

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Методичні матеріали для забезпечення
самостійної роботи студентів за курсом

«ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»

для студентів за напрямом підготовки
«Інформаційні системи та технології»

Запоріжжя

Розділ 1. Лінійне програмування

Однією з найважливіших задач оптимізації є *задача математичного програмування*, що полягає в пошуку екстремуму (мінімуму або максимуму) функції $f(\mathbf{x})$ при умовах $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m, \mathbf{x} \in X \subset E^n$.

Якщо функції $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, — лінійні, а область X задається обмеженнями вигляду $l_j \leq x_j \leq r_j, j = 1, \dots, n$, то вказана задача називається *задачею лінійного програмування (ЗЛП)*. Уперше постановка ЗЛП та один із методів її розв'язання були запропоновані **Л.В. Канторовичем** у роботі "Математические методы организации и планирования производства" у 1939 році. У 1947 році **Дж. Данціг** розробив симплексний метод (симплекс-метод) — один із основних методів розв'язування ЗЛП. З тих пір теорія лінійного програмування бурхливо розвивалася і нині носить цілісний, в основному, закінчений характер.

Зауважимо, що на розвиток теорії лінійного програмування суттєво впливало її застосування до розв'язування (з широким використанням *ЕОМ*) прикладних задач, пов'язаних з оптимальним плануванням, організацією та управлінням у різноманітних сферах людської діяльності.

Систематичне вивчення теорії лінійного програмування розпочнемо з розгляду типових, що стали класичними, прикладів ЗЛП.

§ 1. Приклади задач лінійного програмування

1. Задача про перевезення (транспортна задача)

У пунктах $P_i (i = 1, \dots, m)$ виробляється деякий однорідний продукт, причому в пункті P_i виробляється a_i одиниць цього продукту. У пункті $Q_j (j = 1, \dots, n)$ споживається b_j одиниць цього ж продукту. Припускаємо, що

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Нехай c_{ij} — собівартість перевезення одиниці продукту з пункту виробництва P_i у пункт споживання Q_j (транспортні витрати). Необхідно знайти план перевезень продукту таким чином, щоб задовольнити потреби всіх споживачів, мінімізуючи при цьому загальні транспортні витрати.

Нехай x_{ij} — невідома кількість продукту, що планується для перевезення з P_i в Q_j . Тоді транспортна задача, яку прийнято називати *транспортною задачею лінійного програмування (ТЗЛП)*, полягає у знаходженні матриці перевезень $X = \|x_{ij}\|, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, що мінімізує загальні транспортні витрати

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

2. Задача про харчовий раціон (задача про дієту)

Харчовий раціон може складатися з продуктів $P_1, \dots, P_n$ (хліб, масло, молоко і т. ін.). Відомо, що в одиниці продукту P_j міститься a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, одиниць поживної речовини V_i (білки, жири, вуглеводи і т. ін.) Нехай c_j — вартість одиниці продукту P_j . Припускається, що харчовий раціон повинен містити не менше b_i одиниць речовини V_i . При вказаних обмеженнях потрібно знайти раціон найменшої вартості.

Формалізуємо цю задачу. Нехай x_j — кількість продукту P_j у шуканому раціоні. Тоді вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ визначає деякий раціон вартістю

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Кількість поживної речовини V_i у раціоні $\mathbf{x}$ дорівнює

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

Таким чином, задача про харчовий раціон зводиться до мінімізації функції

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

3. Задача розподілу ресурсів

Деяке підприємство може реалізувати n виробничо-технологічних процесів $P_1, \dots, P_n$, використовуючи для цього ресурси $R_1, \dots, R_m$.

Відомо, що

- а) підприємство має b_i одиниць ресурсу R_i , $i = 1, \dots, m$;
- б) витрати ресурсу R_i на одиницю продукції, що виготовляється за технологією P_j , дорівнюють a_{ij} ;
- в) реалізація одиниці продукції, виготовленої за технологією P_j , приносить підприємству прибуток c_j .

Задача полягає у визначенні об'єму виробництва x_j продукції за технологією P_j , $j = 1, \dots, n$, що максимізує за цих умов прибуток підприємства.

Легко бачити, що сформульована задача формально зводиться до знаходження вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, що максимізує функцію

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

Незважаючи на змістовні відмінності, усі приведені приклади мають багато спільного. Це спільне полягає в лінійності функцій, що підлягають мінімізації (максимізації) та функцій, що входять в обмеження (рівності або нерівності).

§ 2. Загальна задача лінійного програмування

Загальна ЗЛП (ЗЗЛП) формулюється таким чином.

Знайти вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, що мінімізує (максимізує) лінійну функцію

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (1.1)$$

і задовольняє систему лінійних обмежень

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad R_i \quad b_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, k, \quad k \leq n, \quad (1.3)$$

де символ R_i замінює один із знаків $\leq, =, \geq$.

Обмеження (1.3) називаються *прямими* і, як правило, не включаються до *непрямих* обмежень (1.2).

Вектор $\mathbf{x}$, що задовольняє обмеження (1.2), (1.3), називається *допустимим розв'язком* (вектором, точкою, планом) ЗЛП.

Множина допустимих розв'язків ЗЛП називається *допустимою областю* (множиною) ЗЛП, позначається буквою D і записується також у вигляді

$$D = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad R_i \quad b_i, \quad i=1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, k, \quad k \leq n \right\}.$$

Функція $L(\mathbf{x})$ називається *цільовою*, $\mathbf{x}^* \in D$, що доставляє цільовій функції мінімум (максимум), називається *оптимальним розв'язком* ЗЛП і часто записується у вигляді

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in D} (\max) L(\mathbf{x}).$$

Величина $L(\mathbf{x}^*)$ називається *оптимальним значенням цільової функції*.

Зауважимо також, що той факт, що цільова функція $L(\mathbf{x})$ має бути мінімізована (максимізована), часто записується у вигляді

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min (\max).$$

§ 3. Властивості допустимої області

Нехай $\mathbf{x}^i = (x_1^i, \dots, x_n^i) \in E^n$, $i = 1, \dots, r$, $r \geq 2$. Опуклою лінійною оболонкою точок $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$ називається сукупність точок виду

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}^i,$$

де α_i , $i = 1, \dots, r$, — будь-які числа, що задовольняють умовам

$$\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1.$$

Будь-яка точка опуклої лінійної оболонки називається *опуклою лінійною комбінацією точок* $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$.

При $r = 2$ опукла лінійна оболонка називається *відрізком*, що з'єднує точки $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, і позначається $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$, тобто

$$[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}^1 + (1-\alpha) \mathbf{x}^2, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Множина W називається *опуклою*, якщо для довільних $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in W$ виконується $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] \subseteq W$.

Нагадаємо також, що множина

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in E^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq (\geq) b \right\}$$

називається *півпростором* у E^n , а множина

$$G = \left\{ \mathbf{x} \in E^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j = b \right\} \quad (1.4)$$

гіперплощиною в E^n .

Перетином двох множин називається множина тих і тільки тих точок, що належать обом множинам.

Лема 1.1. *Перетин опуклих множин є опуклою множиною.*

Доведення. Нехай A та B опуклі множини, $A \cap B$ — їх перетин. Розглянемо довільні точки $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in A \cap B$. За означенням перетину множин $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in A$, $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in B$. Оскільки A та B — опуклі множини, то $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] \subseteq A$, $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] \subseteq B$. Звідси за означенням перетину $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] \subseteq A \cap B$.

Лема 1.2. *Півпростір є опуклою множиною.*

Доведення. Розглянемо, наприклад, півпростір

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in E^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \right\}$$

і нехай $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in P$. Це означає, що

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j^k \leq b, \quad k = 1, 2, \quad (1.5)$$

де $x_1^k, \dots, x_n^k$ — координати точки x^k . Розглянемо деяку довільну точку x відрізка $[x^1, x^2]$ і покажемо, що вона також належить P . Нехай

$$x = \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Маємо з врахуванням (1.5)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j x_j &= \sum_{j=1}^n a_j (\alpha x_j^1 + (1-\alpha) x_j^2) = \alpha \sum_{j=1}^n a_j x_j^1 + (1-\alpha) \sum_{j=1}^n a_j x_j^2 \leq \\ &\leq \alpha b + (1-\alpha) b = b. \end{aligned}$$

Це означає, що довільна точка x відрізка $[x^1, x^2]$ належить P . Отже півпростір є опуклою множиною.

Лема 1.3. Гіперплощина є опуклою множиною.

Доведення. Гіперплощина (1.4) є перетин півпросторів

$$P_1 = \left\{ x \in E^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \right\}$$

та

$$P_2 = \left\{ x \in E^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b \right\},$$

що є опуклими множинами згідно леми 1.2, отже, гіперплощина є опуклою множиною згідно леми 1.1.

Означення 1.1. Многогранною множиною називається перетин скінченного числа півпросторів. Обмежена многогранна множина називається многогранником.

Зрозуміло, що допустима множина D ЗЛП є многогранною множиною (якщо вона не порожня). Інколи область D називають многогранником, додаючи слова "обмежений" або "необмежений".

Безпосереднім наслідком цих означень та доведених тверджень є така теорема.

Теорема 1.1. Допустима множина D ЗЛП є опуклою многогранною множиною.

Отже, ЗЛП полягає у знаходженні мінімуму (максимуму) лінійної функції $L(x)$ на опуклій многогранній множині D .

Означення 1.2. Точка x опуклої множини X називається кутовою (крайньою), якщо її не можна представити у вигляді

$$x = \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2, \quad \text{де } x^1, x^2 \in X, x^1 \neq x^2, 0 < \alpha < 1.$$

З геометричної точки зору точка x є крайньою точкою множини X , якщо її не можна розташувати усередині відрізка, кінці якого належать X .

Кутові точки опуклої многогранної множини називаються її вершинами.

§ 4. Геометричне тлумачення задачі лінійного програмування

Розглянемо конкретні приклади у двовимірному просторі.

Приклад 1.1. Розглянемо ЗЛП

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ 9x_1 + 4x_2 &\leq 56, \\ 3x_1 + 5x_2 &\geq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Допустима область D цієї ЗЛП зображена на рис.1.1 і являє собою п'ятикутник з вершинами $V_1(0, 4/5)$, $V_2(0, 3)$, $V_3(4, 5)$, $V_4(56/9, 0)$, $V_5(4/3, 0)$.

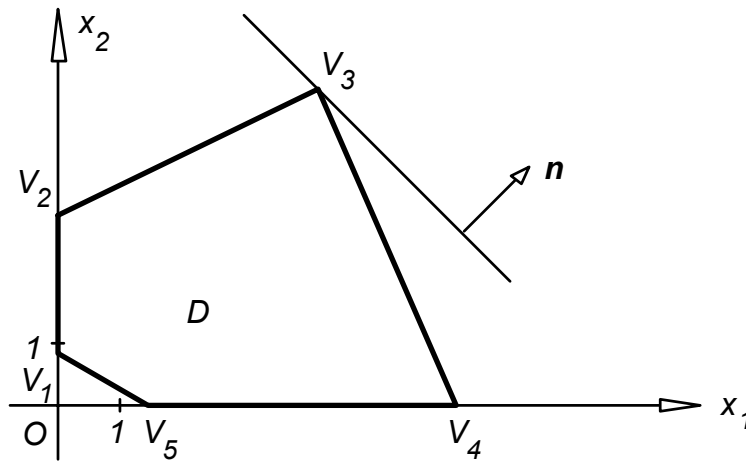


Рис. 1.1

Означення 1.3. Множина значень $\mathbf{x} \in E^n$ таких, що $L(\mathbf{x}) = \text{const}$, називається лінією рівня цільової функції.

У розглянутому прикладі лінії рівня цільової функції $x_1 + x_2 = \text{const}$ при різних значеннях const є сімейством паралельних прямих зі спільним вектором нормалі $\mathbf{n}(1, 1)$.

Відомо, що значення const зростає, якщо ці прямі переміщувати у напрямку нормалі $\mathbf{n}$.

Звідси з очевидністю випливає, що максимального значення цільова функція досягає у вершині $V_3(4, 5)$ області D , тобто $\mathbf{x}^* = (4, 5)$, $L(\mathbf{x}^*) = 9$.

Приклад 1.2. Розглянемо ЗЛП

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ 3x_1 + 5x_2 &\geq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

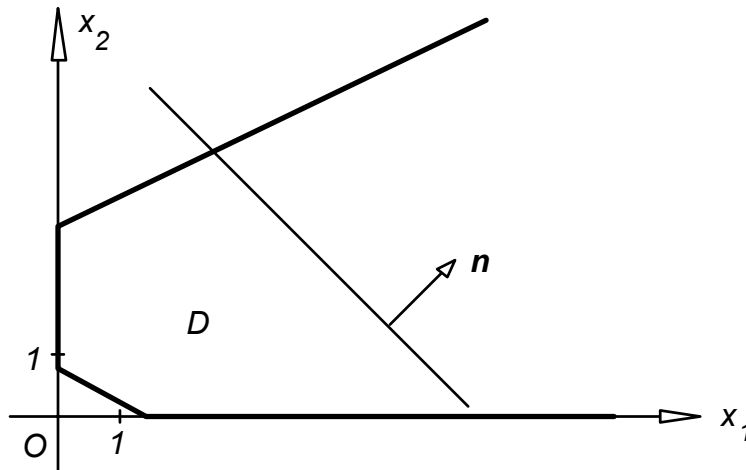


Рис. 1.2

Цей приклад одержано з попереднього, де відкинуто друге непряме обмеження. З рис. 1.2 випливає, що

$$\max_{x \in D} L(x) = \infty.$$

Зауважимо, що, взагалі кажучи, з необмеженості області D не випливає необмеженість зверху (знизу) цільової функції у допустимій області.

Приклад 1.3. Розглянемо ЗЛП

$$L(x) = 9x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$9x_1 + 4x_2 \leq 56,$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Цей приклад відрізняється від першого лише цільовою функцією.

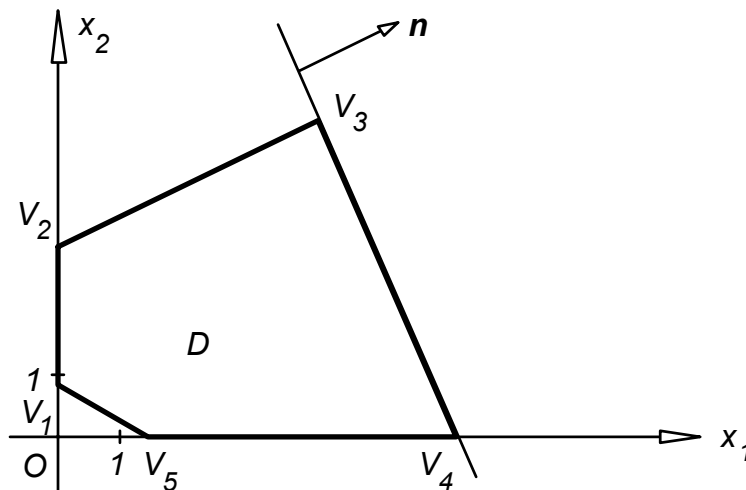


Рис. 1.3

Аналізуючи рис. 1.3, приходимо до висновку, що максимального значення, рівного 56, цільова функція досягає у будь-якій точці сторони V_3V_4 п'ятикутника D .

§ 5. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Приклади, розглянуті у попередньому параграфі, наводять на думку, що оптимальний розв'язок ЗЛП (якщо він існує) співпадає з вершиною допустимої області (у деяких випадках — з її гранню або ребром).

Заради простоти розглянемо випадок, коли D — многогранник.

Наведемо без доведення допоміжне твердження, яке необхідне для подальшого викладу.

Лема 1.4. *Будь-яка точка многогранника є опуклою лінійною комбінацією його вершин.*

Теорема 1.2. *Цільова функція ЗЛП досягає оптимального значення у вершині многогранника розв'язків. Якщо цільова функція досягає цього значення у двох та більше точках, то вона досягає того ж значення у будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.*

Доведення. Нехай $\mathbf{x}^i, i = 1, \dots, r$, — вершини многогранника D і, розглядаючи задачу мінімізації, покладемо

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in D} L(\mathbf{x}).$$

Останнє співвідношення означає, що

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad \mathbf{x} \in D,$$

або з використанням позначення скалярного добутку

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}^*) \leq (\mathbf{c}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1.6)$$

де $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$.

Якщо $\mathbf{x}^*$ — вершина D , то першу частину теореми доведено. Нехай $\mathbf{x}^*$ не є вершиною D . За лемою 1.4 існують $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, r, \alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$, такі, що

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}^i.$$

Використовуючи відомі властивості скалярного добутку, маємо

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}^*) = \left(\mathbf{c}, \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{x}^i \right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (\mathbf{c}, \mathbf{x}^i) \geq (\mathbf{c}, \mathbf{x}^k) \sum_{i=1}^r \alpha_i = (\mathbf{c}, \mathbf{x}^k), \quad (1.7)$$

де $\mathbf{x}^k$ — така вершина, що

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}^k) = \min_{1 \leq i \leq r} (\mathbf{c}, \mathbf{x}^i).$$

Із співвідношень (1.6) та (1.7) випливає, що $(\mathbf{c}, \mathbf{x}^*) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}^k)$, а це означає, що існує вершина $\mathbf{x}^k$ допустимої області D , де цільова функція приймає найменше значення.

Доведемо другу частину теореми. Нехай цільова функція досягає мінімального значення у точках $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^s$ тобто

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}^i) = l = \min_{\mathbf{x} \in D} L(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, s.$$

Розглянемо опуклу лінійну комбінацію

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{x}^i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i=1, \dots, s, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_s = 1.$$

Покажемо, що $L(\mathbf{x}^*) = l$. Дійсно,

$$L(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}^*) = \left(\mathbf{c}, \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{x}^i \right) = \sum_{i=1}^s \alpha_i (\mathbf{c}, \mathbf{x}^i) = l \sum_{i=1}^s \alpha_i = l.$$

Згідно доведеної теореми розв'язки ЗЛП слід шукати серед вершин її допустимої множини. Однак пряма реалізація цієї ідеї практично неможлива через велику кількість вершин у загальному випадку та складність їх знаходження. Далі будуть викладені досить прості методи, що дозволяють уникнути цих труднощів.

§ 6. Стандартна задача лінійного програмування. Базисні розв'язки

Стандартна ЗЛП (СЗЛП) має вигляд

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (1.8)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (1.9)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Це СЗЛП у координатній формі. Ми будемо також використовувати векторну та матричну форми СЗЛП.

