

Тема: Двоїстість задач лінійного програмування. Аналіз стійкості двоїстих оцінок

План:

- 1.1 Поняття двоїстості. Приклад двоїстих задач ЛП.
- 1.2 Правила побудови двоїстих задач.
- 1.3 Симетричні двоїсті задачі.
- 1.4 Економічна інтерпретація симетричних двоїстих задач.
- 1.5 Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст.
- 1.6 Аналіз стійкості двоїстих оцінок.

1.1 Поняття двоїстості. Приклад двоїстих задач ЛП.

У даній лекції розглядається одне з центральних питань лінійного програмування – *теорія двоїстості*^{*}.

Основною ідеєю теорії двоїстості є те, що кожній задачі лінійного програмування (ЗЛП) – так званій *вихідній* або *прямій задачі* (ПЗ) – може бути поставлена у відповідність інша ЗЛП – так звана *двоїста задача* (ДЗ) по відношенню до прямої задачі.

Сумісний розгляд таких задач, становлячих єдину подвійну пару, виявляється досить ефективним засобом при дослідженні загальних властивостей оптимального розв'язку задач ЛП та перевірці оптимальності допустимого розв'язку. Крім того, зацікавленість у визначенні оптимального розв'язку ПЗ шляхом розв'язання ДЗ обумовлена тим, що обчислення при розв'язанні ДЗ можуть виявитися менш складними, оскільки трудомісткість обчислень при розв'язанні ЗЛП в більшій мірі залежить від числа обмежень, а не від кількості змінних.

^{*} **Поняття двоїстості** служить ілюстрацією одного із законів діалектики (закону єдності та боротьби протилежностей) та застосовується в деяких розділах математики щоразу, коли кожному вірному твердженню цього розділу відповідає двоїсте твердження, яке може бути отримано з першого шляхом заміни вхідних в нього понять на інші, так звані двоїсті поняття. Найпростішим прикладом прояву двоїстості в математиці є існування прямої та зворотної теорем. Теоремою, зворотною до даної, називається така теорема, умовою якої є висновок даної теореми, а висновком – умова даної теореми. Легко помітити, що якщо виходити з другої теореми, названої нами зворотної та вважати її прямою теоремою, то теорема названа прямою, виявиться зворотною. Тому часто говорять не про пряму та зворотну теорії, а про дві взаємно зворотні теореми. Взаємно обернені або двоїсті одна одній теореми, істинність яких доведена, грають дуже велику роль в математичних дослідженнях. Для вивчення будь-яких об'єктів часто дуже важливо знати не тільки властивості даного об'єкта, а й те, які з цих властивостей можна прийняти за основні властивості, які цілком визначають даний об'єкт. Ці властивості виділяються за допомогою доказу зворотних теорем. Отже, наявність двоїстості дозволяє виділити певну сутність об'єкта (основна властивість), що є найбільш важливим для розуміння цінності двоїстих тверджень.

Також прикладами двоїстих понять в математиці служать такі поняття як додатні та від'ємні числа, додавання та віднімання і т.д.

Приклад двоїстих задач ЛП

В якості прикладу двоїстих задач розглянемо наступну задачу.

Приклад 1.1. Нехай деяке підприємство випускає продукцію чотирьох видів: P_1, P_2, P_3, P_4 , використовуючи для її виробництва три види ресурсів S_1, S_2, S_3 у кількості відповідно 260, 400, 240 одиниць. Витрата кожного ресурсу на одиницю виробленої продукції та вартість одиниці кожного виду продукції задані таблицею (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Вид ресурсу	Обсяг ресурсу	Норми витрат ресурсів			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	260	2	1	3	1
S_2	400	1	2	1	2
S_3	240	2	0	1	2
Вартість одиниці продукції, грн.		1	4	2	5

Необхідно визначити план випуску продукції, що забезпечує фірмі отримання максимального прибутку від реалізації вироблюваної продукції та оцінити кожен з видів ресурсів. При цьому потрібно дотримуватись наступних вимог до оцінювання: оцінки, що приписуються кожному ресурсу, мають бути такими, щоб оцінка всіх ресурсів була мінімальною, а сумарна оцінка ресурсів, використовуваних на виробництво одиниці кожного виду продукції – не менше ціни одиниці продукції даного виду.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель прямої задачі. Для цього визначимо змінні задачі та введемо наступні позначення: x_j ($j = \overline{1,4}$) – кількість вироблюваної на підприємстві продукції j -го виду; $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – план випуску продукції.

Тоді математична модель задачі знаходження оптимального плану, який максимізує прибуток від реалізації продукції, подається у вигляді:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 400, \\ 2x_1 + \quad \quad x_3 + 2x_4 \leq 240, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

Для проведення оцінювання кожного з видів ресурсів складемо двоїсту задачу і введемо деякі оцінки ресурсів y_i ($i = \overline{1,3}$), кількість яких співпадає із кількістю розглядуваних в задачі ресурсів. Поставимо введені оцінки ресурсів у відповідність самим ресурсам: першому ресурсу S_1 поставимо у відповідність оцінку y_1 , другому ресурсу S_2 – оцінку y_2 , а третьому ресурсу S_3 – оцінку y_3 .

Використовуючи дані табл. 7.1, отримаємо загальну оцінку ресурсу, використаного на виробництво продукції, у вигляді

$$W = 260y_1 + 400y_2 + 240y_3,$$

причому, базуючись на вимогах змістовної постановки задачі, отриману загальну оцінку необхідно мінімізувати. Звідки отримуємо, що

$$W = 260y_1 + 400y_2 + 240y_3 \rightarrow \min.$$

Складемо систему обмежень двоїстої задачі, виходячи з наступних міркувань. Так, відносно продукції P_1 маємо наступне:

– сумарна оцінка ресурсу, необхідного для виробництва одиниці продукції P_1 , дорівнює

$$2y_1 + y_2 + 2y_3;$$

– сумарна оцінка ресурсу (за умовою задачі) має бути не менша за вартість одиниці продукції P_1 , тобто

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1.$$

З аналогічних міркувань отримуємо ще три нерівності системи обмежень:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 4, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5. \end{cases}$$

Природно припустити, що оцінки y_1, y_2, y_3 є невід'ємними, тобто

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Отже, поєднуючи отримані співвідношення, випишемо математичну модель задачі

$$\begin{aligned} W = 260y_1 + 400y_2 + 240y_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ y_1 + 2y_2 \geq 4, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5, \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}), \end{cases} \end{aligned}$$

яку називають *двоїстою* до задачі оптимального випуску продукції з наявних ресурсів.

В результаті розв'язання отриманої двоїстої задачі знаходиться оптимальний розв'язок (план) $Y^*(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ задачі, компоненти y_1^*, y_2^*, y_3^* якого називають *оптимальними* або *двоїстими оцінками ресурсів*.

Отже, на наведеному прикладі представлено пряму та побудовану двоїсту задачі, виходячи із змістовної постановки вихідної задачі. Надалі буде розглянуто математичні правила побудови двоїстої задачі до даної прямої, і, таким чином, надано методику переходу від однієї задачі до іншої.

