\left(a^3+a^2+2\right)^2-4\left(a^3+1\right)\left(a^2+1\right)$ можна вважати дискримінантом квадратного тричлена $x^2-\left(a^3+a^2+2\right)x+\left(a^2+1\right)\left(a^3+1\right)$. Даний тричлен має корені $x_1=a^2+1$ та $x_2=a^3+1$, тому його дискримінант не може бути від'ємним. Знак рівності можливий, коли ці корені рівні, тобто при $a=0$ або $a=1$.

Задача 2.2.5. Відомо, що один із коренів рівняння $x^{12}-abx+a^2=0$ більший 2. Довести, що $|b|>64$.

Доведення. Нехай x_0 - корінь, про який іде мова в умові, тобто $x_0 > 2$. Маємо $a^2 - abx_0 + x_0^{12} = 0$, $D = (bx_0)^2 - 4x_0^{12} \geq 0$. Звідси $b^2 \geq 4x_0^{10} > 2^{12}$ або $|b| > 64$.

Задача 2.2.6. Числа $a,\ b,\ c$ такі, що $(a+b+c)c < 0$. Довести, що $b^2 > 4ac$.

Доведення. При $a = 0$ отримуємо нерівність $b^2 > 0$, яка не виконується тільки у випадку, коли $b = 0$. Але тоді відповідно до умови матимемо $c^2 < 0$, що неможливо. Отже, $b \neq 0$ і нерівність при $a = 0$ виконується.

Нехай $a \neq 0$. Розглянемо функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$. Оскільки $f(0) = c$ і $f(1) = a + b + c$, то відповідно до умови отримуємо $f(0) \cdot f(1) < 0$. Це означає, що на інтервалі $(0,\ 1)$ знаходиться один із коренів квадратного тричлена, тому його дискримінант $D = b^2 - 4ac > 0$.

Задача 2.2.7. Додатні числа $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ такі, що $b_1^2 < 4a_1c_1$, $b_2^2 < 4a_2c_2$. Довести, що $4(a_1 + a_2 + 2013)(c_1 + c_2 + 503) > (b_1 + b_2 + 2012)^2$.

Доведення. Короткий аналіз структури нерівності, яку потрібно довести, показує, що вираз

$$D = (b_1 + b_2 + 2012)^2 - 4(a_1 + a_2 + 2013)(c_1 + c_2 + 503)$$

можна розглядати, як дискримінант квадратного тричлена

$$f(x) = (a_1 + a_2 + 2013)x^2 + (b_1 + b_2 + 2012)x + (c_1 + c_2 + 503).$$

Якщо ми зуміємо показати, що цей тричлен приймає тільки додатні значення, то цим самим доведемо, що $D < 0$. Відповідно до умови квадратні тричлени $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ та $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ такі, що при довільному x виконуються нерівності $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$, $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$. Очевидна також нерівність $2013x^2 + 2012x + 503 > 0$. Додавши три одержані співвідношення, отримаємо нерівність, яку доводимо.

Задача 2.2.8. При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ буде найменшою?

Розв'язання. Нехай x_1 та x_2 - корені заданого рівняння. За теоремою Вієта маємо $x_1 + x_2 = a,\ x_1x_2 = a - 1$. Тому

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1.$$

Найменше значення одержаного виразу дорівнює 1 і досягається воно при $a=1$. Залишається зауважити, що при $a=1$ дійсні корені рівняння існують. Без цієї перевірки вважати розв'язання задачі завершеним не можна. Наприклад, для аналогічної задачі з рівнянням $4x^2-4(a+1)x+a^2+2a+2=0$ подібні міркування у вигляді перетворень

$$A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a+1)^2-\frac{a^2+2a+2}{2}=\frac{a^2+2a}{2}$$

привели б до неправильної відповіді $a=-1$. При цьому значенні a рівняння дійсних коренів не має.

Задача 2.2.9. Довести, що для будь-яких дійсних чисел x та y виконується нерівність $x^2+3y^2+2xy+2x+6y+3\geq 0$.

Доведення. Перетворимо заданий вираз наступним чином:

$$x^2+3y^2+2xy+2x+6y+3=(x+y+1)^2+2(y+1)^2.$$

Очевидно, що одержаний вираз не може бути від'ємним, а значення 0 досягається при виконанні умов $\begin{cases} x+y+1=0, \\ y+1=0 \end{cases}$, тобто при $x=0,\ y=-1$.

Даний результат можна було отримати і за допомогою інших міркувань, зокрема досліджуючи дискримінант лівої частини нерівності, розглядаючи її, як квадратну відносно змінної x або y.

Задача 2.2.10. Довести нерівність $a^2+b^2\geq ab$.

Доведення. Зробимо наступні перетворення:

$$a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}.$$

Отриманий вираз не може бути від'ємним, а це доводить вказане в умові твердження. Рівність можлива при $a=b=0$. Цей самий результат випливає з того, що дискримінант квадратного тричлена a^2-ab+b^2 відносно змінної a, який дорівнює $D=-3b^2$, не може бути додатним.

Задача 2.2.11. Довести нерівність $a^2+b^2+\tilde{n}^2\geq ab+bc+ac$ (приклад 1.2.6).

Доведення. Дискримінант квадратного тричлена $a^2 - a(b+c) + b^2 + c^2 - bc$ відносно змінної a, який дорівнює $D = (b+c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b-c)^2$, не може бути додатним. Це означає, що даний вираз не може приймати від'ємні значення. Знак рівності досягається при $a = b = ñ$.

Задача 2.2.12. Довести, що при довільному дійсному x виконується нерівність

$$4\cos^4\frac{x}{4} \geq \cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x.$$

Доведення. Перетворимо нерівність до виду

$$4\cos^4\frac{x}{4} - 2\cos^2\frac{x}{4}(1+\cos 2x) - \cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 4\cos^4\frac{x}{4} - 2\cos^2\frac{x}{4}(1+\cos 2x) + 1 \geq 0$$

та розглянемо її ліву частину, як квадратний тричлен відносно $\cos^2\frac{x}{4}$. Дискримінант цього квадратного тричлена $D = 4(1+\cos 2x)^2 - 16$. Оскільки $(1+\cos 2x)^2 - 4 \leq 0$, то $D \leq 0$. Тому вираз $4\cos^4\frac{x}{4} - 2\cos^2\frac{x}{4}(1+\cos 2x) + 1$ не може приймати від'ємні значення, що завершує доведення нерівності. Знак рівності досягається при $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Зауважимо, що в результаті нами одночасно отримано розв'язки відповідних тригонометричних рівняння та нерівності.

2.3. Застосування похідної

Розглянемо, як при доведені нерівностей можна використовувати похідну. Суть цього прийому полягає в наступному.

Нехай на певному проміжку $x \in [a,\ b]$ із області визначення функцій f та g потрібно довести нерівність $f(x) \geq g(x)$. Введемо в розгляд функцію $u(x) = f(x) - g(x)$. Нехай похідна $u'(x)$ має на відрізку, що розглядається, єдиний корінь x_0, це значення є точкою мінімуму функції u, а також виконується нерівність $u(x_0)= f(x_0)-g(x_0)\geq 0$. Тоді цього достатньо, щоб стверджувати, що на проміжку $[a,\ b]$ виконується нерівність $f(x)\geq g(x)$.

Даний прийом можна використовувати і при доведенні числових нерівностей. Для цього спочатку вводять у розгляд деяку функцію, яка приймає задані числові значення у певних точках, після чого приступають до реалізації описаної вище схеми.

Наведемо приклади таких доведень.

Задача 2.3.1. Довести нерівність

$$e^x \geq 1+\ln(x+1).$$

Доведення. ОДЗ: $x>-1$. Очевидно, що при $x=0$ ми отримуємо рівність. Розглянемо функцію $f(x)=e^x-1-\ln(x+1)$. Її похідна $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}$ дорівнює 0 в точці $x=0$ і монотонно зростає (останнє випливає з того, що її похідна $e^x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$ додатна). Таким чином, для функції $f(x)$ точка $x=0$ є точкою екстремуму, а саме точкою мінімуму. Тому для всіх x, що належать ОДЗ, виконується нерівність $f(x)\geq f(0)=0$, що і потрібно було довести.

Зауважимо, що одночасно нами фактично розв'язане рівняння $e^x=1+\ln(x+1)$ з єдиним коренем $x=0$ та нерівність $e^x>1+\ln(x+1)$ з розв'язками $x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Задача 2.3.2. При $x>0$ виконується нерівність $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$. Довести.

Доведення. Розглянемо функцію $y(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$. Знайшовши $y'(x)=e^x-1-x$ та $y''(x)=e^x-1$, бачимо, що друга похідна перетворюється в 0 у точці $x=0$ і при переході через цю точку змінює знак із «-» на «+». Це означає, що для функції $y'(x)$ точка $x=0$ є точкою мінімуму і $y'(0)=0$. Таким чином, $y'(x)\geq 0$ на всій числовій осі. Звідси випливає, що функція $y(x)$ монотонно зростає. Оскільки $y(0)=0$, то при $x>0$ маємо $y(x)>0$. Нерівність доведена.

Одночасно нами отримано наступні результати:

рівняння $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$ має єдиний корінь $x=0$;

нерівність $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ має розв'язки $x\in(0,\ +\infty)$.

розв'язками нерівності $e^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}$ є проміжок $x\in(-\infty;\ 0)$.

Задача 2.3.3. Довести, що при $x>-1$ для всіх натуральних n виконується нерівність $(1+x)^n\geq 1+nx$ (нерівність Бернуллі).

Доведення. При $n=1$ нерівність вірна. Нехай $n>1$. Розглянемо функцію $f(x)=(1+x)^n-1-nx$. Її похідна $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n$ перетворюється в нуль у єдиній точці $x=0$, яка, як легко бачити,, є точкою мінімуму. Тому для всіх $x>-1$ виконується нерівність $f(x)\geq f(0)$, тобто $(1+x)^n-1-nx\geq 0$. З одержаного співвідношення випливає нерівність Бернуллі.

Задача 2.3.4. Довести, що при $ab\geq 0$ виконується нерівність

$$(a+b)^4\geq a^4+b^4.$$

Доведення. Розглянемо тільки випадок $a\geq 0,\ b\geq 0$, оскільки при $a\leq 0,\ b\leq 0$ перепозначення змінних a на $-a$ та b на $-b$ приведе нас до аналогічних міркувань. При $a=0$ маємо очевидну рівність. Нехай $a>0$. Введемо заміну $b=x$ та розглянемо функцію $f(x)=(x+a)^4-x^4-a^4,\ x\geq 0$. Очевидно, що похідна $f'(x)=4(a+x)^3-4x^3$ не перетворюється в нуль у жодній точці і, оскільки $f(a)=(a+a)^4-a^4-a^4=14a^4>0$ та $f(0)=0$, то $f(x)$, монотонно зростаючи, не може приймати від'ємних значень. Тому $f(x)=(x+a)^4-x^4-a^4\geq 0$, що доводить задану нерівність.

Задача 2.3.5. Довести нерівність $a^2+b^2\geq ab$ (приклад 2.2.10).

Доведення. Нехай $b=x$. Розглянемо функцію $f(x)=x^2-ax+a^2$. Її похідна $f'(x)=2x-a$ перетворюється в нуль у точці $x=\dfrac{a}{2}$. Очевидно, що це є точка мінімуму і $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{3a^2}{4}\geq 0$. Оскільки $f(x)\geq f\left(\dfrac{a}{2}\right)\geq 0$, то $x^2-ax+a^2\geq 0$, що фактично і потрібно було довести. Рівність виконується при $a=b=0$.

Задача 2.3.6. Довести, що для всіх дійсних x виконується нерівність $e^x\geq 1+x$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x)=e^x-1-x$. Маємо $f'(x)=e^x-1$. Рівність похідної нулю досягається при $x=0$. Очевидно, що знайдене значення є точкою мінімуму. Для значень $x\neq 0$ буде виконуватися нерівність $f(x)=e^x-1-x>f(0)=0$. Рівність виконується при $x=0$.

Задача 2.3.7. Довести, що для всіх дійсних x виконується нерівність

$$\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Похідна $f'(x) = x - \sin x$ приймає значення 0 в єдиній точці $x = 0$. Очевидно, що це значення є точкою мінімуму. Тому для значень $x \ne 0$ буде виконуватися нерівність $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$. Рівність досягається при $x = 0$.

Задача 2.3.8. Довести, що $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n \ge 5$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = 2^x - x^2$ та знайдемо її похідну. Маємо $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$. Оскільки

$$f'(-1) = \frac{\ln 2}{2} + 2 > 0,\ \ f'(2) = 4\ln 2 - 4 < 0,\ \ f'(4) = 16\ln 2 - 8 = 8(\ln 4 - 1) > 0,$$

то на проміжках $[-1,\ 2]$, $[2,\ 4]$ похідна має принаймні по одному кореню. Більше коренів рівняння $f'(x) = 0$ мати не може. Справді, рівняння $f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2 = 0$ має єдиний корінь (оскільки $f''(0) = \ln^2 2 - 2 < \ln^2 e - 2 < 0$ і $2^x \ln^2 2 - 2 > 0$ для достатньо великих x). Тому функція $f'(x)$ має єдину точку екстремуму – а саме точку мінімуму, а рівняння $f'(x) = 0$ у нашому випадку має тільки два корені. Таким чином обґрунтовано, що похідна $f'(x)$ на проміжку $(4,\ +\infty)$ приймає додатні значення і функція $f(x)$ зростає. Отже, $f(x) = 2^x - x^2 > f(4) = 0$. Нерівність $2^x - x^2 > 0$ на проміжку $x \in (4,\ +\infty)$ виконується для довільних x, тому і для всіх натуральних n, вибраних у цій множині.

Зауважимо, що інше доведення цієї нерівності методом математичної індукції наведене нами у виді задачі 1.6.3.

Задача 2.3.9. Довести нерівність $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 > 0$.

Доведення. Зробимо наступні перетворення:

$$a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^5(a^3 - 1) + a^2 - a + 1 = (a^2 - a + 1)(a^6 - a^5 + 1).$$

Перший множник отриманого виразу приймає тільки додатні значення. Покажемо, що і другий множник теж завжди додатний. Для цього розглянемо функцію $f(x) = x^6 - x^5 + 1$. Її похідна $f'(x) = 6x^5 - 5x^4$ перетворюється в нуль в точках $x=0$ та $x=\frac{5}{6}$. Легко переконатися, що при $x=0$ екстремуму нема, а точка $x=\frac{5}{6}$ є точкою мінімуму. Оскільки $f\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^6-\left(\frac{5}{6}\right)^5+1=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}>0$, то функція приймає тільки додатні значення.

Задача 2.3.10. Порівняти числа $\sqrt[2012]{2012}$ та $\sqrt[2013]{2013}$.

Розв'язання. Порівняємо натуральні логарифми цих чисел, тобто числа $\frac{\ln 2012}{2012}$ та $\frac{\ln 2013}{2013}$, що рівносильне поставленій задачі, оскільки функція $\ln x$ монотонно зростає на своїй області визначення. Для цього розглянемо функцію $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, визначену на інтервалі $(0,\ +\infty)$. Встановимо проміжки її монотонності. Очевидно, що похідна $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ перетворюється в нуль у точці $x=e$. Легко встановити, що це точка максимуму і що на проміжку $x\in(e,\ +\infty)$ функція монотонно спадає. Оскільки цьому проміжку належать числа 2012 та 2013, то більшому з них відповідає менше значення функції. Тому $\frac{\ln 2012}{2012}>\frac{\ln 2013}{2013}$ і $\sqrt[2012]{2012}>\sqrt[2013]{2013}$.

Задача 2.3.11. Довести, що при $0<x<y<\frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\frac{tgx}{tgy}<\frac{x}{y}$.

Доведення. Доведемо нерівність $\frac{tgx}{x}<\frac{tgy}{y}$, яка на вказаному проміжку рівносильна заданій. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{tgx}{x}$ на інтервалі $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ та доведемо, що на ньому вона зростає. Для цього достатньо показати, що $f'(x)>0$. Маємо

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-tgx}{x^2}=\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^2\cdot\cos^2 x}.$$

Оскільки знаменник похідної на вказаному проміжку додатний, то покажемо, що додатним є також чисельник, тобто, що виконується нерівність $x-\sin x\cdot\cos x>0$. А це випливає з нерівності $2x>\sin 2x$ для $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ та $2x\geq\frac{\pi}{2}>1\geq\sin 2x$ при $x\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $f'(x)>0$ і функція $f(x)=\frac{tgx}{x}$ зростає на інтервалі $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тому $\frac{tgx}{x}<\frac{tgy}{y}$ для $0<x<y<\frac{\pi}{2}$ або $\frac{tgx}{tgy}<\frac{x}{y}$.

2.4. Застосування інтеграла.

Використання інтегрального числення при доведенні нерівностей використовує наступні міркування. Нехай на проміжку $[a,\ b]$ задані дві неперервні функції $f(x)$ та $g(x)$ і в усіх точках цього проміжку виконується нерівність $f(x)\geq g(x)$. Тоді на заданому відрізку виконується також нерівність $\int_a^x f(t)dt\geq\int_a^x g(t)dt$. Аналогічне твердження стосується також випадків $f(x)>g(x)$, $f(x)\leq g(x)$ та $f(x)<g(x)$.

Алгоритм використання даного прийому може виглядати наступним чином. Для доведення нерівності $F(x)\geq G(x)$ розглядаємо функції $f(x)$ та $g(x)$, де $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$. Якщо виконується нерівність $f(x)\geq g(x)$, то стверджуємо, що вірна нерівність $F(x)=\int_a^x f(t)dt\geq G(x)=\int_a^x g(t)dt$.

Задача 2.4.1. Довести, що при $x\in[1,\ +\infty)$ виконуються нерівності

$$2013x^{2014}+1\geq 2014x^{2013},\quad 2013x^{2015}+2\geq 2015x^{2014}.$$

Розв'язання. Оскільки на вказаному проміжку виконується нерівність $x^{2013}\geq x^{2012}$, то $\int_1^x t^{2013}dt=\frac{t^{2014}}{2014}\Big|_1^x=\frac{x^{2014}-1}{2014}\geq\int_1^x t^{2012}dt=\frac{t^{2013}}{2013}\Big|_1^x=\frac{x^{2013}-1}{2013}$. Звідси знаходимо $2013x^{2014}+1\geq 2014x^{2013}$. Інтегруючи одержану нерівність ще раз, маємо

$$\int_1^x (2013t^{2014}+1)dt = \frac{2013t^{2015}}{2015}\Big|_1^x = \frac{2013(x^{2015}-1)}{2015} \geq 2014\int_1^x t^{2013}dt = t^{2014}\Big|_1^x = x^{2014}-1.$$

З одержаної нерівності отримуємо, що $2013x^{2015}+2 \geq 2015x^{2014}$.

Задача 2.4.2. Довести нерівність

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{2012} < \frac{4026\sqrt{2013}-4\sqrt{2}}{3}.$$

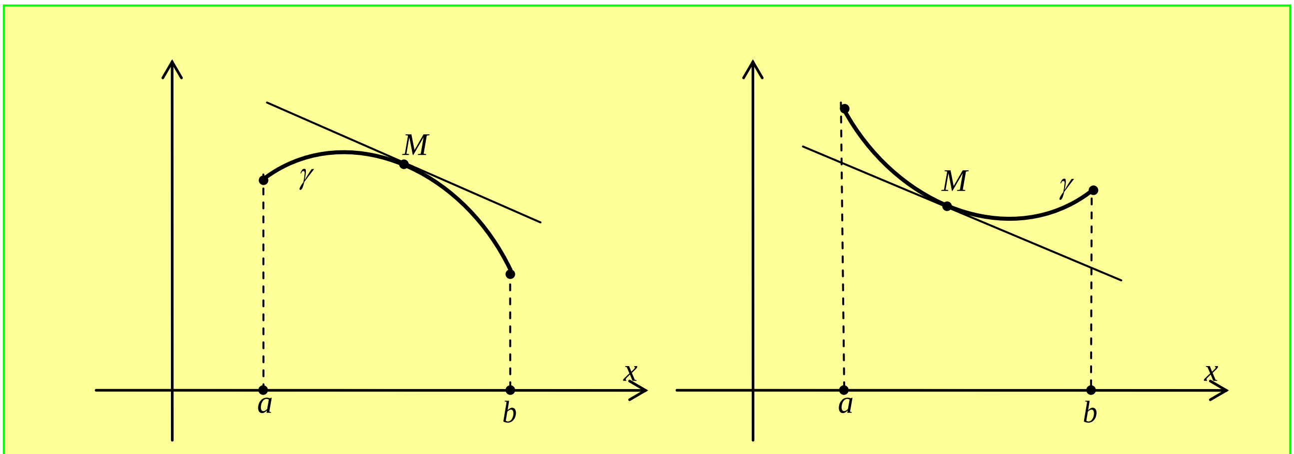
Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$, значення якої наявні в нерівності. Оскільки кожний доданок $\sqrt{n}$ можна трактувати, як площу прямокутника з висотою $\sqrt{n}$ та основою, що дорівнює 1 (відстань між точками n та $n+1$), то

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{2012} < \int_2^{2013}\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^{2013} = \frac{4026\sqrt{2013}-4\sqrt{2}}{3}.$$

2.5. Опуклі функції та їх застосування до доведення нерівностей. Нерівність Єнсена

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену та диференційовану на відрізку $[a,\ b]$ і позначимо через γ частину її графіка, що відповідає відрізку $[a,\ b]$.

Функцію $f(x)$ називають опуклою вгору (вниз) на відрізку $[a,\ b]$, якщо для довільної точки $M \in \gamma$ крива γ лежить нижче (вище) від дотичної до γ, проведеної в точці M (рис. 1).



Ðèñ. 1

Серед деяких властивостей опуклих функцій відмітимо ті, які в подальшому використаємо при доведенні деяких нерівностей.

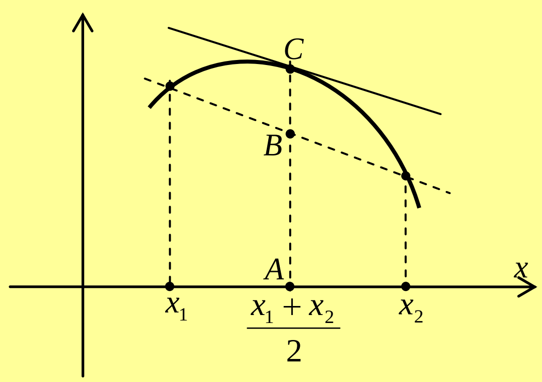
1. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вгору, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ виконується нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

2. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вниз, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ виконується нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Доведення обох тверджень очевидне. Зокрема у першому випадку достатньо побачити, що довжина відрізка AB, який дорівнює $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, менша від довжини відрізка AC, який дорівнює $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ (рис. 2).



Ðèñ. 2

3. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вгору і числа $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \in [a,\ b]$ не всі рівні між собою, то виконується нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \qquad (*)$$

4. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вниз і числа $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \in [a,\ b]$ не всі рівні між собою, то виконується нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \qquad (**)$$

Доведення двох останніх тверджень можна реалізувати за допомогою методу математичної індукції.

Нерівності (*), (**), які у математиці називають нерівностями Єнсена, можуть служити основою для складання та доведення різних нерівностей. Достатньо вибрати конкретну функцію, опуклу вгору або вниз та замінити нею функцію f.

Наведемо приклади подібних доведень.

Задача 2.5.1. Довести, що для різних $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n \in [0,\ \pi]$ виконується нерівність

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) > \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n}.$$

Доведення. Для доведення достатньо у співвідношенні (*) використати замість f функцію $\sin$, графік якої на вказаному відрізку опуклий вверх.

Задача 2.5.2. Довести, що для довільних чисел $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконується нерівність

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Доведення. Тут ми повертаємося до розгляду задачі 1.3.2. У цьому випадку використовуємо співвідношення (**), а в ролі f функцію x^3, графік якої при $x \geq 0$ опуклий вниз.

Задача 2.5.3. Порівняти числа $\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{4}$ та $2\arcsin\frac{29}{80}$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \arcsin x$, графік якої на проміжку $[0,\ 1]$ опуклий вниз. Застосувавши нерівність Єнсена у виді співвідношення (**), отримуємо

$$\arcsin\frac{3}{8} = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2}\right) < \frac{\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{4}}{2}.$$

Тому

$$\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{4} > 2\arcsin\frac{3}{8} > 2\arcsin\frac{29}{80}.$$

Задача 2.5.4. Довести, що правильний n-кутник має найбільший периметр серед усіх вписаних в коло n-кутників.

Доведення. Нехай n-кутник $A_1A_2...A_n$ вписаний у коло з центром у точці O та радіусом R. Позначимо $\angle A_iOA_{i+1}=\alpha_i$, $i=1,\ 2,...,n$, $\alpha_i\in(0,\ \pi]$. Тоді $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\le 2\pi$ (знак строгої нерівності буде у випадку, коли центр кола лежить поза многокутником). Користуючись теоремою косинусів отримуємо, що для периметра многокутника P маємо

$$P=\sum_{i=1}^{n}A_iA_{i+1}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2R^2(1+\cos\alpha_i)}=2R\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i}{2}.$$

Оскільки $\frac{\alpha_i}{2}\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ і функція $\cos x$ на вказаній множині значень опукла вгору, то з нерівності Єнсена отримуємо, що

$$nP=2nR\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i}{2}\le 2nR\cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2}\right)=2nR\cos\frac{\pi}{n},$$

а саме останньому значенню дорівнює периметр правильного вписаного в коло многокутника.

Розглянемо, як нерівність Єнсена та наведені міркування можна використати для доведення класичних нерівностей між середніми. Як ми уже знаємо (розділ 1.7), для n додатних чисел x_i такими є середнє арифметичне $A_n=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$, середнє геометричне $G_n=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}$, середнє квадратичне $K_n=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$ та середнє гармонічне $H_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$. Ці середні величини знаходяться у співвідношеннях $K_n\ge A_n\ge G_n\ge H_n$. Знак рівності в усіх випадках виконується тоді і тільки тоді, коли x_i рівні. Доведемо строгі нерівності, вважаючи x_i різними.

Для доведення першої нерівності $K_n>A_n$, тобто

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} > \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

використаємо у ролі f функцію x^2, графік якої опуклий вниз, та співвідношення (**). Відповідно до нього отримуємо

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2 < \frac{x_1^2+x_1^2+\ldots+x_n^2}{n},$$

звідки, добувши корінь з обох частин, дістаємо шукане співвідношення.

Для доведення другої нерівності $A_n > G_n$, тобто

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$

використаємо у ролі f функцію $\ln$, графік якої опуклий вгору, та співвідношення (*). Отримуємо

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) > \frac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n}{n}$$

або

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) > \frac{\ln(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)}{n}.$$

Потенціюючи одержаний вираз, отримуємо шукане співвідношення.