Векторна форма СЗЛП:

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (1.11)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

де $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, $\mathbf{A}_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})'$, $j=1, \dots, n$, — вектор умов, що відповідає змінній x_j , $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)'$ — вектор обмежень, а штрих (') означає транспонування.

Матрична форма СЗЛП:

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \mathbf{x} \rightarrow \min, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (1.16)$$

де $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, — матриця умов (її стовпцями є вектори умов $\mathbf{A}_j$), $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)'$.

Зауважимо, що СЗЛП є частинним випадком ЗЛП. У свою чергу будь-яка ЗЛП зводиться до стандартної форми:

- а) задача максимізації $L(\mathbf{x})$ еквівалентна задачі мінімізації $-L(\mathbf{x})$;
 б) обмеження нерівності

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i$$

перетворюються в обмеження-рівності введенням *додаткових (балансних)* невід'ємних змінних x_{n+i} таким чином:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + (-) x_{n+i} = b_i;$$

в) для змінних x_j , що можуть приймати і від'ємні значення, вводиться заміна $x_j = x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$.

Позначимо через $\bar{\mathbf{A}}$ розширену матрицю системи $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Надалі, не обмежуючи загальності, припускається, що для СЗЛП

$$\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \bar{\mathbf{A}} = m < n. \quad (1.17)$$

Як відомо, у цьому випадку система рівнянь $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ сумісна і має нескінченну множину розв'язків. Крім того, максимальне число лінійно незалежних векторів умов $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \dots, n$, дорівнює m .

Якщо серед розв'язків цієї системи немає невід'ємних, то допустима область D є порожньою.

Означення 1.4. *Ненульовий допустимий розв'язок $\mathbf{x}$ ЗЛП називається базисним, якщо система векторів умов $\mathbf{A}_j$, що відповідають додатним компонентам x_j цього розв'язку, є лінійно незалежною. Нульовий допустимий розв'язок завжди будемо вважати базисним.*

Згідно (1.17) маємо, що максимальне число додатних компонент базисного розв'язку ЗЛП дорівнює m .

Означення 1.5. *Базисний розв'язок називається невинродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент, та винродженим, якщо число додатних компонент менше m .*

Не обмежуючи загальності, припустимо, що у випадку невинродженого базисного розв'язку додатними є перші m компонент, тобто

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, \dots, 0, \dots, 0), \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.18)$$

причому вектори умов $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ — лінійно незалежні. Будемо називати ці вектори *базисом*, що породжує базисний розв'язок $\mathbf{x}$, а утворену ними матрицю $\mathbf{B} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m)$ — *базисною матрицею*. Очевидно, що з точністю до порядку векторів базис у цьому випадку єдиний.

Аналогічно (1.18) у винродженому випадку маємо

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r, \dots, 0, \dots, 0), \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad r < m, \quad (1.19)$$

причому вектори умов $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ — лінійно незалежні. У цьому випадку *базисом*, що породжує розв'язок (1.19), є будь-яка система m лінійно незалежних векторів умов, що включає вектори $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$. Ця система векторів формує *базисну матрицю*. Очевидно, що у цьому випадку базис і, відповідно, базисна матриця не є єдиними.

Для обох розглянутих випадків змінні x_j , що відповідають базисним векторам, будемо називати *базисними*, решту — *небазисними*. Зрозуміло, що у невинродженому випадку всі базисні змінні додатні, небазисні — нульові, а у винродженому випадку і серед базисних змінних є рівні нулю.

Приклад 1.4. Нехай обмеження ЗЛП мають вигляд

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2, \\x_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, 4.\end{aligned}$$

Розв'язок $(7, 2, 0, 0)$ є невинродженим базисним розв'язком, відповідний базис утворюють вектори умов $\mathbf{A}_1 = (1, 0)'$, $\mathbf{A}_2 = (0, 1)'$, $\mathbf{B}$ — одинична матриця розмірності 2×2 , змінні x_1, x_2 — базисні, x_3, x_4 — небазисні.

Теорема 1.3. *Допустимий розв'язок $\mathbf{x}$ ЗЛП є вершиною її допустимої множини D тоді і лише тоді, коли $\mathbf{x}$ — базисний розв'язок.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\mathbf{x}$ — вершина D . Покажемо, що $\mathbf{x}$ — базисний розв'язок. Без обмеження загальності можна вважати, що

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots, 0, \dots, 0), \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad k < n.$$

Потрібно довести, що вектори $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ лінійно незалежні. Доведемо це від супротивного. Нехай вектори $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ лінійно залежні, тобто існують числа α_j , не всі рівні нулю одночасно і такі, що

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0}. \quad (1.20)$$

Через те, що $\mathbf{x}$ — допустимий розв'язок, то

$$\sum_{j=1}^k x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}. \quad (1.21)$$

Помножимо обидві частини (1.20) на $\varepsilon > 0$ і результат додамо та віднімемо від (1.21). Одержимо

$$\sum_{j=1}^k (x_j \pm \varepsilon \alpha_j) \mathbf{A}_j = \mathbf{b}. \quad (1.22)$$

Розглянемо вектори

$$\mathbf{x}^1 = (x_1 + \varepsilon \alpha_1, \dots, x_k + \varepsilon \alpha_k, \dots, 0, \dots, 0), \quad (1.23)$$

$$\mathbf{x}^2 = (x_1 - \varepsilon \alpha_1, \dots, x_k - \varepsilon \alpha_k, \dots, 0, \dots, 0). \quad (1.24)$$

Тому що $x_j > 0, j = 1, \dots, k$, то ε можна вибрати таким чином, щоб $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}$. Для цього досить покласти

$$\varepsilon = \min \left\{ \min_{j: \alpha_j > 0} \left(\frac{x_j}{\alpha_j} \right), \min_{j: \alpha_j < 0} \left(-\frac{x_j}{\alpha_j} \right) \right\}.$$

Отже, враховуючи (1.22) приходимо до висновку, що $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$. Крім того, $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, бо не всі α_j рівні нулю. З (1.23)–(1.24) випливає, що $\mathbf{x} = (1/2)\mathbf{x}^1 + (1/2)\mathbf{x}^2$, а, значить, $\mathbf{x}$ не є вершиною, що суперечить умові.

Достатність. Нехай $\mathbf{x}$ — базисний розв'язок. Покажемо, що $\mathbf{x}$ — вершина D .
Нехай

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots, 0, \dots, 0), \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad k < m.$$

Отже

$$\sum_{j=1}^k x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}$$

і вектори $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ — лінійно незалежні.

Решту доведення проведемо від супротивного. Нехай $\mathbf{x}$ не є вершиною D . У цьому випадку існують точки $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$, такі що $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}^1 + (1-\alpha) \mathbf{x}^2$, $0 < \alpha < 1$. З цього випливає, що

$$\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_k^1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_k^2, 0, \dots, 0)$$

і, крім цього,

$$\sum_{j=1}^k x_j^1 \mathbf{A}_j = \mathbf{b}, \tag{1.25}$$

$$\sum_{j=1}^k x_j^2 \mathbf{A}_j = \mathbf{b}. \tag{1.26}$$

Віднімаючи почленно (1.26) з (1.25), одержимо

$$\sum_{j=1}^k (x_j^1 - x_j^2) \mathbf{A}_j = \mathbf{0},$$

причому не всі $x_j^1 - x_j^2$ дорівнюють нулю. Останнє співвідношення означає лінійну залежність векторів умов $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$, що суперечить умові.

§ 7. Канонічна задача лінійного програмування. Перебір вершин допустимої області методом виключення Жордана-Гаусса

Стандартна ЗЛП

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \mathbf{x} \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

називається канонічною (КЗЛП), якщо в матриці $\mathbf{A}$ існує одинична підматриця і вектор умов $\mathbf{b}$ — невід'ємний. Без обмеження загальності будемо вважати, що перші m стовпців матриці $\mathbf{A}$ утворюють одиничну підматрицю. Тоді КЗЛП можна записати у вигляді:

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (1.27)$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j = \beta_i, i=1, \dots, m, \quad (1.28)$$

$$x_j \geq 0, j=1, \dots, n, \beta_i \geq 0, i=1, \dots, m. \quad (1.29)$$

Для КЗЛП легко знаходиться початковий базисний розв'язок, базис та базисна матриця:

$\mathbf{x} = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$ — базисний розв'язок,
 $(1, 0, \dots, 0)', (0, 1, \dots, 0)', \dots, (0, 0, \dots, 1)'$ — базис,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ — базисна матриця (розмірності } m \times m),$$

$x_1, \dots, x_m$ — базисні змінні, $x_{m+1}, \dots, x_n$ — небазисні змінні.

Співвідношення (1.27)–(1.29) — це КЗЛП у координатній формі. Аналогічно СЗЛП КЗЛП може бути записана у векторній та матричній формах. Зокрема, якщо

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)', \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)', \alpha = (I, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n),$$

де I — одинична матриця розмірності $m \times m$, $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj})'$, то умови (1.28) та (1.29) у матричній формі набирають вигляду:

$$\alpha \mathbf{x} = \beta, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \beta \geq \mathbf{0}. \quad (1.30)$$

За означенням КЗЛП є СЗЛП. У свою чергу СЗЛП може бути зведена до КЗЛП. Теоретично для цього досить, припускаючи без обмеження загальності, що вектори умов $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ утворюють базис і $\mathbf{B} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m)$ — відповідна базисна матриця, домножити обидві частини співвідношення $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ зліва на $\mathbf{B}^{-1}$. Очевидно, що

$$\alpha = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \beta = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}. \quad (1.31)$$

Практичні шляхи перетворення СЗЛП до КЗЛП ми обговоримо пізніше.

Перейдемо від базисного розв'язку

$$\mathbf{x} = (\beta_1, \dots, \beta_{l-1}, \beta_l, \beta_{l+1}, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0),$$

що визначається обмеженнями (1.28), (1.29) КЗЛП, до нового базисного розв'язку

$$\mathbf{x}' = (\beta_1', \dots, \beta_{l-1}', 0, \beta_{l+1}', \dots, \beta_m', 0, \dots, 0, \beta_l', 0, \dots, 0),$$

якому відповідає нова КЗЛП, де з числа базисних виключена змінна x_l ($l=1, \dots, m$), а змінна x_k ($k=m+1, \dots, n$) уведена до числа базисних.

Виявляється, що це можна зробити за допомогою відомого методу виключення Жордана-Гаусса, потурбувавшись при цьому лише про те, щоб перетворена ЗЛП знову мала канонічну форму. Робиться це так. Виключимо з усіх рівнянь системи (1.28), крім l -го, змінну x_k . Для цього від i -го рівняння ($i \neq l$)

відніmemo l -е рівняння, домножене на α_{ik}/α_{lk} ($\alpha_{lk} \neq 0$). Рівняння за номером l домножимо на $1/\alpha_{lk}$. Одержимо систему, еквівалентну (1.28), виду:

$$\left. \begin{aligned} x_i + \alpha'_{il} x_l + \sum_{j=m+1}^n \alpha'_{ij} x_j &= \beta'_i, \quad i \neq l, \\ \alpha'_{il} x_l + \sum_{j=m+1}^n \alpha'_{ij} x_j &= \beta'_i, \quad i = l, \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.32)$$

У системі рівнянь (1.32)

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{lk}}, & i = l, \\ \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{lj}\alpha_{ik}}{\alpha_{lk}}, & i \neq l, \end{cases} \quad \beta'_i = \begin{cases} \frac{\beta_i}{\alpha_{lk}}, & i = l, \\ \beta_i - \frac{\beta_l \alpha_{ik}}{\alpha_{lk}}, & i \neq l, \end{cases} \quad (1.33)$$

і, зокрема,

$$\alpha'_{lk} = \begin{cases} 1, & i = l, \\ 0, & i \neq l. \end{cases}$$

Зауважимо, що перетворення (1.33) легко реалізується за допомогою відомого *правила прямокутника*.

Система рівнянь (1.32) матиме канонічну форму, якщо $\beta'_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Виходячи з цього, індекси l та k слід вибирати так, щоб виконувалися співвідношення

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \geq 0, \quad \beta_i - \frac{\beta_l \alpha_{ik}}{\alpha_{lk}} \geq 0, \quad i \neq l. \quad (1.34)$$

Легко бачити, що для цього хоча б одна компонента вектора умов $\alpha_k = (\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk})'$ має бути строго додатною ($\alpha_{lk} > 0$), а індекс l має вибиратися з умови

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} = \min_{i: \alpha_{ik} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} = \theta_k. \quad (1.35)$$

Дійсно, якщо $\alpha_{ik} \leq 0$ ($i \neq l$), то друга з нерівностей (1.34) виконується. Якщо ж $\alpha_{ik} > 0$, то l слід вибирати так, щоб

$$\beta_i - \frac{\beta_l \alpha_{ik}}{\alpha_{lk}} \geq 0 \quad \text{або} \quad \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \leq \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}.$$

Отже,

$$\mathbf{x}' = (\beta_1 - \theta_k \alpha_{1k}, \dots, \beta_{l-1} - \theta_k \alpha_{l-1k}, 0, \beta_{l+1} - \theta_k \alpha_{l+1k}, \dots, \beta_m - \theta_k \alpha_{mk}, 0, \dots, 0, \theta_k, 0, \dots, 0).$$

Зауважимо, що l -а координата вектора $\mathbf{x}'$, що дорівнює нулю, може бути записана у вигляді $\beta_l - \theta_k \alpha_{lk}$.

Вияснимо тепер, як пов'язані між собою значення цільової функції в точках $\mathbf{x}'$ та $\mathbf{x}$. Маємо

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}') &= \sum_{i=1}^m c_i (\beta_i - \theta_k \alpha_{ik}) + c_k \theta_k = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i + \theta_k (c_k - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ik}) = \\ &= L(\mathbf{x}) + \theta_k \Delta_k, \end{aligned}$$

де

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ik} = c_k - z_k \quad (1.36)$$

і називається *відносною оцінкою змінної x_k* , або *симплекс-різницею*.

Зрозуміло, що формула

$$z_k = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ik}$$

відповідає випадку, коли базисними змінними є $x_1, \dots, x_m$. У загальному випадку, коли базисними є змінні $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$, то

$$z_k = \sum_{i=1}^m c_{j_i} \alpha_{ik} = (\mathbf{c}_{\text{баз}}, \alpha_k), \quad (1.37)$$

де $\mathbf{c}_{\text{баз}} = (c_{j_1}, \dots, c_{j_m})$, $\alpha_k = (\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk})$.

Безпосередньо можна перевірити, що симплекс-різниці базисних змінних дорівнюють нулю.

Зауважимо, що $\theta_k \geq 0$. Якщо $\theta_k > 0$, то, очевидно, індекс k змінної, що вводить до числа базисних, слід вибрати таким, що $\Delta_k < 0$. При цьому значення цільової функції при переході від $\mathbf{x}$ до $\mathbf{x}'$ зменшиться, тобто $L(\mathbf{x}') < L(\mathbf{x})$.

Якщо ж $\theta_k = 0$, то $L(\mathbf{x}') = L(\mathbf{x})$. З формули (1.35) випливає, що останній випадок має місце для виродженого базисного розв'язку.

§ 8. Критерій оптимальності.

Ознака необмеженості цільової функції

Наведені у попередньому параграфі міркування складають основу симплекс-методу розв'язування ЗЛП.

Перш, ніж сформулювати алгоритм цього методу, доведемо декілька необхідних для його обґрунтування тверджень.

Теорема 1.4 (критерій оптимальності базисного розв'язку ЗЛП). *Якщо для деякого базисного розв'язку $\mathbf{x}^*$ справджуються нерівності $\Delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, то $\mathbf{x}^*$ — оптимальний розв'язок ЗЛП.*

Доведення. Нехай для базисного розв'язку $\mathbf{x}^* = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$, що визначається канонічною формою обмежень ЗЛП

$$\alpha \mathbf{x} = \beta, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \beta \geq \mathbf{0},$$

виконується умова теореми, тобто

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ми повинні довести, що для будь-якого допустимого розв'язку $y = (y_1, \dots, y_n)$ ($\alpha y = \beta, y \geq 0$) виконується нерівність $L(y) \geq L(x^*)$, а це і буде означати, що x^* — оптимальний розв'язок ЗЛП.

Дійсно, з умови теореми та з допустимості розв'язку y маємо

$$L(y) = \sum_{j=1}^n c_j y_j \geq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} y_j = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i = L(x^*),$$

що і доводить теорему.

Теорема 1.5 (критерій необмеженості цільової функції ЗЛП на допустимій множині). Якщо для деякого базисного розв'язку x ЗЛП існує хоча б одне j , таке, що $\Delta_j < 0$ і вектор умов α_j такий, що $\alpha_j \leq 0$, то цільова функція ЗЛП необмежена на допустимій множині, тобто

$$\min L(x) = -\infty, \quad x \in D.$$

Доведення. Нехай для базисного розв'язку $x = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$, що визначається канонічною формою обмежень ЗЛП

$$\alpha x = \beta, \quad x \geq 0, \quad \beta \geq 0,$$

виконується умова теореми ($\exists j: \Delta_j < 0, \alpha_{ij} \leq 0, i = 1, \dots, m$).

Розглянемо вектор

$$y = (\beta_1 - \theta \alpha_{1j}, \dots, \beta_m - \theta \alpha_{mj}, 0, \dots, 0, \theta, 0, \dots, 0),$$

де $\theta \in j$ -ю координатою цього вектора і $\theta > 0$. Покажемо, що $y \in D$.

Дійсно, y має невід'ємні координати ($\beta_i \geq 0, \alpha_{ij} \leq 0, i = 1, \dots, m, \theta > 0$) і задовольняє обмеження $\alpha x = \beta$, що перевіряється безпосередньою підстановкою.

Обчислимо тепер значення цільової функції у точці y

$$L(y) = \sum_{i=1}^m c_i (\beta_i - \theta \alpha_{ij}) + c_j \theta = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i + \theta \left(c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} \right) = L(x) + \theta \Delta_j.$$

Через те, що $\theta > 0$ і $\Delta_j < 0$ значення цільової функції можна необмежено зменшувати, залишаючись у допустимій області, що й завершує доведення теореми.

§ 9. Алгоритм симплекс-методу

1. ЗЛП записується у канонічній формі, що визначає початковий базисний розв'язок x^0 ЗЛП.

2. Нехай на s -у кроці є КЗЛП

$$c x \rightarrow \min, \quad \alpha^s x = \beta^s, \quad x \geq 0, \quad \beta^s \geq 0,$$

де $\alpha^s = (\alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s)$, що визначає базисний розв'язок

$$x^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_m^s, 0, \dots, 0)'$$

3. Обчислюємо симплекс-різниці

$$\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}^s, \quad j=1, \dots, n.$$

Якщо $\Delta_j^s \geq 0, j=1, \dots, n$, то кінець обчислень: $\mathbf{x}^s$ є оптимальним розв'язком ЗЛП. Інакше

4. Якщо існує принаймні один індекс j такий, що $\Delta_j^s < 0$ і $\alpha_{ij}^s \leq 0, i=1, \dots, m$, то кінець обчислень: ЗЛП розв'язку не має (цільова функція необмежена знизу на допустимій множині, $\min L(\mathbf{x}) = -\infty, \mathbf{x} \in D$). Інакше

5. Знаходимо індекси k та l , відповідно, з умов

$$\Delta_k^s = \min_{j: \Delta_j^s < 0} \Delta_j^s,$$

$$\frac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i: \alpha_{ik}^s > 0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s,$$

методом виключення Жордана-Гаусса перераховуємо матрицю α^s у α^{s+1} , вектор β^s у β^{s+1} (змінну x_l виключаємо з числа базисних, змінну x_k уводимо до числа базисних) за формулами

$$\alpha_{ij}^{s+1} = \begin{cases} \frac{\alpha_{ij}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i=l, \\ \alpha_{ij}^s - \frac{\alpha_{lj}^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i \neq l, \end{cases} \quad \beta_i^{s+1} = \begin{cases} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{lk}^s}, & i=l, \\ \beta_i^s - \frac{\beta_l^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i \neq l, \end{cases}$$

і переходимо до пункту 2 алгоритму, замінюючи s на $s+1$.

Зауваження.

1. l -й рядок, k -й стовпець та елемент α_{lk}^s матриці умов α^s називаються *ведучими (розв'язувальними)*.

2. Перетворення матриці α^s у α^{s+1} , вектора β^s у β^{s+1} за відомим ведучим елементом називаються *симплексним перетворенням (симплекс-перетворенням)*.

3. Послідовність дій 2–5 симплекс-методу називається *ітерацією*.

4. Для двох послідовних ітерацій симплекс-методу маємо

$$L(\mathbf{x}^{s+1}) = L(\mathbf{x}^s) + \theta_k^s \Delta_k^s.$$

Якщо прагнути до максимального зменшення значення цільової функції за одну ітерацію, то k слід вибирати так, щоб

$$\theta_k^s \Delta_k^s = \min_{j: \Delta_j^s < 0} \theta_j^s \Delta_j^s.$$

Оскільки остання задача досить складна, то віддають перевагу вибору k так, як указано в пункті 5 алгоритму.

5. У вітчизняній літературі симплекс-метод інколи ще називають *методом послідовного поліпшення плану*.

6. Якщо індекс k у пункті 5 алгоритму визначається неоднозначно, то до числа базисних уводиться будь-яка з відповідних змінних. Проблеми, пов'язані з неоднозначністю вибору індексу l , обговорюються далі.

§ 10. Симплекс-таблиці

Спочатку розглянемо допоміжне твердження, що дозволяє стандартним чином (за допомогою симплекс-перетворення) обчислювати симплекс-різниці для змінних у КЗЛП.

Нехай на s -у кроці симплекс-методу є КЗЛП

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad x_j + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij}^s x_j = \beta_i^s, \quad i=1, \dots, m, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \beta^s \geq \mathbf{0}.$$

Лема 1.5. Якщо з цільової функції $L(\mathbf{x})$ КЗЛП виключити базисні змінні, то коефіцієнтами при небазисних змінних будуть відповідні їм симплекс-різниці і з'являється вільний член, що дорівнює значенню цільової функції в базисній точці, що розглядається.

Доведення. Дійсно, приймаючи до уваги, що КЗЛП визначає базисний розв'язок

$$\mathbf{x}^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_m^s, 0, \dots, 0)',$$

причому

$$L(\mathbf{x}^s) = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i^s,$$

маємо

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{j=m+1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m c_i \left(\beta_i^s - \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij}^s x_j \right) + \sum_{j=m+1}^n c_j x_j = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \beta_i^s + \sum_{j=m+1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}^s \right) x_j = L(\mathbf{x}^s) + \sum_{j=m+1}^n \Delta_j^s x_j. \end{aligned}$$

Наведені співвідношення доводять лему.

Тепер симплекс-різниці змінних у КЗЛП легко одержати, якщо на початковій ітерації додати до вихідних непрямих обмежень ЗЛП рівняння $L(\mathbf{x}) = 0$, з якого виключені базисні змінні. На наступних ітераціях симплексне перетворення застосовується також і до цього нового рівняння.

При проведенні ручних розрахунків, пов'язаних з розв'язуванням ЗЛП симплексним методом, зручно всі обчислення на кожній ітерації заносити до симплекс-таблиці, що має такий вигляд:

Таблиця 1.1

$x_{\text{баз}}$	x_1	...	x_l	...	x_m	x_{m+1}	...	x_k	...	x_n	β	θ
x_1	1	...	0	...	0	α_{1m+1}	...	α_{1k}	...	α_{1n}	β_1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
x_l	0	...	1	...	0	α_{lm+1}	...	α_{lk}	...	α_{ln}	β_l	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
x_m	0	...	0	...	1	α_{mm+1}	...	α_{mk}	...	α_{mn}	β_m	
Δ	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n	$-L(x^S)$	

Особливості використання симплекс-таблиць прослідкуємо при розв'язанні прикладів. Домовимось виділяти ведучий елемент α_{lk} матриці умов жирним шрифтом.

Приклад 1.5. Розв'язати ЗЛП:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= -2x_1 - x_2 - 7x_3 \rightarrow \min, \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 4, \\
 -x_1 - 4x_2 + 10x_3 &\leq 7, \\
 x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 3.
 \end{aligned}$$

Перетворюючи ЗЛП до СЗЛП, одержимо відразу КЗЛП:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= -2x_1 - x_2 - 7x_3 \rightarrow \min, \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4, \\
 -x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_5 &= 7, \\
 x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

Розв'язок наводиться у послідовності симплекс-таблиць (див. таблицю 1.2).

$\bar{x}^* = (19/13, 0, 11/13, 0, 0)$ — оптимальний розв'язок КЗЛП.

$x^* = (19/13, 0, 11/13)$ — оптимальний розв'язок вихідної ЗЛП.

$L(x^*) = -115/13$.

Таблиця 1.2

$x_{\text{баз}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β	θ
x_4	1	2	3	1	0	4	4/3
x_5	-1	-4	10	0	1	7	7/10
Δ	-2	-1	-7	0	0	0	
x_4	13/10	32/10	0	1	-3/10	19/10	19/32
x_3	-1/10	-4/10	1	0	1/10	7/10	
Δ	-27/10	-38/10	0	0	7/10	49/10	
x_2	13/32	1	0	10/32	-3/32	19/32	19/13
x_3	1/16	0	1	1/8	1/16	15/16	15

Δ	$-37/32$	0	0	$19/16$	$11/32$	$229/32$	
x_1	1	$32/13$	0	$10/13$	$-3/13$	$19/13$	
x_3	0	$-2/13$	1	$1/13$	$1/13$	$11/13$	
Δ	0	$37/13$	0	$27/13$	$1/13$	$115/13$	

Приклад 1.6. Розв'язати ЗЛП:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\
 -x_1 + x_2 &\leq 1, \\
 x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\
 x_j &\geq 0, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Перетворюючи ЗЛП до СЗЛП, одержимо відразу КЗЛП:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\
 -x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\
 x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2, \\
 x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

Обчислення ведуться у послідовності симплекс-таблиць (див. таблицю 1.3).

Таблиця 1.3

$x_{\text{баз}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	β	θ
x_3	-1	1	1	0	1	
x_4	1	-2	0	1	2	2
Δ	-1	-1	0	0	0	
x_3	0	-1	1	1	3	
x_1	1	-2	0	1	2	
Δ	0	-3	0	1	2	

Бачимо, що для небазисної змінної x_2 на останній ітерації $\alpha_{12} = -1 < 0$, $\alpha_{22} = -2 < 0$ при $\Delta_2 = -3$. Отже вихідна ЗЛП розв'язків не має ($\min L(\mathbf{x}) = -\infty$, $\mathbf{x} \in D$).

§ 11. Скінченність симплекс-методу. Попередження зациклювання

ЗЛП будемо називати *невиродженою*, якщо невинродженими є всі її базисні розв'язки.

Розглянемо спочатку невинроджену ЗЛП. Якщо вона записана у канонічній формі

$$\mathbf{c} \mathbf{x} \rightarrow \min, \quad \alpha^S \mathbf{x} = \beta^S, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \beta^S \geq \mathbf{0},$$

то це означає, що величини β_i^S , $i = 1, \dots, m$, строго додатні. При цьому додатною є також величина

$$\theta_k^s = \min_{i: \alpha_{ik}^s > 0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s}.$$

Оскільки значення цільової функції у двох послідовних ітераційних точках $\mathbf{x}^s$ та $\mathbf{x}^{s+1}$ пов'язані співвідношенням

$$L(\mathbf{x}^{s+1}) = L(\mathbf{x}^s) + \theta_k^s \Delta_k^s,$$

причому $\Delta_k^s < 0$, то $L(\mathbf{x}^{s+1}) < L(\mathbf{x}^s)$. Звідси, приймаючи до уваги, що число вершин допустимої множини скінченне, приходимо до висновку про скінченність симплексного методу.

У випадку виродженої ЗЛП одна або декілька базисних змінних базисного розв'язку можуть бути рівними нулю. При цьому $\theta_k^s = 0$ і, отже, $L(\mathbf{x}^{s+1}) = L(\mathbf{x}^s)$. Це може привести до того, що на протязі ряду ітерацій симплекс-методу буде розглядатися одна і та ж вершина, а змінюватимуться лише базисні вектори, що відповідають нульовим базисним змінним і можливе повернення до початкового базису, що відповідає цій вершині. Таке явище називається *зациклюванням* симплексного методу. Можливість зациклювання є реальною лише тоді, коли для розглядуваного базисного розв'язку принаймні дві базисні змінні дорівнюють нулю. У цьому випадку існує неоднозначність при виборі вектора, що підлягає виведенню з базисних при $\theta_k^s = 0$. Така ж неоднозначність може мати місце і для невиведеного базисного розв'язку. Однак у цьому випадку $\theta_k^s > 0$ і новий базисний розв'язок приводить до зменшення значення цільової функції. При цьому, внаслідок згаданої неоднозначності, новий базисний розв'язок буде виведеним.

Незважаючи на те, що при розв'язуванні практичних задач зациклювання симплекс-методу не зустрічалося і що побудовано лише декілька штучних прикладів, де це явище має місце, розроблені різні методи його попередження (виходу з циклу). Зроблені вище зауваження свідчать про те, що будь-який з цих методів має гарантувати однозначність вибору вектора, що підлягає виведенню з базисних.

Розглянемо коротко зміст *методу збурення*, запропонованого **Чарнесом**.

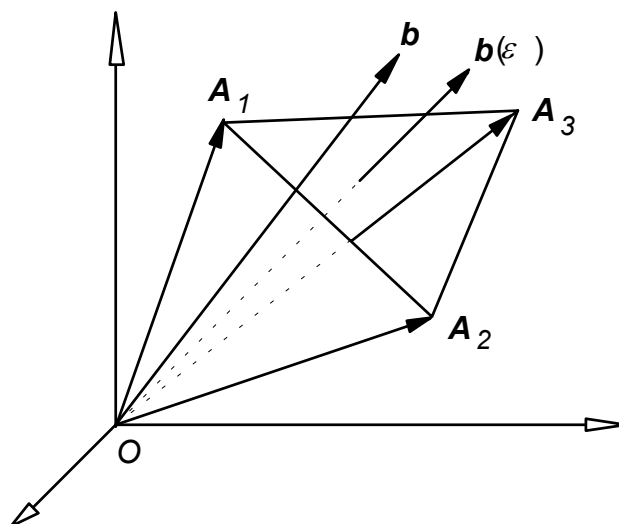


Рис. 1.4

З геометричної точки зору вироджений випадок має місце, коли вектор обмежень $\mathbf{b}$ лежить на граничній гіперплощині або на твірній опуклого конуса, що визначається базисними векторами. Наприклад, вектор $\mathbf{b}$ на рис. 1.4 виражається лінійною комбінацією векторів $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{A}_2$ з додатними коефіцієнтами, але виразити цей вектор у вигляді невід'ємної комбінації базисних векторів $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ можна лише при умові, що $x_3 = 0$, тобто

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + 0 \mathbf{A}_3.$$

Це є приклад виродженого базисного розв'язку. Однак, якщо змістити вектор $\mathbf{b}$ таким чином, щоб він лежав всередині опуклого конуса, породженого векторами $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, то відповідний план буде уже невиродженим. Цього можна досягнути, якщо до вектора $\mathbf{b}$ додати лінійну комбінацію цих векторів з додатними коефіцієнтами. Щоб помітно не спотворити вихідну задачу, цю комбінацію слід вибирати досить малою, рівною, наприклад,

$$\varepsilon \mathbf{A}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{A}_2 + \varepsilon^3 \mathbf{A}_3,$$

де $\varepsilon > 0$ — деяке мале число, тобто, обмеження нової задачі набувають вигляду

$$x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + x_3 \mathbf{A}_3 = \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{A}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{A}_2 + \varepsilon^3 \mathbf{A}_3 = \mathbf{b}(\varepsilon).$$

Геометрично вектор $\mathbf{b}(\varepsilon)$ зображено на рис. 1.4.

У загальному випадку непрямі обмеження

$$\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}$$

ЗЛП перетворюються до вигляду

$$\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}(\varepsilon). \quad (1.38)$$

Нехай вектори $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ утворюють базис і $\mathbf{B}$ — відповідна базисна матриця.

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}(\varepsilon) &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.39)$$

визначають базисні компоненти вихідної та зміненої задач відповідно.

Нехай $\alpha_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j, j=1, \dots, n$. Тоді співвідношення (1.39) набуває вигляду

$$\mathbf{x}(\varepsilon) = \beta + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \alpha_j.$$

Оскільки вектор $\alpha_j, j=1, \dots, m$, є одиничним, індекс одиничної компоненти якого дорівнює j , то

$$x_i(\varepsilon) = \beta_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^n \varepsilon^j \alpha_{ij}. \quad (1.40)$$

Вибираючи $\varepsilon > 0$ достатньо малим, можна добитися, щоб нерівність $x_i(\varepsilon) > 0$ виконувалась для всіх $i=1, \dots, m$. Для знаходження вектора $\mathbf{A}_l$, що має бути виключеним з числа базисних задачі (1.38), обчислюємо

$$\theta_k = \frac{x_l(\varepsilon)}{\alpha_{lk}} = \min_{i: \alpha_{ik} > 0} \frac{x_i(\varepsilon)}{\alpha_{ik}} = \min_{i: \alpha_{ik} > 0} \frac{\beta_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \alpha_{ij}}{\alpha_{ik}}. \quad (1.41)$$

З рівності (1.41) випливає, що інформація, необхідна для знаходження θ_k , міститься у симплекс-таблиці (β_j та α_{ij}). Зрозуміло, що для достатньо малого ε суттєвими при степенях ε є перші коефіцієнти, що розпочинаються з $j=1, \dots, n$. Все це приводить до того, що зовсім не обов'язково перетворювати непрямі обмеження ЗЛП до виду (1.38). А процес визначення вектора, що підлягає виведенню з числа базисних, можна упорядкувати так. Якщо мінімум у співвідношенні

$$\theta_k = \min_{i: \alpha_{ik} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$$

досягається для одного індексу $i=l$, то вектор $\mathbf{A}_l$ виводиться з числа базисних. Якщо ж цей мінімум досягається для декількох індексів i , то для всіх таких індексів при $j=1$ обчислюються і порівнюються відношення α_{ij}/α_{ik} . Індекс, що відповідає алгебраїчно найменшому відношенню, визначає вектор, що підлягає виведенню з базису. Якщо ж неоднозначність зберігається, то порівнюємо аналогічні відношення для стовпця $j=2$ і т. д. Із співвідношення (1.40) випливає, що зрештою згаданий мінімум буде досягнуто для одного індексу. Наприклад, якщо для базису $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$, виконується

$$\theta_k = \beta_1/\alpha_{1k} = \beta_2/\alpha_{2k},$$

то підраховуємо і порівнюємо відношення α_{11}/α_{1k} та α_{21}/α_{2k} . Якщо

$$\min(\alpha_{11}/\alpha_{1k}, \alpha_{21}/\alpha_{2k}) = \alpha_{11}/\alpha_{1k},$$

то з базису виводиться вектор умов $\mathbf{A}_1$, якщо ж

$$\min(\alpha_{11}/\alpha_{1k}, \alpha_{21}/\alpha_{2k}) = \alpha_{21}/\alpha_{2k},$$

то — $\mathbf{A}_2$. Якщо ж $\alpha_{11}/\alpha_{1k} = \alpha_{21}/\alpha_{2k}$, то порівнюємо відношення α_{12}/α_{1k} та α_{22}/α_{2k} і т. д.

Приклад 1.7. Розв'язати ЗЛП:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= - (3/4) x_1 + 150 x_2 - (1/50) x_3 + 6 x_4 \rightarrow \min, \\ (1/4) x_1 - 60 x_2 - (1/25) x_3 + 9 x_4 + x_5 &= 0, \\ (1/2) x_1 - 90 x_2 - (1/50) x_3 + 3 x_4 + x_6 &= 0, \\ x_3 + x_7 &= 0, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

При розв'язуванні цієї *КЗЛП* симплекс-методом на першій, третій та п'ятій ітераціях вектор, що виводиться з числа базисних, визначається неоднозначно. У кожній із цих ситуацій із базису виводиться вектор з меншим індексом. Остання симплекс-таблиця співпадає з початковою. Це є один з небагатьох прикладів, де має місце зациклювання симплекс-методу. Пропонується самостійно розв'язати цю ж *ЗЛП*, застосовуючи сформульоване вище правило попередження зациклювання. Зауважимо лише, що оптимальний розв'язок має вигляд: $\mathbf{x}^* = (1/25, 0, 1, 0, 3/100, 0, 0)$, $L(\mathbf{x}^*) = -1/20$.

Питання про число ітерацій *СМ*, необхідних для знаходження оптимального розв'язку *ЗЛП*, досить складне. Практика показує, що у середньому це число приблизно дорівнює числу m непрямих обмежень *КЗЛП*. Слід відмітити, що побудовані штучні приклади *ЗЛП*, при розв'язуванні яких симплекс-алгоритм "перебирає" всі вершини допустимої області. Отже, симплекс-алгоритм є *алгоритмом експоненціальної складності*.