1.2 Правила побудови двоїстих задач

Розглянемо модель ЗЛП в загальній формі, в якій обмеження утворюють змішану систему, що складається з нерівностей і рівностей, а змінні поділяються на вільні та невід'ємні, тобто наступну **пряму (вихідну) ЗЛП**:

$$Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

при обмеженнях-нерівностях

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = 1, \dots, k),$$

при обмеженнях-рівностях

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = k + 1, \dots, n),$$

при невід'ємних змінних

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, t),$$

при вільних змінних

$$x_j \leq 0 \quad (j = t + 1, \dots, n).$$

Двоїстою до даної прямої (вихідної) ЗЛП називають задачу виду:

$$W = b_1y_1 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$$

при невід'ємних змінних

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k),$$

при вільних змінних

$$y_i \leq 0 \quad (i = k + 1, \dots, m),$$

при обмеженнях-нерівностях

$$a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j \quad (j = 1, \dots, t),$$

при обмеженнях-рівностях

$$a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m = c_j \quad (j = t + 1, \dots, n),$$

Сформулюємо **правила, за якими отримують двоїсту задачу до даної прямої задачі**:

1. Кількість змінних двоїстої задачі дорівнює m – числу обмежень вихідної задачі, а число обмежень двоїстої задачі дорівнює n – кількості змінних вихідної задачі.
2. Вільні члени b_i ($i = \overline{1, m}$) вихідної задачі є коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі, а коефіцієнти c_j ($j = \overline{1, n}$) цільової функції вихідної задачі стають правими частинами системи обмежень двоїстої задачі.
3. Матрицею коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі слугує матриця A^T , яка отримується шляхом транспонування матриці A коефіцієнтів системи обмежень вихідної задачі.

4. Кожному обмеженню-нерівності

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = \overline{1, k})$$

вихідної задачі відповідає невід'ємна змінна

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k})$$

двоїстої задачі, а кожному обмеженню-рівності

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = \overline{k+1, m})$$

вихідної задачі відповідає вільна змінна

$$y_i \leq 0 \quad (i = \overline{k+1, m})$$

двоїстої задачі.

5. Кожній невід'ємній змінній $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, t})$ прямої задачі відповідає обмеження-нерівність

$$a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j \quad (j = \overline{1, t})$$

двоїстої задачі з тим самим знаком нерівності, а кожній вільній змінній $x_j \leq 0 \quad (j = \overline{t+1, n})$ відповідає обмеження-рівність

$$a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m = c_j \quad (j = \overline{t+1, n})$$

двоїстої задачі.

6. Максимізація цільової функції вихідної задачі замінюється мінімізацією цільової функції двоїстої задачі.

Паралельний запис обох задач виглядає наступним чином:

Пряма (вихідна) задача	Двоїста задача
$Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$ $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = \overline{1, k})$ $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = \overline{k+1, m})$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, t})$ $x_j \leq 0 \quad (j = \overline{t+1, n})$	$W = b_1y_1 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$ $y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k})$ $y_i \leq 0 \quad (i = \overline{k+1, m})$ $a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j \quad (j = \overline{1, t})$ $a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m = c_j \quad (j = \overline{t+1, n})$

Неважко перевірити, що вихідну задачу можна розглядати як двоїсту по відношенню до своєї двоїстої, тобто обидві задачі є взаємнодвоїстими. Тому прийнято говорити про пару двоїстих (спряжених) задач.

1.3. Симетричні двоїсті задачі

Нехай модель вихідної ЗЛП задана в стандартній формі:

$$\begin{aligned}
 Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max, \\
 \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Складемо модель двоїстої ЗЛП, використовуючи правила, викладені в п.1.2.

Модель двоїстої задачі набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 W &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min, \\
 \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases} \\
 y_i &\geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Якщо ввести в розгляд матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$b = (b_1, \dots, b_m)^T, \quad c = (c_1, \dots, c_n),$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad Y = (y_1, \dots, y_m),$$

то пара симетричних двоїстих задач в матричній формі набуде вигляду:

Пряма задача

Двоїста задача

$$AX \leq b,$$

$$Y \geq 0,$$

$$X \geq 0,$$

$$YA \geq c,$$

$$Z = cX \rightarrow \max.$$

$$W = Yb \rightarrow \min.$$

Приклад 1.2. Скласти двоїсту задачу до наступної ЗЛП:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 \leq 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

та показати взаємоспряженість отриманої пари двоїстих задач.

Розв'язання

Перш за все, приведемо модель до вигляду, для якого викладені правила побудови двоїстих задач.

Перетворимо третє обмеження, помноживши обидві частини нерівності на «-1» та змінивши знак нерівності на протилежний:

$$-6x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -1.$$

В результаті вихідна задача набуде вигляду:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 \leq 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ -6x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Згідно з правилами двоїста задача буде містити три змінні (вони записані праворуч від обмежень), причому $y_1 \geq 0, y_3 \geq 0$, оскільки відповідають обмеженням-нерівностям вихідної задачі, а y_2 є вільною змінною: $y_2 \leq 0$ (y_2 відповідає обмеженню-рівності вихідної задачі).

Матрицею системи обмежень двоїстої задачі є матриця, транспонована до вихідної:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі стануть коефіцієнти (1, 2, -3, 1) цільової функції вихідної задачі.

Кожній невід'ємній змінній вихідної задачі відповідає обмеження-нерівність того ж сенсу:

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0 &\Rightarrow y_1 + 2y_2 - 6y_3 \geq 1, \\ x_2 \geq 0 &\Rightarrow -3y_1 - 7y_2 - y_3 \geq 2, \\ x_3 \geq 0 &\Rightarrow 3y_2 + 4y_3 \geq -3. \end{aligned}$$

Вільній змінній x_4 відповідає обмеження-рівність:

$$x_4 \leq 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 1.$$

Коефіцієнтами цільової функції W двоїстої задачі, яка (згідно з правилами) мінімізується, стають вільні члени системи обмежень вихідної задачі.

Отже, математична модель двоїстої задачі набуде вигляду:

$$\begin{aligned} W &= 5y_1 + 7y_2 - y_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 - 6y_3 \geq 1, \\ -3y_1 - 7y_2 - y_3 \geq 2, \\ 3y_2 + 4y_3 \geq -3, \\ y_1 - y_2 = 1, \\ y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Далі покажемо взаємоспряженість отриманої пари двоїстих задач, тобто покажемо, що задача, двоїста до (1.4), збігається з вихідною (1.3).

Для цього, перш за все, перетворимо модель (1.4) до вигляду:

$$\begin{aligned} W_1 &= -5y_1 - 7y_2 + y_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 6y_3 \leq -1, \\ 3y_1 + 7y_2 + y_3 \leq -2, \\ -3y_2 - 4y_3 \leq 3, \\ -y_1 + y_2 = -1, \\ y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

Згідно з правилами побудови двоїстих задач отримаємо модель двоїстої задачі:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_4 \geq -5, \\ -2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = -7, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{array}{ll} \text{оскільки} & y_1 \geq 0, \\ \text{оскільки} & y_2 = 0, \\ \text{оскільки} & y_3 \geq 0, \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Помноживши обидві частини перших двох обмежень на «-1» та ввівши функцію $Z = -Z_1$, отримаємо еквівалентну ЗЛП:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 \leq 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

яка збігається з вихідною.

Отже, показана взаємоспряженість пари двоїстих задач, що дозволяє вважати одну з них (будь-яку) вихідною (прямою) задачею, а другу – двоїстою до неї.

Приклад 1.3. Для задачі

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

скласти двоїсту та знайти розв'язки обох задач.

Розв'язання

Двоїстою є задача:

$$\begin{aligned} W &= 10y_1 + 11y_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} y_1 - y_2 \geq 2, \\ y_1 + 2y_2 \geq 6, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Як у вихідній, так і в двоїстій задачі число невідомих дорівнює 2. Отже, їх розв'язки можна знайти графічним методом.

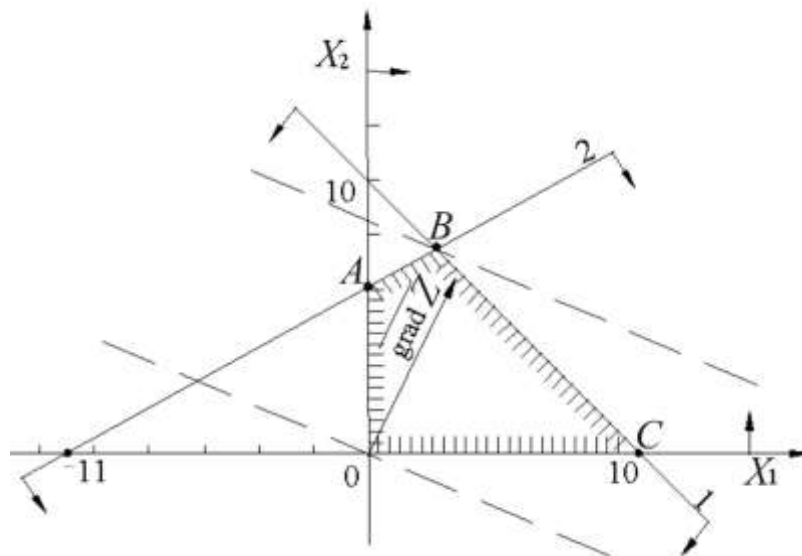


Рисунок 1.1 – Значення $Z_{\max}$ досягається в точці B

Як видно з рис. 1.1, максимальне значення цільова функція вихідної задачі приймає в точці B. Отже, $X^* = (3, 7)$ є оптимальним планом (розв'язком), при якому $Z_{\max} = 48$.

У двоїстій задачі (рис. 1.2) область допустимих розв'язків (ОДР) є необмеженою. Мінімальне значення цільова функція двоїстої задачі приймає в точці E, тобто $Y^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$ та $W_{\min} = 48$.

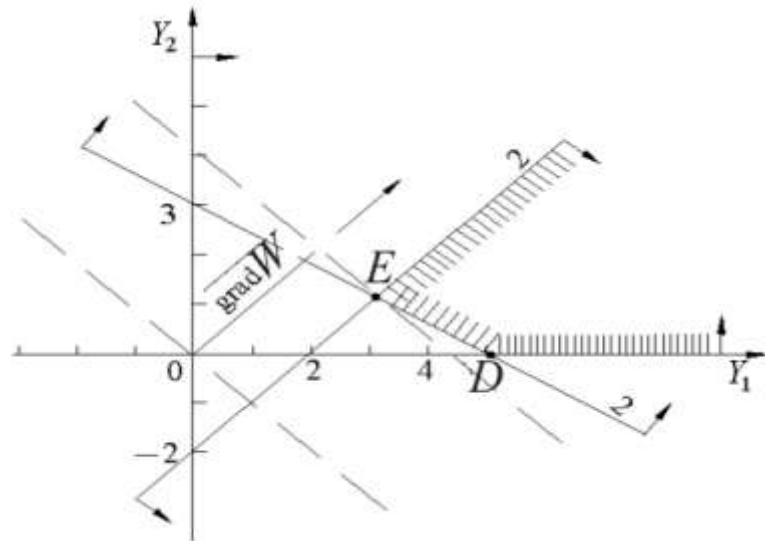


Рисунок 1.2 – Значення $W_{\min}$ досягається в точці E

Отже, значення цільових функцій прямої та двоїстої задач при їх оптимальних планах є рівними між собою.

Далі буде показано, що для будь-якої пари двоїстих задач, що мають оптимальні розв'язки, екстремальні значення цільових функцій збігаються ($Z_{\max} = W_{\min}$).

1.4 Економічна інтерпретація симетричних двоїстих задач

Розглянемо економічну інтерпретацію поняття двоїстості на прикладі задачі оптимального використання сировини.

Нехай на підприємстві вирішили раціонально використовувати відходи основного виробництва. У плановому періоді є відходи сировини m видів в кількості (обсягах) b_i ($i = \overline{1, m}$) одиниць. З огляду на спеціалізацію підприємства, з цих відходів можна налагодити випуск n видів неосновної продукції.

Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через a_{ij} норму витрат сировини i -го виду на одиницю продукції j -го типу ($j = \overline{1, n}$), через c_j – ціну реалізації одиниці j -ої продукції (при цьому вважаємо, що реалізація забезпечена). В якості невідомих величин задачі візьмемо змінні x_j , які характеризують обсяги випуску j -ої продукції, що забезпечують підприємству максимум прибутку.

Тоді математична модель задачі має вигляд

$$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при умовах

$$W(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

при умовах

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i &\geq c_j & (j = \overline{1, n}), \\ y_i &\geq 0 & (i = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Перша та друга задачі називаються **парою взаємодвоїстих ЗЛП**. Якщо в якості прямої задачі прийняти задачу про визначення оптимальних оцінок на ресурси, то двоїстою до неї буде задача про визначення оптимального плану випуску продукції.

Оскільки ці задачі записані в симетричній формі, то їх прийнято називати **парою симетричних двоїстих задач**^{*}.

1.5. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Приймемо до вивчення зв'язків між прямою та двоїстою задачами. Для визначеності розглянемо симетричну пару двоїстих задач та стосовно неї сформулюємо основні твердження теорії двоїстості.

Отже, нехай маємо пару двоїстих задач:

<i>Пряма задача</i> $Z = cX \rightarrow \max$ $\begin{cases} AX \leq b, \\ X \geq 0. \end{cases}$	<i>Двоїста задача</i> $W = Yb \rightarrow \min$ $\begin{cases} YA \geq c, \\ Y \geq 0. \end{cases}$
--	--

(1.5)

Кожна із задач двоїстої пари є самостійною ЗЛП та може бути розв'язана незалежно одна від одної. У той же час, розв'язавши одну з задач симплекс-методом, ми легко можемо знайти розв'язок двоїстої до неї задачі.

Існування залежності між розв'язками прямої та двоїстої задач характеризується сформульованими нижче лемами та теоремами двоїстості.

Лема 1 (про основну нерівність теорії двоїстості): Для будь-яких допустимих планів $X = (x_1, \dots, x_n)$ та $Y = (y_1, \dots, y_m)$ пари двоїстих ЗЛП є справедливою нерівність

$$cX \leq Yb. \quad (1.6)$$

^{*} Як відомо, двоїсті пари задач зазвичай поділяють на симетричні та несиметричні. При цьому в симетричній парі двоїстих задач обмеження прямої та двоїстої задач є відповідно нерівностями виду « $\leq$ » та « $\geq$ ». Отже, змінні обох задач можуть приймати тільки невід'ємні значення.

Доведення:

Оскільки X та Y – допустимі плани, то

$$AX \leq b \quad \text{та} \quad Y \geq 0,$$

звідки $YAX \leq Yb$.

Аналогічно з того, що $YA \geq c$ та $X \geq 0$, випливає, що $YAX \leq cX$.

Отже, маємо:

$$cX \leq YAX \leq Yb.$$

Лема доведена. Доведення для несиметричної пари двоїстих задач проводиться аналогічно.

Нерівність $cX \leq Yb$ називають **основною нерівністю теорії двоїстості**.

Її **економічний зміст**, наприклад, для виробничої задачі випуску продукції, полягає в тому, що при будь-якому допустимому плані виробництва X загальна вартість $Z(X)$ виготовленої продукції є не більшою за сумарну оцінку ресурсів $W(Y)$, яка відповідає будь-якому допустимому вектору оцінок Y .

Лема 2. (Критерій оптимальності Канторовича): Якщо для деяких допустимих планів X^* та Y^* пари двоїстих задач виконується умова

$$cX^* = Y^*b, \tag{1.7}$$

то X^* та Y^* є оптимальними планами відповідної пари двоїстих задач.

Доведення:

Нехай X^* та Y^* – допустимі плани пари двоїстих задач (1.5). Необхідно довести, що якщо для них виконується умова (1.7), то ці плани є оптимальними. (Нагадаємо, що план X^* буде оптимальним тоді і тільки тоді, коли $cX \leq cX^*$ для будь-якого допустимого плану X прямої задачі.)

Розглянемо довільний допустимий план X прямої задачі. Тоді, відповідно до леми 1 та умови (1.7), маємо:

$$cX \leq Y^*b = cX^*,$$

звідки $cX \leq cX^*$, тобто X^* – оптимальний план прямої задачі.

Лема доведена. Аналогічно доводиться оптимальність плану Y^* .

Лема 2 є **критерієм оптимальності** для пари двоїстих ЗЛП. Згідно цієї леми, якщо серед допустимих планів пари двоїстих задач знайдуться плани X^* та Y^* , для яких

$$cX^* = Y^*b,$$

то X^* та Y^* – оптимальні плани пари двоїстих задач.

Приклад 1.4. Для пари двоїстих задач

$$\begin{array}{l|l} Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, & W = 4y_1 + 3y_2 + 3,5y_3 \rightarrow \min, \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 3,5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 \geq 3, \\ y_1 + y_3 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \end{array} \right. \end{array}$$

$X = (3,1)^T$ та $Y = (2,1,0)$ є допустимими планами, для яких $Z(X) = W(Y) = 11$. Тоді, згідно леми 2, допустимі плани X та Y є оптимальними планами пари двоїстих задач.

Економічна інтерпретація леми 2: план виробництва X та вектор оцінки ресурсів Y є оптимальними, якщо вартість всієї виробленої продукції і сумарна оцінка ресурсів збігаються.

Теорема 1 (Мала теорема двоїстості або теорема існування): Щоб пряма та двоїста ЗЛП мали оптимальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб існували допустимі розв'язки для кожної задачі.

Доведення:

Необхідність – тривіальна: Нехай X^* та Y^* – оптимальні розв'язки пари взаємодвоїстих задач (1.5). Це означає, що системи обмежень задач сумісні та мають не пусті множини допустимих розв'язків (вони містять принаймні один допустимий розв'язок).

Достатність. Нехай кожна з пари двоїстих задач (1.5) має допустимий план. Покажемо, що вони мають оптимальний план. Нехай Y^* – допустимий розв'язок симетричної двоїстої задачі (1.5). Тоді для будь-якого допустимого плану X прямої задачі (1.5), згідно основної нерівності теорії двоїстості (1.6), отримаємо

$$cX \leq Y^*b.$$

Розв'язуючи пряму задачу (наприклад, симплекс-методом), отримуємо послідовність $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ опорних планів, для яких існує відповідна послідовність значень цільової функції. В силу одержаної нерівності ця послідовність є обмеженою зверху, звідки випливає, що в ній знайдеться найбільше значення цільової функції.

Теорема доведена.

Економічний зміст теореми 1: вартість виробленої продукції при будь-якому допустимому плані вихідної прямої задачі не перевищує сумарної оцінки ресурсів.

Теорема 2 (Перша основна теорема двоїстості): Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то й інша має оптимальний план, причому екстремальні значення цільових функцій є рівними:

$$Z_{\max} = W_{\min}.$$

Якщо одна з двоїстих задач є нерозв'язною внаслідок необмеженості цільової функції на множині допустимих планів, то система обмежень іншої задачі є суперечливою (друга задача не має розв'язку).

Якщо сукупність обмежень однієї з двоїстих задач є суперечливою, то або цільова функція іншої задачі є необмеженою на множині допустимих розв'язків, або система обмежень іншої задачі є також суперечливою.

Економічний зміст першої теореми двоїстості: якщо задача визначення оптимального плану, що максимізує випуск продукції, є розв'язуваною, то є розв'язуваною і задача визначення оцінок ресурсів. Причому вартість (ціна) випущеної продукції, отриманої при реалізації оптимального плану, збігається з сумарною оцінкою ресурсів. Збіг значень цільових функцій для відповідних планів пари двоїстих задач є достатнім, щоб ці плани були оптимальними. Оцінки в цьому випадку виступають як інструмент балансування витрат і результатів. Двоїсті оцінки володіють тією властивістю, що вони гарантують рентабельність оптимального плану, тобто рівність загальної оцінки продукції і ресурсів, та обумовлюють збитковість всякого іншого плану, відмінного від оптимального.

Двоїсті оцінки дозволяють зіставити та збалансувати витрати і результати виробництва.

На наступному прикладі покажемо практичну цінність наведених тут теоретичних тверджень.

Приклад 1.5. Маємо пару двоїстих задач:

Пряма задача	Двоїста задача
$Z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max,$	$W = 5y_1 + 2y_2 \rightarrow \min,$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 - y_2 \geq 3, \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 5, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{cases}$
Допустимий розв'язок:	Допустимий розв'язок:
$X = (3, 1)^T.$	$Y = (16/5, 0)^T.$
Значення цільової функції:	Значення цільової функції:
$Z = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 14.$	$W = 5 \cdot 16/5 + 2 \cdot 0 = 16.$

Цей приклад показує, що для розглянутих допустимих розв'язків значення цільової функції задачі (на відшукування максимуму) є меншим за значення цільової функції двоїстої задачі (на відшукування мінімуму), що відповідає твердженням леми 1:

$$Z(X) \leq W(Y). \quad (1.8)$$

Слід пам'ятати, що наведені тут допустимі розв'язки, знайдені методом проб. А лема стверджує, що умова (1.8) є справедливою для будь-яких відповідних допустимих розв'язків X та Y пари двоїстих задач.

Узагальнення даного матеріалу призводить до практичного **ВИСНОВКУ**:

Продуманий вибір допустимих планів прямої та двоїстої задач дозволяє оцінити оптимальне значення цільової функції ЗЛП. Ці плани визначають інтервал, в якому заключене оптимальне значення цільової функції.

Дійсно, якщо обраним допустимим планам пари двоїстих задач відповідають однакові значення цільових функцій, то ці плани є оптимальними відповідно до леми 2.

У розглянутому прикладі значення цільових функцій заключені в межах:

$$14 \leq (Z_{\max} = W_{\min}) \leq 16.$$

Оскільки цей інтервал є досить вузьким, можна вважати, що допустимі плани є близькими до оптимальних. Практична цінність отриманого результату очевидна, оскільки він може бути використаний для перевірки «якості» обраних допустимих планів.

За допомогою геометричної інтерпретації пари двоїстих задач проілюструємо першу теорему двоїстості. Повернемося до прикладу 1.5. Побудуємо множину допустимих розв'язків прямої задачі (див. рис. 1.3).

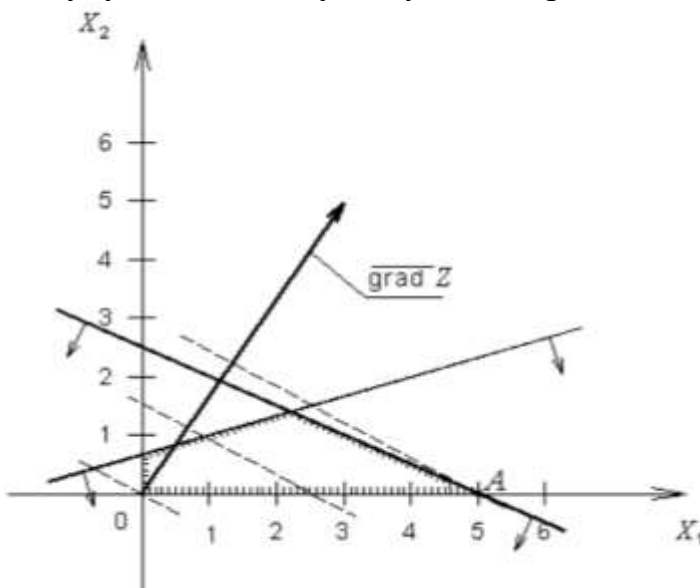


Рисунок 1.3 – Оптимальний розв'язок ПЗ досягається в точці A

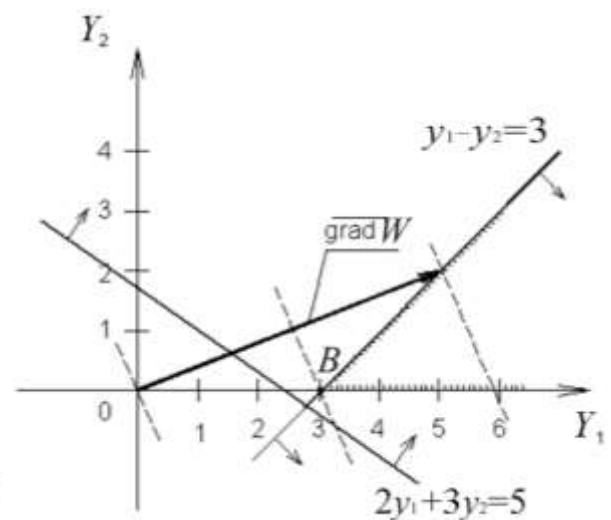


Рисунок 1.4 – Оптимальний розв'язок ДЗ досягається в точці B

Як видно з рис. 1.3, пряма задача має оптимальний розв'язок, який досягається в точці A . Отже, $X^* = (5, 0)^T$ є оптимальним планом прямої задачі, при якому $Z_{\max} = 15$.

