

**Л.Г. Лобас, Людм.Г. Лобас**

# **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

Затверджено  
Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів  
вищих технічних навчальних закладів

Київ

2009

УДК 531.011

Гриф надано Міністерством  
освіти і науки України,  
лист № 1.4/18-Г-2075 від 08.10.2008

**Рецензенти:**

- Мелешко В.В. – доктор фіз.-мат.наук, професор, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
- Рассказов О.О. – доктор техн. наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки Національного транспортного університету
- Савін В.Г. – доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”

**Лобас Л.Г., Лобас Людм. Г. Теоретична механіка:** Підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Л.Г. Лобас, Людм.Г. Лобас. – К.: ДЕТУТ, 2008. – 406 с.  
ISBN

У підручнику викладено сукупність положень, що розкривають сутність теоретичної механіки та її складових частин – статика, кінематики динаміка та аналітичної механіки. Окремим розділом подано основи теорії динамічних систем: елементарні біфуркації і катастрофи стаціонарних станів, атрактори, граничні цикли, області притягування, автоколивання, особливі точки векторних полів, побудова стаціонарних станів методом продовження за параметром. Цей розділ утворює місток між “класичною” і “сучасною” теоретичною механікою і може вивчатись для поглиблення як самостійно, так і в наукових гуртках, а також аспірантами.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

ISBN

© Л.Г. Лобас, Людм.Г. Лобас  
УДК 531.011

ISBN

© Л.Г. Лобас, 2008  
© Людм.Г. Лобас, 2008

*Учітєся, брати мої,  
Думайте, читайте,  
І чужого научайтєсь,  
Й свого не цурайтєсь.*

Т.Г.Шевченко “Учітєся, брати мої”

*Учись, мой сын: наука сокращает  
Нам опыты быстротекущей жизни...  
Учись, мой сын: и легче и яснее  
Державный труд ты будешь постигать.*

А.С. Пушкин “Борис Годунов”

**Лобас Леонід Григорович** – доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедри теоретичної і прикладної механіки Державного економіко-технологічного університету транспорту, дійсний член Нью-Йоркської академії наук, член-кореспондент Транспортної академії України. Основні біографічні відомості наведено в Who's Who in the World, 16<sup>th</sup> edition, 1999.

*Області наукових інтересів* – теорія неголономних систем, механіка транспортних колісних екіпажів, теорія нелінійних коливань і стійкості руху, теорія біфуркацій і катастроф динамічних систем, біфуркації стаціонарних станів та граничних циклів багатоланкових маятників під впливом слідкуючих сил. Автор (співавтор) 4 монографій, 1 підручника, 1 навчального посібника, 1 патенту, 270 наукових статей. Підготував 3 докторів і 15 кандидатів наук. Член Національного комітету України з теоретичної і прикладної механіки та спеціалізованих рад із захисту докторських і кандидатських дисертацій, член редколегій кількох наукових журналів.

**Лобас Людмила Геннадіївна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Державного економіко-технологічного університету транспорту.

*Області наукових інтересів* – динаміка неголономних систем, теорія транспортних пневмоколісних екіпажів, біфуркації станів рівноваги подвійних маятників під впливом слідкуючих сил. Автор (співавтор) 60 наукових статей.

---

## Зміст

<i>Передмова</i> .....	13
<b>Вступ до механіки</b> .....	15
1. Предмет механіки.....	15
2. Одиниці вимірювання механічних величин.....	17
<b>ЧАСТИНА 1. СТАТИКА</b> .....	19
<b>1. Основні поняття та вихідні положення статyki</b> .....	19
1.1. Предмет статyki. Об'єкти статyki.....	19
1.2. Еквівалентні системи сил.....	200.
1.3. Види сил.....	21
1.4. Аксиоми статyki.....	23
1.5. Деякі інші фундаментальні положення статyki.....	25
1.6. Теорема про три сили.....	26
1.7. Активні сили та реакції в'язей.....	27
1.8. Принцип звільнюваності від в'язей.....	28
1.9. Напрями реакцій основних типів в'язей.....	28
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	35
<b>2. Система збіжних сил</b> .....	35
2.1. Теорема про зведення збіжної системи сил до рівнодійної.....	35
2.2. Способи побудови рівнодійної збіжних сил.....	36
2.3. Умови рівноваги системи збіжних сил.....	37
2.4. Методика розв'язування задач на рівновагу сил, прикладених до твердого тіла.....	38
2.5. Розрахунок плоских ферм.....	38
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	41
<b>3. Момент сили</b> .....	42
3.1. Означення моменту сили відносно точки і відносно осі.....	42
3.2. Теорема про незалежність моменту сили відносно осі від вибору початкової точки осі.....	43
3.3. Проекція сили на площину. Вираз моменту сили відносно осі через проекцію сили на площину, перпендикулярну осі.....	44
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	45
<b>4. Рівнодійна двох паралельних сил</b> .....	46
4.1. Випадок однаково направлених сил.....	46
4.2. Випадок протилежно направлених сил з різними модулями.....	47
4.3. Випадок протилежно направлених сил з однаковими модулями.....	49
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	49

<b>5. Пара сил</b> .....	49
5.1. Момент пари.....	49
5.2. Зрівноваженість пари сил.....	50
5.3. Властивості пар сил.....	51
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	51
<b>6. Загальні теореми статички</b> .....	51
6.1. Теорема про паралельне перенесення сили.....	51
6.2. Основна теорема статички (перша теорема приведення) .....	52
6.3. Друга теорема приведення.....	54
6.4. Умови рівноваги просторової системи сил.....	54
6.5. Частинні випадки рівноваги просторової системи сил.....	55
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	56
<b>7. Плоска система сил</b> .....	56
7.1. Алгебраїчний момент сили відносно точки і алгебраїчний момент пари сил.....	56
7.2. Зведення плоскої системи сил до рівнодійної.....	58
7.3. Приведення плоскої системи сил до простішого вигляду.....	59
7.4. Три форми умов рівноваги плоскої системи сил.....	59
7.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил.....	61
7.6. Опора у вигляді жорсткого закріплення.....	62
7.7. Статично неозначені задачі.....	62
7.8. Рівновага системи тіл.....	64
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	65
<b>8. Деякі додаткові питання просторової статички</b> .....	65
8.1. Визначення внутрішніх зусиль.....	65
8.2. Умови рівноваги частково закріпленого тіла.....	66
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	67
<b>9. Рівновага тіла за наявності тертя</b> .....	67
9.1. Види тертя.....	67
9.2. Сили тертя ковзання.....	67
9.3. Кут тертя та конус тертя.....	71
9.4. Рівновага твердого тіла за наявності тертя кочення.....	72
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	74
<b>10. Системи паралельних сил</b> .....	75
10.1. Центр паралельних сил.....	75
10.2. Центр ваги дискретної системи матеріальних точок.....	79
10.3. Центр ваги твердого тіла.....	79
10.4. Способи знаходження центра ваги тіла.....	81
10.5. Центри ваги деяких однорідних простих фігур та ліній.....	82
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	86

<b>11. Зведення довільної просторової системи сил до простішого вигляду</b> .....	86
11.1. Зміна центра приведення .....	86
11.2. Теорема Варіньона .....	87
11.3. Застосування теореми Варіньона до знаходження центра паралельних сил .....	88
11.4. Інваріанти приведення .....	89
11.5. Динамічний гвинт (динама) .....	91
11.6. Перелік випадків зведення просторової системи сил до простішого вигляду .....	92
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	94
<b>ЧАСТИНА 2. КІНЕМАТИКА</b> .....	95
<b>12. Кінематика матеріальної точки</b> .....	95
12.1. Предмет та основні поняття кінематики .....	95
12.2. Способи математичного описування руху точки .....	97
12.3. Перехід від одного способу описування руху точки до іншого .....	99
12.4. Швидкість точки .....	101
12.5. Кривина і радіус кривини плоскої кривої .....	103
12.6. Натуральний триєдр (супутний тригранник) кривої лінії .....	105
12.7. Прискорення точки .....	106
12.8. Деякі конкретні важливі випадки рухів точки .....	109
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	111
<b>13. Поступальний рух твердого тіла</b> .....	112
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	113
<b>14. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі</b> .....	113
14.1. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення тіла .....	113
14.2. Швидкості точок тіла .....	116
14.3. Прискорення точок тіла .....	118
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	119
<b>15. Плоскопаралельний рух твердого тіла</b> .....	119
15.1. Зведення задачі про плоскопаралельний рух тіла до задачі про рух більш простих геометричних образів .....	119
15.2. Основні кінематичні характеристики плоскопаралельного руху .....	121
15.3. Траєкторії точок тіла при плоскому русі .....	122
15.4. Швидкості точок тіла при плоскому русі .....	124
15.5. Миттєвий центр швидкостей і способи його знаходження .....	125
15.6. Миттєвий центр обертання. Центроїди .....	127
15.7. Прискорення точок тіла при плоскому русі .....	129
15.8. Миттєвий центр прискорень .....	130
15.9. Траєкторії, швидкості та прискорення точок колеса, що котиться вздовж прямолінійної рейки .....	132
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	134

<b>16. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки.....</b>	<b>135</b>
16.1. Незалежні параметри, що визначають рух тіла.....	135
16.2. Теорема Ейлера. Закон руху тіла.....	136
16.3. Застосування векторно-матричної алгебри до знаходження напрямних косинусів.....	139
16.4. Безпосереднє знаходження напрямних косинусів.....	142
16.5. Вектор кутової швидкості тіла.....	143
16.6. Швидкості точок тіла.....	145
16.7. Миттєва вісь обертання. Сенс вектора кутової швидкості тіла.....	146
16.8. Вектор кутового прискорення тіла.....	147
16.9. Прискорення точок тіла.....	148
16.10. Геометризація уявлення про сферичний рух твердого тіла.....	151
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	151
<b>17. Рух вільного твердого тіла.....</b>	<b>152</b>
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	154
<b>18. Складний рух точки.....</b>	<b>154</b>
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	158
<b>19. Складний рух твердого тіла.....</b>	<b>158</b>
19.1. Постановка задачі синтезу рухів.....	158
19.2. Додавання поступальних рухів.....	159
19.3. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються.....	160
19.4. Додавання обертань навколо двох паралельних осей.....	161
19.4.1. Випадок, коли вектори миттєвих кутових швидкостей паралельні і однаково направлені (обертання в один бік).....	162
19.4.2. Випадок, коли вектори миттєвих кутових швидкостей антипаралельні (обертання направлені в різні боки).....	163
19.4.3. Пара обертань.....	164
19.5. Додавання поступального і обертального рухів.....	165
19.5.1. Випадок, коли швидкість поступального руху перпендикулярна до осі обертання.....	165
19.5.2. Випадок, коли швидкість поступального руху паралельна осі обертання.....	166
19.5.3. Випадок, коли швидкість поступального руху утворює довільний кут з віссю обертання.....	167
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	166
<b>ЧАСТИНА 3. ДИНАМІКА ТОЧКИ.....</b>	<b>169</b>
<b>20. Вступ до динаміки матеріальної точки.....</b>	<b>169</b>
20.1. Основні поняття динаміки точки.....	169
20.2. Закони динаміки.....	170
20.3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки.....	174
20.3.1. Векторний спосіб математичного описування руху точки.....	175
20.3.2. Координатний спосіб математичного описування руху точки... ..	175
20.3.3. Натуральний спосіб математичного описування руху точки.....	177



20.4.	Диференціальні рівняння руху невіЛЬНОї матеріальної точки.....	177
20.5.	Дві задачі динаміки.....	179
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	179
<b>21.</b>	<b><i>Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії</i></b> .....	<b>180</b>
21.1.	Поняття коливальних рухів.....	180
21.2.	Вільні коливання матеріальної точки без урахування опору.....	181
21.3.	Зведення двох послідовно або паралельно з'єднаних пружних елементів до одного.....	187
21.4.	Вільні прямолінійні коливання матеріальної точки за наявності лінійно-в'язкого опору.....	191
21.4.1.	Випадок “малого” опору.....	192
21.4.2.	Пограничний (проміжний випадок) .....	197
21.4.3.	Випадок великого опору.....	198
21.5.	Вимушені коливання матеріальної точки в середовищі без опору	198
21.5.1.	Випадок нульової початкової фази ( $\beta = 0$ ) збурної сили.....	199
21.5.2.	Випадок ненульової початкової фази ( $\beta \neq 0$ ) збурної сили.....	202
21.5.3.	Явище биття.....	204
21.6.	Вимушені коливання матеріальної точки в середовищі з лінійно-в'язким опором.....	205
21.7.	Ілюстрація впливу системи координат на методику дослідження коливальних рухів.....	211
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	213
<b>22.</b>	<b><i>Теорема про міри руху точки та їх застосування</i></b> .....	<b>214</b>
22.1.	Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки (теорема імпульсів) .....	214
22.1.1.	Диференціальна форма теореми.....	214
22.1.2.	Скінченна (інтегральна) форма теореми.....	215
22.1.3.	Випадки існування перших інтегралів диференціальних рівнянь руху.....	216
22.2.	Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки....	217
22.2.1.	Загальний випадок.....	217
22.2.2.	Випадок центральної сили.....	219
22.3.	Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.....	222
22.3.1.	Диференціальна форма теореми.....	222
22.3.2.	Скінченна (інтегральна) форма теореми.....	223
22.4.	Силіві поля. Потенціальне силове поле. Консервативні матеріальні системи.....	224
22.5.	Дисипативна функція. Поняття автоколивань.....	227
22.6.	Силіві функції деяких важливих сил.....	229
22.6.1.	Поле сили тяжіння.....	229
22.6.2.	Формула Галілея.....	230
22.6.3.	Поле відновлюючої сили пружини (сили пружності) .....	231
22.6.4.	Поле центральної сили.....	232

22.7.	Математичний маятник.....	232
22.7.1.	Рух математичного маятника в околі нижнього положення рівноваги.....	237
22.7.2.	Рух математичного маятника в околі верхнього положення рівноваги.....	238
22.7.3.	Глобальний фазовий портрет нелінійного консервативного осцилятора.....	239
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	240
 <b>ЧАСТИНА 4.</b>		
<b>ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ І ТВЕРДОГО ТІЛА.....</b>		<b>241</b>
<b>23.</b>	<b><i>Вступ до динаміки системи матеріальних точок.....</i></b>	<b>241</b>
23.1.	Поняття механічної системи. Зовнішні та внутрішні сили.....	241
23.2.	Властивості внутрішніх сил.....	243
23.3.	Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.....	243
23.4.	Центр мас системи.....	244
23.5.	Використання теореми про рух центра мас для пояснення деяких явищ.....	246
23.6.	Задачі на застосування теореми про рух центра мас системи.....	247
23.7.	Геометрія мас механічної системи.....	250
23.8.	Моменти інерції відносно паралельних осей.....	253
23.9.	Момент інерції тіла відносно довільної осі. Тензор інерції.....	255
23.10.	Головні осі інерції та способи їх знаходження.....	256
23.11.	Моменти інерції деяких конкретних тіл.....	257
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	260
<b>24.</b>	<b><i>Теореми про міри руху системи матеріальних точок.....</i></b>	<b>260</b>
24.1.	Теорема про зміну кількості руху системи.....	261
24.1.1.	Диференціальна форма теореми.....	261
24.1.2.	Скінченна (інтегральна) форма теореми.....	263
24.2.	Використання теореми про зміну кількості руху системи для пояснення деяких явищ.....	263
24.3.	Задачі на застосування закону збереження кількості руху системи	264
24.4.	Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи.	265
24.5.	Вираз кінетичного моменту системи відносно довільної точки через кінетичний момент системи відносно її центра мас.....	267
24.6.	Теорема моментів відносно центра мас.....	267
24.7.	Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи	268
24.8.	Застосування теореми про зміну кінетичної енергії.....	270
24.9.	Інтеграл енергії.....	270
24.10.	Вираз кінетичної енергії системи через кінетичну енергію центра мас (теорема Кьоніга) .....	271
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	271
<b>25.</b>	<b><i>Вступ до динаміки твердого тіла.....</i></b>	<b>271</b>
25.1.	Кількість руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.....	271

25.2.	Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.....	272
25.3.	Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.....	274
25.4.	Зв'язок між кінетичною енергією та кінетичним моментом твердого тіла з однією нерухомою точкою.....	275
25.5.	Елементарна робота сил, прикладених до абсолютно твердого тіла	275
25.6.	Робота сил тертя, що діють на колесо, яке котиться по площині....	277
25.7.	Диференціальні рівняння руху вільного твердого тіла.....	278
25.8.	Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.....	279
25.9.	Аналогія між поступальним рухом тіла та обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі.....	284
25.10.	Фізичний маятник.....	284
25.11.	Диференціальні рівняння плоскопаралельного (плоского) руху абсолютно твердого тіла.....	286
25.12.	Задачі на плоский рух тіла.....	288
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	292
<b>ЧАСТИНА 5. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.....</b>		<b>293</b>
<b>26.</b>	<b><i>Основи аналітичної механіки невідільної системи матеріальних точок.....</i></b>	<b>293</b>
26.1.	Поняття в'язі в аналітичній механіці	293
26.2.	Класифікація в'язей.....	295
26.3.	Рух матеріальної точки по гладенькій поверхні. Диференціальні рівняння Лагранжа першого роду.....	298
26.4.	Рух матеріальної точки по гладенькій кривій лінії.....	300
26.5.	Принцип Д'Аламбера.....	302
26.5.1.	Випадки вільної матеріальної точки і вільного твердого тіла.....	302
26.5.2.	Випадок невідільної матеріальної точки.....	303
26.5.3.	Випадок системи точок.....	304
26.5.4.	Історичний нарис.....	307
26.5.5.	Застосування до задачі про конічний маятник.....	308
26.6.	Теорія відносного руху матеріальної точки.....	309
26.6.1.	Основні положення механіки відносного руху точки.....	309
26.6.2.	Класифікація сил інерції.....	312
26.7.	Дійсні та віртуальні переміщення точки.....	315
26.7.1.	Диференціал і варіація функції.....	315
26.7.2.	Означення дійсних та віртуальних переміщень точки та їх знаходження при стаціонарних і нестаціонарних в'язях.....	316
26.8.	Віртуальне переміщення системи матеріальних точок.....	319
26.9.	Степені вільності системи матеріальних точок.....	320
26.10.	Віртуальна робота сил.....	321
26.11.	Ідеальні в'язі.....	322
26.12.	Принцип віртуальних переміщень.....	323
26.13.	Задачі на застосування принципу віртуальних переміщень.....	326
26.14.	Принцип Даламбера-Лагранжа.....	329

26.15.	Загальне рівняння динаміки.....	330
26.16.	Узагальнені координати системи і узагальнені сили. Умови рівноваги в узагальнених координатах.....	331
26.17.	Диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду) .....	335
26.18.	Випадок потенціального силового поля.....	337
26.19.	Вираз кінетичної енергії системи через узагальнені швидкості і координати.....	339
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	340
<b>27.</b>	<b><i>Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги</i></b> .....	<b>342</b>
27.1.	Диференціальні рівняння малих коливань.....	342
27.2.	Нормальні координати.....	347
27.3.	Подвійний математичний маятник у потенціальному силовому полі.....	350
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	358
<b>ЧАСТИНА 6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ</b> .....		<b>359</b>
<b>28.</b>	<b><i>Основні сучасні методи аналізу руху</i></b> .....	<b>359</b>
28.1.	Поняття динамічної системи. Означення і приклади.....	359
28.2.	Побудова стаціонарних станів динамічних систем методом продовження за параметром.....	361
28.3.	Стійкість руху.....	367
28.4.	Атрактори та їхні області притягування.....	370
28.5.	Особливі точки векторних полів.....	372
28.6.	Фазові портрети двовимірних динамічних систем.....	373
28.7.	Поняття біфуркацій та катастроф динамічних систем.....	376
28.8.	Неособливі та критичні випадки теорії стійкості руху.....	382
28.9.	Фазові портрети одновимірних динамічних систем.....	383
28.10.	Особливості поведінки динамічної системи у випадку нульового кореня характеристичного рівняння.....	384
28.11.	Особливості поведінки динамічної системи у випадку пари суто уявних коренів характеристичного рівняння.....	386
28.12.	Неконсервативні динамічні системиз одним ступенем вільності	387
28.13.	Автоколивання і граничні цикли.....	394
	<i>Питання для самоконтролю</i> .....	396
	<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	<b>397</b>
	<b>ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК</b> .....	<b>399</b>
	<b>ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК</b> .....	<b>404</b>

---

## *Передмова*

Цей підручник складено на основі лекцій, прочитаних авторами у 2001—2007 рр. для студентів Державного економіко-технологічного університету транспорту (в минулому – Київського інституту залізничного транспорту).

Першим помічником студента в освоєнні будь-якого розділу науки (включаючи, звісно, і теоретичну механіку) є конспект, який студент веде на лекційних заняттях. Досвід, проте, показує, що гарний конспект – необхідна, але недостатня умова опанування предмета.

По-перше, не всі студенти можуть вести “гарний” конспект. По-друге, яким би повним цей конспект не був, він віддзеркалює лише один погляд – викладача. Дуже важливо ознайомитися з іншими підходами, викладеними в книгах. Самостійна праця з книгами мобілізує і стимулює творчі можливості студента; навчитись умінню працювати з книгами — перший крок у становленні студента як майбутнього творця.

Теоретична механіка – специфічний і цікавий розділ науки. Базуючись на певній сукупності аксіом, принципів і постулатів, до яких людство прийшло в результаті узагальнень безпосередніх практичних дослідів і спостережень, цей розділ науки в подальшому своєму розвитку дуже тісно переплівся з вищою математикою (і був би неможливий без неї). Сучасна теоретична механіка – одна з найбільш математизованих дисциплін. Дуже багато вчених, яким теоретична механіка завдячує своїм існуванням, були одночасно і прекрасними математиками (І. Ньютон, Ж.Л. Лагранж, Л. Ейлер, О.М. Ляпунов та інші).

У студентів це викликає додаткові труднощі, оскільки знання математики необхідно поєднувати з глибоким проникненням у фізичну суть явищ і процесів. Останнє дається найважче, бо, як стверджував видатний механік і досвідчений педагог М.Є. Жуковський, людський розум доволі часто схильний до формального запам’ятовування: до запам’ятовування формул без засвоєння образів, що стоять за ними.

Найповніше теоретичну механіку вивчають на механіко-математичних факультетах університетів. Цей підручник складено відповідно до програми транспортних спеціальностей вищих навчальних закладів України. У його написанні були використані, в основному, підручники [5, 6, 10, 31, 32]. Фундаментальний характер має книга [18]. З деякими сучасними проблемами теоретичної механіки можна ознайомитись за монографіями [21, 29].

Хоч методика викладання теоретичної механіки за кілька століть її існування змінювалась (в останні часи між класичними і новітніми галузями науки йде своєрідна “боротьба” за доступ до студентських сердець, яка спричинює зміни у манері викладання класичних наук), традиційним є поділ на три частини: статику, кінематику і динаміку. Якщо кінематику інколи називають “геометрією руху”, то

статика з тією ж часткою істини можна охарактеризувати як “алгебру сил”. Оскільки сила – вектор, то ця алгебра є векторною.

Безповоротно минули часи запеклих суперечок між противниками і прибічниками векторного апарату в науці: зараз метод векторів міцно стоїть на належних йому позиціях. Проте так було не завжди. Видатний вчений В.Томсон (лорд Кельвін) заявляв: “Вектори зберігають крейду і витрачають мозок”. Поділяючи цей погляд, академік О.М. Крилов у книзі “Мысли и материалы о преподавании механики” (видавництво АН СРСР, 1943 р.) радив: “Витрачайте крейду, не жаліючи, і бережіть мозок тих, хто навчається”. З певною часткою умовності (адже у правил бувають винятки) можна сказати, що векторний апарат використовується в теорії, координатний спосіб – на практиці, при розв’язуванні конкретних задач.

Автори підручника послідовно стоять на “векторних позиціях”, користуючись лише тими поняттями і термінами векторної алгебри, якими користуються в математиці.

У пропонованому курсі розділ “Статика” подається як “Частина 1”, розділ “Кінематика” – як “Частина 2”. Це данина традиції; хоча в деяких підручниках (наприклад [6, 10]) кінематика випереджає статику, все ж більшість авторів схильна до викладення спочатку статики, а вже потім – кінематики.

Така “вільність” у виборі початку курсу зумовлена тим, що статика і кінематика – це дві самостійні річки, кожна з яких має своє джерело, свій басейн і свої закони саморозвитку. Здобутки кожного з цих розділів теоретичної механіки мають своїх користувачів і свої додатки. Зливаючись у повноводну і могутню ріку, назва якої “Динаміка”, статика і кінематика набувають нового звучання, про яке вони, можливо, і не підозрювали, живучи ізольовано. Автори орієнтувались на те, що першою, все-таки, вивчається статика.

Скрізь у тексті над векторами ставиться стрілка, на рисунках – риска.

Комп’ютерна підготовка рукопису до друку була б неможливою без наполегливості, завзяття та високого професіоналізму провідного інженера Наталії Федорівни Рябової. Літературний редактор Тетяна Іванівна Заболотна переконала авторів, що вдосконаленню знання української мови не існує меж. Автори висловлюють їм щире подяку.

---

## *Вступ до механіки*

### *1. Предмет механіки*

**Механіка** – це наука про механічну взаємодію матеріальних тіл.

**Механічною взаємодією** тіл називаються такі дії матеріальних тіл одне на друге, в результаті яких виникає рух цих тіл або зміна їхньої форми (деформація). За основну міру цих дій прийнято брати умовну величину, яка називається силою.

**Механічним рухом** тіла називається зміна положення тіла відносно іншого тіла, яка відбувається з плином часу.

**Приклади механічних рухів:**

- 1) рухи небесних тіл;
- 2) рух наземних, водних і літальних апаратів;
- 3) повітряні і морські течії;
- 4) рухи частин машин і механізмів;
- 5) деформації елементів конструкцій і споруд.

**Приклади механічних взаємодій:**

- 1) взаємні притягування матеріальних тіл за законом всесвітнього тяжіння;
- 2) взаємні тиски тіл, що співдотикаються або співударяються;
- 3) дії частинок рідини чи газу одних на інші та на тіла, які рухаються в них або перебувають у стані спокою.

Механіка вивчає тверді тіла, рідини та газу (теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка) і включає ряд розділів так званої **прикладної механіки** (опір матеріалів, статика споруд, теорія механізмів і машин, гідравліка, механіка космічних польотів). Можна сказати також, що механіка вивчає суцільні середовища (континууми) та їх альтернативу – дискретні системи. В усіх цих областях механіки поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження використовують багато понять і методів, спільних для всіх них. Розгляд таких спільних понять, закономірностей та методів становить предмет так званої **теоретичної (або загальної) механіки**: розділу механіки, в якому вивчається механічний рух абсолютно твердих (недеформівних) матеріальних тіл. В деяких випадках модель абсолютно твердого тіла не викликає очевидних заперечень (залізничне колесо) і потребує лише певних доповнень чи уточнень. В інших – урахування

деформівності тіл приводить до суттєвої зміни постановки задачі (як у випадку автомобільного колеса: модель бокового відведення чи квазіковзання).

Рух тіла виникає внаслідок “дії на нього сил”, які викликані іншими тілами. При вивченні механічного руху і рівноваги (точніше – спокою) матеріальних тіл знання природи сил не обов’язкове: достатньо знати їхні модулі і напрям дії. Тому в теоретичній механіці не вивчають фізичну природу сил, обмежуючись розглядом тільки зв’язку між силами і рухом тіл. Вкажемо лише, що сили можуть “виникати” як при безпосередньому контакті тіл (сила тяги електровоза, яка передається вагонам; сила тертя між поверхнями тіл, що співдотикаються), так і на відстані (сили притягування небесних тіл).

В основі теоретичної механіки лежать закони (що називаються законами класичної механіки або механіки Ньютона), які встановлені шляхом узагальнення результатів великої кількості експериментів і спостережень. Їхня справедливість перевірена багатовіковою практичною діяльністю людини.

Закони Ньютона справедливі не в усіх системах відліку. У механіці постулюється наявність хоча б однієї такої системи (інерціальна система відліку). Досить часто їх називають нерухомими системами.

Спостерігаючи певне явище, ми не в змозі відразу охопити його в усьому розмаїтті. Загальний метод наукових досліджень полягає в тому, що при розгляді явища в ньому виділяють головне, визначальне, відволікаючись (абстрагуючись) від того, що менш істотне, другорядне. У результаті, замість реального явища чи об’єкта розглядають його модель (спочатку фізичну, а потім – у разі необхідності – і математичну) і вводять низку абстрактних понять, що відображають відповідні властивості цього явища чи об’єкта.

У класичній механіці науковими абстракціями та моделями є, по суті, всі вихідні положення та поняття. Наприклад, замість реальних матеріальних тіл у механіці розглядають такі абстрактні їхні моделі, як матеріальна точка (нехтуючи формою та розмірами тіла), абсолютно тверде тіло (не враховуючи деформацій тіла), суцільне змінювальне середовище (абстрагуючись від молекулярної структури середовища). Але тільки побудувавши механіку такого типу моделей, можна розробляти методи, що дають можливість вивчати з придатною для практики точністю рух і рівновагу (точніше – спокій) реальних об’єктів, перевіряючи, у свою чергу, цю придатність дослідом, практикою. Останнє є дуже важливим: приймаючи ті чи інші гіпотези, слід пам’ятати про границі їхньої застосовуваності; забувши про це, можна дійти до невірних висновків. Це відбувається тоді, коли невраховані властивості стають істотними.



## 2. Одиниці вимірювання механічних величин

Для вимірювання всіх механічних величин досить ввести три основні одиниці виміру. Двома з них прийнято вважати одиниці довжини (м) і часу (с). В останньому випадку вводиться припущення про можливість встановлення одночасно двох явищ незалежно від їхньої фізичної суті та системи відліку часу. Ця можливість, що раніше уявлялась майже очевидною, тепер коректується на основі теорії відносності.

Залежно від вибору третьої одиниці виміру можливе існування різних систем основних одиниць.

У міжнародній системі одиниць виміру фізичних величин (SI) третьою одиницею вибрано одиницю виміру маси (кг). Отже, основними одиницями вимірювання механічних величин в SI є метр (1 м), кілограм (1 кг), секунда (1 с).

Одиниця виміру сили в системі SI є похідною одиницею, що називається ньютон (1 Н) і дорівнює силі, яка надає масі в 1 кг прискорення  $1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ , тобто

$$1 \text{ Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Раніше за третю основну одиницю брали одиницю виміру сили (кГ), яка дорівнює вазі того еталона, масу якого в системі SI прийняли за одиницю маси. На підставі відомої зі шкільного курсу фізики формули

$$P = mg \tag{*}$$

можна встановити таке співвідношення між старою та новою одиницями виміру сили:

$$1 \text{ кГ} = 1 \text{ кг} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 9,81 \text{ Н} \Rightarrow 1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кГ}.$$

Оскільки і при виборі одиниці виміру маси (в системі SI), і при виборі одиниці виміру сили (у старій системі, що звалась технічною системою одиниць МКС) брався один і той же еталон, то числове значення його маси  $m_n$  в системі SI збігається з числовим значенням його ваги  $P_c$  у системі МКС:

$$m = m_n \text{ кг}, \quad P = P_c \text{ кГ} \Rightarrow m_n = P_c.$$

У побуті вага тіл до цього часу вимірюється в кілограмах (кГ).

У формулі (\*)  $g$  – прискорення сили ваги, тобто прискорення вільного падіння тіл у пустоті відносно Землі поблизу її поверхні. Позначимо  $j$  прискорення земного тяжіння. Практично воно є прискоренням того ж падаючого

в пустоті тіла (точніше, матеріальної точки), однак відносно системи координат з початком у центрі мас Землі, причому ця система координат не обертається разом із Землею (її осі направлено на нерухомі зорі). Можна довести, що  $g = j - R\omega^2 \cos \varphi$ , тобто  $g \leq j$ . Тут  $\omega$  – кутова швидкість Землі, яка береться за однорідну кулю,  $\varphi$  – широта місця. На географічному полюсі  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $g = j = 9.83 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$ . На екваторі  $\varphi = 0$ ,  $g = 9.78 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$ . На широті  $\varphi = 45^\circ$  маємо  $g = 9.81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$ .

---

# Частина 1. Статика

## 1. Основні поняття та вихідні положення статyki

### 1.1. Предмет статyki. Об'єкти статyki

**Статикою** називається розділ теоретичної механіки, в якому:

- 1) викладається загальне вчення про сили;
- 2) вивчаються умови рівноваги систем сил, що прикладені до твердих тіл;
- 3) перетворюються одні системи сил в інші, їм еквівалентні.

Говорячи коротко, *статика – це наука про сили*.

**Сила** в механіці – основна міра механічної взаємодії матеріальних тіл, в результаті чого тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення або деформуватись (змінювати свою форму). Сила – векторна величина: характер її дії на тіло визначається модулем, напрямом і точкою прикладання. Напрямом сили є той напрям, вздовж якого вільна матеріальна точка, яка перебуває в спокої, починає рухатись під дією сили.

Поняття сили є вдалим витвором людського розуму; це – символ, абстракція. Реально “сила” в природі не існує, на відміну від руху або деформації тіла. Поняття сили було введено для того, щоб характеризувати причину зміни положення тіл у просторі або деформування тіл. Сила – не єдино можливий спосіб для цього. Але з усіх запропонованих у різні часи способів варіант “сили” виявився найпростішим. Альтернативним є, наприклад, підхід, викладений у книзі Hertz Н. “Die Principien der Mechahik in neuem Zusammenhange dargestellt”, Gesammelte Werke, 1910, В. 3, Н. 190 (є російський переклад: Герц Г. “Принципы механики, изложенные в новой связи”, М., 1959, Изд-во АН СССР).

Часто кажуть: “рівновага тіла” або “рівновага системи тіл”. Говорячи строго, слово “рівновага” більше підходить для сил, аніж для матеріальних тіл і не рівнозначне слову “спокій”. Якщо ми кажемо, що всі сили, прикладені до вільної матеріальної точки, зрівноважені, то це означає тільки те, що сума сил дорівнює нулеві. З цього, звісно, не випливає, що точка перебуває у спокої: вона може також рухатись рівномірно і прямолінійно. Щоб матеріальна точка перебувала в спокої, умови, що ставляться до сил, слід доповнити вимогою рівності нулеві початкової швидкості точки, причому сукупність цих умов на підставі закону інерції буде і достатньою.

Проте за багатовіковою традицією, що склалась, у теоретичній механіці слово “рівновага” застосовується не тільки до сил, але також і до систем матеріальних точок. При цьому під словами “рівновага системи матеріальних точок” мається на увазі стан спокою системи.

У багатьох випадках форма і розміри тіла, що рухається (або перебуває у спокої) не відіграють істотної ролі. Тому вводиться поняття матеріальної точки, яка не має протяжності, але володіє масою (мірою інертності матеріальної точки). **Матеріальною точкою** (або матеріальною частинкою) зветься тіло настільки малих розмірів, що відмінностями в русі окремих його точок можна нехтувати. Матеріальну точку можна уявити собі у вигляді геометричної точки, наділеної масою. **Ізольованою матеріальною точкою** називається така точка, дією на яку інших тіл або точок можна знехтувати.

**Механічною системою матеріальних точок** називається система (сукупність, множина) матеріальних точок, рух кожної з яких залежить від положення та руху решти точок системи. Всяке матеріальне тіло (тверде, рідке, газоподібне) є механічною системою, що складається з дуже великої кількості матеріальних частинок (точок). Довільна сукупність матеріальних тіл, так чи інакше зв'язаних між собою, також утворює механічну систему (ферма, механізм, машина).

Якщо точки системи або тіла зв'язані між собою так, що відстань між двома довільними точками залишається сталою, то така система називається **незмінюваною системою**, а тіло – **абсолютно твердим тілом**. У супротивному разі система зветься **змінюваною**, а тіло – таким, що **деформується** (деформівним).

Всі тіла, які зустрічаються в природі, в результаті зовнішніх впливів у тій чи іншій мірі змінюють свою форму (деформуються). Проте багато твердих тіл настільки мало змінюють свою форму, що при розв'язуванні багатьох задач механіки припустимо зовсім нехтувати цими деформаціями і розглядати такі тіла, як недеформівні або абсолютно тверді. Зважаючи на важливість поняття, ще раз означимо, що **абсолютно твердим тілом** називається тіло, в якому відстані між двома довільними його точками залишаються незмінними, незалежно від дії тих чи інших сил.

## 1.2. Еквівалентні системи сил

**Еквівалентними системами сил** називаються такі дві системи сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  і  $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ , кожна з яких можна замінити іншою, не порушуючи стан твердого тіла :

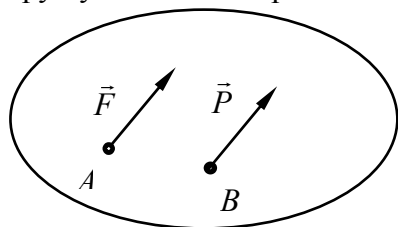


Рис. 1.1

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n), \quad k \leq n, \quad k \geq 0.$$

Якщо система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  еквівалентна одній силі  $\vec{R}$  :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R},$$

то сила  $\vec{R}$  називається **рівнодійною** даної системи сил. Одна рівнодійна сила може замінити дію всіх даних сил.

**Зрівноважувальною силою** називається сила  $\vec{F}$ , модуль якої дорівнює модулю рівнодійної, лінія дії збігається, а напрям – прямо протилежний :

$$\vec{F} = -\vec{R}, \quad (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim -\vec{F}.$$

Система сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n, \vec{F}) \sim 0$  називається *зрівноваженою*, або еквівалентною “нульовій силі”. Прикладом такої системи можуть бути сили, викликані повчальними діями героїчних персонажів відомої байки (Лебідь, Рак і Щука).

Звернімо увагу на різницю між поняттям еквівалентності двох сил і поняттям рівності векторів, які зображають ці сили. У математиці два вектори вважаються рівними, якщо вони паралельні, направлені в один бік і мають однакові модулі (рис. 1.1):  $\vec{F} \uparrow \vec{P}, F = P$ . Для еквівалентності двох сил цього недостатньо: з рівності  $\vec{F} = \vec{P}$  не випливає  $\vec{F} \sim \vec{P}$ . Якщо  $\vec{F} = \vec{P}$ , то для  $\vec{F} \sim \vec{P}$  потрібно, щоб вони були прикладені в одній точці тіла. У математиці розглядаються вільні вектори, до яких сила не належить. Однак

$$\{\vec{F} \sim \vec{P}\} \rightarrow \{\vec{F} = \vec{P}\}.$$

### 1.3. Види сил

Система сил, що діють на тверде тіло, може включати зосереджені (ізолювані) та розподілені сили. **Зосередженою силою** називається сила, прикладена до тіла в якій-небудь одній його точці. **Розподіленими силами** називаються сили, що діють на всі точки тіла (масові, або об’ємні сили) чи на всі точки певної частини поверхні тіла (поверхневі сили). До об’ємних сил належать сили далекодії (наприклад сили тяжіння). Поверхневі сили виникають при дії одного тіла на інше безпосереднім співдотиком і прикладені до тієї частини поверхні тіла, в якій тіла, що взаємодіють, дотикаються одне до одного.

Поняття зосередженої сили є умовним, оскільки прикласти силу до тіла в одній точці практично неможливо. Сили, які в механіці розглядають як зосереджені, по суті, є рівнодійними деяких систем розподілених сил. Зокрема,

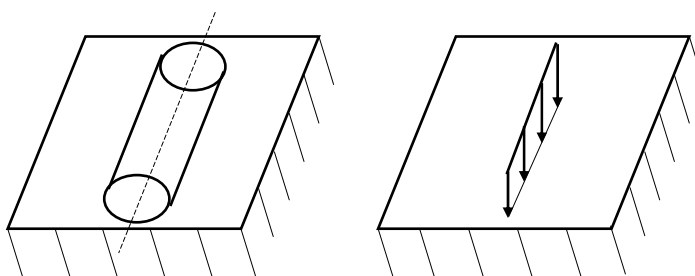


Рис. 1.2

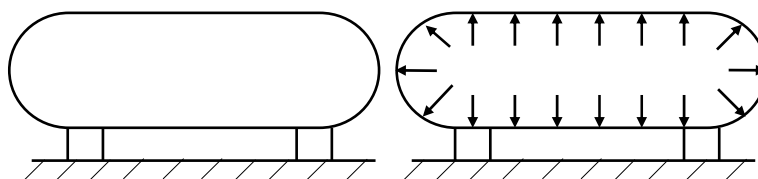


Рис. 1.3

сила ваги, яка розглядається в механіці як така, що діє на дане тверде тіло, являє

собою рівнодійну сил ваги, що діють на його частинки. Лінія дії цієї рівнодійної проходить через точку, яку називають центром ваги тіла.

Розрізняють сили, розподілені по лінії, по поверхні і по об'єму тіла. Тиск важкого циліндричного катка (рис. 1.2) на горизонтальну опорну поверхню являє собою сили, розподілені **вздовж лінії** (вздовж відрізка прямої).

Тиск газу на стінки судини слугує прикладом сил, розподілених **по поверхні** (рис. 1.3).

Дія сил тяжіння (рис. 1.4) ілюструє випадок, коли сили розподілені по об'єму тіла.

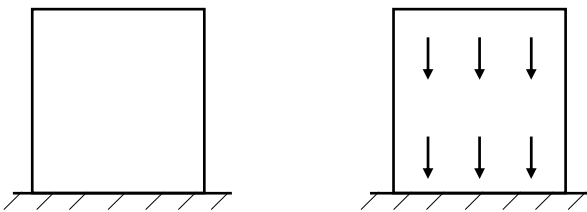


Рис. 1.4

Розподілені сили задаються їхньою **інтенсивністю**. Спочатку доцільно ввести (як і взагалі в диференціальному численні) поняття середньої інтенсивності. Середньою інтенсивністю об'ємних сил в околі розглядуваної точки тіла є величина  $q_{\text{ср}} = \frac{\Delta F}{\Delta V}$ , де  $\Delta V$  – об'єм елемента, виділеного в околі точки;  $\Delta F$  – сила, що діє на цей елемент. *Інтенсивністю сили, розподіленої по просторовій області*, в даній точці тіла називається величина

$$q = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}.$$

(Для точності, слід зауважити, що тут під “силою” мається на увазі “модуль сили”).

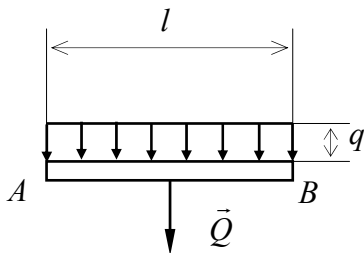


Рис. 1.5

Для сил, розподілених по поверхні та по лінії, хід міркувань аналогічний.

У випадку рівномірно розподілених сил інтенсивність визначається простим діленням повної сили тиску на довжину, площу чи об'єм ділянки її прикладання (тобто на довжину лінії, площу поверхні чи об'єм тіла). Для таких сил  $q = \text{const}$ . При статичних розрахунках таку систему сил можна замінити рівнодійною  $\bar{Q}$ .

Наприклад, у випадку сил, рівномірно розподілених вздовж відрізка прямої довжини  $l$  (рис. 1.5), модуль цієї сили  $Q = lq$ , а сама сила  $\bar{Q}$  прикладена в середині відрізка  $AB$ .

Сили, що діють на матеріальну систему, можна розділити ще на зовнішні і внутрішні. **Внутрішніми силами** називаються сили, що виникають внаслідок взаємодії частинок (тіл), які належать самій системі, тобто це сили, з якими частини даного тіла або тіла даної системи діють одні на одних. **Зовнішніми силами** називаються сили, що виникають від дії тіл, які не належать системі.

### 1.4. Аксиоми статyki

Всього аксіом – три. Перша встановлює умови, при виконанні яких найпростіша система сил є зрівноваженою. Дві наступні аксиоми встановлюють найпростіші дії з силами, при яких стан тіла не змінюється.

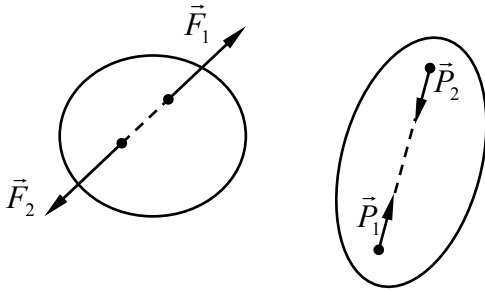


Рис. 1.6

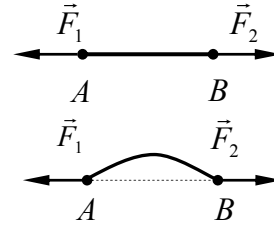


Рис. 1.7

**Аксиома 1.** Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, будуть зрівноважені (тобто еквівалентні нулеві) тоді і тільки тоді, коли їхні модулі рівні, сили діють вздовж однієї прямої і направлені в протилежні сторони (рис. 1.6).

Вказані дві сили зветься також такими, що зрівноважуються (взаємно зрівноважуються). На рис. 1.6 показані дві зрівноважені системи сил:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0, \quad (\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim 0.$$

При розв’язуванні певних задач статyki доводиться розглядати сили, що прикладені до кінців жорстких стержнів, вагою яких можна нехтувати, причому відомо, що “стержні перебувають у рівновазі” (рис. 1.7).

З аксиоми 1 випливає, що сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , які діють на стержень  $AB$ , такі:  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ . Ці твердження зберігаються і у разі, коли вісь стержня криволінійна (рис.1.7, знизу).

**Аксиома 2.** Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, до нього можна прикладати або від нього відкидати сили тоді і тільки тоді, коли вони складають зрівноважену систему.

Іншими словами: дві системи сил, що відрізняються на зрівноважену систему, еквівалентні одна одній.

**Наслідок.** Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладання сили вздовж лінії її дії в довільну іншу точку тіла (тобто сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є ковзним вектором).

**Доведення.** Нехай в точці  $A$  до тіла прикладена сила  $\vec{F}_A$  (рис.1.8). Прикладемо в точці  $B$  на лінії дії сили  $\vec{F}_A$  дві зрівноважені сили  $\vec{F}_B$  і  $\vec{F}'_B$ , причому  $\vec{F}_A = \vec{F}_B$ . Згідно з аксіомою 2

$$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B).$$

Сили  $\vec{F}_A$  і  $\vec{F}'_B$  також утворюють зрівноважену систему сил, і тому їх можна відкинути :

$$(\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B) \sim \vec{F}'_B.$$

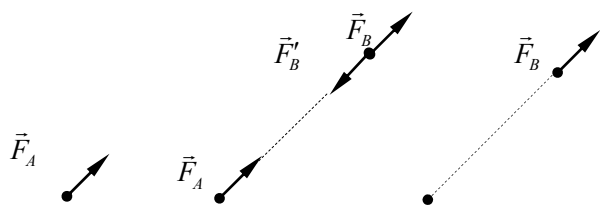


Рис. 1.8

Отже,  $\vec{F}_A \sim \vec{F}_B$ , тобто дійсно, сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є ковзним вектором.

**Зауваження.** Обидві аксіоми та наслідок не можна застосовувати до деформівних тіл: перенесення точки прикладання сили вздовж лінії її дії змінює напружено-деформований стан тіла. Якщо  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$  (інше позначення:

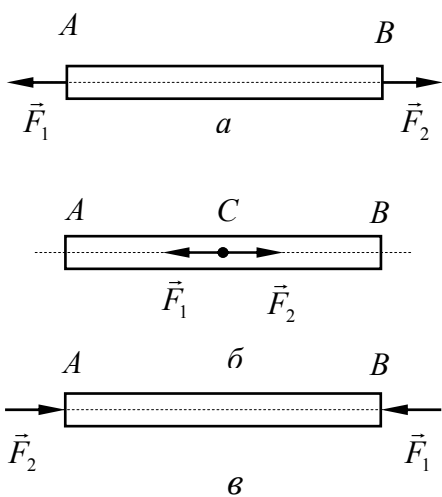


Рис. 1.9

$F_1 = F_2$ ), то в усіх трьох випадках стержень  $AB$  (рис. 1.9) перебуває в рівновазі.

Проте внутрішні зусилля різні: на рис. 1.9, а стержень розтягується, на рис. 1.9, б – не напружений, на рис. 1.9, в стержень стискується. Отже, переносити точку прикладання сили вздовж лінії дії при визначенні внутрішніх зусиль не можна.

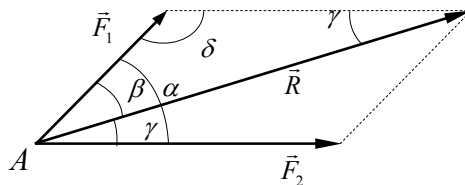


Рис. 1.10

**Аксіома 3** (аксіома паралелограма сил).

Не змінюючи стан тіла, дві сили, прикладені в одній його точці, можна замінити однією рівнодійною силою, прикладеною в тій же точці і рівною їхній векторній сумі.

Ця аксіома встановлює дві обставини (рис. 1.10):

1) дві сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , прикладені в одній точці  $A$ , мають рівнодійну  $\vec{R}$ , тобто

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R};$$

2)  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , чим визначаються модуль, напрям і точка прикладання рівнодійної сили.

З рис. 1.10 дістанемо:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \delta,$$

$$\cos \delta = \cos[\pi - (\beta + \gamma)] = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \alpha = \widehat{(\vec{F}_1, \vec{F}_2)},$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \widehat{(\vec{F}_1, \vec{F}_2)}}.$$



Пригадаємо, що кут  $\alpha$  між двома векторами  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , згідно з означенням, задовольняє умови  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , причому  $\alpha = 0$  для векторів, що лежать на одній прямій і однаково направлені;  $\alpha = \pi$  для векторів, що лежать на одній прямій і протилежно направлені.

Аксиома 3 застосовна до довільних, не обов'язково абсолютно твердих тіл.

Аксиоми 2 і 3 дають можливість переходити від однієї системи сил до іншої системи, їй еквівалентної. Зокрема, вони дозволяють розкласти силу  $\vec{R}$  на дві, три і більше складових, тобто перейти до іншої системи сил, для якої сила  $\vec{R}$  є рівнодійною.

### 1.5. Деякі інші фундаментальні положення статyki

#### 1. Закон рівності (за модулями) дії та протидії (третій закон Ньютона).

Сили, з якими два тіла діють одне на одне (дія та протидія), мають однакові модулі і направлені в протилежні сторони по одній прямій (рис. 1.11):

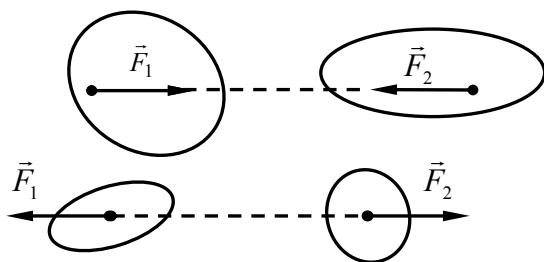


Рис. 1.11

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Дія та протидія не зрівноважуються (не утворюють зрівноважену систему сил), оскільки вони прикладені до різних тіл.

Згідно з цим законом при взаємодії дві будь-які частини тіла (чи конструкції) діють одна на одну з протилежно направленими

силами, модулі яких однакові. Оскільки при вивченні умов рівноваги тіло розглядається як абсолютно тверде, то всі внутрішні сили утворюють при цьому зрівноважену систему сил, яку можна відкинути, враховуючи тільки зовнішні сили.

2. Щоб розглянути наступне фундаментальне положення, потрібно ввести поняття в'язі. **Вільним** називається таке тіло, що може займати які завгодно положення і яке може здійснювати довільні переміщення із заданого положення у просторі, тобто його положення та рух нічим не обмежені. Прикладом є повітряна куля в повітрі. У більшості технічних задач зустрічаються лише невольні тверді тіла. **Невольним твердим тілом** називається тіло, переміщенню якого у просторі заважають які-небудь інші тіла, що з'єднані з ним або дотикаються до нього. Все те, що обмежує переміщення даного тіла у просторі, називається **в'яззю**. У статичці ми будемо розглядати в'язі, які реалізуються певними тілами, і називати в'язями самі ці тіла. (Такі в'язі називаються геометричними – на відміну від кінематичних в'язей).

Приклади :

- 1) для книги, що лежить на столі, в'яззю є стіл;
- 2) для драбини, що приставлена до стіни, в'язями є стіна і підлога;
- 3) для кулі, що котиться по біль'ярдному столу, в'язями є стіл і його борти.

**Принцип затвердіння.** Рівновага механічної системи, яка перебуває у спокої, не порушується при накладанні нових **в'язей**. Зокрема, рівновага деформівного тіла, яке перебуває під дією деякої системи сил, не порушиться, якщо тіло вважати затверділим (абсолютно твердим).

Умови рівноваги, які є необхідними і достатніми для абсолютно твердого тіла, є необхідними, але не достатніми для відповідного деформованого тіла. Так, абсолютно жорсткий стержень може перебувати у рівновазі під дією як розтягуючих, так і стискаючих сил. Для рівноваги гнучкої нитки під дією двох сил, прикладених до її кінців, необхідні ті ж умови, що і для жорсткого стержня (модулі сил рівні, напрями протилежні). Однак ці умови не є достатніми: для рівноваги нитки вимагається ще, щоб сили були розтяжними (під дією сил, направлених одна до одної, нитка зімнеться).

**3.** Має місце таке твердження, яке називають **законом інерції**: *ізолювана матеріальна точка перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно.* Цей закон діє в інерціальній системі координат. Зокрема, тіло, яке в початковий момент перебуває у спокої, буде перебувати в цьому стані, якщо на нього не діють ніякі сили. Під станом рівноваги матеріальної точки і твердого тіла розуміють не тільки стан спокою, але і рух за інерцією.

Із другого закону Ньютона, який відомий зі шкільного курсу фізики, випливає, що тіло під дією однієї сили набуває прискорення  $i$ , отже, не може перебувати в спокої. Це означає, що одна сила не може складати зрівноважену систему сил (тобто еквівалентну нулеві).

## 1.6. Теорема про три сили

**Якщо три сили, що діють на тверде тіло, перебувають у рівновазі та лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині та їхні лінії дії перетинаються в одній точці.**

*Доведення.* Нехай до абсолютно твердого тіла в трьох різних точках прикладені сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  і  $\vec{F}_3$ , які перебувають у рівновазі, причому лінії дії двох сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  перетинаються в точці  $A$  (рис. 1.12). Користуючись наслідком з аксіоми 2, перенесемо сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  в точку  $A$  і замінимо їх однією силою  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  (користуючись аксіомою 3). Наслідком цього є те, що дана система трьох сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  і  $\vec{F}_3$  зведена до двох сил  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$ . За

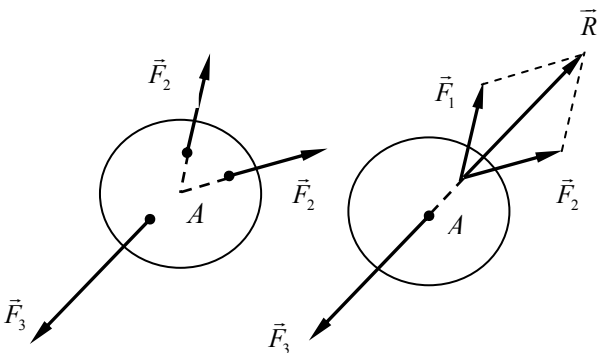


Рис. 1.12

умовами теореми “тіло перебуває у рівновазі” (в лапках написано через те, що не тіло, а сили, що діють на тіло, перебувають у рівновазі). Згідно з аксіомою 1 сили  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$  повинні мати спільну лінію дії. Отже, лінії дії всіх трьох сил мають перетинатися в одній точці. Інколи зустрічається таке формулювання теореми про

три непаралельні сили: якщо три непаралельні сили, що діють на тверде тіло, перебувають у рівновазі і лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці, тобто вони утворюють систему збіжних сил.

Ця теорема слабкіша за вищезгадану теорему, а доводиться аналогічно.

### 1.7. Активні сили та реакції в'язей

Всі сили, що діють на тверде тіло, можна розділити на дві категорії: активні сили та реакції в'язей. **Активною** називається сила, яка, почавши діяти на тіло, що перебуває в спокої, може привести його в рух. **Активні сили не залежать від в'язей, а значить – і від реакцій в'язей, що накладені на тверде тіло. Реакції в'язей залежать від активних сил.**

До поняття реакцій в'язей можна дійти за допомогою таких міркувань.

В'язі, що накладені на точки системи, обмежують свободу руху цих точок, відхиляючи їхній рух від того, який вони мали б під дією тих же сил, якби були вільні від в'язей. Тому можна вважати, що ефект дії в'язей такий же, як і дії сил. Внаслідок цього дію в'язей можна замінити відповідними силами, які зветься реакціями в'язей.

Тіло, прагнучи під дією прикладених до нього сил здійснити переміщення, якому заважає в'язь, діє на неї з певною силою, що зветься **силою тиску на в'язь**. Одночасно за законом дії та протидії в'язь буде діяти на тіло з такою ж за модулем, але протилежно направленою силою. Сила, з якою в'язь діє на тіло, заважаючи тим чи іншим його переміщенням, називається **реакцією в'язі**. *Направлена ця реакція в сторону, протилежну тій, куди в'язь не дозволяє тілу переміщуватись.* Якщо в'язь може заважати переміщенню тіла в декількох напрямках, то напрям реакції такої в'язі наперед невідомий і має знаходитись у результаті розв'язування відповідної задачі про рівновагу сил.

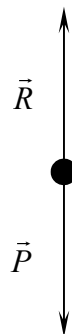
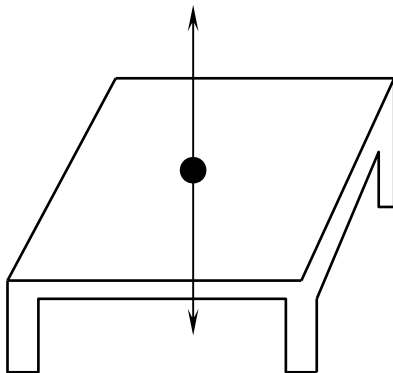


Рис. 1.13

Реакції в'язей за своєю природою дещо відрізняються від усіх інших (активних) сил. Відмінність полягає в тому, що реакція в'язі не цілком визначається самою в'яззю. Її модуль, а іноді і напрям залежать ще від інших сил, що діють на систему, і від руху системи (при його наявності). При відсутності активних сил і руху реакції взагалі не виникають.

Якщо механічна система рухається, то “статичні” реакції відрізняються від “динамічних”. Наприклад, тверде тіло, підвішене вертикально на нитці, що не розтягується, викликає в ній реакцію (натяг нитки), модуль якої дорівнює вазі тіла. При коливаннях тіла (маятник) реакція нитки, як і раніше (в стані спокою), направлена вздовж нитки, однак її модуль буде залежати не тільки від ваги тіла, а й від кута відхилення  $\varphi$  і кутової швидкості  $\dot{\varphi}$ , тобто і від руху тіла (див. далі підрозділ 1.9).

На відміну від реакцій в'язей, модуль і напрям кожної активної сили чи її залежність  $\vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  від часу, координат точки прикладання сили і швидкості відомі заздалегідь і від інших сил, прикладених до системи, не залежать. Крім того, активні сили, діючи на систему, що перебуває в спокої, можуть надавати їй той чи інший рух – звідси і назва “активні”. Реакції в'язей цього робити не можуть, через це їх називають “пасивними силами”.

### 1.8. Принцип звільнюваності від в'язей

Візьмімо в руки кусочок крейди. Якщо розвести пальці, то під дією сили ваги (активна сила) він упаде на підлогу. Це ж тіло лежить на поверхні столу не падаючи (рис. 1.13): заважає стіл, який для нього є в'яззю. Забравши стіл, ми змінимо механічний стан шматочка крейди: під дією сили  $\vec{P}$  він упаде на підлогу.

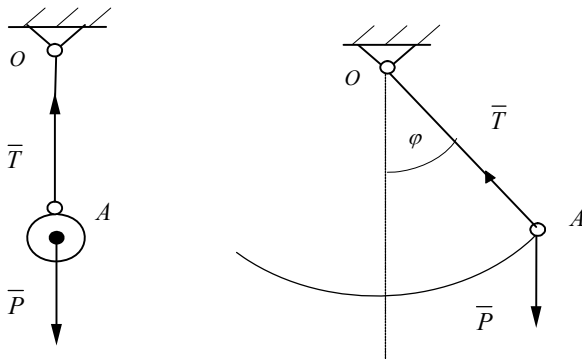


Рис. 1.14

Що потрібно зробити для того, щоб тіло залишалося на тій же висоті від підлоги? Відповідь очевидна: для цього потрібно компенсувати дію сили ваги. Оскільки остання направлена вертикально вниз, то згідно з аксіомою 1 (див. підрозділ 1.4) вона може врівноважитися лише силою з таким же модулем і направленою вертикально

вверх вздовж тієї ж прямої:  $(\vec{P}, \vec{R}) \sim 0$ .

У підрозділі 1.7 було зазначено, що механічний ефект в'язей можна замінити пасивними силами, які називаються реакціями в'язей. Тому всяку невільну систему можна розглядати як вільну, звільнивши її від в'язей і замінивши дію в'язей їхніми реакціями. У цьому й полягає принцип (аксіома) звільнюваності від в'язей:

*Не порушуючи механічний стан абсолютно твердого тіла, в'язі, накладені на нього, можна відкинути, замінивши їхню дію на тіло так званими реакціями в'язей.*

### 1.9. Напрями реакцій основних типів в'язей

У статиці в'язі, що накладаються на тверде тіло, частіше за все зустрічаються у вигляді нерухомих поверхонь, ліній, точок, гнучких ниток. В усіх цих випадках модулі реакцій (а для шарнірів і напрямки) визначаються залежно від активних сил, що діють на тіло.

**1.9.1. Нитка та стержень.** Для тіла в'яззю слугує нерозтягувана нитка  $OA$  (рис. 1.14). Обмежуваність свободи переміщення точки  $A$  проявляється в тому, що вона змушена залишатися на незмінному віддаленні від точки  $O$ . Тіло діє на нитку з силою  $\vec{P}$  (сила ваги). Нитка діє на тіло з силою  $\vec{T}$ . Розглянувши

тіло та нитку як одне ціле, приходимо до висновку, що реакція  $\vec{T}$  нитки згідно з аксіомою 1 мусить бути направлена вздовж лінії дії сили  $\vec{P}$  у протилежну сторону, причому  $\vec{T} = -\vec{P}$ .

Для обґрунтування цієї вимоги можна залучити також закон рівності дії та протидії до системи двох тіл: тіла та нитки. Отже, реакція гнучкої нитки завжди

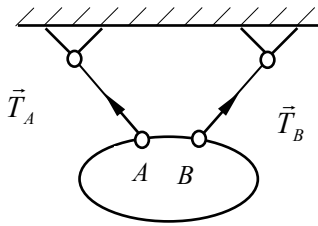


Рис. 1.15

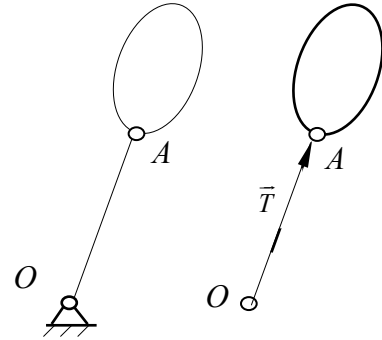
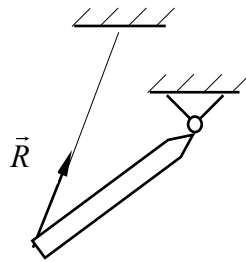


Рис. 1.16

направлена по нитці і дорівнює натягу нитки.

Взагалі, якщо на тверде тіло накладена гнучка в'язь (нитка, канат, трос, ланцюг), то реакція в'язі прикладена до твердого тіла в точці його кріплення до гнучкої в'язі (рис. 1.15). Реакція гнучкої в'язі направлена по дотичній до в'язі в точці її накладання.

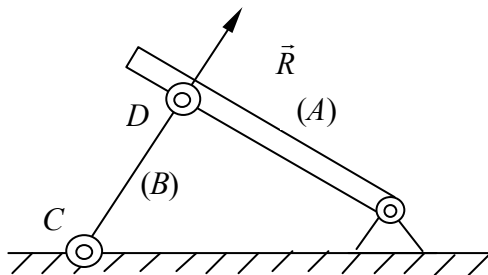


Рис. 1.17

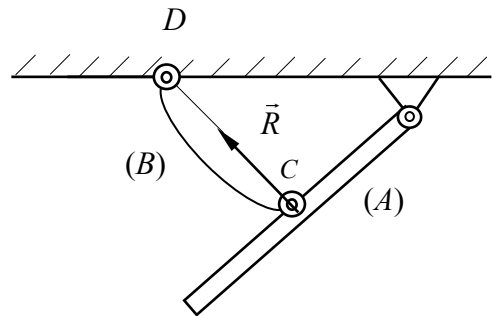


Рис. 1.18

Якщо тіло вагою  $P$  здійснює коливання (маятник), то реакція нитки  $\vec{T}$ , як і раніше, направлена вздовж нитки (рис. 1.14, справа), однак

$$|\vec{T}| = T = f\left(P, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Нехай тіло з'єднане з нерухомою точкою  $O$  за допомогою стрижня, вагою якого можна знехтувати (рис. 1.16). Кінці стрижня мають шарніри, які допускають свободу повороту. В'яззю для тіла слугує стрижень  $OA$ . Як і вище,  $\vec{R} = \vec{T}$ .

**Невагомий стрижень** – це стрижень  $CD$  (рис. 1.17), вагою якого в порівнянні з навантаженням, що його він сприймає, можна нехтувати. Нехай для якого-небудь тіла (конструкції) ( $A$ ), що “перебуває у рівновазі”, такий стрижень, прикріплений у точках  $C$  і  $D$  шарнірами, є в'яззю. Тоді на стрижень будуть діяти лише дві сили, прикладені в точках  $C$  і  $D$ . За умови рівноваги ці сили мають бути

направлені вздовж  $CD$ . Але тоді згідно з законом про дію та протидію стрижень буде діяти на тіло  $(A)$  з силою, також направленою вздовж  $CD$ . Отже, реакція  $\vec{R}$  невагомого шарнірно прикріпленого прямолінійного стрижня направлена вздовж його осі.

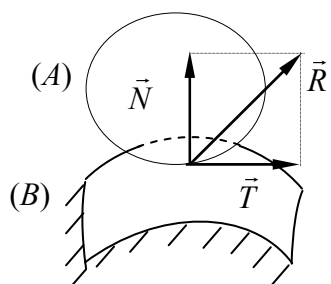


Рис. 1.19

Якщо в'язь  $(B)$  є криволінійний невагомий стрижень  $CD$ , то аналогічні міркування приведуть до висновку, що реакція стрижня теж направлена вздовж прямої  $CD$ , яка з'єднує шарніри  $C$  та  $D$ .

На рис. 1.17 напрям реакції відповідає випадку стиснутого стрижня, на рис.1.18 – розтягнутого.

Доведемо, що якщо абсолютно жорсткий невагомий прямолінійний стрижень, кінці якого з'єднані шарнірами з іншими частинами конструкції, перебуває в рівновазі під дією сил, прикладених до його кінців, то реакцію слід направити вздовж стрижня. Дійсно, якщо до стрижня зі сторони інших частин конструкції прикладені сили в кожному з його кінців (тобто в шарнірах), то після додавання сил виявиться, що в кожному з шарнірів

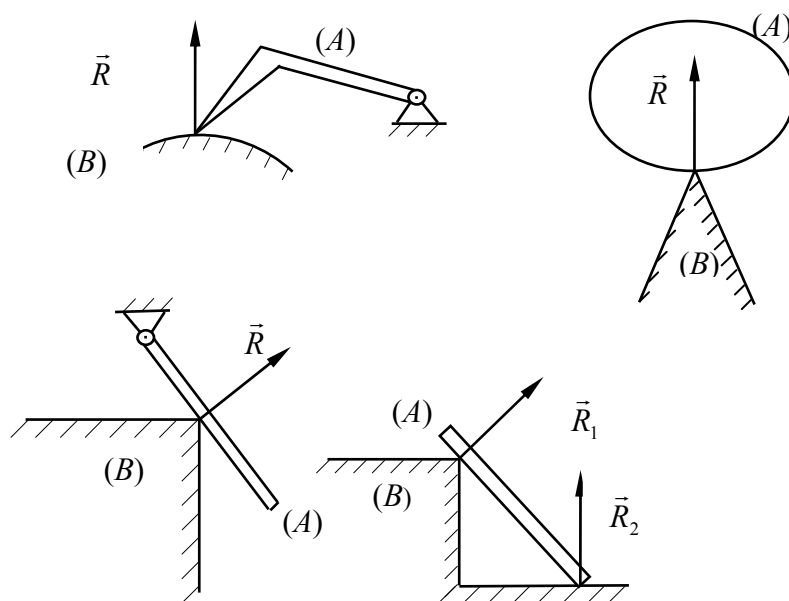


Рис. 1.20

прикладено по одній силі. У результаті стрижень перебуває в рівновазі під дією двох сил, прикладених в шарнірах. Згідно з аксіомою 1 модулі сил рівні, а сили направлені в протилежні сторони по одній лінії дії, тобто вздовж стрижня.

У випадку криволінійного невагомого стрижня ці сили направлені по прямій, що з'єднує кінці його (рис. 1. 7, знизу).

Зауважимо нарешті, що циліндричний шарнір на кінці стрижня – це провухина, яка обертається навколо осі. Вісь може бути закріплена або може нести провухину іншого стрижня. Розмірами шарніра звичайно нехтують.

1.9.2. Опора у вигляді поверхні, кривої та точки. Розглянемо спочатку випадок, коли в'язь  $(B)$  – це тіло, що обмежене поверхнею без аналітичних

особливостей, а тіло (A), на яке діє певна система сил, опирається на в'язь тими точками своєї поверхні, в яких також немає аналітичних особливостей (рис. 1.19).

У точці дотику поверхонь прикладена реакція  $\vec{R}$ . Напрямок вектора  $\vec{R}$  на підставі лише геометричних властивостей поверхонь тіла та в'язі встановити неможливо. Застосовуючи аксіому 3, розкладемо реакцію в'язі  $\vec{R}$  на дві складові: (позначення походять від перших букв слів *normal* – нормальна та *tangent* – дотична):

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}.$$

До певної міри ми можемо в'яснити фізичне походження дотичної складової  $\vec{T}$ . Вона породжується обмеженнями, що накладаються на ковзання поверхні тіла

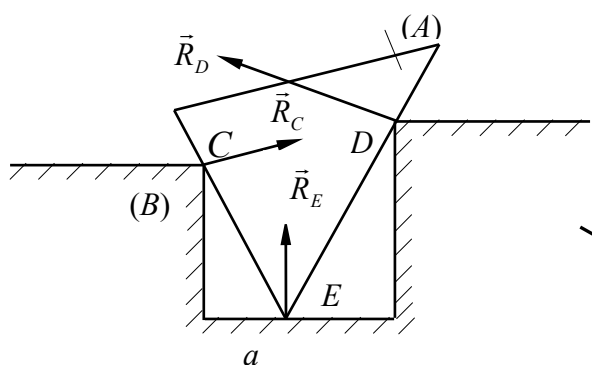


Рис. 1.21

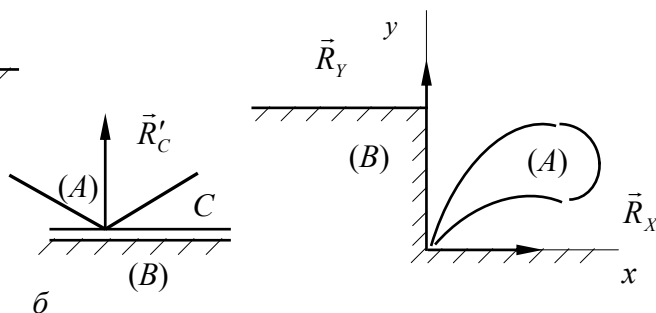


Рис. 1.22

(A) по поверхні в'язі (B). Ці обмеження залежать від ступеня шорсткості поверхонь тіла та в'язі, від сил молекулярного зчеплення та інше. Тому дотичну складову реакції в'язі можна назвати

**силою тертя**. Гладенькою будемо називати поверхню, тертям даного тіла об яку в першому наближенні можна знехтувати. В'язі без тертя зуться **ідеальними** ( $T = 0$ ). Якщо в'язь реалізується у вигляді деякого тіла, то реакція ідеальної в'язі направлена по спільній нормалі до поверхонь тіл, що співдотикаються, в точці їхнього дотику.

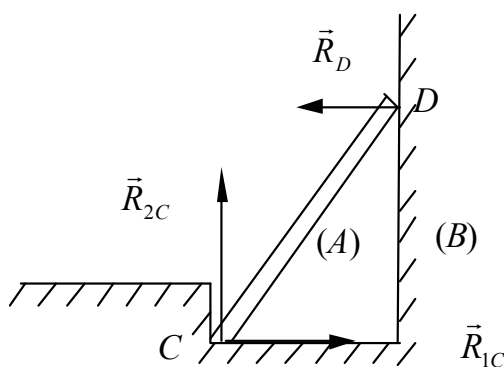


Рис. 1.23

Розглядено випадок, коли **одна з поверхонь має аналітичну особливість**, тобто до цієї поверхні в точці контакту неможливо провести певну (єдину) дотичну площину. Якщо одна з

поверхонь, що контактують, є точкою, то це не заважає розкласти реакцію на дві складові. За умови, що інша поверхня гладенька, реакція в'язі направлена по нормалі до цієї поверхні (рис. 1.20).

Нехай тверде тіло (A) в точках C і D (рис. 1.21) опирається на ребра двограних кутів, а в точці E – на гладеньку площину. Для встановлення напрямку реакцій в'язі (B) у точках C і D слід застосувати метод обернення, тобто уявити,

що двогранний кут (тепер він став досліджуваним тілом, а був в'язю) опирається на площину (тепер вона стала в'яззю, а була однією з граней тіла) – рис. 1.21, б. Ця обернена (нова) задача зводиться до попереднього випадку, тобто опорна реакція  $\vec{R}'_C$  направлена по відповідній нормалі – по нормалі до в'язі (B). Знову обернувши задачу, одержимо шукані напрями реакцій в точках C і D, причому на підставі закону рівності дії та протидії

$$\vec{R}_C = -\vec{R}'_C, \quad \vec{R}_D = -\vec{R}'_D.$$

Якщо тверде тіло (A) упирається гострим кінцем у кут (рис. 1.22), то в'язь (B) заважає переміщенням гострого кінця як по горизонталі, так і по вертикалі. Тому реакція  $\vec{R}$  кута може бути представлена двома складовими – вертикальною  $\vec{R}_y$  та горизонтальною  $\vec{R}_x$ . Їхні модулі та напрями в кінцевому результаті визначаються заданими (активними) силами.

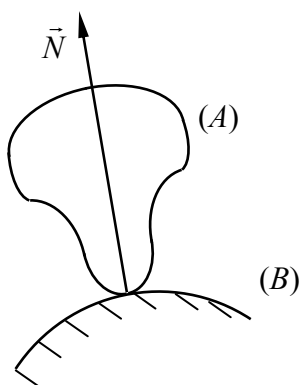


Рис. 1.24

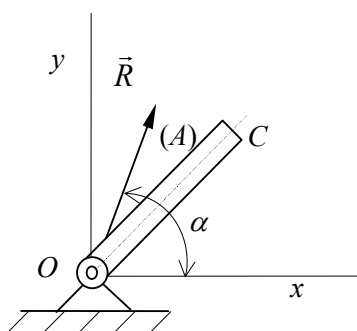


Рис. 1.25

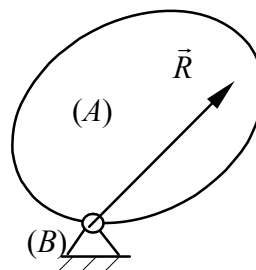


Рис. 1.26

Нехай, як приклад, драбина (A), приставлена до стіни, упирається в виступ підлоги. Подібну в'язь (рис. 1.23) слід розглядати як подвійну: кут C заважає переміщенню драбини по горизонталі вліво і по вертикалі вниз.

Тому дві складові  $\vec{R}_{1C}$  і  $\vec{R}_{2C}$  опорної реакції  $\vec{R}_C$  слід направити протилежно цим напрямам: першу – праворуч, другу – вгору. Підкреслимо, що, направивши реакцію  $\vec{R}_C$  вздовж  $\vec{CD}$ , ми зробили б помилку.

Нерухома **гладенька крива лінія**, що слугує в'яззю (рис. 1.24), розвиває реакцію, прикладену в точці дотику і направлену по нормалі до кривої лінії. Реакція лежить у нормальній площині, проведеній до кривої через точку дотику. Отже, реакція нерухомої лінії прикладена в точці дотику і може мати довільний напрям у нормальній площині, проведеній до кривої в цій точці.

Прикладом такої в'язі слугує циліндричний шарнір (підшипник), в якому вісь шарніра (рис. 1.25), перпендикулярна до площини рисунка (тобто вісь Oz), є нерухомою прямою лінією. Реакція  $\vec{R}$  такого шарніра може мати який завгодно напрям у площині, перпендикулярній до його осі (тобто в площині xOy).

**Нерухома точка** може розвивати яку завгодно за модулем і напрямом реакцію  $\vec{R}$ . Прикладами такої в'язі слугують сферичний шарнір (рис. 1.26) та підп'ятник (рис. 1.31).



Враховуючи практичну значимість двох останніх видів в'язей, виділимо їх в окремі типи і розглянемо детально.

1.9.3. *Циліндричний шарнір (або просто шарнір), циліндрична шарнірно-нерухома опора. Підшипник* здійснює таке з'єднання двох тіл, при якому одне тіло може повертатись відносно іншого навколо спільної осі, яка зветься віссю шарніра (наприклад, як дві половини ножиць). Якщо тіло ( $A$ ) прикріплене за допомогою такого шарніра (рис. 1.25) до нерухокої опори ( $B$ ), то точка  $O$  тіла не може при цьому переміститись ні в якому, перпендикулярному осі шарніра, напрямі. Значить, реакція  $\vec{R}$  циліндричного шарніра може мати довільний напрям у площині, перпендикулярній осі шарніра, тобто в площині  $xOy$ . Для сили  $\vec{R}$  в цьому випадку наперед невідомі не тільки її модуль  $R$ , а і напрям (кут  $\alpha$ ).

Часто циліндричний шарнір виконується у вигляді сукупності нерухомого валика  $E$  (рис. 1.27) і надітої на нього втулки  $G$ , з'єднаної з твердим тілом  $H$ , яке може повертатись навколо осі валика. В точці  $D$  дотику втулки  $G$  з валиком  $E$  виникає опорна реакція, направлена по нормалі до ідеально гладеньких поверхонь тіл, що співдотикаються. Оскільки положення точки дотику  $D$  заздалегідь невідоме, то неможливо одразу вказати напрям реакції  $\vec{R}$ . При розв'язуванні задач

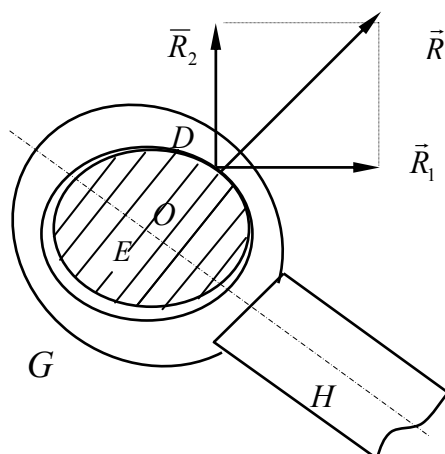


Рис. 1.27

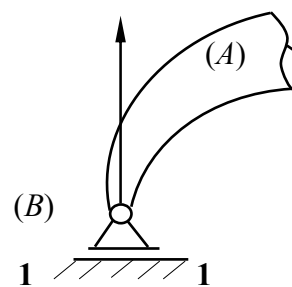


Рис. 1.28

реакція  $\vec{R}$  замінюється двома взаємно перпендикулярними складовими  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$ . Визначивши їх в процесі розв'язування задачі, знаходять далі модуль і напрям  $\vec{R}$ . Звичайно нехтуючи діаметром валика  $E$  порівняно з іншими розмірами, складові  $\vec{R}_1$  та  $\vec{R}_2$  прикладають в центрі  $O$ .

1.9.4. *Циліндрична шарнірно-рухома опора (B)* заважає переміщенню закріпленої точки тіла ( $A$ ) по перпендикуляру до площини 1 – 1. Тому реакція  $\vec{R}$  такої опори (рис. 1.28) також має напрям цього перпендикуляра. Такий вид в'язі має також назву рухокої шарнірної опори.

Розглянемо приклад конструкції, в якій реалізовані як нерухома, так і рухома шарнірні опори (рис. 1.29). Реакція  $\vec{N}_B$  такої опори направлена по нормалі до поверхні, на яку опираються катки рухокої опори  $B$ . Спосіб закріплення балки  $AB$ , показаний на рис. 1.29, використовується для того, щоб у ній не виникали додаткові напруги при зміні її довжини від зміни температури або від згинання.

Згідно з попереднім (пункт 3) реакція  $\vec{R}_A$  нерухомої шарнірної опори проходить через вісь шарніру і може мати який завгодно напрям у площині рисунка. При розв'язуванні задач реакцію  $\vec{R}_A$  зображають її складовими  $\vec{X}_A$  та  $\vec{Y}_A$ .

1.9.5. Сферичний шарнір (рис. 1.30) дає можливість тілам, які ним з'єднані, як завгодно повертатись одне відносно іншого. Прикладом служить прикріплення фотоапарата до штатива за допомогою кульової п'яти. Як і у випадку циліндричного шарніра (див. рис. 1.27), вказати заздалегідь положення точки дотику і, значить, напрям реакції  $\vec{R}$ , у випадку сферичного шарніра, – неможливо. При розв'язуванні задач реакцію  $\vec{R}$  сферичного шарніра замінюють трьома

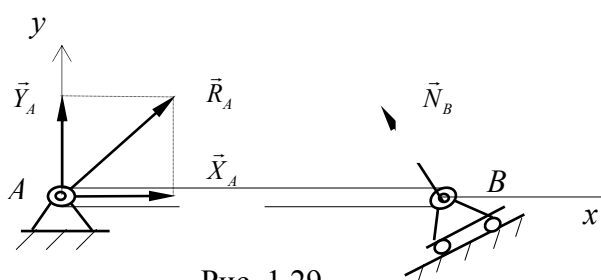


Рис. 1.29

взаємно перпендикулярними складовими  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  і  $\vec{R}_3$  вздовж осей  $Ox, Oy$  і  $Oz$ , прикладаючи їх (і допускаючи певну похибку) в центрі шарніра, тобто розкладаючи вектор  $\vec{R}$  за базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

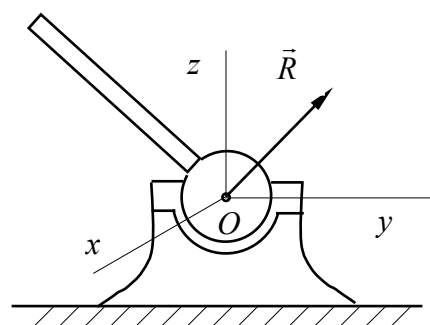


Рис. 1.30

$$\vec{R} = \vec{i}R_1 + \vec{j}R_2 + \vec{k}R_3.$$

Якщо тіло прикріплене за допомогою сферичного шарніра до нерухомої опори, то точка  $O$  тіла, яка збігається з центром шарніра, не може при цьому здійснювати ніякого переміщення у просторі. Отже, реакція  $\vec{R}$  сферичного шарніра може мати будь-який напрям у просторі. Для неї наперед невідомі як її модуль  $R$ , так і кути з осями  $Ox, Oy, Oz$ .

1.9.6. Під'ятник (підшипник з упором) (рис. 1.31). Заздалегідь визначити напрям реакції під'ятника неможливо: вона може мати довільний напрям в залежності від заданих (активних) сил.

1.9.7. Інші позначення шарнірних опор. В літературі та в інженерній практиці зустрічаються позначення шарнірних опорних пристроїв за допомогою стержневих елементів. Так, шарнірно-рухомої опору (рис. 1.28 або рис. 1.32, а) зображують ще й так, як на рис. 1.32, б; шарнірно-нерухомої опору (рис. 1.25 або рис. 1.33, а) зображено також на рис. 1.33, б. Реакція шарнірно-рухомої опори є  $\vec{R} = \vec{Y}$  (рис. 1.32). Реакція шарнірно-нерухомої опори має дві складові:  $\vec{R} = \vec{X} + \vec{Y}$  (рис. 1.33).

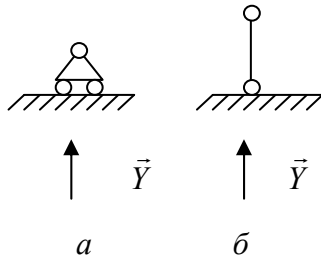


Рис. 1.32

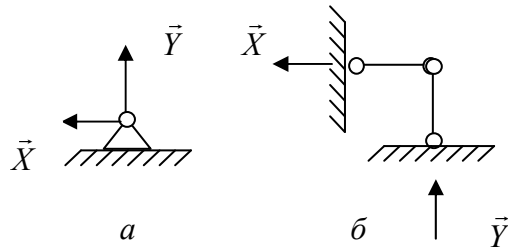


Рис. 1.33

### Питання для самоконтролю

1. Що вивчає механіка?
2. Що називають механічною взаємодією?
3. Що називають механічним рухом?
4. Наведіть приклади механічних рухів.
5. Наведіть приклади механічних взаємодій.
6. Що вивчає теоретична (загальна) механіка?
7. Якими є одиниці вимірювання механічних величин?
8. Що вивчає статика?
9. Що називають силою і якими параметрами характеризують її дію на тіло?
10. Чи існує сила «реально»?
11. Що називають еквівалентними системами сил?
12. Що називають зрівноважуючою силою?
13. Що називають зосередженою силою? розподіленими силами?
14. Якою є різниця між внутрішніми та зовнішніми силами?
15. Сформулюйте аксіоми статyki.
16. За яких умов абсолютно тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією однієї сили? двох сил? трьох сил?
17. Що називають активною силою? реакцією в'язі?
18. В чому полягає принцип (аксіома) звільнюваності від в'язей?
19. Якими є напрями реакцій основних геометричних в'язей?
20. Які в'язі називають ідеальними?

## 2. Система збіжних сил

### 2.1. Теорема про зведення збіжної системи сил до рівнодійної

Збіжними називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

**Теорема.** Система збіжних сил еквівалентна одній силі (рівнодійній), яка дорівнює сумі всіх цих сил і проходить через точку перетину їх ліній дії:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim R \quad (2.1)$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.2)$$

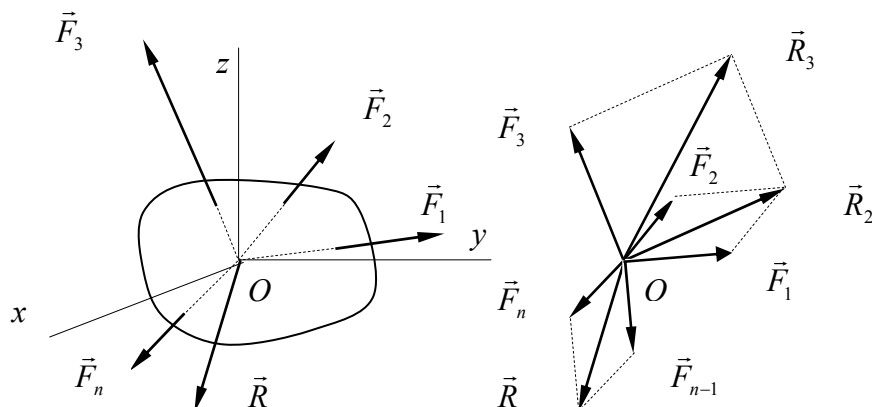


Рис. 2.1

*Доведення.* Нехай сили  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  перетинаються в точці  $O$  (рис. 2.1). Згідно з наслідком з аксіоми 2 (див. підрозділ 1.4), тобто враховуючи те, що сила – ковзний вектор, перенесемо точки прикладання сил вздовж ліній їхньої дії в точку  $O$ . Отримаємо систему сил, прикладених в одній точці. Вона еквівалентна вихідній системі збіжних сил. Застосовуючи послідовно аксіому паралелограма сил (аксіома 3, див. підрозділ 1.4), одержимо:

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}_1, \vec{F}_2) &\sim \vec{R}_2, \quad \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \\
 (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) &\sim (\vec{R}_2, \vec{F}_3) \sim \vec{R}_3, \quad \vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3; \\
 &\dots\dots\dots \\
 (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_{n-1}) &\sim \vec{R}_{n-1}, \quad \vec{R}_{n-1} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1}; \\
 (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_{n-1}, \vec{F}_n) &\sim \vec{R}_n, \quad \vec{R}_n = \vec{R}_{n-1} + \vec{F}_n \equiv \vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,
 \end{aligned}$$

що й доводить теорему.

### 2.2. Способи побудови рівнодійної збіжних сил

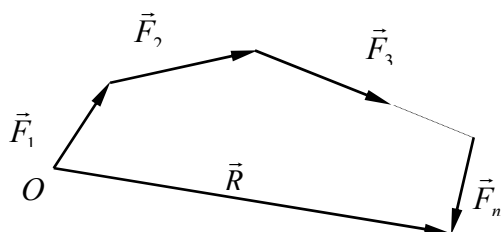


Рис. 2.2

Побудову рівнодійної можна спростити, якщо замість паралелограмів побудувати **силовий багатокутник** (рис. 2.2).

Якщо для знаходження рівнодійної за допомогою силового багатокутника використовуються правила геометрії чи тригонометрії, то такий спосіб називається **геометричним**. Найбільш загальним

способом знаходження модуля і напрямку рівнодійної є **аналітичний спосіб**, який також впливає з формули (2.2). Згадавши відповідні формули аналітичної геометрії та векторної алгебри, можна без додаткових пояснень легко написати:

$$\vec{R} = \vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z, \quad R_x = \text{пр}_x \vec{R} = \text{пр}_x \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \text{пр}_x \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_{ix},$$

$$R_y = \text{пр}_y \vec{R} = \text{пр}_y \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \text{пр}_y \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad (2.3)$$

$$R_z = \text{пр}_z \vec{R} = \text{пр}_z \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \text{пр}_z \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_{iz},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad \cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{R}.$$

Тут “пр” – проекція;  $Oxyz$  – ортогональна система координат;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – її ортонормований базис;  $(\vec{R}, x)$ ,  $(\vec{R}, y)$ ,  $(\vec{R}, z)$  – кути, які вектор  $\vec{R}$  утворює з осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  відповідно;  $\cos(\vec{R}, x)$ ,  $\cos(\vec{R}, y)$ ,  $\cos(\vec{R}, z)$  – напрямні косинуси вектора  $\vec{R}$ .

### 2.3. Умови рівноваги системи збіжних сил

Оскільки  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$ , то для рівноваги (тобто для еквівалентності нулеві) системи збіжних сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$  необхідно і достатньо, щоб її рівнодійна сила дорівнювала нулеві:

$$\vec{R} = 0. \quad (2.4)$$

Це умова рівноваги у **векторній формі**.

Умову рівноваги в **геометричній формі** можна сформулювати так: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий многокутник був замкнутим, тобто, щоб кінець останньої сили збігається з початком першої сили.

Умови рівноваги в **аналітичній формі** мають вигляд:

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0, \quad (2.5)$$

або

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (2.6)$$

Оскільки умови (2.5) чи (2.6) випливають з умови (2.4) в результаті проектування і, більше того, самі умови (2.6) містять проекції  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$  та  $F_{iz}$  заданих сил  $\vec{F}_i$  на три, вибрані довільним чином, взаємно перпендикулярні напрями, то спосіб складання умов рівноваги сил з використанням рівнянь (2.6) природно назвати **методом проекцій**.

Задача називається **статично означеною**, якщо кількість невідомих дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги. Якщо ж кількість невідомих величин перевищує кількість незалежних умов рівноваги, то задача називається **статично неозначеною**, а відповідна система називається **статично невизначальною (статично невизначуваною)**. Звичайно невідомими є реакції в'язей. Методи розв'язування статично неозначених задач виходять за рамки теоретичної механіки і належать до курсів опору матеріалів та будівельної механіки.

**Частковий випадок.** Якщо всі збіжні сили, що діють на тіло, лежать в одній площині, то вони утворюють **плоску систему** збіжних сил. Зв'язавши з цією площиною координатну систему  $Oxy$ , дістанемо лише дві умови рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (2.7)$$

#### 2.4. Методика розв'язування задач на рівновагу сил, прикладених до твердого тіла

Незалежно від взаємного розташування сил задачі статки на рівновагу доцільно розв'язувати в такій послідовності.

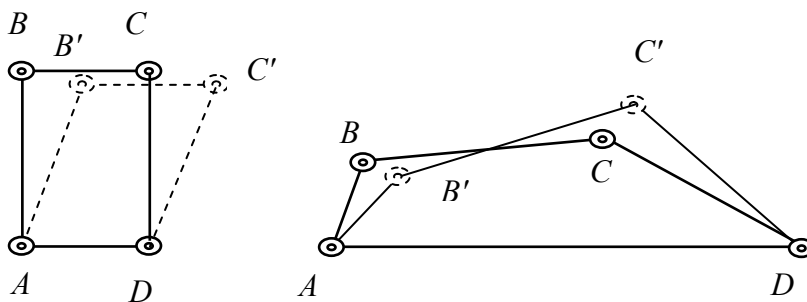


Рис. 2.3

1. Вибрати тіло (тіла), рівновага сил, прикладених до якого, має бути розглянута для знаходження невідомих величин.
2. Проаналізувати активні сили, що діють на тіло, і зобразити їх схематично на рисунку.
3. Якщо тверде тіло невільне, то, застосувавши принцип звільнюваності від в'язей, прикласти до нього відповідним чином направлені реакції в'язей.
4. Розглянути рівновагу сил, прикладених до даного невольного твердого тіла як вільного тіла, що перебуває під дією активних сил та реакцій в'язей, і скласти умови рівноваги сил.
5. Знайти невідомі величини, розв'язавши умови рівноваги геометричним способом або (і) аналітично.

#### 2.5. Розрахунок плоских ферм

**Фермою** називається конструкція, складена зі стрижнів, кінці яких з'єднані між собою шарнірами так, що стрижні не можуть мати відносних переміщень, тобто вся конструкція являє собою незмінювану систему. Місця з'єднання стрижнів зуться **вузлами** ферми, кожний шарнір збігається з вузлом ферми. Найпростішим прикладом ферми є система трьох стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами. Така система утворює трикутник, який є геометрично незмінюваною фігурою в тому розумінні, що, не змінюючи довжин стрижнів, неможливо змінити форму трикутника.

Геометрично змінювана система має рухомість і є **механізмом**. Прикладами можуть бути системи чотирьох стрижнів, наведені на рис. 2.3, для яких  $BD > B'D$ .

### 3. Момент сил

Використання ферм приводить до значної економії матеріалу. До того ж при певних умовах ферми допускають простий, елементарний розрахунок.

Залежно від виробничого призначення ферми бувають (рис. 2.4) :

**мостові** (використовуються при побудові мостів);

**кроквяні** (підтримують покрівлі в різних спорудах);

**кранові** (які є деталями піднімальних пристроїв).

Мостові та krokвяні ферми, подібно до балок, можуть опиратись на рухомі або нерухомі опори. Кранові ферми можуть опиратись на під'ятник і підтримуватись підшипниками.

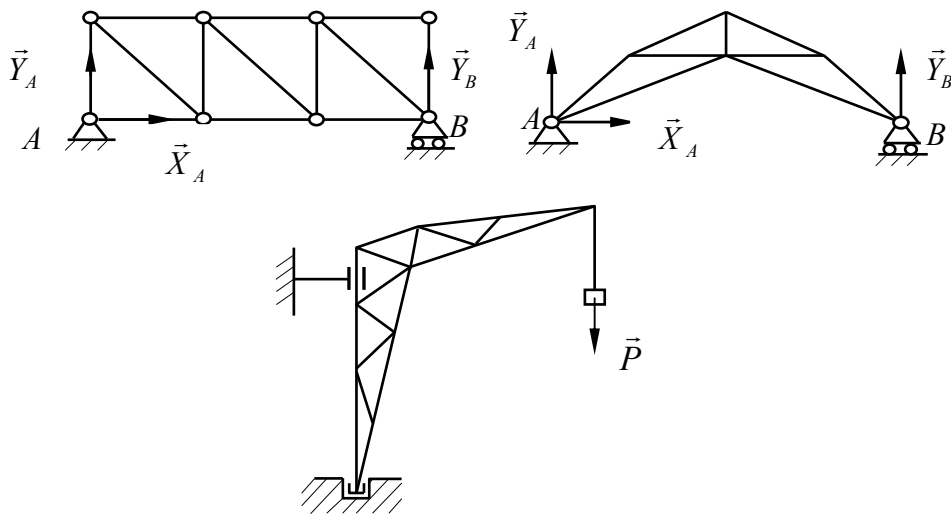


Рис. 2.4

При визначенні внутрішніх сил, що виникають у стрижнях ферми під дією активних зовнішніх навантажень і зовнішніх реакцій опор, звичайно виходять з таких спрощуючих припущень.

1. Стрижні ферми прямолінійні, а їхні кінці з'єднані ідеальними точковими шарнірами без тертя (тобто сили тертя в них не виникають).
2. Всі стержні абсолютно тверді, вага кожного з них нехтовно мала.
3. Зовнішні сили прикладені лише у вузлах ферми.

На практиці ці умови виконуються не цілком, а з деяким наближенням. Їх можна розглядати як припущення, що дають змогу одержати перше наближення до величин істинних внутрішніх зусиль у стрижнях ферми.

При цих припущеннях сила, що діє зі сторони якого-небудь вузла на стрижень, що примикає до нього (зусилля в стрижні), завжди направлена вздовж прямої, яка проходить через кінці цього стрижня. Тому стрижні, в разі їх прямолінійності, або розтягуються, або стискаються під дією цих сил. У реальних фермах стрижні з'єднані між собою не шарнірно, а за допомогою зварювання чи заклепування. Тому в стрижнях ферми виникає, крім розтягу чи стиску, ще й згин. Однак напруги від згину невеликі, в першому наближенні ними можна знехтувати. Друге припущення є звичайним для статки абсолютно твердого тіла. Практичне значення похибок, пов'язаних з другим припущенням, також невелике. Третє припущення не приводить до значних помилок при визначенні внутрішніх сил у стрижнях ферми, якщо відношення довжин стрижнів до прогону ферми невелике.

Якщо осі всіх стержнів ферми лежать в одній площині, ферма називається **плоскою**; в іншому разі – **просторовою**.

Розглянемо питання **структури** ферм.

Найпростішою плоскою фермою є тристрижнева ферма, вона містить три вузла і є основою для приєднання нових стрижнів.

Знайдемо найменшу кількість  $k$  стрижнів, потрібну для побудови ферми як незмінюваної конструкції при заданій кількості  $n$  вузлів:

$n$  вузлів  $\rightarrow k$  стержнів,  $k - ?$

Щоб зв'язати перші три вузла, необхідно мати три стержні :

3 вузла  $\rightarrow$  3 стержні.

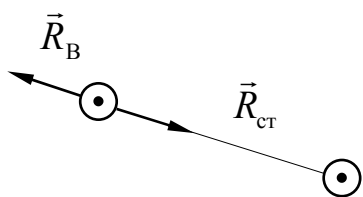


Рис. 2.5

Якщо до цієї незмінюваної конструкції додати ще один вузол за допомогою двох стрижнів, то знову одержимо незмінювану ферму, яка містить 5 стрижнів і 4 вузла (рис. 2.4). І так для кожного наступного вузла. Після побудови трикутника залишилось  $n-3$  вузлів. Для приєднання кожного з  $n-3$  вузлів, що залишилися,

за умови незмінюваності ферми потрібно по два стрижні:

$n-3$  вузла  $\rightarrow 2(n-3)$  стрижні.

Всього :

$3 + (n-3)$  вузлів  $\rightarrow 3 + 2(n-3) = k$  стрижнів,

тобто  $n$  вузлів  $\rightarrow k = 2n - 3$  стрижнів.

Отже, щоб стрижні не могли мати відносних переміщень (щоб ферма була **жорсткою**), потрібно, щоб

$$k = 2n - 3. \quad (2.8)$$

Рівність (2.8) зветься **умовою жорсткості** ферми.

Покажемо, що жорсткі ферми завжди **статично** означені, тобто що кількість незалежних рівнянь статички достатня для визначення зусиль у кожному із стрижнів.

*Доведення.* Якщо ферма жорстка, то її можна розглядати як абсолютно тверде тіло, що перебуває під дією активних сил та реакцій в'язей. На кожен вузол ферми буде діяти плоска система збіжних сил, яка складається із зовнішніх сил, що діють на ферму, та внутрішніх сил – реакцій стрижнів, які згідно з наведеними припущеннями мають напрями стрижнів. При цьому якщо реакція  $\vec{R}_{ct}$  стрижня на вузол направлена від вузла (рис. 2.5), то стрижень розтягнутий, оскільки реакція  $\vec{R}_B$  вузла на стрижень задовольняє умову:  $\vec{R}_B = -\vec{R}_{ct}$ . Для кожного вузла можна скласти дві умови рівноваги (2.7), оскільки на вузол діє система збіжних сил. Число вузлів дорівнює  $n$ , умов рівноваги буде  $2n$ . Невідомими є реакції стрижнів (число стрижнів дорівнює  $k$ ) і опорні реакції (їх число дорівнює 3, див. рис. 2.4), всього невідомих  $k + 3$ . З виразу (2.8) випливає  $k + 3 = 2n$ , тобто число невідомих дорівнює числу рівнянь: твердження доведено.

На рис. 2.6 зображена ферма, яка не є жорсткою, оскільки число стрижнів  $k = 12$ , число вузлів  $n = 8$ , тобто  $k = 12 < 2n - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$ . Отже, 15 невідомих мусять задовольняти 16 рівнянням.

Якщо  $k > 2n - 3$ , то ферма має “зайві” стрижні. У цьому випадку зусилля в стрижнях за допомогою одних тільки рівнянь статички абсолютно твердого тіла



### 3. Момент сил

визначити неможливо: така ферма статично неозначена. Отже, умова жорсткості (2.8) є для плоскої ферми і умовою статичної означеності. Приклад ферми із зайвими стрижнями наведено на рис. 2.7.

Тут  $k = 14$ ,  $n = 8$ , тобто  $k = 14 > 2n - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$ . Таким чином, рівнянь рівноваги – 16, а невідомих – 17.

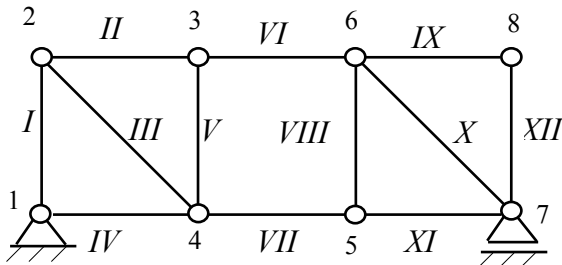


Рис. 2.6

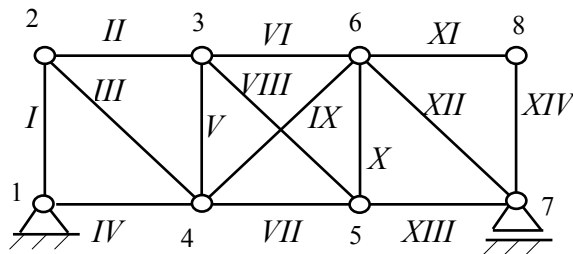


Рис. 2.7

При розрахунках ферм звичайно складають спочатку три рівняння рівноваги для всієї ферми, з яких визначають три опорні реакції, а потім уже знаходять зусилля в стрижнях. Найпростіший спосіб визначення зусиль в стрижнях ферм ґрунтується на методі **вирізання вузлів**, згідно з яким потрібно по чергово “вирізати вузли” і знаходити зусилля в стрижнях з умови замкнутості силових многокутників для кожного з вузлів або аналітично. Вирізаний з ферми вузол розглядається окремо як такий, що перебуває в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і реакцій розрізаних стрижнів, які направлені по стрижню

в сторону, протилежну вузлу, якщо зусилля розтягне, і в сторону вузла, якщо зусилля стискальне. Кожний наступний вузол вибирається так, щоб у ньому сходилося не більше двох стрижнів, для яких зусилля ще не визначені.

Метод вирізання вузлів зручний, коли потрібно знайти зусилля в усіх стрижнях ферми.

**Методом перерізів** можна знайти зусилля в будь-якому стрижні ферми безпосередньо, незалежно від зусиль у решті стрижнів.

#### Питання для самоконтролю

1. Чи може система збіжних сил бути еквівалентною одній силі?
2. Як можна побудувати рівнодійну системи збіжних сил?
3. Сформулюйте умови рівноваги системи збіжних сил у векторній формі; геометричній формі; аналітичній формі.
4. Якою є методика розв’язування задач на рівновагу сил, прикладених до абсолютно твердого тіла?
5. Якими бувають ферми в залежності від виробничого призначення?
6. Якою є умова жорсткості ферми?

### 3. Момент сили

#### 3.1. Означення моменту сили відносно точки і відносно осі

Нехай сила  $\vec{F}$  прикладена в точці  $A$  (рис. 3.1), радіус-вектор якої відносно довільної точки  $O \in \vec{r} = \vec{OA}$ .

**Моментом сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$**  називається векторний добуток радіуса-вектора  $\vec{r}$  точки прикладання  $A$  на вектор сили:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.1)$$

Нагадаємо, що векторним добутком є вектор, що задовольняє такі три умови:

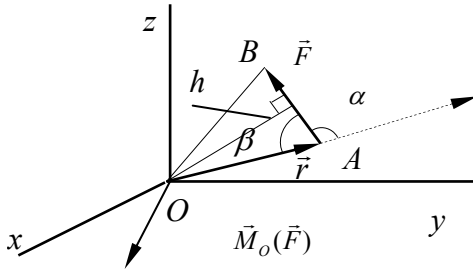


Рис. 3.1

1) його модуль дорівнює добуткові модулів перемножуваних векторів на синус кута між ними;

2) він перпендикулярний кожному з перемножуваних векторів, тобто їхній площині;

3) він направлений в ту сторону, звідки найкоротший поворот від першого вектора до другого видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

Момент сили характеризує її обертальну дію. Він направлений в ту сторону, звідки поворот вектора  $\vec{r}$  (а отже, і тіла) силою  $\vec{F}$  видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

Позначивши через  $\alpha$  кут між векторами  $\vec{r}$  та  $\vec{F}$

$$0 \leq \alpha = (\vec{r}, \vec{F}) = (\vec{F}, \vec{r}) \leq \pi,$$

для модуля моменту сили відносно точки  $O$  дістаємо :

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = rF \sin \alpha = rF \sin(\pi - \beta) = rF \sin \beta = Fh = 2S_{\triangle OAB},$$

де  $h = r \sin \beta$  – плече сили.

*Плечем  $h$  сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$*  називається віддаль від точки  $O$  до лінії дії сили  $\vec{F}$ .

Введемо далі прямокутну декартову систему координат  $Oxyz$ ; нехай  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — її ортонормований базис;  $x, y, z$  — координати точки  $A$  (та її радіуса-вектора  $\vec{r}$ ) у даній системі координат; координати сили  $\vec{F}$  (або її проєкції на осі  $Ox, Oy$  та  $Oz$ ) позначимо через  $F_x, F_y$  та  $F_z$ , тобто

$$\begin{aligned} A(x, y, z), \quad \vec{r} &= \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \{x, y, z\}, \\ \vec{F} &= \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = \{F_x, F_y, F_z\}. \end{aligned}$$

Щоб знайти координати вектора  $\vec{M}_O(\vec{F})$  (тобто його проєкції на осі системи  $Oxyz$ ), скористаємося відомим з векторної алгебри способом знаходження координат векторного добутку (3.1) через координати перемножуваних векторів:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x).$$

Позначивши

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{i}M_x(\vec{F}) + \vec{j}M_y(\vec{F}) + \vec{k}M_z(\vec{F}), \quad (3.2)$$

маємо:

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= \text{пр}_x \vec{M}_0(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \\ M_y(\vec{F}) &= \text{пр}_y \vec{M}_0(\vec{F}) = zF_x - xF_z, \\ M_z(\vec{F}) &= \text{пр}_z \vec{M}_0(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Величини  $M_x(\vec{F})$ ,  $M_y(\vec{F})$ ,  $M_z(\vec{F})$  зуться **моментами сили  $\vec{F}$  відносно осей  $Ox, Oy, Oz$**  відповідно. Індекс  $O$  у формулах (3.2) і (3.3) пропущений не дарма: виявляється, що він просто зайвий. Це доводиться в наступному підрозділі.

### 3.2. Теорема про незалежність моменту сили відносно осі від вибору початкової точки осі

**Теорема.** Момент сили відносно осі не залежить від вибору початкової точки (початку) осі:

$$M_{Oz}(\vec{F}) = M_{O_1z}(\vec{F}) = M_z(\vec{F}). \quad (3.4)$$

Тут  $O$  і  $O_1$  — деякі дві точки на осі (рис. 3.2).

Інакше цю теорему можна сформулювати ще так :

*Проекція моменту сили відносно точки на числову вісь, що проходить через цю точку, не залежить від вибору точки на осі.*

Тому замість символу  $M_{Oz}(\vec{F})$  використовують символ  $M_z(\vec{F})$  і називають цю проекцію моментом сили  $\vec{F}$  відносно осі  $z$ .

*Доведення.* Візьмемо дві прямокутні декартові системи координат  $\Sigma = Oxuz$  та  $\Sigma_1 = O_1x_1y_1z_1$ , причому  $Ox \uparrow\uparrow O_1x_1$ ,  $Oy \uparrow\uparrow O_1y_1$  (тобто осі  $Ox$  та  $O_1x_1$ ,  $Oy$  та  $O_1y_1$  паралельні і однаково направлені), осі  $Oz$  та  $O_1z_1$  відрізняються тільки початком відліку. Точка  $A$  має координати  $x, y, z$  у системі  $\Sigma$  та  $x_1, y_1, z_1$  у системі  $\Sigma_1$ :

$$A(x, y, z)_\Sigma, \quad A(x_1, y_1, z_1)_{\Sigma_1}, \quad x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = AA_1 \neq z_1 = AA_2. \quad (3.5)$$

Розкладемо задану силу  $\vec{F}$ , яка зображається вектором  $\overline{AB}$  на рис. 3.2, по двох ортонормованих базисах :

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = \vec{i}_1F_{x_1} + \vec{j}_1F_{y_1} + \vec{k}_1F_{z_1} \quad (3.6)$$

причому

$$F_x = F_{x_1}, \quad F_y = F_{y_1}, \quad F_z = F_{z_1} \quad (3.7)$$

Згідно з формулами (3.3) моменти сили  $\vec{F}$  відносно осей  $Oz$  та  $O_1z_1$  визначаються формулами:

$$M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_z, \quad (3.8)$$

$$M_{O_1z_1}(\vec{F}) = x_1F_{y_1} - y_1F_{x_1}. \quad (3.9)$$

На підставі виразів (3.5) та (3.7) доходимо висновку, що виразами (3.8) і (3.9) визначається одна і та сама величина, тобто рівність (3.4) доведено.

### 3.3. Проекція сили на площину. Вираз моменту сили відносно осі через проекцію сили на площину, перпендикулярну осі

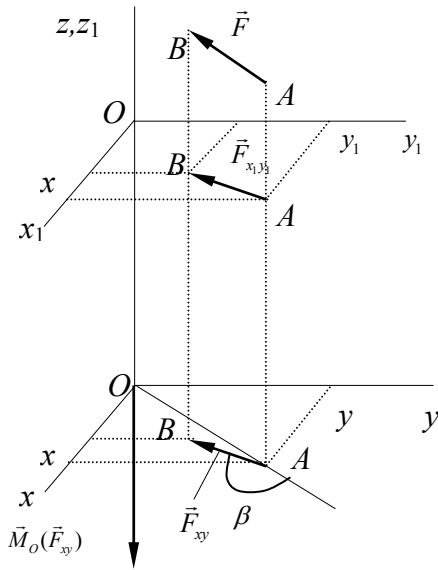


Рис. 3.2

**Означення.** Проекцією сили на площину називається вектор, початок та кінець якого збігаються з проекцією початку  $A$  (рис. 3.2) і проекцією кінця  $B$  сили на цю площину :

$$\vec{F}_{xy} = \text{пр}_{xy} \vec{F} = \overline{A_1 B_1}, \quad \vec{F}_{x_1 y_1} = \text{пр}_{x_1 y_1} \vec{F} = \overline{A_2 B_2}$$

Оскільки площини  $xy$  та  $x_1 y_1$  паралельні, то  $\vec{F}_{xy} = \vec{F}_{x_1 y_1}$ .

**Необхідно запам'ятати, що:**

- 1) проекція сили на числову вісь є алгебраїчною величиною;
- 2) проекція сили на площину є вектором;
- 3) момент сили відносно точки є вектором;
- 4) момент сили відносно осі є алгебраїчною величиною.

З рис. 3.2 дістаємо:

$$\vec{M}_0(\vec{F}_{xy}) = \overline{OA_1} \times \vec{F}_{xy}.$$

Оскільки вектори  $\overline{OA_1}$  та  $\vec{F}_{xy}$  лежать у площині  $Oxyz$ , то їх векторним добутком є вектор, перпендикулярний цій площині, тобто він лежить на осі  $Oz$ . У випадку, зображеному на рис. 3.2, його напрям протилежний орту  $\vec{k}$  осі  $Oz$  (тому що сила  $\vec{F}_{xy}$  прагне повернути тіло за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати цей рух зі сторони осі  $Oz$ ):

$$\vec{M}_0(\vec{F}_{xy}) = -\vec{k} |\vec{M}_0(\vec{F}_{xy})|. \quad (3.10)$$

Цей же результат можна дістати, звісно, і аналітично. На підставі виразів (3.5) та (3.6) маємо:

$$\overline{OA_1} = \vec{i}x + \vec{j}y, \quad \vec{F}_{xy} = iF_x + \vec{j}F_y.$$

Векторний добуток у правій частині виразу (3.10) подамо у вигляді визначника третього порядку:

$$\vec{M}_0(\vec{F}_{xy}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(xF_y - yF_x). \quad (3.11)$$

Але ж згідно з формулами (3.3) справа у виразі (3.11) стоїть  $M_z(\vec{F})$ , тобто

### 3. Момент сил

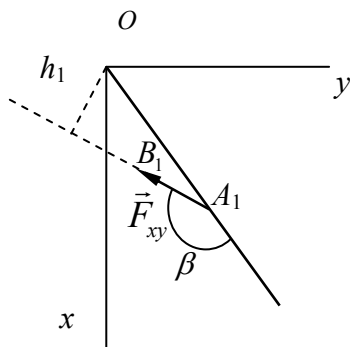


Рис. 3.3

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{xy}) = \vec{k}M_z(\vec{F}). \quad (3.12)$$

Таким чином, момент сили  $\vec{F}_{xy}$  відносно точки  $O$  направлений вздовж осі  $Oz$ , а його проекція на вісь  $Oz$  збігається з проекцією на цю вісь моменту сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$ .

На підставі виразів (3.12), (3.10) і рис. 3.2 одержуємо:

$$M_z(\vec{F}) = -OA_1 \cdot |\vec{F}_{xy}| \cdot \sin(\widehat{OA_1, \vec{F}_{xy}}) = -OA_1 \cdot |\vec{F}_{xy}| \cdot \sin \beta < 0$$

У загальному випадку можна написати:

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{xy}) = \pm |\vec{F}_{xy}| \cdot h_1, \quad (3.13)$$

де

$$h_1 = OA_1 \sin \beta_1 = OA_1 \sin \beta, \quad \beta = (\widehat{OA_1, \vec{F}_{xy}}).$$

Формулювання правила (3.13) таке.

Щоб обчислити момент сили відносно осі потрібно:

- 1) вибрати на осі довільну точку і побудувати площину, перпендикулярну осі;
- 2) спроекувати силу на цю площину;
- 3) знайти плече  $h_1$  проекції сили відносно вибраної точки;
- 4) добуток модуля проекції сили на її плече взяти зі знаком плюс, якщо спостерігач бачить зі сторони додатнього напрямку осі, що проекція сили на площину (тобто сила  $\vec{F}_{xy}$  у випадку рис. 3.3) прагне повернути тіло навколо осі проти годинникової стрілки; в іншому разі — зі знаком мінус.

#### Питання для самоконтролю

1. Чим характеризується момент сили відносно точки?
2. Що називають моментом сили відносно координатної осі?
3. Чим відрізняється проекція сили на координатну вісь від проекції сили на площину?
4. Як знайти момент сили відносно координатної осі через проекцію сили на площину, перпендикулярну осі?

## 4. Рівнодійна двох паралельних сил

### 4.1. Випадок однаково направлених сил

Нехай до абсолютно твердого тіла в точках  $A$  і  $B$  прикладено дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , які направлені в одну сторону (рис. 4.1). Потрібно знайти їхню рівнодійну.

Користуючись аксіомою 2 (див. підрозділ 1.4), прикладемо до тіла в точках  $A$  і  $B$  рівні за модулем і протилежно направлені сили  $\vec{Q}_1$  та  $\vec{Q}_2$ , причому їхні модулі можуть бути якими завгодно. Згідно з аксіомою 3 (див. підрозділ 1.4) маємо:

$$(\vec{F}_1, \vec{Q}_1) \sim \vec{R}_1, \quad (\vec{F}_2, \vec{Q}_2) \sim \vec{R}_2.$$

Лінії дії сил  $\vec{R}_1$  та  $\vec{R}_2$  перетинаються в точці  $O$ . Користуючись наслідком з аксіоми 2 (сила — ковзний вектор у випадку абсолютно твердого тіла), перенесемо сили  $\vec{R}_1$  та  $\vec{R}_2$  в точку  $O$  і розкладемо кожна з них на взаємно перпендикулярні складові:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &\sim (\vec{R}'_1, \vec{Q}'_1), \\ \vec{R}_2 &\sim (\vec{R}'_2, \vec{Q}'_2), \end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned} \vec{Q}'_1 &= \vec{Q}_1, \quad \vec{Q}'_2 = \vec{Q}_2, \\ \vec{F}'_1 &= \vec{F}_1, \quad \vec{F}'_2 = \vec{F}_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Оскільки  $\vec{Q}'_1 = -\vec{Q}'_2$ , то згідно з аксіомою 2 сили  $\vec{Q}'_1$  та  $\vec{Q}'_2$  можна відкинути. Сили  $\vec{F}'_1$  та  $\vec{F}'_2$  діють по одній прямій, і їх можна замінити

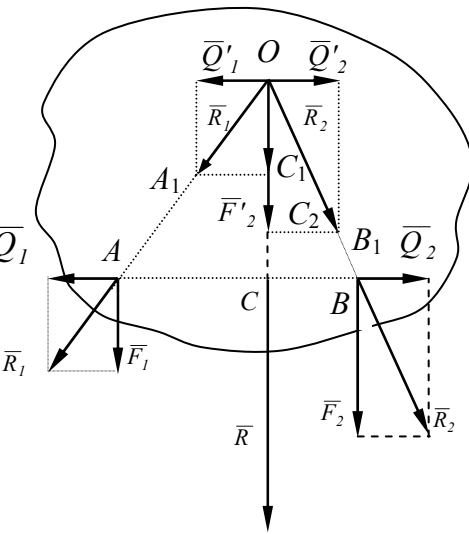


Рис. 4.1

однією силою  $\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2$ , тобто

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (4.2)$$

яка і буде шуканою рівнодійною. Модуль рівнодійної дорівнює сумі модулів складових сил ( $F_1 = |\vec{F}_1|$ ,  $F_2 = |\vec{F}_2|$ ,  $R = |\vec{R}|$ ):

$$R = F_1 + F_2. \quad (4.3)$$

Знайдемо точку прикладання сили  $\vec{R}$ . Оскільки трикутники  $OCA$  та  $OC_1A_1$  подібні, то

$$\frac{OC}{CA} = \frac{F'_1}{Q'_1}. \quad (4.4)$$

З подібності трикутників  $OCB$  та  $OC_2B_1$  маємо:

$$\frac{OC}{CB} = \frac{F'_2}{Q'_2}. \quad (4.5)$$

Враховуючи рівності (4.1), співвідношення (4.4) і (4.5) можна записати так :

$$\frac{OC}{CA} = \frac{F_1}{Q_1}, \quad \frac{OC}{CB} = \frac{F_2}{Q_1}.$$

Розділивши першу рівність на другу, дістаємо:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}. \quad (4.6)$$

Співвідношенням (4.6) визначається точка прикладання рівнодійної сили  $\vec{R}$ .

Одержані щойно рівності (4.2), (4.3) та (4.6) дозволяють сформулювати таку теорему.

**Теорема.** Система двох паралельних сил, направлених в одну сторону:

- 1) має рівнодійну, паралельну цим силам;
- 2) модуль рівнодійної дорівнює сумі модулів складових сил;
- 3) лінія дії рівнодійної ділить відрізок між точками прикладання складових сил внутрішнім чином на частини, обернено пропорційні модулям цих сил.

**Примітка.** Запишемо співвідношення (4.6) у вигляді

$$F_1 \cdot CA - F_2 \cdot CB = 0. \quad (4.7)$$

Нехай  $Cz$  — вісь, перпендикулярна площині рис. 4.1, проходить через точку  $C$  і направлена на нас. Тоді  $\vec{M}_C(\vec{F}_1) = k\vec{F}_1 \cdot AC$ ,  $\vec{M}_C(\vec{F}_2) = -k\vec{F}_2 \cdot BC$ . Звідси

$$M_{Cz}(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot CA, \quad M_{Cz}(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot CB. \quad (4.8)$$

На підставі виразів (4.8) рівність (4.7) чисто формально можна записати так:

$$M_{Cz}(\vec{F}_1) + M_{Cz}(\vec{F}_2) = 0, \quad (4.9)$$

або

$$\sum_{i=1}^2 M_{Cz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (4.10)$$

Рівності (4.9) та (4.10) не є випадковими. До з'ясування їхнього механічного змісту ми повернемося у підрозділі 7.5.

#### 4.2. Випадок протилежно направлених сил з різними модулями

Нехай до абсолютно твердого тіла в точках  $A$  і  $B$  прикладено дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , які направлені в різні сторони (рис. 4.2), причому  $F_1 \neq F_2$ . Для означеності будемо вважати  $F_1 > F_2$ . Потрібно знайти їхню рівнодійну.

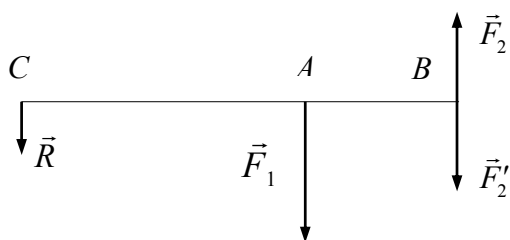


Рис. 4.2

Користуючись попередньою теоремою, тобто рівностями (4.2), (4.3) та (4.6), які її виражають, розкладемо силу  $\vec{F}_1$  на дві складові  $\vec{R}$  та  $\vec{F}_2'$ , причому візьмемо  $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$ . Модуль сили  $\vec{R}$ , а також точку  $C$  її прикладання потрібно відшукати. Маємо:

$$\vec{F}_1 = \vec{R} + \vec{F}_2', \quad F_1 = R + F_2', \quad \frac{R}{F_2'} = \frac{AB}{CA}. \quad (4.11)$$

Тут (як і в 4.1)

$$F_1 \equiv |\vec{F}_1|, \quad F_2' \equiv |\vec{F}_2'|, \quad F_2' = F_2, \quad F_2 \equiv |\vec{F}_2|, \quad R \equiv |\vec{R}|. \quad (4.12)$$

З першої рівності (4.11) дістаємо:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2',$$

або

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (4.13)$$

Спроектувавши рівність (4.13) на числову вісь, паралельну силам, що вказані на рис. 4.2, і направлену вниз, а також врахувавши позначення (4.12), знаходимо модуль сили  $\vec{R}$ :

$$R = F_1 - F_2. \quad (4.14)$$

Цей же вираз для  $R$  дає друга рівність (4.11). Точка прикладання сили  $\vec{R}$  визначається з третьої рівності (4.11):

$$CA = \frac{F_2 \cdot AB}{F_1 - F_2}. \quad (4.15)$$

Знайдена таким способом сила  $\vec{R}$  є рівнодійною сил  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , в чому можна переконатись також на підставі аксіоми 2 (див. підрозділ 1.4):

$$\vec{F}_1 \sim (\vec{R}, \vec{F}_2'), \quad (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{R}, \vec{F}_2', \vec{F}_2') \sim \vec{R}.$$

З рівності (4.15) випливає:

$$\frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{AB}{CA}, \quad \frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{CB - CA}{CA}, \quad \frac{F_1}{F_2} - 1 = \frac{CB}{CA} - 1,$$

тобто

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}. \quad (4.16)$$

Співвідношення (4.16) повністю збігається з (4.6). На підставі рівностей (4.13), (4.14) та (4.16) можна сформулювати таку теорему.

**Теорема.** Дві протилежно направлені паралельні сили з неоднаковими модулями:

- 1) мають рівнодійну, паралельну цим силам;
- 2) її модуль дорівнює різниці модулів складових сил;
- 3) лінія дії рівнодійної ділить відрізок між точками прикладання складових сил зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні модулям цих сил;
- 4) рівнодійна розташована за більшою (за модулем) з двох сил.

**Примітка.** Запишемо співвідношення (4.16) у вигляді:

$$-F_1 \cdot CA + F_2 \cdot CB = 0. \quad (4.17)$$

Нехай  $Cz$  — вісь, перпендикулярна площині рис. 4.2, проходить через точку  $C$  і направлена на нас. Тоді  $\vec{M}_C(\vec{F}_1) = -k\vec{F}_1 \cdot AC$ ,  $\vec{M}_C(\vec{F}_2) = k\vec{F}_2 \cdot AC$ . Звідси

$$M_{Cz}(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot CA, \quad M_{Cz}(\vec{F}_2) = F_2 \cdot CB. \quad (4.18)$$

На підставі виразу (4.18) рівність (4.17) чисто формально можна записати у вигляді

$$M_{Cz}(\vec{F}_1) + M_{Cz}(\vec{F}_2) = 0, \quad (4.19)$$

або

$$\sum_{i=1}^2 M_{Cz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (4.20)$$

Співвідношення (4.19) та (4.20) цілком збігаються з відповідними співвідношеннями (4.9) та (4.10). Необхідність цих співвідношень для рівноваги сил та з'ясування їхнього механічного змісту відкладаються до підрозділу 7.5.



### 4.3. Випадок протилежно направлених сил з однаковими модулями

Нехай до абсолютно твердого тіла в точках  $A$  і  $B$  (рис. 4.2) прикладено дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , направлені в різні сторони, але цього разу  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ , тобто  $F_1 = F_2$ . Чи існує рівнодійна таких сил? Щоб відповісти на це питання, доцільно звернутись до більш загального випадку, розглянутого в попередньому підрозділі, і вважати  $F_1 \rightarrow F_2$ . Формальне використання рівностей (4.14) і (4.15) дає:  $R \Rightarrow 0$ ,  $CA \Rightarrow \infty$ , тобто модуль рівнодійної дорівнює нулеві, а лінія її дії перебуває на нескінченній віддалі від ліній дії складових сил. Ці обставини спонукають визнати таку ситуацію в статистиці як принципово нову: ефект дії двох протилежно направлених сил з однаковими модулями не може бути зведений до ефекту дії будь-якої однієї сили.

#### Питання для самоконтролю

1. Як знайти рівнодійну двох паралельних сил, направлених в одну сторону?
2. Як знайти рівнодійну двох протилежно направлених паралельних сил?
3. Наведіть приклади тіл, на які діють паралельні сили з однаковими напрямками; з протилежними напрямками.

## 5. Пара сил

### 5.1. Момент пари

**Означення.** Парою сил називається система двох паралельних сил, модулі яких однакові, а напрями протилежні.

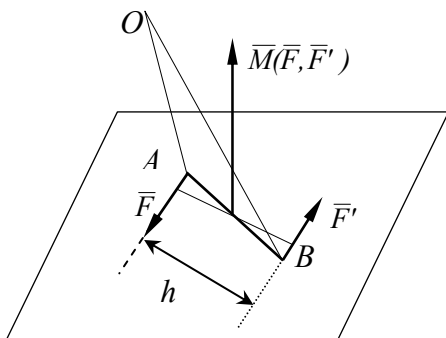


Рис. 5.1

Із зазначеного у підрозділі 4.3 випливає, що для пари сил поняття рівнодійної втрачає сенс, оскільки пара являє собою незрівноважену систему, яка не може бути замінена однією силою. Пара сил є незвідним (неспрощуваним) елементом статички. Поряд із силою пара сил є другим самостійним елементом статички.

Пара сил, що діє на тіло, прагне надати йому деяке обертання. Обертовий ефект пари характеризують векторною величиною, яку називають моментом пари.

Знайдемо спочатку суму моментів сил, що складають пару, відносно довільної точки  $O$  простору (рис. 5.1). Нехай в точках  $A$  і  $B$  до тіла прикладено сили  $\vec{F}$  та  $\vec{F}'$ , причому  $\vec{F}' = -\vec{F}$ , тобто ці сили утворюють пару сил. Звичайно її позначають так:  $(\vec{F}, \vec{F}')$ . Тоді

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times \vec{F}' = \vec{OA} \times \vec{F} - \vec{OB} \times \vec{F} = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F}.$$

Виявилось, що сума моментів сил, що складають пару, відносно довільної точки простору зовсім не залежить від положення точки  $O$ , відносно якої беруться моменти, тобто ця сума інваріантна відносно точки  $O$  і характеризує саму лише пару сил.

**Означення.** Моментом пари  $(\vec{F}, \vec{F}')$  називається вектор

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F}' = \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}') \quad (5.1)$$

з такими ознаками:

- 1) його модуль рівний добутку модуля однієї із сил пари на плече  $h$  пари ( $h$  – віддаль між лініями дії сил, що складають пару):  $M = Fh$ ,  $F = |\vec{F}| = |\vec{F}'|$ ;
- 2) він перпендикулярний площині пари;
- 3) цей вектор направлений в ту сторону, звідки обертання, що здійснює пара, видно таким, яке відбувається проти годинникової стрілки.

Момент пари — вільний вектор; для нього ні точка прикладання, ні лінія дії не означені: вони можуть бути довільними. Нагадаємо, що сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є ковзним вектором.

На рисунках будівельних конструкцій (балок, арок і т. п.) пара сил зображується одним із таких символів:



Тут  $M$  – модуль моменту пари. Рисувати цей символ можна в будь-якому місці конструкції.

## 5.2. Зрівноваженість пари сил

**Теорема.** Пара сил складає зрівноважену систему сил тоді і тільки тоді, коли момент пари дорівнює нулеві.

Інакше: Щоб пара сил складала зрівноважену систему сил, необхідно і достатньо рівності нулеві моменту пари.

**Доведення. Необхідність.** Нехай дві сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , які складають пару (тобто  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ), зрівноважені. Згідно з аксіомою 1 (див. підрозділ 1.4) вони неминуче діють по одній прямій. Але ж тоді  $h = 0$  і, як наслідок,  $M = F_1 h = 0$ , де  $F_1 = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ .

**Достатність.** Нехай  $M = F_1 h = 0$ , тобто або  $F_1 = 0$ , або  $h = 0$ . Якщо  $F_1 = 0$ , то сил немає. Якщо  $h = 0$ , то сили пари діють по одній прямій. Оскільки їх модулі рівні, а напрями протилежні, то згідно з тією ж самою аксіомою 1 (див. підрозділ 1.4) вони зрівноважуються.

Теорема доведена як у прямому, так і в зворотному напрямках.

## 5.3. Властивості пар сил

**Теорема 1.** Дія пари на абсолютно тверде тіло не змінюється при будь-якому із таких перетворень:

- 1) пару можна перемістити в довільне інше положення в площині її дії;
- 2) площину дії пари можна переносити паралельно самій собі;
- 3) можна довільним чином змінити модуль сил пари і плече пари, зберігаючи незмінним їхній добуток, тобто модуль моменту пари.

**Теорема 2.** Система пар, що діють на абсолютно тверде тіло, еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює сумі моментів цих пар:

$$[(\vec{F}_1, -\vec{F}_1), (\vec{F}_2, -\vec{F}_2), \dots, (\vec{F}_n, -\vec{F}_n)] \sim (\vec{F}, -\vec{F}),$$

$$\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{M}(\vec{F}_1, -\vec{F}_1) + \vec{M}(\vec{F}_2, -\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, -\vec{F}_n).$$

Ці теореми, звісно, можна довести строго. Їхня інтуїтивна прийнятність (“очевидність”) базується на взаємно однозначній відповідності між парою сил та її моментом. Обмежимося цим зауваженням.

Для деформівних тіл використання, наприклад, теореми 2 може призвести до помилкового результату. Так, дві протилежні пари, що діють по торцях стрижня, з погляду статички абсолютно твердого тіла еквівалентні нулю. Між тим їхня дія на деформівний стрижень призводить до його закручування (тим більше, чим більший модуль моментів пар).

### Питання для самоконтролю

1. Чому пара сил не має рівнодійної?
2. Які елементи статички є неприводжуваними (неспрощуваними) або базовими?
3. Коли пара сил складає зрівноважену систему сил?
4. Чому момент сили відносно точки або момент пари сил не змінюється при переміщенні сили вздовж лінії дії?
5. При якому напрямі сили її момент відносно осі є найбільшим?
6. Як зображують пару сил на рисунках? Де рисують відповідний символ?

## 6. Загальні теореми статички

### 6.1. Теорема про паралельне перенесення сили

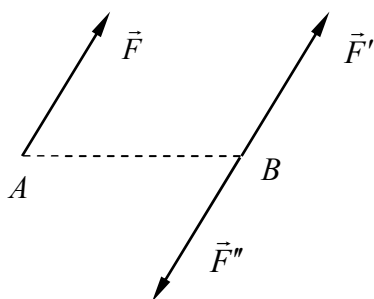


Рис. 6.1

**Теорема.** Не змінюючи механічний стан абсолютно твердого тіла, силу можна перенести паралельно самій собі в будь-яку точку тіла, приклавши до тіла пару сил, момент якої дорівнює моменту сили відносно вибраної точки.

Інакше:

Сила, прикладена в якій-небудь точці абсолютно твердого тіла, еквівалентна такій самій силі, прикладеній в будь-якій іншій точці цього тіла, і парі сил, момент якої дорівнює

моменту даної сили відносно нової точки прикладання:  $\vec{F} \sim [\vec{F}'; (\vec{F}, \vec{F}'')]$ .

Нова точка, в яку переноситься сила, називається **центром приведення**; пара сил, яку ми змушені прикладати до тіла для збереження його механічного стану, називається **приєднаною парою** (рис. 6.1).

**Доведення.** Нехай в точці  $A$  тіла прикладена сила  $\vec{F}$ . Використовуючи аксіому 2 (див. підрозділ 1.4), прикладемо в точці  $B$  тіла зрівноважену систему сил  $(\vec{F}', \vec{F}'')$ , причому  $|\vec{F}| = |\vec{F}'|$ . Оскільки  $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$ , то  $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ .

Водночас, система сил  $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$  еквівалентна силі  $\vec{F}'$  і парі сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$ . Отже, сила  $\vec{F}$  еквівалентна силі  $\vec{F}'$  і парі сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$ . Момент цієї пари дорівнює

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F}),$$

що й треба було довести.

## 6.2. Основна теорема статички (перша теорема приведення)

**Теорема.** Будь-яку просторову систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  можна замінити еквівалентною системою, що складається, взагалі кажучи, з однієї сили

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (6.1)$$

прикладеної в якій-небудь точці  $O$  тіла (**центрі приведення**), яка називається **головним вектором** даної системи сил, і однієї пари сил, момент якої

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) \quad (6.2)$$

дорівнює сумі моментів сил відносно центра приведення і називається **головним моментом** усіх сил відносно вибраного центра приведення.

**Доведення.** Нехай точка  $O$  — центр приведення (рис. 6.2), сила  $\vec{F}_i$  прикладена в точці  $A_i$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $\vec{r}_i$  — радіус-вектор сили  $\vec{F}_i$  відносно точки  $O$ , тобто  $\vec{r}_i = \vec{OA}_i$ . Застосувавши теорему про паралельний перенос сили, перенесемо сили  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  в точку  $O$ , одночасно приклавши до тіла приєднані пари сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'')$ ,  $(\vec{F}_2, \vec{F}_2'')$ ,  $\dots$ ,  $(\vec{F}_n, \vec{F}_n'')$ , моменти яких дорівнюють моментам даних сил відносно точки  $O$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1'') = \vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1, \\ \vec{M}_2 &= \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2'') = \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{M}_n &= \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n'') = \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n. \end{aligned}$$

Сили  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , перенесені в точку  $O$ , утворюють систему збіжних сил. Склавши їх, одержимо силу  $\vec{F}$ , що визначається формулою (6.1).

Згідно з теоремою 2 з підрозділу 5.3 всі приєднані пари можна замінити однією парою, момент якої

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{s=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_s) = \sum_{s=1}^n \vec{r}_s \times \vec{F}_s. \quad (6.3)$$

Отже, обидві рівності (6.1) та (6.2), а разом з ними і теорема, доведені.

Не слід вважати, що головний вектор і головний момент мають суто формальне значення і що їх можна знайти тільки за допомогою обчислень. Дуже часто окремо діючі на тіло сили не можна визначити навіть дослідним шляхом, тоді як головний вектор або головний момент знаходяться порівняно легко. Як приклад, розглянемо вал у підшипниках ковзання. При обертанні вала на точки його поверхні діють зі сторони підшипника сили тертя. Число точок контакту і модулі сил тертя нам не відомі. Не завжди їх можна визначити і за допомогою експерименту, однак простим вимірюванням знаходиться сума моментів всіх сил тертя відносно осі обертання, тобто головний момент сил тертя.

Введемо прямокутну декартову систему координат  $Oxyz$  (рис. 6.2) з ортонормованим базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Нехай

$$\vec{F}_s = \vec{i}F_{sx} + \vec{j}F_{sy} + \vec{k}F_{sz}, \quad \vec{r}_s = \vec{i}x_s + \vec{j}y_s + \vec{k}z_s \quad (s = 1, \dots, n),$$

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \quad \vec{M}_O = \vec{i}M_x + \vec{j}M_y + \vec{k}M_z.$$

На підставі формул (6.1) та (6.3) маємо :

$$F_x = \sum_{s=1}^n F_{sx}, \quad F_y = \sum_{s=1}^n F_{sy}, \quad F_z = \sum_{s=1}^n F_{sz}, \quad F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F},$$

$$M_x = \sum_{s=1}^n M_x(\vec{F}_s) = \sum_{s=1}^n (y_s F_{sz} - z_s F_{sy}), \quad M_y = \sum_{s=1}^n M_y(\vec{F}_s) = \sum_{s=1}^n (z_s F_{sx} - x_s F_{sz}), \quad (6.4)$$

$$M_z = \sum_{s=1}^n M_z(\vec{F}_s) = \sum_{s=1}^n (x_s F_{sy} - y_s F_{sx}), \quad M_O = |\vec{M}_O| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

$$\cos(\vec{M}_O, x) = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos(\vec{M}_O, y) = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos(\vec{M}_O, z) = \frac{M_z}{M_O}.$$

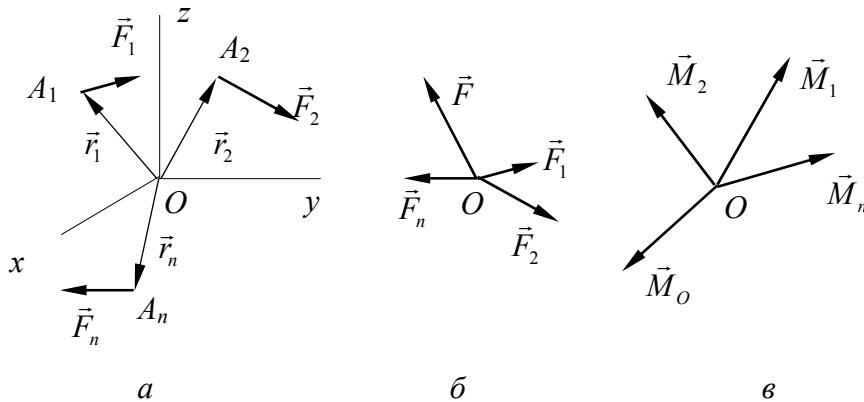


Рис. 6.2

### 6.3. Друга теорема приведення

Основна теорема статки належить до теорем приведення. Приведення довільної системи сил до сили та пари сил не є єдиним способом приведення системи сил до простішого вигляду, хоч і застосовується найбільш часто.

Можливий інший варіант приведення.

**Теорема.** Система сил, як завгодно розташованих у просторі, може бути приведена до двох сил, які в загальному випадку не лежать в одній площині (перехрещуються).

**Доведення.** Нехай деяка просторова система сил приведена в

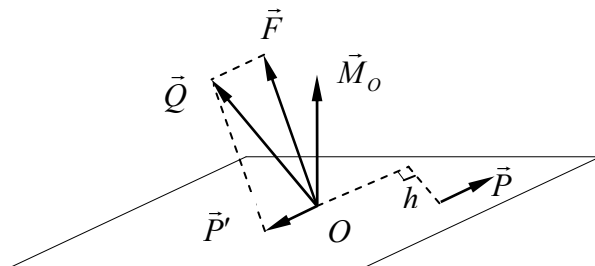


Рис. 6.3

точці  $O$  до сили  $\vec{F}$  та пари сил  $(\vec{P}, \vec{P}')$  з моментом  $\vec{M}_O$  (рис. 6.3). Прикладемо одну з них  $\vec{P}'$  в центрі приведення  $O$  і складемо її з силою  $\vec{F}$ . Одержимо силу  $\vec{Q} = \vec{F} + \vec{P}'$ , яка не лежить у площині дії пари  $(\vec{P}, \vec{P}')$ . Таким чином, початкова система сил приведена до двох сил  $\vec{P}$  та  $\vec{Q}$ , що не лежать в одній площині.

#### 6.4. Умови рівноваги просторової системи сил

**Теорема.** Для рівноваги просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно довільної точки дорівнювали нулеві:

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{M}_O = 0. \quad (6.5)$$

**Доведення.** Необхідність умов (6.5) очевидна, оскільки сила  $\vec{F}$  не в змозі зрівноважити пару сил з моментом  $\vec{M}_O$ .

Можна дати і формально-математичне обґрунтування необхідності умов (6.5). Нехай дана система сил еквівалентна нулеві. Скориставшись другою теоремою приведення (див. підрозділ 6.3), зведемо цю систему до двох сил  $\vec{P}$  та  $\vec{Q}$  (рис. 6.3). Система сил  $(\vec{P}, \vec{Q}) \sim 0$ . Згідно з аксіомою 1 (див. підрозділ 1.4), сили  $\vec{P}$  та  $\vec{Q}$  повинні мати спільну лінію дії, мати однакові модулі і бути протилежно направлені:

$$\vec{Q} = -\vec{P}. \quad (6.6)$$

Оскільки система сил  $\vec{F}, \vec{P}$  та  $\vec{P}'$  перебуває в рівновазі, то

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{P}' = 0. \quad (6.7)$$

Ця ж рівність впливає з виразу (6.6), якщо врахувати походження сили  $\vec{Q} = \vec{F} + \vec{P}'$ . Але ж  $\vec{P} + \vec{P}' = 0$ , тому з виразу (6.7) маємо:  $\vec{F} = 0$ . Згідно з виразом (6.6) лінія дії сили  $\vec{P}$  проходить через точку  $O$ , тобто  $h = 0$  (рис. 6.3). Тому  $\vec{M}_O = 0$ , що й треба було довести.

**Достатність** умов (6.5) для рівноваги довільної системи сил впливає з того, що при  $\vec{F} = 0$  система збіжних сил, прикладених у центрі приведення  $O$  (див. рис. 6.2, б), еквівалентна нулеві. При  $\vec{M}_O = 0$  система пар сил з моментами  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$  (див. рис. 6.2, в) еквівалентна нулеві. Отже, вихідна система сил еквівалентна нулеві.

Отже, теорема доведена як у прямому, так і в зворотному напрямках.

Рівності (6.5) називаються **векторними умовами** рівноваги просторової системи сил, прикладених до абсолютно твердого тіла.

**Геометричні умови** рівноваги полягають у тому, що многокутник сил, прикладених до тіла, і многокутник моментів цих сил відносно довільної точки тіла мають бути замкнуті.

**Аналітичні умови** рівноваги випливають з рівностей (6.4) та (6.5):

$$F_x = \sum_{s=1}^n F_{sx} = 0, \quad F_y = \sum_{s=1}^n F_{sy} = 0, \quad F_z = \sum_{s=1}^n F_{sz} = 0, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \sum_{s=1}^n M_x(\vec{F}_s) = \sum_{s=1}^n (y_s F_{sz} - z_s F_{sy}) = 0, \\
 M_y &= \sum_{s=1}^n M_y(\vec{F}_s) = \sum_{s=1}^n (z_s F_{sx} - x_s F_{sz}) = 0, \\
 M_z &= \sum_{s=1}^n M_z(\vec{F}_s) = \sum_{s=1}^n (x_s F_{sy} - y_s F_{sx}) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{6.9}$$

### 6.5. Частинні випадки рівноваги просторової системи сил

1. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил (рис. 6.4).

Направимо вісь  $Oy$  паралельно лініям дії сил. Тоді  $F_{sx} \equiv 0$ ,  $F_{sz} \equiv 0$ . Із шести рівнянь (6.8) та (6.9) залишаються три (друге, четверте та шосте):

$$F_y = \sum_{s=1}^n F_{sy} = 0, \quad M_x = -\sum_{s=1}^n z_s F_{sy} = 0, \quad M_z = \sum_{s=1}^n x_s F_{sy} = 0.
 \tag{6.10}$$

2. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил (рис. 6.5). Оскільки

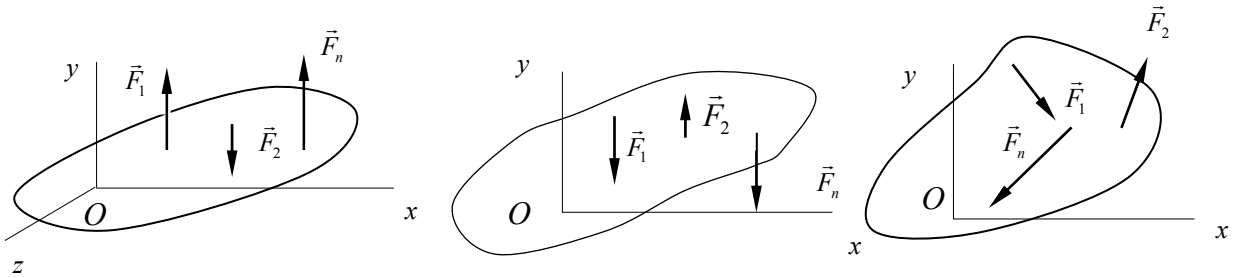


Рис. 6.4

Рис. 6.5

Рис. 6.6

$F_{sx} = 0$ ,  $F_{sz} = 0$ ,  $z_s = 0$ , то із шести рівнянь (6.8) та (6.9) залишаються два (друге і шосте):

$$F_y = \sum_{s=1}^n F_{sy} = 0, \quad M_z = \sum_{s=1}^n x_s F_{sy} = 0.
 \tag{6.11}$$

3. Умови рівноваги плоскої системи сил (рис. 6.6). Всі сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  розташовані в одній площині (яка прийнята за площину  $xOy$ ) і мають довільні напрями. Оскільки  $F_{sz} = 0$ ,  $z_s = 0$ , то із шести рівнянь (6.8) та (6.9) залишаються три (перше, друге та шосте):

$$F_x = \sum_{s=1}^n F_{sx} = 0, \quad F_y = \sum_{s=1}^n F_{sy} = 0, \quad M_z = \sum_{s=1}^n (x_s F_{sy} - y_s F_{sx}) = 0.
 \tag{6.12}$$

#### Питання для самоконтролю

1. Чи можна прикладати силу в довільній точці тіла?
2. Що називають приєднальною парою?
3. Що називають головним вектором системи сил? головним моментом?
4. Чи є рівносильними поняття рівнодійної системи сил та головного вектора системи сил?
5. Сформулюйте першу та другу теореми приведення.

6. Якими є умови рівноваги системи сил у векторній формі? геометричній формі? аналітичній формі?
7. Якими є умови рівноваги просторової системи паралельних сил?
8. Якими є умови рівноваги плоскої системи паралельних сил?

## 7. Плоска система сил

### 7.1. Алгебраїчний момент сили відносно точки та алгебраїчний момент пари сил

Досить значна кількість практичних задач техніки зводиться до розгляду систем сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , розташованих в одній площині. Довільну точку  $O$  цієї площини візьмемо за центр приведення. Згідно з основною теоремою статyki (див. підрозділ 6.2) приведемо задану систему сил до однієї сили

$$\vec{F} = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s,$$

яка називається головним вектором, і до пари сил, момент якої називається головним моментом

$$\vec{M}_O = \sum_{s=1}^n \vec{M}_{O_s}(\vec{F}_s),$$

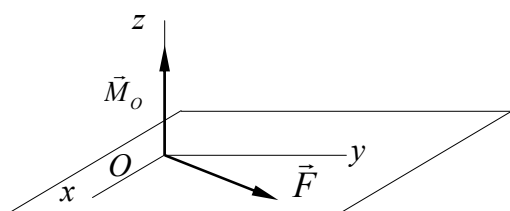


Рис. 7.1

де  $\vec{M}_O(\vec{F}_s)$  — момент сили  $\vec{F}_s$  відносно центра приведення (рис. 7.1). Оскільки сили  $\vec{F}_s$  розташовані в одній площині, то сила  $\vec{F}$  також лежить у цій площині.

Момент  $\vec{M}_O$  пари сил направлений перпендикулярно цій площині. Отже, для плоскої системи головний

**вектор і головний момент завжди перпендикулярні один одному:  $\vec{F} \perp \vec{M}_O$ .**

Моменти всіх сил  $\vec{M}_O(\vec{F}_s)$  і моменти пар сил  $\vec{M}(\vec{F}_i, -\vec{F}_i)$  для плоскої системи сил направлені вздовж однієї й тієї самої прямої (перпендикулярної цій площині). Не вдаючись до векторної символіки, напрямки цих моментів можна відрізнити один від одного знаком проекції їх на вісь, перпендикулярну площині, і розглядати момент сили  $\vec{F}_s$  відносно центра приведення як алгебраїчну величину.

**Алгебраїчним моментом сили  $\vec{F}_s$  відносно точки  $O$**  називається величина

$$M_{Oz}(\vec{F}_s) = \pm F_s h_s,$$

причому в правій системі координат момент вважається додатним, коли сила прагне повернути тіло навколо точки  $O$  проти годинникової стрілки, і від'ємним, коли — за годинниковою

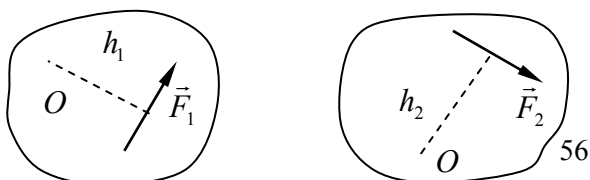


Рис. 7.2



## 7. Плоска система сил

стрілкою. Тут  $h_s$  – плече сили,  $F_s = |\vec{F}_s|$  — модуль сили. Для сил, зображених на рис. 7.2, алгебраїчні моменти сил рівні:

$$M_{Oz}(\vec{F}_1) = F_1 h_1, \quad M_{Oz}(\vec{F}_2) = -F_2 h_2.$$

Оскільки момент пари сил дорівнює моменту однієї з сил відносно точки прикладення другої сили (див. формулу (5.1) і рис. 5.1), то для пар, що лежать в одній площині, також доречно ввести поняття **алгебраїчного моменту пари**

$$M_z(\vec{F}_s, \vec{F}'_s) = \pm F_s h_s.$$

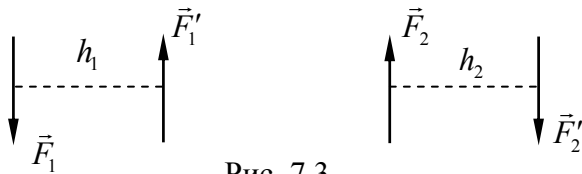


Рис. 7.3

Так називають величину, що дорівнює добутку модуля однієї з сил, які складають пару, на плече пари, взятого зі знаком плюс, якщо обертання, викликане парою, відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком мінус, якщо воно

відбувається за годинниковою стрілкою.

Іншими словами, за алгебраїчний момент пари в плоских системах береться проекція моменту пари на вісь  $z$ , перпендикулярну площині дії сил.

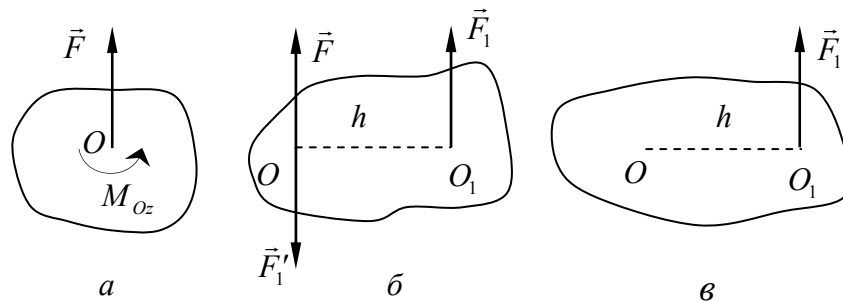


Рис. 7.4

Для пар, зображених на рис. 7.3, маємо:

$$M_z(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = F_1 h_1, \quad M_z(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = -F_2 h_2.$$

Оскільки пара сил характеризується тільки її моментом, то на рисунках пару часто зображують просто дуговою стрілкою, що показує напрям повороту тіла. (див. підрозділ 5.1).

### 7.2. Зведення плоскої системи сил до рівнодійної

**Теорема.** Якщо головний вектор плоскої системи сил не дорівнює нулеві, то така система сил еквівалентна одній силі, тобто приводиться до рівнодійної.

**Доведення.** Нехай для вибраного центра приведення  $O$  головний вектор та головний момент не рівні нулеві, тобто

$$\vec{F} \neq 0, \quad \vec{M}_O \neq 0.$$

Тут  $\vec{M}_O = \vec{k}M_{Oz}$ . Дугова стрілка на рис. 7.4, а символічно зображує пару сил з алгебраїчним моментом  $M_{Oz}$ . Пару сил, момент якої дорівнює головному моменту  $\vec{M}_O$ , представимо у вигляді двох сил  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}'_1$ , модуль кожної з яких дорівнює модулю головного вектора:

$$F_1 = F'_1 = F.$$

Одну з сил (а саме  $\vec{F}'_1$ ), що складають пару, прикладемо до центра приведення і направимо в сторону, протилежну напрямку сили  $\vec{F}$  (рис. 7.4, б). Система сил  $\vec{F}$  та  $\vec{F}'_1$  рівносильна нулевій і може бути відкинута згідно з аксіомою 2 (див. підрозділ 1.4). Значить, задана система сил еквівалентна єдиній силі  $\vec{F}_1$ , прикладеній в точці  $O_1$  (рис. 7.4, в). Ця сила і є рівнодійною :

$$\vec{R} = \vec{F}_1.$$

Віддаль від колишнього центра приведення  $O$  до лінії дії рівнодійної можна знайти з умови:

$$|M_z(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)| = hF_1 = hF.$$

Звідки

$$h = \frac{|M_z(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)|}{F}.$$

Відрізок довжини  $h$  потрібно відкласти від точки  $O$  так, щоб момент пари сил  $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$  збігався з головним моментом  $\vec{M}_O$ .

### 7.3. Приведення плоскої системи сил до простішого вигляду

1. Якщо

$$\vec{F} = 0, \quad M_{Oz} = 0, \tag{7.1}$$

то система сил рівносильна нулевій, тобто сили, що складають систему, **зрівноважені**.

2. Якщо

$$\vec{F} \neq 0, \quad M_{Oz} = 0, \tag{7.2}$$

то система сил зводиться до однієї сили (**рівнодійної**), що проходить через даний центр приведення  $O$ .

3. Якщо

$$\vec{F} = 0, \quad M_{Oz} \neq 0, \tag{7.3}$$

то система сил еквівалентна одній **парі сил**.

4. Якщо

$$\vec{F} \neq 0, \quad M_{Oz} \neq 0, \tag{7.4}$$

то за теоремою у підрозділі 7.2 система сил може бути приведена до однієї сили (**рівнодійної**), але прикладеної в іншій точці  $O_1$ .

### 7.4. Три форми умов рівноваги плоскої системи сил

Необхідними і достатніми умовами рівноваги довільної системи сил є рівності (6.5). З цих загальних умов рівноваги для частинного випадку плоскої системи сил можна одержати кілька варіантів умов її рівноваги.

Покажемо, що система рівнянь рівноваги плоскої системи сил може містити:

- а) два силові рівняння і одне моментне рівняння;
- б) одне силове рівняння і два моментні рівняння;
- в) три моментні рівняння.

#### 1. Основна форма умов рівноваги.

Одна форма умов рівноваги плоскої системи сил уже була одержана раніше у вигляді рівнянь (6.12). Ця форма рівнянь рівноваги містить два силові рівняння і одне моментне рівняння:

$$F_x = \sum_{s=1}^n F_{sx} = 0, \quad F_y = \sum_{s=1}^n F_{sy} = 0, \quad M_{Oz} = \sum_{s=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_s) = 0 \quad (7.5)$$

і повністю узгоджується з умовами (7.1). Вона вважається основною, оскільки при користуванні нею ніяких обмежень на вибір координатних осей і **центра моментів** (так іноді називають центр приведення  $O$ ) не накладається.

Сформулюємо умови рівноваги (7.5) у вигляді такої теореми.

**Теорема 1.** Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на дві координатні осі і сума алгебраїчних моментів усіх сил відносно довільної точки дорівнювали нулеві.

#### 2. Друга форма умов рівноваги.

**Теорема 2.** Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо рівності нулеві сум алгебраїчних моментів усіх сил системи відносно двох довільних точок і рівності нулеві суми проєкцій усіх сил системи на вісь, не перпендикулярну прямій, що проходить через дві вибрані точки:

$$\sum_{s=1}^n M_{Az}(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n M_{Bz}(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n F_{sx} = 0 \quad (7.6)$$

( $Ox$  не перпендикулярна  $AB$ ).

*Доведення.* Необхідність умов (7.6) викликана тим, що при невиконанні будь-якої з них або  $\vec{M}_A \neq 0$  (чи  $\vec{M}_B \neq 0$ ), або  $\vec{F} \neq 0$  і рівноваги не буде.

*Достатність.* Покажемо, що умов (7.6) достатньо для рівноваги сил. Рівність нулеві головного моменту при центрі приведення  $A$  можлива, або якщо система сил приводиться до рівнодійної ( $\vec{R} \neq 0$ ) і лінія її дії проходить через точку  $A$ , або якщо  $\vec{R} = 0$ . Аналогічно рівність нулеві головного моменту відносно точки  $B$  означає, що або  $\vec{R} \neq 0$  і рівнодійна проходить через точку  $B$ , або  $\vec{R} = 0$ .

Отже, з перших двох рівностей (7.6) випливає, що якщо система сил має рівнодійну, то її лінія дії проходить через точки  $A$  і  $B$ . Тоді проєкція рівнодійної на вісь  $Ox$ , не перпендикулярну до відрізка  $AB$ , виявиться ненульовою. Але ця можливість виключається третім рівнянням (7.6) (оскільки  $R_x = \sum_{s=1}^n F_{sx}$ ). Значить, рівнодійна мусить дорівнювати нулеві, і система сил перебуває у рівновазі.

Якщо вісь  $Ox \perp AB$ , то рівняння (7.6) не будуть достатніми для рівноваги сил, оскільки в цьому випадку система сил може мати рівнодійну, лінія дії якої проходить через точки  $A$  і  $B$

### 3. Третя форма умов рівноваги.

**Теорема 3.** Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо рівності нулеві сум алгебраїчних моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій:

$$\sum_{s=1}^n M_{Az}(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n M_{Bz}(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n M_{Cz}(\vec{F}_s) = 0. \quad (7.7)$$

*Доведення.* Необхідність умов (7.7) для рівноваги сил випливає із рівнянь (7.1): в іншому разі  $\vec{M}_A \neq 0$ , або  $\vec{M}_B \neq 0$ , або  $\vec{M}_C \neq 0$ , тобто рівноваги не буде.

*Достатність* умов (7.7) випливає з того, що якби при одночасному виконанні цих умов дана система сил не перебувала б у рівновазі, то вона приводилась би до рівнодійної, яка одночасно проходить через три точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , що не лежать на одній прямій. З неможливості останнього випливає, що рівності (7.7) можуть виконуватись лише при  $\vec{R} = 0$ , тобто система сил перебуває у рівновазі.

**Примітка.** При розв'язуванні конкретних задач для отримання найбільш простих рівнянь рівноваги доцільно:

- 1) складаючи рівняння проєкцій, проводити координатну вісь перпендикулярно якій-небудь невідомій силі ;
- 2) складаючи рівняння моментів, вибирати центр моментів у точці, де перетинаються більше невідомих сил.

## 7.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

Направимо вісь  $Ox$  перпендикулярно силам (рис. 7.5, а).

### Перша форма умов рівноваги.

Рівняння (7.5) в даному випадку набувають вигляду:

$$\sum_{s=1}^n F_{sy} = 0, \quad \sum_{s=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_s) = 0. \quad (7.8)$$

### Друга форма умов рівноваги.

З рівнянь (7.6) або (7.7) дістаємо:

$$\sum_{s=1}^n M_{Az}(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n M_{Bz}(\vec{F}_s) = 0, \quad (7.9)$$

( $AB$  не паралельна  $Oy$ ).

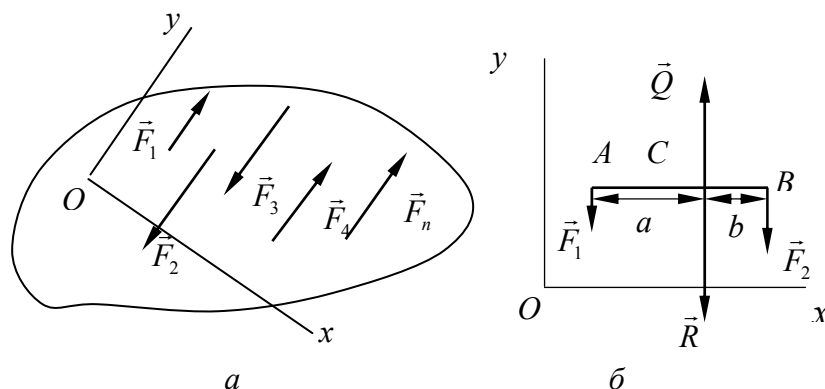


Рис. 7.5

Вибрані точки  $A$  і  $B$  не повинні лежати на прямій, паралельній осі  $Oy$ : в іншому разі рівняння (7.9) будуть задовольнятися при рівнодійній, що відмінна від нуля, коли лінія її дії проходить через вказані точки.

Як **приклад**, візьмемо задачу про рівнодійну двох паралельних, однаково направлених сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  (рис. 7.5, б), розглянуту в підрозділі 4.1. Якщо  $\vec{Q}$  – зрівноважувальна,  $\vec{R} = -\vec{Q}$  – рівнодійна, то  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}) \sim 0$ ,  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{Q} = 0$ . Позначивши, як завжди,  $Q = |\vec{Q}|$ ,  $R = |\vec{R}|$ ,  $F_1 = |\vec{F}_1|$ ,  $F_2 = |\vec{F}_2|$ , з рівнянь (7.8) маємо:

$$F_y = -F_1 - F_2 + Q = 0, \quad M_{Cz} = F_1 a - F_2 b = 0. \quad (7.10)$$

Друге рівняння (7.10) збігається з умовою (4.6). Система рівнянь (7.10) має розв'язок :

$$F_1 = R \frac{b}{l}, \quad F_2 = R \frac{a}{l}, \quad l = a + b. \quad (7.11)$$

Ці вирази можна знайти простіше, скориставшись умовами рівноваги у формі (7.9):

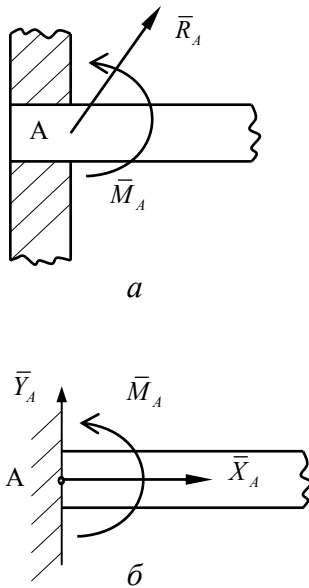
$$\begin{cases} M_{Az} = Qa - F_2 l = 0, \\ M_{Bz} = F_1 l - Qb = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

Оскільки остання система рівнянь (7.12) розщеплюється (розпадається) на два незалежних рівняння, то її розв'язування відносно  $F_1$  і  $F_2$  приводить до знайдених раніше виразів (7.10), але більш раціонально.

Вважаючи  $R = mg$  силою ваги двовісного автомобіля, дістаємо навантаження на колісні осі у вигляді :

$$F_1 = mg \frac{b}{l}, \quad F_2 = mg \frac{a}{l}.$$

### 7.6. Опора у вигляді жорсткого закріплення



Часто зустрічаються в'язі у вигляді нерухомої опори, яка жорстко зацемлена (рис. 7.6). Розглядаючи стіну і вставлений у неї кінець балки (рис. 7.6, а) як одне ціле, жорстке закріплення зображають так, як на рис. 7.6, б. У цьому випадку на балку в її поперечному перерізі діє зі сторони замуrowаного кінця система розподілених сил (реакцій). Вважаючи ці сили приведеними до центра  $A$  перерізу, можна замінити їх наперед невідомою силою  $\vec{R}_A$ , прикладеною в цьому центрі, та парою з наперед невідомим моментом  $\vec{M}_A$ . Силу  $\vec{R}_A$  можна у свою чергу зобразити її складовими  $\vec{X}_A$  та  $\vec{Y}_A$ . Отже, для знаходження реакції жорсткого закріплення необхідно визначити величини  $X_A, Y_A, M_A$ .

### 7.7. Статично неозначені задачі

Рис. 7.6

При вивченні рівноваги невіЛЬНОГО твердого тіла (точніше – системи сил, що діють на нього) на підставі принципу звільнюваності від в'язей (див. підрозділ 1.8), замінюємо дію в'язей їхніми реакціями. Якщо кількість цих, заздалегідь невідомих, реакцій дорівнює кількості рівнянь рівноваги, в які входять реакції, то задачу їх визначення можна розв'язати (статично означена задача, статично визначувані системи тіл). Якщо ж число невідомих реакцій більше числа рівнянь рівноваги, що містять ці реакції, то задача стає статично неозначеною, а системи тіл (конструкції), для котрих це має місце – статично невизначуваними (див. також підрозділ 2.3).

Наведемо кілька прикладів.

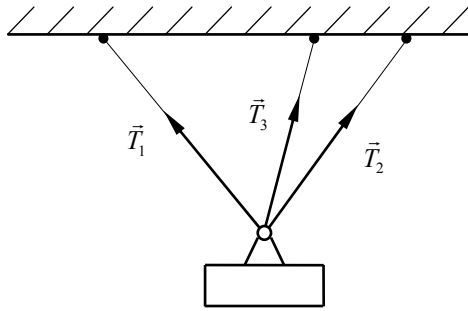


Рис. 7.7

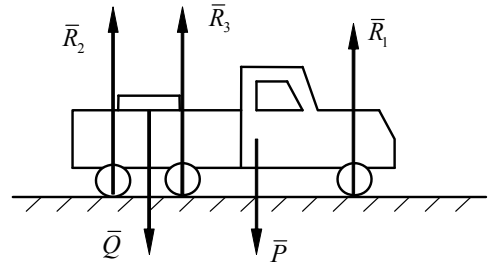


Рис. 7.8

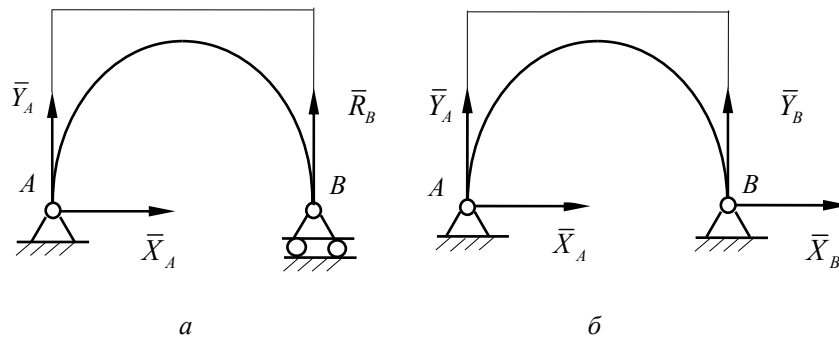


Рис. 7.9

1. Підвіска, що складається з двох тросів, є статично визначуваною, оскільки дві невідомі реакції в'язей  $\vec{T}_1$  і  $\vec{T}_2$  (рис. 7.7) входять у два рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил. Але тритросова підвіска є статично невизначуваною системою.

2. Нехай у кузові автомобіля вагою  $P$  лежить вантаж відомої ваги  $Q$  (рис. 7.8). За відсутності тертя реакції дороги направлені перпендикулярно до неї. Двохосьовий автомобіль статично визначуваний, трьохосьовий – статично невизначуваний.

3. Розглянемо ще арку, для якої в'язями є нерухома шарнірна опора в точці  $A$  та шарнірна опора на катках в точці  $B$  (рис. 7.9, *a*). Така арка статично визначувана, оскільки три невідомі реакції  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$  та  $\vec{R}_B$  ввійдуть у три рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил.

Якщо ж в точці  $B$  також буде нерухома шарнірна опора (рис. 7.9, *б*), то невідомих реакцій виявиться чотири ( $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ ), а рівнянь рівноваги залишиться три і арка стане статично невизначуваною.

Статична невизначуваність пояснюється накладанням зайвих в'язей. Наприклад, для забезпечення статичної рівноваги автомобіля, зображеного на рис. 7.8, достатньо двох колісних осей (передньої та задньої), третя колісна вісь з цього погляду не потрібна (автомобіль вважається абсолютно жорстким і таким, що не вгинається).

Статично невизначувані конструкції можна розраховувати, якщо врахувати їхні деформації. Це робиться в курсах опору матеріалів та теорії пружності.

### 7.8. Рівновага системи тіл

Нагадаємо, перш за все, що під умовним терміном “рівновага тіла” мають на увазі рівновагу системи сил, що діють на це тіло.

В’язі, що з’єднують частини даної конструкції, називаються **внутрішніми в’язями**.

В’язі, що скріплюють дану конструкцію з тілами, які до неї не входять (наприклад, з опорами), називаються **зовнішніми в’язями**.

Якщо після відкидання зовнішніх в’язей конструкція залишається жорсткою, то для неї задачі статички розв’язуються як для абсолютно твердого тіла. Однак можуть зустрічатись такі інженерні конструкції, які після відкидання зовнішніх в’язей не залишаються жорсткими. Прикладом такої конструкції є тришарнірна арка, що складається з двох частин, які мають шарнірні опори  $A$  і  $B$  і які з’єднані між собою ідеальним шарніром  $C$  (рис. 7.10). Коли відкинути опори  $A$  і  $B$ , арка не буде жорсткою: її частини під дією зовнішніх сил можуть повертатись навколо шарніра  $C$ .

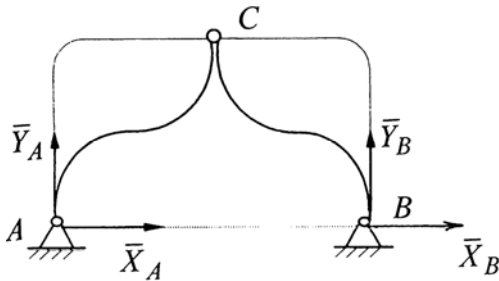


Рис. 7.10

На основі принципу затвердіння (див. підрозділ 1.5) дану систему тіл можна розглядати як одне тверде тіло. Тому система сил, що діють на цю конструкцію, має при рівновазі відповідати умовам рівноваги твердого тіла. Ці умови, як зазначалося раніше, є необхідними, але не достатніми. Хоча три

рівняння рівноваги містять чотири невідомих  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$  (проекції опорних реакцій у точках  $A$  і  $B$ ), все ж ця задача статично означена. Справа в тому, що

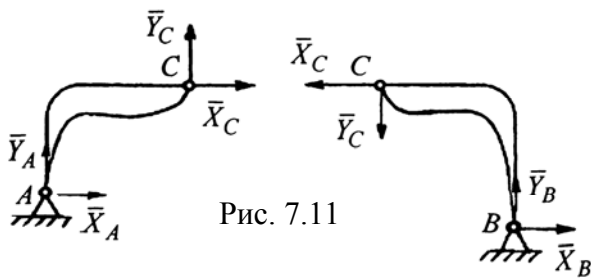


Рис. 7.11

кожне з тіл, з’єднаних між собою шарніром  $C$ , також перебуває в рівновазі. Тому можна розглядати рівновагу кожного тіла окремо. Дію правої половини на ліву, що передається через ідеальний шарнір, можна замінити однією силою із складовими  $X'_C$  та  $Y'_C$  (рис. 7.11), а дію лівої половини на

праву можна замінити на основі закону рівності дії та протидії (див. підрозділ 1.5) протилежно направленою силою з таким же модулем:

$$\vec{X}'_C = -\vec{X}_C, \quad \vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C.$$

Тому, розглянувши додатково умови рівноваги однієї з половин арки, отримаємо ще три рівняння, які містять два нових невідомих  $X_C$  та  $Y_C$ . Розв’язавши одержану систему шести рівнянь, знайдемо всі шість невідомих.

Інший спосіб розв’язування подібних задач полягає в тому, що конструкцію зразу розділяють на окремі тіла і складають умови рівноваги кожного з тіл окремо.

Доцільність застосування того чи іншого способу розв’язування задачі залежить від умов конкретної задачі.



З аркою, зображеною на рис. 7.9, б, цього зробити не можна, оскільки, розділивши її на дві частини (наприклад, перерізом, проведеним через середню точку  $C$ ), ми одержимо в цьому перерізі систему розподілених сил, яку можна привести до двох невідомих сил  $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$  та пари з невідомим моментом  $\vec{M}_C$ . Отже, невідомих стане сім  $(X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, M_C)$ , і їх з шести рівнянь рівноваги знайти неможливо.

### Питання для самоконтролю

1. Що називають алгебраїчним моментом сили відносно точки?
2. Що називають алгебраїчним моментом пари сил?
3. Коли плоска система сил зводиться до рівнодійної?
4. Коли плоска система сил зводиться до пари сил?
5. Назвіть три форми умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
6. Назвіть дві форми умов рівноваги плоскої системи паралельних сил.
7. Якими є реакції опори у вигляді жорсткого закріплення?
8. Наведіть приклади статично неозначених задач.
9. Які в'язі називають внутрішніми? зовнішніми?

## 8. Деякі додаткові питання просторової статyki

### 8.1. Визначення внутрішніх зусиль

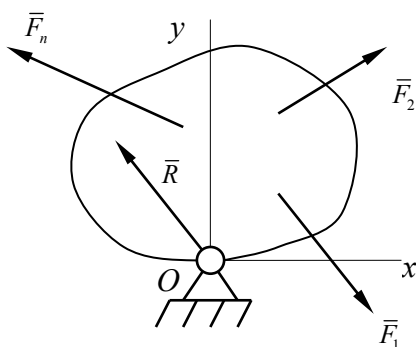


Рис. 8.1

Внутрішніми зусиллями в якому-небудь перерізі тіла чи конструкції (балки, арки і т.п.) називаються сили, з якими частини тіла, розділені цим перерізом, діють одна на другу. Метод визначення внутрішніх зусиль аналогічний методу, що застосовується при вивченні рівноваги системи тіл.

Спочатку розглядають рівновагу всього тіла (конструкції) в цілому і визначають реакції зовнішніх в'язей. Потім перерізом, в якому потрібно знайти внутрішні зусилля, розділяють тіло на дві частини і розглядають рівновагу однієї з них. При цьому, якщо система зовнішніх сил, що діють на тіло, плоска, то дія відкинутої частини заміниться в загальному випадку плоскою системою розподілених по перерізу сил. Ці сили, як у випадку жорсткого закріплення (див. підрозділ 7.6), представляють однією прикладеною в центрі перерізу силою з двома наперед невідомими складовими  $\vec{X}$  та  $\vec{Y}$  і парою сил з наперед невідомим моментом  $\vec{M}$ .

## 8.2. Умови рівноваги частково закріпленого тіла

Частково закріпленими є тіла, на які накладені в'язі, що допускають деяке переміщення тіла.

Очевидно, що при довільній системі активних сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , прикладених до тіла, рівноваги не буде. Вияснимо умови, яким повинні відповідати активні сили для того, щоб тіло перебувало в рівновазі.

**Випадок 1. Тверде тіло має нерухому вісь обертання** (рис. 8.1). Система активних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  розташована в площині, перпендикулярній до осі обертання. Вісь обертання служить в'яззю для тіла. Згідно з принципом звільнювальності від в'язей (див. підрозділ 1.8) дію даної в'язі замінимо реакцією  $\vec{R}$ , прикладеною в точці  $O$ . Припустимо, що тертя відсутнє. Напрямок реакції  $\vec{R}$  залежить від характеру прикладених до тіла сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ .

На підставі (7.5) умови рівноваги даної системи сил запишемо у вигляді:

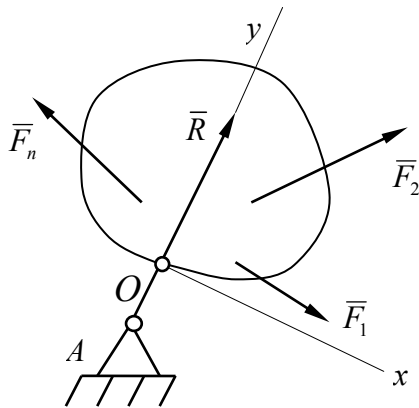


Рис. 8.2

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n F_{sx} + R_x = 0, \\ \sum_{s=1}^n F_{sy} + R_y = 0, \\ \sum_{s=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_s) = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

З перших двох рівнянь знаходимо  $R_x$  та

$R_y$ .

Третє рівняння (8.1) встановлює залежність між активними силами, необхідну для рівноваги тіла.

**Випадок 2. В'яззю для тіла слугує стрижень** (рис. 8.2).

Напрямок реакції  $\vec{R}$  фіксований і збігається з віссю стрижня. Рівняння рівноваги запишемо на основі умов (7.5):

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n F_{sx} = 0, \\ \sum_{s=1}^n F_{sy} + R = 0, \\ \sum_{s=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_s) = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Друге рівняння (8.2) слугує для визначення проекції  $R$  реакції  $\vec{R}$  на вісь  $Oy$ . Два останні рівняння накладають вимоги на систему активних сил. Третє рівняння записано для точки  $O$  тіла. Його можна видозмінити, записавши рівняння моментів для довільної точки осі  $Oy$ .

### **Питання для самоконтролю**

1. Що називають внутрішніми зусиллями?
2. Як знаходять внутрішні зусилля?
3. Якими є умови рівноваги твердого тіла, що має нерухому вісь обертання?
4. Якими є умови рівноваги невіЛЬНОГО твердого тіла, в'яззю для якого служить стержень?

## **9. Рівновага тіла за наявності тертя**

### **9.1. Види тертя**

Сили тертя в механічних явищах проявляються по-різному. У багатьох випадках сили тертя є джерелом шкідливих опорів рухові машин (лобовий опір рухові автомобіля, потягу і т.п.). Але в інших випадках саме сили тертя зумовлюють можливість руху:

1) людина не змогла б ходити по абсолютно гладенькій поверхні (при повній відсутності сил тертя між подошвами та цією поверхнею);

2) сили тертя зумовлюють можливість функціонування таких машин, як прокатні стани та інші.

Залежно від взаємних рухів тіл *тертя між твердими тілами* буває трьох видів.

1. Якщо відносна швидкість точок дотику тіл, що контактують, не дорівнює нулеві, то виникає **тертя ковзання**.

2. Якщо відносна швидкість точок дотику поверхонь тіл, що контактують, дорівнює нулеві і має місце кочення без ковзання, то виникає **тертя кочення**.

3. Існує ще **тертя вертіння**.

### **9.2. Сили тертя ковзання**

Практичний досвід кожного з нас показує, що при намаганні рухати одне тіло по поверхні іншого в площині співдотику тіл виникає сила опору їхньому відносному ковзанню (рис. 9.1). Ця сила є результатом взаємодії під певним тиском двох тіл, що співдотикаються. Вона виникає в точках співдотику, лежить у спільній дотичній площині до поверхонь тіл, що співдотикаються, і заважає ковзанню одного тіла відносно іншого. Тертя такого роду зветься *тертям ковзання*. Воно виникає, перш за все, внаслідок шорсткості поверхонь тіл і наявності зчеплення у тіл, що притиснуті одне до одного.

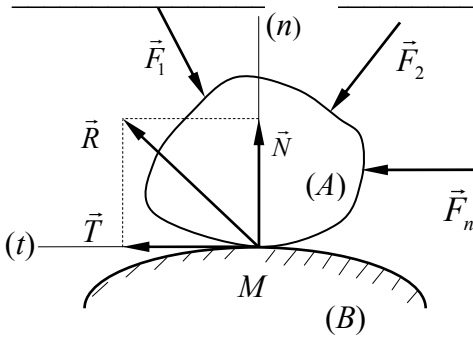


Рис. 9.1

Якщо тіла  $(A)$  та  $(B)$  взаємодіють, дотикаючись у точці  $M$ , то реакцією  $\vec{R}$ , що діє, наприклад, зі сторони тіла  $(B)$  і прикладена до тіла  $(A)$ , можна розкласти на дві складові  $\vec{N}$  і  $\vec{T}$ , причому  $\vec{N}$  направлена по спільній нормалі  $\vec{n}$  до поверхонь тіл у точці  $M$ , а  $\vec{T}$  лежить у дотичній площині. Складова  $\vec{N}$  називається нормальною реакцією, складова  $\vec{T}$  – силою тертя ковзання:

вона заважає ковзанню тіла  $(A)$  по тілу  $(B)$ .

На підставі закону рівності дії та протидії (див. підрозділ 1.5) на тіло  $(B)$  зі сторони тіла  $(A)$  діє рівна за модулем і протилежно направлена сила реакції. Її складова, перпендикулярна дотичній площині, називається **силою нормального тиску**.

Якщо поверхні тіл, що співдотикаються, абсолютно гладенькі, то  $T = 0$ . Такі в'язі звуться **ідеальними або в'язями без тертя**. У реальних умовах поверхні шорсткі, і в багатьох випадках нехтувати силою тертя не можна.

Нормальна складова в деяких випадках може бути визначена цілком незалежно від фізичних властивостей поверхонь тіл, що співдотикаються. Дотична ж складова істотно залежить від фізичного стану поверхонь тіла та в'язі: від властивостей їхніх матеріалів, обробки поверхонь, шорсткості та інше.

Сили тертя виникають не тільки між поверхнями твердих тіл при їхньому взаємному безвідривному русі, але й між частинками рідин та газів при їх взаємодіях з поверхнями твердих тіл. Нижче розглядається лише тертя твердих тіл, причому поверхні тіл вільні від мастила.

Інакше кажучи, будемо розглядати лише **сухе тертя**.

Тертя між поверхнями твердих тіл, покритими мастилом, виникає, по суті, між тонкими поверхневими шарами мастила. Тому тертя між змазаними поверхнями слід розглядати як тертя шарів рідини (в'язке тертя), а не як тертя поверхонь твердих тіл.

Не зважаючи на те, що тертя є одним з найбільш поширених явищ природи і зустрічається в багатьох задачах механіки, точні закони тертя до

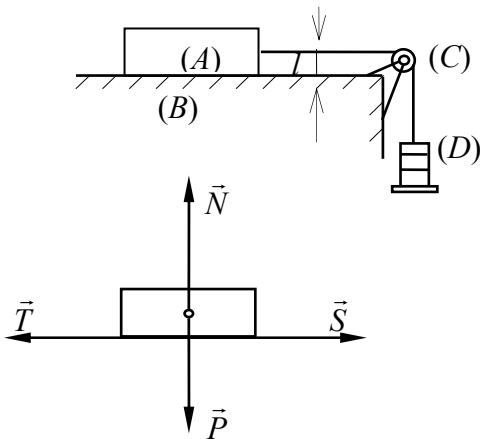


Рис. 9.2

цих пір не встановлені внаслідок труднощів, пов'язаних з виявленням повної фізичної картини виникнення сили тертя і з кількісною оцінкою всіх факторів, від яких ця сила залежить. Тому при врахуванні сил тертя користуються законами, які мають в основному якісний характер і являють собою тільки певне наближення до дійсності. Ці закони були встановлені в результаті перших дослідів над тертям, виконаних Амонтоном в 1699 р., та більш точних експериментальних досліджень Кулона в 1781 р.

Найпростіший спосіб визначення величини сили тертя ковзання і виявлення факторів, що впливають на неї, базується на урівноваженні сили тертя іншою силою, величина якої відома. Опишемо один з таких способів.

До тіла ( $A$ ), що лежить на нерухомому столі ( $B$ ), приєднана перекинута через блок ( $C$ ) нитка (рис. 9.2), до вільного кінця якої прилаштована опорна площадка ( $D$ ). Нитку слід прикріплювати до тіла так, щоб її віддаль  $l$  до стола була по можливості малою. Коли площадку ( $D$ ) поступово навантажувати, то зі збільшенням її загальної ваги буде зростати натяг  $\vec{S}$  нитки, який прагне змістити тіло вправо. Однак поки загальне навантаження не занадто велике, сила тертя  $\vec{T}$  буде утримувати тіло ( $A$ ) в спокої. Нехай  $\vec{P}$  – сила ваги тіла,  $\vec{N}$  – нормальна реакція стола. Якщо навантаження недостатнє для порушення спокою, то справедливі такі рівняння рівноваги:

$$N - P = 0, \quad S - T = 0.$$

Отже,  $N = P$ ,  $T = S$ . Таким чином, поки тіло перебуває в спокої, модуль сили тертя залишається рівним модулю сили натягу нитки. Сила тертя, що розвивається при відсутності взаємних рухів тіл, називається **силою статичного тертя**, або **силою тертя спокою**.

Вона не має якого-небудь певного, конкретного значення і знаходиться з рівнянь рівноваги. Коли ця сила досягає найбільшої можливої величини, досить незначного поштовху, щоб тіло ( $A$ ) почало рухатися по поверхні стола. Позначимо через  $T_{\max}$  модуль сили тертя в критичний момент процесу навантаження, коли тіло ( $A$ ) втрачає рівновагу і починає ковзати. Значить, коли тіло перебуває в спокої, то

$$T \leq T_{\max}. \quad (9.1)$$

Сила тертя спокою має невизначений напрям. Вона гальмуюча сила і має напрям, протилежний напрямку руху тіла, який міг би виникнути під дією активних сил, якби сила тертя перестала чинити опір цьому рухові.

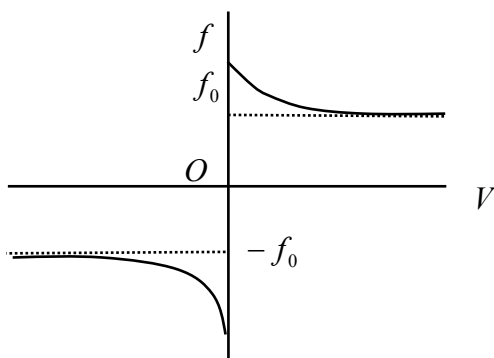


Рис. 9.3

Таким чином, **напрямок сили тертя залежить від напрямку активних сил**. У тих випадках, коли елементи поверхонь тіл, між якими виникають сили тертя ковзання, мають різні рухи, необхідно розглядати елементарні сили тертя, розподілені на цих поверхнях.

Відміна сили тертя від інших реакцій в'язей полягає в тому, що її модуль не може перевищити певної границі. Максимальна (гранична) сила тертя  $T_{\max}$  залежить від властивостей матеріалів (дерево, метал і т. п.) тіл, що труться, характеру обробки і стану (вологість, температура); вона зростає при збільшенні тривалості попереднього контакту поверхонь тіл. Величина  $T_{\max}$  не залежить від площі контакту поверхонь тіл, що

співдотикаються. Вона майже пропорційна нормальному тиску (закон Амонтона – Кулона):

$$T_{\max} = f_0 N, \quad (9.2)$$

де  $f_0$  – коефіцієнт тертя ковзання в спокої або статичний коефіцієнт тертя ковзання. Для абсолютно гладеньких тіл  $f_0 = 0$ , для реальних тіл  $f_0 > 0$ . При сухому терті дерева об дерево  $f_0 \in [0,4; 0,7]$ ; металу об метал  $f_0 \in [0,15; 0,25]$ ; сталі об лід  $f_0 = 0,027$ .

З виразів (9.1) та (9.2) випливає:

$$T \leq f_0 N. \quad (9.3)$$

Випадок строгої рівності (9.3) відповідає максимальному (граничному)

значенню сили тертя. Це значить, що силу тертя можна обчислити за формулою  $T = f_0 N$  лише в тих випадках, коли заздалегідь відомо, що має місце критичний випадок. В усіх же інших випадках (як зазначалося вище) силу тертя слід визначати з рівнянь рівноваги.

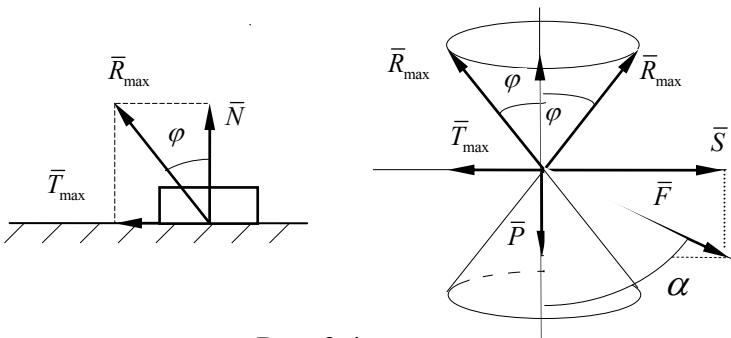


Рис. 9.4

При розгляді явища тертя розрізняють статичне тертя, що має місце в стані спокою тіл, що співдотикаються, і тертя руху, яке має місце у відносному русі тіл. Нехай тепер  $S > T_{\max}$ . Для тіл, які рухаються, сила тертя направлена в сторону, протилежну відносній швидкості тіла (протилежну напрямку руху), а її модуль визначається виразом:

$$T = f N, \quad (9.4)$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання в русі або динамічний коефіцієнт тертя ковзання.

Він також (як і  $f_0$ ) залежить від матеріалу тіл, що дотикаються, шорсткості (ступеня або чистоти обробки) і стану поверхонь, що труться, але деякою мірою і від швидкості руху. Звичайно зі збільшенням швидкості коефіцієнт  $f$  спочатку дещо зменшується, а далі зберігає майже сталі значення (рис. 9.3). Виняток становить, наприклад, тертя шкіри об метал, при якому зі збільшенням швидкості  $V$  коефіцієнт  $f$  дещо зростає. Аномальними є також матеріали з високою пружністю (наприклад, гума), для яких тертя руху може і не бути меншим, ніж тертя спокою.

### 9.3. Кут тертя та конус тертя

Реакція реальної (шорсткої) в'язі складається з двох компонент: нормальної  $\vec{N}$  та сили тертя  $\vec{T}$ . Повна реакція  $\vec{R}$ , отже, відхилена від нормалі на певний кут. При зміні модуля сили тертя від нуля до  $T_{\max}$  сила  $\vec{R}$  змінюється від  $\vec{N}$  до  $\vec{R}_{\max}$

(граничне значення), а її кут з нормаллю зростає від нуля до деякого граничного значення (рис. 9.4). Найбільший кут, який повна реакція шорсткої в'язі утворює з нормаллю до поверхні, називається **кутом тертя**. З рис. 9.4 та формули (9.2) маємо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_{\max}}{N} = f_0. \quad (9.5)$$

Тут  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Геометричне місце всіх можливих напрямів граничної реакції  $\vec{R}_{\max}$  утворює конічну поверхню, яка обмежує **конус тертя**. Він круговий, якщо статичний коефіцієнт тертя ковзання  $f_0$  в усіх напрямках однаковий. Коли ж  $f_0$  залежить від напрямку можливого руху тіла, конус тертя не буде круговим.

Нехай активні сили, що діють на тіло, приводяться до рівнодійної сили  $\vec{F}$ , направленої під кутом  $\alpha$  до нормалі поверхні в'язі (вага тіла входить в  $F$ ). Розкладемо силу  $\vec{F}$  на дві складові:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{S}, \quad P = F \cos \alpha, \quad S = F \sin \alpha.$$

Нормальна складова  $\vec{P}$  притискує тіло ( $A$ ) до стола. Вона визначає нормальну складову  $\vec{N}$  реакції поверхні стола і, отже, максимальну силу тертя (9.2). Дотична складова  $\vec{S}$  прагне подолати силу  $\vec{T}_{\max}$ . Наявність або відсутність руху тіла залежить від співвідношення між  $S$  і  $T_{\max}$ . Якщо збільшувати модуль сили  $\vec{F}$ , то пропорційно будуть зростати обидві складові  $\vec{P}$  та  $\vec{S}$ . Звідси можна зробити висновок, що стан спокою чи руху тіла не залежить від модуля сили  $\vec{F}$ , а визначається тільки кутом  $\alpha$ : чим менший цей кут, тим менша тенденція до порушення рівноваги.

Для аналітичного розв'язування задачі складемо умови рівноваги тіла:

$$\begin{cases} T - F \sin \alpha = 0, \\ N - F \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Звідси  $T = F \sin \alpha$ ,  $N = F \cos \alpha$ . Тому співвідношення (9.3) набуває вигляду:

$$F \sin \alpha \leq f_0 F \cos \alpha,$$

або  $\operatorname{tg} \alpha \leq f_0$ . Враховуючи формулу (9.5), одержуємо умову рівноваги тіла у вигляді:  $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi$ . Отже, в стані спокою ("при рівновазі тіла")

$$\alpha \leq \varphi. \quad (9.6)$$

Це означає, що коли рівнодійна активних сил лежить всередині конуса тертя, то збільшенням її модуля не можна порушити рівновагу тіла: яким би великим не був модуль сили  $\vec{F}$ , вона не може зсунути тіло з місця за умови (9.6). Цим пояснюються явища заклинювання або самогальмування тіл.

Щоб тіло почало *рухатись*, необхідно (і достатньо) перебування рівнодійної активних сил  $\vec{F}$  зовні конуса тертя, тобто виконання нерівності

$$\alpha > \varphi.$$

### 9.4. Рівновага твердого тіла за наявності тертя кочення

**Тертям кочення** називається опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого тіла.

Необхідність введення тертя кочення диктується практикою. Досвід показує, що для кочення важкого циліндра (катка) по горизонтальній площині до осі циліндра слід прикласти деяку горизонтальну силу. Вона необхідна саме для подолання тертя кочення, яке виникає від того, що поверхня тіла, яке котиться, і площина, по якій тіло котиться, *не абсолютно тверді*, а дещо *деформуються* внаслідок тиску тіла на площину.

Спочатку припустимо, що циліндр і площина є абсолютно твердими; через  $A$

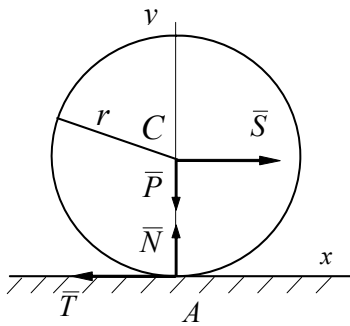


Рис. 9.5

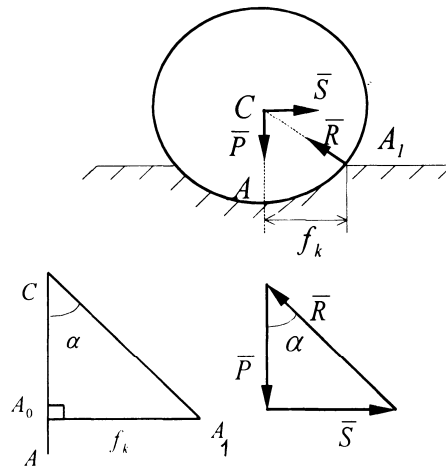


Рис. 9.6

позначимо точку дотику кругового перерізу циліндра з площиною (рис. 9.5). Щоб могло відбуватись кочення без ковзання, їхні поверхні повинні бути шорсткими. Прикладемо до осі циліндра горизонтальну силу  $\vec{S}$ , причому  $S < T_{\max}$ . У точці  $A$  виникне сила тертя  $\vec{T}$ , причому  $|\vec{T}| = |\vec{S}|$  (тобто  $T = S$ ). Ця сила  $\vec{T}$  заважає ковзанню циліндра по площині. Коли вважати нормальну реакцію  $\vec{N}$  прикладеною також в точці  $A$ , то вона зрівноважить силу  $\vec{P}$ , а сили  $\vec{S}$  та  $\vec{T}$  утворять пару сил з алгебраїчними моментом

$$M_{Az} = -Sr.$$

Отже, головний момент усіх сил, що діють на циліндр, не дорівнює нулеві, тобто одна з умов рівноваги сил не виконується. Рівноваги не буде: під дією пари сил  $(\vec{S}, \vec{T})$  почнеться кочення циліндра при будь-якій як завгодно малій силі  $\vec{S}$ .

Дійсна ж картина, як показує дослід, має інший вигляд: при достатньо малому модулі сили  $\vec{S}$  циліндр залишається в спокої. Причина невідповідності полягає в уявленні про абсолютно тверде тіло і припущенні, що дотик циліндра з площиною дороги відбувається по твірній циліндра.

Для усунення виявленої невідповідності теорії з дослідом слід відмовитись від гіпотези абсолютно твердого тіла та врахувати, що в дійсності циліндр і



площина поблизу точки  $A$  деформуються та існує деяка область співдотикання скінченної ширини. Внаслідок цього в її правій (передній) частині циліндр притискується сильніше, ніж у лівій (задній), і повна реакція  $\vec{R}$  прикладена в точці  $A_1$ , що розташована правіше точки  $A$  (рис. 9.6). З умови рівноваги трьох непаралельних сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{S}$  та  $\vec{R}$  випливає, що реакція  $\vec{R}$  площини мусить проходити через центр  $C$  катка (через вісь циліндра), оскільки дві інші сили прикладені в цій точці.

Система сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{R}$  виявляється врівноваженою при значеннях сили  $\vec{S}$ , обмежених зверху. Реакція  $\vec{R}$  при цьому складається з нормальної компоненти і сили тертя ковзання  $\vec{T}$ . Із силового трикутника на нижній частині рис. 9.6 видно, що зі збільшенням  $S$  сила  $\vec{R}$ , щоб урівноважувати систему, повинна утворювати все більший кут  $\alpha$  з вертикаллю, тобто точка  $A_1$  прикладання реакції  $\vec{R}$  мусить все далі зміщуватись вправо. Але таке зміщення пов'язане з площею поверхні контакту і, отже, не може зростати необмежено. Це значить, що настане такий стан, коли збільшення  $S$  приведе до порушення рівноваги. Позначимо найбільше можливе зміщення через  $f_k = A_0A_1$ .

Якщо  $S$  має найбільше значення  $S_{\max}$ , при якому ще можлива рівновага, то  $S_{\max}$  можна знайти із подібності трикутника  $CA_0A_1$  та силового трикутника. Вважаючи  $CA_0 \approx r$ , де  $r$  – радіус циліндра, маємо:

$$\frac{S_{\max}}{P} = \frac{f_k}{r},$$

звідки

$$S_{\max} = \frac{f_k}{r} P. \quad (9.7)$$

Якщо  $S < S_{\max}$ , то циліндр перебуває у спокої; при  $S > S_{\max}$  починається кочення.

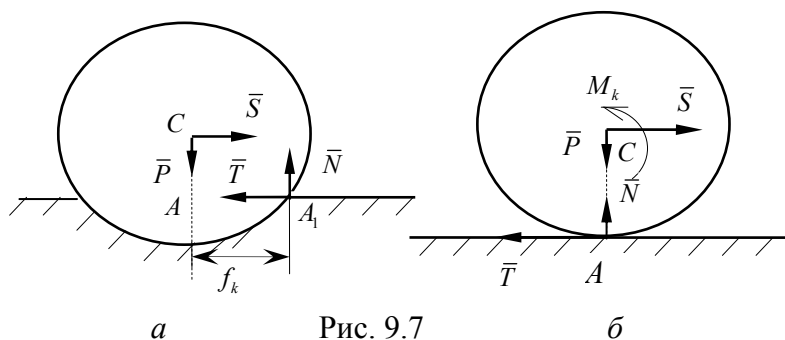


Рис. 9.7

Лінійна величина  $f_k$  називається **коефіцієнтом тертя кочення**. Вимірюють  $f_k$  звичайно в сантиметрах. При коченні дерева по дереву  $f_k \in [0,05; 0,08]$  см; сталі м'якої по сталі (колеса по рейці)  $f_k = 0,005$  см; сталі загартованої по сталі (кульовий підшипник)  $f_k = 0,001$  см.

Порівняємо між собою формули (9.2) – (9.4) і (9.7). Оскільки  $\frac{f_k}{r} \ll f$  для більшості матеріалів, то в техніці, коли це можливо, тертя ковзання прагнуть замінити тертям кочення (колеса, катки, кульові підшипники тощо).

У граничному положенні рівноваги циліндра до нього прикладено дві пари сил, що взаємно зрівноважуються (рис. 9.7, а):

$$1) \text{ пара сил } (\vec{S}_{\max}, \vec{T}_{\max}) \text{ з моментом } \vec{M}(\vec{S}_{\max}, \vec{T}_{\max}) = -\vec{k}S_{\max}r;$$

$$2) \text{ пара сил } (\vec{N}, \vec{P}) \text{ з моментом } \vec{M}(\vec{N}, \vec{P}) = \vec{k}f_k N,$$

де  $\vec{k}$  – орт осі  $z$ , направленої на читача перпендикулярно площині рисунка.

Направлені ці моменти в протилежні сторони. Остання пара сил утримує циліндр у рівновазі, а її алгебраїчний момент називається **моментом тертя кочення**. Для його модуля маємо:

$$M_k = Nh, \quad h \leq f_k,$$

звідки  $\max h = f_k$ ,  $(M_k)_{\max} = N f_k$ .

Складемо рівняння рівноваги циліндра (рис. 9.7, б):

$$S - T = 0, \quad N - P = 0, \quad -Sr + M_k = 0.$$

Звідси

$$T = S, \quad N = P, \quad M_k = Sr = Nh, \quad h = \frac{Sr}{P}.$$

Якщо має місце рівновага, то виконується умова

$$h \leq f_k \Rightarrow M_k \leq Nf_k, \quad S \leq \frac{f_k}{r} N.$$

### Питання для самоконтролю

1. Що звуть тертям ковзання?
2. Яке тертя звуть сухим?
3. В чому полягає відмінність сили тертя ковзання від інших реакцій в'язей?
4. Що називають динамічним коефіцієнтом тертя ковзання?
5. Що називають кутом тертя? конусом тертя?
6. В чому полягає явище заклинювання або самогальмування тіл?
7. Що називають тертям кочення?
8. Що називають коефіцієнтом тертя кочення? моментом тертя кочення?
9. Як у техніці використовують той факт, що коефіцієнт тертя кочення менший за коефіцієнт тертя ковзання?

## 10. Системи паралельних сил

### 10.1. Центр паралельних сил

У підрозділі 4.1 було показано, що дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , направлені в одну сторону і прикладені в точках  $A$  та  $B$ , мають рівнодійну  $\vec{R}$ , прикладену в

точці  $C$  (див. рис. 4.1). Положення точки  $C$  всередині відрізка  $AB$  визначається рівністю (4.6). Спочатку ця рівність була знайдена безпосередньо, а потім була записана у вигляді (4.9) із залученням поняття моменту сили відносно осі.

У рівність (4.7) входять модулі  $F_1$  та  $F_2$  сил  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , що розглядаються. А тому при повороті сил  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$  в одну й ту саму сторону на однаковий кут утворюються дві нові паралельні сили  $\vec{P}_1$  та  $\vec{P}_2$  з тими самими модулями

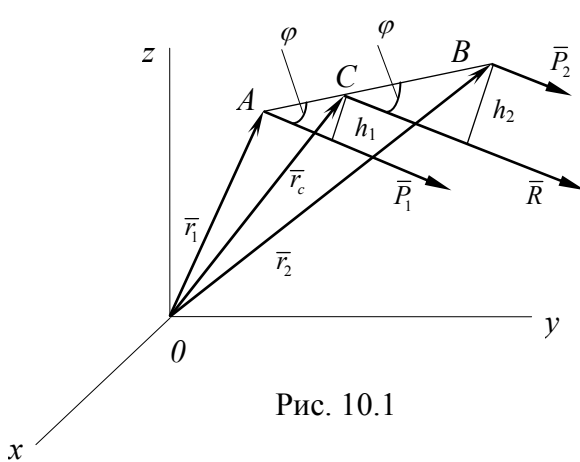


Рис. 10.1

$P_1 = F_1$ ,  $P_2 = F_2$ . Значить, для сил  $\vec{P}_1$  та  $\vec{P}_2$  рівність (4.7) зберігається, а лінія дії їхньої рівнодійної  $\vec{R}$  теж пройде через точку  $C$  (рис. 10.1). Така точка  $C$  називається **центром паралельних сил**  $\vec{P}_1$  та  $\vec{P}_2$ . Вона не залежить від напрямку сил  $\vec{P}_1$  та  $\vec{P}_2$  у просторі (за умови, що ці сили направлені в одну сторону).

Знайдемо положення цієї точки відносно певної декартової прямокутної системи координат  $\Sigma = Oxyz$ . Нехай

координати точок  $A$ ,  $B$  та  $C$  в цій системі відомі:  $A(x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ ,  $C(x_C, y_C, z_C)_\Sigma$ , тобто радіуси-вектори цих точок за ортонормованим базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  розкладаються так:

$$\vec{r}_1 = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{i}x_2 + \vec{j}y_2 + \vec{k}z_2, \quad \vec{r}_c = \vec{i}x_C + \vec{j}y_C + \vec{k}z_C. \quad (10.1)$$

Три сили  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  і  $-\vec{R}$  урівноважені:  $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, -\vec{R}) \sim 0$ . Запишемо рівняння моментів цих сил відносно осі, що проходить через точку  $C$  і перпендикулярна площині сил:

$$P_1 h_1 - P_2 h_2 = 0, \quad \text{тобто} \quad P_1 \cdot AC \cdot \sin \varphi - P_2 \cdot CB \cdot \sin \varphi = 0.$$

Отже,

$$AC \cdot P_1 = CB \cdot P_2. \quad (10.2)$$

Враховуючи однонаправленість векторів  $\vec{AC}$  та  $\vec{CB}$  рівність (10.2) можна узагальнити до вигляду (домноживши обидві частини рівності (10.2) на орт вектора  $\vec{AB}$ ):

$$\vec{AC} \cdot P_1 = \vec{CB} \cdot P_2. \quad (10.3)$$

Тут

$$\vec{AC} = \vec{r}_c - \vec{r}_1, \quad \vec{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_c. \quad (10.4)$$

Підставивши (10.4) в (10.3) і розв'язавши відповідне векторне рівняння відносно  $\vec{r}_c$ , дістанемо

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 P_1 + \vec{r}_2 P_2}{P_1 + P_2}, \quad (10.5)$$

або в координатній формі (враховуючи (10.1))

$$x_c = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2}{P_1 + P_2}, \quad y_c = \frac{y_1 P_1 + y_2 P_2}{P_1 + P_2}, \quad z_c = \frac{z_1 P_1 + z_2 P_2}{P_1 + P_2}.$$

Перейдемо до загального випадку довільної кількості однонаправлених паралельних сил.

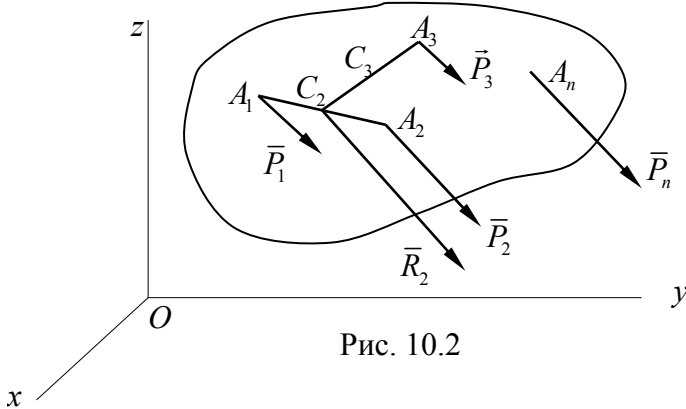


Рис. 10.2

Нехай на тверде тіло діє система паралельних сил  $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$ , прикладених в точках  $A_1, \dots, A_n$  і направлених в одну сторону (рис. 10.2). Знайдемо спочатку точку  $C_2$ , через яку проходить рівнодійна  $\vec{R}_2$  двох сил  $\vec{P}_1$  та  $\vec{P}_2$ . Для радіуса-вектора  $\vec{r}_{C_2} = \vec{OC}_2$  цієї точки на

підставі виразу (10.5) маємо:

$$\vec{r}_{C_2} = \frac{\vec{r}_1 P_1 + \vec{r}_2 P_2}{P_1 + P_2}. \quad (10.6)$$

Тут

$$R_2 = P_1 + P_2 \quad (10.7)$$

є модуль рівнодійної  $\vec{R}_2$ .

Далі знайдемо точку  $C_3$ , через яку проходить рівнодійна  $\vec{R}_3$  сил  $\vec{R}_2$  та  $\vec{P}_3$ :

$$\vec{r}_{C_3} = \frac{\vec{r}_{C_2} R_2 + \vec{r}_3 P_3}{R_2 + P_3}. \quad (10.8)$$

Підставимо вирази (10.6) та (10.7) в (10.8):

$$\vec{r}_{C_3} = \frac{\vec{r}_1 P_1 + \vec{r}_2 P_2 + \vec{r}_3 P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{\sum_{s=1}^3 \vec{r}_s P_s}{\sum_{s=1}^3 P_s}. \quad (10.9)$$

Тут

$$R_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

є модуль рівнодійної  $\vec{R}_3$  сил  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  та  $\vec{P}_3$ .

Помічаючи загальний закон утворення виразів для радіусів-векторів точок прикладання рівнодійних відповідних сил, доведемо методом повної математичної індукції переходом від  $k$  сил до  $k+1$ , що цей закон справедливий для довільної кількості сил.

Припустимо, що для точки  $C_k$ , в якій прикладена рівнодійна  $\vec{R}_k = \vec{P}_1 + \dots + \vec{P}_k$  сил  $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_k$ , маємо

$$\vec{r}_{C_k} = \frac{\vec{r}_1 P_1 + \dots + \vec{r}_k P_k}{P_1 + \dots + P_k}. \quad (10.10)$$

Тут

$$R_k = P_1 + \dots + P_k \quad (10.11)$$

є модуль рівнодійної.

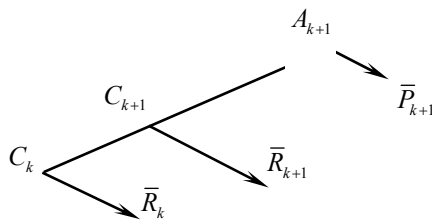


Рис. 10.3

Складемо силу  $\vec{R}_k$  з силою  $\vec{P}_{k+1}$ . Їхньою рівнодійною є сила  $\vec{R}_{k+1}$  з модулем

$$R_{k+1} = R_k + P_{k+1} = P_1 + \dots + P_k + P_{k+1}.$$

Положення точки  $C_{k+1}$  прикладання цієї рівнодійної (рис. 10.3) на підставі (10.3) визначається з рівності:

$$\overrightarrow{C_k C_{k+1}} \cdot R_k = \overrightarrow{C_{k+1} A_{k+1}} \cdot P_{k+1}.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{C_k C_{k+1}} = \vec{r}_{C_{k+1}} - \vec{r}_{C_k}, \quad \overrightarrow{C_{k+1} A_{k+1}} = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_{C_{k+1}},$$

то  $(\vec{r}_{C_{k+1}} - \vec{r}_{C_k}) R_k = (\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_{C_{k+1}}) P_{k+1}$ .

Звідси для радіуса-вектора  $\vec{r}_{C_{k+1}}$  точки  $C_{k+1}$  дістаємо вираз:

$$\vec{r}_{C_{k+1}} = \frac{\vec{r}_{C_k} R_k + \vec{r}_{k+1} P_{k+1}}{R_k + P_{k+1}} \quad (10.12)$$

Величина в знаменнику на підставі виразу (10.11) дорівнює

$$R_{k+1} = P_1 + \dots + P_k + P_{k+1} \quad (10.13)$$

Підставивши вирази (10.10) та (10.13) в (10.12), одержимо

$$\vec{r}_{C_{k+1}} = \frac{\vec{r}_1 P_1 + \dots + \vec{r}_k P_k + \vec{r}_{k+1} P_{k+1}}{P_1 + \dots + P_{k+1}},$$

що й треба було довести.

Таким чином, модуль рівнодійної  $\vec{R}$  системи паралельних сил  $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$ , направлених в одну сторону, визначається формулою

$$R = P_1 + \dots + P_n, \quad (10.14)$$

а для радіуса-вектора її точки прикладання  $C$  маємо вираз

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{s=1}^n \vec{r}_s P_s}{\sum_{s=1}^n P_s}. \quad (10.15)$$

Точка, через яку проходить рівнодійна системи паралельних сил, направлених в одну сторону, і яка визначається формулою (10.15), називається **центром паралельних сил**.

Якщо повернути дані сили на один і той же кут, зберігаючи їхні точки прикладання, то і рівнодійна цих сил повернеться на такий самий кут. При цьому положення центра паралельних сил не зміниться, оскільки формула (10.15)

показує, що його положення від напрямку сил не залежить: воно визначається лише модулями сил та їхніми точками прикладання.

У випадку системи **паралельних сил, направлених у різні сторони**, можна розділити сили цієї системи на дві групи, кожна з яких включає сили, направлені тільки в одну сторону. Знайшовши рівнодійну кожної групи сил та її положення, приведемо задану систему сил до системи двох антипаралельних сил. Остання, як відомо, приводиться або до однієї сили (див. підрозділ 4.2), що зветься рівнодійною, або до пари сил (див. підрозділи 4.3, 5.1).

Легко переконатись, що для знаходження  $R$  та  $\vec{r}_C$  і в цьому випадку можна користуватись формулами (10.14) і (10.15), беручи в них значення  $P_s$  для сил, направлених в яку-небудь одну сторону, зі знаком плюс, а в протилежну – зі знаком мінус.

Отже, при одночасному повороті ліній дії всіх паралельних сил на один і той же кут (якщо точки прикладання цих сил зберігаються незмінними і повороти ліній дії сил відбуваються навколо паралельних осей) рівнодійна цієї системи сил повертається на такий самий кут, причому її поворот відбувається навколо фіксованої точки. Ця точка називається **центром паралельних сил**. Для декартових координат цієї точки з виразу (10.15) одержуємо формули:

$$x_C = \frac{\sum_{s=1}^n x_s P_s}{\sum_{s=1}^n P_s}, \quad y_C = \frac{\sum_{s=1}^n y_s P_s}{\sum_{s=1}^n P_s}, \quad z_C = \frac{\sum_{s=1}^n z_s P_s}{\sum_{s=1}^n P_s}. \quad (10.16)$$

Вираз  $\vec{S}_O = \sum_{s=1}^n \vec{r}_s P_s$  називається **статичним моментом системи паралельних сил  $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$  відносно точки  $O$** . Назва пов'язана з тим, що статичним моментом матеріальної точки відносно осі називається добуток маси точки на віддаль точки до осі. З виразу (10.15) випливає, що  $\vec{r}_C = \frac{\vec{S}_O}{R}$ ,  $\vec{S}_O = \vec{r}_C R$ .

Вирази

$$S_{yz} = \sum_{s=1}^n x_s P_s, \quad S_{zx} = \sum_{s=1}^n y_s P_s, \quad S_{xy} = \sum_{s=1}^n z_s P_s$$

називаються статичними моментами системи паралельних сил  $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$  відносно координатних площин  $yOz$ ,  $xOz$  та  $xOy$  відповідно. Вони є проекціями вектора  $\vec{S}_O$  на відповідні координатні осі, тому

$$\vec{S}_O = \vec{i} S_{yz} + \vec{j} S_{zx} + \vec{k} S_{xy}.$$

З виразів (10.16) випливає, що

$$x_C = \frac{S_{yz}}{R}, \quad y_C = \frac{S_{zx}}{R}, \quad z_C = \frac{S_{xy}}{R}.$$

Якщо початок координат вибрано в центрі паралельних сил, то

$$x_C = y_C = z_C = 0 \quad \text{і} \quad S_{yz} = S_{zx} = S_{xy} = 0.$$

### 10.2. Центр ваги дискретної системи матеріальних точок

Сила, з якою матеріальна точка притягується Землею, називається **силою тяжіння** або **гравітаційною силою**. Модуль цієї сили дорівнює вазі точки. Сила тяжіння має напрям нитки, один кінець якої нерухомо закріплений, а до другого прив'язана важка кулька. Цей напрям зветься вертикальним. Площина, перпендикулярна до вертикалі, називається горизонтальною площиною.

Область простору, в кожній точці якої на поміщену туди матеріальну частинку діє сила, що однозначно визначена за модулем та напрямом в усякий момент часу, називається **силовим полем**. Відповідні сили  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$  зуться **позиційними**. Прикладом позиційного силового поля є поле тяжіння (поле сил притягування до Землі або до всякого іншого небесного тіла).

У реальних умовах віддалі між точками конкретних матеріальних систем, звичайно, значно менші від середнього радіуса земного сфероїда. Тому сили ваги, прикладені до точок системи, можна наближено розглядати як паралельні сили. Нехай  $P_s$  – вага  $s$ -тої точки. Центр системи сил ваги  $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$ , прикладених до точок матеріальної системи, називається **центром ваги** системи матеріальних точок. Координати центра ваги цієї системи визначаються формулами (10.16).

### 10.3. Центр ваги твердого тіла

Для тіл, розміри яких дуже малі у порівнянні з земним радіусом, сили тяжіння, що діють на частинки тіла, можна вважати паралельними і такими, які зберігають для кожної частинки постійне значення при будь-яких поворотах тіла. Силове поле, в якому виконуються ці обидві умови, називається **однорідним**. Щоб знайти координати центра ваги твердого тіла, розіб'ємо тіло довільним чином на  $n$  достатньо малих елементів. Якщо  $(v)$  – область простору,

зайнята тілом, то  $(v) = \bigcup_{i=1}^n (v_i)$ . Нехай  $v_i$  та  $P_i$  – об'єм та вага області  $(v_i)$ . Вагу одиниці об'єму називають **питомою вагою**:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{v_i}. \quad (10.17)$$

У межах  $i$ -того елемента  $(v_i)$  візьмемо довільну точку  $M_i(x_i, y_i, z_i) \in (v_i)$  та прикладемо до неї силу ваги  $\vec{P}_i$ . Координати центра ваги одержаної дискретної системи матеріальних точок  $M_1, \dots, M_n$  визначаються формулами (10.16). Вони ж будуть наближеними формулами для координат центра ваги тіла:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n x_i \gamma_i v_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i v_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n y_i \gamma_i v_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i v_i}, \quad z_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n z_i \gamma_i v_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i v_i}. \quad (10.18)$$

Введений тут термін “дискретний” походить від латинського слова *discretus* – перервний. Дискретною називається система, між окремими елементами якої

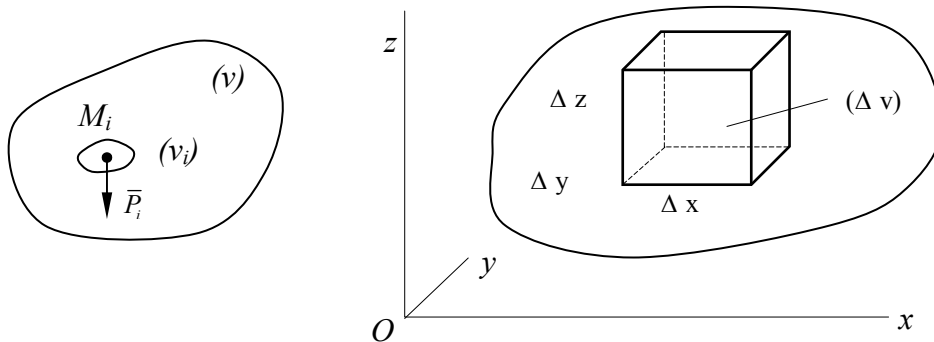


Рис. 10.4

розташована лише скінченна кількість інших її елементів. Протилежний зміст має латинське слово *continuum* – неперервний, суцільний. Термін “математика континууму” вживається тоді, коли говорять про теорії, пов’язані з поняттям неперервності, протиставляючи його терміну “математика дискретна”. Остання має справу зі зчисленними множинами. Математика континууму оперує з більш потужними множинами. Потужність континууму має множина  $\{x\}$  чисел  $x \in [0, 1]$ . Точні вирази координат центра ваги тіла отримаємо в результаті граничного переходу в рівності (10.18) при прямуванні до нуля найбільшого з діаметрів всіх областей  $(v_i)$ , тобто при  $d = \max d_i \rightarrow 0$ . Тоді суми в правих частинах можна розглядати як інтегральні суми. Зробивши заміни (рис. 10.4)

$$v_i \rightarrow \Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z, \quad \gamma_i \rightarrow \gamma(x, y, z),$$

$$x_i \rightarrow x, \quad y_i \rightarrow y, \quad z_i \rightarrow z, \quad \Sigma_i \rightarrow \iiint_V,$$

одержимо

$$x_c = \frac{\iiint_{(v)} x \gamma dx dy dz}{\iiint_{(v)} \gamma dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_{(v)} y \gamma dx dy dz}{\iiint_{(v)} \gamma dx dy dz},$$

$$z_c = \frac{\iiint_{(v)} z \gamma dx dy dz}{\iiint_{(v)} \gamma dx dy dz} \quad (10.19)$$

У знаменниках стоїть вага тіла:

$$P = \iiint_{(v)} \gamma dx dy dz. \quad (10.20)$$

Тут  $\gamma = \gamma(x, y, z)$  є вага одиниці об’єму тіла в точці  $M(x, y, z)$ , тобто питома вага тіла в точці  $M$ . Цю величину, виходячи з формули (10.17), визначають так:



$$\gamma(M) = \lim_{(v_i) \rightarrow M} \frac{P_i}{v_i} = \frac{dP}{dv}.$$

Відмітимо, що величина  $\rho = \frac{\gamma}{g}$ , де  $g$  – прискорення земного тяжіння, називається

**густиною тіла (масою одиниці об'єму) в даній точці  $M$ .**

Величина  $dv = dxdydz$  називається елементом об'єму,  $dP = \gamma dxdydz$  – елемент ваги,  $dm = \rho dxdydz$  – елемент маси.

Три скалярні формули (10.19) можна подати у вигляді однієї векторної:

$$\vec{r}_c = \frac{\iiint_{(v)} \vec{r} \gamma dxdydz}{\iiint_{(v)} \gamma dxdydz}. \quad (10.21)$$

Іноді тіло можна вважати тонкою пластиною або оболонкою. Тоді замість потрійних інтегралів у виразах (10.19) – (10.21) потрібно брати подвійні або поверхневі. Для тіла видовженої форми, один з характерних розмірів якого значно більший від двох інших, потрібно брати криволінійні або означені інтеграли. Якщо тіло однорідне, тобто  $\gamma = \text{const}$ , то формули (10.19) – (10.21) спрощуються (не містять  $\gamma$ ).

#### 10. 4. Способи знаходження центра ваги тіла

Існує декілька рекомендацій, які часто бувають корисними на практиці. Подамо їх у вигляді теорем.

**Теорема 1.** *Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить у площині симетрії, на осі симетрії або в центрі симетрії відповідно.*

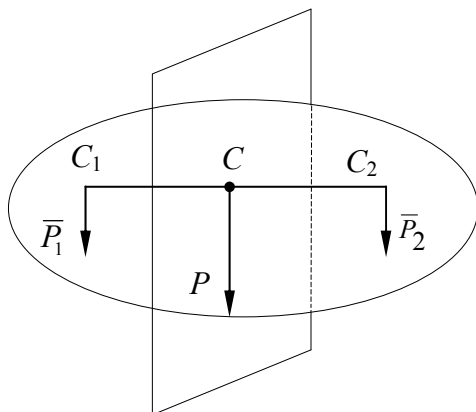


Рис. 10.5

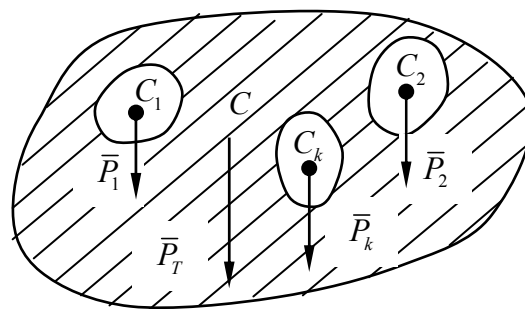


Рис. 10.6

*Доведення.* Нехай, наприклад, однорідне тіло має площину симетрії (рис.10.5). Тоді цією площиною воно розбивається на дві такі частини, ваги яких  $P_1$  та  $P_2$  рівні, а центри ваги  $C_1$  і  $C_2$  перебувають на однакових відстанях від площини симетрії. Значить, центр ваги тіла як точка, через яку проходить

рівнодійна двох рівних та паралельних сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , буде дійсно лежати в площині симетрії.

У випадках, коли тіло має вісь або центр симетрії, доведення аналогічне.

Із властивостей симетрії випливає, що центр ваги однорідного круглого кільця, круглої або прямокутної пластини, прямокутного паралелепіпеда, кулі та інших однорідних тіл, що мають центр симетрії, лежить в геометричному центрі (центрі симетрії) цих тіл.

**Теорема 2.** Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких частин, для кожної з яких положення центра ваги відоме, то координати центра ваги всього тіла можна обчислити за формулами (10.16).

Доведення ґрунтується на ідеї запровадження поняття центра ваги твердого тіла, викладеній у підрозділі 10.3.

**Теорема 3.** Нехай тіло має порожнини (вирізи), причому центри ваги тіла без порожнин та вирізаних частин відомі. Тоді при знаходженні центра ваги тіла з вирізами можна застосувати метод розбиття, вважаючи, що порожнини (вирізи) мають від'ємні ваги.

Доведення. Позначимо через  $P_T$  вагу тіла з вирізами;  $P_\Sigma$  – вага тіла без вирізів;  $P_1, \dots, P_k$  – ваги вирізів (рис. 10.6);  $\vec{r}_c$ ;  $\vec{r}_\Sigma$ ;  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k$  – радіуси-вектори центрів ваги згаданих тіл. Згідно з попереднім маємо залежності:

$$P_\Sigma = P_T + P_1 + \dots + P_k, \quad (10.22)$$

$$\vec{r}_\Sigma = \frac{\vec{r}_c P_T + \vec{r}_1 P_1 + \dots + \vec{r}_k P_k}{P_T + P_1 + \dots + P_k}. \quad (10.23)$$

На підставі виразу (10.22) подамо рівність (10.23) у вигляді:

$$\vec{r}_\Sigma P_\Sigma = \vec{r}_c P_T + \vec{r}_1 P_1 + \dots + \vec{r}_k P_k.$$

Звідси знаходимо формулу

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_\Sigma P_\Sigma - \vec{r}_1 P_1 - \dots - \vec{r}_k P_k}{P_\Sigma - P_1 - \dots - P_k}, \quad (10.24)$$

яка й доводить теорему.

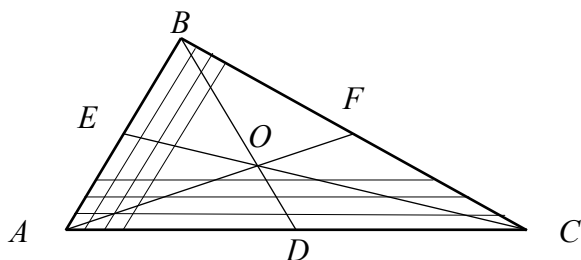


Рис. 10.7

### 10.5. Центри ваги деяких однорідних простих фігур та ліній

**1. Центр ваги фігури, обмеженої трикутником.** Застосувавши теорему 2 (метод розбиття), розділимо фігуру всередині трикутника  $ABC$  на елементарні (вузькі) смужки, проводячи

лінії, паралельні стороні  $AC$  (рис. 10.7).

Кожну смужку можна наближено прийняти за прямокутник. Центри ваги цих прямокутників містяться в їхніх серединах (в точках перетину діагоналей), тобто на медіані  $BD$  трикутника. Отже, центр ваги всієї фігури повинен лежати на цій же медіані. Розбиваючи далі фігуру на елементарні смужки лініями, паралельними стороні  $AB$ , приходимо до висновку, що центр ваги мусить бути розташований на

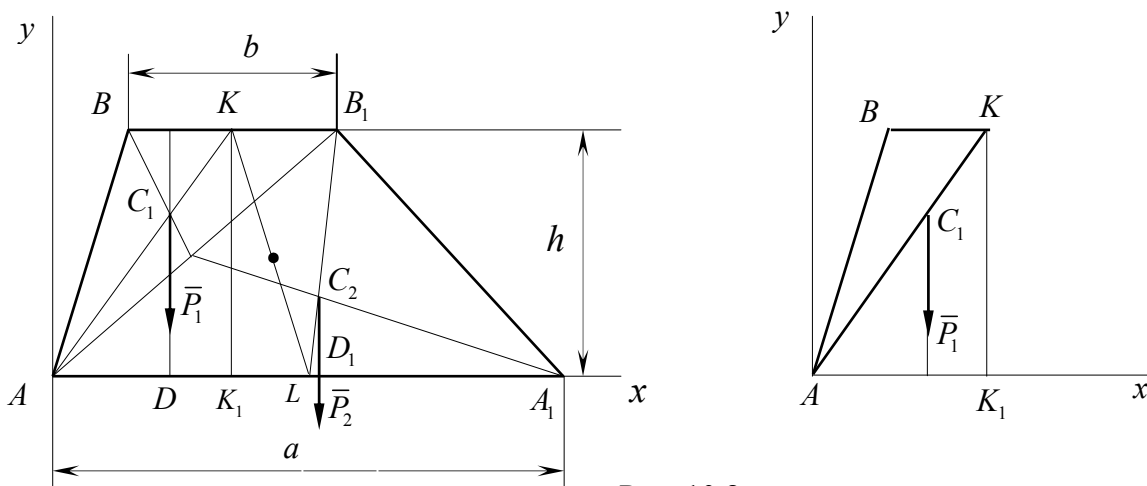


Рис. 10.8

медіані  $EC$ . Таким чином, центр ваги фігури, обмеженої трикутником, перебуває в точці перетину його медіан. Ця точка, як відомо, ділить кожен з медіан на відрізки у відношенні 1:2 (більший відрізок прилягає до вершини), тобто

$$\frac{OD}{BO} = \frac{OE}{CO} = \frac{OF}{AO} = \frac{1}{2}.$$

**2. Центр ваги фігури, обмеженої трапецією** Розіб'ємо фігуру всередині трапеції  $ABB_1A_1$  (рис. 10.8) на елементарні смужки, паралельні основам  $BB_1$  та  $AA_1$ . Центри ваги смужок розташовуються на прямій  $KL$ , що з'єднує середини основ трапеції. Отже, і центр ваги  $C$  фігури лежить на цій прямій. Тому залишається знайти відстань  $y_C$  точки  $C$  до нижньої основи. Для цього розіб'ємо трапецію на трикутники  $ABB_1$  та  $AB_1A_1$ . Їхні центри ваги лежать у точках  $C_1$  та  $C_2$  відповідно, тобто  $AC_1 = 2C_1K$ . З подібності трикутників  $AC_1D$  та  $AKK_1$  маємо:

$$\frac{C_1D}{KK_1} = \frac{AC_1}{AK}, \quad \frac{C_1D}{h} = \frac{2C_1K}{3C_1K}.$$

Звідси

$$C_1D = y_{c_1} = y_1 = \frac{2}{3}h.$$

Аналогічно

$$C_2D_1 = y_{c_2} = y_2 = \frac{1}{3}h.$$

Якщо  $\gamma$  – питома вага фігури, то  $P_1 = \gamma S_1$ ,  $P_2 = \gamma S_2$ , де  $S_1$  та  $S_2$  – площі трикутників  $ABB_1$  та  $AB_1A_1$  відповідно:  $S_1 = \frac{1}{2}bh$ ,  $S_2 = \frac{1}{2}ah$ . На підставі (10.16)

$$y_c = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2}.$$

Отже,

$$y_c = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}.$$

**3. Центр ваги дуги (AB) кола радіуса R з центральним кутом 2α** (рис.10.9). Виберемо початок координат у центрі кола і направимо вісь Ox перпендикулярно хорді AB. Внаслідок симетрії дуги (AB) відносно осі Ox центр ваги C дуги лежить на осі Ox. Нехай γ – погонна вага (вага одиниці довжини). Тоді вага дуги (AB) дорівнює P = γL, L = 2αR. Абсцису x<sub>C</sub> точки C обчислимо за першою з формул (10.19), в якій потрібний інтеграл слід замінити в даному випадку криволінійним інтегралом першого роду (криволінійним інтегралом за довжиною дуги):

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(AB)} x ds.$$

Оскільки

$$x = R \cos \varphi, \quad ds = R d\varphi, \quad \varphi \in [-\alpha, \alpha],$$

то

$$x_c = \frac{R^2}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{R}{\alpha} \int_0^{\alpha} \cos \varphi d\varphi,$$

тобто

$$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (10.25)$$

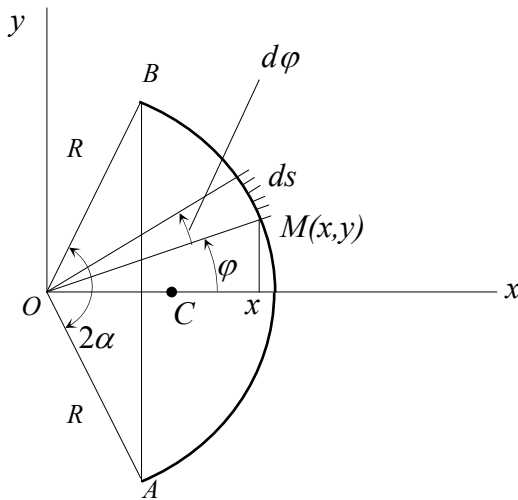


Рис. 10.9

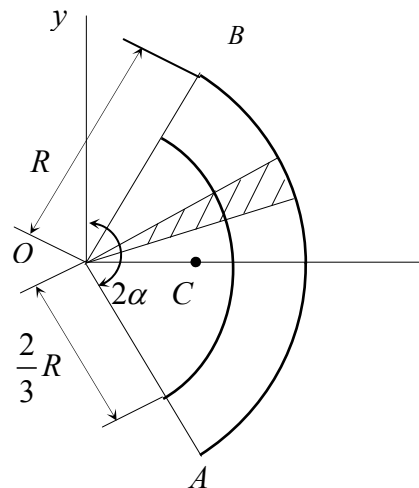


Рис. 10.10

Якщо  $\alpha \rightarrow 0$  (дуга (AB) вироджується в точку), то  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_c(\alpha) = R$ .

**4. Центр ваги кругового сектора радіуса  $R$  з центральним кутом  $2\alpha$**  (рис. 10.10). Розіб'ємо сектор  $OAB$  на елементарні сектори (один з них заштриховано). Кожний елементарний сектор замінимо (наближено) фігурою всередині рівнобедреного трикутника з висотою  $R$ , скориставшись тим, що нескінченно мала дуга еквівалентна нескінченно малій хорді, що стягує її кінці. Похибка від заміни елементарного сектора відповідною фігурою є нескінченно

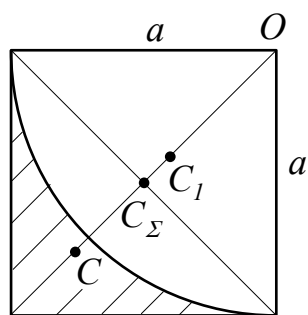


Рис. 10.11

малою величиною більш високого порядку, ніж ті, що розглядаються тут. Але висота в рівнобедреному трикутнику є також і медіаною. Значить, центр ваги кожної елементарної фігури (всередині елементарного трикутника) лежить на відстані  $\frac{2}{3}R$  від точки  $O$ . Геометричним місцем центрів ваги всіх елементарних фігур є дуга кола радіуса  $\frac{2}{3}R$ .

Це означає, що центр ваги кругового сектора можна шукати як центр ваги матеріальної лінії,

по якій неперервно і рівномірно розподілено вагу сектора. Застосувавши формулу (10.25), знаходимо:

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (10.26)$$

**5. Центр ваги криволінійної пластинки** (на рис. 10.11 вона заштрихована). Пластинка одержується вирізанням із квадрата зі стороною  $a$  четверті круга (кругового сектора з центральним кутом  $\frac{\pi}{2}$ ), центр якого перебуває в вершині  $O$  квадрата. Оскільки центр ваги квадрата та кругового сектора відомі з попереднього, то доцільно скористатись методом доповнення або методом від'ємних ваг.

З міркувань симетрії очевидним є те, що центр ваги  $C$  криволінійної пластинки лежить на діагоналі квадрата. Проведемо вісь  $Ox$  вздовж осі симетрії пластинки. Нехай  $\gamma$  – питома вага пластинки (вага одиниці площі);  $P_\Sigma, S_\Sigma$  та  $C_\Sigma$  – вага, площа та центр ваги квадрата;  $P_1, S_1$  та  $C_1$  – вага, площа та центр ваги четверті круга:

$$P_\Sigma = \gamma S_\Sigma, \quad S_\Sigma = a^2, \quad x_\Sigma = x_{C_\Sigma} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad P_1 = \gamma S_1, \quad S_1 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Для знаходження абсциси центра ваги  $C_1$  четверті круга скористаємося формулою (10.25), в якій  $R = a, \alpha = \frac{\pi}{4}$ :  $x_1 = x_{C_1} = \frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$ . Спроектуємо векторну рівність

(10.24) на вісь  $Ox$ :  $x_c = \frac{x_\Sigma P_\Sigma - x_1 P_1}{P_\Sigma - P_1}$ . Підставивши в останню формулу значення

відповідних величин, одержимо:

$$x_c = \frac{2\sqrt{2}}{3(4-\pi)}a.$$

Ця величина трохи більша  $a$  (оскільки  $x_c \approx 1,09a$ ).

### **Питання для самоконтролю**

1. Що називають центром паралельних сил?
2. Як знайти положення центра системи двох паралельних сил? довільної кількості однонаправлених паралельних сил?
3. Як знаходять положення центра паралельних сил, направлених у різні сторони?
4. Що називають силовим полем?
5. Які сили звать позиційними?
6. Що називають силою тяжіння або гравітаційною силою?
7. Чому вектор сили, яка входить у систему паралельних сил, є прикладеним вектором?
8. Що називають центром ваги системи матеріальних точок?
9. Які системи звать дискретними? континуальними?
10. Наведіть формули для знаходження центра ваги континуальної системи матеріальних точок.
11. Як знайти положення центра ваги однорідного тіла, що має площину симетрії? вісь симетрії? центр симетрії?
12. Як знайти центр ваги тіла методом розбиття на частини з відомими положеннями центрів ваги?
13. Як знайти положення центра ваги тіла з порожнинами (отворами)?
14. Як знайти центр ваги фігури, обмеженої трикутником? трапецією?
15. Як знайти центр ваги матеріальної дуги кола?
16. Як знайти центр ваги матеріального кругового сектора?
17. Як знайти центр ваги матеріальної криволінійної пластинки?

## **11. Зведення довільної просторової системи сил до простішого вигляду**

### **11.1. Зміна центра приведення**

Нехай просторова система сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  приведена до певної точки  $O$  і замінена (згідно з основною теоремою статички, див. підрозділ 6.2) головним вектором  $\vec{F}$  та парою сил з моментом  $\vec{M}_O$ , що знаходяться за формулами (6.1) і (6.2). Візьмемо новий центр приведення  $O_1$  і приведемо всі сили до цього центра (рис. 11.1).

На основі теореми про паралельний перенос сили (див. підрозділ 6.1) в точці  $O_1$  одержимо силу  $\vec{F}'$  та пару сил з моментом  $\vec{M}_{O_1}$ . Очевидно, що

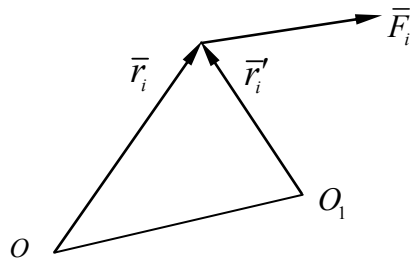


Рис. 11.1

$$\vec{F}' = \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Головний же момент при цьому взагалі зміниться, оскільки відносно нового центра приведення момент кожної із сил системи стане взагалі іншим. Знайдемо цю зміну:

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{O}_1\vec{O} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i = \vec{O}_1\vec{O} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Скориставшись формулами (6.1) та (6.3), маємо:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{O}_1\vec{O} \times \vec{F} + \vec{M}_O,$$

тобто

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}). \quad (11.1)$$

Таким чином, при зміні центра приведення головний момент змінюється на момент головного вектора, прикладеного в старому центрі приведення, відносно нового центра приведення.

## 11.2. Теорема Варіньона

*Якщо просторова система сил приводиться до рівнодійної, то момент рівнодійної відносно довільної точки дорівнює сумі моментів всіх сил системи відносно цієї ж точки.*

*Доведення.* Нехай система сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  має рівнодійну

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

і точка  $O$  лежить на лінії дії цієї рівнодійної. Якщо приводити задану систему сил до цієї точки, то одержимо, що головний момент дорівнює нулю:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = \vec{M}_O(\vec{R}) = 0.$$

Візьмемо який-небудь інший центр приведення  $O_1$ . Тоді

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i). \quad (11.2)$$

Оскільки  $\vec{M}_O = 0$ , то залежність (11.1) набуває вигляду:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_O) = \vec{M}_{O_1}(\vec{R}). \quad (11.3)$$

Порівнюючи формули (11.2) і (11.3), дістаємо

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i), \quad (11.4)$$

що й треба було довести.

### 11.3. Застосування теореми Вариньона до знаходження центра паралельних сил

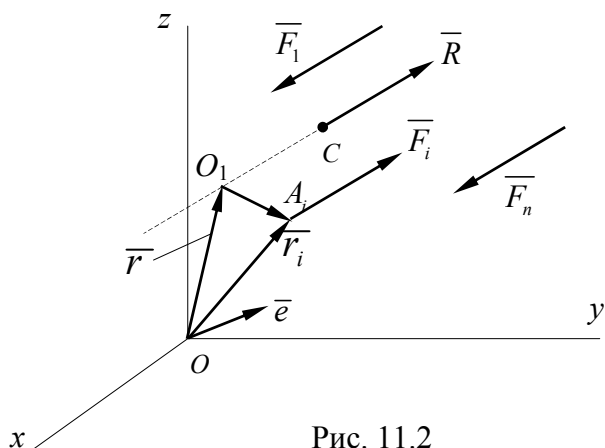


Рис. 11.2

Радіус-вектор центра паралельних сил визначається формулами (10.16). Виведемо їх інакше.

Розглянемо систему паралельних сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , головний вектор якої відмінний від нуля, тобто дана система сил приводиться до рівнодійної. Якщо  $O_1$  – яка-небудь точка лінії дії рівнодійної (рис. 11.2), то

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{R}) = 0. \quad (11.5)$$

З виразів (11.4) та (11.5) маємо:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{O_1A_i} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}) \times \vec{F}_i = 0.$$

Значить,

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (11.6)$$

Введемо орт  $\vec{e}$  таким чином, що

$$\vec{F}_i = \vec{e} F_i^*, \quad F_i^* = \text{пр}_{\vec{e}} \vec{F}_i = \pm F_i, \quad F_i = |\vec{F}_i|$$

Отже,

$$F_i^* = \begin{cases} F_i, & \text{якщо напрями векторів } \vec{F}_i \text{ та } \vec{e} \text{ однакові;} \\ -F_i, & \text{якщо вони протилежні.} \end{cases}$$

Рівність (11.6) набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{e} F_i^* - \vec{r} \times \sum_{i=1}^n \vec{e} F_i^* = 0$$

або

$$\left( \sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i^* - \vec{r} \sum_{i=1}^n F_i^* \right) \times \vec{e} = 0. \quad (11.7)$$

Співвідношення (11.7) можна розглядати як векторне рівняння відносно радіуса-вектора  $\vec{r}$  точки  $O_1$ .

Радіус-вектор  $\vec{r}_C$  центра паралельних сил  $C$  також задовольняє рівняння (11.7). Від усіх інших векторів  $\vec{r}$  вектор  $\vec{r}_C$  відрізняється тим, що він задовольняє рівняння (11.7) тотожно при довільному напрямі орта  $\vec{e}$ , оскільки положення



центра паралельних сил не змінюється при повороті всіх сил зі збереженням їхньої паралельності.

Виконання рівності (11.7) при довільних векторах  $\vec{e}$  можливе лише за умови рівності нулеві першого множника:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i^* - \vec{r}_C \sum_{i=1}^n F_i^* = 0,$$

звідки

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*}. \quad (11.8)$$

Враховуючи зміст величини у виразі (11.8) і величин  $P_s$  у формулах (10.16), приходимо до висновку, що цими формулами визначається одна й та сама точка  $C$ .

#### 11.4. Інваріанти приведення

При розгляді основної теореми статички (див. підрозділ 6.2) було запроваджено поняття головного вектора  $\vec{F}$  системи сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , довільно розташованих у просторі. При зміні центра приведення вектор  $\vec{F}$ , який визначається формулою (6.1), не змінюється. Тому він є інваріантом просторової системи сил відносно зміни центра приведення.

Головний момент (6.2) залежить від центра приведення і для нового центра приведення визначається формулою (11.1). Помноживши скалярно обидві частини векторної рівності (11.1) на  $\vec{F}_i$  і врахувавши, що

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{O_1 O} \times \vec{F},$$

одержимо:

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{F} = \vec{M}_O \cdot \vec{F} + (\vec{O_1 O} \times \vec{F}) \cdot \vec{F}. \quad (11.9)$$

Змішаний (векторно-скалярний) добуток векторів, з яких два однакові, тотожно дорівнює нулеві, тобто другий доданок у виразі (11.9) слід відкинути. У решті членів поставимо біля  $\vec{F}$  нижній індекс  $O_1$  чи  $O$  залежно від того, який з центрів приведення мається на увазі:

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{F}_{O_1} = \vec{M}_O \cdot \vec{F}_O. \quad (11.10)$$

Оскільки скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з векторів, помноженому на проекцію другого на напрям першого, рівність (11.10) рівносильна такій:

$$F \cdot \text{пр}_{\vec{F}_{O_1}} \vec{M}_{O_1} = F \cdot \text{пр}_{\vec{F}_O} \vec{M}_O, \quad F = |\vec{F}| = |\vec{F}_O| = |\vec{F}_{O_1}|.$$

Отже,

$$\text{пр}_{\vec{F}_O} \vec{M}_O = \text{пр}_{\vec{F}_{O_1}} \vec{M}_{O_1}.$$

Таким чином, скалярний добуток головного моменту на головний вектор (або ж проекція головного моменту на головний вектор) є величиною сталою для даної системи сил і не залежить від вибору центра приведення.

**Першим статичним інваріантом** називається головний вектор  $\vec{F}$ . У більш вузькому розумінні за перший інваріант беруть квадрат модуля цього вектора:

$$I_1 = F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2. \quad (11.11)$$

**Другим статичним інваріантом** називається скалярний добуток головного моменту на головний вектор:

$$I_2 = \vec{M}_O \cdot \vec{F} = M_x F_x + M_y F_y + M_z F_z. \quad (11.12)$$

Розкладемо головний момент  $\vec{M}_{O_1}$  (рис.11.3) на дві складові:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_1 + \vec{M}_*.$$

Вектор  $\vec{M}_*$  як складова головного моменту в напрямі головного вектора є для даної системи сил величиною постійною, яка не залежить від центра приведення:

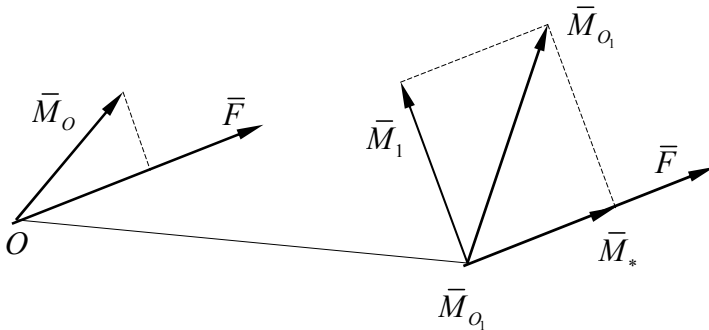


Рис. 11.3

$$\begin{aligned} \vec{M}_* = \text{const}, \quad M_* &= \text{пр}_{\vec{F}_{O_1}} \vec{M}_{O_1} = \text{пр}_{\vec{F}_O} \vec{M}_O = M_{O_1} \cos(\vec{F}, \hat{\vec{M}}_{O_1}) = \\ &= M_O \cos(\vec{F}, \hat{\vec{M}}_O) = \frac{\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{F}_{O_1}}{F} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{F}_O}{F}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Остання рівність дає можливість виразити величину  $M_*$  через інваріанти системи сил:

$$M_* = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}}. \quad (11.14)$$

Отже, зі зміною центра приведення буде змінюватись лише перпендикулярна (до головного вектора) складова  $\vec{M}_1$  головного моменту  $\vec{M}_{O_1}$ . Завжди можна знайти такий центр приведення  $O_*$ , щоб змінна складова  $\vec{M}_1$  перетворилася на нуль. Тоді головний момент і головний вектор будуть колінеарні, і вектор  $\vec{M}_{O_1}$  буде мати мінімальний модуль, рівний  $|M_*|$ .

### 11.5. Динамічний гвинт (динама)

**Динамічним гвинтом (динамою)** називається сукупність сили і пари сил з моментом, колінеарним силі (або, що те саме, сукупність сили і пари сил, що лежить у площині, перпендикулярній до сили).

Розрізняють правий динамічний гвинт (рис. 11.4) та лівий динамічний гвинт (рис. 11.5).

Пряма, вздовж якої направлений вектор  $\vec{F}$ , називається **віссю гвинта**.

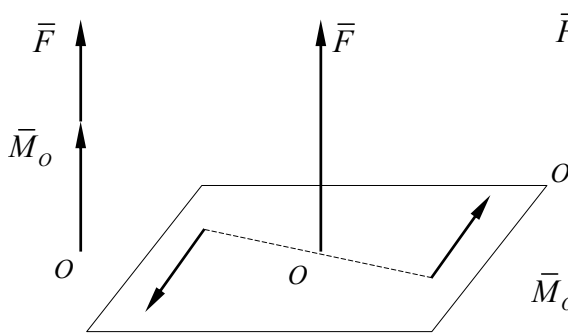


Рис. 11.4

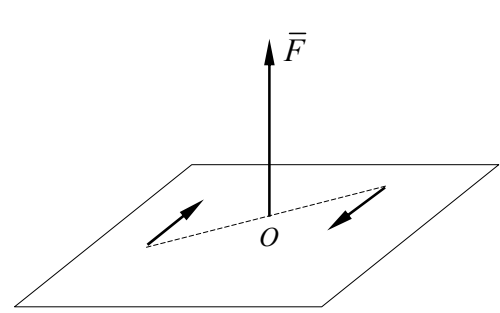


Рис. 11.5

З (11.14) та (11.12) випливає, що випадку  $I_2 > 0$  відповідає правий гвинт, а випадку  $I_2 < 0$  – лівий гвинт.

Точку  $O_*$ , при приведенні до якої система сил замінюється динамою, можна знайти аналітично з умови, що для цієї точки  $\vec{M}_* \parallel \vec{F}$ , тобто  $\vec{M}_* = p\vec{F}$ . Стала величина  $p$  називається параметром гвинта або динами. Згідно з формулою (11.13)

$$\frac{\vec{M}_*}{\vec{F}} = \frac{\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{F}_{O_1}}{F^2} = p. \quad (11.15)$$

Момент  $\vec{M}_{O_1}$  визначається формулою (11.1). Запишемо її так:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{OO}_1 \times \vec{F}_O = \vec{M}_O - \vec{OO}_1 \times \vec{F}_O. \quad (11.16)$$

Нехай точка  $O_1$  збігається з точкою  $O_*$ . Тоді  $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_{O_*} = \vec{M}_*$ . Рівняння (11.15) з урахуванням (11.16) набуває вигляду:

$$\frac{\vec{M}_O - \vec{OO}_* \times \vec{F}_O}{\vec{F}_O} = p. \quad (11.17)$$

Рівняння (11.17) задовольняє нескінченна множина точок, які лежать на прямій, що містить вектори  $\vec{M}_*$  та  $\vec{F}_O$ . Отже, воно є рівнянням прямої лінії, яку називають **центральною віссю системи сил**.

Рівняння (11.17) має векторну форму, поточною величиною в ньому є вектор  $\vec{OO}_*$ . Перейдемо до координатної форми. Ввівши ортонормований базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  декартової прямокутної системи координат  $Oxyz$ , маємо:

$$\vec{F}_O = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \quad \vec{M}_O = \vec{i}M_x + \vec{j}M_y + \vec{k}M_z, \quad \vec{OO}_* = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

$$\vec{OO}_* \times \vec{F}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x).$$

Замінивши в (11.17) всі вектори їхніми координатами (інакше – проєкціями на відповідні координатні осі), дістаємо:

$$\frac{M_x - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_y - (zF_x - xF_z)}{F_y} = \frac{M_z - (xF_y - yF_x)}{F_z} = p. \quad (11.18)$$

Кількість незалежних рівнянь у виразі (11.18) дорівнює двом. Обое вони є лінійними відносно поточних координат  $x, y, z$  точки  $O_*$ , тобто описують у просторі дві площини, лінія перетину яких є центральною віссю системи сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ .

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді такої теореми.

**Теорема.** *Будь-яка система сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , що діє на абсолютно тверде тіло, для якої другий статичний інваріант  $I_2 \neq 0$  (це впливає з виразу (11.14)), може бути приведена до динами.*

### 11.6. Перелік випадків зведення просторової системи сил до простішого вигляду

Приводячи систему сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  до певної точки (позначимо її через  $O$ ), тобто замінюючи її однією силою  $\vec{F}_O$  (головний вектор) та парю сил з моментом  $\vec{M}_O$  (головний момент), можна зустрітись з одним із наступних випадків.

1.  $\boxed{\vec{F}_O = 0, \vec{M}_O = 0}$  – система сил еквівалентна нулеві, тобто перебуває у рівновазі.

2.  $\boxed{\vec{F}_O = 0, \vec{M}_O \neq 0}$ . В підрозділі 11.1 показано, що заміна центра приведення  $O$  довільною іншою точкою  $O_1$  призводить до того, що замість пари сил з моментом  $\vec{M}_O$  одержуємо пару сил з моментом  $\vec{M}_{O_1}$ , який визначається формулою (11.1):

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_O). \quad (11.19)$$

Оскільки в даному випадку  $\vec{F}_O = 0$ , то з формули (11.19) випливає, що  $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O$ , тобто головний момент не залежить від центра приведення. Система сил приводиться в цьому випадку до **пари сил**.

3.  $\boxed{\vec{F}_O \neq 0, \vec{M}_O = 0}$  – система сил приводиться до однієї сили, тобто до **рівнодійної**, що дорівнює головному вектору:

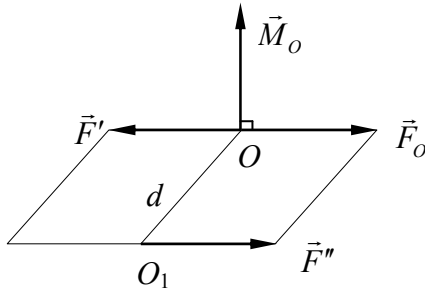


Рис. 11.6

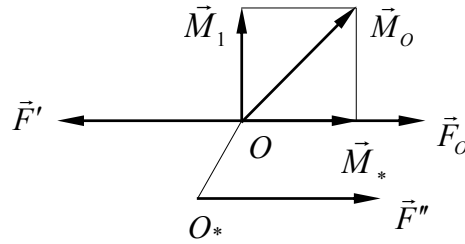


Рис. 11.7

$$\vec{R} = \vec{F}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

4.  $\vec{F}_O \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, I_2 = 0$ . На підставі (11.14)  $M_* = 0$ , тобто (див. рис. 11.3)  $\vec{M}_O \perp \vec{F}_O$ . З останнього випливає, що пара сил з моментом  $\vec{M}_O$  та сила  $\vec{F}_O$  лежать в одній площині. Візьмемо сили  $\vec{F}'$  та  $\vec{F}''$  даної пари такими, щоб їхні модулі були рівними модулю сили  $\vec{F}_O$ , і розташуємо їх так, як на рис. 11.6. Оскільки сили  $\vec{F}_O$  та  $\vec{F}'$  взаємно зрівноважуються, то система сил виявляється еквівалентною одній силі – **рівнодійній**  $\vec{R} = \vec{F}''$ , лінія дії якої проходить через деяку іншу точку  $O_1$ . Знайдемо віддасть  $d = OO_1$  від точки  $O$  до точки  $O_1$ , скориставшись виразом модуля головного моменту:

$$M_O = F'd = F_O d \quad (M_O = |\vec{M}_O|, F' = |\vec{F}'|, F_O = |\vec{F}_O|).$$

Звідси  $d = \frac{M_O}{F_O}$ . Випадок, що розглядається, має місце, зокрема, для будь-

якої системи паралельних сил, а також для сил, що лежать в одній площині, якщо головний вектор цієї системи сил відмінний від нуля.

5.  $\vec{F}_O \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, I_2 \neq 0, \vec{M}_O \parallel \vec{F}_O$  – **динама** (див. рис. 11.4 та 11.5). Цей випадок описаний у підрозділі 11.5.

6.  $\vec{F}_O \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, I_2 \neq 0$ . Якщо вектори  $\vec{F}_O$  та  $\vec{M}_O$  не перпендикулярні один одному (випадок 4) і не паралельні (випадок 5), то така система сил, як було показано в § 11.5, приводиться до динами, але вісь гвинта проходить не через точку  $O$ , а через довільну точку центральної осі.

Наведемо самостійне доведення, незалежне від підрозділу 11.5. Розкладемо вектор  $\vec{M}_O$  на взаємно перпендикулярні складові (рис. 11.7):  $\vec{M}_O = \vec{M}_* + \vec{M}_1$ .

Пару сил з моментом  $\vec{M}_1 \perp \vec{F}_O$  та силу  $\vec{F}_O$ , як і в попередньому випадку (див. рис. 11.6), замінимо силою  $\vec{F}''$ , прикладеною в точці  $O_*$  (рис. 11.7). Тоді задана система сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  виявиться заміненою силою  $\vec{F}''$  (причому  $|\vec{F}''| = |\vec{F}_O|$ ) та парю сил з моментом  $\vec{M}_* \perp \vec{F}_O$ . Вектор  $\vec{M}_*$ , як вільний, можна прикласти в точці  $O_*$ . В результаті одержимо динамічний гвинт з віссю, що проходить через точку  $O_*$ , що й потрібно було довести.

***Питання для самоконтролю***

1. Чи можна змінювати центр приведення?
2. Як знайти момент рівнодійної системи сил?
3. Які параметри статички є інваріантами?
4. Що називають динамічним гвинтом (динамою)? віссю гвинта?
5. У яких випадках довільна просторова система сил зводиться до простішого вигляду?

---

## Частина 2. Кінематика

### 12. Кінематика матеріальної точки

#### 12.1. Предмет та основні поняття кінематики

**Кінематика** – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються геометричні властивості рухів без урахування інертності (маси) рухомих тіл та прикладених до них сил.

Коротко можна сказати, що *кінематика – це геометрія рухів*, тоді як *статика – це алгебра сил* (див. частину 1).

**Рухом** називається зміна положення тіла з плином часу відносно якого-небудь іншого тіла. Це друге тіло, стосовно якого вивчається рух даного тіла, називається *тілом відліку*. Сукупність тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат і приладу для вимірювання часу (годинника) називається *системою відліку*.

Від геометрії кінематика відрізняється тим, що при розгляді переміщень тіл (або відповідних геометричних образів) у просторі береться до уваги ще й час переміщення. Тому кінематика – це геометрія чотирьох вимірів. Таке уявлення виявилось плідним у теорії відносності, в якій при вивченні руху враховується взаємозв'язок простору і часу один з одним та з рухомою матерією. Світ за термінологією Г.Мінковського розглядається як просторово-часовий многовид чотирьох вимірів, а подія – це точка цього многовиду.

Принципове значення в механіці відіграє **принцип відносності руху**:

*характер спостережуваного руху істотно залежить від системи відліку і в різних системах відліку він, взагалі кажучи, різний.*

Як приклад, розглянемо рух поршня автомобільного двигуна. Відносно корпусу автомобіля цей рух є зворотно-поступальним: він сприймається як прямолінійний коливальний рух вгору – вниз зі швидкістю  $\vec{V}_r$  (рис. 12.1, а). Це відносний рух, тобто рух відносно рухомої системи координат. Але ж точка рухомого середовища (зв'язаного з корпусом автомобіля), з якою в даний момент часу збігається точка поршня, “переносить” останню зі швидкістю  $\vec{V}_e$  (рис. 12.1, б) відносно “нерухомої” системи координат, зв'язаної з землею. Це призводить до того, що відносно дороги точка поршня перебуває в складному русі, переміщуючись по кривій синусоїдального типу (рис. 12.1, в): почавши рухатись вгору, вона водночас рухається і вправо; дійшовши до свого крайнього верхнього положення, починає опускатись, одночасно рухаючись вправо і т.д.

У механіці І. Ньютона метричні властивості *простору* вважаються не залежними від матерії, що рухається в ньому. Він розглядається як тривимірний евклідов простір, однорідний і ізотропний в усіх напрямках. *Час* в механіці І.Ньютона також вважається не зв'язаним з рухомою матерією, тобто абсолютним,

таким, що плине однаково в усіх точках простору, на довільних тілах, які рухаються як завгодно одне відносно одного.

Тривимірний евклідів простір і абсолютний час відображають реальні властивості простору та часу лише наближено. Але це наближення дає цілком

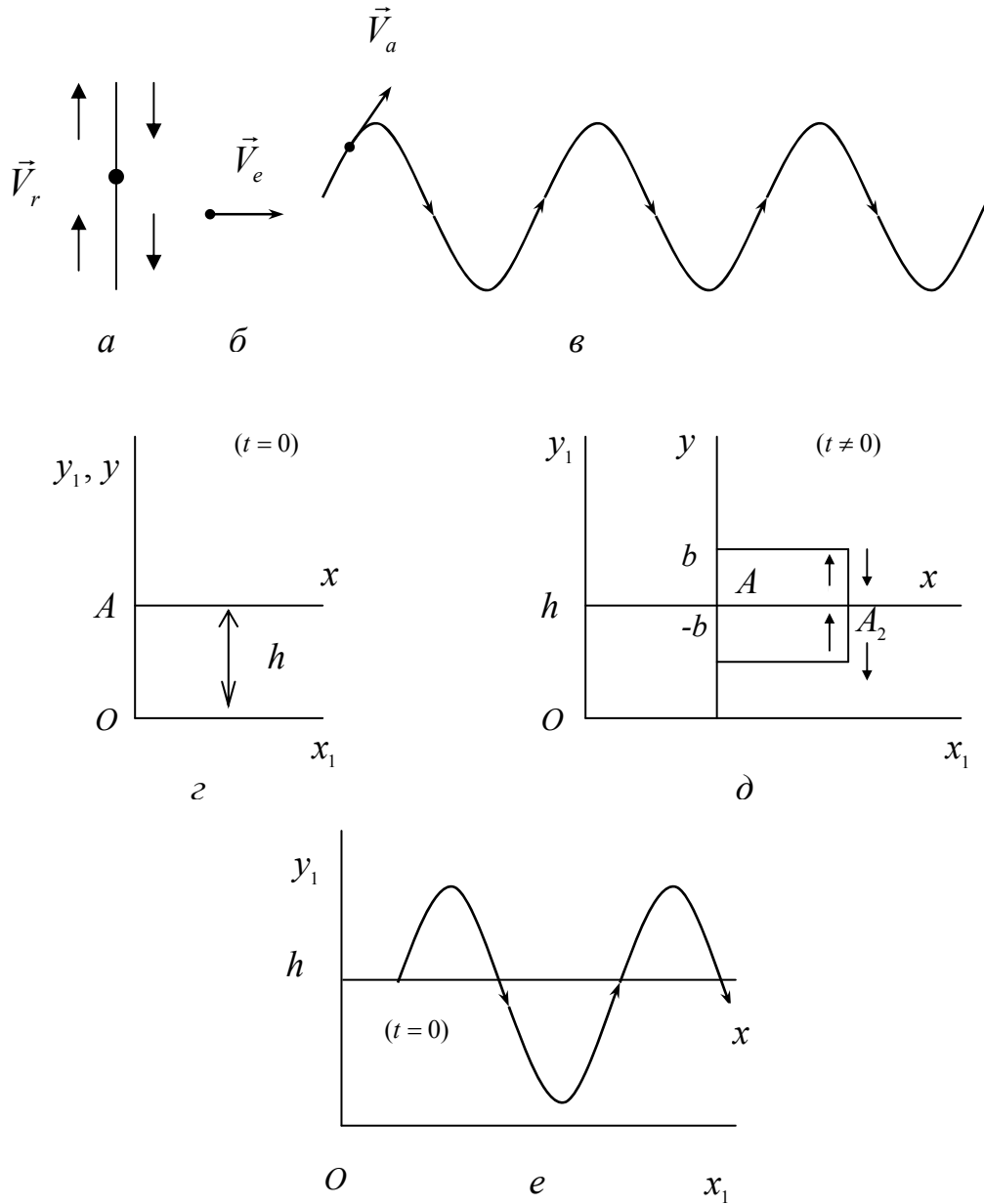


Рис. 12.1

достатню для практики точність при вивченні рухів макротіл із швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла. Поняття **абсолютного простору** і **абсолютного часу**, введені І. Ньютоном, тривалий час вважались у науці очевидними і незаперечними. Для макросвіту і швидкостей, набагато менших від швидкості світла, ці поняття є аксіомними. Такими вони приймаються в так званій класичній механіці. Зв'язок між положеннями рухомої точки у просторі та часом



визначає **закон руху точки**. Основна задача кінематики – це вивчення закономірностей рухів матеріальних точок та їхніх систем.

Неперервна крива, що описується рухомою точкою в певній системі відліку, називається траєкторією точки в цій системі відліку. Назва походить від латинського слова *trajisio* – “перекидаю”. Спочатку цим терміном позначали шлях артилерійського снаряду. Пізніше термін “траєкторія” почав вживатись у ширшому розумінні. В астрономії та небесній механіці траєкторія часто називається орбітою.

Знайдемо рівняння траєкторій точки поршня в системі координат  $Axy$ , зв’язаній з автомобілем, і в системі координат  $Ox_1y_1$ , зв’язаній з дорогою. В початковий момент часу ці система координат показано на рис. 12.1, *г*. Якщо автомобіль рухається рівномірно і прямолінійно (тобто  $V_e = |\vec{V}_e| = \text{const}$ ), то в довільний момент  $t \neq 0$  маємо (рис. 12.1, *д*)  $OA_1 = V_e t$ . Положення точки поршня відносно автомобіля описується рівняннями:

$$\begin{cases} x = a, \\ y = b \sin \omega t. \end{cases}$$

Тут  $AA_2 = a = \text{const}$ . Оскільки зв’язок між координатами  $x, y$  та  $x_1, y_1$  досліджуваної точки поршня у вибраних системах координат має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = OA_1 + x, \\ y_1 = AA_2 + y, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} x_1 = V_e t + a, \\ y_1 = h + b \sin \omega t. \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо  $t = \frac{x_1 - a}{V_e}$  і підставимо цей вираз у друге рівняння:

$$y_1 = h + b \sin \frac{\omega}{V_e} (x_1 - a).$$

Останнім рівнянням описується крива, зображена на рис. 12.1, *е*.

## 12.2. Способи математичного описування руху точки

Існує три названі способи: векторний, координатний і натуральний.

1. **Векторний спосіб**. Нехай  $O$  – довільна фіксована точка (рис. 12.2). Положення точки  $M$  відносно вибраної точки  $O$  однозначно визначається її

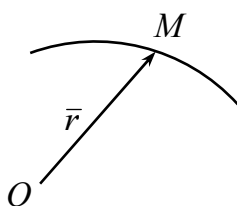


Рис. 12.2

радіусом-вектором  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . Якщо точка  $M$  рухається, то її радіус-вектор змінюється:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (12.1)$$

де  $\vec{r}(t)$  – векторна функція скалярного аргументу  $t$  (часу). Множину кінців змінного вектора  $\vec{r}(t)$  називають годографом вектор-функції  $\vec{r}(t)$ . Отже, траєкторія точки — це годограф її радіуса-вектора.

2. Координатний спосіб. Зв'яжемо з точкою  $O$  прямокутну декартову систему координат  $Oxyz$  (рис. 12.3). Нехай  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орти координатних осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  відповідно, а  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – абсциса, ордината та апліката точки  $M$ , тобто  $M(x, y, z)$ ,  $M_1(x, 0, 0)$ ,  $M_2(0, y, 0)$ ,  $M_3(0, 0, z)$ . Координатами радіуса-вектора точки є координати його кінця:  $\vec{r} = \{x, y, z\}$ . