Лекции -2004.

(Лекция 2-3;   пока не проверена !)

Метод векторного потенциала в теории магнетизма

$$div\vec{B} = 0\,; \qquad (1)$$

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}\,; \qquad (2)$$

(1) и (2) - уравнения Максвелла.

Вектор индукции $\vec{B}$, удовлетворяющий этим уравнениям, может быть рассчитан с помощью формулы Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{i[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3}dV$$

т.е. путем применения операции интегрирования.

Но, вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ может быть найден также и путем дифференцирования. Покажем это.

Векторный потенциал $\vec{A}$, его неоднозначность и калибровка.

$div\vec{B} \equiv 0$, означает, что существует такой вектор $\vec{A}$, что его ротор равен $\vec{B}$;

$$div\;rot\vec{A} \equiv 0\,;$$

$$\vec{B} = rot\vec{A}\,, \qquad (3)$$

$\vec{A}$ - векторный потенциал поля.

Но уравнению (3) удовлетворяет много векторных функций:

$$\vec{A}' = \vec{A} + grad\,\vec{f}\ ,$$

где f = f(x, y, z) - скалярная функция от координат.

Действительно:

$$\vec{B}' = rot\,\vec{A}' = rot\,\vec{A} + rot\ grad\,\vec{f} = rot\,\vec{A} = \vec{B}\ .$$

Итак, одного лишь уравнения (3) для выбора $\vec{A}$ недостаточно, так как $\vec{A}$ остается определен неоднозначно. Для устранения такого произвола в выборе $\vec{A}$, на него наклкдывается определенное условие – условие калибровки векторного потенциала. Для стационарных магнитных полей условие калибровки таково:

$$div\,\vec{A} = 0 \qquad (4)$$

Примечание: произвол в выборе потенциала $\vec{A}$ означает, что он имеет лишь вспомогательное значение – математическая абстракция (т.е. формален, фиктивен),- и не может быть измерен экспериментально.

Уравнение для векторного потенциала $\vec{A}$.

Совершенно очевидно, что вектор $\vec{A}$, с помощью которого затем рассчитывается магнитное поле ($\vec{B}$, $\vec{H}$) токов, должен содержать эти токи $\vec{j}_{пров}$. Чтобы найти выражение для $\vec{A}$, обратимся ко второму уравнению Максвелла:

$$rot\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}\ . \qquad (5)$$

Подставляя его в (3), получим:

$$rot\ rot\,\vec{A} = \mu_0 \vec{j}\ ;$$

$$rot\ rot\vec{A} = \vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times\vec{A}] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} = grad\ div\vec{A} - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu_0\vec{j}\ .$$

Уравнение Лапласа:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \tag{6}$$

В проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_0 j_x; \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 j_y; \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 j_z. \end{aligned} \tag{7}$$

Из уравнения Лапласа (6) и находится выражение для $\vec{A}$. Нетрудно видеть, что уравнениям (6) и (7) удовлетворяют векторные функции $\vec{A}$ вида:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j_x\,dxdydz}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j_x\,dV}{r}; \\ A_y &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j_y\,dV}{r}; \\ A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j_z\,dV}{r}. \end{aligned} \tag{8}$$

Или в векторной форме:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}}{r}dV \tag{9}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{id\vec{l}}{r} \tag{10}$$

уравнение (9) – для объемного тока, (10) – для линейного тока.

Таким образом, вычислив векторный потенциал $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{id\vec{l}}{r}$ для тока конкретной формы и длины (интегрированием), далее уже нетрудно вычислить индукцию $\vec{B}$ поля $\vec{B} = rot\vec{A}$.

Непосредственным дифференцированием (нахождением rot) формулы (9) можно найти закон Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{B} = rot\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int rot\frac{\vec{j}}{r}dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}\times r]dV}{r^3}$$

Что и следовало ожидать.

Векторный потенциал $\vec{A}$ и индукция $\vec{B}$ магнитного поля элементарного замкнутого (кругового) тока.

Пример 1. Вычислим сначала $\vec{A}$, а затем и $\vec{B}$ в некоторой точке Смагнитного поля, создаваемого замкнутым линейным током, обтекающим площадку S с бесконечно-малыми линейными размерами. Выберем контур замкнутого тела в виде параллелограмма со сторонами l_1, l_2, l_3 и l_4. начало координат выбрано в точке «О» поверхности S,обтекаемой током.

Для вычисления $\vec{A}$ в нашем случае линейного тока, необходимо вычислить интеграл (10) для данного контура:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}i\oint\limits_{l_1l_2l_3l_4}\frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}i(\int\limits_{l_1}\frac{d\vec{l}}{r_1} + \int\limits_{l_2}\frac{d\vec{l}}{r_2} + \int\limits_{l_3}\frac{d\vec{l}}{r_3} + \int\limits_{l_4}\frac{d\vec{l}}{r_4})$$

Здесь r, конечно, при обходе контура величина переменная.