§ 12. Методи пошуку початкового базисного розв'язку

Згідно симплекс-методу обчислення розпочинаються з *КЗЛП*, що автоматично визначає початковий базисний розв'язок. Однак далеко не завжди вихідна задача має канонічну форму. Щоб розв'язати *ЗЛП* симплекс-методом у цьому випадку, частіше за все використовують так звані *методи штучного базису*, зміст яких зводиться до того, що будується певна допоміжна *КЗЛП* з відомим початковим базисним розв'язком, за оптимальним розв'язком якої легко знаходиться, або просто базисний, або оптимальний розв'язок вихідної *ЗЛП*. Розглянемо два варіанти методу штучного базису.

1. Метод штучного базису

Нехай розглядається *СЗЛП*

$$L(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (1.42)$$

де без обмеження загальності $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Нагадаємо, що будь-яка *ЗЛП* зводиться до *СЗЛП* (див. § 6 цього розділу).

Розглянемо допоміжну *КЗЛП*

$$\bar{L} = y_1 + \dots + y_m \rightarrow \min, \quad \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{I} \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad (1.43)$$

де $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)'$, $\mathbf{I}$ — одинична матриця розмірності $m \times m$. Нехай D та $\bar{D}$ — допустимі області задач (1.42) та (1.43) відповідно, $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Зауважимо, що змінні y_i , $i = 1, \dots, m$, звуться *штучними*, а відповідні їм вектори умов утворюють *штучний базис*.

Розв'яжемо допоміжну *КЗЛП* (1.43) симплекс-методом. Оскільки $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, то можливі два випадки: 1) $\min \bar{L} = 0$, $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{D}$, 2) $\min \bar{L} > 0$, $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{D}$.

Розглянемо перший випадок. Оскільки $y \geq 0$, то рівність $\min \bar{L} = 0$, $\bar{x} \in \bar{D}$, можлива лише тоді, коли $y_i = 0$, $i = 1, \dots, m$. Тому оптимальний розв'язок $\bar{x}^*$ задачі (1.43) має вигляд: $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$ і, оскільки $\bar{x}^*$ — базисний розв'язок, серед x_j^* , $j = 1, \dots, n$, не більше m відмінних від нуля. Якщо тепер перейти від вектора $\bar{x}^*$ до вектора $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, то, очевидно, $x^* \in D$ і зберігає при цьому властивість базисності. Отже, x^* — базисний розв'язок СЗЛП (1.42).

Другий випадок можливий лише тоді, коли принаймні одна з компонент y_i^* оптимального базисного розв'язку $\bar{x}^* = (x^*, y^*)$ КЗЛП (1.43) є строго додатною. Покажемо, що у цьому випадку $D = \emptyset$. Від супротивного. Нехай $x = (x_1, \dots, x_n)$ — допустимий розв'язок СЗЛП (1.42). Тоді $\bar{x}^* = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ є допустимим розв'язком КЗЛП (1.43) ($\bar{x} \in \bar{D}$). Але при цьому $\bar{L} = 0$, що суперечить умові $\min \bar{L} > 0$, $\bar{x} \in \bar{D}$.

Зауваження. Не слід зловживати введенням "надмірної" кількості штучних змінних. Якщо деяке з непрямих обмежень має канонічну форму (містить з коефіцієнтом 1 якусь змінну, що відсутня в інших обмеженнях), то в це обмеження не має сенсу вводити штучну змінну. До речі, ЗЗЛП вигляду

$$L(x) = c x \rightarrow \min, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad b \geq 0,$$

як неважко переконатись, при зведенні її до СЗЛП (введенням додаткових невід'ємних змінних у ліві частини непрямих обмежень) одразу ж стає канонічною.

Застосування методу штучного базису приводить до того, що задачу (1.42) потрібно розв'язувати за два етапи: спочатку розв'язується задача (1.43), а потім, власне, задача (1.42). Наступний метод дозволяє об'єднати ці два етапи.

2. М-метод

Нехай розглядається СЗЛП (1.42). Розглянемо допоміжну КЗЛП

$$L_M = c x + M(y_1 + \dots + y_m) \rightarrow \min, \quad Ax + Iy = b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad b \geq 0, \quad (1.44)$$

що зветься *М-задачею*, де M — досить велике число, інші позначення — такі ж самі, як в (1.43). Розв'язуючи цю задачу симплекс-методом, одержимо один із трьох випадків:

- 1) в оптимальному розв'язку $x_M^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, y_1^*, \dots, y_m^*)$ М-задачі всі $y_j^* = 0$, $j = 1, \dots, m$;
- 2) в x_M^* принаймні одна з компонент $y_j^* > 0$;
- 3) М-задача розв'язку не має ($\min L_M = -\infty$, $(x, y) \in D_M$).

Можна довести, що у цих випадках відповідно маємо:

- 1) оптимальний розв'язок вихідної задачі (1.42) має вид $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, тобто, одержується з x_M^* відкиданням нульових компонент, що відповідають y_j , $j = 1, \dots, m$;
- 2) СЗЛП (1.42) не має жодного допустимого розв'язку ($D = \emptyset$);
- 3) СЗЛП (1.42) розв'язку не має ($\min L = -\infty$, $x \in D$).

Зауважимо, що у М-методі константі M не обов'язково надавати певного значення. Досить лише вимагати, щоб M було більшим будь-якого числа, з яким необхідно порівнювати його в процесі розв'язування задачі. На практиці часто вибирають M таким, що

$$M > \max \{ |a_{ij}|, |b_i|, |c_j|, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n \}.$$

Приклад 1.8. Розв'язати ЗЛП:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Застосуємо спочатку метод штучного базису. Отже, розглядаємо допоміжну КЗЛП виду

$$\begin{aligned} \bar{L} &= y_1 + y_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + y_1 &= 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_2 &= 3, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 4, y_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Виключаючи з цільової функції базисні змінні y_1 та y_2 , зводимо її до виду

$$\bar{L} = -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 6.$$

Розв'язуємо цю задачу симплекс-методом (див. таблицю 1.4). На першій ітерації змінна x_2 вводиться до числа базисних замість штучної змінної y_1 , на другому кроці базисною стає x_1 замість y_2 . Оскільки для базисного розв'язку $(3/4, 3/4, 0, 0, 0, 0)$ допоміжної КЗЛП виконується критерій оптимальності, то $(3/4, 3/4, 0, 0)$ є базисним розв'язком вихідної ЗЛП.

Таблиця 1.4

$X_{\text{баз}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β	θ
y_1	1	3	2	2	1	0	3	1
y_2	2	2	1	1	0	1	3	3/2
Δ	-3	-5	-3	-3	0	0	-6	
x_2	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	1	3
y_2	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	1	3/4
Δ	-4/3	0	1/3	1/3	5/3	0	-1	
x_2	0	1	3/4	3/4	1/6	-1/4	3/4	
x_1	1	0	-1/4	-1/4	1/2	3/4	3/4	
Δ	0	0	0	0	1	1	0	

Тепер непрямі обмеження вихідної ЗЛП мають вигляд

$$x_2 + (3/4)x_3 + (3/4)x_4 = 3/4,$$

$$x_1 - (1/4)x_3 - (1/4)x_4 = 3/4,$$

а цільова функція після виключення з неї базисних змінних x_1 та x_2 —

$$L(x) = -3x_3 + 2x_4 - 6.$$

Все це дозволяє нам заповнити початкову симплекс-таблицю і розв'язувати цю КЗЛП симплекс-методом (див. таблицю 1.5). Як бачимо, її оптимальний розв'язок $x^* = (1, 0, 1, 0)$, $L(x^*) = -9$.

Таблиця 1.5

$x_{\text{баз}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	β	θ
x_2	0	1	3/4	3/4	3/4	1
x_1	1	0	-1/4	-1/4	3/4	
Δ	0	0	-3	2	6	
x_3	0	4/3	1	1	1	
x_1	1	1/3	0	0	1	
Δ	0	4	0	5	9	

Розв'яжемо цю ж ЗЛП, використовуючи М-метод. М-задача має вигляд:

$$L_M = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + My_1 + My_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + y_1 = 3,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_2 = 3,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4, y_i \geq 0, i = 1, 2.$$

Послідовні дії її розв'язування згідно симплекс-методу при $M = 10$ наводяться у таблиці 1.6.

Таблиця 1.6

$x_{\text{баз}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β	θ
y_1	1	3	2	2	1	0	3	1
y_2	2	2	1	1	0	1	3	3/2
Δ	-35	-53	-34	-29	0	0	-60	
x_2	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	1	3
y_2	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	1	3/4
Δ	-52/3	0	4/3	19/3	53/3	0	-7	
x_2	0	1	3/4	3/4	1/6	-1/4	3/4	1
x_1	1	0	-1/4	-1/4	1/2	3/4	3/4	
Δ	0	0	-3	2	9	13	6	
x_3	0	4/3	1	1	2/9	-1/3	1	
x_1	1	1/3	0	0	5/9	2/3	1	
Δ	0	4	0	5	29/3	12	9	

Як і раніше, оптимальний розв'язок вихідної ЗЛП має вигляд: $\mathbf{x}^* = (1, 0, 1, 0)$, $L(\mathbf{x}^*) = -9$.

§ 13. Модифікований симплекс-метод

Нехай СЗЛП

$$\mathbf{c} \mathbf{x} \rightarrow \min, \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (1.45)$$

розв'язується симплекс-методом і на s -й ітерації її непрямі обмеження мають канонічну форму

$$\alpha^s \mathbf{x} = \beta^s, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \beta^s \geq \mathbf{0}. \quad (1.46)$$

Нехай в обмеженнях (1.46) базисними змінними є $x_1, \dots, x_m$, тобто базисна матриця $\mathbf{B}(s) = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m)$. При цьому, як відомо,

$$\alpha^s = \mathbf{B}^{-1}(s) \mathbf{A}, \beta^s = \mathbf{B}^{-1}(s) \mathbf{b}. \quad (1.47)$$

Зауважимо, що першу з рівностей (1.47) можна записати у вигляді:

$$\alpha_j^s = \mathbf{B}^{-1}(s) \mathbf{A}_j, j = 1, \dots, n. \quad (1.48)$$

Нагадаємо, що симплекс-метод в основному зводиться до знаходження ведучого елемента α_{lk}^s симплексного перетворення, перераховування матриці α^s в α^{s+1} , вектора β^s у β^{s+1} та вектора Δ^s у Δ^{s+1} , тобто реалізується такими діями:

1) знаходження k :

$$\Delta_k^s = \min_{j: \Delta_j^s < 0} \Delta_j^s, \Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}^s, j = 1, \dots, n;$$

2) знаходження l :

$$\frac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i: \alpha_{ik}^s > 0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s;$$

3) переобчислення за ведучим елементом α_{lk}^s всіх елементів матриці α^s , векторів β^s та Δ^s .

Зауважимо, що згідно останньої процедури, яка для СМ є суттєвою, на кожній ітерації необхідно перераховувати $(m+1) \times (n+1)$ елементів вказаної матриці та векторів. Виявляється, що для виконання вказаних дій знати всю матрицю α^s не обов'язково, їх можна виконати, знаючи матрицю $\mathbf{B}^{-1}(s)$ та вихідну інформацію: $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Дійсно, для знаходження k досить підрахувати

$$\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}^s = c_j - \mathbf{c}_{\text{баз}} \alpha_j^s,$$

де $\mathbf{c}_{\text{баз}} = (c_1, \dots, c_m)$, тобто, це є вектор, координатами якого є коефіцієнти цільової функції, що відповідають базисним змінним. Враховуючи (1.48) та

вводячи до розгляду вектор $u^s = (u_1^s, \dots, u_m^s) = c_{\text{баз}} B^{-1}(s)$, що називається *вектором симплекс-множників*, з останнього співвідношення маємо

$$\Delta_j^s = c_j - c_{\text{баз}} B^{-1}(s) A_j = c_j - u^s A_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для знаходження / обчислюються вектори

$$\beta^s = B^{-1}(s) b, \quad \alpha_k^s = B^{-1}(s) A_k.$$

Отже, зникає необхідність виконання пункту 3 згаданих дій симплекс-методу. Замість цього при переході до наступної ітерації потрібно лише перерахувати $B^{-1}(s)$ у $B^{-1}(s+1)$.

Робиться це згідно наступної теореми, яку ми приводимо без доведення.

Теорема 1.6. Нехай

$$B(s) = (A_1, \dots, A_{l-1}, A_l, A_{l+1}, \dots, A_m),$$

$$B(s+1) = (A_1, \dots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \dots, A_m),$$

$$B^{-1}(s) = \|b_{ij}^s\|, \quad B^{-1}(s+1) = \|b_{ij}^{s+1}\|, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

перехід від $B(s)$ до $B(s+1)$ реалізується стандартним для симплексного методу введенням вектора A_k до числа базисних і виведенням вектора A_l з числа базисних. Тоді

$$b_{ij}^{s+1} = \begin{cases} \frac{b_{ij}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i = l, \\ b_{ij}^s - \frac{b_{lj}^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i \neq l. \end{cases} \quad (1.49)$$

Викладені міркування складають основу *модифікованого симплекс-методу (МСМ)*, що формулюється нижче.

Алгоритм модифікованого симплекс-методу

1. Зводимо вихідну ЗЛП до КЗЛП, що визначає її початковий базисний розв'язок x^0 , якому відповідає базисна матриця $B(0)$. Нехай $B^{-1}(0)$ — матриця обернена до $B(0)$.

2. Нехай на s -й ітерації одержано базисний розв'язок x^s , $B(s)$, $B^{-1}(s)$ — відповідно, базисна та обернена їй матриці.

3. Обчислюємо вектор симплекс-множників

$$u^s = (u_1^s, \dots, u_m^s) = c_{\text{баз}} B^{-1}(s), \quad (1.50)$$

де $c_{\text{баз}}$ — вектор, координатами якого є коефіцієнти цільової функції, що відповідають базисним змінним x^s .

4. Обчислюємо симплекс-різниці

$$\Delta_j^s = c_j - u^s A_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.51)$$

5. Якщо $\Delta_j^s \geq 0, j = 1, \dots, n$, то кінець обчислень: x^s є оптимальним розв'язком. Інакше

6. Знаходимо k з умови

$$\Delta_k^s = \min_{j: \Delta_j^s < 0} \Delta_j^s,$$

обчислюємо вектори

$$\beta^s = B^{-1}(s) b, \quad \alpha_k^s = B^{-1}(s) A_k. \quad (1.52)$$

Якщо $\alpha_{ik}^s \leq 0, i = 1, \dots, m$, то кінець обчислень: цільова функція КЗЛП необмежена знизу на допустимій множині. Інакше

7. Знаходимо l з умови

$$\frac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i: \alpha_{ik}^s > 0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s.$$

Вектор A_k уводиться до числа базисних, вектор, що є базисним у l -у непрямому обмеженні, виводиться з числа базисних. Формуємо матрицю $B(s+1)$, обчислюємо матрицю $B^{-1}(s+1)$ (наприклад, за формулами (1.49) цього ж параграфу) і переходимо до пункту 2 алгоритму, замінюючи s на $s+1$.

Приклад 1.9. Розв'язати ЗЛП:

$$\begin{aligned} L(x) = & 2x_3 - 2x_4 - x_5 \rightarrow \min, \\ & x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ & x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Як бачимо, вихідна ЗЛП є канонічною. При проведенні ручних розрахунків, пов'язаних з розв'язуванням ЗЛП за допомогою МСМ, всі обчислення на кожній ітерації зручно оформляти у вигляді таблиць. Оформимо вихідні дані у вигляді таблиці, що називається *допоміжною*, до якої в подальшому на кожній ітерації будемо вносити координати вектора u та обчислені симплекс-різниці Δ (див. таблицю 1.7).

Таблиця 1.7

b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	u^0	u^1	u^2
4	1	0	-2	1	1	0	-2	-4
2	0	1	3	-1	2	0	0	-2
c	0	0	2	-2	-1			
Δ^0	0	0	2	-2	-1			
Δ^1	2	0	-2	0	1			
Δ^2	4	2	0	0	7			

Оскільки базисна матриця $B(0)$ є одиничною, то одиничною є і обернена їй. Заповнюємо основну таблицю, що відповідає базису A_1, A_2 , (див. таблицю 1.8).

Таблиця 1.8

Базис	$c_{\text{баз}}^0$	β^0	$B^{-1}(0)$		A_4	α_4^0
A_1	0	4	1	0	1	1
A_2	0	2	0	1	-1	-1
		u^0	0	0		

Координати вектора u^0 обчислені згідно формули (1.50). Після цього вектор u^0 заноситься в допоміжну таблицю (стовпець u^0), де з його допомогою за формулами (1.51) обчислені симплекс-різниці, що відповідають $x^0 = (4, 2, 0, 0, 0)$ (рядок Δ^0). Критерій оптимальності не виконується, до базису вводиться вектор A_4 . Заносимо вектор A_4 до основної таблиці та обчислюємо його координати (вектор α_4^0) у базисі A_1, A_2 , використовуючи формули (1.52). Тепер звичайним чином визначається вектор, що підлягає виведенню з числа базисних (A_1).

Таблиця 1.9

Базис	$c_{\text{баз}}^1$	β^1	$B^{-1}(1)$		A_3	α_3^1
A_4	-2	4	1	0	-2	-2
A_2	0	6	1	1	3	1
		u^1	-2	0		

Перераховуємо за відповідними формулами основну частину таблиці 1.8 (див. таблицю 1.9). Новий базисний розв'язок $x^1 = (0, 6, 0, 4, 0)$ також не є оптимальним, до базису вводиться вектор A_3 , з базису виводиться вектор A_2 .

Таблиця 1.10

Базис	$c_{\text{баз}}^2$	β^2	$B^{-1}(2)$	
A_4	-2	16	3	2
A_3	2	6	1	1
		u^2	-4	-2

Заповнюємо основну таблицю для наступної ітерації (див. таблицю 1.10). Оскільки для базисного розв'язку $x^2 = x^* = (0, 0, 6, 16, 0)$ виконується критерій оптимальності, то обчислення припиняються.

Зауваження.