За першою теоремою двоїстості тоді і двоїста задача є розв'язуваною, а екстремальні значення цільових функцій мають бути однаковими. Дійсно, мінімальне значення цільова функція двоїстої задачі приймає в точці B (рис. 1.4). Отже, $Y^* = (3, 0)$ та $W_{\min} = 15$.

Крім того, з рис. 1.3 та 1.4 легко побачити, що значення цільової функції Z прямої задачі при будь-якому допустимому плані є не більшою за 15, а значення цільової функції W двоїстої задачі при довільному її допустимому плані є не меншим за 15.

Приклад 1.6. Розглянемо приклад, який є ілюстрацією того факту, що якщо пряма задача не має оптимального плану внаслідок необмеженості цільової функції, то сукупність обмежень двоїстої задачі є суперечливою.

Пряма задача

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Двоїста задача

$$W = y_1 + 2y_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \geq 2, \\ y_1 - 2y_2 \geq 1, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$y_1 - 2y_2 \geq 1,$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Побудуємо множину допустимих розв'язків прямої задачі (див. рис. 1.5).

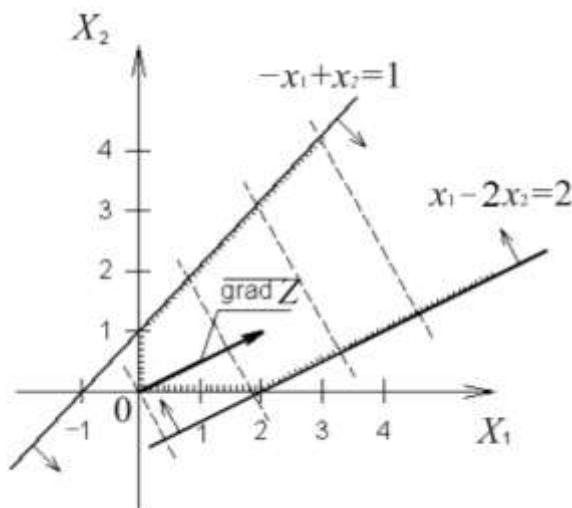


Рисунок 1.5 – Цільова функція прямої задачі є необмеженою

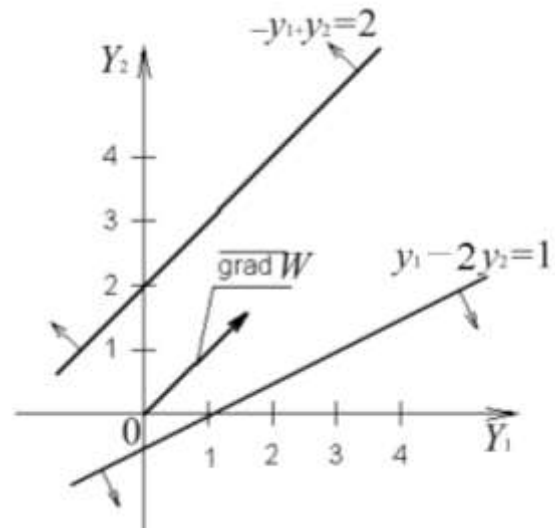


Рисунок 1.6 – Система обмежень двоїстої задачі є суперечливою

З рис. 1.5 видно, що пряма задача не має оптимального плану внаслідок необмеженості зверху її цільової функції. Двоїста задача (рис. 1.6) взагалі не має допустимих планів.

Теорема 3 (Друга теорема двоїстості або теорема про доповнюючу нежорсткість): Для того, щоб плани X^* та Y^* пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно й достатньо виконання умов:

$$1) \quad Y^* \cdot (b - AX^*) = 0;$$

$$2) \quad (Y^* A - c) \cdot X^* = 0.$$

Умови 1 та 2 називаються **умовами доповнюючої нежорсткості**.

Доведення:

Необхідність. Нехай X^* та Y^* – оптимальні плани пари двоїстих задач (1.5). Як було показано при доведенні леми 1, для будь-яких допустимих планів X та Y виконується співвідношення:

$$cX \leq YAX \leq Yb. \quad (1.9)$$

Отже, це співвідношення є справедливим і для оптимальних планів:

$$cX^* \leq Y^*AX^* \leq Y^*b. \quad (1.10)$$

На підставі першої теореми двоїстості для оптимальних планів X^* та Y^* є справедливою умова

$$cX^* = Y^*b, \quad (1.11)$$

та співвідношення (1.10) перетворюється у рівність

$$cX^* = Y^*AX^* = Y^*b,$$

звідки отримуємо умови доповнюючої нежорсткості.

Достатність. Нехай для будь-яких допустимих планів X^* та Y^* виконуються умови доповнюючої нежорсткості. Тоді з першої умови маємо:

$$Y^*b = Y^*AX^*,$$

а з другої:

$$Y^*AX^* = cX^*.$$

Таким чином, отримуємо

$$Y^*b = cX^*,$$

та, згідно до леми 2, X^* та Y^* – оптимальні плани пари двоїстих задач.

Що і потрібно було довести.

Отже, доведено теорему для пари двоїстих задач, заданих в стандартній формі. Теорема залишається справедливою для будь-якої пари двоїстих задач.

Запишемо умови доповнюючої нежорсткості в координатній формі:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* - b_i \right) = 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad (1.12)$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* - c_j \right) = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.13)$$

З цих умов випливає:

1. Якщо будь-яке (i -е) обмеження прямої задачі в її оптимальному плані X^* перетворюється в сувору нерівність, то відповідна (i -а) компонента y_i^* оптимального плану Y^* двоїстої задачі має дорівнювати нулю.

2. Якщо ж будь-яка (j -а) компонента x_j^* оптимального плану X^* прямої задачі є додатною, то відповідне (j -е) обмеження в двоїстій задачі її оптимальним планом має перетворитися в рівність.

Тобто:

$$\text{якщо } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i, \quad \text{то } y_i^* = 0;$$

$$\text{якщо } x_j^* > 0, \quad \text{то } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j.$$

Аналогічно:

$$\text{якщо } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j, \quad \text{то } x_j^* = 0;$$

$$\text{якщо } y_j^* > 0, \quad \text{то } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i.$$

Надамо **економічну інтерпретацію умовам доповнюючої нежорсткості**.

Згідно з умовою 1, якщо в оптимальній системі оцінок якийсь i -й ресурс отримає відмінну від нуля оцінку $y_i^* > 0$, то, відповідно до оптимального плану виробництва прямої задачі, цей ресурс, будучи дефіцитним, буде витраченим повністю

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i.$$

Якщо якийсь i -й ресурс витрачається не повністю (є надмірним), тобто

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i,$$

то його оцінка дорівнює нулю, $y_i^* = 0$.

*Звідси випливає, що оцінки оптимального плану – це **міра дефіцитності ресурсів**.*

Згідно з умовою 2, якщо деякий j -й продукт входить до оптимального плану виробництва ($x_j^* > 0$), то при оптимальній системі оцінок двоїстої задачі витрати ресурсів на його виготовлення збігаються з вартістю цього продукту, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j.$$

Якщо витрати ресурсів на випуск будь-якого j -го продукту перевищують його вартість, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j,$$

то цей продукт не виробляється, тобто $x_j^* = 0$.

