ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

основні
поняття
приклади
задачі

В.М. ТУРЧИН

В.М. ТУРЧИН

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ **І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

основні поняття, приклади, задачі

Підручник для студентів вищих навчальних закладів

Видання друге, перероблене і доповнене

Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді і спорту України

Дніпропетровськ. ІМА-прес. 2014

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73
Т89

Рецензенти:
А.В. Скороход, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України (Інститут математики НАН України),

М.Й. Ядренко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України (Київський національний університет імені Тараса Шевченка).

Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді і спорту України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (*лист № 1/11-7270 від 04.08.2011*)

Турчин В.М.

Т89 **Теорія ймовірностей і математична статистика.** Основні поняття, приклади, задачі: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. — Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2014. - 556 с.

ISBN 978-966-331-535-5

Підручник охоплює програмний матеріал курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика" (або відповідних розділів курсу "Вища математика").

Викладено основні поняття і факти теорії ймовірностей і математичної статистики. Теоретичні положення проілюстровано на численних прикладах із різноманітних сфер діяльності людини (фізики, хімії, біології, генетики, медицини, психології, сільського господарства, космонавтики, військової справи, машинобудування, будівництва, геології, металургії, економіки, лінгвістики, соціології, психології, спорту тощо).

Для студентів вищих навчальних закладів освіти.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73

В оформленні обкладинки використані роботи Густава Клімта
ISBN 978-966-331-535-5

© В.М. Турчин, 2014
© К.Д. Ткаченко, обкладинка, 2014

Розповсюдження й тиражування без офіційного дозволу видавництва заборонено

Пам'яті
Михайла
Йосиповича
Ядренка

Передмова

Підручник призначено для тих, хто починає вивчати теорію ймовірностей і математичну статистику. Кожна глава починається з основних понять і фактів, які розглядаються у ній, далі наводяться приклади застосування ймовірнісно-статистичних методів і моделей в конкретних ситуаціях, закінчується глава задачами для самостійного розв'язування. Підручник допоможе опанувати основи теорії, виробити ймовірнісно-статистичне мислення та інтуїцію, оволодіти навичками розв'язування прикладних задач.

Під час початкового ознайомлення з курсом необхідно розглянути якомога більше прикладів і розв'язати якомога більше задач. Їхню багату добірку подано у підручнику, при цьому для ілюстрації накопиченого впродовж віків досвіду застосування теорії ймовірностей і математичної статистики до реальних явищ у більшості випадків задачі формулюються не в суто математичних, а в природничо-наукових термінах. Такі задачі природно виникають у різноманітних сферах діяльності людини: в наукових дослідженнях з фізики, хімії, біології, генетики, медицини; у психології, соціології, екології, сільському господарстві; в астрономії, космонавтиці, військовій справі, машинобудуванні, будівництві, геології, металургії; в економіці, лінгвістиці, педагогіці, спорті тощо. Розв'язування наведених у книзі задач потребує неформального опанування матеріалу: необхідно запропонувати ту чи іншу математичну модель, обґрунтувати цей вибір, вибрати метод розв'язування задачі, дати інтерпретацію одержаних результатів.

Задачі класифіковано за ступенем складності (хоча об'єктивно складних задач у книзі немає). При цьому елементарні задачі позначено значком $^\circ$, складніші — значком *, задачі середньої складності позначок не мають.

В окремій главі наведено вказівки до розв'язування задач і відповіді. Подано необхідні статистичні таблиці.

Доведення тверджень (якщо вони не наведені) можна знайти, наприклад, у [14].

Підручником можуть користуватися як студенти механіко-математичних факультетів, факультетів прикладної математики та кібернетики університетів, так і студенти технічних, педагогічних, економічних вищих навчальних закладів. Тому одну главу присвячено комбінаториці, якій належить чільне місце в курсі теорії ймовірностей цих навчальних закладів.

У підручнику теореми, приклади, формули, таблиці, рисунки мають потрійну, а задачі — подвійну нумерацію. Наприклад, запис "формула (3.1.2)" означає формулу 2 з параграфа 1 глави 3, а запис "задача 5.12" — задачу 12 з глави 5. На початку кожного параграфа під назвою "Задачі" наведено перелік задач, рекомендованих для аудиторних занять і для самостійної роботи. Їх позначено відповідно групою літер АЗ і СЗ.

Автор вдячний сину Євгену Турчину за старанне прочитання рукопису книги та її змістовне обговорення.

Автор буде вдячний усім, хто в тій чи іншій формі висловить с вою думку стосовно змісту книги та стилю викладення матеріалу. Зауваження, пропозиції та побажання просимо надсилати на адресу: В. М. Турчину, кафедра статистики й теорії ймовірностей, механіко-математичний факультет, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, проспект Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, 49010, Україна, або: vnturchyn@gmail.com

Автор

Глава 1

Елементи комбінаторики

1.1 Основний принцип комбінаторики

Комбінаторика вивчає скінченні множини. Множини позначатимемо великими латинськими літерами A, B, $C, \dots$, їхні елементи — малими. Число елементів скінченної множини A позначатимемо $n(A)$.

Обчислюючи число елементів множини A, зручно користуватися таким фактом: якщо між множинами A і B встановлена взаємно однозначна відповідність, то

$$n(A) = n(B)$$

(часто число елементів множини B обчислити простіше, ніж число елементів множини A).

Прямий добуток множин. Нехай A і B — довільні множини. Кожні два елементи $a \in A$ і $b \in B$ визначають упорядковану пару (a, b). Множину всіх упорядкованих пар $(a, b), a \in A, b \in B$ називатимемо *прямим* (*декартовим*) *добутком* множин A і B і позначатимемо $A \times B$.

Приклад 1.1.1 . *Знайти прямі добутки $A \times B$ і $B \times A$, де $A = \{1, 2\}$ і $B = \{3, 4, 5\}$.*

Р о з в' я з а н н я. $A \times B = \{(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5)\}$, $B \times A = \{(3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (5; 1), (5; 2)\}$.

Нехай задано k множин $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Множину впорядкованих наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, у яких $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k$, називатимемо прямим (декартовим) добутком множин $A_1, A_2, \ldots, A_k$ і позначатимемо

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k.$$

Приклад 1.1.2 . *Якщо* $A_1 = \mathbb{R}^1, A_2 = \mathbb{R}^1, A_3 = \mathbb{R}^1$, *то прямий добуток* $A_1 \times A_2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$ *є площиною, а* $A_1 \times A_2 \times A_3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^3$ *— тривимірним простором.*

Правило множення (основний принцип комбінаторики). *Число* $n(A \times B)$ *елементів декартового добутку* $A \times B$ *скінченних множин* A *і* B *дорівнює добутку* $n(A)n(B)$ *числа* $n(A)$ *елементів множини* A *і числа* $n(B)$ *елементів множини* B*:*

$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

Справді, для кожного елемента $a \in A$ існує $n(B)$ елементів (a, b), $b \in B$, декартового добутку $A \times B$. І оскільки множина A містить $n(A)$ елементів, то число $n(A \times B)$ елементів декартового добутку $A \times B$ дорівнює $n(B) + n(B) + \ldots + n(B) = n(B)n(A)$ (у лівій частині $n(A)$ доданків — за числом елементів у множині A).

Правило множення для декартового добутку k множин: *число* $n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k)$ *елементів декартового добутку* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ *скінченних множин* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *дорівнює добутку* $n(A_1)n(A_2)\ldots n(A_k)$ *числа елементів* $n(A_1), n(A_2), \ldots, n(A_k)$ *цих множин:*

$$n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = n(A_1)n(A_2)\ldots n(A_k).$$

Приклад 1.1.3. *Нехай* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$. *Знайти* $n(A \times B)$.

Розв'язання. $n(A \times B) = n(A)n(B) = 3 \cdot 4 = 12$.

Правило множення в термінах дій. Часто правило множення формулюють у термінах дій.

Нехай необхідно виконати одну за одною k *дій. Якщо першу дію можна виконати* n_1 *числом способів, другу —*

n_2 числом способів і так до k-ї дії, яку можна виконати n_k числом способів, то всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 n_2 \ldots n_k$ числом способів.

Справді, позначимо через A_1 множину способів виконання першої дії, A_2 — другої, ..., A_k — k-ої дії. Тоді елемент $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ задає спосіб виконання всіх k дій разом. Тому число всіх способів виконати k дій дорівнює числу елементів декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Отже,

$$n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = n(A_1)n(A_2) \ldots n(A_k) = n_1 n_2 \ldots n_k.$$

Приклад 1.1.4. *Скільки чотиризначних чисел можна записати цифрами* $0, 1, 2, 3, 4, 5$, *якщо жодна цифра не повторюється більше одного разу?*

Розв'язання. Записуючи чотиризначне число, ми виконуємо чотири дії: записуємо (зліва направо) першу, другу, третю, четверту цифри. Першу дію можна виконати п'ятьма способами (нуль на першому місці не пишуть), другу — п'ятьма способами (одну цифру вже використано при записуванні першої зліва цифри, але, починаючи з другого місця, можна використовувати нуль), третю дію — чотирма способами, четверту — трьома. Тому згідно з правилом множення всі чотири дії разом можна виконати $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ способами. Отже, цифрами від 0 до 5 можна записати 300 різних чотиризначних чисел, у запису яких цифри не повторюватимуться.

Упорядковані множини. Множину, що складається з n елементів, називатимемо *n-елементною*.

Означення. n-Елементну множину Ω називатимемо *впорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність число (номер елемента) від 1 до n, причому так, що різним елементам поставлені у відповідність різні номери (інакше кажучи, встановлена взаємно однозначна відповідність між множиною Ω і підмножиною $1, 2, \ldots, n$ множини натуральних чисел).

Упорядковані множини є різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їхнім порядком.

Кожну скінченну множину можна впорядкувати так: записати всі її елементи в список $a, b, c, \ldots, f$, а потім кожному елементу приписати номер місця, на якому він стоїть у списку; інакше кажучи, розмістити елементи множини на занумерованих місцях і приписати кожному елементу номер місця, на якому він опинився. Зазвичай так і робитимемо.

Перестановки. Упорядковані множини, які відрізняються тільки порядком елементів, але не самими елементами, називатимемо *перестановками.*

Означення. *Перестановкою* n-елементної множини називатимемо її n-елементну впорядковану підмножину.

Приклад 1.1.5. *Виписати всі перестановки множини* $\Omega = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$.

Число перестановок. *Число* P_n *усіх перестановок* n*-елементної множини (число способів упорядкування* n*-елементної множини) дорівнює* $n!$, *тобто*

$$P_n = n!$$

Приклад 1.1.6 . *Скількома способами можна впорядкувати множину чисел* $1, 2, \ldots, 2n$ *так, щоб парні числа одержали парні номери?*

Розв'язання. Щоб упорядкувати множину $1, 2, \ldots$ $\ldots, 2n$, розмістимо $2n$ чисел на $2n$ місцях, причому так, щоб парні числа опинилися на місцях з парними номерами (а отже, непарні — на місцях з непарними номерами). Виконаємо це за дві дії.

Дію першу — розмістити n парних чисел на n парних місцях (упорядкувати n-елементну множину) — можна виконати $n!$ способами, дію другу — розмістити n непарних чисел на n непарних місцях — $n!$ способами.

Дві дії разом (розмістити парні числа на парних місцях, непарні на непарних) згідно з правилом множення можна виконати $(n!)^2$ способами.

Розміщення. *Розміщенням* з n елементів по k називатимемо впорядковану k-елементну підмножину n-елементної множини.

Розміщення з n елементів по k є різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їхнім порядком.

Приклад 1.1.7 . *Нехай* $\Omega = \{a, b, c\}$. *Виписати всі розміщення з* 3 *елементів по* 2.

Р о з в' я з а н н я. $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$.

Число розміщень. *Число* A_n^k *усіх упорядкованих* k*-елементних підмножин* n*-елементної множини (число розміщень з* n *елементів по* k*) дорівнює*

$$n(n-1)\dots(n-(k-1)),$$

тобто

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)).$$

Приклад 1.1.8 . *Скільки тризначних телефонних номерів можна скласти з цифр від* 0 *до* 9 *так, щоб у запису номера всі цифри були різні?*

Р о з в' я з а н н я. Тризначний телефонний номер з різних цифр є 3-елементною впорядкованою підмножиною множини $0, 1, \dots, 9$. А кількість A_{10}^3 3-елементних упорядкованих підмножин, які можна скласти з елементів 10-елементної множини, дорівнює $10 \cdot 9 \cdot 8$, тобто

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Сполуки (комбінації). *Сполукою (комбінацією)* з n елементів по k називатимемо k-елементну підмножину n-елементної множини.

Сполуки з n елементів по k є різними, якщо вони відрізняються своїми елементами (принаймні одним). Порядок елементів у сполуці не є істотним — сполуки, що складаються з одних і тих самих елементів, нерозрізненні.

Приклад 1.1.9 . *Нехай* $\Omega = \{a, b, c\}$. *Виписати всі сполуки з* 3 *елементів по* 1 *і з* 3 *по* 2.

Р о з в' я з а н н я. $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ — усі сполуки з 3 елементів по 1, $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — з 3 по 2.

Зазначимо, що як сполуки $\{a, b\}$ і $\{b, a\}$; $\{b, c\}$ і $\{c, b\}$ та $\{a, c\}$ і $\{c, a\}$ співпадають.

Число сполук. *Число* C_n^k *усіх* k*-елементних підмножин* n*-елементної множини (число сполук з* n *елементів по* k*) дорівнює* $n!/(k!(n-k)!)$, *тобто*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 1.1.10 (шахове місто). *Розглянемо прямокутну сітку квадратів — "шахове місто", яке складається з $m \times n$ квадратних кварталів, відокремлених $n-1$ "горизонтальними" і $m-1$ "вертикальними" вулицями (рис. 1.1.1). Скільки на цій сітці різних найкоротших шляхів, які ведуть з лівого нижнього кута (точки $(0,0)$) до правого верхнього кута (у точку (m,n))?*

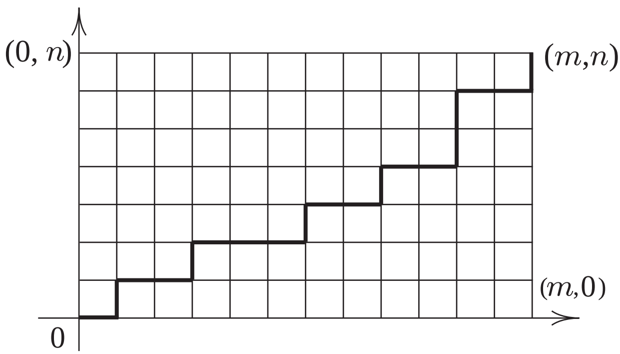

Рис. 1.1.1: "Шахове місто"

Р о з в' я з а н н я. Позначимо буквою Г горизонтальний відрізок шляху, буквою В — вертикальний. Кожен найкоротший шлях з $(0,0)$ у (m,n) має n вертикальних відрізків і m горизонтальних. Він цілком задається впорядкованою послідовністю завдовжки $n+m$, складеною з m букв Г і n букв В і навпаки. Тому число найкоротших шляхів дорівнює числу послідовностей завдовжки $n+m$, складених з m букв Г і n букв В. Кожна така послідовність однозначно задається вибором m місць з $n+m$ для букви Г (місця, що залишаються, заповнюються буквами В), тому їхнє число дорівнює C_{n+m}^{m}.

Розбиття множини. *Розбиттям* n-елементної множини Ω на m попарно неперетинних непорожніх підмножин, що містять $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$, називатимемо впорядкований набір

$$(A, B, C, \ldots, S)$$

неперетинних підмножин Ω, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів.

Два розбиття на m попарно неперетинних непорожніх підмножин, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів, різні, якщо хоча б в одній із пар відповідних k_j-елементних підмножин ($j = 1, 2, \ldots, m$) є різні елементи.

Приклад 1.1.11 . *Навести всі можливі розбиття множини $\Omega = \{a, b, c, d\}$ на три попарно неперетинні підмножини A, B, C, що містять відповідно $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$ елементів.*

Розв'язання.

$(\{a\}, \{b, c\}, \{d\}); (\{a\}, \{c, d\}, \{b\}); (\{a\}, \{b, d\}, \{c\});$
$(\{b\}, \{a, c\}, \{d\}); (\{b\}, \{c, d\}, \{a\}); (\{b\}, \{a, d\}, \{c\});$
$(\{c\}, \{a, b\}, \{d\}); (\{c\}, \{a, d\}, \{b\}); (\{c\}, \{b, d\}, \{a\});$
$(\{d\}, \{a, b\}, \{c\}); (\{d\}, \{a, c\}, \{b\}); (\{d\}, \{b, c\}, \{a\}).$

Зазначимо, що, наприклад, розбиття $(\{a\}, \{b, c\}, \{d\})$ і $(\{d\}, \{b, c\}, \{a\})$ множини $\Omega = \{a, b, c, d\}$ є різними.

Число розбиттів множини на підмножини. *Число $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ всіх розбиттів n-елементної множини Ω на m попарно неперетинних підмножин, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), дорівнює $n!/(k_1!k_2!\ldots k_m!)$, тобто*

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Перестановки з повтореннями. *Перестановкою з повтореннями* (*словом*) завдовжки n, утвореною з k_1 елементів (букв) a_1, k_2 елементів (букв) a_2, $\ldots$, k_m елементів (букв) a_m ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$) називатимемо впорядковану послідовність завдовжки n, складену з k_1 елементів (букв) a_1, k_2 елементів (букв) a_2, $\ldots$, k_m елементів (букв) a_m.

Два слова завдовжки n, утворені з k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, $\ldots$, k_m букв a_m різні, якщо вони відрізняються порядком букв.

Число перестановок з повтореннями. *Число перестановок з повтореннями (слів) завдовжки n, які можна утворити з k_1 елементів (букв) a_1, k_2 елемен-*

тів (букв) a_2, *...,* k_m *елементів (букв)* a_m $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$, *дорівнює* $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Приклад 1.1.12. *Скільки існує способів розміщення* n *різних частинок по* m *комірках так, щоб до першої комірки потрапило* k_1 *частинок, до другої —* k_2, *...*, *до* m*-ї —* k_m*?*

Розв'язання. Розіб'ємо n-елементну множину розрізненних частинок на m неперетинних підмножин: k_1-елементну підмножину частинок, які потрапляють до першої комірки, k_2-елементну — до другої, ..., k_m-елементну підмножину частинок, які потрапляють до m-ї комірки $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$. А число способів розбити n-елементну множину, як описано вище, дорівнює $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Сполуки (комбінації) з повтореннями. *Сполукою (комбінацією) з* m *елементів по* n *з повтореннями* називатимемо набір (множину) з n елементів, кожен з яких належить одному з m типів.

Сполука з m елементів по n з повтореннями однозначно задається числом x_1 елементів першого типу, числом x_2 елементів другого типу і т. д., числом x_m елементів m-го типу, що до неї входять, тобто визначається послідовністю $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ невід'ємних цілих чисел, таких, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, і навпаки — сполука з m елементів по n з повтореннями задає послідовність $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ цілих невід'ємних чисел таку, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ (x_1 — число елементів першого типу, x_2 — другого і т. д., x_m — число елементів m-го типу).

Дві сполуки з повтореннями з m елементів по n різні, якщо вони відрізняються кількістю елементів хоча б одного типу. Порядок елементів у сполуці з повтореннями неістотний.

Приклад 1.1.13. *Навести всі сполуки з повтореннями з 4 елементів* a, b, c, d *по 2.*

Розв'язання. $aa, bb, cc, dd, ab, ac, ad, bc, bd, dc$.

Число сполук з повтореннями. *Число* f_m^n *сполук з* m *елементів по* n *з повтореннями дорівнює* C_{n+m-1}^{m-1}, *тобто*

$$f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Якщо $n > m$, то число таких сполук з m елементів по n з повтореннями, в яких кожен елемент зустрічається хоча б один раз, дорівнює C_{n-1}^{m-1}.

Приклад 1.1.14. *Скільки невід'ємних розв'язків у цілих числах має рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$?*

Розв'язання. Розв'язком рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

у цілих невід'ємних числах є послідовність $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ цілих невід'ємних чисел, у якої $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$. Кожна така послідовність задає сполуку з m елементів по n з повтореннями (і навпаки). Тому шукане число розв'язків дорівнює числу f_m^n сполук з m елементів по n з повтореннями.

Сполуки з повтореннями і слова. Нехай ми маємо слово завдожки n, складене з m букв (елементів): x_1 букв a_1, x_2 букв a_2, і т. д., x_m букв a_m ($x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_m = n$). "Зсипемо" букви слова в урну, отримаємо набір із n елементів, у якому число елементів першого типу дорівнює x_1, другого — x_2, і т. д., m-го типу — x_m, тобто отримаємо сполуку з m елементів по n з повтореннями (одну) із заданим числом елементів кожного типу, що визначається словом.

Навпаки. Нехай ми маємо сполуку з m елементів по n з повтореннями, у якій число елементів першого типу дорівнює x_1, другого — x_2 і т. д., m-го типу — x_m (маємо набір із n елементів, "зсипаних" в урну: x_1 елементів a_1, x_2 елементів a_2 і т. д., x_m елементів a_m). Розмістивши елементи на n занумерованих місцях (упорядкувавши їх), отримаємо слово. Число всіх таких слів дорівнює $C_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

1.2 Задачі

АЗ: 1.3°, 1.10, 1.14, 1.16°, 1.18, 1.19°, 1.22, 1.23, 1.25.
СЗ: 1.4°, 1.5°, 1.11°, 1.15, 1.17°, 1.20, 1.24, 1.27, 1.30, 1.32.

У задачах, що пропонуються, перш ніж підраховувати число елементів тієї чи іншої множини, треба чітко з'ясувати: *що саме являють собою ці елементи* (*тобто, що* *підраховувати*). Перш ніж відповідати на питання “*скільки?*”, треба відповісти на питання “*що?*” (що рахуватимемо).

1.1°. З міста A до міста B веде n доріг, а з B до C — m доріг. Скількома способами можна здійснити подорож за маршрутом $A - B - C$?

1.2°. На вершину гори веде сім стежок. Скількома способами турист може піднятися на гору й спуститися з неї? Відповісти на це питання за умови, що сходження та спуск відбуваються різними шляхами.

1.3°. У розіграшу першості країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені між ними золота, срібна та бронзова медалі?

1.4°. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4?

1.5°. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожну з них використовувати не більше одного разу?

1.6°. Скількома способами сім осіб можуть стати в чергу до каси?

1.7°. Учні вивчають 10 предметів. У понеділок за розкладом 6 уроків, причому всі вони різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

1.8°. Скільки є п’ятизначних чисел, що діляться на 5?

1.9°. Автомобільний номер складається з двох літер і чотирьох цифр. Яке число різних номерів можна скласти, використовуючи 26 літер латинського алфавіту?

1.10. У розіграшу першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Команди, які здобудуть перше, друге й третє місця, нагороджують відповідно золотою, срібною і бронзовою медалями, а команди, які опиняться на двох останніх місцях, залишать вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?

1.11°. Скількома способами можна з 9 осіб вибрати комісію у складі 4 осіб?

1.12°. Скількома способами читач може вибрати три книги з п’яти?

1.13°. Скількома способами можна розмістити на полиці 4 різні книги?

1.14. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — різні прості числа. Скільки дільників має число

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — деякі натуральні числа?

1.15. Скільки є перестановок з n елементів, у яких два вказані стоять поряд?

1.16°. Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

1.17°. Студенту необхідно протягом 8 днів скласти 4 екзамени (за один день студент складає не більше одного екзамену). Скількома способами це можна зробити?

1.18. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ так, щоб числа $1, 2, 3$ стояли поряд і в порядку зростання?

1.19. Скільки є чотиризначних чисел, у яких кожна наступна цифра більша за попередню?

1.20. Скільки є чотиризначних чисел, у яких кожна наступна цифра менша за попередню?

1.21*. У прямокутну таблицю з m рядків і n стовпців треба записати числа $+1$ і -1 так, щоб добуток чисел у кожному рядку й кожному стовпці дорівнював 1. Скількома способами це можна зробити?

1.22. Маємо p білих і q чорних куль $(p > q)$. Скількома способами можна розмістити у ряд усі кулі так, щоб жодні 2 чорні кулі не лежали поряд?

1.23. На площині проведено n прямих так, що ніякі дві з них не паралельні й ніякі три не перетинаються в одній точці.

1) Знайдіть кількість точок перетину прямих.

2) Скільки трикутників утворюють прямі?

3) На скільки частин поділять площину прямі?

4) Скільки серед частин, на які поділяється площина прямими, обмежених і скільки необмежених?

1.24. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

1.25. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

1.26*. В опуклому n-кутнику проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин буде поділено при цьому n-кутник?

1.27. Довести, що

$$n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = n(A_1)n(A_2)\ldots n(A_k).$$

1.28. Довести, що число способів упорядкувати n-елементну множину дорівнює $n!$

1.29. Довести, що число A_n^k розміщень з n елементів по k дорівнює $n(n-1)\ldots(n-(k-1))$.

1.30. Довести, що C_n^k — число k-елементних підмножин n-елементної множини — дорівнює $n!/(k!(n-k)!)$.

1.31. Довести, що

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

1.32. Довести, що число $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ способів розбити n-елементну множину на m неперетинних підмножин відповідно з $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементами дорівнює $n!/(k_1!k_2!\ldots k_m!)$.

1.33. Довести, що існує $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ слів завдовжки n з k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, …, k_m букв a_m.

1.34. Скількома способами можна поділити $m+n+s$ предметів на три групи так, щоб в одній групі було m предметів, у другій — n, у третій — s?

1.35. Скількома способами можна поділити $3n$ предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала n предметів?

1.36. Довести, що число f_m^n сполук з m елементів по n з повтореннями дорівнює C_{n+m-1}^{m-1}.

1.37. Довести, що число сполук з m елементів по n з повтореннями ($n > m$), в яких кожен елемент зустрічається хоча б один раз, дорівнює C_{n-1}^{m-1}.

Глава 2

Стохастичний експеримент

2.1 Простір елементарних подій, алгебра подій

Теорія ймовірностей вивчає *стохастичні експерименти*, досліджуючи їхні математичні моделі. Під стохастичним експериментом розумітимемо експеримент, результат якого неможливо передбачити заздалегідь (до проведення експерименту), але який можна повторити в незалежний спосіб (результати попередніх експериментів не впливають на наступні) у принципі необмежене число разів.

Приклади стохастичних експериментів

1. Послідовно підкидають дві монети і реєструють сторони, якими лягла кожна з монет. Результат експерименту — "герб, герб", "герб, решка", "решка, герб", "решка, решка" — передбачити заздалегідь неможливо.

2. Підкидають гральний кубик і реєструють число очок, що випали. Результат експерименту — появу $1, 2, \ldots, 6$ — передбачити заздалегідь неможливо.

3. Підкидають монету і реєструють число підкидань до першої появи герба. Результат експерименту — число підкидань: $0, 1, 2, \ldots$ — заздалегідь передбачити неможливо.

4. Реєструють інтервал часу до виходу з ладу приладу. Результат — термін безвідмовної роботи приладу — заздалегідь передбачити неможливо.

5. Частинка бере участь у броунівському русі — рухається під дією ударів молекул рідини (молекули завжди перебувають у хаотичному тепловому русі). Результат експерименту — траєкторію руху частинки — заздалегідь передбачити неможливо.

Зазначимо, що кожен з перелічених вище експериментів можна в незалежний спосіб повторити необмежене число разів.

Простір елементарних подій. Кожному стохастичному експерименту відповідає *простір* (множина) його наслідків. Простір наслідків позначатимемо Ω, а самі наслідки, як правило (але не обов'язково), позначатимемо через ω (можливо з індексами). Наслідки стохастичного експерименту ще називають елементарними подіями.

У прикладі 1 за простір наслідків природно розглядати множину $\Omega = \{\text{ГГ, ГР, РГ, РР}\}$, у прикладах 2, 3, 4 відповідно множини $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, $\Omega = [0, \infty)$, у прикладі 5 за Ω природно розглядати множину траєкторій частинки.

Реалізацію стохастичного експерименту ми інтерпретуємо як випадковий вибір точки ω з простору Ω.

Простір елементарних подій Ω називатимемо *дискретним*, якщо множина Ω скінченна або зліченна, тобто її елементи можна пронумерувати числами $1, 2, \ldots$

Алгебра подій. У кожному стохастичному експерименті можна спостерігати певну сукупність подій, ми їх називатимемо *випадковими подіями* й позначатимемо $A, B, C, \ldots$, сукупність всіх подій, що спостерігаються у даному стохастичному експерименті позначатимемо через $\mathfrak{A}$. У прикладі 1 подіями, що спостерігаються є A — “випав хоча б один герб”, B — “монети лягли однією стороною”, ...

Кожну подію A стохастичного експерименту можна описати деякою підмножиною простору наслідків Ω, а саме:

$$A = \{\omega : \omega \in \Omega, \text{ які спричиняють подію } A\}.$$

Тому у подальшому випадкову подію ми ототожнюватимемо з підмножиною наслідків, яка цю подію описує і позначатимемо їх однією і тією самою буквою.

Якщо в результаті проведення стохастичного експерименту точка ω потрапила до множини A, яка описує подію A, говоритимемо, що подія A відбулася, у супротивному разі — не відбулася.

У прикладі 1 подія "монети лягли різними сторонами" описується підмножиною $\{\text{ГР}, \text{РГ}\}$ простору $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$, у прикладі 2 подія "випало парне число очок" описується підмножиною $\{2, 4, 6\}$ простору $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, у прикладі 3 подія "експеримент закінчився до четвертого підкидання" описується підмножиною $\{0, 1, 2, 3\}$ простору $\Omega = \{0, 1, \dots\}$, у прикладі 4 подія "термін безвідмовної роботи приладу понад 100 одиниць часу" описується підмножиною $(100, \infty)$ простору $\Omega = [0, \infty)$.

Серед подій стохастичного експерименту виділяються дві — подія, яка відбувається за кожної реалізації стохастичного експерименту (вона називається *достовірною* й описується множиною Ω), і подія, яка не відбувається за жодної реалізації експерименту (вона називається *неможливою* й описується множиною $\emptyset$).

Нехай A і B — випадкові події стохастичного експерименту, які описуються відповідно підмножинами A і B простору елементарних подій Ω.

Якщо щоразу, коли відбувається подія A, відбувається і подія B, то кажемо, що з події A випливає подія B і позначаємо це так: $A \subset B$ (у термінах підмножин, якими описуються події, A є підмножиною B).

Події A і B, такі що $A \subset B$ і $B \subset A$ (тобто A і B відбуваються разом), у теорії ймовірностей не розрізняють. Їх ототожнюють і позначають це так: $A = B$ (у термінах підмножин, що описують події, підмножини A і B рівні).

Подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій A або B, називається *сумою* (*об'єднанням*)[1] подій A і B і позначається так: $A \cup B$ (сума подій A і B описується об'єднанням $A \cup B$ множин A і B).

[1] Щодо операцій над подіями див. розд. 7.1. у гл 7.

Подія, яка полягає в тому, що відбуваються як подія A, так і подія B, називається *добутком* (*перетином*) подій A і B і позначається так: $A \cap B$ (добуток подій A і B описується перетином $A \cap B$ множин A і B).

Якщо події A і B такі, що $A \cap B = \emptyset$, то вони називаються *несумісними* (*неперетинними*).

Подія, яка полягає в тому, що A відбувається, а B не відбувається, називається *різницею* подій A і B і позначається так: $A \setminus B$ (різниця подій A і B описується різницею $A \setminus B$ множин A і B).

Подія, яка полягає в тому, що A не відбувається, називається *протилежною* до події A і позначається $\overline{A}$ (подія $\overline{A}$ описується доповненням $\overline{A}$ множини A до Ω).

Клас $\mathfrak{A}$ подій, який разом з кожною подією A містить подію $\overline{A}$, разом з кожними двома подіями A і B містить подію $A \cup B$, називатимемо *алгеброю подій*. Таким чином, сукупність подій, що спостерігаються у стохастичному експерименті, є алгеброю (докладно властивості алгебри подій вивчаються у гл. 7).

Нехай в експерименті 1 подія B — "монети лягли різними сторонами", A — "у результаті першого підкидання випав герб". Події B і A як підмножини простору елементарних подій $\Omega = \{\text{ГГ, ГР, РГ, РР}\}$ опишуться так: $B = \{\text{ГР, РГ}\}$, $A = \{\text{ГГ, ГР}\}$. Тоді, згідно з наведеними означеннями операцій над подіями, маємо: $A \cap B = \{\text{ГР}\}$ — "у результаті першого підкидання випав герб, а в результаті другого — решка", $A \cup B = \{\text{ГГ, ГР, РГ}\}$ — "принаймні один раз з'явився герб", $A \setminus B = \{\text{ГГ}\}$ — "з'явилося два герби", $\overline{B} = \{\text{ГГ, РР}\}$ — "монети лягли однією стороною".

Наведемо ще класичну ілюстрацію операцій над подіями.

Приклад 2.1.1. *У квадрат навмання кидають точку* (*див. рис.* 2.1.1). *Якщо точка потрапила до "вертикального" прямокутника, кажемо, що відбулася подія* A, *а якщо до "горизонтального" — подія* B. *Події* A, B, $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ *відбуваються, коли точка потрапляє до відповідної фігури, зображеної на рис.* 2.1.1.

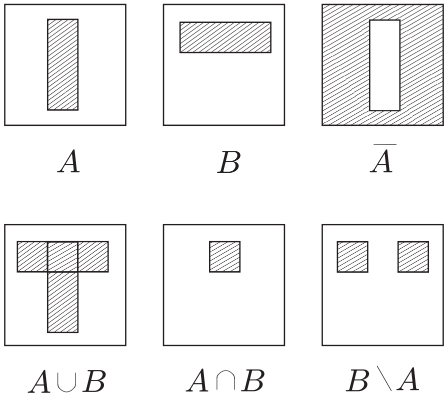

Рис. 2.1.1: Діаграми Вєнна

2.2 Задачі

АЗ: 2.2°, 2.5, 2.8°, 2.11, 2.12, 2.15, 2.16, 2.17.
СЗ: 2.3°, 2.4, 2.6°, 2.7°, 2.10°, 2.13, 2.14, 2.18, 2.19.

З а у в а ж е н н я. Терміни "елементарна подія стохастичного експерименту", "наслідок стохастичного експерименту", "результат стохастичного експерименту" означають одне й те саме.

2.1°. Указати події, протилежні до таких: а) A — "поява герба в результаті двох підкидань монети"; б) B — "три влучення в результаті трьох пострілів по мішені"; в) C — "принаймні одне влучення в результаті трьох пострілів по мішені".

2.2°. Зроблено три постріли по мішені. Нехай подія A_i полягає в тому, що в результаті i-го пострілу є влучення, $i = 1, 2, 3$. Виразити через A_i такі події: а) A — "відбулося три влучення"; б) B — "не було жодного влучення"; в) C — "відбулося лише одне влучення"; г) D — "відбулося не менше двох влучень".

2.3°. Нехай A, B, C — випадкові події. Записати події, які полягають у тому, що не відбулося жодної з подій A, B, C; з подій A, B, C відбулися: а) тільки подія A; б) події A та B і не відбулася подія C; в) усі три події; г) принаймні одна подія; д) одна й тільки одна подія; е) не більше двох подій.

2.4. Радіолокаційна станція стежить за космічним об'єктом, при цьому проведено n циклів огляду. Виявлення об'єкта в i-му циклі — випадкова подія, позначимо її через $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Виразити через $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$, такі події: A — "об'єкт не буде виявлено (у жодному циклі)"; B — "об'єкт буде виявлено (принаймні в одному циклі)"; C — "об'єкт буде виявлено тільки в одному циклі".

2.5. Кожна з m радіолокаційних станцій, що стежать за космічним об'єктом, робить n циклів спостережень. Позначимо через A_{ji} подію "об'єкт буде виявлено j-ю станцією в i-му циклі", $j = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Виразити через A_{ji} такі події: A — "об'єкт буде виявлено (принаймні однією станцією)"; B — "об'єкт буде виявлено кожною станцією".

2.6°. Двічі підкидають монету; побудувати простір елементарних подій Ω цього стохастичного експерименту. Описати як підмножини Ω події: A — "принаймні один раз з'явиться герб", B — "при другому підкиданні з'явиться герб". Знайти число всіх елементарних подій; число елементарних подій, що входять до A; до B.

2.7°. Гральний кубик підкидають двічі. Побудувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — "сума очок, що з'явилися, дорівнює 8"; B — "принаймні один раз з'явиться 6"; C — "при першому підкиданні з'явиться парне число очок"; D — "при обох підкиданнях з'явиться непарне число очок". Знайти число елементарних подій в Ω, A, B, C, D.

2.8°. Підкидають монету, а після цього гральний кубик. Побудувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — "з'явиться герб"; B — "з'явиться цифра 5". Знайти число елементарних подій в Ω, A, B.

2.9°. Нехай експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які набувають значень з відрізка $[0; 1]$. Описати простір елементарних подій.

2.10°. Із цифр $1, 2, 3, 4, 5$ спочатку вибирають одну, а потім з чотирьох, що залишилися, — другу. Побудувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — "на першому кроці буде вибрана парна цифра", B — "на другому кроці буде вибрана парна цифра". Знайти число елементарних подій в Ω, A, B.

2.11. З партії виробів обсягом N, серед яких M бракованих, навмання вибирають n виробів. Побудувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножину Ω подію A — "серед n вибраних виробів є точно m бракованих" $(n \leq N, m \leq M, m \leq n)$. Знайти число елементарних подій в Ω, A.

2.12. У ліфті 7 пасажирів, ліфт зупиняється на 10 поверхах. Для кожного пасажира фіксується номер поверху, на якому він виходить. Побудувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножину Ω подію A — "усі пасажири виходять на різних поверхах". Знайти число елементів у Ω, A.

2.13. Двоє гравців по черзі підкидають монету. Виграє той, у кого вперше випаде герб. Побудувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — "гра закінчиться на k-му підкиданні", B — "гра закінчиться до k-го підкидання", C — "виграє той, хто починає гру першим", D — "виграє той, хто починає гру другим".

2.14. В урні міститься одна куля, про яку відомо, що вона або біла, або чорна. В урну поклали білу кулю, а потім після ретельного перемішування беруть одну за одною обидві кулі. Запропонувати простір елементарних подій Ω цього стохастичного експерименту. Описати як підмножини Ω події: A — "першого разу буде взято білу кулю", B — "другого разу буде взято білу кулю".

2.15. Гральний кубик послідовно підкидають n разів. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножину Ω подію A — "випаде n_1 одиниць, n_2 двійок, ..., n_6 шісток" $(n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n)$. Обчислити кількість елементів у Ω, A.

2.16. У турнірі беруть участь $2n$ чоловік, які за жеребкуванням поділені на дві групи по n чоловік у кожній. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — "двоє найсильніших гравців гратимуть в різних групах", B — "четверо найсильніших гравців гратимуть по двоє в різних групах” (усі гравці різні за силою). Обчислити число елементів у Ω, A, B.

2.17. У навмання вибраній групі, що налічує r $(r \leq 12)$ студентів, цікавимося місяцями їхнього народження. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — “принаймні два студенти народилися в одному місяці”, B — “тільки один студент народився у вересні”, C — “принаймні один студент народився у вересні”, D — “жоден студент не народився у вересні”. Знайти число елементів у Ω, A, B, C, D.

2.18. Числа $1, 2, \ldots, n$ розміщують навмання. Кожному з них приписують номер місця, на якому розміщене число. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — “число 1 дістане номер 1”, B — “число 1 дістане номер 1, а число n — номер n”. Знайти число елементів у Ω, A, B.

2.19. Підкидають три гральні кубики. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — “одиниця випаде тільки на одному кубику”, B — “шістка випаде тільки на двох кубиках”, C — “на всіх кубиках випадуть різні грані”, D — “на всіх трьох кубиках випаде однакове число очок”. Знайти число елементів у Ω, A, B, C, D.

2.20. Монету і гральний кубик підкидають по черзі необмежене число разів. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A — “герб випаде раніше шістки”, B — “п’ятірка випаде раніше герба”.

2.21*. Кожна з n різних частинок потрапляє до однієї з m комірок. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножину Ω подію: A — “до першої комірки потрапить k_1 частинок, до другої — k_2, $\ldots$, до m-ї — k_m”. Знайти число елементів у Ω, A.

2.22*. Кожна з n нерозрізненних частинок потрапляє до однієї з m $(n \geq m)$ комірок. Запропонувати простір елементарних подій Ω. Описати як підмножину Ω подію: A — “кожна з комірок містить принаймні одну частинку”. Знайти число елементів у Ω, A.

Глава 3

Дискретний імовірнісний простір

3.1 Імовірність, класична модель

Частота події. Імовірність. Досвід свідчить, що в стохастичному експерименті події відрізняються частотою своєї появи (одні спостерігаються частіше, інші — рідше). Наприклад, при підкиданні грального кубика подія B — "шестірка не випала" відбувається частіше, ніж подія C — "шестірка випала". При підкиданні симетричної монети до першої появи герба подія B — "герб вперше випаде при першому підкиданні" відбувається частіше, ніж подія C — "герб вперше випаде при одинадцятому підкиданні".

Кількісною мірою частоти появи події A є *частота* $\nu_n(A)$ події A в послідовності n експериментів, яка означається так. Проведемо стохастичний експеримент у незалежний спосіб n разів; нехай $k_n(A)$ — число тих експериментів, у яких відбулася подія A. Тоді

$$\nu_n(A) = k_n(A)/n.$$

Частота $\nu_n(A)$ має такі властивості.
1. Для кожної події A

$$\nu_n(A) \geq 0. \tag{3.1.1}$$

2. Для несумісних подій A і B

$$\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B). \tag{3.1.2}$$

3. Для достовірної події Ω

$$\nu_n(\Omega) = 1. \tag{3.1.3}$$

Частота $\nu_n(A)$ події A в послідовності експериментів є стійкою — коливається навколо деякого числа, причому зі зростанням n значні відхилення $\nu_n(A)$ від цього числа зустрічаються все рідше — частота $\nu_n(A)$ стабілізується.

Математичною моделлю частоти є ймовірність.

Імовірність — функція

$$P : A \to P(A),$$

задана на класі подій, така, що

1. Для будь-якої події A

$$P(A) \geq 0. \tag{3.1.4}$$

2. Для несумісних (неперетинних) подій

$$A_i,\ i = 1, 2, \dots\ (A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{3.1.5}$$

3. Для достовірної події Ω

$$P(\Omega) = 1. \tag{3.1.6}$$

Значення $P(A)$ функції P на A називають імовірністю події A.

Імовірність на дискретному просторі. Пару $\{\Omega, P\}$, де Ω — дискретний простір елементарних подій стохастичного експерименту, а P — ймовірність на класі подій (підмножин Ω), називатимемо *дискретним імовірнісним простором.*

У дискретному просторі $\{\Omega, P\}$ кожну подію A можна подати у вигляді об'єднання (не більш ніж зліченного числа) наслідків ω_i:

$$A = \bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\},$$

а тому

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i), \tag{3.1.7}$$

зокрема

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i).$$

Рівність (3.1.7) означає, що *у дискретному ймовірнісному просторі ймовірність події A дорівнює сумі ймовірностей $P(\omega_i)$ наслідків ω_i, які описують подію A* (у загальному випадку — не дискретного Ω — це не так). І отже, *щоб задати ймовірність на дискретному просторі Ω, достатньо задати ймовірності наслідків $P(\omega)$,* $\omega \in \Omega$, при цьому має місце рівність (3.1.7).

Дискретний імовірнісний простір $\{\Omega, P\}$ є математичною моделлю стохастичного експерименту зі скінченною або зліченною множиною наслідків.

П р и м і т к а. Імовірність $p = P(A)$ події A можна інтерпретувати як кількісну міру прогнозу її появи: частота появи події A у довгій серії незалежних експериментів близька до її ймовірності p.

Приклад 3.1.1 . *Підкидають гральний кубик, маса якого розподілена так, що частота появи певної грані пропорційна її номеру (числу очок на ній). Побудувати ймовірнісний простір цього стохастичного експерименту. Описати як підмножини Ω події: A — "випаде число очок, кратне 3", B — "випаде парне число очок". Обчислити ймовірності цих подій.*

Підкидають симетричний гральний кубик (усі грані випадають однаково часто). Яким буде ймовірнісний простір цього стохастичного експерименту? Обчислити ймовірності подій A і B.

Розв'язання. За простір елементарних подій першого з описаних стохастичних експериментів природно розглядати $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Імовірність появи одиниці позначимо p, тоді ймовірність появи грані з номером j буде jp, і оскільки $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$, то $p + 2p + \ldots + 6p = 1$. Звідси $p = 1/21$, $P(j) = j/21$, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Отже, імовірнісний простір $\{\Omega, P\}$ стохастичного експерименту побудовано.

Події A і B опишуться відповідно підмножинами $A = \{3; 6\}$ і $B = \{2; 4; 6\}$ простору Ω.

Імовірності подій A і B (як імовірності подій у дискретному ймовірнісному просторі, див. (3.1.7)) обчислюються так:

$$P(A) = P(\{3; 6\}) = P(3) + P(6) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7};$$

$$P(B) = P(\{2; 4; 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{4}{7}.$$

У разі підкидання симетричного грального кубика простір елементарних подій буде таким самим:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots 6\},$$

а ймовірності елементарних подій природно задати так:

$$P(i) = 1/6, \ i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Тоді

$$P(A) = P(\{3; 6\}) = P(3) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

$$P(B) = P(\{2; 4; 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Зауваження. Зазначимо, що тут фактично розв'язуються дві задачі (і це стандартна ситуація).

Задача 1. Будується математична модель стохастичного експерименту (імовірнісний простір), тобто визначається простір елементарних подій Ω і задається ймовірність кожної елементарної події:

$$P(i) = i/21, \ i = 1, 2, \ldots, 6$$

(для несиметричного кубика) і

$$P(i) = 1/6, i = 1, 2, \ldots, 6$$

(для симетричного кубика). При цьому необхідно зауважити, що теорія ймовірностей ніяких вказівок і рекомендацій відносно того, як задавати ймовірності елементарних подій, не дає — із жодної теореми не випливає, що, скажімо, для симетричного кубика

$$P(i) = 1/6, \ i = 1, 2, \ldots, 6.$$

І щоразу, коли (з тих чи інших міркувань) імовірнісний простір вибрано, питання про його адекватність стохастичному експерименту залишається відкритим (відповісти на нього допомагає, зокрема, математична статистика).

Зазначимо, що побудова (вибір) імовірнісного простору не є задачею теорії ймовірностей.

З а д а ч а 2. Після вибору ймовірнісного простору $\{\Omega, P\}$ обчислюють імовірності тих чи інших подій (користуючись теоремами теорії ймовірностей).

Класична модель. Дискретний імовірнісний простір $\{\Omega, P\}$, усі елементарні події ω_i якого рівноймовірні, тобто $P(\omega_i) = P(\omega_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, називається *класичною моделлю.*

У класичній моделі $\{\Omega, P\}$ *простір елементарних подій* Ω *скінченний, і ймовірність* $P(\omega_i)$ *елементарної події* $\omega_i \in \Omega$ *дорівнює* $1/n(\Omega)$, *тобто*

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n(\Omega)}, \ i = 1, 2, \ldots, n(\Omega),$$

а для довільної події A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}. \tag{3.1.8}$$

Остання формула називається *формулою класичної ймовірності.*

Приклад 3.1.2. *Симетричний гральний кубик підкидають шість разів. Побудувати математичну модель цього стохастичного експерименту. Описати подію A — "випадуть усі шість граней" і обчислити її ймовірність.*

Р о з в' я з а н н я. За простір елементарних подій стохастичного експерименту природно взяти множину впорядкованих послідовностей, побудованих із шести чисел (від 1 до 6). Наприклад, послідовність $(6, 1, 6, 3, 2, 4)$ описує наслідок стохастичного експерименту, який полягає в тому, що при першому підкиданні грального кубика випала 6, при другому — 1, ..., при шостому — 4.

Подія A — "випали всі грані" опишеться як підмножина Ω, що складається з послідовностей, у запису яких зустрічається кожна з цифр $1, 2, \ldots, 6$.

Далі, оскільки кожен із наслідків стохастичного експерименту нічим не кращий і не гірший за інший (кубик симетричний), то природно вважати, що всі елементарні події рівноймовірні (з жодної теореми це твердження не випливає). Інакше кажучи, за математичну модель даного стохастичного експерименту приймаємо класичну модель. Тим самим імовірнісний простір (модель стохастичного експерименту) побудовано — запропоновано Ω і для кожного $\omega \in \Omega$ визначено $P(\omega)$: $P(\omega) = 1/n(\Omega)$.

Тепер обчислимо ймовірність події A — "випадуть усі шість граней". Оскільки прийнято класичну модель, то згідно з формулою класичної ймовірності (3.1.8), імовірність події A дорівнює відношенню числа $n(A)$ елементарних подій, що входять до події A, до числа $n(\Omega)$ всіх елементарних подій Ω.

Елементарних подій в Ω стільки, скільки є послідовностей завдовжки 6, які можна побудувати з шести чисел (від 1 до 6). Згідно з правилом множення їх 6^6. Елементарних подій, що входять до події A, стільки, скільки є послідовностей, які можна побудувати з різних чисел від 1 до 6 (скільки є перестановок з чисел $1, 2, \ldots$ $\ldots, 6$) — їх $6!$

Отже, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}.$$

3.2 Задачі

АЗ: $3.1, 3.5, 3.6, 3.7, 3.14, 3.16, 3.21, 3.27, 3.28^*$.
СЗ: $3.2, 3.9, 3.10, 3.11, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22$.

У задачах, що пропонуються далі, перш ніж обчислювати ймовірність тієї чи іншої випадкової події A, необхідно побудувати математичну модель стохастичного експерименту, тобто задати простір Ω елементарних подій ω і їхні ймовірності $P(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Потім описати подію A як підмножину Ω і обчислити її ймовірність у дискретному ймовірнісному просторі $\{\Omega, P\}$ (зазвичай це класична модель).

Примітка. Задачі з підкиданням гральних кубиків, монет розв'язуються у припущенні, що кубики й монети симетричні (якщо не наведено відповідного застереження).

3.1. У навмання вибраній групі, яка налічує r студентів, цікавимось їхніми днями народження. Обчислити ймовірність події A, яка полягає в тому, що принаймні у двох студентів дні народження співпадають.

3.2. У навмання вибраній групі, яка налічує r студентів, цікавимося місяцями їхнього народження. Обчислити ймовірність події A, яка полягає в тому, що принаймні двоє зі студентів народилися в одному й тому самому місяці.

3.3. Для зменшення загальної кількості ігор $2n$ команд (різних за силою) мають бути поділені на дві підгрупи по n команд кожна.

1. Яка ймовірність того, що дві найсильніші команди опиняться: а) в різних підгрупах; б) в одній підгрупі?

2. Яка ймовірність того, що чотири найсильніші команди опиняться: а) в різних підгрупах (по дві у кожній); б) в одній підгрупі; в) у різних підгрупах, причому в одній підгрупі 3 команди, в іншій — 1?

3.4°. У коробці містяться п'ять однакових кубиків, занумерованих числами від 1 до 5. Навмання по одному виймають усі кубики. Яка ймовірність того, що номери кубиків з'являться у порядку зростання?

3.5. Числа $1, 2, \ldots, n$ упорядковують навмання. Яка ймовірність того, що 1 і 2 будуть розміщені поряд?

3.6. Студент прийшов на екзамен, знаючи 20 з 25 питань програми. Екзаменатор ставить студенту три запитання. Обчислити ймовірність того, що студент: 1) знає відповіді на всі питання; 2) знає відповіді на два питання; 3) складе іспит (якщо для цього треба відповісти не менш ніж на два питання); 4) не складе іспит.

3.7. Гральний кубик підкидають 6 разів. Обчислити ймовірність того, що випадуть тільки парні грані.

3.8. Із карток розрізної азбуки складено слово “статистика”. Потім з цих десяти карток навмання вибирають сім. Знайти ймовірність того, що з вибраних карток можна скласти слово “статика”.

3.9. Дитина грається десятьма літерами розрізної азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні літер у ряд утвориться слово “математика”?

3.10. Нехай n осіб, серед яких присутні A і B, шикуються в шеренгу в довільному порядку. Яка ймовірність того, що між A і B стоятиме рівно r осіб?

3.11. У шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік (різних за силою), які за жеребкуванням мають бути поділені на дві групи по 10 чоловік кожна. Яка ймовірність того, що: а) двоє найсильніших учасників гратимуть у різних групах; б) четверо найсильніших учасників гратимуть по два в різних групах?

3.12. Знайти ймовірність того, що серед двох чисел, вибраних навмання з послідовності $1, 2, \ldots, n$, одне виявиться меншим, а інше більшим ніж задане число k $(1 < k < n)$.

3.13. Дев’ять пасажирів сідають у три вагони. Яка ймовірність того, що:

а) до кожного вагона сяде по три пасажири;

б) в один вагон сядуть чотири, у другий — три, у третій — два пасажири?

3.14. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Яка ймовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на одному й тому самому поверсі?

3.15°. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

3.16. Серед N виробів M бракованих. Навмання беруть n виробів $(n < M,\ n < N - M)$. Яка ймовірність того, що серед них m бракованих ($m < M$)? Яка ймовірність того, що серед них більше ніж m бракованих?

3.17. У лотереї n білетів, серед них m таких, що виграють. Яка ймовірність виграшу для того, хто має r білетів?

3.18. На екзамені пропонуються N питань. Студент знає відповіді на n питань. Екзаменатор ставить студенту k запитань, а для того щоб скласти екзамен, треба відповісти не менш ніж на r ($r < k$) питань. Яка ймовірність того, що студент складе екзамен?

3.19. Учасник лотереї "Спортлото" із 49 назв видів спорту (позначених числами $1, 2, \ldots, 49$) має назвати 6. Повний виграш отримує той, хто правильно вкаже всі шість назв. Виграш отримають і ті, хто вгадає не менше трьох назв. Обчислити ймовірність повного виграшу в "Спортлото". Обчислити ймовірність того, що учасник "Спортлото" вгадає 5, 4, 3 назви. Яка ймовірність отримати виграш у "Спортлото"?

3.20. Підкидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 випаде двічі?

3.21. Підкидають n гральних кубиків. Яка ймовірність того, що випадуть n_1 одиниць, n_2 двійок, …, n_6 шісток ($n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n$)?

3.22°. Чотиритомну збірку творів розміщують на полиці навмання. Обчислити ймовірність того, що томи стоятимуть у порядку зростання їхніх номерів.

3.23°. Двічі підкидають симетричну монету. Побудувати ймовірнісний простір цього стохастичного експерименту. Описати події: A — "за першого підкидання випаде герб", B — "за другого підкидання випаде герб". Обчислити ймовірності $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

3.24°. Тричі підкидають симетричну монету. Побудувати ймовірнісний простір цього стохастичного експерименту. Описати події: A — "двічі випаде герб", B — "принаймні один раз випаде герб". Обчислити ймовірності $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B/A)$.

3.25. Підкидають n гральних кубиків. Обчислити ймовірність того, що на всіх гральних кубиках з'явиться однакове число очок.

3.26°. Підкидають шість гральних кубиків. Обчислити ймовірність того, що сумарне число очок на кубиках дорівнюватиме 7.

3.27. Нехай n осіб сідають у ряд навмання. Яка ймовірність того, що дві певні особи опиняться поряд? Обчислити ту саму ймовірність, якщо особи сідають до круглого столу.

3.28*. Довести, що ймовірніше одержати принаймні одну одиницю при підкиданні чотирьох гральних кубиків, ніж у разі 24 підкидань двох кубиків одержати принаймні один раз дві одиниці.

Примітка. Задача відома як парадокс де Мере. Придворний кавалер та азартний гравець шевальє де Мере, сучасник Блеза Паскаля, вважав, що ймовірності цих подій однакові, і звинувачував математиків у своїх програшах.

3.29. Довести, що в класичній моделі $\{\Omega, P\}$ простір елементарних подій Ω скінченний і для кожної елементарної події $\omega_i \in \Omega$ значення ймовірності

$$P(\omega_i) = 1/n(\Omega),\ i = 1, 2, \dots, n(\Omega),$$

де $n(\Omega)$ — число всіх елементарних подій.

3.30. Довести, що в класичній моделі $\{\Omega, P\}$ для будь-якої події A (підмножини A простору Ω)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

де $n(\Omega)$ — число всіх елементарних подій, а $n(A)$ — число тих із них, що входять до складу A.

3.31 (статистика Максвелла-Больцмана). Кожна з n розрізненних частинок потрапляє до однієї з m комірок.

Яка ймовірність того, що в першій, другій, ..., m-й комірці буде відповідно $k_1, k_2, \dots, k_m$ частинок?

3.32. До круглого столу сідають n осіб. Обчислити ймовірність того, що три певні особи опиняться поруч.

3.33°. Підкидають три монети. Знайти ймовірності подій: A — "на першій монеті випаде герб", B — "випаде рівно два герби", C — "випаде не більше двох гербів".

3.34. Із множини всіх послідовностей завдовжки n, складених із цифр $0, 1, 2$ випадково вибирається одна. Знайти ймовірності подій: A — "послідовність починається з 0", B — "послідовність містить $m + 2$ нулів, причому два з них — на кінцях послідовності”, C — “послідовність містить m одиниць”, D — “послідовність складена з m_0 нулів, m_1 одиниць, m_2 двійок”.

3.35°. Підкидають два гральні кубики. Знайти ймовірність подій: A — “сума очок, що випали, кратна 6”, B — “сума очок, що випали, кратна 2”, C — “добуток очок, що випали, є парне число”.

3.36. Обчислити ймовірність того, що чотиризначний номер навмання вибраного у великому місті автомобіля: а) складається з різних цифр; б) має тільки дві однакові цифри; в) має дві пари однакових цифр; г) має тільки три однакові цифри; д) складається з однакових цифр.

3.37. З урни, що містить M_1 куль з номером 1, M_2 куль з номером 2, ..., M_N куль з номером N, навмання вибирають n куль. Обчислити ймовірність події “з’явиться m_1 куль з номером 1, m_2 куль з номером 2, ..., з’явиться m_N куль з номером N”.

3.38. Із множини $\{1, 2, \dots, N\}$ навмання послідовно без повернення вибирають два числа ξ_1 і ξ_2. Обчислити ймовірність події $\{\xi_1 < \xi_2\}$.

Із множини $\{1, 2, \dots, N\}$ навмання послідовно без повернення вибирають три числа ξ_1, ξ_2, ξ_3. Обчислити ймовірність того, що друге число буде розташоване між першим і третім, інакше кажучи обчислити ймовірність події $\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\}$.

Із множини $\{1, 2, \dots, N\}$ навмання послідовно без повернення вибирають n чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $(n \le N)$. Обчислити ймовірність того, що числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ з’являються у порядку зростання.

3.39. Куб, усі грані якого пофарбовано, розпиляли на тисячу кубиків однакового розміру. Кубики перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик: а) має принаймні одну пофарбовану грань; б) має дві пофарбовані грані; в) має три пофарбовані грані.

3.40 (призова гра). Ви учасник призової гри (приз — автомобіль). Перед вами троє зачинених дверей. За одними з них автомобіль. Ведучий пропонує вам вибрати двері. Ви вибираєте. Перш ніж відчинити вибрані вами двері ведучий відчиняє одні з дверей, що залишилися — за ними автомобіля немає. Після цього ведучий пропонує вам два варіанти наступних дій: відчинити двері, які ви вибрали раніше, або відчинити двері, що залишилися. Якщо за зачиненими дверима автомобіль — він ваш.

Який вибір зробити — відчинити двері, вибрані вами раніше, чи відчинити двері, що залишилися?

Зрозуміло, що перевагу треба надати тому вибору, для якого ймовірність виграшу автомобіля більша. У зв'язку з такою постановкою задачі обчисліть ймовірність виграшу автомобіля, якщо: 1) ви відчиняєте вибрані раніше двері; 2) ви відчиняєте двері, що залишилися.

Задача і її розв'язання особливо "прозорі", якщо автомобіль знаходиться за одними з n дверей (нехай для наочності $n = 1000$).

Ви вибираєте двері, після чого ведучий демонструє, що за $n-2$ дверима з $n-1$, що залишилися після вашого вибору, автомобіля немає. Далі вибір за вами — відчинити початково вибрані двері чи відчинити двері, що залишилися.

Глава 4

Умовна ймовірність

4.1 Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Умовна ймовірність. Нехай $\{\Omega, P\}$ — імовірнісний простір. *Умовною ймовірністю* $P(A/B)$ події A відносно події B $(P(B) > 0)$ називатимемо величину $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, тобто

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{4.1.1}$$

З (4.1.1) маємо

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) \ (P(B) > 0).$$

Цю рівність називають *формулою множення.*

У класичній моделі

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)},$$

тобто умовна ймовірність $P(A/B)$ події A відносно події B дорівнює відношенню числа $n(A \cap B)$ елементарних подій, що належать до $A \cap B$, до числа $n(B)$ елементарних подій, що належать до B.

Примітка. Умовну ймовірність $p = P(A/B)$ події A відносно події B можна інтерпретувати як кількісну міру прогнозу появи A, коли додатково відомо, що відбулася подія B.

Приклад 4.1.1. *Підкидають три симетричні гральні кубики. Знайти ймовірність того, що хоча б на одному випаде одиниця, якщо відомо, що на трьох випали різні грані.*

Розв'язання. Кубики вважатимемо розрізненними. Як простір елементарних подій Ω розглядатимемо впорядковані трійки, складені з чисел $1, 2, \ldots, 6$. Оскільки кубики симетричні, то природно вважати всі елементарні події рівноймовірними. Тим самим ймовірнісний простір стохастичного експерименту побудовано.

Нехай B — подія "на трьох кубиках випали різні грані", A — "хоча б на одному кубику випала одиниця". У задачі необхідно обчислити умовну ймовірність $P(A/B)$.

Маємо

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3};\ P(A \cap B) = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6^3};$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \Big/ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{1}{2}.$$

Імовірність $P(A/B)$ можна обчислити, скориставшись тим, що в класичній моделі $\{\Omega, P\}$ умовна ймовірність $P(A/B)$ дорівнює відношенню числа елементарних подій, що належать $A \cap B$, до числа елементарних подій, що належать B, тобто

$$P(A/B) = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 4.1.2 (задача Льюїса Керрола). *В урні міститься одна куля, про яку відомо, що вона або біла (з імовірністю $1/2$), або чорна. В урну поклали білу кулю, і після ретельного перемішування взяли навмання одну кулю, яка виявилася білою. Яка ймовірність того, що після цього з урни візьмуть білу кулю?*

Розв'язання 1. Експеримент полягає у послідовному вийманні з урни двох куль. Позначимо білу кулю через W, чорну — через B. Множиною всіх наслідків стохастичного експерименту є

$$\Omega = \{WW, WB, BW\}.$$

Наприклад, пара WB означає наслідок: "першою взято білу кулю, другою — чорну". Нехай A_1 — подія "біла куля вибрана першою", A_2 — "біла куля вибрана другою". Необхідно обчислити $P(A_2/A_1)$. Події A_1, A_2, $A_1 \bigcap A_2$ як підмножини Ω опишуться так:

$$A_1 = \{WW, WB\},\ A_2 = \{WW, BW\},\ A_1 \cap A_2 = \{WW\}.$$

Оскільки до Ω входять три елементарні події, до A_1 — дві, до $A_1 \cap A_2$ — одна, то

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання 2. На білій кулі, що кладуть до урни, поставимо мітку, наприклад, зірочку й позначимо цю кулю через W^*. Тоді множиною всіх наслідків стохастичного експерименту є

$$\Omega^* = \{WW^*,\ W^*W,\ BW^*, W^*B\}.$$

Події A_1, A_2, $A_1 \cap A_2$ як підмножини Ω^* опишуться так:

$$A_1 = \{WW^*, W^*W, W^*B\},\ A_2 = \{WW^*, W^*W, BW^*\},$$

$$A_1 \cap A_2 = \{WW^*, W^*W\}.$$

Тому

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Два розв'язання — дві різні відповіді.
Питання 1. Яке розв'язання неправильне?
Питання 2. Де припустилися помилки?

Спробуйте спочатку відповісти на питання 1 і 2, не читаючи далі.

Відповідь до прикладу 4.1.2.

Розв'язання 1 неправильне. Модель не є класичною, а ймовірності подій обчислюються як у класичній моделі. Імовірності елементарним подіям необхідно приписати так:

$$P(WW) = 1/2,\ P(WB) = 1/4,\ P(BW) = 1/4.$$

Оскільки спочатку в урні була біла куля (з імовірністю $1/2$) або чорна (з імовірністю $1/2$), то після того, як в урну поклали одну білу кулю, в урні знаходяться з імовірністю $1/2$ кулі одного кольору й з імовірністю $1/2$ — різного. У цій моделі маємо:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(WW) = 1/2,$$

$$P(A_1) = P(\{WW, WB\}) =$$
$$= P(WW) + P(WB) = 1/2 + 1/4 = 3/4,$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

У розв'язанні 2 кожному наслідку приписуємо ймовірність $1/4$. Зазначимо, що в урні після того, як до неї поклали одну білу кулю і до того, як кулі почали виймати, було: дві білі кулі (з імовірністю $1/2$), або одна біла, а друга чорна (з імовірністю $1/2$).

Коментар до прикладу. Приклад, зокрема, ілюструє той факт, що для одного й того самого стохастичного експерименту можна запропонувати різні простори елементарних подій, а разом із ними й різні ймовірнісні простори, які адекватно описують стохастичний експеримент. У прикладі було запропоновано два простори елементарних подій:

$$\Omega = \{WW, WB, BW\} \text{ і } \Omega^* = \{WW^*, W^*W,\ BW^*, W^*B\}.$$

Розподіл імовірностей на просторі елементарних подій Ω такий:

$$P(WW) = 1/2,\ P(WB) = 1/4,\ P(BW) = 1/4,$$

а на просторі Ω^* такий:

$$P(WW^*) = 1/4,\ P(W^*W) = 1/4,$$

$$P(W^*B) = 1/4,\ P(BW^*) = 1/4.$$

Обидві моделі адекватно описують стохастичний експеримент. Зазначимо, що одна з них класична, інша — ні.

Формула повної ймовірності. Події $B_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$, називатимемо *повною групою подій*, якщо вони попарно не перетинаються ($B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$) і в об'єднанні дають достовірну подію $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega\right)$.

Теорема. *Нехай $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — повна група подій і $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді для будь-якої події A має місце формула повної ймовірності*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i).$$

Формула повної ймовірності справджується і для зліченної повної групи подій.

Приклад 4.1.3 . *Розглянемо стародавню процедуру жеребкування, яка в наші дні повторюється щоразу під час складання студентами іспиту.*

Серед N екзаменаційних білетів є n "щасливих" (усі студенти їх знають). Студенти один за одним підходять за білетами. У кого більша ймовірність взяти "щасливий" білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Розв'язання. Позначимо через A_i^l подію "i-й студент узяв щасливий білет", $i = 1, 2$, а через A_1^u — "1-й студент узяв нещасливий білет". Далі обчислимо $P(A_1^l)$ і $P(A_2^l)$.

Згідно з формулою класичної ймовірності

$$P(A_1^l) = \frac{n}{N}.$$

Імовірність події $P(A_2^l)$ обчислимо за формулою повної ймовірності, враховуючи, що A_1^l і A_1^u утворюють повну групу подій:

$$P(A_2^l) = P(A_2^l/A_1^l)P(A_1^l) + P(A_2^l/A_1^u)P(A_1^u) =$$

$$= \frac{n-1}{N-1}\frac{n}{N} + \frac{n}{N-1}\frac{N-n}{N} = \frac{n}{N}.$$

Отже, ймовірність узяти "щасливий" білет для обох студентів однакова.

Примітка. Таку відповідь маємо, якщо перший студент не говорить, який він узяв білет. У супротивному разі ймовірність того, що "щасливий" білет узяв другий студент, коли перший узяв "щасливий" білет (і сказав про це), дорівнює $(n-1)/(N-1)$, тобто

$$P(A_2^l/A_1^l) = (n-1)/(N-1),$$

а коли перший узяв "нещасливий" білет (і сказав про це),

$$P(A_2^l/A_1^u) = n/(N-1).$$

Формули Байєса. *Нехай $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — повна група подій і $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді для довільної події A $(P(A) > 0)$*

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A/B_k)P(B_k)}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Приклад 4.1.4 (сигнал на фоні шуму). *На фоні шуму на вхід радіолокаційного пристрою з імовірністю p $(0 < p < 1)$ надходить сигнал. Якщо надходить сигнал (із шумом), то пристрій реєструє наявність сигналу з імовірністю p_1, якщо тільки шум, то пристрій реєструє наявність сигналу з імовірністю p_2. Відомо, що пристрій зареєстрував сигнал. Яка ймовірність того, що на вхід радіолокаційного пристрою надійшов сигнал?*

Р о з в' я з а н н я. Введемо позначення: A_c — на вхід надійшов сигнал (із шумом), A — на вхід надійшов тільки шум, B_c — пристрій зареєстрував наявність сигналу, B — пристрій зареєстрував шум. Необхідно обчислити $P(A_c/B_c)$. Скориставшись формулою Байєса (події A_c і A утворюють повну групу подій), одержимо

$$P(A_c/B_c) = \frac{P(B_c/A_c)P(A_c)}{P(B_c/A_c)P(A_c) + P(B_c/A)P(A)}.$$

За умовою задачі

$$P(A_c) = p,\ P(A) = 1 - p,\ P(B_c/A_c) = p_1,\ P(B_c/A) = p_2.$$

Отже, шукана ймовірність

$$P(A_c/B_c) = \frac{p_1 p}{p_1 p + p_2(1 - p)}.$$

4.2 Незалежні події

Інтуїтивно, випадкові події незалежні, якщо інформація про одну подію (відбулася, не відбулася) не змінює прогнозу появи іншої. (Наприклад, при підкиданні монети і грального кубика інформація про те, що на кубику випала шістка не змінює прогноз появи герба на монеті.) Тому формально незалежні події A і B можна означити як такі, для яких справджується рівність

$$P(A/B) = P(A)$$

або, що те саме,

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

Останню рівність можна переписати і так:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Означення. Нехай $\{\Omega, P\}$ — імовірнісний простір. Події A і B $(A \subset \Omega, B \subset \Omega)$ називатимемо *незалежними*, якщо
$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називатимемо *незалежними в сукупності*, якщо для $k = 2, 3, \ldots, n$ та довільних $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_k$ таких, що $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ має місце рівність

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називатимемо *попарно незалежними*, якщо для будь-яких двох різних індексів s і k

$$P(A_s \cap A_k) = P(A_s)P(A_k).$$

Якщо події A і B незалежні, то події A і $\overline{B}$; $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

Приклад 4.2.1 (С. Н. Бернштейн). *Підкидають правильний тетраедр, три грані якого пофарбовано відповідно у червоний, синій і зелений кольори, а у забарвленні четвертої грані є всі три кольори. Події: R — "червоний", B — "синій", G — "зелений" означають, що у забарвленні грані, яка стикається з поверхнею, є відповідні кольори. Перевірити, що події R, B, G попарно незалежні, але не є незалежними в сукупності.*

Розв'язання. Наслідок експерименту — тетраедр даною гранню стикається з поверхнею. Оскільки тетраедр правильний, то приймаємо класичну модель.

Кожен колір наявний в забарвленні двох граней, тому

$$P(R) = 2/4 = 1/2,\ P(B) = 1/2,\ P(G) = 1/2.$$

Два й більше кольорів наявні в забарвленні однієї грані, тому
$$P(R \cap B \cap G) = 1/4,\ P(R \cap B) = 1/4,$$
$$P(R \cap G) = 1/4,\ P(B \cap G) = 1/4.$$

Звідси

$$P(R \cap B) = P(R)P(B),\ P(R \cap G) = P(R)P(G),$$

$$P(B \cap G) = P(B)P(G).$$

Отже, події R, B, G — попарно незалежні. Але

$$P(R \cap B \cap G) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = P(R)P(B)P(G).$$

Останнє означає, що події R, B, G не є незалежними в сукупності.

4.3 Задачі

АЗ: $4.11^\circ, 4.12, 4.13, 4.22, 4.23, 4.24$.
СЗ: $4.3^\circ, 4.5, 4.7^\circ, 4.9, 4.10^\circ, 4.13, 4.16, 4.19, 4.24, 4.26$.

4.1°. Події A і B — незалежні. Довести, що події A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

4.2°. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні в сукупності й $P(A_k) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Яка ймовірність того, що:

а) не відбудеться жодна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

б) відбудеться принаймні одна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

в) відбудеться одна й тільки одна з подій $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$?

4.3°. За один цикл огляду радіолокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, він буде виявлений з імовірністю p. Об'єкт у кожному циклі виявляється незалежно від інших. Проведено n циклів спостережень. Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлено?

4.4°. Прилад, що складається з n блоків, виходить з ладу, якщо виходить з ладу принаймні один блок. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Надійність[1] кожного блоку становить p. Обчислити надійність приладу.

4.5. Для підвищення надійності приладу він дублюється таким самим приладом; надійність кожного приладу становить p. У разі виходу з ладу першого приладу відбувається миттєве перемикання на дублювальний прилад. Знайти надійність:

[1] Надалі під надійністю приладу або блоку приладів розумітимемо ймовірність його безвідмовної роботи на певному фіксованому інтервалі часу.

1) цієї системи приладів;

2) системи приладів, якщо пристрій перемикання спрацьовує з надійністю p_1.

4.6. Для підвищення надійності приладу він дублюється $n-1$ такими самими приладами; надійність кожного приладу становить p. Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти надійність:

1) цієї системи приладів;

2) системи приладів, якщо кожен з пристроїв, який вмикає дублювальний прилад, має надійність p_1.

Скільки треба взяти приладів, щоб надійність була не менша ніж P?

4.7°. Підкидають два гральні кубики: червоного й рожевого кольорів. Яка ймовірність того, що сума очок на кубиках більша або дорівнює 10, коли відомо, що:

а) на червоному кубику випало 5 очок;

б) на одному з кубиків випало 5 очок (можливість випадання 5 очок на обох кубиках не виключена)?

4.8°. В урні міститься n куль. Усі можливі припущення про кількість білих куль в урні рівноймовірні. Навмання з урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

4.9°. В N урнах міститься $n_1, n_2, \ldots, n_N$ куль, серед них білих відповідно $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Навмання вибирають урну, а з неї — кулю. Яка ймовірність того, що ця куля виявиться білою?

4.10°. У двох урнах міститься n_1 і n_2 куль, із них білих куль відповідно m_1 і m_2. З першої урни перекладають у другу одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

4.11°. Підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок не менша дев'яти, якщо на одному з кубиків випало чотири очки?

4.12. Радіолокаційна станція веде спостереження за космічним об'єктом, який може створювати протилокаційні перешкоди. Якщо об'єкт не створює перешкод, то за один цикл огляду станція виявляє його з імовірністю p_0, якщо створює, то з імовірністю p_1 ($p_1 < p_0$). Імовірність того, що протягом циклу огляду будуть створені перешкоди, становить p і не залежить від того, як і коли створювалися перешкоди в інших циклах. Знайти ймовірність того, що об'єкт буде виявлено принаймні один раз протягом n циклів огляду.

4.13. Прилад складається з n блоків, які дублюють один одного і можуть працювати як за сприятливих умов, так і за несприятливих. За несприятливих умов надійність роботи кожного блоку дорівнює p_1, а за сприятливих — p_2. Імовірність того, що прилад працюватиме за сприятливих умов дорівнює p, а за несприятливих — $(1-p)$. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Обчислити надійність приладу.

4.14°. В урну, яка містить n куль, кладуть білу кулю. Яка ймовірність того, що вибрана з урни куля буде білою, якщо всі припущення про початкову кількість білих куль в урні рівноймовірні?

4.15°. В урні міститься n куль. Усі припущення про кількість білих куль в урні рівноймовірні. Навмання вибрана з урни куля виявилася білою. Обчислити ймовірності всіх припущень щодо кількості білих куль в урні. Яке припущення найімовірніше?

4.16°. У кожній з k_1 урн (перша група) міститься m_1 білих і n_1 чорних куль, а в кожній з k_2 урн (друга група) міститься m_2 білих і n_2 чорних куль. Із навмання вибраної урни взяли кулю, яка виявилася білою. Яка ймовірність того, що її взяли з першої групи урн?

4.17. Стрілець A влучає в ціль з імовірністю $p_1 = 0{,}6$, стрілець B — з імовірністю $p_2 = 0{,}5$, стрілець C — з імовірністю $p_3 = 0{,}4$. Стрільці одночасно стріляють по мішені. Відомо, що є точно два влучення. Що ймовірніше: влучив стрілець C у мішень чи ні?

4.18. В урні міститься 12 білих, 8 чорних і 10 червоних куль. Навмання беруть дві кулі. Яка ймовірність того, що ці кулі різного кольору, якщо відомо, що червона куля не вибрана?

4.19. З урни, що містить 3 білі і 2 чорні кулі, переклали дві кулі до урни, в якій було 4 білі і 4 чорні кулі. Яка ймовірність тепер взяти білу кулю з другої урни?

4.20. Деталі виготовляють на двох заводах. Обсяг продукції другого заводу в n раз перевищує обсяг продукції першого заводу. Частка браку на першому заводі p_1, на другому — p_2. Навмання вибрана деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на другому заводі?

4.21. Ви учасник призової гри, описаної у задачі 3.40, але після того, як ви вибрали двері, ведучий з дверей, що залишилися після вашого вибору, одну вибирає навмання і відчиняє. Якщо за ними виявився автомобіль, то гра припиняється, якщо автомобіля немає, ведучий пропонує вам відчинити або двері, які ви вибрали раніше, або двері, що залишилися. Якщо за відчиненими дверима автомобіль — він ваш. Знайти ймовірність виграшу автомобіля.

Ми розглянемо більш загальну задачу: автомобіль знаходиться за однією з n дверей. Після вибору вами дверей ведучий з $(n-1)$ дверей, що залишилися після вашого вибору, навмання вибирає $(n-2)$ дверей, якщо за ними виявився автомобіль, то гра припиняється (ви залишаєтеся без приза), якщо автомобіля немає, вам надається право відчинити одні з дверей, що залишилися.

Який вибір зробити? Яка ймовірність того, що ви виграєте автомобіль?

4.22. Трьом радіостанціям дозволена робота на одній із трьох заданих частот. Імовірність вибору радіостанцією кожної з частот дорівнює $1/3$ і не залежить від того, які частоти вибрані іншими радіостанціями. Знайти ймовірності подій: "усі радіостанції працюють на одній частоті", "усі радіостанції працюють на різних частотах".

4.23. Під час рентгенівського обстеження ймовірність виявити захворювання у хворого на туберкульоз становить $1-\beta$. Імовірність визнати здорову людину хворою дорівнює α. Нехай частка хворих на туберкульоз відносно всього населення становить γ. Знайти ймовірність того, що людина здорова, якщо вона була визнана хворою під час обстеження.

4.24. Імовірність того, що виріб підприємства задовольняє стандарт, дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система контролю, яка класифікує стандартний виріб як стандартний з імовірністю 0,98, а нестандартний виріб як стандартний з імовірністю 0,05. Яка ймовірність того, що виріб, який витримав контроль, задовольняє стандарт?

4.25°. Підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна п'ятірка, якщо відомо, що сума очок дорівнює восьми?

4.26. Двоє стрільців стріляють у ціль. Один з них влучає в ціль у середньому в 5 випадках з 10, а другий — у 8 випадках з 10. Перед пострілом вони підкидають симетричну монету для визначення черговості. Сторонній спостерігач знає умови стрільби, але не знає, хто в даний момент стріляє. Він бачить, що стрілець влучив у ціль. Яка ймовірність того, що стріляв перший стрілець?

4.27. Є три урни: у першій знаходиться N_1 білих і M_1 чорних куль, у другій — N_2 білих і M_2 чорних, у третій — N_3 білих і M_3 чорних куль ($N_i \geq 2,\ M_i \geq 2,\ i = 1, 2, 3$).

Навмання вибирають одну з урн і з неї без повернення дві кулі. Одна з них виявилася білою, інша — чорною. Знайти ймовірність того, що вибір був зроблений а) з першої; б) з другої; в) з третьої урни.

4.28 (задача про поділ ставки). Два гравці грають у справедливу гру — у обох шанси виграти однакові. (Наприклад, підкидають симетричну монету, якщо при цьому монета лягла гербом, партію виграв перший гравець, якщо решкою — другий.) Гравці домовилися, що той, хто першим виграє 6 партій, отримує увесь приз. Але гра зупинилася до того, як один з гравців виграв приз (наприклад, перший виграв 5 партій, а другий — 3). Як справедливо розділити приз?

Задача про поділ ставки має давні корені. Вперше її опублікував у Венеції у 1494 р. відомий математик Фра Лука Пачолі. Є підстави вважати, що задача має арабське походження. Для її розв'язання було докладено чимало зусиль знаменитих математиків. Сам Пачолі не бачив зв'язок цієї задачі з теорією ймовірностей. Неправильний розв'язок дав Нікколо Тарталья (1499–1557), хоча він був досить геніальним, щоб за одну ніч знайти формулу коренів кубічного рівняння. Правильний розв'язок незалежно один від одного отримали Паскаль і Ферма у 1654 р. Це відкриття виглядало наскільки важливим, що багато вважають 1654 р. роком народження теорії ймовірностей.

4.29. Два гравці грають у справедливу гру. Той, хто першим виграє 7 партій, отримує увесь приз. Гра зупинилася, коли перший виграв 6 партій, а другий — 3.

Як справедливо розділити приз?

4.30 (узагальнення задачі Льюїса Керрола). В урні знаходиться одна куля, про яку відомо, що вона або біла (з імовірністю 1/2), або чорна. В урну поклали n білих куль, а потім після ретельного перемішування послідовно взяли n куль, які виявилися білими.

Яка ймовірність того, що остання куля, взята з урни, виявиться білою?

4.31°. З урни, яка містить 5 білих і 2 чорних кулі, загубили одну кулю. Для того, щоб визначити склад урни, з неї взяли 2 кулі, які виявилися білими. Обчислити ймовірність того, що була загублена біла куля.

4.32. Працює m радіолокаційних станцій, кожна з яких за один цикл огляду виявляє об'єкт з імовірністю p (незалежно від інших циклів та інших станцій). За час T кожна станція встигає здійснити n циклів. Знайти ймовірності таких подій: A — "за час T об'єкт буде виявлено принаймні однією зі станцій", B — "за час T об'єкт буде виявлено кожною зі станцій".

Глава 5

Дискретна випадкова величина та її розподіл

5.1 Обчислення розподілу функції від випадкової величини

Випадкова величина на дискретному ймовірнісному просторі. Інтуїтивно, випадкова величина — це величина, яка набуває тих чи інших значень залежно від наслідку стохастичного експерименту (число космічних частинок, що досягли лічильника, число мутацій у клітинах при радіоактивному опроміненні, число спалахів на Сонці, ...). Наслідки стохастичного експерименту описуються точками ω множини наслідків Ω ймовірнісного простору $\{\Omega, P\}$, тому формально випадкову величину ми означаємо як функцію $\xi = \xi(\omega)$ на множині Ω.

Означення. *Випадковою величиною* на дискретному ймовірнісному просторі $\{\Omega, P\}$ називатимемо функцію $\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, задану на просторі елементарних подій Ω.

Якщо $n > 1$, то випадкову величину $\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ називають *багатовимірною або випадковою величиною зі значеннями в* $\mathbb{R}^n$ (*випадковим вектором*), зокрема, якщо $n = 2$ — *двовимірною*, якщо $n = 1$ —

одновимірною (*скалярною*) або просто випадковою величиною.

Означення. Випадкова величина, яка набуває не більш ніж зліченне число значень, називається *дискретною* випадковою величиною.

Випадкова величина, задана на дискретному ймовірнісному просторі, завжди дискретна.

Розподіл дискретної випадкової величини. Дискретна випадкова величина описується своїми значеннями і ймовірностями, з якими вона цих значень набуває (коротко, своїм розподілом).

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ називатимемо можливим значенням випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, заданої на дискретному просторі $\{\Omega, P\}$, якщо

$$P\{\xi = x\} > 0;$$

множину можливих значень ξ позначатимемо через X ($X \subset \mathbb{R}^n$).

Означення. *Розподілом* дискретної випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ називатимемо функцію

$$P_\xi : x \to P_\xi(x), x \in X,$$

означену на множині X різних можливих значень випадкової величини ξ, що ставить у відповідність кожному можливому значенню $x \in X$ імовірність

$$P_\xi(x) = P\{\xi = x\},$$

з якою ξ набуває це значення.

Розподіл

$$P_\xi(x_i, y_j, \ldots, z_k) = P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j, \ldots, \xi_n = z_k\}$$

випадкової величини $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ ще називають *спільним* розподілом випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Розподіл дискретної випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ часто записують у вигляді таблиці, у верхньому рядку якої вказують різні можливі значення випадкової величини, а в нижньому — ймовірності, з якими ці значення набуваються:

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$P_\xi(x_1)$	$P_\xi(x_2)$	$\ldots$	$P_\xi(x_n)$	$\ldots$

Розподіл

$$P_\zeta : (x_i, y_j) \to P_\zeta(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in X \subset \mathbb{R}^2,$$

випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ зі значеннями у $\mathbb{R}^2$ зручно записувати у вигляді табл. 5.1.1.

Таблиця 5.1.1. Розподіл $\zeta = (\xi, \eta)$

Значення ξ	Значення η				
	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$\cdots$
x_1	$P_\zeta(x_1, y_1)$	$P_\zeta(x_1, y_2)$	$\cdots$	$P_\zeta(x_1, y_m)$	$\cdots$
x_2	$P_\zeta(x_2, y_1)$	$P_\zeta(x_2, y_2)$	$\cdots$	$P_\zeta(x_2, y_m)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$P_\zeta(x_n, y_1)$	$P_\zeta(x_n, y_2)$	$\cdots$	$P_\zeta(x_n, y_m)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Приклад 5.1.1. *Нехай ξ — число гербів, які випали у результаті підкидання двох симетричних монет. Знайти розподіл ξ.*

Розв'язання. Випадкова величина ξ — функція $\xi = \xi(\omega)$ на дискретному ймовірнісному просторі $\{\Omega, P\}$, де $\Omega = \{$ГГ, ГР, РГ, РР$\}$, а ймовірність кожної елементарної події дорівнює $1/4$ (монети симетричні); ξ набуває значень $0, 1, 2$, причому $P\{\xi = 0\} = P\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = P(\text{РР}) = 1/4$, $P\{\xi = 1\} = P(\text{ГР, РГ}) = P(\text{ГР}) + P(\text{РГ}) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, $P\{\xi = 2\} = P(\text{ГГ}) = 1/4$. Отже, розподілом ξ є

x_i	0	1	2
$P_\xi(x_i)$	1/4	1/2	1/4

Обчислення розподілу функції від випадкової величини. За розподілом P_ζ випадкової величини ζ завжди можна знайти розподіл будь-якої функції $g(\zeta)$ від ζ.

Теорема. *Нехай ζ — випадкова величина зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ на дискретному ймовірнісному просторі $\{\Omega, P\}$, $P_\zeta : x \to P_\zeta(x)$ — її розподіл, $g = g(x)$ — функція на $\mathbb{R}^n$ зі значеннями в $\mathbb{R}^l$.*

Для довільної множини B з $\mathbb{R}^l$

$$P\{g(\zeta) \in B\} = \sum_{x: g(x) \in B} P_\zeta(x). \tag{5.1.1}$$

Зокрема, якщо $\zeta = (\xi, \eta)$, $g = g(x, y)$ і $P_\zeta(x_i, y_j)$ — розподіл $\zeta = (\xi, \eta)$, то

$$P\{g(\zeta) \in B\} = P\{g(\xi, \eta) \in B\} = \sum_{(x_i, y_j): g(x_i, y_j) \in B} P_\zeta(x_i, y_j). \tag{5.1.2}$$

Приклад 5.1.2 . *Двічі підкидають пару симетричних монет, ξ — число гербів при підкиданні пари монет першого разу, η — другого.*

Знайти розподіл випадкової величини $\min\{\xi, \eta\}$.

Р о з в' я з а н н я. Спочатку знайдемо розподіл випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$.

Випадкова величина $\zeta = \zeta(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$ — функція на дискретному ймовірнісному просторі $\{\Omega, P\}$. Простір елементарних подій Ω утворюють послідовності завдовжки чотири з букв Г і Р; наприклад, елементарна подія ω = (ГРГГ) означає, що при першому підкиданні пари монет на першій монеті випав герб, на другій — решка, а при другому — на обох монетах випали герби. Елементарні події рівноймовірні (монети симетричні), імовірність кожної з них дорівнює $1/16$.

Обчисливши $P_\zeta(i, j)$ для кожної пари (i, j), одержимо розподіл $\zeta = (\xi, \eta)$ (див. табл. 5.1.2).

Наприклад,

$$P_\zeta(1,1) = P\{\zeta = (1,1)\} = P\{(\xi, \eta) = (1,1)\} =$$

$$= P\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) = (1,1)\} =$$
$$= P\{\text{ГРГР, ГРРГ, РГГР, РГРГ}\} =$$
$$= P(\text{ГРГР}) + P(\text{ГРРГ}) + P(\text{РГГР}) + P(\text{РГРГ}) =$$
$$= 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 1/4.$$

Таблиця 5.1.2. Розподіл $\zeta = (\xi, \eta)$

Значення ξ	Значення η: 0	1	2
0	$1/16$	$1/8$	$1/16$
1	$1/8$	$1/4$	$1/8$
2	$1/16$	$1/8$	$1/16$

За розподілом $P_\zeta(i,j)$, $i,j = 0,1,2$, випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ завжди можна знайти розподіл будь-якої функції від неї (див. (5.1.2)), зокрема, розподіл

$$g(\zeta) = g(\xi, \eta) = \min\{\xi, \eta\}.$$

Для $B = \{k\}, k = 0,1,2$, маємо:

$$P\{\min\{\xi, \eta\} = k\} = \sum_{(i,j):\min(i,j)=k} P_\zeta(i,j).$$

Наприклад, коли $k = 0$

$$P\{\min\{\xi, \eta\} = 0\} = \sum_{(i,j):\,\min(i,j)=0} P_\zeta(i,j) =$$

$$= P_\zeta(0,0) + P_\zeta(0,1) + P_\zeta(0,2) + P_\zeta(1,0) + P_\zeta(2,0) =$$
$$= 1/16 + 1/8 + 1/16 + 1/8 + 1/16 = 7/16.$$

Аналогічно

$$P\{\min\{\xi, \eta\} = 1\} = 1/2,\ \ P\{\min\{\xi, \eta\} = 2\} = 1/16.$$

Отже, розподілом випадкової величини $\min\{\xi, \eta\}$ є

x_i	0	1	2
$P_{g(\zeta)}(x_i)$	7/16	8/16	1/16

Незалежні випадкові величини. Випадкові величини ξ і η називатимемо *незалежними*, якщо для всіх можливих значень x_i, y_j випадкових величин ξ і η

$$P_{\xi\eta}(x_i, y_j) = P_\xi(x_i)P_\eta(y_j). \tag{5.1.3}$$

(Розподіл $P_{\xi\eta}$, для якого справджується рівність (5.1.3), називається *добутком розподілів* P_ξ і P_η.) Інакше кажучи, випадкові величини ξ і η незалежні, якщо їхній спільний розподіл дорівнює добуткові розподілів ξ і η.

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ називатимемо *незалежними*, якщо їхній спільний розподіл дорівнює добуткові розподілів $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Функції від незалежних випадкових величин є незалежними випадковими величинами.

Примітка. Інтуїтивно, випадкові величини незалежні, якщо інформація про значення, набуте однією випадковою величиною, не змінює прогноз появи значень, що набуваються іншою.

Приклад 5.1.3. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має розподіл*

$$P\{\xi_l = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda > 0,\ k = 0, 1, \ldots\ (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Виписати спільний розподіл випадкових величин ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$.

Розв'язання. За розподілами $P_{\xi_1}, P_{\xi_2}, \ldots, P_{\xi_n}$ незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n$ їхній спільний розподіл

$$P_\xi(k_1, k_2, \ldots, k_n) = P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_n = k_n\}$$

одержуємо як добуток розподілів цих випадкових величин:

$$P_\xi(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{\xi_i}(k_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}}{k_1!k_2!\dots k_n!} e^{-n\lambda};\ k_1 = 0, 1, \dots;\ k_2 = 0, 1, \dots;$$

$\dots; k_n = 0, 1, \dots$

5.2 Дискретні розподіли на $\mathbb{R}^1$

Випробування Бернуллі. Біномний розподіл, пуассонів розподіл. Послідовність незалежних випробувань (експериментів) з двома наслідками ("успіх", "невдача") та ймовірністю успіху, яка не змінюється від випробування до випробування, називається *випробуваннями Бернуллі.*

Простір Ω наслідків у n випробуваннях Бернуллі утворюють послідовності $\omega = (1, 0, 1, \dots, 1)$ завдовжки n, складені з 1 і 0 (1 інтерпретуємо як успіх, 0 — як невдачу). Імовірність наслідку ω означається рівністю

$$P(\omega) = p^{\mu(\omega)}(1-p)^{n-\mu(\omega)}\ (0 < p < 1),$$

де $\mu(\omega)$ — число одиниць у послідовності ω, p — імовірність успіху в одному випробуванні (далі ми також використовуватимемо позначення $q = 1 - p$). Пара $\{\Omega, P\}$ є ймовірнісним простором n випробувань Бернуллі.

Означення. Випадкова величина ξ має *біномний розподіл* з параметрами $(n; p)$, якщо

$$P_\xi(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \dots, n. \tag{5.2.1}$$

Далі $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ позначатимемо через $B_{n;p}(k)$ (для $k \geq n+1$ вважатимемо, що $B_{n;p}(k) = 0$).

Число ξ успіхів у n випробуваннях Бернуллі з імовірністю успіху p в одному випробуванні має біномний розподіл з параметрами $(n; p)$.

Означення. Випадкова величина ξ має *пуассонів розподіл* (розподіл Пуассона) з параметром λ $(\lambda > 0)$, якщо

$$P_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \dots \tag{5.2.2}$$

У багатьох задачах виникає необхідність обчислювати $B_{n;p}(k)$, коли n і k великі (сотні й тисячі). При цьому, як правило, користуються теоремою Пуассона (коли n велике, а p мале) і теоремою Муавра—Лапласа.

Теорема Пуассона. *Якщо $np \to \lambda$ $(\lambda > 0)$, коли $n \to \infty$, то для кожного фіксованого k, $k = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\lim_{n\to\infty} B_{n;p}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{5.2.3}$$

Із теореми Пуассона випливає, що для великих n і малих p пуассонів розподіл є хорошою апроксимацією для біномного розподілу.

В умовах теореми Пуассона має місце нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| B_{n;p}(k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \le \frac{2\lambda \min\{2, \lambda\}}{n}$$

(за Ю. В. Прохоровим).

Теорема Муавра—Лапласа. *Якщо $npq \to \infty$, коли $n \to \infty$, то для m, що задовольняють умову*

$$\left| \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \right| \le C$$

(C — довільна, але фіксована константа),

$$\lim_{n\to\infty} B_{n;p}(m) \Big/ \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right\} = 1. \tag{5.2.4}$$

Інтегральна гранична теорема Муавра—Лапласа. *Нехай m — число успіхів у n випробуваннях Бернуллі з імовірністю успіху p в одному випробуванні. Для довільних $x_1 < x_2$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ x_1 < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt. \tag{5.2.5}$$

Геометричний розподіл. Випадкова величина ξ має *геометричний розподіл* з параметром $p\,(p > 0)$, якщо

$$P_\xi(k) = (1-p)^k p,\ k = 0, 1, \ldots \tag{5.2.6}$$

Число випробувань до першого успіху в послідовності незалежних випробувань з імовірністю успіху p в кожному має геометричний розподіл з параметром $p\,(p > 0)$.

Від'ємний біномний розподіл. Випадкова величина ξ має *від'ємний біномний розподіл* з параметрами $(r; p)$, якщо

$$P_\xi(k) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k,\ k = 0, 1, \ldots \tag{5.2.7}$$

Число невдач до r-го успіху в послідовності незалежних випробувань з імовірністю успіху p у кожному випробуванні має від'ємний біномний розподіл з параметрами $(r; p)$.

Зазначимо, що коли $r = 1$, від'ємний біномний розподіл співпадає з геометричним.

Гіпергеометричний розподіл. Випадкова величина ξ має *гіпергеометричний розподіл* з параметрами (N, M, n), $n \le M, n \le N - M$, якщо

$$P_\xi(m) = P_{N,M,n}(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \tag{5.2.8}$$

$m = 0, 1, \ldots, n$.

Нехай в урні міститься N куль, серед них M — білі, решта $(N - M)$ — чорні. Число білих куль серед n $(n \le M,\ n \le N - M)$ навмання вибраних з урни має гіпергеометричний розподіл з параметрами (N, M, n).

Коли $N, M \to \infty$ так, що $M/N \to p$ $(0 < p < 1)$, то

$$P_{N,M,n}(m) \to C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m = 0, 1, \ldots, n.$$

5.3 Задачі

АЗ: 5.3°, 5.8(1в), 5.8(2є), 5.8(3б), 5.13, 5.29, 5.30.
СЗ: 5.1°, 5.4°, 5.8(1б), 5.8(2з), 5.14, 5.18, 5.31, 5.40.

5.1°. Підкидають симетричний гральний кубик. Нехай ξ — число очок, що випали при цьому. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \sin\frac{\pi}{3}\xi$.

5.2°. Гральний кубик виготовлено так, що ймовірність випадання грані пропорційна числу очок на ній. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \operatorname{sign}\Big(\cos\frac{\pi}{3}\xi\Big)$, де ξ — число очок, що випали на гральному кубику.

5.3°. З урни, в якій міститься 3 білі й 2 чорні кулі, переклали дві кулі до урни, в якій є 1 біла й 2 чорні кулі. Потім з другої урни беруть 2 кулі. Нехай ξ — число білих куль серед них. Знайти розподіл ξ.

5.4°. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром p :

$$P\{\xi_l = k\} = P_{\xi_l}(k) = (1-p)^k p,\ k = 0, 1, 2, \dots;$$

$l = 1, 2, \dots, n$.

Знайти спільний розподіл випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

5.5°. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має біномний розподіл з параметрами (m, p) :

$$P\{\xi_l = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, 1, \dots, m;$$

$l = 1, 2, \dots, n$.

Знайти спільний розподіл випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

5.6*. Нехай $\xi_j = \xi_j(\omega),\ j = 1, 2, \dots, n,$ — незалежні випадкові величини, для яких

$$P\{\xi_j > 0\} = p, P\{\xi_j < 0\} = q, P\{\xi_j = 0\} = f,\ \ p+q+f = 1,$$

$j = 1, 2, \dots, n;$

s — кількість випадкових величин серед ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, відмінних від нуля, а μ — число додатних серед ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$.

Знайти спільний розподіл випадкових величин μ та s.

5.7. Стохастичний експеримент полягає у підкиданні пари симетричних гральних кубиків. Побудувати ймовірнісний простір $\{\Omega, P\}$ цього стохастичного експерименту. Нехай $\zeta = (\xi, \eta)$ — випадкова величина на $\{\Omega, P\}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^2$, де ξ — число очок на першому гральному кубику, η — на другому. Знайти спільний розподіл випадкових величин ξ і η (розподіл векторної випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$). Довести, що випадкові величини ξ і η — незалежні.

5.8. Підкидають пару симетричних гральних кубиків і розглядають випадкову величину $\zeta = (\xi, \eta)$, де ξ — число очок на першому гральному кубикові, η — на другому.

1. Знайти розподіли:

а) $\max\{\xi, \eta\}$;

б) $\min\{\xi, \eta\}$;

в) $\xi + \eta$.

2. Обчислити:

а) $P\{\xi \leq 2, \max\{\xi, \eta\} \geq 4\}$;

б) $P\{\max\{\xi, \eta\} \geq 4\}$;

в) $P\{|\eta - \xi| \geq 3\}$;

г) $P\{4 \leq \xi + \eta \leq 6\}$;

д) $P\{\xi \leq 1, \max\{\xi, \eta\} \geq 3\}$;

е) $P\{\max\{\xi, \eta\} \leq 4\}$;

є) $P\{\min\{\xi, \eta\} \leq 1, \max\{\xi, \eta\} \geq 5\}$;

ж) $P\{\max\{\xi, \eta\} \geq 3\}$;

з) $P\{\xi \geq 2, \max\{\xi, \eta\} \geq 3\}$.

3. Знайти спільний розподіл випадкових величин:

а) ξ і $\xi + \eta$; чи є випадкові величини ξ і $\xi + \eta$ незалежними?

б) ξ і $\max\{\xi, \eta\}$; чи є випадкові величини ξ і $\max\{\xi, \eta\}$ незалежними?

в) ξ і $\min\{\xi, \eta\}$; чи є випадкові величини ξ і $\min\{\xi, \eta\}$ незалежними?

5.9. Підкидають пару симетричних монет і симетричний гральний кубик.

Запропонувати математичну модель (імовірнісний простір $\{\Omega, P\}$) цього стохастичного експерименту.

Нехай $\zeta = (\xi, \eta)$ — випадкова величина на $\{\Omega, P\}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^2$, де ξ — число гербів, які випали на парі монет, η — число очок на грані грального кубика.

Знайти розподіли випадкових величин, перелічених у задачі 5.8, обчислити ймовірності, відповісти на питання.

5.10. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини з розподілами

$$P\{\xi = x_k\} = a_k,\ P\{\eta = x_k\} = b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обчислити $P\{\xi = \eta\}$.

5.11. За спільним розподілом випадкових величин ξ і η, заданим таблицею 5.3.3, знайти розподіли випадкових величин, перелічних у задачі 5.8, обчислити ймовірності відповідних подій.

Таблиця 5.3.3. Спільний розподіл ξ і η

Значення ξ	Значення η							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32
2	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32	1/32
3	1/32	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32
4	1/32	1/32	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32

5.12. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини з розподілами

$$P\{\xi = i\} = 1/(n+1),\ P\{\eta = i\} = 1/(n+1),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

5.13. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона відповідно з параметрами λ і μ.

Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

5.14. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона відповідно з параметрами λ і μ.

Довести, що умовним розподілом випадкової величини ξ за умови $\xi+\eta = n$ є біномний розподіл з параметрами $(n, \lambda/(\lambda+\mu))$, тобто

$$P\{\xi = k/\xi + \eta = n\} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k},$$

$k = 0, 1, \ldots, n$.

5.15. Нехай ξ і η — незалежні геометрично розподілені з параметром p випадкові величини:

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^k,\ P\{\eta = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Знайти спільний розподіл випадкових величин ξ і $\max\{\xi, \eta\}$; розподіл випадкової величини $\max\{\xi, \eta\}$.

5.16. Підкидають два гральні кубики. Нехай ξ — випадкова величина, яка дорівнює нулеві, якщо на першому кубику випадає число очок, менше ніж 3, і одиниці — у супротивному разі; η — випадкова величина, що дорівнює числу очок на другому кубикові.

Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

5.17. Підкидають симетричні монети: одна вартістю 25 коп. і дві вартістю 50 коп.; ξ_1 — число гербів, що випало на монеті вартістю 25 коп., а ξ_2 — на двох монетах вартістю 50 коп. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = (\xi_1, \xi_2)$.

5.18*. Довести, що коли кожна з незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2 має геометричний розподіл, то і випадкова величина $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ має геометричний розподіл. Знайти параметр цього розподілу, якщо параметри розподілів випадкових величин ξ_1 і ξ_2 дорівнюють відповідно p_1 і p_2.

5.19°. Симетричний гральний кубик підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що: 1) двічі з'явиться число очок, кратне трьом; 2) більше ніж два рази з'явиться число очок, кратне трьом.

5.20°. Пару симетричних гральних кубиків підкидають 6 разів. Обчислити ймовірність того, що на обох кубиках тричі випаде однакове число очок.

5.21°. Симетричний гральний кубик підкидають 6 разів. Обчислити ймовірність того, що тричі випаде парне число очок.

5.22. Під час технічного контролю виробів кожен з них, незалежно від інших, може з імовірністю p виявитися дефектним.

1. Яка ймовірність того, що з 10 перевірених виробів тільки один виявиться дефектним?

2. Знайти ймовірність того, що першим дефектним виробом виявиться k-й перевірений виріб.

3. Знайти ймовірність того, що наступні 10 виробів виявляться стандартними, за умови, що попередні l виробів були стандартними. Чи залежить ця ймовірність від l?

5.23* (задача Банаха). Математик носить із собою дві коробки сірників. Щоразу, коли йому потрібен сірник, він навмання бере одну з коробок. Колись настане такий момент, що вийнята коробка виявиться порожньою. Знайти ймовірність того, що інша (друга) коробка містить r сірників, припускаючи, що спочатку кожна з коробок містить по N $(N \geq r)$ сірників.

5.24. Знайти ймовірність появи принаймні:

а) однієї шістки при підкиданні 6 гральних кубиків;

б) двох шісток при підкиданні 12 гральних кубиків;

в) трьох шісток при підкиданні 18 гральних кубиків.

5.25°. Симетричну монету підкидають 10 разів. Знайти розподіл випадкової величини ξ — числа гербів, що випали.

5.26°. Симетричний гральний кубик підкидають 10 разів. Знайти розподіл випадкової величини ξ — числа трійок, що випали.

5.27°. Пару симетричних монет підкидають тричі, ξ — число тих підкидань, при яких на обох монетах з'явився герб. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

5.28. Що ймовірніше, виграти у гравця, однакового за силою (гра ведеться без нічиїх):

1) 4 партії з 8 чи 3 з 5?

2) 3 партії з 6 чи 2 з 4?

3) 3 партії з 4 чи 5 з 8?

4) не менше ніж 3 партії з 4 чи не менше ніж 5 з 8?

5) не більше ніж n партій з $2n$ чи більше ніж n партій з $2n$?

6) не більше ніж n партій з $2n+1$ чи більше ніж n партій з $2n$?

5.29. Знайти розподіл суми $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$ незалежних випадкових величин, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром p.

5.30. Імовірність того, що в довідкове бюро протягом години звернеться k осіб, дорівнює

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, \ldots,$$

($\lambda > 0$). Для кожної людини ймовірність відмови дорівнює p. Знайти ймовірність того, що впродовж години s осіб не отримають відповіді на своє питання.

5.31. Припустимо, що деяка комаха з імовірністю $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ відкладає $k\,(k = 0, 1, \ldots)$ яєць. Імовірність появи комахи з яйця дорівнює p. Припускаючи взаємну незалежність появи комах з яєць, знайти ймовірність того, що потомство комахи становитиме i особин.

5.32. В експериментах на зустрічних електронно-позитронних пучках імовірність того, що за одиницю часу відбудеться j зіткнень, які супроводжуватимуться народженням нових елементарних частинок, становить

$$p_j = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}, \ j = 0, 1, \ldots,$$

λ — додатний параметр. Під час кожного зіткнення у результаті взаємодії можуть виникнути різні групи елементарних частинок, імовірність появи кожної групи стала і не залежить від результатів взаємодії при інших зіткненнях. За одну з таких груп розглянемо пару μ-мезонів і позначимо через p ймовірність їх появи при одному зіткненні. Знайти розподіл випадкової величини — кількості пар народжених μ-мезонів.

5.33. Автоматична телефонна станція A на 500 абонентів має бути з'єднана з телефонною станцією B. Відомо, що кількість запитів зв'язку абонентів телефонної станції підпорядковується розподілу Пуассона.

Якщо параметр пуассонового розподілу: а) $\lambda = 5$; б) $\lambda = 8$; в) $\lambda = 10$, то яким має бути мінімальне число ліній зв'язку станції A зі станцією B, щоб імовірність відмов не перевищувала 0,01; 0,02; 0,05?

5.34. Театр, що вміщує 1000 чоловік, має два різні входи. Біля кожного з них є гардероб. Кількість місць у гардеробах однакова.

Яка мінімальна кількість місць має бути в гардеробах, щоб у середньому в 9 випадках із 10 усі глядачі могли роздягтися у гардеробі того входу, через який вони увійшли? Розгляньте два випадки: а) глядачі приходять парами; б) глядачі приходять поодинці. Припустіть, що глядачі вибирають входи з однаковими ймовірностями.

5.35. Нехай ξ — дискретна випадкова величина з розподілом

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P_\xi(x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Для кожного $x \in (-\infty, \infty)$ обчислити $P\{\xi < x\}$. Побудувати графік функції $F(x) = P\{\xi < x\}, x \in (-\infty, \infty)$. Яких значень набуває $F(x)$? Дослідити функцію $F(x)$ на монотонність і неперервність.

5.36*. Довести, що випадкова величина ξ має геометричний розподіл тоді й тільки тоді, коли для кожного n, $n = 1, 2, \ldots$, справджується рівність

$$P\{\xi = n + m/\xi \geq n\} = P\{\xi = m\},\ m = 0, 1, \ldots$$

(властивість відсутності післядії геометричного розподілу).

5.37. Двоє гравців підкидають по черзі монету. Виграє той, у кого вперше випаде герб. Знайти ймовірність p_k того, що гра закінчиться на k-му підкиданні. У скільки разів більша ймовірність виграшу для гравця, який починає першим?

5.38. Двоє однаково цілких стрільців по черзі стріляють у мішень. Кожен має зробити не більше двох пострілів. Той, хто першим влучить у мішень, отримає приз.

1. Якщо ймовірність влучення $p = 1/5$, то що ймовірніше: здобудуть стрільці приз чи ні?

2. Чому дорівнює відношення ймовірності отримати приз першим стрільцем до ймовірності отримати приз другим, якщо ймовірність влучення становить $p = 1/3$ і кількість пострілів не обмежується?

5.39. Для експериментальної перевірки властивості стійкості частоти в різний час були проведені такі досліди.

1° Монету підкинули 4040 разів, при цьому герб випав 2043 рази (Бюффон).