1. Модифікований симплекс-метод інколи ще називають *методом оберненої матриці*.
2. Застосування модифікованого симплекс-методу особливо вигідно при розв'язуванні ЗЛП, у яких до матриці умов **A** додаються нові вектори-стовпці. При цьому для знаходження розв'язку нових задач використовується інформація, що одержана раніше.
3. Легко перевірити, що якщо розглянути так звану *елементарну матрицю*

$$E(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{1k}^s}{\alpha_{lk}^s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{2k}^s}{\alpha_{lk}^s} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\alpha_{l-1k}^s}{\alpha_{lk}^s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\alpha_{lk}^s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{l+1k}^s}{\alpha_{lk}^s} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{mk}^s}{\alpha_{lk}^s} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$B^{-1}(s+1) = E(s) B^{-1}(s).$$

Використовуючи цю формулу для матриці $B^{-1}(s)$, потім $B^{-1}(s-1)$ і т. д., маємо

$$B^{-1}(s+1) = E(s) E(s-1) \dots E(0) B^{-1}(0).$$

Отримана формула носить назву *мультиплікативного подання оберненої матриці*. Реальні ЗЛП, як правило, розв'язуються за допомогою МСМ з використанням мультиплікативного представлення оберненої матриці.

§ 14. Двоїсті задачі лінійного програмування

Нехай ЗЛП має стандартну форму

$$c x \rightarrow \min, \quad A x = b, \quad x \geq 0. \quad (1.53)$$

Позначимо, як завжди, через D її допустиму область і розглянемо допоміжну задачу: знайти нижню оцінку для значень цільової функції $c x$ на множині D .

Через те, що $b - A x = 0$, то для будь-якого вектора $u = (u_1, \dots, u_m)$ виконується рівність $u(b - A x) = 0$ і тому

$$c x = c x + u(b - A x) = u b + (c - u A) x. \quad (1.54)$$

Поставимо вимогу, щоб $\mathbf{c} - \mathbf{u} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, або, що теж саме, $\mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}$. Тоді з (1.54) випливає, що $\mathbf{c} \mathbf{x} \geq \mathbf{u} \mathbf{b}$.

Природно також сподіватися, що

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x} = \max_{\mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}} \mathbf{u} \mathbf{b}.$$

Означення 1.6. Двоїстою до СЗЛП (1.53) називається ЗЛП

$$\mathbf{u} \mathbf{b} \rightarrow \max, \mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}. \quad (1.55)$$

У зв'язку з цим СЗЛП (1.53) назвемо прямою (вихідною) ЗЛП.

Вище нами доведена

Теорема 1.7. Значення цільових функцій прямої (1.53) та двоїстої (1.55) ЗЛП пов'язані співвідношенням

$$\max_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x} = \min_{\mathbf{u} : \mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}} \mathbf{u} \mathbf{b}. \quad (1.56)$$

Ми записали пряму та двоїсту їй задачі у матричній формі. Координатна форма цих задач така:

СЗЛП:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n;$$

двоїста ЗЛП:

$$\sum_{i=1}^m b_i u_i \rightarrow \max, \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j=1, \dots, n.$$

Означення 1.7. Змінні $u_i, i=1, \dots, m$, двоїстої ЗЛП називаються двоїстими змінними (множниками Лагранжа, симплекс-множниками).

Зауважимо, що якщо пряма ЗЛП має стандартну форму, то двоїста їй ЗЛП не містить прямих обмежень на двоїсті змінні ($-\infty < u_i < \infty, i=1, \dots, m$).

Щоб побудувати двоїсту до ЗЛП, необхідно перетворити її до стандартної форми, а потім діяти згідно означення.

Приклад 1.10. Нехай ЗЛП має вигляд

$$\mathbf{c} \mathbf{x} \rightarrow \min, \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (1.57)$$

Запишемо цю задачу у стандартній формі

$$\bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{x}} \rightarrow \min, (\mathbf{A}, -\mathbf{I}) \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0},$$

де $\bar{\mathbf{c}} = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0)$, $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})'$ — $(n+m)$ -вимірні вектори, $\mathbf{I}$ — одинична матриця розмірності $m \times m$, $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ — додаткові змінні.

Двоїстою до цієї СЗЛП (а, отже, і до ЗЛП (1.57)) за означенням є

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \mathbf{b} \rightarrow \max, \mathbf{u} (\mathbf{A}, -\mathbf{I}) &\leq \bar{\mathbf{c}}, \text{ або} \\ \mathbf{u} \mathbf{b} \rightarrow \max, \mathbf{u} \mathbf{A} &\leq \mathbf{c}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Легко переконатися, що двоїстою до ЗЛП (1.58) буде (1.57). Ці задачі називаються симетричними двоїстими ЗЛП.

Зауважимо, що і в загальному випадку поняття двоїстості є взаємним, тобто, *задача, двоїста до двоїстої, співпадає з прямою*. У зв'язку з цим більш логічно говорити не про пряму та двоїсту ЗЛП, а про *пару двоїстих ЗЛП*.

Приклад 1.11. Легко впевнитися (залишаємо це, як вправу), що наступні дві ЗЛП являють собою пару двоїстих ЗЛП:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &\rightarrow \min, \\x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 6, \\2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &\leq 4, \\x_1 + 3x_3 - 4x_5 &\geq 8, \\x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_5 \geq 0; \\6u_1 - 4u_2 + 8u_3 &\rightarrow \max, \\u_1 - 2u_2 + u_3 &\leq 1, \\-2u_1 - 3u_2 &= -2, \\u_1 + 2u_2 + 3u_3 &\leq 1, \\3u_1 + u_2 &= -1, \\-2u_1 - u_2 - 4u_3 &\leq 1, \\u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0.\end{aligned}$$

§ 15. Теорема двоїстості

У попередньому параграфі мовилося про природність співвідношення

$$\min_{x \in D} c x = \max_{u \in A \leq c} u b.$$

Дійсно, має місце таке твердження.

Теорема 1.8 (теорема двоїстості).

1. Якщо одна з двоїстих ЗЛП має оптимальний розв'язок, то інша також має оптимальний розв'язок, причому оптимальні значення цільових функцій співпадають.

2. Якщо цільова функція однієї з двоїстих ЗЛП необмежена на допустимій множині (для задачі мінімізації — знизу, для задачі максимізації — зверху), то інша задача не має допустимих розв'язків.

Доведення.

1. Нехай розглядається пара двоїстих ЗЛП

$$c x \rightarrow \min, \quad A x = b, \quad x \geq 0,$$

$$u b \rightarrow \max, \quad u A \leq c,$$

і перша з них має оптимальний розв'язок x^* , якому відповідає базис $A_1, \dots, A_m$, B — базисна матриця. Використовуючи прийняті позначення, перейдемо від СЗЛП до КЗЛП:

$$c x \rightarrow \min, \quad \alpha x = \beta, \quad x \geq 0, \quad \beta \geq 0,$$

де

$$\alpha = B^{-1} A, \quad \beta = B^{-1} b. \quad (1.60)$$

Зауважимо, що при цьому $\mathbf{x}^* = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)'$ і

$$\mathbf{c} \mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i. \quad (1.61)$$

Згідно критерію оптимальності для $\mathbf{x}^*$

$$\Delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} = c_j - \mathbf{c}_{\text{баз}}^* \alpha_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n,$$

де $\mathbf{c}_{\text{баз}}^* = (c_1, \dots, c_m)$.

Останню нерівність запишемо у матричній формі $\mathbf{c} - \mathbf{c}_{\text{баз}}^* \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, або, приймаючи до уваги (1.60),

$$\mathbf{c} - \mathbf{c}_{\text{баз}}^* \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}.$$

Нехай

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{c}_{\text{баз}}^* \mathbf{B}^{-1}. \quad (1.62)$$

Тоді останнє співвідношення набирає вигляду $\mathbf{c} - \mathbf{u}^* \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, або $\mathbf{u}^* \mathbf{A} \leq \mathbf{c}$, отже, вектор $\mathbf{u}^*$ є допустимим розв'язком двоїстої ЗЛП.

Обчислимо значення цільової функції двоїстої ЗЛП у точці $\mathbf{u}^*$. Приймаючи до уваги (1.62), (1.60) та (1.61), маємо

$$\mathbf{u}^* \mathbf{b} = \mathbf{c}_{\text{баз}}^* \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_{\text{баз}}^* \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i = \mathbf{c} \mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x}.$$

Звідси випливає, що

$$\max_{\mathbf{u}: \mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}} \mathbf{u} \mathbf{b} \geq \mathbf{u}^* \mathbf{b} = \min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x}. \quad (1.63)$$

З доведеної вище нерівності

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x} \geq \max_{\mathbf{u}: \mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}} \mathbf{u} \mathbf{b} \quad (1.64)$$

маємо, що

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x} \geq \max_{\mathbf{u}: \mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}} \mathbf{u} \mathbf{b}. \quad (1.65)$$

Порівнюючи (1.63) та (1.65), приходимо до висновку, що за умови існування оптимального розв'язку $\mathbf{x}^*$ однієї з пари двоїстих ЗЛП існує оптимальний розв'язок $\mathbf{u}^*$ двоїстої їй задачі і при цьому $\mathbf{c} \mathbf{x}^* = \mathbf{u}^* \mathbf{b}$.

2. Нехай

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x} = -\infty.$$

З (1.64) маємо

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{c} \mathbf{x} \geq \max_{\mathbf{u}: \mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}} \mathbf{u} \mathbf{b}.$$

Отже,

$$-\infty \geq \max_{\mathbf{u}: \mathbf{u} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}} \mathbf{u} \mathbf{b},$$

що не має сенсу. Це означає, що двоїста задача не має допустимих розв'язків. Теорема доведена.

Отже, кожній ЗЛП відповідає двоїста їй ЗЛП, причому це поняття є взаємним і розв'язки пари двоїстих задач тісно пов'язані між собою. Цей факт буде, зокрема, використовуватись при розгляді двоїстого симплекс-методу.

§ 16. Двоїстий критерій оптимальності

Розглянемо СЗЛП

$$c x \rightarrow \min, \quad A x = b, \quad x \geq 0. \quad (1.66)$$

Як відомо, ЗЛП

$$u b \rightarrow \max, \quad u A \leq c, \quad (1.67)$$

є двоїстою до (1.66).

Теорема 1.9 (двоїстий критерій оптимальності). *Базисний розв'язок x^* ЗЛП (1.66) є оптимальним тоді і лише тоді, коли існує вектор $u^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)$ такий, що виконуються співвідношення*

$$\begin{aligned} u^* A_j = c_j & \quad \left(\sum_{i=1}^m u_i^* a_{ij} = c_j \right), \quad \text{якщо } x_j^* > 0, \\ u^* A_j \leq c_j & \quad \left(\sum_{i=1}^m u_i^* a_{ij} \leq c_j \right), \quad \text{якщо } x_j^* = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Доведення. Необхідність. Нехай x^* — оптимальний розв'язок ЗЛП (1.66). Доведемо, що при цьому виконуються співвідношення (1.68). Дійсно, згідно теореми двоїстості існує оптимальний розв'язок u^* двоїстої задачі (1.67) і при цьому $c x^* = u^* b$. Звідси, враховуючи, що $A x^* = b$, маємо

$$0 = c x^* - u^* b = c x^* - u^* b - u^* (A x^* - b) = (c - u^* A) x^*$$

або

$$\sum_{j=1}^n (c_j - u^* A_j) x_j^* = 0.$$

З останньої рівності випливає співвідношення (1.68).

Достатність. Покажемо, що при виконанні умов (1.68) x^* — оптимальний розв'язок ЗЛП (1.66). Дійсно, з (1.68) маємо

$$\sum_{j=1}^n (c_j - u^* A_j) x_j^* = 0$$

або $(c - u^* A) x^* = 0$. Отже, $c x^* = u^* A x^* = u^* b$. Крім того, з (1.68) випливає, що u^* — допустимий розв'язок двоїстої задачі (1.67). Тому

$$c x^* \geq u^* b = c x^*.$$

Отже, x^* — оптимальний розв'язок ЗЛП (1.66).

Доведення завершено.

Зауважимо, що симплекс-множники $u_1, \dots, u_m$, що фігурують у МСМ і відповідають оптимальному розв'язкові прямої ЗЛП, є оптимальним розв'язком двоїстої ЗЛП.

§ 17. Двоїстий симплекс-метод

Розглянемо метод розв'язування ЗЛП, що базується на теорії двоїстості, і називається *двоїстим симплекс-методом*. Наведемо його обґрунтування.

Нехай розглядається СЗЛП

$$c x \rightarrow \min, \quad A x = b, \quad x \geq 0. \quad (1.69)$$

Як відомо, двоїстою до неї є ЗЛП

$$u b \rightarrow \max, \quad u A \leq c. \quad (1.70)$$

Нехай вектори умов $A_1, \dots, A_m$ у задачі (1.69) є лінійно незалежними, $B = (A_1, \dots, A_m)$ — базисна матриця. Спробуємо перейти від СЗЛП (1.69) до КЗЛП, для чого помножимо непрямі обмеження $A x = b$ зліва на B^{-1} . Одержимо $\alpha x = \beta$, де $\alpha = (I, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, I — одинична матриця розмірності $m \times m$. Якщо при цьому $\beta \geq 0$, то одержана ЗЛП є канонічною, якщо ж деякі компоненти вектора β від'ємні, то, звичайно, ні.

Означення 1.8. Майже канонічною ЗЛП (МКЗЛП) називається СЗЛП (1.69), якщо матриця умов A містить одиничну підматрицю.

Означення 1.9. Вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ називається майже допустимим базисним розв'язком (МДБР), якщо він задовольняє обмеженням $A x = b$ (але не обов'язково обмеженням $x \geq 0$) і його ненульовим компонентам відповідають лінійно незалежні вектори умов.

Нехай для визначеності $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, вектори умов $A_1, \dots, A_m$ — лінійно незалежні, $B = (A_1, \dots, A_m)$. Змінні $x_1, \dots, x_m$ будемо називати *базисними*, $x_{m+1}, \dots, x_n$ — *небазисними*. Надалі будемо розглядати лише ті МДБР (або ж ті МКЗЛП, що їх визначають), для яких симплекс-різниці невід'ємні, тобто

$$\Delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} = c_j - c_{\text{баз}} \alpha_j = c_j - c_{\text{баз}} B^{-1} A_j \geq 0 \quad (1.71)$$

для всіх $j = 1, \dots, n$.

Для таких МДБР є очевидним критерій оптимальності: МДБР є оптимальним, якщо він є допустимим.

Зауважимо, що для МДБР, для якого виконується (1.71), вектор $u = c_{\text{баз}} B^{-1}$ є допустимим розв'язком двоїстої ЗЛП ($u A \leq c$).

Отже, розглянемо МКЗЛП

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \min, \\ x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j &= \beta_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$$

для якої $\Delta_j \geq 0, j = 1, \dots, n$. Виключивши з цільової функції базисні змінні $x_1, \dots, x_m$, маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^n \Delta_j x_j &\rightarrow \min, \\ x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j &= \beta_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Двоїста до ЗЛП (1.72) має вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \beta_i v_i &\rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i &\leq \Delta_j, \quad j = m+1, \dots, n, \\ v_i &\leq 0, i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

або, виконуючи заміну $u_i = -v_i, i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^m \beta_i u_i &\rightarrow \max, \\ -\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} u_i &\leq \Delta_j, \quad j = m+1, \dots, n, \\ u_i &\geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Останню задачу легко перетворюємо до канонічного вигляду, вводячи додаткові невід'ємні змінні $u_j, j = m+1, \dots, n$, та враховуючи, що максимізація цільової функції еквівалентна мінімізації цієї ж функції з оберненим знаком:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \beta_i u_i &\rightarrow \min, \\ u_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} u_i &= \Delta_j, \quad j = m+1, \dots, n, \\ u_i &\geq 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Отже, двоїстою до МКЗЛП (1.72) є КЗЛП (1.73). Зміст двоїстого симплекс-методу полягає у застосуванні звичайного симплекс-методу для розв'язування двоїстої ЗЛП (1.73). Оскільки розглядуваний метод цікавить нас як метод розв'язування задачі (1.72), вияснимо, що означають для ЗЛП (1.72) перетворення кожної ітерації симплексного методу, застосованого до задачі (1.73).

Непрямі обмеження КЗЛП (1.73) визначають базисний розв'язок цієї задачі — n -вимірний вектор $u = (0, \dots, 0, \Delta_{m+1}, \dots, \Delta_n)$, для якого вектор $(\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$

тієї ж вимірності є вектором симплекс-різниць. Якщо $\beta_i \geq 0, i=1, \dots, m$, то $\mathbf{u}$ є оптимальним розв'язком задачі (1.73), а, отже, $\mathbf{x} = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$ є оптимальним розв'язком ЗЛП (1.72) (критерій оптимальності МДБР). Інакше згідно симплекс-методу визначаються числа l та k з умов:

$$\beta_l = \min_{i: \beta_i < 0} \beta_i, \quad (1.74)$$

$$\frac{\Delta_k}{-\alpha_{lk}} = \min_{j: \alpha_{lj} < 0} \frac{\Delta_j}{-\alpha_{lj}} = \gamma_l, \quad (1.75)$$

тобто, визначається ведучий елемент α_{lk} симплексного перетворення.

Стосовно задачі (1.72) вказані дії також визначають ведучий елемент α_{lk} симплексного перетворення, при цьому з числа базисних виводиться вектор $\mathbf{A}_l$, а вектор $\mathbf{A}_k$ уводиться до числа базисних. Виконавши вказане перетворення, одержимо МКЗЛП, що визначає МДБР (аналогічно §7 цього розділу)

$$\mathbf{x}' = (\beta_1 - \theta_k \alpha_{1k}, \dots, \beta_{l-1} - \theta_k \alpha_{l-1k}, 0, \beta_{l+1} - \theta_k \alpha_{l+1k}, \dots, \beta_m - \theta_k \alpha_{mk}, 0, \dots, 0, \theta_k, 0, \dots, 0).$$

де $\theta_k = \beta_l / \alpha_{lk} > 0$. З цього ж перетворення випливає також, що симплекс-різниці $\Delta'_j, j=1, \dots, n$, для $\mathbf{x}'$ пов'язані з Δ_j співвідношенням

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \Delta_k. \quad (1.76)$$

Враховуючи, що $\Delta_k \geq 0, \alpha_{lk} < 0$, робимо висновок, що при $\alpha_{lj} \geq 0$ виконується $\Delta'_j \geq 0$. Якщо ж $\alpha_{lj} < 0$, то, записавши (1.75) у вигляді

$$\frac{\Delta_k}{-\alpha_{lk}} \leq \frac{\Delta_j}{-\alpha_{lj}},$$

маємо, що

$$\Delta_j - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \Delta_k \geq 0.$$

Отже, для нового МДБР $\mathbf{x}'$ симплекс-різниці також невід'ємні.