Для доведення останньої нерівності $G_n > H_n$, тобто нерівності між середнім геометричним та середнім гармонічним

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} > \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},$$

знову використаємо функцію $\ln$, тільки співвідношення (*) застосуємо до чисел $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$. Отримуємо

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right) > \frac{\ln\frac{1}{x_1}+\ln\frac{1}{x_2}+\ldots+\ln\frac{1}{x_n}}{n}$$

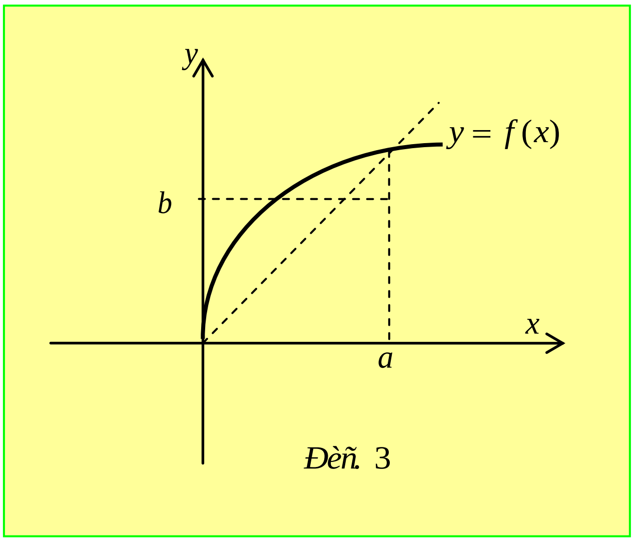
або

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right) > \frac{-\ln(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)}{n} = \ln(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{-\frac{1}{n}},$$

що фактично завершує доведення потрібної нерівності.

2.6. Нерівність Юнга

Нехай $y = f(x)$ – неперервна строго зростаюча функція від x, $x \geq 0$, і $f(0) = 0$ (див. рис. 3). Розглядаючи площі, представлені відповідними інтегралами, ми переконуємося в тому, що



Ðèñ. 3

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \geq ab, \qquad (***)$$

де $f^{-1}(y)$ - функція, обернена до $f(x)$. Легко бачити, що рівність тут має місце тільки при $b = f(a)$. Ця нерівність називається нерівністю Юнга. Вибираючи у ролі f різні функції, ми отримуємо ряд цікавих результатів.

Візьмемо, наприклад, у ролі функції $f(x)$ функцію $y = x^{p-1}$, $p>1$, оберненою до якої є функція $y = x^{\frac{1}{p-1}}$. У цьому випадку співвідношення (***) приймає вид

$$\int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b x^{\frac{1}{p-1}}dx = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Нехай $p=2012$ і $q=\frac{2012}{2011}$. Тоді отримуємо, що при $a\geq 0,\ b\geq 0$ виконується нерівність $2012a^{2012}+2011b\cdot\sqrt[2011]{b}\geq 2012ab$.

Вибираючи в ролі функції $f(x)$ функцію $y=\ln(x+1)$ та використовуючи обернену до неї функцію $y=e^{x}-1$ із (***) знаходимо

$$\int_{0}^{a}\ln(x+1)dx+\int_{0}^{b}(e^{x}-1)dx=\left(x+1\right)\ln(x+1)-(x+1)\Big|_{0}^{a}+\left(e^{x}-1\right)\Big|_{0}^{b}\geq ab.$$

Замінюючи a на $a-1$, отримуємо нерівність $a\ln a+e^{b}-a\geq ab$. Одержане співвідношення в математиці застосовується в теорії рядів Фур'є.

Нехай $f(x)=tgx,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді $f^{-1}(x)=arctgx$. Користуючись нерівністю Юнга, знаходимо

$$\int_{0}^{a}tgxdx+\int_{0}^{b}arctgxdx=-\ln\cos x\Big|_{0}^{a}+\left(xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})\right)\Big|_{0}^{b}>ab,$$

звідки отримуємо нерівність

$$barctgb-\ln\left(\sqrt{1+b^{2}}\cdot\cos a\right)>ab,\ a,b\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

При $a=\frac{\pi}{4},\ b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ дістаємо $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\ln\sqrt{\frac{2}{3}}>\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ або $6\sqrt{3}(\ln 3-\ln 2)>\pi$.

Таким чином, доведена нерівність $6\sqrt{3}(\ln 3-\ln 2)>\pi$.

Розділ 3. **Застосування методів аналітичної геометрії, векторної алгебри, тригонометрії**

3.1. Застосування методів аналітичної геометрії

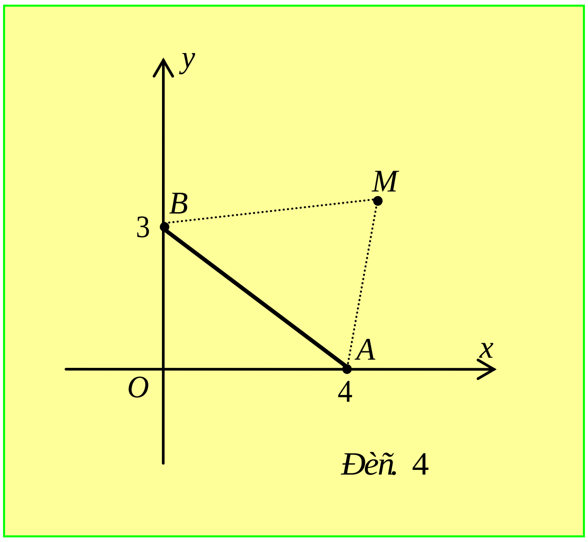
Традиційними для аналітичної геометрії є застосування ідеї координатного методу. Відповідно до нього вводиться певна система координат. Після цього кожній парі значень змінних $(a,\ b)$ можна поставити у відповідність точку з такими ж координатами, лінійному рівнянню відповідатиме на координатній площині пряма. Алгебраїчний вираз $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ тепер можна трактувати, як відстань між двома точками з координатами $(x,\ y)$ та $(a,\ b)$.

Взагалі кажучи, певні алгебраїчні співвідношення тепер можна розглядати з точки зору співвідношень між геометричними фігурами та величинами. При доведенні нерівностей це робить його геометрично наглядним та створює ширші можливості для пошуку нових ідей доведень. Наведемо приклади.

Задача 3.1.1. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2+y^2-6y+9}+\sqrt{x^2-8x+y^2+16}.$$

Розв'язання. Запишемо даний вираз у виді $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}$ та введемо в розгляд точки $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 3)$, $M(x,\ y)$ (рис. 4). Маємо



Ðèñ. 4

$$AM=\sqrt{(x-4)^2+y^2},$$

$$BM=\sqrt{x^2+(y-3)^2},\ AB=5.$$

Тепер, користуючись нерівністю трикутника, можна стверджувати, що $AM+BM\ge AB$ і для довільних значень x та y виконується співвідношення

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}\geq 5.$$

Отже, найменше значення виразу дорівнює 5. Рівність буде виконуватися для всіх точок відрізка AB.

Задача 3.1.2. Довести, що для довільних значень змінних x, y, z виконується нерівність $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geq\sqrt{y^2+yz+z^2}$.

Доведення. Розглянемо на координатній площині точки $B\left(-\frac{y}{2}, \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{z}{2}, -\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)$, $A(x,\ 0)$. Використавши формулу відстані між двома точками, отримуємо $AB=\sqrt{x^2+xy+y^2}$, $AC=\sqrt{x^2+xz+z^2}$, $BC=\sqrt{y^2+yz+z^2}$. Посилання на нерівність трикутника завершує доведення. Знак рівності виконується, наприклад, при $x=y=z=0$.

Задача 3.1.3. Знайти найбільше та найменше значення виразу $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}$, якщо $2|x|+|y|=2$.

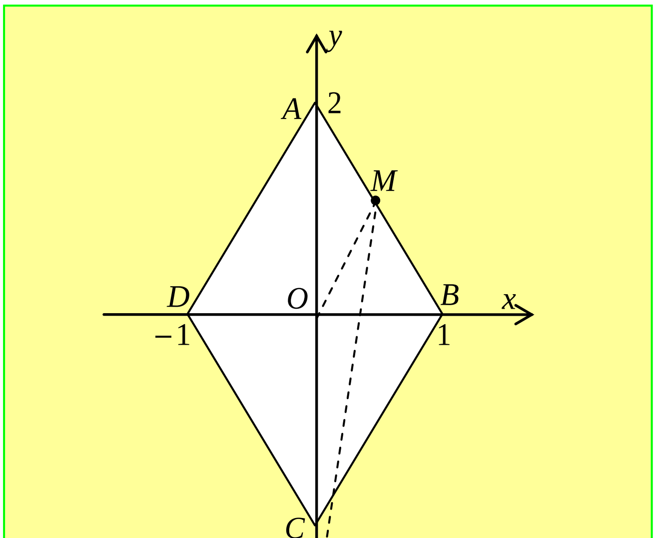
Розв'язання. Введемо в розгляд точки $O(0,\ 0)$, $K(0,-3)$ та $M(x,\ y)$. Тоді вираз $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}$ можна трактувати, як суму відрізків MO та MK. Графіком залежності $2|x|+|y|=2$ є ромб $ABCD$ (рис. 5). Умову задачі на мові геометрії тепер можна сформулювати наступним чином: знайти найбільше та найменше значення суми відрізків MO та MK, якщо точка M належить ромбу. Розглянемо ΔMOK. Маємо $MO+MK\geq OK=3$ (рівність досягається, коли точка M співпадає з точкою C). Оскільки $MO\leq AO$ і $MK\leq AK$, то $MO+MK\leq AO+AK=7$ (рівність досягається, коли точка M співпадає з точкою A).

Таким чином, найбільше значення виразу буде 7, а найменше значення 3.

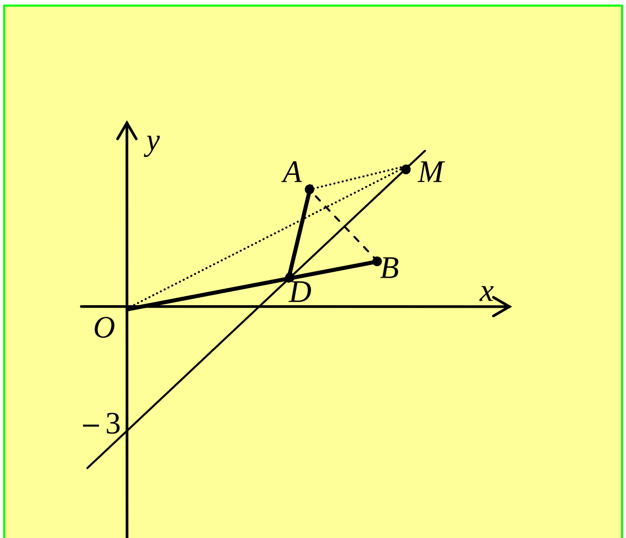
Задача 3.1.4. Знайти найменше значення виразу $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$, якщо $x-y-3=0$.

Розв'язання. На координатній площині розглянемо точки $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 3)$ і точку $M(x,\ y)$, що належить прямій $x-y-3=0$. Задача полягає в тому, щоб на вказаній прямій знайти таке положення точки M, при якому сума відрізків $MO+MA$ буде мінімальною. Нехай точка B симетрична точці A відносно прямої $x-y-3=0$. Тоді точка D, в якій перетнуться прямі OB та пряма $y=x-3$, буде шуканою (рис. 6).

Справді, у цьому випадку $DO+DA=DO+DB=OB>MB+BO$ для довільної відмінної від B точки M. Таким чином, знаходимо точку $B(6,\ 1)$ та довжину відрізка $BO=\sqrt{37}$.



Ðèñ. 5



Ðèñ. 6

Отже, найменше значення виразу буде $\sqrt{37}$.

Задача 3.1.5. Довести нерівність

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}\le\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}.$$

Розв'язання. Для доведення достатньо ввести в розгляд точки $M_i(x_i,\ y_i),\ i=1,\ 2,\ 3$, та, зауваживши, що

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},\ M_2M_3=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2},$$

$$M_1M_3=\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2},$$

скористатися нерівністю трикутника.

Аналогічно до попередньої вправи доводиться нерівність

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2}\le$$

$$\le\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}\ .$$

3.2. Застосування методів векторної алгебри

Ідея застосування векторів при доведенні нерівностей ґрунтується на таких простих геометричних міркуваннях.

Розглянемо два вектори $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Очевидно, що виконується нерівність $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$, або в координатному виді

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ .$$

Нехай виконується векторна рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Переходячи до довжин векторів, отримуємо, що $|\vec{c}|\le|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$ (нерівність трикутника). Оскільки $\vec{c}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$, то з одержаної нерівності випливає, що

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2}\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ .$$

В обох випадках кількість координат векторів може бути взята довільною і ми отримаємо більш загальні, ніж наведені, співвідношення. Рівність в них досягається при умові колінеарності векторів.

Наведемо приклади.

Задача 3.2.1. Для довільних невід’ємних чисел $a,\ b,\ c$, таких, що $a+b+c=3$ виконується нерівність $(a^2+b+c)(1+b+c)\ge 9$. Довести.

Доведення. Введемо в розгляд вектори $\vec{u}=(a,\ \sqrt{b},\ \sqrt{c})$, $\vec{v}=(1,\ \sqrt{b},\ \sqrt{c})$. Оскільки $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b+c}$, $|\vec{v}|=\sqrt{1+b+c}$ і $\vec{u}\cdot\vec{v}=a+b+c$, то, використовуючи нерівність $\vec{u}^{\,2}\cdot\vec{v}^{\,2}\ge(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$, отримуємо

$$(a^2+b+c)(1+b+c)\ge(a+b+c)^2=3^2=9\,.$$

Рівність буде виконуватися при умові, коли $\frac{a}{1}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}$, тобто при $a=1$ та довільних невід'ємних $b,\ c$ таких, що $b+c=2$.

Задача 3.2.2. Якщо $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$, то $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$. Довести.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{u}=\left(\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}\right)$ та $\vec{v}=\left(\sqrt{b},\ \sqrt{c},\ \sqrt{a}\right)$. Оскільки $|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{a+b+c}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$, то, застосувавши до них співвідношення $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\geq|\vec{u}\cdot\vec{v}|$, отримуємо нерівність, яку потрібно довести. Рівність буде виконуватися при умові пропорційності координат векторів, тобто, коли $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$. З даних пропорцій випливає, що $a=b=c$.