2° Монету підкинули 12 000 разів, при цьому частота випадання герба становила 0,5016; в іншому експерименті при підкиданні монети 24 000 разів частота випадання герба становила 0,5005 (К. Пірсон).

Для кожного з експериментів:

а) знайти ймовірність того, що в разі повторення експерименту відхилення частоти від $1/2$ за абсолютною величиною не перевищить відхилення частоти від $1/2$ в експериментах, проведених Бюффоном і Пірсоном;

б) вважаючи, що подія, ймовірність появи якої становить 0,9999, практично достовірна, знайти таке найменше ε, що подія "частота за абсолютною величиною відхиляється від $1/2$ менше ніж на ε" є практично достовірною подією.

5.40. У симетричного кубика грані занумеровані двома одиницями, двома двійками і двома трійками.

У квадратному рівнянні

$$\xi x^2 + \eta x + \zeta = 0$$

ξ, η, ζ визначаються як результати трьох послідовних підкидань кубика. Знайти ймовірність того, що рівняння: 1) має дійсні корені; 2) має раціональні корені; 3) не має дійсних коренів.

5.41. За розподілом

$$P_\zeta : (x_k, y_l) \to P_\zeta(x_k, y_l)$$

випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^2$ знайти розподіл ξ.

5.42. Нехай ξ і η — незалежні цілочислові випадкові величини з розподілами

$$P\{\xi = k\} = p_k,\ k = 0, 1, \ldots;\ P\{\eta = l\} = q_l,\ l = 0, 1, \ldots$$

Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

5.43. Нехай ξ — пуассонова випадкова величина з параметром λ. Для кожного x обчислити $P\{\xi < x\}$. Побудувати графік функції

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

5.44. Симетричну монету підкидають 10 разів. Як відомо, ймовірність того, що герб випаде 4 рази, дорівнює

$$B_{10;1/2}(4) = C_{10}^4 (1/2)^{10}.$$

А чому дорівнює ймовірність того, що при послідовному підкиданні монети для появи 4-х гербів, монету необхідно підкинути 10 разів?

5.45. Навести приклад дискретного ймовірнісного простору $\{\Omega, P\}$ і випадкових величин $\xi = \xi(\omega)$, $\eta = \eta(\omega)$ на ньому таких, що розподіли P_ξ і P_η випадкових величин ξ і η співпадають, але $\xi \neq \eta$ у кожній точці $\omega \in \Omega$.

5.46°. Тричі підкидають монету, імовірність появи герба якої становить $1/3$; ξ — число гербів, що при цьому випали. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

5.47. Гральний кубик, імовірність випадіння шістки якого дорівнює p, послідовно підкидають n разів. Імовірність того, що шістка випаде r разів, дорівнює

$$B_{n;p}(r) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}.$$

А яка ймовірність того, що при послідовному підкиданні грального кубика для появи r шісток кубик необхідно підкинути n разів?

Глава 6

Математичне сподівання дискретної випадкової величини

6.1 Означення, властивості, обчислення

Випадкова величина описується своїм розподілом

$$P_\xi : x_i \to P_\xi(x_i) = P\{\xi = x_i\}.$$

Розподіл задає значення, яких набуває випадкова величина і ймовірності, з якими ці значення набуваються. Інформацію про розподіл випадкової величини ми отримуємо з експерименту (незалежних спостережень випадкової величини). Але у більшості випадків отримати розподіл випадкової величини безпосередньо з експерименту не вдається. Тому виникає необхідність описувати розподіл випадкової величини характеристиками, які, можливо, і не завжди повністю описують розподіл, але дають досить добре уявлення про нього і які можна оцінити за експериментальними даними. Такими характеристиками, зокрема, є математичне сподівання і дисперсія випадкової величини. (Деякі розподіли математичним сподіванням і дисперсією описуються повністю.)

Означення. *Математичним сподіванням* $M\xi$ випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$, заданої на дискретному ймовірнісному просторі $\{\Omega, P\}$, називатимемо суму ряду

$$M\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega),$$

якщо він абсолютно збігається.

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання константи дорівнює цій самій константі:

$$Mc = c \ (c - \text{константа}).$$

2. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих випадкових величин:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

3. Константа виноситься за знак математичного сподівання:

$$Ma\xi = aM\xi.$$

4. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M\xi\eta = M\xi M\eta.$$

Обчислення математичного сподівання випадкової величини за її розподілом. За розподілом випадкової величини завжди можна обчислити математичне сподівання функції від неї (якщо тільки воно існує).

Теорема 6.1.1. *Нехай $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина зі значеннями в $\mathbb{R}^1$, $P_\xi : x_i \to P_\xi(x_i)$ — її розподіл, g — функція на $\mathbb{R}^1$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$.*

Якщо ряд $\sum\limits_{x_i} g(x_i)P_\xi(x_i)$ збігається абсолютно, то

$$Mg(\xi) = \sum_{x_i} g(x_i)P_\xi(x_i), \tag{6.1.1}$$

зокрема, якщо ряд $\sum\limits_{x_i} x_iP_\xi(x_i)$ збігається абсолютно, то

$$M\xi = \sum_{x_i} x_iP_\xi(x_i). \tag{6.1.2}$$

Теорема про обчислення математичного сподівання функції від випадкової величини за її розподілом має місце й для випадкових величин зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Якщо ряд

$$\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} g(x_1,x_2,\ldots,x_n)P_\xi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

збігається абсолютно, то

$$Mg(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) =$$

$$= \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} g(x_1,x_2,\ldots,x_n)P_\xi(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad (6.1.3)$$

де $P_\xi : (x_1,x_2,\ldots,x_n) \to P_\xi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *— розподіл випадкової величини* $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

П р и м і т к а. Часто математичне сподівання (середнє) випадкової величини означають рівністю (6.1.2).

Приклад 6.1.1 . *Нехай* ξ *— число очок, що випадає при підкиданні грального кубика. Кубик виготовлено так, що розподілом випадкової величини* ξ *є*

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_\xi(x_i)$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/2

Обчислити математичне сподівання ξ.

Р о з в' я з а н н я. Згідно з (6.1.2)

$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \ldots + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5.$$

Зазначимо, що коли кубик симетричний, тобто розподілом ξ є

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_\xi(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

то

$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Приклад 6.1.2. *Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити*

$$M\frac{1}{\xi + 1}.$$

Розв'язання. За відомим розподілом P_ξ випадкової величини ξ завжди можна обчислити математичне сподівання $Mg(\xi)$ функції від ξ, якщо воно існує (див. (6.1.1)). У даному разі $g(t) = 1/(1+t)$, а випадкова величина ξ має пуассонів розподіл з параметром λ:

$$P_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \ k = 0, 1, \ldots$$

Тому

$$M\frac{1}{1+\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} P_\xi(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(1+k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Дисперсія випадкової величини. *Дисперсією $D\xi$* випадкової величини ξ називатимемо $M(\xi - M\xi)^2$ (якщо $M(\xi - M\xi)^2 < \infty$), тобто

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Безпосередньо з означення дістаємо

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \tag{6.1.4}$$

Наведені далі властивості дисперсії випливають з її означення.

1. Дисперсія константи дорівнює нулеві:

$$Dc = 0 \ (c - \text{константа}).$$

2. Константа виноситься за знак дисперсії з квадратом:

$$Da\xi = a^2 D\xi.$$

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Приклад 6.1.3. *Обчислити математичне сподівання й дисперсію біномно розподіленої з параметрами* $(n; p)$ *випадкової величини* ξ.

Р о з в' я з а н н я. Розподілом ξ є

$$P\{\xi = k\} = P_\xi(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Згідно з (6.1.2)

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k P_\xi(k) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

Позначивши $k - 1 = s$, останню суму перепишемо так:

$$np \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{s!((n-1)-s)!} p^s (1-p)^{(n-1)-s} =$$

$$= np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

Отже,

$$M\xi = np.$$

Аналогічно

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np(np - p + 1).$$

Звідси

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = np(np - p + 1) - (np)^2 = np(1-p).$$

Приклад 6.1.4. *Підкидають два симетричні гральні кубики. Обчислити математичне сподівання і дисперсію суми очок, що випали.*

Р о з в' я з а н н я. Нехай ξ — число очок, що випали на першому гральному кубику, η — на другому, тоді $\zeta = \xi + \eta$ — сума очок, що випали на двох кубиках. Кубики симетричні, тому розподілом кожної з випадкових величин ξ і η є

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Звідси

$$M\zeta = M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta = 7/2 + 7/2 = 7,$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - (7/2)^2 = 35/12.$$

А оскільки ξ і η — незалежні випадкові величини, то

$$D\zeta = D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta = 35/12 + 35/12 = 35/6.$$

Зазначимо, що безпосереднє обчислення математичного сподівання і дисперсії суми очок було б громіздким.

Означення. *Коваріацією* випадкових величин ξ і η називатимемо величину

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta).$$

Означення. *Коефіцієнтом кореляції* випадкових величин ξ і η називатимемо величину

$$r(\xi, \eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}.$$

Якщо випадкові величини ξ і η такі, що $r(\xi, \eta) = 0$, то їх називатимемо некорельованими.

Теорема 6.1.2 (нерівність Чебишова). *Якщо $D\xi < \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$*

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

З нерівності Чебишова, зокрема, випливає, що коли дисперсія $D\xi$ мала, великі відхилення (більші ніж ε) випадкової величини від свого середнього зустрічаються зрідка.

Теорема 6.1.3 (закон великих чисел). *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з середнім $M\xi_i = a$ і скінченими дисперсіями $D\xi_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ Тоді для довільного $\varepsilon > 0$*

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0,$$

коли $n \to \infty$.

6.2 Задачі

АЗ: 6.1°(1),6.2,6.4°,6.5,6.16,6.18,6.21,6.27*, 6.31*,6.32;
СЗ: 6.3°,6.6°,6.13°,6.15,6.17,6.20, 6.24°,6.30,6.33.

6.1°. Підкидають симетричну монету і правильний гральний кубик; ξ — число гербів, η — число очок, що при цьому випали.

Обчислити:

$$1)\, M\frac{1}{\xi + 1}\cos\frac{\pi}{6}\eta;\;\; 2)\, Me^{\xi}\sin\frac{\pi}{6}\eta.$$

6.2. В урні міститься 2 білі й 8 чорних куль. З урни навмання беруть три кулі. Знайти розподіл випадкової величини ξ — числа вибраних білих куль; обчислити $M\xi$ та $D\xi$.

6.3°. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини відповідно з розподілами

x_i	0	1	2	3
$P_\xi(x_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

y_j	0	1	2
$P_\eta(y_j)$	1/2	1/4	1/4

Обчислити

$$M\frac{\xi}{\eta^2+1}.$$

6.4°. Двічі підкидають симетричну монету, ξ — число гербів, що при цьому випали. Обчислити

$$M(-1)^\xi \sin\frac{\pi}{3}\xi.$$

6.5. Випадкова величина ξ набуває цілих невід'ємних значень. Довести, що

$$M\xi = \sum_{m=1}^{\infty} P\{\xi \geq m\}.$$

6.6°. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини відповідно з розподілами

x_i	1	2	3	4
$P_\xi(x_i)$	1/4	1/4	1/4	1/4

y_j	-1	0	1
$P_\eta(y_j)$	1/3	1/3	1/3

Обчислити

$$M\eta^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right).$$

6.7°. Випадкова величина ξ має розподіл

x_i	-2	-1	1	2
$P_\xi(x_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

Знайти математичне сподівання випадкової величини η:

$$1)\, \eta = \sin\frac{\pi}{\xi};\;\; 2)\, \eta = \xi 2^{|\xi|};\;\; 3)\, \eta = \xi \sin\frac{\pi}{3}\xi.$$

6.8°. Випадкова величина ξ має розподіл

x_i	-2	-1	1
$P_\xi(x_i)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

Обчислити

$$M\xi^2 2^{-\xi}.$$

6.9°. Випадкова величина ξ має розподіл

x_i	-1	1	2
$P_\xi(x_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/2$

Обчислити:

$$1)\, M\xi^2 \sin\frac{\pi}{3}\xi;\;\; 2)\, M2^{|\xi|}\cos^2\frac{\pi}{12}\xi.$$

6.10. Випадкова величина ξ має розподіл

x_i	-2	-1	0	1
$P_\xi(x_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/3$

Знайти:
1) розподіл випадкової величини $\eta = |\xi|$;
2) математичне сподівання та дисперсію η.

6.11°. Випадкова величина ξ має розподіл

x_i	-2	-1	1	2
$P_\xi(x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/2$	$1/6$

Обчислити
$$M\xi \sin^2 \frac{\pi}{12}\xi.$$

6.12°. Випадкова величина ξ має розподіл

x_i	-2	-1	2
$P_\xi(x_i)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

Обчислити:
$$1)\ M2^{|\xi|} \cos^2 \frac{\pi}{12}\xi;\ \ 2)\ M\xi 2^{|\xi|}.$$

6.13°. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини відповідно з розподілами

x_i	0	1	2	3
$P_\xi(x_i)$	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

y_j	-1	0	1
$P_\eta(y_j)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Обчислити
$$M\frac{\xi+1}{\eta^4+2}.$$

6.14°. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини відповідно з розподілами

x_i	0	1	2
$P_\xi(x_i)$	$2/3$	$1/6$	$1/6$

y_j	-1	0	1
$P_\eta(y_j)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Обчислити

$$M\frac{\eta^4 - \eta}{\xi + 1}.$$

6.15. Нехай випадкова величина ξ набуває значень $-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n$ з імовірностями $1/(2n+1)$. Обчислити: 1) $M\xi$; 2) $M|\xi|$.

6.16. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити: $M\xi,\ M\xi^2,\ D\xi$.

6.17. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, кожна з яких має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити:

$$1)\, M\frac{\xi}{1+\eta};\ \ 2)\, M\xi\eta;\ \ 3)\, D\xi\eta;\ \ 4)\, D(\xi+\eta).$$

6.18. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p. Обчислити: $M\xi,\ M\xi^2,\ D\xi$.

6.19. Симетричний гральний кубик підкидають до першої появи шістки.

1. Скільки разів у середньому необхідно підкинути кубик?

2. Яка ймовірність того, що буде виконано не більше двох підкидань?

6.20. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p. Обчислити:

$$1)\, Mx^{\xi},\ |x| < 1;\ \ 2)\, Me^{it\xi}.$$

6.21. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити: 1) $Mx^{\xi},\ |x| < 1$; 2) $Me^{it\xi}$.

6.22°. Обчислити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ — числа появи події у 100 незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність події дорівнює 0,7.

6.23°. Тричі підкидають монету, ймовірність появи герба якої становить $1/3$. Нехай ξ — число гербів, що при цьому випали.

Знайти розподіл випадкової величини ξ. Обчислити $M\xi$ та $D\xi$.

6.24°. Симетричну монету підкидають 10 разів. Знайти розподіл випадкової величини ξ — числа гербів, що випали. Обчислити $M\xi$ та $D\xi$.

6.25°. Обчислити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ із задачі 5.26.

6.26°. Обчислити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ із задачі 5.27.

6.27*. Розглядається послідовність незалежних випробувань з імовірністю успіху p $(0 < p < 1)$ в одному випробуванні. Нехай ξ — випадкова величина, яка дорівнює числу невдач до r-го успіху. Випадкова величина ξ має від'ємний біномний розподіл з параметрами (r, p):

$$P\{\xi = k\} = C_{r+k-1}^{k} p^r (1-p)^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Довести, що

$$M\xi = r\frac{1-p}{p},\ \ D\xi = r\frac{1-p}{p^2}.$$

6.28.[1] Для випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ із задачі 5.8 обчислити:

$$1)\, M\max\{\xi,\eta\};\ \ 2)\, M\sin(\pi\max\{\xi,\eta\}/6);\ \ 3)\, M\min\{\xi,\eta\}.$$

6.29. За спільним розподілом випадкових величин ξ і η із задачі 5.10 обчислити:

$$1)\, M\min\{\xi,\eta\};\ \ 2)\, M\cos(\pi\max\{\xi,\eta\}/3);$$

$$3)\, M\max\{\xi,\eta-\xi\};\ \ 4)\, M\sin(\pi\min\{\eta,\eta-\xi\}/4).$$

6.30. Випадковий вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ має розподіл

$$P\{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots, \mu_r) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\} = p_k,$$

у послідовності $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ на k-му місці розташована одиниця, на інших — нулі , $k = 1, 2, \ldots, r$.

[1] Для розв'язання задач 6.28 — 6.31 слід скористатися формулою (6.1.3).

Обчислити

$$M\exp\{i(t,\mu)\} = M\exp\{i(t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \ldots + t_r\mu_r)\}.$$

6.31*. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини зі значеннями в $\mathbb{R}^1$;

$$\mathbb{R}^1 = \bigcup_{j=1}^{r} X_j,\ X_s \cap X_l = \emptyset,\ s \neq l,$$

$$P\{\xi_k \in X_j\} = p_j,\ j = 1, 2, \ldots, r;$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ — випадковий вектор, j-та компонента ν_j якого дорівнює кількості випадкових величин з $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, що потрапили до X_j, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Обчислити

$$M\exp\{i(t,\nu)\} = M\exp\{i(t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + \ldots + t_r\nu_r)\},$$

$t_u \in \mathbb{R}^1,\ u = 1, 2, \ldots, r$.

6.32. У великої кількості k людей обстежують кров. Обстеження можна організувати двома способами.

Спосіб 1. Кров кожної людини обстежують окремо. У цьому разі необхідно виконати k аналізів.

Спосіб 2. Кров k людей змішують і аналізують отриману суміш. Якщо результат аналізу негативний (діагноз не підтверджується), то одного цього аналізу досить для k людей. Якщо результат позитивний, то кров кожної людини аналізують окремо й у цілому на k чоловік необхідно виконати $k + 1$ аналіз. Припустимо, що ймовірність p позитивного результату аналізу одна й та сама для всіх людей і що результати аналізів незалежні.

1. Знайти ймовірність того, що аналіз змішаної крові k людей позитивний.

2. Обчислити математичне сподівання числа аналізів ξ, необхідних у другому способі обстеження.

6.33. В урні міститься 2 білі, 3 чорні і 5 червоних куль. З урни навмання беруть три кулі. Знайти розподіли випадкових величин: ξ — числа вибраних білих куль, η — чорних, ζ — червоних. Обчислити математичне сподівання й дисперсію кожної з випадкових величин.

6.34. Нехай ξ — невід'ємна цілочислова випадкова величина з розподілом

$$P\{\xi = k\} = p_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Функцію $P(t)$, означену рівністю

$$P(t) = Mt^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k,\ |t| \leq 1,$$

називатимемо твірною функцією випадкової величини ξ (розподілу $\{p_k\}$).

Обчислити твірну функцію випадкової величини ξ, що має: 1° пуассонів розподіл; 2° геометричний розподіл; 3° біномний розподіл.

6.35. Довести, що різні дискретні ймовірнісні розподіли мають різні твірні функції (теорема єдиності).

6.36. Довести, що твірна функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку твірних функцій доданків (мультиплікативна властивість твірних функцій).

6.37. Довести, що сума незалежних пуассонових випадкових величин ξ і η з параметрами θ_1 і θ_2 відповідно є пуассонова випадкова величина з параметром $\theta_1 + \theta_2$.

6.38. Довести, що сума незалежних біномно розподілених випадкових величин ξ і η відповідно з параметрами $(n; \theta)$ і $(m; \theta)$ є біномно розподіленою випадковою величиною з параметрами $(n + m; \theta)$.

6.39. Нехай

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\},\ P(\omega) = ap^{\omega},\ \omega = 0, 1, \ldots,$$

p — довільне фіксоване число з $(0; 1)$. За яких значень параметра a функція $P(\omega) = ap^{\omega}$, $\omega \in \Omega$, визначає ймовірність на Ω?

Нехай $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина на $\{\Omega, P\}$, задана рівністю $\xi = \xi(\omega) = 2^{-\omega}$. Обчислити $M\xi$, $M\xi^2$.

6.40. Нехай

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\},\ P(\omega) = a\frac{1}{\omega!},\ \omega \in \Omega.$$

За яких значень a пара $\{\Omega, P\}$ є ймовірнісним простором?

Нехай $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина на $\{\Omega, P\}$, задана рівністю $\xi = \xi(\omega) = 2^\omega$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$.

6.41. Нехай

$$\Omega = \{0, 1, \ldots\},\ P(\omega) = a\frac{\lambda^\omega}{\omega!},\ \omega \in \Omega,$$

λ — довільне фіксоване додатне число. За яких значень a пара $\{\Omega, P\}$ задає ймовірнісний простір?

Нехай $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина на $\{\Omega, P\}$, задана рівністю $\xi = \xi(\omega) = 2^\omega$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$.

6.42. Довести нерівність Чебишова (теорема 6.1.2).

6.43. Довести закон великих чисел (теорема 6.1.3).

6.44. Нехай $P_\zeta(x_i, y_j)$ — розподіл випадкового вектора $\zeta = (\xi, \eta)$. Обчислити $M\xi$.

6.45. Підкидають три симетричних гральних кубика. У першого три грані занумеровані одиницею, три грані — двійкою, у другого три грані занумеровані трійкою, три грані — четвіркою, а у третього кубика три грані занумеровані п'ятіркою, три грані — шестіркою. Знайти математичне сподівання, дисперсію і розподіл суми очок, що випали на кубиках.

6.46. Підкидають три симетричних гральних кубика. Грані першого кубика занумеровані числами від одиниці до шести. У другого кубика дві грані занумеровані одиницею, дві — двійкою, дві — трійкою. А у третього кубика три грані занумеровані одиницею, три — двійкою. Знайти математичне сподівання и дисперсію суми очок, що випали на кубиках.

6.47. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — випадкові величини, які мають скінченні дисперсії, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Довести, що

$$DS_n = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),$$

а якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні, то

$$DS_n = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k.$$

6.48. Нехай ζ_1, ζ_2 — незалежні випадкові величини з однаковими розподілами і $\xi = \zeta_1+\zeta_2$, $\eta = \zeta_1-\zeta_2$. Довести, що $r(\xi,\eta) = 0$.

6.49. Нехай ξ і η — відповідно сума і різниця очок, які з'явилися при підкиданні двох гральних кубиків. Довести, що $r(\xi,\eta) = 0$. Довести, що величини ξ і η не є незалежні.

6.50. Нехай ξ набуває значень $-1, +1, -2, +2$ кожне з імовірністю $1/4$, а $\eta = \xi^2$. Знайти спільний розподіл ξ і η. Довести, що: 1) $r(\xi,\eta) = 0$; 2) ξ і η не є незалежними випадковими величинами.

6.51. Обчислити математичне сподівання випадкової величини ξ із задачі 5.3.

6.52. Нехай ξ — число очок, що випали при підкиданні симетричного грального кубика, η — число гербів, що випали при підкиданні шести симетричних монет. Обчислити

$$M\xi,\ D\xi,\ M\eta,\ D\eta,\ M(\xi+\eta),\ D(\xi+\eta).$$

Глава 7

Аксіоматика теорії ймовірностей

7.1 Алгебри, σ-алгебри

Операції над множинами. Далі ми матимемо справу з множиною (простором) Ω елементів ω і його підмножинами. Підмножини Ω позначатимемо великими латинськими літерами $A, B, C, \ldots$ Множина визначається (задається) своїми елементами. Якщо ω є елементом множини A, то записуватимемо це так: $\omega \in A$ (читатимемо: "ω належить A"); якщо ω не є елементом множини A, то записуватимемо це так: $\omega \notin A$ (читатимемо: "ω не належить A").

Множину, що не містить жодного елемента, називатимемо *порожньою* й позначатимемо символом $\emptyset$.

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то позначатимемо це так: $A \subset B$ (читатимемо: "A — підмножина B").

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B ($A \subset B$) і кожен елемент множини B є елементом множини A ($B \subset A$) (інакше кажучи, сукупність елементів множин A і B одна й та сама), то множини A і B ототожнюватимемо й позначатимемо це так: $A = B$. Для того щоб установити рівність $A = B$, достатньо перевірити, що $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто кожен елемент ω множини

A є елементом множини B, і кожен елемент ω множини B є елементом множини A.

З елементів множин A і B можна будувати нові множини.

Множину, що складається з елементів, кожен з яких належить принаймні одній із множин A або B, називатимемо *об'єднанням* множин A і B і позначатимемо $A \cup B$.

Множину, що складається з елементів, які належать як множині A, так і B, називатимемо *перетином* множин A і B і позначатимемо $A \cap B$.

Множину, що складається з елементів, які належать множині A, але не належать B, називатимемо *різницею* множин A і B і позначатимемо $A \setminus B$.

Множину, що складається з елементів Ω, які не належать множині A, називатимемо *доповненням* до множини A і позначатимемо $\overline{A}$.

Казатимемо, що множини A і B *не перетинаються* (*неперетинні*), якщо $A \cap B = \emptyset$.

Приклад 7.1.1. *Нехай* $\{A_n\}$ *— послідовність неперетинних множин* $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$ *і*

$$B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \; n = 1, 2, \ldots$$

Довести, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

Розв'язання. Припустимо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$, і нехай $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тоді $\omega \in B_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ і, отже, ω належить хоча б одній з множин A_i, $i = 1, 2, \ldots$, а оскільки $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, то тільки одній множині, позначимо її через A_{n_0}. Тому

$$\omega \notin \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i = B_{n_0+1}.$$

А останнє суперечить припущенню $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Алгебра множин. Непорожній клас $\mathfrak{A}$ підмножин простору Ω називатимемо *алгеброю множин*, якщо:

1° разом із будь-якою множиною $A \in \mathfrak{A}$ її доповнення $\overline{A}$ належить до $\mathfrak{A}$;

2° разом із будь-якими двома множинами $A, B \in \mathfrak{A}$ їхнє об'єднання $A \cup B$ належить до $\mathfrak{A}$.

Означення. Нехай $\mathfrak{K}$ — деякий клас підмножин Ω. *Найменшою алгеброю, що містить клас* $\mathfrak{K}$ (*алгеброю, породженою класом* $\mathfrak{K}$), називатимемо алгебру $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$, яка:

1° містить клас $\mathfrak{K}$, тобто $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{K})$;

2° міститься у будь-якій іншій алгебрі $\mathfrak{A}$, яка містить клас $\mathfrak{K}$, тобто $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{A}$.

***σ*-Алгебра множин.** Непорожній клас $\mathfrak{F}$ підмножин простору Ω називатимемо *σ-алгеброю множин*, якщо:

1° разом із кожною множиною $A \in \mathfrak{F}$ її доповнення $\overline{A}$ належить $\mathfrak{F}$;

2° разом із будь-якою зліченною послідовністю множин $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, їхнє об'єднання $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ належить до $\mathfrak{F}$.

Множини із σ-алгебри $\mathfrak{F}$ ще називають *подіями.*

Означення. Нехай $\mathfrak{K}$ — деякий клас підмножин Ω. *Найменшою σ-алгеброю, що містить клас* $\mathfrak{K}$ (*σ-алгеброю, породженою класом* $\mathfrak{K}$), називатимемо σ-алгебру $\sigma(\mathfrak{K})$, яка:

1° містить клас $\mathfrak{K}$, тобто $\mathfrak{K} \subset \sigma(\mathfrak{K})$;

2° міститься у будь-якій σ-алгебрі $\mathfrak{F}$, що містить клас $\mathfrak{K}$, тобто $\sigma(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{F}$.

Приклад 7.1.2. *Нехай $\mathfrak{K}_1$ і $\mathfrak{K}_2$ — два класи підмножин простору Ω, причому $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2$. Довести, що*

$$\sigma(\mathfrak{K}_1) \subset \sigma(\mathfrak{K}_2).$$

Розв'язання. За означенням $\mathfrak{K}_2 \subset \sigma(\mathfrak{K}_2)$, а за умовою $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2$, тому $\mathfrak{K}_1 \subset \sigma(\mathfrak{K}_2)$. І оскільки $\sigma(\mathfrak{K}_1)$ — найменша σ-алгебра, породжена класом $\mathfrak{K}_1$, а $\sigma(\mathfrak{K}_2)$ — одна із σ-алгебр, що містить клас $\mathfrak{K}_1$, то $\sigma(\mathfrak{K}_1) \subset \sigma(\mathfrak{K}_2)$.

Борелеві множини на $\mathbb{R}^1$. *σ-Алгеброю борелевих множин на $\mathbb{R}^1$* називатимемо σ-алгебру $\mathfrak{B}^1$, породжену класом $\mathfrak{K}$ проміжків вигляду $[a, b)$. Множини з σ-алгебри $\mathfrak{B}^1$ називатимемо *борелевими множинами на* $\mathbb{R}^1$.

Приклад 7.1.3. *Довести, що борелевою множиною на* $\mathbb{R}^1$ *є:*

1) *множина* $\{a\}$ *для кожного* $a \in \mathbb{R}^1$*;*
2) *зліченна множина числової прямої;*
3) *інтервал* (a, b)*;*
4) *відкрита множина на числовій прямій;*
5) *замкнена множина на числовій прямій.*

Розв'язання. Зазначимо, що σ-алгебра множин замкнена відносно операції перетину в зліченному числі, оскільки

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}.$$

1) Очевидно, $\{a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a, a + 1/n)$. А оскільки кожен із проміжків $[a, a + 1/n)$ належить $\mathfrak{B}^1$, а $\mathfrak{B}^1$ замкнена відносно операції перетину в зліченному числі, то

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a + 1/n) \in \mathfrak{B}^1.$$

2) Зліченну множину A можна подати у вигляді $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$, і оскільки $\{a_i\} \in \mathfrak{B}^1$ для всіх $i = 1, 2, \ldots$ (див. пункт 1), то $A \in \mathfrak{B}^1$.

3) Оскільки $(a, b) = [a, b) \cap \overline{\{a\}}$, $[a, b) \in \mathfrak{B}^1, \{a\} \in \mathfrak{B}^1$ і $\mathfrak{B}^1$ замкнена відносно операції перетину, то $(a, b) \in \mathfrak{B}^1$.

4) Кожну відкриту множину O на $\mathbb{R}^1$ можна подати у вигляді об'єднання скінченної або зліченної множини відкритих неперетинних інтервалів: $O = \bigcup\limits_i (a_i, b_i)$. Відкриті інтервали (a_i, b_i) належать $\mathfrak{B}^1$, тому $O = \bigcup\limits_i (a_i, b_i) \in \mathfrak{B}^1$.

5) Замкнена множина належить $\mathfrak{B}^1$ як доповнення відкритої.

Приклад ілюструє той факт, що клас борелевих множин досить “широкий”. У даному підручнику всі підмножини $\mathbb{R}^n$, що розглядаються, є борелевими.

Борелеві множини на $\mathbb{R}^2$. *σ-Алгеброю борелевих множин на* $\mathbb{R}^2$ називатимемо σ-алгебру $\mathfrak{B}^2$, породжену класом $\mathfrak{K}$ прямокутників вигляду $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$.

Борелеві множини на $\mathbb{R}^n$. *σ-Алгеброю борелевих множин на* $\mathbb{R}^n$ називатимемо σ-алгебру $\mathfrak{B}^n$, породжену класом $\mathfrak{K}$ паралелепіпедів вигляду $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \ldots \times [a_n, b_n)$.

Борелеві множини у метричному просторі. *σ-Алгеброю борелевих множин у метричному просторі* (X, ρ) називатимемо σ-алгебру $\mathfrak{B}(X)$, породжену класом відкритих у (X, ρ) підмножин.

7.2 Аксіоми Колмогорова

Нехай Ω — простір елементарних подій і $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра підмножин Ω.

Імовірність. *Імовірністю*, заданою на σ-алгебрі $\mathfrak{F}$ підмножин простору Ω, називатимемо невід’ємну зліченноадитивну нормовану функцію.

Інакше кажучи, імовірність P — це функція множини, задана на σ-алгебрі $\mathfrak{F}$ підмножин Ω, така, що:

1° для кожної $A \in \mathfrak{F}$

$$P(A) \geq 0;$$

2° для довільних $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, що $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i);$$

3° $P(\Omega) = 1$.

Зокрема, якщо $\Omega = \mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}^n$, то ймовірність називають *імовірнісним розподілом на* $\mathbb{R}^n$.

Аксіоми 1°, 2° з означення σ-алгебри й аксіоми 1°, 2°, 3° з означення ймовірності утворюють систему аксіом теорії ймовірностей. У такому вигляді вона була запропонована А. М. Колмогоровим.

Аксіоми 1°, 2°, 3° ймовірності є аналогами властивостей невід'ємності, адитивності й нормованості частоти, див. (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3).

Означення. *Імовірнісним простором* називатимемо трійку $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, де Ω — простір елементарних подій, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра підмножин простору Ω, P — імовірність на σ-алгебрі $\mathfrak{F}$.

Імовірнісний простір $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ є математичною моделлю стохастичного експерименту. При цьому Ω — простір елементарних подій — це математична модель множини наслідків стохастичного експерименту, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра підмножин простору Ω — це математична модель алгебри випадкових подій, що спостерігаються в експерименті, P — імовірність на $\mathfrak{F}$ — це математична модель частоти подій у послідовності експериментів.

Властивості ймовірності. Усі перелічені далі властивості ймовірності є наслідками аксіом 1°, 2°, 3°.

1. Імовірність неможливої події дорівнює нулеві:

$$P(\emptyset) = 0.$$

2. Імовірність будь-якої події $A \in \mathfrak{F}$ не перевищує 1:

$$P(A) \leq 1.$$

3. Якщо $A \subset B$ $(A, B \in \mathfrak{F})$, то ймовірність різниці подій B і A дорівнює різниці ймовірностей цих подій:

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5. Для довільних $A, B \in \mathfrak{F}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7.2.1}$$

(теорема додавання).

Приклад 7.2.1. *Теорема додавання допускає таке узагальнення:*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

$$= \sum_{1\le i_1\le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_n}). \quad (7.2.2)$$

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося методом математичної індукції. Для двох множин рівність (7.2.2) справджується (див. (7.2.1)). Припустимо, що рівність (7.2.2) має місце для $n-1$ множин, і доведемо, що вона справджується для n множин. Маємо:

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n) = P(A_1) + P(A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_n) -$$

$$-P((A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\cup\ldots\cup(A_1\cap A_n)) = P(A_1) +$$

$$+ \sum_{2\le i_1\le n} P(A_{i_1}) - \sum_{2\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2} \sum_{2\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_n}) -$$

$$-P((A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\cup\ldots\cup(A_1\cap A_n)).$$

Щоб завершити доведення, залишається зауважити, що

$$\sum_{2\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}) +$$

$$+ \sum_{2\le i_1<i_2<\ldots<i_{k-1}\le n} P((A_1\cap A_{i_1})\cap(A_1\cap A_{i_2})\cap\ldots$$

$$\ldots\cap(A_1\cap A_{i_{k-1}})) =$$

$$= \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}),$$

$k = 2, 3, \ldots, n$.

Приклад 7.2.2. *Числа $1, 2, \ldots, n$ розташовані навмання. Знайти ймовірність того, що принаймні одне число співпадає з номером свого місця. До якої границі прямує ця ймовірність, коли $n \to \infty$?*

Р о з в' я з а н н я. Елементарна подія стохастичного експерименту, що полягає в розташуванні навмання n чисел на n місцях, — упорядкована послідовність цих чисел. Природно вважати, що всі елементарні події рівноймовірні, тому стохастичний експеримент описуватимемо класичною моделлю. Зазначимо, що кількість усіх елементарних подій дорівнює $n!$

Позначимо через A_{i_s} подію, яка полягає в тому, що число i_s знаходиться на місці з номером i_s, тоді перетин $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, описує подію "число i_1 знаходиться на місці з номером i_1, число i_2 — на місці з номером i_2, ..., число i_k — на місці з номером i_k" (решта $n-k$ чисел на $n-k$ місцях упорядковані довільно). Задача зводиться до обчислення ймовірності події

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Скористаємося теоремою додавання (див. (7.2.2)):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

$$= \sum_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}).$$

Обчислимо кожну суму в правій частині. Почнемо із суми $\sum\limits_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1})$. Спочатку обчислимо $P(A_{i_1})$. До події A_{i_1} входять усі послідовності завдовжки n, у яких на місці з номером i_1 знаходиться число i_1. Таких послідовностей, очевидно, $(n-1)!$ Згідно з формулою класичної ймовірності

$$P(A_{i_1}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Тому

$$\sum_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) = \sum_{1 \le i_1 \le n} \frac{1}{n} = 1.$$

Далі розглянемо $\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

Обчислимо $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$. До $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ входять послідовності завдовжки n, у яких на місці з номером i_1 знаходиться число i_1, на місці з номером i_2 — число $i_2, \ldots$, на місці з номером i_k — число i_k, а решта $n-k$ чисел на $n-k$ місцях, що залишилися, впорядковані довільно. Таких послідовностей, очевидно, $(n-k)!$ За формулою класичної ймовірності

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Тому

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) =$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Кількість однакових доданків в останній сумі дорівнює числу способів вибрати k індексів $i_1, i_2, \ldots, i_k$ з проміжку $[1, n]$ так, щоб $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$. Очевидно, це число дорівнює C_n^k. Отже,

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Таким чином,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Зазначимо, що коли $n \to \infty$, остання сума збігається до $1 - 1/e$.

7.3 Задачі

АЗ: 7.1, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15(1, 2), 7.16(1), 7.19.
СЗ: 7.2, 7.9, 7.10, 7.15(3, 4, 5), 7.16(2), 7.20.

7.1°. Довести, що:
а) $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$, причому $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$;
б) $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$, причому, якщо $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$, то $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset, i \neq j$.

7.2°. Послідовність підмножин $\{A_n\}$ площини означена так:

$$A_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1/n^2\}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Описати підмножини

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7.3°. Довести рівності:
а) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$;
б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
в) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

7.4°. Нехай $A_n = \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ Описати множини

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7.5. 1° Нехай $\{A_n\}$ — довільна послідовність множин. Довести, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

де $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, причому множини B_n попарно неперетинні.

2° Нехай $\{A_i\}$ — зростаюча послідовність множин, тобто

$$A_i \subset A_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots$$

Довести, що

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1}),$$

де $A_0 = \emptyset$, причому

$$(A_i \setminus A_{i-1}) \cap (A_j \setminus A_{j-1}) = \emptyset,\ i \neq j.$$

7.6. Нехай I — деяка множина індексів. Довести, що

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}; \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}.$$

7.7°. Нехай $\mathfrak{A}$ — алгебра множин, $A, B \in \mathfrak{A}$. Довести, що $A \bigcap B \in \mathfrak{A}$ (алгебра замкнена відносно операції перетину).

7.8°. Нехай $\mathfrak{A}$ — алгебра множин. Довести:

а) якщо $A_k \in \mathfrak{A}, k = 1, 2, \ldots, n$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$;

б) якщо $A_k \in \mathfrak{A}, k = 1, 2, \ldots, n$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$;

в) $\Omega \in \mathfrak{A}$; $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

7.9. Довести, що:

а) клас усіх підмножин множини Ω є алгеброю;

б) для кожного класу $\mathfrak{K}$ підмножин Ω існує принаймні одна алгебра, яка містить клас $\mathfrak{K}$;

в) перетин будь-якої сукупності алгебр є алгеброю.

7.10. Довести, що для кожного класу $\mathfrak{K}$ існує найменша алгебра, яка містить клас $\mathfrak{K}$.

7.11°. Нехай $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра множин, $A_n \in \mathfrak{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ Довести, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

7.12. Довести, що:

а) клас усіх підмножин множини Ω є σ-алгеброю;

б) для кожного класу $\mathfrak{K}$ підмножин Ω існує принаймні одна σ-алгебра, яка містить клас $\mathfrak{K}$;

в) перетин будь-якої сукупності σ-алгебр є σ-алгеброю.

7.13. Довести, що для кожного класу $\mathfrak{K}$ існує найменша σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{K})$, яка містить клас $\mathfrak{K}$.

7.14. Нехай $\mathfrak{K}$ — клас відкритих інтервалів (a, b) на числовій прямій. Довести, що найменша σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{K})$, яка містить клас $\mathfrak{K}$, є σ-алгеброю борелевих множин на $\mathbb{R}^1$.

7.15. Довести, що σ-алгебри, породжені кожним з перелічених далі класів, є σ-алгебрами борелевих множин на $\mathbb{R}^1$:

1) $\mathfrak{K}_1 = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}^1\}$;

2) $\mathfrak{K}_2 = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}^1\}$;

3) $\mathfrak{K}_3 = \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}^1\}$;

4) $\mathfrak{K}_4 = \{(x, +\infty); x \in \mathbb{R}^1\}$;

5) $\mathfrak{K}_5 = \{[x, +\infty); x \in \mathbb{R}^1\}$.

7.16. Довести, що σ-алгебра борелевих множин на числовій прямій породжується:

1) класом відкритих множин;

2) класом замкнених множин.

7.17. Нехай $\mathfrak{A}$ — алгебра множин на $\mathbb{R}^1$, елементами якої є скінченні об'єднання проміжків вигляду $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, де $a, b \in \mathbb{R}^1$.

Довести, що алгебра $\mathfrak{A}$ породжує σ-алгебру борелевих множин на $\mathbb{R}^1$.

7.18. Нехай $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра підмножин Ω, B — довільна, але фіксована множина з $\mathfrak{F}$. Довести, що клас множин $\mathfrak{F}_B$ вигляду $A \cap B$, де $A \in \mathfrak{F}$, є σ-алгеброю.

Примітка. Доповнення береться до множини B.

7.19. Нехай $\mathfrak{B}^1$ — σ-алгебра борелевих множин на $\mathbb{R}^1$, B — довільна, але фіксована множина з $\mathfrak{B}^1$. Нехай $\mathfrak{B}^1_B$ — клас множин вигляду $B \cap A$, де $A \in \mathfrak{B}^1$. Довести, що $\mathfrak{B}^1_B$ є σ-алгеброю.

Примітка. Доповнення береться до множини B.

7.20. $\mathfrak{B}^1$ — σ-алгебра борелевих множин на $\mathbb{R}^1$. Нехай $\mathfrak{B}^1_{[a,b)}$ — клас множин вигляду $B \cap [a, b), B \in \mathfrak{B}^1, [a, b)$ — фіксований проміжок. Довести, що $\mathfrak{B}^1_{[a,b)}$ є σ-алгеброю.

Примітка. Доповнення береться до множини $[a, b)$.

7.21. Нехай клас $\mathfrak{K}$ утворюють множини $A_i \subset \Omega$,

$i = 1, 2, \ldots, n$, причому $A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j$, і $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Описати σ-алгебру, породжену класом $\mathfrak{K}$.

7.22. Нехай клас $\mathfrak{K}$ утворюють множини $A_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, \ldots$, причому $A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j$, і $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

Описати алгебру, породжену класом $\mathfrak{K}$. Описати σ-алгебру, породжену класом $\mathfrak{K}$.

7.23*. Довести, що в $\mathbb{R}^n$ борелевою множиною є:

а) множина $\{a\}$, для кожної точки $a \in \mathbb{R}^n$;

б) зліченна множина;

в) відкрита множина;

г) замкнена множина.

7.24. Довести, що клас нескінченних інтервалів

$$I_{a_1, a_2, \ldots, a_n} =$$

$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 < a_1, x_2 < a_2, \ldots, x_n < a_n\},$$

$a_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, породжує σ-алгебру $\mathfrak{B}^n$.

7.25. Довести, що клас $\mathfrak{K}$ відкритих множин у $\mathbb{R}^n$ породжує σ-алгебру борелевих множин $\mathfrak{B}^n$.

7.26. Довести, що клас $\mathfrak{K}$ замкнених множин у $\mathbb{R}^n$ породжує σ-алгебру борелевих множин $\mathfrak{B}^n$.

7.27. Нехай (X, ρ) — сепарабельний метричний простір. Довести, що:

1) одноточкова множина є борелевою;

2) зліченна множина є борелевою;

3) замкнена множина є борелевою.

7.28. Нехай (X, ρ) — сепарабельний метричний простір, $\mathfrak{F}$ — клас замкнених множин, $\mathfrak{V}$ — клас множин вигляду $B(x, r) = \{y : \rho(x, y) < r\}$, $\mathfrak{W}$ — клас множин вигляду $\overline{B}(x, r) = \{y : \rho(x, y) \leq r\}$.

Довести, що кожен з перелічених класів породжує σ-алгебру борелевих множин у метричному просторі (X, ρ).

7.29. Нехай $\{A_n\}$ — послідовність підмножин Ω; $\overline{\lim} A_n$ — множина тих і тільки тих елементів ω, які належать нескінченному числу множин A_n; $\underline{\lim} A_n$ — множина тих і тільки тих елементів, які належать усім множинам A_n, за винятком скінченного числа.

Довести, що

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n;$$

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m; \ \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

7.30. Нехай $\{A_n\}$ — монотонно спадна послідовність підмножин Ω, тобто для всіх n має місце включення

$$A_{n+1} \subset A_n.$$

Довести, що

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7.31. Нехай $\{A_n\}$ — монотонно зростаюча послідовність підмножин Ω, тобто для всіх n має місце включення $A_n \subset A_{n+1}$.

Довести, що

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7.32. Індикатором множини $A \subset \Omega$ називатимемо функцію I_A, яка означається рівністю

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in A; \\ 0, & \text{якщо } \omega \notin A. \end{cases}$$

Довести такі твердження:

1) $I_{A \cap B} = I_A I_B$;

2) $I_{\overline{A}} = 1 - I_A$;

3) $I_{A \cup B} = I_A + I_B$, якщо $A \cap B = \emptyset$;

4) якщо $A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $I_A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} I_{A_k}$;

5) якщо $\{A_k\}$ — монотонно зростаюча послідовність і $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\lim\limits_{k} I_{A_k} = I_A$.

Глава 8

Геометричні ймовірності

8.1 Означення. Приклади

Нехай стохастичний експеримент полягає у киданні навмання точки в множину B з $\mathbb{R}^n$ (наприклад, на відрізок $[a, b]$, у прямокутник $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, паралелепіпед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ і т. ін.). Надалі в слова "точку навмання кидають у множину B" ми вкладатимемо цілком конкретний зміст: кинута точка може потрапити в будь-яку (борелеву) підмножину A множини B, і ймовірність того, що точка опиниться в A, пропорційна мірі Лебега $L(A)$ множини A. Формально це означає, що як математичну модель стохастичного експерименту, що полягає у киданні навмання точки у множину B, розглядатимемо $\{B, \mathfrak{B}^n_B, P\}$, де $\mathfrak{B}^n_B$ — клас борелевих підмножин B, P — імовірність на класі $\mathfrak{B}^n_B$, яка для кожного A з $\mathfrak{B}^n_B$ означається рівністю

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(B)},$$

де L — міра Лебега на $\mathbb{R}^n$. (Значення L на паралелепіпеді $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ дорівнює $\prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$, зокрема, $L([a, b]) = b - a$, $L([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1) \times \times (b_2 - a_2)$). Означену в такий спосіб імовірність називатимемо *геометричною імовірністю* (зрозуміло, що множина B має задовольняти умову $0 < L(B) < \infty$).

Приклад 8.1.1. *На відрізок* $[0;1]$ *навмання кидають пару точок. Обчислити ймовірність того, що відстань між ними менша ніж* $1/2$.

Розв'язання. Точки вважатимемо розрізненними (наприклад, вважатимемо, що вони пофарбовані в різні кольори). Нехай x і y — координати цих точок.

Упорядкованій парі точок на відрізку $[0;1]$ з координатами x і y відповідає одна точка у квадраті $[0;1]\times[0;1]$ з координатами (x,y) і навпаки. Тому кидання навмання пари точок на відрізок $[0;1]$ рівносильне киданню навмання однієї точки у квадрат $[0;1]\times[0;1]$. При цьому парам точок на відрізку $[0;1]$, відстань між якими менша ніж $1/2$ (тобто $|y-x| < 1/2$), відповідає множина точок (x,y) квадрата $[0;1]\times[0;1]$, координати яких задовольняють умову $|y-x| < 1/2$, і навпаки. Позначимо цю множину через A:

$$A = \{(x,y) \in [0;1]\times[0;1] : |y-x| < 1/2\} =$$

$$= \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x - 1/2 < y < x + 1/2\}$$

(див. рис. 8.1.1, множина A заштрихована).

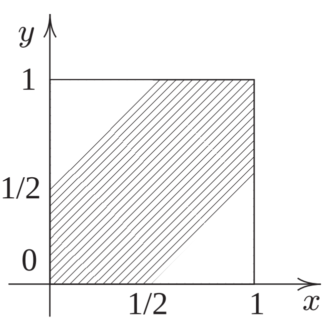

Рис. 8.1.1: До прикладу 8.1.1

Математичною моделлю стохастичного експерименту, який полягає в киданні навмання точки у квадрат

$[0;1] \times [0;1]$, є ймовірнісний простір $\{B, \mathfrak{B}_B^2, P\}$, де $B = [0;1] \times [0;1]$, $\mathfrak{B}_B^2$ — σ-алгебра борелевих підмножин квадрата $[0;1] \times [0;1]$, P — геометрична ймовірність на $\mathfrak{B}_B^2$. Тому

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(B)} = \frac{3/4}{1} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 8.1.2. *Стержень завдовжки 1 навмання розламують на три частини. Обчислити ймовірність того, що з частин, які утворилися, можна побудувати трикутник.*

Розв'язання. Стержень завдовжки 1 зручно інтерпретувати як відрізок $[0;1]$ на координатній прямій. Розламуватимемо відрізок $[0;1]$ на три частини так: навмання кинемо на нього дві точки й розламаємо відрізок у цих точках (точки вважатимемо розрізненними, їхні координати позначимо x, y). При цьому утворяться три відрізки: крайній лівий (завдовжки $\min\{x, y\}$), середній (завдовжки $|x - y|$), крайній правий (завдовжки $1 - \max\{x, y\}$). Із цих відрізків можна побудувати трикутник, якщо довжина кожного з них менша, ніж сума довжин двох інших:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min\{x, y\} < |x - y| + (1 - \max\{x, y\}); \\ |x - y| < \min\{x, y\} + (1 - \max\{x, y\}); \\ 1 - \max\{x, y\} < \min\{x, y\} + |x - y|. \end{array} \right. \tag{8.1.1}$$

Кидання двох точок на відрізок $[0;1]$ рівносильне киданню однієї точки у квадрат $[0;1] \times [0;1]$ (див. також приклад 8.1.1). При цьому парам точок на відрізку $[0;1]$, координати яких задовольняють нерівності (8.1.1), відповідають точки (x, y) квадрата $[0;1] \times [0;1]$, координати яких задовольняють ті самі нерівності. Позначимо цю множину точок квадрата через A. Її зручно подати у вигляді

$$A = A \cap (\{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : x > y\}) =$$

$$= (A \cap \{(x, y) : x \leq y\}) \cup (A \cap \{(x, y) : x > y\}) =$$

$$= \{(x,y) : x < 1/2,\ x + 1/2 > y,\ y > 1/2\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) : y < 1/2,\ x - 1/2 < y,\ x > 1/2\}.$$

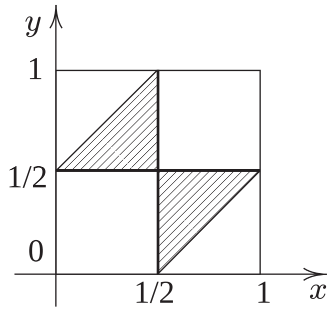

Рис. 8.1.2: До прикладу 8.1.2

Отже, обчислення ймовірності події "з частин відрізка можна побудувати трикутник" зводиться до обчислення ймовірності того, що кинута у квадрат $[0;1] \times [0;1]$ точка потрапить до множини A (див. рис. 8.1.2, множина A заштрихована). А оскільки точку кидають навмання, то шукана ймовірність обчислюється як геометрична:

$$P(A) = \frac{L(A)}{L([0;1] \times [0;1])} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 8.1.3 (задача Бюффона). *Площина розграфлена паралельними прямими, які знаходяться на відстані $2a$ одна від одної. На площину навмання* [1] *кидають голку завдовжки $2l$ ($2l < 2a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.*

---

[1] У прикладі слово "навмання" означає: 1° середина голки (точка) рівномірно розподілена на відрізку довжиною $2a$, перпендикулярному паралельним прямим; 2° кут φ, утворений голкою з паралельними прямими, має рівномірний розподіл на проміжку $[0, \pi]$; 3° відстань x від середини голки до найближчої прямої і кут φ є незалежними випадковими величинами.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо через x відстань від середини голки до найближчої прямої, через φ — кут між голкою і прямою (φ відкладатимемо від голки до прямої проти годинникової стрілки (див. рис. 8.1.3)).

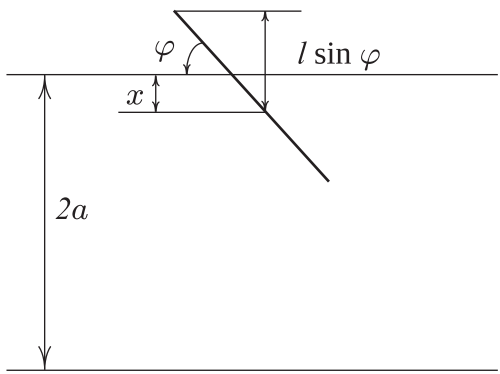

Рис. 8.1.3: Голка на розграфленій площині

Голка на площині, що розграфлена паралельними прямими, задає впорядковану пару чисел (φ, x), $\varphi \in [0, \pi]$, $x \in [0, a]$. Та сама пара чисел (φ, x) задає на координатній площині φ, x точку з координатами (φ, x), що належать прямокутнику $B = [0, \pi] \times [0, a]$ (див. рис. 8.1.4). И навпаки: кожна точка з прямокутника B визначає пару чисел (φ, x), а разом з нею і положення голки відносно паралельних прямих на площині. Тому кидання голки на площину, розграфлену паралельними прямими, і реєстрація її положення відносно прямих (див. рис. 8.1.3) рівносильне киданню навмання точки в прямокутник $B = [0, \pi] \times [0, a]$ (див. рис. 8.1.4). При цьому голка перетне пряму тоді й тільки тоді, коли справджується нерівність $x \leq l \sin \varphi$ (див. рис. 8.1.3) або, що те саме, коли кинута в прямокутник $B = [0, \pi] \times [0, a]$ точка потрапляє до фігури A, що обмежена кривою $x = l \sin \varphi$ і віссю $O\varphi$ (див. рис. 8.1.4). А оскільки точку кидають навмання, то ймовірність p того, що точка потрапить до множини A (ймовірність перетину голкою прямої), обчислюється як геометрична ймовірність. Тобто

$$p = \frac{1}{a\pi}\int\limits_0^{\pi} l \sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Цікаво, що одержане співвідношення можна використати для експериментального визначення числа π.

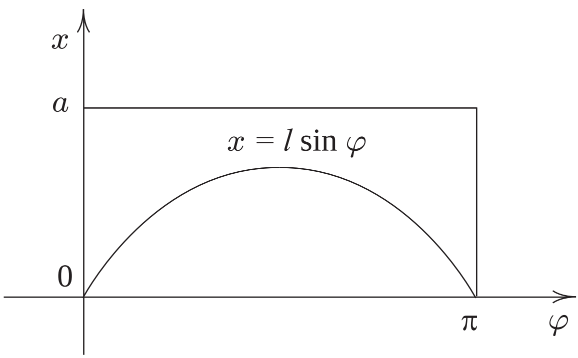

Рис. 8.1.4: До задачі Бюффона

Уявімо, що голка кинута на площину n разів (n — велике), при цьому голка m разів перетнула пряму. Якщо побудована модель адекватно описує експеримент, то за великих n частота m/n числа перетинів голкою прямої має бути близькою до ймовірності p, тобто має справджуватися співвідношення $\frac{2l}{a\pi} \approx \frac{m}{n}$. Звідси

$$\pi \approx \frac{2l}{a}\frac{n}{m}.$$

8.2 Задачі

АЗ: 8.1°(1, 2, 3, 10), 8.2°(1, 2, 3), 8.4(1, 7, 11, 14), 8.12°, 8.18, 8.20, 8.29, 8.31.

СЗ: 8.3°(3, 6, 8), 8.4(2, 10, 15), 8.11°, 8.16, 8.17°, 8.19, 8.25, 8.28, 8.30.

8.1°. У квадрат [0;1]×[0;1] навмання кидають точку. Обчислити ймовірність того, що для її координат (x, y) справджуються співвідношення:

1) $xy \le 1/2$;
2) $\min\{e^{-x},\ \sqrt{y}\} \ge e^{-1/2}$;
3) $\min\{y - x^2,\ x - y^2\} \ge 0$;
4) $\max\{y - e^{-x},\ y - 3/4\} \ge 0$;
5) $y > -x^2 + 1/9$;
6) $x^2 + y^2 < 1/4$;
7) $x + y \le 1/3$;
8) $y + 1/2 \le 1/x$;
9) $y < x^2/2$;
10) $|y - x| \ge 2/3$.

8.2°. У квадрат [0;1]×[0;1] навмання кидають точку. Позначимо її координати через (x, y).

Знайти ймовірності таких подій:

1) площа прямокутника зі сторонами x і y більша ніж $1/2$;

2) відстань від кинутої точки до початку координат менша ніж $1/4$;

3) відстань від кинутої точки до точки (1,1) більша ніж 1;

4) відстань від кинутої точки до точки (0,1) менша ніж 1.

8.3°. На відрізок [0;1] навмання кидають пару точок. Нехай x — координата однієї точки, y — іншої. Знайти ймовірності таких подій:

1) $\max\{x, y\} < 1/2$;
2) $\max\{x, y\} > 1/3$;
3) $\min\{x, y\} < 1/4$;
4) $\min\{x, y\} > 1/2$;
5) $x + \sqrt{1 - y^2} \le 1$;
6) $y + \sqrt{2x - x^2} \le 1$;
7) $x + \sqrt{y - y^2} \ge 1$;
8) $\max\{x^2, y\} < a,\ 0 < a < 1$;
9) $\max\{x, y^2\} > a,\ 0 < a < 1$;
10) $ye^x \le 1$;
11) $y + \sqrt{1 - x^2} - 1 \ge 0$;
12) $y + \sqrt{x - x^2} \le 1$.
13) $x^2 - y^2 - x + y \ge 0$.
14) $(y - x)(y - 1/2) \ge 0$.

8.4. На відрізок $[-2;2]$ навмання кидають пару точок. Нехай x — координата однієї точки, y — іншої. Знайти ймовірності таких подій:

1) $x+|x|=y+|y|$; 8) $(y-2x)(y+2x)\geq 0$;
2) $x-|x|=y-|y|$; 9) $(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-2)\leq 0$;
3) $[y]=[x]$; 10) $|x-1|+|y-1|\leq 1$;
4) $[y]=-[x]$; 11) $(y-x)(y+x-2)\geq 0$;
5) $[y]=[x-1]$; 12) $([y]-[x])(\{y\}-\{x\})\geq 0$;
6) $\{y\}\leq\{x\}$; 13) $(x-\operatorname{sign}x)^2+(y-\operatorname{sign}y)^2\leq 1$;
7) $|x|+|y|\leq 1$; 14) $|x-\operatorname{sign}x|+|y-\operatorname{sign}y|\leq 1$;
15) $(|x-1|+|y-1|-1)(|x-1|+|y-1|-2)\leq 0$;
16) $((x-\operatorname{sign}x)^2+(y-\operatorname{sign}y)^2-1)(|x-\operatorname{sign}x|+$
$+|y-\operatorname{sign}y|-1)\leq 0$;

($[a]$ — ціла частина числа a, $\{a\}=a-[a]$ — дробова частина числа a).

8.5°. На паркетну підлогу кидають монету радіуса r. Паркет має форму прямокутників із сторонами a і b $(a<b,\ 2r<a)$.

Знайти ймовірність того, що монета перетне меншу сторону якого-небудь прямокутника, якщо відомо, що вона перетнула одну зі сторін.

8.6. На відрізкові завдовжки l навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує kl $(0<k<1)$?

8.7. Два судна мають підійти до одного причалу. Моменти підходу суден до причалу — незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному із суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна (судна номер 1) — 1 год, а другого — 2 год.

8.8°. На паркетну підлогу навмання кидають монету діаметра d. Паркет має форму квадратів зі стороною $a\,(a>d)$. Яка ймовірність того, що монета не перетне жодної сторони квадратів паркету?

8.9. У круг радіуса R навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що точка опиниться всередині правильного n-кутника, вписаного в круг?

8.10. На колі одиничного радіуса з центром у початку координат навмання вибирають точку. Яка ймовірність того, що: а) проекція точки на вісь Ox знаходиться від центра кола на відстані, яка не перевищує r ($r < 1$); б) відстань від вибраної точки до точки з координатами $(1; 0)$ не перевищує r?

8.11°. У круг радіуса R навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра круга: 1) не перевищує r? 2) більша ніж r?

8.12°. У круг радіуса R з центром у точці O навмання незалежно одна від одної кидають N точок.

Обчислити ймовірність того, що:

1) відстань від центра круга до найвіддаленішої точки не перевищує r ($r < R$);

2) відстань від центра круга до найближчої точки перевищує r ($r < R$);

3) усі точки потраплять усередину круга радіуса r ($r < R$) з центром у точці O;

4) жодна точка не потрапить усередину круга радіуса r ($r < R$) з центром у точці O;

5) усі точки потраплять усередину даного круга радіуса r ($r < R$), що міститься у крузі радіуса R;

6) жодна точка не потрапить усередину даного круга радіуса r ($r < R$), що міститься у крузі радіуса R;

7) усі точки потраплять усередину даного квадрата зі стороною a, що міститься у крузі радіуса R;

8) жодна точка не потрапить усередину даного квадрата зі стороною a, що міститься у крузі радіуса R.

8.13. На відрізок AB завдовжки a навмання незалежно одна від одної кинуто п'ять точок. Знайти ймовірність того, що дві точки опиняться на відстані, меншій ніж b ($b < a$) від точки A, а три — на відстані, більшій ніж b.

8.14. На підставі спостережень (із телескопом і спектрометром) можна дійти висновку, що низка хімічних елементів, знайдених у земній корі, є також і на Сонці. Цей висновок ґрунтується на фізичному законі, відкритому Густавом Кірхгофом, згідно з яким пари елементів поглинають ті самі промені світла, які вони випромінюють (за високої температури хімічні елементи перетворюються у пару, що світиться). Випромінювання Сонця, проходячи через призму, утворює деяку послідовність паралельних ліній, їх називають спектральними лініями (фраунгоферовими лініями). Послідовність паралельних спектральних ліній можна виявити також у випромінюванні інших елементів, зокрема, заліза. (Як модель фраунгоферових ліній — спектральних ліній випромінювання хімічних елементів — розглядатимемо послідовність паралельних ліній на площині.)

У спостереженнях Г. Кірхгофа 60 спектральних ліній випромінювання заліза збіглися[2] з фраунгоферовими лініями випромінювання Сонця. Оцініть імовірність того, що цей збіг випадковий, якщо на шкалі, якою користувався Г. Кірхгоф, лінії на відстані, меншій 0,5 мм, уже нерозрізненні, а середня відстань між сусідніми сонячними фраунгоферовими лініями становить 2 мм.

8.15. На відрізок $[0;1]$ навмання кидають три точки, ξ, η, ζ — їхні координати.

1. Обчислити ймовірність того, що з відрізків завдовжки ξ, η, ζ можна побудувати трикутник.

2. Обчислити ймовірність того, що $\xi + \eta + \zeta \le 3/2$.

3. Обчислити ймовірність того, що $\max\{\xi, \eta, \zeta\} \le t$, $0 < t < 1$.

8.16. Дві особи, які вирішили зустрітися протягом години, домовилися, що кожна незалежно від іншої приходить на місце зустрічі у навмання вибраний момент зазначеної години.

1. Якщо особи домовилися, що кожна чекатиме іншу впродовж часу t $(t < 1)$, після чого піде з місця зустрічі, то яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

2. Яка ймовірність того, що дана особа прийде на місце зустрічі: а) раніше від іншої; б) раніше від іншої на час, не менший ніж q $(q < 1)$?

8.17°. У сферу радіуса R з центром у точці O навмання незалежно одну від одної кинули N точок. Обчислити ймовірність того, що:

1) відстань від центра до найвіддаленішої точки не перевищує r $(r < R)$;

---

[2]Зазначимо, що ніяке фізичне спостереження не є абсолютно точним. Тому дві лінії, які ми класифікуємо як такі, що збігаються, насправді можуть бути різними, але в межах точності наших спостережень ми не можемо їх розрізнити.

2) відстань від центра до найближчої точки перевищує r $(r < R)$;

3) усі точки потраплять усередину сфери радіуса r $(r < R)$ з центром у точці O;

4) жодна точка не потрапить усередину сфери радіуса r $(r < R)$ з центром у точці O;

5) усі точки потраплять усередину даної сфери радіуса r $(r < R)$, що міститься у сфері радіуса R;

6) жодна точка не потрапить усередину даної сфери радіуса r $(r < R)$, що міститься у сфері радіуса R;

7) усі точки потраплять усередину даного куба зі стороною a, що міститься у сфері радіуса R;

8) жодна точка не потрапить усередину даного прямокутного паралелепіпеда зі сторонами a, b, c, що міститься у сфері радіуса R.

8.18. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків, довжина яких не перевищує 1, можна побудувати трикутник?

8.19. На відрізку $[-1; 1]$ навмання вибирають дві точки. Нехай p та q — координати цих точок. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$: 1) має дійсні корені; 2) не має дійсних коренів.

8.20. На відрізок навмання одну за одною кидають три точки. Яка ймовірність того, що третя за ліком точка потрапить між двома першими?

8.21°. У круг вписано квадрат. Точку навмання кидають у круг. Знайти ймовірність того, що вона потрапить у квадрат.

8.22*. Нехай $x = (x_1, x_2)$ — координати точки, навмання кинутої у квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$. За яких значень r події $A_r = \{|x_1 - x_2| \geq r\}$ і $B_r = \{x_1 + x_2 \leq 3r\}$ незалежні?

8.23. Нехай $x = (x_1, x_2)$ — координати точки, навмання кинутої у квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$,

$$A_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 1/2\},\ A_2 = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq 1/2\},$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2) : (x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2) \leq 0\}.$$

Довести, що будь-які дві з подій A_1, A_2, A_3 незалежні, але всі три не є незалежними.

8.24. Площина розбита сіткою прямих: 1) на квадрати зі стороною 1; 2) на правильні трикутники зі стороною 1.

На площину навмання кинули монету діаметра 1. Яка ймовірність того, що монета закриє одну з вершин сітки?

8.25. На відрізку $[0;1]$ навмання послідовно вибирають три числа. Яка ймовірність того, що:

1) число, вибране останнім, найбільше;

2) числа вибрано у порядку зростання?

8.26. Відрізок поділили на три рівні частини. Яка ймовірність того, що три точки, навмання кинуті на відрізок, потраплять у три різні частини?

8.27*. Монету, радіус якої r і висота h, навмання кидають на горизонтальну площину. Знайти ймовірність того, що монета стане на ребро.

8.28. На відрізок $[0;1]$, який розділено на три рівні частини, навмання кидають три точки. Обчислити ймовірності таких подій:

1) усі три точки потраплять в одну частину;

2) зайнятими виявляться не менше двох частин;

3) на середню частину не потрапить жодної точки;

4) на крайні частини не потрапить жодної точки.

8.29. На колі навмання вибирають три точки. Яка ймовірність того, що трикутник з вершинами у цих точках гострокутний?

8.30. На колі навмання вибрано три точки. Обчислити ймовірність того, що в трикутнику з вершинами в цих точках:

1) є кут, менший ніж $30°$;

2) усі кути більші ніж $30°$;

3) є кут $90°$.

8.31[3]. На колі навмання вибрано точки A, B, C, D. Обчислити ймовірність того, що відрізки AC і BD перетинаються.

8.32*. На плоскій горизонтально розміщеній фользі знаходиться точкове джерело радіоактивного випромінювання, що посилає промені рівномірно в усіх напрямах простору. Якщо паралельно фользі на одиничній відстані

[3] *Васильев Н. Б.* Геометрические вероятности // Квант. — 1991. — №1. — С. 47–53.

від неї поставити екран, то на ньому можна спостерігати точкові спалахи, спричинені радіоактивним випромінюванням. Знайти ймовірність того, що черговий спалах відбудеться на екрані всередині круга, радіус якого дорівнює R, а центр знаходиться над джерелом випромінювання.

8.33*. Для того щоб зібрати шарикопідшипник, радіус R зовнішнього кільця, радіус r внутрішнього кільця і діаметр d шарика мають задовольняти умови

$$0 \leq R - r - d \leq \delta.$$

Припустимо, що R, r, d — незалежні й рівномірно розподілені відповідно на відрізках [50,0; 51,0], [40,0; 41,0], [9,5; 10,0] випадкові величини.

Знайти ймовірність того, що шарикопідшипник буде зібрано, якщо $\delta = 0,5$ мм.

8.34. На відрізок $[0, nd]$, розбитий точками kd, $k = 0, 1, \ldots, n$, на частини, навмання кидають відрізок випадкової довжини.

Обчислити ймовірність того, що відрізок "накриє" одну з точок поділу, якщо його довжина розподілена 1° рівномірно на відрізку $[0, d]$; 2° рівномірно на відрізку $[0, l]$ $(0 < l < d)$.

8.35°. В одиничний квадрат навмання кинуто точку. Яка ймовірність того, що точка буде віддалена від центра квадрата на відстань, меншу ніж $1/3$, якщо відомо, що від кожної зі сторін квадрата вона віддалена більше ніж на $1/6$?

8.36°. На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими становить $2a$. На площину навмання кидають монету радіуса r $(r < a)$. Яка ймовірність того, що монета не перетне жодної з прямих?

8.37°. Нехай на відрізок завдовжки L навмання кидають точку. Обчислити ймовірність того, що вона впаде не далі, ніж на l $(l < L/2)$ від середини відрізка.

8.38°. Випадкова точка A рівномірно розподілена в квадраті зі стороною 1. Знайти ймовірності таких подій:

а) відстань від точки A до фіксованої сторони квадрата не перевищує x;

б) відстань від точки A до найближчої сторони квадрата не перевищує x;

в) відстань від точки A до центра квадрата не перевищує x;

г) відстань від точки A до фіксованої вершини квадрата не перевищує x.

8.39°. Випадкова точка A рівномірно розподілена в прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Знайти ймовірності таких подій:

а) відстань від точки A до найближчої сторони прямокутника не перевищує x;

б) відстані від точки A до діагоналей прямокутника не перевищують x $(x < 1/\sqrt{5})$.

8.40°. Випадкова точка A рівномірно розподілена в квадраті зі стороною a. Знайти ймовірність того, що відстань від точки A до найближчої сторони квадрата менша, ніж відстань від A до найближчої діагоналі квадрата.

8.41°. Випадкова точка X рівномірно розподілена в квадраті $A = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq a\}$. Знайти ймовірність того, що квадрат з центром у точці X і сторонами завдовжки b, паралельними осям координат, цілком міститься в квадраті A.

8.42. На відрізок $[0; 1]$, розбитий на n рівних частин (відрізків), навмання незалежно одна від одної кидають n точок. Обчислити ймовірності таких подій:

1) усі точки потраплять на одну частину;
2) усі частини виявляться зайнятими;
3) не буде зайнята тільки крайня ліва частина;
4) виявляться зайнятими рівно дві частини;
5) виявляться зайнятими рівно три частини;
6) виявляться зайнятими рівно s частин.

Глава 9

Розподіл випадкової величини

9.1 Функція і щільність розподілу

Випадкова величина — функція від наслідку стохастичного експерименту (див. гл. 5) може набувати значень не тільки зі скінченної або зліченної множини, її значення можуть "заповнювати" проміжки. Наприклад, час безвідмовної роботи приладу, результат вимірювання і т. ін. Формально випадкову величину означають так.

Означення. Нехай $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ — імовірнісний простір. *Випадковою величиною* називатимемо функцію

$$\xi = \xi(\omega)$$

на Ω зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ таку, що для кожного $x \in \mathbb{R}^1$

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}.$$

Якщо $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина, то для довільної множини B (борелевої)

$$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

Властивості випадкових величин. Якщо ξ і η — випадкові величини, то випадковими величинами є

$$\xi + \eta,\ \xi - \eta,\ \xi\eta,\ \xi/\eta\ (\eta \neq 0).$$

Функція від випадкової величини є випадковою величиною. Докладніше, якщо ξ — випадкова величина, g — борелева[1] функція на $\mathbb{R}^1$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$, то $g(\xi)$ — випадкова величина.

Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — випадкові величини, то випадковими величинами є

$$\sup_n \xi_n,\ \inf_n \xi_n,\ \overline{\lim}\xi_n,\ \underline{\lim}\xi_n,$$

зокрема, границя $\lim \xi_n$ (якщо вона існує) є випадковою величиною.

Функція розподілу випадкової величини. Дискретна випадкова величина ξ описується своїм розподілом

$$P_\xi : x_i \to P_\xi(x_i) = P\{\xi = x_i\}.$$

У загальній ситуації випадкова величина ξ описується так званою функцією розподілу, за якою завжди можна обчислити ймовірність того, що ξ потрапить до даного проміжку $[a, b)$.

Означення. Функцію

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}, x \in \mathbb{R}^1,$$

називають *функцією розподілу* випадкової величини ξ.

Властивості функції розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ.

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$.

2. $F_\xi(x)$ — неспадна: якщо $x_1 < x_2$, то

$$F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2).$$

3. $F_\xi(x)$ неперервна зліва.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$

5. Для довільних a і b $(a < b)$

$$P\{\xi \in [a, b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

[1]Функція $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ борелева, якщо для довільної борелевої множини B її прообраз $g^{-1}(B)$ — борелева множина. Неперервні функції є борелевими, але клас борелевих функцій значно ширший.

6. Для довільного x_0

$$P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0 - 0).$$

Функцію

$$P_\xi(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, B \in \mathfrak{B}^1,$$

означену на класі борелевих множин прямої, називатимемо *розподілом* випадкової величини ξ.

Щільність розподілу випадкової величини. Якщо функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ можна подати у вигляді

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt, x \in \mathbb{R}^1, \tag{9.1.1}$$

то кажуть, що випадкова величина ξ має абсолютно неперервний розподіл (*абсолютно неперервна*), а функцію $p(x)$ називають *щільністю* розподілу випадкової величини ξ.

За щільністю розподілу $p(x)$ випадкової величини ξ завжди можна обчислити $P\{\xi \in [a, b)\}$:

$$P\{\xi \in [a, b)\} = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx. \tag{9.1.2}$$

Безпосередньо з рівності (9.1.1) випливає, що майже для всіх x

$$\frac{d}{dx}F(x) = p(x).$$

Щільність розподілу $p(x)$ випадкової величини невід'ємна і

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Обчислення розподілу $\boldsymbol{g(\zeta)}$ за щільністю розподілу $\boldsymbol{\zeta}$. *Нехай ζ — абсолютно неперервна випадкова величина зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ і $p(x)$ — її щільність розподілу, $g(x)$ — борелева функція на $\mathbb{R}^1$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$. Тоді*

$$P\{g(\zeta) \in B\} = \int\limits_{x:g(x)\in B} p(x)dx, \tag{9.1.3}$$

зокрема

$$P\{g(\zeta) < t\} = \int\limits_{x:g(x)<t} p(x)dx, \tag{9.1.4}$$

$$P\{\zeta \in B\} = \int\limits_B p(x)dx. \tag{9.1.5}$$

9.2 Функція і щільність розподілу випадкового вектора

Означення. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — випадкові величини на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$. Функцію $\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ називатимемо *випадковим вектором, або випадковою величиною зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.*

Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — випадкові величини, то

$$\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathfrak{F}$$

(для довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Означення. Функція

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= P\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\},$$

означена на $\mathbb{R}^n$, називається *функцією розподілу* випадкового вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Означення. Функцію

$$P_\zeta : B \to P_\zeta(B) = P\{\omega : \zeta(\omega) \in B\} =$$
$$= P\{\omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B\}, B \in \mathfrak{B}^n,$$

означену на класі борелевих множин простору $\mathbb{R}^n$, називатимемо *розподілом* випадкового вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Означення. Якщо функцію розподілу $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ випадкового вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ можна подати у вигляді

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1, \qquad (9.2.1)$$

то кажуть, що вектор $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ має *абсолютно неперервний розподіл* (вектор *абсолютно неперервний*), а функцію $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають його *щільністю розподілу, або спільною щільністю розподілу випадкових величин* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Щільність розподілу $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ випадкового вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ невід'ємна і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 = 1.$$

Обчислення розподілу $g(\zeta)$ за щільністю розподілу ζ. *Нехай $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — абсолютно неперервна випадкова величина зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — її щільність розподілу, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — борелева функція на $\mathbb{R}^n$ зі значеннями в $\mathbb{R}^l$, B — борелева множина в $\mathbb{R}^l$. Тоді*

$$P\{g(\zeta) \in B\} = \int_{x : g(x) \in B} p(x) dx, \ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (9.2.2)$$

зокрема

$$P\{\zeta \in B\} = \int\limits_B p(x)dx, \ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (9.2.3)$$

Якщо розподіл $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дискретний, то розподіл $g(\zeta)$ обчислюється за формулами (5.1.1) і (5.1.2).

Незалежні випадкові величини. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ називатимемо *незалежними*, якщо для довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^1$

$$P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\} =$$

$$= P\{\xi_1 < x_1\}P\{\xi_2 < x_2\} \ldots P\{\xi_n < x_n\}.$$

Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні абсолютно неперервні випадкові величини відповідно зі щільностями розподілів $p_1(x_1), p_2(x_2), \ldots, p_n(x_n)$, то існує спільна щільність розподілу $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, і вона дорівнює добутку щільностей розподілів $p_1(x_1)$, $p_2(x_2), \ldots, p_n(x_n)$:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2) \ldots p_n(x_n).$$

Приклад 9.2.1. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x)$:*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Виписати спільний розподіл випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$.

Розв'язання. Оскільки випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ — незалежні й абсолютно неперервні, то існує їхня спільна щільність розподілу $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, і вона дорівнює добуткові щільностей розподілів $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$ випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\right\}.$$

Приклад 9.2.2. *Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини відповідно зі щільностями $p_\xi(s)$ і $p_\eta(t)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.*

Розв'язання. Знайдемо функцію розподілу $F_\zeta(z)$ суми $\zeta = \xi + \eta$. За означенням

$$F_\zeta(z) = P\{\zeta < z\} = P\{\xi + \eta < z\}.$$

Обчислимо $P\{\xi + \eta < z\}$. Оскільки ξ і η — незалежні, то існує спільна щільність розподілу $p(s,t)$ випадкових величин ξ та η і

$$p(s,t) = p_\xi(s)p_\eta(t).$$

Далі скористаємося (9.2.2), розглянувши як x пару $(s,t) \in \in \mathbb{R}^2$, як $g(x)$ — функцію $g(s,t) = s + t$, а як множину B — проміжок $(-\infty, x)$. Маємо

$F_\zeta(z) = P\{\xi + \eta < z\} =$

$$= \int\int_{(s,t):s+t<z} p(s,t)dsdt = \int\int_{(s,t):s+t<z} p_\xi(s)p_\eta(t)dsdt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-t} p_\xi(s)ds\right)p_\eta(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} p_\xi(u-t)du\right)p_\eta(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u-t)p_\eta(t)dt\right)du.$$

Таким чином,

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u-t)p_\eta(t)dt \right) du.$$

Тому за означенням (див. (9.1.1)) функція

$$p(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u-t)p_\eta(t)dt \tag{9.2.4}$$

є щільністю розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

Щільність $p(u)$, означену рівністю (9.2.4), називають *згорткою* щільностей $p_\xi(t)$ і $p_\eta(t)$.

Приклад 9.2.3 . *Нехай $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$, — незалежні випадкові величини, кожна з функцією розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.*

Р о з в' я з а н н я. Введемо позначення

$$\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

Згідно з означенням функції розподілу випадкової величини

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\}.$$

Звідси

$$1 - F_\eta(x) = 1 - P\{\eta < x\} = P\{\eta \geq x\} =$$
$$= P\{\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \geq x\} =$$
$$= P\{\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \ldots, \xi_n \geq x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \geq x\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - F(x)) = (1 - F(x))^n$$

(ми скористалися незалежністю випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$). Отже,

$$F_\eta(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

9.3 Абсолютно неперервні розподіли на $\mathbb{R}^1$

Нормальний розподіл. Випадкова величина ξ має *нормальний розподіл із параметрами* $(a;\sigma^2)$ (*гауссів розподіл, розподіл* $N_{a;\sigma^2}$), якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Рівномірний розподіл. Випадкова величина ξ має *рівномірний розподіл на відрізку* $[a;b]$, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a;b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Гамма-розподіл. Випадкова величина ξ має *гамма-розподіл* із параметрами $(\nu;\theta)$, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\theta > 0,\ \nu > 0$.

Показниковий розподіл. Випадкова величина ξ має *показниковий розподіл* із параметром θ $(\theta > 0)$, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Показниковий розподіл є гамма-розподілом із параметрами $(1;\theta)$.

Розподіл Ерланга. Випадкова величина ξ має *розподіл Ерланга* з параметрами $(m;\theta)$, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Розподіл Ерланга є гамма-розподілом із параметрами $(m; \theta)$, $m = 1, 2, \ldots$

Розподіл $\boldsymbol{\chi^2}$. Випадкова величина ξ має *розподіл* χ^2 із n ступенями вільності, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Розподіл χ^2 із n ступенями вільності є гамма-розподілом із параметрами $(n/2; 1/2)$.

Розподіл Коші. Випадкова величина ξ має *розподіл Коші* з параметром a, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Логарифмічно нормальний розподіл. Випадкова величина ξ має *логарифмічно нормальний розподіл із параметрами* $(\mu; \sigma^2)$, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Розподіл Парето. Випадкова величина ξ має *розподіл Парето* з параметрами $(\lambda; \theta)$, якщо її щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{якщо } x > \lambda; \\ 0, & \text{якщо } x \le \lambda, \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\theta > 2$.

9.4 Задачі

АЗ: 9.2°, 9.4°(5), 9.5, 9.6, 9.12*, 9.14, 9.19, 9.23, 9.28.

СЗ: 9.1°, 9.4°(1–4, 6), 9.7, 9.10, 9.16, 9.24, 9.25, 9.29, 9.38, 9.42.

9.1°. Нехай ξ — випадкова величина зі щільністю розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [-1;1]; \\ 1-|x|, & \text{якщо } x \in [-1;1]. \end{cases}$$

Обчислити $P\{\xi^2 > 1/4\}$.

9.2°. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-1;3]$. Обчислити $P\{|\xi| \ge 1/2\}$.

9.3°. Випадкова величина ξ має розподіл зі щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Обчислити: 1) $P\{-\sqrt{3} \le \xi \le 1\}$; 2)$P\{|\xi| \ge \sqrt{3}\}$.

9.4°. На відрізок $[0;\,1]$ навмання кидають пару точок. Нехай ξ — координата однієї точки, η — іншої. Знайти функції розподілів випадкових величин:

1) $\zeta = \max\{\xi;\eta\}$; 4) $\zeta = \xi + \eta$;
2) $\zeta = \min\{\xi;\eta\}$; 5) $\zeta = \max\{\xi^2;\eta\}$;
3) $\zeta = \xi\eta$; 6) $\zeta = |\eta - \xi|$.

9.5°. На відрізок $[0, l]$ навмання кидають точку, ξ — її координата. Знайти функцію і щільність розподілу випадкової величини ξ.

9.6. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-1;3]$. Знайти функцію і щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

9.7. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-2;2]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = |\xi|$.

9.8. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 1/\xi$ (якщо $\xi = 0$, то за означенням $\eta = 0$).

9.9. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-2;1]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 1/\xi^2$.

9.10. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0;2]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = |\xi - 1|$.

9.11. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на відрізку $[a, b]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η, якщо $\eta = e^{\xi}$.

9.12*. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром λ. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 1/(1-\xi)$.

9.13. Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = -\xi$.

9.14. Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \operatorname{sign} \xi$.

9.15. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром 1. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = 1 - e^{-\xi}$.

9.16. Нехай $p(x)$ — щільність розподілу випадкової величини ξ. Знайти щільності розподілів випадкових величин 1) $\eta = |\xi|$; 2) $\eta = a\xi$, $a \neq 0$.

9.17. Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

9.18. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром λ. Знайти щільності розподілів випадкових величин: 1) $\eta = |\xi - 1|$; 2) $\eta = (\xi - 1)^3$.

9.19. Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ строго монотонна й неперервна. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = F(\xi)$.

9.20. Нехай $p(x)$ — щільність розподілу випадкової величини ξ. Знайти щільності розподілів випадкових величин: 1) $\eta = -2\xi + 1$; 2) $\eta = \xi^2$.

9.21. Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функції розподілів випадкових величин: 1) $\eta = e^{\xi}$; 2) $\eta = |\xi|$.

9.22. На відрізок $[0;1]$ навмання кидають пару точок. Нехай ξ — координата однієї, η — іншої. Для $0 \leq x \leq 1$ знайти: 1) $P\{|\eta - \xi| < x\}$; 2) $P\{\xi\eta < x\}$.

9.23. Нехай $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — незалежні випадкові величини, кожна з функцією розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини

$$\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.24. Нехай $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — незалежні випадкові величини відповідно з функціями розподілу $F_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Знайти функції розподілу випадкових величин:

$$1)\ \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};\ 2)\ \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.25. Нехай $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — незалежні випадкові величини відповідно зі щільностями розподілу $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Знайти щільності розподілів випадкових величин:

$$1)\ \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};\ 2)\ \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.26. Нехай $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — незалежні випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x)$. Знайти щільності розподілу випадкових величин:

$$1)\ \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};\ 2)\ \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.27. Випадкова величина має своєю щільністю розподілу функцію $p(x) = ae^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$. Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) функцію розподілу випадкової величини.

9.28. На відрізок $[0;1]$ навмання кидають точку, яка ділить його на дві частини. Знайти функцію розподілу довжини меншої частини.

9.29. На відрізок $[0;l]$ навмання кидають точку, яка ділить його на дві частини. Знайти розподіл довжини більшої частини.

9.30. На відрізок $[0;T]$ навмання кидають дві точки. Знайти функцію і щільність розподілу відстані між ними.

9.31. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x)$:

$$1)\, p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a;b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a;b]; \end{cases}$$

$$2)\, p(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0; \end{cases}$$

$$3)\, p(x) = \frac{1}{2a} \exp\left\{-\frac{1}{a}|x-b|\right\};$$

$$4)\, p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \exp\left\{-\dfrac{1}{a}(x-b)\right\}, & \text{якщо } x > b; \\ 0, & \text{якщо } x \le b. \end{cases}$$

Виписати спільну щільність розподілу випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

9.32. Нехай випадкова величина ξ розподілена нормально з параметрами $(0;1)$. Знайти функцію розподілу $\eta = 1/\xi$.

9.33. Нехай випадкова величина ξ розподілена нормально з параметрами $(0;1)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = 1/\xi^2$.

9.34. Випадкова величина ξ називається симетричною (симетрично розподіленою), якщо розподіли випадкових величин ξ і $-\xi$ співпадають.

Довести, що $N_{0;\sigma^2}$-розподілена випадкова величина є симетрично розподіленою.

Сформулювати умову симетричності випадкової величини в термінах: а) функції розподілу; б) щільності розподілу.

9.35. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку $[0;1]$. Знайти розподіл випадкової величини:

1) $\eta = 1 - \xi$; 2) $\eta = \ln \xi$.

9.36. Випадкова величина η розподілена $N_{a;\sigma^2}$. Довести, що випадкова величина $\xi = (\eta - a)/\sigma$ розподілена $N_{0;1}$.

9.37. Випадкова величина ξ розподілена $N_{0;1}$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = a + \sigma\xi$ $(\sigma > 0)$.

9.38. Випадкова величина η розподілена $N_{0;1}$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

9.39. Випадкова величина η розподілена $N_{0;\sigma^2}$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

9.40. Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу $F_\eta(x)$ випадкової величини $\eta = (\xi - a)^+ = \max\{0, \xi - a\}$ (a — стала).

За графіком функції розподілу $F(x)$ побудувати графік функції розподілу $F_\eta(x)$.

9.41. Випадкова величина ξ абсолютно неперервна зі щільністю $p(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = (\xi - a)^+ = \max\{0, \xi - a\}$ (a — стала).

Чи є η абсолютно неперервною випадковою величиною?

9.42. Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \min\{\xi, L\}$ (L — стала).

9.43. Випадкова величина ξ абсолютно неперервна зі щільністю $p(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \min\{\xi, L\}$ (L — стала).

Чи є η абсолютно неперервною випадковою величиною?

9.44°. За щільністю розподілу випадкової величини знайти її функцію розподілу, якщо випадкова величина:

1) нормально розподілена з параметрами $(a; \sigma^2)$;

2) рівномірно розподілена на відрізку $[a; b]$; на відрізку $[0; 1]$;

3) має гамма-розподіл;

4) має розподіл Коші;

5) має розподіл Ерланга;

6) має розподіл Парето.

9.45°. Побудувати графіки щільностей розподілів і функцій розподілів випадкових величин, перелічених у задачі 9.44°.

9.46°. Нехай ξ розподілена $N_{a;\sigma^2}$. Обчислити:

1) $P\{a - \sigma \le \xi \le a + \sigma\}$; 2) $P\{a - 2\sigma \le \xi \le a + 2\sigma\}$;

3) $P\{a - 3\sigma \le \xi \le a + 3\sigma\}$; 4) $P\{a - 4\sigma \le \xi \le a + 4\sigma\}$.

Примітка. Скористатися таблицею нормального розподілу (див. табл. 22.1.1).

9.47. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ.

Довести, що випадкова величина

$$\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

має показниковий розподіл з параметром $n\lambda$.

9.48. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти розподіл випадкової величини

$$\zeta = \max\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}.$$

9.49. Система складається з n блоків. Нехай ξ_i — час безвідмовної роботи i-го блоку. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — незалежні і кожна з них має показниковий розподіл з параметром λ. Система виходить з ладу, якщо виходить з ладу принаймні один із блоків. Знайти функцію розподілу та математичне сподівання часу безвідмовної роботи системи.

9.50. Випадкові величини $\xi_i = \xi_i(\omega)$, $i = 1, 2, 3$, задані на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ (де $\Omega = [0; 1]$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_{[0;1]}$, $P = L$) рівностями:

$$1)\ \xi_1 = \xi_1(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{якщо } \omega \in [0; 1/3); \\ \omega + 1/3, & \text{якщо } \omega \in [1/3; 2/3); \\ \omega - 1/3, & \text{якщо } \omega \in [2/3; 1]; \end{cases}$$

$$2)\ \xi_2 = \xi_2(\omega) = \begin{cases} \omega + 2/3, & \text{якщо } \omega \in [0; 1/3); \\ \omega, & \text{якщо } \omega \in [1/3; 2/3); \\ \omega - 2/3, & \text{якщо } \omega \in [2/3; 1]; \end{cases}$$

$$3)\ \xi_3 = \xi_3(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{якщо } \omega \in [0; 1/4); \\ 1/4, & \text{якщо } \omega \in [1/4; 2/4); \\ \omega - 1/4, & \text{якщо } \omega \in [2/4; 3/4); \\ 1/2, & \text{якщо } \omega \in [3/4; 1]. \end{cases}$$

Знайти їхні функції розподілу.

9.51. Випадкові величини

$$\xi_i = \xi_i(\omega),\ i = 1, 2,\ \eta_j = \eta_j(\omega),\ j = 1, 2,$$

задані на одному й тому самому ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$. Розподіли ξ_1 і ξ_2 співпадають, співпадають і розподіли η_1 і η_2. Чи будуть співпадати розподіли випадкових величин 1) $\xi_1\eta_1$ і $\xi_2\eta_2$; 2) $\xi_1 + \eta_1$ і $\xi_2 + \eta_2$?

Глава 10

Математичне сподівання

10.1 Означення, властивості, обчислення

Розподіли абсолютно неперервних випадкових величин часто можна описати кількома числовими характеристиками. Найважливішими з них є математичне сподівання і дисперсія (див. також розд. 6.1 у гл. 6).

Нехай $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$.

Означення. *Математичним сподіванням* $M\xi$ *невід'ємної випадкової величини* ξ називатимемо

$$M\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{2^n n} \frac{j-1}{2^n} P\left\{ \omega : \frac{j-1}{2^n} \le \xi(\omega) < \frac{j}{2^n} \right\} + \right.$$

$$\left. + nP\{\omega : \xi(\omega) \ge n\} \right).$$

Будь-яку випадкову величину ξ можна подати у вигляді різниці невід'ємних випадкових величин

$$\xi^+ = \max\{0, \xi\} \text{ і } \xi^- = \max\{0, -\xi\},$$

а саме

$$\xi = \xi^+ - \xi^-.$$

Математичне сподівання $M\xi$ випадкової величини ξ, яка набуває значення обох знаків, означається рівністю

$$M\xi = M\xi^+ - M\xi^-,$$

якщо тільки $M\xi^+$ і $M\xi^-$ одночасно не дорівнюють $+\infty$.

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання константи дорівнює цій самій константі:

$$M\xi = Mc = c \ (c - \text{константа}).$$

2. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих випадкових величин:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

3. Константа виноситься за знак математичного сподівання:

$$Ma\xi = aM\xi.$$

4. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta.$$

Обчислення математичного сподівання випадкової величини. Математичне сподівання випадкової величини (і функції від неї), якщо тільки воно існує, завжди можна обчислити за розподілом випадкової величини.

Теорема 10.1.1. *Нехай $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина зі значеннями в $\mathbb{R}^1$, g — борелева функція на $\mathbb{R}^1$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$.*

Якщо випадкова величина ξ *абсолютно неперервна і* $p(x)$ *— її щільність розподілу, то за умови існування інтеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$

$$Mg(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx, \tag{10.1.1}$$

зокрема за умови існування інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx. \tag{10.1.2}$$

Якщо випадкова величина ξ *дискретна з розподілом,*

$$P_\xi : x_i \to P_\xi(x_i), x_i \in X,$$

то за умови абсолютної збіжності ряду $\sum\limits_{x_i} g(x_i)P_\xi(x_i)$

$$Mg(\xi) = \sum_{x_i} g(x_i)P_\xi(x_i),$$

зокрема за умови абсолютної збіжності ряду $\sum\limits_{x_i} x_iP_\xi(x_i)$

$$M\xi = \sum_{x_i} x_iP_\xi(x_i).$$

Дисперсія. *Дисперсією* $D\xi$ випадкової величини ξ називатимемо $M(\xi-M\xi)^2$ (якщо $M(\xi-M\xi)^2 < \infty$), тобто

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Властивості дисперсії:

1. Дисперсія константи дорівнює нулеві:

$$Dc = 0 \ (c - \text{константа}).$$

2. Константа виноситься за знак дисперсії з квадратом:

$$Da\xi = a^2 D\xi.$$

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Приклад 10.1.1 . *На відрізок* $[0;1]$ *навмання кидають точку. Вона ділить відрізок на дві частини. Знайти розподіл і обчислити математичне сподівання довжини кола, радіус якого дорівнює довжині більшої частини відрізка.*

Розв'язання. Нехай ξ — координата навмання кинутої на відрізок $[0;1]$ точки, тоді $\eta = \max\{\xi, 1-\xi\}$ — довжина більшої частини відрізка, а $\zeta = 2\pi\eta$ — довжина кола, радіус якого дорівнює η.

Спочатку знайдемо функцію розподілу випадкової величини $\eta = \max\{\xi, 1-\xi\}$. Очевидно, для $x < 1/2$

$$P\{\eta < x\} = 0,$$

для $x > 1$

$$P\{\eta < x\} = 1.$$

А для $1/2 < x \le 1$ маємо

$$P\{\eta < x\} = P\{\max\{\xi, 1-\xi\} < x\} = P\{\xi < x, 1-\xi < x\} =$$

$$= P\{1 - x < \xi < x\} = (x - (1-x))/(1-0) = 2x - 1$$

($P\{1-x < \xi < x\}$ обчислена як геометрична ймовірність, оскільки точку кидають на відрізок $[0;1]$ навмання). Таким чином, функцією розподілу η є

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1/2; \\ 2x-1, & \text{якщо } 1/2 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

тобто η розподілена рівномірно на відрізку $[1/2; 1]$. Звідси отримаємо функцію розподілу ζ:

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{2\pi\eta < x\} = F_\eta\left(\frac{x}{2\pi}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x/(2\pi) \le 1/2; \\ 2\left(\frac{x}{2\pi}\right) - 1, & \text{якщо } 1/2 < x/(2\pi) \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x/(2\pi) > 1. \end{cases}$$

Або

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le \pi; \\ \frac{x}{\pi} - 1, & \text{якщо } \pi < x \le 2\pi; \\ 1, & \text{якщо } x > 2\pi. \end{cases}$$

Далі, оскільки η рівномірно розподілена на відрізку $[1/2; 1]$, то

$$M\zeta = M2\pi\eta = 2\pi M\eta = 3\pi/2.$$

Зазначимо, що $M\zeta$ можна обчислити як математичне сподівання функції $\zeta = 2\pi \max\{\xi, 1-\xi\}$ випадкової величини ξ за її розподілом (див. формулу (10.1.1). Розподіл ξ рівномірний на відрізку $[0; 1]$, тому

$$M\zeta = M2\pi \max\{\xi, 1-\xi\} = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max\{x, 1-x\} p_\xi(x) dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \max\{x, 1-x\} dx = 3\pi/2.$$

Приклад 10.1.2. *Нехай випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром λ.*

Знайти розподіл випадкової величини $\eta = [\xi]$, обчислити $M\eta$ ($[x]$ — ціла частина x).

Р о з в' я з а н н я. Випадкова величина $\eta = [\xi]$ набуває значень $0, 1, 2, \dots$ (є дискретною). Знайдемо її розподіл:

$$P_\eta(k) = P\{\eta = k\} = P\{[\xi] = k\} = P\{k \le \xi < k+1\} =$$

$$= \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = p(1-p)^k,$$

де $p = 1 - e^{-\lambda}$. Отже, $\eta = [\xi]$ має геометричний розподіл з параметром $p = 1 - e^{-\lambda}$.

За відомим розподілом випадкової величини η можемо обчислити її математичне сподівання (див. формулу (6.1.2) і задачу 6.18):

$$M\eta = \sum_{k=0}^{\infty} k P_\eta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = \frac{1-p}{p} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Приклад 10.1.3. *Обчислити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, розподіленої нормально з параметрами* $(a; \sigma^2)$.

Р о з в' я з а н н я. Щільністю нормально розподіленої з параметрами $(a; \sigma^2)$ випадкової величини ξ є

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Обчислимо $M(\xi - a)$. Скористаємося формулою (10.1.1) (при цьому виконаємо заміну $(x-a)/\sigma = t$):

$$M(\xi - a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)p(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right\} dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_n \int\limits_{[-n,n]} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = 0$$

(останній інтеграл дорівнює нулеві як інтеграл від непарної функції за симетричним проміжком). Таким чином, $M(\xi - a) = 0$, а отже,

$$M\xi = a.$$

Далі,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi - a)^2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx,$$

після заміни змінної $(x-a)/\sigma = t$ маємо

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \, d \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \sigma^2$$

(останній інтеграл як інтеграл Ейлера—Пуассона дорівнює $\sqrt{2\pi}$).

Таким чином,

$$D\xi = \sigma^2.$$

Приклад 10.1.4. *Обчислити математичне сподівання, другий момент і дисперсію випадкової величини* ξ *зі щільністю*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

($p(x)$ — *щільність гамма-розподілу з параметрами* $(\nu;\theta)$).

Розв'язання. За відомою щільністю $p(x)$ випадкової величини ξ згідно з формулою (10.1.2) отримаємо

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x\frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}\exp\{-\theta x\}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\theta\Gamma(\nu)} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\theta^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu \exp\{-\theta x\}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\theta\Gamma(\nu)}\cdot 1 = \frac{\nu\Gamma(\nu)}{\theta\Gamma(\nu)} = \frac{\nu}{\theta}.$$

Ми скористалися тим, що інтеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\theta^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu \exp\{-\theta x\}\, dx$$

дорівнює одиниці як інтеграл від щільності гамма-розподілу з параметрами $(\nu+1, \theta)$.

Аналогічно

$$M\xi^2 = \frac{\nu(\nu+1)}{\theta^2}.$$

Звідси

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{\nu}{\theta^2}.$$

Приклад 10.1.5. *Нехай ξ — абсолютно неперервна випадкова величина зі скінченним математичним сподіванням $M\xi$ і щільністю $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, графік якої симетричний відносно прямої $x = a$. Знайти $M\xi$.*

Розв'язання. Оскільки графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої $x = a$, то

$$f(a+t) = f(a-t)$$

(там, де $f(a+t)$ і $f(a-t)$ визначені). Остання рівність означає, що функція $f(a+t)$ є парною.

Далі,

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну $x = t + a$. Маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t+a)f(t+a)dt =$$

$$= a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t+a)dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t+a)dt = a \cdot 1 + 0 = a.$$

Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t+a)dt$ дорівнює нулеві як інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку.

Отже, якщо ξ — абсолютно неперервна випадкова величина зі скінченним математичним сподіванням $M\xi$ і щільністю $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, графік якої симетричний відносно прямої $x = a$, то

$$M\xi = a.$$

10.2 Задачі

АЗ: 10.1°(2), 10.2°(1), 10.6°(1), 10.7, 10.12, 10.13, 10.16, 10.19(1а), 10.19(3б), 10.21, 10.20(5).

СЗ: 10.1°(1), 10.2°(2), 10.6°(2, 3), 10.8, 10.10(1), 10.16(1), 10.14, 10.17(2), 10.19(1б), 10.19(3а), 10.20(1, 2), 10.22(2, 3), 10.26.

10.1°. Нехай ξ — випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку: 1) $[-a;a]$; 2) $[a;b]$. Обчислити $M\xi$ і $D\xi$.

10.2°. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на проміжку $[0;1]$. Обчислити математичне сподівання випадкової величини η: 1) $\eta = \ln(1/\xi)$; 2) $\eta = \sin^2 \pi\xi$; 3) $\eta = e^{\xi}$.

10.3°. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на проміжку $[a;b]$. Обчислити:

1) $M\xi^2$, якщо $a=0$, $b=3$;
2) $M\xi e^{-\xi}$, якщо $a=0$, $b=1$;
3) $M(\xi-1)^2$, якщо $a=1$, $b=4$;
4) $M\xi e^{|\xi|}$, якщо $a=-1$, $b=1$;
5) $Me^{2\xi}$, якщо $a=0$, $b=1/2$.

10.4. Нехай ξ — випадкова величина зі щільністю розподілу

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Обчислити 1) $M\min\{|\xi|, 1\}$; 2) $M\min\{|\xi|, \sqrt{3}\}$.

10.5. Нехай ξ — нормально розподілена випадкова величина з параметрами $(0;\sigma^2)$. Обчислити Me^{ξ}.

10.6°. Нехай ξ — випадкова величина зі щільністю розподілу

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Обчислити математичне сподівання випадкової величини η:

1) $\eta = (\xi^2+1)I_{[0;\sqrt{3}]}(\xi)$; 2) $\eta = \xi^2 I_{[1;\sqrt{3}]}(\xi)$;
3) $\eta = I_{[1/3;3]}(\xi^2)$; 4) $\eta = I_{[-1;1]}(\xi)$

де $I_A(x)$ — індикатор множини A — функція, яка на A набуває значення 1, а на $\overline{A}$ — значення 0.

10.7. Нехай ξ має показниковий розподіл з параметром λ. Обчислити: 1) $M\xi$; 2) $D\xi$; 3) $P\{\xi > 1\}$; 4) $M\xi^k$.

10.8. Тривалість роботи електронної лампи (одиниця виміру часу — доба) — випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,003$. Через рік лампу замінюють, навіть якщо вона не вийшла з ладу. Знайти математичне сподівання часу роботи лампи.

10.9. Знайти математичне сподівання і дисперсію добутку $\zeta = \xi\eta$ незалежних випадкових величин ξ і η з рівномірними розподілами на відрізках $[0;1]$ і $[1;3]$ відповідно.

10.10°. Нехай ξ — випадкова величина зі щільністю розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a, a+2); \\ x - a, & \text{якщо } x \in [a, a+1); \\ -x + a + 2, & \text{якщо } x \in [a+1, a+2). \end{cases}$$

Обчислити: 1) $M\xi$; 2) $M\xi^2$.

10.11. Нехай ξ — випадкова величина зі щільністю розподілу

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Обчислити $MI_{[0;4]}(\xi^2)$.

10.12. Щільністю розподілу випадкової величини ξ є

$$p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \ \lambda > 0$$

(двосторонній показниковий розподіл з параметром λ). Обчислити $M\xi$ і $D\xi$.

10.13. З точки A, що рівномірно розподілена на колі радіуса R з центром у початку координат, проведено дотичну до кола. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу довжини ξ відрізка дотичної між точкою A і точкою перетину цієї дотичної з віссю Ox. Чи існує $M\xi$?

10.14. Точка P рівномірно розподілена в крузі радіуса R. Нехай η — відстань від точки P до центра круга.

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і щільність розподілу $p(x)$ випадкової величини η. Побудувати графіки функцій $F(x)$ та $p(x)$. Обчислити $M\eta$ і $D\eta$.

10.15. Точка A рівномірно розподілена на колі одиничного радіуса з центром у початку координат. Нехай ξ — проекція точки A на вісь Ox.

Знайти: 1) функцію розподілу $|\xi|$; 2) щільність розподілу $|\xi|$; 3) $M|\xi|$; 4) обчислити $P\{|\xi| > 1/2\}$.

10.16. Довжина сторони квадрата ξ — випадкова величина, яка

1) розподілена рівномірно на проміжку $[a; b]$, $a > 0$, $a < b$;

2) має гамма-розподіл з параметрами $(\nu; \theta)$;

3) розподілена показниково з параметром λ.

Знайти розподіл випадкової величини η — площі квадрата зі стороною ξ — й обчислити її математичне сподівання.

10.17. Радіус кола ξ — випадкова величина, яка

1) розподілена рівномірно на проміжку $[a; b]$, $a > 0$, $a < b$;

2) має гамма-розподіл з параметрами $(\nu; \theta)$;

3) розподілена показниково з параметром λ.

Знайти розподіл випадкової величини η — довжини кола радіуса ξ — й обчислити її математичне сподівання.

10.18. Довжина ребра куба ξ — випадкова величина, розподілена:

1) рівномірно на проміжку $[a; b]$, $a > 0$, $a < b$;

2) показниково з параметром λ.

Знайти розподіл випадкової величини η — об'єму куба з ребром ξ, обчислити математичне сподівання η.

10.19. На відрізок $[0; 1]$ навмання кидають точку. Вона ділить його на дві частини.

Знайти розподіл й обчислити математичне сподівання випадкової величини η.

1. Довжини кола, радіус якого дорівнює довжині: а) меншої частини відрізка; б) більшої частини відрізка.

2. Площі круга, радіус якого дорівнює довжині: а) меншої частини відрізка; б) більшої частини відрізка.

3. Площі квадрата зі стороною, що дорівнює довжині: а) меншої частини відрізка; б) більшої частини відрізка.

4. Об'єму куба з ребром, що дорівнює довжині:
а) меншої частини відрізка; б) більшої частини відрізка.

10.20. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини. Обчислити математичні сподівання випадкових величин: 1° $\min\{\xi,\eta\}$; 2° $\max\{\xi,\eta\}$; 3° $\xi\eta$; 4° $\eta/(\xi+1)$; 5° $\eta\exp\{\xi\}$; 6° $\exp\{-\min\{\xi,\eta\}\}$, якщо: а) ξ і η розподілені рівномірно на проміжку $[0;1]$; б) ξ розподілена рівномірно на проміжку $[0;1]$, η — на проміжку $[0;2]$; в) ξ розподілена рівномірно на проміжку $[0;1]$, η має показниковий розподіл з параметром λ; г) ξ і η мають показниковий розподіл з параметром λ (для 1°, 2°, 3°, 6°).

10.21. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має своєю щільністю розподілу

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le\alpha;\\ \exp\{\alpha-x\}, & \text{якщо } x>\alpha.\end{cases}$$

Обчислити $M\min\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$.

10.22. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких розподілена рівномірно на відрізку $[a;b]$.

Обчислити математичні сподівання випадкових величин:

1) $\min\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$; 2) $\max\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$; 3) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$.

10.23. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має своєю щільністю розподілу

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\notin[\theta-h;\theta+h];\\ 1/2h, & \text{якщо } x\in[\theta-h;\theta+h].\end{cases}$$

Обчислити математичні сподівання випадкових величин:

$$1)\ \min\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\};\ 2)\ \max\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\};$$

$$3)\ (\max\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}-\min\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\})/2.$$

10.24. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має своєю щільністю розподілу

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le\theta;\\ \dfrac{1}{\alpha}\exp\left\{-\dfrac{1}{\alpha}(x-\theta)\right\}, & \text{якщо } x>\theta.\end{cases}$$

Обчислити математичні сподівання випадкових величин:

$$1)\, \overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i;\ \ 2)\ \min\{\xi_i\};$$

$$3)\, \hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\} - \frac{\overline{\xi} - \min\{\xi_i\}}{n};\ \ 4)\, \hat{\theta}_2 = \overline{\xi} - \hat{\theta}_1.$$

10.25. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ розподілені показниково з параметром $1/\theta$.

Обчислити математичне сподівання випадкової величини $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$.

10.26. На відрізок $[0; T]$ навмання кидають дві точки. Нехай ξ — відстань між ними. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу ξ, обчислити $M\xi$, $D\xi$, $M\xi^n$.

10.27. Точка P рівномірно розподілена на колі

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Нехай η — довжина проекції радіус-вектора $\overline{OP}$ точки P на вісь Ox. Знайти щільність розподілу й математичне сподівання випадкової величини η.

10.28*. На колі радіуса R навмання вибирають дві точки. Знайти функцію розподілу відстані η між ними і обчислити $M\eta$.

10.29. На відрізок осі ординат з кінцями $(0; 0)$ і $(0; R)$ навмання кинуто точку, ордината якої рівномірно розподілена в інтервалі $(0; R)$. Через цю точку проведено хорду кола $x^2 + y^2 = R^2$ перпендикулярно до осі Oy. Знайти функцію розподілу довжини цієї хорди.