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}i(\frac{1}{r_1}\int\limits_{l_1}d\vec{l} + \frac{1}{r_2}\int\limits_{l_2}d\vec{l} + \frac{1}{r_3}\int\limits_{l_3}d\vec{l} + \frac{1}{r_4}\int\limits_{l_4}d\vec{l}) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}i(\frac{\vec{l}_1}{r_1} + \frac{\vec{l}_2}{r_2} + \frac{\vec{l}_3}{r_3} + \frac{\vec{l}_4}{r_4})\end{aligned}; \qquad (11)$$

Далее, учитывая, что $\vec{l}_1 = -\vec{l}_3$, $\vec{l}_2 = -\vec{l}_4$, находим суммы, входящие в (11), а именно:

$$\begin{aligned}&\frac{\vec{l}_1}{r_1}+\frac{\vec{l}_3}{r_3}=\frac{\vec{l}_1}{r_1}-\frac{\vec{l}_1}{r_3}=\vec{l}_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_3}\right)=\vec{l}_1\,\frac{r_3-r_1}{r_1r_3}\approx-\frac{\vec{l}_1(\vec{l}_2\vec{r})}{r^3}\\&\frac{\vec{l}_2}{r_2}-\frac{\vec{l}_2}{r_4}=\vec{l}_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_4}\right)=\vec{l}_2\,\frac{r_4-r_2}{r_2r_4}\approx\frac{\vec{l}_2(\vec{l}_1\vec{r})}{r^3}\end{aligned} \quad . \qquad (12)$$

С учетом (12) выражение (11) перепишем в виде:

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{r^3}(\vec{l}_2(\vec{l}_1\vec{r})-\vec{l}_1(\vec{l}_2\vec{r})) \qquad (13)$$

Учитывая известную формулу векторной алгебры

$$[\vec{A}\times[\vec{B}\times\vec{C}]]=\vec{B}(\vec{A}\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\vec{B})=\vec{B}(\vec{C}\vec{A})-\vec{C}(\vec{B}\vec{A}),$$

будем иметь:

$$\vec{l}_2(\vec{l}_1\vec{r})-\vec{l}_1(\vec{l}_2\vec{r})=[\vec{r}\times[\vec{l}_2\times\vec{l}_1]]=[[\vec{l}_1\times\vec{l}_2]\times\vec{r}]$$

наконец, примечая, что $[\vec{l}_1\times\vec{l}_2]=\vec{S}$ (-это вектор площадки, обтекаемой током), окончательно получим:

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i[\vec{S}\times\vec{r}]}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{P}_m\times\vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{P}_m\times\vec{r}]}{r^3} \qquad (14)$$

Это и есть векторный потенциал поля замкнутого элементарного тока.

$$\vec{P}_m=i\vec{S} \qquad (15)$$

$\vec{P}_m$ называется магнитным моментом замкнутого кругового тока.

$\left|\vec{P}_m\right|=P_m=iS$ -модуль момента.

И наконец находим индукцию $\vec{B}$ магнитного поля элементарного замкнутого тока с моментом $\vec{P}_m=i\vec{S}$:

$$\vec{B} = rot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{P}_m\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_m}{r^3}\right) \tag{16}$$

Формула (16) показывает, что индукция $\vec{B}$ поля магнитного момента $\vec{P}_m$ замкнутого элементарного тока, убывает обратно-пропорционально третьей степени ($\frac{\vec{r}\,\vec{r}}{r^5} \approx \frac{1}{r^3}$) расстояния, в то время, как индукция поля, создаваемого элементом тока (не замкнутым) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ убывает обратно-пропорционально квадрату расстояния. Это связано с тем, что индукция $\vec{B}$ магнитного момента $\vec{P}_m$ есть векторная сумма полей, создаваемых отдельными элементами тока idl_1, idl_3, текущими в противоположных направлениях.

Пример 2.

$$\vec{H} = rot\vec{A} = \frac{1}{4\pi}rot\int\frac{\vec{j}}{r}dV = \frac{1}{4\pi}\int rot\frac{\vec{j}}{r}dV =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int rot\left[\frac{j(x,y,z)}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}\right]dxdydz$$

x’, y’, z’ - координаты точки наблюдения (в которой определяется $\vec{H}$);

x, y, z - текущие координаты точки интегрирования (интегрирование ведется по контуру тока-проводника).

Операция rot включает в себя вычисление частных производных (дифференцирование) по координатам x’, y’, z’ – точки наблюдения (так как индукция находится в точке C(x’, y’, z’)). То есть нам надо найти ротор от функции $f(r) = \frac{\vec{j}}{r} = \frac{j(x,y,z)}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}$, где j(x,y,z) - величина постоянная для дифференцирования по x’, y’ и z’. То есть, $rot\,\vec{j} = 0$. Итак находим $rot\frac{\vec{j}}{r} = rot\,(\vec{j}\,\frac{1}{r})$:

$$rot(\frac{1}{r}\vec{j}) = \frac{1}{r} rot\,\vec{j} + [grad\vec{d}\,\frac{1}{r} \times \vec{j}] = grad\vec{d}\,\frac{1}{r} \times \vec{j}$$

Итак, $rot\,\frac{\vec{j}}{r} = [grad\,\frac{1}{r} \times \vec{j}]$.

$$grad\,f(r) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{df(r)}{dr}\vec{r}_0$$

$$grad(\frac{1}{r}) = \frac{d}{dr}(\frac{1}{r})\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{r}_0 = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Поэтому: $$rot\,\frac{\vec{j}}{r} = [-\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{j}] = [\vec{j} \times \frac{\vec{r}}{r^3}]$$

А поэтому получаем формулу Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{j} \times r]dV}{r^3}$$

Что и следовало ожидать.

Пример 3.

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\vec{M} \times \vec{R}]}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\vec{M} \times \vec{e}_R]}{R^2}$$

$$\vec{A} = \sum_i \vec{A}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\sum_i \frac{[\vec{M}_i \times \vec{R}]}{R^3}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{[\vec{M} \times \vec{R}]}{R^3}dV$$

$\vec{M}$ - намагниченность тела.

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{V} \quad \Rightarrow \quad d\vec{M} = \vec{M}dV$$

Полагая $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_{V'} \frac{[\vec{M}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,'$$

Используя выражение $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$, получим:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{M}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \times \frac{[\vec{M}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,'$$