Задача 3.2.3. Довести, що при $a_i>0,\ i=2,\ 3,\ldots,\ n$ виконується нерівність

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2.$$

Доведення. Тепер у розгляд доцільно ввести вектори $\vec{u}=\left(\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ldots,\ \sqrt{a_n}\right)$ та $\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}},\ \frac{1}{\sqrt{a_2}},\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$. Використавши нерівність $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\geq|\vec{u}\cdot\vec{v}|$, отримуємо

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geq\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}=n,$$

звідки випливає нерівність, яку ми доводимо. Зауважимо, що дану нерівність ми уже доводили, користуючись синтетичним методом (приклад 1.2.7).

Задача 3.2.4. Довести, що для довільних $a_i>0,\ i=2,\ 3,\ldots,n$ виконується нерівність

$$(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2.$$

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{r}=\left(\sqrt{a_1^3},\sqrt{a_2^3},\ldots,\ \sqrt{a_n^3}\right)$ та $\vec{s}=\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}},\ \frac{1}{\sqrt{a_2}},\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$. Тепер, використовуючи нерівність $\vec{r}^{\,2}\cdot\vec{s}^{\,2}\geq(\vec{r}\cdot\vec{s})^2$, отримуємо співвідношення, що доводиться.

Задача 3.2.5. Довести, що для довільних $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ виконується нерівність

$$(a^{2014} + b^{2014} + c^{2014})\left(\frac{1}{a^{2012}} + \frac{1}{b^{2012}} + \frac{1}{c^{2012}}\right) \geq (a+b+c)^2 .$$

Доведення. Введемо в розгляд вектори $\vec{u} = \left(a^{1007},\ b^{1007},\ c^{1007}\right)$ та $\vec{v} = \left(\frac{1}{a^{1006}},\ \frac{1}{b^{1006}},\ \frac{1}{c^{1006}}\right)$. Використовуючи нерівність для скалярного добутку у виді $\vec{u}^{\,2} \cdot \vec{v}^{\,2} \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, отримуємо потрібне співвідношення.

Задача 3.2.6. Довести, що нерівність $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12$ виконується при всіх значеннях a, для яких визначена її ліва частина.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x} = (1,\ 1,\ 1)$ та $\vec{y} = \left(\sqrt{a+1},\ \sqrt{2a-3},\ \sqrt{50-3a}\right)$. Очевидно, що ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{a+1+2a-3+50-3a} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = 12 .$$

Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тільки тоді, коли $\sqrt{a+1} = \sqrt{2a-3} = \sqrt{50-3a}$. Оскільки система даних рівнянь несумісна, то нерівність строга.

Задача 3.2.7. Довести, що якщо числа a, b, c задовольняють умову $a+b+c=1$, то виконується нерівність $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} < \sqrt{15}$.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x} = (1,\ 1,\ 1)$ та $\vec{y} = \left(\sqrt{2a+1},\ \sqrt{2b+1},\ \sqrt{2c+1}\right)$. Оскільки ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, то виконується співвідношення

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq$$
$$\leq \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{2a+1+2b+1+2c+1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2(a+b+c)+3} = \sqrt{15} .$$

Знак рівності виконується при $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Задача 3.2.8. Довести, що $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$, якщо $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{b}},\ \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ та $\vec{y}=\left(\frac{1}{\sqrt{b}},\ \frac{1}{\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$. Очевидно, що $|\vec{x}|=|\vec{y}|=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ і $\vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}$. Використавши нерівність $|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\geq\vec{x}\cdot\vec{y}$, отримуємо, що $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}$. Рівність буде виконуватися при $a=b=c$.

Задача 3.2.9. Розв'язати рівняння $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{a}=(2,\ x)$ та $\vec{b}=\left(\sqrt{x-1},\ 5\right)$. Тепер оцінимо ліву частину рівняння: $2\sqrt{x-1}+5x=\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$. Оскільки рівність виконується тільки при умові колінеарності векторів, то корені потрібно шукати серед розв'язків рівняння $\frac{\sqrt{x-1}}{2}=\frac{5}{x}$. Перетворивши його до виду $x\sqrt{x-1}=10$, отримуємо рівняння $x^3-x^2-100=0$ з єдиним дійсним коренем $x=5$. Знайдене значення є коренем заданого рівняння.

Задача 3.2.10. Числа $x,\ y,\ z$ такі, що $x^2+3y^2+z^2=2$. Знайти найбільше та найменше значення виразу $2x+y-z$.

Розв'язання. Очевидно, що для оцінки виразу $2x+y-z$ координати векторів потрібно вибрати так, щоб модуль одного з них дорівнював $\sqrt{x^2+3y^2+z^2}=\sqrt{2}$. Тому введемо в розгляд вектори $\vec{a}=\left(x,\ y\sqrt{3},\ z\right)$ та $\vec{b}=\left(2,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right)$. Тепер маємо $|2x+y-z|\leq\sqrt{x^2+3y^2+z^2}\cdot\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}=4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Отже, $-4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\leq 2x+y-z\leq 4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ті значення змінних, при яких досягаються найбільше та найменше значення можна знайти, використовуючи умову колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і рівність $x^2+3y^2+z^2=2$, тобто розв'язавши систему $\begin{cases} x^2+3y^2+z^2=2, \\ \frac{x}{2}=3y=-z \end{cases}$.

Отримуємо два розв’язки $\left(\frac{\pm 6}{\sqrt{24}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{24}}, \frac{\mp 3}{\sqrt{24}}\right)$, на яких заданий вираз досягає екстремальних значень.

Задача 3.2.11. Довести, що для довільних x, y, z виконується нерівність $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \le 1$.

Доведення. Рівність одиниці модуля вектора $\vec{a} = (\sin x, \cos x)$ може бути підказкою для вибору координат векторів. Отже, нехай $\vec{a} = (\sin x, \cos x)$, $\vec{b} = (\sin y \cdot \sin z, \cos y \cdot \cos z)$. Тоді дістаємо

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = \vec{a} \cdot \vec{b} \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \sqrt{\sin^2 y \cdot \sin^2 z + \cos^2 y \cdot \cos^2 z} \le \sqrt{\sin^2 y \cdot 1 + \cos^2 y \cdot 1} = 1.$$

Знак рівності отримуємо, наприклад, при $x = y = z = 0$.

Задача 3.2.12. Довести нерівність $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$, де A, B, C - кути трикутника.

Доведення. Виберемо на сторонах трикутника одиничні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ так, як показано на рисунку 7. Із очевидного співвідношення $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \ge 0$ дістаємо

$$3 + 2(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3) = 3 + 2(\cos(\pi - A) + \cos(\pi - B) + \cos(\pi - C)) =$$
$$= 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \ge 0,$$

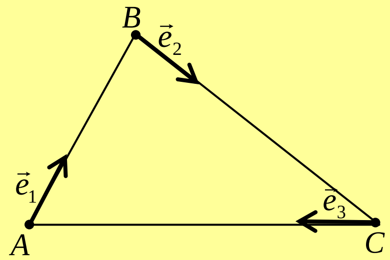
звідки випливає нерівність, яку ми доводимо. Знак рівності виконується для рівностороннього трикутника.

Задача 3.2.13. Довести, що якщо A, B, C - кути трикутника, то виконується нерівність $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$.

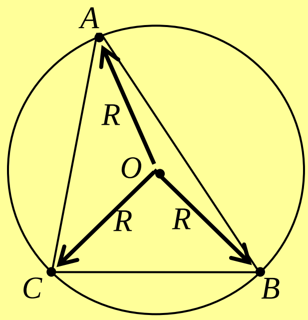
Доведення. Нехай коло з центром у точці O та радіусом R описане навколо заданого трикутника (рис. 8). Тоді $\angle COB = 2A, \angle COA = 2B, \angle AOB = 2C$. Із очевидного співвідношення $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$ отримуємо

$$3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \ge 0,$$

звідки випливає нерівність, яку ми доводимо. Знак рівності виконується для рівностороннього трикутника.



Ðèñ. 7



Ðèñ. 8

Задача 3.2.14. Довести нерівність $abc^2 + cab^2 + bca^2 \le a^4 + b^4 + c^4$.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x} = (ac,\ cb,\ ab)$ та $\vec{y} = (bc,\ ab,\ ac)$. Тоді

$$abc^2 + cab^2 + bca^2 = \vec{x} \cdot \vec{y} \le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 .$$

Знову введемо в розгляд нові вектори $\vec{m} = \left(c^2,\ b^2,\ a^2\right)$ та $\vec{n} = \left(a^2,\ c^2,\ b^2\right)$. Дістаємо

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \vec{m} \cdot \vec{n} \le |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = a^4 + b^4 + c^4 ,$$

що завершує доведення. Рівність виконується тільки при умові $a = b = c$.

3.3. Застосування тригонометрії

При перетворенні виразів з метою їхнього спрощення іноді використовуються тригонометричні заміни. Такими можуть бути:

$x = \cos t,\ t \in [0,\ \pi]$ або $x = \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ при наявності в умові виразу $\sqrt{1 - x^2}$;

$x = \sin t$ або $x = \cos t$, якщо в умові фігурують блоки $4x - 3x^3$ або $4x^3 - 3x$ з перспективою виконати заміни відповідно $x = \sin t,\ 4x - 3x^3 = \sin 3t$ або $x = \cos t,\ 4x^3 - 3x = \cos 3t$;

$x = r\cos t$, $y = r\sin t$, якщо наявний вираз $x^2 + y^2$;

$x = tgt,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ при наявності виразу $1 + x^2$;

$x = tg\alpha$, $y = tg\beta$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, якщо потрібно перетворювати вираз $\frac{x+y}{1-xy}$;

$x = \cos\alpha,\ \ \alpha \in (0,\ \pi)$ при наявності виразів $(1+x)^n$ та $(1-x)^n$.

Наведемо приклади задач, в яких використовуються подібні ідеї.

Задача 3.3.1. Числа $a,\ b,\ c,\ d$ задовольняють умови $a^2 + b^2 = 1,\ \ c^2 + d^2 = 1$. Довести, що $|ac - bd| \le 1$.

Доведення. Оскільки $a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1$, то існують такі числа $\alpha,\ \beta$, що $a = \sin\alpha,\ b = \cos\alpha$, $c = \sin\beta,\ d = \cos\beta$. Отримуємо

$$|ac - bd| = |\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta| = |\cos(\alpha+\beta)| \le 1.$$

Задача 3.3.2. Довести, що при $n \in N,\ n \ge 2$ і $|x| < 1$ виконується нерівність

$$(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n.$$

Доведення. Враховуючи те, що $|x| < 1$, можна ввести заміну $x = \cos\alpha,\ \ \alpha \in (0,\ \pi)$. Тоді

$$(1+x)^n + (1-x)^n = \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^n + \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^n =$$

$$= 2^n\left(\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2n}\frac{\alpha}{2}\right) < 2^n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2^n.$$

Задача 3.3.3. Дійсні числа x_i $(i = 2,\ 3, \ldots,\ n)$ належать відрізку $[-1,\ 1]$, причому сума кубів цих чисел дорівнює 0. Довести, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le \frac{n}{3}$.

Доведення. Нехай $x_i = \cos\alpha_i,\ \ \alpha_i \in [0,\ \pi]$ $(i = 2,\ 3, \ldots,\ n)$. Маємо

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n =$$

$$= \frac{4\cos^3\alpha_1 - \cos 3\alpha_1}{3} + \frac{4\cos^3\alpha_2 - \cos 3\alpha_2}{3} + \ldots + \frac{4\cos^3\alpha_n - \cos 3\alpha_n}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n\right) \le \frac{n}{3}.$$

Задача 3.3.4. Довести, що при довільних дійсних числах $x,\ y$ виконується нерівність

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}.$$

Доведення. Враховуючи довільність у виборі чисел $x,\ y$, виконаємо заміни $x = tg\alpha$, $y = tg\beta$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(tg\alpha + tg\beta)(1 - tg\alpha tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)} = \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta).$$

Звідси випливає справедливість твердження, яке ми доводимо.

Задача 3.3.5. Для довільних дійсних чисел $x,\ y$ (крім випадку, коли x та y одночасно дорівнюють 0) довести нерівність

$$-\frac{9}{2} \le \frac{3xy - 4x^2}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}.$$

Доведення. Перейдемо до полярних координат, ввівши заміну $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ ($r \ne 0$). Дістаємо

$$\frac{3xy-4x^2}{x^2+y^2} = \frac{3r^2\sin\alpha\cos\alpha - 4r^2\cos^2\alpha}{r^2} = 3\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2(1+\cos 2\alpha).$$

Тепер оцінимо значення виразу $3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha$. Маємо

$$3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = \sqrt{3^2+4^2}\sin(2\alpha-\beta) = 5\sin(2\alpha-\beta),\ \text{де}\ \cos\beta = \frac{3}{5},\ \sin\beta = \frac{4}{5}.$$

Таким чином, вираз $\frac{3xy-4x^2}{x^2+y^2} = \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2(1+\cos 2\alpha) = -2 + \frac{5}{2}\sin(2\alpha+\beta)$ може змінюватися у межах від $-\frac{9}{2}$ до $\frac{1}{2}$, що доводить задану нерівність.

Задача 3.3.6. Довести, що із довільних 13 чисел завжди можна вибрати два числа x та y, для яких виконуватиметься нерівність $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}$.

Доведення. Позначимо через $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{13}$ числа, про які іде мова в умові задачі. Нехай $x_i = tg\alpha_i$, де $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $i = 1,\ \ldots,\ 13$. Розіб'ємо проміжок

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ на 12 рівних частин. Тоді знайдуться принаймні два кути α_m та α_n такі, що $0 < \alpha_m - \alpha_n < \frac{\pi}{12}$. Звідси $0 < tg(\alpha_m - \alpha_n) < tg\frac{\pi}{12}$. Нехай $tg\alpha_m = x$, $tg\alpha_n = y$. Тоді $0 < \frac{x-y}{1+xy} < tg\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$. Доведення рівності $tg\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ не викликає затруднень. Маємо $tg\frac{\pi}{12} = tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}$.

Задача 3.3.7. Довести, що для кутів A, B, C довільного трикутника виконується нерівність $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$. Встановити, коли досягається рівність.