10.30*. Нехай $A_x = \{(u, v) : u + v < x\}$ — множина в $\mathbb{R}^2$, x — довільне, але фіксоване число.

Обчислити $MI_{A_x}(\xi, \eta)$, якщо відомо:

1) розподіл Q вектора $\zeta = (\xi, \eta)$;

2) розподіли F і G незалежних випадкових величин ξ і η;

3) щільності f і g абсолютно неперервних незалежних випадкових величин ξ і η.

10.31. Випадкова величина η розподілена $N_{0;1}$. Обчислити математичне сподівання випадкової величини $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

10.32. Випадкова величина η розподілена $N_{0;\sigma^2}$. Обчислити математичне сподівання випадкової величини $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

10.33. Обчислити математичне сподівання, другий момент і дисперсію випадкової величини ξ зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\theta > 0$ ($p(x)$ — щільність показникового розподілу з параметром θ).

10.34. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і другий момент випадкової величини ξ зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\left\{-\theta x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

параметр $\theta > 0$ ($p(x)$ — щільність розподілу Ерланга з параметрами $(m; \theta)$, $m = 1, 2, \ldots$).

10.35. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і другий момент випадкової величини ξ зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

($p(x)$ — щільність χ^2-розподілу з n ступенями вільності).

10.36. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і другий момент випадкової величини ξ зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

параметр $\sigma > 0$ ($p(x)$ — щільність логарифмічно нормального розподілу з параметрами $(\mu; \sigma^2)$).

10.37. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і другий момент випадкової величини ξ зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{якщо } x > \lambda > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \leq \lambda, \end{cases}$$

параметр $\theta > 2$ ($p(x)$ — щільність розподілу Парето з параметрами $(\lambda; \theta)$).

10.38. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, причому ξ розподілена рівномірно на відрізку $[1; 2]$, η має показниковий розподіл з параметром θ. Знайти математичні сподівання і дисперсії випадкових величин:

$$1)\, \zeta_1 = \xi\eta;\ \ 2)\, \zeta_2 = \xi + \eta;\ \ 3)\, \zeta_3 = \eta/\xi.$$

10.39. Точка A рівномірно розподілена на колі одиничного радіуса з центром у початку координат. Нехай ξ — проекція точки A на вісь Ox.

Знайти: 1) функцію розподілу ξ; 2) щільність розподілу ξ; 3) $M\xi$; 4) обчислити $P\{\xi > 1/2\}$.

10.40. Нехай $\zeta = (\xi, \eta)$ — абсолютно неперервний вектор зі щільністю $f_\zeta(x, y)$. Обчислити $M\xi$, $M\eta$.

10.41. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні однаково розподілені (кожна з розподілом F) випадкові величини зі значеннями в $\mathbb{R}^1$,

$$\mathbb{R}^1 = \bigcup_{i=1}^{r} X_i,\ X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j,$$

ν_i — число випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, що потрапили до X_i, $p_i = F(X_i)$ — ймовірність, того, що ξ_k потрапить до X_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Обчислити

$$M\nu_i,\ D\nu_i,\ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Глава 11

Згортка

11.1 Згортка ймовірнісних розподілів

Означення. *Імовірнісним розподілом* на $\mathbb{R}^1$ називатимемо невід'ємну, нормовану, зліченноадитивну функцію F на σ-алгебрі $\mathfrak{B}^1$ борелевих множин $\mathbb{R}^1$.

Інакше кажучи, імовірнісний розподіл на $\mathbb{R}^1$ — це ймовірність на σ-алгебрі $\mathfrak{B}^1$ (див. розд. 7.2 у гл. 7).

Означення. Нехай F — імовірнісний розподіл на $\mathbb{R}^1$. Функцію точки $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, означену рівністю

$$F(x) = F((-\infty, x)),$$

називатимемо *функцією розподілу* F.

Розподіл F однозначно визначається своєю функцією розподілу $F(x)$.

Означення. Якщо функцію розподілу $F(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

то розподіл F називають *абсолютно неперервним*, а функцію f — *щільністю розподілу* F.

Імовірнісний розподіл F називатимемо *дискретним*, якщо існує не більше ніж зліченна множина $X \subset \mathbb{R}^1$

точок x_i, таких, що

$$F(\{x_i\}) > 0, \sum_{x_i \in X} F(\{x_i\}) = 1,$$

точки x_i називатимемо *атомами розподілу* F і казатимемо, що розподіл F зосереджений на множині X.

Нагадаємо, що інтеграл Лебега

$$\int_X g(y) F(dy)$$

від функції $g(y)$ за розподілом F дорівнює

$$\int_X g(y) f(y) dy,$$

якщо F — абсолютно неперервний розподіл зі щільністю f, і

$$\sum_{x_i \in X} g(x_i) F(\{x_i\}),$$

якщо F — дискретний розподіл, зосереджений на множині X.

Згортки. Нехай φ — борелева функція на $\mathbb{R}^1$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ і F — імовірнісний розподіл на $\mathbb{R}^1$.

Означення. *Згорткою* функції φ з імовірнісним розподілом F називатимемо функцію $u(x)$, означену для кожного $x \in \mathbb{R}^1$ рівністю

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x-y) F(dy).$$

Позначатимемо згортку φ з F так:

$$u = F * \varphi.$$

Означення. *Згорткою ймовірнісних розподілів G і F* називатимемо ймовірнісний розподіл Q, функція розподілу $Q(x)$ якого є згорткою функції розподілу $G(x)$ з розподілом F:

$$Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)F(dy).$$

Позначатимемо згортку ймовірнісного розподілу G з імовірнісним розподілом F символом $F * G$.

Зазначимо, що коли розподіл F абсолютно неперервний і f — його щільність, то

$$Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)F(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)f(y)dy. \quad (11.1.1)$$

У класі ймовірнісних розподілів операція згортки комутативна й асоціативна. Інакше кажучи, якщо F, G, Q — імовірнісні розподіли, то

$$F * G = G * F,$$

$$(F * G) * Q = F * (G * Q).$$

Якщо хоча б один з імовірнісних розподілів абсолютно неперервний, то їхня згортка також абсолютно неперервна. Більш того, має місце таке твердження.

Теорема. *Згортка $V = F*G$ абсолютно неперервного ймовірнісного розподілу G з імовірнісним розподілом F є абсолютно неперервним розподілом і його щільність v є згорткою щільності g розподілу G з розподілом F:*

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x-t)F(dt). \quad (11.1.2)$$

Зокрема, якщо F і G — абсолютно неперервні, то теорему можна сформулювати так:

Згортка абсолютно неперервних імовірнісних розподілів G і F відповідно зі щільностями g і f є абсолютно неперервним розподілом, і його щільність v дорівнює *згортці щільностей g і f:*

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^1} g(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^1} f(x-y)g(y)dy. \qquad (11.1.3)$$

Згортку щільностей g і f позначатимемо так

$$v = f * g = g * f.$$

Приклад 11.1.1. *Довести, що клас гамма-розподілів замкнений відносно операції згортки, а саме:*

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta} = f_{\nu+\mu;\theta}.$$

Розв'язання. Щільністю гамма-розподілу з параметрами $(\nu;\theta)$ є

$$f_{\nu;\theta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\theta > 0$, $\nu > 0$.

Коли $x \le 0$, рівність $f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta} = f_{\nu+\mu;\theta}$ очевидна.

При $x > 0$ маємо

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta}(x) = \int_0^{+\infty} f_{\nu;\theta}(x-y) f_{\mu;\theta}(y)dy =$$

$$= \int_0^x f_{\nu;\theta}(x-y) f_{\mu;\theta}(y)dy =$$

$$= \int_0^x \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)}(x-y)^{\nu-1} e^{-\theta(x-y)} \frac{\theta^\mu}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1} e^{-\theta y} dy =$$

$$= \frac{\theta^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} e^{-\theta x} \int_0^x (x-y)^{\nu-1} y^{\mu-1} dy.$$

В останньому інтегралі виконаємо заміну $y = xt$:

$$\frac{\theta^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} e^{-\theta x} \int\limits_0^x (x-y)^{\nu-1} y^{\mu-1} dy =$$

$$= \frac{\theta^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu+\mu)} x^{\nu+\mu-1} e^{-\theta x} \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1} dt =$$

$$= f_{\nu+\mu;\theta}(x) \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1} dt.$$

Таким чином,

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta}(x) = f_{\nu+\mu;\theta}(x) \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1} dt.$$

Оскільки $f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta}$ і $f_{\nu+\mu;\theta}$ — щільності, то зінтегрувавши останню рівність по прямій дістанемо

$$\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1} dt = 1.$$

Отже,

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta} = f_{\nu+\mu;\theta}.$$

11.2 Розподіл суми незалежних випадкових величин

Наступне твердження встановлює зв'язок між згорткою ймовірнісних розподілів і розподілом суми незалежних випадкових величин.

Теорема. *Функція розподілу суми незалежних випадкових величин дорівнює згортці функцій розподілів доданків.*

Інакше кажучи, *якщо ξ і η — незалежні випадкові величини з розподілами F і G відповідно, а $Q(x)$ — функція розподілу суми, то*

$$Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)F(dy).$$

Звідси і з формул (11.1.2), (11.1.3) дістаємо таке твердження:

Сума незалежних випадкових величин, хоча б одна з яких абсолютно неперервна, є абсолютно неперервною випадковою величиною, і її щільність розподілу дорівнює згортці щільності розподілу абсолютно неперервної випадкової величини з розподілом іншої.

Щільність розподілу суми незалежних абсолютно неперервних випадкових величин дорівнює згортці щільностей розподілів доданків. Інакше кажучи, якщо ξ і η — незалежні абсолютно неперервні випадкові величини зі щільностями $p_\xi(t)$ і $p_\eta(t)$ відповідно, то щільність $u(x)$ розподілу суми $\xi + \eta$ дорівнює згортці щільностей $p_\xi(t)$ і $p_\eta(t)$, тобто

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} p_\xi(x-y)p_\eta(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^1} p_\eta(x-y)p_\xi(y)dy. \quad (11.2.1)$$

За тих самих припущень щільністю розподілу $v(x)$ різниці $\zeta = \xi - \eta$ є

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} p_\xi(x+y)p_\eta(y)dy. \quad (11.2.2)$$

Приклад 11.2.1. *Нехай ξ та η — незалежні випадкові величини, кожна з яких рівномірно розподілена на $[0;1]$.*

Знайти:
1° *щільність розподілу суми* $\zeta = \xi + \eta$*;*
2° *функцію розподілу суми* $\zeta = \xi + \eta$*;*
3° *імовірність* $P\{|\xi + \eta - 1/2| < 1\}$*.*

Р о з в' я з а н н я. 1° За відомими щільностями розподілів випадкових величин ξ і η:

$$f_\xi(y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y \in [0;1]; \\ 0, & \text{якщо } y \notin [0;1], \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y \in [0;1]; \\ 0, & \text{якщо } y \notin [0;1], \end{cases}$$

щільність розподілу суми $\zeta = \xi + \eta$ дістаємо як згортку щільностей доданків (див. (11.2.1)):

$$f_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\xi(x-y) f_\eta(y)dy = \int\limits_0^1 f_\xi(x-y)dy = \int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt$$

(скористалися заміною змінної $x - y = t$). Обчисливши останній інтеграл для кожного значення $x \in \mathbb{R}^1$, дістаємо:

якщо $x < 0$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{x} 0dt = 0$;

якщо $0 \le x < 1$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} 1dt = x$;

якщо $0 \le x - 1 < 1$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{1} 1dt + \int\limits_{1}^{x} 0dt = 2 - x$;

якщо $x - 1 \ge 1$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{x} 0dt = 0$.

Таким чином, щільністю розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$ є

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \le x < 1; \\ 2 - x, & \text{якщо } 1 \le x < 2; \\ 0, & \text{якщо } x \ge 2. \end{cases}$$

2° Функцію розподілу $F_\zeta(x)$ випадкової величини ζ за її щільністю $f_\zeta(t)$ дістаємо так:

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\zeta(t)dt =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0, & \text{якщо } x < 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} tdt = x^2/2, & \text{якщо } x \in [0,1); \\ \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)dt = -(x-2)^2/2 + 1, & \text{якщо } x \in [1,2); \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{2} (2-t)dt = 1, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

3° За відомою щільністю розподілу $f_\zeta(t)$ випадкової величини ζ імовірність того, що значення ζ потраплять до множини B, обчислюється так:

$$P\{\zeta \in B\} = \int\limits_{B} f_\zeta(t)dt$$

(див. формулу (9.1.5)). Зокрема,

$$P\{|\xi + \eta - 1/2| < 1\} = P\{|\zeta - 1/2| < 1\} =$$
$$= P\{-1/2 < \zeta < 3/2\} =$$
$$= \int\limits_{-1/2}^{3/2} f_\zeta(t)dt = \int\limits_{-1/2}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{3/2} (2-t)dt = \frac{7}{8}.$$

Приклад 11.2.2 . *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких розподілена $N_{0;1}$. Знайти розподіл випадкової величини*

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Спочатку встановимо, що коли ξ розподілена $N_{0;1}$, то $\eta = \xi^2$ має гамма-розподіл з параметрами $(1/2; 1/2)$. Справді

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{\xi^2 < x\}.$$

При $x \le 0$ значення $F_\eta(x) = P\{\xi^2 < x\}$ дорівнює нулеві, а при $x > 0$

$$F_\eta(x) = P\{|\xi| < \sqrt{x}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\{-t^2/2\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x s^{-1/2} e^{-s/2} ds = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int\limits_0^x s^{1/2-1} e^{-s/2} ds$$

(скористалися заміною $t^2 = s$ і рівністю $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$). Таким чином,

$$F_\eta(x) = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int\limits_0^x s^{1/2-1} e^{-s/2} ds,$$

а це є функція гамма-розподілу з параметрами $(1/2; 1/2)$.

Далі, оскільки гамма-розподіл замкнений відносно операції згортки (див. приклад 11.1.1), то сума n незалежних гамма-розподілених з параметрами $(1/2; 1/2)$ випадкових величин є гамма-розподілена випадкова величина з параметрами $(n/2; 1/2)$.

Гамма-розподіл з параметрами $(n/2; 1/2)$ ще називають χ^2-розподілом з n ступенями вільності.

11.3 Задачі

АЗ: $11.2(1), 11.4(1,3), 11.13(1), 11.17.$
СЗ: $11.2(2,3), 11.3, 11.4(2,6), 11.13(2), 11.18.$

11.1. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини; ξ розподілена рівномірно на проміжку $[0;1]$, η має своїм розподілом $P_\eta(k) = P\{\eta = k\} = 1/2$, $k = 0,1$. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

11.2. Випадкові величини ξ та η незалежні й розподілені рівномірно на проміжку: 1) $[a;b]$, $a < b$; 2) $[0;a]$, $a > 0$; 3) $[-a;a]$, $a > 0$; 4) $[-1/2;1/2]$.

Знайти щільність розподілу суми $\zeta = \xi + \eta$.

11.3. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені відповідно на проміжках $[0;1]$ і $[0;2]$. Знайти щільність розподілу $p(x)$ суми $\zeta = \xi + \eta$.

11.4. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини; ξ розподілена рівномірно на проміжку $[-1;1]$, η — на проміжку $[0;1]$.

Обчислити:

1) $P\{\xi^2 + \eta > 1/2\}$;
2) $P\{\xi + \eta > 1\}$;
3) $P\{|\xi + \eta| > 1/2\}$;
4) $P\{|\eta - \xi| < 1/2\}$;
5) $P\{\eta^2 - \xi > 0\}$;
6) $P\{|\xi| + \eta > 1\}$.

11.5. Випадкові величини ξ і η — незалежні й розподілені рівномірно на проміжку: 1) $[a;b]$, $a < b$; 2) $[0;a]$, $a > 0$; 3) $[-a;a]$, $a > 0$; 4) $[0;1]$.

Знайти щільність розподілу $p_\zeta(x)$ різниці $\zeta = \xi - \eta$.

11.6. На відрізок $[0;1]$ навмання кидають дві точки. Нехай ξ — координата однієї точки, η — іншої. Знайти функцію розподілу координати середини відрізка з кінцями ξ і η.

11.7. Нехай ξ — координата точки, навмання кинутої на відрізок $[0;1]$, η — число очок, що випали в результаті підкидання симетричного грального кубика. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

11.8. На відрізок $[0;1]$ навмання кидають дві точки,

ξ — координата однієї точки, η — іншої. Для $0 < x < 1$ знайти $P\{|\eta - \xi| < x\}$.

11.9. Координати кожної з двох випадково вибраних на відрізку $[0;1]$ точок розподілені рівномірно. Знайти математичне сподівання відстані між ними.

11.10. Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини зі щільностями

$$p_i(x) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0; \end{cases}$$

$\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 \ne \lambda_2$.

Знайти щільності розподілів: 1) суми $\xi_1 + \xi_2$; 2) різниці $\xi_2 - \xi_1$.

11.11. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, розподілені показниково з одним і тим самим параметром λ. Знайти щільності розподілів випадкових величин: 1) $\xi + \eta$; 2) $\xi - \eta$; 3) $|\xi - \eta|$.

11.12. Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини, розподілені показниково відповідно з параметрами 1 і 2. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\xi_1 + \xi_2$.

11.13. Нехай ξ і η — незалежні однаково розподілені випадкові величини зі щільностями $p(x) = \exp\{-|x|\}/2$. Знайти щільності розподілів випадкових величин: 1) $\xi + \eta$; 2) $\xi - \eta$.

11.14. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини; ξ розподілена рівномірно на проміжку $[-a; a]$, η має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

11.15. Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини; ξ_1 розподілена рівномірно на проміжку $[-1; 1]$, ξ_2 має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

11.16. Випадкова величина η рівномірно розподілена на проміжку $[-h; h]$, ξ має своєю функцією розподілу $F(x)$, ξ і η — незалежні. Знайти функцію розподілу й щільність розподілу (якщо вона існує) суми $\zeta = \xi + \eta$.

11.17. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини. Випадкова величина ξ має розподіл

$$P\left\{\xi = (-1)^k\right\} = G\left(\{(-1)^k\}\right) = 1/2, \ k = 0, 1,$$

а η — розподіл Q. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

11.18. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини; ξ розподілена рівномірно на проміжку $[0; 1]$, η має своїм розподілом

$$P\{\eta = k\} = (1/4)^k (3/4)^{1-k},\ k = 0, 1.$$

Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

11.19. Знайти розподіл суми n незалежних випадкових величин, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ. Порівняйте її зі щільністю розподілу Ерланга (див. 9.3).

11.20. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні рівномірно розподілені на $[0; 1]$ випадкові величини. Знайти функцію розподілу випадкової величини

$$\eta = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n.$$

Обчислити $M\eta$.

11.21. Незалежні випадкові величини ξ і η — мають гамма-розподіли з параметрами (ν, θ) і (μ, θ). Знайти щільність розподілу випадкової величини $\xi + \eta$.

11.22. Нехай випадкові величини ξ і η — незалежні й мають χ^2-розподіли відповідно з n і m ступенями вільності. Довести, що випадкова величина $\xi + \eta$ має χ^2-розподіл з $n + m$ ступенями вільності.

11.23. Випадкові величини ξ і η незалежні, ξ має гамма-розподіл з параметрами (ν, θ), η — показниково розподілена з параметром θ. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

11.24. Нехай ξ — координата точки, яку кинули навмання на відрізок $[0; 1]$, а η — число гербів, що випали під час підкидання симетричної монети. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

11.25. Нехай F і Q — імовірнісні розподіли на $\mathbb{R}^1$, $u(s)$ — обмежена функція на $\mathbb{R}^1$. Довести, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x + y)(F \times Q)(d(x, y)) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} u(s)(F * Q)(ds).$$

Глава 12

Збіжність розподілів

12.1 Означення. Приклади

Ми розглядатимемо ймовірнісні розподіли на $\mathbb{R}^1$ (див. розд. 11.1 в гл. 11).

Для розподілу F і його функції розподілу

$$F(x) = F((-\infty, x))$$

має місце співвідношення

$$F([a; b)) = F(b) - F(a)$$

(при $a < b$).

Значення $F(\{x_0\})$ розподілу F на одноточковій множині $\{x_0\}$ через функцію розподілу $F(x)$ обчислюється так:

$$F(\{x_0\}) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0).$$

Означення. Розподіл F на $\mathbb{R}^1$ називатимемо *власним імовірнісним розподілом* (імовірнісним розподілом), якщо $F(\mathbb{R}^1) = 1$, і *невласним*, якщо $F(\mathbb{R}^1) < 1$. У термінах функції розподілу: F — власний імовірнісний розподіл, якщо $F(+\infty) = 1$ і $F(-\infty) = 0$; F — невласний імовірнісний розподіл, якщо має місце хоча б одна з нерівностей $F(+\infty) < 1$ або $F(-\infty) > 0$.

Невласні ймовірнісні розподіли природно виникають як границі послідовностей імовірнісних розподілів.

Означення. Точку x_0 називатимемо *атомом розподілу* F, якщо $F(\{x_0\}) > 0$. Розподіл F називатимемо *атомічним*, якщо він зосереджений на множині своїх атомів.

Означення. Інтервал I вигляду $[a; b)$ (скінченний або нескінченний) називатимемо *інтервалом неперервності* розподілу F, якщо точки a і b не є атомами розподілу F.

Означення. Послідовність розподілів $\{F_n\}$ *збігається до розподілу* F, коли $n \to \infty$, якщо

$$F_n(I) \to F(I)$$

для кожного скінченного інтервалу неперервності I розподілу F, позначатимемо це так:

$$F_n \to F$$

або

$$\lim_n F_n = F.$$

Якщо при цьому F — власний імовірнісний розподіл, то казатимемо, що послідовність $\{F_n\}$ *збігається до* F *власно*, якщо F — невласний імовірнісний розподіл, то — *невласно*.

Часто корисними є такі достатні умови збіжності розподілів:

1° *Якщо послідовність функцій розподілів* $\{F_n(x)\}$ *збігається до функції розподілу* $F(x)$ *у кожній точці неперервності останньої, то послідовність розподілів* $\{F_n\}$ *збігається до розподілу* F *(власно чи невласно).*

2° *Власні ймовірнісні розподіли* F_σ *з одним і тим самим середнім* a *і дисперсією* σ^2*, що прямує до* 0*, збігаються до власного атомічного розподілу, зосередженого у точці* a*.*

Приклад 12.1.1. *Нехай* $\{F_n\}$ *— послідовність розподілів із функціями розподілу*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x < 0; \\ nx, & \textit{якщо } 0 \le x \le 1/n; \\ 1, & \textit{якщо } x > 1/n. \end{cases}$$

Дослідити послідовність $\{F_n\}$ *на збіжність.*

Р о з в' я з а н н я. Доведемо, що коли $n \to \infty$, послідовність функцій $\{F_n(x)\}$ збігається до функції

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

атомічного розподілу, зосередженого в точці $x = 0$, у кожній точці, крім точки $x = 0$ (точка $x = 0$ є точкою розриву $F(x)$).

Справді, за умовою для довільної, але фіксованої точки x, що лежить ліворуч від нуля, при кожному n має місце рівність $F_n(x) = 0$, тому $\lim\limits_n F_n(x) = 0 = F(x)$. Для довільної, але фіксованої точки x, що лежить праворуч від нуля, починаючи з деякого N $(n \ge N)$ справджується нерівність $1/n < x$. Тому для $n \ge N$ значення $F_n(x)$ дорівнює 1, і отже, $\lim\limits_n F_n(x) = 1 = F(x)$. Таким чином, коли $n \to \infty$,

$$F_n(x) \to F(x)$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}^1$ за винятком, можливо, точки 0. Звідси, згідно з достатньою умовою 1° збіжності розподілів, маємо

$$F_n \to F,$$

коли $n \to \infty$.

Отже, послідовність розподілів $\{F_n\}$ збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці 0.

Приклад 12.1.2. *Нехай $\{Q_n\}$ — послідовність розподілів зі щільностями*

$$q_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-(-1)^n)^2 n^2}{2}\right\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Дослідити послідовність $\{Q_n\}$ на збіжність.

Р о з в' я з а н н я. За достатньою умовою збіжності 2° для парних n послідовність розподілів $\{Q_n\}$ збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці 1, а для непарних — до власного атомічного розподілу, зосередженого у точці -1. Тому послідовність $\{Q_n\}$ не є збіжною.

Приклад 12.1.3. *Нехай F_h — імовірнісні розподіли зі щільностями*

$$f_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2h^2}\right\}.$$

Дослідити F_h на збіжність 1° коли $h \to \infty$; 2° коли $h \to 0$.

Р о з в' я з а н н я. 1° Зазначимо, що функція $F(x) = c$, $x \in \mathbb{R}^1$, де c — константа з проміжку $[0;1]$, є функцією невласного ймовірнісного розподілу, який тотожно дорівнює нулеві. Справді, значення $F([a;b))$ розподілу F на проміжку $[a;b)$ дорівнює $F(b) - F(a) = 0$, тому $F(A) = 0$ і на множинах A з алгебри $\mathfrak{A}$ скінченних об'єднань неперетинних проміжків вигляду $[a;b)$ (a і b не обов'язково мають бути скінченними), а отже, і на борелевих множинах, оскільки $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}^1$. Тому, якщо послідовність $\{F_n(x)\}$ функцій розподілів збігається до функції $F(x) = c$ (c — константа з проміжку $[0;1]$), то F_h при $h \to \infty$ збігається до розподілу F, який тотожно дорівнює нулеві.

Далі,

$$F_h(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_h(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2h^2}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/h} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

(ми скористалися заміною змінної $(t-a)/h = u$). Для кожного фіксованого x

$$\lim_{h\to\infty} F_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \frac{1}{2}.$$

Тому F_h при $h \to \infty$ збігається до розподілу, який тотожно дорівнює нулеві.

2° Коли $h \to 0$ сім'я розподілів F_h збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці a (за достатньою умовою збіжності до атомічного розподілу).

Означення. Послідовність розподілів $\{F_n\}$ *слабко збігається до розподілу F при $n \to \infty$ відносно класу функцій U*, якщо для кожної функції $u \in U$

$$\int_{\mathbb{R}^1} u(x) F_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^1} u(x) F(dx) \text{ при } \ n \to \infty.$$

Далі позначатимемо через $C(-\infty; +\infty)$ — клас неперервних обмежених функцій на $\mathbb{R}^1$; через $C_0[-\infty; +\infty]$ — клас неперервних обмежених функцій, для яких

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0, \ \lim_{x \to -\infty} u(x) = 0.$$

Теорема 12.1.1. *Зі збіжності (власної чи невласної) послідовності ймовірнісних розподілів $\{F_n\}$ до розподілу F випливає слабка збіжність $\{F_n\}$ до F відносно класу $C_0[-\infty; +\infty]$ і навпаки.*

Із власної збіжності ймовірнісних розподілів $\{F_n\}$ до розподілу F випливає слабка збіжність $\{F_n\}$ до F відносно класу $C(-\infty; +\infty)$.

Приклад 12.1.4. *Нехай $\{F_n\}$ — послідовність імовірнісних розподілів зі щільностями*

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2 n^2}{2}\right\}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Обчислити

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^1} e^{itx} F_n(dx).$$

Р о з в' я з а н н я. Послідовність розподілів $\{F_n\}$ збігається до власного атомічного розподілу F, зосередженого в точці 0 (згідно з достатньою умовою 2° збіжності розподілів). Тому за теоремою 12.1.1 послідовність $\{F_n\}$ слабко збігається до F відносно класу $C(-\infty; +\infty)$. І оскільки

$e^{itx} \in C(-\infty; +\infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{itx} F_n(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{itx} F(dx) = e^{it0} F(\{0\}) = 1.$$

Приклад 12.1.5. *Нехай F — імовірнісний розподіл з середнім m і дисперсією σ^2. Довести, що для $a > 0$*

$$F\{x : |x-m| \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Р о з в' я з а н н я.

$$\sigma^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} (x-m)^2 F(dx) \geq \int\limits_{x:|x-m|\geq a} (x-m)^2 F(dx) \geq$$

$$\geq \int\limits_{x:|x-m|\geq a} a^2 F(dx) = a^2 \int\limits_{x:|x-m|\geq a} F(dx) = a^2 F\{x : |x-m| \geq a\}.$$

Приклад 12.1.6. *Нехай $\{F_n\}$ — послідовність власних розподілів відповідно з середніми a_n, які збігаються до a, і дисперсіями σ_n^2, які збігаються до 0.*

Довести, що послідовність $\{F_n\}$ збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці a.

Р о з в' я з а н н я. Досить довести, що послідовність $\{F_n(x)\}$ функцій розподілу збігається до функції $F_a(x)$ атомічного розподілу, зосередженого в точці a, тобто до

$$F_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq a; \\ 1, & \text{якщо } x > a, \end{cases}$$

у всіх точках $x \neq a$.

Нехай $t > 0$, $x = a - 2t$. Оскільки $a_n \to a$, коли $n \to \infty$, то за достатньо великих n

$$F_n(x) = F_n(a-2t) = F_n((-\infty, a-2t)) \leq F_n((-\infty, a_n - t)) =$$

$$= F_n\{y : y < a_n - t\} \leq F_n\{y : |y - a_n| \geq t\} \leq \frac{\sigma_n^2}{t^2},$$

а тому $F_n(a-2t) \to 0$, коли $n \to \infty$ (скористались прикладом 12.1.5).

Аналогічно пересвідчуємося, що $F_n(a+2t) \to 1$, коли $n \to \infty$.

12.2 Задачі

АЗ: $12.1, 12.3, 12.5, 12.7(2,5), 12.9, 12.11, 12.12, 12.15^*$.
СЗ: $12.2, 12.4, 12.6, 12.7(1,3,4), 12.10, 12.16^*$.

12.1. Нехай $\{N_{a;\sigma_n^2}\}$ — послідовність нормальних розподілів відповідно з середнім a й дисперсіями σ_n^2. Довести, що коли σ_n^2 збігається до нуля, то $\{N_{a;\sigma_n^2}\}$ збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого у точці a.

12.2. Позначимо через F_a атомічний розподіл, зосереджений у точці a. Дослідити на збіжність послідовність розподілів $\{F_n\}$ 1° коли $n \to +\infty$; 2° коли $n \to -\infty$.

12.3. Нехай $F(x)$ — монотонно зростаюча функція розподілу. Дослідити на збіжність послідовність розподілів $\{F_n\}$, заданих своїми функціями розподілу

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -1/n; \\ \dfrac{F(x) - F(-1/n)}{F(1/n) - F(-1/n)}, & \text{якщо } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{якщо } x > 1/n. \end{cases}$$

12.4. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність розподілів із функціями розподілу

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -1/n; \\ n(x + 1/n)/2, & \text{якщо } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{якщо } x > 1/n. \end{cases}$$

З'ясувати, чи збігається послідовність розподілів $\{F_n\}$.

12.5. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність розподілів зі щільностями

$$f_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{якщо } x \in [-1/n; 1/n]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [-1/n; 1/n]. \end{cases}$$

З'ясувати, чи збігається послідовність розподілів $\{F_n\}$.

12.6. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність розподілів відповідно зі щільностями

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -1/n; \\ n^2(x + 1/n), & \text{якщо } -1/n < x \le 0; \\ -n^2(x - 1/n), & \text{якщо } 0 < x \le 1/n; \\ 0, & \text{якщо } x > 1/n. \end{cases}$$

З'ясувати, чи збігається $\{F_n\}$, коли $n \to \infty$.

12.7. Нехай $F(x)$ — функція розподілу неперервного власного ймовірнісного розподілу.

Дослідити на збіжність кожну з поданих далі послідовностей розподілів, заданих своїми функціями розподілу:

1) $F_n(x) = F(x + 1/n), \; n = 1, 2, \dots;$
2) $G_n(x) = F(x + n), \; n = 1, 2, \dots;$
3) $S_n(x) = F(x - n), \; n = 1, 2, \dots;$
4) $P_n(x) = F(x/n), \; n = 1, 2, \dots;$
5) $Q_n(x) = F(x + (-1)^n n), \; n = 1, 2, \dots$

12.8. З'ясувати, чи збігається послідовність розподілів $\{P_n\}$ відповідно зі щільностями

$$p_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2 n^2}{2}\right\}, \; n = 1, 2, \dots$$

12.9. З'ясувати, чи збігається послідовність розподілів:

1) $F_n : \begin{pmatrix} -n & n \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \; n = 1, 2, \dots;$
2) $G_n : \begin{pmatrix} -1/n & 1/n \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \; n = 1, 2, \dots$

12.10. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність розподілів відповідно зі щільностями

$$f_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{якщо } x \in [(-1)^n - 1/n; (-1)^n + 1/n]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [(-1)^n - 1/n; (-1)^n + 1/n]. \end{cases}$$

З'ясувати, чи збігається $\{F_n\}$, коли $n \to \infty$.

12.11*. Нехай

$$N_{x;\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}\right\} dt;\ \ x, y \in \mathbb{R}^1, \sigma > 0.$$

Обчислити

$$\lim_{\sigma\to 0} N_{x;\sigma^2}(y).$$

12.12. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність імовірнісних розподілів зі щільностями

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2 n^2}{2}\right\},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \sin x\, F_n(dx).$$

12.13. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність імовірнісних розподілів з функціями розподілу із задачі 12.12.

Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos x F_n(dx).$$

12.14*. Нехай F — власний імовірнісний розподіл,

$$N_{x;\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}\right\} dt;\ \ x, y \in \mathbb{R}^1, \sigma > 0.$$

Обчислити

$$\lim_{\sigma\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_{x;\sigma^2}(y) F(dx),$$

якщо y — точка неперервності F.

12.15*. Нехай

$$F_\lambda(y) = \sum_{k:0\le k<y} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ y > 0;$$

$$F_\lambda(y) = 0,\ y \le 0,\ \lambda > 0.$$

Обчислити

$$\lim_{\lambda\to 0} F_\lambda(y).$$

12.16*. Нехай

$$F_\lambda(y) = \sum_{k:0\le k<y} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ y > 0;$$

$$F_\lambda(y) = 0,\ y \le 0,\ \lambda > 0.$$

Обчислити

$$\lim_{\lambda\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} F_\lambda(dy).$$

12.17. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність розподілів зі щільностями

$$f_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{якщо } x \in [(-1)^n/n - 1/n; (-1)^n/n + 1/n]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [(-1)^n/n - 1/n; (-1)^n/n + 1/n] \end{cases}$$

відповідно.

З'ясувати, чи збігається послідовність $\{F_n\}$ при $n \to \infty$.

12.18. Нехай послідовність $\{F_n\}$ імовірнісних розподілів і розподіл F зосереджені на множині натуральних чисел і при $n \to \infty$

$$F_n(\{k\}) \to F(\{k\})$$

для кожного натурального k. Довести, що $F_n \to F$.

Глава 13

Характеристична функція

13.1 Означення, властивості, обчислення

Означення. Нехай ξ — випадкова величина, F — її розподіл. *Характеристичною функцією випадкової величини* ξ (*розподілу* F) називатимемо комплекснозначну функцію $\varphi(t)$, означену для всіх $t \in \mathbb{R}^1$ рівністю

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}^1} e^{itx} F(dx).$$

Якщо розподіл F (розподіл випадкової величини ξ) має щільність f, то

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}^1} e^{itx} f(x)dx;$$

якщо розподіл F дискретний, тобто

$$F\colon x_k \to F(\{x_k\}) > 0,\ k = 1, 2, \ldots;\ \sum_{x_k} F(\{x_k\}) = 1,$$

то
$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{x_k} \exp\{itx_k\} F(\{x_k\}).$$

Численні застосування характеристичних функцій ґрунтуються на наведеній далі властивості.

Мультиплікативна властивість характеристичних функцій. *Характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добуткові характеристичних функцій доданків. У термінах згорток — характеристична функція згортки ймовірнісних розподілів дорівнює добуткові їхніх характеристичних функцій.*

Теорема (про диференційовність характеристичної функції). *Якщо n-й абсолютний момент розподілу F скінченний, то існує n-на похідна характеристичної функції*
$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F(dx)$$
розподілу F, і її можна отримати диференціюванням під знаком інтеграла:
$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x^n F(dx).$$

Наслідок. *За умов теореми*
$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n F(dx) = i^n M\xi^n$$
і для $\varphi(t)$ має місце розвинення
$$\varphi(t) = 1 + \frac{t}{1!}\varphi^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi^{(2)}(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + o(t^n),$$
коли $t \to 0$.

Приклад 13.1.1. *Обчислити характеристичну функцію випадкової величини ξ, що має розподіл Пуассона з параметром λ:*

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Р о з в' я з а н н я. Згідно з означенням

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} =$$

$$= \exp\{-\lambda\}\exp\{\lambda e^{it}\} = \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}.$$

Приклад 13.1.2. *Знайти характеристичну функцію нормально розподіленої з параметрами $(a;\sigma^2)$ випадкової величини.*

Р о з в' я з а н н я. Спочатку знайдемо характеристичну функцію $\varphi(t)$ випадкової величини ξ, розподіленої нормально з параметрами $(0;1)$.

Згідно з означенням

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos tx dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin tx dx.$$

Останній інтеграл дорівнює нулеві оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin tx\, dx = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{+n} e^{-x^2/2}\sin tx\, dx = 0.$$

Здиференціюємо $\varphi(t)$, скориставшись теоремою про диференційовність характеристичної функції (перший момент нормального розподілу скінченний):

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(-\sin tx)e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin tx de^{-x^2/2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cos tx \cdot e^{-x^2/2} dx = -t\varphi(t).$$

Звідси

$$\varphi^{'}(t)/\varphi(t) = -t.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістаємо

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2}$$

(ми врахували, що $\varphi(0) = 1$).

Далі, якщо ξ розподілена $N_{0;1}$, то $\eta = \sigma\xi + a$ розподілена нормально з параметрами $(a; \sigma^2)$ (перевіряється безпосередньо), тому характеристичною функцією $\psi(t)$ випадкової величини η, розподіленої $N_{a;\sigma^2}$, є

$$\psi(t) = Me^{it\eta} = Me^{it(\sigma\xi + a)} = e^{ita} Me^{i(\sigma t)\xi} = e^{ita}\varphi(\sigma t) =$$

$$= \exp\{ita\} \exp\{-\sigma^2 t^2/2\} = \exp\{ita - \sigma^2 t^2/2\}.$$

13.2 Теореми єдиності та неперервності

Теорема єдиності. *Різним імовірнісним розподілам відповідають різні характеристичні функції.*

У задачах дослідження збіжності розподілів часто використовується теорема неперервності.

Теорема неперервності. *Для того щоб послідовність $\{F_n\}$ імовірнісних розподілів власно збігалася, необхідно й достатньо, щоб відповідна послідовність характеристичних функцій $\{\varphi_n(t)\}$ збігалася до неперервної функції $\varphi(t)$ у кожній точці $t \in \mathbb{R}^1$. При цьому границя $\varphi(t)$ послідовності характеристичних функцій $\{\varphi_n(t)\}$ є* *характеристичною функцією граничного розподілу F і $\{\varphi_n(t)\}$ збігається до $\varphi(t)$ рівномірно на кожному скінченному проміжку.*

Приклад 13.2.1. *Нехай F і Q — нормальні розподіли відповідно з параметрами $(a_1;\sigma_1^2)$ і $(a_2;\sigma_2^2)$. Знайти згортку $F*Q$ розподілів Q і F.*

Розв'язання. Скориставшись мультиплікативною властивістю характеристичних функцій (характеристична функція згортки ймовірнісних розподілів дорівнює добутку характеристичних функцій цих розподілів), за характеристичними функціями

$$\varphi_1(t) = \exp\left\{ita_1 - t^2\sigma_1^2/2\right\} \text{ і } \varphi_2(t) = \exp\left\{ita_2 - t^2\sigma_2^2/2\right\}$$

нормальних розподілів F і Q з параметрами $(a_1;\sigma_1^2)$ і $(a_2;\sigma_2^2)$ відповідно (див. приклад 13.1.2) знаходимо характеристичну функцію згортки $F*Q$:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = \exp\left\{it(a_1+a_2) - t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/2\right\}.$$

Далі, з одного боку, $\varphi(t)$ — характеристична функція згортки $F*Q$, з іншого,

$$\varphi(t) = \exp\left\{it(a_1+a_2) - t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/2\right\}$$

є характеристичною функцією нормального розподілу з параметрами $(a_1+a_2;\sigma_1^2+\sigma_2^2)$, тобто характеристична функція розподілу $F*Q$ і характеристична функція нормального розподілу з параметрами $(a_1+a_2;\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ співпадають. А тому за теоремою єдиності співпадають і самі розподіли. Отже, *згортка нормальних розподілів з параметрами $(a_1;\sigma_1^2)$ і $(a_2;\sigma_2^2)$ є нормальним розподілом з параметрами $(a_1+a_2;\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ (клас нормальних розподілів замкнений відносно операції згортки).*

Приклад 13.2.2. *Нехай F і Q — пуассонові розподіли відповідно з параметрами λ_1 і λ_2. Знайти згортку $F*Q$ розподілів Q і F.*

Розв'язання. Характеристичними функціями пуассонових розподілів відповідно з параметрами λ_1 і λ_2 є

$$\varphi_1(t) = \exp\{\lambda_1(e^{it}-1)\} \text{ і } \varphi_2(t) = \exp\{\lambda_2(e^{it}-1)\}$$

(див. приклад 13.1.1), тому характеристична функція $\varphi(t)$ згортки $F * Q$, згідно з мультиплікативною властивістю, дорівнює $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$, тобто

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)\}.$$

Але $\exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)\}$ — характеристична функція пуассонового розподілу з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Тому за теоремою єдиності розподіл $F{*}Q$ співпадає з пуассоновим розподілом з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Отже, *згортка пуассонових розподілів з параметрами λ_1 і λ_2 є пуассоновим розподілом з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$ (клас пуассонових розподілів замкнений відносно операції згортки).*

Приклад 13.2.3 (теорема Пуассона). *Нехай випадкова величина ξ_{n,p_n} розподілена біномно з параметрами $(n; p_n)$. Довести, що коли $np_n \to \lambda$ при $n \to \infty$, то розподіл випадкової величини ξ_{n,p_n} збігаєтьcя до пуассонового розподілу з параметром λ.*

Р о з в' я з а н н я. Обчислимо характеристичну функцію $\varphi_n(t)$ випадкової величини ξ_{n,p_n} і покажемо, що коли $n \to \infty$, послідовність характеристичних функцій $\{\varphi_n(t)\}$ збігається до характеристичної функції пуассонового розподілу з параметром λ.

Характеристична функція $\varphi_n(t)$ біномно розподіленої з параметрами $(n; p_n)$ випадкової величини ξ_{n,p_n} дорівнює $\left(1 + p_n\left(e^{it} - 1\right)\right)^n$, тобто

$$\varphi_n(t) = \left(1 + p_n\left(e^{it} - 1\right)\right)^n$$

(див. розв'язання задачі 13.7). Далі, оскільки $np_n \to \lambda$, коли $n \to \infty$, то $p_n \to 0$ і для

$$\ln\varphi_n(t) = n\ln\left(1 + p_n\left(e^{it} - 1\right)\right)$$

при кожному фіксованому t маємо

$$\ln\varphi_n(t) \sim np_n\left(e^{it} - 1\right), \text{ коли } n \to \infty.$$

Звідси при $n \to \infty$ дістаємо

$$\ln\varphi_n(t) \to \lambda\left(e^{it} - 1\right),$$

$$\varphi_n(t) \to \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

Але $\exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$ — характеристична функція пуассонового розподілу з параметром λ, тому за теоремою неперервності розподіл випадкової величини ξ_{n,p_n} збігається до пуассонового розподілу з параметром λ.

13.3 Задачі

АЗ: 13.1, 13.2, 13.5, 13.6, 13.7, 13.9, 13.10, 13.16, 13.17, 13.27.

СЗ: 13.2, 13.4, 13.8, 13.14, 13.18, 13.19, 13.20, 13.21, 13.23, 13.25.

13.1. Нехай випадкова величина ξ набуває значень 1 і -1, кожне з імовірністю $1/2$. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини ξ.

13.2. Нехай випадкова величина ξ набуває значень -1, 0, 1, кожне з імовірністю $1/3$. Обчислити характеристичну функцію ξ.

13.3. Довести, що $\varphi(z) = \cos^2 z$ є характеристичною функцією; знайти відповідний розподіл імовірностей.

13.4. Довести, що

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kz, \quad \varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k z}$$

$\left(a_k \geq 0,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1\right)$ є характеристичними функціями. Знайти відповідні розподіли ймовірностей.

13.5. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких набуває значень 1 і -1 з імовірністю $1/2$. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

13.6. Довести, що $\varphi(z) = \cos^n z$ є характеристичною функцією (для кожного натурального n).

13.7. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини ξ, розподіленої біномно з параметрами $(n; p)$:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \dots, n.$$

13.8. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини ξ, розподіленої геометрично з параметром p:

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, \dots$$

13.9. Нехай ξ — випадкова величина, що має розподіл Пуассона з параметром λ.

Обчислити характеристичну функцію випадкової величини $(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$.

13.10. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, рівномірно розподіленої на проміжку $[-a; a]$.

13.11. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини, рівномірно розподіленої на проміжку $[a; b]$.

13.12. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини зі щільністю $p(x) = e^{-|x|}/2$.

13.13. Обчислити характеристичну функцію показникового розподілу з параметром a.

13.14. Обчислити характеристичну функцію двостороннього показникового розподілу з параметром a. Щільність двостороннього показникового розподілу:

$$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|},\ a > 0.$$

13.15. Обчислити характеристичну функцію трикутного розподілу з параметром a $(a > 0)$. Щільність трикутного розподілу:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| \ge a; \\ (a - |x|)/a^2, & \text{якщо } |x| < a. \end{cases}$$

13.16*. Обчислити характеристичну функцію розподілу Коші з параметром a. Щільність розподілу Коші:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2},\ x \in \mathbb{R}^1.$$

13.17. Нехай F і Q — розподіли Коші відповідно з параметрами a і b. Знайти згортку розподілів Q і F.

13.18. Нехай ξ і η — незалежні нормально розподілені випадкові величини відповідно з параметрами $(a_1; \sigma_1^2)$ і $(a_2; \sigma_2^2)$. Знайти розподіл випадкової величини $\xi + \eta$.

13.19. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, які мають розподіли Коші з параметрами a і b відповідно. Знайти розподіл випадкової величини $\xi + \eta$.

13.20. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, які мають пуассонові розподіли відповідно з параметрами λ_1 і λ_2. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = = \xi + \eta$.

13.21. Нехай $\varphi(t)$ — характеристична функція випадкової величини ξ, для якої $M\xi = a$ і $D\xi = \sigma^2 < \infty$. Виписати розвинення Тейлора для $\varphi(t)$ в околі точки $t = 0$, яке містить t^2.

13.22. Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність нормально розподілених випадкових величин відповідно з параметрами $(a_n; \sigma_n^2)$, причому $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to 0$, коли $n \to \infty$.

Довести, що коли $n \to \infty$, розподіл випадкової величини ξ_n збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці a.

13.23. Нехай ξ — пуассонова випадкова величина з параметром $\lambda < \infty$.

Довести, що коли $\lambda \to \infty$, розподіл випадкової величини $(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ збігається до нормального розподілу з параметрами $(0; 1)$.

13.24. У кожній з точок $x_k = k/n, k = 0, 1, \ldots, n$, відрізка $[0; 1]$ зосереджена маса $1/(n + 1)$. Позначимо через F_n отриманий у такий спосіб імовірнісний розподіл.

1° Знайти характеристичну функцію $\varphi_n(t)$ розподілу F_n.

2° Обчислити границю $\varphi_n(t)$, коли $n \to \infty$.

3° Довести, що коли $n \to \infty$, послідовність $\{F_n\}$ збігається до рівномірного на проміжку $[0; 1]$ розподілу.

13.25. Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин із середнім 0 і дисперсією σ^2 ($D\xi_k = \sigma^2 < \infty$). Довести, що коли $n \to \infty$, розподіл випадкової величини

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

збігається до нормального розподілу з параметрами $(0; 1)$.

Вказівка. Позначимо через $\varphi(t)$ характеристичну функцію випадкової величини ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, а через $\psi_n(t)$ — випадкової величини $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

Послідовно розв'яжіть такі задачі:

1° Подати характеристичну функцію $\psi_n(t)$ через характеристичну функцію $\varphi(t)$.

2° Виписати розвинення Тейлора для $\varphi(t)$ в околі точки $t = 0$, яке містить t^2.

3° Скориставшись результатами пунктів 1° і 2°, знайти границю послідовності характеристичних функцій $\{\psi_n(t)\}$, коли $n \to \infty$.

4° Скориставшись результатом розв'язання пункту 3° і теоремою неперервності, довести, що коли $n \to \infty$, розподіл випадкової величини $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ збігається до нормального розподілу з параметрами $(0; 1)$.

13.26. Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Якщо

$$D\xi_k = \sigma^2 < \infty,$$

то з нерівності Чебишова (див. теорему 6.1.2) випливає, що коли $n \to \infty$ послідовність

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

збігається за ймовірністю до $a = M\xi_k$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\{|S_n - a| \geq \varepsilon\} \to 0,$$

коли $n \to \infty$.

Тепер не вимагатимемо, щоб $\sigma^2 < \infty$, але нехай

$$M\xi_k = a \neq \infty.$$

Довести, що коли $n \to \infty$, послідовність S_n збігається за ймовірністю до a (закон великих чисел у формі Хінчина).

13.27. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з яких має розподіл Коші з параметром a.

Довести, що

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

не збігається за ймовірністю до константи (жодної).

Вказівка. 1° Знайти характеристичну функцію S_n.

2° Обчислити при $n \to \infty$ границю характеристичної функції випадкової величини S_n.

Зазначимо, що у випадкової величини, що має розподіл Коші, математичного сподівання не існує.

13.28. Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величини із середнім a ($M\xi_k = a \neq \infty$) і дисперсією σ^2 ($D\xi_k = \sigma^2 < \infty$). Довести, що при $n \to \infty$ розподіл випадкової величини

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - na\right)$$

збігається до нормального розподілу з параметрами $(0; 1)$.

Вказівка. Див. задачу 13.25.

13.29. Нехай $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{k,n}, \ldots, \xi_{n,n}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з розподілом

$$P\{\xi_{k,n} = j\} = p_n^j (1 - p_n)^{1-j},\ j = 0, 1,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, причому

$$np_n \to \lambda,$$

коли $n \to \infty$.

Довести, що коли $n \to \infty$, розподіл суми $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{k,n}$ збігається до пуассонового розподілу з параметром λ:

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,n} = m\right\} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},\ m = 0, 1, \ldots$$

13.30. Нехай ν_i — випадкова величина, означена у задачі 10.41.

Довести, що коли $n \to \infty$, розподіл

$$\frac{\nu_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}}$$

збігається до нормального розподілу з параметрами $(0; 1)$.

13.31. Нехай $N_{(-1)^n;1/n^2}$ — послідовність нормальних розподілів з параметрами $((-1)^n; 1/n^2)$.

Дослідити на збіжність послідовність ймовірнісних розподілів $N_{(-1)^n;1/n^2}$ (при $n \to \infty$).

13.32. Нехай $\{F_n\}$ — послідовність імовірнісних розподілів з функціями розподілу

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ nx, & \text{якщо } 0 < x \le 1/n; \\ 1, & \text{якщо } x > 1/n. \end{cases}$$

Довести, що коли $n \to \infty$, послідовність розподілів F_n збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці 0.

13.33. $\{F_n\}$ — послідовність імовірнісних розподілів з функціями розподілу

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1/n; \\ n(x + 1/n)/2, & \text{при } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{при } x > 1/n. \end{cases}$$

Довести, що при $n \to \infty$ послідовність розподілів F_n збігається до атомічного розподілу, зосередженого в точці 0.

Глава 14

Оцінювання параметрів розподілів

14.1 Точкові оцінки

Типова задача теорії ймовірностей — за математичною моделлю стохастичного експерименту обчислити ймовірність тих чи інших подій і тим самим спрогнозувати його наслідки.

Типова задача математичної статистики — за результатом стохастичного експерименту запропонувати (вибрати) математичну модель, яка б адекватно його описувала. У багатьох випадках розв'язування останньої задачі зводиться до оцінювання параметрів розподілів і перевірки статистичних гіпотез.

Означення. Випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ зі значеннями в просторі $\mathbb{R}^n$ називатимемо *вибіркою* (*вибірковим вектором*).

Вибірку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, утворену послідовністю незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, кожна з яких має розподіл G, називають *вибіркою з розподілу* (*закону*) G *обсягом* n.

Значення $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ називатимемо її реалізацією.

Множину X усіх можливих значень (реалізацій) вибірки називатимемо *вибірковим простором* (вибірковий простір X — це $\mathbb{R}^n$ або його підмножина).

Ми матимемо справу з вибірками, розподіли (функції розподілу) яких залежать від параметра θ. За множину можливих значень Θ параметра θ розглядатимемо підмножини скінченновимірного простору $\mathbb{R}^s$. (Розподілами, що залежать від параметрів, наприклад, є нормальний, пуассонів, показниковий, рівномірний і т. ін.)

Постановка задачі оцінювання параметрів розподілів. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ — реалізація вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ з розподілом $F(\cdot;\theta)$. Розподіл $F(\cdot;\theta)$ залежить від параметра θ, який набуває значень із множини Θ. Значення параметра θ невідоме і його необхідно оцінити (визначити) за реалізацією $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. У цьому й полягає задача оцінювання параметрів розподілів.

Єдине, що нам відомо для оцінювання невідомого параметра θ, — це реалізація $\xi(\omega)$ вибірки ξ. Крім реалізації $\xi(\omega)$ вибірки, ми не маємо нічого, що несло б інформацію про значення параметра θ. Тому "оцінити (визначити) θ за реалізацією $\xi(\omega)$ (точно чи хоча б наближено)" означає поставити у відповідність реалізації $\xi(\omega)$ вибірки ξ значення $\hat{\theta}$ із Θ, яке ми використовуватимемо як невідомий параметр θ. Формально це означає, що *для оцінювання θ на вибірковому просторі X — множині реалізацій вибірок — необхідно визначити (побудувати, задати) функцію $h(\cdot)$ зі значеннями в Θ — множині можливих значень параметра θ — таку, що $h(\xi(\omega))$ дорівнює θ або $h(\xi(\omega))$ хоча б наближено дорівнює θ.* Значення

$$\hat{\theta} = h(\xi(\omega))$$

ми й використовуватимемо як θ. Зазначимо, що для кожної реалізації $\xi(\omega)$ значення $\hat{\theta} = h(\xi(\omega))$, яке використовується як θ, буде своє. Тому $\hat{\theta}$ як функція $\xi = \xi(\omega)$ є випадковою величиною.

Означення. Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — вибірка зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ і $F(\cdot,\theta)$ її розподіл ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$). Борелеву функцію $h(\cdot)$, задану на вибірковому просторі $X \subset \mathbb{R}^n$, зі значеннями в Θ — множині можливих значень параметра θ — називатимемо *статистикою,* а випадкову

величину
$$\hat{\theta} = h(\xi) = h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$
— борелеву функцію від вибірки — *оцінкою.*

Будувати статистики $h(\cdot)$, такі, щоб
$$\theta = h(\xi(\omega)) = \hat{\theta},$$
тобто статистики, за допомогою яких за $\xi(\omega)$ можна було б точно визначити θ, явно не вдасться вже хоча б тому, що θ є константою, а оцінка $\hat{\theta} = h(\xi(\omega))$ як функція вибірки (випадкової величини) є випадковою величиною. Тож подобається нам це чи ні, для визначення θ ми будемо змушені вдовольнятися оцінками $\hat{\theta} = h(\xi)$ як наближеними значеннями θ.

Зазначимо, що для одного й того самого параметра θ можна запропонувати багато оцінок. Наприклад, для оцінювання параметра θ розподілу рівномірного на проміжку $[\theta - 1, \theta + 1]$ за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ з нього можна запропонувати оцінки
$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i;\;\; \hat{\theta}_2 = \frac{\xi_1 + \xi_n}{2};\;\; \hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\}).$$
При цьому природно виникають запитання: “Яка з наведених оцінок краща?”, “Як побудувати найкращу оцінку?” і т. ін.

Похибки оцінювання параметрів. У зв'язку з постановкою задачі оцінювання параметрів розподілів як задачі знаходження наближених значень $\hat{\theta} = h(\xi)$ параметра θ треба вміти відповідати на запитання: *наскільки великою є похибка* $\hat{\theta} - \theta$ при заміні θ на $\hat{\theta}$, інакше кажучи, як далеко можуть відхилятися значення оцінки
$$\hat{\theta} = h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$
обчисленої за вибіркою $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, від оцінюваної величини θ?

Від оцінки $\hat{\theta} = h(\xi)$, яка пропонується для оцінювання того чи іншого параметра, природно вимагати малого розкиду її значень, інакше кажучи, концентрації їх у вузькому околі. Як кількісну міру розкиду значень випадкової величини $\hat\theta = h(\xi)$ розглядатимемо

$$D\hat\theta = M(\hat\theta - M\hat\theta)^2$$

(для наочності θ — одновимірний параметр).

Кількісно міру похибки при заміні θ на $\hat\theta$ (міру розкиду $\hat\theta$ відносно θ) описуватимемо величиною

$$M|\hat\theta - \theta|^2.$$

Серед усіх оцінок з однією і тією самою дисперсією $D\hat\theta$ (мірою розкиду) мінімальну міру розкиду відносно θ мають оцінки, для яких $M\hat\theta = \theta$.

Означення. Оцінку $\hat\theta$ називатимемо *незсуненою оцінкою параметра* θ, якщо

$$M\hat\theta = \theta,$$

або, що те саме, $M(\hat\theta - \theta) = 0$.

Той факт, що $\hat\theta$ є незсуненою оцінкою параметра θ, можна трактувати так: за багаторазового використання оцінки $\hat\theta$ як значення θ, тобто за багаторазової заміни θ на $\hat\theta$, середнє значення похибки $\hat\theta - \theta$ дорівнює нулеві.

Часто розглядають не одну оцінку

$$\hat\theta = h(\xi) = h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

побудовану за вибіркою $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а послідовність оцінок

$$\hat\theta_n = h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ n = 1, 2, \ldots$$

У цій ситуації природно говорити про асимптотичну поведінку послідовності оцінок.

Означення. Послідовність оцінок $\{\hat\theta_n\}$ називатимемо *спроможною послідовністю оцінок параметра* θ, якщо для кожного $\varepsilon > 0$

$$P\{|\hat\theta_n - \theta| > \varepsilon\} \to 0$$

при $n \to \infty$, або, що те саме, $\{\hat{\theta}_n\}$ збігається за ймовірністю до θ при $n \to \infty$.

Означення. Послідовність оцінок $\{\hat{\theta}_n\}$ називатимемо *асимптотично незсуненою послідовністю оцінок параметра* θ, якщо

$$M(\hat{\theta}_n - \theta) \to 0$$

при $n \to \infty$, або, що те саме,

$$M\hat{\theta}_n \to \theta$$

при $n \to \infty$.

Приклад 14.1.1. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю*

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}, \ \ \hat{\theta}_2 = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ \ \hat{\theta}_4 = \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{2}.$$

Які з оцінок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$ та яких параметрів (можливо, відмінних від a і b) є незсуненими оцінками? Спроможними оцінками?

Розв'язання. Розглянемо окремо кожну з оцінок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$.

Оцінка $\hat{\theta}_2 = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Знайдемо спочатку розподіл $\hat{\theta}_2$. За умовою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з рівномірного на відрізку $[a; b]$ розподілу, тобто $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких розподілена рівномірно на відрізку $[a; b]$. Звідси, враховуючи, що розподіли випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ абсолютно неперервні зі щільностями $f(x; a, b)$, маємо

$$F_{\hat{\theta}_2}(x) = P\{\hat{\theta}_2 < x\} = P\{\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} < x\} =$$

$$= P\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \ldots, \xi_n < x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i < x\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\, dy = \left(\int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\, dy \right)^{n}.$$

Тому $\hat{\theta}_2$ — абсолютно неперервна випадкова величина і її щільність розподілу

$$f_{\hat{\theta}_2}(x) = \frac{d}{dx} F_{\hat{\theta}_2}(x) = n f(x; a, b) \left(\int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\, dy \right)^{n-1}.$$

А оскільки

$$\int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\, dy = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a \le x \le b; \\ 1, & \text{якщо } x > b, \end{cases}$$

то

$$f_{\hat{\theta}_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a; b]; \\ \dfrac{n}{(b-a)^n}(x-a)^{n-1}, & \text{якщо } x \in [a; b]. \end{cases}$$

Графік щільності $f_{\hat{\theta}_2}(x)$ зображено на рис. 14.1.1.

За відомою щільністю розподілу оцінки $\hat{\theta}_2$ можемо обчислити її математичне сподівання:

$$M\hat{\theta}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\hat{\theta}_2}(x)\, dx =$$

$$= \int_{a}^{b} x \frac{n}{(b-a)^n}(x-a)^{n-1}\, dx = \frac{n}{n+1} b + \frac{a}{n+1}.$$

Отже, оцінка $\hat{\theta}_2$ не є незсуненою оцінкою ні параметра a, ні параметра b, проте коли $n \to \infty$,

$$M\hat{\theta}_2 = \frac{n}{n+1}b + \frac{a}{n+1} \to b.$$

Останнє означає, що $\hat{\theta}_2$ є асимптотично незсуненою оцінкою параметра b.

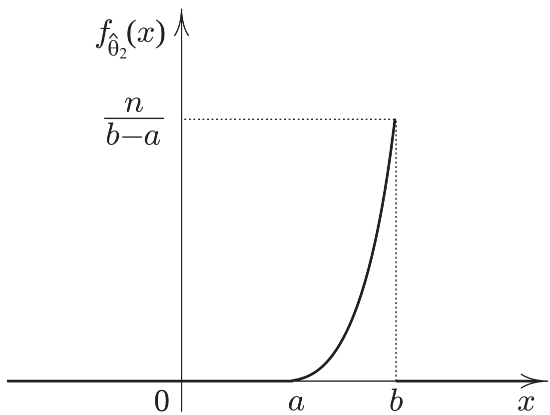

Рис. 14.1.1: Щільність розподілу оцінки $\hat{\theta}_2$

З'ясуємо, чи є $\hat{\theta}_2$ спроможною оцінкою параметра b, тобто чи збігається $\hat{\theta}_2$ за ймовірністю до b.

Для досить малих ε маємо

$$P\{|\hat{\theta}_2 - b| > \varepsilon\} = P\{\hat{\theta}_2 \in (-\infty, b-\varepsilon) \cup (b+\varepsilon, +\infty)\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{b-\varepsilon} f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx + \int\limits_{b+\varepsilon}^{+\infty} f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} \frac{n}{(b-a)^n}(x-a)^{n-1}\,dx = \left(1 - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)^n,$$

що збігається до нуля, коли $n \to \infty$. Отже,

$$P\{|\hat{\theta}_2 - b| > \varepsilon\} \to 0,$$

коли $n \to \infty$. Останнє означає, що $\hat{\theta}_2$ є спроможною оцінкою параметра b.

Оцінка $\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Оцінка $\hat{\theta}_1$ досліджується аналогічно оцінці $\hat{\theta}_2$.

Розподіл оцінки $\hat{\theta}_1$ абсолютно неперервний зі щільністю

$$f_{\hat{\theta}_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a; b]; \\ \dfrac{n}{(b-a)^n}(b-x)^{n-1}, & \text{якщо } x \in [a; b]. \end{cases}$$

Звідси

$$M\hat{\theta}_1 = \frac{n}{n+1}a + \frac{b}{n+1}.$$

Тому $\hat{\theta}_1$ не є незсуненою оцінкою ні параметра a, ні параметра b, але вона є асимптотично незсуненою оцінкою параметра a.

Оцінка $\hat{\theta}_1$ є спроможною оцінкою параметра a (див. дослідження оцінки $\hat{\theta}_2$).

Оцінка $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Оскільки ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, — рівномірно розподілені на відрізку $[a; b]$ випадкові величини, а для них математичне сподівання m_1, як відомо, дорівнює $(a+b)/2$, то

$$M\hat{\theta}_3 = M\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = m_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, $\hat{\theta}_3$ не є незсуненою оцінкою ні параметра a, ні параметра b, але $\hat{\theta}_3$ — незсунена оцінка параметра

$$m_1 = (a+b)/2$$

— математичного сподівання рівномірного на відрізку $[a; b]$ розподілу.

Далі, згідно із законом великих чисел

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

збігається за ймовірністю до $m_1 = (a+b)/2$, тобто $\hat{\theta}_3$ — спроможна оцінка параметра $m_1 = (a+b)/2$.

Оцінка $\hat{\theta}_4 = (\xi_{n-1} + \xi_n)/2$. Для оцінки $\hat{\theta}_4$

$$M\hat{\theta}_4 = M\frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{2} = \frac{1}{2}(M\xi_{n-1} + M\xi_n) = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, $\hat{\theta}_4$ — незсунена оцінка параметра $m_1 = (a+b)/2$.

Оцінка $\hat{\theta}_4$ не збігається за ймовірністю до жодної константи (параметра). Справді, щільністю розподілу випадкової величини $\hat{\theta}_4 = (\xi_{n-1} + \xi_n)/2$ є функція

$$f_{\hat{\theta}_4}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a;b]; \\ \dfrac{4}{(b-a)^2}(x-a), & \text{якщо } x \in [a, \dfrac{a+b}{2}]; \\ \dfrac{4}{(b-a)^2}(b-x), & \text{якщо } x \in [\dfrac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

($f_{\hat{\theta}_4}(x)$ знайдено як згортку щільностей рівномірних на відрізку $[a;b]$ розподілів, графік $f_{\hat{\theta}_4}(x)$ зображено на рис. 14.1.2).

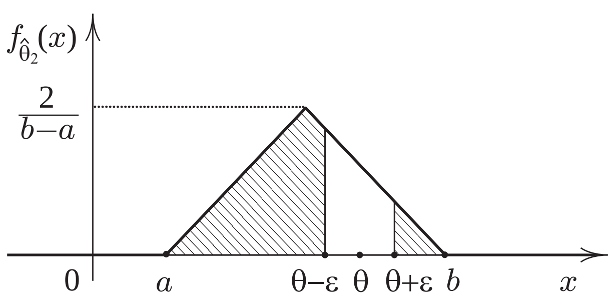

Рис. 14.1.2: Щільність розподілу оцінки $\hat{\theta}_4$

Тому для будь-якого параметра θ, кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ ймовірність

$$P\{|\hat{\theta}_4 - \theta| > \varepsilon\} = \int\limits_{\{x:|x-\theta|>\varepsilon\}} f_{\hat{\theta}_4}(x)dx > 0$$

не залежить від n (чисельно дорівнює площі фігури, що заштрихована (див. рис. 14.1.2)). Звідси випливає, що $\hat{\theta}_4$ не збігається до θ за ймовірністю, коли $n \to \infty$.

14.2 Довірчі інтервали

Крім точкового оцінювання параметрів розподілу, використовують так зване *інтервальне оцінювання*, суть якого полягає у тому, що для невідомого параметра знаходять інтервал, який із заданою ймовірністю містить невідомий параметр. Розглянемо довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.

Довірчий інтервал для a. Для вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n)$ з розподілу $N_{a;\sigma^2}$ випадкова величина $(\overline{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$ має t-розподіл з $n-1$ ступенями вільності. Тому

$$P\left\{|\overline{\xi} - a|\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} < t_{\alpha;n-1}\right\} = 1 - 2\alpha$$

або

$$P\left\{\overline{\xi} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1} < a < \overline{\xi} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

де $t_{\alpha;m}$ — верхня α-межа t-розподілу з m ступенями вільності (див. гл. 21 і табл. 22.3.1). Інакше кажучи, інтервал

$$\left(\overline{\xi} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}; \overline{\xi} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}\right) \qquad (14.2.1)$$

містить невідомий параметр a з імовірністю $1-2\alpha$. Інтервал (14.2.1) називають *довірчим інтервалом* параметра a з коефіцієнтом надійності $1-2\alpha$ (координата $\overline{\xi}$ середини довірчого інтервалу і його довжина $2\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}$ — випадкові величини). Зазвичай для коефіцієнта надійності вибирають значення 0,99; 0,98; 0,95; 0,90.

Коефіцієнту надійності $1-2\alpha$ можна дати таку частотну інтерпретацію: якщо провести досить довгу серію незалежних експериментів, скажімо 100, то частка тих із них, у яких довірчий інтервал (14.2.1) містить невідомий параметр a, близька до $100(1-2\alpha)$.

Довірчий інтервал для $\boldsymbol{\sigma^2}$. Якщо $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_n)$ — вибірка з розподілу $N_{a;\sigma^2}$, випадкова величина $(n-1)s^2/\sigma^2$ має розподіл χ^2 з $n-1$ ступенями вільності. Тому

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha;n-1} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha;n-1}\right\} = 1-2\alpha$$

або

$$P\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha;n-1}}\right\} = 1-2\alpha$$

($\chi^2_{\beta;m}$ — верхня β-межа χ^2-розподілу з m ступенями вільності, див. гл. 21 і табл. 22.2.1). Тобто інтервал

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha;n-1}}\right) \tag{14.2.2}$$

містить невідомий параметр σ^2 з імовірністю $1-2\alpha$. Інакше кажучи, інтервал (14.2.2) є довірчим інтервалом для параметра σ^2 (дисперсії нормального розподілу) з коефіцієнтом надійності $1-2\alpha$.

Приклад 14.2.1. *Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання показів мікроскопа I (див. приклад* 17.2.1) *з коефіцієнтом надійності:* 1) 0,90; 2) 0,99.

Р о з в' я з а н н я. Покази мікроскопа природно вважати реалізацією вибірки з нормального розподілу. Довірчий інтервал для параметра a (математичного сподівання) нормального розподілу має вигляд (14.2.1). У прикладі, що розглядається, $n = 12$, $\overline{\xi} = 2{,}34$, $s^2 = 1{,}66$, $t_{0{,}05;11} = 1{,}796$, $t_{0{,}005;11} = 3{,}106$. Тому довірчим інтервалом для параметра a з коефіцієнтом надійності 0,90 є інтервал (1,68; 3), а довірчим інтервалом з коефіцієнтом надійності 0,99 — інтервал (1,19; 3,49) (фактично знайдено реалізації довірчих інтервалів, хоча ми говоримо про довірчі інтервали).

Звернемо увагу на те, що за зростання надійності ми "платимо" розширенням довірчого інтервалу, і навпаки — вужчий довірчий інтервал має менший коефіцієнт надійності.

Приклад 14.2.2. *Знайти довірчий інтервал для дисперсії різниці врожаїв (див. приклад* 17.1.1) *з коефіцієнтом надійності:* 1) 0,90*;* 2) 0,98.

Р о з в' я з а н н я. Різницю урожаїв природно вважати реалізацією вибірки з нормального розподілу. Довірчий інтервал для параметра σ^2 (дисперсії) нормального розподілу має вигляд (14.2.2). У прикладі, що розглядається, $n = 10$, $s^2 = 0{,}667$; $\chi^2_{0{,}95;9} = 3{,}32$, $\chi^2_{0{,}05;9} = 16{,}92$; $\chi^2_{0{,}99;9} = 2{,}9$, $\chi^2_{0{,}01;9} = 21{,}67$. Тому довірчим інтервалом для параметра σ^2 з коефіцієнтом надійності 0,90 є інтервал (0,35; 1,81), а з коефіцієнтом надійності 0,98 — інтервал (0,28; 2,07).

14.3 Оцінки з мінімальною дисперсією

Основне питання задачі оцінювання параметрів розподілів: наскільки великою є похибка при заміні параметра θ оцінкою $\hat{\theta}$?

Оцінки $\hat{\theta}$, що пропонуються для оцінювання параметра θ, повинні бути незсуненими, тобто $M\hat{\theta} = \theta$. Такі оцінки мають меншу міру розкиду відносно θ порівняно з оцінками, для яких $M\hat{\theta} \neq \theta$. Для оцінювання параметра θ можна запропонувати багато незсунених оцінок. Із сукупності таких оцінок природно вибрати ті, що мають мінімально можливу міру розкиду (дисперсію).

Означення. Незсунену оцінку θ^* параметра θ називатимемо його *найкращою оцінкою, оцінкою мінімальної дисперсії або ефективною оцінкою*, якщо

$$D\theta^* = \inf_{\hat{\theta}: M\hat{\theta}=\theta} D\hat{\theta}.$$

У зв'язку з цим означенням природно виникає запитання: наскільки малою може бути мінімально можлива дисперсія оцінки (наскільки малими можуть бути відхилення $\hat{\theta}$ від θ)? Виявляється, що коли сукупність розподілів $F(\cdot;\theta), \theta \in \Theta$, вибірки $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ регулярно залежить від оцінюваного параметра θ, то можна вказати нижню межу дисперсій усіх незсунених оцінок параметра (нерівність Крамера—Рао). У деяких випадках існують оцінки параметра, на яких нижня межа досягається. Ці оцінки є ефективними. Порівнюючи дисперсію даної оцінки з нижньою межею дисперсій незсунених оцінок, можна з'ясувати, наскільки оцінка близька до найкращої можливої.

Нехай вибірка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ фіксованого обсягу n має щільність розподілу $f(x;\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$. Параметр θ вважатимемо одновимірним, а щодо множини його можливих значень Θ припустимо, що вона є скінченним інтервалом числової прямої.

У подальшому ми користуватимемося наведеними нижче твердженнями.

Лема 14.3.1. *Якщо майже для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ існують похідні*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta) \quad i \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(x;\theta),\ \theta \in \Theta,$$

мажоровні інтегровними функціями:

$$\left|\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f(x;\theta)\right| \le u_i(x),\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_i(x)\, dx < \infty,\ i = 1, 2,$$

і виконуються умови

$$M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta)\right)^2 < \infty,\ M\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right| < \infty,\ \theta\in\Theta,$$

то для всіх $\theta\in\Theta$

$$M\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta) = 0,$$

$$D\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta) = M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta)\right)^2 = -M\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta).$$

Означення. Функцію

$$I(\theta) = M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta)\right)^2$$

(коли вона визначена) називають *інформацією за Фішером.*

У лемі 14.3.1 наведено достатні умови, за яких інформація $I(\theta)$ існує. Зазначимо, що

$$I(\theta) = M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta)\right)^2 = -M\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta).$$

Теорема 14.3.1 (нерівність Крамера—Рао). *Нехай вибірка* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *має щільність розподілу* $f(x;\theta)$, $x\in\mathbb{R}^n$, *для якої виконуються умови леми* 14.3.1 *і* $\hat\theta = h(\xi)$ — *незсунена оцінка параметра* θ *така, що функція*

$$h(x)\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta),\ \theta\in\Theta,$$

мажоровна інтегровною функцією:

$$\left|h(x)\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)\right| \le U(x),\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} U(x)\,dx < \infty.$$

Тоді

$$D\hat{\theta} \geq \frac{1}{I(\theta)}, \tag{14.3.1}$$

причому нерівність (14.3.1) *перетворюється на рівність тоді й тільки тоді, коли* $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta)$ *можна подати у вигляді*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta) = c(\theta)(h(x) - \theta).$$

Наслідок 1. *Якщо оцінка* $\hat{\theta} = \theta^*$ *задовольняє умови теореми і для неї нерівність Крамера—Рао*

$$D\hat{\theta} \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

перетворюється на рівність, то θ^* *є ефективною оцінкою параметра* θ.

Наслідок 2. *Якщо для щільності розподілу* $f(x;\theta)$ *вибірки* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ *і оцінки* $\hat{\theta} = h(\xi)$, *що задовольняють умови теореми, має місце співвідношення*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta) = c(\theta)(h(x) - \theta),$$

то $h(\xi)$ — *ефективна оцінка параметра* θ.

Нерівність Крамера—Рао (розподіл дискретний). Нерівність Крамера—Рао і твердження, аналогічні наведеним вище, мають місце також тоді, коли розподіл $P(\cdot;\theta)$ вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дискретний, тобто існує не більше, ніж зліченна множина точок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для яких

$$P_\xi(x) = P(x;\theta) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) =$$

$$= P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n;\theta) > 0;$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) = 1.$$

Лема 14.3.2 (розподіл дискретний). *Якщо для всіх можливих значень* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in X$, *вибірки* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *існують похідні*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}P(x;\theta) \quad i \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}P(x;\theta),\ \theta \in \Theta,$$

ряди

$$\sum_x \frac{\partial}{\partial\theta}P(x;\theta) \ \ i \ \ \sum_x \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}P(x;\theta)$$

збігаються абсолютно і рівномірно відносно $\theta \in \Theta$ *і виконуються умови*

$$M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(\xi;\theta)\right)^2 < \infty,\ M\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln P(\xi;\theta)\right| < \infty,\ \theta \in \Theta,$$

то для всіх $\theta \in \Theta$

$$M\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(\xi;\theta) = 0,$$

$$D\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(\xi;\theta) = M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(\xi;\theta)\right)^2 = -M\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln P(\xi;\theta).$$

Теорема 14.3.2 (нерівність Крамера—Рао, розподіл дискретний). *Нехай вибірка* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *має дискретний розподіл* $P(x;\theta)$, $x \in X$, *для якого виконуються умови леми* 14.3.2 *і* $\hat\theta = h(\xi)$ — *незсунена оцінка параметра* θ *така, що ряд*

$$\sum_x \frac{\partial}{\partial\theta}h(x)P(x;\theta)$$

збігається абсолютно і рівномірно відносно $\theta \in \Theta$. *Тоді*

$$D\hat\theta \geq \frac{1}{I(\theta)},$$

причому нерівність перетворюється на рівність тоді й тільки тоді, коли $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(x;\theta)$ *можна подати у вигляді*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(x;\theta) = c(\theta)(h(x)-\theta).$$

Наслідок 1. *Якщо оцінка* $\hat{\theta} = \theta^*$ *задовольняє умови теореми і для неї нерівність Крамера—Рао*

$$D\hat{\theta} \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

перетворюється на рівність, то θ^* *є ефективною оцінкою параметра* θ.

Наслідок 2. *Якщо для розподілу* $P(x;\theta)$, $x \in X$, *вибірки* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ *і оцінки* $\hat{\theta} = h(\xi)$, *що задовольняють умови теореми, має місце співвідношення*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(x;\theta) = c(\theta)(h(x)-\theta),$$

то $h(\xi)$ *— ефективна оцінка параметра* θ.

Приклад 14.3.1. *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— вибірка з нормального розподілу з параметрами* $(\theta; 1)$, θ *належить відрізку* $[a; b]$. *Чи є*

$$\hat{\theta} = \overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

Розв'язання. Оцінка $\hat{\theta} = \overline{\xi}$ є незсуненою оцінкою математичного сподівання θ. Щоб з'ясувати, чи буде $\hat{\theta} = \overline{\xi}$ ефективною оцінкою θ, скористаємося нерівністю Крамера—Рао (див. наслідок 1 з теореми 14.3.1): якщо

$$D\hat{\theta} = 1/I(\theta),$$

то оцінка $\hat{\theta}$ — ефективна.

Спочатку пересвідчимося, що для вибірки з нормального розподілу з параметрами $(\theta; 1)$ і функції

$$h(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

виконуються умови теореми 14.3.1. Позначимо через $g(t;\theta)$ щільність нормального розподілу з параметрами $(\theta; 1)$. Щільність

$$f(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i;\theta)$$

розподілу вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ двічі диференційовна по θ і

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\prod_{i=1}^{n} g(x_i;\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln g(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta) = -n;$$

$$M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta)\right)^2 = M\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \theta)\right)^2 = n;$$

$$M\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right| = M|-n| = n.$$

Далі, функція $h(x)f(x;\theta)$ диференційовна по θ, причому

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(h(x)f(x,\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta}(h(x_1, x_2, \ldots, x_n)f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\overline{x}\prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta) = \sum_{i=1}^{n}\overline{x}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g(x_i;\theta)\right)\prod_{j=1, j\neq i}^{n} g(x_j;\theta) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{\partial}{\partial \theta} g(x_i;\theta) \right) \prod_{j=1, j \neq i}^{n} g(x_j;\theta) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_k (x_i - \theta) \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta).$$

Ми скористалися тим, що

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g(x_i;\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x_i - \theta)^2}{2} \right\} =$$

$$= (x_i - \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x_i - \theta)^2}{2} \right\} = (x_i - \theta) g(x_i;\theta).$$

Щоб пересвідчитися, що для для функції $h(x)\dfrac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)$, існує інтегровна мажоранта, достатньо встановити, що вона існує для кожної з функцій

$$x_k x_i \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta),\ k, i = 1, 2, \ldots, n;\ \theta \in [a;b].$$

Нехай

$$c = \max_{t, \theta \in [a;b]} g(t;\theta),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

і $v(t)$ — функція, означена рівністю

$$v(t) = \begin{cases} g(t;b), & \text{якщо } t > b; \\ g(t;a), & \text{якщо } t < a; \\ c, & \text{якщо } a \le t \le b. \end{cases}$$

Функція $|t|v(t)$ є інтегровною мажорантою для функції $tg(t;\theta),\ \theta \in [a;b]$. В останньому пересвідчуємося безпосередньою перевіркою. Тому функція

$$|x_k| v(x_k) |x_i| v(x_i) \prod_{j=1, j \neq i, j \neq k}^{n} v(x_j)$$

є інтегровною мажорантою для функції

$$x_k x_i \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta).$$

У цьому легко переконатися, скориставшись теоремою Фубіні.

Отже, умови теореми 14.3.1 виконуються. Тому справджується нерівність Крамера—Рао

$$D\hat{\theta} \geq \frac{1}{I(\theta)}.$$

При цьому

$$I(\theta) = M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta)\right)^2 = -M\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right) = n;$$

$$D\hat{\theta} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}nD\xi_i = \frac{1}{n}1 = \frac{1}{n},$$

і нерівність Крамера—Рао перетворюється на рівність, що є достатньою умовою ефективності оцінки $\hat{\theta}$ параметра θ.

Інший спосіб розв'язання прикладу полягає в перевірці достатньої умови перетворення нерівності Крамера—Рао на рівність, а саме, в перевірці співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = c(\theta)(h(x)-\theta),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Маємо

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\prod_{i=1}^{n} g(x_i;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln g(x_i;\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta =$$

$$= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \theta\right) = n(h(x)-\theta).$$

Звідси випливає, що $\hat{\theta} = \overline{\xi}$ — ефективна оцінка параметра θ.

Приклад 14.3.2. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з пуассонового розподілу з параметром λ (λ належить відрізку $[a; b]$, $a > 0$). Чи є $\hat{\lambda} = \overline{\xi}$ ефективною оцінкою параметра λ?*

Розв'язання. Зазначимо, що $\hat{\lambda} = \overline{\xi}$ є незсуненою оцінкою λ. Далі скористаємося нерівністю Крамера—Рао. Для цього пересвідчимося, що для вибірки з пуассонового розподілу і функції

$$h(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

виконуються умови теореми 14.3.2 (нерівність Крамера—Рао). Позначимо $\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ через $g(x;\lambda)$, $x = 0, 1, \ldots, n$. Розподілом вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є

$$P(x;\lambda) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda}.$$

Функція $P(x;\lambda)$ двічі диференційовна по λ і

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln P(x;\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \ln \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\lambda} \ln g(x_j;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\lambda);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \ln P(x;\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\lambda)\right) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Функція

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)P(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda) = \overline{x}P(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda)$$

диференційовна по λ, причому

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial\lambda}P(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda) =$$

$$= \overline{x}\frac{\partial}{\partial\lambda}\prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) = \overline{x}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(x_i;\lambda)\right)\prod_{j=1, j\neq i}^{n} g(x_j;\lambda) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_k\left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\prod_{j=1, j\neq i}^{n} g(x_j;\lambda) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_k\left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)\prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda),$$

оскільки

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}g(x_i;\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right) = \left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)g(x_i;\lambda).$$

Далі, при підсумовуванні по $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ величини $x_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ набувають цілих невід'ємних значень.

Ряд

$$\sum_{x} h(x)\frac{\partial}{\partial\lambda}P(x;\lambda) =$$

$$= \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_k \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right) \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} x_k \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right) \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) \right)$$

мажоровний рядом

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} x_k \left| \frac{x_i}{\lambda} - 1 \right| \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{x_1} g(x_1;\lambda) \right) \left(\sum_{x_2} g(x_2;\lambda) \right) \ldots \right.$$

$$\ldots \left(\sum_{x_k} x_k g(x_k;\lambda) \right) \ldots \left(\sum_{x_i} \left| \frac{x_i}{\lambda} - 1 \right| g(x_i;\lambda) \right) \ldots$$

$$\left. \ldots \left(\sum_{x_n} g(x_n;\lambda) \right) \right).$$

Останній збігається абсолютно й рівномірно відносно $\lambda \in [a;b]$, оскільки

$$\sum_{x} g(x;\lambda) = \sum_{x} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \le e^{-a} \sum_{x} \frac{b^x}{x!} = e^{b-a};$$

$$\sum_{x} x g(x;\lambda) = \sum_{x} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \le$$

$$\le e^{-a} \sum_{x} x \frac{b^x}{x!} \le e^{b-a} \sum_{x} x \frac{b^x}{x!} e^{-b} = b e^{b-a};$$

$$\sum_{x} \left| \frac{x}{\lambda} - 1 \right| \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \le e^{b-a} \left(\frac{b}{a} + 1 \right).$$

Так що для вибірки з пуассонового розподілу і функції

$$h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

виконуються умови теореми 14.3.2 і, отже, має місце нерівність Крамера—Рао

$$D\hat{\theta} \geq \frac{1}{I(\theta)}.$$

При цьому

$$I(\lambda) = M\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln P_\lambda(\xi)\right)^2 = -M\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln P_\lambda(\xi) = \frac{n}{\lambda};$$

$$D\hat{\lambda} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right) = \frac{1}{n^2}nD\xi_1 = \frac{1}{n^2}n\lambda = \frac{\lambda}{n}.$$

Тому для вибірки з пуассонового розподілу й оцінки

$$\hat{\lambda} = \overline{\xi}$$

нерівність Крамера—Рао перетворюється на рівність, а отже, $\overline{\xi}$ — ефективна оцінка параметра λ.

Інший спосіб розв'язання прикладу полягає у перевірці достатньої умови перетворення нерівності Крамера—Рао на рівність, а саме, умови

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln P(x;\lambda) = c(\lambda)(h(x) - \lambda).$$

Маємо

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln P(x;\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln g(x_j;\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - n\lambda\right) = \frac{n}{\lambda}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \lambda\right).$$

Тому $\hat{\lambda} = \overline{\xi}$ — ефективна оцінка параметра λ.

14.4 Задачі

АЗ: $14.4, 14.6, 14.27, 14.43.$
СЗ: $14.9, 14.12, 14.22, 14.47.$

14.1. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{якщо } x \in [\theta - h; \theta + h]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - h; \theta + h] \end{cases}$$

($f(x;\theta,h)$ — щільність рівномірного на відрізку $[\theta - h, \theta + h]$ розподілу) і $(\hat{\theta}, \hat{h})$ — точка, в якій функція

$$L(\theta,h) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i;\theta,h)$$

досягає найбільшого значення.

Чи є $\hat{\theta}, \hat{h}$ оцінками і, якщо так, то чи будуть вони незсуненими оцінками параметрів θ та h? Спроможними оцінками цих параметрів? Якщо ні, то, можливо, $\hat{\theta}$ і $\hat{h}$ є незсуненими й спроможними оцінками інших параметрів розподілу?

14.2. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k;r,\theta) = C_{r-1+k}^{r-1} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^k, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

де r — фіксоване й відоме, параметр $\theta > 0$.

Позначимо через $\hat{\theta}$ розв'язок рівняння

$$m_1(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

де

$$m_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k;r,\theta).$$

Чи є $\hat{\theta}$ оцінкою і якщо так, то чи буде вона незсуненою оцінкою параметра θ? Спроможною оцінкою θ?

З а у в а ж е н н я. Якщо позначити $\frac{1}{1+\theta} = p$, то розподіл

$$P(k;r,\theta) = C_{r-1+k}^{r-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, k=0,1,\ldots,$$

набуває вигляду

$$P(k;r,p) = C_{r-1+k}^{r-1}\,p^r(1-p)^k, k=0,1,\ldots,$$

добре відомого від'ємного біномного розподілу (див. задачу 15.35).

14.3. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},$$

σ^2 належить скінченному відрізку $[a;b]$, $a > 0$.

Чи є

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

ефективною оцінкою параметра σ^2?

14.4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a;b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_2 = \max\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i;$$

$$\hat{\theta}_4 = \frac{\xi_{n-1}+\xi_n}{2};\ \hat{\theta}_5 = \max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\};$$

$$\hat{\theta}_6 = \frac{1}{2}(\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_7 = \min\{\xi_i\} - \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_8 = \max\{\xi_i\} + \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}).$$

Серед $\hat{\theta}_i, i = 1, 2, \ldots, 8$, визначити незсунені, спроможні оцінки параметрів a і b. Можливо, серед них є незсунені й спроможні оцінки параметрів, відмінних від a і b?

14.5. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з пуассонового розподілу з параметром λ:

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, \ldots$$

Позначимо через $\hat{\lambda}$ точку, в якій функція

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i; \lambda)$$

досягає свого найбільшого значення.

Чи є $\hat{\lambda}$ оцінкою і якщо так, то чи буде вона незсуненою оцінкою параметра λ? Спроможною оцінкою λ?

14.6. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

($p(x)$ — щільність логарифмічно нормального розподілу), μ_0 — відоме, $\sigma^2 > 0$ і належить скінченному відрізку $[a; b]$, $a > 0$.

Чи є $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (\ln \xi_i - \mu_0)^2$ ефективною оцінкою параметра σ^2?

14.7. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } x \in [\theta-1, \theta+1]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta-1, \theta+1]. \end{cases}$$

Позначимо через $\hat{\theta}$ точку, в якій функція

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i;\theta)$$

досягає свого найбільшого значення.

Чи є $\hat{\theta}$ оцінкою і якщо так, то чи буде вона незсуненою оцінкою параметра θ? Спроможною оцінкою θ?

14.8. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\alpha,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}(x-\theta)\right\}, & \text{якщо } x \geq \theta; \\ 0, & \text{якщо } x < \theta. \end{cases}$$

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\} - \frac{\overline{\xi} - \min\{\xi_i\}}{n}; \;\; \hat{\theta}_2 = \overline{\xi} - \hat{\theta}_1.$$

Незсуненими, спроможними оцінками яких параметрів є $\hat{\theta}_1$ і $\hat{\theta}_2$ (можливо, ці параметри відмінні від α і θ)?

14.9. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma_0^2}\right\},$$

σ_0 — відоме, θ належить скінченному відрізку $[a;b]$.

Чи є

$$\hat{\theta} = \overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

14.10. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < \theta; \\ \exp\{\theta - x\}, & \text{якщо } x \geq \theta. \end{cases}$$

Чи є

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{n} + \min\{\xi_i\}$$

незсуненою оцінкою параметра θ? Спроможною оцінкою θ?

14.11. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;a,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Позначимо через $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$ точку, в якій функція

$$L(a,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; a, \sigma^2)$$

досягає свого найбільшого значення.

Чи є $\hat{a}$ та $\hat{\sigma}^2$ оцінками і якщо так, то чи будуть вони незсуненими оцінками відповідно параметрів a та σ^2? Спроможними оцінками цих параметрів?

14.12. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k;\theta) = C_{r-1+k}^{r-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, k = 0, 1, \ldots; \theta > 0,$$

r — фіксоване й відоме, θ належить скінченному відрізку $[a;b]$.

Чи є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

В к а з і в к а. Див. задачі 14.2 і 15.35.

14.13. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h_0}, & \text{якщо } x \in [\theta - h_0, \theta + h_0]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - h_0, \theta + h_0]. \end{cases}$$

Позначимо через $\hat{\theta}$ точку, в якій функція

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i;\theta)$$

досягає свого найбільшого значення.

Чи є $\hat{\theta}$ оцінкою і якщо так, то чи буде вона незсуненою оцінкою параметра θ? Спроможною оцінкою θ?

14.14. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & \text{якщо } x \in [\theta - \sqrt{3}\sigma, \theta + \sqrt{3}\sigma]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - \sqrt{3}\sigma, \theta + \sqrt{3}\sigma]. \end{cases}$$

Позначимо через $\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}^2$ розв'язок системи рівнянь

$$m_1(\hat{\theta};\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

$$m_2(\hat{\theta};\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

де

$$m_k(\theta;\sigma^2) = \int_{\mathbb{R}^1} x^k f(x;\theta,\sigma^2)\,dx,\ \ k = 1, 2.$$

Чи є $\hat{\theta}$ та $\hat{\sigma}^2$ оцінками і, якщо так, чи є вони незсуненими оцінками відповідно параметрів θ та σ^2? Спроможними оцінками цих параметрів?

14.15. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k;\theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \ k = 0, 1, \ldots,$$

де $\theta > 0$ і належить скінченному відрізку $[a; b]$.

Чи є

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

Вказівка. Якщо позначити $\frac{1}{1+\theta} = p$, то розподіл

$$P(k;\theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \ k = 0, 1, \ldots$$

набуває добре відомого вигляду геометричного розподілу

$$P(k;p) = p(1-p)^k, \ k = 0, 1, \ldots$$

14.16. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h_0}, & \text{якщо } x \in [\theta - h_0, \theta + h_0]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - h_0, \theta + h_0], \end{cases}$$

h_0 — відоме ($f(x;\theta)$ — щільність рівномірного на відрізку $[\theta - h_0, \theta + h_0]$ розподілу).

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\}; \ \hat{\theta}_2 = \max\{\xi_i\}; \ \hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i;$$

$$\hat{\theta}_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - h_0) + (1-\lambda)(\min\{\xi_i\} + h_0), \ \lambda \in [0;1].$$

Визначити серед оцінок $\hat{\theta}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\hat{\theta}_\lambda$ незсунені, спроможні оцінки параметра θ. Можливо, серед них є незсунені, спроможні оцінки інших параметрів? З'ясувати, яких саме?

14.17. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з нормального розподілу зі щільністю

$$f(x; a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Позначимо через $\hat{a}, \hat{\sigma}^2$ розв'язок системи рівнянь

$$m_1(\hat{a}; \hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

$$m_2(\hat{a}; \hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

де

$$m_k(a; \sigma^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^k f(x; a, \sigma^2)\, dx, \ k = 1, 2.$$

Чи є $\hat{a}$ та $\hat{\sigma}^2$ оцінками? І якщо так, то чи є $\hat{a}$ і $\hat{\sigma}^2$ незсуненими оцінками відповідно параметрів a і σ^2? Спроможними оцінками цих параметрів?

14.18. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; m, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^m (m-1)!} x^{m-1} \exp\left\{-\dfrac{1}{\theta} x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

($f(x; m, \theta)$ — щільність розподілу Ерланга з параметрами (m, θ)), m — відоме; θ належить скінченному відрізку $[a; b]$.

Чи є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

14.19. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Позначимо через $(\hat{a}, \hat{b})$ точку, в якій функція

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; a, b)$$

досягає свого найбільшого значення (може існувати не одна така точка).

Чи є $\hat{a}$ та $\hat{b}$ оцінками? Якщо так, то чи є $\hat{a}$ і $\hat{b}$ незсуненими оцінками відповідно параметрів a і b? Спроможними оцінками цих параметрів?

14.20. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k; \theta) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \; k = 0, 1, \ldots; \; \theta > 0.$$

Позначимо через $\hat{\theta}$ розв'язок рівняння

$$m_1(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

де

$$m_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \theta).$$

Чи є $\hat{\theta}$ оцінкою? І якщо так, то чи є вона незсуненою оцінкою параметра θ? Спроможною оцінкою θ?

Вказівка. Див. вказівку до задачі 14.15.

14.21. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} \exp\left\{-\dfrac{1}{\theta} x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\theta > 0$ і належить скінченному відрізку $[a; b]$. Чи є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

14.22. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; \theta, h) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \text{якщо } x \in [\theta - h, \theta + h]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - h, \theta + h]. \end{cases}$$

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2}\left(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}\right); \ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_3 = \min\{\xi_i\} - \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_4 = \max\{\xi_i\} + \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}).$$

Визначити серед $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, незсунені, спроможні оцінки параметрів θ і h. Можливо, серед них є незсунені, спроможні оцінки інших параметрів? З'ясувати, яких саме.

14.23. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$Q(k; p) = p^k (1-p)^{1-k}, \ k = 0; 1, \ 0 < p < 1.$$

Позначимо через $\hat{p}$ точку, в якій функція

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{\xi_i} (1-p)^{1-\xi_i}$$

досягає свого найбільшого значення.

Чи є $\hat{p}$ незсуненою оцінкою параметра p? Спроможною оцінкою цього параметра?

14.24. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\exp\left\{-\dfrac{1}{\theta}(x - m_0)\right\}, & \text{якщо } x > m_0; \\ 0, & \text{якщо } x \le m_0, \end{cases}$$

$\theta > 0, m_0$ — відоме, θ належить скінченному відрізку $[a; b]$.

Чи є $\hat{\theta} = \overline{\xi} - m_0$ ефективною оцінкою параметра θ?

14.25. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{якщо } x \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \end{cases}$$

θ_0 — відоме.

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2}\left(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}\right);\ \hat{\theta}_2 = \theta_0 - \hat{\theta}_1;$$

$$\hat{\theta}_3 = \theta_0 + \hat{\theta}_1;\ \hat{\theta}_4 = \max\left\{\max\{\xi_i\} - \theta_0, \theta_0 - \min\{\xi_i\}\right\}.$$

Визначити серед $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, незсунені, спроможні оцінки параметра h. Можливо, серед них є незсунені, спроможні оцінки інших параметрів? З'ясувати, яких саме.

14.26. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\exp\left\{-\dfrac{1}{\alpha}x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Довести, що

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

є незсуненою і спроможною оцінкою параметра α.

Чи є

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(\xi_{n-1} + \xi_n)$$

незсуненою оцінкою параметра α? Спроможною оцінкою цього параметра?

14.27. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з біномного розподілу

$$P(k; \theta) = C_N^k \theta^k (1-\theta)^{N-k},\ k = 0, 1, \ldots, N,$$

де N — відоме ціле число; θ належить скінченному відрізку $[a; b]$.

Чи є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

14.28. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; \theta, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} \exp\{-\dfrac{1}{\theta}(x-b)\}, & \text{якщо } x > b; \\ 0, & \text{якщо } x \le b. \end{cases}$$

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i;\ \ \hat{\theta}_2 = \min\{\xi_i\};\ \ \hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2.$$

Чи є серед $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ незсунені, спроможні оцінки параметрів θ і b? Можливо, серед них є незсунені і спроможні оцінки інших параметрів? З'ясувати, яких саме.

14.29. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з біномного розподілу з параметрами m і θ:

$$P(k; \theta) = C_m^k \theta^k (1-\theta)^{m-k},\ k = 0, 1, \ldots, m,$$

m — відоме.

Позначимо через $\hat{\theta}$ точку, в якій функція

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{\xi_i} \theta^{\xi_i} (1-\theta)^{m-\xi_i}$$

досягає найбільшого значення (може існувати не одна така точка). Незсуненою і спроможною оцінкою яких параметрів є $\hat{\theta}$?

14.30. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з двобічного показникового розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}|x-m_0|\right\}, \ \theta > 0,$$

m_0 — відома константа, θ належить скінченному відрізку $[a;b]$.

Чи є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - m_0|$$

ефективною оцінкою параметра θ?

14.31. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;h) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \text{якщо } x \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h]. \end{cases}$$

Позначимо через $\hat{h}$ точку, в якій функція

$$L(h) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; h)$$

досягає свого найбільшого значення.

Чи є $\hat{h}$ оцінкою і якщо так, то чи є вона незсуненою оцінкою параметра h? Спроможною оцінкою цього параметра?

14.32. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\sigma^2) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi\sigma^2}}\,\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

($f(x;\sigma^2)$ — щільність напівнормального розподілу).

Незсуненою, спроможною і ефективною оцінкою якого параметра є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,?$$

14.33. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta}\,\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\theta}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

($f(x;\theta)$ — щільність розподілу Релея), θ належить скінченному відрізку $[a;b]$.

Чи є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2$$

ефективною оцінкою параметра θ?

14.34. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a_0}, & \text{якщо } x \in [a_0;b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a_0;b]. \end{cases}$$

Розглядаються оцінки

$$\hat{\theta}_1 = \max\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i;$$

$$\hat{\theta}_3 = \max\{\xi_i\} + \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - a_0)$$

(a_0 — відоме).

Серед $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3$, визначити незсунені оцінки параметра b. Можливо, серед них є незсунені й спроможні оцінки інших параметрів? З'ясувати, яких саме.

14.35. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з біномного розподілу з параметрами m і p:

$$P(k; p) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \; k = 0, 1, \ldots, m.$$

Чи є

$$\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

спроможною оцінкою параметра p?

14.36. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$ ($f(x; \mu)$ — щільність логарифмічно нормального розподілу); σ_0 — відоме, μ належить скінченному відрізку $[a; b]$.

Чи є

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i$$

ефективною оцінкою параметра μ?

14.37. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; \theta, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{якщо } x > \lambda; \\ 0, & \text{якщо } x \le \lambda, \end{cases}$$

$\lambda > 0, \; \theta > 2$ (розподіл Парето); θ — відоме.

Розглядаються оцінки

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\theta - 1}{\theta n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i; \ \ \hat{\lambda}_2 = \frac{\theta - 2}{\theta n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Незсуненими і спроможними оцінками яких параметрів є $\hat{\lambda}_1$ та $\hat{\lambda}_2$?

14.38. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^\nu \Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\left\{-\dfrac{1}{\theta} x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

ν — відомий параметр.

Чи є

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n\nu} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ефективною оцінкою параметра θ?

14.39. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з рівномірного на відрізку $[a; a+1]$ розподілу. Розглядаються дві оцінки параметра a:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{2}; \ \hat{a}_2 = \max\{\xi_i\} - \frac{n}{n+1}.$$

Довести, що $\hat{a}_1$ та $\hat{a}_2$ є незсуненими оцінками параметра a.

Знайти $D\hat{a}_1$ і $D\hat{a}_2$. Довести, що коли $n \to \infty$,

$$D\hat{a}_2 = o(D\hat{a}_1).$$

14.40. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього межі міцності проти розриву матеріалу (див. приклад 17.4.1) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії межі міцності проти розриву матеріалу з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98 (для вимірювань, що проводилися на стенді A).

14.41. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього вмісту золота на кубічний метр породи, що добувається ударно-канатним свердлінням (див. задачу 17.8) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії вмісту золота з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.42. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього вмісту золота на кубічний метр породи, що добувається із шурфів (див. задачу 17.8), з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії вмісту золота з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.43. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього товщини пластикового покриття дроту (див. задачу 18.46) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії товщини пластикового покриття дроту з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.44. Знайти довірчий інтервал для:

1° значення величини e, знайденої Р. Мілікеном під час визначення заряду електрона (див. задачу 18.34) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії вимірювання значення величини e з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.45. Знайти довірчий інтервал для: 1° середнього вмісту марганцю у сталі, виплавленій у конверторі I (див. задачу 17.17) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії вмісту марганцю у сталі, виплавленій у конверторі I, з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.46. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього відбивної здатності фарби A (див. задачу 17.2) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії відбивної здатності фарби B з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.47. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього вмісту хрому у нержавіючій сталі типу 18Cr10Ni2Mo (див. задачу 17.22) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії вмісту хрому з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.48. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього опору дроту типу A (див. задачу 17.24) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії опору дроту з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.49. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього пористості конденсаторного паперу партії I (див. задачу 19.36) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії пористості конденсаторного паперу партії I з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.50. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього температури лівої шини автобуса (див. задачу 17.31) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії температури лівої шини автобуса з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.51. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього довжини виробів після відпалювання (див. задачу 17.37) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії довжини виробів після відпалювання з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.52. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього глибини канавки на шині, знайденої контролером I (див. приклад 19.2.1) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії глибини канавки з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

14.53. Знайти довірчий інтервал для:

1° середнього різниці товщини плиток при стиранні для: відносної концентрації наповнювача 1 до 1 (див. приклад 19.2.1) з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсії різниці товщини плиток при стиранні з коефіцієнтом надійності: а) 0,90; б) 0,98.

Глава 15

Методи побудови оцінок

15.1 Емпіричні оцінки

Емпірична функція розподілу. Нехай ξ — випадкова величина, функція розподілу $F(x)$ якої невідома. Ми маємо n незалежних спостережень $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ випадкової величини ξ — вибірку з розподілу F. За вибіркою $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ можна побудувати "хорошу" оцінку функції розподілу $F(x)$.

Означення. Функцію $\hat{F}_n(x)$, означену на $\mathbb{R}^1$ рівністю

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_k),$$

називатимемо *емпіричною функцією розподілу* ($I_A(t)$ — індикатор множини A).

Емпіричну функцію розподілу ще можна означити так:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\mu(x)}{n},$$

де $\mu(x)$ — кількість вибіркових значень ξ_k, для яких $\xi_k < x$, оскільки

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_k).$$

Для кожного фіксованого x емпірична функція розподілу $\hat{F}_n(x)$ як функція випадкового вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є випадковою величиною. Тому $\hat{F}_n(x)$ є функцією і від ω, тобто $\hat{F}_n(x) = \hat{F}_n(x, \omega),\ \omega \in \Omega,\ x \in \mathbb{R}^1$.

Емпірична функція розподілу $\hat{F}_n(x)$ для кожного фіксованого x є незсуненою і спроможною оцінкою значення $F(x)$ функції розподілу.

За вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ означимо випадкові величини $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$: для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$ впорядкуємо значення $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ в порядку зростання:

$$\xi_{k_1}(\omega) \leq \xi_{k_2}(\omega) \leq \ldots \leq \xi_{k_n}(\omega)$$

і позначимо

$$\xi_1^*(\omega) = \xi_{k_1}(\omega),\ \xi_2^*(\omega) = \xi_{k_2}(\omega),\ \ldots,\ \xi_n^*(\omega) = \xi_{k_n}(\omega).$$

Означення. Послідовність $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ називається *варіаційним рядом* послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а випадкові величини $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ називатимемо *порядковими статистиками.*

У термінах порядкових статистик емпіричну функцію розподілу можна подати у вигляді

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\mu^*(x)}{n}, \tag{15.1.1}$$

де $\mu^*(x)$ — кількість ξ_k^*, для яких $\xi_k^* < x$. Безпосередньо з рівності (15.1.1) дістаємо, що для фіксованого ω значення $\hat{F}_n(x)$ дорівнює 0 у кожній точці x проміжку $(-\infty, \xi_1^*]$, оскільки кількість тих k, для яких $\xi_k^* < x$, дорівнює 0; $\hat{F}_n(x) = 1/n$ у кожній точці проміжку $(\xi_1^*, \xi_2^*]$, тому що кількість тих k, для яких $\xi_k^* < x$, дорівнює 1 і т. д. і, нарешті, $\hat{F}_n(x) = 1$ для кожного x з проміжку $(\xi_n^*, +\infty)$.

Із наведеного вище випливає, що для кожного фіксованого ω функція $\hat{F}_n(x) = \hat{F}_n(x, \omega)$ невід'ємна; вона є сталою на кожному з проміжків $(-\infty, \xi_1^*], (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*],\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ (\xi_n^*, +\infty)$ (а отже, неперервною зліва) і неспадною — зростає в точках $\xi_k^*,\ k = 1, 2, \ldots, n$, стрибками $1/n$.

Графік емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ (точніше, реалізації $\hat{F}_n(x,\omega)$) зображено на рис. 15.1.1.

Зауваження 1. Для вибірок $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із неперервних розподілів імовірність того, що вибіркові значення співпадуть, дорівнює нулеві, але оскільки ми фіксуємо результати із заданою точністю (наприклад, до третього знака), деякі вибіркові значення можуть співпасти. При цьому стрибок емпіричної функції розподілу в точці ξ_k дорівнює l/n, де l — кількість вибіркових значень, які співпадають з ξ_k, враховуючи й ξ_k.

Зауваження 2. Розподіл, що відповідає емпіричній функції розподілу $\hat{F}_n(x)$, називатимемо *емпіричним*. Для кожного фіксованого ω це дискретний розподіл, який ставить у відповідність кожній точці ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, "масу" $1/n$ (або l/n, якщо з ξ_k співпадають l вибіркових значень, враховуючи і ξ_k).

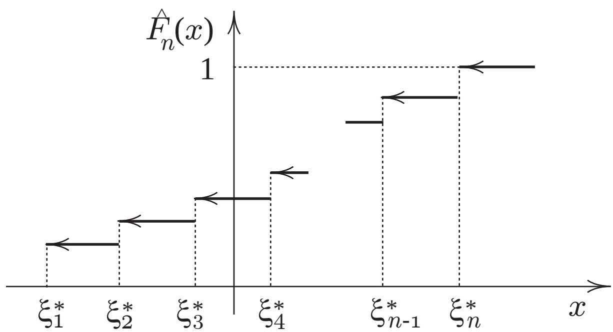

Рис. 15.1.1: Графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$

Про відхилення емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ від функції розподілу $F(x)$. Для кожного фіксованого x значення емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$, побудованої за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із F, є незсуненою і спроможною оцінкою $F(x)$ (дає хороше наближення для $F(x)$). Природно поставити запитання: наскільки емпірична функція розподілу $\hat{F}_n(x)$ відхиляється від $F(x)$?

Якими можуть бути відхилення $\hat{F}_n(x)$ від $F(x)$? Зазначимо, що відхилення $\hat{F}_n(x)$ від $F(x)$ є випадковою величиною (оскільки $\hat{F}_n(x) = \hat{F}_n(x, \omega)$), і коли ми говоримо про таке відхилення, то маємо на увазі його розподіл.

