Из сопоставления формул (1) и (2) можно вывести следующее правило для запоминания: двойное векторное произведение равно произведению среднего вектора на скалярное произведение двух других, минус крайний вектор скобки, умноженный на скалярное произведение двух других или говорят $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ равно «б а ц» минус «ц а б».

При круговой перестановке векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формула (1) приводит к трем разным векторам:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\vec{c}\right);$$

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{c}\right);$$

$$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right).$$

Складывая вместе эти три равенства, получим тождество

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=0.$$

Одно из применений формулы (2) состоит в выводе разложения данного вектора $\vec{b}$, на две компоненты, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к заданному вектору $\vec{a}$. В самом деле, положив в формуле (2) $\vec{c}=\vec{a}$, найдем:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right).$$

Решая это уравнение относительно $\vec{b}$, получим:

$$\vec{b}=\frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)}{\vec{a}^2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{\vec{a}^2}\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right). \qquad (3)$$

Первый из слагаемых векторов правой части, очевидно, параллелен вектору $\vec{a}$, а второй перпендикулярен к нему. Формула (3) для разложения упрощается, если $\vec{a}$ есть единичный вектор. Тогда $\vec{a}^2=1$ и формула (3) примет вид:

$$\vec{b}=\left(\vec{a}\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right).$$

Рассмотрим следующий пример: показать, что если $\vec{a}\perp\vec{b}$ то

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\right)=\vec{a}^4\cdot\vec{b}.$$

По формуле (2) имеем

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\vec{a}\vec{b}\right)-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{a}\right)=-\vec{b}\cdot\vec{a}^2$$

т.к. $\vec{a}\vec{b}=0(\vec{a}\perp\vec{b})$.

Умножая векторно слева на $\vec{a}$, получим:

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)=\vec{a}\times\left(-\vec{b}\cdot\vec{a}^2\right)=-\vec{a}^2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}^2\left(\vec{b}\times\vec{a}\right).$$

Повторяя ту же операцию, найдем:

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\right)=\vec{a}\times\left(\vec{a}^2\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right)=\vec{a}^2\cdot\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right)=$$

$$=\vec{a}^2\cdot\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right)=\vec{a}^2\cdot\left(\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)\right)=\vec{a}^2\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}^2=\vec{a}^4\cdot\vec{b},$$

что и требовалось.

Таким образом, я познакомился с двумя случаями произведений трех векторов в трехмерном пространстве: скалярно-векторное (в результате получаем число) и двойное векторное произведение (в результате получаем вектор).

Список литературы

1. Кочин Н.Е. Введение в векторный и тензорный анализ.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.
3. Высшая математика для технических университетов. Линейная алгебра: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов.

МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Савченко Ю.М., Кравченко И.Ю., Цой А.Ю., Агишева Д.К.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru, e-mail: mathemat@volpi.ru

Метод искусственного базиса применяется к решению задач линейного программирования в общем случае, когда система ограничений не имеет предпочитаемого вида. Рассмотрим следующий пример.

Задача о диете. Симпатичная девушка узнала из дамского журнала, что для того чтобы волосы стали более шелковистыми, организм должен получать ежедневно не менее 40 г питательного вещества А, не менее 4 г питательного вещества Б и не менее 30 г питательного вещества В. Девушка знает, что в 1 кг яблок содержится 10 г вещества Б и 50 г вещества В, а в 100 г огурцов содержится 40 г вещества А и по 20 г веществ Б и В. Цена яблок – 60 руб. за 1 кг, цена огурцов – 50 руб. за 1 кг. Требуется помочь девушке составить рацион, помогающий увеличить шелковистость волос и при этом имеющий наименьшую стоимость.

Решение. Обозначим x_1 и x_2 массу приобретаемых девушкой яблок и огурцов, тогда общее количество получаемого в рационе питательного вещества А будет равно $40x_2$ (г), количество вещества Б в рационе составит $10x_1 + 20x_2$ (г), а количество вещества В составит $50x_1 + 20x_2$ (г). При этом общая стоимость приобретаемых продуктов составит $60x_1 + 50x_2$ руб. Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования:

$$Z=60x_1+50x_2\to\min;$$

$$\begin{cases}40x_2\ge 40,\\ 10x_1+20x_2\ge 4,\\ 50x_1+20x_2\ge 30,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Для превращения системы ограничений в систему уравнений необходимо ввести балансовые неизвестные x_3, x_4 и x_5:

$$Z=60x_1+50x_2\to\min;$$

$$\begin{cases}40x_2-x_3=40,\\ 10x_1+20x_2-x_4=4,\\ 50x_1+20x_2-x_5=30.\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4,5.$$

Вновь введённые переменные x_3, x_4 и x_5 нельзя считать базисными, поскольку они соответствуют базисному решению с отрицательными компонентами.