Звідси **висновок**: Дефіцитний ресурс (повністю використаний у виробництві) має додатну оцінку, а ресурс недефіцитний (надлишковий) має нульову оцінку.

Для ілюстрації застосування другої теореми двоїстості при розгляді пари двоїстих задач розглянемо деякі приклади.

Приклад 1.7. Цегельний завод випускає цеглу двох марок (I та II). Для виробництва цегли застосовується глина трьох видів (A, B, C). За місячним планом завод повинен випустити 10 у.о. цегли марки I та 15 у.о. цегли марки II. У таблиці вказані витрати різних видів глини для виробництва цегли кожної марки та місячний запас глини.

Марка	Кількість глини, необхідної для виробництва 1 у.о. цегли виду		
	A	B	C
I	1	0	1
II	0	2	2
Запас глини	15	36	47

Скільки у.о. цегли різних марок повинен випустити завод понадпланово, щоб забезпечити найбільший прибуток, якщо відомо, що від реалізації 1 у.о. цегли I марки завод отримає прибуток, що дорівнює 4 у.о., а від реалізації цегли II марки – 7 у.о.?

Шляхом графічного аналізу даної задачі знайти розв'язок двоїстої до неї задачі та оцінити дефіцитність вихідних ресурсів.

Розв'язання.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 – кількість одиниць цегли марки I, випущених понадпланово, а через x_2 – марки II. Тоді випуск цегли марки I становить $(10+x_1)$ одиниць, марки II – $(15+x_2)$ одиниць, а прибуток, одержуваний від реалізації продукції, складе

$$4(x_1 + 10) + 7(x_2 + 15) \text{ у.о.}$$

Мета – максимізувати прибуток, отже, $Z = 4x_1 + 7x_2 + 145 \rightarrow \max$.

На випуск продукції буде витрачено відповідно:

$$1 \cdot (x_1 + 10) \text{ од. глини виду A,}$$

$$2 \cdot (x_2 + 15) \text{ од. глини виду B,}$$

$$1 \cdot (10 + x_1) + 2 \cdot (x_2 + 15) \text{ од. глини виду C.}$$

Враховуючи запаси глини різних видів на заводі, отримуємо обмеження:

$$\begin{cases} 10 + x_1 \leq 15, \\ 2 \cdot (x_2 + 15) \leq 36, \\ 1 \cdot (x_1 + 10) + 2 \cdot (x_2 + 15) \leq 47. \end{cases}$$

З умови задачі випливає, що $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Отже, математична модель вихідної (прямої) задачі має вигляд:

$$Z = 4x_1 + 7x_2 + 145 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 \leq 5, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, що дана задача може бути розв'язана геометрично (дві змінні x_1 та x_2). Розв'язуючи задачу графічно, неважко переконатися, що оптимальним планом цієї задачі є:

$$X^* = (5, 1)^T, \quad Z_{\max} = 172.$$

Отже, щоб отримати максимальний прибуток, завод повинен випустити понад план 5 у. о. цегли марки І та 1 у. о. цегли марки ІІ.

Складемо математичну модель двоїстої задачі. Поставимо у відповідність трьом обмеженням-нерівностям прямої задачі змінні:

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Тоді математична модель двоїстої задачі прийме вигляд:

$$W = 5y_1 + 3y_2 + 7y_3 + 145 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \geq 4, \\ y_2 + 2y_3 \geq 7, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Згідно з першою теоремою двоїстості $W_{\min} = Z_{\max} = 172$.

Далі, використовуючи другу теорему двоїстості, знайдемо оптимальний план $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ двоїстої задачі, в якому y_1^*, y_2^*, y_3^* є оптимальними оцінками ресурсів (глина видів А, В та С).

Оскільки $x_1^* = 5 > 0$, то згідно з другою теоремою, обмеження $y_1 + y_3 \geq 4$ в двоїстій задачі її оптимальним планом має звернутися в рівність, тобто $y_1^* + y_3^* = 4$. Аналогічно, з того, що $x_2^* = 1 > 0$, випливає, що $y_2^* + 2y_3^* = 7$.

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1^* + y_3^* = 4, \\ y_2^* + 2y_3^* = 7. \end{cases}$$

Крім того, в оптимальному плані $X^* = (5, 1)^T$ перше і третє обмеження прямої задачі виконуються як рівності ($5=5$; $5+2 \cdot 1=7$).

Це означає, що глина видів А та С використовується повністю, будучи дефіцитною. Подальше збільшення запасів глини видів А та С є доцільним.

Якщо ж ресурс витрачається неповністю, то він є надлишковим, його подальше зростання не вплине на ефективність роботи заводу. Таким ресурсом є глина виду В.

Дійсно, оскільки друге обмеження $x_2 \leq 3$ в оптимальному плані $x_2^* = 1$ виконується як суворі нерівність $1 < 3$, то глина виду В є надлишковою та, згідно з другою теоремою двоїстості, її оцінка дорівнює нулю ($y_2^* = 0$).

Із системи знаходимо:

$$y_3^* = \frac{7}{2}; \quad y_1^* = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, отримаємо

$$Y^* = \left(\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{7}{2} \right).$$

Тоді

$$W_{\min} = 5 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{7}{2} + 145 = 172,$$

що збігається з екстремальним значенням функції W , вже знайденим за допомогою першої теореми двоїстості.

Крім того, помічаємо, що глина виду С є більш дефіцитною, ніж глина виду А, оскільки $y_3^* > y_1^*$.

Приклад 1.8. Провести аналіз дефіцитності ресурсів (приклад 1.1), розв'язавши вихідну задачу симплекс-методом.

Розв'язання:

Нагадаємо математичну модель прикладу 1.1:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 400, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 240, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

Для розв'язання симплекс-методом запишемо вихідну задачу у вигляді:

$$Z_1 = -x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 400, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 240, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,7}). \end{cases}$$

Очевидно, що початковий опорний план – невід’ємний базисний розв’язок $X = (0, 0, 0, 0, 260, 400, 240)^T \geq 0$, де x_5, x_6, x_7 – базисні змінні, а $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ – вільні змінні. При цьому $Z(X)=0$.

Помічаємо, що отриманий опорний план не є оптимальним, тому що в оцінках цільової функції Z , вираженої тільки через вільні змінні, всі коефіцієнти є додатними: $\Delta_{1,2,3,4} > 0$. Причому для отримання нового опорного плану в базис можна ввести будь-яку з вільних невідомих: x_1, x_2, x_3 або x_4 .

Введемо в базис x_4 . Отже, в першій симплекс-таблиці розв’язуючим стає четвертий стовпець. Виникає питання, яка з базисних змінних x_5, x_6 або x_7 перейде у вільну, тобто який рядок таблиці стане розв’язуючим. Використовуючи правило вибору розв’язуючого рядка, отримаємо:

$$\min \left\{ \frac{260}{1}, \frac{400}{2}, \frac{240}{2} \right\} = 120 = \frac{b_3}{a_{34}},$$

отже, розв’язуючим стає третій рядок (третє рівняння системи обмежень). Отже, з базису вийде змінна x_2 .

Таблиця 1.2 – Первісна симплекс-таблиця

Бз	Вб	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			–1	–4	–2	–5	0	0	0
x_5	0	260	2	1	3	1	1	0	0
x_6	0	400	1	2	1	2	0	1	0
x_7	0	240	2	0	1	2	0	0	1
Цільова функція		0	1	4	2	5	0	0	0

Виконуючи симплексне перетворення з розв’язуючим елементом $a_{34} = 2$, прийдемо до нової таблиці (див. табл. 1.3).