Міру відхилення емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ від функції розподілу $F(x)$ можна вводити різними способами. Розглянемо відхилення $\hat{F}_n(x)$ від $F(x)$, запропоноване А. М. Колмогоровим (для неперервної $F(x)$):

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|,$$

далі писатимемо $\sup\limits_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|$. Ця міра відхилення має важливу властивість: для досить великих n розподіл нормованого відхилення

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}},$$

незалежно від розподілу F, з якого добуто вибірку $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, близький до розподілу Колмогорова (див. главу 19).

Обчислення $\boldsymbol{\sup\limits_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|}$. Нехай $\hat{F}_n(x)$ — емпірична функція розподілу, побудована за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, точніше — за реалізацією вибірки; $F(x)$ — неперервна функція розподілу. Часто виникає необхідність обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

Зазначимо, що $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — не обов'язково вибірка з розподілу F.

Оскільки $\hat{F}_n(x)$ стала на проміжках

$$(-\infty, \xi_1^*], (\xi_1^*, \xi_2^*], \ldots, (\xi_{n-1}^*, \xi_n^*], (\xi_n^*, +\infty), \tag{15.1.2}$$

то для обчислення

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|,$$

коли x "перебігає" $\mathbb{R}^1$, значення $\sup\limits_x \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|$ достатньо обчислити на кожному із зазначених проміжків і з добутих чисел вибрати найбільше.

Обчислимо спочатку

$$\sup_{x \in (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|, \; k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Функція $\hat{F}_n(x)$ стала на кожному із проміжків (15.1.2), $F(x)$ — неспадна функція, а отже і функція $F(x) - \hat{F}_n(x)$ на проміжках (15.1.2) неспадна, і тому (рис. 15.1.2) значення

$$\sup_{x \in (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|$$

дорівнює одному із чисел

$$\left|\sup_{x \in (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]} \Big(F(x) - \hat{F}_n(x)\Big)\right|, \; \left|\inf_{x \in (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]} \Big(F(x) - \hat{F}_n(x)\Big)\right|.$$

Далі,

$$\sup_{x \in (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]} \Big(F(x) - \hat{F}_n(x)\Big) =$$

$$= \lim_{x \uparrow \xi_{k+1}^*} \Big(F(x) - \hat{F}_n(x)\Big) = F(\xi_{k+1}^*) - \hat{F}_n(\xi_{k+1}^*);$$

$$\inf_{x \in (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]} \Big(F(x) - \hat{F}_n(x)\Big) = \lim_{x \downarrow \xi_k^*} \Big(F(x) - \hat{F}_n(x)\Big) =$$

$$= F(\xi_k^*) - \lim_{x \downarrow \xi_k^*} \hat{F}_n(x) = F(\xi_k^*) - \hat{F}_n(\xi_{k+1}^*).$$

Обчислюючи границі, ми врахували, що функція $\hat{F}_n(x)$ стала на проміжках (15.1.2), а отже, неперервна зліва (див. рис. 15.1.2).

Таким чином,

$$\sup_{x \in (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|$$

дорівнює

$$\left|\sup_{x\in(\xi_k^*,\xi_{k+1}^*]}\Big(F(x)-\hat{F}_n(x)\Big)\right| = \left|F(\xi_{k+1}^*)-\hat{F}_n(\xi_{k+1}^*)\right|$$

або

$$\left|\inf_{x\in(\xi_k^*,\xi_{k+1}^*]}\Big(F(x)-\hat{F}_n(x)\Big)\right| = \left|F(\xi_k^*)-\hat{F}_n(\xi_{k+1}^*)\right|,$$

$k=1,2,\ldots,n-1.$

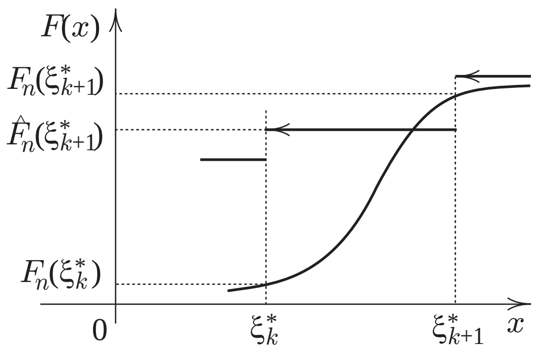

Рис. 15.1.2: До обчислення $\sup\limits_x |F(x)-\hat{F}_n(x)|$

Для проміжків $(-\infty,\xi_1^*]$ та $(\xi_n^*,+\infty)$

$$\sup_{x\in(-\infty,\xi_1^*]}\left|F(x)-\hat{F}_n(x)\right| = F(\xi_1^*) = \left|F(\xi_1^*)-\hat{F}_n(\xi_1^*)\right|;$$

$$\sup_{x\in(\xi_n^*,+\infty)}\left|F(x)-\hat{F}_n(x)\right| = |F(\xi_n^*)-1| = 1-F(\xi_n^*).$$

Якщо через ξ_{n+1}^* позначити довільну точку, що лежить праворуч від ξ_n^*, то за означенням функції $\hat{F}_n(x)$ її значення $\hat{F}_n(\xi_{n+1}^*)$ дорівнює одиниці й останню рівність можна записати в тій самій формі, що й інші:

$$\sup_{x\in(\xi_n^*,+\infty)} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right| = \left|F(\xi_n^*) - \hat{F}_n(\xi_{n+1}^*)\right|.$$

Отже,

$$\sup_x |F(x) - \hat{F}_n(x)|$$

дорівнює найбільшому із чисел

$$\left|F(\xi_k^*) - \hat{F}_n(\xi_k^*)\right|, \left|F(\xi_k^*) - \hat{F}_n(\xi_{k+1}^*)\right|, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

де $\hat{F}_n(\xi_{n+1}^*) = 1$.

Приклад 15.1.1. *Нехай* 2,4; 1,0; 0,7; 0,0; 1,1; 1,6; 1,1; −0,4; 0,1; 0,7 — *вибірка з неперервного розподілу.*

Побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ *і графіки функцій нормального розподілу* $N_{a;\sigma^2}(x)$ *з параметрами:* 1) $a = 0{,}8$; $\sigma = 0{,}8$; 2) $a = 1$; $\sigma = 0{,}5$. *Обчислити значення*

$$\sup_x \left|N_{a;\sigma^2}(x) - \hat{F}_n(x)\right|.$$

Р о з в' я з а н н я. Щоб побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$, розмістимо вибіркові значення у варіаційний ряд:

$$-0{,}4; 0{,}0; 0{,}1; 0{,}7; 0{,}7; 1{,}0; 1{,}1; 1{,}1; 1{,}6; 2{,}4.$$

Оскільки вибірку добуто з неперервного розподілу, однакових вибіркових значень не має бути. Проте у вибірці, що розглядається, вони все-таки є: 0,7 і 1,1 зустрічаються двічі. Це зумовлено тим, що вимірювання провадяться з обмеженою кількістю знаків, у прикладі, що розглядається, — до десятих. Через відкинуті знаки деякі вибіркові значення можуть співпадати.

Для побудови графіка реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_{10}(x,\omega)$ нанесемо на вісь абсцис порядкові статистики ξ_k^*, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Емпірична функція розподілу $\hat{F}_{10}(x,\omega)$ стала на проміжках $(-\infty, \xi_1^*], (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]$, $k =$

$= 1, 2, \ldots, 9$, $(\xi_{10}^*, +\infty)$. На проміжку $(-\infty, \xi_1^*]$ вона дорівнює нулеві й, переходячи через точки ξ_k^* (за винятком 0,7 і 1,1), зростає стрибками $1/10$, а при переході через точки 0,7 і 1,1 — стрибками $2/10$ (вибіркові значення 0,7 та 1,1 у вибірці зустрічаються двічі). Графік реалізації $\hat{F}_{10}(x, \omega)$ емпіричної функції розподілу $\hat{F}_{10}(x)$ зображено на рис. 15.1.3.

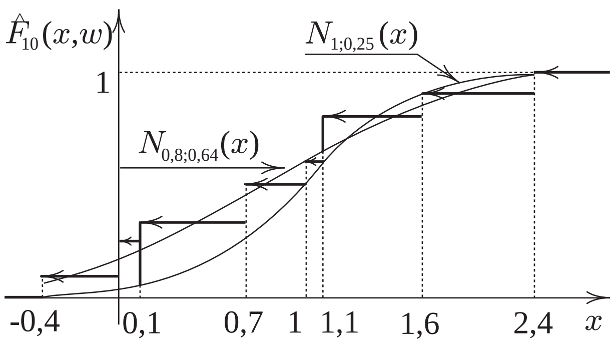

Рис. 15.1.3: До обчислення
$\sup\limits_x \left|N_{0,8;0,64}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|$ і $\sup\limits_x \left|N_{1;0,25}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|$

Для обчислення

$$\sup_x \left|N_{a;\sigma^2}(x) - \hat{F}_n(x)\right|$$

крім значень $\hat{F}_n(x)$, ще необхідно знати значення функції розподілу

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

у точках $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$. Значення функції $N_{a;\sigma^2}(x)$ визначаємо за значеннями табульованої функції $N_{0;1}(x)$ нормального розподілу з параметрами (0;1) (див. табл. 22.1.1).

Після заміни змінної $(t-a)/\sigma = y$ в останньому інтегралі дістаємо

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = N_{0;1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Етапи обчислення

$$\delta = \sup_x \left|F(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|,$$

коли $F(x) = N_{0,8;0,64}(x)$, зведено в табл. 15.1.1, згідно з якою $\delta = 0{,}16$.

Таблиця 15.1.1. До обчислення $\sup\limits_x \left|N_{0,8;0,64}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|$

ξ_k^*	$\hat{F}_{10}(\xi_k^*)$	$F(\xi_k^*)$	$\lvert F(\xi_k^*) - \hat{F}_{10}(\xi_k^*)\rvert$	$\lvert F(\xi_k^*) - \hat{F}_{10}(\xi_{k+1}^*)\rvert$
−0,4	0	0,07	0,07	0,03
0,0	0,1	0,16	0,06	0,04
0,1	0,2	0,19	0,01	0,11
(2) 0,7	0,3	0,45	0,15	0,05
1,0	0,5	0,58	0,08	0,02
(2) 1,1	0,6	0,64	0,04	**0,16**
1,6	0,8	0,84	0,04	0,06
2,4	0,9	0,98	0,08	0,02
ξ_{n+1}^*	1,0			

Аналогічно знаходимо, що

$$\sup_x \left|N_{1;0,25}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right| = 0{,}26.$$

Емпіричні (вибіркові) значення параметрів. За допомогою емпіричної функції розподілу можна будувати інтуїтивно-наочні оцінки параметрів розподілу.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу $F(\cdot;\theta)$, що залежить від параметра θ. Параметр θ невідомо, і його необхідно оцінити за вибіркою.

Припустимо, що параметр θ однозначно визначається розподілом (функцією розподілу $F(x;\theta)$), тобто

$$\theta = \varPhi\left(F(x;\theta)\right),$$

де $\varPhi$ — функціонал, заданий на деякій множині функцій розподілу. Наприклад, $a = M\xi,\ \sigma^2 = D\xi$ (коли вони існують) є функціоналами функції розподілу $F(x)$ випадкової величини:

$$a = \int\limits_{\mathbb{R}^1} xF(dx);\ \sigma^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\left(x - \int\limits_{\mathbb{R}^1} tF(dt)\right)^2 F(dx).$$

Вибірка $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ визначає емпіричну функцію розподілу $\hat{F}_n(x)$. І оскільки остання близька до функції розподілу $F(x;\theta)$ ($\hat{F}_n(x)$ при кожному x є незсуненою і спроможною оцінкою $F(x;\theta)$), а $\theta = \varPhi(F(x;\theta))$, то за оцінку параметра θ природно розглядати

$$\hat{\theta}_n = \varPhi(\hat{F}_n(x)).$$

Наприклад, для параметра a формула $\hat{\theta}_n = \varPhi(\hat{F}_n(x))$ дає оцінку

$$\hat{a} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x\hat{F}_n(dx) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

а для параметра σ^2 — оцінку

$$\hat{\sigma}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\left(x - \int\limits_{\mathbb{R}^1} t\hat{F}_n(dt)\right)^2 \hat{F}_n(dx) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \hat{a})^2.$$

Інтеграли обчислюються як інтеграли Лебега за дискретним розподілом, зосередженим у точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (з "масою" $1/n$ у кожній).

Означення. Оцінку $\hat{\theta}_n$ параметра $\theta = \Phi\left(F(x;\theta)\right)$, побудовану за формулою

$$\hat{\theta}_n = \Phi\left(\hat{F}_n(x)\right),$$

називатимемо *емпіричним (вибірковим) значенням параметра* θ.

Зокрема,

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

— емпіричне (вибіркове) середнє, а

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \hat{a})^2$$

— емпірична (вибіркова) дисперсія.

Теорема 15.1.1. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу F і $g(x)$ — борелева функція на $\mathbb{R}^1$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$. Якщо*

$$G = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)F(dx) \neq \infty,$$

то вибіркове значення

$$\hat{G}_n = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)\hat{F}_n(dx) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)$$

величини G є її спроможною і незсуненою оцінкою.

Наслідок. *Нехай*

$$G = \int\limits_0^1 g(x)dx \neq \infty,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— вибірка з рівномірного на проміжку* $[0;1]$ *розподілу, тоді*

$$\hat{G}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)$$

є спроможною і незсуненою оцінкою G.

Наслідок з теореми означає, що за великих n значні відхилення суми $\hat{G}_n$ від G зустрічаються зрідка і тому за наближене значення інтеграла G можна розглядати суму $\hat{G}_n$.

Описаний метод обчислення інтегралів відомий під назвою методу Монте-Карло (метод статистичних випробувань). Він особливо ефективний при обчисленні інтегралів великої кратності, коли інші методи наближеного аналізу непридатні.

Приклад 15.1.2. *На відрізок* $[0;2]$ *навмання кидають точку, яка ділить його на дві частини, і фіксують координату* ξ *точки поділу.*

Експеримент проведено 10 *разів. При цьому отримано* 10 *значень незалежних спостережень випадкової величини* ξ*:* 0,00; 0,31; 0,70; 1,40; 0,08; 1,93; 0,79; 1,43; 1,42; 1,69.

Оцінити за вибіркою математичне сподівання об'єму куба з ребром, що дорівнює більшій частині відрізка.

Р о з в' я з а н н я. За умовою задачі довжина ребра куба дорівнює $\max\{\xi,\, 2-\xi\}$. Об'єм $g(\xi) = (\max\{\xi,\, 2-\xi\})^3$ куба — функція випадкової величини ξ. Значення $G = Mg(\xi)$ скінченне, оскільки розподіл випадкової величини ξ зосереджений на скінченному проміжку [0;2], а функція $g(x)$ на цьому проміжку обмежена. Тому незсуненою і спроможною оцінкою математичного сподівання об'єму куба $G = Mg(\xi) = M(\max\{\xi,\, 2-\xi\})^3$ є

$$\hat{G}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\max\{\xi_i,\, 2-\xi_i\})^3.$$

У прикладі, що розглядається, $n = 10$, а вибіркові значення $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ наведено в умові. Значення $\hat{G}_{10} = 4{,}44$.

15.2 Метод моментів

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу $F(\cdot\,; \theta) = F(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$. Параметри $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ невідомі. Їх необхідно оцінити за вибіркою.

Першим загальним методом побудови оцінок параметрів за вибіркою був метод моментів, запропонований К. Пірсоном. Згідно з цим методом певну кількість вибіркових моментів $\hat{m}_k$ прирівнюють до відповідних моментів

$$m_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^k F(dx, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \qquad (15.2.1)$$

розподілу $F(\cdot; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, обчислених при значеннях параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, що дорівнюють відповідно оцінкам $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ цих параметрів (моменти $m_k = m_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ є функціями параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$). Так, перший вибірковий момент

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

прирівнюють до першого теоретичного моменту

$$m_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x F(dx; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s),$$

другий вибірковий момент

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

— до другого теоретичного моменту

$$m_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^2 F(dx; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$$

і т. д. Розглядаючи кількість моментів, що дорівнює числу невідомих параметрів, які треба оцінити, дістають таку саму кількість рівнянь для визначення невідомих параметрів:

$$\hat{m}_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} xF(dx; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s);$$

$$\hat{m}_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^2 F(dx; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s);$$

$$\vdots$$

$$\hat{m}_s = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^s F(dx; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s).$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$, знаходять шукані оцінки.

Примітка. Деякі з теоретичних моментів можуть не залежати від невідомих параметрів. У цьому разі до виписаних рівнянь додають наступні, так щоб кількість рівнянь дорівнювала кількості невідомих параметрів.

Метод моментів можна застосовувати тоді, коли існують усі перелічені моменти. На практиці він зводиться до порівняно простих обчислень.

Приклад 15.2.1. *Знайти оцінки параметрів a і σ^2 нормального розподілу*

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

методом моментів.

Розв'язання. Для нормального розподілу з параметрами a та σ^2

$$m_1(a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} x \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = a;$$

$$m_2(a,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^2 \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = a^2 + \sigma^2.$$

Моментами $m_1(a,\sigma^2)$ і $m_2(a,\sigma^2)$, обчисленими за значень параметрів a та σ^2, які дорівнюють відповідно $\hat{a}$ і $\hat{\sigma^2}$, є

$$m_1(\hat{a};\hat{\sigma}^2) = \hat{a}; \quad m_2(\hat{a};\hat{\sigma}^2) = \hat{\sigma}^2 + \hat{a}^2.$$

Першим і другим емпіричними моментами є

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i; \quad \hat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Прирівнюючи перший момент $m_1(\hat{a};\hat{\sigma}^2)$ до першого емпіричного моменту $\hat{m}_1$, другий момент $m_2(\hat{a},\hat{\sigma}^2)$ до другого емпіричного моменту $\hat{m}_2$ дістаємо рівняння

$$m_1(\hat{a};\hat{\sigma}^2) = \hat{m}_1;$$
$$m_2(\hat{a};\hat{\sigma}^2) = \hat{m}_2,$$

або докладніше

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i;$$

$$\hat{\sigma}^2 + (\hat{a})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Розв'язки цих рівнянь відносно $\hat{a}$ та $\hat{\sigma}^2$ і є оцінками відповідно параметрів a і σ^2, знайденими за методом моментів:

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i;$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \hat{a}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2.$$

15.3 Метод максимальної правдоподібності

Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з розподілом $F(\cdot\,;\theta) = F(\cdot\,;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, що залежить від параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$. Параметр $\theta \in \Theta$ невідомий і його необхідно оцінити за вибіркою $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Загальним (важливим як з точки зору теорії, так і застосувань) методом побудови оцінок є метод максимальної правдоподібності, запропонований Р. Фішером.

Означення. *Функцією максимальної правдоподібності вибірки* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ називатимемо функцію $L(\theta) = L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ параметра $\theta \in \Theta$, що означається рівністю

$$L(\theta) = f(\xi; \theta),\ \theta \in \Theta,$$

якщо вибірковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ абсолютно неперервний зі щільністю $f(x; \theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ і рівністю

$$L(\theta) = P(\xi; \theta),\ \theta \in \Theta,$$

якщо вибірковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дискретний з розподілом $P(x; \theta) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$.

Згідно з *методом максимальної правдоподібності* як оцінку параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_s)$ розглядають точку $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$, в якій функція максимальної правдоподібності $L(\theta)$ досягає найбільшого значення.

Означення. *Оцінкою максимальної правдоподібності* параметра θ називатимемо точку $\hat{\theta}$, в якій функція максимальної правдоподібності $L(\theta)$ досягає найбільшого значення.

Інакше кажучи, оцінкою максимальної правдоподібності параметра θ називатимемо відмінні від константи розв'язки рівняння

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta),$$

якщо такі розв'язки існують. Корені, які не залежать від вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, тобто мають вигляд $\hat{\theta} = c$, де c — константа, слід відкинути (оцінка — це функція вибірки).

Логарифм $\ln L(\theta)$ від функції максимальної правдоподібності $L(\theta)$ називають *логарифмічною функцією максимальної правдоподібності.*

Зазначимо, що функції $L(\theta)$ та $\ln L(\theta)$ досягають найбільшого значення в одній і тій самій точці. А відшукати точку, в якій функція $\ln L(\theta)$ досягає найбільшого значення, часто зручніше.

Якщо функція $L(\theta) = L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ диференційовна по $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, то для розв'язання рівняння

$$L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s) = \max_{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s \in \Theta} L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \qquad (15.3.1)$$

достатньо знайти стаціонарні точки функції

$$\ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s),$$

розв'язуючи рівняння

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, s,$$

і, порівнюючи значення функції $\ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ у стаціонарних точках і на межі множини Θ, вибрати точку $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$, в якій функція $\ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ досягає найбільшого значення. Ця точка і буде розв'язком рівняння (15.3.1).

Рівняння

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, s,$$

називають *рівнянням максимальної правдоподібності.*

Приклад 15.3.1. *За вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з розподілу зі щільністю*

$$p(x; \theta) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

(показниковий розподіл з параметром θ) знайти оцінку максимальної правдоподібності параметра θ.

Р о з в' я з а н н я. Спільною щільністю розподілу незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) \ldots p(x_n; \theta) =$$
$$= \theta \exp\{-\theta x_1\} \theta \exp\{-\theta x_2\} \ldots \theta \exp\{-\theta x_n\} =$$
$$= \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i\right\},$$

якщо всі $x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, а якщо хоча б одне $x_i \leq 0$, то

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = 0.$$

Функцією правдоподібності вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є

$$L(\theta) = \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\},$$

якщо всі $\xi_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, і $L(\theta) = 0$ — у супротивному разі. Функція $L(\theta)$ диференційовна по θ, а тому можемо записати рівняння правдоподібності:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = 0,$$

або (після диференціювання)

$$n \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0.$$

Розв'язком рівняння правдоподібності є

$$\theta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^{-1} = (\overline{\xi})^{-1}.$$

На межі області допустимих значень параметра θ функція $L(\theta)$ набуває значення 0, тому в точці $\hat{\theta} = 1/\overline{\xi}$ функція максимальної правдоподібності $L(\theta)$ досягає найбільшого значення, а отже,

$$\hat{\theta} = 1/\overline{\xi}$$

є оцінкою максимальної правдоподібності параметра θ.

15.4 Задачі

АЗ: 15.3, 15.18, 15.28, 15.32, 15.33.
СЗ: 15.13, 15.24, 15.31, 15.38, 15.51.

15.1. Нехай 1,31; 1,18; 1,50; 1,06; 1,01; 1,06; 1,33; 1,80; 1,30; 1,35 — вибірка з розподілу зі щільністю

$$p(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\exp\left\{-\dfrac{1}{a}(x-b)\right\}, & \text{якщо } x > b; \\ 0, & \text{якщо } x \le b \end{cases}$$

(зміщений показниковий розподіл) за значень параметрів a=0,5; b=1.

За вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік функції $F(x)$ зміщеного показникового розподілу з параметрами $a = 0{,}5$; $b = 1$. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.2. На відрізок [0;2] навмання кидають точку і фіксують її координату ξ. Експеримент проведено 15 разів. При цьому добуто 15 значень незалежних спостережень випадкової величини ξ: 0,14; 1,81; 1,58; 1,28; 1,39; 0,80; 0,31; 0,70; 1,40; 0,08; 1,93; 0,79; 1,43; 1,42; 1,68.

Оцінити за вибіркою математичне сподівання об'єму куба, ребро якого дорівнює меншій частині відрізка [0;2] за його поділу точкою ξ.

15.3. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$p(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x}}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma > 0$ ($p(x;\mu,\sigma^2)$ — щільність логарифмічно нормального розподілу).

Знайти оцінку параметрів μ і σ^2 методом моментів.

Зауваження. Обчислюючи перший і другий моменти, доцільно зробити заміну $\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma} = t$.

15.4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h_0}, & \text{якщо } x \in [\theta - h_0, \theta + h_0]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - h_0, \theta + h_0]. \end{cases}$$

Знайти оцінку $\hat{\theta}$ параметра θ методом максимальної правдоподібності. З'ясувати, чи є $\hat{\theta}$ незсуненою, спроможною оцінкою параметра θ.

15.5. Скориставшись таблицею випадкових чисел (див. табл. 22.10.1), добути вибірку обсягом $n = 20$ з нормального розподілу із середнім $a = 2$ та дисперсією $\sigma^2 = 4$ (див. також приклад 19.1.1). За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік функції $N_{2;4}(x)$. Обчислити

$$\sup_x \left| N_{2;4}(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.6. За допомогою таблиці випадкових чисел (див. табл. 22.10.1) оцінити значення інтеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

Вказівка 1. Зробити в інтегралі заміну

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Вказівка 2. За таблицею випадкових чисел (див. табл. 22.10.1) добути вибірку з рівномірного на відрізку $[0;1]$ розподілу і скористатися теоремою 15.1.1.

15.7. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta,b) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}|x - b|\right\},$$

$\theta > 0$ ($f(x;\theta,b)$ — щільність зміщеного двобічного показникового розподілу).

Знайти оцінки $\hat{\theta}$ і $\hat{b}$ відповідно параметрів θ і b методом моментів.

З'ясувати, чи є $\hat{\theta}$ і $\hat{b}$ незсуненими і спроможними оцінками параметрів θ і b.

15.8. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k;\theta) = C_{r-1+k}^{r-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \ k = 0, 1, \dots;$$

$\theta > 0$, r — відомо.

Знайти оцінку параметра θ методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності $\hat{\theta}$ незсуненою, спроможною, ефективною оцінкою параметра θ.

Вказівка. Див. задачу 14.2.

15.9. За допомогою таблиці випадкових чисел добути вибірку обсягом $n = 20$ з рівномірного на відрізку [0;1] розподілу (див. задачу 19.4). За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік функції $F(x)$ рівномірного на відрізку [0;1] розподілу. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.10. На відрізок [0;4] навмання кидають точку і фіксують її координату ξ. Експеримент проведено 15 разів. При цьому добуто 15 значень незалежних спостережень випадкової величини ξ: 0,55; 2,94; 0,65; 1,49; 3,08; 1,01; 2,38; 1,18; 1,63; 3,18; 0,39; 1,71; 2,72; 0,95; 1,18.

Оцінити за вибіркою математичне сподівання площі поверхні кулі, радіус якої дорівнює меншій частині відрізка [0;4] за його поділу точкою ξ.

15.11. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — вибірка з геометричного розподілу з параметром p:

Оцінити параметр p методом моментів.

15.12*. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; a, b) = \frac{1}{2a} \exp\left\{-\frac{1}{a}|x-b|\right\},\ a > 0.$$

Знайти оцінки параметрів a і b методом максимальної правдоподібності.

15.13. Випишіть 10 випадкових, на ваш погляд, чисел з відрізка [0;1] (для визначеності — з чотирма знаками після коми). Їх можна розглядати як вибірку з деякого розподілу. За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік функції $F(x)$ рівномірного на відрізку [0;1] розподілу. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.14. Тривалість роботи елемента до першого виходу з ладу є показниково розподіленою випадковою величиною. Спостерігали за роботою 20 елементів і фіксували тривалість їхньої роботи до першого виходу з ладу (в годинах): 11, 149, 846, 563, 384, 950, 864, 63, 990, 77, 685, 158, 348, 318, 25, 278, 1803, 83, 1544, 380.

За вибіркою знайти оцінку математичного сподівання тривалості безвідмовної роботи елемента, коли його замінюватимуть після 200 годин безперервної роботи, навіть якщо елемент не вийшов з ладу.

15.15. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; a, \theta) =$$

$$= \begin{cases} (x - (a - \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{якщо } x \in [a - \sqrt{\theta}, a]; \\ -(x - (a + \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{якщо } x \in [a, a + \sqrt{\theta}]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a - \sqrt{\theta}, a + \sqrt{\theta}]. \end{cases}$$

Знайти оцінки $\hat{a}$ і $\hat{\theta}$ параметрів a і θ методом моментів.

З'ясувати, чи є $\hat{a}$ і $\hat{\theta}$ незсуненими й спроможними оцінками параметрів a і θ відповідно.

Вказівка. Обчислюючи другий момент, доцільно скористатись тим, що $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$.

15.16. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$Q(x) = p^x (1-p)^{1-x},\ x = 0; 1,\ p \in (0; 1).$$

Знайти оцінку максимальної правдоподібності параметра p.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра p його незсуненою, спроможною, ефективною оцінкою.

15.17. Добути вибірку обсягом $n = 10$ із $N_{0;1}$-розподілу. За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік функції $N_{0;1}(x)$ нормального розподілу з параметрами (0;1). Обчислити

$$\sup_x \left| N_{0;1}(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

Вказівка. Якщо випадкова величина ξ має своєю функцією розподілу $F(x)$, то випадкова величина

$$\eta = F(\xi)$$

розподілена рівномірно на проміжку $[0; 1]$. Звідси — якщо випадкова величина η розподілена рівномірно на проміжку $[0; 1]$, то випадкова величина

$$\xi = F^{-1}(\eta)$$

має своєю функцією розподілу $F(x)$.

15.18. За допомогою таблиці випадкових чисел (див. табл. 22.10.1) оцінити значення інтеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1 + x^2}\, dx.$$

Вказівка 1. Зробити в інтегралі заміну

$$y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Вказівка 2. За таблицею випадкових чисел добути вибірку з рівномірного на відрізку [0;1] розподілу і скористатися теоремою 15.1.1.

15.19. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}|x|\right\}$$

($f(x;\theta)$ — щільність двобічного показникового розподілу).

Знайти оцінку дисперсії методом моментів і з'ясувати, чи є вона незсуненою і спроможною оцінкою дисперсії.

15.20. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;h) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \text{якщо } x \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h]. \end{cases}$$

Знайти оцінку параметра h методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра h його незсуненою і спроможною оцінкою.

15.21. Спостерігаються цифрові частини номерів 10 автомобілів (у номері п'ять цифр), що проїздять повз вас. Нехай a_i, b_i, c_i, d_i, e_i — цифри, що зустрічалися у номері i-го автомобіля, якщо його читати зліва направо. Будується послідовність чисел

$$\xi_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i + 10^{-5}e_i,$$

$i = 1, 2, \ldots, 10$. Їх можна розглядати як вибірку з деякого розподілу.

За вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10}$ побудувати графік емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ $(n = 10)$. Побудувати графік функції $F(x)$ рівномірного на відрізку [0;1] розподілу. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

П р и м і т к а. Якщо номер автомобіля містить чотири цифри, то розглянемо послідовність

$$\zeta_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i,$$

$i = 1, 2, \ldots, 10$.

15.22. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta,p) = \begin{cases} \frac{p}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^p\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\theta > 0, p > 0$ ($f(x;\theta,p)$ — щільність розподілу Вейбулла), p — відоме.

Знайти оцінку параметра θ методом максимальної правдоподібності.

15.23. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з рівномірного на відрізку $[\theta - \sigma\sqrt{3}, \theta + \sigma\sqrt{3}]$ розподілу, $\sigma > 0$.

Знайти оцінки $\hat{\theta}$ і $\hat{\sigma}^2$ параметрів θ і σ^2 методом моментів.

З'ясувати, чи є оцінки $\hat{\theta}$ і $\hat{\sigma}^2$ незсуненими, спроможними оцінками відповідних параметрів.

15.24. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

($f(x;\theta)$ — щільність розподілу Релея).

Знайти оцінку параметра θ методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра θ його незсуненою, спроможною, ефективною оцінкою.

15.25. Маємо вибірку: 2,22; 0,67; −0,14; −0,33; −0,97; −1,81; −0,94; −0,91; 0,11; 3,94 з розподілу зі щільністю

$$f(x;a,c) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x-c)^2)},$$

де $a = 0{,}5$ і $c = 1$ ($f(x; a, c)$ — щільність розподілу Коші).

За вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік функції $F(x)$ розподілу Коші з параметрами $a = 0{,}5$; $c = 1$. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.26. На відрізок [0;3] навмання кидають точку і фіксують її координату ξ. Експеримент проведено 20 разів. При цьому добуто 20 значень незалежних спостережень випадкової величини ξ: 1,91; 1,08; 1,25; 0,87; 2,42; 1,49; 2,10; 2,21; 0,33; 0,09; 0,39; 0,54; 2,39; 0,51; 2,51; 1,44; 0,96; 1,85; 2,38; 0,67.

Оцінити за вибіркою математичне сподівання об'єму кулі, радіус якої дорівнює більшій частині відрізка [0;3] за його поділу точкою ξ.

15.27. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу Ерланга з параметрами m і λ. Оцінити параметри m і λ методом моментів.

Щільність розподілу Ерланга з параметрами m і λ має вигляд

$$f(x; \lambda, m) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\lambda x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

15.28. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \exp\left\{-\dfrac{1}{a}(x-b)\right\}, & \text{якщо } x > b; \\ 0, & \text{якщо } x \le b \end{cases}$$

($f(x; a, b)$ — щільність зміщеного показникового розподілу).

Знайти оцінки параметрів a і b методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінки максимальної правдоподібності параметрів a і b їхніми незсуненими і спроможними оцінками.

15.29. Скориставшись таблицею випадкових чисел (див. табл. 22.10.1), добути 10 незалежних вибірок обсягом 12 із рівномірного на проміжку [0;1] розподілу (див. також задачу 19.4). Позначимо їх

$$\xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \ldots, \xi_{k,12},\ k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Нехай

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{12} \xi_{k,i} - 6,\ k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Послідовність $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{10}$ є вибіркою з деякого розподілу. За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_{10}(x)$. Побудувати графік функції $N_{0;1}(x)$ нормального розподілу з параметрами (0;1). Обчислити

$$\sup_x \left| N_{0;1}(x) - \hat{F}_{10}(x) \right|.$$

15.30. Інтервали безвідмовної експлуатації (години між послідовними відмовами) апаратури кондиціювання повітря на літаку "Боїнг-720" зведено в таблицю (читати за рядками):

6	23	261	87	7	120	14	62	32	24
47	225	71	246	21	42	20	5	97	18
12	120	11	3	14	71	11	14	100	7
11	16	90	1	16	52	95	97	98	5
51	11	4	141	18	142	68	77	85	91
80	1	16	106	206	82	54	31	3	230
216	46	111	39	63	18	191	18	3	131
163	24	50	44	102	72	22	39	18	95
3	15	197	188	79	88	46	5	62	74
5	36	22	139	210	97	30	23	81	48

Знайти емпіричну оцінку математичного сподівання тривалості безвідмовної роботи апаратури, якщо її профілактичний ремонт здійснюється після 100 годин експлуатації.

15.31. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\nu,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\alpha x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0; \end{cases}$$

$\nu \ge 0, \alpha > 0$ ($f(x;\nu,\alpha)$ — щільність гамма-розподілу з параметрами $(\nu;\alpha)$).

Знайти оцінки параметрів ν і α методом моментів.

15.32. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k;\theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, k = 0, 1, \ldots,\ \theta > 0.$$

Знайти оцінку параметра θ методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра θ його незсуненою, спроможною, ефективною оцінкою.

15.33. Скориставшись таблицею випадкових чисел (див. табл. 22.10.1), добути вибірку обсягом 20 з розподілу арксинуса (див. також приклад 19.1.1). За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$, $n = 20$. Побудувати графік функції розподілу арксинуса

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, & \text{якщо } x \in (0;1]; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Обчислити

$$\sup_x \left| A(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.34. На відрізок [0;1] навмання кидають точку і фіксують її координату ξ. Експеримент проведено 20 разів. При цьому добуто 20 значень незалежних спостережень випадкової величини ξ: 0,33; 0,93; 0,62; 0,38; 0,65; 0,53; 0,31; 0,07; 0,61; 0,04; 0,70; 0,85; 0,83; 0,81; 0,40; 0,59; 0,93; 0,24; 0,55; 0,17.

Оцінити за вибіркою математичне сподівання площі круга, радіус якого дорівнює більшій частині відрізка [0;1] за його поділу точкою ξ.

15.35. Позначимо через ξ випадкову величину — число невдач до появи r-го успіху в необмеженій послідовності незалежних випробувань з імовірністю успіху p в одному випробуванні. Випадкова величина ξ має розподіл

$$P\{\xi = k\} = C_{r-1+k}^{r-1}\, p^r (1-p)^k, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

Цей розподіл називають від'ємним біномним з параметрами $(r; p)$ або розподілом Паскаля.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з від'ємного біномного розподілу з параметрами $(r; p)$, r — відомо. Знайти оцінку параметра p методом моментів.

В к а з і в к а. Загальну кількість невдач до r-го успіху можна подати у вигляді суми

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_r,$$

де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром p.

15.36. Маючи на меті визначити кількість N рибин в озері, виловили K рибин, помітили їх і випустили в озеро. Через деякий час в озері виловили n рибин. При цьому k з них виявилися поміченими.

Яка найімовірніша кількість рибин в озері?

В к а з і в к а. Задачу розв'язати за припущення, що кількість N рибин в озері велика порівняно з n. За цього припущення випадкову величину ξ — кількість помічених рибин серед n виловлених — можна вважати біномно розподіленою.

15.37. Стохастичний експеримент полягає у послідовному підкиданні монети чотири рази й реєстрації результатів у такий спосіб: випадання герба (Г) позначається одиницею, решки (Р) — нулем. Якщо, скажімо, результати експерименту такі: ГРРГ, РГРГ, ..., то вони реєструються відповідно як 1001, 0101, ... Отриманим послідовностям із нулів і одиниць ставляться у відповідність числа з проміжку [0;1], які у двійковій системі числення можна подати так: 0,1001; 0,0101; ..., тобто 0,1001 — це запис у двійковій системі числа

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{9}{16},$$

а 0,0101 — числа

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{5}{16}.$$

Експеримент проведено 16 разів. Добуто 16 чисел. Їх можна розглядати як вибірку з деякого розподілу. За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ $(n = 16)$. Побудувати графік функції $F(x)$ рівномірного на відрізку [0;1] розподілу. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.38. За допомогою таблиці випадкових чисел (див. табл. 22.10.1) оцінити значення інтеграла

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = G.$$

В к а з і в к а. За таблицею випадкових чисел добути вибірку з рівномірного на відрізку $[0; 1]$ розподілу і скористатися теоремою 15.1.1.

Значення $G = 0,915965\ldots$ відоме під назвою “сталої Каталана”.

15.39. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{1}{a}(x-b)\right\}, & \text{якщо } x > b; \\ 0, & \text{якщо } x \le b. \end{cases}$$

Знайти оцінки параметрів a і b методом моментів.

15.40. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Знайти оцінки параметрів a і b методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінки максимальної правдоподібності $\hat{a}$ і $\hat{b}$ параметрів a і b їх незсуненими оцінками? Спроможними оцінками?

15.41. Час, який показують стрілки механічного годинника, що зупинився, природно вважати випадковою величиною, розподіленою рівномірно на відрізку [0;12].

Нижче наведено покази 14 годинників з вітрини годинникового магазину: 9 год 18 хв; 8 год 35 хв; 10 год 45 хв; 11 год 30 хв; 3 год 06 хв; 7 год 50 хв; 4 год 22 хв; 10 год 12 хв; 7 год 47 хв; 4 год 28 хв; 11 год 16 хв; 7 год 08 хв; 5 год 53 хв; 8 год 00 хв. За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік функції $F(x)$ рівномірного на відрізку [0;12] розподілу. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.42. На відрізок [0;1] навмання кидають точку і фіксують її координату ξ. Експеримент проведено 10 разів. При цьому добуто 10 значень незалежних спостережень випадкової величини ξ: 0,33; 0,93; 0,62; 0,38; 0,65; 0,53; 0,81; 0,07; 0,61; 0,04.

Оцінити за вибіркою математичне сподівання площі квадрата зі стороною, що дорівнює меншій частині відрізка [0;1] за його поділу точкою ξ.

15.43. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з біномного розподілу

$$P(k; m) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \;\; k = 0, 1, \ldots, m,$$

m відомо.

Знайти оцінку $\hat{p}$ параметра p методом моментів. З'ясувати, чи є оцінка $\hat{p}$ незсуненою, спроможною і ефективною оцінкою p.

15.44. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{якщо } x \in [\theta - h; \theta + h]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - h; \theta + h] \end{cases}$$

($f(x;\theta,h)$ — щільність рівномірного на відрізку $[\theta - h, \theta + h]$ розподілу).

Знайти оцінки параметрів θ і h методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінки максимальної правдоподібності $\hat{\theta}$ та $\hat{h}$ параметрів θ і h незсуненими оцінками? Спроможними оцінками?

15.45. Маємо вибірку: 0,04; 1,95; 0,38; 0,20; 0,24; 1,14; 0,10; 1,96; 1,00; 0,07 із розподілу зі щільністю

$$f(x;a) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \exp\left\{-\dfrac{x}{a}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

За цією вибіркою побудувати графік реалізації емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$. Побудувати графік показникової функції розподілу $F(x)$ з параметром 1. Обчислити

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.46. За допомогою таблиці випадкових чисел (див. табл. 22.10.1) оцінити значення інтеграла

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx,$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, якщо $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

В к а з і в к а 1. Зробити в інтегралі заміну

$$y = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

В к а з і в к а 2. За таблицею випадкових чисел добути вибірку з рівномірного на відрізку [0;1] розподілу і скористатися теоремою 15.1.1.

15.47. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3h}}, & \text{якщо } x \in [\theta - \sqrt{3h}; \theta + \sqrt{3h}]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [\theta - \sqrt{3h}; \theta + \sqrt{3h}]. \end{cases}$$

Знайти оцінки $\hat{\theta}$ та $\hat{h}$ параметрів θ і h методом моментів.

З'ясувати, чи є $\hat{\theta}$ і $\hat{h}$ незсуненими, спроможними оцінками параметрів θ та h відповідно.

15.48. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x}} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma > 0$ ($f(x;\mu,\sigma^2)$ — щільність логарифмічно нормального розподілу).

Знайти оцінку параметрів μ і σ^2 методом максимальної правдоподібності.

15.49. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k;\theta) = C_{r-1+k}^{r-1} \left(1/\theta\right)^r \left(1 - 1/\theta\right)^k,\ k = 0, 1, \ldots,$$

r відомо (див. також задачу 15.35).

Знайти оцінку параметра θ методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра θ його незсуненою, спроможною, ефективною оцінкою.

15.50. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a_0}, & \text{якщо } x \in [a_0;b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a_0;b]. \end{cases}$$

Знайти оцінку параметра b методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра b його незсуненою і спроможною оцінкою.

15.51. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу Пуассона

$$P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots$$

Знайти оцінку параметра λ методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра λ його незсуненою, спроможною, ефективною оцінкою.

15.52. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$P(k;\theta) = C_{r-1+k}^{r-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k,\ k = 0, 1, \ldots;$$

$\theta > 0$, r відомо.

Знайти оцінку $\hat{\theta}$ параметра θ методом моментів.

З'ясувати, чи є $\hat{\theta}$ незсуненою, спроможною, ефективною оцінкою параметра θ.

В к а з і в к а. Див. задачу 14.2.

15.53. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з біномного розподілу

$$P(k;m) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ \ k = 0, 1, \ldots, m,$$

m відоме.

Оцінити параметр p методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра p його незсуненою, спроможною і ефективною оцінкою.

15.54. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\theta^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Знайти оцінку $\hat{\theta}$ параметра θ методом моментів.

З'ясувати, чи є $\hat{\theta}$ незсуненою і спроможною оцінкою параметра θ.

15.55. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\theta,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{якщо } x > \lambda; \\ 0, & \text{якщо } x \le \lambda, \end{cases}$$

$\theta > 1$, $\lambda > 0$ ($f(x;\theta,\lambda)$ — щільність розподілу Парето).

Знайти оцінку параметрів θ та λ методом максимальної правдоподібності.

15.56. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x;\sigma^2) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0 \end{cases}$$

($f(x;\sigma^2)$ — щільність напівнормального розподілу).

Знайти оцінку параметра $\theta = \sigma^2$ методом максимальної правдоподібності.

З'ясувати, чи є оцінка максимальної правдоподібності параметра σ^2 його незсуненою, спроможною і ефективною оцінкою.

15.57. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з рівномірного розподілу на проміжку 1) $[\theta - 1; \theta + 1]$; 2) $[\theta; \theta + 1]$; 3) $[\theta - h_0; \theta + h_0]$.

Знайти оцінку $\hat{\theta}$ параметра θ методом моментів. З'ясувати, чи є оцінка $\hat{\theta}$ незсуненою спроможною, оцінкою параметра θ.

15.58. Частота $\hat{p} = \mu/n$ події A в послідовності експериментів є незсуненою, спроможною оцінкою її ймовірності $p = P(A)$.

З'ясувати, чи є частота $\hat{p} = \mu/n$ ефективною оцінкою p.

Глава 16

Задача перевірки статистичних гіпотез

16.1 Критерій, функція потужності критерію

Задача перевірки статистичних гіпотез. Часто задачі математичної статистики формулюються так:

Маємо наслідок $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ стохастичного експерименту, що полягає у спостереженні випадкової величини $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$. Щодо розподілу випадкової величини $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_n)$, або, що те саме, вибірки, у кращому випадку відомо тільки те, що він належить до деякого класу розподілів $\mathcal{P}$. Далі клас $\mathcal{P}$ вважатимемо параметричним:

$$\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \varTheta \subset \mathbb{R}^s\}.$$

За значенням $\xi(\omega)$, якого набула випадкова величина ξ, необхідно вибрати її розподіл із класу $\mathcal{P}$.

Діятимемо у такий спосіб. Із класу $\mathcal{P}$ можливих розподілів випадкової величини ξ вибираємо деякий розподіл G — “кандидатуру” на розподіл ξ. Інакше кажучи, стосовно розподілу випадкової величини ξ висуваємо гіпотезу (припущення): розподілом ξ є G. Далі проводимо експеримент — добуваємо реалізацію $\xi(\omega)$ випадкової величини ξ і за значенням $\xi(\omega)$, якого набула ξ, доходимо висновку: випадкова величина ξ може мати своїм розподілом G чи G не може бути розподілом ξ. При цьому діятимемо так, як діяв свого часу Сократ, коли хотів спростувати твердження свого опонента. А саме, якщо гіпотеза "G є розподілом ξ" — суперечить наслідку експерименту, то її слід відхилити (G не може бути розподілом випадкової величини ξ), у супротивному разі — ні (гіпотезу не варто відхиляти, тобто G може бути розподілом ξ).

Сформульована задача називається задачею перевірки статистичних гіпотез.

Домовленості й означення. У теорії перевірки статистичних гіпотез прийнято такі означення і домовленості.

Гіпотези щодо розподілів випадкових величин називають *статистичними.*

Вибір розподілу (чи класу розподілів) із сукупності

$$\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \mathit{\Theta} \subset \mathbb{R}^s\}$$

можливих розподілів ξ називатимемо *вибором основної* (*нульової*) *гіпотези* стосовно розподілу випадкової величини ξ. Після вибору нульової гіпотези всі інші гіпотези стосовно розподілу випадкової величини ξ стають альтернативними (конкуруючими) до нульової. (Оскільки сукупність $\mathcal{P}$ можливих розподілів ξ є параметричною, то і альтернативні гіпотези утворюють параметричну сукупність, позначатимемо її так: H_θ, $\theta \in \Theta$, $\theta \neq 0$.)

Проілюструємо введені поняття на прикладі біномного розподілу.

Монету, ймовірність випадання герба θ якої невідома, у незалежний спосіб підкидають n разів. Число гербів, що при цьому випало, виявилося рівним ξ. Чи можна вважати, що монета симетрична?

Сформулюємо цю задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез.

Розподілом випадкової величини ξ може бути будь-який розподіл із класу $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in (0;1)\}$, де

$$P_\theta(k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n;\ \theta \in (0;1).$$

Оскільки ми цікавимося симетричністю монети, то як кандидатуру на розподіл випадкової величини ξ із сукупності розподілів $\mathcal{P}$ вибираємо розподіл

$$P_{1/2}(k),\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тим самим вибрана нульова гіпотеза H_0: розподілом ξ є $P_{1/2}(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Конкуруючими до H_0 є гіпотези H_θ: розподілом випадкової величини є

$$P_\theta(k),\ \ \theta \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1).$$

Питання щодо симетричності монети зводиться до перевірки гіпотези H_0.

Гіпотеза відносно розподілу, яка однозначно його визначає, називається *простою*; якщо гіпотеза не визначає розподіл однозначно, вона називається *складною*.

Наприклад, гіпотеза H_0: випадкова величина ξ має розподіл

$$P_{\theta_0}(k) = C_n^k {\theta_0}^k (1 - \theta_0)^{n-k},\ \ k = 0, 1, \ldots, n,$$

де θ_0 — фіксоване, n відоме, проста. Гіпотеза H: випадкова величина ξ має розподіл

$$P_\theta(k) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k},\ \ k = 0, 1, \ldots, n,$$

де $\theta \in (0; 1/2)$, складна.

Формулюючи задачу перевірки статистичних гіпотез, як нульову гіпотезу (для наочності та простоти) ми вибрали просту гіпотезу: розподілом випадкової величини ξ є G, де G — цілком визначений розподіл.

Зазначимо, що математична статистика не дає рекомендацій щодо вибору нульової гіпотези, цей вибір визначається поставленою задачею і дослідником.

Критерій. Нехай ξ — випадкова величина зі значеннями в $\mathbb{R}^n$. Відносно невідомого розподілу ξ висувається гіпотеза H_0: розподілом ξ є G; альтернативна гіпотеза: G не є розподілом ξ.

Необхідно перевірити гіпотезу H_0, тобто дійти висновку: G може бути розподілом випадкової величини ξ (казатимемо "гіпотеза H_0 не відхиляється") або G не може бути розподілом випадкової величини ξ (казатимемо "гіпотеза H_0 відхиляється").

Згідно з нашим загальним підходом, проводимо стохастичний експеримент: добуваємо вибірку — реалізацію $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ випадкової величини $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Далі, якщо гіпотеза H_0 суперечить результату експерименту, вона відхиляється, у супротивному разі — не відхиляється. (Зазначимо, що крім реалізації $\xi(\omega)$ вибірки ξ, ми не маємо нічого, що несло б інформацію про розподіл ξ.) Щоб можна було дійти висновку про відхилення або невідхилення гіпотези H_0, необхідно визначити множину $S \subset \mathbb{R}^n$ тих наслідків $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ експерименту, яким гіпотеза суперечить. Маючи таку множину, гіпотезу H_0 відхилятимемо, якщо $\xi(\omega)$ потрапляє до S, і не відхилятимемо у супротивному разі.

Означення. Борелеву множину S вибіркового простору таку, що при $\xi \in S$ гіпотеза H_0 відхиляється, а при $\xi \notin S$ — не відхиляється, називатимемо *критичною множиною* (*критичною областю*) або *критерієм для перевірки гіпотези* H_0.

Далі, природно, постає задача (це основна задача перевірки статистичних гіпотез): як вибрати критичну множину $S \subset \mathbb{R}^n$ для перевірки даної гіпотези (борелевих множин S у просторі $\mathbb{R}^n$ багато і, ясна річ, що не всі вони, як критерії для перевірки гіпотези H_0, однаково хороші).

Щоб вказати шляхи розв'язання цієї задачі, спочатку розглянемо так звані помилки першого й другого роду, що неминучі під час перевірки статистичних гіпотез.

Помилки першого й другого роду. Нехай H_0 — нульова гіпотеза стосовно розподілу випадкової величини ξ, $\xi(\omega)$ — реалізація ξ, S — борелева множина у просторі $\mathbb{R}^n$. Перевірятимемо H_0, користуючись множиною S як критичною, а саме, якщо $\xi(\omega)$ потрапляє до S, то гіпотезу H_0 відхиляємо, у супротивному разі — ні.

При цьому можливі такі ситуації: гіпотеза H_0 справджується або не справджується (апріорі ми цього не знаємо), реалізація $\xi(\omega)$ випадкової величини ξ потрапила до S або ні. Розглянемо їх докладніше.

1° Гіпотеза H_0 справджується. Реалізація $\xi(\omega)$ не потрапила до S, тому згідно з критерієм S гіпотеза H_0 не відхиляється.

2° Гіпотеза H_0 не справджується. Реалізація $\xi(\omega)$ не потрапила до S, і, отже, згідно з критерієм S гіпотеза H_0 не відхиляється.

3° Гіпотеза H_0 справджується. Реалізація $\xi(\omega)$ потрапила до S, і тому згідно з критерієм S гіпотеза H_0 відхиляється.

4° Гіпотеза H_0 не справджується. Реалізація $\xi(\omega)$ потрапила до S, і отже згідно з критерієм S гіпотеза H_0 відхиляється.

Із чотирьох ситуацій дві (1° та 4°) задовільні, і дві (2° і 3°) — незадовільні. У ситуаціях 2° і 3° ми припускаємося помилки. При цьому помилки у ситуації 2° (гіпотеза H_0 не відхиляється, коли вона не справджується) і в ситуації 3° (гіпотеза H_0 відхиляється, коли вона справджується) істотно відрізняються.

Проілюструємо відмінність між помилками у ситуаціях 2° і 3° на прикладі перевірки медичного препарату на токсичність біологічними методами.

Досліджуючи препарат на токсичність, певну його дозу вводять піддослідним тваринам (кроликам) і реєструють число летальних кінців (зазначимо, що це число є випадковою величиною). Необхідно за реалізацією $\xi(\omega)$ випадкової величини ξ (числом летальних кінців) дійти висновку щодо токсичності препарату. Зрозуміло, що коли число $\xi(\omega)$ велике, препарат слід вважати токсичним, у супротивному разі — ні.

Задачу дослідження препарату на токсичність біологічними методами можна сформулювати в термінах перевірки статистичних гіпотез. А саме, стосовно токсичності препарату висуваються гіпотези: H_0 — препарат токсичний і H_1 — препарат нетоксичний. Необхідно перевірити гіпотезу H_0, тобто відхилити її або не відхилити. Вибір між цими діями здійснюється за реалізацією $\xi(\omega)$ випадкової величини ξ — числа летальних кінців: якщо $\xi(\omega) \in S = \{x : x \leq k\}$, то гіпотеза відхиляється, у супротивому разі — ні (S — критерій для перевірки гіпотези H_0).

Як і в кожній задачі перевірки статистичних гіпотез у задачі, що розглядається, можливі помилки:

гіпотеза H_0 не справджується, але згідно з критерієм вона не відхиляється;

гіпотеза H_0 справджується, але згідно з критерієм вона відхиляється.

Подивимося, які наслідки цих помилок і яка їхня "ціна".

1. Нехай зроблена помилка: гіпотеза H_0 не справджується, але згідно з критерієм не відхиляється. Твердження "гіпотеза H_0 не справджується" у задачі, що розглядається, означає, що препарат нетоксичний (не є небезпечним для здоров'я пацієнтів), а твердження "H_0 не відхиляється" означає, що препарат класифікується як токсичний. Таким чином, нетоксичний препарат згідно з критерієм класифікується як токсичний і повертається постачальнику (для перероблення або знищення). Наслідки помилки такого роду — зростання вартості товару (ціна помилки — фінансові збитки).

2. Нехай зроблена помилка: гіпотеза H_0 справджується, але згідно з критерієм відхиляється. Твердження "гіпотеза H_0 справджується" означає, що препарат токсичний (небезпечний для здоров'я пацієнтів). Твердження "гіпотеза H_0 відхиляється" означає, що препарат класифікується як нетоксичний (не є небезпечним для здоров'я пацієнтів). Таким чином, токсичний препарат (небезпечний для здоров'я пацієнтів) відповідно до критерію класифікується як нетоксичний (не є небезпечним для здоров'я пацієнтів) і йде у продаж. Наслідком помилки такого роду може стати смерть пацієнта, який вживає цей препарат (ціна помилки — летальний кінець для пацієнта).

Цей приклад показує, що описані вище помилки істотно різняться за своєю ціною.

Означення. Помилка, яка полягає у тому, що гіпотеза H_0 відхиляється, коли вона справджується, називається *помилкою першого роду.*

Помилка, яка полягає у тому, що гіпотеза H_0 не відхиляється, коли вона не справджується, називається *помилкою другого роду.*

Вибір нульової гіпотези. Як зазначалося, нульову гіпотезу із сукупності всіх можливих гіпотез ми вибираємо самі. Цей вибір тісно пов'язаний з помилками, яких ми припускаємося, перевіряючи гіпотези. Як правило, за нульову гіпотезу вибираємо ту, для якої важливіше уникнути помилки, що полягає у відхиленні цієї гіпотези, коли вона справджується. (Про помилки, пов'язані з перевіркою гіпотез, які полягають у тому, що гіпотезу H_θ $(\theta \in \Theta)$ ми відхиляємо, коли вона справджується, можна говорити і не вибравши нульову гіпотезу.)

Рівень значущості критерію, функція потужності критерію. Чи можна побудувати критичну множину для перевірки гіпотези, яка б не призводила до помилок? Ні, не можна. Адже, якою б не була критична множина $S \neq \emptyset$, значення $\xi(\omega)$ випадкової величини ξ (наслідок стохастичного експерименту) може потрапити до S, коли гіпотеза H_0 справджується, при цьому буде зроблена помилка першого роду. Значення $\xi(\omega)$ може потрапити і до $\overline{S}$, коли H_0 не справджується (при цьому буде зроблена помилка другого роду). І оскільки побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0, який би не призводив до помилок, неможливо в принципі, ми, природно, намагатимемося будувати такі критерії, які б гарантували мінімальну частоту помилок при їх використанні.

Нехай H_0 — основна гіпотеза, H_1 — конкуруюча (для наочності припустимо, що вони прості), S — критерій для перевірки H_0. Користуючись критерієм S, ми можемо припуститися помилок двох типів: H_0 справджується, але згідно з критерієм S відхиляється (помилка першого роду); H_0 не справджується, але згідно з критерієм S не відхиляється (помилка другого роду). Імовірність помилки першого роду дорівнює ймовірності значенню ξ потрапити до критичної множини S, коли гіпотеза H_0 справджується, тобто $P\{\xi \in S|H_0\}$ ($P\{\xi \in S|H_0\}$ стисло записуватимемо так: $P(S|H_0)$). Імовірність помилки другого роду дорівнює ймовірності вибірковому значенню потрапити до множини $\overline{S}$, коли справджується гіпотеза H_1, тобто $P\{\xi \in \overline{S}|H_1\}$ ($P\{\xi \in \overline{S}|H_1\}$ стисло записуватимемо так: $P(\overline{S}|H_1)$).

Зазначимо, що $P\{\xi \in S|H_0\}$ — це ймовірність події $\{\xi \in S\}$, обчислена за припущення, що гіпотеза H_0 справджується; вона не має нічого спільного з умовною ймовірністю.

Імовірності помилок першого та другого роду однозначно визначаються критичною множиною S. Тому, вибираючи S, скажімо, за умови, що ймовірність помилки першого роду мала, водночас одержимо ймовірність помилки другого роду, яка визначається вибраною критичною множиною S і буде такою, якою вийде. Можна вибрати S і за умови, що ймовірність помилки другого роду мала, але при цьому ймовірність помилки першого роду однозначно визначиться вибраною множиною S. Отже, вибрати S так, щоб одночасно були контрольовані ймовірності помилок першого та другого роду, не вдасться. А оскільки важливіше уникнути помилки першого роду (її ціна вища), то перша вимога до критичної множини S така: імовірність помилки першого роду $P(S|H_0)$ має бути малою. (Це означає, що використовуючи критерій S у довгій серії експериментів, гіпотезу H_0, коли вона справджується, відхилятимемо зрідка.) Формалізуємо цю вимогу.

Фіксуємо мале α і вибираємо критичну множину S так, щоб імовірність помилки першого роду не перевищувала α:

$$P(S|H_0) \leq \alpha.$$

Якщо останню нерівність задовольняє не одна множина S, то остаточний вибір критерію здійснюється так, щоб імовірність $P(S|H_1)$ відхилення гіпотези H_0, коли вона не справджується, була максимальною. Для цього множину S вибираємо якомога "ширшою".

Означення. Число α, яке обмежує зверху ймовірність помилки першого роду, називається *рівнем значущості.*

Якщо критична множина S задовольняє умову

$$P(S|H_0) \leq \alpha,$$

то казатимемо, що S відповідає рівню значущості α.

Означення. Імовірність $P(S|H_1)$ відхилити основну гіпотезу, коли справджується альтернативна гіпотеза H_1, називається *потужністю критерію* S.

Якщо альтернативна гіпотеза складна, причому коли вона справджується, справджується одна з простих гіпотез H_θ, $\theta \in \Theta$, $\theta \neq 0$, то для кожного $\theta \in \Theta$, $\theta \neq 0$, можна обчислити $P(S|H_\theta)$.

Означення. Функція

$$\beta(\theta) = P(S|H_\theta),\ \theta \in \Theta,\ \theta \neq 0,$$

яка для кожного $\theta \in \Theta$ дорівнює імовірності відхилити основну гіпотезу H_0, коли справджується гіпотеза H_θ, називається *функцією потужності критерію.*

З а у в а ж е н н я. Питання про те, яким має бути рівень значущості, не є статистичною задачею. Здебільшого за рівень значущості приймають числа 0,10; 0,05; 0,01; 0,001. Чим серйозніші наслідки помилки першого роду, тим меншим має бути рівень значущості.

Приклад 16.1.1 (вибірковий контроль). *Призначена для продажу партія виробів кількістю* $N = 10\,000$ *штук проходить вибірковий контроль на якість. Постачальник упевнений, що частка дефектних виробів дорівнює* 1 % (*або менше*), *і бажає, щоб кожного разу, коли частка дефектних виробів становить* 1 %, *імовірність того, що партія витримає контроль, дорівнювала* 0,9. *Покупець вважає, що партію доцільно закупити навіть тоді, коли частка дефектних виробів перевищуватиме* 1 %, *але* 6 % *дефектних виробів він вважає гранично допустимою часткою і бажає, щоб контроль виявляв партії із* 6 %-*м вмістом дефектних виробів з імовірністю* 0,95. *Постачальник і покупець домовилися здійснювати контроль так: із партії виробів добувають випадкову вибірку обсягом* n. *Якщо при цьому кількість* $\xi(\omega)$ *дефектних виробів у вибірці виявиться малою* (*менше деякого* l), *то партія витримує контроль і закуповується, у супротивному разі— ні.*

Якими мають бути обсяг n *вибірки з партії виробів і значення* l?

Дати відповідь на ці питання, сформулювавши і розв'язавши поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез.

Р о з в' я з а н н я. Висновок про закупівлю або відхилення партії виробів робитимемо за реалізацією $\xi(\omega)$ випадкової величини ξ — кількості дефектних виробів із n вибраних.

Вироби до вибірки обсягом n вибиратимемо послідовно. Оскільки обсяг N партії великий ($N = 10\,000$), а n порівняно до N мале, то можна вважати, що випадкова величина ξ має біномний розподіл з параметрами $(n; p)$:

$$P\{\xi = k\} = P_p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

(параметр p — імовірність вибору дефектного виробу — невідомо). Інакше кажучи, сукупністю можливих розподілів випадкової величини ξ є

$$\mathcal{P} = \{P_p : p \in (0;1)\}.$$

Зазначимо, що розподіл із сукупності $\mathcal{P}$ однозначно визначається значенням параметра p і навпаки.

За реалізацією $\xi(\omega)$ випадкової величини ξ необхідно дійти висновку щодо розподілу ξ або, що те саме, щодо значення параметра p. Становлять інтерес такі значення параметра p: $p_1 = 0{,}01$ і $p_2 = 0{,}06$ (їм відповідає 1 %-й і 6 %-й вміст дефектних виробів у партії).

Відповідно до викладеної методики із сукупності можливих гіпотез $\mathcal{P} = \{P_p, p \in (0;1)\}$ необхідно вибрати нульову, а потім перевірити її. Оскільки між покупцем і постачальником існує угода: "якщо кількість $\xi(\omega)$ дефектних виробів у вибірці мала, то партія витримує контроль і закуповується, у супротивному разі — ні", то за нульову виберемо гіпотезу "ξ має біномний розподіл з параметрами $(n; 0{,}06)$" (альтернативна гіпотеза $P_p \in \{P_p : p \in (0; 0{,}06)\}$. Невідхилення нульової гіпотези означає класифікацію партії як такої, що містить 6 % (або більше) дефектних виробів, із подальшою відмовою закупити партію. (Якщо при цьому якусь із партій з малим відсотком дефектних виробів буде забраковано, то це вже проблема постачальника.) Відхилення нульової гіпотези означає класифікацію партії як такої, що містить менше 6 % дефектних виробів, і закупівлю партії. (Якщо при цьому якусь із партій з великим відсотком дефектних виробів не буде забраковано, а отже, буде закуплено, покупець, ясна річ, зазнає збитків.)

Для перевірки H_0 як критичну природно вибрати множину вигляду $S = \{k : k \leq l\}$. Ця множина визначається числом l і обсягом вибірки n.

За домовленістю між покупцем і постачальником множина $S = \{k : k \leq l\}$, а фактично числа n і l, мають бути такими, щоб виконувалися наведені далі умови. Партія з 6 %-м вмістом дефектних виробів повинна виявлятися з імовірністю 0,95, тобто

$$P(\overline{S}|H_0) \geq 0{,}95,$$

або, що те саме,

$$P(S|H_0) = P\{\xi \in S|H_0\} = P_0\{\xi \leq l\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}06)^k (0{,}94)^{n-k} \leq \alpha = 0{,}05.$$

Остання нерівність — формалізований запис вимог покупця, відповідно до яких партії з 6 %-м вмістом браку мають виявлятися з імовірністю, не меншою ніж 0,95.

Значення $\beta(p) = P(S|H_p)$ функції потужності критерію S у точці $p = 0,01$ має бути не меншим ніж 0,9:

$$\beta(0{,}01) = P(S|H_{0{,}01}) = P\{\xi \in S|H_{0{,}01}\} =$$

$$= P\{\xi \leq l|H_{0{,}01}\} = \sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}01)^k (0{,}99)^{n-k} \geq 0{,}9.$$

Остання нерівність є формальним записом побажань постачальника, згідно з якими партії з 1 %-м вмістом браку мають витримувати контроль з імовірністю, не меншою ніж 0,9.

Таким чином, шукані n і l мають задовольняти співвідношення

$$\sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}06)^k (0{,}94)^{n-k} \leq 0{,}05; \qquad (16.1.1)$$

$$\sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}01)^k (0{,}99)^{n-k} \geq 0{,}9. \qquad (16.1.2)$$

У задачі, що розглядається, біномний розподіл

$$B_{n,p}(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m = 0, 1, \ldots, n,$$

можна апроксимувати пуассоновим, оскільки параметр p малий (імовірність p вибору дефектного вибору мала), а n — обсяг вибірки — великий. Підставою для цього є теорема Пуассона. Нагадаємо її зміст.

Нехай $np \to \lambda > 0$, коли $n \to \infty$. Тоді для кожного фіксованого m, $m = 0, 1, \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Щоб похибка апроксимації біномного розподілу пуассоновим була незначною, n має бути не меншим кількох десятків (краще сотень), а добуток np має задовольняти нерівності

$$1 \le np \le 10.$$

Власне кажучи, ми з самого початку за розподіл випадкової величини ξ — кількості дефектних виробів у вибірці — могли б узяти пуассонів розподіл (оскільки ймовірність успіху мала, а кількість випробувань велика). Таким чином, виходитимемо з того, що n і l мають задовольняти нерівності

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0} \le 0{,}05, \quad \lambda_0 = n \cdot 0{,}06; \tag{16.1.3}$$

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \ge 0{,}90, \quad \lambda_1 = n \cdot 0{,}01 \tag{16.1.4}$$

(порівняйте з нерівностями (16.1.1) і (16.1.2)). Визначаючи n і l, ми, природно, намагатимемося вибирати n якомога меншим.

Подивимося, чи можна для $n = 100$ визначити l так, щоб співвідношення (16.1.3) і (16.1.4) справджувалися. Якщо ні, вибираємо n більшим, і так діємо доти, доки знайдемо n і l, які задовольнятимуть нерівності (16.1.3) і (16.1.4).

При $n = 100$ маємо $\lambda_0 = 100 \cdot 0{,}06 = 6$; $\lambda_1 = 100 \times \times 0{,}01 = 1$. З таблиці розподілу Пуассона знаходимо, що нерівність (16.1.3) задовольняється, коли $l \le 1$, а (16.1.4) — коли $l \ge 2$. Тому для $n = 100$ не існує l, яке б задовольняло нерівності (16.1.3) і (16.1.4).

При $n = 150$ маємо $\lambda_0 = 150 \cdot 0{,}06 = 9$; $\lambda_1 = 150 \times \times 0{,}01 = 1{,}5$. Для таких λ_0 і λ_1 нерівність (16.1.3) задовольняється, коли $l \leq 4$, а нерівність (16.1.4) — коли $l \geq 3$. Спробуємо зменшити n. Нехай $n = 130$. Тоді $\lambda_0 = 130 \cdot 0{,}06 = 7{,}8$; $\lambda_1 = 130 \cdot 0{,}01 = 1{,}3$; нерівність (16.1.3) задовольняється, коли $l \leq 3$, а нерівність (16.1.4) — коли $l \geq 3$. Таким чином, для $n = 130$ і $l = = 3$ обидві нерівності (16.1.3) і (16.1.4) задовольняються. І отже, шуканою критичною множиною (критерієм) є

$$S = \{k \colon k \leq 3\}.$$

Для цього критерію ймовірність помилки першого роду

$$P(S|H_0) = P_0(S) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0} = \sum_{k=0}^{3} \frac{7{,}8^k}{k!} e^{-7{,}8} = 0{,}048.$$

Значення функції потужності критерію $\beta(p) = P(S|H_p)$ в точці $p = 0{,}01$:

$$\beta(0{,}01) = P(S|H_{0,01}) = P_{0,01}(S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1{,}3^k}{k!} e^{-1{,}3} = 0{,}957.$$

Імовірність помилки першого роду, що дорівнює 0,048, можна інтерпретувати так. Використовуючи описаний критерій, на 100 партій виробів, які містять 6 % браку, близько п'яти партій класифікуватимуться як такі, що містять менше 6 % браку.

Значення потужності критерію $P(S|H_{0,01}) = 0{,}957$ інтерпретується так: на 100 партій виробів із 1 %-м вмістом браку, близько 96 партій будуть класифікуватися як такі, що містять 1 % браку.

Для розв'язування задач можна користуватися табл. 22.6.1.

16.2 Задачі

АЗ: 16.1, 16.15.
СЗ: 16.9, 16.11.

16.1 (про телепатів). Є люди, які стверджують, що вони можуть читати думки на відстані, тобто є телепатами. При цьому телепат не претендує на те, що він безпомилково читає думки, але стверджує, що, іноді помиляючись, він усе-таки частіше читає думки правильно, ніж неправильно.

Треба перевірити здібності телепата читати думки на відстані. Для цього пропонується провести такий експеримент. Задумайте навмання число (для простоти нуль або одиницю) і зафіксуйте його, наприклад, на папері. Телепат читає вашу думку — задумане число і також фіксує його, і так n разів. Якщо телепат справді читає ваші думки, то частка правильно прочитаних нулів (нуль читається як нуль) і одиниць (одиниця читається як одиниця), тобто частка успіхів (успіх — правильно прочитаний символ) буде великою.

Ви пропонуєте телепату прочитати n символів, $\xi(\omega)$ з них були прочитані правильно. Чи свідчить це про здібності телепата читати думки на відстані?

Запропонуйте правило (критерій), за яким можна виявити здібності телепата читати думки на відстані.

Сформулюйте й розв'яжіть поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез, а саме:

сформулюйте нульову (основну) й альтернативні гіпотези;

з'ясуйте, у чому полягають помилки першого та другого роду;

визначте випадкову величину, яка спостерігається в експерименті (що означають висунуті гіпотези стосовно розподілу цієї випадкової величини?);

запропонуйте критерій для перевірки нульової гіпотези;

призначте рівень значущості критерію, обґрунтуйте свій вибір;

обчисліть імовірність помилки першого роду;

дослідіть поведінку функції потужності критерію;
дайте частотну інтерпретацію добутих результатів.

16.2. Треба дослідити на симетричність монету (вона може бути як симетричною — імовірність випадання герба становить 0,5, так і несиметричною — імовірність випадання герба відмінна від 0,5; несиметричну й симетричну монети зовні розрізнити неможливо). Для цього підкидаємо монету n разів ($n = 5,\ 10,\ 15, \ldots$) і реєструємо кількість гербів, що випали.

Запропонувати правило (критерій) дослідження монети на симетричність.

Яку мінімальну кількість разів необхідно підкинути монету, щоб симетрична монета класифікувалася як несиметрична з імовірністю, не більшою ніж 0,1, а несиметрична, ймовірність випадання герба якої дорівнює 0,8, виявлялася з імовірністю 0,95?

Розв'язати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Нехай тепер рівень значущості й число підкидань монети ми можемо вибирати. Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості і від n, побудувати графіки функції потужності критерію.

16.3 (про діагностику початкової форми туберкульозу). Розглянемо задачу діагностики туберкульозу, пов'язану з тим фактом, що метод рентгенівського аналізу не є абсолютно надійним при визначенні наявності або відсутності захворювання: здоровий індивідуум чи ні, результат рентгенівського дослідження на туберкульоз може бути як позитивним, так і негативним.

З попереднього досвіду відомо, що:

а) якщо пацієнт хворий на туберкульоз, то ймовірність того, що окремий рентгенівський аналіз виявить хворобу (аналіз буде позитивним), становить p_0;

б) якщо у пацієнта немає ніяких ознак туберкульозу, то ймовірність того, що окремий рентгенівський аналіз буде позитивним (пацієнт буде класифікований як хворий на туберкульоз), становить p_1.

Уявімо, що у певній клініці під час обстеження стану здоров'я пацієнта на виявлення можливих ознак туберкульозу одним і тим самим способом виготовляють n рентгенівських знімків. Тлумачення знімків здійснюється так, щоб була забезпечена незалежність діагнозу за кожним знімком від висновків, зроблених за іншими знімками.

Нехай $p_0 = 0{,}90,\ p_1 = 0{,}05$ і за умов описаного експерименту виготовили два знімки. При цьому один із двох аналізів виявився позитивним. Визначити, хворіє пацієнт на туберкульоз чи ні. Відповісти на це питання, сформулювавши поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості, побудувати графіки функцій потужності критерію.

16.4 (про телепатів). Є люди, які стверджують, що вони можуть читати думки на відстані, тобто є телепатами (стверджують, що читають, але не гарантують, що правильно будуть прочитані всі думки, тобто визнають, що іноді помиляються — адже думки на відстані читати нелегко).

Пропонується перевірити здібності телепата читати думки. З цією метою проведіть такий експеримент. Підкиньте правильну монету і зафіксуйте результат, наприклад на папері. Телепат читає вашу думку — герб чи решка — і також фіксує результат. Далі підраховуємо кількість правильно прочитаних гербів (герб читається як герб) та решок (решка читається як решка). Якщо телепат дійсно читає ваші думки, то частка правильно прочитаних гербів і решок, тобто частка успіхів, буде великою (успіх — правильно прочитаний символ, невдача — неправильно прочитаний символ).

Монету підкинули n разів. При цьому телепат правильно прочитав ξ символів. Якого висновку ви дійдете щодо здібностей телепата читати думки?

Перевірте телепатичні здібності свого товариша за описаним вище експериментом. Запропонуйте критерій, за допомогою якого можна було б виявити його телепатичні здібності.

Сформулюйте й розв'яжіть поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

З'ясуйте, як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості та кількості n підкидань монети, побудуйте графіки функцій потужності критерію.

16.5 (про статистика й експериментатора). Два студенти (одного називатимемо статистиком, іншого — експериментатором) мають монети: симетричну і несиметричну, ймовірність випадання герба якої становить p ($p \neq 1/2$). Експериментатор і статистик домовляються про таке: експериментатор виходить до сусідньої кімнати, вибирає одну з монет (яку — статистик не знає), підкидає її n разів і результат (кількість випадків, коли випав герб) повідомляє статистику. Останній стверджує, що може визначити, яку з двох монет підкидав експериментатор. Однак той ставить під сумнів ці здібності статистика і як аргумент висуває такі заперечення: оскільки результат експерименту (число випадань герба) передбачити неможливо, причому як для симетричної монети, так і для несиметричної цим числом може бути будь-яке з чисел $0, 1, \ldots, n$, то визначити, яка з монет підкидалася, неможливо.

Хто має рацію — статистик чи експериментатор?

Сформулюйте поставлену задачу з позицій статистика, тобто як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Дослідіть як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості й кількості n підкидань монети, побудуйте графіки функцій потужності критерію.

Що можна сказати стосовно можливості розрізнити симетричну й несиметричну монети?

Нехай $n = 25$. Яким буде висновок, якщо герб випав 21 раз?

16.6 (контроль на токсичність). Процес виробництва деякого медичного препарату досить складний, тому неістотні на перший погляд відхилення від технології можуть зумовити появу високотоксичних побічних домішок. Токсичність останніх може виявитися такою високою, що навіть незначна їхня кількість, яку не можна встановити за допомогою звичайного хімічного аналізу, небезпечна для людини, що вживатиме цей препарат. Тому до реалізації партії препарату його досліджують на токсичність біологічними методами. Певна доза препарату вводиться піддослідним тваринам і реєструється результат (число летальних кінців). Якщо препарат токсичний, то всі або майже всі тварини гинуть — число летальних кінців $\xi(\omega)$ велике ($\xi(\omega) \geq l$). У супротивному разі число летальних кінців $\xi(\omega)$ мале ($\xi(\omega) < l$), або, що те саме, кількість тварин, які залишилися живими, велика.

Відомо, що для токсичного препарату ймовірність летального кінця не менша ніж 0,9, а якщо препарат нетоксичний, то ймовірність летального кінця не перевищує 0,05. Яку мінімальну кількість n тварин слід ін'єктувати, щоб токсичний препарат виявлявся (класифікувався як токсичний) з імовірністю, не меншою ніж 0,999, а нетоксичний витримував контроль (класифікувався як нетоксичний) з імовірністю 0,98?

Знайти n, сформулювавши поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

16.7 (про вибірковий контроль). Якість партії виробів вважається задовільною, якщо дефектні вироби у ній становлять не більше ніж 2 %. Яку мінімальну кількість виробів з партії необхідно випробувати для того, щоб партія, яка містить 8 % дефектних виробів, виявлялася з імовірністю, не меншою ніж 0,95, а партія, що містить 2 % таких виробів, приймалася з імовірністю, не меншою ніж 0,9?

Сформулювати та розв'язати поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1 і приклад 16.1.1).

Обчислити значення функції потужності критерію у точках 0,04; 0,06; 0,1 і ймовірність відхилення партії, що містить 4; 6; 10 % дефектних виробів, побудувати графіки функцій потужності критерію.

З а у в а ж е н н я. Оскільки вибірку для контролю можна взяти великого обсягу, а відсоток дефектних виробів малий, то за розподіл числа ξ дефектних виробів у вибірці можна прийняти пуассонів розподіл.

16.8. Щоб з'ясувати, чи є хвороба перехідною, біолог прищеплює її п'яти мишам і розміщує їх в одній клітці з n нещепленими мишами. Якщо хвороба передається, то ймовірність того, що нещеплена миша захворіє протягом 10 днів, становить 0,9; якщо ж хвороба не передається, то ймовірність того, що нещеплена миша захворіє протягом зазначеного часу, становить 0,05. Через 10 днів фіксується кількість нещеплених мишей з ознаками хвороби.

Яку мінімальну кількість нещеплених мишей необхідно використати в експерименті, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,999, виявити перехідну хворобу і з імовірністю, не більшою ніж 0,01, класифікувати хворобу, що не передається, як таку, що передається?

Сформулювати та розв'язати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

16.9 (про контроль чистоти води). Для потреб деякого хімічного виробництва необхідно, щоб вода, яка використовується, була чистою, тобто містила незначну кількість бактерій. Вода, на одиницю об'єму якої в середньому припадає менше однієї бактерії, вважається придатною для зазначеного хімічного виробництва. Якщо ж середня кількість бактерій на одиницю об'єму води дорівнює одній або більше, то вода непридатна для використання.

Звичайна методика контролю води на чистоту така. Береться 10 (у загальному випадку n) проб води одиничного об'єму. Потім кожну з цих проб додають у колби із живильним середовищем, які тримають за температури, сприятливої для росту бактерій. Якщо проба забруднена, тобто містить принаймні одну бактерію, то колонія бактерій росте і розчин, який спочатку був прозорий, стає каламутним. Про чистоту води судять за кількістю ξ забруднених проб: якщо ця кількість не перевищує певного числа l, то вода вважається чистою; у супротивному разі — забрудненою, тоді провадиться додаткове очищення води і вона знову досліджується на чистоту. Додаткове очищення води, природно, вимагає додаткового труда і витрат проте, якщо вода, що використовується, містить значну кількість бактерій, то зумовлені цим збитки значно більші.

Яким має бути l, щоб вода з середнім вмістом бактерій, що дорівнює одній бактерії на одиницю об'єму, виявлялася з імовірністю 0,99? Знайти l, сформулювавши поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Нехай тепер рівень значущості й число n проб води не фіксовані. Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості і від n, побудувати графіки функції потужності критерію.

З а у в а ж е н н я. Як розподіл кількості бактерій в одиничному об'ємі води з середнім вмістом λ бактерій на одиницю об'єму природно прийняти пуассонів розподіл з параметром λ.

16.10 (про пані, яка смакує чай). Одна пані стверджує, що, покуштувавши чашку чаю з молоком, може визначити, що було спочатку налито у чашку — молоко чи чай (розрізняє рецепти приготування чаю). При цьому вона не претендує на безпомилкове визначення різниці на смак, але стверджує, що, нехай іноді помиляючись, частіше визначає правильно, ніж неправильно.

Перш ніж визнати здібності пані, їй пропонують взяти участь у такому експерименті. Пані необхідно покуштувати і класифікувати n пар чашок чаю (по парі чашок за сніданком протягом n днів). До кожної пари входить по чашці чаю, який готувався за різними рецептами. Кількість ξ правильно класифікованих пар реєструється. Нехай пані з n пар чашок правильно класифікувала $\xi(\omega)$ пар. Чи свідчить це про її здібності розрізняти рецепти, за якими готується чай?

Ви — член доброзичливого журі — не хочете несправедливо нехтувати здібностями пані розрізняти рецепти приготування чаю, коли вона справді їх має. Запропонуйте правило (критерій), яким варто керуватися, роблячи висновок щодо здібностей пані.

Сформулюйте і розв'яжіть поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

З'ясуйте, як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості та кількості n пар чашок чаю, що пропонується для класифікації, побудуйте графіки функції потужності критерію.

З а у в а ж е н н я. Як член журі, ви, зрозуміло, не хочете визнати здібності пані, якщо вона їх не має; тому за нульову гіпотезу пропонуєте гіпотезу H_0: пані не має здібностей. Але як член доброзичливого журі, ви не хочете несправедливо нехтувати здібностями пані, якщо вона їх має, і тому не призначаєте занадто малий рівень значущості критерію.

16.11 (вибірковий контроль). Споживач купує великі партії товарів. Щоб уникнути значної частки дефектних виробів, проводиться вибірковий контроль. З кожної партії для контролю вибирається n виробів. Партія приймається, якщо число дефектних виробів серед n перевірених не перевищує l.

Споживач висуває такі вимоги до контролю: якщо частка дефектних виробів у партії менша ніж 8 %, то партія витримує контроль і закуповується, але 8 % дефектних виробів у партії мають виявлятися з імовірністю, не меншою ніж 0,9. У постачальника свої побажання щодо контролю: він хоче, щоб партія, частка дефектних виробів у якій становить 1 %, бракувалася з імовірністю, не більшою ніж 0,04.

Якими мають бути обсяг (зрозуміло, мінімальний) вибірки n з партії та значення l?

Сформулюйте і розв'яжіть поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1 і приклад 16.1.1).

Яка ймовірність забракувати партію товарів, що містить 1; 2; 4; 8; 10 % дефектних виробів?

Побудуйте графіки функції потужності критерію.

16.12 (про гральні кубики). Маємо пару гральних кубиків: один — симетричний (імовірність випадання кожної грані дорівнює $1/6$), інший — несиметричний, центр тяжіння якого зміщено так, що ймовірність появи числа очок, більшого ніж 3, перевищує $1/2$.

Щоб виявити несиметричний кубик, беремо один кубик (який саме невідомо — кубики зовні розрізнити неможливо), підкидаємо його n разів і реєструємо кількість очок, що випали. Яку мінімальну кількість підкидань необхідно виконати, щоб симетричний кубик класифікувався як несиметричний з імовірністю, не більшою ніж 0,1, а несиметричний, імовірність випадання кількості очок більшої ніж 3 якого становить 0,9, виявлявся з імовірністю 0,95?

Розв'язати поставлену задачу, сформулювавши її як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Обчислити ймовірності того, що несиметричний кубик, імовірність випадання кількості очок більшої ніж 3 якого становить 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 буде виявлений; не буде виявлений.

16.13. Розв'язати задачу 16.9 за умови, що в експерименті використовується n проб води.

З'ясувати, як змінюється функція потужності критерію залежно від рівня його значущості та кількості проб води, що використовується в експерименті.

Побудуйте графіки функції потужності критерію.

16.14. Маємо два гральних кубики: один — симетричний (імовірність випадання кожної грані дорівнює $1/6$), і несиметричний, центр тяжіння якого зміщено так, що ймовірність появи числа очок, більшого ніж 3, не менша 0,6. Вибираємо один із кубиків (який саме, невідомо — гральні кубики зовні нерозрізненні), підкидаємо його n разів і реєструємо кількість очок, що випали. Чи можна за результатом експерименту виявити несиметричний гральний кубик?

Сформулюйти і розв'язати поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості і від числа n підкидань грального кубика, побудувати графіки функцій потужності критерію.

16.15 (про булочки з родзинками). Державним стандартом установлено, що при випіканні солодких булочок на 1000 виробів має припадати 10 000 родзинок (у середньому 10 на одну булочку). У нас, однак, є сумнів, що всі родзинки використано за призначенням (їх могли, принаймні частково, використати на інші потреби), і ми хочемо перевірити, чи це так. Для цього купуємо одну булочку й рахуємо кількість родзинок у ній: виявилося, що в булочці є $\xi(\omega)$ родзинок. За кількістю $\xi(\omega)$ родзинок у булочці треба дійти висновку, чи всі родзинки використано за призначенням.

Розв'язати поставлену задачу, сформулювавши її як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Як зміниться висновок, коли родзинки підраховують у двох булочках?

Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості, побудувати графіки функцій потужності критерію.

16.16 (контроль на токсичність). Медичний препарат проходить контроль на токсичність за методикою, описаною в задачі 16.6.

Відомо, що ймовірність летального кінця від використання токсичного препарату не менша ніж 0,8, а якщо препарат нетоксичний, то ймовірність летального кінця не перевищує 0,02.

Чи можна, ін'єктувавши 10 мишей, з імовірністю $0,999$ виявити токсичний препарат (токсичний препарат класифікувати як токсичний)? Якщо так, то яка ймовірність того, що нетоксичний препарат витримає контроль (буде класифікований як нетоксичний)?

Препарат було введено 10 мишам, при цьому зафіксовано загибель двох мишей. Який висновок щодо токсичності препарату необхідно зробити?

Розв'язати поставлену задачу, сформулювавши її як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Нехай тепер рівень значущості й кількість n піддослідних мишей ми можемо вибирати самі. Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості й від n, побудувати графіки функції потужності критерію.

16.17. Щоб з'ясувати, чи є хвороба перехідною, біолог прищеплює її п'яти мишам і розміщує їх в одній клітці з трьома нещепленими мишами. Якщо хвороба передається, то ймовірність того, що нещеплена миша захворіє протягом двох тижнів, дорівнює 0,95; якщо ж хвороба не передається, то ймовірність того, що нещеплена миша захворіє протягом зазначеного часу, становить 0,04. Через два тижні фіксується кількість нещеплених мишей з ознаками хвороби.

Чи можна, спостерігаючи трьох нещеплених мишей, з імовірністю, не меншою 0,99, виявити перехідну хворобу і з імовірністю, що не перевищує 0,05, класифікувати неперехідну хворобу як перехідну? Якщо ні, то скільки нещеплених мишей необхідно для цього? Якщо так, яке мінімальне число мишей буде достатнім?

Сформулюйте і розв'яжіть поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Якого висновку ви дійдете, якщо у двох із трьох нещеплених мишей були виявлені ознаки захворювання?

Нехай тепер рівень значущості й кількість n піддослідних мишей ми можемо вибирати самі. Дослідити, як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості й від n, побудувати графіки функцій потужності критерію.

16.18 (про монети). Маємо п'ять зовні нерозрізнених монет, імовірність випадання герба яких становить відповідно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.

Щоб виявити симетричну монету, беремо одну з них (яку саме, невідомо — монети нерозрізненні) і підкидаємо 20 разів.

За результатами підкидань дійти висновку про симетричність монети.

Сформулюйте і розв'яжіть поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1), вибравши гіпотезу "монета симетрична" як основну. Побудуйте критерій для перевірки цієї гіпотези з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$, побудуйте функцію потужності критерію. Яка ймовірність виявити несиметричну монету, ймовірність випадання герба якої становить 0,6; 0,7; 0,8; 0,9?

Нехай тепер рівень значущості й число n підкидань монети ми можемо вибирати самі. Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості і від n, побудувати графіки функції потужності критерію.

16.19 (про якість інсектициду). Як фахівця з математичною підготовкою вас запрошують проаналізувати результати дослідницької роботи, пов'язаної з виробництвом інсектицидів. Якість інсектициду визначається відсотком ураження — відсотком комах, які гинуть у популяції, обробленій препаратом. Кращий з наявних інсектицидів має відсоток ураження 92. У лабораторії створено новий інсектицид INC. Виникає запитання: чи є він якіснішим?

Щоб з'ясувати це, пропонується обробити новим інсектицидом 100 комах і підрахувати кількість тих, які вижили. Якщо кількість комах, що вижили, менша від певного числа l, то INC якісніший, в супротивному разі — ні.

Автори нового препарату стверджують, що препарат має відсоток ураження не менший 98, і хочуть, щоб ця його властивість проявлялася з імовірністю, не нижчою ніж 0,96. Інсектицид INC дорожчий за наявні у продажу препарати з відсотком ураження 92, і покупець, природно, відмовляється купувати INC, якщо його відсоток ураження 92, і наполягає, щоб при тестуванні інсектициду INC препарат, відсоток ураження якого становить 92, виявлявся з імовірністю не меншою ніж 0,95.

Чи можна, використавши в експерименті 100 комах, дійти висновку щодо якості інсектициду INC, забезпечивши перелічені вище умови? Якщо 100 комах у досліді замало, то якою має бути мінімальна кількість комах у групі, що обробляється, щоб можна було відповісти на поставлене запитання?

Дайте відповідь на перелічені питання, сформулювавши поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Нехай тепер рівень значущості й кількість n комах ми можемо вибирати самі. Дослідити як змінюється функція потужності критерію залежно від його рівня значущості і від n, побудувати графіки функції потужності критерію.

16.20 (про якість інсектициду). Ви займаєтесь дослідженнями, пов'язаними з виробництвом інсектицидів. Якість інсектициду визначається відсотком ураження — відсотком комах, які гинуть від препарату в популяції, що досліджується. Кращий з наявних інсектицидів має відсоток ураження 90. У лабораторії створено новий інсектицид NIP. Виникає запитання: чи є цей препарат кращим?

Щоб з'ясувати, чи відрізняються інсектициди за якістю, популяція з n комах обробляється NIP і підраховується кількість комах, які вижили. Якщо їх менше певного числа l, то вважається, що інсектицид NIP якісніший, у супротивному разі — ні.

Автори нового препарату стверджують, що він має відсоток ураження не менший ніж 99, і хочуть, щоб ця його властивість проявлялася з імовірністю не меншою ніж 0,98. Інсектицид NIP дорожчий за наявні у продажу препарати, і покупець, природно, відмовляється купувати NIP, якщо його відсоток ураження 90, і наполягає, щоб інсектицид NIP, відсоток ураження якого становить 90, виявлявся з імовірністю 0,95.

Якими мають бути n (якомога меншим) і l, щоб інсектицид, відсоток ураження якого 90, виявлявся з імовірністю 0,95, а інсектицид, відсоток ураження якого 99, класифікувався як саме такий з імовірністю не меншою ніж 0,98?

Сформулювати й розв'язати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

16.21. Нехай в умовах експерименту, описаного в задачі 16.3, значення $p_0 = 0{,}98$, $p_1 = 0{,}01$.

Яку мінімальну кількість n знімків необхідно зробити під час обстеження кожного пацієнта, щоб пацієнта з ознаками туберкульозу можна було виявити з імовірністю 0,95, а пацієнт, який не має таких ознак, витримував перевірку на туберкульоз з імовірністю 0,90.

Визначити n, сформулювавши поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

16.22. Розглянемо експеримент, описаний у задачі 16.5. Нехай імовірність випадання герба несиметричної монети становить 0,8. Що ви можете сказати стосовно можливості розрізнити симетричну і несиметричну монети? Свою відповідь аргументуйте. Дайте кількісні оцінки.

Сформулюйте і розв'яжіть цю задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (див. задачу 16.1).

Глава 17

Перевірка гіпотез про параметри розподілу $N_{a;\sigma^2}$

17.1 Перевірка гіпотези H_0: $a = a_0$

Підґрунтям критеріїв для перевірки гіпотез про параметри нормального розподілу є теорема:

Теорема 17.1.1. *Якщо* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — *вибірка з нормального розподілу* $N_{a;\sigma^2}$, *то оцінки*

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \;\; i \;\; s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2$$

є незалежними випадковими величинами, причому $(n-1)s^2/\sigma^2$ *має розподіл* χ^2 *з* $(n-1)$ *ступенями вільності, а* $\overline{\xi}$ *розподілена* $N_{a;\sigma^2/n}$.

Наслідок. Якщо $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — *вибірка з нормального розподілу* $N_{a;\sigma^2}$, *то випадкова величина*

$$(\overline{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$$

має розподіл Стьюдента з $n-1$ *ступенями вільності* (щодо розподілів χ^2 і Стьюдента, див. гл. 21).

Постановка задачі перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ — реалізація вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ з нормального розподілу $N_{a;\sigma^2}$. Параметри a і σ^2 невідомі. Відносно значення невідомого параметра a висувається гіпотеза H_0: $a = a_0$, або, що те саме, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з нормального розподілу $N_{a_0;\sigma^2}$. Альтернатива до гіпотези H_0 може бути як однобічна: якщо $a \neq a_0$, то $a > a_0$ (вона може бути і така: $a < a_0$), так і двобічна: якщо $a \neq a_0$, то $a > a_0$ або $a < a_0$. Альтернатива у кожній задачі своя.

Необхідно перевірити нульову гіпотезу, тобто за реалізацією вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дійти висновку: відхиляти H_0 чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується чи ні гіпотеза H_0: $a = a_0$ (і взагалі, висувались якісь гіпотези чи не висувалися), оцінка

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

побудована за вибіркою $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ з $N_{a;\sigma^2}$, є незсуненою і спроможною оцінкою параметра a, тобто $\overline{\xi}$ дає хороше наближення для a. Тому якщо $a = a_0$ (гіпотеза справджується), то відхилення $\overline{\xi} - a_0$ між оцінкою $\overline{\xi}$ параметра a і його гіпотетичним значенням a_0 мале, у супротивному разі — велике. І отже, для перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ обчислюємо значення відхилення $\overline{\xi} - a_0$ і залежно від того, великим чи малим воно виявиться, відхиляємо гіпотезу H_0 або не відхиляємо. (Нам буде зручно нормувати $\overline{\xi} - a_0$ величиною $\frac{s}{\sqrt{n}}$ і розглядати нормоване відхилення $t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$, де $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2$.)

Щоб так можна було діяти, необхідно знати, яких значень набуває відхилення

$$t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$$

(в ідеалі знайти розподіл t), коли гіпотеза H_0 справджується і коли вона не справджується.

Коли гіпотеза H_0: $a = a_0$ справджується, відхилення t, яке при цьому позначатимемо через t_{n-1}:

$$t_{n-1} = (\overline{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}},$$

має розподіл Стьюдента з $(n-1)$ ступенями вільності (див. теорему 17.1.1), тобто малі відхилення t мають t_{n-1}-розподіл. Звідси, зокрема, випливає, що

$$Mt = Mt_{n-1} = 0$$

і малі значення $t = t_{n-1}$ "майже завжди" (з імовірністю $1-2\alpha$) належать проміжку $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$, де $t_{\alpha;n-1}$ — верхня α-межа t_{n-1}-розподілу.

Якщо гіпотеза H_0: $a = a_0$ не справджується (нехай для визначеності $a > a_0$), то відхилення t можна подати у вигляді

$$t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} = (\overline{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} + (a - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} =$$

$$= t_{n-1} + (a - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}. \qquad (17.1.1)$$

З рівності (17.1.1), зокрема, випливає, що при $n \to \infty$

$$Mt \to \infty,$$

$$t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} \infty$$

— коли гіпотеза H_0: $a = a_0$ не справджується, відхилення t набуває великих значень.

Як межі, що відокремлюють великі значення t від малих, природно вибрати числа $-t_{\alpha;n-1}$ і $t_{\alpha;n-1}$. При цьому значення t, що належать проміжку $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$, класифікуватимемо як малі, у супротивному разі — як великі. (Малі значення t "майже завжди" — з імовірністю $(1-2\alpha)$ — лежать у проміжку $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$.)

Таким чином, для перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ обчислюємо значення

$$t = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}}$$

нормованого відхилення $\overline{\xi}$ від a_0 і з'ясовуємо, велике воно чи мале, порівнюючи t з межами $-t_{\alpha;n-1}$, $t_{\alpha;n-1}$, що відокремлюють великі значення t від малих. Якщо при цьому t набуло великих значень, тобто $|t| > t_{\alpha;n-1}$, гіпотезу H_0: $a = a_0$ відхиляємо, у супротивному разі — ні.

Критерій Стьюдента для перевірки гіпотези $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{a = a_0}$. *Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з $N_{a;\sigma^2}$-розподілу, $t_{\alpha;(n-1)}$ — верхня α-межа t-розподілу з $(n-1)$ ступенями вільності.*

Якщо гіпотезу H_0: $a = a_0$ відхиляти при

$$|\overline{\xi} - a_0| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} > t_{\alpha;(n-1)}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2α гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива двобічна: $a > a_0$ або $a < a_0$).

Якщо альтернатива однобічна, наприклад $a > a_0$, то $(\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}}$ порівнюємо з $t_{\alpha;(n-1)}$: при

$$(\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} > t_{\alpha;(n-1)}$$

гіпотезу H_0 відхилятимемо, у супротивному разі — ні (рівень значущості однобічного критерію дорівнює α).

Помилки при перевірці гіпотези $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{a = a_0}$. Незалежно від того, справджується чи ні гіпотеза H_0: $a = a_0$, випадкова величина $(\overline{\xi} - a) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}}$ має розподіл Стьюдента з $n-1$ ступенями вільності і, як наслідок, $\overline{\xi}$ "майже завжди" (з імовірністю $1 - 2\alpha$) набуває значень з околу

$$\left(a - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha;(n-1)},\ a + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha;(n-1)} \right)$$

точки a, але може, хоча й зрідка (з імовірністю 2α), набувати значень поза зазначеного околу точки a. Тому, коли гіпотеза H_0 справджується, відхилення $t = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}}$ може, хоча й зрідка (з імовірністю 2α), набувати великих значень, тобто $|\overline{\xi} - a_0| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} > t_{\alpha;(n-1)}$, при цьому гіпотезу H_0, що справджується, ми відхиляємо і тим самим припускаємося помилки першого роду.

Далі, коли гіпотеза H_0 не справджується, $\overline{\xi}$, “майже завжди” набуваючи значень з околу точки a, може (хоча й зрідка) набути значення, яке мало відхиляється від a_0 (тобто $|\overline{\xi} - a_0| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} \leq t_{\alpha;(n-1)}$). При цьому ми гіпотезу H_0: $a = a_0$ не відхиляємо (хоча вона й не справджується) і тим самим припускаємося помилки другого роду.

Приклад 17.1.1 (ефект від використання спеціальної сівалки). *Для того, щоб виявити ефект використання спеціальної сівалки, 10 ділянок землі засіяли звичайною сівалкою і 10 — спеціальною, а потім порівняли отримані врожаї.*

Спочатку 20 ділянок однакової площі були поділені на пари, причому до кожної пари входили суміжні ділянки. Питання про те, яка з двох суміжних ділянок мала оброблятися спеціальною машиною, вирішувалося підкиданням монети.

Різниці врожаїв з пар суміжних ділянок, засіяних спеціальною сівалкою і звичайною, подані у таблиці.

Номер пари	Різниця врожаїв	Номер пари	Різниця врожаїв
1	2,4	6	1,6
2	1,0	7	−0,4
3	0,7	8	1,1
4	0,0	9	0,1
5	1,1	10	0,7

Чи свідчать наведені дані про наявність ефекту від використання спеціальної сівалки, інакше кажучи, чи дає використання спеціальної сівалки надбавку врожаю?

Р о з в' я з а н н я. У термінах перевірки статистичних гіпотез задачу можна сформулювати так. Маємо 10 незалежних спостережень випадкової величини — реалізацію $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_{10}(\omega)$ вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10}$ з нормального розподілу $N_{a;\sigma^2}$, параметри a і σ^2 якого невідомі (припущення щодо нормального розподілу результатів вимірювань у більшості випадків справджується). Стосовно параметра a розподілу $N_{a;\sigma^2}$ висувається гіпотеза H_0: $a = 0$ (образлива для розробників нової сівалки). Альтернатива однобічна: $a > 0$ (спеціальна сівалка створювалася для підвищення врожайності). Відхилення гіпотези H_0: $a = 0$ на користь альтернативи $a > 0$ трактуватимемо як наявність ефекту використання спеціальної сівалки, невідхилення — як відсутність ефекту.

Необхідно перевірити гіпотезу H_0. Згідно з критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ за альтернативи $a > a_0$ обчислюємо значення

$$t = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}}$$

і порівнюємо його з $t_{\alpha;n-1}$ — верхньою α-межею t_{n-1}-розподілу. Якщо

$$t = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} > t_{\alpha;n-1},$$

гіпотезу H_0 відхиляємо, у супротивному разі — ні (рівень значущості критерію дорівнює α).

У прикладі, що розглядається, $n = 10$,

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{1}{10}(2{,}4 + 1{,}0 + \ldots + 0{,}7) = 0{,}83;$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2 = \frac{1}{9}((2{,}4 - 0{,}83)^2 +$$

$$+ (1{,}0 - 0{,}83)^2 + \ldots + (0{,}7 - 0{,}83)^2) = 0{,}667;$$

$$t = \overline{\xi} \Big/ \sqrt{\frac{s^2}{n}} = 0{,}83 \Big/ \sqrt{\frac{0{,}667}{10}} = 3{,}22.$$

Таким чином,

$$t = \overline{\xi} \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}22 > 2{,}26 = t_{0{,}025;9}.$$

Тому згідно з критерієм Стьюдента гіпотезу H_0: $a = 0$ відхиляємо на користь альтернативи $a > 0$. Інакше кажучи, гіпотеза про те, що вибірку добуто з нормального розподілу з середнім нуль, суперечить наявним даним.

Отриманий результат можна інтерпретувати так. Припущення про те, що різниця врожаїв з ділянок, засіяних спеціальною сівалкою і звичайною, неістотно відхиляється від нуля, суперечить наявним даним. Для сівалки, застосування якої не дає ефекту, такі відхилення різниці урожаїв від нуля, як наведено в таблиці, неможливі (точніше, можливі, але вкрай рідко). Отже, експеримент дає підстави стверджувати: ефект від використання спеціальної сівалки існує (на радість розробників спеціальної сівалки).

17.2 Перевірка гіпотези H_0: $a_\xi = a_\eta$

Постановка задачі. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_n(\omega))$ і $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \ldots, \eta_m(\omega))$ — реалізації незалежних вибірок $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ і $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_m)$ відповідно з розподілів $N_{a_\xi;\sigma^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma^2}$. Середні a_ξ й a_η і дисперсія σ^2 (одна й та сама для обох розподілів) невідомі.

Щодо параметрів a_ξ й a_η висувається гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$ або, що те саме, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — вибірки з одного й того самого нормального розподілу. Альтернатива гіпотезі H_0 може бути як однобічною: якщо $a_\xi \neq a_\eta$, то $a_\xi > a_\eta$ (вона може бути й такою: $a_\xi < a_\eta$), так і двобічною: якщо $a_\xi \neq a_\eta$, то $a_\xi > a_\eta$ або $a_\xi < a_\eta$. Альтернатива у кожній задачі своя.

Необхідно за вибірками $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ відповідно з розподілів $N_{a_\xi;\sigma^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma^2}$ дійти висновку: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується чи ні гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, оцінки $\overline{\xi}$ і $\overline{\eta}$ є незсуненими і спроможними оцінками відповідно параметрів a_ξ і a_η, а різниця $\overline{\xi} - \overline{\eta}$ є незсуненою й спроможною оцінкою різниці $a_\xi - a_\eta$. Тому, коли $a_\xi = a_\eta$ (коли гіпотеза H_0 справджується) різниця $\overline{\xi} - \overline{\eta}$ мало відхиляється від нуля, у супротивному разі відхилення різниці від нуля велике. Отже, для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi = a_\eta$ природно обчислити різницю $\overline{\xi} - \overline{\eta}$ і залежно від того, якого значення вона набула: великого чи малого — відхиляти чи не відхиляти гіпотезу H_0. (Нам буде зручно нормувати $\overline{\xi} - \overline{\eta}$ величиною $s\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}$ і розглядати нормоване відхилення $t = (\overline{\xi} - \overline{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}\right)$, де s^2 означається рівністю (17.2.2).) Щоб так можна було діяти, необхідно знати, яких значень набуває відхилення

$$t = (\overline{\xi} - \overline{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right)$$

(а в ідеалі знайти розподіл t), коли гіпотеза H_0 справджується і коли вона не справджується.

Якщо гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$ справджується, нормована різниця t, яку в цьому разі позначимо через t_{n+m-2}, тобто

$$t_{n+m-2} = (\overline{\xi} - \overline{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right),$$

має розподіл Стьюдента з $(m+n-2)$ ступенями вільності. Звідси, зокрема, випливає, що

$$Mt_{n+m-2} = 0$$

і значення t_{n+m-2} “майже завжди” (з імовірністю $1-2\alpha$) належить проміжку $(-t_{\alpha;(n+m-2)}, t_{\alpha;(n+m-2)})$, де $t_{\alpha;(n+m-2)}$ — верхня α-межа t-розподілу з $(n+m-2)$ ступенями вільності.

Якщо гіпотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$ не справджується (нехай для визначеності $a_\xi > a_\eta$), різницю можна подати у вигляді

$$t = (\overline{\xi} - \overline{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) =$$

$$= ((\overline{\xi} - a_\xi) - (\overline{\eta} - a_\eta))\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) + (a_\xi - a_\eta)\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) =$$

$$= t_{n+m-2} + (a_\xi - a_\eta)\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right). \qquad (17.2.1)$$

Із рівностей (17.2.1) випливає, що при $n, m \to \infty$

$$Mt \to \infty,$$

$$t = t_{n+m-2} + (\overline{\xi} - \overline{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) \xrightarrow{P} \infty.$$

— коли гіпотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$ не справджується, відхилення набуває великих значень.

Як межі, що відокремлюють великі значення t від малих природно вибрати числа $-t_{\alpha;n+m-2}, t_{\alpha;n+m-2}$. При цьому значення t, що належать проміжку

$$(-t_{\alpha;n+m-2}, t_{\alpha;n+m-2}),$$

класифікуватимемо як малі, у супротивному разі — як великі (малі значення t “майже завжди” — з імовірністю $(1 - 2\alpha)$ — лежать у проміжку $(-t_{\alpha;n+m-2}, t_{\alpha;n+m-2})$).

Далі для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$ обчислюємо значення нормованої різниці

$$t = (\overline{\xi} - \overline{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right)$$

і з’ясовуємо, велике воно чи мале, порівнюючи t з межами $-t_{\alpha;(n+m-2)}$ і $t_{\alpha;(n+m-2)}$, що відокремлюють великі значення t від малих. Якщо при цьому t набуло великого значення, тобто $|t| > t_{\alpha;n+m-2}$, гіпотезу відхиляємо, у супротивному разі — ні.

Нагадаємо, що

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left((n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2\right), \qquad (17.2.2)$$

де

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2,\ s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \overline{\eta})^2.$$

Критерій Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi = a_\eta$ (про рівність середніх нормальних розподілів). *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — незалежні вибірки відповідно з розподілів $N_{a_\xi;\sigma^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma^2}$, $t_{\alpha;(n+m-2)}$ — верхня α-межа t-розподілу з $(n+m-2)$ ступенями вільності.*

Якщо гіпотезу H_0: $a_\xi = a_\eta$ відхиляти при

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}|\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) \geq t_{\alpha;(n+m-2)}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2α гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива двобічна: $a_\xi < a_\eta$ або $a_\xi > a_\eta$).

Якщо альтернатива однобічна, наприклад $a_\xi > a_\eta$, то t порівнюємо з $t_{\alpha;(n+m-2)}$: при

$$t = (\overline{\xi} - \overline{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) \geq t_{\alpha;(n+m-2)}$$

гіпотезу H_0 відхилятимемо, у супротивному разі — ні (рівень значущості однобічного критерію дорівнює α).

Приклад 17.2.1 . *Далі наведено дані про вимірювання нерівностей поверхні однієї й тієї самої чистоти оброблення за допомогою двох подвійних мікроскопів.*

Мікроскоп I: 0,8; 1,9; 3,0; 3,5; 3,8; 2,5; 1,7; 0,9; 1,0; 2,3; 3,3; 3,4.

Мікроскоп II: 1,4; 2,1; 3,1; 3,6; 2,7; 1,7; 1,1; 0,2; 1,6; 2,8; 4,0; 4,7.

Чи можна вважати, що між показами приладів немає систематичної розбіжності?

Розв'язання. Для визначеності позначатимемо через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ дані вимірювань, добуті за допомогою першого мікроскопа, через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — другого.