Поэтому введём искусственные базисные неизвестные t_1, t_2, t_3 ($M >> 1$) и рассмотрим задачу:

$$Z = 60x_1 + 50x_2 + Mt_1 + Mt_2 + Mt_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 40x_2 - x_3 \quad + t_1 = 40, \\ 10x_1 + 20x_2 \quad - x_4 \quad + t_2 = 4, \\ 50x_1 + 20x_2 \quad - x_5 \quad + t_3 = 30. \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$.

Далее процесс решения проведём в симплексной таблице.

c_j / c_i	БП	60	50	0	0	0	M	M	M	Z	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b	
M	t_1	0	40	–1	0	0	1	0	0	40	1
M	t_2	10	20	0	–1	0	0	1	0	4	0,2
M	t_3	50	20	0	0	–1	0	0	1	30	1,5
$\Delta_j \leq 0$		60*M*–60	80*M*–50	–*M*	–*M*	–*M*	0	0	0	74*M*	Критерий на минимум не выполнен

M	t_1	–20	0	–1	2	0	1		0	32	—
50	x_2	1/2	1	0	–1/20	0	0		0	1/5	2/5
M	t_2	40	0	0	1	–1	0		1	26	13/20
$\Delta_j \leq 0$		20*M*–35	0	–*M*	3*M*–2,5	–*M*	0		0	58*M* + 10	Критерий на минимум не выполнен

c_j / c_i	БП	60	50	0	0	0	M	M	M	Z	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b	
M	t_1	0	40	–1	0	0	1		0	40	—
60	x_1	1	2	0	–1/10	0	0		0	2/5	—
M	t_2	0	–80	0	5	–1	0		1	10	2
$\Delta_j \leq 0$		0	70–40*M*	–*M*	5*M*–6	–*M*	0		0	50*M* + 24	Критерий на минимум не выполнен

c_j / c_i	БП	60	50	0	0	0	M	M	M	Z	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b	
M	t_1	0	40	–1	0	0	1			40	1
60	x_1	1	2/5	0	0	–1/50	0			3/5	3/2
0	x_4	0	–16	0	1	–1/5	0			2	—
$\Delta_j \leq 0$		0	40*M*–26	–*M*	0	-6/5	0			40*M* + 36	Критерий на минимум не выполнен

c_j / c_i	БП	60	50	0	0	0	M	M	M	Z	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b	
50	x_2	0	1	–1/40	0	0				1	
60	x_1	1	0	1/100	0	–1/50				1/5	
0	x_4	0	0	–2/5	1	–1/5				18	
$\Delta_j \leq 0$		0	0	–13/20	0	–6/5				62	Критерий на минимум выполнен

В пятой симплексной таблице среди Δ_j нет ни одного положительного числа. Поэтому базисное решение $x_1 = 1/5 = 0,2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 18$, $x_5 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$ является оптимальным. Таким образом, оптимальный рацион состоит из 200 г яблок и 1 кг огурцов.

Список литературы

1. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.: ил.

2. Математическая статистика: учебное пособие / Д.К. Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 2. – С. 122-123.

3. Линейное программирование: учебное пособие / Д.К. Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная // Успехи современного естествознания. – 2010, № 9. – С. 61-62.

4. Мягков М.М., Гафуров Т.Д., Агишева Д.К. Анализ использования ресурсов в оптимальном плане // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4 – С. 51-51.

5. Гусева Д.Р., Перова Т.Н., Платонова Е.А., Агишева Д.К. Графический анализ устойчивости // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4 – С. 46-47.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОТОБРАЖЕНИИ ОБЛАСТЕЙ

Светличная В.Б., Воронин А.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru, e-mail: toliktk@mail.ru

Понятие конформного отображения

Теория и практика конформных отображений имеет широкое применение в различных областях: в теории потенциала, в задачах гидродинамики и электростатики, теории упругости.