Легко підрахувати також, що

$$L(\mathbf{x}') = L(\mathbf{x}) + \theta_k \Delta_k,$$

тобто, при переході від точки $\mathbf{x}$ до $\mathbf{x}'$ значення цільової функції збільшується, якщо $\mathbf{u}$ є не виродженим базисним розв'язком двоїстої ЗЛП і залишається незмінним у виродженому випадку.

Зауважимо нарешті, що коли для деякого $\beta_i < 0$ у задачі (1.73) $\alpha_{ij} \geq 0$, то ця задача розв'язку не має через необмеженість цільової функції на допустимій множині, а задача (1.72) згідно теореми двоїстості не має розв'язку через те, що є порожньою її допустима множина.

Все це дає можливість сформулювати

Алгоритм двоїстого симплекс-методу (ДСМ)

1. Зводимо вихідну ЗЛП до МКЗЛП і знаходимо її МДБР $x(0)$, для якого симплекс-різниці невід'ємні.

2. Нехай на s -й ітерації маємо МКЗЛП, що визначає МДБР $x(s)$, якому відповідають невід'ємні симплекс-різниці. Без обмеження загальності будемо вважати, що $x(s)$ визначається системою непрямих обмежень

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij}^s x_j = \beta_i^s, \quad i=1, \dots, m, \quad (1.77)$$

тобто, $x(s) = (\beta_1^s, \dots, \beta_m^s, 0, \dots, 0)$ і

$$\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}^s \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

3. Якщо $\beta_i^s \geq 0$, то кінець: $x(s)$ є оптимальним розв'язком вихідної ЗЛП. Інакше

4. Якщо існує принаймні одне $\beta_i^s < 0$, таке, що $\alpha_{ij}^s \geq 0, j=1, \dots, n$, то кінець: вихідна ЗЛП розв'язку не має (її допустима множина є порожньою). Інакше

5. Знаходимо l з умови

$$\beta_l^s = \min_{i: \beta_i^s < 0} \beta_i^s.$$

Вектор A_l виводиться з числа базисних.

6. Знаходимо k з умови

$$\frac{\Delta_k^s}{-\alpha_{lk}^s} = \min_{j: \alpha_{lj}^s < 0} \frac{\Delta_j^s}{-\alpha_{lj}^s}.$$

Вектор A_k уводиться до числа базисних. Виконуємо симплексне перетворення над елементами розширеної матриці системи (1.77) з ведучим елементом α_{lk}^s і повертаємось до пункту 2 алгоритму, замінюючи s на $s+1$.

Приклад 1.12. Розв'язати ЗЛП:

$$\begin{aligned} L(x) &= x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_5 &= -2, \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_j &\geq 0, j=1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Наведена ЗЛП є МКЗЛП. Її розв'язування ведеться в симплекс-таблицях (див. таблицю 1.11), які незначним чином відрізняються від звичайних симплекс-таблиць.

Таблиця 1.11

хбаз	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
x_1	1	0	-1	1	-1	-2
x_2	0	1	-1	-1	1	1
Δ	0	0	1	1	2	0

γ			1		2	
x_3	-1	0	1	-1	1	2
x_2	-1	1	0	-2	2	3
Δ	1	0	0	2	1	-2

Оптимальний розв'язок задачі: $\mathbf{x}^* = (0, 3, 2, 0, 0)$. При цьому $L(\mathbf{x}^*) = 2$.

Питання про те, як будь-яку СЗЛП звести до МКЗЛП, залишимо відкритим. Зауважимо лише, що на практиці часто мають місце випадки, коли вихідна ЗЛП є МКЗЛП, або елементарно зводиться до неї (дивись, наприклад, розділ 4).

Підкреслимо, що застосування ДСМ особливо вигідне при розв'язуванні ЗЛП із зростаючою кількістю додаткових обмежень. При цьому для знаходження розв'язку нових задач використовується інформація, що одержана раніше.

Розділ 2. Транспортна задача лінійного програмування

Викладені вище методи розв'язування ЗЛП є універсальними. Однак існує цілий ряд ЗЛП, для яких внаслідок їх специфіки застосування загальних методів спрощується. Одною з таких задач є транспортна задача лінійного програмування (ТЗЛП).

Нагадаємо, що математична модель ТЗЛП має вигляд:

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.5)$$

Зауважимо, що умова (2.5) визначає збалансовану (закриту) модель ТЗЛП, якій буде приділена головна увага.

Очевидно, що (2.1)–(2.4) — це СЗЛП у координатній формі. Її можна записати також у матричній формі. Для цього введемо такі позначення:

$\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn})'$ — вектор перевезень,

$\mathbf{b} = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)'$ — вектор виробництва-споживання,

$\mathbf{A}_{ij} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$ — вектор комунікації $P_i Q_j$ (його розмірність дорівнює $m+n$, перша 1 стоїть на i -у місці, друга — на $m+j$ -у),

$\mathbf{c} = (c_{11}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn})$ — вектор транспортних витрат,

$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{1n}, \mathbf{A}_{21}, \dots, \mathbf{A}_{2n}, \dots, \mathbf{A}_{m1}, \dots, \mathbf{A}_{mn})$ — матриця умов.

Тоді ТЗЛП (2.1)–(2.4) набирає вигляду:

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \mathbf{x} \rightarrow \min, \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Специфіка цієї задачі полягає в тому, що елементами матриці умов $\mathbf{A}$ є лише нулі та одиниці, причому нулів — більшість.

Зауважимо, що при необхідності вектор транспортних витрат $\mathbf{c}$ можна розглядати як матрицю $\mathbf{c} = \|c_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, а вектор перевезень $\mathbf{x}$ — як матрицю $\mathbf{x} = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

При ручних обчисленнях дані для ТЗЛП та результати обчислень, пов'язаних з її розв'язанням, заносяться до транспортної таблиці.

Транспортна таблиця

	Q_1	...	Q_j	...	Q_n	$\mathbf{a}$
P_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
P_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
$\mathbf{b}$	b_1	...	b_j	...	b_n	

При цьому транспортні витрати c_{ij} записуються у верхньому правому куті відповідної клітинки транспортної таблиці. Як правило, компоненти x_{ij} вектора перевезень заносяться до транспортної таблиці лише тоді, коли $x_{ij} > 0$. У цьому випадку відповідна клітинка транспортної таблиці називається *заповненою*, інакше — *вільною*.

§ 1. Властивості транспортної задачі

1. ТЗЛП (2.1)–(2.4) завжди має розв'язок.

Дійсно, допустима множина D ТЗЛП не є порожньою, бо

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}, \text{ де } d = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

є допустимим розв'язком ТЗЛП:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{d} = a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{d} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d} \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n.$$

Крім того, D є обмеженою множиною, бо $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$. Тому цільова функція $L(x)$ досягає свого мінімуму на обмеженій множині D .

2. Ранг матриці умов A дорівнює $m+n-1$.

Легко бачити, що сума перших m рядків матриці A дорівнює сумі n решти її рядків. Тому $\text{rang } A \leq m+n-1$. Розглянемо тепер її мінор, який утворений з перших $m+n-1$ компонент векторів умов $A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{mn}, A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1,n-1}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Як бачимо, цей мінор має трикутний вигляд, його величина дорівнює 1. Отже, $\text{rang } A = m+n-1$.

Ця властивість $TЗЛП$ означає, що серед її обмежень (2.2), (2.3) $m+n-1$ лінійно незалежних, отже, одне з них (будь-яке) можна відкинути. Звичайно цього не роблять для збереження симетрії запису задачі.

3. Якщо всі a_i , $i=1, \dots, m$, b_j , $j=1, \dots, n$, — цілі, то хоча б один оптимальний розв'язок $TЗЛП$ є цілочисельним.

У справедливості цієї властивості ми переконаємось, розглянувши метод потенціалів розв'язування $TЗЛП$.

Як і для будь-якої $ЗЛП$, для $TЗЛП$ важливу роль відіграє поняття базисного розв'язку. Невироджений базисний розв'язок $TЗЛП$ згідно властивості 2 містить $m+n-1$ додатну компоненту, а вироджений — меншу кількість додатних компонент.

У $TЗЛП$ поняттю базисного розв'язку можна надати наочного геометричного тлумачення. Для цього введемо ряд означень та сформулюємо деякі твердження.

Означення 2.1. Маршрутом, що з'єднує пункти P_{i_1} та Q_{j_s} називається послідовність комунікацій

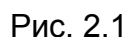
$$P_{i_1}Q_{j_1}, P_{i_2}Q_{j_1}, P_{i_2}Q_{j_2}, \dots, P_{i_s}Q_{j_{s-1}}, P_{i_s}Q_{j_s}$$

(див. рис. 2.1). Позначимо цей маршрут через M .

Означення 2.2. Маршрут M , до якого додається комунікація $P_{i_1}Q_{j_s}$, називається замкненим або циклом.

Позначивши цикл через C , маємо: $C = M \cup P_{i_1}Q_{j_s}$.

$$P_{i_1} \quad P_{i_2} \quad \dots \quad P_{i_s}$$



46

Вектор, що стоїть праворуч, має відмінну від нуля $(m+j_1)$ -у компоненту. Тому зліва серед векторів $\alpha_{ij} \mathbf{A}_{ij}$, $(i,j) \in U_1$ має обов'язково знайтись вектор, в якого є відмінною від нуля компонента з таким же номером. Нехай це вектор $\alpha_{i_2 j_1} \mathbf{A}_{i_2 j_1}$ ($\alpha_{i_2 j_1} \neq 0$).

Записуємо тепер (2.7) у вигляді:

$$\sum_{(i,j) \in U_2} \alpha_{ij} \mathbf{A}_{ij} = -\alpha_{i_1 j_1} \mathbf{A}_{i_1 j_1} - \alpha_{i_2 j_1} \mathbf{A}_{i_2 j_1}, \quad U_2 = U_1 \setminus (i_2, j_1). \quad (2.8)$$

Аналогічно, оскільки вектор, що стоїть справа, має відмінну від нуля i_2 -у компоненту, то серед векторів $\alpha_{ij} \mathbf{A}_{ij}$, $(i,j) \in U_2$ обов'язково знайдеться вектор, i_2 -а компонента якого відмінна від нуля. Нехай це $\alpha_{i_2 j_2} \mathbf{A}_{i_2 j_2}$ ($\alpha_{i_2 j_2} \neq 0$). Цей вектор переноситься у праву частину і т. д. Виникає питання: до яких пір буде продовжуватися ця процедура? До тих пір, поки на черговому кроці номер i_k (або j_k) не співпаде з одним із попередніх номерів i_l (j_l). А це означає, що з комунікацій

$$P_{i_1} Q_{j_1}, P_{i_2} Q_{j_1}, P_{i_2} Q_{j_2}, \dots,$$

що відповідають векторам умов

$$\mathbf{A}_{i_1 j_1}, \mathbf{A}_{i_2 j_1}, \mathbf{A}_{i_2 j_2}, \dots,$$

можна утворити цикл. А це суперечить припущенню.

Означення 2.3. Комунікації $P_i Q_j$ називаються основними для розв'язку x , якщо $x_{ij} > 0$.

Укажемо простий наслідок доведеної теореми.

Теорема 2.2. Допустимий розв'язок ТЗЛП є базисним тоді і лише тоді, коли з його основних комунікацій неможливо утворити цикл.

Зрозуміло, що все вищевикладене можна трансформувати стосовно транспортної таблиці. Зокрема, якщо неможливо утворити цикл із заповнених клітинок ($x_{ij} > 0$) деякого допустимого розв'язку ТЗЛП, то цей розв'язок є базисним, інакше — ні. Наприклад, у таблиці 2.1 вказано допустимий розв'язок ТЗЛП, що не є базисним, бо існують цикли, утворені заповненими клітинками (один із них зображено на таблиці за допомогою зірочок). При тих же вихідних даних у таблиці 2.2 наводиться допустимий базисний розв'язок ТЗЛП, що є невідродженим.

Таблиця 2.1

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	a
P_1	3	3*	2*	2	10
P_2		2*	8*	5	15
P_3				7	7
b	3	5	10	14	32

Таблиця 2.2

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	a
P_1	3	5	2		10
P_2			8	7	15
P_3				7	7
b	3	5	10	14	32

Має місце наступна теорема (без доведення).

Теорема 2.3. ТЗЛП є невикористаною (всі її базисні розв'язки є невикористаними) тоді і лише тоді, коли для довільних наборів індексів $i_1, \dots, i_t$ ($t < m$) та $j_1, \dots, j_s$ ($s < n$) має місце нерівність

$$\sum_{r=1}^t a_{i_r} \neq \sum_{r=1}^s b_{j_r}.$$

У таблиці 2.3 наведено приклад виродженого базисного розв'язку ТЗЛП.

Для невикористаного базисного розв'язку (див. таблицю 2.2) базисні змінні визначаються однозначно: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}$; однозначно визначаються і відповідні базисні вектори:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)', & A_{12} &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)', \\ A_{13} &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)', & A_{23} &= (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)', \\ A_{24} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)', & A_{34} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)'. \end{aligned}$$

Таблиця 2.3

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a
P_1	10	10				20
P_2		5	15	•		20
P_3				8	9	17
b	10	15	15	8	9	57

Для виродженого базисного розв'язку ТЗЛП (див. таблицю 2.3) базисні змінні (вектори) визначаються неоднозначно: наприклад: $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}$ ($A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{34}, A_{35}$). Тут до базисних віднесена змінна $x_{24} = 0$.

У методі потенціалів розв'язування ТЗЛП, що викладається нижче, у випадку виродженого базисного розв'язку до ненульових базисних перевезень слід додати необхідну кількість нульових перевезень (як базисних) таким чином, щоб у сукупності одержані перевезення не утворювали циклу.

Означення 2.4. Клітинки транспортної таблиці, що відповідають базисним змінним, називаються базисними, решта — небазисними.

§ 2. Двоїстість у транспортній задачі

Як зазначалося вище, ТЗЛП є СЗЛП:

$$c x \rightarrow \min, A x = b, x \geq 0,$$

отже, двоїстою їй задачею є

$$u b \rightarrow \max, u A \leq c, \quad (2.9)$$

де u — $(m+n)$ -вимірний вектор-рядок двоїстих змінних. Оскільки компоненти вектора u за знаком не обмежені, то визначимо їх таким чином:

$$u = (-u_1, \dots, -u_m, v_1, \dots, v_n).$$

Очевидно, що двоїста змінна $-u_j$ відповідає обмеженню

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

а двоїста змінна v_j — обмеженню

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

ТЗЛП.

У координатній формі задача (2.9) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i &\rightarrow \max, \\ v_j - u_i &\leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Означення 2.5. Змінна u_i називається потенціалом пункту виробництва P_i , $i = 1, \dots, m$, а змінна v_j — потенціалом пункту споживання Q_j , $j = 1, \dots, n$.

Двоїстий критерій оптимальності стосовно ТЗЛП формулюється так: базисний розв'язок $x = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, ТЗЛП є оптимальним тоді і лише тоді, коли існують потенціали u_i , $i = 1, \dots, m$, v_j , $j = 1, \dots, n$, такі, що

$$\begin{aligned} v_j - u_i &= c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} - \text{базисне,} \\ v_j - u_i &\leq c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} - \text{небазисне.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Цей критерій лежить в основі методу потенціалів розв'язування ТЗЛП, що викладається нижче.

А зараз розглянемо задачу знаходження початкового базисного розв'язку ТЗЛП.

§ 3. Деякі методи знаходження початкового базисного розв'язку

Відомо, що для звичайної СЗЛП пошук початкового базисного розв'язку пов'язаний з необхідністю застосування М-методу. Для ТЗЛП внаслідок її специфіки пошук початкового базисного розв'язку значно спрощується. Розглянемо два найбільш популярних методи.

1. Метод північно-західного кута

Вибирається клітинка (1,1) транспортної таблиці (її північно-західний кут) і завантажується максимально можливим перевезенням. При цьому можливі три випадки:

- 1) $x_{11} = \min(a_1, b_1) = a_1$,
- 2) $x_{11} = \min(a_1, b_1) = b_1$,
- 3) $x_{11} = \min(a_1, b_1) = a_1 = b_1$.

У першому випадку з подальшого розгляду виключається перший рядок транспортної таблиці, покладаємо $b_1 = b_1 - x_{11}$, у другому випадку виключається перший стовпець, покладаємо $a_1 = a_1 - x_{11}$, у третьому випадку з подальшого розгляду виключаються як перший стовпець, так і перший рядок. У зменшеній таким чином транспортній таблиці знаходиться її верхня ліва клітинка (північно-західний кут), завантажується максимально можливим чином і т. д.

Зрозуміло, що побудований таким чином план перевезень є допустимим розв'язком ТЗЛП. Крім того, цей план є базисним.

Зауважимо, що при побудові початкового базисного розв'язку методом північно-західного кута зовсім не враховуються собівартості перевезень c_{ij} . Тому, як правило, такий план є далеким від оптимального.

Розглянемо один із методів, де при знаходженні початкового базисного розв'язку приймаються до уваги собівартості перевезень c_{ij} .

2. Метод мінімального елемента

Ідея методу полягає у тому, щоб максимальним чином завантажити перевезеннями комунікації з мінімальною собівартістю перевезень. Фактично ж цей метод відрізняється від методу північно-західного кута лише тим, що на кожному кроці побудови початкового базисного розв'язку для завантаження вибирається клітинка з мінімальним значенням c_{ij} .

Метод мінімального елемента в результаті також дає допустимий базисний розв'язок *ТЗЛП*.

У таблицях 2.2 та 2.3 наведені початкові базисні розв'язки *ТЗЛП*, побудовані за методом північно-західного кута (невироджений та вироджений).

Наведемо приклад побудови початкового базисного розв'язку методом мінімального елемента (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a
P_1	⁸ 30	¹²	⁴ 15	⁹	¹⁰ 15	60
P_2	⁷	⁵	¹⁵	³ 35	⁶ 5	40
P_3	⁹	⁴ 80	⁶	¹²	⁷ 20	100
P_4	⁵	³	² 50	⁶	⁴	50
b	30	80	65	35	40	250

§ 4. Метод потенціалів

Нагадаємо, що у методі потенціалів істотно використовується двоїстий критерій оптимальності для *ТЗЛП*. Його можна сформулювати дещо в іншому вигляді.

Нехай $u_i, i=1, \dots, m, v_j, j=1, \dots, n$, — потенціали пунктів P_i та Q_j відповідно. Величину $c_{ij} - (v_j - u_i) = \Delta_{ij}$ назовемо *симплекс-різницею* (відносною оцінкою) змінної x_{ij} .