Доведення. Для зручності нерівність попередньо помножимо на 2. Маємо

$$2\left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right) = 3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C =$$
$$= 3 + 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos(2\pi - 2(A+B)) =$$
$$= 3 + 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos 2(A+B) = 2 + 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2(A+B).$$

Тепер отримуємо

$$4 + 4\cos(A+B)\cos(A-B) + 4\cos^2(A+B) =$$
$$= \cos^2(A-B) + 4\cos(A+B)\cos(A-B) + 4\cos^2(A+B) + \sin^2(A-B) + 3 =$$
$$= \left(\cos(A-B) + 2\cos(A+B)\right)^2 + \sin^2(A-B) + 3 \geq 3,$$

звідки випливає, що $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$. Рівність досягається, коли $\sin(A-B) = 0$ і $\cos(A-B) + 2\cos(A+B) = 0$. Тому маємо, що $A - B = 0$ і $A + B = \frac{2\pi}{3}$, звідки $A = B = \frac{\pi}{3}$, тобто трикутник повинен бути рівностороннім.

Розділ 4. **Застосування деяких геометричних співвідношень до доведення нерівностей**

4.1. Геометричний спосіб доведення нерівностей між середніми квадратичним, арифметичним, геометричним та гармонічним

Задача 4.1.1. Довести нерівності між середнім квадратичним, арифметичним, геометричним та гармонічним у випадку двох чисел, тобто той факт, що для довільних $a > 0,\ b > 0$ виконуються співвідношення

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

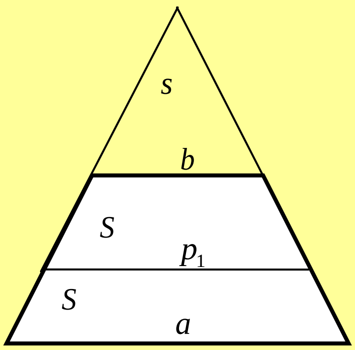
Розв'язання. Наведемо один із можливих геометричних способів доведення.

Розглянемо трапецію з основами a та b $(a > b)$. Позначимо через p_2 середню лінію трапеції. Тоді $p_2 = \dfrac{a+b}{2}$ буде середнім арифметичним чисел a та b.

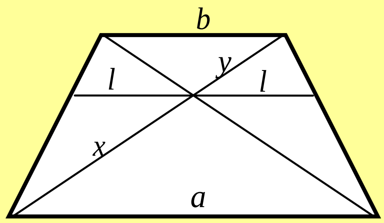
Відрізком p_1, паралельним до основ трапеції, поділимо її на дві рівновеликі трапеції (рис. 9), площу кожної з яких позначимо через S. Продовжимо бічні сторони трапеції до перетину та позначимо площу трикутника, що утворився поза трапецією через s. З подібності трьох трикутників, що утворилися, випливає пропорція $\dfrac{b^2}{s} = \dfrac{p_1^2}{S+s} = \dfrac{a^2}{2S+s}$. Звідси отримаємо рівність $\dfrac{p_1^2-b^2}{S} = \dfrac{a^2-p_1^2}{S}$ або $p_1 = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Таким чином, відрізок p_1 є середнім квадратичним відрізків a та b. Середня лінія трапеції розташована вище від відрізка p_1, оскільки ділить трапецію на дві, з яких верхня має меншу площу, ніж нижня. Тому вона має меншу довжину, ніж відрізок p_1. Цим самим показано, що $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$, тобто, що середнє арифметичне не більше середнього квадратичного.

Нехай відрізок p_3 паралельний до основ трапеції і ділить її на дві подібні трапеції. З подібності випливає пропорція $\dfrac{p_3}{b} = \dfrac{a}{p_3}$, тобто $p_3 = \sqrt{ab}$ є середнім геометричним чисел a та b.

Нехай відрізок p_4 паралельний до основ трапеції і проходить через точку перетину її діагоналей. З подібності трикутників легко встановити, що частини цього відрізка від точки перетину діагоналей трапеції до її бічних сторін рівні. Позначимо їх довжини через l, а частини довільної з діагоналей з кінцями у точці перетину діагоналей та у вершинах трапеції через x та y (рис. 10).



Ðèñ. 9



Ðèñ. 10

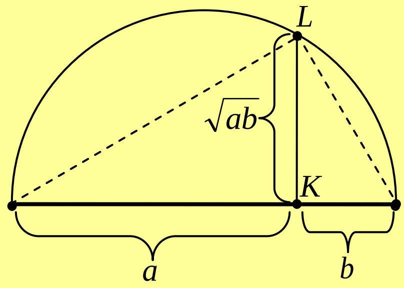
З подібності трикутників отримуємо співвідношення $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y}$ та $\dfrac{a}{l} = \dfrac{x+y}{y}$, звідки $\dfrac{a}{l} = \dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{a+b}{b}$. Тому $l = \dfrac{ab}{a+b}$ і $p_4 = 2l = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$, тобто p_4 є середнім гармонічним чисел a та b.

Тепер чисто геометрично легко показати, що відрізки p_i задовольняють нерівності $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$, що завершує доведення алгебраїчних нерівностей.

Наведемо ще одне геометричне доведення нерівності Коші.

Задача 4.1.2. Довести, що $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де $a \geq 0,\ b \geq 0$.

Розв'язання. Нехай задані дрізки a та b. Побудуємо на відрізку $a+b$, як на діаметрі, коло і у спільній для відрізків точці K проведемо перпендикуляр KL до перетину з колом (рис. 11). З подібності прямокутних трикутників випливає, що $\frac{a}{LK} = \frac{LK}{b}$, звідки $Kl = \sqrt{ab}$. Очевидно, що цей відрізок не може перевищувати довжину радіуса кола, який дорівнює $\frac{a+b}{2}$. Тому $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.



Ðèñ. 11

4.2. Використання співвідношень між елементами геометричних фігур

В окремих випадках при доведенні нерівностей можна використовувати певні відомі співвідношення між геометричними фігурами. Мова іде про те, що додатним значенням змінних, що фігурують у нерівності присвоюються деякі кількісні характеристики геометричних фігур (довжини відрізків, площі, об'єми), після чого чисто геометричними методами встановлюються необхідні співвідношення: спочатку між геометричними величинами, а потім роблять відповідні висновки про саму алгебраїчну нерівність.

Задача 4.2.1. Довести, що при довільних додатних чисел $a,\ b,\ c$ виконується нерівність

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + \tilde{n}^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}\ .$$

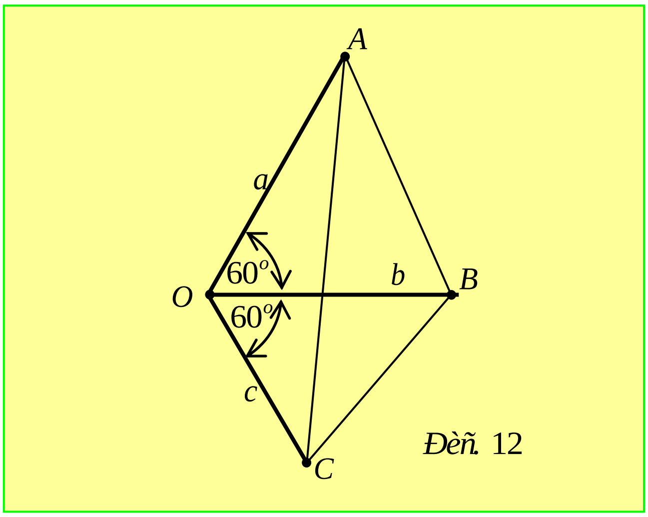
Доведення. Розглянемо відрізки OA, OB і OC такі, що $OA = a,\ OB = b,\ OC = c$ і $\angle AOB = 60^0$, $\angle COB = 60^0$ (рис. 12). Маємо $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + \tilde{n}^2}$, $AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$ і оскільки $AB + BC \geq AC$, то нерівність доведено.

Задача 4.2.2. При яких значеннях параметра a відстань між коренями рівняння

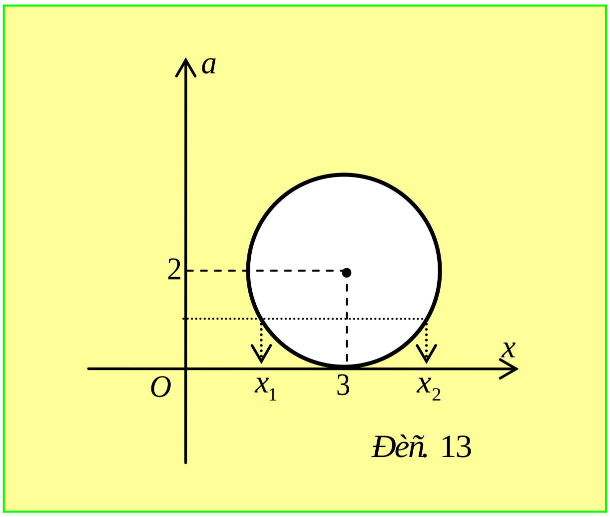
$$x^2-6x+a^2-4a+9=0$$

приймає найбільше значення?

Розв'язання. Перепишемо задане в умові рівняння у виді $(x-3)^2+(a-2)^2=4$ та побудуємо графік одержаної залежності у системі координат xOa (рис. 13). Очевидно, що при перетині кола прямою $a=const$ коренями рівняння будуть абсциси точок перетину. Очевидно, що найбільша відстань між коренями рівняння буде дорівнювати діаметру кола, тобто 2 при $a=2$.



Ðèñ. 12



Ðèñ. 13

Задача 4.2.3. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}\,.$$

Розв'язання. Введемо в розгляд функцію

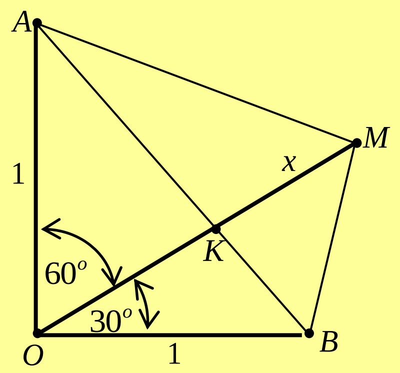
$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}\,.$$

Насамперед зауважимо, що для всіх $x<0$ $f(x)>f(0)$. Тепер зрозуміло, що точку, в якій функція досягає свого найменшого значення, потрібно шукати серед невід'ємних значень змінної.

Розглянемо випадок, коли $x>0$. Тоді можлива наступна геометрична конструкція. Відкладемо два перпендикулярних відрізки a та b, а також відрізок OM так, що $OA=OB=1$, $OM=x$, $\angle MOB=30^0$, $\angle MOA=60^0$ (рис. 14). За теоремою косинусів із трикутників OMB та OMA отримуємо

$$MA=\sqrt{x^2-x+1}\,,\; MB=\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}\,.$$

Крім цього бачимо, що $MA+MB\ge AB=\sqrt{2}$. Рівність досягається тільки у тому випадку, коли точка M співпадає з точкою K, в якій перетинаються відрізок AB та промінь OM, тобто при $x=OK$. Довжину відрізка OK знайдемо із ΔOKB з стороною $OB=1$ та кутами $\angle MOB=30^0$ та $\angle OBA=45^0$. За теоремою синусів маємо



Ðèñ. 14

$$\frac{OB}{\sin\angle OKB}=\frac{OK}{\sin\angle OBA}\ \text{або}\ \frac{1}{\sin\left(30^0+45^0\right)}=\frac{OK}{\sin 45^0}\,,$$

звідки $OK=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1.$

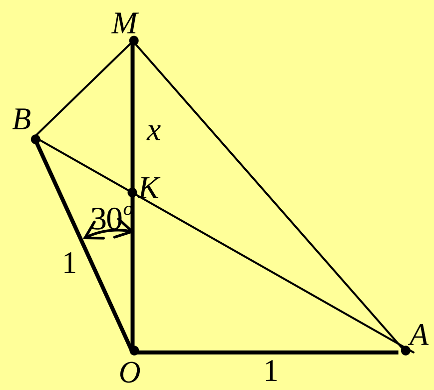
У випадку $x=0$ отримуємо $2=f(0)>f\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{2}$.

Отже, найменше значення виразу дорівнює $\sqrt{2}$.

Задача 4.2.4. Довести нерівність $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}\ge\sqrt{3}$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $x>0$. Тут можлива наступна геометрична конструкція. Відкладемо відрізки OA, OB та відрізок OM так, що $OA=OB=1$, $OM=x$, $\angle AOB=120^0$, $\angle MOA=90^0$ та $\angle MOB=30^0$ (рис. 15). Тоді $MA=\sqrt{x^2+1}$, $MB=\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$. Тому

$$MA+MB=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}\ge AB=\sqrt{3}\,.$$



Ðèñ. 15

У випадку, коли $x\le 0$, позначимо $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$. Тоді для всіх $x\le 0$ маємо $f(x)\ge f(0)=2>\sqrt{3}$. Тепер можна зробити висновок про те, що задана нерівність виконується при довільних значеннях x.

Задача 4.2.5. Довести, що для довільних значень змінних x, y, z виконується нерівність

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\ge\sqrt{y^2+yz+z^2}\,.$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $x>0,\ y>0,\ z>0$. Відкладемо відрізки $OA,\ OB$ та OC під кутом 120^0 так, щоб $OA=x,\ OB=y,\ OC=z$ (рис. 16). Зауваживши, що

$$OA=\sqrt{x^2+xy+y^2},\ OB=\sqrt{x^2+xz+z^2},\ OC=\sqrt{y^2+yz+z^2}$$

з нерівності трикутника робимо висновок, що задане співвідношення вірне.

