Бібліотека журналу «Математика в школах України»
Серію засновано в 2003 році

В. А. Ясінський

ОЛІМПІАДНА МАТЕМАТИКА: функціональні рівняння, метод математичної індукції

Харків
Видавнича група «Основа»
2005

ББК 22.1я7
Я 81

Схвалено комісією з математики Науково-методичної ради з питань освіти
Міністерства освіти і науки України.
Протокол № 5 від 22 грудня 2004 року

Рецензенти:

Лейфура В. М., кандидат фізико-математичних наук, професор Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили, Заслужений учитель України

Харік О. Ю., завідуюча кафедри математики ФМЛ № 27 м. Харкова, Заслужений учитель України, Соросівський учитель, учитель-методист.

Ясінський В. А.

Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. — Х.: Вид. група «Основа», 2005. — 96 с. — (Б-ка ж. «Математика в школах України»; Вип. 1 (25)).

ISBN 966-333-078-3

Основна мета пропонованої книги — надати вчителям, учням конкретну допомогу в розвитку вміння розв'язувати олімпіадні задачі з тем: «Функціональні рівняння», «Метод математичної індукції».

Посібник містить необхідні теоретичні відомості, зразки розв'язання олімпіадних задач, завдання для самостійного розв'язування.

Для вчителів математики і учнів, які готуються до участі в олімпіадах.

ББК 22.1я7

ISBN 966-333-078-3

© Ясінський В. А., 2005
© ТОВ «Видавнича група "Основа"», 2005

ПЕРЕДМОВА

Ця книга адресована тим, хто хоче навчитися розв'язувати задачі олімпіадної математики та навчити цього своїх учнів.

Вона написана на основі багаторічного досвіду підготовки школярів та студентів до участі в математичних олімпіадах різних рангів, і здобуття ними перемог.

Мета цієї книги — надати вчителям, учням конкретну допомогу в розвитку вміння розв'язувати олімпіадні задачі. Вона складається з двох частин. У першій частині висвітлена тема «Функціональні рівняння та методи їх розв'язування». У другій — читачеві пропонується познайомитися з одним із сучасних методів доведення різноманітних математичних тверджень — методом математичної індукції.

До більшості задач дано відповідні та повні їх розв'язання. Однак хочу попередити Вас, що читання розв'язань принесе малу користь, якщо перед цим Ви не витратите достатньо свого часу, спробувавши розв'язати задачу самостійно. До більшості задач є вказівки, які можуть допомогти Вам знайти ідею розв'язування, якщо задача не піддається Вашим спробам її розв'язати. Раджу Вам ознайомитись із запропонованим розв'язанням і в випадку, коли Ви розв'язали задачу самостійно. Можливо, в ньому Ви знайдете нові для себе ідеї.

Щиро вдячний Марковій Ірині Сергіївні — редактору цієї книги, за її методичні поради щодо створення книги, редагування багатьох текстів задач та їх розв'язувань.

Буду вдячний усім, хто запропонує свої зауваження щодо створення цієї книги, свої розв'язання окремих задач. Прошу надсилати їх на адресу редакції.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Загальні відомості

Клас функцій, які вивчаються в шкільному курсі математики, порівняно невеликий. До них належать, наприклад, лінійна, степенева, показникова, тригонометричні функції тощо. Інші функції дістаємо з основних за допомогою композицій та алгебраїчних дій над основними елементарними функціями.

Рівність, з якої можна знайти невідому функцію, називається *функціональним рівнянням*. Розв'язати функціональне рівняння — означає знайти невідомі функції, що входять до нього. Значний внесок у вивчення таких рівнянь вніс О. Коші (1789–1857). Одне з функціональних рівнянь

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

носить його ім'я.

Розглянемо методи розв'язування функціональних рівнянь.

Метод підстановок

Суть цього методу полягає ось у чому. *Припустимо*, що дане рівняння має розв'язок. Застосуємо до змінних, що входять у рівняння, деякі підстановки. Дістаємо систему рівнянь, одним із невідомих якої є шукана функція. Після розв'язування системи безпосередньою **перевіркою** *необхідно переконатись*, що знайдена функція задовольняє умову задачі. Основна трудність цього методу полягає у виборі вдалих підстановок.

Метод застосування поняття групи

Означення. Довільна множина G функцій, які визначені на множині M, називають *групою* відносно операції «$\circ$», якщо множина G задовольняє такі властивості:

1) для будь-яких функцій $f \in G$, $g \in G$ їх композиція $f \circ g$ також належить G (під операцією $f \circ g$ будемо розуміти складену функцію $f\left(g(x)\right)$);

2) функція $e(x)=x$ належить G;

3) для будь-якої функції $f \in G$ існує обернена функція f^{-1}, яка також належить G.

Кількість елементів скінченної групи називають *порядком* групи.

Це означення є окремим випадком загального означення поняття групи. Детально основні поняття теорії груп викладено у [1], [14].

Нехай $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \frac{x-1}{x+1}$, тоді

$$g_2 \circ g_2 = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = -\frac{1}{x} = g_3(x), \quad g_2 \circ g_3 = -\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1}{1-x} = g_4(x).$$

Функції $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g_3(x) = -\frac{1}{x}$, $g_4(x) = \frac{x+1}{1-x}$, які визначені на $R \setminus \{0; -1; 1\}$ утворюють групу четвертого порядку. Дійсно, $G = \{g_1(x); g_2(x); g_3(x); g_4(x)\}$ має такі властивості:

1) вона замкнена відносно операції композиції;

2) серед функцій множини G є $g_1(x) = x$;

3) для кожної із функцій множини G є обернена: $g_1^{-1} = g_1$, $g_2^{-1} = g_4$, $g_3^{-1} = g_3$, $g_4^{-1} = g_2$.

Викладемо загальній метод розв'язування деяких функціональних рівнянь із застосуванням поняття групи.

Нехай у функціональному рівнянні

$$a_1 f(g_1) + a_2 f(g_2) + \ldots + a_n f(g_n) = b \qquad (*)$$

вирази, які стоять під знаком невідомої функції $f(x)$, є елементами групи G, яка складається із n елементів (функцій): $g_1(x) = x, g_2(x), \ldots, g_n(x)$, причому коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та b–деякі функції. Припустимо, що рівняння (*) має розв'язок. Замінимо x на $g_2(x)$. (В подальшому таку заміну будемо позначати $x \to g_2(x)$.) У результаті послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n$ перейде в послідовність $g_1 \circ g_2, g_2 \circ g_2, \ldots, g_n \circ g_2$, яка знову-таки складається з усіх елементів групи G. Тому «невідомі» $f(g_1)$, $f(g_2), \ldots, f(g_n)$ поміняються лише місцями і матимемо нове лінійне рівняння. Далі в рівнянні (*), аналогічно, зробимо послідовно заміни $x \to g_3(x)$, $x \to g_4(x), \ldots, x \to g_n(n)$, після чого дістанемо систему із n лінійних рівнянь, яку слід розв'язати. Якщо розв'язок існує, то його слід *перевірити,* чи задовольняє він рівняння (*).

Метод застосування елементів математичного аналізу

При розв'язуванні рівнянь Коші розв'язки знаходяться за допомогою методів математичного аналізу зокрема таких, як границя послідовності та функції, неперервність, диференційованість тощо.

а) *Метод граничного переходу.* Суть цього методу полягає в наступному. Здійснюється підстановка, яка переводить вираз, який стоїть під знаком f в одному члені рівняння, у вираз, який стоїть під знаком f у другому його члені. Ця підстановка повторюється n разів. Дістанемо систему n лінійних рівнянь. Виключаючи послідовно невідомі, ми матимемо рівняння вигляду

$$f(x) = a_n f(b_n) + c_n,$$

де a_n, b_n, c_n — члени деяких послідовностей, n — фіксоване натуральне число (a_n, b_n, c_n можуть бути і функціями від x).

Якщо існують границі при $n \to \infty$ послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \text{const}$, то граничним переходом, використовуючи неперервність $f(x)$, знаходимо вираз для $f(x)$; звичайно, ***перевірка*** є складовою частиною розв'язування функціонального рівняння.

Цим методом можуть бути розв'язані в класі неперервних функцій рівняння вигляду

$$f(kx+b) = mf(x) + P(x), f(kx+b) = f(x)\cdot a^{P(x)},$$

де $k > 1$, $|m| < 1$, $P(x)$ — многочлен, $a > 0$, $a \neq 1$, $a = \text{const}$.

б) *Метод диференціювання.* Він полягає в тому, що для знаходження розв'язку функціонального рівняння в класі диференційованих функцій доцільно продиференціювати обидві його частини, за умови, що похідна існує. В результаті дістанемо функціональне рівняння, яке містить ще й похідну невідомої функції. Розв'язуючи це рівняння як функціональне, відносно похідної, дістанемо, що шукана функція є однією з первісних для цієї похідної.

в) *Метод Коші.* Цим методом розв'язок рівняння знаходиться за допомогою спеціальних підстановок послідовно для *натуральних, раціональних* значень аргумента, а потім граничним переходом – для *додатних дійсних* x і, нарешті, розповсюджується на *всі дійсні* значення аргумента.

г) *Метод рекурентних співвідношень.* Нехай задане функціональне рівняння натурального аргумента має вигляд рекурентного співвідношення, тобто формули, яка виражає $f(n)$ через попередні значення

$f(n-1)$, $f(n-2)$, і т.д. Спочатку обчислюють значення функції від декількох перших чисел натурального ряду (при цьому використовується рекурентне співвідношення). Потім пробують прогнозувати вигляд шуканої функції (гіпотеза !), після чого переконуються у справедливості здогадки за допомогою *методу математичної індукції*. Саме так знаходяться формули для n-го члена арифметичної та геометричної прогресій, послідовності Фібоначчі:

$$f(1)=f(2)=1,\ f(n)=f(n-1)+f(n-2),$$

для всіх $n=3, 4, 5, \ldots$

Аналогічно означається композиція більшої кількості функцій.

Далі розглянемо функціональні рівняння, які пропонувалися на різних етапах Всеукраїнських та зарубіжних математичних олімпіад. У дужках вказані класи, в яких були запропоновано ці рівняння.

Задачі

1. (9—10) Знайдіть усі функції $f\colon R\setminus\{0, 2003\}\to R$ які задовольняють рівняння $(2003-x)f(x)-2xf(2003-x)=1$.

Розв'язання

Застосувавши послідовно заміну $x=2003-t$, $x=t$ дістанемо систему рівнянь відносно $f(t)$ та $f(2003-t)$.

$$\begin{cases} tf(2003-t)-2(2003-t)f(t)=1, \\ (2003-t)f(t)-2tf(2003-t)=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2tf(2003-t)-4(2003-t)f(t)=2, \\ (2003-t)f(t)-2tf(2003-t)=1. \end{cases}$$

Почленно додавши рівняння системи, отримаємо: $-3(2003-t)f(t)=3$, оскільки $t\neq 0, t\neq 2003$, то $f(t)=\dfrac{1}{t-2003}$.

Перевіркою переконуємося, що функція $f(x)=\dfrac{1}{x-2003}$, $x\in R\setminus\{0, 2003\}$ задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{1}{x-2003}$, де $x\in R\setminus\{0; 2003\}$.

2. (10) Знайдіть усі функції $f\colon R\to R$, які задовольняють рівняння $f(xy)=y^{2003}f(x)$.

Розв'язання

Покладемо $x = 1$, дістанемо $f(y) = y^{2003} f(1)$.

Позначивши $f(1) = \lambda$, матимемо функцію $f(x) = \lambda \cdot x^{2003}$, де $\lambda = const$.

Виконаємо перевірку:

$\lambda(yx)^{2003} = y^{2003} \cdot \lambda x^{2003}$, ця рівність справджується для довільних дійсних x, y та λ.

Отже, функція $f(x) = \lambda \cdot x^{2003}$, $\lambda = \text{const}$ задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $f(x) = \lambda \cdot x^{2003}$, де $\lambda = \text{const}$.

3. (9–10) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y) + f(y-x) = (y+2)f(x) + y(2y - x^2)$.

Розв'язання

Поклавши $x = 0$, дістанемо $f(y) + f(y) = (y+2)f(0) + 2y^2$

$$\text{або } f(y) = y^2 + \frac{y}{2}a + a, \text{де } a = f(0).$$

Виконаємо перевірку: $(x+y)^2 + \frac{(x+y)}{2}a + a + (y-x)^2 + \frac{(y-x)}{2}a + a =$

$$= (y+2)\left(x^2 + \frac{x}{2}a + a\right) + y(2y - x^2).$$

Отримаємо, що $ax\left(\frac{y}{2} + 1\right) = 0$ для довільних x, y, тобто $a = 0$.

Отже, шукана функція $f(x) = x^2$.

Відповідь. $f(x) = x^2$.

4. (10) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння $f(xy) = \sin y \cdot f(x)$.

Розв'язання

Покладемо $x = 1$, дістанемо $f(y) = \sin y \cdot f(1)$, позначимо $a = f(1)$.

Перевірка показує, що $a = 0$.

Дійсно, $a\sin(xy) = a\sin y \cdot \sin x \Leftrightarrow a(\sin(xy) - \sin y \cdot \sin x) = 0$, враховуючи, що ця рівність виконується для будь-яких дійсних x та y, одержуємо $a = 0$.

Отже, шукана функція має вигляд $f(x) \equiv 0$.

Відповідь. $f(x) \equiv 0.$

5. (9) Знайдіть усі функції $f{:}R \to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y)-f(x-y)=4xy.$

Розв'язання

Застосуємо заміну $x+y=u,\ x-y=v$, маємо рівняння:

$$f(u)-f(v)=u^2-v^2.$$

Поклавши $v=0$, отримаємо $f(u)=u^2+f(0)$.

Позначивши тепер u через x, одержуємо $f(x)=x^2+a$, де $a=f(0)$.

Очевидно, що функція $f(x)=x^2+a$ задовольняє вихідне рівняння. У цьому неважко переконатися, виконавши перевірку:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy.$$

Відповідь. $f(x)=x^2+a$, де $a=\text{const}$.

6. (9) Знайдіть усі функції $f{:}R \to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y)=f(x)+y.$

Розв'язання

Поклавши $x=0$, дістанемо $f(y)=y+f(0)$.

Позначимо $a=f(0)$ та y через x, отримаємо $f(x)=x+a$.

Виконаємо перевірку:

$x+y+a=x+a+y$, звідки одержуємо, що a — будь-яка константа.

Відповідь. $f(x)=x+a$, де $a=\text{const}$.

7. (11) Знайдіть усі функції $f{:}R \to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y)=f(x)\cdot e^y.$

Розв'язання

Підстановкою $x=0$ дане рівняння зводиться до рівняння $f(y)=ae^y$, де $a=f(0)$.

Позначимо y через x, отримаємо функцію $f(x)=ae^x$. Виконавши перевірку, дістанемо: a — будь-яка константа. Отже, $f(x)=ae^x$, де $a=\text{const}$ — шукана функція.

Відповідь. $f(x)=ae^x$, де $a=\text{const}$.

8. (9–10) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y)+f(x-y)=2x^2+2y^2$.

Розв'язання

Застосувавши підстановку $y=0$, дістанемо: $f(x)+f(x)=2x^2$, $f(x)=x^2$.

Перевірка показує, що функція $f(x)=x^2$ — шукана.

Відповідь. $f(x)=x^2$.

9. (10–11) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)-2f(x)(1+y)=2xy\left(3y-x^2\right).$$

Розв'язання

Виконаємо послідовно підстановки:

1) $x=t, y=t$

$$f(2t)+f(0)-2f(t)(1+t)=2t^3(3-t),$$

2) $x=t, y=-t$

$$f(0)+f(2t)-2f(t)(1-t)=2t^3(3+t).$$

Маємо систему рівнянь відносно $f(t)$ та $f(2t)$:

$$\begin{cases} f(2t)-2f(t)(1+t)=6t^3-2t^4-f(0), \\ f(2t)-2f(t)(1-t)=6t^3+2t^4-f(0). \end{cases}$$

З системи дістанемо, що $f(t)=t^3$.

Позначивши тут через x, отримаємо шукану функцію $f(x)=x^3$.

Перевірка показує, що функція $f(x)=x^3$ задовольняє вихідне рівняння.

Відповідь. $f(x)=x^3$.

10. (10–11) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$.

Розв'язання

Виконаємо підстановки:

1) $x=0$, $y=t$, дістанемо

$$f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t;$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+t;\ y=\frac{\pi}{2}$, дістанемо

$$f(\pi+t)+f(t)=2f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\frac{\pi}{2};$$

3) $x=\frac{\pi}{2};\ y=\frac{\pi}{2}+t$, дістанемо

$$f(\pi+t)+f(-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t.$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t, \\ f(\pi+t)+f(t)=0, \\ f(\pi+t)+f(-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t. \end{cases}$$

Спочатку виключимо з системи $f(\pi+t)$, потім $f(-t)$.

Отримаємо:

$$f(t)=a\cos t+b\sin t, \qquad (*)$$

де $a=f(0), b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Позначимо в (*) t через x, одержимо: $f(x)=a\cos x+b\sin x$.

Виконаємо перевірку:

$$a\cos(x+y)+b\sin(x+y)+a\cos(x-y)+b\sin(x-y)=$$
$$=(2a\cos x+2b\sin x)\cos y.$$

Ця рівність справджується для будь-яких дійсних x та y та довільних фіксованих a та b.

Відповідь. $f(x)=a\cos x+b\sin x$, де $a=\text{const}$, $b=\text{const}$.

11. (11) Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які задовольняють рівняння

$$f(x)f(x+y)=\left(f(y)\cdot f(x-y)\right)^2\cdot e^{y+4}.$$

Розв'язання

Виконаємо послідовно підстановки:

1) $x=0, y=t$

$$f(0)f(t)=f^2(t)\cdot f^2(-t)\cdot e^{t+4};$$

2) $x=0, y=-t$

$$f(0)f(-t)=f^2(-t)\cdot f^2(t)\cdot e^{-t+4}.$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(0)f(t)=f^2(t)\cdot f^2(-t)\cdot e^{t+4}, \\ f(0)f(-t)=f^2(-t)\cdot f^2(t)\cdot e^{-t+4}, \end{cases} \qquad (*)$$

звідки маємо, що $f(t)\equiv 0$ або

$$\frac{f(t)}{f(-t)}=e^{2t} \Rightarrow f(-t)=f(t)\cdot e^{-2t}.$$

Отриманий вираз підставимо в рівняння (*) замість $f(-t)$.

Дістанемо $f(t)=a\cdot e^{t-\frac{4}{3}}$, де $a=\sqrt[3]{f(0)}$.

Виконаємо перевірку:

$$a^2\cdot e^{x-\frac{4}{3}}\cdot e^{x+y-\frac{4}{3}}=a^4\cdot e^{2y-\frac{8}{3}}\cdot e^{2x-2y-\frac{8}{3}}\cdot e^{y+4}$$

Звідси отримаємо, що $a=\pm e^{-\frac{2}{3}}$.

Отже, одержуємо, що функції $f(x)=e^{x-2}$ та $f(x)=-e^{x-2}$ шукані.

Відповідь. $f(x)\equiv 0, f(x)=e^{x-2}, f(x)=-e^{x-2}$.

12. (10–11) Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y$.

Розв'язання

Застосуємо підстановки:

1) $x=0, y=t$

$$f(t)+2f(-t)=3f(0)-t;$$

2) $x = t, y = 2t$

$$f(3t) + 2f(-t) = 3f(t) - 2t;$$

3) $x = t, y = -2t$

$$f(-t) + 2f(3t) = 3f(t) + 2t.$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t) + 2f(-t) = 3f(0) - t, \\ f(3t) + 2f(-t) = 3f(t) - 2t, \\ f(-t) + 2f(3t) = 3f(t) + 2t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) + 2f(-t) = 3f(0) - t, \\ 3f(-t) = 3f(t) - 6t. \end{cases}$$

Звідси $f(t) = t + a$, де $a = f(0)$.

Виконавши перевірку, переконаємося, що функція

$$f(x) = x + a,$$

де $a = f(0)$ справджує вихідне рівняння.

Відповідь. $f(x) = x + a$, де $a = \text{const}$.

13. (10–11) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння

$$f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Розв'язання

Виконаємо підстановки:

1) $x = 0, y = t$

$$f(t) - 2f(-t) + f(0) - 2f(t) = t - 2;$$

2) $x = t, y = 2t$

$$f(3t) - 2f(-t) + f(t) - 2f(2t) = 2t - 2;$$

3) $x = 2t, y = t$

$$f(3t) - 2f(t) + f(2t) - 2f(t) = t - 2;$$

4) $x = t, y = t$

$$f(2t) - 2f(0) + f(t) - 2f(t) = t - 2.$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -f(t)-2f(-t)+f(0)=t-2, \\ f(3t)-2f(-t)+f(t)-2f(2t)=2t-2, \\ f(3t)-4f(t)+f(2t)=t-2, \\ f(2t)-f(t)-2f(0)=t-2. \end{cases}$$

Звідси одержимо, що $f(t)=t+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}$.

Виконаємо перевірку:

$$x+y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}-2\left(x-y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}\right)+x+$$

$$+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}-2\left(y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}\right)=y-2.$$

Звідси одержимо, що $f(0)=1$.

Отже, шукана функція $f(x)=x+1$.

Відповідь. $f(x)=x+1$.

14. (11) Знайдіть усі функції $f: R_+ \to R$, які задовольняють рівняння $f(xy)+2f\left(\frac{x}{y}\right)=3f(x)-\ln y$. (Тут R_+ — множина всіх дійсних додатних чисел, R — множина всіх дійсних чисел).

Розв'язання

Застосуємо підстановки:

1) $x=1, y=t$, де $t>0$

$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=3f(1)-\ln t;$$

2) $x=t, y=t^2, t>0$

$$f(t^3)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=3f(t)-2\ln t;$$

3) $x=t,\ y=\frac{1}{t^2}, t>0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t^3)=3f(t)+2\ln t.$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t)+2f\left(\dfrac{1}{t}\right)=3f(1)-\ln t, \\ f\left(t^3\right)+2f\left(\dfrac{1}{t}\right)=3f(t)-2\ln t, \\ f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f\left(t^3\right)=3f(t)+2\ln t. \end{cases}$$

Із системи отримаємо, що $f(t)=\ln t+a$. Позначивши тут t через x, одержимо $f(x)=\ln x+a$, де $a=f(1)$.

Перевіркою переконаємося, що функція

$$f(x)=\ln x+a,$$

де $a=f(1)$, задовольняє вихідне рівняння.

Відповідь. $f(x)=\ln x+a$, де $a=const$.