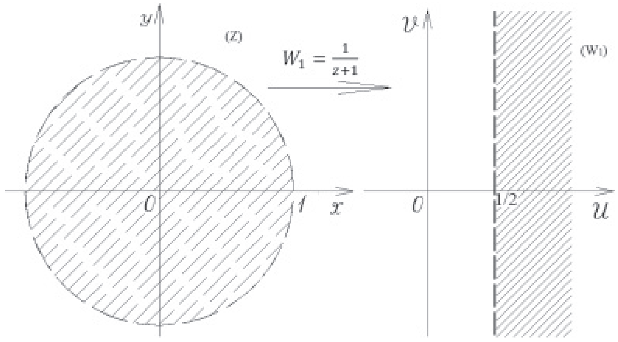
Во многих случаях возникает проблема сведения задачи, решаемой в некоторой заданной области, к решению ее в другой области. Это – проблема нахождения отображения областей.

Для плоских областей такое отображение

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

может отображаться в виде $w = f(z)$, $u = \mathrm{Re} f(z)$, $v = \mathrm{Im} f(z)$, то есть сводится к нахождению соответствующей аналитической функции.

Покажем на примере: найдем дробно-линейную функцию, отображающую круг единичного радиуса с центром в начале координат на верхнюю полуплоскость. То есть требуется найти отображение области D:$|z| < 1$ на область G:Im $z > 0$. Границей области D является окрестность $|z| = 1$. Ее образ – прямая. Из теории: окружности и прямые, проходящей через особую точку $z = -d/c$ дробно-линейной функции $W = \dfrac{az+b}{cz+b}$, отображаются в прямые. Поэтому искомая функция должна иметь особую точку одну из точек окружности $|z| = 1$.



На первом этапе «распрямили» окружность, то есть подберем функцию, переводящую одну из точек окружности в бесконечно удаленную точку.

$$W_1 = \frac{1}{z+1},$$

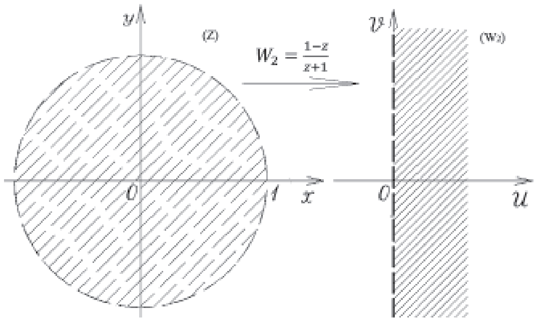
где $W_1(-1) = \infty$. Найдем уравнение прямой, в которую переходит $|z| = 1$ при отображении $W_1 = \dfrac{1}{z+1}$.

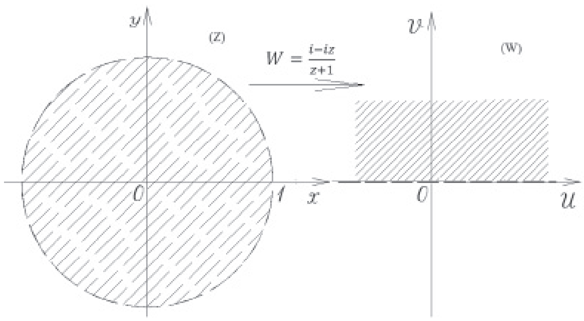
Тогда

$$z = \frac{1-W_1}{W}, \quad \left|\frac{1-W_1}{W_1}\right| = 1, \quad |1-W_1| = |W_1|.$$

Последнее уравнение задает прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему точки $W_1 = 1$ и $W_1 = 0$, через его середину, то есть $\mathrm{Re}W_1 = 1/2$.

Образом области D будет G: $\mathrm{Re}W_1 > 1/2$.





Вторым этапом является смещение (сдвиг) влево на 1/2, то есть линейное отображение $W_2 = W_1 = 1/2$. Образом $\mathrm{Re}W_1 = 1/2$ будет $\mathrm{Re}W_2 = 0$.

$$W_2 = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \text{ или } W_2 = \frac{1-z}{z+1}.$$

При отображении W_2 образом области D является правая полуплоскость $\mathrm{Re}W_2 > 0$.

На третьем этапе осуществляется поворот в плоскости W_2 на $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, то есть

$$W = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot W_2 = i \cdot W_2, \quad W = \frac{i - iz}{z+1}.$$

Список литературы

1. О взаимосвязи математики и сопротивления материалов как учебных дисциплин технического вуза / В.Б. Светличная, В.И. Соколов, В.Н. Тышкевич. – Волгоградский государственный технический университет, 2008. – Т.5. – № 5. – С. 85–87

2. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001. – С. 115–116.