Ще дві аналогічні до заданої нерівності отримаємо, зробивши у ній циклічну перестановку змінних $x,\ y,\ z$. Мова іде про нерівності

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}\ge\sqrt{x^2+xz+z^2}\,,$$

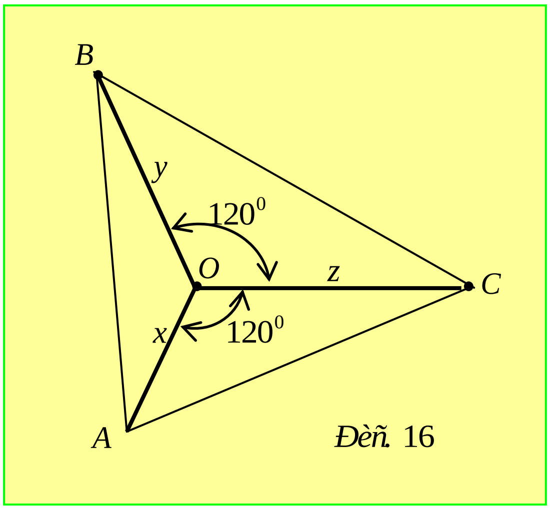
$$\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\ge\sqrt{x^2+xy+y^2}\,.$$

Розглянемо випадок, коли дві змінні приймають від'ємні, а третя додатне значення (наприклад, $x>0,\ y<0,\ z<0$). Перепозначивши y на $-y$ та z на $-z$, отримаємо доведену у прикладі 4.2.1 нерівність.

Якщо дві змінні приймають додатні значення, а третя від'ємні (наприклад, $x<0,\ y>0,\ z>0$), то нерівністю у прикладі 4.2.1 можна скористатися, перепозначивши x на $-x$.

Випадок, коли всі три змінні приймають від'ємні значення зводиться до початкового доведення шляхом перепозначення x на $-x$, y на $-y$ та z на $-z$.

Доведення нерівності, коли одна, дві або всі три змінні приймають значення 0, очевидні.



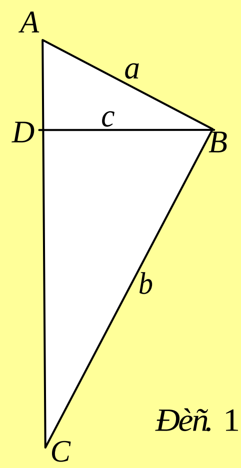
Ðèñ. 16

Інше доведення даної нерівності, яке використовує ідеї координатного методу, нами було наведено у попередньому розділі (задача 3.1.2).

Задача 4.2.6. Довести нерівність

$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{c}\quad (a\ge c>0,\ b\ge c).$$

Доведення. При $a=c$ або $b=c$ нерівність очевидна. Розглянемо випадок, коли $a>c$ і $b>c$. Перепишемо нерівність у виді $\frac{1}{2}c\sqrt{a^2-c^2}+\frac{1}{2}c\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{2}$ та побудуємо два прямокутні трикутники з спільним катетом c, гіпотенузи яких дорівнюють a та b (рис. 17). Тепер ліва частина перетвореної нерівності визначатиме суму площ трикутників ABD і BDC, тобто площу S трикутника ABC. Оскільки $S=\frac{1}{2}ab\sin\angle B\le\frac{ab}{2}$, то нерівність доведена.



Ðèñ. 17

Задача 4.2.7. Довести, що $(x+y)(x+z)\ge 2$, якщо $xyz(x+y+z)=1$ і $x>0,\ y>0,\ z>0$.

Доведення. Очевидно, що при $x>0,\ y>0,\ z>0$ існує трикутник ABC такий, що $AB=c=x+y$, $BC=a=y+z$, $AC=b=x+z$ (рис. 18). Нехай точки K, M, N - точки дотику вписаного кола із сторонами AB, BC, AC відповідно. Маємо $x+y+z=p$, де p - півпериметр трикутника. Крім того,

$$AK=AN=p-a=x,\ BK=BM=p-b=y,\ CM=CN=p-c=z.$$

Але за умовою задачі $xyz(x+y+z)=S^2=1$, звідки $S=1$. (S - площа трикутника ABC). З іншого боку, $2S=AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\le AB\cdot AC=(x+y)(x+z)$. Тоді $(x+y)(x+z)\ge 2S=2$.

Задача 4.2.8. Довести нерівність

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Доведення. Розглянемо четвертину круга з радіусом 100. Впишемо у нього ступінчату фігуру, яка складається з 99 прямокутників з нижньою основою, що дорівнює 1 (рис. 19). Площа першого прямокутника дорівнює

$$S_1 = 1 \cdot \sqrt{100^2 - 1^2} = \sqrt{99 \cdot 101}.$$

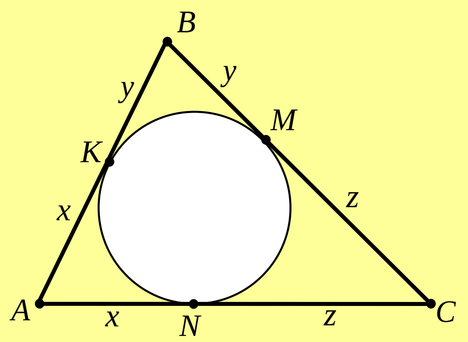
Для другого прямокутника маємо

$$S_2 = 1 \cdot \sqrt{100^2 - 2^2} = \sqrt{98 \cdot 102},\ \ldots,$$

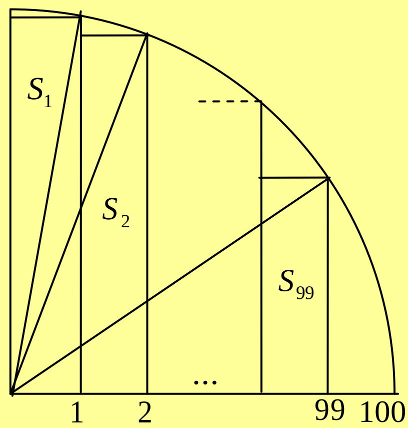
$$S_{99} = 1 \cdot \sqrt{100^2 - 99^2} = \sqrt{1 \cdot 199}.$$

Площа ступінчатої фігури менша від площі чверті круга, тому

$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \ldots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < \frac{100^2 \pi}{4}.$$



Ðèñ. 18



Ðèñ. 19

Розділ 5. **Нерівності в геометрії**

Геометричні фігури крім притаманних їм чисто геометричних властивостей, описуються також своїми кількісними характеристиками, зокрема довжинами відрізків, величинами кутів, площами, об’ємами, тощо. У практичній діяльності такі величини часто доводиться порівнювати, оцінювати ті межі, в яких вони змінюються (тобто аналізувати числові величини, які вони не можуть перевищувати, або не бути меншими). У результаті виникає ряд геометричних задач, пов’язаних із необхідністю оцінки геометричних величин та доведенням нерівностей, що появляються при цьому.

Окремі міркування, що стосуються певної класифікації методів доведення таких нерівностей, ми розглянемо у вигляді наступних задач.

5.1. Нерівність трикутника

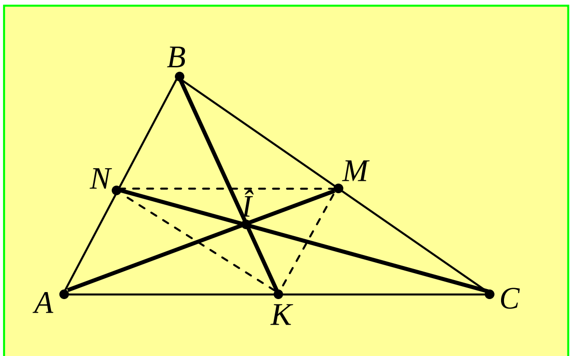
Добре відомо, що для трьох довільних точок A, B та C виконується нерівність $AB + BC \geq AC$ (нерівність буде строгою, якщо точка B не лежать між двома іншими точками). Звідси отримуємо, що довжина ламаної не більша за відстань між її кінцями. Ці елементарні міркування часто є ключовими при доведенні нерівностей для відстаней.

Задача 5.1.1. Довести, що довжини медіан m_a, m_b і m_c та його периметр P задовольняють нерівності

$$\frac{3P}{4} < m_a + m_b + m_c < P .$$

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$; $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CK = m_c$ - медіани (рис. 20). Із ΔAMK маємо

$$m_a = AM < AK + KM = \frac{b+c}{2} .$$



Ðèñ. 20

Аналогічно отримуємо нерівності $m_b < \frac{a+c}{2}$ та $m_c < \frac{a+b}{2}$. Додаючи одержані співвідношення, отримуємо праву частину нерівності, що доводиться. Із ΔOBC маємо

$$a = BC < BO + OC = \frac{2}{3}(m_b + m_c).$$

Таким же чином дістаємо нерівності $b < \frac{2}{3}(m_a + m_c)$, $c < \frac{2}{3}(m_a + m_b)$, додаючи які та попередню, отримуємо ліву частину співвідношення, що доводиться.

Згадуючи співвідношення, які виражають довжини медіан через сторони трикутника, зокрема $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, на основі доведеного твердження можна говорити, що нами реалізовано геометричне доведення алгебраїчної нерівності

$$\frac{3}{2}(a + b + \tilde{n}) < \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} + \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} < 2(a + b + \tilde{n}),$$

де числа a, b, c додатні і такі, що сума двох із них більша від третього.

Задача 5.1.2. У прямокутнику $ABCD$ на сторонах AB, BC, CD та AD вибрано точки P, Q, R та S (по одній на кожній стороні). Довести, що периметр одержаного чотирикутника не менший $2AC$.

Доведення. Симетризуємо прямокутник $ABCD$ відносно сторони BC, а потім – відносно прямої CD. При цьому утворяться нові прямокутники $A'D'CB$ та $CD'A''B''$ (рис. 21). Очевидно, що периметр чотирикутника $PQRS$ буде дорівнювати

$$PQ + QR + RS + SP == PQ + QR' + R'S' + SP = (PQ + QR' + R'S'') + SP$$

і оскільки $PS \le AP + AS = AP + A''S''$, то він не буде перевищувати довжини ламаної $APQR'S''A''$, яка в свою чергу не перевищує довжини відрізка $AA'' = 2AC$.

Задача 5.1.3. Дано гострий кут і точку A всередині нього. Знайти на сторонах кута такі точки B та C, щоб периметр трикутника ABC був мінімальним.

Розв'язання. Нехай задана точка A всередині кута α. Симетризуючи її відносно сторін кута, отримаємо точки M_1 та M_2. Проведемо пряму $Ì_1Ì_2$, яка перетне сторони кута у деяких точках B та C (рис. 22). Покажемо, що трикутник ABC - шуканий.

Насамперед, зауваживши, що симетричні відносно прямої відрізки рівні, отримуємо $AB = BM_1$ та $AC = CM_2$. Тому периметр

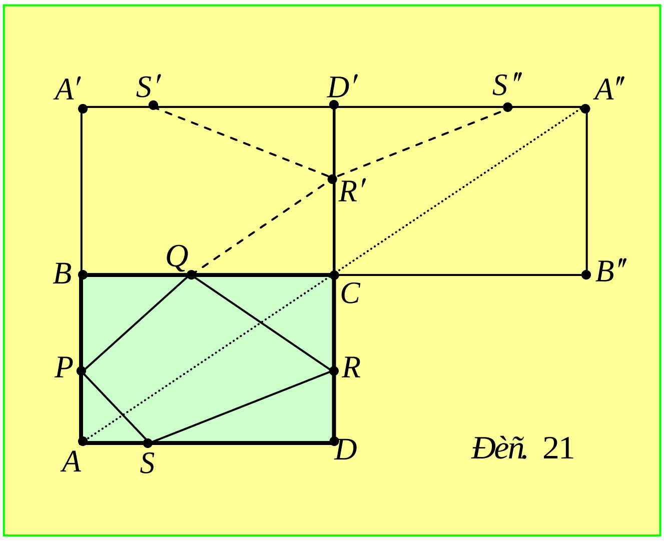
$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = BM_1 + BC + CM_2 = M_1M_2 .$$

Для іншого положення точки B на стороні кута (наприклад, для точки B') дістаємо

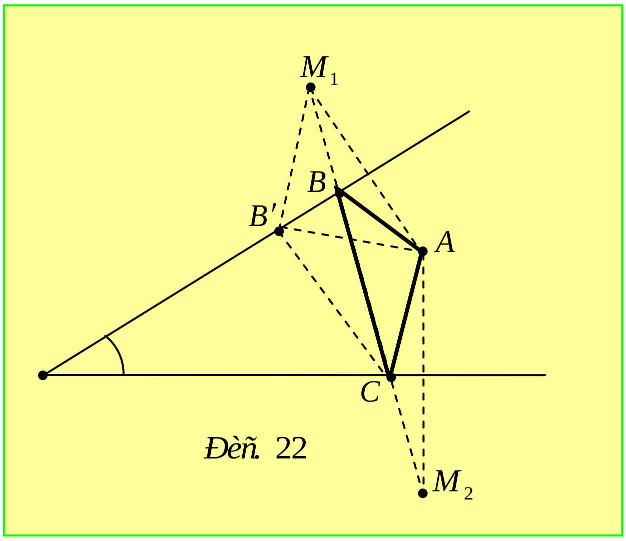
$$P_{\Delta AB'C} = AB' + B'C + CA = B'M_1 + B'C + CM_2 > M_1M_2 .$$

Аналогічно збільшується периметр трикутника ABC при зміні положення точки $Ñ$ на другій стороні кута. Таким чином, точки B та C - шукані.

Очевидно, що якщо заданий кут гострий, то пряма $Ì_1Ì_2$ завжди перетне сторони кута, тому поставлена задача матиме єдиний розв'язок.



Ðèñ. 21



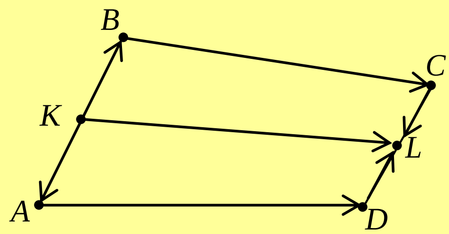
Ðèñ. 22

5.2. Застосування векторів

Інколи обґрунтування нерівності для відстаней зручно проводити, використовуючи вектори. При цьому може застосовуватися векторний аналог нерівності трикутника: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$. У задачах, зв'язаних з центром ваги трикутника, використовується рівність $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{\Theta}$, де M - точка перетину медіан, A, B, C - вершини трикутника.

