1 ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ НАЦІЛО

1.1. Число $a \vdots 5$. Доведіть, що $8a \vdots 40$.

1.2. Число $b \vdots 7$. Доведіть, що $6b \vdots 42$.

1.3. Число $m \vdots 6$. Доведіть, що $\left(m^2 - 4m\right) \vdots 12$.

1.4. Число $n \vdots 4$. Доведіть, що $\left(n^2 + 8n\right) \vdots 16$.

1.5. Числа c і d такі, що $c \vdots 4$ і $d \vdots 6$. Доведіть, що $(6c + 4d) \vdots 24$.

1.6. Числа p і q такі, що $p \vdots 5$ і $q \vdots 8$. Доведіть, що $(8p - 5q) \vdots 40$.

1.7. Доведіть, що коли $a \vdots c$ і $(a+b) \vdots c$, то $b \vdots c$.

1.8. Числа a і b такі, що $(a+3) \vdots 13$ і $(b+29) \vdots 13$. Доведіть, що $(a-b) \vdots 13$.

1.9. Числа m і n такі, що $(m+5) \vdots 17$ і $(39-n) \vdots 17$. Доведіть, що $(m+n) \vdots 17$.

1.10. Доведіть, що $\left(\overline{ab} + \overline{ba}\right) \vdots 11$.

1.11. Доведіть, що $\left(\overline{ab} - \overline{ba}\right) \vdots 9$.

1.12. Доведіть, що $\left(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}\right) \vdots 111$.

1.13. Доведіть, що $\left(\overline{abc} - \overline{cba}\right) \vdots 99$.

1.14. Доведіть, що при будь-яких значеннях a і b значення виразу $a^2b - b^2a$ є парним числом.

1.15. Числа a, b і m такі, що $am \vdots (a+b)$. Доведіть, що $bm \vdots (a+b)$.

1.16. Числа x, y і z такі, що $xz \vdots (z-y)$. Доведіть, що $xy \vdots (z-y)$.

1.17. Числа m, n і k такі, що $(m-n) \vdots k$ і $mn \vdots k$. Доведіть, що $\left(m^3 + n^3\right) \vdots k$.

1.18. Числа a, b, m, n такі, що $(ab - mn) \vdots (b-m)$. Доведіть, що $(am - bn) \vdots (b-m)$.

1.19. Доведіть, що:

1) $(ab + cd) \vdots (a-c) \Rightarrow (ad + bc) \vdots (a-c)$;

2) $(ab + cd) \vdots (a+c) \Rightarrow (ad + bc) \vdots (a+c)$;

3) $\left(a^2 + ab + b^2\right) \vdots (a+b) \Rightarrow \left(a^4 + b^4\right) \vdots (a+b)^2$;

4) $\left(a^4 + 4b^4\right) \vdots \left(a^2 + 2ab + 2b^2\right)$.

1.20. Розв’яжіть у цілих числах рівняння:

1) $9x^2 - y^2 = 6$;

2) $x^2 + 2xy = 2x + 9$;

3) $x^2 + 2xy - x - 2y = 4$;

4) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 3$;

5) $x^2 + xy - 6y^2 = 6$;

6) $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = 14$;

7) $x^2 - 4y^2 = 5$;

8) $y^2 + 3xy = 15 + y$;

9) $x^2 - 3xy + 3y - x = 10$;

10) $2y^2 - xy - x^2 = 2$.

1.21. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $xy = x + y$;

2) $xy - x - 2y = 5$;

3) $2xy + 2x - 3y - 4 = 0$.

1.22. Доведіть, що при будь-яких непарних натуральних значеннях n значення виразу $1^n + 2^n + 3^n + ... + 9^n$:

1) кратне 5;

2) не кратне 10.

1.23. Доведіть, що при будь-яких непарних натуральних значеннях $n > 1$ значення виразу $1^n + 2^n + 3^n + ... + 99^n$ кратне 100.

1.24. Знайдіть усі двоцифрові числа $\overline{ab}$ такі, що значення виразу $\overline{ab} - \overline{ba}$ є квадратом натурального числа.