15. (11) Знайдіть усі функції $f\colon R\to R$, які задовольняють рівняння

$$2f(x+2y)+f(x)=f(x+y)\cdot\left(2e^{y}+e^{-y}\right).$$

Розв'язання

Підстановкою $x+y=t$, $y=z$ дане рівняння зведемо до рівняння

$$2f(t+z)+f(t-z)=f(t)\left(2e^{z}+e^{-z}\right).$$

Отримане рівняння розв'яжемо, застосувавши підстановки:

1) $t=0, z=u$.

$$2f(u)+f(-u)=f(0)\left(2e^{u}+e^{-u}\right);$$

2) $t=u, z=2u$.

$$2f(3u)+f(-u)=f(u)\left(2e^{2u}+e^{-2u}\right);$$

3) $t=u, z=-2u$.

$$2f(-u)+f(3u)=f(u)\left(2e^{-2u}+e^{2u}\right).$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2f(u)+f(-u)=f(0)\left(2e^{u}+e^{-u}\right), \\ 2f(3u)+f(-u)=f(u)\left(2e^{2u}+e^{-2u}\right), \\ 2f(-u)+f(3u)=f(u)\left(2e^{2u}+e^{-2u}\right). \end{cases}$$

Із системи дістанемо, що $f(u)=f(0)\cdot e^{u}$. Позначивши тут u через x, одержимо $f(x)=ae^{x}$, де $a=f(0)$.

Перевірка. $2ae^{x+2y}+ae^{x}=ae^{x+y}\cdot\left(2e^{y}+e^{-y}\right)$, що справедливо для будь-яких дійсних x та y.

Відповідь. $f(x)=ae^{x}$, де $a=const$.

16. (10–11) Знайдіть усі функції f: $R\setminus\{-1;0;1\}\to R$, які задовольняють рівняння $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1.$

Вказівка. Врахуйте, що вирази x, $\frac{x-1}{x+1}$, які стоять під знаком невідомої функції f, є елементами групи $G=\left\{x,\frac{x-1}{x+1},-\frac{1}{x},\frac{x+1}{1-x}\right\}$ відносно операції «$\circ$» (композиції функцій) (див. стор. 5). Тому, замінивши послідовно x на $\frac{x-1}{x+1},-\frac{1}{x},\frac{x+1}{1-x}$, дістанемо систему відносно «невідомих» $f(x)$, $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ та $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. Виключаючи з неї послідовно $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, знаходимо: $f(x)=\frac{4x^{2}-x+1}{5x(x-1)}$. Не забудьте зробити перевірку.

Відповідь. $f(x)=\frac{4x^{2}-x+1}{5x(x-1)}$, де $x\in R\setminus\{-1;0;1\}$.

17. (11) Знайдіть усі функції $f\colon R\setminus\{0;a\}\to R$, які задовольняють рівняння

$$f(x)+f\left(\frac{a^{2}}{a-x}\right)=x,$$

де a — стала, відмінна від 0.

Розв'язання

Оскільки вирази x та $\frac{a^2}{a-x}$ є елементами групи $G=\left\{x; \frac{a^2}{a-x}; \frac{ax-a^2}{x}\right\}$ відносно операції «$\circ$», замінимо послідовно x на $\frac{a^2}{a-x}$, $\frac{ax-a^2}{x}$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)+f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)=\frac{a^2}{a-x}, \\ f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)+f(x)=\frac{ax-a^2}{x}, \\ f(x)+f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)=x. \end{cases}$$

Виключаючи із системи спочатку $f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)$, потім $f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)$, дістанемо $f(x)=\frac{x^3-a^2x+a^3}{2x(x-a)}$, де $x\in R\setminus\{0;a\}$, $a\neq 0$.

Перевірка.

$$\frac{x^3-a^2x+a^3}{2x(x-a)}+\frac{\left(\frac{a^2}{a-x}\right)^3-a^2\left(\frac{a^2}{a-x}\right)+a^3}{2\left(\frac{a^2}{a-x}\right)\left(\frac{a^2}{a-x}-a\right)}=x.$$

Після перетворень отримаємо, що функція $f(x)$ задовольняє вихідне рівняння.

Відповідь. $f(x)=\frac{x^3-a^2x+a^3}{2x(x-a)}$, де $x\in R\setminus\{0;a\}$, $a\neq 0$.

18. (10–11) Знайдіть усі функції $f\colon R\to R$, які задовольняють рівняння

$$af(x-1)+bf(1-x)=cx, \qquad (1)$$

де a, b, с — задані дійсні числа і $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Розв'язання

Застосуємо підстановки $x \to x+1$; $x \to 1-x$.

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} af(x)+bf(-x)=c(x+1), \\ af(-x)+bf(x)=c(1-x). \end{cases}$$

Звідки одержуємо, що $(a^2-b^2)f(x)=c(a+b)x+c(a-b)$.

Отже, якщо $a^2 \neq b^2$, то $f(x)=\dfrac{c}{a-b}x+\dfrac{c}{a+b}$; якщо $a^2=b^2$ та $c \neq 0$, то функцій, які задовольняють рівняння (1) не існує.

Якщо $a=b\neq 0$, $c=0$, то рівняння (1) має вигляд $af(x-1)=-af(1-x)$, тобто, шукана функція — будь-яка непарна функція.

Якщо $a=-b\neq 0$, $c=0$, то дістанемо, $af(x-1)=af(1-x)$, тобто $f(x)$ — будь-яка парна функція.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{c}{a-b}x+\dfrac{c}{a+b}$, якщо $a^2 \neq b^2$; $f(x)$ не існує, якщо $a^2=b^2$, $c\neq 0$; $f(x)$ — будь-яка непарна функція, якщо $a=b$, $c=0$; $f(x)$ — будь-яка парна функція, якщо $a=-b, c=0$.

19. (10–11) Знайдіть усі функції $f: R \setminus \{0;1\} \to R$, які задовольняють рівняння $f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)+f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=x$.

Вказівка. Розгляньте елементи групи $G=\{g_1, g_2, g_3\}$, де $g_1=x$, $g_2=\dfrac{1}{1-x}$, $g_3=\dfrac{x-1}{x}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$, взяті по два, а саме $g_1\cdot g_2=x\cdot\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x}{1-x}$, $g_2\cdot g_3=\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}$. Зробивши послідовно підстановки $x\to\dfrac{1}{1-x}$ та $x\to\dfrac{x-1}{x}$, дістанемо систему рівнянь: $\begin{cases} f(g_1\cdot g_2)+f(g_2\cdot g_3)=x, \\ f(g_2\cdot g_3)+f(g_3\cdot g_1)=\dfrac{1}{1-x}, \\ f(g_3\cdot g_1)+f(g_1\cdot g_2)=\dfrac{x-1}{x}. \end{cases}$

Звідси

$$f(g_1 \cdot g_2) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x+2x^2-x^3}{2x(1-x)}.$$

Зробивши підстановку $x \to -\frac{1}{x}$, дістанемо

$$f(x) = -\frac{x^3+x^2+2x+1}{2x(x+1)}.$$

Не забудьте про перевірку.

Відповідь. $f(x) = -\dfrac{x^3+x^2+2x+1}{2x(x+1)}$, де $x \in R \setminus \{0;1\}$.

20. (10). Знайдіть усі такі пари числових функцій f і g, визначених на множині всіх дійсних чисел, що для будь-яких дійсних чисел x і y виконується рівність

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y) = x^3+\sqrt[3]{y}.$$

Розв'язання

При $x = y$ маємо, що

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right).$$

Звідси одержуємо, що при всіх $x \in \mathrm{R}$ і $y \in \mathrm{R}$

$$g(x)+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right) = g(y)+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{y}-y^3\right).$$

Залишається перевірити, що функції

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right),\ g(x) = a+\frac{1}{2}\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)$$

($a \in \mathrm{R}$ — довільне) задовольняють умову задачі.

Відповідь. $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)$, $g(x) = a+\frac{1}{2}\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)$.

21. (11). Знайдіть усі такі числові функції f, визначені на множині всіх дійсних чисел, що для будь-яких дійсних чисел x і y виконується рівність

$$f(xf(x)+f(y)) = x^2+y.$$

Розв'язання

Якщо покласти $x=0$, то дістанемо, що $f(f(y))=y$ при всіх $y\in\mathrm{R}$. Далі, із вихідної тотожності одержуємо, що

$$f\big(f(x)f(f(x))+f(y)\big)\equiv\big(f(x)\big)^2+y,$$

а тому

$$f\big(f(x)x+f(y)\big)\equiv\big(f(x)\big)^2+y.$$

Отже, $\big(f(x)\big)^2\equiv x^2$, тобто, при всіх $x\in\mathrm{R}$ $|f(x)|=|x|$. Припустимо, що існують такі $t\neq 0, s\neq 0$, що $f(s)=s$, $f(t)=-t$. Тоді

$$f\left(-t^2+s\right)=t^2+s,$$

а тому й $\left|t^2-s\right|=\left|t^2+s\right|$, що для $t\neq 0, s\neq 0$ є неможливим. Таким чином, $f(x)=x$ при всіх $x\in\mathrm{R}$ або ж $f(x)=-x$ при всіх $x\in\mathrm{R}$. Залишається перевірити, що обидві ці функції задовольняють умову задачі.

Відповідь. $f(x)=x$, $f(x)=-x$.

22. (10). Знайдіть усі такі функції $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$, що одночасно задовольняють наступні три умови:

1) $f(1)=1$;

2) $f(n+2)+\left(n^2+4n+3\right)f(n)=(2n+5)f(n+1)$ для всіх $n\in\mathrm{N}$;

3) $f(m)$ ділиться без остачі на $f(n)$ при будь-яких натуральних $m>n$.

Вказівка. Нехай $f(2)=k, k\in\mathrm{N}$. Тоді $f(3)=7k-8$. Оскільки $f(3)\,\vdots\, f(2)$, то $8\,\vdots\, k$. Звідки $k\in\{1;2;4;8\}$. Якщо $k=1$, то $f(3)=-1\notin\mathrm{N}$. Якщо $k=2$, то доводимо, що $f(n)=n!$, $n\in\mathrm{N}$. Якщо $k=4$, то доводимо, що $f(n)=\dfrac{(n+2)!}{6}$, $n\in\mathrm{N}$. Обидві ці функції, що нескладно перевірити, дійсно задовольняють умову задачі. Якщо $k=8$, то $f(3)=48$, $f(4)=312$. Але ж 312 не ділиться на 48.

Відповідь. $f(n)=n!$, $n\in\mathrm{N}$; $f(n)=\dfrac{(n+2)!}{6}$, $n\in\mathrm{N}$.

23. (11). Чи існує визначена на множині всіх дійсних чисел числова функція f така, що при всіх $x, y\in\mathrm{R}$ справджується рівність

$$f\left(x^2y+f\left(x+y^2\right)\right)=x^3+y^3+f(xy)?$$

Вказівка. Нехай $y=0$. Тоді $f(f(x))=x^3+f(0)$ при всіх $x\in R$. Звідси випливає, що функція f набуває кожного дійсного значення тільки один раз. Дійсно, нехай $x\neq y$ і при цьому $f(x)=f(y)$, тоді

$$f(f(x))=f(f(y))\Leftrightarrow x^3+f(0)=y^3+f(0)\Leftrightarrow x^3+y^3\Leftrightarrow x=y.$$

Отримали протиріччя.

Із вихідного співвідношення дістаємо, що

$$f\left(x^2y+f\left(x+y^2\right)\right)=f\left(y^2x+f\left(y+x^2\right)\right)$$

при всіх $x,\ y\in$ R. Із доведеного вище випливає, що

$$x^2y+f\left(x+y^2\right)=y^2x+f\left(y+x^2\right)$$

при всіх $x,\ y\in$ R. Беремо $y=0$ і одержуємо, що $f(x)=f\left(x^2\right)$ при всіх $x\in$ R. Але це суперечить тому, що функція f набуває кожного дійсного значення тільки один раз. Отже, таких функцій не існує.

Відповідь. Таких функцій не існує.

24. **(11)** Знайдіть усі функції $f\colon R\setminus[0;+\infty)\to R$, які задовольняють рівняння $\ln\left(1-e^x\right)\cdot f(x)-2x\cdot f\left(\ln\left(1-e^x\right)\right)=1$.

Розв'язання

Зробивши заміну $x\to\ln\left(1-e^x\right)$, дістанемо рівняння

$$x\cdot f\left(\ln\left(1-e^x\right)\right)-2\ln\left(1-e^x\right)f(x)=1.$$

Розв'яжемо систему рівнянь відносно $f(x)$ та $f\left(\ln\left(1-e^x\right)\right)$:

$$\begin{cases}\ln\left(1-e^x\right)\cdot f(x)-2xf\left(\ln\left(1-e^x\right)\right)=1,\\ x\cdot f\left(\ln\left(1-e^x\right)\right)-2\ln\left(1-e^x\right)\cdot f(x)=1.\end{cases}$$

Звідки дістанемо, що $f(x)=-\dfrac{1}{\ln\left(1-e^x\right)}$, де $x\in(-\infty;\ 0)$.

Не забудьте зробити перевірку.

Відповідь. $f(x)=-\dfrac{1}{\ln\left(1-e^{x}\right)}$, де $x\in(-\infty;\,0)$.

25. (10–11) Знайдіть усі функції $f{:}R\setminus\{0;1\}\to R$, які задовольняють рівняння $f(x)+f\left(\sqrt[n]{\dfrac{x^{n}-1}{x^{n}}}\right)=\sqrt[n]{1+x^{n}}$, де n — непарне число, $n>1$.

Розв'язання

Зробимо послідовно такі заміни у даному рівнянні $x\to\sqrt[n]{\dfrac{x^{n}-1}{x^{n}}}$, $x\to\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-x^{n}}}$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(x)+f\left(\sqrt[n]{\dfrac{x^{n}-1}{x^{n}}}\right)=\sqrt[n]{1+x^{n}}, \\ f\left(\sqrt[n]{\dfrac{x^{n}-1}{x^{n}}}\right)+f\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-x^{n}}}\right)=\sqrt[n]{\dfrac{2x^{n}-1}{x^{n}}}, \\ f\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-x^{n}}}\right)+f(x)=\sqrt[n]{\dfrac{2-x^{n}}{1-x^{n}}}. \end{cases}$$

Звідси одержимо, що $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1+x^{n}}+\sqrt[n]{\dfrac{2-x^{n}}{1-x^{n}}}-\sqrt[n]{\dfrac{2x^{n}-1}{x^{n}}}\right)$.

Перевіркою переконуємося, що одержана функція задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1+x^{n}}+\sqrt[n]{\dfrac{2-x^{n}}{1-x^{n}}}-\sqrt[n]{\dfrac{2x^{n}-1}{x^{n}}}\right)$.

26. (9–11) Знайдіть усі функції $f{:}R\to R$, які задовольняють рівняння $2f(x)+f(1-x)=3-xf(1)$.

Вказівка. Зробіть послідовно такі заміни: $x\to1-x$, $x\to1$, $x\to0$ і розв'яжіть одержану систему рівнянь сумісно з даним рівнянням. Матимете: $f(1)=\dfrac{3}{5}$ та $f(x)=\dfrac{6-3x}{5}$. Не забудьте про перевірку.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{6-3x}{5}.$

27. (10–11) Знайдіть усі неперервні функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння $3f(2x+1)=f(x)+5x$.

Розв'язання

Зробивши заміну $x \to \dfrac{x-1}{2}$, дістанемо:

$$f(x)=\frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2}. \qquad (*)$$

Використовуючи цю ж заміну, із (*) послідовно дістанемо:

$$f\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{3}f\left(\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}\right)+\frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2},$$

тобто $f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}f\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{x-3}{4}\right).$

Помноживши обидві частини останнього рівняння на $\dfrac{1}{3}$, одержимо:

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{9}f\left(\frac{x-3}{4}\right)+\frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4},$$

$$\frac{1}{9}f\left(\frac{x-3}{4}\right)=\frac{1}{27}f\left(\frac{x-7}{8}\right)+\frac{5}{27}\cdot\frac{x-7}{8},$$

....

Методом математичної індукції доводимо, що

$$\frac{1}{3^n}f\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right)=\frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)+\frac{5}{3^{n+1}}\cdot\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}.$$

Додавши почленно всі ці рівності, починаючи з (*), дістанемо:

$$f(x)=\frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)+\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4}+\ldots+\frac{5}{3^{n+1}}\cdot\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}. \qquad (**)$$

Враховуючи неперервність функції f, при будь-якому фіксованому x, матимемо

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+1}{2^{n+1}}-1\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+1}{2^{n+1}}-1\right)\right)=f(-1).$$

З умови легко знайти, що $f(-1)=-\frac{5}{2}$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)=0.$

Ліва частина (**) не залежить від n, тому існує її границя при $n\to\infty$. Перейшовши до границі в рівності (**) при $n\to\infty$, маємо:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4}+\ldots+\frac{5}{3^{n+1}}+\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{+1}}\right).$$

Права частина останніх трьох рівностей є сумою трьох нескінченно спадних геометричних прогресій:

$$\frac{5}{6}x+\frac{5}{36}x+\ldots+\frac{5}{6^{n+1}}x+\ldots=x,$$

$$-\frac{5}{3}-\frac{5}{9}-\ldots-\frac{5}{3^{n+1}}-\ldots=-\frac{5}{2},$$

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{5}{6^{n+1}}+\ldots=1.$$

Тому $f(x)=x-\frac{5}{2}+1$, тобто $f(x)=x-\frac{3}{2}$.

Перевірка це підтверджує.

Відповідь. $f(x)=x-\frac{3}{2}$.

28. (10–11) Знайдіть усі неперервні функції $f:R\to R$, що задовольняють рівняння $f(x^2)+f(x)=x^2+x$.

Розв'язання

Позначивши $g(x)=f(x)-x$, матимемо:

$$g(x^2)=-g(x). \qquad (*)$$

Нехай $x > 0$. Виконаємо n разів заміну $x \to \sqrt{x}$. Тоді матимемо:

$$g(x) = -g\left(\sqrt{x}\right),$$

$$-g\left(\sqrt{x}\right) = g\left(\sqrt[4]{x}\right),$$

....

$$(-1)^{n-1} \cdot g\left(\sqrt[2^{n-1}]{x}\right) = (-1) \cdot g\left(\sqrt[2^n]{x}\right).$$

Додавши ці рівняння, матимемо: $g(x) = (-1)^n \cdot g\left(\sqrt[2^n]{x}\right)$.

Зробивши тут заміну $x \to \sqrt[2^n]{x}$, дістанемо: $g\left(\sqrt[2^n]{x}\right) = (-1) \cdot g\left(\sqrt[4^n]{x}\right)$.

З останніх двох рівнянь дістанемо: $g(x) = g\left(\sqrt[4^n]{x}\right)$.

Але, враховуючи, що $x > 0$ та неперервність функцій $y = \ln x$ і $y = e^x$, матимемо: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{x} = e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{x}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln \sqrt[4^n]{x}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln x}{4^n}\right)} = e^0 = 1$.

Врахувавши неперервність $g(x)$, граничним переходом дістанемо:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(\sqrt[4^n]{x}\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{x}\right) = g(1).$$

Із (*) знаходимо $g(1) = 0$, $g(0) = 0$, тобто при $x \geq 0$ $g(x) = 0$.
Оскільки $g(x)$ — парна, то $g(x) = 0$ при всіх дійсних x. Отже,
$f(x) = x$ — єдина функція, яка задовольняє умову задачі.
Відповідь. $f(x) = x$.

29. (11) а) Знайдіть усі диференційовані функції $f: (0; +\infty) \to R$, які задовольняють рівняння $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

б) Знайдіть усі диференційовані функції $f: (0; +\infty) \to R$, які задовольняють рівняння $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Розв'язання

а) Очевидно, що $f(x) \equiv 0$ — тривіальний розв'язок. Нехай $f(x)$ задовольняє рівняння і $f(a) \neq 0$ при деякому дійсному a, тоді

$$f(x) \cdot f\left(\frac{a}{x}\right) = f(a) \neq 0.$$

Отже, $f(x) \neq 0$ при всіх $x > 0$.

Крім того, $f(x)>0$ при всіх $x>0$, бо $f(x)=f(\sqrt{x})f(\sqrt{x})>0$. За умовою задачі, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ існує при всіх $x>0$. Тому:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}=$$

$$=\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-1}{\frac{h}{x}}=\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}.$$

Оскільки існує $f'(x)$, то існує $\lim\limits_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}=f'(1)=\alpha$, $\alpha=\text{const}$ (не залежить від x). Тому $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{x}$. Помітивши, що $\left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, одержуємо: $\ln f(x)=\alpha\cdot\ln x+\beta$, де $\beta=const$. При $x=1$ знаходимо $\beta=0$. Тому, остаточно дістанемо $f(x)=x^{\alpha}$.

Відповідь. $f(x)\equiv 0$ або $f(x)=x^{\alpha}$, де $\alpha=const$.

б) Скористайтесь методом розв'язування задачі 28.

Відповідь. $f(x)\equiv 0$ або $f(x)=\log_{\alpha}x$, де $\alpha=const$.

30. (11) Знайдіть всі диференційовані функції $f: R\to R$, які задовольняють рівняння $f(f(x))=f(x)+x$.

Розв'язання

Розглянемо такі дійсні числа x та y, що $f(x)=f(y)$. Тоді $f(f(x))=f(f(y))$. З умови $f(f(x))=f(x)+x$ випливає, що $x=y$.

Якщо $x=0$, то $f(f(0))=f(0)$. Оскільки із рівності $f(x)=f(y)$ випливає, що $x=y$, то $f(0)=0$.

Функція $f(x)$ — диференційована, отже, неперервна, тоді з того, що $f(x)=f(y)$ випливає рівність $x=y$, одержуємо, що $f(x)$ — монотонна.

1) Нехай $f(x)$ — зростаюча, тоді при $x>0$ маємо: $f(x)>0$.

Розглянемо послідовність $b_n = \underbrace{f(f(f...(f(a)...)))}_{n \text{ разів}}$, де $a \in R_+$ — фіксоване число.

Отже, $b_1 = f(a)$, $b_2 = f(f(a))$, $b_3 = f(f(f(a)))$ і т. д. З умови випливає, що

$$b_2 = b_1 + a \qquad (*)$$

та $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ для всіх $n \in N$.

Послідовність (b_n) — послідовність Фібоначчі, тому

$$b_n = c_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

де c_1, c_2 — *const*, які потрібно визначити.

Оскільки $f(x)$ монотонно зростає, то неважко показати, що $c_1 = 0$ (розгляньте достатньо великі n, парні та непарні).

Отже, $b_n = c_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ для всіх $n \in N$.

Оскільки $b_2 = b_1 + a$, тобто $c_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a$, то $c_2 = a$.

Оскільки $f(a) = b_1 = c_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, то одержуємо

$$f(x) = x \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

2) У випадку, коли $f(x)$ — спадна, ми одержимо, що

$$c_2 = 0 \text{ та } f(x) = x \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Відповідь. $f(x) = \lambda x$, де $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

31. (11) Знайдіть усі неперервні функції $f : R \to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y)$.