Таблиця 1.3 – Друга симплекс-таблиця

Бз	Вб	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			–1	–4	–2	–5	0	0	0
x_5	0	140	1	1	5/2	0	1	0	–1/2
x_6	0	160	–1	2	0	0	0	1	–1
x_4	–5	120	1	0	1/2	1	0	0	1/2
Цільова функція		–600	–4	4	–1/2	0	0	0	–5/2

За даною таблицею видно, що отриманий опорний план $x^{(2)} = (0, 0, 0, 120, 140, 160, 0)^T$ також не є оптимальним, оскільки в оцінках цільової функції Z , вираженою тільки через вільні змінні, є додатний коефіцієнт $\Delta_2 = 4 > 0$.

Виконуючи симплексне перетворення з новим розв’язуючим елементом $a_{22} = 2$, прийдемо до нової таблиці (див. табл. 1.4).

Таблиця 1.4 – Третя симплекс-таблиця

Бз	Вб	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			-1	-4	-2	-5	0	0	0
x_5	0	60	3/2	0	5/2	0	1	-1/2	0
x_2	-4	80	-1/2	1	0	0	0	1/2	-1/2
x_4	-5	120	1	0	1/2	1	0	0	1/2
Цільова функція		-920	-2	0	-1/2	0	0	-2	-1/2

Отриманий за табл. 1.4 опорний план $x^{(3)} = (0, 80, 0, 120, 60, 0, 0)^T$ є єдиним оптимальним планом задачі, оскільки всі $\Delta_j \leq 0$ ($j = \overline{1,7}$). При цьому $Z_{1\min}(X) = -920$.

Тоді оптимальним розв'язком вихідної (прямої) задачі є:

$$X^* = (0, 80, 0, 120)^T, \text{ а } Z_{\max}(X) = -Z_{1\min}(X) = 920.$$

Двоїста задача має вигляд:

$$W = 260y_1 + 400y_2 + 240y_3 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ y_1 + 2y_2 \geq 4, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5, \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Згідно з першою теоремою двоїстості, маємо:

$$W_{\min} = Z_{\max} = 920.$$

Для знаходження оптимальних оцінок y_1^* , y_2^* та y_3^* ресурсів скористаємося другою теоремою двоїстості. З того, що

$$x_2^* = 80 > 0 \Rightarrow y_1^* + 2y_2^* = 4,$$

$$x_4^* = 120 > 0 \Rightarrow y_1^* + 2y_2^* + 2y_3^* = 5.$$

Маємо систему двох лінійних рівнянь з трьома невідомими. При підстановці в перше обмеження значень $x_1^* = 0$, $x_2^* = 80$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 120$ отримаємо сувору нерівність:

$$2 \cdot 0 + 1 \cdot 80 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 120 < 260.$$

Отже, $y_1^* = 0$. Друге і третє обмеження перетворюються в рівності:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 80 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 120 = 400; \quad 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 120 = 240.$$

Підставивши значення y_1^* в систему, отримаємо $y_2^* = 2$ та $y_3^* = 0,5$. Таким чином, маємо оптимальний план двоїстої задачі:

$$Y^* = (0; 2; 0,5),$$

з якого випливає, що найдефіцитнішим є другий ресурс, оскільки його оцінка є найбільшою: $y_2^* = 2$. Менш дефіцитним є третій ресурс: $y_3^* = 0,5 < y_2^*$; надлишковим (недефіцитним) є перший ресурс, який має оцінку $y_1^* = 0$.

1.6 Аналіз стійкості двоїстих оцінок

Продовжимо розгляд пари двоїстих ЗЛП.

Припустимо, що вихідна задача має не вироджені опорні плани та хоча б один з них є оптимальним. Очевидно, зміна правих частин обмежень вихідної задачі призводить, взагалі кажучи, до зміни максимального значення цільової функції $Z_{\max}$, тобто $Z_{\max}$ можна розглядати як функцію вільних членів системи лінійних рівнянь:

$$Z_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Теорема 4 (про оцінки). В оптимальному плані двоїстої задачі значення змінної y_i^* чисельно дорівнює частинній похідній функції $Z_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ за відповідним аргументом b_i , тобто

$$\frac{\partial Z_{\max}}{\partial b_i} = y_i^* \quad (i = \overline{1, m}). \quad (1.14)$$

З теореми про оцінки випливає, що при малій зміні правої частини i -го обмеження в системі обмежень ЗЛП максимальне значення цільової функції змінюється на величину

$$\Delta Z_{\max}^i \approx y_i^* \cdot \Delta b_i.$$

Зокрема, при $\Delta b_i = 1$ маємо $\Delta Z_{\max}^i \approx y_i^*$.

Стосовно задачі оптимального використання ресурсів можна сказати, що двоїста оцінка y_i^* i -го ресурсу наближено дорівнює приросту оптимального прибутку, що виникає за рахунок збільшення обсягу i -го ресурсу на одиницю.

З теореми також випливає, що якщо зміниться обсяг кожного ресурсу на величину Δb_i ($i = \overline{1, m}$), то ці зміни призведуть до сумарної зміни прибутку $\Delta Z_{\max}$, яка може бути обчислена за формулою:

$$\Delta Z_{\max} \approx \sum_{i=1}^m y_i^* \cdot \Delta b_i. \quad (1.15)$$

Ця формула має місце лише тоді, коли при зміні величин b_i значення змінних y_i^* в оптимальному плані відповідної двоїстої задачі залишаються незмінними, тому представляє інтерес визначити такі інтервали зміни кожного з вільних членів b_i , в яких оптимальний план двоїстої задачі не змінюється. Такі інтервали називають **інтервалами стійкості двоїстих оцінок** виду

$$(b_i - \Delta b_i^H, b_i + \Delta b_i^G).$$

Нижню та верхню границі інтервалу $(b_i - \Delta b_i^H, b_i + \Delta b_i^G)$ стійкості двоїстих оцінок визначають за формулами:

$$\Delta b_i^H = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо всі } d_{ji} \leq 0, \\ \min_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ji}} \right\}, & \text{для } d_{ji} > 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\Delta b_i^G = \begin{cases} \max_j \left| \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ji}} \right\} \right|, & \text{для } d_{ji} < 0, \\ +\infty, & \text{якщо всі } d_{ji} \geq 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

де d_{ji} – елементи матриці $D = B^{-1}$, оберненої до матриці B базису оптимального плану, а j приймає значення індексів базисних змінних x_j^* оптимального плану.

Приклад 1.9. Для задачі оптимального використання ресурсів (див. приклади 1.1 та 1.8), математична модель якої має вигляд

$$\begin{aligned} Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 400, \\ 2x_1 + \quad \quad x_3 + 2x_4 \leq 240, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}), \end{cases} \end{aligned}$$

необхідно:

- 1) визначити інтервали стійкості двоїстих оцінок;
- 2) встановити величину максимальної вартості продукції при зміні обсягу ресурсів: першого на «– 40» одиниць; другого – на «+30» одиниць, третього – на 50 одиниць. Оцінити роздільний вплив цих змін та їх сумарний вплив на вартість продукції;
- 3) оцінити доцільність введення в план виробництва фірми п'ятого виду продукції, норми витрат ресурсів на одиницю якого відповідно дорівнюють 3, 2, 8, а ціна становить 9 у. о.;
- 4) оцінити доцільність додаткової закупівлі 100 одиниць третього ресурсу за ціною 0,25 у. о.

Розв'язання

1. Перш за все перейдемо до канонічної формі моделі, увівши невід'ємні балансові змінні x_5, x_6, x_7 :

$$Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 400, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 240, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,7}). \end{cases}$$

Матриця системи обмежень:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо останню симплекс-таблицю, що дає оптимальний розв'язок вихідної задачі (див. табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Бз	Вб	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			-1	-4	-2	-5	0	0	0
x_5	0	60	3/2	0	5/2	0	1	-1/2	0
x_2	-4	80	-1/2	1	0	0	0	1/2	-1/2
x_4	-5	120	1	0	1/2	1	0	0	1/2
Цільова функція	-920		-2	0	-1/2	0	0	-2	-1/2

Як видно з табл. 1.4, базисними змінними в оптимальному розв'язку є змінні x_2, x_4, x_5 .