У термінах перевірки статистичних гіпотез цю задачу можна сформулювати так. Маємо реалізації двох незалежних вибірок $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ відповідно з розподілів $N_{a_\xi;\sigma^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma^2}$ (припущення про нормальний розподіл результатів вимірювань у більшості випадків виправдовує себе). Відносно параметрів a_ξ і a_η висувається гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$. Це гіпотеза про відсутність систематичної розбіжності між показами приладів. Апріорі, якщо $a_\xi \neq a_\eta$, то може бути як $a_\xi < a_\eta$, так і $a_\xi > a_\eta$, тому альтернатива двобічна. Відхилення гіпотези H_0 на користь цієї альтернативи інтерпретується як наявність систематичної розбіжності показів приладів, невідхилення — як відсутність розбіжності показів.

Згідно з критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi = a_\eta$ за двобічної альтернативи $a_\xi < a_\eta$ або $a_\xi > a_\eta$ треба порівняти значення

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}| \bigg/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right)$$

з $t_{\alpha;(n+m-2)}$ — верхньою α-межею $t_{(n+m-2)}$-розподілу. Якщо

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}| \bigg/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right) \geq t_{\alpha;(n+m-2)},$$

гіпотезу H_0 відхиляємо, у супротивному разі — ні (рівень значущості критерію 2α).

У прикладі, що розглядається, $n = 12,\ m = 12$,

$$\overline{\xi} = \frac{1}{12}(0{,}8 + 1{,}9 + \ldots + 3{,}4) = 2{,}34,$$

$$\overline{\eta} = \frac{1}{12}(1{,}4 + 2{,}1 + \ldots + 4{,}7) = 2{,}42,$$

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2,\ s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \overline{\eta})^2,$$

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}((n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2) = 1{,}44,$$

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}| \Big/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) =$$

$$= |2{,}42 - 2{,}34| \Big/ \sqrt{\frac{1{,}44(12+12)}{(12\cdot 12)}} = 0{,}16.$$

Таким чином,

$$|t| = 0{,}16 < 2{,}074 = t_{0{,}025;\,22}.$$

Тому згідно з критерієм Стьюдента гіпотезу H_0 про рівність $a_\xi = a_\eta$ на 5 %-му рівні значущості не відхиляємо.

Цей результат можна трактувати так. Припущення про відсутність систематичної розбіжності між показами мікроскопів не суперечить експериментальним даним. (Такі покази могли бути отримані під час роботи з одним і тим самим приладом.) Інакше кажучи, експеримент не дає підстав говорити про існування систематичної розбіжності між показами мікроскопів.

17.3 Перевірка гіпотези H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$

Постановка задачі. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots \ldots, \xi_n(\omega))$ — реалізація вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ з розподілу $N_{a;\sigma^2}$. Параметри a і σ^2 невідомі. Відносно значення параметра σ^2 висувається гіпотеза

$$H_0\colon\ \sigma^2/\sigma_0^2 = 1.$$

Альтернатива гіпотезі H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ може бути як однобічною: якщо $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$, то $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$ (вона може бути й такою: $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$), так і двобічною: якщо $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$, то $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$ або $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$. Альтернатива у кожній задачі своя.

Необхідно за реалізацією $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots \ldots, \xi_n(\omega))$ вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ з розподілу $N_{a;\sigma^2}$ дійти висновку: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується гіпотеза H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ чи ні,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2$$

є незсуненою і спроможною оцінкою параметра σ^2. Тому якщо гіпотеза H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ справджується, відношення $s^2/\sigma_0^2 = s^2/\sigma^2$ мало відрізняється від 1 порівняно з відношенням s^2/σ_0^2, коли гіпотеза H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ не справджується. А саме, якщо $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$, то

$$M(s^2/\sigma_0^2) = M(s^2/\sigma^2) = 1,$$

$$s^2/\sigma_0^2 \xrightarrow{P} \sigma^2/\sigma_0^2 = 1.$$

А якщо $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$, то

$$M(s^2/\sigma_0^2) = \sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1,$$

$$s^2/\sigma_0^2 \xrightarrow{P} \sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1.$$

Тому критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ природно будувати, порівнюючи відношення s^2/σ_0^2 з 1. Якщо відношення s^2/σ_0^2 істотно відрізняється від 1, то гіпотезу H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ природно відхиляти, у супротивному разі — ні. Межі, що відокремлюють значення s^2/σ_0^2, які істотно відрізняються від 1, від значень s^2/σ_0^2, що мало (допустимо) відхиляються від 1, встановлюються на підставі того, що для вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ з розподілу $N_{a;\sigma^2}$ випадкова величина

$$(n-1)s^2/\sigma^2$$

має розподіл χ^2 з $(n-1)$ ступенями вільності (щодо розподілу χ^2 див. гл. 21).

Критерій для перевірки гіпотези $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\sigma^2/\sigma_0^2 = 1}$. *Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з $N_{a;\sigma^2}$, $\chi^2_{\beta;(n-1)}$ — верхня β-межа $\chi^2_{(n-1)}$-розподілу.*

Якщо гіпотезу H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ відхиляти при

$$\frac{s^2}{\sigma_0^2} \notin \left(\frac{1}{n-1}\chi^2_{(1-\alpha);(n-1)}, \frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha;(n-1)}\right)$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2α гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива двобічна: $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$ або $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$).

Якщо альтернатива однобічна, наприклад $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$, то при

$$\frac{s^2}{\sigma_0^2} > \frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha;(n-1)}$$

гіпотезу H_0 відхиляємо, у супротивному разі — ні (рівень значущості однобічного критерію дорівнює α).

17.4 Перевірка гіпотези $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1}$

Постановка задачі. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_n(\omega))$ і $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \ldots, \eta_m(\omega))$ — реалізації незалежних вибірок $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ і $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_m)$ відповідно з розподілів $N_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$. Параметри a_ξ, a_η, σ_ξ^2 і σ_η^2 нормальних розподілів невідомі. Щодо значень σ_ξ^2 і σ_η^2 висувається гіпотеза

$$H_0\colon \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$$

або, що те саме, вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ і $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots \ldots, \eta_m)$ добуто з нормальних розподілів з однією і тією самою дисперсією. Альтернатива гіпотезі H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ може бути як однобічною: якщо $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 \neq 1$, то $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ (вона може бути й такою: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$), так і двобічною: якщо $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 \neq 1$, то $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ або $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$. Вибір альтернативи визначається поставленою задачею.

Необхідно за реалізаціями вибірок $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ і $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ з розподілів $N_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$ відповідно дійти висновку: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ чи ні,

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2 \quad \text{і} \quad s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\eta_i - \overline{\eta}\right)^2$$

є спроможними оцінками відповідно параметрів σ_ξ^2 і σ_η^2, а тому $s_\xi^2\Big/s_\eta^2$ збігається за ймовірністю до $\sigma_\xi^2\Big/\sigma_\eta^2$, коли $n \to \infty$, $m \to \infty$. Отже, якщо $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, то відношення $s_\xi^2\Big/s_\eta^2$ за великих n і m мало відрізняється від $\sigma_\xi^2\Big/\sigma_\eta^2 = 1$. Якщо ж $\sigma_\xi^2\Big/\sigma_\eta^2 \neq 1$, то відношення $s_\xi^2\Big/s_\eta^2$, будучи близьким до $\sigma_\xi^2\Big/\sigma_\eta^2$, від 1 відрізняється істотно. Тому критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ природно будувати, порівнюючи відношення $s_\xi^2\Big/s_\eta^2$ з 1: якщо це відношення істотно відрізняється від 1, то гіпотезу H_0 природно відхиляти, у супротивному разі — ні. Межі, які відокремлюють значення $s_\xi^2\Big/s_\eta^2$, що істотно відрізняються від 1, від значень $s_\xi^2\Big/s_\eta^2$, які мало (допустимо) відхиляються від 1, встановлюються на підставі того, що коли $\sigma_\xi^2\Big/\sigma_\eta^2 = 1$

(тобто коли гіпотеза H_0 справджується) випадкова величина $s_\xi^2 \Big/ s_\eta^2$ має F-розподіл з $(n-1, m-1)$ ступенями вільності (щодо F-розподілу див. гл. 21).

Критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — незалежні вибірки відповідно з розподілів $N_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$; $F_{\beta;s;k}$ — верхня β-межа F-розподілу з s, k ступенями вільності.*

Якщо гіпотезу H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ відхиляти при

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} \notin \left(\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}},\ F_{\alpha;(n-1);(m-1)}\right)$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2α гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (цим критерієм користуємось, якщо альтернатива двобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ або $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$).

Якщо альтернатива однобічна, наприклад $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$, то при

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} > F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$$

гіпотезу H_0 відхиляємо, у супротивному разі — ні (рівень значущості цього однобічного критерію дорівнює α).

Приклад 17.4.1. *Визначається межа міцності на розрив матеріалу на двох різних стендах A і B. Добуто такі вибірки значень межі міцності на розрив.*

Стенд A: 1,32; 1,35; 1,32; 1,35; 1,30; 1,30; 1,37; 1,31; 1,39; 1,39.

Стенд B: 1,35; 1,31; 1,31; 1,41; 1,39; 1,37; 1,32; 1,34.

З'ясувати, чи можна вважати, що точність вимірювань межі міцності на розрив на стендах A і B однакова.

Розв'язання. У термінах перевірки статистичних гіпотез цю задачу можна сформулювати так. Маємо дві реалізації незалежних вибірок із нормальних розподілів $N_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ і $N_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$ (нехай для визначеності $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вибірка, добута на стенді A, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ — на стенді B). Відносно невідомих параметрів σ_ξ^2 і σ_η^2 висувається гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ (це гіпотеза про однакову точність вимірювань на стендах A і B). Альтернатива двобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ або $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$, оскільки немає ніякої апріорної інформації щодо точності роботи стендів A і B. Відхилення гіпотези H_0 на користь цієї альтернативи інтерпретуватимемо як наявність відмінностей у точності вимірювань на стендах, невідхилення — як відсутність відмінностей.

Згідно з критерієм для перевірки гіпотези

$$H_0 : \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$$

за двобічної альтернативи гіпотезу H_0 відхиляємо, якщо

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} \notin \left(\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}},\ F_{\alpha;(n-1);(m-1)} \right),$$

і не відхиляємо в супротивному разі.

У прикладі, що розглядається, $n = 10$, $m = 8$, $\overline{\xi} = 1{,}34$; $\overline{\eta} = 1{,}35$,

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2 = 12{,}2 \cdot 10^{-4};$$

$$s_\eta^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (\eta_i - \overline{\eta})^2 = 14{,}0 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} = \frac{12{,}2 \cdot 10^{-4}}{14{,}0 \cdot 10^{-4}} = 0{,}87;$$

$$F_{\alpha;(n-1);(m-1)} = F_{0{,}01;9;7} = 6{,}72;$$

$$\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}} = \frac{1}{5{,}61} = 0{,}18.$$

Значення s_ξ^2/s_η^2 належить проміжку

$$\left(\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}},\ F_{\alpha;(n-1);(m-1)} \right) = (0{,}18;\ 6{,}72),$$

тому гіпотезу H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ на 2 %-му рівні значущості не відхиляємо.

Цей результат можна інтерпретувати так. Припущення (гіпотеза), що стенди A і B мають однакову точність вимірювань межі міцності на розрив, не суперечить експериментальним даним. (Такі дані могли бути отримані під час роботи на одному й тому самому стенді.) Інакше кажучи, експеримент не дає підстав стверджувати, що точність вимірювань межі міцності на розрив на стендах A і B різна.

17.5 Задачі

АЗ: 17.1, 17.6, 17.8, 17.15.
СЗ: 17.4, 17.9, 17.14, 17.33.

17.1. Протягом літніх канікул 10 школярів перебували у спортивному таборі. На початку сезону і після його завершення у них визначали ємність легенів (у мілілітрах). За результатами вимірювань необхідно визначити, чи істотно змінився цей показник під впливом інтенсивних фізичних вправ.

Школяр	Ємність легенів		Школяр	Ємність легенів	
	на початку сезону	по закінченні сезону		на початку сезону	по закінченні сезону
1	3400	3800	6	3100	3200
2	3600	3700	7	3200	3200
3	3000	3300	8	3400	3300
4	3500	3600	9	3200	3500
5	2900	3100	10	3400	3600

17.2. Щоб порівняти відбивну здатність двох видів фарби (A і B), провели такий експеримент: з 10 вибраних навмання пробних зразків п'ять пофарбували однією фарбою, решту — іншою і виміряли їхню відбивну здатність за допомогою оптичного приладу. Отримали такі результати.

Фарба A: 195; 150; 205; 120; 160.
Фарба B: 200; 115; 220; 185; 170.

Чи свідчать ці дані про відмінність відбивної здатності фарб?

17.3. Один із методів кількісного аналізу ступеня спрацювання шини полягає у вимірюванні глибини проникнення щупа[1] у певному місці шини. Є підозра, що поява значної частки дисперсії вимірювань пов'язана з діями контролерів. Щоб вилучити із загальної дисперсії вимірювань зазначену частину, двом контролерам (X і Y) запропонували провести по 12 вимірювань в одній і тій самій точці шини. Отримали такі результати.

Контролер X: 121; 121; 126; 130; 127; 131; 127; 124; 125; 119; 126; 123.

Контролер Y: 120; 129; 128; 136; 117; 138; 124; 119; 136; 136; 134; 132.

Чи істотно відрізняються дисперсії вимірювань, проведених контролерами X і Y?

17.4. На виробництві електричні лічильники, що мають обертовий диск, відрегулювали так, що їхня робота стала синхронною з роботою стандартного лічильника (робота лічильника характеризується сталою, яка має дорівнювати одиниці). Перевірка 10 лічильників, яка полягала у визначенні їхньої сталої за допомогою точних ватметрів і секундомірів, дала такі результати:

Номер лічильника	Значення сталої	Номер лічильника	Значення сталої
1	0,983	6	0,988
2	1,002	7	0,994
3	0,998	8	0,991
4	0,996	9	1,005
5	1,003	10	0,986

Стала стандартного лічильника дорівнює 1,000.

Чи можна відхилення від стандарту розглядати як випадкові, чи, навпаки, результати вказують на те, що сталі відрегульованих лічильників систематично відрізняються від сталої стандартного лічильника?

Відповісти на це питання, перевіривши гіпотезу про те, що 10 вимірювань утворюють вибірку, добуту з нормального розподілу із середнім 1,000.

---

[1] Тут щуп — тонка продовгувата металева пластинка прямокутної форми.

17.5. Щоб порівняти два сорти сталі (I і II) за здатністю до глибокого відпуску, виготовили по сім зразків з кожного сорту й випробували їх за методом Еріксона, згідно з яким у зразок вдавлюється конус з кульковим наконечником. Глибину проникнення кульки вимірюють у міліметрах. Результати випробувань наведено нижче.

Сталь сорту I: 10,85; 10,24; 10,48; 10,35; 11,07; 9,54; 11,18.

Сталь сорту II: 11,05; 10,07; 10,03; 10,57; 10,27; 9,97; 9,92.

Чи можна вважати, що обидва сорти сталі мають однакову здатність до глибокого відпуску?

Розв'язати поставлену задачу, сформулювавши її як задачу перевірки статистичних гіпотез.

17.6. Маса пакунка з природним барвником має становити 50 кг, а дисперсія маси пакунка не повинна перевищувати 0,01 кг^2. Зважування 10 пакунків дало такі результати: 50,10; 50,07; 49,93; 49,81; 49,70; 49,76; 50,08; 50,18; 49,79; 51,02 (маса у кілограмах).

Чи свідчать наведені дані, що зазначені вимоги:

1° до маси пакунка виконуються,

2° до дисперсії маси пакунка виконуються?

17.7. Подані нижче дані характеризують твердість 14 зразків сплаву в умовних одиницях: 12,1; 13,7; 11,0; 11,6; 11,9; 13,4; 12,2; 12,5; 11,9; 11,5; 12,9; 13,0; 10,5; 11,7.

Припустимо, що твердість сплаву розподілена нормально. Чи можна вважати, що середнє a нормального розподілу дорівнює 12,0?

17.8. Досліджувалася можливість зменшення видатків на розвідування покладів золота на одній із ділянок розсипного родовища. Для цього замість частини запланованих для закладання шурфів пробурили свердловини ударно-канатного свердління (видатки на свердління менші). Отримали такі результати випробувань на вміст золота зразків порід із шурфів і свердловин (вміст золота в міліграмах на кубічний метр породи).

Свердловини: 322; 250; 225; 315; 399; 348; 192; 375; 381; 538; 198; 317; 293.

Шурфи: 478; 299; 541; 457; 251; 221; 548; 431; 397; 462; 457; 251; 221; 548.

Чи можна вважати, що результати випробувань зразків на вміст золота із свердловин і зразків із шурфів різняться неістотно?

17.9. На верстаті-автоматі виготовляється один вид продукції. Критичним розміром виробів є зовнішній діаметр. Після налагодження верстата відібрали 20 виробів. При цьому виявилося, що вибіркова дисперсія розміру зовнішнього діаметра становить 0,84 мм^2. Через певний час для контролю точності роботи верстата відібрали 15 виробів. Обчислена за ними вибіркова дисперсія виявилася рівною 1,07 мм^2. Чи свідчать наведені дані про зміну точності роботи верстата?

17.10. Швидкість полімеризації перевірили на кількох зразках полімеру. Розрахункова швидкість полімеризації становить 24 % за годину. У восьми експериментах отримано такі результати (у %): 23,6; 22,8; 25,7; 24,8; 26,4; 24,3; 23,9; 25,0.

Чи є достатні підстави вважати, що розрахункова швидкість полімеризації узгоджується з цими даними?

17.11. Щоб перевірити, чи впливає на міцність бетону спеціальний спосіб його виготовлення, провели експеримент. Із партії сировини взяли шість вибірок. Потім вибірки навмання поділили на дві групи по три у кожній. Після цього вибірки з другої групи піддали спеціальній обробці і з кожної виготовили пробний куб. Після 28-денної витримки шести пробних кубів провели їх випробування на стиск. Реєстрували значення навантаження, за яких відбувається руйнування зразків (границя міцності на стиск). Отримали такі результати.

Бетон (без обробки)	290	311	284
Бетон (з обробкою)	309	318	318

Чи свідчать ці дані про наявність ефекту спеціальної обробки бетону?

17.12. Щоб зменшити вихід небажаного побічного продукту, застосовували каталізатори A і B. Для кожного з них було добуто вибірки виходу небажаного продукту (у %).

Каталізатор A: 41; 52; 29; 43; 38; 45; 52; 42; 36.

Каталізатор B: 40; 27; 59; 42; 25; 58; 42; 26; 37.

Чи можна вважати, що розкид виходу небажаного продукту при використанні каталізаторів A і B однаковий?

Примітка. Розкид характеризується дисперсією.

17.13. На комп'ютері моделюється нормально розподілена випадкова величина. Реалізація вибірки цієї випадкової величини: 2,41; 2,26; 2,10; 2,53; 1,96; 1,31; 2,32; 2,66.

Чи можна стверджувати, що вибірку добуто з нормального розподілу з середнім 2,5?

17.14. У класі з 20 дітей навмання відібрали 10, яким щоденно почали давати апельсиновий сік, решті щодня давали молоко. Через деякий час зафіксували збільшення ваги дітей у фунтах (1 фунт = 453,6 г).

Сік	4,0	2,5	3,5	4,0	1,5	1,0	3,5	3,0	2,5	3,5
Молоко	1,5	3,5	2,5	3,0	2, 5	2,0	2,0	2,5	1,5	3,0

Середнє збільшення ваги одного школяра в групі, де давали апельсиновий сік, становило 2,9 фунта, а в групі, де давали молоко, — 2,4. Чи істотно відрізняється збільшення ваги дітей у групах?

17.15. Вимірювали нерівності поверхні з регулярним профілем (одного й того самого рівня чистоти) за допомогою подвійних мікроскопів (I і II). При цьому отримали такі результати.

Мікроскоп I: 0,8; 2,0; 3,1; 3,5; 2,1; 1,7; 0,9; 1,1; 3,3.

Мікроскоп II: 0,7; 2,1; 3,1; 0,9; 3,6; 2,7; 0,8; 4,7; 0,3; 4,1; 2,8; 0,6.

З'ясувати, чи можна вважати точність вимірювання мікроскопами однаковою?

Примітка. Точність вимірювань характеризується дисперсією.

17.16. Номінальний опір резистора 2000 Ом. Для контролю відібрали партію з 12 резисторів. Після вимірювання опору кожного отримали такі результати: 2130; 2090; 2030; 2080; 1920; 2020; 2015; 2000; 2045; 1940; 1980; 1970.

Чи можна відхилення опору резисторів від номіналу (2000 Ом) розглядати як допустимі, чи, навпаки, результати вимірювань свідчать про те, що опір резисторів істотно відрізняється від номіналу?

17.17. На сталеливарному заводі для контролю вмісту марганцю в одній із марок сталі зробили 10 відливків із конвертора I і стільки ж із конвертора II. Нижче наведено вміст марганцю (у %) у кожному відливку.

Конвертор I: 1,20; 1,17; 1,15; 1,21; 1,14; 1,17; 1,18; 1,21; 1,25; 1,14.

Конвертор II: 1,39; 1,29; 1,28; 1,34; 1,32; 1,30; 1,28; 1,35; 1,35; 1,30.

Чи можна вважати вміст марганцю в сталі, виплавленій у цих конверторах, однаковим?

17.18. Для зменшення дисперсії відбивної здатності фарби було внесено зміни в технологію її виготовлення. Щоб переконатися, що такі зміни справді дають ефект, виготовили 10 пробних зразків. За допомогою спеціального оптичного приладу визначили відбивну здатність фарби, виготовленої з використанням звичайної (A) і нової (B) технологій (у відносних одиницях). Отримали такі результати.

Технологія A: 40; 45; 195; 65; 145.

Технологія B: 110; 55; 120; 50; 80.

Чи свідчать ці дані про зміну дисперсії відбивної здатності фарби?

17.19. Для контролю напруги в освітлювальній мережі щогодини протягом доби реєстрували напругу (у вольтах): 220; 222; 220; 220; 220; 222; 220; 218; 218; 220; 220; 222; 222; 220; 218; 220; 222; 216; 218; 214; 210; 218; 223; 215.

Чи можна відхилення від стандарту (стандарт становить 220 В) розглядати як випадкові? Чи, навпаки, наведені дані вказують на систематичне відхилення напруги від стандарту?

17.20. Дослідження, що проводилися протягом кількох років після того, як у практиці лижного спорту почала застосовуватися техніка ковзної ходи, дають підставу вважати, що вона, за умов спеціально підготовленої траси, забезпечує на дистанції 15 км у чоловіків виграш порівняно з традиційною технікою більше ніж 1 хв. Нижче наведено результати змагань (у хвилинах) двох груп лижників (дистанція 15 км: одні проходили дистанцію традиційною ходою, а інші — ковзною).

Традиційна хода: 37,02; 36,74; 37,82; 38,12; 36,91; 37,98; 38,21; 37,51; 37,56; 38,03.

Ковзна хода: 35,81; 35,61; 35,02; 35,53; 35,84; 35,12; 36,12; 36,49; 35,62; 36,28.

Чи можна за результатами цих змагань дійти висновку, що ефект техніки ковзної ходи становить більше ніж 1 хв.?

17.21. На верстатах A і B одного класу точності виготовляють однакову продукцію. Критичним розміром виробу є його зовнішній діаметр. Нижче наведено значення оцінок зовнішнього діаметра й незсунених оцінок його дисперсії, обчислені за вибірками обсягом 15 і 10, добутими відповідно для верстатів A і B:

$$\overline{\xi}_A = 45{,}3;\ s_A^2 = 1{,}07;\ \overline{\xi}_B = 46{,}1;\ s_B^2 = 0{,}84.$$

Чи свідчать наведені дані, що зовнішній діаметр виробів, виготовлених на верстатах A і B, однаковий?

17.22. Досліджувалася корозійна стійкість нержавіючої сталі 18Cr10Ni2Mo (сталь, що містить 18 % хрому, 10 % нікелю, 2 % молібдену). Експеримент проводили на 12 зразках. Перш ніж дослідити зразки на корозійну стійкість, визначили вміст хрому, нікелю і молібдену у сталі, з якої були виготовлені зразки. Зокрема вміст хрому (у відсотках маси) у досліджуваних зразках був такий: 17,4; 17,9; 17,6; 18,1; 17,6; 18,9; 16,9; 17,5; 17,8; 17,4; 24,6; 21,0.

Чи можна на підставі наведених даних стверджувати, що вміст хрому в сталі становить 18 %?

17.23. У лабораторії, де вивчається вплив довкілля на людину, для визначення кімнатної температури, за якої найбільш комфортно почувають себе чоловіки й жінки, були обстежені 10 чоловіків і 10 жінок. Отримали такі значення температури найбільшої комфортності (за Фаренгейтом).

Чоловіки: 74; 71; 77; 76; 72; 75; 73; 74; 75; 72.

Жінки: 75; 77; 78; 79; 77; 73; 78; 78; 80; 76.

Чи свідчать ці дані про те, що температура, за якої людина почуває себе комфортно, для чоловіків і жінок однакова?

Примітка. $t\,^\circ\mathrm{F} = (9/5)t\,^\circ\mathrm{C} + 32$, де $t\,^\circ\mathrm{F}$ — температура за Фаренгейтом, $t\,^\circ\mathrm{C}$ — температура за Цельсієм.

17.24. Вимірюючи опір дроту двох типів (A і B), отримали такі дані.

Дріт A: 0,126; 0,131; 0,126; 0,127; 0,124; 0,130; 0,128; 0,124.

Дріт B: 0,121; 0,121; 0,124; 0,122; 0,120; 0,124; 0,125; 0,120.

Стверджується, що між розкидом опору дроту типу A і типу B немає різниці.

Чи не суперечить це твердження наведеним даним?

17.25. Розрахункова міцність гуми на згин становить 11 умовних одиниць. Щоб пересвідчитись, чи це справді так, випробували на згин 16 зразків гуми.

Чи можна за наведеними нижче даними дійти висновку, що гума має розрахункову міцністю на згин?

Міцність на згин: 10,3; 11,1; 11,8; 12,0; 10,8; 13,6; 12,0; 12,5; 11,6; 12,2; 12,3; 12,5; 12,6; 13,7; 13,3; 10,5.

17.26. У задачі 17.21 стверджується, що верстати, на яких виготовляється продукція, мають однаковий клас точності. Чи справді це так?

17.27. Пропонується нова методика визначення вмісту марганцю в одній із марок сталей. Очікується, що ця методика дає менший розкид результатів порівняно з традиційною. Нижче наведено процентний вміст марганцю у 10 відливках, визначений за традиційною методикою, й у 8 відливках — за новою.

Традиційна методика: 1,22; 1,15; 1,17; 1,22; 1,26; 1,27; 1,19; 1,22; 1,20; 1,15.

Нова методика: 1,21; 1,24; 1,18; 1,17; 1,15; 1,18; 1,17; 1,17.

Чи є підстави вважати, що нова методика визначення вмісту марганцю дає менший розкид порівняно з традиційною?

17.28. Сталевий дріт, з якого виготовляють канати, має витримувати зусилля на розрив, що становить 6720 кг/см^2.

Проведена раніше серія спостережень дає підстави вважати, що значення зусилля на розрив, яке витримують окремі зразки дроту, має нормальний розподіл.

Для контролю якості дроту з кожної партії, що надходять на завод, 20 зразків випробовують на розрив. Фіксують значення зусилля, за якого зразок руйнується (межу міцності на розрив). Результати одного з випробувань виявилися такими.

Межа міцності на розрив: 6300; 6870; 6720; 6980; 6780; 6780; 6780; 6720; 6630; 6660; 6900; 7130; 6690; 6750; 6560; 6700; 6930; 6720; 6950; 6960.

Чи можна на підставі наведених даних стверджувати, що для цієї партії дроту межа міцності на розрив не менша ніж 6720 кг/см^2?

17.29. Два підприємства (A і B) виготовляють цегляну футерівку для кисневих конверторів. Споживач хоче з'ясувати, чи відрізняється футерівка підприємств за своїми характеристиками, щоб надалі закуповувати продукцію з кращими показниками. Для цього він реєструє кількість плавок, проведених у конверторі до чергової заміни футерівки. При цьому отримано такі дані.

Підприємство A: 237; 224; 218; 227; 234; 215; 219; 225; 230.

Підприємство B: 216; 202; 205; 200; 207; 198; 222; 214; 226; 204.

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку про істотну різницю кількості плавок до заміни футерівки, виготовленої на підприємствах A і B?

17.30. Дисперсія межі міцності на розрив волокна становить 35,63 фунта^2 (межа міцності — зусилля, за якого волокно рветься). Очікується, що внесені у технологічний процес зміни зменшать зазначену дисперсію. Зареєстровано такі значення міцності на розрив (у фунтах, 1 фунт=453,6 г): 151; 156; 147; 153; 155; 148; 160; 149; 156; 161; 154; 162; 163; 149; 150.

Чи зменшилася дисперсія межі міцності на розрив волокна зі зміною технологічного процесу?

17.31. На автоматичному верстаті обробляють втулки. Після налагодження верстата добули вибірку із 10 виробів. Виявилося, що вибіркове середнє діаметра втулки $\overline{\xi} = 2{,}059$ мм, а значення незсуненої оцінки дисперсії діаметра $s_\xi^2 = 4{,}4$ мкм^2. Через певний час для контролю налагодження верстата на заданий діаметр втулки знову добули вибірку із 10 виробів, для якої вибіркове середнє $\overline{\eta} = 2{,}063$ мм, а значення незсуненої оцінки дисперсії $s_\eta^2 = 8{,}6$ мкм^2. Припустимо, що протягом зазначеного інтервалу часу зміни в роботі верстата можуть позначитися тільки на його налагодженні на заданий діаметр втулки, але точність роботи верстата не змінюється.

Чи свідчать наведені дані про зміну налагодження верстата за інтервал часу, що відокремлює моменти отримання вибірок?

Примітка. Точність роботи верстата характеризується дисперсією.

17.32. Для розроблення модифікації автобусних шин, які б мали більший пробіг, проводилося дослідження низки їхніх параметрів. Зокрема, реєстрували температуру, до якої нагрівалися передні шини під час руху автобуса. За наведеними в таблиці значеннями температури (в умовних одиницях) лівої і правої шин, що використовувалися на 12-ти автобусах, з'ясувати, чи є істотними відмінності цих параметрів.

Автобус	Шина		Автобус	Шина	
	ліва	права		ліва	права
1	36	27	7	41	60
2	42	45	8	40	34
3	55	84	9	100	117
4	59	84	10	58	78
5	79	70	11	38	56
6	108	99	12	73	88

17.33. За кімнатної температури досліджувалася сила зчеплення двох типів клейких речовин: ізобутилу 2-ціанакрилату і MBR-4197. Нижче для кожного зразка наведено значення сили зчеплення, що вимірювалися у фунтах на квадратний дюйм (1 фунт = 453,6 г, 1 дюйм = = 0,0254 м).

Ізобутил 2-ціанакрилат: 365; 169; 210; 297; 228; 146; 163; 213; 300; 218.

MBR-4197: 518; 403; 473; 329; 457; 419; 437; 396; 424; 363.

Чи можна вважати, що дисперсії сили зчеплення ізобутилу 2-ціанакрилата і MBR-4197 однакові?

17.34. Щоб порівняти межу міцності на розтягання (значення зусилля, за якого зразок руйнується) гумових сумішей типів A і B виготовили партію з восьми зразків прямокутної форми (по чотири з кожної суміші) і піддали їх повздовжньому розтяганню. (Один із зразків суміші A, який визнали як дефектний, був вилучений з партії до початку випробувань.) Фіксувалася межа міцності на розтягання зразків двох гумових сумішей. Отримали такі результати.

Межа міцності (суміш A): 3210; 3000; 3315.

Межа міцності (суміш B): 3225; 3320; 3365; 3145.

Чи можна вважати, що склад гуми не впливає на її міцність?

17.35. У таблиці наведено дані вимірювання довжини зразків виробів (у міліметрах) до і після відпалювання їх у високочастотній печі.

Зразок	Довжина, мм		Зразок	Довжина, мм	
	до відпалювання	після відпалювання		до відпалювання	після відпалювання
1	11,94	12,00	6	11,96	11,98
2	11,99	11,99	7	11,95	12,03
3	11,98	11,95	8	11,96	12,02
4	12,03	12,07	9	11,92	12,01
5	12,03	12,03	10	12,00	11,99

Чи зумовило термооброблення зміни розмірів виробів?

17.36. У задачі 17.32 описується процес контролю роботи верстата-автомата. При цьому припускається, що точність роботи верстата не змінюється, хоча значення незсунених оцінок дисперсій після налагодження верстата і через певний час становлять відповідно $s_\xi^2 = 4{,}4$ мкм^2 і $s_\eta^2 = 8{,}6$ мкм^2.

Чи є слушним припущення про незмінність точності роботи верстата?

17.37. Порівнюється дія знеболювальних препаратів A і B. (У деяких випадках одним із ліків може бути інертне плацебо — пустушка, яке використовується для контролю при дослідженні дії іншого препарату.)

У групі хворих, які виявили бажання взяти участь в експерименті, налічувалося вісім чоловік. Цілком можливо, що у цих хворих вік, стать, загальний стан тощо різні. Тому кожному хворому дають обидва препарати і щоразу фіксують тривалість знеболювальної дії кожного з них. Щоб забезпечити чистоту експерименту, вжито всі виправдані застережні заходи: другий препарат дають не раніше, ніж закінчиться дія першого, четверо хворих одержують спочатку препарат A, а інші четверо — спочатку B, при цьому жоден із хворих не знає, який саме препарат він вживає, і т. ін. Результати експерименту наведено в таблиці.

Хворий	Тривалість дії препарату, год		Різниця тривалості дії препаратів B і A, год
	A	B	
1	3,2	3,8	0,6
2	1,6	1,0	−0,6
3	5,7	8,4	2,7
4	2,8	3,6	0,8
5	5,5	5,0	−0,5
6	1,2	3,5	2,3
7	6,1	7,3	1,2
8	2,9	4,8	1,9

Чи можна вважати, що препарати A і B відрізняються за своєю ефективністю за припущення, що:

1° відсутня апріорна інформація про ефективність препаратів;

2° ефективність дії препарату B не поступається дії препарату A.

Відповідь дати у термінах перевірки статистичних гіпотез.

17.38. Два оператори (A і B) провели 14 незалежних експериментів, досліджуючи температуру займання емалі одного й того самого складу. Кожен із операторів випробував по сім зразків. В експерименті отримано такі результати.

Оператор A: 1450; 1425; 1420; 1410; 1370; 1360; 1270.

Оператор B: 1430; 1420; 1380; 1320; 1320; 1290; 1280.

Чи є істотною різниця між результатами, добутими різними операторами?

17.39. При виробництві синтетичного волокна для зменшення усадки продукції, що вироблятиметься з нього, волокно, що рухається неперервним потоком, проходить термічну обробку.

Далі наведені дані величини усадки волокна (у %) після обробки за температур 120 °C і 140 °C.

Усадка при 120 °C: 3,45; 3,62; 3,60; 3,49; 4,64; 3,56; 3,52; 3,53; 3,57; 3,44; 3,56; 3,43.

Усадка при 140 °C: 3,72; 4,01; 3,54; 3,67; 4,03; 3,40; 3,96; 3,60; 3,76; 3,91.

Необхідно з'ясувати, чи усадка за температури 140 °C більша, ніж за температури 120 °C.

17.40. Астрономи М. Гумасон і Н. Майал визначали поправку на червоне зміщування (у кілометрах за секунду) галактик типу SO. Результати, добуті у серії із 10 спостережень, наведені у таблиці (номери галактик подані за каталогом NGC).

Номер галактики	М. Гумасон	Н. Майал	Номер галактики	М. Гумасон	Н. Майал
1332	1507	1471	5866	924	1033
3607	858	778	6661	4607	4430
3998	1205	1155	6703	2592	2670
4111	832	915	7625	1930	2050
5308	2206	2194	7679	5378	5278

Чи свідчать наведені дані про розбіжність у результатах, добутих двома астрономами?

Сформулювати і розв'язати задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез.

17.41. Досліджувалася втрата маси десяти однакових гумових стержнів у випробуваннях на спрацювання.

Для проведення досліджень від кожного стержня відрізали по два зразки. Один із них пройшов вулканізацію при температурі 80 °C, а інший — при температурі 150 °C.

Стержень	Втрата маси		Стержень	Втрата маси	
	80 °C	150 °C		80 °C	150 °C
1	3,02	2,91	6	3,11	3,20
2	2,22	2,30	7	2,70	2,50
3	4,60	4,15	8	2,58	2,29
4	4,53	2,63	9	3,27	3,11
5	2,31	2,40	10	4,19	3,80

Чи можна на підставі наведених даних стверджувати, що відмінність між середніми втратами маси зразків, які пройшли різну вулканізацію, є істотною?

Глава 18

Критерій χ^2

18.1 Критерій χ^2 (параметри відомі)

Постановка задачі. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_n(\omega))$ — реалізація вибірки з невідомого розподілу F. Стосовно розподілу F висувається гіпотеза H_0: $F = G$, де G належить заданому класу розподілів (зокрема, G може бути повністю визначеним розподілом). Гіпотезу H_0 можна сформулювати і так: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ є вибіркою з розподілу G із заданими властивостями.

Необхідно перевірити гіпотезу H_0, тобто за реалізацією вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дійти висновку: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується гіпотеза H_0 чи ні, емпіричний розподіл $\hat{F}_n$, побудований за вибіркою $\xi = (\xi_1, \xi_2,$ $\ldots, \xi_n)$ з F, мало відрізняється від розподілу F, а саме, для кожного фіксованого x значення емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ є незсуненою і спроможною оцінкою $F(x)$. Тому, якщо ввести відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ емпіричного $\hat{F}_n$ розподілу від гіпотетичного G, причому так, щоб воно набувало малих значень, коли гіпотеза H_0 справджується, і великих, коли гіпотеза H_0 не справджується (а це видається цілком можливим, оскільки $\hat{F}_n(x)$ мало відрізняється від $F(x)$), то гіпотезу H_0 природно відхиляти або не відхиляти залежно від того, якого значення набуло відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ — великого чи малого.

Вибір $D(\hat{F}_n, G)$ визначає той чи інший критерій для перевірки гіпотези H_0: $F = G$.

Відхилення Пірсона емпіричного розподілу від гіпотетичного. Два імовірнісні розподіли F і G, задані на $X \subset \mathbb{R}^1$, співпадають, якщо для кожної борелевої множини B з X справджується рівність $F(B) = G(B)$. Якщо F і G різні, то знайдеться борелева множина $B' \subset X$ така, що $F(B') \neq G(B')$. Тому як відхилення між двома розподілами F і G природно розглядати величину

$$\sum_{i=1}^{r} c_i (F(X_i) - G(X_i))^2,$$

де $\{X_i\}$ — розбиття X на неперетинні борелеві множини:

$$\bigcup_{i=1}^{r} X_i = X,\ X_i \cap X_j = \emptyset,\ i \neq j,\ 2 \leq r < \infty,$$

c_i — невід'ємні константи. Відхилення Пірсона між емпіричним розподілом $\hat{F}_n$, побудованим за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, і гіпотетичним G з цих міркувань і будується. А саме, за відхилення між $\hat{F}_n$ і G розглядатимемо

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} c_i (\hat{F}_n(X_i) - G(X_i))^2,$$

де $G(X_i)$ — імовірність вибірковому значенню потрапити до множини X_i, обчислена за гіпотетичним розподілом G (далі позначатимемо $G(X_i) = p_i$); $\hat{F}_n(X_i)$ — імовірність вибірковому значенню потрапити до множини X_i, обчислена за емпіричним розподілом $\hat{F}_n$ ($\hat{F}_n(X_i)$ чисельно дорівнює частоті ν_i/n вибірковому значенню потрапити до множини X_i, обчисленій за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ν_i — кількість вибіркових значень з $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, що потрапили до X_i); c_i — коефіцієнти, які вибираються більш-менш довільно ($\hat{F}_n$ і G задані на одній і тій самій множині X вибіркових значень ξ_k). К. Пірсон як c_i запропонував розглядати n/p_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. При цьому відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ набуває вигляду:

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}(\hat{F}_n(X_i) - G(X_i))^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i\right)^2.$$

Далі, незалежно від того, справджується H_0: $F = G$ чи ні, частота ν_i/n вибірковому значенню потрапити до X_i, обчислена за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з F є незсуненою і спроможною оцінкою $F(X_i)$ (для всіх $i = 1, 2, \ldots, r$), тобто

$$M(\nu_i/n) = F(X_i),$$

$$\nu_i/n \xrightarrow{P} F(X_i)$$

коли $n \to \infty$. Тому, якщо гіпотеза H_0: $F = G$ справджується, то

$$F(X_i) = G(X_i) = p_i$$

і, отже,

$$(\nu_i/n - p_i)^2 = (\nu_i/n - F(X_i))^2$$

збігається за ймовірністю до нуля, коли $n \to \infty$ (для всіх $i = 1, 2, \ldots, r$), при цьому розподіл відхилення К. Пірсона

$$D(\hat{F}_n, F) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i\right)^2$$

збігається до χ^2-розподілу з $(r-1)$ ступенями вільності. Якщо гіпотеза H_0: $F = G$ не справджується, тобто $F \neq G$, то

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i\right)^2$$

збігається до $+\infty$, коли $n \to \infty$, оскільки

$$\left(\frac{\nu_i}{n} - p_i\right)^2 \xrightarrow{P} (F(X_i) - p_i)^2 = (F(X_i) - G(X_i))^2,$$

а серед
$$\left(F(X_i) - G(X_i)\right)^2, \ i = 1, 2, \ldots, r,$$
за достатньо "дрібного" розбиття вибіркового простору X знайдуться числа строго більші нуля. Так що відхилення К. Пірсона

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{\nu_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i},$$

коли гіпотеза H_0 справджується набуває малих значень (при цьому розподіл $D(\hat{F}_n, F)$ близький до розподілу χ^2_{r-1}), а коли гіпотеза H_0 не справджується — великих:

$$D(\hat{F}_n, G) \to +\infty,$$

коли $n \to \infty$.

І отже, для перевірки гіпотези H_0: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з розподілу G, обчислюємо відхилення $D(\hat{F}_n, G)$. Якщо при цьому $D(\hat{F}_n, G)$ набуло малого значення, то гіпотезу H_0 не відхиляємо, у супротивному разі — відхиляємо.

Межі, що відокремлюють великі значення відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ від малих, знаходять на підставі того, що для вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з розподілу F при великих n розподіл $D(\hat{F}_n, F)$ (розподіл мінімально можливого відхилення) мало відрізняється від розподілу χ^2 з $(r-1)$ ступенями вільності.

Критерій χ^2 (гіпотетичний розподіл не залежить від невідомих параметрів). *Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_n)$ — вибірка з розподілу F і $\chi^2_{\alpha;(r-1)}$ — верхня α-межа χ^2-розподілу з $(r-1)$ ступенями вільності.*

Якщо гіпотезу H_0: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ є вибірка з розподілу G відхиляти при

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} > \chi^2_{\alpha;(r-1)},$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю α гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується.

Про вибір класів. Спочатку звернемо увагу на один момент з практики використання критерію χ^2.

Асимптотична теорія критерію χ^2 справджується за довільного розбиття вибіркового простору X на неперетинні класи X_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$:

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i,\ X_i \cap X_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, r,$$

за якими розподіляються результати спостережень, якщо тільки класи визначаються незалежно від останніх (незалежно від вибірки). Але зазвичай класи вибирають за вибіркою, а це означає, що межі класів є випадковими. Чи можна при цьому користуватися критерієм χ^2? Виявляється, що можна — асимптотична теорія справджується і в описаній ситуації.

Далі щодо проблеми вибору класів.

1° Якщо дані у задачі дискретні або ми маємо вибірку з дискретного розподілу, то задача про вибір класів виникає тільки у сенсі об'єднання деяких класів з метою зменшення похибки при заміні розподілу відхилення $D(\hat{F}_n, F)$ розподілом χ^2 або з метою об'єднання класів, гіпотетичні ймовірності потрапити у які малі, як, наприклад, для пуассонового розподілу необхідно об'єднувати класи з малими гіпотетичними ймовірностями.

Але насправді проблема вибору класів виникає тоді, коли ми маємо вибірку з неперервного розподілу.

2° Вибір класів за методом рівних імовірностей.

Якщо з тих чи інших міркувань число класів r визначене, то межі класів необхідно вибирати так, щоб гіпотетичні ймовірності дорівнювали $1/r$ (і, отже, були рівними між собою) або, наскільки це можливо, близькими до $1/r$. (У супротивному разі похибка при заміні розподілу відхилення $D(\hat{F}_n, F)$ розподілом χ^2 буде більшою.)

Визначившись з межами класів, ми приходимо до задачі про вибір числа класів.

3° Проблема вибору числа класів у методі рівних імовірностей полягає у наступному: якщо r не достатньо велике, то критерій може втрачати “чутливість” на “хвостах” розподілу. А якщо число класів r велике, то кількість вибіркових значень, що потрапили до класу, може бути малою, а це збільшує похибку при аппроксимації розподілу відхилення $D(\hat{F}_n, F)$ розподілом χ^2. На практиці керуються таким правилом: r вибираємо так, щоб

$$np_i \geq 10, \; i = 1, 2, \ldots, r.$$

Манн і Вальд довели, що оптимальне число $r = r_n$ класів задовольняє співвідношенню

$$r_n \sim 4 \cdot 2^{1/5} \left(\frac{n}{N_{0;1;\alpha}} \right)^{2/5},$$

коли $n \to \infty$, де $N_{0;1;\alpha}$ — верхня α-межа $N_{0;1}$-розподілу (α — рівень значущості). Пізніше було встановлено, що без суттєвих втрат потужності критерію можна вважати, що за великих n

$$r_n \approx 2 \cdot 2^{1/5} \left(\frac{n}{N_{0;1;\alpha}} \right)^{2/5}.$$

Рекомендації щодо використання критерію χ^2.

1° Використовувати класи з рівними або близькими до рівних імовірностями.

2° Користуватися співвідношенням

$$r_n \approx 2 \cdot 2^{1/5} \left(\frac{n}{N_{0;1;\alpha}} \right)^{2/5},$$

коли $n \geq 450$ і $\alpha = 0{,}05$ і коли $n \geq 300$ і $\alpha = 0{,}01$.

3° Коли $n \leq 450$ число r класів вибирають якомога більшим, але при цьому мають виконуватися умови

$$np_i \geq 10, \; i = 1, 2, \ldots, r.$$

Якщо за даного розбиття для деяких класів X_i значення

$$np_i < 10,$$

то ці X_i об'єднують з іншими (або розглядають нове розбиття) так, щоб для нових X'_j нерівності

$$np'_i \geq 10, \ i = 1, 2, \dots, r',$$

мали місце. Якщо n настільки мале, що це зробити неможливо, критерієм χ^2 не користуються.

Зазвичай χ^2-розподіл табульовано для числа ступенів вільності менших 30. Якщо число ступенів вільності більше 30, то замість χ^2_r-розподілу використовують нормальний розподіл з параметрами $(r; 2r)$.

Приклад 18.1.1. *У таблиці наведено покази 500 навмання вибраних механічних годинників, виставлених у вітринах годинникових магазинів.*

Чи узгоджується з наведеними даними гіпотеза про те, що покази годинників рівномірно розподілені на інтервалі $[0; 12)$*?*

i	n_i	i	n_i
0	41	6	41
1	34	7	33
2	54	8	37
3	39	9	41
4	49	10	47
5	45	11	39
		Разом	500

У таблиці: i — номер інтервалу від i-ї години до $(i+1)$*-ї,* $i = 0, 1, \dots, 11$*;* n_i *— кількість годинників, покази яких належать i-му інтервалу.*

Р о з в' я з а н н я. Покази 500 годинників можна розглядати як реалізацію вибірки обсягом 500 з деякого неперервного на інтервалі [0;12) розподілу F. Щодо розподілу F випадкової величини ξ (показів годинників) висувається гіпотеза H_0: F — рівномірний на інтервалі [0;12) розподіл, інакше кажучи, щільність $f(x)$ розподілу F має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 1/12, & \text{якщо } x \in [0; 12); \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0; 12). \end{cases}$$

Для перевірки гіпотези H_0 скористаємося критерієм χ^2. Поділимо множину можливих значень $X = [0; 12)$ випадкової величини ξ на неперетинні підмножини

$$X_i = [i, i+1),\ i = 0, 1, \ldots, 11.$$

Імовірність того, що ξ потрапить до X_i, обчислена за гіпотетичним розподілом:

$$p_i = P\{\xi \in [i, i+1)\} = \int\limits_i^{i+1} \frac{1}{12}\, dx = \frac{1}{12}.$$

І оскільки

$$np_i = 500 \cdot \frac{1}{12} = 41{,}7 > 10,\ i = 0, 1, \ldots, 11,$$

то можна скористатися критерієм χ^2 у наведеній вище формі.

Обчислимо значення відхилення між емпіричним розподілом $\hat{F}_n$ і гіпотетичним G. Маємо

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} =$$

$$= \frac{1}{41{,}7}\Big((41 - 41{,}7)^2 + \ldots + (39 - 41{,}7)^2\Big) = 9{,}99.$$

Таким чином,

$$D(\hat{F}_n, G) = 9{,}99 < 19{,}7 = \chi^2_{0{,}05;11} = \chi^2_{\alpha;(r-1)}.$$

Тому, згідно з критерієм χ^2, гіпотеза про рівномірний на інтервалі [0;12) розподіл випадкової величини ξ — показів механічних годинників у вітринах магазинів — не відхиляється. Інакше кажучи, припущення про те, що покази годинників розподілені рівномірно на інтервалі [0;12), не суперечить спостереженням.

18.2 Критерій χ^2 (параметри невідомі)

Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з невідомого розподілу F, стосовно якого висувається гіпотеза

$$H_0\colon F(\cdot) = G(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k),\ (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \theta \in \Theta.$$

Розподіл $G(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ залежить від параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, які невідомо, причому єдиним джерелом інформації про значення цих параметрів є вибірка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_n)$. Інакше кажучи, гіпотеза H_0 полягає в тому, що $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ є вибіркою з розподілу, який належить до класу розподілів

$$G(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k),\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta,$$

тобто $F(\cdot)$ співпадає з розподілом $G(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ при деяких значеннях параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Необхідно за реалізацією вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ дійти висновку: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні. Природно діяти так. Розглянемо як значення невідомих параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ їхні оцінки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$, знайдені за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а як гіпотетичний розподіл — $G(\cdot\,; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$. Відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ будуємо так само, як і раніше:

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\nu_i - np_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)\right)^2}{np_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)},$$

де $p_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$ — імовірність того, що вибіркове значення потрапить до множини X_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, обчислена за гіпотетичним розподілом. Р. Фішер встановив, що коли гіпотеза H_0 справджується й оцінки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ знайдено за методом максимальної правдоподібності, то розподіл відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ між $\hat{F}_n$ і G збігається до розподілу χ^2 з $(r-1-k)$ ступенями вільності, коли $n \to \infty$, де k — кількість параметрів, що оцінені за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Таким чином, коли параметри оцінюються за вибіркою методом максимальної правдоподібності, можна користуватися критерієм χ^2 у такій формі.

Якщо гіпотезу H_0 відхиляти при

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\nu_i - np_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)\right)^2}{np_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)} > \chi^2_{\alpha;(r-1-k)}$$

і не відхиляти у супротивному разі, то з імовірністю α гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується.

Приклад 18.2.1. *Серед* 2020 *дводітних сімей* 527 *мають двох хлопчиків,* 476 *— двоє дівчаток, у решти* 1017 *сімей діти різної статі.*

Чи можна вважати, що кількість хлопчиків у сім'ї, яка має двох дітей, є біномно розподіленою випадковою величиною?

Р о з в' я з а н н я. Позначимо через ξ кількість хлопчиків у сім'ї, що має двох дітей, ξ набуває значень: $0, 1,$ 2. Щодо розподілу P_ξ випадкової величини ξ висувається гіпотеза

$$H_0\colon P_\xi(k) = G(k;p) = C_2^k p^k (1-p)^{2-k},\ k = 0, 1, 2,$$

(гіпотеза про біномний розподіл ξ), яку необхідно перевірити.

Гіпотетичний розподіл залежить від невідомого параметра p. Оцінкою максимальної правдоподібності параметра p біномного розподілу

$$P(k;p) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, 1, \ldots, m,$$

за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є

$$\hat{p} = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

У прикладі, що розглядається, значення оцінки максимальної правдоподібності параметра p дорівнює

$$\hat{p} = \frac{0 \cdot 476 + 1 \cdot 1017 + 2 \cdot 527}{2 \cdot 2020} = 0{,}513.$$

Таким чином, гіпотетичним розподілом є

$$G(k;p) = C_2^k (0,513)^k (1-0,513)^{2-k},\ k = 0,1,2,$$

його можна записати і в такому вигляді:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}237 & 0{,}500 & 0{,}263 \end{pmatrix}.$$

Як поділ вибіркового простору $X = \{0,1,2\}$ розглянемо $X_0 = \{0\}$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$. Оцінки $\hat{p}_i$ гіпотетичних імовірностей p_i вибірковому значенню потрапити до X_i, $i = 1,2,3$, відповідно дорівнюють 0,237; 0,500; 0,263; обсяг вибірки $n = 2020$, отже

$$n\hat{p}_i \geq 10,\ i = 0,1,2,$$

і тому користуватися критерієм χ^2 можна.

Обчислимо значення відхилення Пірсона між емпіричним $\hat{F}_n$ і гіпотетичним G розподілами:

$$D(\hat{F}_n, G) = \frac{(\nu_0 - n\hat{p}_0)^2}{n\hat{p}_0} + \frac{(\nu_1 - n\hat{p}_1)^2}{n\hat{p}_1} + \frac{(\nu_2 - n\hat{p}_2)^2}{n\hat{p}_2} =$$

$$= \frac{(476 - 478{,}74)^2}{478{,}74} + \frac{(1017 - 1010)^2}{1010} + \frac{(527 - 531{,}26)^2}{531{,}26} =$$

$= 0{,}098$.

Звідси маємо

$$D(\hat{F}_n, G) = 0{,}098 < 3{,}84 = \chi^2_{0{,}05;1} = \chi^2_{\alpha;(r-1-k)}$$

($r - 1 - k = 3 - 1 - 1$; $k = 1$ — кількість параметрів, що були оцінені за вибіркою; $r = 3$ — кількість підмножин, на які поділяється вибірковий простір). Тому згідно з критерієм χ^2 гіпотеза про біномний розподіл випадкової величини ξ не відхиляється. Припущення, що кількість хлопчиків у дводітних сім'ях має біномний розподіл, не суперечить наявним даним.

18.3 Критерій χ^2 як критерій незалежності

Постановка задачі. Маємо n незалежних спостережень (a_i, b_j), $i = 1, 2, \ldots, s; j = 1, 2, \ldots, k$ векторної випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$: значення (a_i, b_j) випадкова величина $\zeta = (\xi, \eta)$ набула ν_{ij} разів, $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, k$ (зрозуміло, що $\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{k}\nu_{ij} = n$). Результати спостережень зручно подати у вигляді таблиці спряженості ознак (табл. 18.3.2). Але ні розподіл векторної випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$

$$P\{\zeta = (a_i, b_j)\} = p_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, k$$

(див. також табл. 18.3.1), ні розподіли її компонент ξ і η:

$$P\{\xi = a_i\} = p_{i\cdot},\ i = 1, 2, \ldots, s;$$

$$P\{\eta = b_j\} = p_{\cdot j},\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

невідомі.

Таблиця 18.3.1. Спільний розподіл випадкових величин ξ і η

Значення ξ	Значення η				Сума
	b_1	b_2	$\cdots$	b_k	
a_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1k}	$p_{1\cdot}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2k}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_s	p_{s1}	p_{s2}	$\cdots$	p_{sk}	$p_{s\cdot}$
Сума	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot k}$	1

У табл. 18.3.1

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} p_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, s;\ \ p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

$$\sum_{i=1}^{s} p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1.$$

Щодо спільного розподілу випадкових величин ξ і η (див. табл. 18.3.1) висувається гіпотеза

$$H_0 \colon p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j};\ i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

інакше кажучи, гіпотеза про незалежність ξ і η (ще кажуть, гіпотеза про незалежність ознак).

За результатами спостережень випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ необхідно дійти висновку: відхиляти чи ні гіпотезу H_0 про незалежність компонент ξ і η вектора $\zeta = (\xi, \eta)$.

Таблиця 18.3.2. Таблиця спряженості ознак

Значення ξ	Значення η				Сума
	b_1	b_2	$\cdots$	b_k	
a_1	ν_{11}	ν_{12}	$\cdots$	ν_{1k}	$\nu_{1\cdot}$
a_2	ν_{21}	ν_{22}	$\cdots$	ν_{2k}	$\nu_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_s	ν_{s1}	ν_{s2}	$\cdots$	ν_{sk}	$\nu_{s\cdot}$
Сума	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\nu_{\cdot k}$	n

У таблиці

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, s;\ \ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} \nu_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$\sum_{i=1}^{s} \nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \nu_{ij} = n.$$

Для перевірки гіпотези H_0 скористаємося критерієм χ^2, коли гіпотетичний розподіл залежить від невідомих параметрів. Невідомими параметрами є $p_{i\cdot}$ і $p_{\cdot j}$, $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, k$, причому

$$\sum_{i=1}^{s} p_{i\cdot} = 1; \ \sum_{j=1}^{k} p_{\cdot j} = 1.$$

Як поділ вибіркового простору

$$X = \{(a_i, b_j), \ i = 1, 2, \ldots, s; \ j = 1, 2, \ldots, k\}$$

розглянемо підмножини

$$X_{ij} = \{(a_i, b_j)\}, \ i = 1, 2, \ldots, s; \ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Відхилення емпіричного розподілу

$$\hat{F}_n\{(a_i, b_j)\} = \frac{\nu_{ij}}{n}, \ i = 1, 2, \ldots, s; \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

від гіпотетичного

$$G\{(a_i, b_j)\} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, \ i = 1, 2, \ldots, s; \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

обчислюється так

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})^2}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}},$$

де

$$\hat{p}_{i\cdot} = \nu_{i\cdot}/n, \ i = 1, 2, \ldots, s, \ \hat{p}_{\cdot j} = \nu_{\cdot j}/n, \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

є оцінками максимальної правдоподібності відповідно параметрів $p_{i\cdot}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, і $p_{\cdot j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Тобто

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - (\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n)^2}{(\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n}.$$

Кількість параметрів, що оцінені за вибіркою, дорівнює $(s-1)+(k-1)$. Кількість підмножин $X_{ij}, i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s; j = 1, 2, \ldots, k$, на які поділяється вибірковий простір X, становить sk. Тому число ступенів вільності χ^2-розподілу, граничного для $D(\hat{F}_n, G)$, дорівнює

$$sk - 1 - ((s-1) + (k-1))$$

або, що те саме, $(s-1)(k-1)$.

Таким чином, *гіпотезу H_0 про незалежність випадкових величин ξ і η відхилятимемо, якщо*

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{(\nu_{ij} - (\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n)^2}{(\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n} > \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)},$$

і не відхилятимемо в супротивному разі; при цьому з імовірністю α гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується.

Значення випадкових величин ξ і η ще називають ознаками, і в цьому разі говорять про критерій χ^2 для незалежності ознак.

Поділ вибіркового простору (X, Y) двовимірної випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ на неперетинні підмножини $X_i \times Y_j$ ми проводимо самі. При цьому необхідно стежити, щоб для гіпотетичних імовірностей $\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}$ вибірковим значенням (ξ, η) потрапити до $X_i \times Y_j$ виконувалися нерівності

$$(\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})n = \nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10$$

(за всіх можливих значень i і j), де n — обсяг вибірки.

З а у в а ж е н н я. Застережемо, що, маючи справу зі статистичними залежностями, треба бути дуже обережним. Із наявності статистичної залежності (відсутності статистичної незалежності) не випливає причинна залежність. Ідеї щодо причинного зв'язку мають приходити "ззовні" статистики.

Приклад 18.3.1. *У таблиці (Грінвуд, Юл,* 1915) *наведено дані про* 818 *випадків, класифікованих за двома ознаками: наявність щеплення проти холери і відсутність захворювання.*

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку про існування залежності між відсутністю захворювання і наявністю щеплення?

Наявність щеплення	Наявність захворювання		Разом
	Не захворіли	Захворіли	
Щеплені	276	3	279
Нещеплені	473	66	539
Разом	749	69	818

Р о з в' я з а н н я. У термінах перевірки статистичних гіпотез поставлена задача формулюється як задача перевірки гіпотези про незалежність ознак (наявність щеплення і відсутність захворювання).

У прикладі, що розглядається, $s = 2$, $k = 2$, $n = 818$ (див. табл. 18.3.2). Значення ν_{ij}, $\nu_{i\cdot}$, $\nu_{\cdot j}$, $i, j = 1, 2$, наведено у таблиці спряженості ознак.

Оскільки

$$(\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})n = \nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10,\ i, j = 1, 2,$$

то можна скористатися критерієм χ^2.

Значення відхилення між емпіричним розподілом $\hat{F}_n$ і гіпотетичним G:

$$D(\hat{F}_n, G) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - (\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n)^2}{(\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n} =$$

$$= \frac{(276 - 279 \cdot 749/818)^2}{279 \cdot 749/818} + \frac{(3 - 279 \cdot 69/818)^2}{279 \cdot 69/818} +$$

$$+ \frac{(473 - 539 \cdot 749/818)^2}{539 \cdot 749/818} + \frac{(66 - 539 \cdot 69/818)^2}{539 \cdot 69/818} = 29{,}61.$$

Таким чином,

$$D(\hat{F}_n, G) = 29{,}61 > 3{,}84 = \chi^2_{0{,}05;1} = \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)}.$$

Тому згідно з критерієм χ^2 гіпотеза про незалежність ознак (відсутність захворювання і наявність щеплення) відхиляється; вона суперечить наявним даним. Інакше кажучи, наведені експериментальні дані дають підстави стверджувати, що ефект щеплення проти холери існує.

18.4 Задачі

АЗ: 18.2, 18.7, 18.17, 18.20.
СЗ: 18.14, 18.23, 18.29, 18.52.

18.1 (адекватність моделі). У численних прикладних задачах при застосуванні методів теорії ймовірностей, перш ніж обчислювати ймовірність тієї чи іншої події, необхідно побудувати математичну модель стохастичного експерименту (ймовірнісний простір); імовірність події можна обчислити тільки тоді, коли визначено (явно чи неявно) ймовірнісний простір. Теорія ймовірностей надає правила, за якими у заданій моделі обчислюються ймовірності подій, але нічого не каже про вибір моделі стохастичного експерименту. І принципове запитання “Чи адекватно описує запропонована модель стохастичний експеримент?” залишається відкритим. Дати відповідь на це питання допомагає математична статистика. Відповідь дається в термінах перевірки статистичних гіпотез.

Наприклад, розглядається стохастичний експеримент, який полягає у підкиданні грального кубика. Необхідно обчислити ймовірність того, що випаде парне число очок.

Як множину елементарних подій Ω розглянемо $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Імовірності елементарних подій можна задати, скажімо, так:

$$P(i) = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Тим самим імовірнісний простір задано. Чому саме $P(i) = 1/6$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, теорія ймовірностей не дає відповіді. Імовірності ми задаємо самі. Хтось інший може задати ці ймовірності, наприклад, так:

$$P(i) = \frac{i}{21},\ i = 1, 2, \ldots, 6,$$

— пропорційно числу очок на грані (або ще в якийсь інший спосіб), і це (як можлива гіпотеза) буде анітрохи не гірше.

За відомою математичною моделлю $\{\Omega, P\}$ обчислити ймовірність випадкової події просто. Наприклад, імовірність події A — "випало парне число очок", обчислюється так:

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = P(2)+P(4)+P(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, якщо запропонована модель адекватно описує експеримент, то $P(A) = 1/2$.

Однак, *чи адекватно описується експеримент запропонованою моделлю*?

Щоб відповісти на це питання, необхідно провести експеримент: підкинути кубик достатню кількість разів, зафіксувати результат і далі перевірити, чи узгоджується модель з результатом експерименту.

Результати спостережень зручно подати у такому вигляді:

i	1	2	3	4	5	6
n_i						

де i — кількість очок, що випали; n_i — число підкидань, у яких було зафіксовано i очок.

18.2 (кількість смертей від удару копитом). Далі наведено класичні дані фон Борткевича про кількість осіб, убитих ударом копита коня в 10 прусських армійських корпусах за 20 років (1875—1895):

i	0	1	2	3	4	5 і більше	Разом
n_i	109	65	22	3	1	0	200

де i — кількість смертей в одному корпусі за рік; n_i — кількість спостережень, у яких трапилося i смертей.

Перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл кількості смертей від удару копитом коня в одному корпусі протягом року.

18.3. У таблиці наведено дані К. Пірсона про вік кандидатів, які склали і не склали вступні екзамени до Лондонського університету в 1908 і 1909 рр. (для двох старших вікових груп указано оцінки середнього віку).

Вік кандидата	Результат екзамену		Разом
	Склали	Не склали	
16	583	563	1146
17	666	980	1646
18	525	868	1393
19—21	383	814	1197
22—30 (середній вік 25)	214	439	653
Понад 30 (середній вік 33)	40	81	121
Разом	2411	3745	6156

Чи свідчать ці дані про наявність залежності між віком кандидатів і успішно складеними екзаменами?

18.4. Стохастичний експеримент полягає у підкиданні двох гральних кубиків один раз і реєстрації мінімального числа очок, що випали на них.

Запропонувати математичну модель цього стохастичного експерименту. Перевірити її адекватність експерименту. Для цього провести експеримент достатню кількість разів і перевірити, чи узгоджується запропонована модель із добутими даними.

Сформулювати і розв'язати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез (скористатися критерієм χ^2).

Результати експерименту зручно подати у вигляді таблиці:

i	1	2	3	4	5	6
n_i						

де i — мінімальне число очок, що випали на гральних кубиках; n_i — кількість експериментів, у яких мінімальне число очок на гральних кубиках становить i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 6$.

З а у в а ж е н н я. Про вибір моделі експерименту і перевірку її адекватності див. задачу 18.1.

В к а з і в к а. Щоб запропонувати гіпотетичний розподіл (за припущення, що гральні кубики симетричні), знайдіть розподіл випадкової величини $\min\{\xi, \eta\}$, де ξ, η — число очок на гральних кубиках. Розподіл функції

$$g(\zeta) = \min\{\xi, \eta\}$$

від випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ за розподілом P_ζ можна знайти, скориставшись формулою

$$P\{g(\zeta) \in B\} = P\{g(\xi, \eta) \in B\} = \sum_{(x_i, y_j): g(x_i, y_j) \in B} P_\zeta(x_i, y_j)$$

(щодо розподілу функцій від випадкових величин див. також гл. 5 і, зокрема, приклад 5.1.2).

18.5 (імовірність народження хлопчика). З 1871 по 1900 рр. у Швейцарії народилося 1 359 671 хлопчиків і 1 285 086 дівчаток.

Чи узгоджується з цими даними гіпотеза H_0: імовірність народження хлопчика становить: а) 0,5? б) 0,515?

18.6 (розподіл α-частинок). В експерименті Резерфорда і Гейгера радіоактивна речовина спостерігалася протягом $N = 2612$ інтервалів часу (кожний тривалістю 1/8 хв), для яких реєструвалася кількість α-частинок, що досягли лічильника.

У таблиці наведено кількість N_k інтервалів часу, протягом яких спостерігалося точно k α-частинок. Загальна кількість частинок $T = \sum_k kN_k = 10\,132$. Середня їх кількість, що реєструвалася за один інтервал, становить $\lambda = T/N = 10\,132/2\,612 = 3{,}879$.

k	N_k	k	N_k
0	57	6	273
1	203	7	139
2	383	8	49
3	525	9	27
4	532	10	10
5	408	> 10	6
		Разом	2612

Скориставшись критерієм χ^2, перевірити гіпотезу про те, що кількість частинок, які досягають лічильника, підпорядковується розподілу Пуассона.

18.7 (кмітливість і матеріальні умови). У таблиці наведено результати обстеження 697 школярів.

Хлопчиків було впорядковано згідно з IQ і відповідно до умов їхнього життя вдома. При цьому використано позначення: A — дуже здібний, B — досить розумний,

C — має середні здібності, D — недостатньо розвинений, E — розумово відсталий.

Матеріальна забезпеченість	Рівень кмітливості хлопчиків					Разом
	A	B	C	D	E	
Добра	33	137	125	47	8	350
Погана	21	127	129	61	9	347
Разом	54	264	254	108	17	697

Чи можна вважати, що умови життя (забезпеченість) дітей впливають на їхню кмітливість?

З а у в а ж е н н я. IQ — Intellectual quality (розумові здібності) — показник розумових здібностей учнів у балах, який використовується в американській педагогічній практиці.

18.8. Маємо три монети: одну вартістю 1 коп. і дві — вартістю 10 коп. Стохастичний експеримент полягає у виборі навмання однієї з монет (з поверненням) і реєстрації кількості спроб (кроків) до першої появи монети вартістю 10 коп., тобто реєстрації числа появ монети вартістю 1 коп. до першої появи монети вартістю 10 коп.

Запропонувати математичну модель цього стохастичного експерименту. Перевірити її адекватність експерименту. Для цього добути вибірку (достатнього обсягу) і перевірити, чи узгоджується запропонована модель із результатами експерименту — добутою вибіркою.

Результати експерименту зручно подати у вигляді

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
n_i											

де i —кількість кроків до першої появи монети вартістю 10 коп.; n_i — кількість експериментів, у яких до появи монети вартістю 10 коп. було зроблено i кроків.

З а у в а ж е н н я. Про вибір моделі стохастичного експерименту й перевірку її адекватності експерименту див. задачу 18.1.

18.9. Чотири монети було підкинуто 20 160 разів, при цьому комбінації: чотири герби, три герби і решка, два герби і дві решки, один герб і три решки, чотири решки — з'явилися відповідно таку кількість разів:

$$1181,\ 4909,\ 7583,\ 5085,\ 1402$$

(наведено дані експерименту, проведеного В.І. Романовським).

Чи свідчать ці дані про те, що кількість гербів, яка з'явилася на чотирьох монетах, є біномно розподіленою випадковою величиною?

Сформулювати і розв'язати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез.

18.10 (аромат сигарет). Менеджери тютюнової фірми хотіли б знати, чи можна відправляти замовникам сигарети і люльковий тютюн у спільній упаковці. (Якщо при цьому якість сигарет не погіршується, то можна істотно скоротити витрати на перевезення.) Для цього провели експеримент. Виготовили 400 картонних коробок і у 250 з них поклали тютюнові вироби обох типів, а в решту — лише сигарети. Через місяць коробки відкрили і всі 400 упаковок сигарет розклали у випадковому порядку. Кілька експертів аналізували аромат сигарет, намагаючись виявити його відмінність від початкового. Результати експерименту наведено в таблиці.

Висновок	Тип упаковки		
щодо аромату	Спільна	Окрема	Разом
Не змінився	72	119	191
Змінився	178	31	209
Разом	250	150	400

Чи можна на підставі цих даних стверджувати, що зв'язок між ароматом сигарет і типом упаковки відсутній?

18.11 (експеримент Сведеборга). На початку XIX століття було відкрито явище, яке дістало назву броунівського руху (за ім'ям англійського ботаніка Р. Броуна, який відкрив його). Це явище полягає у тому, що найдрібніші частинки речовини, завислі в рідині, перебувають у хаотичному русі без видимих на те причин.

Причини цього, здавалося б, мимовільного руху довго не могли пояснити, доки кінетична теорія газів не дала простого й вичерпного пояснення: рух завислих частинок є результатом ударів молекул рідини по цих частинках. Кінетична теорія дає можливість обчислити ймовірність того, що в даному об'ємі рідини не буде жодної частинки завислої речовини, таких частинок буде одна, дві, три і т. д.

Для перевірки результатів теорії було проведено низку експериментів. Далі наведено результати експерименту шведського фізика Сведеборга.

Експеримент полягав у спостереженні і реєстрації числа дрібних частинок золота, що потрапили в поле зору мікроскопа через однакові проміжки часу. Було проведено 518 таких спостережень. При цьому одержано такі результати:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8 і більше
n_i	112	168	130	69	32	5	1	1	0

У таблиці i — кількість частинок золота у полі зору мікроскопа; n_i — кількість інтервалів часу, протягом яких фіксувалося i частинок золота.

Перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл кількості частинок золота, що спостерігалися у полі зору мікроскопа.

18.12. У таблиці наведено офіційні дані шведської статистики за 1935 р. про розподіл новонароджених за статтю відповідно до окремих місяців.

Місяць	Дівчатка	Усього дітей	Місяць	Дівчатка	Усього дітей
Січень	3537	7280	Липень	3621	7585
Лютий	3407	6957	Серпень	3596	7393
Березень	3866	7883	Вересень	3491	7203
Квітень	3711	7884	Жовтень	3391	6903
Травень	3775	7892	Листопад	3160	6552
Червень	3665	7609	Грудень	3371	7132
			Разом	42 591	88 273

Чи свідчать ці дані про те, що кожного місяця протягом року діти народжуються однаково часто? Що дівчатка народжуються однаково часто?

18.13 (неупередженість експериментатора). Кожен із 150 сірників розламайте навмання на дві частини. Лінійкою з міліметровими поділками виміряйте з точністю до десятих часток міліметра довжину 300 отриманих частин. При цьому доведеться оцінювати перший знак після коми в десятковому запису довжини частини сірника в міліметрах. Зафіксуйте цей знак (останню цифру запису).

Результати вимірювань зручно подати у такому вигляді:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i										

де i — остання цифра в запису результату вимірювання довжини частини сірника, $i = 0, 1, \ldots, 9$; n_i — число появ останньої цифри i у вимірюваннях.

Перевірте за допомогою критерію χ^2 неупередженість ваших вимірювань.

З а у в а ж е н н я. Упередженість під час зняття показів спостерігається досить часто. Сумнівно, щоб була якась об'єктивна причина, яка б зумовлювала частішу появу одних цифр порівняно з іншими; тому природно припустити, що неоднакова частота появи цифр указує на упередженість спостерігача. Навіть ті дослідники, які знають про можливість упередженості й про необхідність обережності при знятті показів, усе-таки не завжди можуть уникнути її.

18.14 (помилкове з'єднання телефонних номерів). У таблиці наведено дані про кількість помилкових з'єднань телефонних номерів. Усього спостерігалося 267 номерів.

k	n_k	k	n_k	k	n_k
0	0	6	22	12	18
1	1	7	43	13	12
2	0	8	31	14	7
3	5	9	40	15	6
4	11	10	35	16	2
5	14	11	20	Разом	267

де k — кількість помилкових з'єднань; n_k — число номерів, для яких було зафіксовано точно k помилкових з'єднань, $k = 0, 1, \ldots, 16$.

Перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл кількості помилкових з'єднань.

18.15 (колір волосся і колір очей). У таблиці наведено дані про 147 навмання вибраних студентів, яких було розподілено згідно з кольором їхнього волосся (світле, темне) і очей (блакитні, карі).

Колір волосся	Колір очей		Разом
	Блакитні	Карі	
Темне	31	41	72
Світле	40	35	75
Разом	71	76	147

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку про те, що колір очей пов'язаний з кольором волосся?

18.16. Розглядається стохастичний експеримент, який полягає в підкиданні чотирьох монет і реєстрації кількості гербів, що випали. Запропонуйте математичну модель цього стохастичного експерименту. Перевірте її адекватність експерименту. Для цього проведіть експеримент достатню кількість разів і скористайтеся критерієм χ^2.

Результати підкидань чотирьох монет зручно подати у вигляді таблиці:

i	0	1	2	3	4
n_i					

де i — кількість гербів, що випали на чотирьох монетах; n_i — кількість експериментів, у яких випало i гербів.

З а у в а ж е н н я. Про вибір моделі стохастичного експерименту й перевірку її адекватності експерименту див. задачу 18.1.

18.17 (упередженість спостерігача). Перед датчиком, що складається з круглого диска, який поділено на 10 однакових секторів, занумерованих від 0 до 9, поставили спостерігача. Диск обертався з великою швидкістю. Час від часу перед ним спалахувала електрична лампочка на таку коротку мить, що диск здавався нерухомим. Спостерігач повинен був дивитися на диск і записувати номер того сектора, який у момент спалаху лампочки знаходився напроти фіксованого покажчика.

Прилад призначався для добування випадкових чисел і справді їх надавав, коли залучався інший спостерігач. Однак спостерігач, про якого йшлося вище, знімав покази з помітним упередженням.

Частоту появи цифри в 10 000 виконаних ним спостережень наведено в таблиці (у таблиці частота цифри — кількість її появ у 10 000 спостережень).

Цифра	Частота	Цифра	Частота
0	1083	5	1007
1	865	6	1081
2	1053	7	997
3	884	8	1025
4	1057	9	948
		Разом	10 000

Перевірити, чи справді ці дані свідчать про упередженість спостерігача.

Зауваження. Якби спостерігач був неупереджений, то цифри з'являлися б приблизно з однаковою частотою. З таблиці, однак, видно, що він мав пристрасть до парних цифр і упередженість проти непарних цифр 1, 3 і 9. Причина такої поведінки й упередженості незрозуміла і навіть загадкова, оскільки спостерігач не повинен був давати оцінку, а мусив тільки записувати те, що бачить, або думав, що бачить. Пояснення, мабуть, полягає у тому, що спостерігач віддавав значну перевагу окремим цифрам, тобто фіксував не ті з них, які в момент спалаху лампочки насправді бачив напроти покажчика. Тут маємо справу із однією з надзвичайно сильних форм психологічної упередженості.

18.18 (перебудова хромосом у клітині). Рентгенівське опромінення викликає в органічних клітинах певні процеси, які називатимемо перебудовою хромосом. Число перебудов хромосом у клітині згідно з теорією має підпорядковуватися розподілу Пуассона. В експерименті підраховували кількість перебудов хромосом під дією рентгенівських променів. Результати експерименту виявилися такими:

i	0	1	2	3	4 і більше	Разом
n_i	434	195	44	9	0	682

де i — кількість перебудов у клітині; n_i — кількість клітин, у яких спостерігалося i перебудов хромосом.

Чи узгоджується з наведеними даними гіпотеза про пуассонів розподіл числа перебудов?

18.19 (глухонімота і стать). Під час перепису населення Англії та Уельсу в 1901 р. було зареєстровано (з точністю до тисяч) 15 729 000 чоловіків і 16 799 000 жінок, з них 3497 чоловіків і 3072 жінки глухонімі від народження.

Перевірити гіпотезу про те, що глухонімота не пов'язана зі статтю.

18.20 (випадково і довільно). Випадково не означає довільно: випадковість підпорядковується своїм строгим законам. Наприклад, на перший погляд здається, що запропонувати випадкову послідовність цифр просто. Проте насправді це мало хто може зробити. Послідовність випадкових цифр має задовольняти низку вимог випадковості. Зокрема, від такої послідовності природно вимагати, щоб поява цифр $0, 1, \ldots, 9$ була рівноймовірною.

Перевірте свої здібності, а саме: випишіть випадкову (на ваш погляд) послідовність: 1) із 150 "чотиризначних" чисел (нуль може займати перше місце зліва, як і будь-яка інша цифра); 2) із 600 цифр. Перевірте за допомогою критерію χ^2, чи справді в запропонованих вами послідовностях цифри $0, 1, \ldots, 9$ зустрічаються з імовірністю $1/10$.

Порівняйте результати цих експериментів.

П р и м і т к а. Виписуючи послідовність, не передивляйтесь і не використовуйте в який-небудь інший спосіб уже виписану частину послідовності: кожне наступне число (кожну наступну цифру) виписуйте так, ніби ви його (її) пишете вперше, ніби до цього нічого не виписувалося.

З а у в а ж е н н я. Трапляються люди, в яких психологічні процеси настільки добре збалансовані, що вони можуть добувати випадкові вибірки. Такі особи здебільшого вважають себе надзвичайно обдарованими. Див. також зауваження до задачі 18.17.

18.21. Стохастичний експеримент полягає у послідовному підкиданні монети три рази і реєстрації результатів у такий спосіб: випадання герба (Г) позначається одиницею, а решки (Р) — нулем. Отже, випадання, наприклад, ГРГ реєструється як 101. Розглядатимемо ці послідовності із нулів і одиниць як запис чисел у двійковій системі числення, тобто 101 — це запис у двійковій системі числення п'ятірки. Найбільше число, яке можна добути у такий спосіб, є сім — його запис у двійковій системі 111.

Результати експерименту в десятковій системі числення зручно подати у такому вигляді:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i								

де n_i — кількість експериментів, у яких було зареєстровано число i.

Чи можна вважати появу цифр $0, 1, 2, \ldots, 7$ в описаному експерименті рівноймовірною?

Дати відповідь у термінах перевірки статистичних гіпотез. Для цього запропонувати математичну модель стохастичного експерименту, провести його достатню кількість разів і, скориставшись критерієм χ^2, перевірити адекватність моделі експерименту.

18.22 (розумові здібності і якість одягу). У таблиці наведено дані (одержані Гілбі) про 1725 школярів, класифікованих відповідно до: 1) якості їхнього одягу; 2) розумових здібностей. При цьому для характеристики розумових здібностей використана така градація: A — розумово відсталий; B — млявий і недостатньо розвинений; C — недостатньо розвинений; D — млявий, але розумний; E — досить розумний; F — явно здібний; G — дуже здібний.

Розумові здібності	Одяг				Разом
	Дуже добрий	Добрий	Задовільний	Дуже поганий	
A і B	33	41	39	17	130
C	48	100	58	13	219
D	113	202	70	22	407
E	209	255	61	10	535
F	194	138	33	10	375
G	39	15	4	1	59
Разом	636	751	265	73	1725

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку, що якість одягу школярів і їхні розумові здібності — незалежні ознаки?

18.23 (бактерії у чашці Петрі). У чашці Петрі спостерігаються колонії бактерій. Під мікроскопом їх видно як темні цяточки. Чашку Петрі (її дно) поділено на маленькі квадрати, у кожному з яких підраховується кількість колоній (цяток). Результати спостережень зручно подати у такому вигляді:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
n_k	5	19	26	26	21	13	8	0

де k — кількість колоній у квадраті; n_k — кількість квадратів із k колоніями.

Перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл кількості колоній на квадрат.

18.24 (про мови). Сучасні українська й російська мови, з одного боку, мають багато спільного, а з іншого — кожна з них характеризується своєрідними, властивими лише їй рисами.

Природно поставити задачі: у чому полягає своєрідність мов? Які риси мов істотно відмінні? (Безумовно, це досить загальні й непрості задачі.) Зокрема, цікаво з'ясувати, чи однакова частота появи в українських і російських текстах голосних, приголосних, шиплячих (аналогічних задач можна поставити багато).

Сформулювати й розв'язати поставлені задачі як задачі перевірки відповідних статистичних гіпотез.

Скористатися тим, що ймовірності появи в російському тексті окремих літер (включаючи пропуск, він позначений рискою), відомо (див. нижче). Як український текст можна взяти, наприклад, поему Т. Г. Шевченка "Сон".

—	0,175	и	0,062	р	0,040	м	0,026
о	0,090	т	0,053	в	0,038	д	0,025
е,ё	0,072	н	0,053	л	0,035	п	0,023
а	0,062	с	0,045	к	0,028	у	0,021
я	0,018	б	0,014	х	0,009	ц	0,004
ы	0,016	г	0,013	ж	0,007	щ	0,003
з	0,016	ч	0,012	ю	0,006	э	0,003
ь,ъ	0,014	й	0,010	ш	0,006	ф	0,002

18.25. Стохастичний експеримент полягає у реєстрації кількості появ пари (1;1) на 100 пар, добутих з таблиці випадкових чисел, наприклад з табл. 22.10.1.

Запропонувати математичну модель стохастичного експерименту. Перевірити її адекватність експериментові. Для цього провести його достатню кількість разів і скористатися критерієм χ^2.

Дані зручно подати в такому вигляді:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
n_i											

де i — кількість появи пари $(1;1)$ на 100 пар, добутих з таблиці випадкових чисел; n_i — кількість тих експериментів, у яких пара (1;1) зустрічалася i разів.

З а у в а ж е н н я. Про вибір моделі стохастичного експерименту і перевірку її адекватності експерименту див. задачу 18.1.

18.26. Під час Другої світової війни на Лондон упало 537 літаків-снарядів. Усю територію Лондона поділили на 576 ділянок з площею 0,25 км^2. Нижче вказано кількість ν_i ділянок, на які впало i снарядів.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8 і більше	Разом
ν_i	229	211	93	35	7	0	0	1	0	576

Скориставшись критерієм χ^2, перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл кількості літаків-снарядів, які впали на ділянку.

18.27 (кмітливість і якість харчування). У соціальному огляді (Пірсон і Моул, 1925) 618 хлопчиків були класифіковані згідно з їхнім рівнем кмітливості та якістю харчування.

Результати обстежень наведено у таблиці. При цьому використано позначення: A — дуже здібний, B — здібний, C — кмітливий, D — недостатньо кмітливий, E — млявий, F — дуже млявий.

Якість харчування	Рівень кмітливості						Разом
	A	B	C	D	E	F	
Добра	9	27	60	63	24	5	188
Задовільна	5	41	126	120	36	6	334
Погана	5	12	38	32	8	1	96
Разом	19	80	224	215	68	12	618

Чи існує зв'язок між якістю харчування дітей та їхньою кмітливістю?

18.28 (автомобільні номери). Стохастичний експеримент полягає у фіксуванні цифр числової частини номерів автомобілів, що проїздять повз спостерігача. Щодо появи цифр висувається цілком природна гіпотеза: цифри в автомобільних номерах зустрічаються однаково часто (імовірність появи цифр в автомобільних номерах однакова).

Щоб перевірити висунуту гіпотезу, зареєструйте числову частину номерів 40—50 автомобілів, що проїздять повз вас (чому цього буде достатньо?) і скористайтеся критерієм χ^2. Дані зручно подати в такому вигляді:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i										

де n_i — кількість появ цифри i в числових частинах автомобільних номерів.

18.29 (селекція гороху Г. Менделем). В експериментах із селекцією гороху Г. Мендель спостерігав частоту появи різних видів насіння (у цій задачі частота — кількість насіння певного виду), що одержують у результаті схрещення рослин із круглим жовтим і зморшкуватим зеленим насінням. Ці дані й значення теоретичних імовірностей, що визначаються за теорією спадковості Менделя, наведено в таблиці.

Вид насіння	Частота	Імовірність
Кругле жовте	315	9/16
Зморшкувате жовте	101	3/16
Кругле зелене	108	3/16
Зморшкувате зелене	32	1/16
Разом	556	1

Чи узгоджуються імовірності, знайдені відповідно до теорії Менделя, з наведеними експериментальними даними?

18.30. Одночасно підкидають 12 гральних кубиків і реєструють значення випадкової величини ξ — кількості кубиків, на яких випало 4, 5 або 6 очок. Дані 4096 експериментів наведено в таблиці

i	n_i	i	n_i
0	0	7	847
1	7	8	536
2	60	9	257
3	198	10	71
4	430	11	11
5	731	12	0
6	948	Разом	4096

де i — значення випадкової величини ξ; n_i — кількість експериментів, у яких випадкова величина ξ набула значення i, $i = 0, 1, \ldots, 12$.

Перевірити гіпотезу про біномний розподіл випадкової величини ξ.

18.31. Послідовно двічі підкидають пару монет і реєструють число ξ гербів, що випали при першому підкиданні і η — при другому, тобто реєструють значення випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$.

Запропонувати математичну модель цього стохастичного експерименту. Перевірити її адекватність експерименту. Для цього провести експеримент достатню кількість разів і скористатися критерієм χ^2.

Результати підкидань зручно подати у вигляді такої таблиці:

Значення ξ	Значення η			Сума
	0	1	2	
0	ν_{00}	ν_{01}	ν_{02}	$\nu_{0\cdot}$
1	ν_{10}	ν_{11}	ν_{12}	$\nu_{1\cdot}$
2	ν_{20}	ν_{21}	ν_{22}	$\nu_{2\cdot}$
Сума	$\nu_{\cdot 0}$	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	n

де ν_{ij} — кількість експериментів, у яких випадкова величина $\zeta = (\xi, \eta)$ набула значення (i, j),

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{2} \nu_{ij}, \ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{2} \nu_{ij}, \ i, j = 0, 1, 2, \ n = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \nu_{ij}.$$

Зауваження. Щодо вибору моделі стохастичного експерименту і перевірки її адекватності експерименту див. задачу 18.1.

18.32. У таблиці наведено дані дослідження взаємозв'язку між розвитком очей (який визначали за астигматизмом, гостротою зору, ...) і розвитком рук (який визначали за піднятою масою).

Особи	Особи			Разом
	Лівоокі	Двоокі	Правоокі	
Ліворукі	34	62	28	124
Дворукі	27	28	20	75
Праворукі	57	105	52	214
Разом	118	195	100	413

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку про незалежність розвитку очей і розвитку рук?

18.33. У таблиці наведено довжини інтервалів між послідовними імпульсами вздовж нервового волокна (одиниця виміру 1/50 с), одержані П. Фетом і проф. Б. Кацу (Лондонський університет).

3,0	25,5	5,5	14,5	18,0	7,0	27,5	14,0
2,0	0,5	47,0	36,5	2,5	3,5	5,5	19,0
10,5	24,5	19,0	19,0	0,5	3,0	6,5	3,0
0,5	8,0	2,5	5,0	8,0	3,0	3,0	3,0
5,5	22,0	2,5	4,5	2,0	13,5	25,0	12,5
12,5	4,0	0,5	35,0	2,0	4,0	8,0	19,0
4,0	16,0	19,5	29,0	28,0	37,0	7,5	13,0
12,5	8,5	32,5	30,5	7,5	13,0	1,5	2,5
17,0	3,5	5,0	4,5	1,0	15,0		

Перевірити гіпотезу про: а) нормальний розподіл довжин інтервалів між імпульсами; б) рівномірний розподіл довжин інтервалів між імпульсами.

18.34. У таблиці наведено дані про 1426 ув'язнених, яких було класифіковано щодо алкогольної залежності (алкоголік, неалкоголік) і характеру злочинів, за які їх засудили (дані Горінга, цитовані К. Пірсоном). Рядки таблиці впорядковано відповідно до "інтелектуальності" виду злочину, хоча це впорядкування досить умовне.

Вид злочину	Алкоголіки	Неалкоголіки	Разом
Підпал	50	43	93
Зґвалтування	88	62	150
Насильницькі дії	155	110	265
Крадіжка	379	300	679
Виготовлення фальшивих грошей	18	14	32
Шахрайство	63	144	207
Разом	753	673	1426

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку про наявність зв'язку між алкоголізмом і характером злочину?

18.35 (заряд електрона). У таблиці наведено 58 значень величини e, знайдених Р. Міллікеном при визначенні заряду електрона, що дорівнює $e \cdot 10^{-10}$ од. СГСЕ.

1	4,740	13	4,769	25	4,778	37	4,788	49	4,795
2	4,747	14	4,771	26	4,779	38	4,788	50	4,797
3	4,749	15	4,771	27	4,779	39	4,789	51	4,799
4	4,758	16	4,772	28	4,779	40	4,789	52	4,799
5	4,761	17	4,772	29	4,781	41	4,790	53	4,801
6	4,764	18	4,772	30	4,781	42	4,790	54	4,805
7	4,764	19	4,774	31	4,782	43	4,790	55	4,806
8	4,764	20	4,775	32	4,783	44	4,791	56	4,808
9	4,765	21	4,775	33	4,783	45	4,791	57	4,809
10	4,767	22	4,776	34	4,785	46	4,791	58	4,810
11	4,768	23	4,777	35	4,785	47	4,792		
12	4,769	24	4,777	36	4,785	48	4,792		

Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл результатів вимірювання величини e при визначенні заряду електрона.

18.36 (про телепатів). У Гарвардському університеті, університеті Дюка та інших закладах при перевірці здібностей телепатів "читати" думки, зокрема, ставились експерименти з читання цифр $0, 1, \ldots, 9$.

Проведіть аналогічний експеримент. Навмання задумайте цифру: $0, 1, \ldots, 9$ і зафіксуйте результат. Телепат читає задуману вами цифру і також фіксує результат. Експеримент проведіть достатню кількість разів. Якщо телепат дійсно має здібності читати думки, то частка правильно прочитаних цифр: нуль читається як нуль, одиниця — як одиниця і т. д., дев'ятка — як дев'ятка, тобто частка успіхів буде великою (успіх — правильно прочитана цифра, невдача — неправильно прочитана).

За результатами проведеного експерименту дійти висновку щодо здібностей телепата читати думки на відстані.

В к а з і в к а. Для чистоти експерименту, задумуючи цифри $0, 1, \ldots, 9$, користуйтеся таблицею випадкових чисел.

18.37. Послідовно двічі підкидають пару монет і реєструють кількість ξ гербів, що випали у першому підкиданні і максимальну кількість гербів η, які випали у першому і другому підкиданнях, тобто реєструють значення випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$.

Запропонувати математичну модель цього стохастичного експерименту. Чи адекватно описує його запропонована модель? Чи є випадкові величини ξ і η незалежними?

Дати відповідь на питання у термінах перевірки статистичних гіпотез. Для цього провести стохастичний експеримент достатню кількість разів і скористатися критерієм χ^2. Дані зручно подати у вигляді таблиці:

Значення ξ	Значення η			Сума
	0	1	2	
0	ν_{00}	ν_{01}	ν_{02}	$\nu_{0\cdot}$
1	ν_{10}	ν_{11}	ν_{12}	$\nu_{1\cdot}$
2	ν_{20}	ν_{21}	ν_{22}	$\nu_{2\cdot}$
Сума	$\nu_{\cdot 0}$	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	n

де ν_{ij} —кількість експериментів, у яких випадкова величина $\zeta = (\xi, \eta)$ набула значення (i, j), $i, j = 0, 1, 2$;

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{2} \nu_{ij}, \ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{2} \nu_{ij}, \ i, j = 0, 1, 2; \ n = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \nu_{ij}.$$

З а у в а ж е н н я 1. Про вибір математичної моделі стохастичного експерименту та перевірку її адекватності див. задачу 18.1.

З а у в а ж е н н я 2. Розподіл функції $g(\zeta)$ випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$, зокрема функції

$$g(\zeta) = g(\xi, \eta) = (\xi, \max\{\xi, \eta\}),$$

за розподілом ζ можна знайти, скориставшись співвідношенням

$$P\{g(\xi, \eta) = (x, y)\} = \sum_{\{(i,j): g(i,j)=(x,y)\}} P_\zeta(i, j).$$

18.38 (нещасні випадки з водіями автобусів). Частотний розподіл 166 водіїв лондонських автобусів відповідно до кількості нещасних випадків, що трапилися із ними впродовж одного року, наведено в таблиці.

i	n_i	i	n_i
0	45	6	3
1	36	7	2
2	40	8	1
3	19	9	0
4	12	10 і більше	0
5	8	Разом	166

де i — число нещасних випадків, n_i — кількість водіїв, з якими трапилося i нещасних випадків, $i = 0, 1, \ldots$

Чи можна вважати, що кількість нещасних випадків, які сталися за участю водія протягом року, підпорядковується розподілу Пуассона?

18.39 (тістечка і бактеріальні колонії). У таблиці наведено дані про колонії бактерій, що містяться у трьох видах тістечок (дані А. Абрахамсона)

Вид тістечка	Розміри колонії			Разом
	малі	середні	великі	
Еклер	92	37	46	175
Наполеон	53	15	19	87
Горіхове	75	19	12	106
Разом	220	71	77	368

Чи можна стверджувати, що існує залежність між видами тістечок і розмірами бактеріальних колоній, що містяться у них?

Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез.

18.40 (момент останнього зрівняння). Симетричну монету підкидають чотири рази і реєструють значення випадкової величини — момент, коли востаннє кількість гербів зрівняється з кількістю решок (момент останнього зрівняння), цими моментами в експерименті є 0; 2; 4.

Щодо моменту останнього зрівняння висувається гіпотеза — розподілом моменту останнього зрівняння є дискретний розподіл арксинуса порядку 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3/8 & 2/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Перевірити висунуту гіпотезу. Для цього добути вибірку моменту останнього зрівняння (достатнього обсягу) і скористатися критерієм χ^2.

Результати експерименту зручно подати у такому вигляді:

i	0	2	4
n_i			

де i — момент останнього зрівняння кількості гербів і решок; n_i — кількість спостережень (експериментів), в яких момент останнього зрівняння становив i.

18.41 (покази механічних годинників). Механічні годинники, виставлені у вітринах годинникових магазинів, показують випадковий час. Висувається природна гіпотеза: покази годинників розподілені рівномірно на інтервалі [0;12). Результати 1000 спостережень наведено в таблиці (весь інтервал [0;12) поділено на 12 рівних частин: $[i, i+1)$, $i = 0, 1, \ldots, 11$),

i	n_i	i	n_i
0	77	6	73
1	81	7	70
2	95	8	77
3	86	9	82
4	98	10	84
5	90	11	87
		Разом	1 000

де i — номер інтервалу від i-ї години до $(i+1)$-ї, $i = 0, 1, \ldots, 11$; n_i —кількість годинників, покази яких належать i-му інтервалу.

Чи узгоджується висунута гіпотеза з цими даними?

18.42. Дані про кількість тріщин у стержні, виявлених при випробуванні 600 нейлонових стержнів, наведено у таблиці

i	0	1	2	3	4	5	6 і більше	Разом
n_i	275	207	81	23	8	6	0	600

де i — число тріщин у стержні; n_i — кількість стержнів, у яких виявлено i тріщин.

Перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл кількості тріщин у стержні.

18.43 (кмітливість і статура). Дані про ступінь кмітливості школярів, які мають атлетичну й неатлетичну статуру, наведено в таблиці.

Статура школяра	Ступінь кмітливості		Разом
	високий	низький	
Атлетична	581	567	1 148
Неатлетична	209	351	560
Разом	790	918	1 708

Що можна сказати про зв'язок між кмітливістю школярів і їхньою статурою?

Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез.

18.44 (експеримент К. Пірсона). У результаті 24 000 підкидань монети К. Пірсон зареєстрував 12 012 випадків появи герба.

Чи узгоджується гіпотеза про симетричність монети з цими даними?

18.45. У результаті перевірки 500 контейнерів зі скляними виробами добуто такі дані про кількість пошкоджених виробів:

i	n_i	i	n_i
0	199	5	3
1	169	6	1
2	87	7	1
3	31	8 і більше	0
4	9	Разом	500

де i — число пошкоджених виробів; n_i — кількість контейнерів з i пошкодженими виробами, $i = 0, 1, \ldots$

Чи можна вважати, що кількість пошкоджених виробів, яка припадає на контейнер, підпорядковується розподілу Пуассона?

18.46. Значення товщини (у мікрометрах) пластикового покриття мідного дроту наведено в таблиці (до вибірки увійшли 225 бобін дроту).

Чи можна на підставі цих даних вважати, що товщина покриття дроту має нормальний розподіл?

Товщина	Частота	Товщина	Частота
145	1	153	37
146	3	154	25
147	3	155	23
148	7	156	11
149	11	157	9
150	25	158	2
151	33	159	0
152	34	160	1

З а у в а ж е н н я. У цій задачі частота — це кількість бобін, для яких була зареєстрована задана товщина покриття.

18.47 (вік молодих і рівень їхніх доходів). Проводилось обстеження для виявлення зв'язку між віком тих, хто одружується вперше, і рівнем їхніх доходів. Результати обстеження (кількість сімейних пар) наведено в таблиці:

Рівень доходів	Вік обох молодих		
	До 18	18—21	Старші 21
Низький	45	25	15
Середній	35	60	25
Високий	10	28	24

Чи свідчать ці дані про наявність зв'язку між віком першого одруження та рівнем доходів молодих?

18.48. В експерименті спостерігалася невід'ємна неперервна випадкова величина ξ. Для $n = 48$ спостережень одержано такі її значення (упорядковані й округлені до 0,01):

0,01	0,04	0,17	0,18	0,22	0,25	0,25	0,29
0,42	0,46	0,47	0,56	0,59	0,67	0,70	0,72
0,76	0,78	0,83	0,85	0,87	0,93	1,00	1,01
1,01	1,02	1,03	1,05	1,32	1,34	1,37	1,47
1,50	1,52	1,54	1,58	1,71	1,90	2,10	2,35
2,46	2,46	2,50	3,73	4,07	6,03	6,21	7,02

Перевірити гіпотезу про те, що ці дані є реалізацією вибірки з показникового розподілу з параметром $\lambda = 1$ (його функція розподілу $F(x) = 1 - e^{-x}$, коли $x > 0$).

18.49 (експеримент Уелдона). В одному з експериментів з гральними кубиками Уелдон підкинув кубики 49 152 рази. При цьому у 25 145 випадках випали числа 4, 5 або 6.

Чи узгоджується з цими даними гіпотеза про симетричність кубиків?

18.50. Досліджувався зв'язок між дихальною функцією і звичкою до паління. Результати легеневих проб у групі співробітників установи були зіставлені з наявністю нікотинової залежності. В одній з таких проб (проба FEV_1) вимірювався об'єм повітря (у літрах), що видихається через 1 с після форсованого видиху.

У таблиці наведено дані легеневих проб у співробітників, які палять і які не палять.

Легенева проба	Відношення до нікотинової залежності		Разом
	Не палять	Палять	
З ознаками патології	2	16	18
Нормальна	64	83	147
Разом	66	99	165

Чи свідчать ці дані про зв'язок між палінням і дихальною функцією?

18.51 (гіпотеза Д'Аламбера). Стохастичний експеримент полягає у підкиданні пари симетричних монет. Видатний французький вчений і математик Д'Аламбер вважав, що події A — "обидві монети випали гербом", B — "обидві монети випали решкою", C — "монети випали різними сторонами", рівноймовірні й, отже, ймовірність кожної з них становить $1/3$. А втім і до Д'Аламбера і після нього був відомий правильний підхід до розв'язання цієї задачі: монети необхідно розрізняти. Для симетричних розрізненних монет кожному з наслідків ГГ, РР, ГР, РГ необхідно приписати ймовірність $1/4$ (буква Г означає появу герба, буква Р — решки). Тоді

$$P(A) = P(\text{ГГ}) = 1/4, \ P(B) = P(\text{РР}) = 1/4,$$

$$P(C) = P(\{\text{ГР}, \text{РГ}\}) = P(\text{ГР}) + P(\text{РГ}) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Але, мабуть, неможливо логічно обґрунтувати, чому не мав рації Д'Аламбер, вважаючи, що події A, B, C рівноймовірні. У фізиці елементарних частинок зустрічаються ситуації, в яких радше має рацію Д'Аламбер.

Розгляньте дві моделі стохастичного експерименту, що полягає в підкиданні пари монет.

Модель 1° (гіпотеза Д'Аламбера).

$$\Omega^* = \{A, B, C\}, \ P(A) = \frac{1}{3}, \ P(B) = \frac{1}{3}, \ P(C) = \frac{1}{3}$$

(події A, B, C означені вище).

Модель 2°.

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\},$$

$$P(\text{ГГ}) = \frac{1}{4}, \ P(\text{ГР}) = \frac{1}{4}, \ P(\text{РГ}) = \frac{1}{4}, \ P(B) = P(\text{РР}) = \frac{1}{4}.$$

Зазначимо, що для описання одного й того самого стохастичного експеримента можна запропонувати не одну модель, яка адекватно його описує, але серед запропонованих моделей одна не буде адекватною експериментові, оскільки ймовірності, наприклад, події "монети лягли різними боками", обчислені у цих імовірнісних просторах, різні.

Щоб перевірити адекватність описання цими моделями стохастичного експерименту, проведіть його достатнє число разів і перевірте:

1. Чи адекватно описується стохастичний експеримент моделлю 1° (чи погоджується гіпотеза Д'Аламбера з результатами експерименту)?

2. Чи адекватно описується стохастичний експеримент моделлю 2°?

Для перевірки адекватності моделі 1° фіксуватимемо число підкидань, в яких обидві монети лягли гербом; обидві — решкою; монети лягли різними сторонами.

Для перевірки адекватності моделі 2° реєструватимемо число підкидань, в яких обидві монети лягли гербом; обидві — решкою; перша монета лягла гербом, а друга — решкою; перша монета лягла решкою, а друга — гербом.

Результати експериментів зручно записувати у вигляді наведених далі таблиць (перша таблиця для перевірки адекватності моделі 1°, друга — моделі 2°), де, наприклад, $N_{\text{гр}}$ — кількість підкидань з N проведених, в яких на першій монеті випав герб, на другій — решка.

A	B	C
N_A	N_B	N_C

ГГ	РР	ГР	РГ
$N_{\text{гг}}$	$N_{\text{рр}}$	$N_{\text{гр}}$	$N_{\text{рг}}$

18.52 (гострота зору). У таблиці наведено дані про гостроту зору 3242 чоловіків віком 30—39 років — службовців Королівських артилерійських заводів Великобританії (1943 — 1946 рр.). Гострота зору визначається неозброєним оком за ступенями: вищий, другий, третій, нижчий.

Ступінь гостроти зору (праве око)	Ступінь гостроти зору (ліве око)				Разом
	Вищий	Другий	Третій	Нижчий	
Вищий	821	112	85	35	1053
Другий	116	494	145	27	782
Третій	72	151	583	87	893
Нижчий	43	34	106	331	514
Разом	1052	791	919	480	3242

Чи можна на підставі наведених даних дійти висновку про те, що гострота зору правого й лівого очей не пов'язані між собою?

18.53 (колір волосся і колір брів). У таблиці наведено розподіл кольору волосся і кольору брів у 46 542 шведських призовників.

Колір брів	Колір волосся: Світле, руде	Темне	Разом
Світлі, руді	30 472	3238	33 710
Темні	3364	9468	12 832
Разом	33 836	12 706	46 542

Чи свідчать ці дані про зв'язок між кольором волосся і кольором брів?

18.54 (катастрофи на вугільних шахтах). У таблиці наведено інтервали (у днях) між черговими катастрофами на вугільних шахтах Великобританії з 1875 по 1951 р. (дані В. Мег'ю, Е. Пірсона і А. Вінна).

378	36	15	31	215	11	137	4
15	72	96	124	50	120	203	176
55	93	59	315	59	61	1	13
189	345	20	81	286	114	108	188
233	28	22	61	78	99	326	275
54	217	113	32	23	151	361	312
354	58	275	78	17	1205	644	467
871	48	123	457	498	49	131	182
255	195	224	566	390	72	228	271
208	517	1613	54	326	1312	348	745
217	120	275	20	66	291	4	369
338	336	19	329	330	312	171	145
75	364	37	19	156	47	129	1630
29	217	7	18	1357			

Перевірити гіпотезу про показниковий розподіл інтервалів між катастрофами.

Примітка. Катастрофою вважається така ситуація, що призводить до загибелі 10 і більше осіб.

18.55 (експеримент Ж.Бюффона). У результаті $n = 4040$ підкидань монети Ж. Бюффон зареєстрував $\nu_1 = 2048$ випадків появи герба і $\nu_0 = 1992$ випадків появи решки.

Чи узгоджується з цими даними гіпотеза: ймовірність випадання герба дорівнює $1/2$?

18.56 (упередженість експериментатора). Кількість випадків появи останньої цифри в результатах 1000 вимірювань, виконаних експериментатором, наведено у таблиці. Сумнівно, щоб існували об'єктивні фактори, які зумовлюють частішу появу одних цифр порівняно з іншими; тому цілком природно припустити, що відхилення від однакової ймовірності появи цифр свідчить про упередженість експериментатора.

k	n_k	k	n_k
0	158	5	71
1	97	6	90
2	125	7	56
3	73	8	125
4	76	9	129
		Разом	1 000

де k — остання цифра в результатах вимірювань; n_k — кількість результатів вимірювань, в яких останньою була цифра k, $k = 0, 1, \ldots, 9$.

Чи свідчать наведені дані про упередженість експериментатора?

Примітка. Про упередженість під час вимірювань див. зауваження до задачі 18.13.

18.57 (час чекання). Розглядається час чекання парного числа в послідовності цілих невід'ємних випадкових чисел, менших за 100. Інакше кажучи, розглядається випадкова величина, яка дорівнює кількості непарних чисел між двома послідовними (сусідніми) парними числами, меншими за 100.

Запропонувати математичну модель (розподіл) випадкової величини — часу чекання парного числа. Перевірити адекватність запропонованої моделі стохастичному експериментові. Скориставшись таблицею випадкових чисел (табл. 22.10.1), добути вибірку часу чекання парного числа (достатнього обсягу) і перевірити, чи узгоджується запропонована модель із результатом експерименту — добутою вибіркою.

Результати спостережень зручно подати у вигляді:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
n_i											

де i — час чекання парного числа; n_i — число спостережень, в яких час чекання дорівнює i.

Зауваження. Про вибір моделі стохастичного експерименту і перевірку її адекватності експерименту див. задачу 18.1.

18.58. Стохастичний експеримент з відомої задачі Льюїса Керрола (див. приклад 4.1.2) полягає у послідовному вийманні з урни двох куль. Можна запропонувати принаймні дві моделі (два ймовірнісних простори) цього стохастичного експерименту (як і в прикладі 4.1.2, білу кулю позначимо через W, чорну — через B, білу кулю, яку поклали до урни, позначимо через W^*).

Модель 1°.

$$\Omega = \{WW, WB, BW\},$$

$$P(WW) = \frac{1}{3},\ P(WB) = \frac{1}{3},\ P(BW) = \frac{1}{3}.$$

Модель 2°.

$$\Omega = \{WW^*, W^*W, W^*B, BW^*\},$$

$$P(WW^*) = \frac{1}{4}, P(W^*W) = \frac{1}{4}, P(W^*B) = \frac{1}{4}, P(BW^*) = \frac{1}{4}.$$

Правдоподібні міркування (див. приклад 4.1.2) схиляють нас до думки, що адекватною моделлю стохастичного експерименту є модель 2°. Але чи насправді це так?

Проведіть стохастичний експеримент достатню кількість разів і перевірте:

1. Чи адекватно описується стохастичний експеримент моделлю 1°?

2. Чи адекватно описується стохастичний експеримент моделлю 2°?