Розв'язання

Застосуємо метод Коші. Замінюючи y послідовно на x, $2x$, $3x$, ..., дістанемо:

$$f(2x)=2f(x)+f^2(x)=(f(x)+1)^2-1,$$

$$f(3x)=3f(x)+3f^2(x)+f^3(x)=(f(x)+1)^3-1,$$

$$f(4x)=(f(x)+1)^4-1 \text{ і т. д.}$$

Методом математичної індукції одержуємо:

$$f(nx)=(f(x)+1)^n-1 \qquad (*)$$

для всіх $n\in N$, $x\in R$.

Далі, поклавши в (*) $x=1$ і позначивши $f(1)=a$, дістанемо

$$f(n)=(a+1)^n-1.$$

Замінивши в (*) x на $\frac{m}{n}$, де $m\in N, n\in N$, одержуємо:

$$f(m)=\left(f\left(\frac{m}{n}\right)+1\right)^n-1.$$

Крім того, $f(m)=(a+1)^m-1$. Звідси, враховуючи, що

$$1+f(x)=\left(1+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\geq 0,$$

маємо

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=(a+1)^{\frac{m}{n}}-1.$$

Отже, для додатних раціональних чисел x розв'язком даного рівняння буде $f(x)=(a+1)^x-1$.

Нехай тепер x — довільне додатне ірраціональне число. Відомо, що існує послідовність додатних раціональних чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x$.

Отже, враховуючи неперервність функції f, матимемо, що

$$f(x)=\lim_{r_n\to x} f(r_n)=\lim_{n\to\infty}\left((1+a)^{r_n}-1\right)=(1+a)^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n}-1=(1+a)^x-1$$

для всіх додатних ірраціональних x.

Отже, $f(x)=(1+a)^x-1,\ x>0,\ x\in R$.

Поклавши в умову $x=0$, дістанемо $f(y)=f(0)+f(y)-f(0)f(y)$, тобто $f(y)\equiv -1$ або $f(0)=0$.

При $y=-x,\ x>0$, з умови знаходимо

$$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)+f(x)\cdot f(-x)=$$

$$=(1+a)^x-1+f(-x)+\left((1+a)^x-1\right)\cdot f(-x)=(1+a)^x-1+f(-x)\cdot(1+a)^x.$$

Звідси

$$f(-x)=\frac{1-(1+a)^x}{(1+a)^x}=(1+a)^{-x}-1,\ x>0,$$

тобто $f(y)=(1+a)^y-1$, при $y<0$.

Перевіркою впевнюємося, що обидві функції є розв'язками даного рівняння.

Відповідь. $f(x)=-1$ або $f(x)=(1+a)^x-1$, де $a=\text{const}$.

32. (11) Знайдіть усі неперервні функції $f:(0;+\infty)\to R$, які задовольняють рівняння $f(x+y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$.

Розв'язання

Скористаємося методом Коші. Застосуємо послідовно заміну y на x, $2x, 3x,\ldots$ дістанемо:

$$f(2x)=\frac{f(x)}{2},\quad f(3x)=\frac{f(x)\cdot f(2x)}{f(x)+f(2x)}=\frac{f^2(x)}{3f(x)}=\frac{f(x)}{3},$$

$$f(4x)=\frac{f(x)\cdot f(3x)}{f(x)+f(3x)}=\frac{f^2(x)}{4f(x)}=\frac{f(x)}{4}\ \text{і т. д.}$$

Отже, одержуємо:

$$f(nx)=\frac{f(x)}{n},\qquad (*)$$

для всіх $n \in N$, $x \in (0; +\infty)$. Рівність (*) неважко довести методом математичної індукції.

При $x=1$, рівність (*) має вигляд: $f(n)=\frac{f(1)}{n}$, позначимо $f(1)=a$.

Замінивши в (*) x на $\frac{m}{n}$, де $m \in N$, $n \in N$, одержуємо: $f(m)=\frac{f\left(\frac{m}{n}\right)}{n}$, крім того $f(m)=\frac{a}{m}$. Тоді дістанемо: $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{a}{\frac{m}{n}}$. Отже, для додатних раціональних чисел x розв'язком даного рівняння є $f(x)=\frac{a}{x}$.

Нехай тепер x — довільне додатне ірраціональне число (*див. приклад 31*).

Враховуючи неперервність функції $f(x)$, дістанемо:

$$f(x)=\lim_{r_n \to x} f(r_n)=\lim_{r_n \to x}\frac{a}{r_n}=\frac{a}{\lim\limits_{r_n \to x} r_n}=\frac{a}{x}$$

для всіх додатних ірраціональних x.

Отже, $f(x)=\frac{a}{x}$, $x>0$, $a=f(1)$.

Перевіркою впевнюємося, що $f(x)=\frac{a}{x}$ — шукана функція.

Відповідь. $f(x)=\frac{a}{x}$, де $a=\text{const}$.

33. (11) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які неперервні в точці $x=0$ і задовольняють рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$.

Вказівка. Застосуйте метод Коші.

Відповідь. $f(x)=ax+\frac{x(x+1)}{2}$, $a=\text{const}$.

34. (11) Знайдіть усі функції $f: N \to R$, які задовольняють такі умови:

1) $f(1)=3$,

2) $f(2)=7$,

3) $f(n)=3f(n-1)-2f(n-2)$ при всіх $n\in N, n>2$.

Розв'язання

Обчислимо

$$f(3)=3f(2)-2f(1)=21-6=15=16-1=2^4-1,$$

$$f(4)=3f(3)-2f(2)=45-14=31=32-1=2^5-1,$$

$$f(5)=3f(4)-2f(3)=63=64-1=2^6-1 \text{ і т. д.}$$

Припустимо, що $f(n)=2^{n+1}-1$.

Методом математичної індукції доведемо, що шукана функція має вигляд $f(n)=2^{n+1}-1$, де $n\geq 3, n\in N$.

База індукції: $f(3)=15=2^4-1$.

Крок індукції. Припустимо, що для всіх $n\leq k$ виконується рівність $f(n)=2^{n+1}-1$.

Доведемо, що тоді виконується така рівність: $f(k+1)=2^{k+2}-1$.

За умовою задачі та кроком індукції, дістанемо:

$$f(k+1)=3f(k)-2f(k-1)=3\left(2^{k+2}-1\right)-2\left(2^k-1\right)=$$

$$=3\cdot 2^{k+2}-3-2\cdot 2^k+2=2^{k+2}-1,$$

що і потрібно довести.

Відповідь. $f(n)=2^{n+1}-1$, де $n\in N$.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Знайти всі функції $f: Z\to Z$ такі, що $f(0)=1$ і $f(f(n))=f(f(n+2)+2)=n$ для всіх $n\in Z$.

   Відповідь. $f(n)=1-n$, *для всіх* $n\in Z$.

2. Знайти всі функції $f: N\to N$ такі, що $f\left(m^2+f(n)\right)=\left(f(m)\right)^2+n$ для всіх m, $n\in N$.

   Відповідь. $f(n)=n$, для всіх $n\in Z$.

3. Знайти всі функції $f: Z\to Z$ такі, що $f(m+n)+f(mn-1)=f(m)f(n)+2$ для всіх m, $n\in Z$.

   Відповідь. $f(n)=n^2+1$, *для всіх* $n\in Z$.

4. Знайти всі функції $f:\mathrm{Z}\to\mathrm{Z}$ такі, що $f(m+n)+f(mn-1)=f(m)f(n)$ для всіх $m,\ n\in\mathrm{Z}$.
Відповідь. $f(4m)=1,\ f(4m+2)=-1,\ f(2m+1)=0$, для всіх $m\in\mathrm{Z}$;
$f(3m)=1,\ f(3m+1)=-1,\ f(3m+2)=0$, для всіх $m\in\mathrm{Z}$;
$f(m)=m+1$, для всіх $m\in\mathrm{Z}$.

5. Знайти всі функції $f:\mathrm{Z}\to\mathrm{Z}$ такі, що $f(m+n)+f(mn-1)=f(m)f(n)+1$ для всіх $m,\ n\in\mathrm{Z}$.
Відповідь. $f(2m)=1,\ f(2m+1)=0$, для всіх $m\in\mathrm{Z}$;
$f(m)=m+1$, для всіх $m\in\mathrm{Z}$;
$f(m)=1$, для всіх $m\in\mathrm{Z}$.

6. Чи існує така функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, що для всіх дійсних $x\,f(1+f(x))=1-x$ і $f(f(x))=x$?
Відповідь. Ні, не існує.

7. Знайти всі функції $f:R\setminus\{0,1\}\to R$ такі, що $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ для всіх $x\in\mathrm{R}\setminus\{0,1\}$.
Відповідь. $f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$, для всіх $x\in\mathrm{R}\setminus\{0;1\}$.

8. Знайти всі функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ такі, що $f(f(x)+yz)=x+f(y)f(z)$ для всіх дійсних $x,\ y,\ z$.
Відповідь. $f(x)=x$, для всіх $x\in\mathrm{R}$.

9. Знайти всі функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ такі, що $f(y+zf(x))=f(y)+xf(z)$ для всіх дійсних $x,\ y,\ z$.
Відповідь. $f(x)=x$, для всіх $x\in\mathrm{R}$.

10. Знайти всі функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ такі, що $f(xf(z)+f(y))=zf(x)+y$ для всіх дійсних $x,\ y,\ z$.
Відповідь. $f(x)=x$, *для всіх* $x\in\mathrm{R}$.

11. Знайти всі функції $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ такі, що $f(f(x))=12x-f(x)$ для всіх невід'ємних дійсних чисел x.
Відповідь. $f(x)=3x$, *для всіх* $x\in[0;+\infty)$.

12. Знайти всі функції $f:\mathrm{R}\to[0;+\infty)$ такі, що

$$f(x^2+y^2)=f(x^2-y^2)+f(2xy)$$

для всіх $x,\ y \in \mathrm{R}$.

Відповідь. $f(x) = cx^2$, для всіх $x \in \mathrm{R}$, $c > 0$, $c = \mathrm{const}$.

13. Знайти всі функції $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ такі, що $xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y)$ для всіх $x,\ y \in \mathrm{R}$.

Відповідь. $f(x) = cx + d$, для всіх $x \in \mathrm{R}$, $c = \mathrm{const}$, $d = \mathrm{const}$.

14. Знайти всі функції $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ такі, що

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy)$$

для всіх $x,\ y \in \mathrm{R}$.

Відповідь. $f(x) \equiv 0$; $f(x) \equiv 1$; $f(x) \equiv -1$.

15. Знайти всі функції $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ такі, що

$$f\left(\left(f(x)\right)^2 + y\right) = x^2 + f(y)$$

для всіх $x,\ y \in \mathrm{R}$.

Відповідь. $f(x) = x$, для всіх $x \in \mathrm{R}$.

16. Нехай $n \geq 2$ – задане натуральне число. Знайти всі функції $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ такі, що $f\left(x + y^n\right) = x + \left(f(y)\right)^n$

для всіх $x,\ y \in \mathrm{R}$.

Відповідь. $f(x) = x$, для всіх $x \in \mathrm{R}$.

17. Знайти всі функції $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ такі, що $f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y)$ для всіх $x,\ y \in \mathrm{R}$.

Відповідь. $f(x) \equiv 0$.

18. Знайти всі функції $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ такі, що

$$f\left(f(x+y)\right) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

для всіх $x,\ y \in \mathrm{R}$.

Відповідь. $f(x) = x$, для всіх $x \in \mathrm{R}$.

19. Знайти всі функції $f\colon \mathrm{R} \setminus \{0\} \to \mathrm{R}$ такі, що $\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$

для всіх дійсних $x \neq 0$.

Відповідь. $f(x) = \dfrac{1 + x^3}{2x}$, для всіх дійсних $x \neq 0$.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА МІЖНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАДАХ ШКОЛЯРІВ

1. (19-та ММО, 1977). Нехай a, b, A, B – дані дійсні числа. Розглянемо функцію $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$. Довести, що якщо $f(x) \geq 0$ для будь-якого дійсного x, то $a^2 + b^2 \leq 2$, $A^2 + B^2 \leq 1$.

Розв'язання

Спочатку перетворимо функцію $f(x)$:

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - x_1) - \sqrt{A^2 + B^2}\cos 2(x - x_2).$$

Потім розглянемо значення функції у точках x_2 і $x_2 + \pi$. Сума першого і третього доданків у кожній з цих точок дорівнює $1 - \sqrt{A^2 + B^2}$, а другий доданок або рівний нулю, або приймає в цих точках значення, яке має різні знаки. Звідси в силу невід'ємності функції $f(x)$ випливає, що $\sqrt{A^2 + B^2} \leq 1$.

Розглянемо тепер значення функції $f(x)$ у точках $x_1 - \frac{\pi}{4}$ і $x_1 + \frac{\pi}{4}$. Перші два доданки дають в обох цих точках значення $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, а другий доданок або рівний нулю, або приймає значення, яке має різні знаки. В силу невід'ємності функції $f(x)$ отримуємо, що $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$; звідси випливає, $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{2}$. Зазначимо, що вказані обмеження є необхідними, але не є достатніми умовами.

2. (19-та ММО, 1977). Нехай $f(n)$ – функція, визначена на множині натуральних чисел і приймає значення на цій же множині. Довести, що якщо для кожного n виконується нерівність $f(n+1) > f(f(n))$, то для кожного n має місце рівність $f(n) = n$.

Розв'язання

Ця задача є цікавою і важкою вправою на використання математичної індукції. Один із шляхів доведення дійсно дуже красивого факту, який знаходиться в умові задачі є такий: спочатку доведемо наявність деякої «монотонності» функції, а потім, використовуючи це, доведемо потрібний факт.

Вказана «монотонність» формулюється наступним чином: для будь-якого натурального числа k і всіх натуральних чисел $n \ge k$ правильна нерівність $f(n) \ge k$. Доведення цього твердження здійснюється за індукцією. Для $k = 1$ твердження, очевидно, правильне, оскільки функція $f(n)$ приймає лише натуральні значення. Нехай твердження правильне для числа k. Розглянемо число $n \ge k+1$; тоді $n-1 \ge k$ і на основі припущення індукції $f(n-1) \ge k$. Оскільки за умовою задачі $f(n) > f(f(n-1))$, то $f(n) > k$ або $f(n) \ge k+1$. Таким чином, попереднє твердження нами доведено. З нього, як окремий випадок, випливає, що для всіх натуральних k має місце нерівність $f(k) \ge k$.

Перейдемо до доведення основного твердження. Ми довели, що для всіх натуральних чисел k виконується нерівність $f(k) \ge k$. Припустимо, що існує натуральне число m, для якого $f(m) > m$. Позначимо через A множину чисел $f(n)$, де $n > m$, а через $l = f(p)$ найменший елемент множини (доведення існування найменшого елемента в підмножині натуральних чисел труднощів не викликають). Покажемо, що $f(p-1) > m$. Дійсно, оскільки $p-1 \ge m$, то у випадку, коли $p-1 > m$, це твердження випливає з того, що $f(p-1) \ge p-1$, а в випадку, коли $p-1 = m$, – з нерівності $f(m) > m$. Розглянемо натуральне число $q = f(f(p-1))$. З вищесказаного випливає, що q належить множині A; оскільки повинна виконуватись нерівність $f(p) > f(f(p-1))$, то $q < l$, а це суперечить тому, що l – найменший елемент множини A.

Отже, ми довели, що припущення $f(m) > m$ неправильне і для всіх натуральних чисел n має місце рівність $f(n) = n$.

3. (22-га ММО, 1981). Відомо, що функція $f(x, y)$ для кожної пари цілих невід'ємних чисел x, y задовольняє умови:

а) $f(0, y) = y+1$;

б) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$;

в) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$.

Знайти значення $f(4, 1981)$.

Розв'язання

Ідея розв'язання полягає в наступному: рівність (в) з умови задачі дозволяє послідовно знаходити рекурентні співвідношення, які зв'язують значення $f(x_0, y)$ і $f(x_0, y+1)$ при $x_0 = 1, 2, 3, 4$. За допомогою них, знаючи значення $f(x_0, 0)$, неважко вивести формули для $f(x_0, y)$, застосовуючи досить стандартні прийоми. Оформлення цієї ідеї наводиться нижче (цифра, яка стоїть під знаком рівності, вказує номер використаної формули). Для зручності перепишемо умову задачі:

$$f(0, y) = y+1, \tag{1}$$

$$f(x+1, 0) = f(x, 1), \tag{2}$$

$$f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y)). \tag{3}$$

1°. Підставляючи в (3) $x = 0$, знаходимо:

$$f(1, y+1) = f(0, f(1, y)) \underset{(1)}{=} f(1, y)+1. \tag{4}$$

Доведемо за індукцією, що

$$f(1, y) = 2+y. \tag{5}$$

Маємо:

$$f(1, 0) \underset{(2)}{=} f(0, 1) = 1+1 = 2+0.$$

Припустимо, що $f(1, n) = 2+n$. Тоді внаслідок (4) одержимо $f(1, n+1) = f(1, n)+1 = (2+n)+1 = (n+1)+2$, що й потрібно було довести.

2°. Підставляючи в (3) $x = 1$, знаходимо:

$$f(2, y+1) \underset{(3)}{=} f(1, f(2, y)) \underset{(5)}{=} f(2, y)+2. \tag{6}$$

Доведемо за індукцією, що

$$f(2, y) = 2y+3. \tag{7}$$

Дійсно, при $y = 0$ маємо:

$$f(2, 0) \underset{(2)}{=} f(1, 1) \underset{(6)}{=} 2+1 = 2\cdot 0+3.$$

Нехай $f(2, n) = 2n+3$. Тоді

$$f(2, n+1) \underset{(6)}{=} f(2, n)+2 = (2n+3)+2 = 2(n+1)+3.$$

3°. Підставляючи в (3) $x = 2$, отримуємо:

$$f(3, y+1) \underset{(3)}{=} f(2, f(3, y)) \underset{(7)}{=} 2f(3, y)+3. \tag{8}$$

Знайдемо спочатку значення $f(3, 0)$:

$$f(3, 0) \underset{(2)}{=} f(2, 1) = 5.$$

Тому

$$f(3, y+1) = \underbrace{2 \cdot (\ldots (2 \cdot (2}_{y \text{ двійок}} \cdot 5 + 3) + 3) + \ldots) + 3,$$

звідки

$$f(3, y+1) = 5 \cdot 2^y + 3(1 + 2 + \ldots + 2^{y-1}) = 8 \cdot 2^y - 3 = 2^{3+y} - 3. \qquad (9)$$

4^0. Підставляючи в (3) $x = 3$, отримуємо:

$$f(4, y+1) = f(3, f(4, y)) \underset{(9)}{=} 2^{f(4,y)+3} - 3. \qquad (10)$$

Отже,

$$f(4, 0) \underset{(2)}{=} f(3, 1) = 2^4 - 3 = 2^{2^2} - 3.$$

Використовуючи рівність (10), легко довести методом індукції, що

$$f(4, y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3,$$

де показник містить $y + 2$ двійки.

Відповідь. $f(4, 1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$
(у показнику 1983 двійки).

4. (23-я ММО, 1982). Функція $f(n)$ визначена для всіх натуральних n і приймає цілі невід'ємні значення. Відомо, що $f(n)$ задовольняє такі умови:

а) $f(m+n) - f(m) - f(n)$ при будь-яких m і n приймає значення 0 або 1;

б) $f(2) = 0$;

в) $f(3) > 0$;

г) $f(9999) = 3333$.

Знайти $f(1982)$.

Розв'язання

Підставляючи в умову значення $m = n = 1$, знаходимо $f(1) = 0$. Підставляючи в цю ж умову знову значення $m = 1$, отримуємо $f(n+1) - f(n) \geq 0$, тобто функція f – монотонна. Оскільки $f(1) = f(2) = 0$, а $f(3) > 0$, то $f(3) = 1$.

Використовуючи індукцію, легко показати, що $f(3k)>k$, для будь-якого k, і якщо для деякого номера k ця нерівність строга, то вона являється строгою для всіх більших номерів. Тому з умови (г) випливає, що $f(3k)=k$ для всіх $1\le k\le 3333$. Таким чином, $660\le f(1982)\le 661$. Припустимо, що $f(1982)=661$. Тоді для будь-яких m, l і k вираз $f(m+l+k)-f(m)-f(l)-f(k)$ повинен приймати значення 0, 1 або 2. Підставляючи в цей вираз значення $m=l=k=1982$, бачимо, що $1982-3\cdot 661$ дорівнює 0, 1 або 2. Із отриманого протиріччя випливає, що $f(1982)=660$.

Відповідь. $f(1982)=660$.

5. (23-та ММО, 1982). Знайти всі такі функції f, які визначені на множині R^+ додатних дійсних чисел і приймають значення в R^+, для яких виконуються умови:

а) $f(xf(y))=yf(x)$ при будь-яких додатних x і y;

б) $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Розв'язання

Особливість даної задачі полягає в тому, що для її розв'язання потрібно знайти всі нерухомі точки відображення f, тобто такі значення $a\in R^+$, що $f(a)=a$.

Припустивши, що $x=y$, із умови (а) знаходимо, що $f(xf(x))=xf(x)$, тобто для будь-якого x з області визначення $xf(x)$ – нерухома точка f. Знову застосовуючи умову (а) для будь-якої нерухомої точки a, отримуємо:

$$f(a^2)=f(af(a))=af(a)=a^2.$$

За індукцією легко доводиться, що $f(a^n)=a^n$ при будь-якому натуральному n. Дійсно,

$$f(a^{n+1})=f(a\cdot a^n)=f(af(a^n))=a^n f(a)=a^n\cdot a=a^{n+1}.$$

Звідси випливає, що $a\le 1$. Дійсно, припустивши, що $a>1$, отримуємо: якщо $n\to\infty$, то $a^n\to\infty$ і $f(a^n)=a^n\to\infty$. Це суперечить умові (б).

Помітимо тепер, що

$$a=f(a)=f(1\cdot a)=f(1\cdot f(a))=af(1).$$

Оскільки $a\ne 0\,(a\in R^+)$, то $f(1)=1$. Маємо:

$$1 = f(1) = f(a^{-1} \cdot a) = f(a^{-1} f(a)) = af(a^{-1}),$$

тобто $f(a^{-1}) = a^{-1}$.

Взагалі, $f(a^{-n}) = a^{-n}$. Доведення за індукцією очевидне:

$$f(a^{-n-1}) = f(a^{-1} \cdot a^{-n}) = a^{-n} f(a^{-1}) = a^{-n} \cdot a^{-1} = a^{-n-1}.$$

Отже, a не може бути і менше за одиницю: якщо $a < 1$, то послідовності a^{-n} і $f(a^{-n})$ необмежено зростають при $n \to \infty$. Тому $a = 1$, тобто $xf(x) = 1$ для будь-якого $x \in R^+$ і $f(x) = \frac{1}{x}$. Очевидно, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ дійсно задовольняє умові задачі.

Відповідь. $f(x) = \frac{1}{x}$.