Оптимальний розв'язок за табл. 1.4:

$$X^* = (0, 80, 0, 120, 60, 0, 0)^T, \quad Z_{\max} = 920.$$

Матриця коефіцієнтів при базисних змінних (отриманих в оптимальному плані табл.1.4, тобто змінних x_2, x_4, x_5) в первісній системі обмежень (див. табл. 1.2 або матрицю A системи обмежень) має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{з вихідної матриці } A \\ \text{обираються стовпці,} \\ \text{що відповідають остаточною} \\ \text{базисним змінним (з табл.1.4)} \end{array} \right\}$$

Тоді обернена матриця має такий вигляд:

$$B^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_2^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{з оптимальної симплекс-таблиці (табл.1.4)} \\ \text{обираються стовпці, що відповідають} \\ \text{останнім змінним } x_5, x_6, x_7. \text{ При цьому} \\ \text{рядки впорядковуються за зростанням} \\ \text{індексів базисних змінних, тобто } x_2, x_4, x_5 \end{array} \right\},$$

тобто

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження: Зворотна матриця може бути знайдена або за правилами знаходження оберненої матриці, або складена з впорядкованої матриці коефіцієнтів при базисних змінних x_5, x_6, x_7 останньої симплекс-таблиці).

Таким чином, матриця $D = (d_{ji})$, необхідна для обчислення верхньої та нижньої границь в інтервалах стійкості, буде мати вигляд:

$$D = B^{-1} = (d_{ji}) = \begin{pmatrix} d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_2^* = 80 \\ x_4^* = 120 \\ x_5^* = 60 \end{cases}$$

Тепер можемо скористатися **формулами для знаходження нижньої та верхньої границь інтервалів стійкості оцінок за видами ресурсів**.

Ресурс 1. Нижня границя: $\Delta b_1^H = \min \left\{ \frac{x_5^*}{d_{51}} \right\} = \min \left\{ \frac{60}{1} \right\} = 60.$

Верхня границя: $\Delta b_1^G = +\infty$, оскільки серед елементів першого стовпця матриці D немає від'ємних.

Отже, $\Delta b_1 \in (-\Delta b_1^H, +\Delta b_1^G) = (-60, +\infty)$. Тоді перший ресурс може змінюватися в наступному інтервалі стійкості (по відношенню до першого обмеження, у якому права частина $b_1 = 260$):

$$(b_1 - \Delta b_1^H, b_1 + \Delta b_1^G) = (260 - 60, 260 + \infty) = (200, +\infty),$$

при цьому оптимальний план двоїстої задачі залишається незмінним.

Аналогічні міркування дозволяють знайти інтервали стійкості оцінок для другого і третього ресурсів.

Ресурс 2. Нижня границя: $\Delta b_2^H = \min \left\{ \frac{x_2^*}{d_{22}} \right\} = \min \left\{ \frac{80}{1/2} \right\} = 160.$

Верхня границя: $\Delta b_2^6 = \max \left| \left\{ \frac{x_5^*}{d_{52}} \right\} \right| = \max \left| \left\{ \frac{60}{-1/2} \right\} \right| = 120.$

Отже, $\Delta b_2 \in (-160; 120).$

Отримуємо інтервал стійкості оцінок по відношенню до другого обмеження, у якому права частина $b_2 = 400$:

$$(b_2 - \Delta b_2^H, b_2 + \Delta b_2^6) = (400 - 160, 400 + 120) = (240, 520).$$

Ресурс 3. Нижня границя: $\Delta b_3^H = \min \left\{ \frac{x_4^*}{d_{43}} \right\} = \min \left\{ \frac{120}{1/2} \right\} = 240.$

Верхня границя: $\Delta b_3^6 = \max \left| \left\{ \frac{x_2^*}{d_{23}} \right\} \right| = \max \left| \left\{ \frac{80}{-1/2} \right\} \right| = 160.$

Інтервал стійкості оцінок по відношенню до третього обмеження, у якому права частина $b_3 = 240$ має вигляд:

$$(b_3 - \Delta b_3^H, b_3 + \Delta b_3^6) = (240 - 240, 240 + 160) = (0, 400).$$

2. Далі оцінимо вплив зміни обсягу ресурсів

$$(\Delta b_1 = -40; \quad \Delta b_2 = 30; \quad \Delta b_3 = 50)$$

на величину максимальної вартості продукції.

Помічаємо, що все величини Δb_i знаходяться в межах інтервалів стійкості двоїстих оцінок, тому відповідно до теореми про оцінки можна визначити роздільний та сумарний впливи цих змін.

Роздільний вплив, що визначається за формулою $\Delta Z_{\max}^i \approx y_i^* \cdot \Delta b_i$, в нашому випадку (з урахуванням знайденого у прикладі 1.8 вектору двоїстих оцінок $Y^* = (0; 2; 1/2)$):

$$\Delta Z_{\max}^1 \approx -40 \cdot 0 = 0,$$

тобто зменшення запасу першого ресурсу на 40 одиниць не призводить до зміни $Z_{\max}$;

$$\Delta Z_{\max}^2 \approx 30 \cdot 2 = 60;$$

$$\Delta Z_{\max}^3 \approx 50 \cdot 1/2 = 25.$$

Спільний вплив змін всіх ресурсів призводить до зміни максимальної вартості продукції $Z_{\max}$ на величину

$$\Delta Z_{\max} \approx \sum_{i=1}^3 \Delta Z_{\max}^i = 0 + 60 + 25 = 85.$$

Іншими словами, ми знайшли оптимальне значення цільової функції

$$\tilde{Z}_{\max} = Z_{\max} + \Delta Z_{\max} \approx 920 + 85 = 1005$$

для задачі:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 220, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 400, \\ 2x_1 + \quad \quad x_3 + 2x_4 \leq 290, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases} \end{aligned}$$

3. Оцінімо доцільність введення в план виробництва фірми п'ятого виду продукції. Для цього визначимо, в якому відношенні знаходяться ціна $c_5=9$ п'ятого виду продукції та сумарна оцінка $\sum_{i=1}^3 a_{i5} \cdot y_i^*$ витрат ресурсів на виробництво однієї одиниці цієї продукції:

$$\sum_{i=1}^3 a_{i5} \cdot y_i^* = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 1/2 = 8.$$

Очевидно, що $\sum_{i=1}^3 a_{i5} \cdot y_i^* < c_5$. Оскільки ціна продукції перевищує витрати на її виробництво, то введення в план виробництва п'ятого виду продукції є недоцільним.

4. Оцінімо тепер ефективність заходи щодо «розширки» вузьких місць. Нехай є можливість придбати додатково 100 одиниць третього ресурсу за ціною $p_3 = 0,25$ у.о. Зміна третього ресурсу $\Delta b_3 = 100$ знаходиться в межах стійкості двоїстих оцінок, тому його вплив на величину максимальної вартості продукції можна визначити за допомогою теореми про оцінки:

$$\Delta Z_{\max}^3 \approx y_3^* \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50 \text{ у.е.}$$

Витрати ΔP на придбання 100 одиниць третього ресурсу:

$$\Delta P = p_3 \cdot \Delta b_3 = 0,25 \cdot 100 = 25 \text{ у.е.}$$

Отже, даний захід є ефективним, він забезпечує додатковий прибуток в обсязі:

$$\Delta Z_{\max} \approx \Delta Z_{\max}^3 - \Delta P = 50 - 25 = 25 \text{ у.е.}$$

Цей прибуток досягається лише за рахунок раціонального перерозподілу ресурсів та відповідного корегування плану в зв'язку зі збільшенням ліміту дефіцитного ресурсу.