Двоїстий критерій оптимальності для *ТЗЛП*. Базисний розв'язок $x = \|x_{ij}\|, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, *ТЗЛП* є оптимальним тоді і лише тоді, коли існують потенціали $u_i, i=1, \dots, m, v_j, j=1, \dots, n$, такі, що

$$\Delta_{ij} = 0 \text{ для базисних клітинок,} \quad (2.11)$$

$$\Delta_{ij} \geq 0 \text{ для небазисних клітинок.} \quad (2.12)$$

Метод потенціалів полягає ось у чому.

1. Знаходиться початковий не вироджений базисний розв'язок x ТЗЛП одним з відомих методів.

2. Знаходяться потенціали $u_i, i=1, \dots, m, v_j, j=1, \dots, n$, так, щоб у кожній базисній клітинці виконувалося співвідношення $\Delta_{ij} = 0$, або, що те ж саме,

$$v_j - u_i = c_{ij}, (i, j) \text{ — базисні клітинки.} \quad (2.13)$$

Зауважимо, що система (2.13) містить $m+n-1$ рівнянь з $m+n$ невідомими. Тому одна з невідомих величин (u_1 , наприклад) покладається рівною довільній константі, що, як правило, дорівнює нулю. Решта невідомих знаходиться з системи (2.13).

3. Обчислюються Δ_{ij} для небазисних клітинок. Якщо всі вони невід'ємні, то базисний розв'язок x є оптимальним. Інакше його можна поліпшити, якщо ввести до числа базисних одну з клітинок, де $\Delta_{ij} < 0$ (як правило, ту клітинку (i_0, j_0) , для якої

$$\Delta_{i_0 j_0} = \min_{i, j} \Delta_{ij}.$$

Розглянемо питання про те, яка клітинка виводиться з числа базисних. З клітинок транспортної таблиці утворюємо цикл таким чином, щоб однією з його клітинок (вершин) була клітинка (i_0, j_0) , а решта клітинок були базисними. Можна довести, що у невиродженому випадку для заданої небазисної клітинки цикл, що їй відповідає, будується однозначно.

Зауважимо, що цикл для вибраної небазисної клітинки в загальному випадку будується за допомогою *методу викреслювання*.

Суть його в тому, що будується "маска" існуючого розв'язку, де враховується, що вибрана клітинка є базисною. Для прикладу в таблиці 2.5 приводиться "маска" базисного розв'язку з таблиці 2.4 для небазисної клітинки (4,4). Потім викреслюються рядки та стовпці (у будь-якому порядку), що містять єдине додатне перевезення. У розглядуваному випадку можна викреслити перший, другий стовпець та третій рядок. Частина маски, що залишається, утворює цикл, що відповідає вибраній небазисній клітинці. Позначимо його через C .

Таблиця 2.5

б		б		б
			б	б
	б			б
		б	Б	

Позначимо вершини циклу так: вибрану небазисну — знаком "+", а решту — знаками "+" та "-", але так, щоб дві сусідні (по рядку або стовпчику) вершини циклу мали різні знаки. Нехай C^+ та C^- — множини вершин циклу C , що позначені знаком "+" та "-" відповідно. Зрозуміло, що $C = C^+ \cup C^-$.

Збільшимо перевезення у клітинках $(i, j) \in C^+$ на θ , а у клітинках $(i, j) \in C^-$ зменшимо їх на θ . Щоб новий вектор перевезень був допустимим, необхідно, щоб

$$0 \leq \theta \leq \min_{i,j:(i,j) \in \mathbf{C}^-} x_{ij}.$$

Якщо ж вибрати

$$\theta = \min_{i,j:(i,j) \in \mathbf{C}^-} x_{ij},$$

то принаймні одна з базисних клітинок стане вільною. Замість неї базисною стає клітинка (i_0, j_0) . Зауважимо, що якщо $\min x_{ij}$ реалізується на двох і більше клітинках, то лише одну з них (будь-яку) варто вивести з числа базисних, залишивши в решті нульові базисні перевезення для збереження базисності нового розв'язку.

Отже, будемо новий базисний розв'язок $\mathbf{x}'$ згідно співвідношень

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{якщо } (i,j) \notin \mathbf{C}, \\ x_{ij} + \theta, & \text{якщо } (i,j) \in \mathbf{C}^+, \\ x_{ij} - \theta, & \text{якщо } (i,j) \in \mathbf{C}^-. \end{cases}$$

При цьому $L(\mathbf{x}') = L(\mathbf{x}) + \theta \Delta_{i_0 j_0}$.

Дійсно, нехай цикл $\mathbf{C}$ містить, крім (i_0, j_0) , клітинки $(i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s), (i_s, j_0)$ (див. рис. 2.2).

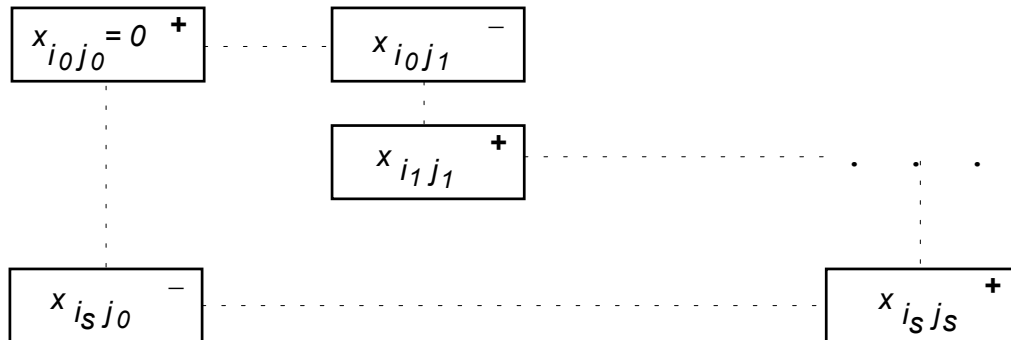


Рис. 2.2

Позначимо через L_0 ту частину цільової функції $TЗЛП$, що не змінюється при переході від $\mathbf{x}$ до $\mathbf{x}'$. Тоді

$$L(\mathbf{x}) = L_0 + c_{i_0 j_1} x_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} x_{i_1 j_1} + \dots + c_{i_s j_s} x_{i_s j_s} + c_{i_s j_0} x_{i_s j_0},$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}') &= L_0 + c_{i_0 j_0} \theta + c_{i_0 j_1} (x_{i_0 j_1} - \theta) + c_{i_1 j_1} (x_{i_1 j_1} + \theta) + \dots + \\ &\quad + c_{i_s j_s} (x_{i_s j_s} + \theta) + c_{i_s j_0} (x_{i_s j_0} - \theta) = \\ &= L(\mathbf{x}) + \theta (c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} - \dots + c_{i_s j_s} - c_{i_s j_0}). \end{aligned}$$

В останньому виразі доданки в дужках, крім першого, відповідають базисним клітинкам, де $c_{ij} = v_j - u_i$. Тому

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}') &= L(\mathbf{x}) + \theta (c_{i_0 j_0} - (v_{j_1} - u_{i_0}) + (v_{j_1} - u_{i_1}) - \dots + \\
&\quad + (v_{j_s} - u_{i_s}) - (v_{j_0} - u_{i_s})) = L(\mathbf{x}) + \theta (c_{i_0 j_0} - (v_{j_0} - u_{i_0})) = \\
&= L(\mathbf{x}) + \theta \Delta_{i_0 j_0},
\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Зауважимо, що у не виродженому випадку $\theta > 0$ і $L(\mathbf{x}') < L(\mathbf{x})$. У виродженому випадку $\theta = 0$ і $L(\mathbf{x}') = L(\mathbf{x})$, тобто перехід від $\mathbf{x}$ до $\mathbf{x}'$ пов'язаний лише із зміною нульового базисного перевезення.

4. З допомогою описаної вище процедури перерозподілу перевезень вздовж циклу $\mathbf{C}$ клітинка (i_0, j_0) (змінна $x_{i_0 j_0}$) вводиться до числа базисних, клітинка (k, l) , для якої

$$x_{kl} = \theta = \min_{i,j: (i,j) \in \mathbf{C}^-} x_{ij},$$

(змінна x_{kl}) виводиться з числа базисних. Переходимо до п.2 алгоритму.

Приклад 2.1. Методом потенціалів розв'яжемо ТЗЛП, дані для якої наведені в таблиці 2.4. Звідси ж візьмемо і початковий базисний розв'язок, побудований методом мінімального елемента. Усі ці дані перенесені в таблицю 2.6.

Таблиця 2.6

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a	u
P_1	0 8 30	5 12	0 4 15 +	2 9	0 10 15 -	60	0
P_2	3 7	2 5	15 15	0 3 35	0 6 5	40	4
P_3	4 9	0 4 80	5 6	8 12	0 7 20	100	3
P_4	-1 5	-2 3	0 2 50 -	1 6	-4 4 +	50	2
b	30	80	65	35	40	250	
v	8	7	4	7	10		

Крім цього до таблиці 2.6 занесені потенціали u_i , $i=1, \dots, 4$, (останній стовпець), v_j , $j=1, \dots, 5$, (останній рядок), що є розв'язком системи $v_j - u_i = c_{ij}$, (i, j) : x_{ij} — базисне, де покладено $u_1 = 0$. У верхніх лівих кутах кожної з клітинок записані величини Δ_{ij} . Бачимо, що розглядуваний базисний розв'язок не є оптимальним.

Для введення до числа базисних вибирається клітинка $(4, 5)$ з мінімальною симплекс-різницею, $\theta = 15$. Новий базисний розв'язок і відповідні обчислення наведені у таблиці 2.7.

Зауважимо, що при розв'язуванні системи для знаходження потенціалів u_i , $i = 1, \dots, 4$, та v_j , $j = 1, \dots, 5$, покладено $v_5 = 0$.

Таблиця 2.7

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a	u
P_1	0 8 30 -	9 12	0 4 + 30	6 9	4 10	60	-6
P_2	-1 7	2 5	11 15	0 3 35	0 6 5	40	-6
P_3	0 9	0 4 80	1 6	8 12	0 7 20	100	-7
P_4	-1 5 +	2 3	0 2 - 35	5 6	0 4 15	50	-4
b	30	80	65	35	40	250	
v	2	-3	-2	-3	0		

Таблиця 2.8

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a	u
P_1	1 8	9 12	0 4 60	6 9	4 10	60	-2
P_2	0 7	2 5	11 15	0 3 35	0 6 5	40	-2
P_3	1 9	0 4 80	1 6	8 12	0 7 20	100	-3
P_4	0 5 30	2 3	0 2 5	5 6	0 4 15	50	0
b	30	80	65	35	40	250	
v	5	1	2	1	4		

У таблиці 2.8 наведені результати обчислень для наступної ітерації. У цьому випадку при розв'язуванні системи для знаходження потенціалів покладено $u_4 = 0$. Легко зрозуміти, що при ручних обчисленнях зручно покласти рівним нулю потенціал того пункту виробництва (споживання), для якого у відповідному рядку (стовпці) транспортної таблиці міститься найбільша кількість базисних перевезень.

Як бачимо, критерій оптимальності виконується, отже,

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 5 \\ 0 & 80 & 0 & 0 & 20 \\ 30 & 0 & 5 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

є оптимальним розв'язком *ТЗЛП*, $L(x^*) = 1055$.

Зауваження.

1. Метод потенціалів розв'язування *ТЗЛП* — це, по суті, модифікований симплекс-метод, застосований до *ТЗЛП*. Існують інші методи її розв'язування.

2. Згадана вище третя властивість *ТЗЛП* впливає з того, що при знаходженні початкового базисного розв'язку та при переході до нових базисних розв'язків за методом потенціалів над величинами a_i , b_j , x_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, виконуються операції, що не виводять за рамки цілих чисел.

§ 5. Незбалансовані транспортні задачі

У попередніх параграфах розглядалася збалансована модель *ТЗЛП*, яка характеризується виконанням умови

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.14)$$

Якщо умова (2.14) порушується, то говорять про *незбалансовану (відкриту) модель ТЗЛП*. Зрозуміло, що при цьому змінюється і математичне формулювання задачі. Наприклад, якщо

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j,$$

то *ТЗЛП* набуває вигляду:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Аналогічно записується математична модель *ТЗЛП* для другого випадку.

Зрозуміло, що у першому випадку не у всіх пунктах споживання Q_j , $j = 1, \dots, n$, буде задоволена потреба у продукції. Загальний об'єм незадоволеного попиту дорівнює

$$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

У другому випадку у деяких пунктах виробництва P_i , $i = 1, \dots, m$, залишається не реалізована продукція загального об'єму

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

Проте у кожному з цих випадків план перевезень, що відповідає мінімуму транспортних витрат, побудувати можна. Для цього у першому випадку вводиться *фіктивний пункт виробництва* P_{m+1} з об'ємом виробництва

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

одиниць продукції, собівартості перевезень з котрого рівні нулю, тобто $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1, \dots, n$. У другому випадку додається *фіктивний споживач* Q_{n+1} з величиною попиту

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

одиниць продукції, собівартості перевезень до якого рівні нулю, тобто $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Легко бачити, що запропоновані розширення вихідних незбалансованих задач являють собою збалансовані ТЗЛП, які можуть бути розв'язані, наприклад, методом потенціалів. Нехай $\bar{x}^*$ їх оптимальний розв'язок. Тоді оптимальний розв'язок x^* вихідної задачі у першому випадку одержується відкиданням останнього рядка розв'язку $\bar{x}^*$, що відповідає фіктивному пункту виробництва. Додатні елементи цього рядка визначають об'єми недопостачання відповідним споживачам. Аналогічно, для другого випадку: оптимальний розв'язок x^* одержується відкиданням останнього стовпця розв'язку $\bar{x}^*$, додатні елементи якого визначають об'єми нереалізованої продукції у відповідних виробників.

Зауваження. При знаходженні початкового базисного розв'язку розширених ТЗЛП методом мінімального елемента (або іншим методом, що враховує собівартості перевезень) у першу чергу потрібно вибирати клітинки для завантаження серед реальних виробників та споживачів, а клітинки фіктивного стовпчика (рядка) — в останню чергу. Це дозволить одержати план ближчий до оптимального. Цієї ж мети можна досягнути, поклавши

$$c_{m+1,j} > \max_{i,j} c_{ij}, \quad c_{i,n+1} > \max_{i,j} c_{ij},$$

відповідно.

Приклад 2.2. Розв'язати ТЗЛП: $a = (30, 40, 70, 60)$, $b = (35, 80, 25, 70)$,

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 200$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 210$. Отже, вводимо фіктивного виробничника P_5 , $a_5 = 10$, $c_{5j} = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$ (таблиця 2.9). Одержану збалансовану ТЗЛП розв'язуємо методом потенціалів. На останній ітерації транспортна таблиця набуває вигляду

Таблиця 2.9

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	a
P_1	30 1	9	7	2	30
P_2	3	40 1	5	5	40
P_3	6	8	3	70 4	70
P_4	5 2	30 3	25 1	0 3	60
P_5	0	10 0	0	0	10
b	35	80	25	70	

Звідси маємо оптимальний розв'язок вихідної ТЗЛП:

$$x^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 5 & 30 & 25 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(x^*) = 475.$$

При цьому споживачеві Q_2 недопоставляється 10 одиниць продукції.

Приклад 2.3. Розв'язати ТЗЛП: $a = (30, 70, 50)$, $b = (10, 40, 20, 60)$,

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $a_1 + a_2 + a_3 = 150$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 130$, то вводиться фіктивний споживач Q_5 , $b_5 = 20$, $c_{i5} = 0$, $i = 1, 2, 3$ (таблиця 2.10). Збалансована ТЗЛП розв'язується методом потенціалів. На останній ітерації транспортна таблиця набуває вигляду

Таблиця 2.10

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a
P_1	10 2	7	20 3	6	0	30
P_2	9	40 4	0 5	10 7	20 0	70
P_3	5	7	6	50 2	0	50
b	10	40	20	60	20	

Оптимальний розв'язок вихідної ТЗЛП має вигляд

$$x^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(x^*) = 410.$$

При цьому у виробника P_2 залишається 20 одиниць нереалізованої продукції.

§ 6. Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями. Метод потенціалів

ТЗЛП з обмеженими пропускними спроможностями (ТЗЛПО) будемо називати ЗЛП вигляду:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.15)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.17)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.19)$$

Як бачимо, ця задача відрізняється від звичайної ТЗЛП наявністю обмеження $x_{ij} \leq r_{ij}$ на пропускну спроможність комунікації $P_i Q_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Це призводить до необхідності внести належні зміни у відповідні означення та твердження.

Означення 2.6. Допустимий розв'язок $x = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, ТЗЛПО називається базисним, якщо його перевезенням x_{ij} , таким, що $0 < x_{ij} < r_{ij}$, відповідає система лінійно незалежних векторів умов A_{ij} . Якщо число перевезень x_{ij} : $0 < x_{ij} < r_{ij}$, дорівнює $m+n-1$, то базисний розв'язок x називається не виродженим, якщо ж число таких компонент менше ніж $m+n-1$, то — виродженим.

Теорема 2.4 (двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛПО). Базисний розв'язок $x = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, оптимальний тоді і лише тоді, коли існують потенціали u_i , $i = 1, \dots, m$, v_j , $j = 1, \dots, n$, такі, що для симплекс-різниць

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$$

виконуються співвідношення

$$\Delta_{ij} = 0, \text{ якщо } x_{ij} \text{ — базисне}, \quad (2.20)$$

$$\Delta_{ij} \geq 0, \text{ якщо } x_{ij} \text{ — небазисне та } x_{ij} = 0, \quad (2.21)$$

$$\Delta_{ij} \leq 0, \text{ якщо } x_{ij} \text{ — небазисне та } x_{ij} = r_{ij}. \quad (2.22)$$

В останньому поняття та твердження для ТЗЛПО такі ж, як і для звичайної ТЗЛП.

На основі сформульованого критерію будується метод потенціалів розв'язування *ТЗЛПО*. Він полягає ось у чому.

1. Нехай є відомим початковий базисний розв'язок *ТЗЛПО*. Зауважимо, що на відміну від звичайної *ТЗЛП* цей розв'язок може і не існувати, наприклад, якщо для деякого *i* виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} < a_i.$$

Крім того, у випадку його існування процедура його знаходження є досить складною. Про це йтиме мова трохи нижче.

2. Знаходимо потенціали u_i та v_j як розв'язок системи

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad (i, j): x_{ij} \text{ — базисне перевезення},$$

що містить $m+n-1$ рівнянь та $m+n$ невідомих. Покладаючи один із потенціалів рівним, наприклад, 0, знаходимо решту невідомих.