6. (27-ма ММО, 1986). Знайти всі функції $f(x)$, які визначені на множині невід'ємних дійсних чисел, що приймають значення в цій множині і задовольняють умови:

а) $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ для всіх невід'ємних x і y;

б) $f(2) = 0$;

в) $f(x) \neq 0$ для всіх $0 \leq x < 2$.

Розв'язання

Припустимо, в умові (а) $y = 2$. Далі, враховуючи умову (б), отримуємо $f(x+2) = 0$ для будь-яких $x \geq 0$; враховуючи умову (в), маємо $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Нехай $0 \leq x < 2$, тоді

$$f((2-x) \cdot f(x)) \cdot f(x) = f(2-x+x) = 0,$$

відповідно,

$$f((2-x) \cdot f(x) = 0 \text{ і } (2-x) \cdot f(x) \geq 2,$$

тобто $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{2-x}{2}$.

Нехай тепер $0 \leq x < y < 2$, тоді

$$f((y-x) \cdot f(x)) \cdot f(x) = f(y-x+x) = f(y) \neq 0,$$

і тому $f((y-x) \cdot f(x)) \neq 0$, $(y-x) \cdot f(x) < 2$, тобто $\frac{y-x}{2} < \frac{1}{f(x)}$.

Маючи на увазі, що для будь-якого y на проміжку $(x; 2)$ маємо:

$$\frac{y-x}{2}<\frac{1}{f(x)}\le\frac{2-x}{2},$$

то звідси одержуємо, що $\frac{1}{f(x)}=\frac{2-x}{2}$, або $f(x)=\frac{2}{2-x}$.

Отже, $f(x)=\frac{2}{2-x}$ при $0\le x<2$, $f(x)=0$ при $x\ge 2$.

Легко перевірити, що умови задачі для знайденої функції виконуються.

Відповідь. $f(x)=\frac{2}{2-x}$ при $0\le x<2$, $f(x)=0$ при $x\ge 2$.

7. (28-ма ММО, 1987). Нехай $N_0 = 0, 1, 2, \ldots$ – множина цілих невід'ємних чисел. Довести, що не існує функції $f\colon N_0 \to N_0$ такої, що $f(f(n)) = n+1987$ для будь-якого значення $n \in N_0$.

Розв'язання

Ідея розв'язання полягає в наступному. Вказана функція f на множині Z_{1987} класів лишків за модулем 1987 індукує функцію $f\colon Z_{1987} \to Z_{1987}$, яка має властивості: $f^2 = id$, $f(\bar{x}) \ne \bar{x}$ для будь-якого $\bar{x} \in Z_{1987}$, що не можливо в силу непарності числа 1987. Перейдемо тепер до детального розв'язку. Якщо така функція f існує, то

$$f(n+1987) = f(f(f(n))) = f(n)+1987$$

для будь-якого $n \in N_0$. Звідси за індукцією отримуємо, що $f(n+1987k) = f(n)+1987k$ для будь-яких $k, n \in N_0$.

Розглянемо довільне число $0 \le r < 1987$. Розділимо $f(r)$ на 1987 з остачею: $f(r) = l+1987k$, $k \in N_0$, $0 \le l < 1987$. Далі отримуємо, що

$$f(l)+1987k = f(l+1987k) = f(f(r)) = r+1987.$$

Число k може приймати тільки значення 0 або 1, оскільки в протилежному випадку одержується протиріччя з умовою $r < 1987$. Отже, або $f(r) = l$ при $k = 0$, або $f(l) = r$ при $k = 1$. В обох випадках $l \ne r$, оскільки інакше прийдемо до суперечності з умовою $f(f(n)) = n+1987$.

Таким чином, ми отримали розбиття множини чисел 0, 1, ..., 1986 на пари l, r, де або $f(r) = l$, або $f(l) = r$, $l \ne r$, що неможливо, оскільки число 1987 непарне. Отже, функція з заданими властивостями не існує.

8. (28-ма ММО, 1987). Нехай $f(x)=x^2+x+p,\ p\in N$. Довести, що якщо всі числа $f(0),\ f(1),\ ...,\ f\left[\sqrt{\frac{p}{3}}\right]$ – прості, то простими є взагалі всі числа $f(0),\ f(1),\ ...,\ f(p-2)$.

Розв'язання

За умовою $p=f(0)$ – просте число, отже, $p\geq 2$. Зрозуміло, що серед значень многочлена f є складені числа, наприклад $f(p)$. Виберемо найменше натуральне число y, для якого $f(y)$ – складене, і позначимо через q найменший простий дільник числа $f(y)$. Припустимо, що $y\leq p-2$. Тоді

$$q\leq\sqrt{f(y)}\leq\sqrt{(p-2)^2+(p-2)+p}<p.$$

Розглянемо різницю $f(y)-f(x)=(y-x)(x+y+1)$. Якщо x пробігає значення $0, 1, ..., y-1$, то $y-x$ пробігає значення $1, 2, ..., y$, а $x+y+1$ – значення $y+1, ..., 2y$. Таким чином, у випадку $q\leq 2$ знайдеться число x, $0\leq x<y$, для якого $f(y)-f(x)$ ділиться на q, і, отже, $f(x)$ ділиться на q. Але через вибір y число $f(x)$ просте, тому $f(x)=q$, що неможливо, оскільки $q<p\leq x^2+x+p=f(x)$. Отже, $q>2y$ або $q\geq 2y+1$.

Оскільки q найменший простий дільник $f(y)$, то $f(y)\geq q^2$, тому $y^2+y+p\geq 4y^2+4y+1$, тобто $3y^2\leq p-3y<p$ і $y<\sqrt{\frac{p}{3}}$. Але тоді, згідно з умовою $f(y)$ – просте число. Отримали протиріччя, яке показує, що при $y\leq p-2$ число $f(y)$ не може бути складеним. Це завершує розв'язок.

Використовуючи результат цієї задачі, переконаємось, що значення $f(0), f(1), ..., f(39)$ многочлена $f(x)=x^2+x+41$ є простими числами. Дійсно, числа $f(0)=41$, $f(1)=43$, $f(2)=47$, $f(3)=53$ – прості і через отриманий результат далі перевіряти не потрібно, оскільки $4>\sqrt{\frac{41}{3}}$. Більше того, $f(-x)=x^2-x+41=(x-1)^2+(x-1)+41=f(x-1)$, тому многочлен x^2+x+41 набуває простих значень і при $x=-1, -2, ..., -40$. З многочлена x^2+x+41 за допомогою лінійної заміни змінної отримуємо многочлен $g(x)=x^2-79x+1601$, у якого значення $g(0), g(1), ..., g(79)$ – прості числа. Ці чудові властивості многочлена x^2+x+41 були відкриті в XVIII ст. Леонардом Ейлером.

Крім випадку $p = 41$, умову розглянутої задачі задовольняють многочлени $x^2 + x + p$ при $p = 2, 3, 5, 11, 17$. Невідомо, чи існують ще такі многочлени. Відомо тільки, що при $p < 10^9$, крім зазначених шести многочленів, жоден не задовольняє умову цієї задачі.

Л. Ейлер показав, що не існує многочлена додатного степеня $P(x)$, усі значення якого $P(0)$, $P(1)$, ... – прості числа.

Разом з тим є гіпотеза про те, що за виключенням тривіальних випадків будь-який многочлен з цілими коефіцієнтами набуває нескінченно багато простих значень. Ця гіпотеза поки що доведена тільки для многочленів першого степеня (теорема Діріхле). На завершення наведемо ще одну гіпотезу, пов'язану з обговореною темою: для будь-якого натурального числа n існує многочлен $f(x) = x^2 + x + p$, значення якого $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(n)$ є простими числами.

9. (29-та ММО, 1988). Функція f визначена на множині всіх додатних цілих чисел і задовольняє умови:

а) $f(1) = 1$;

б) $f(3) = 3$;

в) $f(2n) = f(n)$;

г) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$;

д) $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$.

Знайти кількість усіх таких значень n, для яких $f(n) = n$ і $1 \le n \le 1988$.

Розв'язання

Будь-яке натуральне число n можна записати в двійковій системі числення, наприклад:

$$1988 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 2^2 + 0\cdot 2 + 0 = \overline{11111000100}.$$

За індукцією по кількості цифр в двійковому записі доведемо такі твердження: якщо $n = \alpha_0 2^k + \alpha_1 2^{k-1} + \ldots + \alpha_k, \alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \{0, 1\}, \alpha_0 = 1$, то $f(n) = \alpha_k 2^k + \alpha_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + \alpha_0$.

Для чисел $1 = \overline{1}$, $2 = \overline{10}$ і $3 = \overline{11}$ твердження безпосередньо випливає із умов (а, б, в).

Припустимо, що твердження доведено для всіх чисел, у двійковому записі яких, менше $k+1$ цифри. Нехай $n=\alpha_0 2^k+\alpha_1 2^{k-1}+\ldots+\alpha_k$, $\alpha_0=1$.

Потрібно розглянути три випадки:

1) $\alpha_k=0$;

2) $\alpha_k=1, \alpha_{k-1}=0$;

3) $\alpha_k=\alpha_{k-1}=1$.

Ми розглянемо тільки другий випадок, інші розбираються аналогічно.

У цьому випадку $n=4m+1$, де $m=\alpha_0 2^{k-2}+\alpha_1 2^{k-3}+\ldots+\alpha_{k-2}$ і $2m+1=$ $=\alpha_0 2^{k-1}+\alpha_1 2^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-2}2+1$. Згідно з умовою (г),

$$f(n)=2f(2m+1)-f(m).$$

За припущенням індукції,

$$f(m)=\alpha_{k-2}2^{k-2}+\ldots+\alpha_0 \text{ і } f(2m+1)=2^{k-1}+\alpha_{k-2}2^{k-2}+\ldots+\alpha_0.$$

Далі

$$f(n)=2^k+2(\alpha_{k-2}2^{k-2}+\ldots+\alpha_0)-(\alpha_{k-2}2^{k-2}+\ldots+\alpha_0)=$$
$$=2^k+\alpha_{k-2}2^{k-2}+\ldots+\alpha_0=\alpha_k 2^k+\alpha_{k-1}2^{k-1}+\alpha_{k-2}2^{k-2}+\ldots+\alpha_0,$$

що й потрібно було довести.

Задача звелася до знаходження кількості чисел, які не перевищують 1988, двійковий запис яких симетричний. Оскільки в двійковій системі числення кількість симетричних n-розрядних чисел дорівнює $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$, а також, тільки два 11-розрядних симетричних числа $\overline{11111111111}$ і $\overline{11111011111}$ більші за 1988, шукане число дорівнює:

$$(1+1+2+2+2^2+2^2+\ldots+2^4+2^5)-2=(2^5-1)+(2^6-1)-2=92.$$

10. (31-ша ММО, 1990). Нехай Q^+ – множина додатних раціональних чисел. Навести приклад функції $f\colon Q^+\to Q^+$ такої, що $f(xf(y))=\dfrac{f(x)}{y}$ для всіх x та y.

Розв'язання

Помітимо, що якщо $f(y_1)=f(y_2)$, то з даного функціонального рівняння випливає, що $y_1=y_2$.

Поклавши $y=1$, одержуємо: $f(xf(1))=f(x)$, тобто $xf(1)=x$. При $x=1$ з рівняння отримуємо, що $f(f(y))=\frac{1}{y}$ для всіх $y\in Q^+$. Тоді $f(f(f(y)))=f\left(\frac{1}{y}\right)$ і, відповідно, $f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{f(y)}$ для всіх $y\in Q^+$. Нарешті, якщо $y=f\left(\frac{1}{t}\right)$, то $f(xt)=f(x)f(t)$ для всіх $x,t\in Q^+$.

Зазначимо, що будь-яка функція f, яку задовольняють при всіх $x,t\in Q^+$ умови:

а) $f(xt)=f(x)f(t)$;

б) $f(f(x))=\frac{1}{x}$ задовольняє дане в умові рівняння.

Функцію $f\colon Q^+\to Q^+$, що задовольняє умову (а), можна, очевидно, визначити за допомогою рівності

$$f(p_1^{n_1},p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k})=(f(p_1))^{n_1}\cdot(f(p_2))^{n_2}\cdot\ldots\cdot(f(p_k))^{n_k},$$

де p_j позначає j-те просте число і $n_j\in Z$. Така функція буде задовольняти умову (а) тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову (б) тільки для простих чисел.

Визначимо її для простих чисел так:

$$f(p_j)=\begin{cases} p_{j+1}, & \text{якщо } j \text{ непарне,}\\ \dfrac{1}{p_{j-1}}, & \text{якщо } j \text{ парне.}\end{cases}$$

Побудована таким чином функція $f\colon Q^+\to Q^+$ задовольняє тотожність $f(f(p))=\frac{1}{p}$ для будь-якого простого p і тим самим задовольняє умову задачі.

11. (33-тя ММО, 1992). Нехай R – множина всіх дійсних чисел. Знайти всі функції $f\colon R\to R$ такі, що $f(x^2+f(y))=y+f^2(x)$ для всіх x, y з R.

Розв'язання

Вважаючи, що $s=f(0)$, при $x=0$ і $y=0$ з даного рівняння отримаємо відповідно

$$f(f(y))=y+s^2 \tag{1}$$

для всіх дійсних y і

$$f(x^2+s)=f^2(x) \tag{2}$$

для всіх дійсних x. З останнього співвідношення при $x=0$ випливає, що

$$f(s)=s^2. \tag{3}$$

Додавши цю рівність з (2), маємо:

$$s^2+f(x^2+s)=f^2(x)+f(s).$$

Застосовуючи функцію f послідовно до обох частин рівності і враховуючи (1) і (3), прийдемо до співвідношення $x^2+s+s^4=s+(x+s^2)^2$, звідки $s=0$.

Підставляючи $s=0$ в (1) і (2), отримаємо

$$f(f(y))=y \tag{4}$$

і

$$f(x^2)=f^2(x). \tag{5}$$

З рівності (5) випливає, що $f(x)\geq 0$ при $x\geq 0$. Якщо $f(x)=0$ для деякого x, то $0=f^2(x)=f(x^2)=f(x^2+f(x))=x+f(x^2)=x$. Таким чином, $f(x)>0$ при $x>0$.

Замінивши y на $f(y)$ у вихідному рівняння і застосовуючи (4) та (5), знаходимо

$$f\left(x^2+y\right)=f\left(x^2\right)+f(y),$$

тобто $f(x+y)=f(x)+f(y)$ при $x\geq 0$.
Використовуючи цю рівність, доведемо, що $f(x)$ монотонно зростає.

Дійсно, якщо $x>y$, то $x-y>0$, $f(x-y)>0$ та

$$f(x)=f(x-y+y)=f(x-y)+f(y)>f(y).$$

Якщо $f(x)>x$, то $x=f(f(x))>f(x)$. Аналогічно із нерівності $f(x)<x$ випливає, що $x<f(x)$. Тому $f(x)=x$ для всіх дійсних x.

12. (37-ма ММО, 1996). Нехай $S = 0, 1, 2, 3, ...$ – множина невід'ємних цілих чисел. Знайти всі функції f, які визначені на S і приймають свої значення в S, такі, що $f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ для всіх m, n із S.

Розв'язання

Нехай $T = f(S)$ – множина значень функції $f(m)$, $T \subset S$. Зрозуміло, що функція, яка тотожно рівна нулю, задовольняє умову задачі. Нехай тепер $f(m)$ – не тотожна нулю. Підставимо у співвідношення

$$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n) \qquad (1)$$

значення $m = n = 0$:

$$f(0+f(0)) = f(f(0)) + f(0) \Rightarrow f(f(0)) = f(f(0)) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \text{ і } f(f(0)) = 0.$$

Підставимо в рівність (1) $n = 0$, $m \in S$:

$$f(m+f(0)) = f(f(m)) + f(0) \Rightarrow f(m) = f(f(m))$$

для всіх $m \in S$.

Звідси, $f(z) = z$ при $z \in T$. Використовуючи ці рівності, перепишемо умову (1): $f(m+f(n)) = f(m) + f(n)$ для всіх $m \in S$, $n \in S$, тобто

$$f(m+z) = f(m) + z \text{ для всіх } m \in S, z \in T. \qquad (2)$$

Нехай I – множина всіх $z \in S$, для яких за умови $m \in S$ виконується рівність (2). Вище ми показали, що $T \subset I$ і, крім того, функція f – не тотожній нуль, тому множина I містить хоча б один ненульовий елемент. Нехай k – найменший із них. Із рівності (2) випливає, що для будь-якого $l \in N$ при всіх $m \in S$ виконується рівність $f(m+lk) = f(m) + lk$, тому $lk \in I$. Крім того, якщо $m' = m + lk$, то $f(m') = f(m' - lk) + lk$, тобто $f(m' - lk) = f(m') - lk$, при всіх $m' \in S$ і $m' \geq lk$.

Нехай x – довільний елемент множини I. Тоді $x = lk + r$, $l \in N$, $0 \leq r \leq k-1$ і при всіх $m \in S$ маємо:

$$f(m+r) = f(m+x-kl) = f(m+x) - kl = f(m) + x - kl = f(m) + r,$$

тобто $r \in I$. Але $r < k$, а k – найменший невід'ємний елемент множини I, тому $r = 0$ і $x = lk$, тобто $I = \{0, k, 2k, 3k, ...\}$.

Далі, $f(0+lk) = f(0) + lk = lk$, оскільки $f(0) = 0$. Отже, $f(lk) = lk$ при всіх $l \in S$, тобто $lk \in T$. Звідси випливає, що $I \subset T$. Разом зі співвідношенням $T \subset I$ це дає, що $I = T$.

Таким чином, для будь-якого $m \in S$ маємо: $f(m) \in T \Rightarrow f(m) \in I \Rightarrow f(m)$ кратне k.

Нехай при $r=0,1,\dots,k-1$ $g(r)=\dfrac{f(r)}{k}$, при чому $g(0)=\dfrac{f(0)}{k}=0$. Тоді для будь-якого $m\in S$ отримуємо:

$$m=lk+r,\ l\in S,\ r\in\{0,1,\dots,k-1\}$$

і

$$f(m)=f(r+lk)=f(r)+lk=kg(r)+lk=k(l+g(r)).$$

Покажемо тепер, що, вибравши будь-яке натуральне число k і будь-яку функцію $g:\{0,1,\dots,k-1\}\mapsto S$ таку, що $g(0)=0$, і визначимо функцію f так, як показано вище, ми отримаємо функцію, яка задовольняє умову задачі.

Дійсно, нехай $m=l_1k+r_1$, $n=l_2k+r_2$, $l_1,l_2\in S$, $0\le r_1$, $r_2<k$. Тоді $f(n)=k(l_2+g(r_2))$, $f(m)=k_1(l_1+g(r_1))$, тому

$$f(f(m))=f(k(l_1+g(r_1))+0)=k(l_1+g(r_1))+g(0)=k(l_1+g(r_1)).$$

Отже, $f(m+f(n))=f(l_1k+r_1+k(l_2+g(r_2)))=f(k(l_1+l_2+g(r_2))+r_1)=$ $=k(l_1+l_2+g(r_2)+g(r_1))=f(f(m))+f(n)$, тобто $f(m)$ дійсно задовольняє умову задачі.

Відповідь. $f(m)=0$ при всіх $m\in S$ або $f(m)=k(l+g(r))$, де l і r – відповідно частка і остача від ділення m на k $(m=lk+r, 0\le r<k)$, а $g:\{0,1,\dots,k-1\}\mapsto S$ – довільна функція, що задовольняє умову $g(0)=0$; k – довільне натуральне число.

13. (39-ма ММО, 1998). Розглянемо всі функції f, що визначені на множині всіх натуральних чисел та приймають натуральні значення і задовольняють умову: $f(t^2f(s))=s(f(t))^2$ для всіх натуральних s та t. Знайти найменше можливе значення $f(1998)$.

Розв'язання

Позначимо через S множину функцій, що задовольняють умову задачі. Нехай f – одна з них, і позначимо $f(1)=a$. Поклавши в рівності з умови $t=1$ та $s=1$, ми отримаємо: $f(f(s))=a^2s$, $f(at^2)=[f(t)]^2$ для всіх $s,t\in N$.

Далі маємо:

$$(f(s)f(t))^2=(f(s))^2f(at^2)=f(s^2f(f(at^2)))=$$

$$= f(s^2a^2at^2) = f(a(ast)^2) = (f(ast))^2.$$

Звідси випливає, що $f(ast) = f(s)f(t)$ для всіх s, t, зокрема $f(as) = af(s)$, і тому

$$af(st) = f(s)f(t) \text{ для всіх } s, t \in N. \quad (1)$$

Тепер доведемо, що $f(t)$ ділиться на a для всіх $t \in N$. Для простого числа p позначимо через p^α та p^β найбільші степені p, на які діляться a та $f(t)$ відповідно. Стандартними міркуваннями за індукцією з (1) легко одержати, що $(f(t))^k = a^{k-1}f(t^k)$ для всіх $k \in N$. Найбільший степінь p, на який ділиться $(f(t))^k$, є $p^{k\beta}$, на який ділиться $a^{k-1} - p^{(k-1)\alpha}$. Тому $k\beta \geq (k-1)\alpha$ для всіх $k \in N$, що є можливим тільки при $\beta \geq \alpha$. Це має місце для кожного простого числа p, і тому $f(t)$ ділиться на a.

Покладемо тепер $g(t) = \dfrac{f(t)}{a}$, отримавши нову функцію g з N в себе. Результати, отримані для f, переписуються таким чином:

$$g(a) = a, g(st) = g(s)g(t), g(g(s)) = s \text{ для всіх } s, t \in N. \quad (2)$$

Тут, фактично, $g(st) = g(s)g(t)$ є еквівалентним (1) та $g(g(s)) = s$ випливає з того, що

$$ag(g(s)) = g(a)g(g(s)) = g(ag(s)) = g(f(s)) = \frac{f(f(s))}{a} = \frac{a^2s}{a} = as.$$

З (2) ми отримуємо, що $g(t^2g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = s(g(t))^2$ для всіх $s, t \in N$. Отже, g також є функцією з S та її значення не перевищують відповідні значення f. Тому ми можемо розглядати лише функції g, що задовольняють (2).

Тепер зазначимо той важливий факт, що значення такої функції g від простого числа саме є простим числом. Дійсно, нехай p – просте число, і $g(p) = uv$ для деяких натуральних u, v. Тоді з (2) маємо, що $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$, тому одне з чисел $g(u)$ або $g(v)$ дорівнює 1. Якщо, наприклад, $g(u) = 1$, то обов'язково $u = g(g(u)) = g(1) = 1$, звідки випливає, що число $g(p)$ просте.

Щоб визначити потрібне найменше значення, візьмемо довільну g, що задовольняє (2). Така функція є взаємно однозначною (з того, що

$g(s) = g(t)$, випливає $s = g(g(s)) = g(g(t)) = t$), і тому відображає різні прості числа в різні. Тому нижню границю значення

$$g(1998) = g(2\cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)\left(g(3)\right)^3 g(37)$$

ми отримуємо, коли $g(2)$, $g(3)$, $g(37)$ є трьома найменшими простими числами 2, 3, 5, причому $g(3) = 2$. Отже, $g(1998) \geq 3\cdot 2^3 \cdot 5 = 120$ для всіх $g \in S$.