Зазначимо, що хоча для одного й того самого експерименту можна запропонувати не одну модель, яка адекватно його описує, але для даного стохастичного експерименту принаймні одна з моделей не буде адекватною експерименту вже хоча б тому, що ймовірність однієї й тієї самої події, обчислена в різних імовірнісних просторах, різна (див. приклад 4.1.2).

Стохастичний експеримент проводитимемо у такий спосіб. Візьмемо дві урни: допоміжну й основну. У допоміжній знаходяться дві кулі: біла й чорна. З допоміжної урни навмання виберемо одну з куль і перекладемо до основної, не реєструючи результату. Таким чином, в основній урні знаходиться біла куля (з імовірністю 1/2) або чорна. Далі в основну урну кладемо білу кулю, її при перевірці адекватності моделі 2 позначимо зірочкою. І нарешті, з основної урни послідовно виймаємо обидві кулі, фіксуючи результат експерименту:

$$WW, WB, BW$$

— у разі перевірки адекватності моделі 1° і

$$WW^*, W^*W, W^*B, BW^*$$

— у разі перевірки адекватності моделі 2°.

Дані експериментів зручно записати у вигляді таблиць (перша — для перевірки адекватності моделі 1°, друга — моделі 2°), де, наприклад, N_{WW} — кількість експериментів з N проведених, в яких наслідком була пара WW.

WW	WB	BW
N_{WW}	N_{WB}	N_{BW}

WW^*	W^*W	W^*B	BW^*
N_{WW^*}	N_{W^*W}	N_{W^*B}	N_{BW^*}

18.59. Підкидають пару монет і гральний кубик і реєструють число ξ гербів, що випало на парі монет, число η очок, що випало на гральному кубику і значення випадкової величини $\zeta = (\xi, \theta)$, де $\theta = I_{\{2,4,6\}}(\eta)$.

Перевірити гіпотезу про незалежність компонент випадкової величини $\zeta = (\xi, \theta)$. Для цього підкинути монету і гральний кубик достатню кількість разів і скористатися критерієм χ^2.

Результати спостережень зручно подати у вигляді таблиці:

Значення ξ	Значення θ		Сума
	0	1	
0	ν_{00}	ν_{01}	$\nu_{0\cdot}$
1	ν_{10}	ν_{11}	$\nu_{1\cdot}$
2	ν_{20}	ν_{21}	$\nu_{2\cdot}$
Сума	$\nu_{\cdot 0}$	$\nu_{\cdot 1}$	n

де ν_{ij} — кількість підкидань, в яких випадкова величина $\zeta = (\xi, \theta)$ набула значення (i, j), $i = 0, 1, 2; j = 0, 1$;

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{1} \nu_{ij}, \ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{2} \nu_{ij}, \ i = 0, 1, 2; \ j = 0, 1.$$

З а у в а ж е н н я. Про вибір моделі стохастичного експерименту і перевірку її адекватності див. задачу 18.1.

18.60 (про телепатію і карти Зенера). Із двадцятих років XX століття у Гарвардському університеті, університеті Дюка та інших університетах фінансуються експериментальні дослідження з телепатії (“читання” думок на відстані), в яких, зокрема, використовуються карти Зенера із зображенням п’яти символів: коло, квадрат, плюс, три хвилясті лінії, зірка (рис. 18.4.1).

За допомогою карт Зенера перевірити здібності телепата “читати” думки на відстані. З цією метою провести такий експеримент. Із колоди карт Зенера навмання вибрати одну й зафіксувати результат. Телепат читає, яку карту ви вибрали, і також фіксує результат. Експеримент проводиться достатню кількість разів.

Якщо телепат справді читає думки, то частота правильно прочитаних символів (коло читається як коло, квадрат — як квадрат, ...), тобто частота успіхів, буде великою (успіх — правильно прочитаний символ, невдача — неправильно прочитаний).

За результатами проведеного експерименту дійти висновку щодо здібності телепата читати думки на відстані.

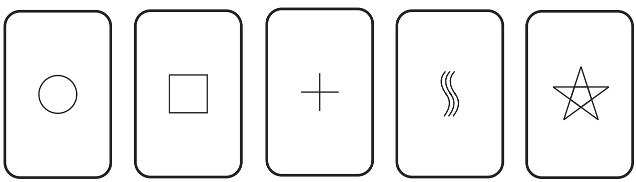

Рис. 18.4.1: Карти Зенера

В к а з і в к а 1. Сформулювати задачу перевірки здібностей телепата читати думки на відстані як задачу перевірки статистичних гіпотез. За нульову розглянути гіпотезу: телепат думки не читає. Скористатися критерієм χ^2.

В к а з і в к а 2. Перевірити телепатичні здібності свого товариша, знайомого (попросити прочитати ваші думки).

18.61. Симетричну монету підкидають до першої появи герба і реєструють кількість μ решок, що при цьому випали (кількість спроб до першої появи герба).

Запропонуйте математичну модель цього стохастичного експерименту. Перевірте її адекватність експериментові. Для цього проведіть експеримент достатню кількість разів і скористайтеся критерієм χ^2.

18.62. Підкидають пару монет і реєструють подію: "на обох монетах випав герб".

Запропонуйте математичну модель цього стохастичного експерименту. Перевірте її адекватність експериментові. Для цього проведіть експеримент достатню кількість разів і скористайтеся критерієм χ^2.

Глава 19

Непараметричні критерії

19.1 Критерій Колмогорова

Постановка задачі. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots \ldots, \xi_n(\omega))$ — реалізація вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ з невідомого неперервного розподілу F. Стосовно F висувається гіпотеза H_0: $F = G$ або, що те саме, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з розподілу G, де G — повністю визначений неперервний розподіл.

Необхідно перевірити гіпотезу H_0, тобто за реалізацією вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дійти висновку: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

Статистика Колмогорова. Для перевірки гіпотези H_0: $F = G$ природно ввести відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ емпіричного розподілу $\hat{F}_n$ від гіпотетичного G (див. гл. 18).

А.М. Колмогоров як відхилення емпіричного розподілу $\hat{F}_n$, побудованого за вибіркою $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, від гіпотетичного G запропонував розглядати

$$D(\hat{F}_n, G) = \sup_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

Введене в такий спосіб відхилення, коли гіпотеза H_0 справджується, тобто коли $F = G$, набуває значень

$$D_n = D(\hat{F}_n, F) = \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|$$

і є малим порівняно з відхиленням $D(\hat{F}_n, G)$, коли розподіл G відмінний від F. Останнє цілком природно, оскільки для кожного фіксованого x емпірична функція розподілу $\hat{F}_n(x)$ є незсуненою і спроможною оцінкою значення $F(x)$. До того ж розподіл відхилення D_n емпіричного розподілу від гіпотетичного, по-перше, не залежить від F (один і той самий для всіх неперервних F) і, по-друге, при великих n як розподіл нормованого відхилення

$$D_n \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}} = \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

можна розглядати розподіл Колмогорова, його функцією розподілу є

$$K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp\{-2k^2\lambda^2\}, \ \lambda > 0,$$

(останнє випливає з теореми Колмогорова).

Теорема. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з неперервного розподілу F, $\hat{F}_n(x)$ — емпірична функція розподілу, побудована за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, тоді*

$$\lim_n P\left\{ \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}} < \lambda \right\} = K(\lambda), \ \lambda > 0.$$

Таким чином, коли гіпотеза H_0: $F = G$ справджується, відхилення

$$D(\hat{F}_n, G) = \sup_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right| = \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|$$

мале, у супротивному разі — велике. Тому, перевіряючи гіпотезу H_0, її природно відхиляти, якщо $D(\hat{F}_n, G)$ набуло великого значення, і не відхиляти в супротивному разі.

Межі $\varepsilon_{\alpha;n}$, що відокремлюють великі значення відхилення $D(\hat{F}_n, G)$ від малих, знаходять за відомим розподілом відхилення $D_n = D(\hat{F}_n, F)$. А саме, $\varepsilon_{\alpha;n}$ визначається як верхня α-межа (критичне значення) розподілу відхилення

$$D(\hat{F}_n, F) = \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|,$$

тобто як найменше ε, для якого

$$P\left\{ \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \alpha.$$

Значення $\varepsilon_{\alpha;n}$ для заданих α (рівня значущості) та n (обсягу вибірки) наведені в табл. 22.7.1. Якщо значення n велике ($n \geq 100$), як $\varepsilon_{\alpha;n}$ розглядається $\lambda_\alpha/\sqrt{n}$, тобто

$$\varepsilon_{\alpha;n} = \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}},$$

де λ_α — верхня α-межа розподілу Колмогорова, тобто λ_α — корінь рівняння $K([\lambda_\alpha, +\infty)) = \alpha$.

Критерій Колмогорова. *Нехай* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *— вибірка з неперервного розподілу* F. *Якщо гіпотезу* H_0: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *є вибіркою із розподілу* G *відхиляти при*

$$D(\hat{F}_n, G) = \sup_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right| \geq \varepsilon_{\alpha;n}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю, що не перевищує α, *гіпотезу* H_0 *відхилятимемо, коли вона справджується.*

З а у в а ж е н н я. Критерієм Колмогорова можна користуватися тільки тоді, коли гіпотетичний розподіл G повністю визначений і неперервний.

Приклад 19.1.1 . *Скориставшись таблицею випадкових чисел (табл.* 22.10.1), *добути вибірку обсягом* 10 *зі стандартного нормального розподілу.*

За допомогою критерію Колмогорова перевірити, чи справді цю вибірку добуто із зазначеного розподілу.

Р о з в' я з а н н я. Нехай функція розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ монотонно зростаюча і неперервна, тоді випадкова величина η, означена рівністю

$$\eta = F(\xi), \tag{19.1.1}$$

розподілена рівномірно на $[0,1]$. Справді,

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{F(\xi) < x\}.$$

Якщо $x \le 0$, то

$$P\{F(\xi) < x\} = 0,$$

якщо $x > 1$, то

$$P\{F(\xi) < x\} = 1,$$

якщо $x \in [0,1)$, то

$$P\{F(\xi) < x\} = P\{\xi < F^{-1}(x)\} = F(F^{-1}(x)) = x.$$

З рівності (19.1.1), зокрема, випливає, що

$$\xi = F^{-1}(\eta)$$

має своєю функцією розподілу $F(x)$, якщо η розподілена рівномірно на $[0,1]$. Це твердження дає можливість за вибіркою $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ з рівномірного на проміжку [0;1] розподілу будувати вибірку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ із розподілу F, а саме:

$$\xi_i = F^{-1}(\eta_i),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

є вибіркою з розподілу F. Зокрема, якщо як $F(x)$ розглянути

$$N_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\} ds$$

— функцію стандартного нормального розподілу, то

$$\xi_i = N_{0;1}^{-1}(\eta_i),\ i = 1, 2, \ldots, 10,$$

буде вибіркою з $N_{0;1}$.

Вибірку з рівномірного на проміжку [0;1] розподілу можна добути, скориставшись таблицею випадкових чисел (табл. 22.10.1) (див. також задачу 19.4).

Виберемо з табл. 22.10.1 послідовність із 10 чисел (для визначеності — чотиризначних). Вибір можна починати з будь-якого місця таблиці (скажімо, з верхнього правого кута) і продовжувати в будь-який наперед обумовлений спосіб. Наприклад, рухаючись по діагоналі, дістанемо

1009	5420	2689	2529	7080
3407	5718	1656	7048	7835

Числа

0,1009	0,5420	0,2689	0,2529	0,7080
0,3407	0,5718	0,1656	0,7048	0,7835

з проміжку [0;1] можна розглядати як реалізацію вибірки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{10}$ з рівномірного на проміжку $[0;1]$ розподілу. За значеннями η_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, користуючись тим, що функцію $N_{0;1}(x)$ табульовано (табл. 22.1.1), отримаємо реалізацію вибірки зі стандартного нормального розподілу як значення $\xi_i = N_{0;1}^{-1}(\eta_i)$:

−1,27	0,11	−0,62	−0,67	0,55
−0,41	0,18	−0,97	0,54	0,78

Останній знак знайдено методом лінійної інтерполяції.

Далі, користуючись критерієм Колмогорова, перевіримо гіпотезу H_0: вибірку добуто з розподілу $N_{0;1}$. Для цього обчислимо відхилення

$$D(\hat{F}_n, G) = \sup_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right|$$

(де $G(x) = N_{0;1}(x)$ — функція нормального розподілу з параметрами (0;1); $\hat{F}_n(x)$ — реалізація емпіричної функції розподілу, побудована за вибіркою) і порівнюємо його з критичним значенням $\varepsilon_{\alpha;n}$. Значення

$$D(\hat{F}_n, N_{0;1}) = \sup_x \left| N_{0;1}(x) - \hat{F}_n(x) \right| = 0{,}21$$

(методику обчислення $\sup\limits_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right|$ описано в гл. 15). Маємо

$$D(\hat{F}_n, N_{0;1}) = 0{,}21 < 0{,}4087 = \varepsilon_{0{,}05;10} = \varepsilon_{\alpha;n}$$

(критичне значення $\varepsilon_{0{,}05;10}$ добуто з табл. 22.7.1).

Тому згідно з критерієм Колмогорова гіпотеза: вибірку добуто з нормального розподілу з параметрами (0;1) не відхиляється.

Для вибірки обсягом 10 із нормального розподілу з параметрами (0;1) максимальне відхилення між емпіричною функцією розподілу $\hat{F}_{10}(x)$ і функцією розподілу $N_{0;1}(x)$, яке дорівнює 0,21, не є великим, таке відхилення цілком допустиме.

19.2 Критерій знаків

Постановка задачі (спостереження повторні). Маємо n пар випадкових величин

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n),$$

стосовно яких відомо, що різниці $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$ можна подати у вигляді

$$\zeta_j = \theta + e_j, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

де θ — константа, а випадкові величини $e_1, e_2, \ldots, e_n$:
1° незалежні (самі η_j і ξ_j можуть бути залежними);
2° симетрично розподілені відносно нуля (розподіли e_j і $-e_j$ співпадають) і абсолютно неперервні (далі це обмеження буде усунено).

Щодо невідомого параметра θ висувається гіпотеза

$$H_0 \colon \theta = 0.$$

Альтернатива гіпотезі H_0: $\theta = 0$ може бути як однобічною — якщо $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ (вона може бути і такою: $\theta < 0$), так і двобічною — якщо $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ або $\theta < 0$. У кожній задачі альтернатива своя. Необхідно побудувати критерій для перевірки гіпотези H_0: $\theta = 0$.

Пари $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ можна інтерпретувати як $2n$ спостережень — по два спостереження на кожні n об'єктів, пацієнтів, приладів, ..., при цьому ξ_j називають спостереженням "до оброблення", а η_j — спостереженням "після оброблення", $j = 1, 2, \ldots, n$. Значення параметра θ, яке часто називають ефектом оброблення, невідоме. Відхилення гіпотези H_0: $\theta = 0$ свідчить на користь наявності ефекта оброблення, невідхилення — відсутності.

Статистика для побудови критерію. Справджується гіпотеза H_0: $\theta = 0$ чи ні, випадкові величини e_j, $j = 1, 2, \dots, n$, незалежні, симетрично розподілені відносно нуля і абсолютно неперервні. Звідси випливає, що випадкова величина, яка дорівнює кількості e_j, $j = 1, 2, \dots$ $\dots, n$, що набули додатних значень, має біномний розподіл з параметрами $(n; 1/2)$ і тому кількість додатних величин серед $e_j, j = 1, 2, \dots, n$, близька до половини наявних, тобто до $n/2$.

Позначимо через μ кількість додатних різниць серед

$$\zeta_j = \eta_j - \xi_j = \theta + e_j, \; j = 1, 2, \dots, n. \tag{19.2.1}$$

Якщо гіпотеза H_0 справджується, тобто $\theta = 0$, то кількість додатних різниць серед (19.2.1) співпадає з кількістю випадкових величин e_j, $j = 1, 2, \dots, n$, які набули додатних значень, а отже, мало відрізняється від $n/2$ — половини наявних різниць. Якщо ж гіпотеза H_0: $\theta =$ $= 0$ не справджується, то кількість додатних різниць серед $\zeta_j, j = 1, 2, \dots, n$, істотно відрізняється від $n/2$: буде істотно більшою або меншою (залежно від знака θ) від $n/2$.

Таким чином, коли гіпотеза H_0 справджується, кількість μ додатних різниць серед ζ_j, $j = 1, 2, \dots, n$ (позначимо її через μ_0) мало відхиляється від $n/2$ порівняно з відхиленням μ від $n/2$, коли гіпотеза H_0 не справджується. Тому, перевіряючи гіпотезу H_0: $\theta = 0$, її природно відхиляти, якщо кількість додатних різниць μ істотно відрізняється від $n/2$, і не відхиляти в супротивному разі.

Межі $m_{\alpha;n}$, що відокремлюють великі значення відхилень між μ і $n/2$ від малих, будуються за відомим розподілом кількості μ_0 додатних різниць

$$\zeta_j = \eta_j - \xi_j = e_j, \; j = 1, 2, \dots, n,$$

яка мінімально відхиляється від $n/2$. А саме, $m_{\alpha;n}$ визначається як мінімальне число m, для якого

$$P\{\mu_0 > m\} \le \alpha, \tag{19.2.2}$$

де μ_0 — біномно розподілена випадкова величина з параметрами $(n; 1/2)$.

Значення $m_{\alpha;n}$ за заданими рівнем значущості α і обсягом вибірки n табульовано (див. табл. 22.9.1).

Критерій знаків. *Нехай* $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ *— n пар випадкових величин, для яких різниці $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$ можна подати у вигляді*

$$\zeta_j = \theta + e_j, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

випадкові величини e_j є: 1° незалежними, 2° симетрично розподіленими відносно нуля й абсолютно неперервними; число $m_{\alpha;n}$ означається співвідношенням (19.2.2).

Якщо гіпотезу H_0: $\theta = 0$ відхиляти при

$$\mu > m_{\alpha;n}$$

і не відхиляти при

$$\mu \leq m_{\alpha;n},$$

то з імовірністю, що не перевищує α, гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (*однобічний критерій знаків, альтернатива: $\theta > 0$*).

Якщо гіпотезу H_0 відхиляти при

$$\mu \notin [n - m_{\alpha;n};\, m_{\alpha;n}]$$

і не відхиляти при

$$\mu \in [n - m_{\alpha;n};\, m_{\alpha;n}],$$

то з імовірністю, що не перевищує 2α, гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (*двобічний критерій знаків, альтернатива: $\theta > 0$ або $\theta < 0$*).

Помилки першого і другого роду. Коли гіпотеза H_0: $\theta = 0$ справджується, випадкова величина μ — кількість додатних різниць $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, має біномний розподіл з параметрами $(n; 1/2)$. Тому μ, майже завжди мало відхиляючись від $n/2$, може (хоча й рідка) набувати значень, які істотно відрізняються від $n/2$. При цьому гіпотезу H_0: $\theta = 0$ відхиляємо і тим самим припускаємося помилки першого роду (її ймовірність не перевищує вибраного рівня значущості).

Коли гіпотеза H_0 не справджується, наприклад, $\theta > 0$, то, незважаючи на те, що випадкова величина μ (кількість додатних різниць) майже завжди набуває великих значень (істотно більших ніж $n/2$), вона може, хоча й зрідка, набувати значень, які мало відрізняються від $n/2$. При цьому гіпотезу H_0 не відхиляємо і тим самим припускаємося помилки другого роду.

Зв'язки. Якщо зняти вимогу про неперервність розподілів випадкових величин η_j і ξ_j, то різниці $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, можуть набувати нульових значень з ненульовою ймовірністю (кажуть, що є зв'язки). Чи можна в цьому разі користуватися критерієм знаків для перевірки гіпотези H_0: $\theta = 0$? Виявляється, що можна, попередньо відкинувши рівні нулеві різниці й застосовуючи критерій знаків до відмінних від нуля різниць, що залишилися (різниці, які дорівнюють нулю, не враховуються, неначе їх взагалі не було).

Критерій знаків за наявності зв'язків. Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ — n пар випадкових величин, для яких різниці $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, можна подати у вигляді

$$\zeta_j = \theta + e_j, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

де випадкові величини e_j є: 1° незалежними; 2° симетрично розподіленими відносно нуля.

Позначимо через s кількість різниць $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, відмінних від нуля, а через μ — кількість додатних серед них. Для кожного фіксованого s ($s = 1, 2, \ldots, n$) означимо число $m_{\alpha;s}$ як мінімальне m, для якого

$$P\{\mu > m\} \leq \alpha,$$

де μ — біномно розподілена випадкова величина з параметрами $(s; 1/2)$.

Якщо гіпотезу H_0 відхиляти при

$$\mu > m_{\alpha;s}$$

і не відхиляти при

$$\mu \leq m_{\alpha;s},$$

то з імовірністю, що не перевищує α, гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива однобічна: $\theta > 0$).

Якщо гіпотезу H_0 відхиляти при

$$\mu \notin [s - m_{\alpha;s},\, m_{\alpha;s}]$$

і не відхиляти при

$$\mu \in [s - m_{\alpha;s},\, m_{\alpha;s}],$$

то з імовірністю, що не перевищує 2α, гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива двобічна: $\theta > 0$ або $\theta < 0$).

Двовибірковий критерій знаків. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — незалежні вибірки відповідно з розподілів F і G таких, що

$$G(x) = F(x - \theta),$$

причому ні розподіл F, ні параметр θ невідомі. Стосовно параметра θ висувається гіпотеза

$$H_0 \colon \theta = 0$$

(або, що те саме, $F = G$), яку треба перевірити.

Гіпотезу $H_0 \colon \theta = 0$ можна перевіряти, користуючись критерієм знаків у тому самому формулюванні, що і для повторних спостережень: підрахувати кількість μ додатних різниць $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$ серед $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, і порівняти її з $m_{\alpha;s}$.

Приклад 19.2.1. *Один із методів кількісного аналізу ступеня спрацювання шини автомобіля полягає у вимірюванні глибини проникнення щупа в канавку протектора у певному місці шини.*

Під час дорожньо-експлуатаційних досліджень два контролери вимірюють глибину канавок на шинах після кожного експерименту. Основна складність проведення вимірювань полягає у тому, що кожний контролер має свою, властиву лише йому зміщуваність результатів *вимірювань, пов'язану з натискуванням на щуп*[1] *(від натискування залежить глибина проникнення щупа в канавку протектора).*

Результати 10 вимірювань, виконаних контролерами в 10 фіксованих точках шини, наведено в таблиці.

Точка	Перший контролер	Другий контролер	Точка	Перший контролер	Другий контролер
1	126	125	6	159	152
2	128	120	7	152	150
3	157	163	8	138	136
4	131	118	9	138	140
5	142	129	10	142	136

Є припущення, що перший контролер отримує вищі результати, ніж другий.

Чи узгоджується це припущення з результатами експерименту?

Розв'язання. Результати вимірювань, виконаних першим контролером, позначимо через η_j, а другим — через ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, 10$. Різниці $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 10$, природно вважати зображуваними у вигляді

$$\zeta_j = \theta + e_j, \ j = 1, 2, \ldots, 10,$$

де e_j — незалежні випадкові величини. Параметр θ характеризує відмінності (якщо вони є) у натискуванні першим і другим контролерами на щуп (якщо $\theta = 0$, то відмінностей немає, а якщо $\theta \neq 0$, то вони є).

Необхідно за результатами вимірювань дійти висновку про значення параметра θ, а саме: $\theta = 0$ чи $\theta \neq 0$. Сформулюємо поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез.

Відносно параметра θ висуваємо гіпотезу $H_0 : \theta = 0$, тобто контролери отримують однакові результати. Оскільки є підозра, що перший контролер отримує вищі результати, за альтернативу основній гіпотезі виберемо однобічну альтернативу: $\theta > 0$.

Відхилення нульової гіпотези трактуватимемо на користь вищих результатів першого контролера порівняно

[1] Тут щуп — тонка продовгувата металева пластинка прямокутної форми.

з результатами другого, невідхилення — як відсутність відмінностей у вимірюваннях контролерів.

Для перевірки гіпотези H_0 скористаємося критерієм знаків. Маємо такі знаки різниць:

$$+ + - + + + + + + - + .$$

Усього 10 різниць (усі вони відмінні від нуля), кількість μ додатних серед них дорівнює 8. При цьому

$$\mu = 8 \leq 8 = m_{0{,}025;10} = m_{\alpha;n}.$$

Тому згідно з критерієм знаків для перевірки гіпотези H_0: $\theta = 0$ проти альтернативи $\theta > 0$ гіпотеза H_0 на рівні значущості 0,025 не відхиляється (поява восьми додатних різниць з 10 можливих допустима).

Цей результат можна трактувати так. Експеримент не дає підстав стверджувати, що результати вимірювань (див. таблицю), отримані першим контролером, вищі порівняно з результатами, добутими другим контролером. (Такі результати міг добути один і той самий контролер.)

19.3 Критерій Вілкоксона

Постановка задачі. Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots \xi_n(\omega))$ і $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \ldots, \eta_m(\omega))$ — реалізації незалежних вибірок $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ і $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ відповідно з неперервних розподілів F і G. Стосовно розподілів F і G відомо лише те, що їхні функції розподілів зв'язані співвідношенням

$$G(x) = F(x - \theta).$$

Параметр θ невідомий. Щодо нього висувається гіпотеза

$$H_0\colon \theta = 0.$$

Альтернатива нульовій гіпотезі H_0 може бути як двобічною: якщо $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ або $\theta < 0$, так і однобічною: якщо $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ (однобічна альтернатива може бути і такою: $\theta < 0$). Вибір альтернативи визначається задачею, що розв'язується.

Далі розглядається критерій Вілкоксона для перевірки гіпотези H_0: $\theta = 0$.

Статистика W (статистика Вілкоксона). Розмістимо вибіркові значення $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ у спільний варіаційний ряд. Індекси, як правило, опускатимемо. Отримаємо перестановку з n літер ξ і m літер η, наприклад

$$\omega = (\xi\eta\xi\eta\eta\eta\xi\xi\ldots\xi\eta). \tag{19.3.1}$$

Надалі для визначеності через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ позначатимемо вибірку меншого обсягу, а якщо обсяги вибірок однакові, то довільну.

Визначимо ранг кожного вибіркового значення як номер місця, на якому воно знаходиться у спільному варіаційному ряді (19.3.1). Оскільки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ і $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ — вибірки з неперервних розподілів, імовірність того, що вибіркові значення співпадуть, дорівнює нулю, але на практиці вибіркові значення реєструються зі скінченною кількістю знаків і тому вони можуть співпадати з ненульовою імовірністю. У цьому разі вибірковим значенням, що співпадають, приписуємо один і той самий середній ранг. Наприклад, якщо $\xi_i = 7{,}1$; $\eta_j = 7{,}1$, причому, скажімо, є чотири вибіркові значення, менші ніж 7,1, то кожному з вибіркових значень ξ_i і η_j (вони знаходяться на 5-му й 6-му місцях) приписується середній ранг $(5+6)/2 = 5{,}5$.

Далі означимо W як суму рангів вибірки меншого обсягу, тобто вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а саме:

$$W = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

де $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — ранги вибіркових значень $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ у перестановці (19.3.1).

Величиною W можна описувати міру змішаності літер ξ і η у спільному варіаційному ряді: якщо сума рангів W велика (більшість вибіркових значень ξ_i розміщується праворуч від вибіркових значень η_j) або мала (більшість вибіркових значень ξ_i розміщується ліворуч від вибіркових значень η_j), то літери ξ і η у спільному варіаційному ряді змішані погано, у супротивному разі — добре.

Зазначимо, що мінімально можливим значенням суми рангів W є

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

максимально можливим —

$$(m+1) + (m+2) + \ldots + (m+n) = mn + \frac{n(n+1)}{2},$$

середнім —

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \left(mn + \frac{n(n+1)}{2}\right)\right) = \frac{n(n+m+1)}{2}.$$

Коли гіпотеза H_0: $\theta = 0$ справджується, математичне сподівання W дорівнює $n(n+m+1)/2$ (зазначимо, що $n(n+m+1)/2$ — координата середини відрізка з кінцями $n(n+1)/2$ і $nm + n(n+1)/2$).

Величину W називають *статистикою Вілкоксона*. За статистикою W будується критерій для перевірки гіпотези $H_0 \colon F = G$.

Якщо гіпотеза H_0: $F = G$ справджується, то $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ і $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ є незалежними вибірками з одного й того самого розподілу; тому літери ξ і η у перестановці (19.3.1) змішані добре і W набуває значень, близьких до свого середнього значення

$$n(n+m+1)/2$$

(статистику W, коли гіпотеза справджується, позначатимемо W_0). Якщо ж гіпотеза H_0 не справджується, W набуває значень, які істотно відрізняються від

$$n(n+m+1)/2$$

(при $\theta > 0$ статистика W набуває малих значень, а при $\theta < 0$ — великих). Отже, якщо гіпотеза H_0 справджується, випадкова величина $W = W_0$ мало відхиляється від $n(n+m+1)/2$ порівняно з відхиленнями величини W від $n(n+m+1)/2$, коли гіпотеза H_0 не справджується.

Тому, перевіряючи гіпотезу H_0, її природно не відхиляти, коли W набуло значення, яке мало відрізняється від $n(n+m+1)/2$, і відхиляти в супротивному разі.

Межі, що відокремлюють значення W, які мало відрізняються від $n(n+m+1)/2$, від значень W, що відрізняються від $n(n+m+1)/2$ істотно, будуються за відомим розподілом випадкової величини W_0.

За даними α (рівнем значущості) і n, m (обсягами вибірок) число $W_{\alpha;n;m}$ визначається як найбільше ціле t, для якого

$$P\{W_0 \leq t\} \leq \alpha.$$

Тоді шуканими межами є

$$W_{\alpha;n;m} \text{ і } n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}.$$

Значення $W_{\alpha;n;m}$ табульовано (див. табл. 22.8.1).

Критерій Вілкоксона. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — незалежні вибірки відповідно з неперервних розподілів F і G, причому*

$$G(x) = F(x - \theta).$$

Якщо гіпотезу

$$H_0 \colon \theta = 0$$

відхиляти при

$$W \leq W_{\alpha;n;m}$$

і не відхиляти при

$$W > W_{\alpha;n;m},$$

то з імовірністю, не більшою ніж α, гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива однобічна: $\theta > 0$).

Якщо гіпотезу H_0 відхиляти при

$$W \geq n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю, не більшою ніж α, гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива однобічна: $\theta < 0$).

Якщо гіпотезу H_0 відхиляти при

$$W \notin (W_{\alpha;n;m}; n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m})$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю, не більшою ніж 2α, гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли вона справджується (альтернатива двобічна: $\theta < 0$ або $\theta > 0$).

Якщо обсяги вибірок n і m великі — у критерії Вілкоксона значення n і m великі, коли

$$\min\{n, m\} \geq 6, \; m + n \geq 20$$

— то як $W_{\alpha;n;m}$ використовується

$$W_{\alpha;n;m} = \frac{1}{2}n(n+m+1) + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{12}nm(n+m+1)},$$

де z_α — α-квантиль нормального розподілу з параметрами (0;1), тобто z_α — розв'язок рівняння $N_{0;1}(z_\alpha) = \alpha$ (див. табл. 22.1.1). Це випливає з того, що коли $n, m \to \infty$, статистика W асимптотично нормальна із середнім $n(n+m+1)/2$ і дисперсією $nm(n+m+1)/12$.

Помилки першого і другого роду. Коли гіпотеза H_0: $F = G$ справджується, випадкова величина W — сума рангів вибірки меншого обсягу, набуваючи значень з проміжку

$$[n(n+1)/2, nm + n(n+1)/2]$$

і майже завжди мало відхиляючись від середнього значення $n(n+m+1)/2$, тобто

$$W \in (W_{\alpha;n;m}; n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}) \, ,$$

може, хоча й зрідка, набути значення, що істотно відрізняється від $n(n+m+1)/2$, тобто

$$W \leq W_{\alpha;n;m} \;\; \text{або} \;\; W \geq n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}.$$

При цьому гіпотезу H_0 відхиляємо і тим самим припускаємося помилки першого роду.

Якщо ж гіпотеза H_0 не справджується, то W, майже завжди набуваючи значень, які істотно відрізняються від $n(n+m+1)/2$ (малих або великих), може, хоча й зрідка, набути значення, близького до середнього $n(n+m+1)/2$, тобто

$$W \in (W_{\alpha;n;m}; n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m})\,.$$

При цьому гіпотезу H_0 не відхиляємо і тим самим припускаємося помилки другого роду.

Приклад 19.3.1 . *Для дослідження стійкості на стирання епоксидної пластмаси з використанням як наповнювача оксиду алюмінію у різній концентрації виготовили дві партії плиток.*

Розглядалися два значення відносної концентрації наповнювача в смолі, що відповідали відношенням $1/2$ *до* 1 *і* 1 *до* 1*. Виготовили по* 18 *зразків плиток, при цьому дві з них із концентрацією* $1/2$ *до* 1 *були забраковані й не випробовувалися. Потім кожну з плиток приводили у зворотно-поступальний рух по абразивному матеріалу* (10 000 *циклів для кожної плитки*).

Вимірювалася різниця товщини плиток до і після випробувань; точність вимірювань становила 10^{-4} *дюйма* (1 *дюйм* $= 0,0254$ *м.*).

Концентрація $1/2$ *до* 1: 7,0; 6,4; 7,3; 5,1; 5,7; 6,6; 5,0; 7,7; 6,8; 5,1; 4,6; 5,5; 5,8; 6,2; 4,8; 5,8.

Концентрація 1 *до* 1: 7,1; 5,0; 6,4; 6,9; 5,7; 6,5; 6,5; 4,0; 6,2; 6,8; 4,0; 7,5; 7,2; 5,2; 7,8; 4,8; 4,4; 6,0.

Чи відрізняються плитки з епоксидної пластмаси, в яких наповнювачем був оксид алюмінію у різних концентраціях, за стійкістю на стирання? Інакше кажучи, чи впливає концентрація наповнювача на стійкість плитки на стирання?

Розв'язання. Сформулюємо поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез.

Позначимо через F і G розподіли величини стирання плиток відповідно з концентрацією наповнювача $1/2$ до 1 і 1 до 1. Розподіли F і G неперервні. Припустимо також, що $G(x) = F(x-\theta)$ (θ — параметр, який характеризує відмінності величини стирання, якщо вони є).

Щодо відмінностей плиток з різною концентрацією наповнювача висувається гіпотеза H_0: концентрація наповнювача не впливає на стійкість плитки на стирання. Цю гіпотезу можна сформулювати так: H_0: $F = G$ або, що те саме, $H_0 \colon \theta = 0$. Оскільки щодо впливу концентрації наповнювача на стирання нічого невідомо, розглядатимемо двобічну альтернативу: $\theta < 0$ або $\theta > 0$.

Необхідно перевірити гіпотезу H_0, тобто за реалізацією вибірки дійти висновку — відхиляти гіпотезу H_0 чи ні. Відхилення гіпотези H_0 інтерпретуватимемо як наявність впливу концентрації наповнювача на стирання плиток. Якщо ж гіпотеза H_0 не відхиляється, то можна стверджувати, що в експерименті вплив концентрації наповнювача на стирання не виявився.

Для перевірки гіпотези H_0 скористаємося критерієм Вілкоксона. Гіпотезу H_0 відхилятимемо, коли

$$W \notin \left(W_{\alpha;n;m}; n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}\right),$$

і не відхилятимемо в супротивному разі.

Спочатку обчислимо W — суму рангів вибірки меншого обсягу в спільному варіаційному ряді: 4,0; 4,0; 4,4; $\underline{4{,}6}$; $\underline{4{,}8}$; 4,8; $\underline{5{,}0}$; 5,0; $\underline{5{,}1}$; $\underline{5{,}1}$; 5,2; $\underline{5{,}5}$; $\underline{5{,}7}$; 5,7; $\underline{5{,}8}$; $\underline{5{,}8}$; 6,0; $\underline{6{,}2}$; 6,2; $\underline{6{,}4}$; 6,4; 6,5; 6,5; $\underline{6{,}6}$; $\underline{6{,}8}$; 6,8; 6,9; $\underline{7{,}0}$; 7,1; 7,2; $\underline{7{,}3}$; 7,5; $\underline{7{,}7}$; 7,8 (підкреслені вибіркові значення вибірки меншого обсягу).
$W = 4 + (5+6)/2 + (7+8)/2 + (9+10)/2 + (9+10)/2 + {}$ $+12 + (13+14)/2 + (15+16)/2 + (15+16)/2 + (18+19)/2 + {}$ $+(20+21)/2 + 24 + (25+26)/2 + 28 + 31 + 33 = 273.$
Далі, враховуючи, що вибірки великого обсягу:

$$n = 16 > 6,\ m = 18 > 6,\ n + m = 34 > 20,$$

як $W_{\alpha;n;m}$ можна розглядати

$$\frac{1}{2}n(n+m+1) + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{12}nm(n+m+1)},$$

де z_α — α-квантиль нормального розподілу з параметрами (0;1).

За таблицею нормального розподілу (див. табл. 22.1.1) знаходимо $z_\alpha = z_{0{,}025} = -1{,}96$. Таким чином,

$$W_{\alpha;n;m} = W_{0{,}025;16;18} = \frac{1}{2}16(16+18+1) -$$

$$-1{,}96\sqrt{\frac{1}{12}16\cdot 18(16+18+1)} = 223{,}2;$$

$$n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m} =$$

$$= 16(16+18+1) - W_{0{,}025;16;18} = 336{,}8.$$

Для суми рангів $W = 273$ маємо

$$W_{\alpha;n;m} = W_{0{,}025;16;18} = 223{,}2 < 273 < 336{,}8 =$$

$$= 16\cdot 35 - W_{0{,}025;16;18} = n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}.$$

Тому згідно з критерієм Вілкоксона гіпотеза H_0: $\theta = 0$ не відхиляється. Вона не суперечить результатам експерименту. (Сума рангів $W = 273$ природна (типова) для вибірок обсягу $n = 16$ і $m = 18$ з одного й того самого розподілу.)

Отже, експериментальні дані не дають підстав стверджувати, що плитки з різною концентрацією наповнювача відрізняються стійкістю на стирання.

19.4 Задачі

АЗ: 19.7, 19.11, 19.12.
СЗ: 19.1, 19.13, 19.30.

19.1 (анкетування “Викладач очима студентів” — ефект екзаменаційної оцінки). Питання про неупередженість оцінювання якостей, величин, параметрів і т. ін. досить цікаве. При цьому упередженість в оцінюванні спостерігається частіше, ніж неупередженість. У задачах 18.12, 18.17 описано прості експерименти, які ілюструють той факт, що при оцінюванні величин (і навіть при знятті показів приладу) типовішою є упередженість, ніж неупередженість (остання швидше виняток, аніж правило).

У деяких ситуаціях причини упередженості можна пояснити, інколи ж вони абсолютно загадкові й незрозумілі (див., наприклад, задачу 18.17, де наведено приклад явного упередження при зчитуванні цифр з круга, що обертається з великою швидкістю).

Під час оброблення результатів анкетування “Викладач очима студентів”, як і під час будь-якого іншого оцінювання, виникають питання: 1) про неупередженість оцінювання (яку скоріш за все не варто очікувати) і 2) про причини упередженості (у цьому оцінюванні здебільшого цілком зрозумілі).

Досліджуючи можливі причини упередженого оцінювання, розглянемо:

1) ефект екзаменаційної оцінки (задача 19.2);

2) ефект екзамену (задача 19.20);

3) ефект практичного заняття — залежність оцінки викладача студентами від того, чи проводить викладач у групі (паралельно з читанням лекцій) практичні заняття (задача 19.5).

Можна дослідити й інші фактори як можливі причини упередженого оцінювання.

Ефект екзаменаційної оцінки. Ще до початку анкетування висловлювалася думка, що оцінка характеристик викладача студентами не може бути неупередженою. Як на причину упередженого оцінювання вказувалося на те, що студенту на екзамені викладач виставляє оцінку, і тому, оцінюючи викладача, студент свідомо чи підсвідомо враховує результат екзамену — отриману оцінку, особливо якщо вона незадовільна.

У зв’язку з висунутою гіпотезою про існування ефекту екзаменаційної оцінки виникає запитання: чи узгоджується вона з експериментом (результатами анкетування)?

У табл. 19.4.1 (стовпці 1 і 2) наведено результати анкетування у студентських групах: стовпець 1 — у групі ПМ-84-4, стовпець 2 — у групі ПМ-84-1 (ПМ — прикладна математика). При цьому обидві студентські групи перебували в однакових умовах щодо викладача: в обох групах протягом року він читав лекції, проводив практичні та лабораторні заняття, приймав заліки, екзамени. Проте результати екзамену в цих групах помітно відрізняються кількістю отриманих двійок (див. табл. 19.4.2 і примітку 1).

Сформулювати задачу про ефект екзаменаційної оцінки як задачу перевірки статистичних гіпотез і розв’язати її:

вибрати основну гіпотезу й альтернативні (що означає відхилення основної гіпотези? її невідхилення?);

запропонувати рівень значущості та критерій для перевірки основної гіпотези;

перевірити основну гіпотезу;

дати частотну інтерпретацію отриманих результатів.

Таблиця 19.4.1. Оцінювання студентами характеристик викладача

Характеристика викладача	Оцінка					
	1	2	3	4	5	6
Викладає ясно й дохідливо	8,4	7,3	7,9	7,9	7,1	8,1
Роз'яснює складні місця	8,3	7,3	8,5	8,0	7,5	8,3
Виділяє головні моменти	8,5	7,5	8,5	8,4	7,8	8,5
Уміє викликати інтерес аудиторії до предмета	8,6	6,4	7,9	8,7	5,8	7,2
Стежить за реакцією аудиторії	8,4	8,3	7,9	7,3	6,1	7,6
Ставить запитання, спонукає до дискусії	8,2	5,5	7,2	6,0	4,7	6,7
Дотримується логічної послідовності викладу	8,5	7,7	8,9	8,6	8,4	8,8
Демонструє культуру мови, чіткість дикції, нормальний темп викладання	7,0	3,9	6,5	6,4	5,5	6,5
Уміє зняти напруження	8,1	5,6	7,1	5,8	5,1	6,5
Орієнтує на використання матеріалу в майбутній діяльності	6,9	6,1	7,9	5,1	3,9	6,5
Творчий підхід та інтерес до своєї справи	8,5	7,2	7,9	7,9	7,1	8,1
Доброзичливість і такт у ставленні до студентів	8,0	6,6	7,9	8,1	7,7	7,9
Терпіння	8,2	5,8	8,5	8,0	7,1	8,3
Вимогливість	8,8	8,3	8,9	8,7	8,8	8,8
Зацікавленість в успіхах студентів	8,4	6,4	8,0	7,7	7,2	7,8
Об'єктивність в оцінюванні знань студентів	8,7	6,2	7,4	7,7	7,3	7,5
Шанобливе ставлення до студентів	8,6	6,5	8,5	8,3	7,9	8,4
Приваблює високою ерудицією, манерою поведінки	8,8	6,5	7,9	8,4	8,1	8,2

Примітка 1. У табл. 19.4.1 наведено результати оцінювання автора цього підручника як викладача студента-

ми груп ПМ-84-4, ПМ-84-1, ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4, а саме: оцінки у балах характеристик викладача — середнє у групі або у кількох групах (максимально можлива оцінка характеристики — 9 балів):

стовпець 1 — у групі ПМ-84-4 на екзамені шість студентів отримали незадовільні оцінки (четверо з них відмовилися відповідати після ознайомлення зі змістом екзаменаційного білета, тобто фактично самі оцінили свої знання як незадовільні (див. табл. 19.4.2));

стовпець 2 — у групі ПМ-84-1 на екзамені дев'ять студентів отримали незадовільні оцінки (див. табл. 19.4.2);

стовпець 3 — у групах ПМ-85-1, ПМ-85-2, де лектор проводив також практичні заняття;

стовпець 4 — у групах ПМ-85-3, ПМ-85-4, де лектор не проводив практичних занять (їх проводив інший викладач);

стовпець 5 — у групах ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4 (анкетування проведено до екзамену);

стовпець 6 — у групах ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4 (анкетування проведено після екзамену).

Анкета наводиться в оригінальному вигляді.

Таблиця 19.4.2. Результати екзамену

Оцінка на екзамені	Кількість оцінок у групах			
	ПМ-84-4	ПМ-84-1	ПМ-85-1 ПМ-85-2	ПМ-85-3 ПМ-85-4
Відмінно	1	4	3	4
Добре	7	2	10	6
Задовільно	4	6	7	6
Незадовільно	6	9	11	15

Примітка 2. У табл. 19.4.2 наведено результати першого складання екзамену: йдеться про екзамени з курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика" на факультеті прикладної математики Дніпропетровського державного університету під час зимових сесій 1986/87 і 1987/88 навчальних років.

19.2. Стохастичний експеримент полягає у послідовному підкиданні симетричного грального кубика тричі й реєстрації результатів у такий спосіб: появу 1 або 2 очок позначаємо нулем, 3 або 4 — одиницею, 5 або 6 — двійкою. Якщо, наприклад, результат експерименту: випало 3, 5, 1 очок, то це реєструється як 120, якщо результат: випало 6, 1, 4 очок, то це реєструється як 201 і т. д.

Разом із цими послідовностями з нулів, одиниць і двійок розглянемо числа з проміжку [0;1], які у трійковій системі числення записуються так: 0,120; 0,201; ... Таким чином, 0,120 — це запис у трійковій системі числа

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 0 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{5}{9},$$

а 0,201 — числа

$$2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3^2} + 1 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{19}{27}.$$

Експеримент проводиться вісім разів.

Чи можна вважати, що добуті у такий спосіб вісім чисел є реалізацією вибірки обсягом 8 із рівномірного на проміжку [0;1] розподілу?

Дати відповідь на це питання у термінах перевірки статистичних гіпотез, скористатися критерієм Колмогорова.

19.3. Реєструються інтервали між послідовними імпульсами вздовж нервового волокна у індивідуумів A і B (одиниця вимірювання — 1/50 с). Вони виявилися такими.

Індивідуум A: 2,5; 2,0; 7,0; 4,0; 10,5; 1,0; 31,5; 17,5; 0,5; 19,5; 21,5; 1,5; 19,5; 2,0; 8,5; 11,5; 39,0; 7,0; 4,0; 5,5; 3,5; 22,5; 23,0; 10,0; 9,5; 25,5; 4,5; 11,0; 14,5; 0,5.

Індивідуум B: 9,5; 3,0; 19,5; 4,0; 1,5; 14,0; 4,5; 8,5; 22,5; 20,0; 3,5; 15,0; 8,0; 12,0; 40,5; 67,5; 0,5; 1,0; 1,5; 3,0; 6,0; 16,5; 32,5; 4,0; 7,5; 34,0; 15,0; 3,0.

Чи свідчать ці дані про відмінності в інтервалах між імпульсами в індивідуумів A і B?

19.4. За допомогою таблиці випадкових чисел (див. табл. 22.10.1) можна добути (змоделювати) реалізацію вибірки з рівномірного на проміжку [0;1] розподілу описаним нижче способом (до речі, за вибіркою з рівномірного на проміжку [0;1] розподілу можна побудувати вибірку з будь-якого заданого розподілу F, що має монотонно зростаючу неперервну функцію розподілу $F(x)$ (див. приклад 19.1.1).

Виберемо з таблиці випадкових чисел послідовність n чисел. Нехай, наприклад, $n = 10$. Вибір чисел з таблиці можна починати з будь-якого її місця будь-яким наперед обумовленим способом. Починаючи, скажімо, з лівого верхнього кута таблиці й рухаючись донизу (для визначеності вибиратимемо чотиризначні числа), отримаємо 1009, 3754, 0842, 9901, 1280, 6606, 3106, 8526, 6357, 7379.

Далі розглянемо числа із проміжку [0;1], які визначаються вибраними вище випадковими числами: 0,1009; 0,3754; 0,0842; 0,9901; 0,1280; 0,6606; 0,3106; 0,8526; 0,6357; 0,7379.

Добуту послідовність чисел можна вважати реалізацією вибірки з рівномірного на проміжку [0;1] розподілу. Переконайтеся у цьому, скориставшись критерієм Колмогорова.

19.5 (анкетування "Викладач очима студентів" — ефект практичного заняття). При оцінюванні студентами викладача висувається припущення про наявність ефекту практичного заняття: якщо в групі паралельно з читанням лекцій викладач проводить практичні (лабораторні) заняття, то оцінка його студентами вища.

У табл. 19.4.1 наведено оцінки характеристик викладача студентами: стовпець 3 — у групах ПМ-85-1 і ПМ-85-2, де викладач читав лекції і проводив практичні та лабораторні заняття, та стовпець 4 — у групах ПМ-85-3 і ПМ-85-4, де практичні та лабораторні заняття проводив інший викладач (анкетування проведено після екзамену).

Перевірити, чи насправді існує ефект практичного (лабораторного) заняття.

Сформулювати задачу про наявність ефекту практичного (лабораторного) заняття як задачу перевірки статистичних гіпотез і розв'язати її (виберіть 5% рівень значущості, докладніше див. задачу 19.1).

19.6. Розв'язати задачу 17.8, скориставшись критерієм Вілкоксона.

19.7. Шийки робочої частини свердел обробляються на шліфувальному верстаті. Номінальний діаметр шийки становить 9,8 мм з технічним допуском 0,05 мм.

Вимірювання робочої частини шийки 20 свердел дали такі результати (у міліметрах): 9,76; 9,77; 9,83; 9,79; 9,80; 9,81; 9,79; 9,75; 9,80; 9,78; 9,75; 9,81; 9,82; 9,76; 9,78; 9,77; 9,81; 9,79; 9,77; 9,79.

Чи можна вважати, що номінальний діаметр шийки свердла дорівнює 9,8 мм з технічним допуском 0,05 мм за норми відходу 1 %, іншими словами, що діаметр шийки не виходить за межі від 9,75 до 9,85 мм з імовірністю 0,99?

Сформулювати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез. Скористатися критерієм Колмогорова.

19.8 (вплив роботи метронома на плавність мови). У таблиці наведено результати експерименту, в якому вивчався вплив роботи метронома на мову людей, що страждають на заїкання.

Обстежували 12 осіб із тяжкою формою захворювання. Кожна особа імпровізувала трихвилинну промову за умов N, R, A:

N — говорити без метронома;

R — говорити за регулярної (ритмічної) роботи метронома (120 ударів за хвилину), причому особу заздалегідь проінструктували про необхідність промовляти один склад слова на кожний удар метронома;

A — говорити за неритмічної роботи метронома (120 ударів за хвилину, інтервали між ударами випадкові: від 0,3 до 0,7 с). За умови A, як і за умови R, особа мала промовляти один склад на кожен удар метронома.

Учасник досліду	Кількість заїкань за умови			Учасник досліду	Кількість заїкань за умови		
	N	R	A		N	R	A
1	15	3	5	7	10	0	2
2	11	3	3	8	8	0	3
3	18	1	3	9	13	0	2
4	21	5	4	10	4	1	0
5	6	2	2	11	11	2	4
6	17	0	2	12	17	2	1

Наведені дані свідчать про те, що робота метронома (як ритмічна, так і неритмічна) зменшує кількість заїкань. А чи існують відмінності у впливі на заїкання метрономів, які працюють ритмічно й неритмічно?

19.9. Проби чистого заліза, отриманого за методами A і B, мали такі точки плавлення (у градусах Цельсія).

Метод A: 1439, 1519, 1518, 1512, 1514, 1489, 1508, 1503.

Метод B: 1509, 1494, 1512, 1483, 1507, 1491.

Чи різняться точки плавлення заліза, добутого різними методами?

19.10 (випадково і довільно). Випадково — не означає довільно. Випадковість підпорядковується своїм строгим законам (див. задачі 18.12, 18.17, 18.20). Скажімо, виписати випадкову послідовність чисел не так просто, як здається на перший погляд.

Перевірте свої здібності: випишіть 50 випадкових, на ваш погляд, чисел з відрізка [0;1] (для визначеності — з чотирма знаками після коми). Якщо запропоновані числа справді випадкові, то вони мають бути рівномірно розподілені на проміжку [0;1].

Скориставшись критерієм Колмогорова, з'ясуйте, чи можна запропоновану послідовність чисел вважати випадковою.

П р и м і т к а. Виписуючи випадкову послідовність чисел з проміжку [0;1], не переглядайте і не використовуйте якимось іншим способом уже виписану частину послідовності.

19.11. Астрономи A і B вимірювали в мінутах великий діаметр найяскравіших галактик. Кожний виміряв діаметри 18 галактик. Результати вимірювань наведено в таблиці.

Номер галактики	Астроном A	Астроном B	Номер галактики	Астроном A	Астроном B
224	2,3	2,4	441	1,1	1,1
272	1,5	1,5	557	5,5	5,6
313	1,5	1,3	563	2,0	2,1
354	4,5	4,1	773	1,7	1,7
377	3,5	4,5	604	1,9	2,2
391	1,5	1,3	638	1,4	1,3
407	1,0	1,2	796	2,3	2,8
427	3,0	2,0	805	2,3	2,6
436	1,2	1,1	808	0,8	1,0

Чи вказують ці дані на істотну різницю результатів вимірювань?

19.12. Для дослідження стійкості на стирання епоксидної пластмаси виготовили дві партії плиток із використанням як наповнювача залізних і мідних ошурок. Виготовили по 27 зразків плиток із кожним наповнювачем. Потім кожну плитку приводили у зворотно-поступальний рух по абразивному матеріалу (10 000 циклів для кожної плитки). Вимірювали різницю товщини плиток у дюймах (1 дюйм = 0,0254 м.) до і після випробувань; точність вимірювань становила 10^{-4} дюйма. Отримано такі результати.

Залізні ошурки: 3,6; 1,6; 2,3; 3,8; 1,0; 2,5; 2,9; 1,6; 2,4; 2,1; 1,1; 1,7; 2,6; 1,1; 1,0; 1,6; 0,9; 1,4; 2,3; 1,1; 1,8; 2,6; 1,2; 2,0; 2,1; 0,7; 2,4.

Мідні ошурки: 2,8; 1,5; 2,4; 2,6; 1,1; 2,1; 1,9; 1,4; 2,0; 2,1; 1,0; 1,5; 1,0; 1,6; 1,5; 1,2; 1,7; 2,6; 1,3; 2,6; 2,9; 1,5; 3,3; 2,8; 1,2; 2,7; 1,8.

Чи вказують ці дані на істотну відмінність стійкості на стирання зразків епоксидних пластмас, виготовлених з різними наповнювачами?

19.13 (момент останнього зрівняння). Експеримент полягає у послідовному підкиданні монети $2n = 40$ разів і реєстрації моменту (номера випробування), коли востаннє кількість гербів і решок, які випали, була однаковою. Казатимемо: спостерігається момент останнього зрівняння кількості гербів і решок. В експерименті цими моментами можуть бути $0, 2, 4, \ldots, 40$.

Щодо розподілу моменту останнього зрівняння висувається гіпотеза H_0: момент $2k$ останнього зрівняння має розподіл арксинуса; докладніше, H_0: випадкова величина $2k/2n = k/n$ має своєю функцією розподілу

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Провести експеримент п'ять разів, фіксуючи момент останнього зрівняння кількості гербів і решок.

Чи можна на підставі отриманих даних вважати, що момент останнього зрівняння має розподіл арксинуса?

Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез. Скористатися критерієм Колмогорова.

З а у в а ж е н н я 1. Експеримент зручно проводити так. Підкидаємо монету і випадання герба позначаємо через $+1$, а решки — через -1. Після 40 підкидань матимемо послідовність, утворену з чисел $+1$ і -1. Послідовно додаючи члени цієї послідовності, починаючи з першого, зафіксуємо момент, коли сума дорівнюватиме нулю — це буде момент другого зрівняння (момент першого зрівняння дорівнює нулю); і так продовжуватимемо доти, доки знайдемо значення моменту останнього зрівняння (див. також задачу 19.22).

З а у в а ж е н н я 2. Нижче наведено значення функції розподілу арксинуса $A(x)$ у точках $0{,}05{\cdot}i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

x	$A(x)$	x	$A(x)$
0,00	0,000	0,30	0,369
0,05	0,144	0,35	0,403
0,10	0,205	0,40	0,436
0,15	0,253	0,45	0,468
0,20	0,295	0,50	0,500
0,25	0,333		

Для обчислення значень $A(x)$, коли $0{,}5 < x < 1{,}0$, можна скористатися співвідношенням

$$A(x) = 1 - A(1 - x).$$

19.14. Під час випробувань на стирання люмінесцентної фарби типів А-102 і А-108 вимірювали втрату маси (у грамах) через певний інтервал часу, причому відомо, що стійкість на стирання фарби А-108 не менша, ніж фарби А-102. Фарбу кожного з двох типів наносили на вісім панелей. Отримали такі результати:

Втрата маси		Втрата маси	
А-102	А-108	А-102	А-108
17	19	33	35
10	17	20	25
19	16	22	23
17	12	28	21

Чи можна на підставі цих даних вважати, що фарби істотно різняться за ступенем стирання?

19.15. Із великої групи робітників, які працюють на складальному конвеєрі, навмання вибирають двох і кілька разів хронометрують тривалість складання ними певного виробу (у хвилинах). Отримано такі результати.

Перший робітник: 19,4; 21,1; 16,2; 21,2; 21,6; 17,8; 19,6.

Другий робітник: 19,9; 15,7; 15,2; 19,8; 18,9; 16,1; 16,2; 18,5; 17,3; 20,4.

Чи істотна різниця у часі складання виробу цими робітниками?

19.16 (покази механічних годинників). Механічні годинники, виставлені у вітринах годинникових магазинів, через деякий час зупиняються. Момент зупинки годинника — випадкова величина. Природно припустити, що покази годинників розподілені рівномірно на інтервалі [0;12]. Спостереження 20 годинників дали таку вибірку: 10 год 57 хв, 3 год 28 хв, 5 год 18 хв, 1 год 32 хв, 3 год 21 хв, 4 год 13 хв, 4 год 06 хв, 10 год 10 хв, 6 год 48 хв, 2 год 51 хв, 0 год 44 хв, 3 год 57 хв, 4 год 16 хв, 4 год 58 хв, 7 год 47 хв, 11 год 04 хв, 7 год 54 хв, 10 год 30 хв, 11 год 06 хв, 11 год 52 хв.

Чи узгоджується з цими даними гіпотеза про рівномірний розподіл на інтервалі [0;12] показів годинників?

19.17. Середній обсяг стоку води в річці (у кубічних футах за секунду, 1 фут = 0,3048 м) фіксується щомісяця протягом двох років (позначимо їх I і II). Порівнюючи стік за відповідні місяці (стік підпорядковується річним циклам), можна дійти висновку щодо відсутності (або наявності) змін обсягу стоку води за різні роки.

Місяць	Рік I	Рік II	Місяць	Рік I	Рік II
Січень	14,1	14,2	Липень	92,8	88,1
Лютий	12,2	10,5	Серпень	74,4	80,0
Березень	104,0	123,0	Вересень	75,4	75,6
Квітень	220,0	190,0	Жовтень	51,7	48,8
Травень	110,0	138,0	Листопад	29,3	27,1
Червень	86,0	98,1	Грудень	16,0	15,7

Перевірити нульову гіпотезу про відсутність систематичних змін обсягу стоку за вказані роки.

19.18. Реєстрували інтервали безвідмовної роботи (у годинах) кондиціонерного обладнання на двох літаках "Боїнг-720". Отримано такі результати.

Літак I: 74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21, 386, 59, 22, 153, 26, 326.

Літак II: 55, 320, 56, 104, 220, 239, 47, 246, 176, 182, 33, 15, 104, 35.

Чи можна вважати, що час безвідмовної роботи кондиціонерів на цих літаках однаковий?

19.19. Отримали 10 чисел способом, описаним у задачі 15.37.

Чи можна вважати, що добуті в такий спосіб 10 чисел є реалізацією вибірки з рівномірного на проміжку [0;1] розподілу?

Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез, скориставшись критерієм Колмогорова.

19.20 (анкетування "Викладач очима студентів" — ефект екзамену). Анкетування "Викладач очима студентів" має проводитися після екзамену, але в групах ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4 його помилково провели до екзамену (результати анкетування у стовпці 5 табл. 19.4.1). Потім анкетування провели і після екзамену (стовпець 6 табл. 19.4.1). Ця помилка дала можливість поставити задачу про наявність ефекту екзамену (а може, це ефект ще якогось іншого фактора?): чи істотно впливає на оцінювання викладача студентами проведення екзамену? У зв'язку з цією гіпотезою з'ясувати, чи узгоджується вона з даними анкетування. Ідеться про екзамен з річного курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика" (результати екзамену наведено в табл. 19.4.2).

Сформулювати задачу про існування ефекту екзамену при оцінюванні викладача як задачу перевірки статистичних гіпотез і розв'язати її (докладніше див. задачу 19.1).

П р и м і т к а. Ефект екзамену виявився досить несподіваним: незважаючи на високу вимогливість викладача (див. табл. 19.4.2, а також рядок "Вимогливість" у табл. 19.4.1), дані анкетування після екзамену помітно вищі, ніж до екзамену (див. стовпці 5 і 6 табл. 19.4.1).

19.21. Для виготовлення корду з однаковими номінальними даними два заводи (A і B) використовують різні виробничі процеси. Проведено по 20 випробувань продукції кожного заводу на розрив. Котушку корду для випробувань і місце розриву на ній вибирали навмання.

Наведені дані є відхиленнями міцності від 21,5 фунта (1 фунт = 453,6 г). Одиниця вимірювання становить 0,1 фунта.

Завод A: -1; -5; 1; 10; 2; -3; 6; 10; -1; 4; -8; -1; -10; -9; -2; -2; -8; 1; 2; 5.

Завод B: 10; 8; 9; 12; 0; 8; 5; 9; -1; -1; 7; 16; -5; 1; 10; 9; -5; 6; 6; 15.

Чи істотно різниться корд, виготовлений на заводах A і B?

19.22 (час перебування на "додатному" боці). Експеримент полягає в послідовному підкиданні монети $2n = 40$ разів (одне підкидання за одиницю часу). Появу герба позначатимемо через $+1$, а появу решки — через -1. Таким чином, на k-му кроці, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, з'являється символ ε_k, що дорівнює $+1$ або -1 залежно від того, яким боком лягла монета. Нехай

$$s_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k, \ s_0 = 0, \ k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

тобто s_k — різниця між кількістю "плюсів" і "мінусів" (між кількістю гербів і решок). Якщо скористатися геометричною термінологією і системою координат (t, x), то результат експерименту можна подати у вигляді ламаної з вершинами у точках (k, s_k), $k = 1, 2, \ldots, 2n$ (рис. 19.4.1).

Підрахуємо час, коли монета знаходилася на "додатному" боці, тобто коли різниця між кількістю гербів і решок була додатною. Наприклад, якщо перші 10 підкидань монети дають результат $+1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, -1$ (див. також рис. 19.4.1), то час перебування монети на додатному боці становить 4 одиниці.

Нехай $2k$ — кількість одиниць часу (з $2n$ одиниць), коли монета перебувала на додатному боці. Щодо часу перебування на додатному боці висувається гіпотеза H_0: час перебування на додатному боці має розподіл арксинуса, тобто випадкова величина $2k/2n = k/n$ має своєю функцією розподілу

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Провести експеримент п'ять разів, фіксуючи час перебування монети на додатному боці.

Чи можна на підставі отриманих даних вважати, що час перебування монети на додатному боці має розподіл арксинуса?

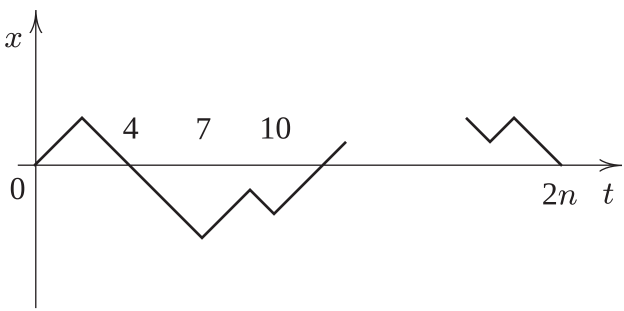

Рис. 19.4.1: Результат експерименту — ламана з вершинами в точках (k, s_k), $k = 0, 1, \ldots, 2n$

Відповідь дати у термінах перевірки статистичних гіпотез, скористайтесь критерієм Колмогорова і зауваженням 1 до задачі 19.13.

19.23. Для порівняння ефективності двох методів викладання математики сформували дві групи учнів (A і B) одного рівня підготовки, у кожній з яких математику вивчали із застосуванням свого методу. Після закінчення навчального року кожному учневі був запропонований тест. Результати тесту (у балах) виявилися такими.

Група A: 94, 92, 90, 86, 86, 84, 82, 90.

Група B: 90, 86, 84, 82, 80, 82, 78.

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку, що оцінки, отримані у групах A і B, істотно різняться?

19.24. Прилади типів A і B для вимірювання кількості опадів розміщені навмання на деякій ділянці. За певний інтервал часу над контрольованою областю пройшло 14 ураганів. Середню кількість опадів, виміряних за допомогою приладів A і B, наведено у таблиці.

Ураган	Прилад типу		Ураган	Прилад типу	
	A	B		A	B
1	1,38	1,42	8	2,63	2,69
2	9,69	10,37	9	2,44	2,68
3	0,39	0,36	10	0,56	0,53
4	1,42	1,46	11	0,69	0,72
5	0,54	0,55	12	0,72	0,72
6	6,94	6,15	13	0,95	0,93
7	0,59	0,61	14	0,50	0,53

Чи можна вважати, що прилади A і B дають однакові результати?

19.25. У таблиці наведено значення об'єму булок (у мілілітрах), випечених зі 100-грамових порцій тіста, виготовленого з 12 різних сортів борошна, що містило 1 і 2 мг бромистого калію (KBr).

Сорт борошна	Об'єм булки, мл		Сорт борошна	Об'єм булки, мл	
	Вміст KBr 1 мг	Вміст KBr 2 мг		Вміст KBr 1 мг	Вміст KBr 2 мг
1	1075	1055	7	900	905
2	980	955	8	860	870
3	850	820	9	940	1000
4	815	765	10	1000	1015
5	1040	1065	11	935	965
6	960	985	12	835	870

Чи свідчать наведені дані про вплив вмісту бромистого калію на об'єм булок?

Відповідь дати у термінах перевірки статистичних гіпотез.

19.26. Провести серію з 10 експериментів, кожний з яких полягає в підкиданні 16 монет і реєстрації кількості s_i гербів, що випали (i — номер експерименту, $i = 1, 2, \ldots, 10$). Розглянути послідовність чисел

$$\xi_i = \frac{s_i - 8}{2}, \;\; i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Чи можна вважати, що $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10}$ є вибіркою зі стандартного нормального розподілу?

З яких міркувань висунуто сформульовану гіпотезу?

Примітка. Експеримент, що полягає у підкиданні 16 монет, зручно здійснити, наприклад, так: помістити в коробку всі 16 монет, а потім, струснувши її кілька разів, підрахувати кількість гербів, що випали.

19.27 (катастрофи на вугільних шахтах). У таблицях наведено інтервали у днях між катастрофами (катастрофа спричиняє смерть 10 і більше чоловік) на вугільних шахтах Великобританії з 1875 по 1951 р. (дані В. Мег'ю, К. Пірсона, А. Вінна, їх слід читати за рядками).

Інтервали між катастрофами з 1875 по 1900 р.

378	36	15	31	215	11	137	4
15	72	96	124	50	120	203	176
55	93	59	315	59	61	1	13
189	345	20	81	286	114	108	188
233	28	22	61	78	99	326	275
54	217	113	32	23	151	361	312
354	58	275	78	17	1205	644	

Інтервали між катастрофами з 1901 по 1951 р.

467	871	48	123	457	498	49	131
182	255	195	224	566	390	72	228
271	208	517	1613	54	326	1312	348
745	217	120	275	20	66	291	4
369	338	336	19	329	330	312	171
145	75	364	37	19	156	47	129
1630	29	217	7	18	1357		

Чи свідчать ці дані про наявність істотних відмінностей між інтервалами часу від катастрофи до катастрофи за період з 1875 по 1900 р. і з 1901 по 1951 р.?

19.28. Стохастичний експеримент полягає у реєстрації суми цифрових частин номерів автомобілів, що проїздять повз вас (номер містить п'ять цифр). Для i-го автомобіля позначимо цю суму через s_i. Провести експеримент 20 разів і розглянути послідовність

$$\xi_i = \frac{s_i - 22{,}5}{6{,}43}, \; i = 1, 2, \ldots, 20.$$

Чи можна вважати, що послідовність $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{20}$ є вибіркою з нормального розподілу із середнім $a = 0$ і дисперсію $\sigma^2 = 1$? З яких міркувань стосовно розподілу випадкової величини ξ висунуто саме цю гіпотезу?

Відповідь дати у термінах перевірки статистичних гіпотез, скориставшись критерієм Колмогорова.

Примітка. Якщо номер автомобіля містить чотири цифри, то розглянемо послідовність

$$\xi_i = \frac{s_i - 18}{5{,}74}, \; i = 1, 2, \ldots, 20.$$

19.29. Проводилися випробування на тривалість експлуатації авіаційних пневматичних шин марок U та V на літаках, які базуються на авіаносцях. Для випробувань відібрали 10 літаків. Наведені в таблиці дані — це кількість посадок до руйнування шин.

Літак	Кількість посадок		Літак	Кількість посадок	
	Марка U	Марка V		Марка U	Марка V
1	5	5	6	7	24
2	55	14	7	14	38
3	5	24	8	32	41
4	32	27	9	10	32
5	56	24	10	8	24

Чи можна за результатами цих випробувань дійти висновку про наявність відмінностей у тривалості експлуатації шин марок U та V?

19.30. Парне число мишей розсадили навмання по одній у клітку. Потім клітки знову-таки навмання об'єднали у дві однакові за кількістю мишей групи. Миші першої групи (A) призначалися для контролю, а другої — піддослідної (B) зазнавали дії певного препарату. Після цього всі тварини у випадковій послідовності інфікувалися туберкульозом.

Зазначимо, що експериментатори, як правило, інфікують спочатку тварин контрольної групи, а потім — піддослідної, що абсолютно неправильно.

Дні загибелі мишей після інфікування виявилися такими (дані про одну з мишей були втрачені).

Група A: 5, 6, 6, 7, 8, 9, 11, 12.

Група B: 7, 7, 8, 8, 9, 10, 13, 14, 15.

У попередніх експериментах встановлено, що препарат, який використовували, не токсичний. Тому можна припустити, що миші у піддослідній групі гинуть не швидше, ніж у контрольній групі.

Чи свідчать наведені дані про наявність ефекту від препарату?

Вказівка. Перевірити гіпотезу H_0: препарат не впливає на перебіг туберкульозу. Скористатися критерієм Вілкоксона.

19.31 (мантиси логарифмів чисел $n!$). У таблиці наведено значення десяткових логарифмів чисел $n!$

n	$n!$	$\lg n!$
1	1	0,000000
2	2	0,301030
3	6	0,778151
4	24	1,380211
5	120	2,079181
6	720	2,857332
7	5040	3,702431
8	40320	4,605521
9	362880	5,559763
10	3628800	6,559763
11	39916800	7,601156
12	$47900160 \cdot 10$	8,680337
13	$62270208 \cdot 10^2$	9,794280
14	$87178291 \cdot 10^3$	10,940408
15	$13076744 \cdot 10^5$	12,116499
16	$20922790 \cdot 10^6$	13,320619

Чи можна вважати, що мантиси логарифмів чисел $n!$ рівномірно розподілені на проміжку $[0; 1]$?

19.32 (автомобільні номери). Випишіть цифрові частини номерів 20 автомобілів (номер містить п'ять цифр), що проїздять повз вас. Позначимо через a_i, b_i, c_i, d_i, e_i цифри, які зустрічаються у номері, коли його читати зліва направо.

Розглянемо послідовність чисел

$$\zeta_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i + 10^{-5}e_i,$$

де $i = 1, 2, \ldots, 20$.

Чи можна вважати, що послідовність ζ_i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 20$, є реалізацією вибірки з рівномірного на проміжку [0;1] розподілу?

Примітка. Якщо номер автомобіля містить чотири цифри, то розглянемо послідовність

$$\zeta_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i,$$

де $i = 1, 2, \ldots, 10$.

19.33 (електрошок і акомодація). При послідовному читанні вголос особами, що страждають на заїкання, одного й того самого тексту кілька разів поспіль число заїкань має тенденцію до зменшення. Електрошок як метод боротьби із заїканням претендує на прискорення цього процесу (акомодацію). Мета описаного нижче експерименту — відповісти на запитання: чи це так?

Вісімнадцять студентів, хворих на заїкання, які погодилися взяти участь в експерименті, читали вголос фрагмент тексту послідовно по п'ять разів (без дії електрошоку). Потім вони читали вголос п'ять разів інший фрагмент тексту і в момент заїкання зазнавали дії електрошоку.

У таблиці наведено отримані за спеціальною методикою оцінки акомодації у балах (дані Д. Дейлі та Е. Купера). Високий бал відповідає кращій акомодації.

Номер учасника	Бали		Номер учасника	Бали	
	без шоку	із шоком		без шоку	із шоком
1	57	51	10	50	50
2	59	56	11	44	56
3	41	44	12	50	46
4	51	44	13	70	74
5	43	50	14	42	57
6	49	54	15	68	74
7	48	50	16	54	48
8	56	40	17	38	48
9	44	50	18	48	44

Чи свідчать ці дані про те, що шок у момент заїкання впливає на акомодацію?

19.34. Токсичність двох препаратів (A і B) порівнювали на двох групах мишей (по 50 у кожній). Мишам першої групи ввели препарат A, а другої — таку саму дозу препарату B. Кількість мишей, що залишилися живими у кожній групі через певний час після введення препаратів, наведено в таблиці.

Час після введення препарату, год	Кількість живих мишей	
	після дії A	після дії B
1	29	35
3	21	23
8	16	16
16	12	13
24	10	10
48	9	8
72	7	8
96	6	7

Чи свідчать ці дані про різну токсичність препаратів A і B?

19.35. Шийки робочої частини свердел обробляються на шліфувальному верстаті. Номінальний діаметр шийки становить 9,8 мм з технічним допуском 0,04 мм.

Виміряли діаметри робочої частини шийки 16 свердел. Їхні значення (у міліметрах) виявилися такими: 9,76; 9,78; 9,81; 9,77; 9,75; 9,78; 9,75; 9,77; 9,74; 9,78; 9,77; 9,83; 9,78; 9,81; 9,79; 9,80.

Чи можна вважати, що номінальний діаметр шийки дорівнює 9,8 мм з технічним допуском 0,04 мм за норми відходу 5 %, тобто діаметр не виходить за межі: 9,76–9,84 мм з імовірністю 0,95?

В к а з і в к а 1. Сформулювати поставлену задачу як задачу перевірки статистичних гіпотез і скористатися критерієм Колмогорова.

В к а з і в к а 2. Розв'язати задачу в припущенні, що результати вимірювань є вибіркою з нормального розподілу (див. також розв'язання до задачі 19.7).

19.36. Вимірювали пористість конденсаторного паперу двох партій (з кожної партії рулони брали навмання). Результати вимірювань виявилися такими.

Партія I : 1,5; 1,5; 2,7; 3,0; 1,6; 1,9; 2,4; 1,6; 1,7; 2,0.

Партія II : 1,9; 2,3; 1,8; 1,9; 1,5; 2,4; 2,9; 3,5; 4,7.

Чи можна за цими даними дійти висновку, що пористість конденсаторного паперу в партіях I і II різна?

Глава 20

Лінійна регресія

20.1 Нормальна лінійна регресія

У математичній статистиці часто зустрічається така задача.

Припустимо, що величини y і x зв'язані функціональною залежністю

$$y = a + bx,$$

але коефіцієнти (параметри) a і b невідомі. (Залежність y від x може бути й складнішою, наприклад, вона може бути такою: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ або такою: $y = a\cos x + b\sin x + cx$, y може залежати від декількох змінних: $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_d x_d$.) Ми маємо можливість у даних цілком визначених точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ спостерігати значення ξ_i величини

$$y_i = a + bx_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

але не точно, а з деякою похибкою e_i, тобто фактично спостерігаємо

$$\xi_i = a + bx_i + e_i.$$

Похибки $e_i, i = 1, 2, \ldots, n$, невідомі, проте їх природно вважати незалежними (оскільки спостереження незалежні) нормально розподіленими випадковими величинами із середнім 0 і дисперсією σ^2 (невідомою нам).

За спостереженнями $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$, необхідно визначити (оцінити) невідомі параметри a, b, σ^2. (Зрозуміло, що коли значення $y_i = a + bx_i, i = 1, 2, \ldots, n$, спостерігаються з похибкою, то параметри a, b, σ^2 неминуче будуть визначатися з похибкою.)

У строгій математичній постановці цю задачу можна сформулювати так. Маємо послідовність незалежних нормально розподілених випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ відповідно з середніми $y_i = a + bx_i$ і дисперсією σ^2. Параметри невідомі, їх необхідно оцінити за $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Функцію

$$y = a + bx,$$

називатимемо простою нормальною лінійною регресією, коротко — лінійною регресією ("проста" означає залежність від однієї змінної, "нормальна" — спостереження нормально розподілені). Коли змінна y є функцією від x, то говоримо "регресія y на x", коли x є функцією від y, то говоримо "регресія x на y". Далі лінійну регресію буде зручно записувати у вигляді

$$y = \alpha + \beta(x - \bar{x}),$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — значення змінної x; α, β, σ^2 — невідомі параметри.

Для оцінювання невідомих параметрів скористаємося методом максимальної правдоподібності.

Позначимо

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \; S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \; S_1 = \sqrt{S_1^2},$$

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \; S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2, \; S_2 = \sqrt{S_2^2},$$

$$R_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(\xi_i - \overline{\xi}).$$

Теорема 20.1.1 (про оцінки максимальної правдоподібності параметрів $\boldsymbol{\alpha, \beta, \sigma^2}$). *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини із середніми*

$$M\xi_i = \alpha + \beta(x_i - \overline{x})$$

і дисперсією σ^2.

Оцінками максимальної правдоподібності параметрів α, β, σ^2 лінійної регресії

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$$

є

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi};\ \ \hat{\beta} = \frac{R_{12}}{S_1^2};\ \ \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i - \overline{x})))^2.$$

З а у в а ж е н н я. Оцінку $\hat{\sigma^2}$ можна подати у вигляді

$$\hat{\sigma^2} = S_2^2\left(1 - \frac{R_{1,2}^2}{S_1^2 S_2^2}\right).$$

Далі користуватимемося позначеннями $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma^2}}$.

Теорема 20.1.2 (про розподіл оцінок $\boldsymbol{\hat{\alpha}}$, $\boldsymbol{\hat{\beta}}$, $\boldsymbol{\hat{\sigma^2}}$). *Оцінки*

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi};\ \ \hat{\beta} = \frac{R_{12}}{S_1^2};\ \ \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i - \overline{x})))^2$$

максимальної правдоподібності параметрів α, β, σ^2 нормальної лінійної регресії

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$$

мають такі властивості:

1) $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma^2}$ *— незалежні у сукупності випадкові величини;*

2) $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ — *незсунені й спроможні оцінки відповідно* α *і* β, $\hat{\sigma^2}$ — *асимптотично незсунена і спроможна оцінка* σ^2*;*

3)

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\sigma^2}/(n-2)}} \sim t_{n-2}; \tag{20.1.1}$$

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\sigma^2}/(S_1^2(n-2))}} \sim t_{n-2}; \tag{20.1.2}$$

$$n\frac{\hat{\sigma^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}; \tag{20.1.3}$$

$$\frac{\left((\hat{\alpha}-\alpha)^2 + S_1^2(\hat{\beta}-\beta)^2\right)/2}{\hat{\sigma^2}/(n-2)} \sim F_{2;n-2}, \tag{20.1.4}$$

(знак $\sim$ замінює вираз “має розподіл”).

За відомими розподілами оцінок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma^2}$ (див. (20.1.1), (20.1.2), (20.1.3), (20.1.4)) можна побудувати критерії для перевірки гіпотез про параметри α, β, σ^2 і довірчі інтервали для цих параметрів.

Критерій для перевірки гіпотези $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\beta = \beta_0}$. *Якщо гіпотезу* $H_0 : \beta = \beta_0$ *відхиляти при*

$$\left|\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{\hat{\sigma}/(S_1\sqrt{n-2})}\right| > t_{\gamma;n-2} \tag{20.1.5}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2γ *гіпотеза* H_0 *буде відхилятися, коли вона справджується.*

Зокрема, гіпотеза H_0: $\beta = 0$ (гіпотеза про значущість лінії регресії) перевіряється за допомогою критерію: *якщо гіпотезу* $H_0 : \beta = 0$ *відхиляти при*

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}/(S_1\sqrt{n-2})}\right| > t_{\gamma;n-2} \tag{20.1.6}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2γ *гіпотеза* H_0 *буде відхилятися, коли вона справджується.*

Критерій для перевірки гіпотези H_0: $\alpha = \alpha_0$. *Якщо гіпотезу* H_0: $\alpha = \alpha_0$ *відхиляти при*

$$\left|\frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n-2}}\right| > t_{\gamma;n-2} \tag{20.1.7}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2γ *гіпотеза* H_0 *буде відхилятися, коли вона справджується.*

Зокрема, гіпотеза H_0: $\alpha = 0$ перевіряється за допомогою критерію: *якщо гіпотезу* H_0: $\alpha = 0$ *відхиляти при*

$$\left|\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}/\sqrt{n-2}}\right| > t_{\gamma;n-2} \tag{20.1.8}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю 2γ *гіпотеза* H_0 *буде відхилятися, коли вона справджується.*

Критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$. *Якщо гіпотезу* H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ *відхиляти при*

$$n\frac{\hat{\sigma^2}}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\gamma;n-2} \tag{20.1.9}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю γ *гіпотеза* H_0 *буде відхилятися, коли вона справджується (альтернатива одностороння:* $\sigma^2 > \sigma_0^2$*).*

Критерій для перевірки гіпотези H_0: $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$. *Якщо гіпотезу* H_0: $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ *відхиляти при*

$$\frac{\left((\hat{\alpha} - \alpha)^2 + S_1^2(\hat{\beta} - \beta)^2\right)/2}{\hat{\sigma^2}/(n-2)} > F_{\gamma;2;n-2} \tag{20.1.10}$$

і не відхиляти в супротивному разі, то з імовірністю γ *гіпотеза* H_0 *буде відхилятися, коли вона справджується (альтернатива:* $\alpha \neq \alpha_0$ *або* $\beta \neq \beta_0$*).*

Довірчі інтервали для параметрів простої нормальної лінійної регресії. Довірчі інтервали з коефіцієнтом надійності $1-2\gamma$ для параметрів α, β, σ^2 досить просто отримати з (20.1.1), (20.1.2), (20.1.3):

$$\hat{\alpha} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-2}} t_{\gamma;n-2} \le \alpha \le \hat{\alpha} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-2}} t_{\gamma;n-2}, \tag{20.1.11}$$

$$\hat{\beta} - \frac{\hat{\sigma}}{S_1\sqrt{n-2}} t_{\gamma;n-2} \le \beta \le \hat{\beta} + \frac{\hat{\sigma}}{S_1\sqrt{n-2}} t_{\gamma;n-2}, \tag{20.1.12}$$

$$\frac{n\hat{\sigma^2}}{\chi^2_{\gamma;n-2}} \le \sigma^2 \le \frac{n\hat{\sigma^2}}{\chi^2_{1-\gamma;n-2}}. \tag{20.1.13}$$

Довірчим інтервалом з коефіцієнтом надійності $1-2\gamma$ для значення $y_0 = \alpha + \beta(x_0 - \bar{x})$ лінії регресії

$$y = \alpha + \beta(x - \bar{x}),$$

у точці x_0 є

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_0 - \bar{x}) - t_{\gamma;n-2}\sqrt{\frac{1}{n-2}\hat{\sigma^2}\left(1 + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_1^2}\right)} \le$$

$$\le \alpha + \beta(x_0 - \bar{x}) \le$$

$$\le \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_0 - \bar{x}) + t_{\gamma;n-2}\sqrt{\frac{1}{n-2}\hat{\sigma^2}\left(1 + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_1^2}\right)} \tag{20.1.14}$$

Спільна довірча область для параметрів $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, довірча область для регресії. З (20.1.4) можна отримати довірчу область з коефіцієнтом надійності $1-\gamma$ для пари (α, β):

$$\frac{(\alpha - \hat{\alpha})^2}{2F_{\gamma;2;n-2}\ \hat{\sigma^2}/(n-2)} + \frac{(\beta - \hat{\beta})^2}{2F_{\gamma;2;n-2}\ \hat{\sigma^2}/(S_1^2(n-2))} \le 1. \tag{20.1.15}$$

Довірчою областю з коефіцієнтом надійності $1-\gamma$ для лінії регресії $y = \alpha + \beta(x - \bar{x})$ є

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x-\bar{x}) - \hat{\sigma}\sqrt{F_{\gamma;2;n-2}}\sqrt{\frac{1}{n-2}\left(1+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_1^2}\right)} \leq$$

$$\leq \alpha + \beta(x-\bar{x}) \leq$$

$$\leq \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x-\bar{x}) + \hat{\sigma}\sqrt{F_{\gamma;2;n-2}}\sqrt{\frac{1}{n-2}\left(1+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_1^2}\right)} \tag{20.1.16}$$

(з імовірністю $1-\gamma$ лінія регресії $y = \alpha + \beta(x - \bar{x})$ при всіх значеннях x лежить у зазначеній області).

Перевірка адекватності лінійної регресії. Якщо у точках $x_j, j = 1, 2, \ldots, k$, є повторні спостереження, то можна дати відповідь на питання: “Чи адекватно описує лінія регресії $y = \alpha + \beta(x - \bar{x})$ вихідні дані?”

Під повторними спостереженнями у точці x_j значення $y_j = f(x_j)$ розумітимемо незалежні нормально розподілені випадкові величини $\xi_{j,1}, \xi_{j,2}, \ldots, \xi_{j,n_j}$ — із середнім $y_j = f(x_j)$ і дисперсією σ^2:

$$M\xi_{j,\nu} = f(x_j),\ D\xi_{j,\nu} = \sigma^2,\ \nu = 1, 2, \ldots, n_j. \tag{20.1.17}$$

Всього є k точок x_j, у яких проводилися спостереження, тобто $j = 1, 2, \ldots, k$. Число (кількість) спостережень, як і раніше, позначатимемо через n, так що

$$n = \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

Виписуючи оцінки $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}, \hat{\sigma^2}$ відповідно параметрів α, β, σ^2 і значення $\overline{x}$, коли ми маємо повторні спостереження, зручно користуватися подвійними індексами не тільки для спостережень:

$$\xi_{j,\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n_j;\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

але і для точок x_j, у яких проводилися спостереження, а саме

$$x_{j,\nu} = x_j, \ \nu = 1, 2, \ldots, n_j, \ j = 1, 2, \ldots, k.$$

При цьому для $\overline{x}$, S_1^2, $\overline{\xi}$, S_2^2, R_{12} (див. теорему 20.1.1 про оцінки параметрів) ми отримаємо такі вирази:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} x_{j,\nu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_{j,\nu} - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_j - \overline{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j (x_j - \overline{x})^2;$$

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}\xi_{j,\nu}, \ S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi})^2;$$

$$R_{12} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_{j,\nu} - \overline{x})(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi}) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_j - \overline{x})(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi}).$$

Для дисперсії σ^2 спостережень (дисперсії випадкових величин $\xi_{j,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$) можна запропонувати оцінку

$$s_1^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi_j})^2,$$

де

$$\overline{\xi_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{n_j}\xi_{j,\nu},\ j=1,2,\ldots,k,\ n=\sum_{j=1}^{k}n_j.$$

Оцінка s_1^2 описує розсіювання спостережень $\xi_{j,\nu}$ незалежно від того, говоримо ми про регресію чи ні.

Оцінка

$$s_2^2 = \frac{1}{k-2}\sum_{j=1}^{k}n_j(\overline{\xi_j}-(\hat\alpha+\hat\beta(x_j-\overline{x}))^2$$

описує розсіювання спостережень $\xi_{j,\nu}$ відносно емпіричної лінії регресії

$$y=\hat\alpha+\hat\beta(x-\overline{x}).$$

Якщо мають місце припущення (20.1.17), і функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=\alpha+\beta(x-\overline{x}),$$

то відношення s_2^2/s_1^2 має $F_{k-2;n-k}$-розподіл. Тому для перевірки гіпотези

$$H_0 : M\xi_{j,\nu}=\alpha+\beta(x_j-\overline{x}),\ \nu=1,2,\ldots,n_j,\ j=1,2,\ldots,k$$

(гіпотези про адекватність описання лінійною регресією вихідних даних) маємо такий критерій.

Якщо гіпотезу H_0 про адекватність лінійної регресії відхиляти при

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} > F_{\gamma;k-2;n-k} \tag{20.1.18}$$

і не відхиляти у супротивному разі, то з імовірністю γ гіпотезу відхилятимемо, коли вона справджується.

Примітка. Якщо повторні спостереження відсутні, тобто $n_j=1,\ j=1,2,\ldots,k$, то

$$n=\sum_{j=1}^{k}n_j=k,\ \overline{\xi_j}=\xi_j,\ j=1,2,\ldots,k.$$

При цьому оцінку s_1^2 дисперсії σ^2 отримати неможливо і, як наслідок, неможливо отримати і критерій для перевірки адекватності лінійної регресії.

Перевірка адекватності теорії експериментові. Вимірюється величина, для якої відомо теоретично завбачені (обчислені) значення, позначатимемо їх через $x_1, x_2, \ldots, x_n$; фактичні значення величини, добуті у спостереженнях (у експерименті) позначатимемо через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Якщо при цьому

$$\xi_i = x_i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

тобто теоретичне значення x величини і значення ξ, що спостерігається, співпадають:

$$\xi = x,$$

то можна стверджувати, що теорія погоджується з експериментом. Але у вимірюваннях завжди присутня похибка, а отже, навіть коли теорія погоджується з експериментом, розходження

$$\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \ldots, \xi_n - x_n$$

неминучі. Виникає питання — чи можна при цьому з точністю до похибки вважати, що теорія погоджується з експериментом (спостереженнями)? Інакше кажучи, чи можна розходження $\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \ldots, \xi_n - x_n$ пояснити похибкою спостережень, чи вони свідчать про неадекватність теорії?

Один з можливих підходів такий. Припустимо, що завбачені теорією значення x величини та її значення, що спостерігаються y, зв'язані лінійною залежністю (за необхідності у цьому можна пересвідчитися, див. перевірку адекватності лінійної регресії)

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$$

($\overline{x} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ введено для зручності). В експерименті ми фактично спостерігаємо не величини

$$y_i = \alpha + \beta(x_i - \overline{x}), \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

а величини

$$\xi_i = \alpha + \beta(x_i - \overline{x}) + e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

де e_i — похибки спостережень (уникнути похибки у спостереженнях неможливо — спостережень без похибок не буває).

Відносно параметрів α, β висунемо гіпотези

$$1)\ H_{0;1} : \beta = 0;\ \ 2)\ H_{0;2} : \beta = 1;$$

$$3)\ H_{0;3} : \beta = \beta_0 = 1;\ \alpha = \alpha_0 = \overline{x},$$

перевірка яких дає можливість говорити про погодження чи непогодження теорії з експериментом.

1. Гіпотеза $H_{0;1} : \beta = 0$. Невідхилення гіпотези означає, що завбачений теорією ефект взагалі відсутній.

2. Гіпотеза $H_{0;2} : \beta = 1$. Невідхилення гіпотези свідчить на користь погодження теорії з експериментом, якщо при цьому $\alpha - \overline{x} \neq 0$, то присутня систематична похибка.

3. Гіпотеза $H_{0;3} : \beta = \beta_0 = 1;\ \alpha = \alpha_0 = \overline{x}$. Невідхилення гіпотези трактується як погодження теорії з експериментом.

Приклад 20.1.1 (експеримент Еддінгтона). *Розглянемо приклад перевірки адекватності теорії експериментові. Мова йде про перевірку загальної теорії відносності за відхиленням променя світла у полі тяжіння Сонця. Дані для статистичної обробки взяті зі збірника статей Альберта Ейнштейна “Физика и реальность” (М., 1965).*

Під керівництвом Еддінгтона було проведено такий експеримент. Нехай зірка лежить приблизно в площині земної орбіти (рис. 20.1.1). Тоді в момент, коли Земля знаходиться у положенні 1, зірку видно в деякому напрямі 1.

Через півроку Земля буде знаходиться у положенні 2, і якби промінь світла у полі тяжіння Сонця не відхилявся, то зірка з положення 2 Землі в напрямі 2 не спостерігалася б. Але зірка спостерігається з положення 2 в напрямі 2, вона немов би переміщується, і це переміщення можна обчислити. (Зрозуміло, що спостерігати зірку з положення 2 можна тільки в момент повного сонячного затемнення.)

Для спостереження було вибрано 7 зірок. Їхні видимі переміщення (вектори на небесній сфері, які у зв'язку з малістю можна вважати векторами на площині) розкладалися за двома осями координат. Знайдені результати (у кутових секундах) наведені в табл. 20.1.1, 20.1.2, *де* x_i — *координати вектора переміщення, обчислені згідно з загальною теорією відносності,* ξ_i — *координати вектора переміщення, що спостерігалися.*

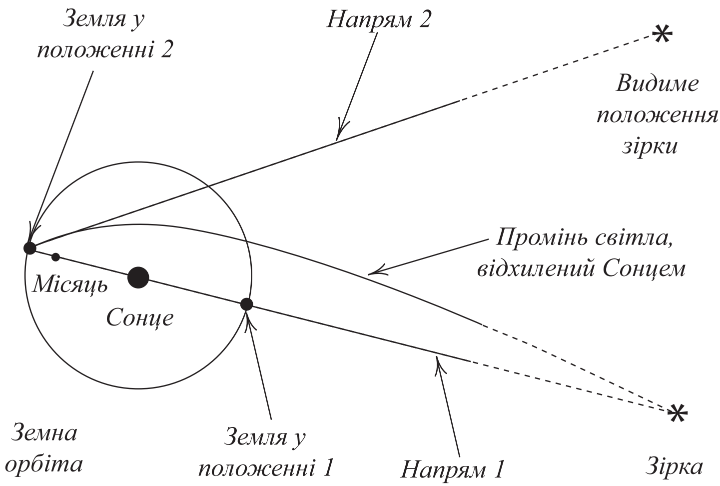

Рис. 20.1.1: Відхилення променя світла зірки в полі тяжіння Сонця

Чи узгоджуються обчислені значення координат вектора переміщення зірок із значеннями, що спостерігалися?

Таблиця 20.1.1. Перша координата

x_i	$-0,22$	$+0,31$	$+0,10$	$+0,12$	$+0,04$	$+0,09$	$+0,85$
ξ_i	$-0,19$	$+0,29$	$+0,11$	$+0,20$	$+0,10$	$-0,08$	$+0,95$

Таблиця 20.1.2. Друга координата

x_i	$+0,02$	$-0,43$	$+0,74$	$+0,87$	$+0,40$	$+0,32$	$-0,09$
ξ_i	$+0,16$	$-0,46$	$+0,83$	$+1,00$	$+0,57$	$+0,35$	$-0,27$

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо питання про погодження обчислених значень x_i координат із значеннями ξ_i, що спостерігалися для першої координати (див. табл. 20.1.1)

Припустимо, що обчислені (завбачені теорією) значення x координат і значення y, що спостерігаються, зв'язані лінійною залежністю

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

де

$$\overline{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 0,184.$$

За результатами спостережень (див. табл. 20.1.1) знайдемо оцінки невідомих параметрів α, β, σ^2 регресії:

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi} = 0{,}197;\ \hat{\beta} = 1{,}081,\ \hat{\sigma^2} = 0{,}006,\ S_1^2 = 0{,}0948$$

(див. теорему 20.1.1). Далі перевіримо гіпотези про параметри лінії регресії.

Спочатку перевіримо гіпотезу $H_{0;1} : \beta = 0$, невідхилення якої свідчитиме про відсутність зв'язку між теорією та експериментом.

Згідно з (20.1.6)

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}/(S_1\sqrt{n-2})}\right| =$$

$$= \left|\frac{1{,}081}{\sqrt{0{,}006/(0{,}0948 \cdot 5)}}\right| = 9{,}61 > t_{0{,}01;5} = 3{,}365.$$

Так що образлива для Ейнштейна гіпотеза про відсутність зв'язку теорії з експериментом відхиляється.

Перевіримо гіпотезу $H_{0;2} : \beta = \beta_0 = 1$.

Згідно з (20.1.5)

$$\left|\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\hat{\sigma}/(S_1\sqrt{n-2})}\right| =$$

$$= \left| \frac{1{,}081 - 1}{\sqrt{0{,}006/(0{,}0948 \cdot 5)}} \right| = 0{,}72 < t_{0,01;5} = 3{,}365,$$

тому гіпотеза $H_{0;2} : \beta = \beta_0 = 1$ не відхиляється. Останнє можна трактувати як погодження теорії з експериментом, але при цьому можлива систематична помилка (коли $\alpha \neq \overline{x}$).

Пересвідчитися у погодженні (чи непогодженні) теорії з експериментом можна перевіряючи гіпотезу $H_{0;3}$: $\beta = \beta_0 = 1,\ \alpha = \alpha_0 = \overline{x}$.

Згідно з (20.1.10)

$$\frac{((\hat{\alpha} - \alpha_0)^2 + S_1^2(\hat{\beta} - \beta_0)^2)/2}{\hat{\sigma^2}/(n-2)} =$$

$$= \frac{((0{,}197 - 0{,}184)^2 + 0{,}0948(1{,}081 - 1)^2)/2}{0{,}006/5} =$$

$$= 0{,}33 < F_{0,05;2;5} = 5{,}79.$$

Тому можна вважати, що $\beta = 1$, $\alpha = 0{,}184$, і залежність y від x має вигляд

$$y = x,$$

що свідчить на користь погодження теорії з експериментом.

Приклад 20.1.2 . *У книзі Д.І. Мєндєлєєва "Основи хімії" наведено дані про розчинність азотно-кислого натрію* $NaNO_3$ *залежно від температури води. У* 100 *частинах води розчиняється таке число умовних частин* $NaNO_3$ *при відповідних температурах*

x	ξ	x	ξ
0	66,7	29	92,9
4	71,0	36	99,4
10	76,3	51	113,6
15	80,6	68	125,1
21	85,7		

де x *— температура у градусах за Цельсієм,* ξ *— розчинність в умовних частинах на* 100 *частин води.*

Теоретичні міркування дають підстави вважати, що залежність кількості розчиненої речовини від температури є лінійною:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}).$$

Знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β *і дисперсії* σ^2. *Побудувати довірчі інтервали для* α, β, σ^2. *Перевірити гіпотезу* $H_0 : \beta = 0$ *про значущість регресії.*

Розв'язання.

$$\overline{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 26; \;\; \overline{\xi} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} \xi_i = 90{,}14,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = 451{,}11,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(\xi_i - \overline{\xi})^2 = 342{,}66,$$

$$R_{12} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})(\xi_i - \overline{\xi}) = 392{,}75.$$

Оцінки максимальної правдоподібності коефіцієнтів α, β простої лінійної регресії:

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi} = 90{,}14; \;\; \hat{\beta} = \frac{R_{12}}{S_1^2} = 0{,}87.$$

Оцінка максимальної правдоподібності дисперсії σ^2:

$$\hat{\sigma^2} = S_2^2\left(1 - \frac{R_{12}^2}{S_1^2 S_2^2}\right) = 0{,}72.$$

Рівняння емпіричної лінії регресії

$$y = 90{,}14 + 0{,}87(x - 26).$$

Перевіримо гіпотезу H_0: $\beta = 0$ про значущість регресії. Згідно з (20.1.6)

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}/\sqrt{S_1^2(n-2)}}\right| = \left|\frac{0{,}87}{\sqrt{0{,}7158/451{,}11(9-2)}}\right| =$$

$$= 57{,}83 > t_{0{,}05;7} = 1{,}895,$$

тому гіпотеза H_0: $\beta = 0$ відхиляється, лінійна регресія значуща.

Згідно з (20.1.11), (20.1.12), (20.1.13) довірчими інтервалами з коефіцієнтом надійності 0,90 для параметрів регресії є: (89,54; 90,75) — для α; (0,84; 0,90) — для параметра β; (0,46; 2,97) — для параметра σ^2.

20.2 Задачі

20.1. Досліджується вміст аскорбінової кислоти, що збереглася в овочах протягом їх сушіння та зберігання.

Далі наведено вміст сухої речовини у свіжому шпинаті та вміст аскорбінової кислоти, що збереглася, після сушіння шпинату при температурі 90^0C.

x	y	x	y	x	y
7,8	69,4	10,0	66,7	11,2	89,6
8,2	50,9	10,0	88,9	11,2	83,8
8,9	74,0	10,1	76,0	11,2	67,9
8,9	58,6	10,2	77,2	11,8	79,9
9,0	66,4	10,3	69,8	12,3	83,1
9,2	80,6	10,7	69,0	12,5	74,2
9,5	61,9	10,8	65,2	12,9	86,0
10,0	70,9	11,1	77,2	14,9	88,2

x — вміст сухої речовини у свіжому шпинаті (у відсотках); y — вміст аскорбінової кислоти після сушіння (у відсотках).

Є підстави вважати, що залежність вмісту аскорбінової кислоти, що збереглася, від вмісту сухої речовини лінійна: $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$.

Знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β простої лінійної регресії та дисперсії σ^2, побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, та σ^2, перевірити гіпотезу про значущість регресії, гіпотезу про адекватність регресії.

На площині (x, y) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.2 (тормозний шлях і швидкість). Вивчаючи рух транспорту, фіксували відстань s, яку проходив автомобіль за інерцією після сигналу "Зупинитися" (тормозний шлях) залежно від швидкості v. Спостереження проводилися на різних автомобілях, з різними водіями, різними поверхневим покриттям дороги і т. ін. Результати спостережень подані у вигляді таблиці, де s — тормозний шлях автомобіля у метрах, v — швидкість автомобіля у км/год. у момент сигналу "Зупинитися".

v	s	v	s	v	s	v	s
6	0,6	19	7,3	26	9,8	32	14,6
6	3,0	19	8,5	26	12,2	32	15,6
11	1,2	21	7,9	27	9,8	32	17,1
11	6,7	21	10,4	27	12,2	32	19,5
13	4,9	21	10,4	27	15,2	35	20,1
14	3,0	21	14,0	29	12,8	37	16,5
16	5,5	23	7,9	29	17,1	39	21,3
16	7,9	23	11,0	29	23,2	39	28,0
16	10,4	23	18,3	29	25,6	39	28,4
18	5,2	23	24,4	31	11,0	39	36,6
18	8,5	24	6,1	31	14,0	40	25,9
19	4,3	24	7,9	31	20,8		
19	6,1	24	16,5	32	9,8		

Припускаючи, що залежність тормозного шляху автомобіля від швидкості лінійна:

$$s = \alpha + \beta(v - \overline{v}),$$

знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β та дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії, гіпотезу про адекватність регресії.

На площині (v, s) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.3. У таблиці наведено результати експериментального дослідження кількості тепла, що виділяється під час затвердіння портландського цементу (x — вміст у клінкерах алюмінату кальцію $3CaO{\cdot}Al_2O_3$ у відсотках від маси клинкерів; y — кількість тепла, що виділилося протягом 180 днів, у калоріях на грам цементу).

Припускаючи, що кількість тепла y є лінійною функцією вмісту x алюмінату кальцію в клінкерах:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β простої лінійної регресії та дисперсії σ^2, побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2, перевірити гіпотезу про значущість регресії, гіпотезу про адекватність лінійної регресії.

x	y	x	y	x	y
1	74,3	7	78,5	11	109,2
1	72,5	7	95,9	11	113,3
1	83,8	10	109,4	21	115,9
2	93,1	11	104,3		
3	102,7	11	87,6		

На площині (x, y) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.4 (остеопенія і кальцій, що виводиться із організму). Втрата кальцію у кістковій тканині людини — остеопенія 1, 2, 3, 4 ступеня у своїх тяжких формах (4-а ступінь остеопенії — остеопороз) веде до руйнування кісткової тканини. У наш час остеопороз набув форми широко розповсюдженого захворювання. Ступінь втрати кальцію у кістковій тканині людини визначають за допомогою ультразвукової денситометрії, яка мало доступна як через її дороговизну, так і недостатню забезпеченість відповідною апаратурою. Пропонується метод діагностики ступеня остеопенії — за вмістом кальцію, що виводиться з сечею. Позначимо через T результат денситометричного дослідження, що характеризує щільність кісткової тканини та вміст кальцію у ній.

Якщо значення T належить проміжку $[-i - 0,5; -i)$, то стан кісткової тканини означається як i-а ступінь остеопенії, $i = 1, 2, 3, 4$. При значені T з проміжка $[-2; -1)$ ступінь остеопенії характеризується як середня, при $T < -2$ — як тяжка. Через Ca позначимо кількість кальцію, що виводиться з сечею. Виходячи з даних Інституту гастроентерології Академії медичних наук України (див. таблицю), пересвідчитися, що між величинами T і Ca існує лінійна залежність: побудуйте лінійну регресію T на Ca, перевірте гіпотези про значущість і адекватність регресії.

За відомою залежністю T від Ca диференціюйте тяжку форму остеопенії (остеопороз) за вмістом Ca, що виводиться з сечею.

Ca	T	Ca	T	Ca	T	Ca	T
2,20	0,23	3,12	–1,63	3,84	–2,10	4,40	–1,77
2,20	0,60	3,20	–0,21	4,10	–1,51	4,63	–1,61
2,24	–1,21	3,20	2,06	4,12	–1,86	4,80	–1,04
2,32	–0,04	3,20	–1,20	4,12	–0,65	5,80	–2,13
2,50	0,14	3,20	-1,49	4,20	–0,80	5,84	–2,94
2,60	0,49	3,35	–0,90	4,20	–0,60	5,90	–2,34
2,60	0,07	3,50	–1,40	4,20	0,54	6,10	–2,56
2,62	–0,02	3,50	0,23	4,20	–2,23	6,70	–1,62
2,64	–0,27	3,60	–0,15	4,24	0,15	6,80	–2,67
2,67	–1,62	3,60	–0,20	4,24	0,00	6,82	–2,96
2,76	–0,05	3,60	–0,20	4,30	–1,43	7,82	–4,08
2,80	–1,84	3,60	1,00	4,32	–1,80	7,82	–3,61
2,80	–2,04	3,64	–1,46	4,40	–1,61	7,82	–2,91

На площині (Ca,T) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.5 (барометричний тиск і точка кипіння води). Досліджувалася залежність між барометричним тиском і точкою кипіння води. Мета дослідження — оцінити висоту над рівнем моря за температурою кипіння води. У гірських умовах для визначення барометричного тиску зручніше визначити температуру кипіння води. У таблиці наведені дані щодо вимірювань барометричного тиску і точки кипіння води у 17 експериментах.

Номер	Тиск	Точка кипіння	Номер	Тиск	Точка кипіння
1	20,79	194,5	10	24,01	201,3
2	20,79	194,3	11	25,14	203,6
3	22,40	197,9	12	26,57	204,6
4	22,67	198,4	13	28,49	209,5
5	23,15	199,4	14	27,76	208,6
6	23,35	199,9	15	29,04	210,7
7	23,89	200,9	16	29,88	211,9
8	23,99	201,1	17	30,66	212,2
9	24,02	201,4			

Припустивши, що залежність тиску y від точки кипіння x лінійна:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β і дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії.

На площині (x, y) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.6 (вживання вина і смерть від серцевого нападу). Чи корисне вино для здоров'я? Є підстави вважати, що помірне вживання вина запобігає серцевим нападам.

У таблиці наведені дані щодо річного обсягу вживання вина на особу (у літрах l алкоголю, випитого з вином) і кількості n смертей (на 100 000 осіб) на рік від серцевих нападів у 19 розвинених країнах.

Припускаючи, що залежність кількості n смертей від річного вживання l вина лінійна:

$$n = \alpha + \beta(l - \overline{l}),$$

знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β і дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії.

На площині (l, n) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

Країна	l	n	Країна	l	n
Австралія	2,5	211	Нідерланди	1,8	167
Австрія	3,9	167	Нова Зеландія	1,9	266
Бельгія	2,9	131	Норвегія	0,8	227
Канада	2,4	191	Іспанія	6,5	86
Данія	2,9	220	Швеція	1,6	207
Фінляндія	0,8	297	Швейцарія	5,8	115
Франція	9,1	71	Великобританія	1,3	285
Ісландія	0,8	211	США	1,2	199
Ірландія	0,7	300	Німеччина	2,7	172
Італія	7,9	107			

20.7. У таблиці наведено вміст y (у відсотках) протеїну та x крохмалю у зернах пшениці, що характеризує якість пшениці. Визначення протеїну вимагає складного хімічного аналізу, у той час як вміст крохмалю визначається без приладів.

y	x	y	x	y	x
10,3	60	10,8	45	14,4	85
12,2	75	11,4	51	15,8	96
14,5	87	11,0	17	15,6	92
11,1	55	10,2	36	15,0	94
10,9	34	17,0	97	13,3	84
18,1	98	13,8	74	19,0	99
14,0	91	10,1	24		

Припускаючи, що залежність вмісту протеїну від вмісту крохмалю лінійна: $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$, знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β та дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії.

На площині (x, y) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.8. У таблиці наведено результати вимірювань швидкості v туманності (в км/с) та відстані s від Землі до туманності (в млн парсек) для десяти позагалактичних туманностей.

v	s	v	s
1,20	630	9,12	4820
1,82	890	10,97	5230
3,31	2350	14,45	7500
7,24	3810	22,91	11800
8,92	4630	36,31	19600

Припускаючи, що швидкість v є лінійною функцією відстані s: $v = \alpha + \beta(s - \overline{s})$, знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β та дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії.

На площині (s, v) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.9. У таблиці наведено результати експерименту, добуті під час вивчення нового методу для вимірювання швидкості крові в організмі людини.