Задача 5.2.1. На площині задано два відрізки AB і CD. Довести, що довжина відрізка, що сполучає їх середини, не більша за півсуму відрізків AC та BD.

Доведення. Нехай точки K та L - середини відрізків AB і CD відповідно (рис. 23). Очевидно, що виконуються векторні рівності $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}$ та $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}$. Додаючи їх, отримуємо рівність $2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, з якої, переходячи до довжин векторів, дістаємо $2\left|\overrightarrow{KL}\right| \le \left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\right|$, що доводить висловлене в умові твердження. Знак рівності можливий при умові $BC \| AD$, тобто, коли заданий чотирикутник є трапецією або паралелограмом.



Ðèñ. 23

Задача 5.2.2. У чотирикутнику $ABCD$ кут A тупий, F - середина сторони BC. Довести, що $2AF < BD + CD$.

Доведення. Нехай точка O є серединою відрізка BD. Очевидно, що точка A розташована всередині кола з діаметром BD, тому $AO < \frac{1}{2}BD$ (O - центр кола). Оскільки $OF = \frac{1}{2}CD$, як середня лінія трикутника BCD, то $AF \le AO + OF < \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD$, що потрібно було довести.

Задача 5.2.3. На площині задані два трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$. Нехай M_1 та M_2 - точки перетину їхніх медіан. Довести, що $3M_1M_2 \le A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$.

Доведення. Очевидно, що виконуються векторні рівності

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A_1M_1}+\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2A_2},$$

$$\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_1M_1}+\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2B_2},$$

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2C_2}.$$

Додаючи їх, отримуємо $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{M_1M_2}$, звідки випливає нерівність, яку ми доводимо.

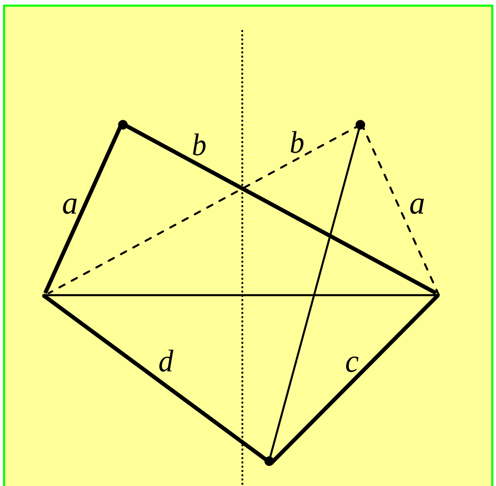
Задача 5.2.4. У піраміді $SABC$ вершину S сполучили з точкою M - центром ваги трикутника ABC. Довести, що $3 \cdot SM < SA + SB + SC$.

Доведення. Очевидно, що виконуються векторні рівності $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CM}$. Додаючи їх та враховуючи, що $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{\Theta}$, отримуємо співвідношення $3\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$, з якого випливає задана нерівність. Знак рівності у ній неможливий, оскільки вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ не колінеарні, тому $\left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right| < SA + SB + SC$.

5.3. Оцінка площі

Нам відомо, що площа трикутника не перевищує половини добутку довільних двох його сторін, а площа опуклого чотирикутника - половини добутку його діагоналей. Ці факти ефективно можна використовувати при розв'язуванні окремих задач. Наведемо приклади.

Задача 5.3.1. Нехай a, b, c, d - довжини сторін опуклого чотирикутника. Довести, що його площа не перевищує $\frac{1}{2}(ac + bd)$.



Ðèñ. 24

Розв'язання. Проведемо діагональ чотирикутника так, щоб по одну сторону від неї були сторони з довжинами a, b. Симетризуємо ці сторони відносно серединного перпендикуляра до проведеної діагоналі (рис. 24). Утвориться новий чотирикутник тієї ж площі, що заданий, та з довжинами послідовних сторін b, a, c, d. Провівши у ньому другу діагональ, отримаємо два трикутники, площі яких не перевищують $\frac{1}{2}ac$ та $\frac{1}{2}bd$.

Задача 5.3.2. Периметр опуклого чотирикутника дорівнює 4. Довести, що його площа не перевищує 1.

Розв'язання. Позначимо сторони чотирикутника через a, b, c, d, а його площу через S. Тоді $a+b+c+d=4$. З попередньої задачі маємо $S \le \frac{1}{2}(ac+bd)$. Легко бачити, що виконується також нерівність $S \le \frac{1}{2}(ab+cd)$. Тоді

$$4S \le ab+bc+cd+ad=(a+c)(b+d) \le \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=4 \Rightarrow S \le 1.$$

Цим самим фактично доведено, що з усіх опуклих чотирикутників із фіксованим периметром найбільшу площу має квадрат.

Задача 5.3.3. Довжини двох сторін трикутника a та b задовольняють умову $a>b$, а довжини відповідних їм висот дорівнюють h_a та h_b. Довести нерівність $a+h_a \ge b+h_b$ та встановити, коли досягається рівність.

Доведення. Площа S трикутника ABC дорівнює $\frac{1}{2}ab\sin C$, звідки $\sin C=\frac{2S}{ab}$. Крім цього $S=\frac{ah_a}{2}$, звідки $h_a=\frac{2S}{a}$ і $S=\frac{bh_b}{2}$, звідки $h_b=\frac{2S}{b}$. Перетворимо нерівність, яку ми доводимо, наступним чином:

$$a+\frac{2S}{a}-b-\frac{2S}{b}=(a-b)-\frac{2S(a-b)}{ab}=(a-b)\left(1-\frac{2S}{ab}\right)=(a-b)(1-\sin C).$$

Очевидно, що, відповідно до умови задачі, одержаний вираз не може бути від'ємним. Легко бачити, що рівність досягається при $\sin C=1$, тобто у випадку, коли трикутник прямокутний.

Задача 5.3.4. Показати, що в довільному опуклому чотирикутнику відношення найменшої з відстаней між його вершинами до найбільшої з них не перевищує $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

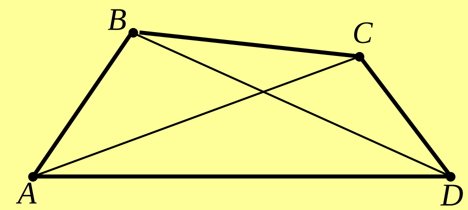
Розв'язання. Нехай M – найбільша, а m – найменша з відстаней між вершинами чотирикутника. В опуклому чотирикутнику хоча б один із кутів не є гострим. На рисунку 25 таким є, наприклад, кут ABC. Використаємо теорему косинусів:

$$M^2 \geq AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B.$$

Оскільки $\cos\angle B \leq 0$, то

$$M^2 \geq AC^2 \geq AB^2 + BC^2 \geq m^2 + m^2 = 2m^2.$$

Звідси випливає, що $\frac{M}{m} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Знак рівності виконується, наприклад, для квадрата.



Ðèñ. 25

Задача 5.3.5. Довести, що правильний n-кутник має найбільшу площу серед усіх вписаних в коло n-кутників.

Розв'язання. Нехай n-кутник $A_1A_2...A_n$ вписаний у коло з центром у точці O та радіусом R. Позначимо $\angle A_iOA_{i+1} = \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., n$, $\alpha_i \in (0, \pi]$. Тоді $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 2\pi$ (знак строгої нерівності буде у випадку, коли центр кола лежить поза многокутником). Для площі многокутника S маємо $S = \sum_{i=1}^{n} S_{\Delta OA_iA_{i+1}} = \frac{R^2}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$. Функція $\sin x$ на вказаній множині значень опукла вгору. З нерівності Єнсена отримуємо, що

$$\frac{nR^2}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \leq \frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n},$$

а саме останньому значенню дорівнює площа правильного вписаного в коло многокутника.

Задача 5.3.6. В квадраті з стороною 15 розміщено довільним чином 20 квадратиків з стороною 1. Довести, що в квадраті можна додатково розмістити коло з радіусом 1, яке не матиме спільних точок з цими квадратиками.

Розв'язання. Будемо шукати положення для центра кола. Центр має знаходитися на відстані не меншій від 1 від сторін заданого квадрата, тобто всередині квадрата з стороною 13, а також від сторін квадратиків. Для кожного квадратика множина точок, що знаходяться від нього на відстані, меншій від 1, складається з точок самого квадратика, чотирьох квадратиків, побудованих на його сторонах, а також точок чотирьох чвертей кругів з центрами у вершинах квадратика та радіусом 1. Площа фігури, утвореної такими точками, дорівнює $5+\pi$. Оскільки сума всіх цих площ дорівнює $20(5+\pi)<13^2$, то в квадраті 13×13 знайдеться точка, що не входить до жодної з перерахованих множин. Вона може бути вибрана за центр шуканого кола.

Задача 5.3.7. Дано трикутник ABC і точку M всередині нього. Нехай $h_a,\ h_b,\ h_c$ - висоти трикутника, проведені до відповідних сторін, $p_a,\ p_b,\ p_c$ - відстані до цих сторін від точки M. Довести, що

$$\frac{h_a}{p_a}+\frac{h_b}{p_b}+\frac{h_c}{p_c}\ge 9.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{h_a}{p_a}=\frac{S_{ABC}}{S_{MBC}},\quad \frac{h_b}{p_b}=\frac{S_{ABC}}{S_{MAC}},\quad \frac{h_c}{p_c}=\frac{S_{ABC}}{S_{MBA}},\qquad \frac{p_a}{h_a}+\frac{p_b}{h_b}+\frac{p_c}{h_c}=1.$$

Використавши нерівність Коші, отримуємо

$$\frac{h_a}{p_a}+\frac{h_b}{p_b}+\frac{h_c}{p_c}=\left(\frac{h_a}{p_a}+\frac{h_b}{p_b}+\frac{h_c}{p_c}\right)\left(\frac{p_a}{h_a}+\frac{p_b}{h_b}+\frac{p_c}{h_c}\right)\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{h_a}{p_a}\cdot\frac{h_b}{p_b}\cdot\frac{h_c}{p_c}}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{p_a}{h_a}\cdot\frac{p_b}{h_b}\cdot\frac{p_c}{h_c}}=9.$$

5.4. Екстремальна властивість центра ваги

Для точок $M_1,\ M_2,...,\ M_n$ на площині їх центром ваги будемо називати таку точку M, що $\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}+...+\overrightarrow{MM_n}=\vec{\Theta}$.

Така точка існує і єдина. Справді, для довільної точки A з рівності

$$\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{AM_2}+...+\overrightarrow{AM_n}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM_1}\right)+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM_2}\right)+...+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM_n}\right)=n\overrightarrow{AM}=\vec{\Theta}$$

випливає, що точки A та M співпадають. Відмітимо, що центром ваги для трьох вершин трикутника буде точка перетину його медіан.

Описане геометричне означення узгоджується з фізичним, якщо в точках $M_1,\ M_2,\ldots,\ M_n$ розмістити маси однакової величини.

Центр ваги має наступну екстремальну властивість. Для будь-якої точки A виконується нерівність

$$MM_1^2+MM_2^2+\ldots+MM_n^2\le AM_1^2+AM_2^2+\ldots+AM_n^2.$$

Справді, використовуючи скалярний добуток, отримуємо

$$AM_1^2+AM_2^2+\ldots+AM_n^2=\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AM_1}+\ldots+\overrightarrow{AM_n}\cdot\overrightarrow{AM_n}=$$
$$=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM_1}\right)\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM_1}\right)+\ldots+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM_n}\right)\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MM_n}\right)=nAM^2+$$
$$+2\overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{MM_1}+\ldots+\overrightarrow{MM_n}\right)+MM_1^2+\ldots+MM_n^2\ge MM_1^2+\ldots+MM_n^2.$$

Задача 5.4.1. Довести нерівність $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$, де $a,\ b,\ c$ - сторони довільного трикутника, R - радіус описаного навколо нього кола.

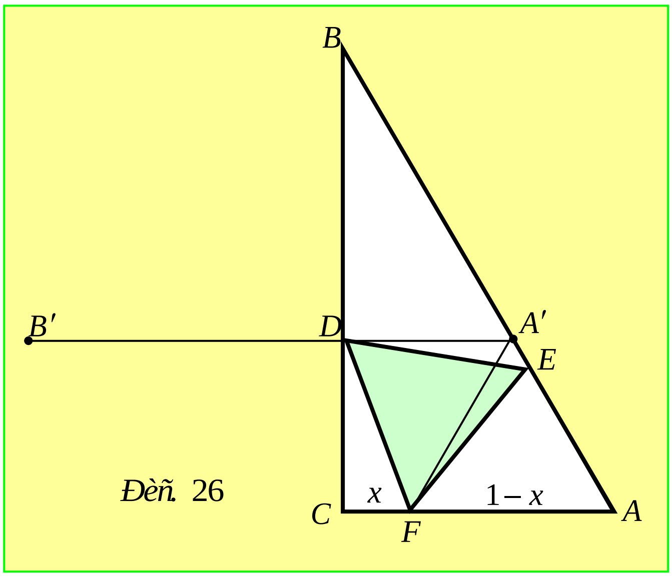
Розв'язання. Нехай O - центр описаного кола, M - точка перетину медіан ΔABC. Тоді згідно з доведеним

$$OA^2+OB^2+OC^2=3R^2\ge MA^2+MB^2+MC^2=\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+\left(2a^2+2c^2-b^2\right)+\left(2a^2+2b^2-c^2\right)}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

що доводить задану нерівність.

5.5. Дослідження екстремальних властивостей

Задача 5.5.1. У прямокутний трикутник ABC з гострим кутом $A=60^0$ та прямим кутом C вписано правильний трикутник так, що його вершини лежать на різних сторонах даного трикутника. При якій умові сторона правильного трикутника буде найменшою?