З іншого боку, існує функція $g \in S$ з $g(1998) = 120$. Покладемо $g(1) = 1$ та визначимо g на простих числах таким чином: $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$ та $g(p) = p$ для всіх простих $p \neq 2, 3, 5, 37$. Для довільного $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \in N$ візьмемо

$$g(n) = g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot g(p_k)^{\alpha_k}.$$

Рівності в (2) виконуються (для $a = 1$), тому $g \in S$. Також $g(1998) = 120$.

Відповідь. 120.

14. (40-ва ММО, 1999). Знайти всі функції f:R $\to$ R такі, що

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

для всіх $x, y \in$ R.

Розв'язання

Покладемо $f(0) = c$. Підстановка до даного рівняння $x = y = 0$ дає, що $f(-c) = f(c) + c - 1$, тому $c \neq 0$. Підстановка $x = f(y)$ дає, що

$$c = f(f(y)) + f^2(y) + f(f(y)) - 1,\ \ f(f(y)) = \frac{c+1}{2} - \frac{f^2(y)}{2}.$$

Підставивши в рівняння умови $y = 0$, отримаємо, що

$$f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1.$$

Для даного не нульового c вибором x ми можемо зробити праву частину рівною будь-якому наперед заданому значенню z. Тому для кожного $z \in$ R існують y_1 та y_2 такі, що $z = f(y_1) + f(y_2)$. З умови рівняння тоді маємо, що

$$f(z) = f(f(y_1) - f(y_2)) = f(f(y_2)) + f(y_1)\cdot f(y_2) + f(f(y_1)) - 1 =$$

$$= \frac{c+1}{2} - \frac{f^2(y_2)}{2} + f(y_1)\cdot f(y_2) + \frac{c+1}{2} - \frac{f^2(y_1)}{2} - 1 = c - \frac{(f(y_1) - f(y_2))^2}{2} = c - \frac{z^2}{2}.$$

Звідси ми також отримуємо $c=\frac{c+1}{2}$, $c=1$. Підстановка показує, що функція $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ задовольняє умову.

Відповідь. $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

15. (43-тя ММО, 2002). Знайти всі функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ такі, що

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz)$$

для всіх дійсних x, y, z, t.

Розв'язання

Рівність, дану в умові, позначимо через (*). Покладемо в (*) $x=y=z=t=0$. Отримаємо, що $4f^2(0)=2f(0)$. Отже, $f(0)=\frac{1}{2}$ або $f(0)=0$.

Якщо $f(0)=\frac{1}{2}$, то візьмемо в (*) $x=y=z=0$ і прийдемо до $f(0)+f(t)=1$, звідки $f(t)=\frac{1}{2}$ для всіх t.

Якщо $f(0)=0$, то, поклавши в (*) $z=t=0$, отримаємо

$$f(xy)=f(x)f(y). \tag{1}$$

Наступна підстановка $x=y=1$ дає, що $f(1)=0$ або $f(1)=1$.

При $f(1)=0$, підставивши в (1) $y=1$, отримаємо $f(x)=0$ для всіх x.

Далі розглядаємо випадок $f(1)=1$, також маємо $f(0)=0$. Поклавши в (*) $x=0$, $y=t=1$, приходимо до $f(-z)+f(z)=2f(z)$, тому

$$f(-z)=f(z). \tag{2}$$

Далі будемо розглядати f лише для невід'ємних значень аргумента, і за допомогою (2) визначимо її для від'ємних x. З (1) при $x=y$ отримаємо, що $f(x^2)=f^2(x)\geq 0$. Введемо функцію $g(x)=\sqrt{f(x)}$, $x\geq 0$. З (1) маємо, що $g(xy)=g(x)g(y)$, звідки також $g(x^2)=g^2(x)$.

Поклавши в (*) $t=x$, $z=y$, приймемо: $(f(x)+f(y))^2=f(x^2+y^2)$. Звідси $g(x^2+y^2)=g^2(x)+g^2(y)=g(x^2)+g(y^2)$. Таким чином, для будь-яких невід'ємних x, y

$$g(x+y)=g(x)+g(y). \tag{3}$$

Тому для будь-якого $u \geq x \geq 0$ буде $g(u) \geq g(x)$ (для перевірки досить покласти в (3) $y = u - x$ і використати невід'ємність g).

Відомо, що рівняння (3) (яке називається функціональним рівнянням Коші) у класі неспадних функцій має лише розв'язки $g(x) = ax$, $a \geq 0$. Коротко нагадаємо відповідні міркування. З (3) отримаємо, що

$$g(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n),\ n \geq 1. \qquad (4)$$

Якщо покладемо $g(1) = a$, з (4) для будь-якого натурального n за допомогою підстановки $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ отримаємо $g(n) = an$. Поклавши в (4) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{m}{n}$, $m \in N$, будемо мати $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{am}{n}$. Таким чином, для будь-якого раціонального невід'ємного x виконується рівність $g(x) = ax$. Припустимо, що існує $x \geq 0$ таке, що $g(x) \neq ax$, нехай $g(x) < ax$ (тут це можливо лише при $a \neq 0$). Існує раціональне число x' таке, що $\frac{g(x)}{a} < x' < x$. Тоді з монотонності g отримуємо, що $ax' = g(x') \leq g(x)$, $x' \leq \frac{g(x)}{a}$. Отримали суперечність. Аналогічно розглядається випадок $g(x) > ax$. Тому $g(x) = ax$, $x \geq 0$. Оскільки $g(1) = 1$, буде $g(x) = x$, $f(x) = x^2$ для всіх дійсних x.

Таким чином, ми отримали три можливі відповіді: $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x^2$. Перевірка показує, що кожна з цих функцій задовольняє умову.

Відповідь. $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x^2$.

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

1. Дедукція й індукція

Однією з характерних рис математики і таких наук, як теоретична механіка, теоретична фізика, математична лінгвістика, є дедуктивна побудова теорії. Дедуктивне міркування — це міркування від загального до часткового, тобто міркування, вихідним моментом якого є загальне твердження, а заключним моментом — частковий висновок.

У математиці ми користуємося дедукцією, проводячи міркування, наприклад, такого типу: відомо, що будь-який рівнобедрений трикутник має вісь симетрії, а оскільки даний трикутник рівнобедрений, то він має вісь симетрії. Слово дедукція в перекладі на українську мову означає «висновок».

Дедукція не є єдиним методом наукового мислення. У фізиці, хімії, біології широко використовуються апеляція до спостереження і досвіду, індуктивні міркування. Слово індукція в перекладі на українську мову означає «наведення», а індуктивними називають висновки, зроблені на основі спостережень і досвідів, тобто отримані шляхом розгляду окремих випадків і наступного поширення помічених закономірностей на загальний випадок.

Роль індуктивних висновків в експериментальних науках дуже велика. Вони дають ті положення, з яких потім шляхом дедукції робляться подальші умовиводи. У математиці індукція часто дозволяє вгадати формулювання теорем, а в ряді випадків і накреслити шляхи доведень.

2. Повна і неповна індукція

Нехай потрібно встановити, що для будь-яких дійсних чисел a і b справедлива нерівність

$$|a+b| \le |a|+|b|. \tag{1}$$

Тут може бути 4 випадки:

1) $a \ge 0,\ b \ge 0$; 2) $a < 0,\ b \ge 0$;

3) $a \ge 0,\ b < 0$; 4) $a < 0,\ b < 0$.

Якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $|a| = a$, $|b| = b$, $|a+b| = a+b$, а тому нерівність (1) набуває вигляду: $a+b \leq a+b$. Ця нерівність істинна.

Якщо $a < 0$, $b \geq 0$, то $a+b$ знаходиться між a і b, $a \leq a+b < b$ і тому $|a+b|$ не перевищує більшого з чисел $|a|$, $|b|$. Але тоді $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Аналогічно у випадку, коли $a \geq 0$, $b < 0$.

Нехай, нарешті, $a < 0$, $b < 0$. Тоді $|a+b| = -a-b$, бо $|a| = -a$, $|b| = -b$ і нерівність (1) набуває вигляду: $-a-b \leq -a-b$. Ця нерівність істинна.

Отже, нерівність (1) істинна в кожному з чотирьох випадків, що могли б бути.

Такий метод перебору кінцевого числа випадків, що вичерпують усі можливості, називається *повною індукцією*. Він використовується в математиці досить часто. Наприклад, щоб довести теорему про величину вписаного кута, треба послідовно розібрати три випадки: центр кола лежить на одній зі сторін кута, центр кола лежить усередині кута, центр кола лежить поза кутом. Довівши теорему в кожному з цих випадків, ми тим самим доведемо її в загальному виді, тому що завжди має місце один з них.

Таким чином, повна індукція полягає в тому, що загальне твердження доводиться окремо в кожному з кінцевого числа випадків, що могли б бути. Незважаючи на свою назву, метод повної індукції є насправді не індуктивним, а дедуктивним: застосовуючи його, ми спираємося на загальні положення логіки, що дозволяють розчленовувати загальний випадок на кінцеве число окремих випадків і розглядати їх окремо.

Іноді загальний результат вдається вгадати після розгляду не всіх, а досить великого числа окремих випадків — це так звана *неповна індукція*. Результат, отриманий неповною індукцією, залишається, однак, лише гіпотезою, поки він не доведений точним математичним міркуванням. Іншими словами, неповна індукція в математиці не вважається методом строгого доведення, але є могутнім евристичним методом відкриття нових істин.

Наприклад, розглядаючи парні числа, більші, ніж два, помічаємо, що кожне з них є сумою двох простих чисел:

$4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 7 + 7$, $16 = 3 + 13$, $18 = 5 + 13$, $20 = 3 + 17$ і т. д. Це спостереження приводить до гіпотези, що будь–яке парне число, більше, ніж 2, є сумою двох простих чисел. Однак, незважаючи на зусилля багатьох видатних математиків, це твердження, назване гіпотезою Гольдбаха (на ім'я німецького математика XVIII ст.

Християна Гольдбаха, члена Петербурзької академії наук), дотепер не доведено в загальному вигляді. Найбільш сильний результат у цьому напрямку одержав радянський математик академік І. М. Виноградов, що довів, що будь–яке досить велике парне число є сумою чотирьох простих чисел.

Але часто зроблене спостереження приводить до припущення, що вдається потім довести. Нехай, наприклад, потрібно знайти суму перших n непарних чисел. Розглянемо окремі випадки:

$1 = 1,$

$1+3 = 4,$

$1+3 + 5 = 9,$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$

$1+3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Зауважуємо, що $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, 25 = 5^2$. Після розгляду цих окремих випадків підходимо до загального висновку:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2, \tag{2}$$

тобто сума перших n непарних чисел дорівнює n^2. У наступному пункті ми познайомимося з методом, користуючись яким можна довести, що формула (2) правильна.

Слід зазначити, що індуктивні міркування можуть привести до помилкових висновків. Так, розглядаючи числа вигляду $2^{2^n}+1$, французький математик XVII ст. П'єр Ферма помітив, що при $n=1, 2, 3, 4$ отримуються прості числа. Він припустив, що всі числа такого вигляду прості. Однак видатний математик XVIII ст. Леонард Ейлер (швейцарець за походженням, жив і працював у Петербурзі) знайшов, що вже при $n=5$ число $2^{32}+1$ не є простим — воно ділиться на 641.

Наведемо ще один разючий приклад помилкового висновку, зробленого індуктивним шляхом. Потрібно з'ясувати, чи існує таке натуральне число n, що число вигляду $991n^2+1$ буде точним квадратом. Розглядаючи конкретні випадки при $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, ми будемо одержувати числа, що не є точними квадратами. Якби ми протягом багатьох років тільки тим і займалися, що робили обчислення для послідовних натуральних чисел, то щораз одержували б числа, що не є точними квадратами. Цілком природно припустити, що за всіх натуральних значень n числа вигляду $991n^2+1$ не будуть точними квадратами. Однак це неправильно: існує 29-цифрове число m, таке, що $991m^2+1$ — точний квадрат.

Отже, неповна індукція може привести до помилки. Однак досить часто вона дозволяє вгадати правильний результат.

Вправи

1. $S_n = -1+2-3+4-5+...+(-1)^n n$. Обчисливши S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, вгадайте, чому буде дорівнювати сума S_{316}; S_{327}.
2. Чи справедливе твердження: n^2+n+17 — просте число при будь–якому натуральному n? Перевірте при $n=1$, 2, 3, ..., 15, 16.

3. Метод математичної індукції

Повна індукція має в математиці обмежене застосування. Багато цікавих математичних пропозицій охоплюють нескінченну множину окремих випадків, а провести перевірку для нескінченної множини випадків людина не може (прикладом подібної пропозиції служить будь-яке твердження, що належить до всіх натуральних чисел). Неповна ж індукція, як ми бачили, може привести до помилкових результатів.

У багатьох випадках вихід із труднощів полягає у зверненні до особливого методу міркувань, що називається *методом математичної індукції*. Він полягає в наступному.

Нехай потрібно довести справедливість деякого твердження для будь–якого натурального числа n (наприклад, потрібно довести, що сума перших n непарних чисел дорівнює n^2). Безпосередня перевірка цього твердження для кожного значення n неможлива, оскільки множина натуральних чисел нескінченна. Щоб довести це твердження, перевіряють спочатку його справедливість для $n=1$. Потім доводять, що за будь-якого натурального значення k зі справедливості розглянутого твердження при $n=k$ випливає і його справедливість при $n=k+1$. Тоді твердження вважається доведеним для всіх $n \in N$. Справді, одержуємо якщо твердження справедливе при $n=1$; то тоді воно справедливе і для наступного числа: $n=1+1=2$. Зі справедливості твердження для $n=2$ випливає його справедливість для $n=2+1=3$. Звідси, у свою чергу, випливає справедливість твердження для $n=4$ і т. д. Зрозуміло, що зрештою ми дійдемо в такий спосіб до будь–якого натурального числа n. Отже, твердження правильне для кожного n.

Узагальнюючи сказане, сформулюємо наступний загальний принцип.

Принцип математичної індукції. Якщо твердження, у формулюванні якого входить натуральне число n, істинне при $n=1$ і з його істинності при $n=k$ (де $k \in N$) випливає, що воно істинне і при $n=k+1$, то воно істинне при всіх натуральних значеннях n.

У ряді випадків необхідно довести справедливість деякого твердження не для всіх натуральних чисел, а лише для $n \geq p$, де p — фіксоване натуральне число. У цьому випадку принцип математичної індукції формулюється в такий спосіб: якщо твердження істинне при $n=p$ і з його істинності при $n=k$, де $k \geq p$, випливає, що воно істинне і при $n=k+1$, то твердження істинне для будь-якого $n \geq p$.

Доведення методом математичної індукції проводиться в такий спосіб. Спочатку твердження, що доводиться, перевіряється при $n=1$. Цю частину доведення називають *базою* індукції. Якщо при $n=1$ твердження істинне, то переходять до другої частини доведення, яка називається *індукційним кроком*. У цій частині доводиться справедливість твердження для $n=k+1$ у припущенні справедливості твердження для $n=k$ (припущення індукції).

Приклад 1

Довести, що при будь-якому натуральному n виконується рівність

$$1+2+3+\ \dots\ +n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Розв'язання

Ця формула містить цілу послідовність тверджень:

T_1 $$1=\frac{1\cdot 2}{2},$$

T_2 $$1+2=\frac{2\cdot 3}{2},$$

T_3 $$1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2},$$

T_4 $$1+2+3+4=\frac{4\cdot 5}{2},$$

....

Перше твердження, звісно ж, істинне. Перевіримо, що з кожного істинного твердженням випливає також істинне.

Нехай твердження T_k істинне, тобто рівність

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

правильна. Додамо до обох частин цієї рівності число $k+1$, Одержимо

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Але це і є твердження T_{k+1}, яке безпосередньо випливає з твердження T_k.

Таким чином, ми довели, що з кожного істинного твердження випливає істинне. Згідно з принципом математичної індукції, наша рівність правильна для будь-якого натурального n.

Цю ж задачу можна розв'язати і без методу математичної індукції. Позначимо суму, яку ми хочемо знайти через x_n. Запишемо дві рівності

$$x_n=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n,$$
$$x_n=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$

(у нижньому рядку записана така ж сама сума, як і у верхньому, але у зворотньому порядку). Додавши почленно ці рівності, ми одержимо:

$$2x_n=\big(1+n\big)+\big(2+(n-1)\big)+\big(3+(n-2)\big)+\ldots$$
$$\ldots+\big((n-2)+3\big)+\big((n-1)+2\big)+\big(n+1\big).$$

У кожній великій дужці стоїть число $n+1$, а всього таких дужок n. Тому

$$2x_n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{ раз}}=n(n+1),$$

$$x_n=\frac{n(n+1)}{2},$$

тобто нашу рівність доведено.

Метод математичної індукції можна застосовувати не тільки для доведення, але і для означення послідовностей. Якщо ми означимо перший член послідовності, і, припустивши, що k-й член вже означений, за допомогою нього означимо $(k+1)$-й, то згідно з принципом математичної індукції, вся послідовність буде означеною. Такий спосіб задання послідовності називають *рекурентним*.

Приклад 2

Довести, що коли $x_1=1$ і $x_n=x_{n-1}+3$, то $x_n=3n-2$ для всіх натуральних n.

Розв'язання

База індукції. При $n=1$ маємо $x_1=3\cdot1-2=1$.

Крок індукції. Нехай $x_n=3n-2$. Доведемо, що $x_{n+1}=3(n+1)-2$. Дійсно, використовуючи умову задачі, одержуємо:

$$x_{n+1}=x_n+3=(3n-2)+3=3(n+1)-2.$$

Отже, використовуючи принцип математичної індукції, одержуємо, що $x_n = 3n-2$ для всіх натуральних n.

Існують й інші форми принципу математичної індукції, які дещо відрізняються від попереднього.

Нехай маємо деяке твердження, або, як кажуть, гіпотезу, і ми хочемо перевірити її справедливість для всіх натуральних n.

Припустимо, що нам вдалося довести такі два твердження:

1) наша гіпотеза справедлива при $n=1$;
2) із того, що гіпотеза справедлива для всіх $n \le k$, випливає, що вона справедлива для $n=k+1$.

Тоді гіпотеза буде справедливою при всіх натуральних n.

Відмінність цього формулювання принципу математичної індукції від попереднього полягає ось у чому: у пункті 2) ми вимагаємо, щоб наша гіпотеза була справедливою для всіх $n \le k$, а не тільки для $n=k$.

Легко зрозуміти, що обидва формулювання принципу математичної індукції — еквівалентні, тобто будь-яку теорему, яку можна довести, застосовуючи метод індукції в одній формі, можна довести за допомогою іншої форми.

Приклад 3

Довести, що будь-який n-кутник (не обов'язково опуклий), де n — натуральне, $n \ge 3$, може бути розбитий своїми діагоналями, які не перетинаються, на $n-2$ трикутники.

Розв'язання

База індукції. Для трикутника це число дорівнює одиниці (у трикутнику не можна провести жодної діагоналі); для чотирикутника це число дорівнює, очевидно, двом (у випадку опуклого і неопуклого).

Крок індукції. Припустимо, що ми вже знаємо, що будь-який k-кутник, де $k<n$, розбивається своїми діагоналями, які не перетинаються, на $k-2$ трикутники (незалежно від способу розбиття). Розглянемо одне із розбиттів n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$ на трикутники. Нехай A_iA_j — одна із діагоналей цього розбиття $(1 \le i < j < n)$. Вона ділить n-кутник $A_1A_2\ldots A_n$ на $(i+n-j+1)$-кутник $A_1\ldots A_iA_j\ldots A_n$ і $(j-i+1)$-кутник $A_iA_{i+1}\ldots A_j$. Враховуючи зроблене припущення, загальне число розбиття трикутників буде дорівнювати $((i+n-j+1)-2)+((j-i+1)-2)=n-2$.

Отже, використовуючи принцип математичної індукції,одержуємо, що наше твердження доведено для будь-якого натурального $n \ge 3$.

Іноді застосовують *індуктивний спуск:*

Якщо твердження T_n, де $n>1$, можна пов'язати з одним або декількома твердженнями з меншими номерами, і твердження T_1 — істинне, то всі твердження будуть істинними.

Зауважимо, що коли замість стандартної бази довести, наприклад, що гіпотеза істинна для $n=5$, а індукційний перехід залишити незмінним, то за такою індукцією одержимо, що наша гіпотеза буде справедливою для всіх натуральних n, починаючи з 5.

Наведемо тепер два приклади, які показують, що неправильне застосування методу математичної індукції може іноді привести до абсурдних висновків.

«Доведемо», що будь-яка скінченна множина натуральних чисел складається з рівних один одному чисел.

Проведемо індукцію по числу елементів у множині. При $n=1$ твердження очевидне — кожне число дорівнює самому собі. Нехай теорема доведена для множин з k елементів. Візьмемо $k+1$–елементну множину $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. За припущенням індукції, $a_1=a_2=\ldots=a_k$. Далі, за тим же припущенням, $a_2=a_3=\ldots=a_k=a_{k+1}$ і тому $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_k=a_{k+1}$. За принципом математичної індукції робимо висновок, що твердження справедливе для будь-яких значень $n \in N$.

Помилковість проведеного міркування полягає в тому, що перехід від k до $k+1$ можливий тут лише при $k \geq 2$, а перейти від $n=1$ до $n=2$ за допомогою цього міркування не можна.

«Доведемо» ще, що будь-яке натуральне число дорівнює наступному за ним натуральному числу.

Припустимо, що твердження справедливе при $n=k$, тобто, що $k=k+1$. Доведемо, що тоді теорема правильна і при $n=k+1$, тобто, що $k+1=k+2$. Але це очевидно, тому що коли до обох частин рівності $k=k+1$ додати по 1, то рівність не порушиться і ми одержимо $k+1=k+2$. За принципом математичної індукції робимо висновок, що твердження справедливе при всіх значеннях n.

Помилковість проведеного міркування полягає в тому, що ми «забули» перевірити справедливість теореми при $n=1$. Оскільки при $n=1$ вона неправильна ($1 \neq 2$), то метод математичної індукції тут не можна застосувати.

Іноді замість принципу математичної індукції приймають як аксіому одну з наступних пропозицій:

А. Якщо множина натуральних чисел містить число 1 і разом з числом k завжди містить і число $k+1$, то ця множина збігається з множиною всіх натуральних чисел.

Б. У кожній непорожній множині натуральних чисел існує найменший елемент.

Можна показати, що принцип математичної індукції і кожна з пропозицій А і Б рівносильні (будь–які два з цих положень є наслідками третього). Виходячи з пропозиції Б, неважко довести наступну теорему, що дає інше формулювання принципу математичної індукції.

Теорема. Якщо твердження справедливе для $n=1$ і з того, що воно правильне для всіх натуральних чисел, менших k, де $k>1$, випливає його справедливість для k, то воно правильне для всіх натуральних чисел.

4. Застосування методу математичної індукції в задачах на підсумовування і для доведення тотожностей

Приклад 4

Знайдемо формулу для суми

$$S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1).$$

Розв'язання

Маємо:
$$S_1=-1,$$
$$S_2=-1+3=2,$$
$$S_3=-1+3-5=-3,$$
$$S_4=-1+3-5+7=4.$$

Розглянуті окремі випадки дозволяють зробити припущення, що $S_n=(-1)^n\cdot n$. Скориставшись методом математичної індукції, доведемо справедливість цього твердження, тобто доведемо, що

$$S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1)=(-1)^n\cdot n.$$

1) Істинність рівності при $n=1,\ 2, 3, 4$ встановлена вище.

2) Припустимо, що

$$S_k=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^k\cdot(2k-1)=(-1)^k\cdot k,$$

і доведемо, що тоді

$$S_{k+1}=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^k\cdot(2k-1)+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=(-1)^{k+1}\cdot(k+1).$$

Дійсно, маємо:

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=(-1)^k\cdot k+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=$$

$$=(-1)^{k+1}\cdot(-k+2k+1)=(-1)^{k+1}\cdot(k+1).$$

За принципом математичної індукції робимо висновок, що наше твердження істинне для будь-яких $n\in N$.

Приклад 5

Знайдемо формулу для суми

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Розв'язання

Рівності $\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}=\frac{3}{4}$ приводять до індуктивного припущення, що

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \tag{3}$$

Доведемо цю рівність методом математичної індукції.

1) Істинність при $n=1$, 2, 3, встановлена вище.
2) Припустимо, що наше твердження справедливе при $n=k$:

$$S_k=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Тоді

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Але $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ — це рівність (3) при $n=k+1$.

За принципом математичної індукції робимо висновок, що рівність (3) істинна при всіх натуральних значеннях n.

Приклад 6

Доведемо, що

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{100}.$$

Розв'язання

Сформулюємо задачу в більш загальному вигляді: доведемо, що при будь-яких натуральних значеннях n виконується рівність

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \qquad (4)$$

1) При $n=1$ ліва частина рівності (4) набуває вигляду: $1-\frac{1}{2}$, а права — вигляду $\frac{1}{1+1}$. Оскільки $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ — правильна рівність, то одержуємо, що при $n=1$ рівність (4) істинна.

2) Припустимо, що ця рівність істинна при $n=k$, тобто що

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Доведемо, що тоді вона істинна і при $n=k+1$, тобто що

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}.$$

Справді,

$$\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-2}\right)=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Отже, з істинності рівності (4) при $n=k$ випливає, що вона істинна і при $n=k+1$. Отже, за принципом математичної індукції рівність (4) доведено для будь-яких $n\in N$. При $n=50$ одержуємо рівність, зазначену в умові задачі.

Вправи

3. Доведіть рівності:

а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

д) $1\cdot4+4\cdot7+7\cdot10+\ldots+(3n-2)(3n+1)=n(n+1)^2$;

е) $\dfrac{1^2}{1\cdot3}+\dfrac{2^2}{3\cdot5}+\dfrac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

ж) $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

з) $\dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$;

и) $(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

4. Знайдіть формули для таких сум:

а) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

в) $S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2$.

5. Знайдіть формули для таких добутків:

а) $D_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$;

б) $D_n=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

6. Доведіть тотожності:

а) $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\dfrac{x-(n-1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, $x\neq1$, $n\in N$;

б) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1,$

$x\neq 0,\ 1,\ -1,\ n\in N;$

в) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+3}{4}+\frac{x+7}{8}+\ldots+\frac{x+2^n-1}{2^n}=\frac{(x-1)(2^n-1)}{2^n}+n$, де $n\in N$.

5. Застосування методу математичної індукції для доведення нерівностей

Приклад 7

Доведемо, що якщо $a>b$ і a,b — додатні числа, то $a^n>b^n$.

Розв'язання

При $n=1$ твердження очевидне: $a^1>b^1$. Припустимо, що $a^k>b^k$. Доведемо, що тоді $a^{k+1}>b^{k+1}$.

Справді, перемноживши почленно нерівності $a^k>b^k$ і $a>b$, одержимо: $a^{k+1}>b^{k+1}$.

Отже, на підставі принципу математичної індукції твердження доведене для будь-якого $n\in N$.

Приклад 8

Розв'яжемо нерівність

$$2^n>2n+1 \tag{5}$$

на множині натуральних чисел.

Розв'язання

Безпосередня перевірка показує, що числа $n=1$, $n=2$ не задовольняють нерівність (5), а значення $n=3$, $n=4$, $n=5$ задовольняють цю нерівність. Виникає припущення, що будь-яке число $n\geq 3$ задовольняє нерівність (5). Доведемо це твердження методом математичної індукції.

При $n=3$ нерівність правильна: $2^3>2\cdot 3+1$. Припустимо, що $2^k>2k+1$, і доведемо, що тоді $2^{k+1}>2(k+1)+1$.

Справді, $2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(2k+1)=(2k+3)+(2k-1)>2k+3$ (ми використовували той факт, що $2k-1>0$ при будь-якому натуральному значенні k).

Отже, $2^n>2n+1$ при всіх $n\geq 3$, тобто множина розв'язків нерівності (5) така: $\{n\in N \mid n\geq 3\}$.

Приклад 9

Доведемо, що при $x>-1$ істинна нерівність

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \qquad (6)$$

Розв'язання

1) При $n=1$ маємо істинну нерівність $1+x \geq 1+x$.
2) Припустимо, що нерівність $(1+x)^k \geq 1+kx$ істинна, і доведемо, що тоді нерівність $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ теж істинна.

Оскільки $x>-1$, то $1+x>0$. І тому маємо:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x.$$

Отже, з істинності нерівності (6) при $n=k$ випливає її істинність при $n=k+1$. Виходить, на підставі принципу математичної індукції, що істинність нерівності (6) встановлена для всіх натуральних n. Ця нерівність називається ***нерівністю Бернуллі*** (на честь швейцарського математика XVII ст. Якоба Бернуллі).

Приклад 10

Довести, що при всіх натуральних $n>4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Розв'язання

База індукції. При $n=5$ нерівність справедлива: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Крок індукції. Нехай

$$2^k > k^2, \qquad (7)$$

де k – деяке натуральне число, більше, ніж 4. Доведемо,що тоді виконується й така нерівність $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Дійсно, помножимо обидві частини нерівності (7) на 2, одержимо

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^2 = k^2+k^2 > k^2+2k+1 = (k+1)^2,$$

бо при $k>4$ виконується така нерівність $k^2 > 2k+1$ (вона еквівалентна такій $k(k-2)>1$).Тому, використовуючи принцип математичної індукції, одержуємо, що для всіх натуральних $n \geq 5$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Приклад 11

Доведемо нерівність

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}. \qquad (8)$$

Розв'язання

Вираз, що міститься в лівій частині нерівності (8), являє собою суму дробів, знаменники яких послідовно зростають від 1 до 2^n-1. При $n=1$ він перетворюється в 1. Але $1>\frac{1}{2}$ — істинна нерівність, отже, нерівність (8) правильна при $n=1$.

Припустимо, що

$$S_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2},$$

і доведемо, що тоді

$$S_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}$$

Справді, маємо:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}\right)+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right).$$

Отже, $S_{k+1}=S_k+A$, де $A=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$. Вираз A являє собою суму 2^k дробів, кожен з який більший, ніж $\frac{1}{2^{k+1}}$. Отже, $A>2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$. Оскільки $S_k>\frac{k}{2}, A>\frac{1}{2}$ то звідси випливає, що $S_{k+1}=S_k+A>\frac{k+1}{2}$.

Істинність нерівності (8) доведена для всіх натуральних n.

Вправи

7. Знайдіть множину натуральних розв'язків нерівності:
   а) $a^n>n^2$;
   б) $2^n>n^3$.
8. Доведіть нерівності:
   а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$;
   б) $\sqrt{n}\le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n},\ n\ge 2$;
   в) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24},\ n\ge 2$;

г) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$;

д) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

е) $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!,\ n\geq 3$;

ж) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

з) $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}<\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ (у лівій частині n коренів).

6. Застосування методу математичної індукції до задач на подільність

Домовимося замість фрази «ділиться без остачі на» користуватися знаком «$\vdots$».

Приклад 12

Доведемо, що $\left(11^{n+2}+12^{2n+1}\right)\vdots\,133$.

Розв'язання

При $n=1$ маємо:

$$11^3+12^3=(11+12)\left(11^2-11\cdot 12+12^2\right)=23\cdot 133.$$

Але $(23\cdot 133)\vdots\,133$, а це означає істинність нашого твердження при $n=1$.

Припустимо, що це твердження істинне при $n=k$, тобто що $\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)\vdots\,133$. Доведемо, що тоді воно буде істинне і при $n=k+1$, тобто що $\left(11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}\right)\vdots\,133$, або $11^{k+3}+12^{2k+3}\vdots\,133$. Дійсно

$$11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}=11\cdot 11^{k+2}+11\cdot 12^{2k+1}+133\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Отримана сума ділиться на 133, тобто твердження істинне і при $n=k+1$.

За принципом математичної індукції наше твердження доведене для будь-яких $n\in N$.

Метод математичної індукції дозволяє довести одну знамениту теорему, про яку ми зараз розповімо. Зазначимо спочатку, що для будь-якого

$n \in N$ число $n^2 - n$ — парне. Справді, $n^2 - n = n(n-1)$, а з двох натуральних чисел $n-1$, n, що йдуть підряд, одне обов'язково парне. Отже, і їхній добуток — парне число. Далі, неважко довести, що $(n^3 - n) \vdots 3$. Справді, $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, а з трьох натуральних чисел $n-1$, n, $n+1$, що йдуть підряд, одне обов'язково ділиться на 3; виходить, і їхній добуток ділиться на 3.

Отже,

$$(n^2 - n) \vdots 2,$$

$$(n^3 - n) \vdots 3.$$

Виникає припущення, що $(n^m - n) \vdots m$. Але вже приклад $m = 4$, $n = 3$ спростовує це твердження: $3^4 - 3$ не ділиться на 4. У той же час при $m = 5$ твердження знову справедливе: $(n^5 - n) \vdots 5$.

Справді, маємо: $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Число n або ділиться на 5 без остачі, або дає одну із остач 1, 2, 3, 4.

Відповідно n може мати один з наступних п'яти виглядів:

1) $n = 5k$;
2) $n = 5k+1$;
3) $n = 5k+2$;
4) $n = 5k+3$;
5) $n = 5k+4$.

У випадку 1) маємо: $n \vdots 5$, а тому і $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$.

У випадку 2) маємо: $(n-1) \vdots 5$, а тому і $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$.

У випадку 3) маємо: $n^2 + 1 = (5k+2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$. Отже, $(n^2+1) \vdots 5$, а тому і $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$.

У випадку 4) маємо: $n^2 + 1 = (5k+3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$. Отже, $(n^2+1) \vdots 5$, а тому і $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$.

У випадку 5) маємо: $(n+1) \vdots 5$, а тому і $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$.

Отже, методом повної індукції ми довели, що $(n^5 - n) \vdots 5$ для будь-яких $n \in N$.

Зауважуємо, що числа 2, 3, 5 прості. Це дозволяє уточнити нашу гіпотезу: для будь-якого $n \in N$ і будь-якого простого числа p число $n^p - n$ ділиться на p. Це твердження називається *малою теоремою Ферма*. Воно доводиться методом математичної індукції з використанням формули бінома Ньютона.

Вправи

9. Доведіть:

а) $\left(6^{2n} - 1\right) \vdots 35$;

б) $\left(4^n + 15n - 1\right) \vdots 9$;

в) $\left(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}\right) \vdots 17$;

г) $\left(7^{n+2} + 8^{2n+1}\right) \vdots 57$;

д) $\left(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}\right) \vdots 37$;

е) $\left(3^{2n+3} - 24n + 37\right) \vdots 64$;

ж) $\left(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4\right) \vdots 25$.

7. Застосування методу математичної індукції для вивчення властивостей числових послідовностей

Арифметична і геометрична прогресії, являють собою найпростіші приклади послідовностей, для вивчення властивостей яких з успіхом застосовується метод математичної індукції. Прогресії визначаються рекурентними співвідношеннями, тобто співвідношеннями, що дозволяють знайти член послідовності за одним чи декількома її попереднім членами. Арифметична прогресія задається рекурентним співвідношенням $a_{n+1} = a_n + d$, а геометрична прогресія — рекурентним співвідношенням $b_{n+1} = b_n \cdot q$ $(b_1 \neq 0, q \neq 0)$. Іншими словами, саме визначення прогресій дається за допомогою переходу від n до $n+1$. Тому більшість формул, що відносяться до прогресій, доцільно виводити за допомогою методу математичної індукції.

Наприклад, виводячи формули n-го члена арифметичної прогресії зауважуємо, що $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d$. Це дозволяє припустити, що для будь-якого натурального числа n істинна рівність $a_n = a_1 + d(n-1)$. Доведемо її методом математичної індукції.

При $n=1$ вона істинна: $a_1=a_1+d\cdot(1-1)$. Припустимо, що рівність істинна при $n=k$, тобто що $a_k=a_1+d\cdot(k-1)$, і доведемо, що тоді вона істинна і при $n=k+1$, тобто що $a_{k+1}=a_1+dk$.

Справді, маємо: $a_{k+1}=a_k+d=a_1+d(k-1)+d=a_1+dk$.

За принципом математичної індукції рівність істинна для всіх $n\in N$.

Аналогічно виводиться формула n-го члена геометричної прогресії $b_n=b_1q^{n-1}$ (виведення цієї формули ми залишаємо читачу).

Покажемо ще, як за допомогою методу математичної індукції виводиться формула суми S_n перших n членів геометричної прогресії b_1, b_2, …, b_n, …; $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$.

Доведемо, що при $q\neq 1$

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}. \qquad (8)$$

При $n=1$ маємо: $S_1=b_1$. З іншого боку, $\frac{b_1(q^1-1)}{q-1}=b_1$. Виходить, при $n=1$ рівність (8) істинна.

Припустимо, що $S_k=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}$ і доведемо, що тоді справедлива рівність $S_{k+1}=\frac{b_1(q^{n+1}-1)}{q-1}$.

Справді, маємо:

$$S_{k+1}=S_k+b_{k+1}=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}+b_1q^k=\frac{b_1q^k-b_1+b_1q^{k+1}-b_1q^k}{q-1}=\frac{b_1(q^{k+1}-1)}{q-1}.$$

За принципом математичної індукції робимо висновок, що рівність (8) істинна при всіх $n\in N$.

Приклад 13

Числова послідовність визначається наступними умовами: $a_0=2$, $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$. Знайдемо формулу n-го члена послідовності.

Розв'язання

Користуючись рекурентним співвідношенням, знаходимо:

$$a_2=3a_1-2a_0=3\cdot 3-2\cdot 2=5,\ a_3=3a_2-2a_1=9,\ a_4=3a_3-2a_2=17.$$

Зауважуємо, що $5 = 2^2 + 1, 9 = 2^3 + 1, 17 = 2^4 + 1$. Тому можна припустити, що $a_n = 2^n + 1$. Доведемо це твердження методом математичної індукції.

При $n = 1$ твердження справедливе. Припустимо, що воно справедливе при будь-якому $n = k$, і доведемо, що тоді воно виконується і при $n = k + 1$.

Справді, маємо:

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3\left(2^k + 1\right) - 2\left(2^{k-1} + 1\right) = 2^{k+1} + 1.$$

Отже, наше твердження правильне для будь-яких $n \in N$ (ми застосували тут метод математичної індукції у формі, зазначеній в теоремі з п. 3).

Приклад 14

Послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ визначається наступними умовами: $a_0 = 1, a_1 = 1, \ldots, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Доведемо дві властивості цієї послідовності:

1) $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} + 1$;
2) $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$.

Розв'язання

1) Випишемо декілька перших членів послідовності. Маємо: $a_0 = 1, a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$, $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$. При $n = 1$ $a_{2n+2} = a_4 = 5 = a_1 + a_3 + 1$. Виходить, при $n = 1$ твердження 1) істинне. Припустимо, що воно істинне при $n = k$, тобто

$$a_{2k+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1 \tag{9}$$

Доведемо, що тоді воно істинне і для $n = k + 1$, тобто $a_{2k+4} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1$.

Справді, скориставшись рекурентним співвідношенням, одержимо: $a_{2k+4} = a_{2k+3} + a_{2k+2}$. Застосувавши для a_{2k+2} формулу (9), одержимо:

$$a_{2k+4} = a_{2k+3} + \left(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1\right) = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1.$$

Отже, рівність, яку доводимо, виконується для всіх $n \in N$.

2) Для $n = 1$ твердження справедливе: $a_1^2 - a_0 \cdot a_2 = (-1)^1$, оскільки $a_0 = 1$, $a_1 = 1, a_2 = 2$.

Припустимо, що

$$a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1} = (-1)^k,$$

і доведемо, що тоді $a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = (-1)^{k+1}$.

Справді,

$$a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = a_{k+1}^2 - a_k\left(a_{k+1} + a_k\right) = a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+1} - a_k^2 = a_{k+1}\left(a_{k+1} - a_k\right) - a_k^2 =$$

$$= a_{k+1} \cdot a_{k-1} - a_k^2 = -\left(a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1}\right) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Таким чином властивість, що нас цікавить, доведена.

Послідовність, про яку йшла мова в тільки що розглянутому прикладі, називається *послідовністю Фібоначчі* (на честь італійського математика XIII ст. Леонарда Пізанського, що писав під псевдонімом Фібоначчі).

Вправи

10. Доведіть властивості послідовності Фібоначчі:

а) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$;

б) $a_{n+9} = a_{n-1} \cdot a_8 + a_n \cdot a_9$;

в) $a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

11. Напишіть перші 11 членів послідовності Фібоначчі (від a_0 до a_{10}). Порівняйте a_3 із сумою $a_0 + a_1$, a_4 із сумою $a_0 + a_1 + a_2$, a_5 із сумою $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, ..., a_{10} із сумою $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_8$. Висловіть припущення про існування визначеного співвідношення між a_{n+2} і сумою $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Доведіть його методом математичної індукції.

12. Числова послідовність (a_n) визначається так: $a_0 = 0$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Доведіть, що (a_n) – зростаюча послідовність.

13. Числова послідовність (a_n) визначається так:

$a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$. Доведіть, що $a_n = \dfrac{a + 2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{b - a}{3 \cdot 2^{n-1}}$.

14. Числова послідовність (a_n) визначається так: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$. Доведіть, що $a_n = \frac{1}{2}\left(5 \cdot 3^{n-1} - 1\right)$.

15. Доведіть, що якщо $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, то $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ при будь-якому $n \in N$.

8. Застосування методу математичної індукції для вивчення властивостей скінченних множин

Почнемо з розв'язання задачі про число підмножин скінченної множини X.

Якщо множина X не містить жодного елемента, тобто $X = \varnothing$, то, очевидно, вона має тільки одну підмножину: $\varnothing$.

Якщо множина X складається з одного елемента, тобто $X=\{a\}$, то, очевидно, вона має дві підмножини: $\varnothing$ і $\{a\}$.

Двохелементна множина $X=\{a, b\}$ містить чотири підмножини: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Трьохелементна множина $X=\{a, b, c\}$ має вісім підмножин: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Позначимо число підмножин n-елементної множини через $S(n)$. З розглянутих окремих випадків випливає, що $S(0)=1$, $S(1)=2$, $S(2)=4$, $S(3)=8$.

Зауважуємо, що $1=2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$, $8=2^3$. Це спостереження приводить нас до такого індуктивного припущення: **число підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n.** Доведемо це твердження методом математичної індукції.

Вище ми вже переконалися в істинності твердження при $n=1$ (а також при $n=0, 2, 3$). Припустимо, що твердження справедливе при $n=k$, тобто що будь-яка k-елементна множина має 2^k підмножин. Доведемо, що тоді твердження справедливе і для $n=k+1$, тобто що кожна $(k+1)$-елементна множина має 2^{k+1} підмножин.

Справді, нехай

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}.$$

Ця $(k+1)$-елементна множина одержується із k-елементної множини $Y=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ додаванням одного елемента x_{k+1}. Кожна з підмножин множини X або не містить цього «доданого» елемента x_{k+1}, або містить його. У першому випадку вона є підмножиною множини Y, а за припущенням індукції таких підмножин є 2^k. У другому випадку, відкидаючи елемент x_{k+1}, знову одержуємо підмножину множину Y. Виходить, число підмножин другого виду дорівнює числу підмножин першого виду, тобто дорівнює 2^k. Але тоді загальне число підмножин множин X дорівнює $2^k+2^k=2^{k+1}$.

Отже, ми довели, що рівність $S(n)=2^n$ істинна при $n=1$ і, що з її істинності при $n=k$ випливає, що вона правильна і при $n=k+1$. Звідси за принципом математичної індукції робимо висновок про справедливість нашого твердження для будь-якого $n \in N$.

Позначимо число елементів скінченної множини X через $n(X)$. Якщо, наприклад, $X=\{a, b, c, d\}$, то $n(X)=4$. Введемо ще поняття декартового добутку множин і розглянемо питання про число елементів у декартовому добутку скінченних множин.

Нехай дано дві множини X_1 і X_2. Розглянемо множину, що складається з усіх можливих пар виду (a, b), де $a \in X_1$, $b \in X_2$. У кожній такій парі перший компонент — елемент множини X_1, а другий — елемент множини X_2. Множина усіх таких пар називається *декартовим добутком двох множин* X_1 і X_2 і позначається $X_1 \times X_2$. Помітимо, що мова йде про так звані упорядковані пари, тобто, скажімо, пари (a,b) і (b,a) вважаються різними, якщо $a \neq b$ (подібно тому, як різні дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{b}{a}$, якщо $a \neq b$).

Наприклад, якщо $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{1, 2\}$, то декартовий добуток $X_1 \times X_2$ складається із шести пар: $(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)$. Декартовий же добуток $X_2 \times X_1$ теж складається із шести пар, компоненти яких йдуть в іншому порядку: $(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)$. Таким чином, множини $X_1 \times X_2$ і $X_2 \times X_1$, узагалі кажучи, різні: $X_1 \times X_2 \neq X_2 \times X_1$. Прийнято вважати, що якщо хоча б одна з множин X_1, X_2 порожня, то і їхній декартовий добуток порожній:

$$X_1 \times \varnothing = \varnothing \times X_2 = \varnothing.$$

Знайдемо число елементів декартового добутку $X \times Y$ у випадку, коли X складається з m елементів, а Y з k елементів, тобто $n(X) = m$, $n(Y) = k$. Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Декартовий добуток $X \times Y$ складається з пар (x_i, y_j), де $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$. Ці пари можна розташувати в такий спосіб:

$$\begin{gathered}(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_k); \\ (x_2, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_k); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_m, y_1), (x_m, y_2), \ldots, (x_m, y_k).\end{gathered}$$

Ми одержали m рядків по k пар у кожному рядку. Звідси випливає, що загальне число пар, що входять у $X \times Y$, дорівнює mk, тобто $n(X) \times n(Y)$. Іншими словами, має місце така формула:

$$n(X \times Y) = n(X)n(Y) \tag{10}$$

Нехай тепер дані s множин $X_1, X_2, \ldots, X_s$. Розглянемо такі упорядковані набори $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, що $x_k \in X_k$, $1 \leq k \leq s$. Множина, що складається з усіх можливих наборів α зазначеного виду, називається *декартовим добутком s множин* $X_1, X_2, \ldots, X_s$ і позначається $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s$.