Припускаючи, що залежність швидкості крові, знайденої за допомогою нового методу, від швидкості крові, знайденої стандартним методом, лінійна, знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β та дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії.

На площині (x, y) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

x	y	x	y	x	y
1190	1115	1900	1830	2720	2630
1455	1425	1920	1920	2710	2740
1550	1515	1960	1970	2530	2390
1730	1795	2295	2300	2900	2800
1745	1715	2335	2280	2760	2630
1770	1710	2490	2520	3010	2970

x — швидкість крові, знайдена стандартним методом, y — швидкість крові, знайдена за допомогою нового методу.

20.10 (вартість експлуатації літака і його вік). Дирекція авіакомпанії з метою планування витрат хоче встановити, як вартість експлуатації літака пов'язана з часом, протягом якого він експлуатується. Вартість експлуатації літака, очевидно, залежить від строку експлуатації, іншими словами, від "віку літака". Із часом через старіння деталей і вузлів літака компанія несе великі витрати на підтримання його у робочому стані, зокрема, необхідно частіше проводити ремонтно-профілактичні роботи, змінювати окремі вузли.

Далі наведено дані про вартість експлуатації транспортних літаків залежно від їх "віку":

x	y	x	y
4,5	619	5,5	987
4,5	1049	0,5	163
4,5	1033	0,5	182
4,0	495	6,0	764
4,0	723	6,0	1373
4,0	681	1,0	978
5,0	890	1,0	466
5,0	1522	1,0	549
5,0	1194		

x — вік літака (в роках); y — вартість (у доларах) експлуатації літака протягом півроку.

Припускаючи, що залежність вартості експлуатації літака від його "віку" лінійна, знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β та дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії, гіпотезу про адекватність лінійної регресії.

На площині (x, y) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.11. Функціональною і структурною одиницею нервової системи є нейрон (нервова клітина), основною складовою якого є дендрит (він за формою нагадує дерево). Більшість характеристик дендрита нейрона — випадкові величини, зокрема діаметр сегмента дендрита нейрона.

У таблиці наведено результати вимірювань (у мкм) діаметра y початку дочірнього сегмента та діаметра x кінця материнського сегмента.

x	y	x	y	x	y	x	y
0,40	0,40	0,60	0,60	0,75	0,60	1,00	0,45
0,45	0,45	0,60	0,60	0,75	0,70	1,00	0,55
0,45	0,45	0,60	0,60	0,75	0,75	1,00	0,75
0,45	0,45	0,65	0,35	0,75	0,75	1,00	0,85
0,45	0,45	0,65	0,45	0,80	0,40	1,00	0,85
0,45	0,45	0,65	0,45	0,80	0,50	1,00	1,00
0,50	0,40	0,65	0,45	0,80	0,50	1,05	0,60
0,50	0,40	0,65	0,50	0,80	0,50	1,05	0,65
0,50	0,45	0,65	0,50	0,80	0,60	1,05	0,75
0,50	0,45	0,65	0,50	0,80	0,60	1,10	0,90
0,50	0,50	0,65	0,60	0,80	0,80	1,15	0,60
0,50	0,50	0,65	0,60	0,85	0,50	1,15	0,65
0,50	0,70	0,65	0,65	0,85	0,55	1,20	0,65
0,55	0,35	0,65	0,65	0,85	0,55	1,25	0,85
0,55	0,40	0,65	0,65	0,85	0,60	1,25	1,00
0,55	0,45	0,65	0,65	0,85	0,65	1,30	0,85
0,55	0,45	0,65	0,65	0,85	0,65	1,35	0,90
0,55	0,55	0,70	0,45	0,85	0,65	1,35	0,90
0,55	0,55	0,70	0,45	0,85	0,85	1,35	1,00
0,55	0,55	0,70	0,50	0,90	0,90	1,35	1,60
0,55	0,55	0,70	0,50	0,90	0,90	1,40	0,75
0,55	0,55	0,70	0,55	0,95	0,60	1,45	0,75
0,55	0,55	0,70	0,65	0,95	0,60	1,50	0,90
0,60	0,50	0,70	0,80	0,95	0,80	1,60	0,95
0,60	0,55	0,75	0,50	0,95	0,95	1,65	0,65
0,60	0,60	0,75	0,50	0,95	1,05		

Припускаючи, що залежність діаметра y від x лінійна: $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$, знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β та дисперсії σ^2. Побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2. Перевірити гіпотезу про значущість регресії, гіпотезу про адекватність лінійної регресії.

На площині (x, y) зобразити вихідні дані та побудувати емпіричну лінію регресії.

20.12. Перевірити, чи узгоджується теорія з експериментом за другою координатою (див. приклад 20.1.1 і дані таблиці 20.1.2).

Знайти оцінки максимальної правдоподібності параметрів α, β та дисперсії σ^2, побудувати довірчі інтервали для параметрів α, β, σ^2.

Глава 21

Розв'язання, вказівки, відповіді

21.1 До глави 1

1.1°. mn. **1.2°.** 49; 42. **1.3°.** $17 \cdot 16 \cdot 15$.
1.4°. $4 \cdot 5 \cdot 5$. **1.5°.** $4 \cdot 4 \cdot 3$. **1.6°.** $7!$
1.7°. A_{10}^6. **1.8°.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2$. **1.9°.** $26^2 \cdot 10^4$.
1.10. $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot C_{13}^2$. **1.11°.** C_9^4. **1.12°.** C_5^3.
1.13°. $4!$

1.14. Дільники числа $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ мають вигляд $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ і визначаються послідовністю цілих невід'ємних чисел $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ таких, що $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Кількість таких послідовностей (а разом з ними і дільників) згідно з правилом множення дорівнює

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

1.15. $2 \cdot (n-1)!$ **1.16°.** A_{25}^4. **1.17°.** A_8^4.
1.18. $(n-2)!$

1.19. C_9^4, вказані числа визначаються множиною своїх цифр.

1.20. C_{10}^4.

1.21*. Заповнюємо всі клітини таблиці, крім клітин останнього рядка й останнього стовпця (правого), числами $+1$ і -1 (згідно з правилом множення, це можна зробити $2^{(n-1)(m-1)}$ способами). Заповнюємо $n-1$ клітин останнього рядка, крім останньої (правої) так, щоб добуток чисел у кожному з $(n-1)$ стовпців дорівнював $+1$. Заповнюємо клітини останнього стовпця так, щоб добуток чисел у кожному з $m-1$ перших рядків і в останньому стовпці дорівнював $+1$. Отже, добуток чисел у кожнім стовпці дорівнюватиме $+1$ і у кожнім з $m-1$ перших рядків дорівнюватиме $+1$, але тоді добуток чисел і в останньому рядку дорівнюватиме $+1$, оскільки у таблиці добуток чисел за рядками дорівнює добуткові за стовпцями.

Відповідь: $2^{(n-1)(m-1)}$.

1.22. Із $p+1$ проміжків між білими кулями (враховуючи два кінцеві нескінченні проміжки) виберемо q, в яких розмістимо чорні кулі. Це можна виконати C_{p+1}^{q} способами.

1.23 (3). Послідовно проводитимемо на площині прямі. Нехай проведено $n-1$ прямих і A_{n-1} — число частин площини, які при цьому утворилися. Проведемо n-у пряму. До A_{n-1} частин n-а пряма додасть ще n частин, тому

$$A_n = A_{n-1} + n.$$

Докладніше: $A_1 = 2,\ A_2 = A_1 + 2, \ldots, A_n = A_{n-1} + n, \ldots$ Додаючи почленно перші n рівностей, одержимо

$$A_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Відповіді: 1) C_n^2; 2) C_n^3; 3) $n(n+1)/2+1$; 4) $2n$ — кількість необмежених частин, $n(n-3)/2+1$ — кількість обмежених.

1.24. $n(n-3)/2$.

1.25. Кожна точка перетину діагоналей задає чотири вершини n-кутника і навпаки, тому число точок перетину діагоналей дорівнює C_n^4.

1.26*. У опуклому n-кутнику всього $n(n-3)/2 = N$ діагоналей.

Нехай $k-1$ перших діагоналей ділять многокутник на A_{k-1} частин. Проведемо k-ту діагональ. Позначимо через p_k число точок перетину k-ї діагоналі з першими $k-1$ діагоналями. Тоді

$$A_k = A_{k-1} + (p_k + 1),\ \ k = 2, 3, \ldots, N.$$

Додаючи почленно ці рівності, отримаємо

$$A_N = 1 + C_n^4 + n(n-3)/2.$$

1.27. Скористатися методом математичної індукції.

1.28. Записати елементи у список і приписати кожному з них номер місця у списку.

1.29. Скористатися правилом множення.

1.30. З одного боку, n-елементну множину можна впорядкувати $n!$ способами. З іншого, $C_n^k k!(n-k)!$ способами — спочатку розбити її на дві неперетинні підмножини (C_n^k способами), а потім упорядкувати кожну з них (відповідно $k!$ і $(n-k)!$ способами). Тому $n! = C_n^k k!(n-k)!$

1.32. Підрахуємо число перестановок n-елементної множини двома способами. З одного боку, це число дорівнює $n!$ А з іншого, його можна знайти так: розбиваємо n-елементну множину на m неперетинних підмножин, які містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів (це можна виконати $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ способами), а потім упорядковуємо кожну з них відповідно $k_1!, k_2!, \ldots, k_m!$ числом способів. Отже

$$n! = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) k_1! k_2! \ldots k_m!$$

1.33. Слово визначається вибором місць під букву кожного типу (розбиттям множини на підмножини).

1.34. $C_{m+n+s}(m, n, s)$. **1.35.** $C_{3n}(n, n, n)$.

1.36. Кожній сполуці з повтореннями з m елементів по n можна поставити у відповідність послідовність з n нулів, відокремлених $m-1$ одиницями (причому число нулів між одиницями дорівнює числу елементів даного типу) і навпаки.

1.37. Див. попередню задачу, $m-1$ одиниць мають стояти у $n-1$ проміжках між нулями

21.2 До глави 2

2.1°. а) $\overline{A}$ — герб не випав; б) $\overline{B}$ — принаймні один промах у трьох пострілах; в) $\overline{C}$ — жодного влучення у трьох пострілах.

2.2°. а) $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$; б) $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$; в) $C = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$; г) $D = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

2.3°. а) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; б) $A \cap B \cap \overline{C}$; в) $A \cap B \cap C$; г) $\underline{A \cup B \cup C}$; д) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$; е) $\overline{A \cap B \cap C}$.

2.4.

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \ B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$C = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \ldots \\ \ldots \cap \overline{A_n}) \cup \ldots \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap A_n).$$

2.5.

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}, \ B = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}.$$

2.7°. Простір Ω — множина впорядкованих пар (i, j), $i, j = 1, 2, \ldots, 6$, згідно з правилом множення $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$; $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$, $n(A) = 5$; B — множина пар (i, j), в яких зустрічається 6, $n(B) = 11$; C — множина пар (i, j), в яких i набуває значень $2, 4, 6$, $n(C) = 18$; $D = \{(i, j) : i, j = 1, 3, 5\}$, $n(D) = 9$.

2.11. Простір Ω складається з n-елементних підмножин N-елементної множини виробів; до події A входять ті з них, що містять рівно m бракованих виробів; $n(\Omega) = C_N^n$; $n(A) = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

2.12. Простір Ω складається з послідовностей завдовжки 7, утворених із 10 чисел (номерів поверхів, на яких зупиняється ліфт); до події A входять послідовності, що складаються з різних чисел; $n(\Omega) = 10^7$; $n(A) = 10 \cdot 9 \ldots 4$.

2.13. $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \ldots\}$; $A = \{\underbrace{\text{РР}\ldots\text{РГ}}_{k}\}$, $B = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \ldots, \underbrace{\text{РР}\ldots\text{РГ}}_{k-1}\}$; $C = \{\text{Г}, \text{РРГ}, \text{РРРРГ}, \ldots\}$; $D = \{\text{РГ}, \text{РРРГ}, \text{РРРРРГ}, \ldots\}$.

2.14. Можна запропонувати принаймні два простори елементарних подій. Якщо позначити білу кулю через W, чорну — через B, то множиною наслідків стохастичного експерименту буде $\Omega = \{WW, WB, BW\}$. Якщо білу кулю, яку кладуть до урни, позначити, наприклад, через W^*, то $\Omega^* = \{WW^*, W^*W, BW^*, W^*B\}$.

2.15. Ω складається зі слів завдовжки n, утворених із “букв” $1, 2, \ldots, 6$; $n(\Omega) = 6^n$. Подія A описується словами завдовжки n, утвореними з n_1 букв 1, n_2 букв 2, …, n_6 букв 6; $n(A) = n!/(n_1!n_2! \ldots n_6!)$.

2.16. $n(\Omega) = C_{2n}^n$; $n(A) = C_{2n-2}^{n-1} C_2^1$; $n(B) = C_{2n-4}^{n-2} C_4^2$. Див. також задачу 3.3. і 3.11.

2.17. $n(A) = 12^r - 12 \cdot 11 \ldots (12 - (r-1))$; $n(B) = r11^{r-1}$; $n(C) = 12^r - 11^r$; $n(D) = 11^r$; $n(\Omega) = 12^r$.

2.18. $n(\Omega) = n!$; $n(A) = (n-1)!$; $n(B) = (n-2)!$

2.19. Ω — множина впорядкованих трійок, складених із чисел від 1 до 6; A — підмножина впорядкованих трійок, в яких 1 зустрічається один раз; B — у яких 6 зустрічається рівно два рази; C — складена з різних чисел; $D = \{(1;1;1), (2;2;2), \ldots, (6;6;6)\}$; $n(\Omega) = 6^3$; $n(A) = C_3^1 5^2$; $n(B) = C_3^2 5$; $n(C) = 6 \cdot 5 \cdot 4$; $n(D) = 6$.

2.20. Ω — множина всіх нескінченних послідовностей, утворених буквами Г, Р на непарних місцях і цифрами $1, 2, \ldots, 6$ на парних. Подія A описується послідовностями з Ω, які записуються до появи вперше букви Г буквами Р на непарних місцях і цифрами $1, 2, \ldots, 5$ — на парних. Подія B описується послідовностями з Ω, які записуються до появи вперше цифри 5 буквами Р на непарних місцях і цифрами $1, 2, 3, 4, 6$ — на парних.

2.21*. Кожній частинці поставимо у відповідність номер комірки, в якій вона опинилась. Ω — множина послідовностей, завдовжки n, складена з чисел $1, 2, \ldots, m$. Подія A описується послідовностями завдовжки n, складеними з k_1 одиниць, k_2 двійок, …, k_m чисел m.

2.22*. Ω — множина послідовностей $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, складених з невід’ємних чисел, таких, що

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n.$$

Подія A описується послідовностями $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, утвореними додатними цілими числами.

21.3 До глави 3

3.1. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - A_{365}^r / 365^r$.

3.2. $P(A) = 1 - A_{12}^r / 12^r$, якщо $r \le 12$, і $P(A) = 1$, якщо $r > 12$.

3.3. Розрізнятимемо підгрупи: підгрупа 1° і підгрупа 2°. Наслідок експерименту — упорядкована пара n-елементних підмножин $2n$-елементної множини (простір елементарних подій — множина всіх таких пар). При цьому вибір однієї з n-елементних підмножин пари (однієї з підгруп, наприклад 1°), визначає склад іншої підмножини (підгрупи 2°). Тому наслідків всього C_{2n}^n. Модель класична.

Подія A — "дві найсильніші команди виявилися в різних підгрупах" — описується упорядкованими парами n-елементних підмножин, у яких до складу кожної n-елементної підмножини входить рівно одна з найсильніших команд. Тому

$$P(A) = C_2^1 C_{2n-2}^{n-1} / C_{2n}^n.$$

Подія B — "дві найсильніші команди виявилися в одній підгрупі" описується впорядкованими парами n-елементних підмножин, у яких до складу однієї n-елементної підмножини (1- або 2-ї) входять дві найсильніші команди, до іншої — жодної. Тому спочатку виберемо підгрупу (1° або 2°), до складу якої увійдуть дві найсильніші команди (C_2^1 способами), а потім доповнимо її до повного складу C_{2n-2}^{n-2} способами. Звідси

$$P(B) = C_2^1 C_{2n-2}^{n-2} / C_{2n}^n.$$

3.4°. $1/5!$ **3.5.** $2/n$.

3.6. 1) C_{20}^3 / C_{25}^3; 2) $C_{20}^2 C_5^1 / C_{25}^3$; 3) $C_{20}^2 C_5^1 / C_{25}^3 + C_{20}^3 / C_{25}^3$; 4) $1 - C_{20}^3 / C_{25}^3 - C_{20}^2 C_5^1 / C_{25}^3$.

3.7. $1/2^6$.

3.9. Р о з в' я з а н н я 1. Вважатимемо букви розрізненними, наприклад, $\mathrm{А}_1, \mathrm{А}_2, \mathrm{А}_3, \mathrm{М}_1, \mathrm{М}_2, \mathrm{Т}_1, \mathrm{Т}_2$. Наслідок експерименту — перестановка з 10 розрізненних букв. Модель класична. До події A — утворилося слово "математика" — входять перестановки, у яких букви стоять на своїх місцях. Таких перестановок 3!2!2! Тому $P(A) = 3!2!2!/10!$

Р о з в’ я з а н н я 2. Наслідок експерименту — слово завдовжки 10, складене з букв А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Таких слів 10!/3!2!2! До події A входить одне слово, тому $P(A) = 3!2!2!/10!$

3.10. Наслідок експерименту — перестановка з n елементів. Подія “між A і B стоять r осіб” описується перестановками, у яких між елементами A і B розміщено r елементів. Число таких перестановок дорівнює $(n - r - 1)2!(n - 2)!$ Шукана ймовірність дорівнює

$$2(n - r - 1)/(n(n - 1)).$$

3.11. а) $C_2^1 C_{18}^9 / C_{20}^{10}$; б) $C_4^2 C_{16}^8 / C_{20}^{10}$.

3.12. $(k - 1)(n - k)/C_n^2$.

3.13. Кожному пасажирові припишемо номер вагона, в який він сідає, ω — послідовність завдовжки 9, складена з чисел 1,2,3 (слово завдовжки 9, утворене з “букв” 1,2,3); модель класична.

Подія “до кожного вагона сядуть по три пасажири” описується словами завдовжки 9, утвореними з 3 одиниць, 3 двійок, 3 трійок; таких слів 9!/(3!3!3!). Тому шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{9!/(3!3!3!)}{3^9}$.

Подія “в один вагон сядуть чотири, другий — три, третій — два пасажири” описується послідовностями (словами) завдовжки 9, утвореними цифрами (буквами) $1, 2, 3$, причому одна цифра зустрічається чотири, друга три, третя два рази. Підрахуємо число таких слів. Першою дією вибираємо букву (цифру), яка зустрічається чотири рази (трьома способами), потім ту, яка зустрічається три рази (двома способами); та, що зустрічається два рази, може бути вибрана одним способом. Другою дією з вибраних букв (цифр) утворюємо слово завдовжки 9 із заданим числом букв (9!/(4!3!2!) способами). Тому описаних вище слів, згідно з правилом множення, є $3! \cdot 9!/(4!3!2!)$. Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$\frac{3!9!/(4!3!2!)}{3^9}.$$

3.14. $A_{10}^7/10^7$, що наближено дорівнює $0,06$.

3.15. $12!/12^{12}$. **3.16.** $\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, $\sum\limits_{k=m+1}^{\min\{M,n\}} \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

3.17. $\sum\limits_{s=1}^{\min\{m,r\}} \dfrac{C_m^s C_{n-m}^{r-s}}{C_n^r}$. **3.18.** $\sum\limits_{s=r}^{\min\{n,k\}} \dfrac{C_n^s C_{N-n}^{k-s}}{C_N^k}$.

3.19. $A_r = \{$учасник угадав r видів$\}$, $r = 3,4,5,6$; $P(A_3) = 0,017650$, $P(A_4) = 0,000969$, $P(A_5) = 0,000018$, $P(A_6) = 0,00000007151$, $P\{$учасник отримав виграш$\} = P(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 0,01863707115$.

3.20. $12!/(2^6 6^{12})$, що становить приблизно 0,0034.

3.21. $n!/(6^n n_1! n_2! \ldots n_6!)$. **3.22°.** $1/4!$

3.24°. $P(A) = 3/8$, $P(B) = 7/8$, $P(A \cap B) = 3/8$, $P(B/A) = 1$.

3.25. $1/6^{n-1}$. **3.26°.** $1/6^5$.

3.27. Коли особи сідають у ряд, шукана ймовірність дорівнює $2/n$.

Способи розміщення осіб за круглим столом відрізняються взаємним розміщенням осіб між собою.

Спочатку розмістимо за круглим столом першу з двох указаних осіб (не має значення на якому місці — стіл круглий). Далі перенумеруємо місця, що залишилися, наприклад проти годинникової стрілки, і розмістимо на них решту $(n-1)$ осіб, $(n-1)!$ способами. При цьому число способів, коли дві вказані особи сидітимуть поруч, дорівнює $2!(n-2)!$ Тому шукана ймовірність становить $(2!(n-2)!)/(n-1)! = 2/(n-1)$.

3.28*. Підкидають чотири гральні кубики. Наслідок експерименту — послідовність завдовжки 4 складена з чисел від 1 до 6, число таких послідовностей дорівнює 6^4, число послідовностей, у яких 1 не зустрічається, дорівнює 5^4. Тому ймовірність появи одиниці хоча б один раз у чотирьох підкиданнях кубика дорівнює $1-(5/6)^4$.

Пару гральних кубиків підкидають 24 рази. Наслідок експерименту — послідовність завдовжки 24, елементами якої є пари (i,j), $i,j = 1,2,\ldots,6$. Число таких послідовностей 36^{24}, число послідовностей, у яких пара (1,1) не випала жодного разу, дорівнює 35^{24}, тому ймовірність появи пари $(1, 1)$ хоча б один раз у 24 підкиданнях пари гральних кубиків дорівнює $1 - (35/36)^{24}$.

Необхідно довести, що $1 - (5/6)^4 > 1 - (35/36)^{24}$. Для цього досить установити, що

$$(35/36)^{24} > (5/6)^4$$

або $(35/36)^6 > 5/6$. Останнє випливає, наприклад, з нерівності

$$(1 + x)^n > 1 + nx, \ x > -1, \ n \geq 1;$$

для $n = 6$, $x = -1/36$.

3.29. Скористатися тим, що

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

3.31. Кожній з n частинок припишемо номер комірки, в яку вона потрапила. Наслідок ω стохастичного експерименту — послідовність (слово) завдовжки n з чисел $1, 2, \ldots, m$. За правилом множення наслідків усього — m^n. Оскільки щодо комірок усі частинки знаходяться в однакових умовах, то кожному наслідку природно приписати одну й ту саму ймовірність (модель класична). Подія "у першій, другій, ..., m-й комірках буде відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ частинок" утворена словами завдовжки n, складеними з k_1 одиниць, k_2 двійок, ..., k_m чисел m. Усього таких слів $n!/(k_1!k_2!\ldots k_m!)$. І оскільки модель класична, то шукана ймовірність дорівнює

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!m^n}.$$

3.32. $\dfrac{6}{(n-2)(n-1)}$ (див. також розв'язання до задачі 3.27).

3.36. Імовірність того, що чотиризначний номер складається з різних цифр дорівнює $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4}$.

Імовірність того, що чотиризначний номер має тільки дві однакові цифри дорівнює $\dfrac{10C_9^2 4!/(2!1!1!)}{10^4}$

Чотиризначний автомобільний номер — упорядкована послідовність завдовжки 4 (слово), утворена з цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$; усього таких послідовностей 10^4. Номери, що мають дві пари однакових цифр, — це послідовності завдовжки 4 (слова), утворені двома різними цифрами, що зустрічаються по два рази, їх усього $C_{10}^2 4!/(2!2!)$. (Спочатку з 10 цифр вибираємо дві (C_{10}^2 способами), а потім з них утворюємо слово завдовжки 4, до якого кожна буква входить двічі ($4!/(2!2!)$ способами)). Тому ймовірність того, що чотиризначний номер має дві пари однакових цифр, дорівнює $\dfrac{C_{10}^2 4!/(2!2!)}{10^4}$ (див. також задачу 3.13).

Імовірність того, що чотиризначний номер має три однакові цифри, дорівнює $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 4!/(3!1!)}{10^4}$ (див. задачу 3.13).

Імовірність того, що чотиризначний номер складається з однакових цифр дорівнює $\dfrac{1}{10^3}$.

3.37. $C_{M_1}^{m_1} C_{M_2}^{m_2} \ldots C_{M_N}^{m_N} / C_{M_1+M_2+\ldots+M_N}^{n}$.

3.38. Наслідок експерименту — впорядкована цілочисельна пара (i, j), $1 \leq i < j \leq N$, у якої $i \neq j$. Число всіх наслідків дорівнює $N(N-1)$. Число пар, у яких $i < j$, дорівнює C_N^2, оскільки кожна така пара задається множиною чисел, що її утворюють.

Наслідок експерименту (коли вибирають n чисел) — цілочисельна послідовність $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, утворена з різних чисел, що задовольняють нерівності $1 \leq i_k \leq N$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Число всіх таких послідовностей дорівнює $N(N-1)\ldots(N-(n-1))$. Число послідовностей, у яких $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ дорівнює C_N^n, оскільки кожна така послідовність задається множиною чисел, що її утворюють.

3.40. Імовірність того, що автомобіль знаходиться за вибраними вами дверима дорівнює $1/3$, а отже ймовірність того, що за вибраними вами дверима автомобіля немає, тобто він знаходиться за одними з двох інших дверей дорівнює $2/3$. Тому варто відмовитися від початкового вибору і вибрати двері, що залишилися (одні двері ведучий вже відчинив — за ними автомобіля немає). (Зазначимо, що відчиняє ведучий двері чи ні, ймовірність того, що автомобіль знаходиться за не вибраними вами дверима, дорівнює 2/3.)

Запропоноване розв'язання особливо "прозоре", якщо автомобіль знаходиться за одними з n дверей (нехай, наприклад, $n = 1000$).

Імовірність того, що автомобіль знаходиться за вибраними вами дверима дорівнює $1/n$, і отже, ймовірність протилежної події — автомобіль знаходиться за одними з $n-1$ дверей, що залишилися дорівнює $1-1/n$. Для $n = 1000$ ця ймовірність становить $0,999$. Отже, якщо ви відчините двері, що залишилися, ви майже напевне поїдете додому на автомобілі.

21.4 До глави 4

4.2°.
а) $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$; б) $1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$; в) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \prod\limits_{k=1,k\neq i}^{n}(1-p_k)$.

4.3°. Позначимо через A_i подію "об'єкт виявлено в i-му циклі", $i = 1, 2, \ldots, n$; події A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, незалежні. Подію C — "об'єкт виявлено" — через події $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ можна подати так: $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$;

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - (1-p)^n.$$

4.4°. A_i — подія "i-й блок працює", $i = 1, 2, \ldots, n$; події A_i незалежні. $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ — подія "прилад працює";
$P(A) = P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = p^n$ (див. також задачу 4.6).

4.5. 1) $1-(1-p)^2$; 2) $1-(1-p)(1-pp_1)$.

4.6. 1) $1-(1-p)^n$, щоб надійність була не меншою P, необхідно щоб

$$n \geq \ln(1-P) \Big/ \ln(1-p).$$

2) A_1 — "прилад працює"; A_i — "працює i-й дублювальний прилад", $i = 2, 3, \ldots, n$; B_i — "працює прилад вмикання i-го приладу", $i = 2, 3, \ldots, n$ (усі події незалежні); $\overline{C}$ — "система не працює",

$$\overline{C} = \overline{A}_1 \bigcap_{i=2}^{n} \left(\overline{B}_i \cup \left(B_i \cap \overline{A}_i\right)\right);$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - (1-p)(1-pp_1)^{n-1}.$$

4.7°. а) $1/3$; б) $3/11$. **4.8°.** $1/2$.

4.9°. $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{m_i}{n_i}$. **4.10°.** $\dfrac{m_1+n_1m_2}{n_1(n_2+1)}$.

4.11°. $4/11$. **4.12.** $1-(1-pp_1-(1-p)p_0)^n$.

4.13. $1-(1-pp_2-(1-p)p_1)^n$. **4.14°.** $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

4.15°. Імовірність припущення "в урні k білих куль" дорівнює $2k/(n(n+1))$.

4.17. Імовірніше, що стрілець C в мішень улучив.

4.18. $48/95$. **4.19.** $0,52$. **4.20.** $\dfrac{np_2}{p_1+np_2}$.

4.21. Позначимо через A подію "за вибраними Вами дверима знаходиться автомобіль", через B — "за відчиненими ведучим $n-2$ дверима знаходиться автомобіль". Обчислимо $P(B)$ за формулою повної імовірності (як повну групу подій розглянемо A і $\overline{A}$). Одержимо:

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A}) =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{2}{n}.$$

Зазначимо, що

$$P(\overline{B}) = 2/n$$

— імовірність того, що за відчиненими ведучим дверима автомобіля немає.

Обчислимо $P(A/\overline{B})$ и $P(\overline{A}/\overline{B})$:

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}/A)P(A)}{P(\overline{B})} = \frac{1/n}{2/n} = \frac{1}{2},$$

тоді й $P(\overline{A}/\overline{B}) = 1 - P(A/\overline{B}) = 1/2$.

Отже, якщо автомобіля немає за вибраними ведучим дверима, то він з імовірністю $1/2$ знаходиться за початково вибраними вами дверми (і з ймовірністю $1/2$ за тими, що залишилися).

Обчислимо $P(\overline{B} \cap \overline{A})$ і $P(\overline{B} \cap A)$:

$$P(\overline{B} \cap A) = (\overline{B}/A)(A) = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$

$$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B}/\overline{A})(\overline{A}) = \frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Так що

$$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \frac{1}{n}, \;\; P(\overline{B} \cap A) = \frac{1}{n}.$$

Тому які б двері ви не вибрали (після вибору ведучого), ймовірність виграшу для вас становить $1/n$.

4.22. Позначимо через A_{ij} подію "i-та радіостанція працює на j-й частоті", $i, j = 1, 2, 3$. Тоді подія B — "всі радіостанції працюють на одній частоті" опишеться так:

$$B = \bigcup_{j=1}^{3} (A_{1j} \cap A_{2j} \cap A_{3j}),$$

а подія C — "всі радіостанції працюють на різних частотах" — так

$$C = \bigcup_{(k,l,m)} (A_{1k} \cap A_{2l} \cap A_{3m})$$

(об'єднання по трійкам (k, l, m), які утворені різними числами $k, l, m = 1, 2, 3$); $P(B) = 1/9$; $P(C) = 2/9$.

4.23. Нехай подія S — "людина хвора", $\overline{S}$ — "людина здорова", R_S — "результат рентгенівського аналізу позитивний" (людина за результатом рентгенівського аналізу визнана хворою). За умовою задачі

$$P(R_S|S) = 1 - \beta,\ P(S) = \gamma,\ P(\overline{S}) = 1 - \gamma,\ P(R_S|\overline{S}) = \alpha.$$

Необхідно обчислити $P(\overline{S}|R_S)$.

$$P(\overline{S}|R_S) = \alpha(1-\gamma)/(\alpha(1-\gamma) + (1-\beta)\gamma).$$

4.24. Нехай подія S — "виріб стандартний", $\overline{S}$ — "виріб нестандартний", D_S — "класифікація виробу як стандартного". За умовою $P(S) = 0,96$, $P(D_S|S) = 0,98$, $P(D_S|\overline{S}) = 0,05$. Необхідно обчислити $P(S|D_S)$.

Відповідь: $P(S|D_S) = 0,9978$.

4.25°. 2/5. **4.26.** 5/13.

4.27.

$$\frac{N_k M_k}{(N_k + M_k)(N_k + M_k - 1)} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{N_i M_i}{(N_i + M_i)(N_i + M_i - 1)} \right)^{-1}.$$

4.28. Задачу про поділ ставки Паскаль і Ферма розглядали як імовірнісну.

Нехай за гравців, що припинили гру, її продовжують двоє нових гравців (один за першого, інший — за другого, як і раніше називатимемо їх першим і другим гравцями). Вони грають до виграшу одним з гравців шести партій. При цьому 6 партій може виграти як перший гравець, так і другий. От тільки з різними ймовірностями. Цілком природно вважати справедливим поділ призу пропорційно ймовірностям виграти 6 партій відповідно першим і другим гравцями при продовженні гри.

Гра продовжуватиметься не більше ніж три партії. Нехай B_i — подія "другий гравець виграв i-ту партію", $i = 1, 2, 3$, D — подія "гру виграв другий гравець". Очевидно,

$$D = B_1 \cap B_2 \cap B_3.$$

Оскільки події незалежні, то

$$P(D) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 1/2^3.$$

Так що імовірність того, що другий гравець виграє гру дорівнює $1/8$.

Імовірність того, що перший гравець виграє гру

$$P(\overline{D}) = 1 - 1/8 = 7/8.$$

Тому приз необхідно розділити у відношенні $7:1$.

4.29. Приз необхідно розділити у відношенні $15:1$.

4.30. Позначимо білу кулю, яка знаходиться в урні через W, чорну — через B, а білі кулі, які кладуть до урни позначимо через W_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (їх вважатимемо розрізненними). Експеримент полягає у послідовному вийманні з урни $(n+1)$ куль. Наслідок експерименту — послідовність довжиною $(n+1)$, складена з букв $W_1, W_2, \ldots, W_n, W$ або з букв $W_1, W_2, \ldots, W_n, B$. Оскільки спочатку в урні з імовірностю $1/2$ знаходиться біла або чорна куля, то природно вважати модель класичною.

Нехай A_n — подія "перші n вибраних куль білі", A — подія "остання вибрана куля біла". Зрозуміло, що необхідно обчислити ймовірність

$$P(A|A_n) = \frac{P(A \cap A_n)}{P(A_n)}.$$

Обчислимо ймовірності $P(A_n)$ і $P(A \cap A_n)$ за формулою повної ймовірності, розглядаючи як повну групу подіі: W — "спочатку в урні знаходиться біла куля", B — "спочатку в урні знаходиться чорна куля". Маємо

$$P(A_n) = P(A_n/W)P(W) + P(A_n/B)P(B) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{n!}{(n+1)!}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right);$$

$$P(A \cap A_n) = P((A \cap A_n)/W)P(W) + P((A \cap A_n)/B)P(B) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Так що

$$P(A/A_n) = \frac{1/2}{(1/2)(1 + 1/(n+1))} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Якщо в урні знаходиться чорна куля, то

$$P(\overline{A_n}/B) = \frac{n}{n+1},$$

і вона скоріш за все з'явиться серед перших n вибраних куль. Якщо чорна куля серед перших n вибраних куль не з'явилася, то скоріш за все її в урні і не було:

$$P(B/A_n) = \frac{P(B \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{1}{n+2}.$$

Тому природно, що коли серед перших n куль всі білі, то і $(n+1)$-а куля куля скоріш за все буде білою:

$$P(A/A_n) = \frac{n+1}{n+2}.$$

Розв'язок задачі цілком погоджується з нашою інтуїцією.

До речі, в окремому випадку, коли $n = 1$, ми маємо справу із задачею Льюїса Керрола, при цьому

$$P(A/A_1) = \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{3}.$$

4.32. Позначимо через A_{ji} подію "об'єкт буде виявлено j-ю станцією в i-му циклі", $j = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$; через A_j подію — "об'єкт буде виявлено j-ю станцією", $j = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно,

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{n} A_{ji};$$

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{ji};$$

$$B = \bigcap_{j=1}^{m} A_j = \bigcap_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{ji} \right).$$

Звідси, враховуючи незалежність подій $A_{ji}, j = 1, 2, \ldots$
$\ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n$, маємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_{ji}\right) = 1 - (1-p)^{nm};$$

$$P(B) = P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}\right)\right) = \prod_{j=1}^{m} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m}\left(1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}}\right)\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_{ji}\right)\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m}(1 - (1-p)^n) = (1 - (1-p)^n)^m.$$

21.5 До глави 5

5.1°.

x_i	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$
$P_\xi(x_i)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

5.2°.

y_j	-1	1
$P_\eta(y_j)$	$3/7$	$4/7$

5.3°.

x_i	0	1	2
$P_\xi(x_i)$	0, 27	0,58	0,15

5.4°.

$$P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_n = k_n\} = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{k_i},$$

$k_1 = 0, 1, \ldots; k_2 = 0, 1, \ldots; \ldots, k_n = 0, 1, \ldots$

5.6*. Випадкова величина $(\mu, s) = (\mu(\zeta^*), s(\zeta^*))$ — функція випадкового вектора $\zeta^* = (\operatorname{sign}\xi_1, \operatorname{sign}\xi_2, \ldots, \operatorname{sign}\xi_n)$. Щоб знайти розподіл $(\mu, s) = (\mu(\zeta^*), s(\zeta^*))$, спочатку знайдемо розподіл ζ^*. Маємо:

$$P\{\zeta^* = x\} =$$

$$= P\{(\operatorname{sign}\xi_1, \operatorname{sign}\xi_2, \ldots, \operatorname{sign}\xi_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n,)\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{\operatorname{sign}\xi_i = x_i\} = p^{\mu(x)} q^{s(x)-\mu(x)} f^{n-s(x)},$$

де x_i набуває значень $-1, 0, 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $s(x)$ — кількість компонент вектора x відмінних від нуля, $\mu(x)$ — кількість компонент рівних $+1$.

$$P\{\mu = k, s = j\} = P\{\mu(\zeta^*) = k, s(\zeta^*) = j\} =$$

$$= \sum_{x:\mu(x)=k, s(x)=j} P_{\zeta^*}(x) =$$

$$= \sum_{x:\mu(x)=k, s(x)=j} p^{\mu(x)} q^{s(x)-\mu(x)} f^{n-s(x)} =$$

$$= C_n^j C_j^k p^k q^{j-k} f^{n-j},$$

$k = 1, 2, \ldots, j;\ j = 1, 2, \ldots, n.$

5.7. Див. розв'язання задачі 5.8.

5.8. Розв'язання до пункту 2(ж). Спочатку знайдемо розподіл $\zeta = (\xi, \eta)$.

Випадкова величина $\zeta = \zeta(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$ є функцією на ймовірнісному просторі $\{\Omega, P\}$. Простір елементарних подій утворюють пари (i, j), $i, j = 1, 2, \ldots, 6$, а $P(i, j) = 1/36$ для всіх (i, j), $i, j = 1, 2, \ldots, 6$ (вибрана класична модель, оскільки кубики симетричні). Тому розподілом $\zeta = (\xi, \eta)$ є

$$P_\zeta(i, j) = P\{\zeta = (i, j)\} = 1/36,\ i, j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Таблична форма запису розподілу випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ наведена в табл. 21.5.1.

За відомим розподілом випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ (див. табл. 21.5.1), користуючись формулою (5.1.2) (як $g(s, t)$ і B розглядатимемо $g = g(s, t) = \max\{s, t\}$ і $B = [3, +\infty)$), знаходимо

$$P\{\max\{\xi, \eta\} \geq 3\} = 1 - P\{\max\{\xi, \eta\} < 3\} =$$

$$= 1 - \sum_{(i,j):\max\{i,j\}<3} P_\zeta(i, j) = 1 - (P_\zeta(1, 1) + P_\zeta(1, 2) +$$

$$+ P_\zeta(2, 1) + P_\zeta(2, 2)) = 1 - 4/36 = 8/9.$$

Таблиця 21.5.1. Розподіл $\zeta = (\xi, \eta)$

Значення ξ	Значення η					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Розв'язання до пункту 3(в). Спільний розподіл ξ і $\min\{\xi, \eta\}$ (розподіл вектора $(\xi, \min\{\xi, \eta\})$) знаходимо як розподіл функції

$$\theta = g(\xi, \eta) = (\xi, \min\{\xi, \eta\})$$

від $\zeta = (\xi, \eta)$ за відомим розподілом $\zeta = (\xi, \eta)$ (див. табл. 21.5.1). Користуючись формулою (5.1.2), обчислимо кілька значень $P_\theta(i, j) = P\{(\xi, \min\{\xi, \eta\}) = (i, j)\}$. Маємо

$$P\{(\xi, \min\{\xi, \eta\}) = (1, 1)\} = \sum_{(i,j):(i,\min\{i,j\})=(1,1)} P_\zeta(i, j) =$$

$$= P_\zeta(1, 1) + P_\zeta(1, 2) + \ldots + P_\zeta(1, 6) = 6/36;$$

$$P\{(\xi, \min\{\xi, \eta\}) = (1, 2)\} = \sum_{(i,j):(i,\min\{i,j\})=(1,2)} P_\zeta(i, j) = 0;$$

$$P\{(\xi, \min\{\xi, \eta\}) = (1, k)\} = \sum_{(i,j):(i,\min\{i,j\})=(1,k)} P_\zeta(i, j) = 0;$$

$k = 3, 4, 5, 6.$

Спільний розподіл ξ і $\min\{\xi, \eta\}$ (розподіл випадкової величини $\theta = (\xi, \min\{\xi, \eta\})$) наведено в табл. 21.5.2.

Таблиця 21.5.2. Розподіл $\theta = (\xi, \min\{\xi, \eta\})$

Значен-	Значення $\min\{\xi, \eta\}$					
ня ξ	1	2	3	4	5	6
1	6/36	0	0	0	0	0
2	1/36	5/36	0	0	0	0
3	1/36	1/36	4/36	0	0	0
4	1/36	1/36	1/36	3/36	0	0
5	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36	0
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Випадкові величини ξ і $\min\{\xi, \eta\}$ не є незалежними, оскільки їхній спільний розподіл відмінний від добутку розподілів випадкових величин ξ і $\min\{\xi, \eta\}$ (розподіл $\min\{\xi, \eta\}$ наведено у відповіді до пункту 1(б)).

Відповідь до пункту 1(а):

1	2	3	4	5	6
1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Відповідь до пункту 1(б):

1	2	3	4	5	6
11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Відповіді: 2(а) 1/6; 2(б) 3/4; 2(в) 1/3; 2(г) 1/3; 2(д) 1/9; 2(е) 4/9; 2(є) 1/9; 2(ж) 8/9; 2(з) 7/9.

Відповідь до пункту 3(б).

Розподіл випадкової величини $\theta = (\xi, \max\{\xi, \eta\})$ (спільний розподіл ξ та $\max\{\xi, \eta\}$) наведено в табл. 21.5.3.

Таблиця 21.5.3. Спільний розподіл ξ і $\max\{\xi, \eta\}$

Значення ξ	Значення $\max\{\xi, \eta\}$					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

Випадкові величини ξ і $\max\{\xi, \eta\}$ не є незалежними, оскільки їхній спільний розподіл (див. табл. 21.5.3), відмінний від добутку розподілів випадкових величин ξ і $\max\{\xi, \eta\}$ (розподіл $\max\{\xi, \eta\}$ наведено у відповіді до пункту 1(а)).

5.10. $P\{\xi = \eta\} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k.$

5.12.

$$P\{\xi + \eta = k\} = \begin{cases} \dfrac{k+1}{(n+1)^2}, & \text{якщо } 0 \leq k \leq n; \\ \dfrac{2n-k+1}{(n+1)^2}, & \text{якщо } n < k \leq 2n. \end{cases}$$

5.13. Випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda + \mu$.

Скористайтеся формулою (5.1.2) (коли спільний розподіл випадкових величин ξ і η дорівнює добуткові пуассонових розподілів, а $g = g(x, y) = x + y$).

5.15. Спільний розподіл ξ і $\max\{\xi, \eta\}$:

$P\{(\xi, \max\{\xi, \eta\}) = (i, j)\} =$

$$= \begin{cases} p^2(1-p)^{i+j}, & \text{якщо } i < j; \\ p(1-p)^i(1-(1-p)^{i+1}), & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i > j; \end{cases}$$

$i, j = 0, 1, \ldots$

Розподіл $\max\{\xi, \eta\}$: $P\{\max\{\xi, \eta\} = k\} =$
$= p^2(1-p)^k \left(2(1-(1-p)^k)/p + (1-p)^k\right), \ k = 0, 1, \ldots$

5.16.

1	2	3	4	5	6	7
1/18	3/18	3/18	3/18	3/18	3/18	2/18

5.17.

Розподіл випадкової величини $\eta = (\xi_1, \xi_2)$

Значення ξ_1	Значення ξ_2		
	0	1	2
0	1/8	1/4	1/8
1	1/8	1/4	1/8

5.18*. $p_1 + p_2 - p_1 p_2$.
5.19°. 1) 80/243. **5.20°.** 0,0536. **5.21°.** 5/16.
5.22. Далі "успіх" — виріб дефектний, "невдача" — виріб стандартний.

1. Імовірність одного успіху в 10 випробуваннях Бернуллі з імовірністю успіху p в одному випробуванні дорівнює $C_{10}^1 p(1-p)^9$.

2. Кількість невдач до першого успіху у послідовності незалежних випробувань має геометричний розподіл, тому шукана ймовірність дорівнює $(1-p)^{k-1}p$.

3. Випадкова величина ξ — число стандартних виробів (число невдач) до першої появи дефектного виробу (до першого успіху) має геометричний розподіл з параметром p:

$$P\{\xi = m\} = (1-p)^m p,\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Імовірність того, що наступні 10 виробів будуть стандартними, якщо перші l були стандартними дорівнює

$$P\{\xi \geq l + 10 \,|\, \xi \geq l\} =$$

$$= \frac{P\{\xi \geq l + 10, \xi \geq l\}}{P\{\xi \geq l\}} = \frac{P\{\xi \geq l + 10\}}{P\{\xi \geq l\}} =$$

$$= \sum_{k=l+10}^{\infty} (1-p)^k p \Big/ \sum_{k=l}^{\infty} (1-p)^k p = (1-p)^{10}.$$

Інше розв'язання. Позначимо через 1 появу у випробуванні стандартного виробу, через 0 — дефектного. Стохастичний експеримент — проведення $(l+10)$ незалежних випробувань, наслідок стохастичного експерименту — послідовність завдовжки $(l+10)$ складена з 0 і 1, при цьому даній послідовності завдовжки $(l+10)$ з k одиниць і $((l+10)-k)$ нулів приписується імовірність $(1-p)^k p^{l+10-k}$.

Нехай A_k — подія "у послідовності завдовжки $(k+10)$ перші k елементів одиниці", B_{k+10} — подія "у послідовності завдовжки $(k+10)$ останні 10 елементів одиниці". Шукана ймовірність

$$P(B_{l+10}|\, A_l) = \frac{P(B_{l+10} \cap A_l)}{P(A_l)} =$$

$$= \frac{P(A_{l+10})}{P(A_l)} = \frac{(1-p)^{l+10}}{(1-p)^l} = (1-p)^{10}.$$

5.23*. Коробки беруть навмання доти, поки одна з коробок не виявиться пустою. Випадкова величина ξ — кількість сірників, що залишилися, набуває значень $1, 2, \ldots, N$. Необхідно знайти розподіл ξ.

Подія $\{\xi = r\}$ відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається подія A_r — "одна коробка бралася N разів, а друга — $(N-r)$ разів" (коробки бралися $(2N-r)$ разів).

Імовірність події A_r можна обчислити так. Позначимо одну з коробок, скажімо, значком $*$. Через B^* позначимо подію "пустою виявилася позначена коробка", через B — "пустою виявилася непозначена коробка". Події B^* і B утворюють повну групу подій, із міркувань симетрії природно вважати, що $P(B^*) = 1/2$, $P(B) = 1/2$. Тоді

$$P(A_r) = \frac{1}{2} P(A_r/B^*) + \frac{1}{2} P(A_r/B).$$

Імовірність $P(A_r/B^*)$ обчислимо як імовірність N успіхів ("успіхів" — вибрана позначена коробка) у $(2N-r)$ випробуваннях Бернуллі з імовірністю успіху в одному випробуванні $1/2$, тобто

$$P(A_r/B^*) = C_{2N-r}^{N-r} (1/2)^N (1/2)^{N-r} = C_{2N-r}^{N} (1/2)^{2N-r}.$$

Аналогічно дістаємо

$$P(A_r/B) = C_{2N-r}^{N} (1/2)^{2N-r}.$$

Так що шукана ймовірність

$$P(\{\xi = r\}) = P(A_r) = C_{2N-r}^{N}(1/2)^{2N-r}.$$

5.24.
а) $1 - \frac{5^6}{6^6}$; б) $1 - \frac{17 \cdot 5^{11}}{6^{12}}$; в) $1 - \frac{268 \cdot 5^{16}}{6^{18}}$.
5.25°. $P\{\xi = k\} = C_{10}^{k}/2^{10}$; $k = 0, 1, \ldots, 10$.
5.26°.

$$P\{\xi = k\} = C_{10}^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}, \; k = 0, 1, \ldots, 10.$$

5.27°.

$$P\{\xi = k\} = C_{3}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}, \; k = 0, 1, 2, 3.$$

5.28. Імовірніше виграти:
1) 3 партії з 5;
2) 2 партії з 4;
3) 3 партії з 4;
4) не менше ніж 5 партій з 8;
5) не більше ніж n з $2n$ партій;
6) не більше ніж n з $2n+1$ партій.
5.29. Спочатку випишемо спільний розподіл $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, а потім розподіл функції $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$ від випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$.

Спільним розподілом $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ є

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_r) = P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{r} p(1-p)^{k_i} = p^r (1-p)^{k_1 + k_2 + \cdots + k_r},$$

$$k_1 = 0, 1, \ldots; \; k_2 = 0, 1, \ldots; \; \ldots; \; k_r = 0, 1, \ldots$$

Для кожного $k, \; k = 0, 1, \ldots,$

$$P_\eta(k) = P\{\eta = k\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r = k\} =$$

$$= \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_r):k_1+k_2+\dots+k_r=k} p^r(1-p)^{k_1+k_2+\dots+k_r} =$$

$$= \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_r):k_1+k_2+\dots+k_r=k} p^r(1-p)^k = C_{k+r-1}^{r-1} p^r(1-p)^k$$

(підсумовування ведеться за всіма послідовностями невід'ємних чисел $k_1, k_2, \dots, k_r$, що є розв'язками рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_r = k$, усього таких розв'язків — C_{k+r-1}^{r-1}, див. приклад 1.1.14).

Отже, сума

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$$

незалежних геометрично розподілених з параметром p випадкових величин має від'ємний біномний розподіл з параметрами (r, p).

5.30. Нехай ξ — кількість людей, що звернулися до бюро, η — кількість відмов. Події $\{\xi = k\}$, $k = 0, 1, 2 \dots$, утворюють повну групу подій. За формулою повної ймовірності

$$P\{\eta = s\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\eta = s | \xi = k\} P\{\xi = k\} =$$

$$= \sum_{k=s}^{\infty} P\{\eta = s | \xi = k\} P\{\xi = k\} =$$

$$= \sum_{k=s}^{\infty} \frac{k!}{s!(k-s)!} p^s (1-p)^{k-s} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^s \lambda^s}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{(k-s)!} (1-p)^{k-s} \lambda^{k-s} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^s \lambda^s}{s!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^s}{s!} e^{-\lambda p}.$$

Отже, кількість відмов має пуассонів розподіл з параметром λp.

5.31. $\dfrac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda p}$ (див. задачу 5.30).

5.32. Пуассонів розподіл з параметром λp (див. задачу 5.30).

5.34. Позначимо через k кількість місць у кожному гардеробі. Нехай μ_i — випадкова величина, що набуває значення 1, якщо i-й глядач вибрав вхід 1, і 0, якщо вибрав вхід 2, $i = 1, 2, \ldots, 1000$; μ_i — незалежні випадкові величини, кожна з розподілом

$$P\{\mu_i = x\} = (1/2)^x (1/2)^{1-x},\ x = 0, 1.$$

Тоді $\mu = \sum\limits_{i=1}^{1000} \mu_i$ — кількість глядачів, що увійшли через вхід 1, а $(1000 - \mu)$ — через вхід 2.

Подія "усі глядачі мають змогу роздягтися" у термінах випадкової величини μ запишеться так:

$$\{\mu < k, 1000 - \mu < k\} = \{1000 - k < \mu < k\}.$$

Кількість місць k (у кожному гардеробі) знаходиться як мінімальне натуральне число, що задовольняє умову

$$P\{1000 - k < \mu < k\} \geq 0,90.$$

Щоб знайти k, скористаємося інтегральною теоремою Муавра—Лапласа (формула (5.2.5)). Див. також задачу 5.39.

Відповідь: $k = 527$.

5.35. Упорядкувати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за зростанням.

5.37. $p_k = (1/2)^k$. Імовірність виграшу для того, хто починає першим, удвічі більша.

5.38. 1) Імовірніше, що стрільці отримають приз, оскільки $P\{\text{стрільці не отримають призу}\} = (1 - 1/5)^4 < 0,5$; 2) $3/2$.

5.39. Р о з в' я з а н н я (1°а). Частота ν_n дорівнює μ/n, де μ — число тих експериментів з n проведених, в яких відбулася подія.

Відхилення в експерименті Бюффона становить

$$2048/4040 - 0,5 = 0,007 = \varepsilon.$$

Необхідно обчислити

$$P\{|\nu_n - 0,5| < \varepsilon\}$$

для $n = 4040$.

Частоту $\nu_n = \mu/n$ подамо у вигляді

$$\nu_n = \mu/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

де μ_i набуває значення 1, якщо в експерименті подія відбулася і 0 — у супротивному разі. Випадкові величини μ_i незалежні й $q = P\{\mu_i = 0\} = 1/2$, $p = P\{\mu_i = 1\} = 1/2$. Оскільки число експериментів n велике ($n = 4040$), то для обчислення $P\{|\nu_n - 0,5| < \varepsilon\}$ можна скористатися

інтегральною граничною теоремою Муавра—Лапласа (див. (5.2.5)):

$$P\{|\nu_n - 0,5| \le \varepsilon\} = P\left\{0,5 - \varepsilon \le \frac{\mu}{n} \le 0,5 + \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{n(0,5-\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{n(0,5+\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}}\right\} =$$

$$= P\left\{-0,88 \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le 0,88\right\}.$$

А остання ймовірність з незначною похибкою дорівнює

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-0,88}^{0,88} \exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\} dt = 0,6212;$$

значення інтеграла знайдено за табл. 22.1.1 нормального розподілу.

5.40. Безпосередньо "перебираємо" всі варіанти. 1) 4/27; 2) 1/9; 3) 23/27.

5.41.

$$P_\xi(x_i) = P\{\xi = x_i\} = P\{(\xi,\eta) \in \{x_i\} \times \mathbb{R}^1\} =$$

$$= \sum_{(x_k, y_j) \in \{x_i\} \times \mathbb{R}^1} P_\zeta(x_k, y_j) = \sum_{y_j} P_\zeta(x_i, y_j).$$

5.42. Оскільки випадкові величини ξ і η незалежні, то їхнім спільним розподілом є

$$P\{(\xi, \eta) = (k, l)\} = p_k q_l, \;\; k = 0, 1, \ldots; \, l = 0, 1, \ldots$$

Далі, згідно з (5.1.2) маємо

$$P\{\zeta = m\} = P\{\xi + \eta = m\} =$$

$$= \sum_{(k,l): k+l=m} p_k q_l = \sum_{k=0}^{m} p_k q_{m-k}, \, m = 0, 1, \ldots$$

Розподіл

$$f_m = \sum_{k=0}^{m} p_k q_{m-k} = p_0 q_m + p_1 q_{m-1} + \ldots + p_m q_0, \, m = 0, 1, \ldots$$

називають згорткою розподілів $\{p_k\}$ і $\{q_l\}$.

Так що розподіл суми незалежних цілочислових випадкових величин дорівнює згортці розподілів доданків.

5.44. Число невдач ξ до r-го успіху у послідовності незалежних випробувань з імовірністю успіху p в кожному випробуванні має від'ємний біномний розподіл з параметрами $(r; p)$:

$$P_\xi(k) = C_{k+r-1}^{k} p^r (1-p)^k, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

Розв'язування задачі зводиться до обчислення ймовірності того, що число невдач до 4-го успіху дорівнює 6 (ймовірність успіху в кожному випробуванні 1/2). Шукана ймовірність

$$C_{6+4-1}^{4-1} (1/2)^4 (1 - 1/2)^6 = C_9^3 (1/2)^{10}.$$

5.45. Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$; $P(\omega_1) = 1/2, \;\; P(\omega_2) = 1/2$. Випадкові величини $\xi = \xi(\omega)$, $\eta = \eta(\omega)$ задамо рівностями

$$\xi(\omega_1) = -1, \;\; \xi(\omega_2) = 1;$$

$$\eta(\omega_1) = 1,\ \eta(\omega_2) = -1.$$

Розподіли

$$P_\xi((-1)^i) = 1/2,\ i = 1, 2;$$

$$P_\eta((-1)^j) = 1/2,\ j = 1, 2,$$

співпадають, але

$$\xi \neq \eta.$$

5.46°.

$$P\{\xi = k\} = C_3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

5.47. Імовірністю $k = n - 1$ невдач до r-го успіху дорівнює

$$C_{k+r-1}^k p^r (1-p)^k = C_{n+r-2}^{n-1} p^r (1-p)^{n-1},$$

див. також розв'язання до задачі 5.44.

21.6 До глави 6

6.1°. 1) $-1/8$; 2) $(1+e)(2+\sqrt{3})/12$.
6.2. $M\xi = 3/5$, $D\xi = 28/75$,

x_i	0	1	2
$P_\xi(x_i)$	7/15	7/15	1/15

6.3°. 27/40. **6.4°.** $-\sqrt{3}/8$. **6.6°.** 0.
6.7°. 1) 0; 2) 0; 3) $3\sqrt{3}/4$. **6.8°.** 69/8.
6.9°. 1) $\sqrt{3}$; 2) $(8+\sqrt{3})/4$.
6.10. $M\eta = 13/12$; $D\eta = 59/144$,

y_j	0	1	2
$P_\xi(y_j)$	1/6	7/12	1/4

6.11°. $(2-\sqrt{3})/12$. **6.12°.** 1) $(20+\sqrt{3})/8$; 2) $-5/2$.
6.13. $5/6$. **6.14.** $29/54$.

6.15. 1) $M\xi = 0$; 2) $M|\xi| = \dfrac{n(n+1)}{2n+1}$.

6.16. $M\xi = \lambda$, $M\xi^2 = \lambda + \lambda^2$, $D\xi = \lambda$.

6.17. Розв'язання до пункту 3):

$$D\xi\eta = M(\xi\eta - M\xi\eta)^2 = M(\xi\eta)^2 - 2M\xi\eta M\xi\eta + (M\xi\eta)^2 =$$

$$= M\xi^2\eta^2 - (M\xi\eta)^2 = M\xi^2 M\eta^2 - (M\xi)^2(M\eta)^2.$$

Відповіді: 1) $1 - e^{-\lambda}$; 2) λ^2; 3) $\lambda^2(1+2\lambda)$; 4) 2λ.

6.18. Для $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Здиференціювавши останню рівність і перемноживши на x, одержимо

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}. \tag{21.6.1}$$

Здиференціювавши рівність (21.6.1) і перемноживши її на x, одержимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}. \tag{21.6.2}$$

З теореми 6.1.1, скориставшись рівностями (21.6.1) і (21.6.2) (коли $x = 1-p$), маємо:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = p\frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{p},$$

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2},$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

6.19. Число підкидань ξ кубика до першої появи шістки — геометрично розподілена випадкова величина з параметром $p = 1/6$. Тому $M\xi = 5$; $P\{\xi \le 2\} = 91/6^3$.

6.20.

$$1)\, Mx^{\xi} = \frac{p}{1-(1-p)x};\ 2)\, Me^{it\xi} = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$$

6.21. 1) $Mx^{\xi} = e^{\lambda(x-1)}$; 2) $Me^{it\xi} = \exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}$.

6.22°. $M\xi = 70$; $D\xi = 21$.

6.24°. $P\{\xi = k\} = C_{10}^k/2^{10}$, $k = 0, 1, \ldots, 10$; $M\xi = 5$; $D\xi = 2{,}5$.

6.25°. $P\{\xi = k\} = C_{10}^k(1/6)^k(5/6)^{10-k}, k = 0, 1, \ldots, 10$; $M\xi = 5/3$; $D\xi = 25/18$.

6.26°. $M\xi = 3/4$; $D\xi = 9/16$.

6.27*. Розподіл випадкової величини ξ співпадає з розподілом суми $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$ незалежних випадкових величин ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром p. Див. також задачі 5.29 і 6.18.

6.30. $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k \exp\{it_k\}$.

6.31*. Подайте вектор $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ як суму векторів

$$(\mu_1^k, \mu_2^k, \ldots, \mu_r^k) = (I_{X_1}(\xi_k), I_{X_2}(\xi_k), \ldots, I_{X_r}(\xi_k)),$$

$k = 1, 2, \ldots, r$, де I_A — індикатор множини A.

Див. також задачу 6.30.

Відповідь: $\left(\sum\limits_{k=1}^{r} p_k \exp\{it_k\}\right)^n$.

6.32. Позначимо через η кількість позитивних аналізів на k проведених (за способом 1). Випадкова величина η має біномний розподіл з параметрами $(n; p)$. Імовірність хоча б одного позитивного аналізу на k, а отже позитивного аналізу змішаної крові k людей, дорівнює

$$P\{\eta \ge 1\} = 1 - P\{\eta = 0\} = 1 - C_k^0 p^0 (1-p)^k = 1 - (1-p)^k.$$

Нехай випадкова величина ξ — кількість аналізів, необхідних для обстеження крові k осіб, коли обстеження ведеться способом 2. Випадкова величина ξ може набувати два значення: 1 і $k+1$. Очевидно,

$$P\{\xi = 1\} = P\{\eta = 0\} = C_k^0 p^0 (1-p)^k = (1-p)^k,$$

$$P\{\xi = k+1\} = P\{\eta \geq 1\} = 1 - P\{\eta = 0\} = 1 - (1-p)^k.$$

За розподілом ξ знаходимо $M\xi$:

$$M\xi = 1(1-p)^k + (k+1)(1-(1-p)^k) = k(1-(1-p)^k) + 1.$$

6.34.

1° Нехай

$$P\{\xi = k\} = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta},\ \theta > 0,\ k = 0, 1, \ldots$$

Тоді

$$P(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\theta)^k}{k!} e^{-\theta} = e^{\theta(t-1)}.$$

2° Нехай

$$P\{\xi = k\} = (1-\theta)^k \theta,\ \theta \in (0;1),\ k = 0, 1, \ldots$$

Тоді

$$P(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} t^k (1-\theta)^k \theta = \theta \sum_{k=0}^{\infty} (t(1-\theta))^k = \frac{\theta}{1 - t(1-\theta)}.$$

3° Нехай

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},\ \theta \in (0;1),\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тоді

$$P(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{n} t^k C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (t\theta)^k (1-\theta)^{n-k} = (t\theta + (1-\theta))^n.$$

6.35. Нехай p_k, $k = 0, 1, \ldots$, і f_n, $n = 0, 1, \ldots$, — імовірнісні розподіли,

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k, \ |t| \le 1, \ F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k, \ |t| \le 1$$

їхні твірні. Припустимо, що

$$P(t) = F(t), \ |t| \le 1.$$

Тоді $P(0) = F(0)$, тому $p_0 = q_0$. Оскільки степеневі абсолютно збіжні ряди можна почленно диференціювати, то

$$P'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} p_k = Q'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} f_k.$$

Отже, для $t = 0$ маємо $P'(0) = F'(0)$ або $p_1 = q_1$ і т. д.

$$p_k = q_k, \ k = 0, 1, \ldots$$

6.36. Якщо ξ і η — незалежні випадкові величини, то

$$P_{\xi+\eta}(t) = Mt^{\xi+\eta} = Mt^{\xi} t^{\eta} = Mt^{\xi} Mt^{\eta} = P_{\xi}(t) P_{\eta}(t).$$

6.37. Твірна суми незалежних пуассонових випадкових величин

$$P_{\xi+\eta}(t) = P_{\xi}(t) P_{\eta}(t) = e^{\theta_1 (t-1)} e^{\theta_2 (t-1)} = e^{(\theta_1+\theta_2)(t-1)}.$$

З іншого боку $e^{(\theta_1+\theta_2)(t-1)}$ — твірна функція пуассонової випадкової величини з параметром $\theta_1 + \theta_2$. Тому згідно з теоремою єдиності (див. задачу 6.35) розподіл $\xi + \eta$ збігається з пуассоновим розподілом з параметром $\theta_1 + \theta_2$.

6.38. Твірна суми незалежних біномно розподілених випадкових величин

$$P_{\xi+\eta}(t) = P_{\xi}(t) P_{\eta}(t) =$$

$$= (t\theta + (1-\theta))^n (t\theta + (1-\theta))^m = (t\theta + (1-\theta))^{n+m}.$$

З іншого боку $(t\theta + (1-\theta))^{n+m}$ — твірна функція біномно розподіленої випадкової величини з параметрами $(n+m, \theta)$. Тому згідно з теоремою єдиності (див. задачу 6.35) розподіл суми $\xi+\eta$ збігається з біномним розподілом з параметрами $(n+m, \theta)$.

6.39.

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} ap^\omega = a\sum_{\omega\in\Omega} p^\omega = a\frac{1}{1-p} = 1.$$

Звідси $a = 1-p$, тому $P(\omega) = (1-p)p^\omega, \omega \in \Omega$, або, що те саме

$$P(k) = (1-p)p^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

$$M\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(1-p)p^k = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

6.40.

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} a\frac{1}{\omega!} = \sum_{k=0}^{\infty} a\frac{1}{k!} = ae.$$

Звідси $a = e^{-1}$, тому $P(\omega) = e^{-1}\frac{1}{\omega!},\ \omega \in \Omega$, або, що те саме

$$P(k) = \frac{1}{k!}e^{-1},\ k = 0, 1, \ldots$$

$$M\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\frac{1}{k!}e^{-1} = e^{-1}e^2 = e.$$

$$M\xi = e,\ D\xi = M(\xi)^2 - (M\xi)^2 = e^3 - e^2.$$

6.41. Див. розв'язання до задач 6.39, 6.40.

$$a = e^{-\lambda},\ M\xi = e^\lambda,\ D\xi = M(\xi)^2 - (M\xi)^2 = e^{3\lambda} - e^{2\lambda}.$$

6.42.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{\omega\in\Omega}(\xi(\omega) - M\xi(\omega))^2 P(\omega) \geq$$

$$\geq \sum_{\omega:|\xi(\omega)-M\xi(\omega)|\geq\varepsilon} (\xi(\omega)-M\xi(\omega))^2 P(\omega) \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \sum_{\omega:|\xi(\omega)-M\xi(\omega)|\geq\varepsilon} P(\omega) = \varepsilon^2 P\{\omega : |\xi(\omega)-M\xi(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

6.43.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| \geq \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0.$$

6.44. Випадкова величина ξ є функцією від вектора $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$\xi = g(\zeta) = g(\xi, \eta).$$

Тому

$$M\xi = Mg(\xi, \eta) = \sum_{x_i, y_j} x_i P_\zeta(x_i y_j).$$

6.45. Позначимо число очок, що випали на i-у кубику, через $\xi_i, i = 1, 2, 3$. Тоді $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ — сума очок, що випали на трьох кубиках. Випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 — незалежні, мають такі розподіли:

$$P_{\xi_1}(i) = 1/2,\ i = 1, 2;$$

$$P_{\xi_2}(j) = 1/2,\ j = 3, 4;$$

$$P_{\xi_3}(k) = 1/2,\ k = 5, 6.$$

Тому

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + M\xi_3;$$

$$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3.$$

Знайдемо розподіл $\xi = \xi_1+\xi_2+\xi_3$. Означимо випадкові величини η_1, η_2, η_3 так:

$$\xi_1 = (\xi_1 - 1) + 1 = \eta_1 + 1,$$

$$\xi_2 = (\xi_2 - 3) + 3 = \eta_2 + 3,$$

$$\xi_3 = (\xi_3 - 5) + 5 = \eta_3 + 5.$$

Випадкові величини η_1, η_2, η_3 незалежні як функції від незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 і однаково розподілені, кожна з розподілом

n	0	1
p_n	1/2	1/2

Тоді

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 9 = \eta + 9,$$

де $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$. Очевидно η має біномний розподіл з параметрами $(3, 1/2)$. Розподіл функції $\xi = \eta + 9$ від випадкової величини η знаходимо згідно з (5.1.1).

21.7 До глави 7

7.2. $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$; $B = \{(0,0)\}$.

7.10. Розгляньте сукупність усіх алгебр $\mathfrak{A}_\alpha$, які містять клас $\mathfrak{K}$, і доведіть, що $\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}(\mathfrak{K})$.

7.13. Розгляньте сукупність усіх σ-алгебр $\mathfrak{F}_\alpha$, які містять клас $\mathfrak{K}$, і доведіть, що $\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{F}_\alpha = \sigma(\mathfrak{K})$.

7.14. Нехай $\mathfrak{K}_1$ — клас проміжків $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}^1\}$ (нагадаємо, що $\sigma(\mathfrak{K}_1) = \mathfrak{B}^1$). Має місце включення

$$\mathfrak{K}_1 \subset \sigma(\mathfrak{K}).$$

Справді, $\sigma(\mathfrak{K})$ містить $\{a\}$, оскільки

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{n} (a - 1/n, a + 1/n),$$

а проміжок $[a, b)$ можна подати у вигляді

$$[a, b) = (a, b) \cup \{a\}.$$

З означення σ-алгебри, породженої класом $\mathfrak{K}_1$, і включення $\mathfrak{K}_1 \subset \sigma(\mathfrak{K})$ маємо

$$\sigma(\mathfrak{K}_1) \subset \sigma(\mathfrak{K}).$$

А оскільки $\sigma(\mathfrak{K}_1) = \mathfrak{B}^1$, то $\mathfrak{B}^1 \subset \sigma(\mathfrak{K})$.

Далі, $\mathfrak{K} \subset \sigma(\mathfrak{K}_1) = \mathfrak{B}^1$ (це встановлюється аналогічно тому, як встановлюється включення $\mathfrak{K}_1 \subset \sigma(\mathfrak{K})$). Тому з означення σ-алгебри, породженої класом $\mathfrak{K}$, і включення $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}^1$ маємо

$$\sigma(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{B}^1.$$

Отже,

$$\sigma(\mathfrak{K}) = \mathfrak{B}^1.$$

7.15. Вказівка. Див. розв'язання задачі 7.14.

7.16. Вказівка. Див. розв'язання задачі 7.14.

7.17. Вказівка. Див. розв'язання задачі 7.14.

7.22. σ-Алгебру $\sigma(\mathfrak{K})$ утворює клас не більш ніж зліченних об'єднань неперетинних множин A_i.

Нехай

$$B = \bigcup_{i \in I} A_i,\ I \subset \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,$$

тоді

$$\overline{B} = \Omega \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in \overline{I}} A_i,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Нехай

$$B_k = \bigcup_{i \in I_k} A_i,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ I_k \subset \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots,$$

тоді

$$\bigcap_k B_k = \bigcap_k \Big(\bigcup_{i \in I_k} A_i \Big) = \bigcup_{i \in I} A_i,\ I = \bigcap_k I_k.$$

21.8 До глави 8

8.1°. 1) $(1+\ln 2)/2$; 2) $(1-e^{-1})/2$; 3) $1/3$; 4) $1/4+$ $+e^{-1}+3(\ln 3-\ln 4)/4$; 5) $1-2/3^4$; 6) $\pi/16$; 7) $1/18$; 8) $1/2+$ $+\ln 3-\ln 2$; 9) $1/6$; 10) $1/9$.

8.2°. 1) $(1-\ln 2)/2$; 2) $\pi/64$; 3) $1-\pi/4$; 4) $\pi/4$.

8.3°. 1) $1/4$; 2) $8/9$; 3) $7/16$; 4) $3/16$; 5) $1-\pi/4$; 6) $1-\pi/4$; 7) $\pi/8$; 8) $a\sqrt{a}$; 9) $1-a\sqrt{a}$; 10) $1-1/e$; 11) $\pi/4$; 12) $1-\pi/8$; 13) $1/2$; 14) $3/4$.

8.4. 1) $1/4$; 2) $1/4$; 3) $1/4$; 4) $1/4$; 5) $3/16$; 6) $1/2$; 7) $1/8$; 8) $1/4$; 9) $3/8$; 10) $1/8$; 11) $1/2$; 12) $5/8$; 13) $\pi/4$; 14) $1/2$; 15) $1/4$; 16) $(\pi-2)/4$.

8.5°. $a/(a+b-2r)$. **8.6.** $1-(1-k)^2$.

8.7. Якщо ξ — момент підходу до причалу першого судна, η — другого, то подія “одному з суден доведеться чекати звільнення причалу” можна подати у вигляді

$$\{(\xi,\eta) : \eta\in[\xi,\xi+1]\}\cup\{(\xi,\eta) : \xi\in[\eta,\eta+2]\}.$$

Відповідь: 0,12065.

8.8°. $(a-d)^2/a^2$. **8.9.** $\dfrac{1}{2\pi}n\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

8.10. а) $1-\frac{2}{\pi}\arccos r$; б) $\begin{cases} \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{r}{2}, & \text{якщо } r\le 2;\\ 1, & \text{якщо } r>2.\end{cases}$

8.11°. 1) r^2/R^2. **8.12°.** 1) r^{2N}/R^{2N}.

8.13. $C_5^2(b/a)^2(1-b/a)^3$. **8.14.** $1/2^{60}$.

8.15. 1) $1/2$; 2) $1/2$; 3) t^3.

8.16. 1) $1-(1-t)^2$; 2)(а) $1/2$; 2)(б) $(1-q)^2/2$.

8.17°. Нехай ξ_i — відстань від i-ї точки до центра сфери, $i=1,2,\ldots,N$. Тоді шукана ймовірність

$$P\{\min\{\xi_i\}>r\}=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i>r\}\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P\{\xi_i>r\}=(1-r^3/R^3)^N.$$

8.18. $1/2$. **8.19.** $13/24$; $11/24$. **8.20.** $1/3$.

8.21°. $2/\pi$. **8.24.** 1) $\pi/4$; 2) $\pi/(2\sqrt{3})$.

8.25. 1) $1/3$; 2) $1/6$. **8.26.** $2/9$.

8.27*. Монету розглядатимемо як циліндр, радіус якого r і висота h. Слова "навмання кидають" природно розуміти як рівноймовірну орієнтацію циліндра відносно вертикального напряму. Оскільки циліндр однорідний, то центр описаної навколо нього сфери співпадає з його центром мас. Циліндр упаде на бокову поверхню, якщо промінь, спрямований вертикально вниз із центру мас, перетне його бокову поверхню. Відповідну ймовірність обчислюємо як відношення площі сферичного поясу, описаного навколо циліндра, до площі всієї сфери.

8.28. 1) $1/9$; 2) $8/9$; 3) $8/27$.

8.29. За будь-якого повороту кола ймовірність події "трикутник гострокутний" (і не тільки цієї події) залишається незмінною, тому можна вважати, що з трьох вершин A, B, C одна, наприклад C, фіксована. Дві інші вибирають навмання. Задаватимемо положення точок A і B відносно точки C величинами дуг $CA = \alpha$ і $CB = \beta$ (рис. 21.8.1), відкладаючи їх проти руху годинникової стрілки, дуги вимірюватимемо в радіанах.

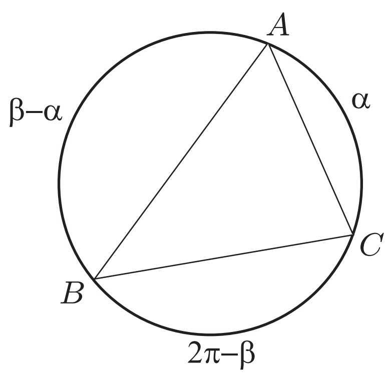

Рис. 21.8.1: До задачі 8.29

Трикутник ABC гострокутний (коли $\alpha < \beta$), якщо кожна з дуг $CA = \alpha, AB = \beta - \alpha, BC = 2\pi - \beta$ менша π, тобто

$$\beta > \alpha,\ \alpha < \pi,\ \beta - \alpha < \pi,\ \beta > \pi, \qquad (21.8.1)$$

або (коли $\beta < \alpha$) кожна з дуг $CB = \beta, BA = \alpha - \beta$, $CA = 2\pi - \alpha$ менша π, тобто

$$\beta < \alpha,\ \beta < \pi,\ \alpha - \beta < \pi,\ \alpha > \pi. \tag{21.8.2}$$

Далі, упорядкованій парі чисел (α, β), $0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$ відповідає одна точка квадрата $[0, 2\pi] \times \times [0, 2\pi]$ на площині з осями $O\alpha$ і $O\beta$ і навпаки. А отже, множині дуг α, β, які задовольняють одну з умов: (21.8.1) або (21.8.2), відповідає множина точок квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, координати яких задовольняють одну з умов: (21.8.1) або (21.8.2). Ця множина точок квадрата має вигляд, аналогічний зображеному на рис. 8.1.2.

Шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{2\pi^2/2}{(2\pi)^2} = \dfrac{1}{4}$.

8.30. 1) $3/4$; 2) $1/4$ (див. також задачу 8.29).

8.31. Зафіксуємо одну з точок, наприклад A. Тоді положення інших можна описати дугами AB, AC, AD, які відкладаються проти руху годинникової стрілки (див. також задачу 8.29).

Відповідь: $1/3$.

8.34(1°). Довжину відрізка позначимо через ζ (ζ розподілена рівномірно на $[0; d]$). Положення відрізка відносно точок kd $(k = 0, 1, \ldots, n)$ визначається його серединою (позначимо її координату через η).

Достатньо розглянути кидання навмання середини відрізка на $[d/2, 3d/2]$. Відрізок “накриває” точку з координатою d тоді і тільки тоді, коли $|d - \eta| \le \zeta/2$. Необхідно обчислити

$$P\{|d - \eta| \le \zeta/2\}.$$

Ця ймовірність обчислюється як геометрична ймовірність події $|d - \eta| \le \zeta/2$ при киданні навмання точки (η, ζ) у квадрат $[d/2, 3d/2] \times [0, d]$ и дорівнює $1/2$.

Відповідь до 8.34(2°): $l/(2d)$.

8.35°. $\pi/4$. **8.36°.** $(a - r)/a$. **8.37°.** $2l/L$.

8.38°. а) x, $0 \le x \le 1$.

8.42. Занумеруємо частини відрізка зліва направо числами від 1 до n. Точки вважатимемо розрізненними, наприклад, занумерованими. Кожній точці припишемо номер частини відрізка, на яку вона потрапила.

Таким чином, наслідком стохастичного експерименту, що полягає у киданні n точок на відрізок $[0;1]$, розбитий на n частин і реєстрації номерів частин, на які потрапили точки, є послідовність завдовжки n, складена з чисел від 1 до n.

Оскільки точки на відрізок кидають навмання, то імовірність точці потрапити на дану частину відрізка дорівнює $1/n$. Точки на відрізок кидають незалежно, тому імовірність того, що вони потраплять на частини с номерами $u_1, u_2, \ldots, u_n$, дорівнює $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n^n}$ (імовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку їхніх імовірностей). З іншого боку, n^n — це число послідовностей завдовжки n, складених з чисел від 1 до n. Тому як математичну модель стохастичного експерименту розглядатимемо класичну модель.

1) Подія "усі точки потраплять до однієї частини" описується послідовностями завдовжки n, складеними з однакових чисел. Таких послідовностей n, тому шукана ймовірність дорівнює $n/n^n = 1/n^{n-1}$.

2) Подія "всі частини виявляться зайнятими" описується послідовностями завдовжки n, складеними з чисел $1, 2, \ldots, n$, у яких зустрічається кожне з чисел $1, 2, \ldots, n$. Таких послідовностей $n!$, тому шукана ймовірність дорівнює $n!/n^n$.

3) Подія "не зайнята тільки крайня ліва частина" описується послідовностями завдовжки n, складеними з чисел $2, 3, \ldots, n$, кожне з яких зустрічається хоча б один раз. Число таких послідовностей дорівнює $C_n^2(n-1)(n-2)!$, а, отже, шукана ймовірність дорівнює $C_n^2(n-1)!/n^n$.

6) Подія "зайняті рівно s частин" описується послідовностями завдовжки n, складеними з s різних чисел (кожне від 1 до n). Спочатку виберемо s різних чисел (C_n^s способами). Число послідовностей, складених з цих s чисел, дорівнює

$$\sum C_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)$$

(підсумовування ведеться за послідовностям $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, для яких $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n, k_1 \geq 1,\ k_2 \geq 1,\ \ldots, k_s \geq 1)$.

Отже шукана ймовірність дорівнює

$$C_n^s \sum C_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)/n^n.$$

21.9 До глави 9

9.1°. 1/4. **9.2°.** 3/4. **9.3°.** 1) 7/12; 2) 1/3.

9.4°. Розв'язання (пункт (5)). Кидання пари точок на відрізок [0; 1] рівносильне киданню однієї точки у квадрат [0; 1] × [0; 1] і навпаки (див. також приклади 8.1.1, 8.1.2, 8.1.3).

Позначимо

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{\max\{\xi^2, \eta\} < x\}.$$

Очевидно, $F_\zeta(x) = 0$, якщо $x < 0$, і $F_\zeta(x) = 1$, якщо $x > 1$. Якщо $0 < x \le 1$, то

$$F_\zeta(x) = P\{\max\{\xi^2, \eta\} < x\} =$$

$$= P\{\xi < \sqrt{x}, \eta < x\} = P\{(\xi, \eta) \in A\},$$

де $A = [0; \sqrt{x}] \times [0; x]$. Імовірність події

$$\{(\xi, \eta) \in A\}$$

обчислюємо як геометричну ймовірність:

$$F_\zeta(x) = P\{(\xi, \eta) \in A\} = \frac{L(A)}{L([0;1] \times [0;1])} = \frac{x\sqrt{x}}{1^2} = x^{3/2}.$$

Отже,

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x^{3/2}, & \text{якщо } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Відповіді:

$$1) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x^2, & \text{якщо } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

$$2) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1-(1-x)^2, & \text{якщо } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

$$3) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ x(1-\ln x), & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

$$4) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x^2/2, & \text{якщо } 0 \le x < 1; \\ 1-(2-x)^2/2, & \text{якщо } 1 \le x < 2; \\ 1, & \text{якщо } x \ge 2; \end{cases}$$

$$6) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1-(1-x)^2, & \text{якщо } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

9.5°. Функція розподілу ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ x/l, & \text{якщо } 0 < x \le l; \\ 1, & \text{якщо } x > l; \end{cases}$$

щільність розподілу ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1/l, & \text{якщо } 0 < x \le l; \\ 0, & \text{якщо } x > l. \end{cases}$$

9.6.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \sqrt{x}/2, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ (\sqrt{x}+1)/4, & \text{якщо } 1 < x \le 9; \\ 1, & \text{якщо } x > 9. \end{cases}$$

9.7.

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [0;2]; \\ 1/2, & \text{якщо } x \in [0;2]. \end{cases}$$

9.8.

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1; \\ 1/x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

9.9.
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1/4; \\ x^{-\frac{3}{2}}/6, & \text{якщо } 1/4 < x \le 1; \\ x^{-\frac{3}{2}}/3, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$
9.10.
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [0;1]; \\ 1, & \text{якщо } x \in [0;1]. \end{cases}$$
9.11.
$$p_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)x}, & \text{якщо } x \in [e^a; e^b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [e^a; e^b]. \end{cases}$$
9.12*. Скористайтесь (9.1.3).
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [0;1]; \\ \lambda \exp\left\{-\lambda(1-1/x)\right\}/x^2, & \text{якщо } x \notin [0;1]. \end{cases}$$
9.13.
$F_\eta(x) = 1 - F(-x+0).$

9.14. Спочатку знайти розподіл дискретної випадкової величини $\eta = \operatorname{sign}\xi$, потім за розподілом η виписати її функцію розподілу:
$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -1; \\ F(0), & \text{якщо } -1 < x \le 0; \\ F(0+0), & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$
9.15.
$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ x, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$
9.16.
$$1)\; p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ p(x) + p(-x), & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$
$$2)\; p_\eta(x) = \frac{1}{|a|} p(x/a).$$
9.17.
$$F_\eta(x) = \begin{cases} F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}+0), & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$
9.18. Відповідь до пункту (1):
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ \lambda\left(e^{-\lambda(x+1)} + e^{\lambda(x-1)}\right), & \text{якщо } x \in [0;1]; \\ \lambda e^{-\lambda(x+1)}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

9.19. Випадкова величина $\eta = F(\xi)$ розподілена рівномірно на відрізку $[0;1]$.

9.20. 1) $p_\eta(x) = \frac{1}{2} p\left(\frac{1-x}{2}\right)$;

2) $p_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(p(\sqrt{x}) + p(-\sqrt{x})), & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$

9.21.

1) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ F(\ln x), & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ F(x) - F(-x+0), & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

9.22. 1) $2x - x^2$; 2) $x(1 - \ln x)$. **9.23.** $(F(x))^n$.

9.24. 1) $\prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x)$; 2) $1 - \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - F_i(x))$.

9.25.

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \prod_{j=1, j\ne i}^{n} \left(\int_{-\infty}^{x} p_j(y)dy \right);$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \prod_{j=1, j\ne i}^{n} \left(\int_{x}^{+\infty} p_j(y)dy \right).$$

9.26.

$$1)\ np(x) \left(\int_{-\infty}^{x} p(y)dy \right)^{n-1}; \quad 2)\ np(x) \left(\int_{x}^{+\infty} p(y)dy \right)^{n-1}.$$

9.27. $a = \lambda/2, \quad F_\eta(x) = \begin{cases} e^{\lambda x}/2, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}/2, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

9.28. Можна запропонувати два підходи до розв'язання цієї задачі.

Нехай ξ — координата кинутої на відрізок $[0;1]$ точки, тоді довжина η меншої частини відрізка дорівнює

$$\eta = g(\xi) = \min\{\xi, 1 - \xi\}.$$

Згідно з означенням

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{\min\{\xi, 1-\xi\} < x\}.$$

Очевидно, $F_\eta(x) = 0$, якщо $x \le 0$ і $F_\eta(x) = 1$, якщо $x \ge$ $\ge 1/2$. Якщо $0 < x \le 1/2$, то

$$F_\eta(x) = P\{\min\{\xi, 1-\xi\} < x\} = 1 - P\{\min\{\xi, 1-\xi\} \ge x\} =$$

$$= 1 - P\{\xi \ge x, 1-\xi \ge x\} = 1 - P\{x \le \xi \le 1-x\}.$$

Імовірність $P\{x \le \xi \le 1-x\}$ обчислюється як геометрична ймовірність.

Інший підхід.

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{g(\xi) < x\} = \int\limits_{t: g(t) < x} p_\xi(t)dt =$$

$$= \int\limits_{t: \min\{t, 1-t\} < x} p_\xi(t)dt.$$

Отже,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 2x, & \text{якщо } 0 < x \le 1/2; \\ 1, & \text{якщо } x > 1/2. \end{cases}$$

9.29. Див. розв'язання задачі 9.28.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le l/2; \\ (2x-l)/l, & \text{якщо } l/2 < x \le l; \\ 1, & \text{якщо } x > l. \end{cases}$$

9.30.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1-(1-x/T)^2, & \text{якщо } 0 < x \le T; \\ 1, & \text{якщо } x > T; \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 2(1-x/T)/T, & \text{якщо } 0 < x \le T; \\ 0, & \text{якщо } x > T. \end{cases}$$

9.32. Скористаємося формулою (9.1.3):

$$F(x) = P\left\{\frac{1}{\xi} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{t:\, 1/t < x} \exp\left\{-t^2/2\right\} dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1/x}^{0} \exp\left\{-t^2/2\right\} dt, & \text{якщо } x < 0; \\ 1/2, & \text{якщо } x = 0; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1/x}^{+\infty} \exp\left\{-t^2/2\right\} dt, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

9.33. $F_\eta(x) = 0$, якщо $x \le 0$, а якщо $x > 0$, то

$$F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-1/\sqrt{x}} \exp\{-t^2/2\}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \exp\{-t^2/2\}\, dt.$$

9.34. Випадкова величина симетрично розподілена, якщо

$$F(x) = 1 - F(-x + 0)$$

(умова симетричності в термінах функції розподілу).

Випадкова величина симетрично розподілена, якщо

$$p(x) = p(-x)$$

(умова симетричності в термінах щільності розподілу).

9.35. Розв'язання (пункт (1)):

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{1 - \xi < x\} =$$

$$= 1 - P\{\xi < 1 - x\} = 1 - F_\xi(1 - x),$$

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \frac{d}{dx}(1 - F_\xi(1 - x)) = p_\xi(1 - x) = p_\xi(x).$$

Відповідь: $\eta = 1 - \xi$ рівномірно розподілена на проміжку $[0; 1]$.

9.36.

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\left\{\frac{\eta - a}{\sigma} < x\right\} = P\{\eta < a + \sigma x\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{a+\sigma x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-u^2/2\right\} du.$$

9.37. Випадкова величина η розподілена $N_{a;\sigma^2}$.
9.38. Скористаємося формулою (9.1.4):

$$F_{\eta^+}(x) = P\{\max\{0,\eta\} < x\} =$$

$$= \int\limits_{t:\max\{0,t\}<x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-t^2/2\right\} dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left\{-t^2/2\right\} dt, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

9.39. $F_{\eta^+}(x) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} dt, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

9.40.

$$F_\eta(x) = P\{(\xi - a)^+ < x\} =$$

$$= \int\limits_{t:(t-a)^+<x} P_\xi(dt) = \int\limits_{t:\max\{0,t-a\}<x} P_\xi(dt) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ P_\xi(-\infty, x+a), & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Отже,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ F(x+a), & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

9.41. Скористайтеся формулою (9.1.4) (див. також розв'язання до задачі 9.40).

$$F_\eta(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x+a} p(t)\, dt, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Випадкова величина $\eta = (\xi - a)^+$ є абсолютно неперервною, якщо $p(t) = 0$ для $t \le a$.

9.42.

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{\min\{\xi, L\} < x\} =$$

$$= \int\limits_{t:\min\{t,L\}<x} P_\xi(dt) = \begin{cases} P_\xi(-\infty, x), & \text{якщо } x \le L; \\ 1, & \text{якщо } x > L. \end{cases}$$

Отже,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} F(x), & \text{якщо } x \le L; \\ 1, & \text{якщо } x > L. \end{cases}$$

9.43. Див. розв'язання задачі 9.42.

9.50.

1) $F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0]; \\ x, & \text{якщо } x \in (0; 1]; \\ 1, & \text{якщо } x \in (1; \infty); \end{cases}$

2) $F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0]; \\ x, & \text{якщо } x \in (0; 1]; \\ 1, & \text{якщо } x \in (1; \infty); \end{cases}$

3) $F_{\xi_3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0]; \\ x, & \text{якщо } x \in (0; 1/4]; \\ x + 1/4, & \text{якщо } x \in (1/4; 1/2]; \\ 1, & \text{якщо } x \in (1/2; \infty); \end{cases}$

9.51.

Нехай $\Omega = [0; 1]$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_{[0;1]}$, $P = L$,

$\xi_1 = \xi_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in [0; 1/2); \\ 0, & \text{якщо } \omega \in [1/2; 1]; \end{cases}$

$\xi_2 = \xi_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega \in [0; 1/2); \\ 1, & \text{якщо } \omega \in [1/2; 1]; \end{cases}$

$\eta_1 = \eta_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in [0; 1/2); \\ 0, & \text{якщо } \omega \in [1/2; 1]; \end{cases}$

$\eta_2 = \eta_2(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in [0; 1/2); \\ 0, & \text{якщо } \omega \in [1/2; 1]; \end{cases}$

Так означені випадкові величини задовольняють умови задачі, але 1) розподіли $\xi_1\eta_1$ і $\xi_2\eta_2$ різні; 2) розподіли $\xi_1 + \eta_1$ і $\xi_2 + \eta_2$ різні.

21.10 До глави 10

10.1°. 1) $M\xi = 0$, $D\xi = a^2/3$; 2) $M\xi = (a+b)/2$, $D\xi = (b-a)^2/12$. **10.2°.** 1) 1; 2) 1/2; 3) $e-1$.

10.3°. 1) 3; 2) $1-2/e$; 3) 3; 4) 0; 5) $e-1$.

10.4. 1) $(\ln 2)/\pi + 1/2$. **10.5.** $\exp\{\sigma^2/2\}$.

10.6°. Розв'язання (пункт (3)). Математичне сподівання функції $\eta = I_{[1/3,3]}(\xi^2)$ від випадкової величини ξ обчислюється за щільністю розподілу ξ згідно з формулою (10.1.1):

$$M\eta = MI_{[1/3,3]}(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{[1/3,3]}(x^2)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{+\infty} I_{[1/3,3]}(x^2)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}.$$

Відповіді: 1) $\sqrt{3}/\pi$; 2) $(\sqrt{3}-1)/\pi - 1/12$; 3) 1/3; 4) 1/2.

10.7. 1) $M\xi = 1/\lambda$; 2) $D\xi = 1/\lambda^2$; 3) $P\{\xi > 1\} = e^{-\lambda}$; 4) $k!/\lambda^k$.

10.8.

$$M\min\{\xi, 365\} = \int\limits_{0}^{+\infty} \min\{x, 365\}\lambda\exp\{-\lambda x\}dx =$$

$$= \lambda\int\limits_{0}^{365} x\exp\{-\lambda x\}dx + 365\lambda\int\limits_{365}^{+\infty}\exp\{-\lambda x\}dx =$$

$$= (1-\exp\{-365\lambda\})/\lambda = 222.$$

10.9. $M\zeta = 1$; $D\zeta = 4/9$.

10.10°. 1) $M\xi = a+1$; 2) $M\xi^2 = (a+1)^2 + 1/6$.

10.11. $1 - 1/e^2$. **10.12.** $M\xi = 0$, $D\xi = 2/\lambda^2$.

10.13. Вираз "точка A рівномірно розподілена на колі з центром у точці O" означає, що кут φ між віссю Ox і радіусом-вектором $\overline{OA}$ рівномірно розподілений на відрізку $[0; 2\pi]$. Очевидно $\xi = |R \operatorname{tg} \varphi|$.

Відповідь:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{2R}{\pi(x^2 + R^2)}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання випадкової величини ξ дорівнює $+\infty$.

10.14.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ x^2/R^2, & \text{якщо } 0 < x \le R; \\ 1, & \text{якщо } x > R; \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin (0; R]; \\ 2x/R^2, & \text{якщо } x \in (0; R]; \end{cases}$$

$M\eta = 2R/3$; $D\eta = R^2/18$.

10.15. Вираз "точка A рівномірно розподілена на колі" означає, що кут φ між віссю Ox і радіусом-вектором $\overline{OA}$ рівномірно розподілений на відрізку $[0; 2\pi]$. Випадкова величина ξ дорівнює $\cos\varphi$, тому

$$F_{|\xi|}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1 - \frac{2}{\pi} \arccos x, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

$$p_{|\xi|}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin (0; 1]; \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, & \text{якщо } x \in (0; 1]; \end{cases}$$

$M|\xi| = 2/\pi$.

10.16.

$$1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a^2; \\ \dfrac{\sqrt{x} - a}{b - a}, & \text{якщо } a^2 < x \le b^2; \\ 1, & \text{якщо } x > b^2; \end{cases}$$

$$M\eta = \frac{b^3 - a^3}{3(b - a)};$$

$$2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-\theta t} dt, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$M\eta = \frac{\nu(\nu+1)}{\theta^2};$$

$$3) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$M\eta = 2/\lambda^2.$$

10.17.

$$1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 2\pi a; \\ \frac{x - 2\pi a}{2\pi(b-a)}, & \text{якщо } 2\pi a < x \le 2\pi b; \\ 1, & \text{якщо } x > 2\pi b; \end{cases}$$

$$M\eta = \pi(a+b);$$

$$2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \int\limits_0^{x/(2\pi)} \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-\theta t} dt, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$M\eta = 2\pi\nu/\theta;$$

$$3) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\pi}x\right\}, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

10.18. 1) $M\eta = \frac{b^4 - a^4}{4(b-a)}$; 2) $\frac{6}{\lambda^4}$.

10.19.

$$1(\text{а})\ F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ x/\pi, & \text{якщо } 0 < x \le \pi; \\ 1, & \text{якщо } x > \pi; \end{cases}$$

$$M\eta = \pi/2;$$

$$1(\text{б})\ F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le \pi; \\ x/\pi - 1, & \text{якщо } \pi < x \le 2\pi; \\ 1, & \text{якщо } x > 2\pi; \end{cases}$$

$$M\eta = 3\pi/2;$$

$$2(\text{а})\ F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 2\sqrt{x/\pi}, & \text{якщо } 0 < x \le \pi/4; \\ 1, & \text{якщо } x > \pi/4; \end{cases}$$

$$M\eta = \pi/12;$$

2(б) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le \pi/4; \\ 2\sqrt{x/\pi} - 1, & \text{якщо } \pi/4 < x \le \pi; \\ 1, & \text{якщо } x > \pi; \end{cases}$

$M\eta = 7\pi/12;$

3(а) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 1/4; \\ 1, & \text{якщо } x > 1/4; \end{cases}$

$M\eta = 1/12;$

3(б) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1/4; \\ 2\sqrt{x} - 1, & \text{якщо } 1/4 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$

$M\eta = 7/12;$

4(а) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 2\sqrt[3]{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 1/8; \\ 1, & \text{якщо } x > 1/8; \end{cases}$

$M\eta = 1/32;$

4(б) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1/8; \\ 2\sqrt[3]{x} - 1, & \text{якщо } 1/8 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$

$M\eta = 15/32.$

10.20. У задачах 1°, 2°, 6° доцільно спочатку знайти розподіли відповідних випадкових величин, у решті задач зручніше скористатися мультиплікативною властивістю математичного сподівання.

1°а) 1/3; 2°а) 2/3; 2°б) 13/12; 3°а) 1/4; 3°б) 1/2; 3°в) $1/(2\lambda)$; 3°г) $1/\lambda^2$; 5°в) $(e-1)/\lambda$; 6°г) $1/(\lambda^3(1+\lambda))$.

10.21. $\alpha + 1/n$.

10.22.

$$1)\ \frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b;\ \ 2)\ \frac{n}{n+1}b + \frac{1}{n+1}a;\ \ 3)\ \frac{a+b}{2}.$$

10.23. 1) $\theta - \dfrac{n-1}{n+1}h$; 2) $\theta + \dfrac{n-1}{n+1}h$; 3) $\dfrac{n-1}{n+1}h$.

10.24. 1) $M\overline{\xi} = \theta + \alpha$; 2) $M\min\{\xi_i\} = \theta + \alpha/n$; 3) $M\hat{\theta}_1 = \theta + \alpha/n^2$; 4) $M\hat{\theta}_2 = \alpha(1 - 1/n^2)$.

10.25. $M\overline{\xi} = \theta$.

10.26.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 1-\dfrac{(T-x)^2}{T^2}, & \text{якщо } 0<x\le T;\\ 1, & \text{якщо } x>T.\end{cases}$$

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \dfrac{2(T-x)}{T^2}, & \text{якщо } 0<x\le T;\\ 0, & \text{якщо } x>T.\end{cases}$$

$M\xi=\dfrac{T}{3};\ D\xi=\dfrac{T^2}{18};\ M\xi^n=\dfrac{2T^n}{(n+1)(n+2)}.$

10.27.

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\notin(0;1);\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{якщо } x\in(0;1);\end{cases}$$

$M\eta=2/\pi.$

10.28*. Оскільки за будь-якого повороту кола ймовірність події, що залежить тільки від відстані між двома точками кола, залишається незмінною, то одну з точок можна вважати фіксованою;

$$F_\eta(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2R}, & \text{якщо } 0<x\le 2R;\\ 1, & \text{якщо } x>2R.\end{cases}$$

10.31. $M\eta^+=1/\sqrt{2\pi}$. **10.32.** $M\eta^+=\sigma/\sqrt{2\pi}$.

10.33. $M\xi=\dfrac{1}{\theta};\ D\xi=\dfrac{1}{\theta^2};\ M\xi^2=\dfrac{2}{\theta^2}$ (див. також приклад 10.1.4).

10.34. $M\xi=\dfrac{m}{\theta};\ D\xi=\dfrac{m}{\theta^2};\ M\xi^2=\dfrac{m(m+1)}{\theta^2}$ (див. також приклад 10.1.4).

10.35. $M\xi=n;\ D\xi=2n;\ M\xi^2=n(n+2)$ (див. також приклад 10.1.4).

10.36. $M\xi=\exp\{\mu+\sigma^2/2\};\ \ M\xi^2=\exp\{2\mu+2\sigma^2\};$ $D\xi=\exp\{2\mu+\sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\}-1).$

10.37. $M\xi=\dfrac{\theta\lambda}{1-\theta};\ M\xi^2=\dfrac{\theta\lambda^2}{2-\theta}.$

10.38. 1) $M\zeta_1 = \dfrac{3}{2\theta}$; $D\zeta_1 = \dfrac{29}{12\theta^2}$; 2) $M\zeta_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{\theta}$; $D\zeta_2 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{\theta^2}$; 3) $M\zeta_3 = \dfrac{\ln 2}{\theta}$; $D\zeta_3 = \dfrac{\ln^2 2 - 1}{\theta^2}$.

21.11 До глави 11

11.1. ξ — абсолютно неперервна випадкова величина, тому $\zeta = \xi + \eta$ також абсолютно неперервна і

$$f_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\xi(x-y)P(dy) = \frac{1}{2}f_\xi(x) + \frac{1}{2}f_\xi(x-1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ f_\xi(x)/2, & \text{якщо } 0 \le x < 1; \\ f_\xi(x-1)/2, & \text{якщо } 0 \le x-1 < 1; \\ 0, & \text{якщо } x - 1 \ge 1. \end{cases}$$

Або

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [0;2]; \\ 1/2, & \text{якщо } x \in [0;2]. \end{cases}$$

Відповідь:

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ x/2, & \text{якщо } 0 < x \le 2; \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

11.2. Відповідь до пункту 1):

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 2a; \\ (x-2a)/(b-a)^2, & \text{якщо } 2a < x \le a+b; \\ (2b-x)/(b-a)^2, & \text{якщо } a+b < x \le 2b; \\ 0, & \text{якщо } x > 2b. \end{cases}$$

11.3.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ x/2, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1/2, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ (3-x)/2, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ 0, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

11.4. Спочатку знайти розподіл суми (різниці) відповідних випадкових величин. Інший підхід — знайти спільну щільність розподілу ξ і η, а потім скористатися рівністю (9.1.3).

Відповіді: 1) $1 - 1/(3\sqrt{2})$; 2) $1/4$; 3) $9/16$; 4) $7/16$; 5) $2/3$; 6) $1/2$.

11.5. Відповідь до пункту 1):

$p_\zeta(x) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -(b-a); \\ (x+(b-a))/(b-a)^2, & \text{якщо } -(b-a) < x \le 0; \\ ((b-a)-x)/(b-a)^2, & \text{якщо } 0 < x < b-a; \\ 0, & \text{якщо } x \ge b-a. \end{cases}$$

11.6.

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 2x^2, & \text{якщо } 0 < x \le 1/2; \\ 1-2(1-x)^2, & \text{якщо } 1/2 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

11.7. Випадкова величина ζ розподілена рівномірно на проміжку $[1; 7]$.

11.8. $1-(1-x)^2$. **11.9.** $1/3$.

11.10.

1) $$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_2 x} - e^{-\lambda_1 x}), & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{\lambda_1 x}, & \text{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_2 x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

11.11.

1) $$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

2) $$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x}/2, & \text{якщо } x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}/2, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

3) $$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

11.12. Вказівка: див. задачу 11.10(1).

11.13. Щільність розподілу $f(x)$ суми $\xi + \eta$:

$$f(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{0} e^{-|x-y|} e^{-|y|} dy + \frac{1}{4} \int_{0}^{+\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} dy.$$

Зробимо в інтегралах заміну $x - y = t$. Дістанемо

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(e^{x} \int_{x}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-t} dt + e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{-|t|} e^{-t} dt \right).$$

Розглянемо два випадки, а саме: $x < 0$ і $x > 0$.

Коли $x < 0$ маємо

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(e^{x} \left(\int_{x}^{0} e^{t} e^{-t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} dt \right) + e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{-|t|} e^{-t} \right) =$$

$$= e^{x}(1 - x)/4.$$

Коли $x > 0$ маємо

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(e^{x} \int_{x}^{+\infty} e^{-2t} dt + e^{-x} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{x} e^{-t} e^{t} dt \right) \right) =$$

$$= e^{-x}(1 + x)/4.$$

Аналогічно знаходимо щільність $g(x)$ розподілу $\xi - \eta$ Отже

$$1)\; f(x) = \begin{cases} e^{x}(1 - x)/4, & \text{якщо } x \le 0; \\ e^{-x}(1 + x)/4, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$2)\, g(x) = \begin{cases} e^{x}(1-x)/4, & \text{якщо } x \le 0; \\ e^{-x}(1+x)/4, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

11.14.

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -a; \\ (1 - e^{-\lambda(x+a)})/2a, & \text{якщо } -a < x \le a; \\ (e^{-\lambda(x-a)} - e^{-\lambda(x+a)})/2a, & \text{якщо } x > a. \end{cases}$$

11.16. Функція розподілу суми $\zeta = \xi + \eta$ незалежних випадкових величин ξ і η дорівнює згортці функцій розподілів $F(x)$ і $H(x)$ доданків ξ і η ($H(x)$ — функція розподілу випадкової величини η), тобто

$$F_\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}^1} F(x-y)H(dy) = \int_{\mathbb{R}^1} H(x-y)F(dy).$$

Оскільки розподіл H має щільність

$$h(y) = \begin{cases} 1/2h, & \text{якщо } y \in [-h; h]; \\ 0, & \text{якщо } y \notin [-h; h], \end{cases}$$

то

$$F_\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}^1} F(x-y)H(dy) = \int_{\mathbb{R}^1} F(x-y)h(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} F(x-y)dy = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(t)dt$$

(скористалися заміною $x - y = t$). Далі, розподіл випадкової величини η абсолютно неперервний, тому розподіл суми $\zeta = \xi + \eta$ також абсолютно неперервний і його щільність $f_\zeta(x)$ дорівнює згортці щільності розподілу $h = h(t)$ випадкової величини η з розподілом випадкової величини ξ:

$$f_\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}^1} h(x-y)F(dy).$$

За означенням функції $h(t)$

$$h(x-y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x-y < -h; \\ 1/(2h), & \text{якщо } -h \leq x-y \leq h; \\ 0, & \text{якщо } x-y > h, \end{cases}$$

або

$$h(x-y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < x-h; \\ 1/(2h), & \text{якщо } x-h \leq y \leq x+h; \\ 0, & \text{якщо } y > x+h. \end{cases}$$

Тому

$$f_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} h(x-y)F(dy)$$

як інтеграл від простої функції, яка набуває значення $1/(2h)$ на проміжку $[x-h; x+h]$ і значення 0 поза проміжком $[x-h; x+h]$, дорівнює $F([x-h; x+h])/(2h)$. Отже,

$$f_\zeta(x) = \frac{1}{2h}F([x-h; x+h]).$$

11.17. Функція розподілу суми $\zeta = \xi + \eta$ незалежних випадкових величин ξ і η дорівнює згортці функцій розподілів доданків, тобто

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} Q(x-y)G(dy).$$

Враховуючи, що G — дискретний розподіл, зосереджений у точках -1 і 1 (з "масою" 1/2 у кожній), маємо

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} Q(x-y)G(dy) = \frac{1}{2}Q(x-1) + \frac{1}{2}Q(x+1).$$

11.18. Сума незалежних випадкових величин, одна з яких абсолютно неперервна, є абсолютно неперервною випадковою величиною, і її щільність дорівнює згортці щільності абсолютно неперервної випадкової величини з розподілом іншої (див. також задачу 11.17):

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 3/4, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1/4, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

11.19.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

11.25. Нехай ξ і η — незлежні випадкові величини відповідно з розподілами F і Q. Обчисліть $Mu(\xi + \eta)$.

21.12 До глави 12

12.2. Послідовність $\{F_n\}$ збігається до невласного розподілу, тотожньо рівного нулеві.

12.3 – 12.6. Послідовність розподілів $\{F_n\}$ збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого у точці 0.

12.7. Послідовність розподілів $\{F_n\}$ власно збігається до F; послідовності розподілів $\{G_n\}$, $\{S_n\}$, $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ збігаються до невласного розподілу, який тотожно дорівнює нулю (див. також приклад 12.1.3).

12.8. Послідовність розподілів $\{P_n\}$ власно збігається до атомічного розподілу, зосередженого в точці 1.

12.9. Скористайтеся достатньою умовою 1° (див. гл. 12) збіжності ймовірнісних розподілів (див. також приклад 12.1.3).

Відповіді: 1) послідовність розподілів $\{F_n\}$ збігається до невласного розподілу, який тотожно дорівнює нулю; 2) послідовність розподілів $\{G_n\}$ збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці 0.

12.10. Послідовність розподілів $\{F_n\}$ не є збіжною.

12.11*. $I_{(-\infty;y)}(x)$ для кожної пари $(x, y), x \ne y$.

12.12. $\sin 1$. **12.13.** $\cos 1$.

12.14*. Спочатку знайти $\lim\limits_{\sigma \to 0} N_{x;\sigma^2}(y)$.

Відповідь: $F((-\infty; y))$.

12.15*. Достатню умову 2° збіжності розподілів можна сформулювати в загальнішому вигляді (див. приклад 12.1.6).

Власні ймовірнісні розподіли F_{a,σ^2} *із середнім* $a \to a_0$ *і дисперсією* $\sigma^2 \to 0$ *збігаються до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці* a_0.

Математичне сподівання і дисперсія пуассонового розподілу дорівнює λ, тому, коли $\lambda \to 0$, пуассонів розподіл збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці 0 (його функцією розподілу є $I_{(0,\infty)}(y)$). Зі збіжності послідовності розподілів випливає збіжність послідовності функцій розподілів, тому функція

$$F_\lambda(y) = \sum_{k:k<y} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

пуассонового розподілу з параметром λ, коли $\lambda \to 0$, збігається до $I_{(0,\infty)}(y)$.