1.25. Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що значення виразу $\overline{abc} - \overline{cba}$ є квадратом натурального числа?

1.26. Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що значення виразу $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ є квадратом натурального числа?

1.27. Числа x і y такі, що $(3x + 8y) \vdots 19$. Доведіть, що значення виразу $(13x + 3y) \vdots 19$.

1.28. Числа c і d такі, що $(2c + 5d) \vdots 17$. Доведіть, що значення виразу $(11c + 2d) \vdots 17$.

1.29. Числа x і y такі, що $(3x + 10y) \vdots 13$. Доведіть, що значення виразу $(3x + 10y)(3y + 10x) \vdots 169$.

1.30. Натуральні числа m і n такі, що $n^2 \vdots (m + n)$. Доведіть, що $m^3 \vdots (m + n)$.

1.31. Натуральні числа a і b такі, що $a^3 \vdots \left(a^2 + b^2\right)$. Доведіть, що $b^4 \vdots \left(a^2 + b^2\right)$.

1.32. Трицифрове число $\overline{abc} \vdots 37$. Доведіть, що $\left(\overline{bca} + \overline{cab}\right) \vdots 37$.

1.33. Цифри a і b трицифрового числа $m = \overline{aba}$ такі, що $(a + b) \vdots 7$. Доведіть, що $m \vdots 7$.

1.34. Сума п'яти натуральних чисел дорівнює 200. Чи може остання цифра їхнього добутку дорівнювати 7?

1.35. На який найбільший степінь числа 2 може ділитися націло значення виразу $3^{2n-1}+1$, якщо $n \in \mathbb{N}$?

1.36. П’ятицифрове число $\overline{abcde} \vdots 41$. Доведіть, що число $\overline{bcdea} \vdots 41$.

1.37. Шестицифрове число $\overline{abcdef} \vdots 37$. Доведіть, що число $\overline{bcdefa} \vdots 37$.

1.38. У шестицифровому числі перша цифра збігається з четвертою, друга – з п’ятою, третя – з шостою. Доведіть, що це число ділиться на 7, 11, 13.

1.39. Визначте, при яких натуральних n:

1) $\left(n^3+14\right) \vdots (n+2)$;

2) $\left(n^2+1\right) \vdots (n+1)$;

3) $\left(n^3+9n^2+14\right) \vdots \left(n^2+2\right)$;

4) $\left(n^4-9n^3-18n+3\right) \vdots \left(n^2+2\right)$.

1.40. Визначте, при яких цілих n:

1) $\left(n^3+4n^2-3\right) \vdots (n+2)$;

2) $\left(n^4-2n^2+3n-2\right) \vdots \left(n^2+n-2\right)$;

3) $\left(n^4+4\right) \vdots \left(n^2-2n+2\right)$;

4) $\left(n^3+7n+1\right) \vdots (n-2)$;

5) $\left(n^4+7n^2+1\right) \vdots \left(n^2+2\right)$;

6) $\left(n^4-3n^3+3n^2+5n-42\right) \vdots \left(n^2-n-6\right)$.

1.41. Знайдіть a і b, якщо при будь-якому цілому n:

1) $\left(n^3+an+b\right) \vdots \left(n^2+1\right)$;

2) $\left(n^4+an+b\right) \vdots \left(n^2-n+1\right)$;

3) $\left(n^5+an+b\right) \vdots \left(n^2+n+1\right)$.

1.42. Доведіть, що:

1) $\left(n^3+3n^2-n-3\right) \vdots 48$ при будь-якому непарному n;

2) $\left(n^5-5n^3+4n\right) \vdots 120$ при будь-якому натуральному n;

3) $\left(n^4-4n^3-4n^2+16n\right) \vdots 384$ при будь-якому додатному парному $n>4$.

1.43. Визначити всі трицифрові числа, які при діленні на 11 дають в частці число, яке дорівнює сумі квадратів цифр вихідного числа.

1.44. При яких значеннях a і b $\left(a^2+ab+b^2\right) \vdots (a+b)$?