Ðèñ. 26

Розв'язання. Нехай DEF –

правильний трикутник, вписаний у даний трикутник ABC (рис. 26). Вважатимемо $AC = 1,\ CF = x$. Тоді $AF = 1 - x$. Точку D можна розглядати, як результат повороту точки E навколо точки F на кут 60^0 проти годинникової стрілки. Тоді точку D можна одержати внаслідок перетину відрізків BC та $B'A'$, де $B'A'$ - це образ відрізка BA при повороті на 60^0 проти годинникової стрілки навколо центра повороту F. Оскільки кут $A = 60^0$, то точка $A' \in (AB)$. Очевидно, що $\Delta FAA'$ – правильний і $B'A' \| AC$. Знайдемо висоту DC у $\Delta FAA'$: $DC = (1-x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Із прямокутного трикутника DCF сторона вписаного трикутника дорівнює $DF = \sqrt{x^2 + (1-x)^2 \cdot \frac{3}{4}}$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{7x^2 - 6x + 3}{4}$. Вона набуває свого найменшого значення при $x = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

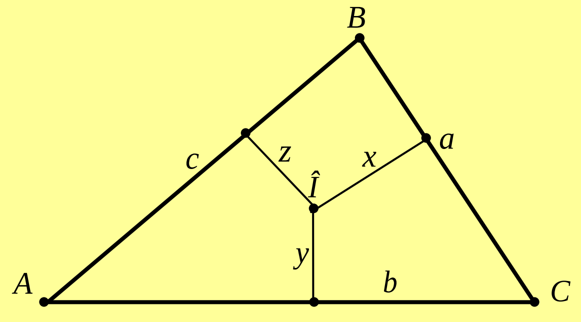
Отже, якщо $CF : CA = 3 : 7$, тобто $CF : FA = 3 : 4$, то вписаний правильний трикутник буде шуканий.

Задача 5.5.2. Всередині трикутника ABC знайти точку O, для якої сума квадратів відстаней від неї до сторін трикутника мінімальна.

Розв'язання. Нехай відстані від точки O до сторін $BC,\ AC,\ AB$ будуть відповідно $x,\ y,\ z$ (рис. 27). Тоді

$$ax + by + cz = 2(S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC},$$

де S - площа даного трикутника. Сума квадратів відстаней від точки O до сторін трикутника буде дорівнювати $x^2 + y^2 + z^2$.



Ðèñ. 27

В силу нерівності Коші - Буняковського виконується співвідношення

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq ax + by + cz,$$

причому знак рівності виконується при умові $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Одержуємо, що

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}.$$

Права частина є сталим числом. Тому ліва частина прийматиме найменше значення, коли виконується знак рівності, тобто при умові $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Із цих співвідношень та рівності $ax+by+cz=2S$ остаточно дістаємо

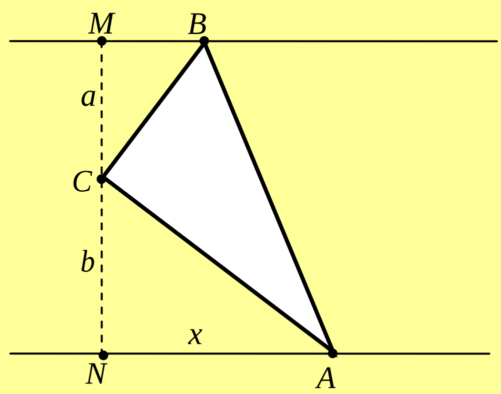
$$x=\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{2bS}{a^2+b^2+c^2},\ z=\frac{2cS}{a^2+b^2+c^2}.$$

Задача 5.5.3. Дано дві паралельні прямі та точка C між ними. Побудувати прямокутний трикутник ABC з вершиною прямого кута в точці C та вершинами на заданих паралельних прямих, площа якого мінімальна.

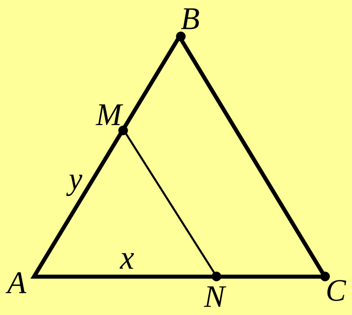
Розв'язання. Проведемо через точку C перпендикуляр до паралельних прямих (рис. 28). Нехай $CM=a,\ CN=b,\ NA=x$. Трикутники ANC і CMB подібні. Тому $\frac{AC}{x}=\frac{CB}{a}$ або $\frac{AC^2}{x}=\frac{AC\cdot CB}{a}$, звідки $AC\cdot CB=\frac{AC^2\cdot a}{x}$. Оскільки $AC^2=b^2+x^2$ і $AC\cdot CB=2S$, то $2S=a\left(\frac{b^2}{x}+x\right)$. Отже, площа S буде найменшою, коли найменшою буде сума $\frac{b^2}{x}+x$. Добуток $\frac{b^2}{x}\cdot x$ є сталим числом b^2, тому сума $\frac{b^2}{x}+x$ буде найменшою при $\frac{b^2}{x}=x$, тобто при $x=b$. Але якщо $NA=b$, то $MB=a$. Тепер трикутник ABC легко будується.

Задача 5.5.4. Знайти найкоротший відрізок, який ділить рівносторонній трикутник із стороною a на дві рівновеликі фігури.

Розв'язання. Нехай трикутник ABC рівносторонній із стороною a. Позначимо шуканий відрізок $MN=d$. Нехай $AN=x$, $AM=y$ (рис. 29). Тоді площа $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}xy\sin 60^0=\frac{xy\sqrt{3}}{4}$. Оскільки площа всього трикутника дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то з умови отримуємо, що $xy=\frac{a^2}{2}$ або $y=\frac{a^2}{2x}$. За теоремою косинусів $d^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^0$ або $d^2=x^2+\frac{a^4}{4x^2}-\frac{a^2}{2}$. Очевидно, що відрізок d буде найменшим, коли найменшим буде значення виразу $x^2 + \frac{a^4}{4x^2}$. Добуток обох доданків є сталим і $x^2 \cdot \frac{a^4}{4x^2} = a^4$, тому найменше значення суми буде при $x^2 = \frac{a^4}{4x^2}$, тобто при $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. При цьому значенні $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ і $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ðèñ. 28



Ðèñ. 29

5.6. Застосування похідної

Задача 5.6.1. У правильну чотирикутну піраміду з ребром основи a і висотою h вписана правильна чотирикутна призма так, що її нижня основа лежить всередині основи піраміди, а вершини верхньої основи – на бічних ребрах піраміди. Знайдіть найбільшу площу бічної поверхні таких призм.

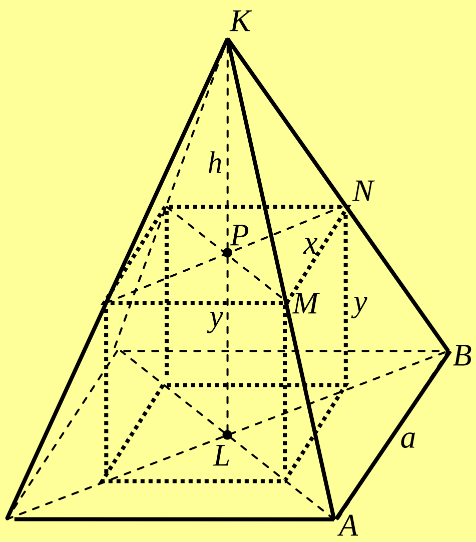
Розв'язання. Нехай правильна чотирикутна призма вписана в піраміду так, як показано на рисунку 30. Нехай сторона основи призми дорівнює x, а її висота y. З подібності трикутників ABK та MNK отримуємо $\frac{a}{x} = \frac{AB}{MN} = \frac{AK}{MK}$, а з подібності трикутників ALK та MPK випливає співвідношення $\frac{AK}{MK} = \frac{LK}{PK} = \frac{h}{h-y}$.

З пропорції $\frac{a}{x}=\frac{h}{h-y}$ знаходимо $y=\frac{(a-x)h}{a}$. Оскільки площа бічної поверхні призми дорівнює $S=4xy$, то маємо $S=\frac{4hx(a-x)}{a}$.

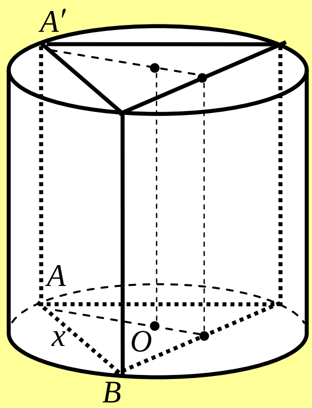
Одержаний квадратний відносно x тричлен з від'ємним старшим коефіцієнтом досягає свого найбільшого значення в точці $x=\frac{a}{2}$. При цьому максимальна площа бічної поверхні буде $S_{\max}=ah$.

Задача 5.6.2. Навколо правильної трикутної призми з об'ємом V описаний циліндр. Знайдіть найменшу площу повної поверхні таких циліндрів.

Розв'язання. Нехай висота призми $AA'=H$, сторона основи $AB=x$, радіус кола, описаного навколо основи $OA=r$ (рис. 31). Оскільки радіус кола,



Ðèñ. 30



Ðèñ. 31

описаного навколо правильного трикутника, дорівнює $r=\frac{x}{\sqrt{3}}$, то, відповідно до умови, $V=\frac{x^2H\sqrt{3}}{4}$, звідки $H=\frac{4V}{x^2\sqrt{3}}$. Тоді площа поверхні циліндра $S=2\pi r^2+2\pi rH=\frac{2\pi}{3}\left(x^2+\frac{4V}{x}\right)$. Розглянемо функцію $f(x)=x^2+\frac{4V}{x}$, $x\in(0;\ +\infty)$. Оскільки її похідна $f'(x)=2x-\frac{4V}{x^2}$ перетворюється в 0 при $x=\sqrt[3]{2V}$ і у цій точці функція приймає, як легко встановити, найменше значення, то $S = 2\pi^3 \cdot \sqrt[3]{4V}$ є найменшим значенням площі поверхні циліндра.

У деяких випадках для знаходження найбільшого і найменшого значення при розв'язанні геометричних задач не завжди зрозуміло, в яких межах змінюється значення величини, яка нас цікавить. Тоді зручно цю величину виразити через інші величини.

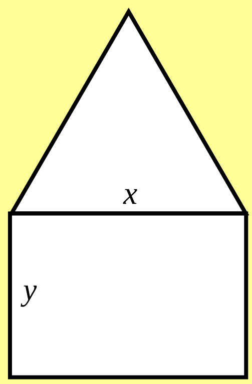
Задача 5.6.3. Плоска фігура складається з прямокутника і рівностороннього трикутника. Визначити її розміри так, щоб при даному периметрі площа була найбільшою (у величину периметра не враховується спільна сторона прямокутника і трикутника).

Розв'язання. Нехай x – сторона трикутника, y – сторона прямокутника (рис. 32). Тоді периметр $P = 3x + 2y$, звідки $y = \frac{P - 3x}{2}$.

Очевидно, що площа всієї фігури буде

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 = x \cdot \frac{P - 3x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 = \frac{2xP - 6x^2 + x^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{x}{4}\left[2P - x\left(6 - \sqrt{3}\right)\right].$$



Ðèñ. 32

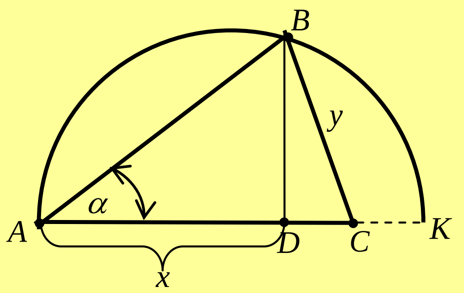
Значення x, при якому площа S буде найбільшою, визначаємо за допомогою похідної у виді $x = \frac{P}{6 - \sqrt{3}}$. Тоді $y = \frac{P(3 - \sqrt{3})}{2(6 - \sqrt{3})}$. Це і є розміри фігури, при яких при заданому периметрі площа буде найбільшою.

Задача 5.6.4. Який із всіх рівнобедрених трикутників, вписаних у дане півколо так, щоб одна із рівних сторін лежала на діаметрі, а друга була б хордою, має найбільшу основу?

Розв'язання. Нехай шуканим є трикутник ABC і $AB = AC$, $BC = y$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 33), r - радіус заданого півкола з діаметром AK. Проведемо $BD \perp AC$. Нехай $AD = x$. Тоді $DK = 2r - x$ і $BD^2 = x(2r - x)$. Тепер знаходимо, що $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 2rx$. З прямокутного трикутника ABD отримуємо

$\cos\alpha = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{x}{\sqrt{2rx}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2r}}$, а із рівнобедреного трикутника ABC за теоремою косинусів маємо $y^2 = 2AB^2(1-\cos\alpha) = 4rx\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2r}}\right)$.

Розглянемо функцію $f(x) = x - \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2r}}$, визначену на інтервалі $x \in (0,\ 2r)$. Оскільки її похідна $f'(x) = 1 - \dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{2r}}$ перетворюється в 0 при $x = \dfrac{8r}{9}$ і $f(x)$ у цій точці приймає найбільше значення, то знайдене значення $x = \dfrac{8r}{9}$ є шуканим та вказує, як побудувати трикутник.



Ðèñ. 33

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975. – 112 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965. – 223 с.
3. Васильєв Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзних математических олимпиад. – М.: Наука. 1988. – 288с.
4. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: Либідь, 1993.
5. Ісаак Д.Ф. Задачі з геометрії на максимум та мінімум в 10 класі // Математика в школі. – 1984. - № 2.
6. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006. – Львів.: Каменяр. 2008. – 348 с.
7. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. М.: "ABF". 1995. – 352 с.
8. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. - К.: Агрофирма "Александрия", 1993.–59 с.
9. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.. „ Видавництво А.С.К.", 2004.
10. Сивашинський І.Х. Нерівності в задачах. М.: Наука, 1967 – 275 с.
11. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці.: Зелена Буковина. 2002.- 340 с.