12.16*. Скористатись розв'язком задачі 12.15*.

Відповідь: 1.

12.17. Послідовність $\{F_n\}$ збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці 0, оскільки $a_n \to 0$ і $\sigma_n \to 0$ (див. приклад 12.1.6).

21.13 До глави 13

13.1. $\cos t$. **13.2.** $(e^{it} + e^{-it} + 1)/3$.

13.3. Вказівка. Див. задачі 13.1, 13.5, 13.7.

13.4. Див. задачу 13.1.

13.5. $\cos^n z$ (див. задачу 13.1).

13.7. Як відомо, випадкову величину ξ, що має біномний розподіл з параметрами $(n; p)$, можна подати у вигляді суми

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$$

незалежних випадкових величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, кожна з яких має розподіл

$$P\{\mu_k = s\} = p^s (1-p)^{1-s},\ s = 0, 1;\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Звідси, користуючись мультиплікативною властивістю характеристичних функцій, дістаємо

$$\varphi_\xi(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t),$$

де

$$\varphi_k(t) = Me^{it\mu_k} =$$

$$= e^{it\cdot 1}p + e^{it\cdot 0}(1-p) = pe^{it} + 1 - p = 1 + p(e^{it} - 1).$$

Отже,

$$\varphi_\xi(t) = \left(1 + p(e^{it} - 1)\right)^n.$$

13.8. $\varphi(t) = \dfrac{p}{1 - e^{it}(1-p)}$.

13.9. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і скористатися тим, що характеристична функція $\varphi_\eta(t)$ випадкової величини $\eta = a + \sigma\xi$ дорівнює $e^{ita}\varphi_\xi(\sigma t)$.

Відповідь: $\exp\left\{-\lambda - it\sqrt{\lambda} + \lambda\exp\{it/\sqrt{\lambda}\}\right\}$.

13.10. $\varphi(t) = \dfrac{e^{ita} - e^{-ita}}{2ita}$. **13.11.** $\varphi(t) = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{i(b-a)t}$.

13.12. $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. **13.13.** $\varphi(t) = \dfrac{a}{a - it}$.

13.14. $\varphi(z) = \dfrac{a^2}{a^2 + z^2}$. **13.15.** $\varphi(z) = 2\dfrac{1 - \cos az}{a^2 z^2}$.

13.16*. Спочатку обчислимо характеристичну функцію $\varphi(t)$ двостороннього показникового розподілу з параметром a за його щільністю

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|},\ x \in \mathbb{R}^1.$$

За означенням:

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{a}{2}e^{-a|x|}dx = \frac{a^2}{a^2 + t^2}.$$

Далі скористаємося твердженням, відомим під назвою теореми обернення для характеристичних функцій.

Якщо характеристична функція $\varphi(t)$ імовірнісного розподілу F інтегровна на $\mathbb{R}^1$, то розподіл F абсолютно неперервний, і його щільність $f(x)$ може бути зображена у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-ixt} \varphi(t) dt. \tag{21.13.1}$$

Характеристична функція $\varphi(t) = \dfrac{a^2}{a^2 + t^2}$ двостороннього показникового розподілу інтегровна на $\mathbb{R}^1$, тому має місце рівність (21.13.1):

$$\frac{a}{2} e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \frac{a^2}{a^2 + t^2} dt,$$

яку можна переписати так:

$$e^{-a|x|} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + t^2} dt.$$

Залишається зазначити, що останній інтеграл — не що інше як характеристична функція розподілу Коші з параметром a.

13.17. Згортка $F * Q$ є розподілом Коші з параметром $a + b$.

13.18. Сума $\xi + \eta$ розподілена нормально з параметрами $(a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

13.19. Сума $\xi + \eta$ має розподіл Коші з параметром $a + b$.

13.20. Сума $\xi + \eta$ має пуассонів розподіл з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

13.21. $\varphi(t) = 1 + ita - \frac{1}{2}(\sigma^2 + a^2)t^2 + o(t^2)$.

13.23. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\lambda(t)$ випадкової величини $(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$; дослідити $\varphi_\lambda(t)$ на збіжність коли $\lambda \to \infty$.

13.24. Скористайтеся теоремою неперервності.

13.25.
1° $\psi_n(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$; 2° $\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$;
3° $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t) = \exp\left\{-t^2/2\right\}$.

13.26. Позначимо через $\varphi(t)$ характеристичну функцію випадкової величини ξ_k $(k = 1, 2, \dots)$, а через $\psi_n(t)$ — характеристичну функцію випадкової величини

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Послідовно розв'яжіть такі задачі:

1° Подайте характеристичну функцію $\psi_n(t)$ через характеристичну функцію $\varphi(t)$.

2° Випишіть розвинення Тейлора для $\varphi(t)$ в околі точки $t = 0$, яке включає t.

3° Скориставшись розв'язками задачі із пунктів 1° і 2°, знайдіть границю характеристичної функції $\psi_n(t)$, коли $n \to \infty$.

4° Скориставшись розв'язком задачі із пункту 3° і теоремою неперервності, доведіть, що коли $n \to \infty$ розподіл випадкової величини S_n збігається до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці a.

5° Доведіть, що зі збіжності розподілів випадкових величин S_n до власного атомічного розподілу, зосередженого в точці a, випливає збіжність за ймовірністю випадкових величин S_n до a.

Справді, збіжність послідовності $\{F_n\}$ розподілів випадкових величин S_n/n до власного атомічного розподілу F_0, зосередженого в точці a, рівносильна збіжності функцій розподілів $F_n(x)$ до функції розподілу $F_0(x)$, тобто

$$F_n(x) = P\{|S_n/n < x|\} \to F_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{якщо } x \le a; \\ 1, & \text{якщо } x > a. \end{array} \right.$$

Далі нескладно пересвідчитися, що зі збіжності

$$F_n(x) \to F_0(x)$$

випливає
$$P\{|S_n - a| \geq \varepsilon\} \to 0,$$
коли $n \to \infty$.

13.29. Знайти характеристичну функцію випадкової величини $\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,n}$ і скористатись теоремою неперервності.

13.30. Подати випадкову величину ν_i у вигляді
$$\nu_i = \sum_{k=1}^{n} I_{X_i}(\xi_k),\ i = 1, 2, \ldots, r.$$
і скористатись центральною граничною теоремою.

21.14 До глави 14

14.1. Функція $L(\theta, h)$ досягає найбільшого значення у точці
$$(\hat{\theta}, \hat{h}) = ((\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\})/2, (\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\})/2).$$
Враховуючи, що випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні й кожна з них має своєю щільністю $f(x; \theta, h)$, спочатку знаходимо щільності
$$\max\{\xi_i\},\ \min\{\xi_i\},$$
потім обчислюємо
$$M\max\{\xi_i\},\ M\min\{\xi_i\},\ P-\lim_{n\to\infty}\max\{\xi_i\},\ P-\lim_{n\to\infty}\min\{\xi_i\}$$
й пересвідчуємося, що $\hat{\theta}$ є незсуненою і спроможною оцінкою θ, а $\hat{h}$ є асимптотично незсуненою і спроможною оцінкою h.

14.2. $\hat{\theta} = \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ є незсуненою і спроможною оцінкою θ.

14.3. Так.

14.4. Щодо оцінок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$ див. приклад 14.1.1; $\hat{\theta}_5$ — асимптотично незсунена і спроможна оцінка параметра $b - a$; $\hat{\theta}_6, \hat{\theta}_7, \hat{\theta}_8$ — незсунені та спроможні оцінки відповідно параметрів $(a + b)/2, a, b$.

14.5. $\hat{\lambda}$ — незсунена і спроможна оцінка λ.

14.6. Так.

14.7. Функція

$$L(\theta) = \begin{cases} 1/2^n, & \text{якщо всі } \xi_i \in [\theta - 1, \theta + 1]; \\ 0, & \text{якщо існує } \xi_j \notin [\theta - 1, \theta + 1] \end{cases}$$

набуває двох значень: $1/2^n$ і 0. Найбільшого значення, що дорівнює $1/2^n$, функція $L(\theta)$ набуває, коли

$$\theta - 1 \leq \xi_i \leq \theta + 1, i = 1, 2, \ldots, n,$$

або, що те саме, коли

$$\max\{\xi_i\} - 1 \leq \theta \leq \min\{\xi_i\} + 1,$$

інакше кажучи, — у точках

$$\hat{\theta}_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - 1) + (1 - \lambda)(\min\{\xi_i\} + 1), \lambda \in [0; 1],$$

проміжку $[\max\{\xi_i\} - 1, \min\{\xi_i\} + 1]$.

Щодо незсуненості та спроможності $\hat{\theta}_\lambda$ див. приклад 14.1.1.

14.8. $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ — асимптотично незсунені та спроможні оцінки відповідно параметрів θ, α.

14.9. Так.

14.10. $\hat{\theta}$ — незсунена і спроможна оцінка θ.

14.11. $\hat{a}$ — незсунена і спроможна оцінка a, $\hat{\sigma}^2$ — асимптотично незсунена і спроможна оцінка σ^2.

14.12. Так.

14.13. $L(\theta)$ досягає найбільшого значення у точках

$$\hat{\theta}_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - h_0) + (1 - \lambda)(\min\{\xi_i\} + h_0), \ \lambda \in [0; 1],$$

проміжку $[\max\{\xi_i\} - h_0, \min\{\xi_i\} + h_0]$. Див. також задачу 14.7.

14.14.

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{\xi_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2.$$

$\hat{\theta}$ — незсунена і спроможна оцінка θ; $\hat{\sigma}^2$ — асимптотично незсунена і спроможна оцінка σ^2.

14.15. Так.

14.16. $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_\lambda$ — асимптотично незсунені та спроможні оцінки параметрів $\theta - h_0$, $\theta + h_0$, θ відповідно; $\hat{\theta}_3$ — незсунена і спроможна оцінка θ.

14.17.

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{\xi_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2.$$

$\hat{a}$ — незсунена і спроможна оцінка a; $\hat{\sigma}^2$ — асимптотично незсунена і спроможна оцінка σ^2.

14.18. Так.

14.19. Функція $L(a,b)$ досягає найбільшого значення у точці $(\hat{a},\hat{b}) = (\min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\})$; $\hat{a}$ і $\hat{b}$ — асимптотично незсунені та спроможні оцінки відповідно параметрів a і b.

14.20. $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ — незсунена і спроможна оцінка параметра θ.

14.21. Так.

14.22. $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$ — незсунені та спроможні оцінки відповідно параметрів θ, $\theta - h$, $\theta + h$; $\hat{\theta}_1$ — асимптотично незсунена і спроможна оцінка h.

14.23. $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ є незсуненою та спроможною оцінкою параметра $(1-p)/p$.

14.24. Так.

14.25. $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4,$ — асимптотично незсунені та спроможні оцінки відповідно параметрів $h, \theta - h_0, \theta + h_0, h$. Щодо оцінок $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ див. приклад 14.1.1.

Щоб дослідити оцінку $\hat{\theta}_4$, спочатку знайдемо її функцію розподілу $G(x)$.

Оскільки випадкова величина

$$\hat{\theta}_4 = \max\{\theta_0 - \min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\} - \theta_0\}$$

невід'ємна, то для $x \le 0$ значення $G(x) = P\{\hat{\theta}_4 < x\} = 0$. Для $x > 0$, враховуючи незалежність $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, маємо

$$G(x) = P\{\hat{\theta}_4 < x\} =$$

$$= P\{\max\{\theta_0 - \min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\} - \theta_0\} < x\} =$$

$$= P\{\theta_0 - x < \min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\} < \theta_0 + x\} =$$

$$= P\left\{\bigcap_{n=1}^{n}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\}\right\} =$$

$$= \prod_{n=1}^{n} P\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\} =$$

$$= (P\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\})^n = (F(\theta_0 + x) - F(\theta_0 - x))^n,$$

де

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \le \theta_0 - h; \\ (t - (\theta_0 - h))/2h, & \text{якщо } \theta_0 - h < t \le \theta_0 + h; \\ 1, & \text{якщо } t > \theta_0 + h \end{cases}$$

— функція рівномірного на відрізку $[\theta_0 - h, \theta_0 + h]$ розподілу. При $x > 0$

$$F(\theta_0 + x) = \begin{cases} (x + h)/2h, & \text{якщо } 0 < x \le h; \\ 1, & \text{якщо } x > h; \end{cases}$$

$$F(\theta_0 - x) = \begin{cases} (h - x)/2h, & \text{якщо } 0 < x \le h; \\ 0, & \text{якщо } x > h. \end{cases}$$

Після нескладних перетворень дістанемо

$$p(x) = \frac{d}{dx}G(x) = \begin{cases} nx^{n-1}/h^n, & \text{якщо } x \in [0, h]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0, h]. \end{cases}$$

Знаючи щільність розподілу оцінки $\hat{\theta}_4$, знаходимо

$$M\hat{\theta}_4 = \frac{n}{n+1}h,$$

$$P\{|\theta_4 - h| > \varepsilon\} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{h}\right)^n \ (0 < \varepsilon < h).$$

Звідси випливає, що $\hat{\theta}_4$ — асимптотично незсунена й спроможна оцінка h.

14.26. $\hat{\theta}_2$ є незсуненою оцінкою параметра α, але не є його спроможною оцінкою.

14.27. Так.

14.28. $\hat{\theta}_1$ — незсунена й спроможна оцінка $\theta + b$; $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ — асимптотично незсунені й спроможні оцінки відповідно параметрів b і θ.

14.29. $\hat{\theta} = \frac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ є незсуненою й спроможною оцінкою θ.

14.30. Так.

14.31. $L(h)$ досягає найбільшого значення в точці

$$\hat{h} = \max\left\{\max\{\xi_i\} - \theta_0, \theta_0 - \min\{\xi_i\}\right\},$$

$\hat{h}$ є асимптотично незсуненою й спроможною оцінкою h (див. також задачу 14.25).

14.32. $\hat{\theta}$ — незсунена й спроможна оцінка σ^2.

14.33. Так.

14.34. $\hat{\theta}_2$ — незсунена й спроможна оцінка параметра $(a+b)/2$; $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_3$ — асимптотично незсунені й спроможні оцінки b.

14.35. Так.

21.15 До глави 15

15.1. 0,3. **15.2.** 0,18. **15.3.** $\hat{\mu} = 2\ln\hat{m}_1 - (\ln\hat{m}_2)/2$.

15.4. Оцінкою максимальної правдоподібності θ є

$$\hat{\theta}_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - h_0) + (1-\lambda)(\min\{\xi_i\} + h_0),\ \lambda \in [0;1];$$

$\hat{\theta}_\lambda$ — асимптотично незсунена й спроможна оцінка параметра θ; $\hat{\theta}_{1/2}$ — незсунена й спроможна оцінка θ.

15.7. $\hat{b} = \hat{m}_1$, $\hat{\theta} = (\hat{m}_2 + (\hat{m}_1)^2)/2$; $\hat{b}$ — незсунена й спроможна оцінка параметра b; $\hat{\theta}$ — асимптотично незсунена й спроможна оцінка параметра θ.

15.8. $\hat{\theta} = \frac{1}{rn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $\hat{\theta}$ — незсунена, спроможна й ефективна оцінка θ.

15.10. $5,4\pi$. **15.11.** $\hat{p} = 1/(\bar{\xi}+1)$.

15.12. Функцією максимальної правдоподібності є

$$L(a,b) = \frac{1}{(2a)^n}\exp\left\{-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - b|\right\},\ a > 0.$$

Якщо $\hat{b}$ — точка, в якій $Q(b) = \sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i - b|$ досягає найменшого значення, а $\hat{a}$ — точка, в якій $L(a,\hat{b})$ досягає найбільшого значення, то в точці $(\hat{a},\hat{b})$ функція $L(a,b)$ досягає найбільшого значення. Це твердження перевіряється безпосередньо.

Нехай $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ — варіаційний ряд вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Якщо $n = 2k$, функція $Q(b)$ досягає найменшого значення у кожній точці проміжку $[\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]$, тому оцінкою b є

$$\hat{b}_\lambda = \lambda\xi_k^* + (1-\lambda)\xi_{k+1}^*,\ \lambda \in [0;1].$$

Якщо $n = 2k+1$, функція $Q(b)$ досягає найменшого значення у точці

$$\hat{b} = \xi_{k+1}^*.$$

Це добре видно з графіків функції $y = Q(b)$.

Позначимо $Q^* = Q(\hat{b})$. Функція

$$L(a,\hat{b}) = \frac{1}{(2a)^n}\exp\left\{-\frac{1}{a}Q^*\right\}$$

досягає найбільшого значення у точці $\hat{a} = Q^*/n$. Отже, оцінкою максимальної правдоподібності $(\hat{a}, \hat{b})$ параметра (a, b) є $(Q^*/n, \hat{b})$.

15.14. 158,3.

15.15. Для випадкової величини зі щільністю розподілу
$f(x; a, \theta) =$

$$= \begin{cases} (x - (a - \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{якщо } x \in [a - \sqrt{\theta}, a]; \\ -(x - (a + \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{якщо } x \in [a, a + \sqrt{\theta}]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a - \sqrt{\theta}, a + \sqrt{\theta}] \end{cases}$$

маємо

$$m_1 = m_1(a, \theta) = a, \ m_2 = m_2(a, \theta) = a^2 + \theta/6.$$

Згідно з методом моментів оцінки $\hat{a}$ і $\hat{\theta}$ дістаємо як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \hat{m}_1 = \hat{a}; \\ \hat{m}_2 = \hat{a}^2 + \hat{\theta}/6. \end{cases}$$

Звідси
$$\hat{a} = \hat{m}_1; \ \hat{\theta} = 6(\hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2).$$

З теореми 15.1.1 випливає, що $\hat{a}$ і $\hat{\theta}$ — спроможні оцінки відповідно параметрів a і θ; $\hat{a}$ — незсунена оцінка a. Оскільки вибіркова дисперсія $\hat{\sigma}^2$ є асимптотично незсуненою оцінкою σ^2, то $\hat{\theta}$ є асимптотично незсуненою оцінкою θ.

15.16. $\hat{p} = \overline{\xi}$; $\hat{p}$ — незсунена, спроможна, ефективна оцінка параметра p.

15.20. Оцінкою максимальної правдоподібності h є

$$\hat{h} = \max\left\{\max\{\xi_i\} - \theta_0, \theta_0 - \min\{\xi_i\}\right\}.$$

Функція розподілу $\hat{h}$

$$F(x) = P\{\hat{h} < x\} =$$

$$= P\{\max\{\max\{\xi_i\} - \theta_0, \theta_0 - \min\{\xi_i\}\} < x\} =$$
$$= P\{\max\{\xi_i\} - \theta_0 < x, \theta_0 - \min\{\xi_i\} < x\} =$$
$$= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i < \theta_0 + x\}\right)\bigcap\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i > \theta_0 - x\}\right)\right) =$$
$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\}\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\} = (P\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\})^n.$$

І оскільки випадкові величини $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$, розподілені рівномірно на проміжку $[\theta_0 - h, \theta_0 + h]$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ (x/h)^n, & \text{якщо } 0 < x \le h; \\ 1, & \text{якщо } x > h. \end{cases}$$

Звідси

$$M\hat{h} = \frac{n}{n+1}h \to h,$$

коли $n \to \infty$, тобто $\hat{h}$ є асимптотично незсунена оцінка h.

Для достатньо малих $\varepsilon > 0$

$$P\{|\hat{h} - h| < \varepsilon\} = P\{h - \varepsilon < \hat{h} < h + \varepsilon\} =$$
$$= P\{h - \varepsilon < \hat{h}\} = 1 - P\{\hat{h} < h - \varepsilon\} = 1 - \left(\frac{h - \varepsilon}{h}\right)^n,$$

що збігається до 1, коли $n \to \infty$, тобто $\hat{h}$ — спроможна оцінка h.

15.22. $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi^p\right)^{1/p}$.

15.23. $\hat{\theta} = \hat{m}_1$, $\hat{\sigma}^2 = \hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2$; $\hat{\theta}$ — незсунена й спроможна оцінка θ; $\hat{\sigma}^2$ — асимптотично незсунена й спроможна оцінка σ^2.

15.24. $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$; $\hat{\theta}$ — незсунена, спроможна й ефективна оцінка параметра θ.

15.26. $15{,}52 \cdot \pi$.

15.27. $\hat{m} = 1/\left(\hat{m}_2/(\hat{m}_1)^2 - 1\right)$; $\hat{\lambda} = 1/\left(\hat{m}_2/\hat{m}_1 - m_1\right)$.

15.28. Функція максимальної правдоподібності:

$$L(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{a^n}\exp\left\{-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - b)\right\}, & \text{якщо всі } \xi_i > b; \\ 0, & \text{якщо існує } \xi_j \le b. \end{cases}$$

Якщо $\hat{b}$ — точка, в якій $Q(b) = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - b)$ досягає найменшого значення, а $\hat{a}$ — точка, в якій $L(a,\hat{b})$ досягає найбільшого значення, то в точці $(\hat{a},\hat{b})$ функція $L(a,b)$ досягає найбільшого значення. Зазначеними точками є

$$\hat{b} = \min\{\xi_i\}, \ \hat{a} = Q(\hat{b})/n;$$

$\hat{a}, \hat{b}$ — асимптотично незсунені й спроможні оцінки відповідно параметрів a, b.

15.31. $\hat{\nu} = 1/\left(\hat{m}_2/\hat{m}_1^2 - 1\right)$; $\hat{\alpha} = 1/\left(\hat{m}_2/\hat{m}_1 - \hat{m}_1\right)$.

15.32. $\hat{\theta} = \hat{m}_1$ — незсунена, спроможна й ефективна оцінка θ.

15.34. $0{,}56 \cdot \pi$. **15.35.** $\hat{p} = \left(1 + \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{-1}$.

15.36. $\hat{N} = (nK/k)$.

15.39. $\hat{a} = \sqrt{\hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2}$; $\hat{b} = \hat{m}_1 - \hat{a}$.

15.40. Оскільки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, то їхня спільна щільність розподілу дорівнює $\prod_{i=1}^{n} f(x_i; a, b)$, а функція максимальної правдоподібності

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; a, b) =$$

$$= \begin{cases} 1/(b-a)^n, & \text{якщо всі } \xi_i \in [a,b]; \\ 0, & \text{якщо існує } \xi_j \notin [a,b]. \end{cases}$$

Функція $L(a,b)$ набуває максимального значення у точці $(\hat{a},\hat{b})$, де різниця $(b-a)$ набуває мінімального значення, остання ж набуває мінімального значення при

$$a = \hat{a} = \min\{\xi_i\};\ b = \hat{b} = \max\{\xi_i\}.$$

Оцінки $\hat{a},\hat{b}$ — асимптотично незсунені й спроможні оцінки відповідно параметрів a,b (див. також приклад 14.1.1).

15.41. Покази годинників подати в годинах;

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_{14}(x) \right| = 0,306.$$

15.42. $0,09$.

15.43. $\hat{p} = \dfrac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $\hat{p}$ — незсунена, спроможна й ефективна оцінка p.

15.44. Оцінкою параметра (θ,h) є

$$(\hat{\theta},\hat{h}) = ((\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\})/2; (\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\})/2);$$

$\hat{\theta}$, $\hat{h}$ — асимптотично незсунені й спроможні оцінки відповідно параметрів θ і h.

15.45. $\sup\limits_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| = 0,287$.

15.47. $\hat{\theta} = \hat{m}_1$, $\hat{h} = \hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2$, $\hat{\theta}$ — незсунена й спроможна оцінка θ; $\hat{h}$ — асимптотично незсунена й спроможна оцінка h.

15.48. $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\xi_i$; $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\ln\xi_i - \sum\limits_{i=1}^{n}\ln\xi_i\right)^2$.

15.49. $\hat{\theta} = 1 + \dfrac{1}{rn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$.

15.50. $\hat{b} = \max\{\xi_i\}$; $\hat{b}$ — асимптотично незсунена й спроможна оцінка b.

15.51. $\hat{\lambda} = \bar{\xi}$; $\hat{\lambda}$ — незсунена, спроможна й ефективна оцінка λ.

15.53. $\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$; $\hat{p}$ — незсунена, спроможна й ефективна оцінка p.

15.54. $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{m}_1$; $\hat{\theta}$ — незсунена й спроможна оцінка θ.

15.55. Функція максимальної правдоподібності

$$L(\theta, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta^n \lambda^{n\theta}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i\right)^{\theta+1}}, & \text{якщо всі } \xi_i > \lambda; \\ 0, & \text{якщо хоча б одне } \xi_i \le \lambda, \end{cases}$$

$\theta > 1$, $\lambda > 0$.

Зафіксуємо значення змінної θ, тобто θ — довільне, але фіксоване. Функція $L(\theta, \lambda)$ однієї змінної λ (не диференційовна) досягає свого найбільшого значення у точці

$$\hat{\lambda} = \min\{\xi_i\}.$$

Функція $L(\theta, \hat{\lambda})$ диференційовна і досягає найбільшого значення у точці

$$\hat{\theta} = 1\bigg/\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i - \ln\min\{\xi_i\}\right).$$

І оскільки $L(\theta, \lambda) \le L(\theta, \hat{\lambda}) \le L(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$, то $(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$ — оцінка максимальної правдоподібності параметра (θ, λ).

15.56. Оцінка максимальної правдоподібності параметра σ^2:

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2;$$

$\hat{\sigma^2}$ — незсунена, спроможна, ефективна оцінка параметра σ^2.

15.57. 1) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $\hat{\theta}$ — незсунена, спроможна, ефективна оцінка параметра θ.

2) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{2}$; $\hat{\theta}$ — незсунена, спроможна, ефективна оцінка параметра θ.

3) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $\hat{\theta}$ — незсунена, спроможна, ефективна оцінка параметра θ.

15.58. Частота $\hat{p} = \mu/n$ є ефективною оцінкою p.

21.16 До глави 16

16.1. Нульова гіпотеза H_0: телепат думки не читає.

16.2. Нульова гіпотеза H_0: монета симетрична, альтернатива — двобічна.

16.3. Нульова гіпотеза H_0: пацієнт хворіє на туберкульоз.

16.4. Нульова гіпотеза H_0: телепат думки не читає.

16.5. Нульова гіпотеза H_0: монета симетрична, альтернатива — двобічна.

16.6. Нульова гіпотеза H_0: препарат токсичний.

16.8. Нульова гіпотеза H_0: хвороба передається, альтернатива — хвороба не передається.

16.9. Нульова гіпотеза H_0: $\lambda = 1$ — середній вміст бактерій на одиницю об'єму води становить 1. Альтернативна гіпотеза H_λ $(\lambda < 1)$ — середній вміст бактерій на одиницю об'єму води менший ніж 1.

Спостерігається випадкова величина ξ — кількість забруднених проб; ξ має біномний розподіл з параметрами $(10; p)$, де p — ймовірність того, що в пробі буде принаймні одна бактерія. Коли гіпотеза H_0 справджується, тобто середній вміст λ бактерій на одиницю об'єму дорівнює 1, $p = p_0 = 1 - e^{-1}$. Критична множина для перевірки гіпотези H_0 має вигляд $S = \{k : k \leq l\}$.

16.11. Нульова гіпотеза H_0: частка дефектних виробів становить 0,08; альтернативна гіпотеза H_p: $p \in (0; 0{,}08)$ (вона є складною). Критична множина $S = \{k : k < l\}$.

Вимога споживача формулюється так:

$$P(\overline{S}|H_{0,08}) \geq 0{,}90,$$

побажання постачальника

$$P(S|H_{0,01}) \geq 0{,}96.$$

16.12. Нульова гіпотеза H_0: гральний кубик симетричний, альтернативна гіпотеза H_p: $p \in (0{,}5; 1]$. Критична множина $S = \{k : k > l\}$.

16.15. Нульова гіпотеза H_0: усі родзинки використано за призначенням, альтернативна гіпотеза H_λ : частка λ родзинок використана не за призначенням, $\lambda \in (0, 1)$.

16.16. Реєструємо кількість мишей, що загинули.

Нульова гіпотеза H_0: препарат токсичний. Критичну множину шукатимемо у вигляді

$$S = \{k : k \leq l\}.$$

За умовою

$$P\{S|H_0\} \leq 0{,}0001$$

або

$$\sum_{k=0}^{l} C_{10}^{k} (0{,}8)^k (0{,}2)^{10-k} \leq 0{,}0001.$$

Останню нерівність задовольняють $l \in [0; 2]$, тому

$$S = \{k : k \leq 2\}.$$

Імовірність то, що при перевірці на токсичність критерієм S нетоксичний препарат витримає контроль

$$P\{S|H_1\} = \sum_{k=0}^{2} C_{10}^{k} (0{,}02)^k (0{,}98)^{10-k} \geq 0{,}996.$$

Результат експерименту свідчить на користь нетоксичності препарату.

16.18. Нульова гіпотеза H_0: монета симетрична, альтернативна гіпотеза H_p: p дорівнює одному з чисел 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 (альтернатива складна).

16.19. Нульова гіпотеза H_0: відсоток ураження інсектициду $\theta = 98$, альтернативна гіпотеза H_θ: $\theta \in (0, 98)$. Критична множина $S = \{k : k < l\}$. Вимога авторів нового інсектициду

$$P(\overline{S}|H_0) \geq 0{,}96,$$

Вимога покупця

$$P(S|H_{92}) \geq 0{,}95.$$

21.17 До глави 17

Далі, перевіряючи гіпотезу H_0: $a = a_0$, через t позначатимемо $(\bar{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$, а перевіряючи гіпотезу H_0: $a_\xi = a_\eta$, через t позначатимемо $(\bar{\xi} - \bar{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right)$.

17.1. Розглянемо різницю $\zeta = \eta - \xi$ між ємностями легенів після і до сезону (у даному разі користуватися критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi = a_\eta$ не можна, оскільки вибірки ємностей легенів після і до сезону не є незалежними). Щодо середнього різниці ζ висувається гіпотеза H_0: $a = 0$ (гіпотеза про відсутність ефекту фізичних вправ), альтернативою до гіпотези H_0 є гіпотеза $a > 0$. Значення $t = \bar{\zeta}\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}36 > 1{,}833 = t_{0{,}05;9} = t_{\alpha;n-1}$. Тому згідно з критерієм Стьюдента гіпотеза H_0 відхиляється (на 5 %-му рівні значущості), що інтерпретується як істотне збільшення ємності легенів під впливом фізичних вправ.

17.2. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 0{,}51 < 2{,}306 = t_{0{,}025;8} = t_{\alpha;n+m-2}$.

Тому згідно з критерієм Стьюдента гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості), що інтерпретуємо як відсутність відмінностей відбивних властивостей фарб.

17.3. Нульова гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива двобічна. Значення $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0,24$. Гіпотеза H_0 на 2 %-му рівні значущості відхиляється. Останнє означає, що точність роботи контролерів різна.

17.4. Нульова гіпотеза H_0: $a = 1$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 2{,}35 > 2{,}262 = t_{0{,}025;9} = t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 (на 5 %-му рівні значущості) відхиляється, що вказує на те, що лічильники відрегульовані незадовільно.

17.5. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 0{,}891 < 2{,}262 = t_{0{,}025;9} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 на 5 %-му рівні значущості не відхиляється (не суперечить експериментальним даним). Інакше кажучи, експеримент не дає підстав стверджувати, що сталь I і сталь II відрізняються здатністю до глибокого відпуску.

17.6(2°). Нульова гіпотеза H_0: $\sigma^2/0,01 = 1$, альтернатива однобічна: $\sigma^2/0,01 > 1$ (нас цікавить тільки перевищення дисперсією заданого рівня). Значення $s^2/0,01 = 14{,}53$, $\chi^2_{\alpha;(n-1)}/(n-1) = \chi^2_{0{,}05;9}/9 = 1{,}88 < 14{,}53 = s^2/0{,}01$. Тому гіпотеза H_0 на 5 %-му рівні значущості відхиляється. Результати зважування 10 пакунків дають підстави стверджувати, що вимоги щодо дисперсії маси пакунків не виконуються — розкид маси пакунка перевищує задану норму.

17.7. Нульова гіпотеза H_0: $a = 12{,}0$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = |\bar{\xi} - 12{,}0| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}42$; $|t| = 0{,}42 < 2{,}16 = t_{0{,}025;13} = t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється.

17.8. Нехай a_η — середнє вмісту золота у зразках, взятих із шурфів, а a_ξ — зі свердловин, H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива однобічна: $a_\xi < a_\eta$ (результат випробувань зразків на вміст золота із свердловин не більший, ніж із шурфів). Ми не хочемо нехтувати можливим зменшенням видатків (за рахунок буріння свердловин замість закладання шурфів), тому призначаємо не дуже великий рівень значущості, скажімо, $\alpha = 0{,}025$. Значення

$$t = (\bar{\eta} - \bar{\xi}) \Big/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right) = 1{,}82;$$

$t = 1{,}82 < 2{,}06 = t_{0{,}025;25} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється.

Отже, для розвідки розсипного родовища золота можна рекомендувати бурити свердловини замість того, щоб закладати шурфи, що зменшує витрати на розвідку.

17.9. Нехай σ_ξ^2, σ_η^2 — дисперсії розміру зовнішнього діаметра відповідно після налагодження станка і через певний інтервал часу після цього. Нульова гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива однобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$, оскільки з часом точність роботи верстата може тільки зменшитися (дисперсія критичного розміру виробу може хіба що збільшитися). Значення відношення $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0{,}77 > 0{,}44 = 1/F_{0{,}05;14;19}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Останнє означає, що наведені дані не дають підстав говорити про зниження точності роботи верстата.

17.10. Нульова гіпотеза H_0: $a = 24$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = |\bar{\xi} - 24| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}363 < 2{,}365 = t_{0{,}025;7} = t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Отже, можна вважати, що розрахункова швидкість полімеризації становить 24 % на годину.

17.11. Нехай a_ξ і a_η — середні опори на стиск відповідно для бетону виготовленого без обробки та для бетону виготовленого з обробкою. Відносно a_ξ і a_η висувається гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$ — гіпотеза про відсутність ефекту спеціального способу виготовлення бетону (образлива для авторів нового способу). Альтернатива однобічна: $a_\xi < a_\eta$ (спеціальний спосіб виготовлення бетону орієнтовано на підвищення його міцності на стиск). Ви — член доброзичливої комісії з перевірки ефекту спеціального способу виготовлення бетону (не хочете несправедливо нехтувати ефектом, коли він існує), тому призначаєте не дуже малий рівень значущості. Виберемо, скажімо, 5 %-й рівень. Значення

$$t = (\bar{\eta} - \bar{\xi}) \Big/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right) = 2{,}29 >$$

$$> 2{,}13 = t_{0{,}05;4} = t_{\alpha;n+m-2}.$$

Тому нульова гіпотеза H_0 відхиляється. Останнє означає, що експеримент дає підстави стверджувати, що спеціальний спосіб виготовлення бетону підвищує його опір на стиск.

17.12. Нехай σ_ξ^2, σ_η^2 — дисперсії виходу продуктів при застосуванні каталізаторів A і B. Гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива двобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ або $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$, оскільки апріорі нічого невідомо про стабільність виходу небажаного продукту як у разі застосування одного каталізатора, так і іншого. Значення $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0,335$; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0{,}01;8;8} = 0{,}166 < s_\xi^2/s_\eta^2 < 6{,}03 = F_{0{,}01;8;8} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Експеримент не дає підстав вважати, що стабільність виходу небажаного продукту при застосуванні каталізаторів A і B різна.

17.13. Нульова гіпотеза H_0: $a = 2{,}5$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = |\bar{\xi} - 2{,}5| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}08 < 2{,}365 = t_{0{,}025;7} = t_{\alpha;n-1}$, тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Отже, можна стверджувати, що вибірку добуто з нормального розподілу з середнім 2,5.

17.14. Нехай a_ξ і a_η — середні збільшення маси дітей, яким видавали відповідно сік і молоко. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна: $a_\xi < a_\eta$ або $a_\xi > a_\eta$. Значення $|t| = 1{,}30 < 2{,}01 = t_{0{,}025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється, що інтерпретуємо як неістотну відмінність збільшення середньої маси дітей у групах.

17.15. Нульова гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива двобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ або $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ (якщо H_0 не справджується, то апріорі невідомо, точність якого мікроскопа вища, а якого нижча). Значення $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0{,}47$; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0{,}01;11;8} = 0{,}17 < s_\xi^2/s_\eta^2 < 4{,}47 = F_{0{,}01;8;11} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Тому гіпотеза H_0 на 2 %-му рівні значущості не відхиляється. Експеримент не дає підстав ставити під сумнів однакову точність вимірювань мікроскопами I і II.

17.16. Нульова гіпотеза H_0: $a = 2000$, альтернатива двобічна (опір резисторів може бути як меншим, так і більшим 2000). Значення $|t| = 1{,}02 < 2{,}20 = t_{0{,}025;11} = t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Останнє означає, що такі відхилення значення опору резисторів від номіналу допустимі (вони природні й уникнути їх неможливо).

17.17. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 8{,}566 > 2{,}10 = t_{0{,}025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 відхиляється (на 5 %-му рівні значущості).

17.18. Нехай σ_ξ^2, σ_η^2 — дисперсії відбивних здатностей фарби, виготовленої відповідно за технологіями A і B. Нульова гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива однобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ (зміни в технології спрямовані на зменшення дисперсії відбивних здатностей фарби). Відхилення на користь цієї альтернативи свідчитиме про зменшення дисперсії. Значення $s_\xi^2/s_\eta^2 = 4{,}74 < 6{,}39 = F_{0{,}05;4;4}. = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Тому гіпотеза H_0 на 5 %-му рівні значущості не відхиляється. Експеримент не дає підстав стверджувати, що зміни в технології, спрямовані на зменшення дисперсії відбивних здатностей фарби, виявилися ефективними.

17.19. Нульова гіпотеза H_0: $a = 220$, альтернатива двобічна: $a > 220$ або $a < 220$. Значення $|t| = |\bar{\xi} - 220| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}48 < 2{,}07 = t_{0{,}025;23} = t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Відхилення від стандарту можна вважати допустимими.

17.20. Нехай a_ξ і a_η — середні значення результатів відповідно традиційної й ковзної ходи. Нульова гіпотеза

H_0: $a_\xi - 1 = a_\eta$, альтернатива однобічна: $a_\xi - 1 > a_\eta$. Відхилення нульової гіпотези на користь альтернативної $a_\xi - 1 > a_\eta$ свідчитиме про наявність більш ніж однохвилинного ефекту ковзної ходи, невідхилення гіпотези H_0 свідчитиме про відсутність такого ефекту. Значення

$$t = ((\bar{\xi} - 1) - \bar{\eta}) \Big/ s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}$$

порівнюємо з $t_{\alpha;n+m-2}$, якщо $t > t_{\alpha;n+m-2}$ гіпотеза H_0 відхиляється, у супротивному разі — ні. Маємо $t = 3{,}774 > 2{,}10 = t_{0,05;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому згідно з критерієм Стьюдента гіпотеза H_0: $a_\xi - 1 = a_\eta$ на 5 %-му рівні значущості відхиляється, що інтерпретується як більш ніж однохвилинний виграш у часі в разі використання техніки ковзної ходи порівняно з традиційною.

17.21. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна: $a_\xi < a_\eta$ або $a_\xi > a_\eta$, оскільки немає апріорної інформації стосовно діаметрів виробів, виготовлених на верстатах A і B. Значення $|t| = 1{,}98$; $|t| = 1{,}98 < 2{,}07 = t_{0,025;23} = t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Експеримент не дає підстав стверджувати, що діаметри виробів, виготовлених на різних верстатах, відмінні.

17.22. Нульова гіпотеза H_0: $a = 18$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 0{,}89 < 2{,}20 = t_{0,025;11} = t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Останнє трактується як виконання вимог стандарту щодо вмісту хрому в сталі 18Cr10Ni2Mo.

17.23. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 2{,}55 > 2{,}10 = t_{0,025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Експеримент дає підстави стверджувати, що комфортна температура для жінок і чоловіків різна.

17.24. Нульова гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернативна гіпотеза двобічна. Значення s_ξ^2/s_η^2 дорівнює 1,71; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0,01;7;7} = 0{,}14 < s_\xi^2/s_\eta^2 < 6{,}99 = F_{0,01;7;7} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 2 %-му рівні значущості). Експеримент не дає підстав стверджувати, що між розкидом опору дроту типів A і B існують відмінності.

17.25. Нульова гіпотеза H_0: $a = 11$, альтернатива однобічна: $a < 11$ (міцність на згин менша 11). Значення $t = (\bar{\xi} - 11)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}8 > -1{,}75 = -t_{0{,}05;15} = -t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Таким чином, можна вважати, що міцність на згин не менша ніж 11.

17.26. Точність верстата характеризується дисперсією: менша дисперсія — більша точність, більша дисперсія — менша точність.

Перевіряємо гіпотезу H_0: $\sigma_A^2/\sigma_B^2 = 1$, альтернатива двобічна: $\sigma_A^2/\sigma_B^2 > 1$ або $\sigma_A^2/\sigma_B^2 < 1$, оскільки невідомо, точність якого верстата більша, а якого менша. Значення $s_A^2/s_B^2 = 1,27$; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0{,}01;9;14} = 0{,}25 <$ $< 1{,}27 = s_A^2/s_B^2 < 5{,}00 = F_{0{,}01;14;9} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 2 %-му рівні значущості). Експеримент не дає підстав стверджувати, що верстати належать до різного класу точності.

17.27. Розкид характеризується дисперсією, більша дисперсія — більший розкид. Нехай σ_ξ^2 — дисперсія вмісту марганцю в разі його визначення за традиційною методикою, а σ_η^2 — за новою. Нульова гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива однобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ (очікується, що нова методика визначення вмісту марганцю дає менший розкид результатів). Відхилення H_0 на користь цієї альтернативи свідчитиме про зменшення дисперсії. Значення $s_\xi^2/s_\eta^2 = 1{,}55$; $s_\xi^2/s_\eta^2 = 1{,}55 < 3{,}68 = F_{0{,}05;9;7} =$ $= F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Як не прикро авторам нової методики, яка за їхніми очікуваннями дає менший розкид результатів вимірювань порівняно з традиційною, експеримент не дає підстав говорити про зменшення розкиду.

17.28. Нульова гіпотеза H_0: $a = 6720$; альтернатива однобічна: $a < 6720$ (головне — виявити дріт, який рветься, коли значення зусилля на розрив менше граничного). Значення $t = (\bar{\xi} - 6720)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}38$; $t >$

$> -1{,}729 = -t_{0{,}05;19} = -t_{\alpha;n-1}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Експеримент дає підстави стверджувати, що вимоги до міцності партії дроту, з якого виготовляють канати, виконані.

17.29. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна (немає апріорної інформації щодо характеристик футерівки підприємств A і B). Значення $|t| = 4{,}05 > 2{,}11 = t_{0{,}025;17} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 відхиляється (на 5 %-му рівні значущості). Експеримент дає підстави стверджувати, що футерівка, виготовлена на підприємствах A і B, відрізняється за своїми характеристиками.

17.30. Нехай H_0: $\sigma^2/35{,}63 = 1$, альтернатива однобічна: $\sigma^2/35{,}63 < 1$. Відхилення H_0 на користь цієї альтернативи свідчитиме про зменшення дисперсії, у супротивному разі — ні. Значення $s^2/35{,}63 = 0{,}842 > 0{,}47 = \chi^2_{0{,}95;14}/14 = \chi^2_{(1-\alpha);(n-1)}/(n-1)$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Експеримент не дає підстав стверджувати, що дисперсія за рахунок технологічних змін процесу зменшилася (попри сподівання їх авторів).

17.31. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 3{,}5 > 2{,}10 = t_{0{,}025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$ (у розрахунках значення $|t|$ у мікрометрах були переведені у міліметри). Тому гіпотеза H_0 відхиляється. Експеримент дає підстави стверджувати, що протягом заданого інтервалу часу відбулися зміни у рівні налагодження верстата.

17.32. Оскільки реєструється температура правої і лівої шин для одного й того самого автобуса, то вибірки не є незалежними (а отже, не можна користуватися критерієм для перевірки гіпотези про рівність середніх), тому розглядатимемо різницю $\zeta = \eta - \xi$ температур, скажімо, правої і лівої шин. Щодо середнього a різниці ζ висувається гіпотеза H_0: $a = 0$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = |\bar{\xi}| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}16$. Таким чином, $|t| = 2{,}16 < 2{,}20 = t_{0{,}025;11} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється (на 5 %-му рівні значущості), що свідчить про несуттєву різницю температури, до якої нагріваються права й ліва шини автобуса під час руху.

17.34. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна. Значення $|t| = 0{,}916 < 2{,}015 = t_{0,05;5} = t_{\alpha;n+m-2}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Припущення, що склад гуми не впливає на її міцність, не суперечить експериментові.

17.35. Розглянемо різницю $\zeta = \eta - \xi$ між довжиною зразків після відпалювання і до нього. (Користуватися критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези про рівність середніх не можна, оскільки вибірки не є незалежними — вимірюється довжина одного й того самого зразка до відпалювання й після нього.) Відносно середнього a різниці ζ висувається гіпотеза H_0: $a = 0$, альтернатива двобічна: $a > 0$ або $a < 0$. Значення $|t| = 2{,}14 < 2{,}262 = t_{0,025;9}$. Тому гіпотеза H_0 не відхиляється. Експеримент не дає підстав говорити про зміну довжини зразків виробів після їхнього відпалювання.

17.36. Точність роботи верстата характеризується дисперсією і з часом не зростає (а дисперсія відповідно не зменшується). У термінах перевірки статистичних гіпотез припущення про незмінність точності роботи верстата формулюється як гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива однобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$. Значення $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0{,}51 > 0{,}31 = 1/F_{0,05;9;9} = 1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)}$. Тому нульова гіпотеза не відхиляється. Таким чином, можна вважати, що точність роботи верстата не зменшилася (хоча значення оцінки дисперсії й зросло з $s_\xi^2 = 4{,}4\,\text{мкм}^2$ до $s_\eta^2 = 8{,}6\,\text{мкм}^2$, але це допустиме збільшення дисперсії).

17.37. Розглядатимемо різницю $\zeta = \eta - \xi$ між тривалістю знеболювальної дії препаратів B і A. (У даному разі користуватися критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi = a_\eta$ не можна, оскільки вибірки не є незалежними.) Щодо середнього a різниці ζ висувається гіпотеза H_0: $a = 0$, при цьому у випадку 1° (за відсутності апріорної інформації про ефективність препаратів) альтернатива двобічна: $a < 0$ або $a > 0$; а у випадку 2°, коли відомо, що B має не меншу фармакологічну активність ніж A, альтернатива однобічна: $a > 0$. Далі, $t = \bar{\zeta}\Big/\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}43$; $|t| = 2{,}43 > 2{,}365 = t_{0,025;7} = t_{\alpha;n-1}$. Тому у випадку 1° гіпотеза H_0 відхиляється (на 5 %-му рівні значущості), що трактуємо як різну фармакологічну активність препаратів B і A.

Відхиляється гіпотеза H_0 і за наявності апріорної інформації (фармакологічна активність B не менша ніж A), оскільки $t = 2{,}43 > 1{,}895 = t_{0{,}05;7}$. Це свідчить на користь більшої фармакологічної активності препарату B порівняно з A.

17.38. Нульова гіпотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двобічна: $a_\xi < a_\eta$ або $a_\xi > a_\eta$. Значення $|t| = 1{,}14 < 2{,}179 = t_{0{,}025;12}$. Тому гіпотеза не відхиляється. Експеримент не виявив істотної різниці між результатами, добутими різними операторами.

21.18 До глави 18

Приклади інтерпретації невідхилення нульової гіпотези, відхилення нульової гіпотези на користь тієї чи іншої альтернативи можна знайти у розв'язаннях і вказівках до задач гл. 17.

18.7. Щоб забезпечити виконання умови $\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10$ для всіх i, j, не виключено, що ознаки D і E необхідно буде об'єднати в одну ознаку S — недостатньо розвинений або розумово відсталий.

18.8. Можна запропонувати дві моделі: у першій — монети симетричні, у другій — інформація про симетричність відсутня. В останній моделі гіпотетичний розподіл залежить від невідомого параметра, який необхідно оцінити за вибіркою методом максимальної правдоподібності.

18.9. Див. вказівку до задачі 18.8.

18.19. Формально гіпотеза про незалежність глухонімоти від статі формулюється як гіпотеза про незалежність ознак: стать і глухонімота.

Спочатку необхідно побудувати таблицю спряженості ознак. Спостерігається 15 729 000+16 799 000 значень (за кількістю жителів Англії й Уельсу) випадкової величини (ξ, η), де ξ — стать (набуває, наприклад, значення 0 для жіночої статі і 1 для чоловічої), η — набуває значення 1, якщо людина глухоніма і 0 — у супротивному разі.

18.22. Щоб забезпечити виконання умови

$$\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10$$

для всіх i, j, не виключено, що дві ознаки: F і G (або дві ознаки: “задовільно” і “дуже погано”) необхідно буде об’єднати в одну.

18.25. Гіпотеза H_0: число появ $(1, 1)$ на 100 пар має пуассонів розподіл.

18.27. Не виключено, що якісь ознаки необхідно буде об’єднати в одну (див., наприклад, вказівку до задачі 18.7).

18.30. Див. вказівку до задачі 18.8.

18.36. Якщо телепат думки не читає, то ймовірність правильно прочитати задуману цифру дорівнює $1/10$, і кількість ξ правильно прочитаних цифр у серії з n спостережень має біномний розподіл з параметрами $(n; 1/10)$:

$$P\{\xi = k\} = B_{n;1/10}(k) = C_n^k \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{n-k},$$

$k = 0, 1, \ldots, n.$

21.19 До глави 19

Приклади інтерпретації невідхилення нульової гіпотези, її відхилення на користь тієї чи іншої альтернативи можна знайти у розв’язаннях і вказівках до задач гл. 17.

19.7. Номінальний діаметр шийки робочої частини свердла становить 9,8 мм, але у процесі виробництва виходить те, що виходить (див. вибірку), іншого в принципі не може бути — дуже вже багато випадкових (неконтрольованих) факторів впливає на кінцевий результат. Тому вимірювання діаметрів шийок 20 свердел, кожен з яких має дорівнювати 9,8 мм, дають не одне число 9,8, а реалізацію вибірки деякої випадкової величини ζ, яку ми й називаємо діаметром шийки свердла.

Стосовно розподілу значень діаметра шийки свердла приймаємо цілком природне припущення: ζ — нормально розподілена випадкова величина (теоретичним обґрунтуванням цього припущення, яке у більшості ситуацій справджується, є центральна гранична теорема). Нормальний розподіл $N_{a;\sigma^2}$ визначається двома параметрами: a і σ^2; його функція розподілу

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt.$$

Оскільки номінальний діаметр шийки свердла 9,8 мм, то $a = 9{,}8$. Вимога "норма відходу за технічного допуску 0,05 мм має становити 1 %" означає, що

$$P\{9,75 \le \zeta \le 9,85\} = 0,99.$$

Останню рівність, з урахуванням припущення про нормальність розподілу ζ, можна переписати так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{9{,}75}^{9{,}85} \exp\left\{-\frac{(t-9,8)^2}{2\sigma^2}\right\} dt = 0,99,$$

а після заміни $(t-9,8)/\sigma = u$ так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-0{,}05/\sigma}^{0{,}05/\sigma} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = 0,99,$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{0{,}05/\sigma} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = 0,495.$$

За таблицею 22.1.1 нормального розподілу знаходимо $0,05/\sigma = 2,575$, $\sigma = 0,02$. Таким чином, функція гіпотетичного розподілу діаметра шийки свердла має вигляд

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\} du.$$

Залишилося, скориставшись критерієм А. М. Колмогорова, перевірити гіпотезу H_0: діаметр шийки свердла має розподіл $N_{a;\sigma^2}$; $a = 9,8$, $\sigma^2 = 0,0004$.

19.16. Покази годинників записати в годинах.

19.26. Випадкову величину s_i можна подати у вигляді

$$s_i = \sum_{k=0}^{16} \varepsilon_k^{(i)},$$

де $\varepsilon_k^{(i)}, k = 0, 1, \ldots, 16,$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподілом кожної з яких є

$$P\{\varepsilon_k^{(i)} = j\} = 1/2, \;\; j = 0, 1.$$

Згідно з центральною граничною теоремою, нормована сума незалежних однаково розподілених випадкових величин (зі скінченими дисперсіями) має розподіл, близький до $N_{0;1}$-розподілу. Зазначимо, що

$$Ms_i = M \sum_{k=0}^{16} \varepsilon_k^{(i)} = 8, \; Ds_i = D \sum_{k=0}^{16} \varepsilon_k^{(i)} = 4,$$

тому

$$\frac{s_i - Ms_i}{\sqrt{Ds_i}} = \frac{s_i - 8}{2}.$$

19.27. Альтернатива однобічна.

19.28. Див. задачу 19.25.

21.20 До глави 20

20.1. Оцінки $\hat{\alpha} = 73{,}98$; $\hat{\beta} = 3{,}85$; $\hat{\sigma^2} = 59{,}44$. Довірчими інтервалами для параметрів з коефіцієнтом надійності 0,90 є: (71,15; 76,80) для параметра α; (2,06; 5,64) для параметра β; (42,06; 115,6) для параметра σ^2.

Рівняння регресії

$$y = 73{,}98 + 3{,}85(x - 10{,}53).$$

Значення $|t| = 3{,}689 > 1{,}717 = t_{0{,}05;22}$, тому згідно з (20.1.6) гіпотеза H_0: $\beta = 0$ відхиляється (на 5% рівні значущості). Регресія значуща.

Перевірка адекватності регресії: маємо $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 2, \ldots, n_{19} = 1$; $n = 24$, $k = 19$; $s_1^2 = 129{,}84$; $s_2^2 = 45{,}72$; значення $s_2^2/s_1^2 = 0{,}35 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}05;17;5} = 4{,}59$, тому гіпотеза про адекватность не відхиляється.

20.2. Оцінки $\hat{\alpha} = 13{,}11$; $\hat{\beta} = 0{,}74$; $\hat{\sigma^2} = 20{,}57$. Довірчими інтервалами для параметрів з коефіцієнтом надійності 0,90 є: (12,01; 14,21) для параметра α; (0,61; 0,87) для параметра β; (15,78; 31,08) для параметра σ^2.

Рівняння регресії

$$s = 13{,}11 + 0{,}74(v - 24{,}78).$$

Значення $|t| = 9{,}661 > 1{,}677 = t_{0{,}05;48}$, тому згідно з (20.1.6) гіпотеза H_0: $\beta = 0$ відхиляється (на 5% рівні значущості). Регресія значуща.

Щоб перевірити адекватність лінійної регресії, обчислимо

$$s_1^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} (s_{j;\nu} - \bar{s_j})^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{k-2} \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{s_j} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(v_j - \bar{v}))^2,$$

$$\bar{s_j} = \frac{1}{n_j} \sum_{\nu=1}^{n_j} s_{j;\nu},\ j = 1, 2, \ldots, k,\ n = \sum_{j=1}^{k} n_j,\ \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

У задачі

$$n = 50,\ k = 19,\ n_1 = 2,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1,\ \ldots,\ n_{19} = 1.$$

$$s_1^2 = 20{,}31;\ s_2^2 = 23{,}55;\ s_2^2/s_1^2 = 1{,}16;$$

$$1{,}16 = s_2^2/s_1^2 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}05;17;31} = 1{,}96.$$

Тому згідно з (20.1.18) гіпотеза про адекватність описання лінійною моделлю залежності тормозного шляху s автомобіля від швидкості v не відхиляється.

20.3. Оцінки $\hat{\alpha} = 95{,}42$; $\hat{\beta} = 1{,}87$; $\widehat{\sigma^2} = 97{,}36$. Довірчими інтервалами для параметрів з коефіцієнтом надійності 0,90 є: (90,08; 100,76) для параметра α; (0,92; 2,82) для параметра β; (64,31; 276,35) для параметра σ^2.

Рівняння регресії

$$y = 95{,}42 + 1{,}87(x - 7{,}46).$$

Значення $|t| = 3{,}55 > 1{,}796 = t_{0{,}05;11}$, тому згідно з (20.1.6) гіпотеза H_0: $\beta = 0$ відхиляється (на 5% рівні значущості). Регресія значуща.

Перевірка адекватності регресії. Маємо $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 1, \ldots, n_7 = 1$; $n = 13$, $k = 7$; $s_1^2 = 101,17$; $s_2^2 = 48,83$; $s_2^2/s_1^2 = 0,48 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}05;5;6} = 4{,}39$, тому гіпотеза про адекватність не відхиляється.

20.4. Оцінки $\hat{\alpha} = -1{,}10$; $\hat{\beta} = -0{,}59$; $\widehat{\sigma^2} = 0{,}75$. Довірчими інтервалами для параметрів з коефіцієнтом надійності 0,90 є: $(-1{,}31; -0{,}90)$ для параметра α; $(-0{,}73; -0{,}45)$ для параметра β; (0,58; 1,12) для параметра σ^2.

Рівняння регресії

$$T = -1{,}10 - 0{,}59(\mathrm{Ca} - 4{,}09).$$

Значення $|t| = 7{,}19 > 1{,}676 = t_{0{,}05;50}$, тому згідно з (20.1.6) гіпотеза H_0: $\beta = 0$ відхиляється (на 5% рівні значущості). Регресія значуща. Регресія адекватна.

Перевірка адекватності регресії: маємо $n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1, \ldots, n_{34} = 3$; $n = 52$, $k = 34$; $s_1^2 = 0{,}87$; $s_2^2 = 0{,}73$; $s_2^2/s_1^2 = 0{,}84 < 2{,}19 = F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}05;32;18}$, тому гіпотеза про адекватність описання лінійною моделлю залежності значення T денситометричного аналізу від кількості Са, що виводиться, не відхиляється.

Відповідно до рівняння регресії значенню $T = -2$ (межі між середньою і тяжкою формою остеопенії) відповідає значення 5,7 ммоль/л Са. Тому коли Са$>$5,7 (кальцію виводиться більше ніж 5,7 одиниць) ступінь остеопенії природно класифікувати як тяжкий.

20.7. Оцінки $\hat{\alpha} = 13{,}425$; $\hat{\beta} = 0{,}078$; $\hat{\sigma^2} = 1{,}648$. Довірчими інтервалами з коефіцієнтом надійності 0,90 є: (12,90; 13,95) для параметра α; (0,061; 0,096) для параметра β; (1,141; 3,509) для параметра σ^2.

Рівняння регресії

$$\hat{y} = 13{,}425 + 0{,}078(x - 67).$$

Значення $|t| = 7,737 > 1,734 = t_{0,05;18}$, тому згідно з (20.1.6) гіпотеза H_0: $\beta = 0$ відхиляється (на 5% рівні значущості). Регресія значуща.

20.9. Оцінки $\hat{\alpha} = 2125,28$; $\hat{\beta} = 0,97$; $\hat{\sigma^2} = 2826,22$. Довірчими інтервалами з коефіцієнтом надійності 0,90 для параметра α є: (2102,07; 2148,48); для параметра β є (0,93; 1,02); для параметра σ^2 є (1934,29; 6390,95).

Рівняння регресії

$$y = 2125{,}28 + 0{,}97(x - 2165).$$

Значення $|t| = 38{,}74 > 1{,}746 = t_{0,05;16}$, тому згідно з (20.1.6) гіпотеза $H_0 : \beta = 0$ відхиляється (на 5% рівні значущості). Регресія значуща.

21.21 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1
Стохастичний експеримент.
Дискретний імовірнісний простір

Варіант	Задача					
1	1.10	2.15	2.11	3.14	3.36	4.2	4.17
2	1.14	2.14	2.12	3.13	3.37	4.3	4.18
3	1.15	2.13	2.15	3.12	3.36	4.4	4.19
4	1.19	2.12	2.24	3.11	3.4	4.5	4.20
5	1.20	2.10	2.23	3.9	3.32	4.6	4.21
6	1.22	2.9	2.22	3.8	3.28	4.7	4.22
7	1.24	2.8	2.21	3.7	3.27	4.8	4.23
8	1.25	2.7	2.20	3.6	3.25	4.9	4.24
9	1.23	2.5	2.19	3.5	3.21	4.10	4.25
10	1.33	2.4	2.18	3.3	3.20	4.12	4.19
11	1.37	2.3	2.17	3.2	3.16	4.13	4.23
12	1.39	2.2	2.16	3.1	3.15	4.16	4.12

Завдання 2
Дискретна випадкова величина,
її розподіл і числові характеристики

Варіант	Задача					
1	5.3	5.8(1а)	5.10(3а)	5.28	6.1	6.32
2	5.4	5.8(1б)	5.11	5.29	6.2	6.31
3	5.5	5.8(1в)	5.12	5.30	6.3	6.28(1)
4	5.6	5.8(2а)	5.13	5.31	6.4	6.27
5	5.7	5.8(2б)	5.14	5.32	6.5	6.21
6	5.19	5.8(2в)	5.15	5.34(а)	6.6	6.20
7	5.20	5.8(2г)	5.16	5.34(б)	6.7	6.18
8	5.21	5.8(2д)	5.18	5.38	6.8	6.17
9	5.22	5.8(2е)	5.19	5.39	6.9	6.16
10	5.23	5.8(3а)	5.8(2є)	5.40(1)	6.10	6.30
11	5.24	5.8(3б)	5.8(2ж)	5.40(2)	6.11	6.28(2)
12	5.27	5.8(3в)	5.8(2з)	5.39	6.12	6.28(3)

Завдання 3

Аксіоматика теорії ймовірностей

Варіант	Задача			
1	7.1	7.7	7.15(1)	7.18
2	7.2	7.8	7.17	7.19
3	7.3	7.9	7.15(3)	7.20
4	7.4	7.10	7.15(4)	7.29
5	7.5	7.7	7.15(5)	7.30
6	7.6	7.8	7.15(1)	7.31
7	7.1	7.9	7.15(2)	7.32
8	7.2	7.10	7.15(3)	7.21
9	7.3	7.7	7.15(4)	7.22
10	7.4	7.8	7.15(2)	7.30
11	7.5	7.9	7.16	7.31
12	7.6	7.10	7.17	7.32

Завдання 4

Геометричні ймовірності

Варіант	Задача				
1	8.3(1)	8.4(1)	8.6	8.18	8.33
2	8.3(2)	8.4(2)	8.7	8.17	8.15(3)
3	8.3(3)	8.4(3)	8.5	8.19	8.13(2)
4	8.3(4)	8.4(6)	8.8	8.20	8.18
5	8.3(5)	8.4(7)	8.9	8.23	8.19
6	8.3(6)	8.4(8)	8.10	8.25	8.20
7	8.3(7)	8.4(9)	8.11	8.26	8.23
8	8.3(8)	8.4(11)	8.12	8.28	8.25
9	8.2(1)	8.4(13)	8.13(1)	8.24	8.28
10	8.2(2)	8.4(14)	8.14	8.30	8.16
11	8.2(3)	8.4(15)	8.15(1)	8.31	8.6
12	8.2(4)	8.4(16)	8.15(2)	8.34	8.7

Завдання 5
Випадкова величина і її розподіл

Варіант	Задача			
1	9.1	9.12	9.23	9.33
2	9.2	9.11	9.24(1)	9.34
3	9.3	9.13	9.24(2)	9.35(1)
4	9.4(1,2)	9.14	9.25(1)	9.35(2)
5	9.4(3,4)	9.15	9.25(2)	9.36
6	9.4(5,6)	9.16	9.26(1)	9.37
7	9.5	9.17	9.26(2)	9.38
8	9.6	9.18	9.27	9.39
9	9.7	9.19	9.28	9.40
10	9.8	9.20	9.29	9.41
11	9.9	9.21	9.30	9.42
12	9.10	9.22	9.32	9.43

Завдання 6
Математичне сподівання випадкової величини

Варіант	Задача				
1	10.1(1)	10.10	10.19(1а)	10.21	10.31
2	10.1(2)	10.11	10.19(1б)	10.22(1)	10.32
3	10.2	10.12	10.19(2а)	10.23(1)	10.33
4	10.3(1,2)	10.13	10.19(2б)	10.23(2)	10.34
5	10.3(3,4)	10.14	10.19(3а)	10.24(1)	10.35
6	10.4	10.15	10.19(3б)	10.24(2)	10.21
7	10.5	10.16(1)	10.19(4а)	10.24(3)	10.23(1)
8	10.6(1,2)	10.16(2)	10.19(4б)	10.25	10.23(2)
9	10.6(3,4)	10.16(3)	10.20(1а)	10.26	10.31
10	10.7	10.17(1)	10.20(2б)	10.27	10.32
11	10.8	10.17(2)	10.20(3а)	10.28	10.22(1)
12	10.9	10.17(3)	10.20(4б)	10.29	10.22(2)

Завдання 7
Згортка

Варіант	Задача		
1	11.1	11.10(1)	11.16
2	11.2(1)	11.10(2)	11.17
3	11.2(2)	11.8	11.16
4	11.2(3)	11.6	11.19
5	11.2(4)	11.11(1)	11.20
6	11.3	11.11(2)	11.9
7	11.4(1)	11.11(3)	11.18
8	11.4(2)	11.12	11.5
9	11.4(3)	11.13(1)	11.18
10	11.4(4)	11.13(2)	11.19
11	11.4(5)	11.14	11.20
12	11.4(6)	11.15	11.7

Завдання 8
Збіжність розподілів.
Характеристична функція

Варіант	Задача				
1	12.1	12.9(1)	13.1	13.16	13.23
2	12.2	12.9(2)	13.2	13.15	13.24
3	12.3	12.10	13.3	13.13	13.25
4	12.4	12.11	13.4	13.17	13.26
5	12.5	12.12	13.5	13.18	13.7
6	12.6	12.13	13.6	13.19	13.9
7	12.7(1)	12.14	13.7	13.20	13.26
8	12.7(2)	12.3	13.8	13.17	13.25
9	12.7(3)	12.9(1)	13.9	13.18	13.24
10	12.7(4)	12.9(2)	13.10	13.19	13.23
11	12.7(5)	12.10	13.11	13.20	13.19
12	12.8	12.11	13.12	13.22	13.18

Завдання 9

Оцінювання параметрів розподілів. Незміщені оцінки. Спроможні оцінки. Оцінки з мінімальною дисперсією

Варіант	Задача			
1	14.1	14.2	14.3	14.40
2	14.4	14.5	14.6	14.41
3	14.7	14.8	14.9	14.42
4	14.10	14.11	14.12	14.43
5	14.13	14.14	14.15	14.44
6	14.16	14.17	14.18	14.45
7	14.19	14.20	14.21	14.46
8	14.22	14.23	14.24	14.47
9	14.25	14.26	14.27	14.48
10	14.28	14.29	14.30	14.49
11	14.31	14.32	14.33	14.40
12	14.34	14.35	14.36	14.41

Завдання 10

Методи побудови оцінок

Варіант	Задача				Варіант	Задача			
1	15.1	15.2	15.3	15.4	7	15.25	15.26	15.27	15.28
2	15.5	15.6	15.7	15.8	8	15.29	15.30	15.31	15.32
3	15.9	15.10	15.11	15.12	9	15.33	15.34	15.35	15.56
4	15.13	15.14	15.15	15.16	10	15.37	15.38	15.39	15.40
5	15.17	15.18	15.19	15.20	11	15.41	15.42	15.43	15.44
6	15.21	15.22	15.23	15.24	12	15.45	15.46	15.47	15.48

Завдання 11

Задача перевірки статистичних гіпотез. Критерій, функція потужності критерію

Варіант	Задача		Варіант	Задача	
1	16.1	16.2	7	16.13	16.14
2	16.3	16.4	8	16.15	16.16
3	16.5	16.6	9	16.17	16.18
4	16.7	16.8	10	16.19	16.20
5	16.9	16.10	11	16.21	16.10
6	16.11	16.12	12	16.5	16.10

Завдання 12
Перевірка гіпотез про параметри нормального розподілу

Варіант	Задача			Варіант	Задача		
1	17.1	17.2	17.3	7	17.19	17.20	17.26
2	17.4	17.5	17.6	8	17.22	17.23	17.24
3	17.7	17.8	17.9	9	17.25	17.21	17.27
4	17.10	17.11	17.12	10	17.28	17.29	17.30
5	17.13	17.14	17.15	11	17.31	17.32	17.33
6	17.16	17.17	17.18	12	17.34	17.35	17.36

Завдання 13
Критерій χ^2

Варіант	Задача				Варіант	Задача			
1	18.1	18.2	18.3	18.4	8	18.29	18.30	18.31	18.32
2	18.5	18.6	18.7	18.8	9	18.33	18.34	18.35	18.36
3	18.9	18.10	18.11	18.12	10	18.37	18.38	18.39	18.40
4	18.13	18.14	18.15	18.16	11	18.41	18.42	18.43	18.48
5	18.17	18.18	18.19	18.20	12	18.45	18.46	18.47	18.48
6	18.21	18.22	18.23	18.24	13	18.49	18.50	18.51	18.52
7	18.25	18.26	18.27	18.28	14	18.54	18.53	18.56	18.55

Завдання 14
Непараметричні критерії: критерій А. М. Колмогорова, критерій Вілкоксона, критерій знаків

Варіант	Задача			Варіант	Задача		
1	19.2	19.1	19.3	7	19.19	19.20	19.21
2	19.4	19.5	19.6	8	19.22	19.23	19.24
3	19.7	19.8	19.9	9	19.25	19.26	19.27
4	19.10	19.11	19.12	10	19.28	19.29	19.30
5	19.13	19.14	19.15	11	19.31	19.32	19.21
6	19.16	19.17	19.18	12	19.34	19.35	19.36

Глава 22

Таблиці математичної статистики

У цій главі вміщено всі необхідні для роботи з підручником таблиці. Зокрема, наведено квантилі, верхні межі (критичні значення) основних розподілів математичної статистики: стандартного нормального, Стьюдента, Фішера, χ^2-розподілу.

Нехай F — абсолютно неперервний розподіл. Для кожного $\beta \in (0;1)$ число x_β, яке є розв'язком рівняння

$$F(x_\beta) = \beta,$$

або, що те саме, $F((-\infty, x_\beta)) = \beta$, називається β-квантилем розподілу F.

Для кожного $\alpha \in (0;1)$ число z_α, яке є розв'язком рівняння

$$1 - F(z_\alpha) = \alpha,$$

або, що те саме, $F([z_\alpha, +\infty)) = \alpha$, називатимемо верхньою α-межею (верхньою 100α-відсотковою межею, 100α-відсотковою точкою, 100α-критичним значенням) розподілу F.

Очевидно, верхня α-межа z_α розподілу F і його $(1-\alpha)$-квантиль співпадають: $x_{1-\alpha} = z_\alpha$.

22.1 Нормальний розподіл

Значення функції $\Phi(t)$ нормального розподілу з параметрами (0;1) (квантилі нормального розподілу) наведено у табл. 22.1.1; для заданих t табульовані значення функції

$$N_{0;1}(t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\} ds.$$

Для кожного t значення $N_{0;1}(t)$ чисельно дорівнює площі заштрихованої на рис. 22.1.1 фігури.

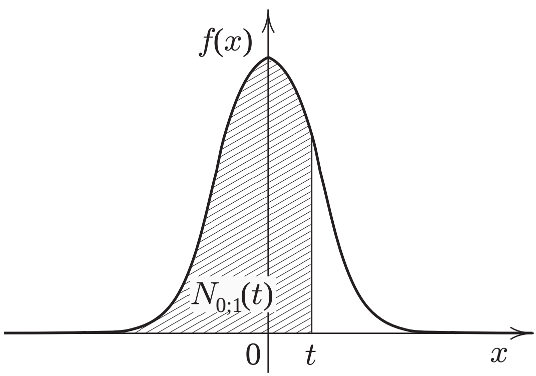

Рис. 22.1.1: До означення квантиля нормального розподілу; $f(x)$ — щільність розподілу $N_{0;1}$

Значення $N_{a;\sigma^2}(x)$ — функції нормального розподілу з параметрами $(a;\sigma^2)$ — обчислюється за значеннями табульованої функції $N_{0;1}(x) = \Phi(x)$ нормального розподілу з параметрами $(0;1)$ так:

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Таблиця 22.1.1. Значення функції $\Phi(t)$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−0,0	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
−0,1	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
−0,2	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
−0,3	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
−0,4	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
−0,5	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
−0,6	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
−0,7	,2420	,2389	,2358	,2327	,2297	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
−0,8	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
−0,9	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
−1,0	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
−1,1	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
−1,2	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
−1,3	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
−1,4	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
−1,5	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
−1,6	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
−1,7	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
−1,8	,0359	,0351	,0344	,0336	,0339	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
−1,9	,0288	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
−2,0	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
−2,1	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
−2,2	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
−2,3	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
−2,4	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
−2,5	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
−2,6	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
−2,7	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
−2,8	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
−2,9	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014

t	−3,0	−3,1	−3,2	−3,3	−3,4	−3,5	−3,6	−3,7	−3,8	−3,9
$\Phi(t)$	,0013	,0010	,0007	,0005	,0003	,0002	,0002	,0001	,0001	,0000

Закінчення табл. 22.1.1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9900	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9923	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t)$	,9987	,9990	,9993	,9995	,9997	,9998	,9998	,9999	,9999	,1000

22.2 Розподіл Пірсона

Розподілом Пірсона або χ^2*-розподілом з* n *ступенями вільності* (коротко χ^2_n*-розподілом*) називатимемо розподіл випадкової величини

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad (22.2.1)$$

де $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, розподілом кожної з яких є $N_{0;1}$.

Значення функції $\chi^2_{\alpha;n}$, або, що те саме, верхні α-межі (100α-критичні значення) розподілу Пірсона наведено у табл. 22.2.1.

Для заданих α та n значення $\chi^2_{\alpha;n}$ визначається як розв'язок рівняння

$$\int\limits_{\chi^2_{\alpha;n}}^{+\infty} f(x)dx = \alpha,$$

де $f(x)$ — щільність χ^2_n-розподілу (див. рис. 22.2.1).

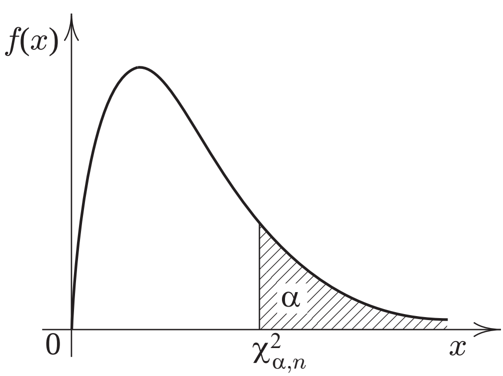

Рис. 22.2.1: До означення $\chi^2_{\alpha;n}$ — верхньої α-межі χ^2_n-розподілу, $f(x)$ — щільність χ^2_n-розподілу

Таблиця 22.2.1. Значення функції $\chi^2_{\alpha;n}$

	Значення α							
n	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,64
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,23	7,82	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,48	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,14	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,90	2,70	3,32	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,86	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,58	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,02	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,92
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,26
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89

Закінчення табл. 22.2.1

	Значення α							
n	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,80	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4
80	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3
90	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1
100	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8

22.3 Розподіл Стьюдента

Розподілом Стьюдента або *t-розподілом з n ступенями вільності* (коротко, *t_n-розподілом*) називатимемо розподіл випадкової величини

$$t_n = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}, \tag{22.3.2}$$

де ξ і χ_n^2 — незалежні випадкові величини, ξ розподілена $N_{0;1}$, а χ_n^2 має χ^2-розподіл з n ступенями вільності.

Значення функції $t_{\alpha;n}$, або, що те саме, верхні α-межі (100α-критичні значення) розподілу Стьюдента з n ступенями вільності (t_n-розподілу) наведено у табл. 22.3.1.

Для заданих α та n значення $t_{\alpha;n}$ визначається як розв'язок рівняння

$$\int_{t_{\alpha;n}}^{+\infty} f(x)dx = \alpha,$$

де $f(x)$ — щільність t_n-розподілу; $t_{\alpha;n}$ — число, що відтинає правий "хвіст"t_n-розподілу, на який припадає "маса"α (рис. 22.3.1).

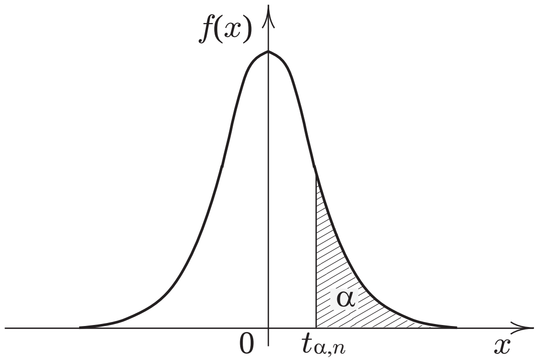

Рис. 22.3.1: До означення $t_{\alpha;n}$ — верхньої α-межі t_n-розподілу, $f(x)$ — щільність t_n-розподілу

Таблиця 22.3.1. Значення функції $t_{\alpha;n}$

n	Значення α				n	Значення α			
	0,050	0,025	0,010	0,005		0,050	0,025	0,010	0,005
1	6,314	12,706	31,821	63,657	18	1,734	2,101	2,552	2,878
2	2,920	4,303	6,965	9,925	19	1,729	2,093	2,539	2,861
3	2,353	3,182	4,541	5,841	20	1,725	2,086	2,528	2,845
4	2,132	2,776	3,747	4,604	21	1,721	2,080	2,518	2,831
5	2,015	2,571	3,365	4,032	22	1,717	2,074	2,508	2,819
6	1,943	2,447	3,143	3,707	23	1,714	2,069	2,500	2,807
7	1,895	2,365	2,998	3,499	24	1,711	2,064	2,492	2,797
8	1,860	2,306	2,896	3,355	25	1,708	2,060	2,485	2,787
9	1,833	2,262	2,821	3,250	26	1,706	2,056	2,479	2,779
10	1,812	2,228	2,764	3,169	27	1,703	2,052	2,473	2,771
11	1,796	2,201	2,718	3,106	28	1,701	2,048	2,467	2,763
12	1,782	2,179	2,681	3,055	29	1,699	2,045	2,462	2,756
13	1,771	2,160	2,650	3,012	30	1,697	2,042	2,457	2,750
14	1,761	2,145	2,624	2,977	40	1,684	2,021	2,423	2,704
15	1,753	2,131	2,602	2,947	60	1,671	2,000	2,390	2,660
16	1,746	2,120	2,583	2,921	120	1,658	1,980	2,358	2,617
17	1,740	2,110	2,567	2,898	∞	1,645	1,960	2,326	2,576

22.4 Розподіл Фішера

Розподілом Фішера або *F-розподілом з n, m ступенями вільності* (коротко *$F_{n,m}$-розподілом*) називатимемо розподіл випадкової величини

$$F_{n,m} = \frac{1}{n}\chi_n^2 \Big/ \frac{1}{m}\chi_m^2, \qquad (22.4.3)$$

де χ_n^2 і χ_m^2 — незалежні випадкові величини, χ_n^2 має розподіл Пірсона з n ступенями вільності, χ_m^2 — з m ступенями вільності.

Значення функції $F_{\alpha;n;m}$, або, що те саме, верхні α-межі (100α-критичні значення) $F_{n;m}$-розподілу наведено у табл. 22.4.1 і 22.4.2.

Для заданих α, n, m значення $F_{\alpha;n;m}$ визначається як розв'язок рівняння

$$\int\limits_{F_{\alpha;n;m}}^{+\infty} f(x)dx = \alpha,$$

де $f(x)$ — щільність $F_{n;m}$-розподілу (рис. 22.4.1).

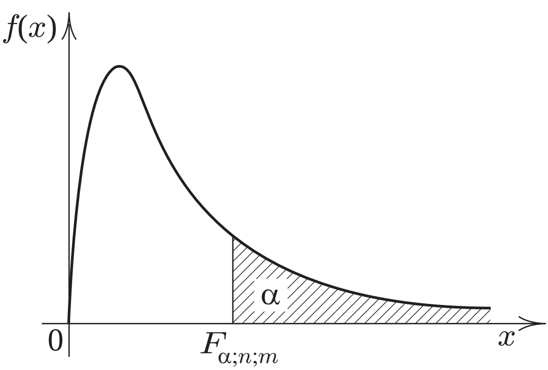

Рис. 22.4.1: До означення $F_{\alpha;n;m}$ — верхньої α-межі $F_{n;m}$-розподілу, $f(x)$ — щільність $F_{n;m}$-розподілу

Таблиця 22.4.1. Значення функції $F_{\alpha;n;m}$
(рівень значущості 0,05)

	n(число ступенів вільності чисельника)									
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93

Закінчення табл. 22.4.1

	n(число ступенів вільності чисельника)									
m	12	14	16	18	20	30	40	50	60	100
3	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55
4	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66
5	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41
6	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71
7	3,57	3,53	3,49	3,47	3,44	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27
8	3,28	3,24	3,20	3,17	3,15	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97
9	3,07	3,03	2,99	2,96	2,94	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76
10	2,91	2,86	2,83	2,80	2,77	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59
11	2,79	2,74	2,70	2,67	2,65	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46
12	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35
13	2,60	2,55	2,51	2,48	2,46	2,38	2,34	2,31	2,30	2,26
14	2,53	2,48	2,44	2,41	2,39	2,31	2,27	2,24	2,22	2,19
15	2,48	2,42	2,38	2,35	2,33	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12
16	2,42	2,37	2,33	2,30	2,28	2,19	2,15	2,12	2,11	2,07
17	2,38	2,33	2,29	2,26	2,23	2,15	2,10	2,08	2,06	2,02
18	2,34	2,29	2,25	2,22	2,19	2,11	2,06	2,04	2,02	1,98
19	2,31	2,26	2,21	2,18	2,16	2,07	2,03	2,00	1,98	1,94
20	2,28	2,22	2,18	2,15	2,12	2,04	1,99	1,97	1,95	1,91
22	2,23	2,17	2,13	2,10	2,07	1,98	1,94	1,91	1,89	1,85
24	2,18	2,13	2,09	2,05	2,03	1,94	1,89	1,86	1,84	1,80
26	2,15	2,09	2,05	2,02	1,99	1,90	1,85	1,82	1,80	1,76
28	2,12	2,06	2,02	1,99	1,96	1,87	1,82	1,79	1,77	1,73
30	2,09	2,04	1,99	1,96	1,93	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70
40	2,00	1,95	1,90	1,87	1,84	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59
50	1,95	1,89	1,85	1,81	1,78	1,69	1,63	1,60	1,58	1,52
60	1,92	1,86	1,82	1,78	1,75	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48
100	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	1,57	1,52	1,48	1,45	1,39

Таблиця 22.4.2. Значення функції $F_{\alpha;n;m}$
(рівень значущості 0,01)

	n(число ступенів вільності чисельника)									
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,79	2,70
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50

Закінчення табл. 22.4.2

	n(число ступенів вільності чисельника)									
m	12	14	16	18	20	30	40	50	60	100
3	27,1	26,9	26,8	26,8	26,7	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2
4	14,4	14,2	14,2	14,1	14,0	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6
5	9,89	9,77	9,68	9,61	9,55	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13
6	7,72	7,60	7,52	7,45	7,40	7,23	7,14	7,09	7,06	6,99
7	6,47	6,36	6,27	6,21	6,16	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75
8	5,67	5,56	5,84	5,41	5,36	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96
9	5,11	5,00	4,92	4,86	4,81	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42
10	4,71	4,60	4,52	4,46	4,41	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01
11	4,40	4,29	4,21	4,15	4,10	3,94	3,86	3,81	3,78	3,71
12	4,16	4,05	3,97	3,91	3,86	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47
13	3,96	3,86	3,78	3,72	3,66	3,51	3,43	3,38	3,34	3,27
14	3,80	3,70	3,62	3,56	3,51	3,35	3,27	3,22	3,18	3,11
15	3,67	3,56	3,49	3,42	3,37	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98
16	3,55	3,45	3,37	3,31	3,26	3,10	3,02	2,97	2,93	2,86
17	3,46	3,35	3,27	3,21	3,16	3,00	2,92	2,87	2,83	2,76
18	3,37	3,27	3,19	3,13	3,08	2,92	2,84	2,78	2,75	2,68
19	3,30	3,19	3,12	3,05	3,00	2,84	2,76	2,71	2,67	2,60
20	3,23	3,13	3,05	2,99	2,94	2,78	2,69	2,64	2,61	2,54
22	3,12	3,02	2,94	2,88	2,83	2,67	2,58	2,53	2,50	2,42
24	3,03	2,93	2,85	2,79	2,74	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33
26	2,96	2,86	2,78	2,72	2,66	2,50	2,42	2,36	2,33	2,25
28	2,90	2,79	2,72	2,65	2,60	2,44	2,35	2,30	2,26	2,19
30	2,84	2,74	2,66	2,60	2,55	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13
40	2,66	2,56	2,48	2,42	2,37	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94
50	2,56	2,46	2,38	2,32	2,27	2,10	2,01	1,95	1,91	1,82
60	2,50	2,39	2,31	2,25	2,20	2,03	1,94	1,88	1,84	1,75
100	2,37	2,26	2,19	2,12	2,07	1,89	1,80	1,73	1,69	1,60

22.5 Біномний розподіл

Таблиця 22.5.1. Значення функції $B_{n;p}(i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

n	i	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
10	0	0,34868	0,10737	0,02825	0,00605	0,00098	10	10
	1	,38742	,26844	,12106	,04031	,00977	9	
	2	,19371	,30199	,23347	,12093	,04395	8	
	3	,05740	,20133	,26683	,21499	,11719	7	
	4	,01116	,08808	,20012	,25082	,20508	6	
	5	0,00149	0,02642	0,10292	0,20066	0,24609	5	
	6	,00014	,00551	,03676	,11148	,20508	4	
	7	,00001	,00079	,00900	,04247	,11719	3	
	8		,00007	,00145	,01062	,04395	2	
	9			,00014	,00157	,00977	1	
	10			,00001	,00010	,00098	0	
15	0	0,20589	0,03518	0,00475	0,00047	0,00003	15	15
	1	,34315	,13194	,03052	,00470	,00046	14	
	2	,26690	,23090	,09156	,02194	,00320	13	
	3	,12851	,25014	,17004	,06339	,01389	12	
	4	,04284	,18760	,21862	,12678	,04166	11	
	5	0,01047	0,10318	0,20613	0,18594	0,09164	10	
	6	,00194	,04299	,14724	,20660	,15274	9	
	7	,00028	,01382	,08113	,17708	,19638	8	
	8	,00003	,00345	,03477	,11806	,19638	7	
	9		,00067	,01159	,06121	,15274	6	
		p = 0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	i	n

Продовження табл. 22.5.1

n	i	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
15	10		0,00010	0,00298	0,02449	0,09164	5	15
	11		,00001	,00058	,00742	,04166	4	
	12			,00008	,00165	,01389	3	
	13			,00001	,00025	,00320	2	
	14				,00002	,00046	1	
	15					,00003	0	
20	0	0,12158	0,01153	0,00080	0,00004		20	20
	1	,27017	,05765	,00684	,00049	,00002	19	
	2	,28518	,13691	,02785	,00309	,00018	18	
	3	,19012	,20536	,07160	,01235	,00109	17	
	4	,08978	,21820	,13042	,03499	,00462	16	
	5	0,03192	0,17456	0,17886	0,07465	0,01479	15	
	6	,00887	,10910	,19164	,12441	,03696	14	
	7	,00197	,05455	,16426	,16588	,07393	13	
	8	,00036	,02216	,11440	,17971	,12013	12	
	9	,00005	,00739	,06537	,15974	,16018	11	
	10	0,00001	0,00203	0,03082	0,11714	0,17620	10	
	11		,00046	,01201	,07099	,16018	9	
	12		,00009	,00386	,03550	,12013	8	
	13		,00001	,00102	,01456	,07393	7	
	14			,00022	,00485	,03696	6	
	15			0,00004	0,00129	0,01479	5	
	16			,00001	,00027	,00462	4	
	17				,00004	,00109	3	
	18					,00018	2	
	19					,00002	1	
	20						0	
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	i	n
		p						

Закінчення табл. 22.5.1

n	i	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
25	0	0,07179	0,00378	0,00013			25	25
	1	,19942	,02361	,00144	,00005		24	
	2	,26589	,07084	,00739	,00038	,00001	23	
	3	,22650	,13577	,02428	,00194	,00007	22	
	4	,13842	,18668	,05723	,00710	,00038	21	
	5	0,06459	0,19602	0,10302	0,01989	0,00158	20	
	6	,02392	,16335	,14717	,04420	,00528	19	
	7	,00722	,11084	,17119	,07999	,01433	18	
	8	,00180	,06235	,16508	,11998	,03223	17	
	9	,00038	,02944	,13364	,15109	,06089	16	
	10	0,00007	0,01178	0,09164	0,16116	0,09742	15	
	11	,00001	,00401	,05355	,14651	,13284	14	
	12		,00117	,02678	,11395	,15498	13	
	13		,00029	,01148	,07597	,15498	12	
	14		,00006	,00422	,04341	,13284	11	
	15		0,00001	0,00132	0,02122	0,09742	10	
	16			,00035	,00884	,06089	9	
	17			,00008	,00312	,03223	8	
	18			,00002	,00092	,01433	7	
	19				,00023	,00528	6	
	20				0,00005	0,00158	5	
	21				,00001	,00038	4	
	22					,00007	3	
	23					,00001	2	
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	i	n
		p						

22.6 Розподіл Пуассона

Таблиця 22.6.1. Значення функції

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

	Значення λ								
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	,9048	,8187	,7408	,6703	,6065	,5488	,4966	,4493	,4066
1	,0905	,1637	,2222	,2681	,3033	,3293	,3476	,3595	,3659
2	,0045	,0164	,0333	,0536	,0758	,0988	,1217	,1438	,1647
3	,0002	,0011	,0033	,0072	,0126	,0198	,0284	,0383	,0494
4		,0001	,0003	,0007	,0016	,0030	,0050	,0077	,0111
5				,0001	,0002	,0004	,0007	,0012	,0020
6							,0001	,0002	,0003

	Значення λ								
k	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	,3679	,1353	,0498	,0183	, 0067	,0025	,0009	,0003	,0001
1	,3679	,2707	,1494	,0733	, 0337	,0149	,0064	,0027	,0011
2	,1839	,2707	,2240	,1465	, 0842	,0446	,0223	,0107	,0050
3	,0613	,1804	,2240	,1954	, 1404	,0892	,0521	,0286	,0150
4	,0153	,0902	,1680	,1954	, 1755	,1339	,0912	,0573	,0337
5	,0031	,0361	,1008	,1563	, 1755	,1606	,1277	,0916	,0607
6	,0005	,0120	,0504	,1042	, 1462	,1606	,1490	,1221	,0911
7	,0001	,0034	,0216	,0595	, 1044	,1377	,1490	,1396	,1171
8		,0009	,0081	,0298	, 0653	,1033	,1304	,1396	,1318
9		,0002	,0027	,0132	, 0363	,0688	,1014	,1241	,1318
10			,0008	,0053	, 0181	,0413	,0710	,0993	,1186
11			,0002	,0019	, 0082	,0225	,0452	,0722	,0970
12			,0001	,0006	, 0034	,0113	,0264	,0481	,0728
13				,0002	, 0013	,0052	,0142	,0296	,0504
14				,0001	, 0005	,0022	,0071	,0169	,0324
15					, 0002	,0009	,0033	,0090	,0194
16						,0003	,0014	,0045	,0109
17						,0001	,0006	,0021	,0058

22.7 Критерій А. М. Колмогорова. Критичні значення

У табл. 22.7.1 наведено критичні значення $\varepsilon_{\alpha;n}$ супремума модуля різниці істинної та емпіричної функцій розподілів.

Значення $\varepsilon_{\alpha;n}$ для заданих α та n визначається як мінімальне ε, для якого

$$P\{\sup_x |F(x) - \hat{F}_n(x)| \geq \varepsilon\} \leq \alpha.$$

Таблиця 22.7.1. Критичні значення $\varepsilon_{\alpha;n}$ для супремума модуля різниці істинної та емпіричної функцій розподілів

	Значення α				Значення α		
n	0,05	0,02	0,01	n	0,05	0,02	0,01
1	0,9750	0,9900	0,9950	25	0,2640	0,2952	0,3166
2	0,8419	0,9000	0,9293	30	0,2417	0,2702	0,2899
3	0,7076	0,7846	0,8290	35	0,2243	0,2507	0,2690
4	0,6239	0,6889	0,7342	40	0,2101	0,2349	0,2520
5	0,5633	0,6272	0,6685	45	0,1984	0,2218	0,2380
6	0,5193	0,5774	0,6166	50	0,1884	0,2107	0,2260
7	0,4834	0,5384	0,5758	55	0,1798	0,2011	0,2157
8	0,4543	0,5065	0,5418	60	0,1723	0,1927	0,2067
9	0,4300	0,4796	0,5133	65	0,1657	0,1853	0,1988
10	0,4093	0,4566	0,4889	70	0,1598	0,1786	0,1917
11	0,3912	0,4367	0,4677	75	0,1544	0,1727	0,1853
12	0,3754	0,4192	0,4491	80	0,1496	0,1673	0,1795
13	0,3614	0,4036	0,4325	85	0,1452	0,1624	0,1742
14	0,3489	0,3897	0,4176	90	0,1412	0,1579	0,1694
15	0,3376	0,3771	0,4042	95	0,1375	0,1537	0,1649
20	0,2941	0,3287	0,3524	100	0,1340	0,1499	0,1608

Для $n > 100$ слід користуватися асимптотичними межами:

$$\varepsilon_{0,05;n} = \frac{1,36}{\sqrt{n}}; \quad \varepsilon_{0,01;n} = \frac{1,63}{\sqrt{n}}.$$

22.8 Критерій Вілкоксона. Нижні критичні значення

Нижні критичні значення $W_{\alpha;n;m}$ розподілу W — суми рангів вибірки меншого обсягу наведено у табл. 22.8.1.

Значення $W_{\alpha;n;m}$ для заданих α (рівня значущості) та n і m — обсягів вибірок (n — обсяг меншої вибірки, m — більшої) визначається як найбільше ціле t, для якого

$$P\{W \leq t\} \leq \alpha.$$

Для значень n і m, більших, ніж наведені в таблиці (а фактично для n і m, які задовольняють нерівності $\min\{n, m\} \geq 6, m + n \geq 20$), можна вважати, що $W_{\alpha;n;m}$ дорівнює

$$\frac{1}{2}n(n+m+1) + z_\alpha\sqrt{\frac{1}{12}nm(n+m+1)},$$

де z_α — α-квантиль нормального розподілу з параметрами (0;1) (див. табл. 22.1.1).

Таблиця 22.8.1. Нижні критичні значення $W_{\alpha;n;m}$ розподілу W

Обсяг		Значення α				Обсяг		Значення α			
n	m	0,005	0,01	0,025	0,05	n	m	0,005	0,01	0,025	0,05
6	6	23	24	26	28	6	18	37	40	45	49
	7	24	25	27	29		19	38	41	46	51
	8	25	27	29	31	7	7	32	34	36	39
	9	26	28	31	33		8	34	35	38	41
	10	27	29	32	35		9	35	37	40	43
	11	28	30	34	37		10	37	39	42	45
	12	30	32	35	38		11	38	40	44	47
	13	31	33	37	40		12	40	42	46	49
	14	32	34	38	42		13	41	44	48	52
	15	33	36	40	44		14	43	45	50	54
	16	34	37	42	46		15	44	47	52	56
	17	36	39	43	47		16	46	49	54	58

Закінчення табл. 22.8.1

Обсяг		Значення α				Обсяг		Значення α			
n	m	0,005	0,01	0,025	0,05	n	m	0,005	0,01	0,025	0,05
7	17	47	51	56	61	9	13	65	68	73	78
	18	49	52	58	63		14	67	71	76	81
8	8	43	45	49	51		15	69	73	79	84
	9	45	47	51	54		16	72	76	82	87
	10	47	49	53	56	10	10	71	74	78	82
	11	49	51	55	59		11	73	77	81	86
	12	51	53	58	62		12	76	79	84	89
	13	53	56	60	64		13	79	82	88	92
	14	54	58	62	67		14	81	85	91	96
	15	56	60	65	69		15	84	88	94	99
	16	58	62	67	72	11	11	87	91	96	100
	17	60	64	70	75		12	90	94	99	104
9	9	56	59	62	66		13	93	97	103	108
	10	58	61	65	69		14	96	100	106	112
	11	61	63	68	72	12	12	105	109	115	120
	12	63	66	71	75		13	109	113	119	125

22.9 Критерій знаків. Межі критичної області

Ліву $n - m_{\alpha;n}$ (лівий стовпець) та праву $m_{\alpha;n}$ (правий стовпець) межі критичної області критерію знаків (межі області відхилення гіпотези H_0: $\theta = 0$) наведено у табл. 22.9.1.

Значення $m_{\alpha;n}$ для заданих α (рівня значущості) та n (числа відмінних від нуля різниць) визначається як мінімальне ціле m, для якого $P\{\mu > m\} \leq \alpha$, де μ — біномно розподілена випадкова величина з параметрами n та $1/2$.

Критичні області критерію знаків:

$(m_{\alpha;n}; n]$ для однобічної альтернативи $\theta > 0$;

$[0; n - m_{\alpha;n})$ для однобічної альтернативи $\theta < 0$;

$[0; n - m_{\alpha;n}) \cup (m_{\alpha;n}; n]$ для двобічної альтернативи $\theta < 0$ або $\theta > 0$.

Рівень значущості однобічного критерію не перевищує α, двобічного — 2α.

Таблиця 22.9.1. Границі критичних областей критерію знаків

	Значення α							Значення α					
n	0,025		0,010		0,005		n	0,025		0,010		0,005	
5	0	5	0	5	0	5	25	8	17	7	18	6	19
6	1	5	0	6	0	6	26	8	18	7	19	7	19
7	1	6	1	6	0	7	27	8	19	8	19	7	20
8	1	7	1	7	1	7	28	9	19	8	20	7	21
9	2	7	1	8	1	8	29	9	20	8	21	8	21
10	2	8	1	9	1	9	30	10	20	9	21	8	22
11	2	9	2	9	1	10	31	10	21	9	22	8	23
12	3	9	2	10	2	10	32	10	22	9	23	9	23
13	3	10	2	11	2	11	33	11	22	10	23	9	24
14	3	11	3	11	2	12	34	11	23	10	24	10	24
15	4	11	3	12	3	12	35	12	23	11	24	10	25
16	4	12	3	13	3	13	36	12	24	11	25	10	26
17	5	12	4	13	3	14	37	13	24	11	26	11	26
18	5	13	4	14	4	14	38	13	25	12	26	11	27
19	5	14	5	14	4	15	39	13	26	12	27	12	27
20	6	14	5	15	4	16	40	14	26	13	27	12	28
21	6	15	5	16	5	16	41	14	27	13	28	12	29
22	6	16	6	16	5	17	42	15	27	14	28	13	29
23	7	16	6	17	5	18	43	15	28	14	29	13	30
24	7	17	6	18	6	18	44	16	28	14	30	14	30

Закінчення табл. 22.9.1

n	Значення α						n	Значення α					
	0,025		0,010		0,005			0,025		0,010		0,005	
45	16	29	15	30	14	31	73	28	45	27	46	26	47
46	16	30	15	31	14	32	74	29	45	27	47	26	48
47	17	30	16	32	15	32	75	29	46	27	48	26	49
48	17	31	16	32	15	33	76	29	47	28	48	27	49
49	18	31	16	33	16	33	77	30	47	28	49	27	50
50	18	32	17	33	16	34	78	30	48	29	49	28	50
51	19	32	17	34	16	35	79	31	48	29	50	28	51
52	19	33	18	34	17	35	80	31	49	30	50	29	51
53	19	34	18	35	17	36	81	32	49	30	51	29	52
54	20	34	19	35	18	36	82	32	50	31	51	29	53
55	20	35	19	36	18	37	83	33	50	31	52	30	53
56	21	35	19	37	18	38	84	33	51	31	53	30	54
57	21	36	20	37	19	38	85	33	52	32	53	31	54
58	22	36	20	38	19	39	86	34	52	32	54	31	55
59	22	37	21	38	20	39	87	34	53	33	54	32	55
60	22	38	21	39	20	40	88	35	53	33	55	32	56
61	23	38	21	40	21	40	89	35	54	34	55	32	57
62	23	39	22	40	21	41	90	36	54	34	56	33	57
63	24	39	22	41	21	42	91	36	55	34	57	33	58
64	24	40	23	41	22	42	92	37	55	35	57	34	58
65	25	40	23	42	22	43	93	37	56	35	58	34	59
66	25	41	24	42	23	43	94	38	56	36	58	35	59
67	26	41	24	43	23	44	95	38	57	36	59	35	60
68	26	42	24	44	23	45	96	38	58	37	59	35	61
69	26	43	25	44	24	45	97	39	58	37	60	36	61
70	27	43	25	45	24	46	98	39	59	38	60	36	62
71	27	44	26	45	25	46	99	40	59	38	61	37	62
72	28	44	26	46	25	47	100	40	60	38	62	37	63

22.10 Рівномірно розподілені випадкові числа

Цифри, наведені в табл. 22.10.1, можна розглядати як реалізації незалежних й однаково розподілених випадкових величин, що набувають значень 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 з однією і тією самою ймовірністю 0,1.

Табульовані цифри згруповано по дві. Пари можна розглядати як реалізації незалежних й однаково розподілених випадкових величин, що набувають значень від 00 до 99 з однаковими ймовірностями 0,01.

Аналогічні твердження можна сформулювати, якщо цифри групувати по три, чотири . . .

Розглянемо групи з k цифр як цілі числа. Перемножимо кожне з них на 10^{-k}. Одержані числа можна вважати реалізаціями незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на відрізку $[0;1]$.

Таблиця 22.10.1. Рівномірно розподілені випадкові числа

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68

Продовження табл. 22.10.1

65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27

Продовження табл. 22.10.1

74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15
09 18 82 00 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50
73 18 95 02 07	47 67 72 62 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18
75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	00 68 22 73 98	20 71 45 32 95
08 35 86 99 10	78 54 24 27 85	13 66 15 88 73	04 61 89 75 53
28 30 60 32 64	81 33 31 05 91	40 51 00 78 93	32 60 46 04 75
53 84 08 62 33	81 59 41 36 28	51 21 59 02 90	28 46 66 87 95
91 75 75 37 41	61 61 36 22 69	50 26 39 02 12	55 78 17 65 14
89 41 59 26 94	00 39 75 83 91	12 60 71 76 46	48 94 97 23 06
77 51 30 38 20	86 83 42 99 01	68 41 48 27 74	51 90 81 39 80
19 50 23 71 74	69 97 92 02 88	55 21 02 97 73	74 28 77 52 51
21 81 85 93 13	93 27 88 17 57	05 68 67 31 56	07 08 28 50 46
51 47 46 64 99	68 10 72 36 21	94 04 99 13 45	42 83 60 91 91
99 55 96 83 31	62 53 52 41 70	69 77 71 28 30	74 81 97 81 42
33 71 34 80 07	93 58 47 28 69	51 92 66 47 21	58 30 32 98 22
85 27 48 68 93	11 30 32 92 70	28 83 43 41 37	73 51 59 04 00
84 13 38 96 40	44 03 55 21 66	73 85 27 00 91	61 22 26 05 61
56 73 21 62 34	17 39 59 61 31	10 12 39 16 22	85 49 65 75 60
65 13 85 68 06	87 64 88 52 61	34 31 36 58 61	45 87 52 10 69
38 00 10 21 76	81 71 91 17 11	71 60 29 29 37	74 21 96 40 49
37 40 29 63 97	01 30 47 75 86	56 27 11 00 86	47 32 46 26 05
97 12 54 03 48	87 08 33 14 17	21 81 53 92 50	75 23 76 20 47
21 82 64 11 34	47 14 33 40 72	64 63 88 59 02	49 13 90 64 41
73 13 54 27 42	95 71 90 90 35	85 79 47 42 96	08 78 98 81 56

Закінчення табл. 22.10.1

07 63 87 79 29	03 06 11 80 72	96 20 74 41 56	23 82 19 95 38
60 52 88 34 41	07 95 41 98 14	59 17 52 06 95	05 53 35 21 39
83 59 63 56 55	06 95 89 29 83	05 12 80 97 19	77 43 35 37 83
10 85 06 27 46	99 59 91 05 07	13 49 90 63 19	53 07 57 18 39
39 82 09 89 52	43 62 26 31 47	64 42 18 08 14	43 80 00 93 51
59 58 00 64 78	75 56 97 88 00	88 83 55 44 86	23 76 80 61 56
38 50 80 73 41	23 79 34 87 63	90 82 29 70 22	17 71 90 42 07
30 69 27 06 68	94 68 81 61 27	56 19 68 00 91	82 06 76 34 00
65 44 39 56 59	18 28 82 74 37	49 63 22 40 41	08 33 76 56 76
27 26 75 02 64	13 19 27 22 94	07 47 74 46 06	17 98 54 89 11
91 30 70 69 91	19 07 22 42 10	36 69 95 37 28	28 82 53 57 93
68 43 49 46 88	84 47 31 36 22	62 12 69 84 08	12 84 38 25 90
48 90 81 58 77	54 74 52 45 91	35 70 00 47 54	83 82 45 26 92
06 91 34 51 97	42 67 27 86 01	11 88 30 95 28	63 01 19 89 01
10 45 51 60 19	14 21 03 37 12	91 34 23 78 21	88 32 58 08 51
12 88 39 73 43	65 02 76 11 84	04 28 50 13 92	17 97 41 50 77
21 77 83 09 76	38 80 73 69 61	31 64 94 20 96	63 28 10 20 23
19 52 35 95 15	65 12 25 96 59	86 28 36 82 58	69 57 21 37 98
67 24 55 26 70	35 58 31 65 63	79 24 68 66 86	76 46 33 42 22
60 58 44 73 77	07 50 03 79 92	45 13 42 65 29	26 76 08 36 37
53 85 34 13 77	36 06 69 48 50	58 83 87 38 59	49 36 47 33 31
24 63 73 87 36	74 38 48 93 42	52 62 30 79 92	12 36 91 86 01
83 08 01 24 51	38 99 22 28 15	07 75 95 17 77	97 37 72 75 85
15 44 42 43 34	36 15 19 90 73	27 49 37 09 39	85 13 03 25 52
60 79 01 81 57	57 17 86 57 62	11 16 17 85 76	45 81 95 29 79
03 99 11 04 61	93 71 61 68 94	66 08 32 46 53	84 60 95 82 32
38 55 59 55 54	32 88 65 97 80	08 35 56 08 60	29 73 54 77 62
17 54 67 37 04	92 05 24 62 15	55 12 12 92 81	59 07 60 79 36
32 64 35 28 61	95 81 90 68 31	00 91 19 89 36	76 35 59 37 79
69 57 26 87 77	39 51 03 59 05	14 06 04 06 19	29 54 96 96 16

Бібліоґрафія

[1] *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики/ Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов — 3-е изд. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

[2] *Ван дер Варден Б. Л.* Математическая статистика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 434 с.

[3] *Гихман И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика/ И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко — К.: Вища шк., 1979. — 320 с.

[4] *Дороговцев А. Я.* Теорія ймовірностей. Зб. задач/ А. Я. Дороговцев, Д. С. Сільвестров, А. В. Скороход, М. И. Ядренко — К.: Вища шк., 1976. — 384 с.

[5] *Джонсон Н.* Статистика и планирование эксперимента в науке и технике. Методы обработки данных/ Н. Джонсон, Ф. Лион — М.: Наука, 1980. — 600 с.

[6] *Емельянов Г. В.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике/ Г. В. Емельянов, В. П. Скитович — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1967. — 332 с.

[7] *Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей/ А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. В. Чистяков — М.: Наука, 1989. — 320 с.

[8] *Кендалл М. Дж.* Теория распределений/ М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт — М.: Наука, 1966. — 587 с.

[9] *Крамер Г.* Математические методы статистики. — 2-е изд., перераб. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

[10] *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во Москов. ун-та, 1963. — 155 с.

[11] *Прохоров А. В.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы/ А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков — М.: Наука, 1986. — 328 с.

[12] *Турчин В. М.* Математична статистика. — К.: Видавничий центр "Академія", 1999. — 240 с.

[13] *Турчин В. М.* Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі. — Д.: Видавництво ДНУ, 2006. — 476 с.

[14] *Турчин В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Д.: Изд-во Днепропетров. ун-та, 2008. — 656 с.

[15] *Турчин В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Основные понятия, примеры, задачи. — Д.: Изд-во ИМА-ПРЕСС, 2012. — 576 с.

[16] *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во Москов. ун-та, 1972. — 230 с.

[17] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.— М.: Мир, 1984. — Т. 1. — 527 с.; Т. 2. — 751 с.

[18] *Хальд А.* Математическая статистика с техническими приложениями. — М.: ИЛ, 1956. — 654 с.

[19] *Ядренко М. Й.* Дискретна математика. — К.: ВПЦ "Експрес", 2003. — 244 с.

[20] *David F. N.* Elementary Statistical Exercises/ David F. N., Pearson E. S. — Cambridge: University Press, 1961 — 241 p.

Зміст

Навчальне видання

Валерій Миколайович Турчин

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Основні поняття, приклади, задачі

Видання друге,
перероблене і доповнене

Підручник для студентів
вищих навчальних закладів

Редактор Козаченко Ю.В.
Відповідальний за випуск Турчин Є.В.
Художник Ткаченко К.Д.
Коректор Турчин Є.В.
Оригінал-макет Турчин В.М.

Підписано до друку 11.04.2014 р. Формат $84\times 108\frac{1}{32}$.
Друк офсетний. Папір офсетний.
Гарнітура Computer modern
Ум. др. арк. 29,3.
Зам. № 12/14. Тираж 500 прим.

Видавництво ІМА-прес
49051, м. Дніпропетровськ, вул. Журналістів, 7/215.
Тел. (066)-932-42-22; (068)-787-88-44.
e-mail: ima-press@ukr.net
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
ДК № 244 від 16.11.2000 р.

ТУРЧИН
Валерій Миколайович

Автор 107 наукових і науково-методичних робіт, 14 підручників і навчальних посібників з теорії ймовірностей і математичної статистики.
Завідувач кафедри статистики й теорії ймовірностей Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.