Зрозуміло, що при цьому симплекс-різниці Δ_{ij} для базисних змінних рівні 0, тобто виконується умова (2.20). Якщо при цьому виконуються умови (2.21) та (2.22), то базисний розв'язок $\mathbf{x} = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, є оптимальним розв'язком *ТЗЛПО*. Інакше базисний розв'язок $\mathbf{x}$ можна поліпшити на наступному кроці.

3.1. Нехай існує клітинка (i_0, j_0) така, що $x_{i_0 j_0} = 0$, $\Delta_{i_0 j_0} < 0$.

Як і у звичайній *ТЗЛП*, будуємо цикл $\mathbf{C}$, що відповідає клітинці (i_0, j_0) , розбиваємо його на додатний $\mathbf{C}^+$ та від'ємний $\mathbf{C}^-$ півцикли.

Знаходимо

$$\begin{aligned} \theta' &= \min_{i, j: (i, j) \in \mathbf{C}^-} x_{ij}, \\ \theta'' &= \min_{i, j: (i, j) \in \mathbf{C}^+} (r_{ij} - x_{ij}), \\ \theta &= \min \{\theta', \theta''\}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що у не виродженому випадку $\theta > 0$. Будуємо новий розв'язок $\mathbf{x}' = \|x'_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, згідно співвідношень

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{якщо } (i, j) \notin \mathbf{C}, \\ x_{ij} + \theta, & \text{якщо } (i, j) \in \mathbf{C}^+, \\ x_{ij} - \theta, & \text{якщо } (i, j) \in \mathbf{C}^-. \end{cases} \quad (2.23)$$

Легко бачити, що $\mathbf{x}'$ — допустимий розв'язок. Можна довести також, що $\mathbf{x}'$ — базисний розв'язок. При цьому $L(\mathbf{x}') = L(\mathbf{x}) + \theta \Delta_{i_0 j_0}$, тобто $L(\mathbf{x}') < L(\mathbf{x})$ у не виродженому випадку.

3.2. Нехай існує клітинка (i_0, j_0) така, що $x_{i_0 j_0} = r_{i_0 j_0}$, $\Delta_{i_0 j_0} > 0$. Як і раніше будуємо цикл $\mathbf{C}$, що відповідає клітинці (i_0, j_0) , розбиваємо його на додатний $\mathbf{C}^+$ та від'ємний $\mathbf{C}^-$ півцикли, включаючи на цей раз клітинку (i_0, j_0) до $\mathbf{C}^-$. Знаходимо

$$\theta' = \min_{i, j: (i, j) \in \mathbf{C}^-} x_{ij},$$

$$\theta'' = \min_{i,j:(i,j) \in \mathbf{C}^+} (r_{ij} - x_{ij}),$$

$$\theta = \min \{\theta', \theta''\}.$$

Зрозуміло, що у не виродженому випадку $\theta > 0$. Згідно співвідношень (2.23) будується новий допустимий розв'язок $\mathbf{x}'$ ТЗЛПО, при цьому

$$L(\mathbf{x}') = L(\mathbf{x}) - \theta \Delta_{i_0 j_0},$$

тобто у не виродженому випадку знову забезпечується зменшення цільової функції.

Після цього повертаємося до виконання пункту 2.

Зауважимо, що у випадку виродженого базисного розв'язку до числа базисних включаються клітинки, де $x_{ij} = 0$ або $x_{ij} = r_{ij}$, але так, щоб у сукупності всі базисні клітинки не утворювали циклу.

Тепер зупинимося на побудові початкового базисного розв'язку ТЗЛПО.

Пошук початкового базисного розв'язку ТЗЛПО (якщо він існує) розбивається на два етапи.

І етап.

1) Знаходимо мінімальний елемент $c_{i_1 j_1}$ матриці $\mathbf{c} = \|c_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

2) Обчислюємо $x_{i_1 j_1} = \min \{a_{i_1}, b_{j_1}, r_{i_1 j_1}\}$. При цьому можливі три випадки:

а) $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$. Покладемо $x_{ij} = 0$, $j \neq j_1$, рядок i_1 матриці $\mathbf{c}$ з подальшого розгляду вилучається;

б) $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$. Покладемо $x_{ij} = 0$, $i \neq i_1$, стовпець j_1 матриці $\mathbf{c}$ надалі не розглядається;

в) $x_{i_1 j_1} = r_{i_1 j_1}$ ($r_{i_1 j_1} < a_{i_1}, r_{i_1 j_1} < b_{j_1}$). У цьому випадку з подальшого розгляду вилучається лише елемент $c_{i_1 j_1}$ матриці $\mathbf{c}$.

3) Покладемо $a_{i_1} = a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$, $b_{j_1} = b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$.

Подальші кроки цього етапу полягають у виконанні дій 1, 2, 3 стосовно невикреслених елементів матриці $\mathbf{c}$ і продовжуються до остаточного заповнення транспортної таблиці.

Таблиця 2.11

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}^1$	$\mathbf{a}^2$	$\mathbf{a}^3$	$\mathbf{a}^4$	$\mathbf{a}^5$	$\mathbf{a}^6$	$\mathbf{a}^7$
P_1	3 3 1	1 0 4	2 2 2	1 0 5	6	3	3	3	3	3	1	1
P_2	1 0 2	1 1 1	1 0 4	2 2 1	3	3	2	2	0	0	0	0
P_3	2 1 3	1 1 2	1 1 1	1 0 3	3	3	3	2	2	1	1	0
$\mathbf{b}$	4	2	4	2	12							
$\mathbf{b}^1$	1	2	4	2								
$\mathbf{b}^2$	1	1	4	2								
$\mathbf{b}^3$	1	1	3	2								
$\mathbf{b}^4$	1	1	3	0								

b^5	1	0	3	0
b^6	1	0	1	0
b^7	0	0	1	0

Приклад 2.4. Перший етап знаходження початкового базисного розв'язку *ТЗЛПО* ілюструється таблицею 2.11 (у нижньому лівому куті клітинок транспортної таблиці записуються величини r_{ij}). На перших трьох кроках викреслюються відповідно елементи c_{11} , c_{22} та c_{33} матриці c , на четвертому — другий рядок та четвертий стовпець, на п'ятому — другий стовпець, на шостому — елемент c_{13} , на сьомому — перший стовпець та третій рядок. Отже, ми одержали матрицю $x = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. За побудовою маємо:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad 0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Нехай

$$x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Якщо $x_{i,n+1} = x_{m+1,j} = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, то, очевидно, x є допустимим розв'язком *ТЗЛПО*. Інакше

$$\sum_{i=1}^m x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^n x_{m+1,j} = \omega > 0$$

і для одержання початкового допустимого розв'язку слід провести на другому етапі декілька ітерацій методу потенціалів для допоміжної розширеної *ТЗЛПО*.

II етап.

Розширена *ТЗЛПО* наведена в таблиці 2.12.

Таблиця 2.12

	Q_1	...	Q_j	...	Q_n	Q_{n+1}	a
P_1	c_{11} x_{11} r_{11}	...	c_{1j} x_{1j} r_{1j}	...	c_{1n} x_{1n} r_{1n}	M $x_{1,n+1}$ ∞	a_1
...	...	...	...	...	...	...	...
P_j	c_{j1} x_{j1} r_{j1}	...	c_{jj} x_{jj} r_{jj}	...	c_{jn} x_{jn} r_{jn}	M $x_{j,n+1}$ ∞	a_j
...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_{m1} x_{m1} r_{m1}	...	c_{mj} x_{mj} r_{mj}	...	c_{mn} x_{mn} r_{mn}	M $x_{m,n+1}$ ∞	a_m
P_{m+1}	M $x_{m+1,1}$ ∞	...	M $x_{m+1,j}$ ∞	...	M $x_{m+1,n}$ ∞	0 $x_{m+1,n+1}=0$ ∞	$a_{m+1}=\omega$
b	b_1	...	b_j	...	b_n	$b_{n+1}=\omega$	

Тут M — число, більше будь-якої фіксованої величини, з якою його прийдеться порівнювати при розв'язуванні задачі. Матриця $\bar{x} = \|\bar{x}_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m+1$, $j = 1, \dots, n+1$, де x_{ij} — перевезення, знайдені на першому етапі, $x_{m+1, n+1} = 0$, очевидно, є допустимим розв'язком розширеної ТЗЛПО. Дійсно,

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1, j} = \omega, \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{i, n+1} = \omega,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, n+1.$$

Застосовуючи до цієї задачі викладений вище метод потенціалів, знаходимо її розв'язок $\bar{x}^*$. При цьому $x_{m+1, n+1}^* = \omega$ або $x_{m+1, n+1}^* < \omega$. Можна показати, що у першому випадку перевезення між пунктами P_i та Q_j , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, одержаного розв'язку $\bar{x}^*$ утворюють початковий базисний розв'язок вихідної ТЗЛПО, а у другому випадку вихідна ТЗЛПО не має жодного допустимого розв'язку. Зауважимо, що другий етап можна закінчити при $x_{m+1, n+1} = \omega$.

Приклад 2.5. Продовжимо знаходження початкового базисного розв'язку ТЗЛПО, дані для якої наведені в таблиці 2.11. Розглядаємо розширену ТЗЛПО (див. таблицю 2.13).

Таблиця 2.13

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a	u
P_1	3 3 1	1 0 4	2 2 2	1 0 5	∞ 1 M	6	0
P_2	1 0 2	1 1 1	1 0 4	2 2 1	∞ 0 M	3	4
P_3	2 1 3	1 1 2	1 1 1	1 0 3	∞ 0 M	3	$2M-3$
P_4	∞ 0 M	∞ 0 M	∞ 1 M	∞ 0 M	∞ 0 0	1	M
b	4	2	4	2	1	13	
v	$2M$	$2M-1$	$2M$	5	M		

Як бачимо, лише три перевезення $\bar{x}_{15}$, $\bar{x}_{31}$, $\bar{x}_{43}$ задовольняють умову $0 < \bar{x}_{ij} < r_{ij}$, тобто є базисними. Доповнюємо їх необхідною кількістю перевезень $\bar{x}_{ij} = 0$ та $\bar{x}_{ij} = r_{ij}$, які розглядаємо як базисні (загальна кількість базисних змінних — 8). Зауважимо, що до числа базисних слід вводити в першу чергу клітинки, які пов'язані з фіктивними пунктами. У таблиці 2.13 базисні змінні виділено.

Знаходимо потенціали u_i та v_j так, щоб для базисних клітинок виконувалась умова $v_j - u_i = c_{ij}$, і заносимо їх у таблицю 2.13.

Обчислюємо симплекс-різниці $\Delta_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$ для небазисних змінних $\bar{x}_{ij}$ і записуємо їх заради зручності в окрему матрицю (звичайно вони заносяться у верхні ліві кути клітинок транспортної таблиці):

$$\begin{vmatrix} 1-2M & 5-2M & 2-2M & 0 & 0 \\ 6-2M & 6-2M & 8-2M & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2M-5 & 2M-3 \\ 0 & 1 & 0 & 2M-5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналізуючи одержані Δ_{ij} , приходимо до висновку, що для небазисних r -клітинок ($\bar{x}_{ij} = r_{ij}$) (1,1), (1,3), (2,2), (3,3) критерій оптимальності ($\Delta_{ij} \leq 0$) виконується, якщо M — досить велике число. Для небазисних 0-клітинок ($\bar{x}_{ij} = 0$) (1,2), (2,1), (2,3) критерій оптимальності ($\Delta_{ij} \geq 0$) не виконується. Одну з них слід увести до числа базисних. Як і в звичайній ТЗЛП до числа базисних уводиться небазисна змінна з мінімальною симплекс-різницею. Уведемо до числа базисних змінну $\bar{x}_{23}$. Для цього методом викреслювання будемо цикл, що відповідає клітинці (2,3) (див. рис. 2.3).

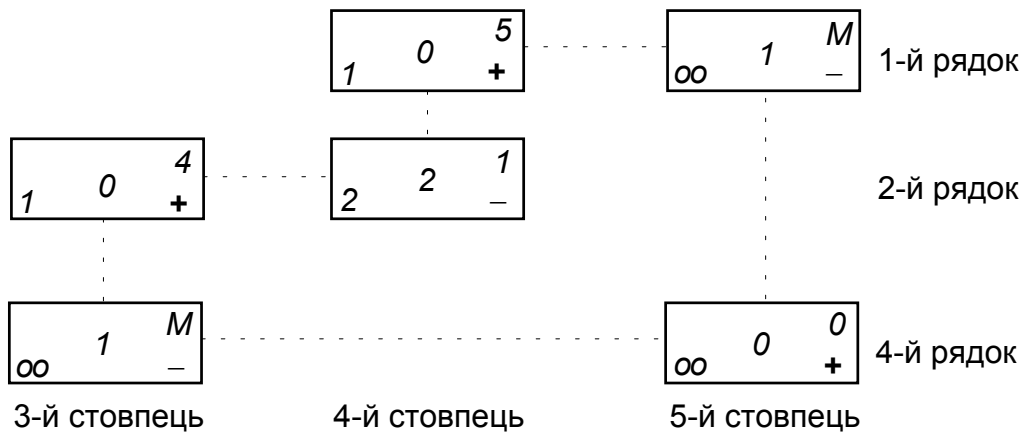


Рис. 2.3

Очевидно, що має місце випадок 3.1 описаного вище алгоритму.

Позначаючи клітинки циклу знаками "+" та "-", як показано на рисунку, знаходимо $\theta' = \min(1, 1, 2) = 1$, $\theta'' = \min(1-0, 1-0, \infty-0) = 1$, $\theta = \min(1, 1) = 1$.

Тепер перераховуємо $\bar{x}$ в $\bar{x}'$ згідно формул (2.23). Допустимий розв'язок $\bar{x}'$ буде мати вигляд

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки $\bar{x}_{45} = 1 = \omega$, то початковий базисний розв'язок вихідної ТЗЛПО має вигляд

$$x = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

ПЕРЕЛІК ЗАВДАНЬ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота №1

Розв'язати ЗЛП, спряжену до заданої

- | | | | |
|----|---|-----|--|
| 1. | $L = (x_1 + 2x_2) \rightarrow \max;$
$2x_1 + 3x_2 \leq 8,$
$2x_1 + x_2 \leq 6,$
$x_1 + x_2 \geq 1;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ | 2. | $L = (-2x_1 + x_2) \rightarrow \min;$
$2x_1 + x_2 \leq 8,$
$x_1 + 3x_2 \geq 6,$
$3x_1 + x_2 \geq 3;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ |
| 3. | $L = (6x_1 + 4x_2) \rightarrow \min;$
$2x_1 + x_2 \geq 3,$
$x_1 - x_2 \leq 1,$
$-x_1 + 2x_2 \geq 1;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ | 4. | $L = (4x_1 + 3x_2) \rightarrow \max;$
$5x_1 + 2x_2 \geq 20,$
$x_1 + 3x_2 \leq 15;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ |
| 5. | $L = (x_1 + 3x_2) \rightarrow \max;$
$x_1 + x_2 \geq 3,$
$6x_1 + x_2 \leq 42,$
$2x_1 - 3x_2 \geq 6;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ | 6. | $L = (x_1 - 2x_2) \rightarrow \max;$
$5x_1 - 2x_2 \leq 3,$
$x_1 + x_2 \geq 1,$
$-3x_1 + x_2 \leq 3;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ |
| 7. | $L = (8x_1 + 2x_2) \rightarrow \max;$
$x_1 + -4x_2 \leq 4,$
$-4x_1 + x_2 \leq 4,$
$x_1 + x_2 \leq 6;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ | 8. | $L = (2x_1 - 3x_2) \rightarrow \min;$
$5x_1 + 2x_2 \geq 10,$
$x_1 + 3x_2 \leq 12;$
$x_1, x_2 \geq 0.$ |
| 9. | $L = (5x_1 + 4x_2) \rightarrow \max;$
$2x_1 + 3x_2 \leq 3,$
$x_1 + 3x_2 \leq 4,$
$-x_1 + x_2 \leq 5;$
$5x_1 + 4x_2 \leq 6,$
$x_1, x_2 \geq 0.$ | 10. | $L = (2x_1 + 3x_2) \rightarrow \max;$
$x_1 + 5x_2 \geq 16,$
$3x_1 + 2x_2 \geq 12,$
$2x_1 + 4x_2 \geq 16;$
$x_1 \geq 1,$
$x_2 \geq 0.$ |

Самостійна робота №2

Розв'язати задачі транспортного типу 1-10. Знайти опорний та оптимальний плани перевезень вантажу.

$$1. \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \\ b_j = (140 \quad 130 \quad 90 \quad 140)$$

$$2. \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix} \\ b_j = (40 \quad 30 \quad 35 \quad 15)$$

$$3. \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix} \\ b_j = (40 \quad 45 \quad 30 \quad 50)$$

$$4. \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} \\ b_j = (30 \quad 25 \quad 18 \quad 20)$$

$$5. \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 80 \\ 65 \\ 70 \end{pmatrix} \\ b_j = (40 \quad 60 \quad 70 \quad 25)$$

$$6. \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 40 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix} \\ b_j = (15 \quad 40 \quad 30 \quad 25)$$

$$7. \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix} \\ b_j = (30 \quad 25 \quad 35 \quad 20)$$

$$8. \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} \\ b_j = (30 \quad 80 \quad 70 \quad 35 \quad 40)$$

$$9. \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 & 2 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 130 \\ 90 \\ 100 \\ 140 \end{pmatrix} \\ b_j = (110 \quad 50 \quad 30 \quad 80 \quad 115 \quad 90)$$

$$10. \quad C = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 9 & 7 \\ 30 & 4 & 1 & 55 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} 68 \\ 55 \\ 40 \end{pmatrix} \\ b_j = (20 \quad 38 \quad 40 \quad 50)$$

Самостійна робота №3

ТЕМАТИКА ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ №3

№ теми	Завдання	Література
1.	Побудова прикладів оптимізаційних задач.	[1, 3, 6-7, 9, 11]
2.	Аналіз методів одновимірної оптимізації	[1, 2, 3]
3.	Порівняння чисельних методів безумовної оптимізації.	[4, 6, 7, 11]
4.	Вивчення можливостей застосування методів нелінійного та дискретного програмування	[1, 5, 8]
5.	Побудова моделей економічних та технологічних процесів	[1, 2, 3, 6]
6.	Аналіз практичних задач, які описуються потоками у мережах	[1, 4, 6, 11]

Рекомендована література

1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В. Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
2. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1975. – 228 с.
3. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
4. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136 с.
5. Ляшенко И.Н. и др. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
6. Воробьев Н.Н. Теория игр. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
7. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
8. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наукова думка, 1988. – 472 с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 1985, т.1 – 479 с.
10. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 553 с.
11. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.