Вище ми бачили, що $n(X \times Y) = n(X)n(Y)$. За допомогою методу математичної індукції можна узагальнити цю рівність на випадок декартового добутку будь-якого скінченного числа множин.

Доведемо, що якщо $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — скінченні множини, то

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s) = n(X_1)n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_s). \qquad (11)$$

При $s = 2$ ми вже перевірили істинність формули (11). Припустимо, що формула справедлива при $s = k$, тобто що виконується рівність

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k) = n(X_1)n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k),$$

і доведемо, що тоді формула (11) справедлива і при $s = k + 1$, тобто що виконується рівність

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = n(X_1)n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k)n(X_{k+1}).$$

Справді, розглянемо довільний елемент $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ множини $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}$ і покладемо $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Очевидно, що між множиною наборів виду $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ і множиною пар виду (α, x_{k+1}) є взаємно однозначна відповідність, тобто наборів виду $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ стільки ж, скільки пар виду (α, x_{k+1}). Якщо множину всіх α позначити через A, то можна сказати, що множина, яка нас цікавить, $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}$ має стільки ж елементів, скільки множина $A \times X_{k+1}$ тобто $n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = n(A \times X_{k+1})$. Але за доведеним вище для двох множин A і X_{k+1} маємо: $n(A \times X_{k+1}) = n(A)n(X_{k+1})$, а за побудовою A є не що інше, як $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. Скориставшись припущенням індукції, одержуємо, що

$$n(A \times X_{k+1}) = n(A)n(X_{k+1}) = n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k) \times n(X_{k+1}) =$$
$$= n(X_1)n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k)n(X_{k+1}).$$

Отже, $n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = n(X_1)n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k)n(X_{k+1})$.

Тим самим формула (11) доведена для всіх натуральних чисел $s \geq 2$. З неї, зокрема, випливає, що

$$n(\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{s \text{ раз}}) = (n(X))^s. \qquad (12)$$

Це означає, що s-ий декартовий степінь m-елементної множини X містить m^s елементів.

Доведену формулу (11) можна наочно зобразити за допомогою креслень особливого виду, які називаються «деревами». Нехай, наприклад, множина X складається з чотирьох елементів: $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а множина Y із трьох елементів: $Y=(y_1, y_2, y_3)$. Візьмемо на площині яку-небудь точку O і проведемо з неї чотири відрізки, що відповідають елементам множини X. З кінця кожного відрізка проведемо по три відрізки, що відповідають елементам множини Y. Тоді кожній парі (x_k, y_l) відповідає шлях, що починається в точці O і складається з двох відрізків. Наприклад, парі (x_2, y_3) відповідає шлях, виділений на *рисунку 1*. Множина таких шляхів знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною кінців відрізків, проведених на другому кроці. Число цих відрізків дорівнює, $4\cdot3=12$. Ясно, що якщо додати ще множину M, що складається з п'яти елементів, то з кожного кінця відрізка, проведеного на другому кроці, треба буде провести ще по п'ять відрізків, усього вийде $4\cdot3\cdot5=60$ шляхів. Це число дорівнює числу елементів декартового добутку $X\times Y\times M$.

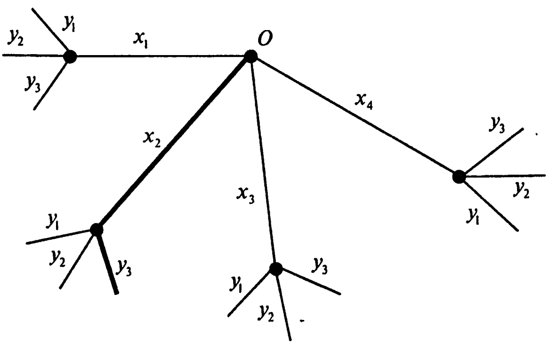


Рис. 1

Вправи

16. Доведіть, що для всіх $m\ge2$

$$n(X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_m)=n(X_1)+n(X_2)+\ldots+n(X_m),$$

де $X_1, X_2, \ldots, X_m$ — попарно непересічні (тобто $X_i\cap X_j=\varnothing$, якщо $i\ne j$) скінченні множини.

17. Доведіть, що сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого n-кутника рівна $2d(n-2)$.

18. Доведіть, що число діагоналей будь-якого опуклого n-кутника дорівнює $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

9. Індукція в геометрії

Метод математичної індукції знаходить застосування і в геометрії. Наведемо приклади.

Приклад 15

Доведемо, що n різних точок, що лежать на прямій, ділять її на $n+1$ інтервал (з яких два інтервали нескінченні).

Розв'язання

При $n=1$ це твердження істинне, тому що одна точка ділить пряму на $1+1=2$ інтервали. Припустимо, що воно істинне при $n=k$, тобто що будь-які k різних точок ділять пряму на $k+1$ інтервал. Візьмемо тепер на прямій $k+1$ точки A_1, A_2, …, A_{k+1}. Якщо відкинути точку A_{k+1}, залишиться k точок, що ділять пряму на $k+1$ інтервал. Точка A_{k+1} лежить на одному з цих інтервалів і ділить його у свою чергу на два інтервали. Тому загальне число інтервалів, на які ділять пряму $k+1$ точка, дорівнює $(k+1)+1=k+2$.

Отже, наше твердження істинне при $n=1$, а з його істинності при $n=k$ випливає, що воно істинне і при $n=k+1$. Тим самим доведено, що воно істинне для будь-яких $n \in N$.

Приклад 16*

Кінці відрізка $[AB]$ пронумеровані цифрами 1 і 2. Розіб'ємо його на частини точками A_1, A_2, …, A_n і поставимо у відповідність кожній з цих точок одну з цифр 1 чи 2. Доведемо, що число відрізків, що вийшли при розподілі, кінці яких мають різні номери, непарне.

Розв'язання

Для зручності назвемо відрізки, кінці яких мають різні номери, різнобарвними, а відрізки, номери кінців яких однакові, — одноколірними. При $n=1$ відрізок $[AB]$ розбитий на два відрізки. Який би номер не приписати точці A_1, що ділить цей відрізок, вийде один одноколірний і один різнобарвний відрізок (*рис. 2*). У цьому випадку твердження істинне. Припустимо, що воно справедливо для випадку $n=k$. Візьмемо на відрізку $[AB]$ $k+1$ точку: $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ і поставимо цим точкам номери 1 і 2. Відкинувши точку A_{k+1}, одержимо розбивку відрізка на $k+1$ відрізок, причому, за припущенням

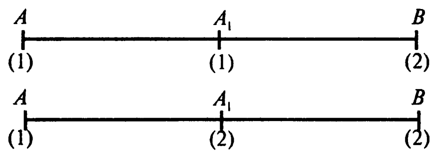


Рис. 2

індукції кількість різнобарвних відрізків у цьому випадку непарна. Розберемо можливі випадки.

а) Точка A_{k+1} лежить на різнобарвному відрізку. Тоді при будь-якій нумерації точки A_{k+1} число різнобарвних відрізків не зміниться і тому залишиться непарним.

б) Точка A_{k+1} лежить на одноколірному відрізку. Тоді, якщо точка A_{k+1} одержить той же номер, що і кінці відрізка, число різнобарвних відрізків не зміниться (виходить два одноколірних відрізки). Якщо ж кінці відрізка мали один номер, а точка A_{k+1} — інший, то додадуться два різнобарвних відрізки, і тому, загальне число різнобарвних відрізків залишиться непарним.

Отже, твердження істинне при $n=1$, і з його істинності при $n=k$ випливає істинність і при $n=k+1$. Виходить, що воно істинне при всіх $n \in N$.

Приклад 17

Нехай на площині дані n точок: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. З'єднаємо деякі пари цих точок лініями так, що ніякі дві лінії не мають спільних точок, відмінних від $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ці лінії задають розбивку площини на кілька областей. Назвемо точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вершинами сітки, що вийшла, лінії — її ребрами. Число ребер позначимо через r, число областей (включаючи нескінченну область) — через s, а число вершин — через n (наприклад, для сітки, зображеної на *рис. 3*, $n=5$, $r=7$, $s=4$). Сітку називають зв'язною, якщо з кожної її точки можна перейти в будь-яку іншу, рухаючись лише по ребрах сітки (наприклад, сітка на *рис. 3* — зв'язна, а на *рис. 4* — незв'язна). Знайдемо залежність між n, m, s у випадку зв'язної сітки.

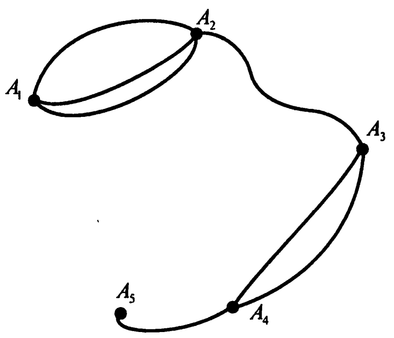


Рис. 3

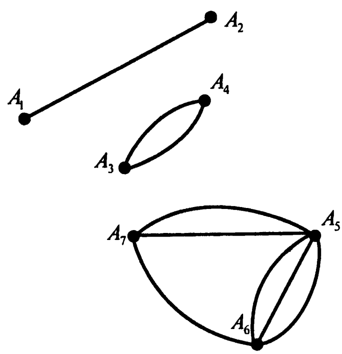


Рис. 4

Розв'язання

Зрозуміло, що при $n \geq 1$ з будь-якої вершини зв'язної сітки виходить хоча б одне ребро. Вершини, з яких виходить тільки одне ребро, назвемо кінцевими (вершина A_5 на рис. 4). Якщо сітка складається зі сторін n-кутника, то $r = n$, а $s = 2$ (контур многокутника ділить площину на дві області). Тому виконується рівність $n - r + s = 2$. Ця рівність збережеться, якщо всередині многокутника взяти точку O і з'єднати її з усіма вершинами (*рис. 5*) — вийде $n+1$ область, $n+1$ вершина і $2n$ ребер, а $(n+1) - 2n + (n+1) = 2$. Збережеться рівність і у випадку, коли з деяких вершин виходять «висячі» ребра (наприклад, ребро A_4A_5 на рис. 4) — кожне таке ребро додає 1 і в число ребер, і в число вершин, не змінюючи числа областей, а тому не змінюючи і значення виразу $n - r + s$.

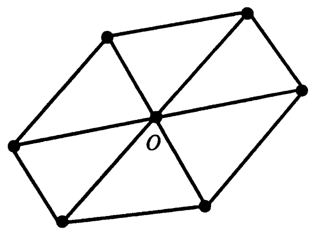


Рис. 5

Зроблені спостереження приводять до гіпотези, що правильне таке твердження: для будь-якої зв'язної сітки на площині має місце рівність $n - r + s = 2$. Це твердження називається *теоремою Ейлера*.

Доведемо цю теорему методом математичної індукції, причому індукцію проведемо по числу r ребер. Якщо $r = 1$, то маємо одне ребро, що з'єднує точки A_1 і A_2. Це ребро не розбиває площину на частини, і тому $s = 1$. Отже, $n = 2$, $r = 1$, $s = 1$, і тому $n - r + s = 2$. Виходить, для цього випадку теорема справедлива.

Нехай теорема Ейлера вже доведена при $r = k$. Візьмемо сітку, що містить $k+1$ ребро. Нехай для неї число вершин n і число областей s. Ми хочемо довести, що $n - (k+1) + s = 2$. Розберемо два можливих випадки.

а) У сітці є замкнутий шлях, що виходить з деякої точки і повертається в неї. У цьому випадку зітремо одне з ребер, що входять у цей шлях. Число вершин не зміниться, а число ребер і число областей зменшиться на 1 (стерте ребро розділяло дві області, що тепер з'єдналися в одну). Отже, вийде зв'язна сітка, що складається з n вершин, k ребер і $s - 1$ областей. За припущенням індукції, $n - k + (s-1) = 2$. Але це означає, що $n-(k+1)+s=2$, тобто що теорема Ейлера правильна і для спочатку узятої сітки.

б) У сітці немає замкнутих шляхів (такі сітки називають деревами). Легко довести, що в такій сітці є хоча б одна кінцева точка (до неї можна дійти, вийшовши з якої-небудь вершини сітки і рухаючись по її ребрах; через те, що в сітці немає замкнутих шляхів, ми ніколи не повернемося у вже пройдену точку і рано чи пізно потрапимо в кінцеву точку). Крім того, для такої сітки $s=1$, тому що дерево, вочевидь, не розбиває площину на частини.

Відкинемо кінцеву точку і ребро, що з неї виходить. Одержимо зв'язну сітку, що містить $n-1$ вершин, k ребер і одну область. За припущенням індукції $n-1-k+1=2$. Виходить, $n-(k+1)+1=2$, тобто й у цьому випадку твердження істинне , оскільки $s=1$.

Отже, теорема Ейлера істинна для сіток, що складаються з одного ребра, а з її істинності для сітки, що складається з k ребер, випливає, що вона істинна і для сітки, що містить $k+1$ ребер. Таким чином, згідно з принципом математичної індукції, вона істинна для всіх сіток.

Вправи

19. Нехай на відрізку $[AB]$ узяті n точок і ці точки, так само як і кінці відрізка, занумеровані цифрами 1 і 2, причому точка A одержала номер 1, а точка B — номер 2. Позначимо через r число відрізків, лівий кінець яких одержав номер 1, а правий — номер 2, а через s — число відрізків, у яких лівий кінець одержав номер 2, а правий — номер 1 (вважаємо, що точка A лежить ліворуч від точки B). Доведіть, що $r-s=1$.
20. На площині проведено n прямих. Доведіть, що області, на які ці прямі розбивають площину, можна пофарбувати білою і чорною фарбами так, що сусідні області (тобто області, що мають хоча б одне спільне ребро) будуть мати різний колір (розфарбування з такою властивістю називають правильним).
21. На площині дано n кіл. Доведіть, що області, на які вони розбивають площину, можна правильно розфарбувати в білий і чорний кольори.
22. Доведіть, що карту можна правильно розфарбувати двома фарбами в тому і тільки в тому випадку, коли в кожній вершині сходиться парне число ребер.

Відповіді

1. $S_{316}=158, S_{327}=-164$. 2. Ні. 4. а) $\frac{n}{2n+1}$; б) $\frac{n}{3n+1}$; в) $(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$.

5. а) $\frac{1}{n+1}$; б) $\frac{n+2}{2n+2}$. 7. а) $n\geq 5$; б) $n\geq 10$. 11. $a_{n+2}=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$.

ЗАДАЧІ ВСЕУКРАЇНСЬКИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Нижче пропонуються задачі Всеукраїнських математичних олімпіад різних етапів, для розв'язання яких використовується метод математичної індукції. У дужках біля номера вказані класи, яким були запропоновані ці задачі.

1. (7–8) Доведіть, що довільну суму грошей, більшу, ніж 7 коп., можна сплатити монетами вартістю в 3 коп. та 5 коп.

Розв'язання

Індукцію ведіть по числу, яке виражає суму всіх копійок. *База*. Суму в 8 коп., очевидно, можна сплатити. *Крок*. Припустимо, що нам вдалося сплатити суму в n копійок вказаними монетами. Якщо серед них є монета в 5 коп., то замінимо її на дві монети по 3 коп. і одержимо суму в $(n+1)$ коп. Якщо ж всі монети суми по 3 коп., то їх не менше трьох і, замінивши три монети по 3 коп. на дві монети по 5 коп., ми також збільшимо суму на 1.

Можна скористатися й іншою формою індукції. *База*. Суму в 8 коп., в 9 коп. і в 10 коп., очевидно, можна сплатити. *Крок*. Припустимо, що нам вдалося сплатити суму в n коп. Додавши до неї ще одну монету, вартістю в 3 коп., одержимо суму в $(n+3)$ коп.

2. (8–9) Дійсне число x таке, що $x+\frac{1}{x}$ — ціле число. Доведіть, що для довільного натурального n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ також ціле.

Вказівка. Використавши індукцію по числу n, скористайтесь тотожністю

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

3. (9) Доведіть, що $1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ для всіх натуральних n.

Вказівка. Індукційний перехід зводиться до перевірки рівності:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6},$$

яка є істинною для будь-яких натуральних n.

4. (9–10) Нехай a — ціле непарне число, x та y корені рівняння $t^2+at-1=0$. Доведіть, що числа x^4+y^4 та x^5+y^5 — цілі і взаємно прості.

Розв'язання

Доведіть індукцію по числу n, що числа x^n+y^n та $x^{n+1}+y^{n+1}$ — цілі та взаємно прості. *База.* $x^0+y^0=2$; $x^1+y^1=-a$. За умовою a — непарне, тому a і 2 взаємно прості. *Крок індукції.* Нехай вже доведено, що x^n+y^n та $x^{n+1}+y^{n+1}$ — цілі взаємно прості числа.

Оскільки, x та y корені рівняння $t^2+at-1=0$, то $x+y=-a$ і $xy=-1$. Тоді дістанемо

$x^{n+2}+y^{n+2}=\left(x^{n+1}+y^{n+1}\right)(x+y)-x^{n+1}y-xy^{n+1}=-a\left(x^{n+1}+y^{n+1}\right)+\left(x^n+y^n\right)$ — ціле число. Нехай d — спільний дільник чисел $x^{n+1}+y^{n+1}$ та $x^{n+2}+y^{n+2}$. Тоді $x^n+y^n=x^{n+2}+y^{n+2}+a\left(x^{n+1}+y^{n+1}\right)$ ділиться на d, тобто d — спільний дільник чисел x^n+y^n та $x^{n+1}+y^{n+1}$. Отже, $d=1$, тобто
НСД $\left(x^{n+1}+y^{n+1}; x^{n+2}+y^{n+2}\right)=1$.

5. (9–10) Дано декілька квадратів загальної площі 1. Доведіть, що їх можна розмістити без накладань всередині квадрата зі стороною 2.

Вказівка. Доведіть за допомогою індукції (по числу n) таке твердження: n квадратів загальної площі S можна розмістити всередині квадрата зі стороною $2\sqrt{S}$. Для цього розгляньте найбільший з n квадратів.

6. (9–10) Довести, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць, ділиться на 3^n. (Мається на увазі десятковий запис).

Розв'язання

Позначимо наші числа так: $x_n = \underbrace{11...11}_{3^n \text{ одиниць}}$, де n — натуральне число.

Нам потрібно довести, що $x_n \vdots 3^n$.

Застосуємо індукцію.

База індукції. При $n=1$, маємо $x_1 = 111 \vdots 3$, за ознакою подільності на 3. Отже, $x_1 \vdots 3^1$.

Крок індукції. Нехай $x_n \vdots 3^n$ для деякого натурального n.

Доведемо, що $x_{n+1} \vdots 3^{n+1}$.

Дійсно,

$$x_{n+1} = \underbrace{11...11}_{3^{n+1}} = \underbrace{11...1}_{3^n}\underbrace{11...1}_{3^n}\underbrace{11...1}_{3^n} = \underbrace{11...1}_{3^n}\cdot 10^{2\,3^n} + \underbrace{11...1}_{3^n}\cdot 10^{3^n} + \underbrace{11...1}_{3^n} =$$

$$= \underbrace{11...1}_{3^n}\left(100^{3^n} + 10^{3^n} + 1\right) = x_n\left(100^{3^n} + 10^{3^n} + 1\right).$$

Оскільки $x_n \vdots 3^n$ за припущенням, а число $\left(100^{3^n} + 10^{3^n} + 1\right) \vdots 3$ (бо воно має вигляд 100...0100...01 і його сума цифр дорівнює 3), тому x_{n+1} ділиться на $3^n \cdot 3 = 3^{n+1}$, що і треба було довести.

7. (9) Доведіть, що число $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2003}$ можна подати у вигляді $a + b\sqrt{2}$, де a і b взаємно прості цілі числа.

Розв'язання

Методом математичної індукції доведемо більш загальне твердження: для кожного натурального n існують такі взаємно прості числа a і b, що виконується рівність $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

База індукції. При $n=1$ одержуємо $a_1 = 1$ і $b_1 = 1$ і при цьому $(a_1, b_1) = 1$ (тут через (a, b) позначено найбільший спільний дільник натуральних чисел a і b).

Крок індукції. Нехай $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, де $(a_n, b_n) = 1$.

Доведемо, що $\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$, де $(a_{n+1}, b_{n+1}) = 1$.

Дійсно,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)=$$
$$=\left(a_n+2b_n\right)+\left(a_n+b_n\right)\sqrt{2},$$

тобто $a_{n+1}=a_n+2b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$.

Оскільки a_n і b_n — натуральні числа, то a_{n+1} і b_{n+1} — натуральні числа.

Доведемо, що $(a_{n+1},b_{n+1})=1$. Припустимо, що це не так, тоді $(a_{n+1},b_{n+1})=d$, $d>1$ — натуральне число. Тоді $a_{n+1}\,\vdots\,d$ і $b_{n+1}\,\vdots\,d$, але $b_n=a_{n+1}-b_{n+1}$ — ділиться на d і $a_n=2b_{n+1}-a_{n+1}$ — ділиться на d. Отже, $d>1$ — спільний дільник a_n і b_n, що суперечить умові $(a_n,b_n)=1$.

Одержане протиріччя завершує доведення.

8. **(9)** Послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентним способом: $a_1=m$, $a_{n+1}=a_n+2^{a_n}$ для всіх натуральних n, m — дане натуральне число. Доведіть, що серед членів цієї послідовності знайдеться безліч чисел, які діляться на 3.

Розв'язання

За допомогою індукції (по числу n) доведемо, що

$$a_{n+1}=m+2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_n}.$$

База індукцій. При $n=1$, використовуючи рекурентне співвідношення, одержимо $a_2=a_1+2^{a_1}=m+2^{a_1}$.

Крок індукції. Нехай $a_n=m+2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_{n-1}}$ для деякого натурального $n>1$.

Доведемо, що тоді $a_{n+1}=m+2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_{n-1}}+2^{a_n}$.

Дійсно,

$$a_{n+1}=a_n+2^{a_n}=\left(m+2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_{n-1}}\right)+2^{a_n}=$$
$$=m+2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_n},$$

що і треба було довести.

Кожне з чисел вигляду 2^a, де $a\in N$ при діленні на 3 дає остачу 1 або 2: при парних a дає остачу 1, при непарних a дає остачу 2.

1) Нехай m — парне число, тоді a_i — парні числа, тобто $2^{a_i}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.

Якщо $m=3k$, де $k\in N$, то $a_1\,\vdots\,3$, $a_4\,\vdots\,3$, $a_7\,\vdots\,3$ і т. д.

Дійсно,

$$a_{n+3}-a_n=\left(m+2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_{n+2}}\right)-\left(m+2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_{n-1}}\right)=$$

$$=2^{a_n}+2^{a_{n+1}}+2^{a_{n+2}}\equiv 1+1+1\equiv 0(\mathrm{mod}3). \qquad (*)$$

Якщо $m=3k+1$, то $a_3 \vdots 3, a_6 \vdots 3, a_9 \vdots 3$ і т. д. (бо має місце (*)).

Якщо $m=3k+2$, то $a_2 \vdots 3, a_5 \vdots 3, a_8 \vdots 3$ і т. д. (бо має місце (*)).

2) Нехай m — непарне, тоді всі a_i — непарні числа, тобто $2^{a_i}\equiv 2(\mathrm{mod}3)$. Крім того, $a_{n+3}-a_n=2^{a_n}+2^{a_{n+2}}+2^{a_{n+1}}\equiv 2+2+2\equiv 0(\mathrm{mod}3)$.

Далі одержуємо аналогічний результат, як і у випадку, коли m — парне число.

Отже, ми довели, що існує безліч членів даної послідовності (третина), кожний з яких ділиться на 3.

9. (10–11) Доведіть нерівність

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\le 3-\frac{2}{\sqrt{n}}$$

для всіх натуральних n.

Розв'язання

Доведемо нерівність методом математичної індукції.

База індукції. При $n=1$, маємо $1=\frac{1}{1\sqrt{1}}\le 3-\frac{2}{\sqrt{1}}=1$, що є правильним.

Крок індукції. Нехай для деякого натурального $n>1$.

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\le 3-\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Доведемо, що $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\le 3-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

Дійсно,

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\le$$

$$\le 3-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\le 3-\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Для доведення останньої нерівності необхідно довести таку нерівність: $\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\geq\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

Дійсно, ця нерівність еквівалентна таким нерівностям:

$$\frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\geq\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

$$2(n+1)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\geq\sqrt{n},$$

$$2(n+1)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\geq\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right),$$

$$2(n+1)\geq\sqrt{n(n+1)}+n,$$

$$n+2\geq\sqrt{n(n+1)},$$

$$n^2+4n+4\geq n^2+n,$$

$3n+4\geq 0$ — правильно для всіх натуральних n.

10. (10–11) Дано послідовність $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Відомо, що:

а) $0\leq a_0\leq a_1\leq\ldots\leq a_n\leq\ldots$;

б) якщо $b_k=a_{k+1}-a_k$, то $b_0\geq b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n\geq\ldots$.

Довести, що послідовність $a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots$ незростаюча.

Розв'язання

Нам потрібно довести, що $a_1\geq\frac{a_2}{2}\geq\frac{a_3}{3}\geq\ldots$.

Доведемо за допомогою індукції (по числу n) таку нерівність $\frac{a_n}{n}\geq\frac{a_{n+1}}{n+1}$.

База індукції. При $n=1$ маємо $\frac{a_1}{1}\geq\frac{a_2}{2}\Leftrightarrow 2a_1\geq a_2\Leftrightarrow a_1\geq a_2-a_1$ — правильно, бо за умовою $b_0\geq b_1\Leftrightarrow a_1-a_0\geq a_2-a_1$ і $a_1>a_1-a_0$.

Крок індукції. Нехай для деякого натурального $n>1$ виконується нерівність $\frac{a_n}{n}\leq\frac{a_{n-1}}{n-1}$.

Доведемо, що $\frac{a_{n+1}}{n+1} \le \frac{a_n}{n}$.

Дійсно, $b_{n-1} \ge b_n \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} \ge a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow a_{n+1} \le 2a_n - a_{n-1}$.

Звідки $\frac{a_{n+1}}{n+1} \le \frac{2a_n - a_{n-1}}{n+1} \le \frac{a_n}{n}$.

Остання нерівність еквівалентна таким:

$$2na_n - na_{n-1} \le (n+1)a_n.$$

$$(n-1)a_n \le na_{n-1}.$$

$$\frac{a_n}{n} \le \frac{a_{n-1}}{n-1} \text{ — правильно.}$$

11. (10–11) На площині дано набір з n векторів, довжина кожного з яких не перевищує 1. Доведіть, що, замінивши деякі вектори цього набору на протилежні, можна одержати набір векторів, сума яких має довжину:

а) яка не перевищує $\sqrt{n}$;

б) яка не перевищує $\sqrt{2}$.

Розв'язання

Обидва твердження доводяться методом математичної індукції.

а) *База*. Якщо $n=1$, то твердження очевидне:

$$\left|\vec{a}_1\right| \le 1 = \sqrt{1}.$$

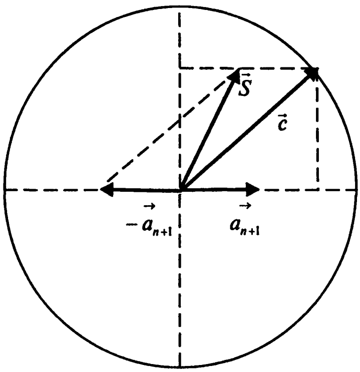
Крок індукції. Припустимо, що твердження задачі справедливе для довільного набору з n векторів, довжини яких не перевищують одиниці. Розглянемо довільний набір з $(n+1)$-го вектора $\left\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; ...; \vec{a}_n; \vec{a}_{n+1}\right\}$, довжини яких не перевищують 1. За припущенням, замінивши деякі з векторів $\vec{a}_1; \vec{a}_2; ...; \vec{a}_n$ на протилежні, ми дістанемо набір векторів $\left\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; ...; \vec{b}_n\right\}$, для якого виконується нерівність

$$\left|\vec{c}\right| \le \sqrt{n},$$

де $\vec{c} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n$. Покладемо $\vec{b}_{n+1} = \vec{a}_{n+1}$, якщо $\vec{c} \cdot \vec{a}_{n+1} < 0$, і покладемо $\vec{b}_{n+1} = -\vec{a}_{n+1}$, якщо $\vec{c} \cdot \vec{a}_{n+1} > 0$. Тоді набір $\left\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; ...; \vec{b}_n; \vec{b}_{n+1}\right\}$ — шуканий, бо

$$\left|\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_n+\vec{b}_{n+1}\right|^2=\left|\vec{c}+\vec{b}_{n+1}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2+2\cdot\vec{c}\cdot\vec{b}_{n+1}+\left|\vec{b}_{n+1}\right|^2\le$$

$$\le\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{b}_{n+1}\right|^2\le n+\left|\vec{b}_{n+1}\right|^2=n+\left|\vec{a}_{n+1}\right|^2\le n+1.$$



б) Для доведення скористайтесь рисунком. Якщо $\left|\vec{c}\right|\le 1$, то все доведено; якщо ж $1<\left|\vec{c}\right|\le\sqrt{2}$, то коли $\vec{c}\cdot\vec{a}_{n+1}>0$, ми за $\vec{b}_{n+1}$ візьмемо $-\vec{a}_{n+1}$, тоді (*див. рис.*) $\left|\vec{c}+\vec{b}_{n+1}\right|=\left|\vec{S}\right|\le\left|\vec{c}\right|\le\sqrt{2}$, що і треба було довести. У другому випадку потрібно покласти $\vec{b}_{n+1}=\vec{a}_{n+1}$.

12. (10–11) Опуклий многокутник будемо називати «красивим», якщо виконуються такі умови:

а) кожна його вершина пофарбована в один з трьох кольорів;

б) будь-які дві сусідні вершини многокутника пофарбовані в різні кольори;

в) для кожного з трьох даних кольорів знайдеться по меншій мірі одна вершина многокутника, яка пофарбована в цей колір.

Доведіть, що будь-який «красивий» n–кутник ($n\ge 3$) можна розрізати діагоналями, які не перетинаються, на «красиві» трикутники.

Розв'язання

Скористаємось методом математичної індукції.

База. При $n=3$ твердження задачі очевидне: вершини «красивого» трикутника пофарбовані в три різні кольори і ніяких розрізів не треба.

Крок індукції. Припустимо, що твердження задачі справедливе для довільного «красивого» n–кутника ($n\ge 3$). Розглянемо довільний «красивий» $(n+1)$-кутник і доведемо, використовуючи припущення, що його можна розрізати вказаними діагоналями на «красиві» трикутники. Позначемо через A_1, A_2, A_3, ..., A_n, A_{n+1} – послідовні вершини $(n+1)$-кутника.

Якщо в деякий з трьох кольорів пофарбована лише одна із вершин цього $(n+1)$-кутника (а така ситуація можлива для «красивого» чотирикутника та п'ятикутника), то, з'єднавши цю вершину діагоналями зі всіма несусідніми з нею вершинами $(n+1)$-кутника, одержимо потрібне розбиття $(n+1)$-кутника на «красиві» трикутники. Якщо ж у кожний з трьох кольорів пофарбовані у крайньому разі дві вершини $(n+1)$-кутника, то в цьому випадку в фарбуванні довільних n вершин $(n+1)$-кутника обов'язково беруть участь всі три кольори. Позначимо цифрою 1 колір, в який пофарбована вершина A_1, а цифрою 2 колір вершини A_2. Нехай k $(k \geq 3)$ – найменший номер, такий, що вершина A_k пофарбована в третій колір. Відріжемо від $(n+1)$-кутника трикутник $A_{k-2}A_{k-1}A_k$. У відповідності з означенням числа k всі вершини цього трикутника пофарбовані в три різні кольори (кожна в один з трьох), тобто цей трикутник «красивий». Многокутник $A_1A_2 \ldots A_{k-2}A_kA_{k+1} \ldots A_{n+1}$, який залишився, також буде «красивим» і за припущенням розбивається на «красиві» трикутники.

13. (10–11) Доведіть, що для довільного натурального n справедлива рівність

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{знаків кореня}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Розв'язання

Скористаємось методом математичної індукції.

База. При $n=1$ сформульоване твердження справедливе, бо $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Крок індукції. Припустимо, що твердження справедливе при $n=k$, і доведемо його справедливість при $n=k+1$. Скористаємося тотожністю: $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Використовуючи припущення індукції, одержуємо:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{k+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

тобто при $n=k+1$ твердження справедливе. Отже, зазначена в умові задачі рівність, справедлива при всіх $n \in \mathrm{N}$.

14. (10–11) Доведіть, що при кожному натуральному n число

$$13\cdot(-50)^n+17\cdot 40^n-30$$

ділиться на 1989.

Розв'язання

Скористаємось методом математичної індукції. Нехай

$$x_n=13\cdot(-50)^n+17\cdot 40^n-30,$$

тоді доведемо, що

$$x_{n+1}=3\cdot 13\cdot 17\cdot\left(40^n-(-50)^n\right)+x_n,$$

ділиться на 1989.

Другий доданок: x_n – ділиться на 1989 за припущенням, а перший можна перетворити так:

$$3\cdot 13\cdot 17\cdot(40-(-50))\cdot\left(40^{n-1}+40^{n-2}\cdot(-50)+\ldots+(-50)^{n-1}\right)=$$

$$=1989\cdot 30\cdot\left(40^{n-1}+\ldots+(-50)^{n-1}\right).$$

Тут ми скористалися тотожністю:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right),$$

яку також можна довести методом математичної індукції (зробіть це самостійно). Оскільки $x_1=0$ ділиться на 1989, то x_n ділиться на 1989 для будь-яких $n\in\mathbb{N}$.

15. (11) Знайдіть натуральні числа a, b, c, які не діляться на 10 і такі, щоб при будь-якому натуральному k у чисел a^k+b^k та c^k були однаковими дві останні цифри.

Вказівка. $a=4$, $b=25$, $c=29$: Далі, користуючись методом математичної індукції, доведіть, що при всіх натуральних k число $4^k+25^k-29^k$ ділиться на 10, тобто останні дві цифри чисел 4^k+25^k та 29^k однакові.

16. (11) Послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентним способом: $a_1=1$, $a_2=1$ і $a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_n}{2^n}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Доведіть нерівність $a_n<3$ для будь-якого натурального n.

Розв'язання

Для доведення твердження задачі достатньо довести нерівність

$$a_n \le 3 - \frac{12}{2^n} \qquad (*)$$

для всіх $n \ge 3$ (оскільки $a_1 = 1 < 3$ і $a_2 = 1 < 3$). Доведемо $(*)$ методом математичної індукції.

База. При $n = 3$ маємо: $a_3 = a_2 + \frac{a_1}{2^1} = \frac{3}{2} = 3 - \frac{12}{2^3}$. При $n = 4$ маємо: $a_4 = a_3 + \frac{a_2}{2^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} < 3 - \frac{12}{2^4}$.

Крок індукції. Припустимо, що нерівність

$$a_k \le 3 - \frac{12}{2^k} \qquad (**)$$

виконується при всіх $k = 3, 4, 5, \ldots, n, n+1$ $(n > 3)$. Доведемо, використовуючи це припущення, що нерівність $(**)$ справедлива і для $k = n+2$.

Дійсно,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}.$$

За припущенням індукції:

$$a_n \le 3 - \frac{12}{2^n} \text{ і } a_{n+1} \le 3 - \frac{12}{2^{n+1}} = 3 - \frac{6}{2^n}.$$

Тому

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n} \le 3 - \frac{6}{2^n} + \frac{1}{2^n}\left(3 - \frac{12}{2^n}\right) = 3 - \frac{3}{2^n} - \frac{12}{4^n} < 3 - \frac{3}{2^n} = 3 - \frac{12}{2^{n+2}}.$$

Звідси, згідно з принципом математичної індукції, випливає, що $(*)$ має місце при всіх $n \in \mathrm{N}$.

17. (11) Послідовність $\{x_n\}$ задана рекурентним способом: $x_1 = 0$ і $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$ для всіх $n \in \mathrm{N}$. Доведіть, що всі члени послідовності, починаючи з другого, є натуральними числами.

Розв'язання

Скористаймося методом математичної індукції. Очевидно $x_{n+1} \ge 5x_n + 1$. Звідси доведемо, що $x_{n+1} \ge 1$ при всіх $n \in \mathrm{N}$. Тоді $x_{n+1} \ge x_n + 1$. Далі, із рівності, яка задана в умові задачі, випливає, що $x_{n+1}^2 - 10x_{n+1}x_n + x_n^2 = 1$ для всіх $n \in \mathrm{N}$. Очевидно, що справедлива і рівність $x_n^2 - 10x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 = 1$ для всіх $n = 2, 3, 4, \ldots$. Віднімаючи почленно від першої рівності другу, одержимо $x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2 - 10x_{n+1}x_n + 10x_n x_{n-1} = 0$, $(x_{n+1} - x_{n-1}) \cdot (x_{n+1} + x_{n-1} - 10x_n) = 0$. Оскільки $x_{n+1} - x_{n-1} \ge 2$, то $x_{n+1} + x_{n-1} - 10x_n = 0$ для всіх $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$. Із рівності $x_{n+1} = 10x_n - x_{n-1}$ та умов $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ випливає, що x_3 – також натуральне. Оскільки x_2 та x_3 – натуральні, то x_4 – також натуральне число і т. д. Далі за індукцією отримаємо, що x_{n+1} – натуральне число при всіх $n \in \mathrm{N}$.

18. (11) Дано n довільних квадратів. Доведіть, що їх можна розрізати на частини так, що із одержаних частин можна було б скласти один великий квадрат.

Розв'язання

Скористаймося методом математичної індукції.

База. При $n = 1$ твердження задачі доводити немає необхідності.

Крок індукції. Припустимо, що твердження задачі вже доведено для n квадратів, і нехай дано $n+1$ квадратів K_1, K_2, ..., K_n, K_{n+1}. Виберемо довільні два квадрати, наприклад, K_n і K_{n+1}. Нехай квадрат K_{n+1} більший за квадрат K_n, тобто його сторона x більша за сторону y квадрата K_n (*див. рис. 7*). На цьому рисунку показано, як потрібно розрізати квадрат K_{n+1} на части-

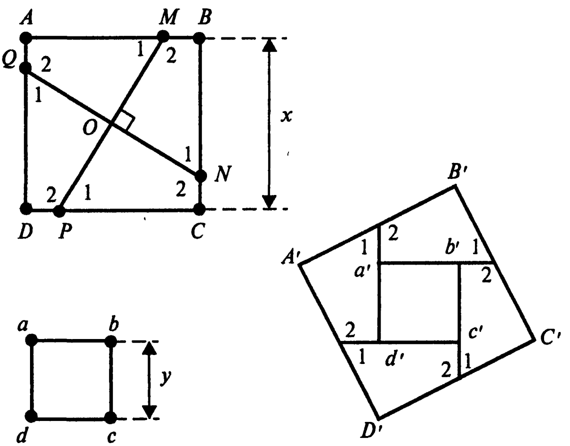


Рис. 7

ни (чотири рівних чотирикутники $AMOQ$, $BNOM$, $CPON$, $DQOP$), з яких та з квадрата K_n можна скласти квадрат $A'B'C'D'$.

Точки M, N, P, Q вибрані так, що

$$AM = BN = CP = DQ = \frac{x+y}{2}.$$

Далі, згідно зі припущенням, квадрати K_1, K_2, ..., K_{n-1}, $A'B'C'D'$ можна розрізати на частини, із яких можна скласти один «великий» квадрат, що і потрібно було довести.

19. (11) На площині дано $2n+1$ точок. Побудуйте $2n+1$-кутник, для якого ці точки є серединами його сторін. (Дані точки є вершинами опуклого $2n+1$-кутника).

Вказівка

Скористаймосяметодом математичної індукці

База. При $n=1$ задача зводиться до побудови трикутника по заданих серединах його сторін (достатньо провести через кожну з трьох заданих точок пряму, паралельну до прямої, що з'єднує дві других).

Крок індукції. Припустимо, що ми вміємо будувати $(2n-1)$-кутник за серединами його сторін, та нехай нам дано точки A_1, A_2, ..., A_{2n+1}. Побудуємо точку A, яка є четвертою вершиною паралелограма $A_1A_2A_3A$. Будуємо $(2n-1)$ -кутник $X_1X_2...X_{2n-1}$, для якого точки A, A_4, A_5, ..., A_{2n+1} є серединами сторін X_1X_2, X_2X_3, ..., $X_{2n-1}X_1$ відповідно (його можна побудувати за припущенням). Нехай Y- точка, яка симетрична точці X_1 відносно A_1, а Z- точка, яка симетрична X_2 відносно A_3. Тоді точки Y та Z симетричні відносно A_2, тобто $2n+1$-кутник $X_1YZX_2...X_{2n-1}$ є шуканим, що і треба було довести.

20.* (11) На скільки частин розбивають простір n сфер, кожні дві з яких перетинаються між собою?

Вказівка

Розгляньте та розв'яжіть послідовно такі задачі, застосувавши індукцію.

а) На скільки частин ділять пряму n пар точок? (Пара точок — це «одновимірна сфера»).

Відповідь. $2n$ різних точок прямої ділять її на $2n+1$ частин.

а′) Знайти число $\varphi_1(n)$ частин, на які ділять коло n пар точок, які розташовані на ньому. *Відповідь.* $\varphi_1(n)=2n$.

б) Знайти число $\varphi_2(n)$ частин, на які ділять площину n кіл, кожні два з яких перетинаються і розташовані на ній.

Відповідь. $\varphi_2(n)=n^2-n+2$.

б′) На скільки частин ділять сферу n кіл, кожні два з яких перетинаються, розташованих на ній? *Відповідь.* На $\varphi_2(n)=n^2-n+2$ частин.

в) Запропонована задача. *Відповідь.* $\varphi_3(n)=\dfrac{n(n^2-3n+8)}{3}$.

Будуємо $(2n-1)$-кутник $X_1X_2\ldots X_{2n-1}$, для якого точки A, A_4, A_5, ..., A_{2n+1} є серединами сторін X_1X_2, X_2X_3, ..., $X_{2n-1}X_1$ відповідно (його можна побудувати за припущенням). Нехай Y — точка, яка симетрична точці X_1 відносно A_1, а Z — точка. яка симетрична X_2 відносно A_3. Тоді Y і Z симетричні відносно A_2, тобто $(2n+1)$-кутник $X_1YZX_2\ldots X_{2n-1}$ є шуканим, що і треба було довести.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в теорию групп.— М.: Наука, 1980. (Библиотечка «Квант»; Вип. 7)
2. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. — К.: Вища школа, 1983.
3. Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.
5. Конет І. М., Паньков В. Г., Радченко В. М., Теплінський Ю. В. Обласні математичні олімпіади. — Кам'янець-Подільсикий: Абетка, 1998. — 207 с.
6. Лейфура В. М. Математичні задачі евристичного характеру. — К.: Вища школа, 1992. — 91 с.
7. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М, Ясінський В. А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. — Львів: Євросвіт, 1999. — 128 с.
8. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України, 1991–2000 — К.: Техніка, 2003. — 541 с.
9. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Методичний посібник. — Житомир, ЖДПУ, 2002. — 238 с.
10. Федак І. В. Івано-Франківські математичні олімпіади 1988–1997 рр. — Івано-Франківськ: Плай, 1997, 1997. — 56 с.
11. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. — Вінниця, 1998. — 266 с.
12. Змагання юних математиків України. 2003 рік. /В. О. Борисова, О. Г. Кукуш, В. М. Лейфура та ін. — Х.: Вид. група «Основа», 2004. — 192 с.
13. Розв'язуємо разом. — Х.: Вид. група «Основа», 2003. — 144 с.— Зміст: Лейфура В. М. Задачі з цілими числами; Мітельман І. М. Комбінаторика клітчастої дошки.
14. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для учнів 10 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закладах освіти.— К.: Освіта, 2000.— 318 с.
15. Матеріали міжнародних математичних олімпіад.
16. Матеріали національних математичних олімпіад.

Навчальне видання

ЯСІНСЬКИЙ В'ячеслав Андрійович

ОЛІМПІАДНА МАТЕМАТИКА: функціональні рівняння, метод математичної індукції

Головний редактор *І. С. Маркова*
Редактор *Г. О. Біловол*
Технічний редактор *О. В. Лєбєдєва*
Коректор *О. М. Журенко*
Комп'ютерна верстка *О. В. Лєбєдєвої*

Підписано до друку 13.01.2005. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Папір офсетний.
Гарнітура «Ньютон». Друк офсетний. Ум. друк. арк. 5,58.
Зам. № 5-01/21-1.

ТОВ «Видавнича група "Основа"».
Свідоцтво ДК № 1179 від 27.12.2002 р.

Україна, 61145, Харків, вул. Космічна, 21-а.
Тел. (0572) 17-99-30.
E-mail: office@osnova.com.ua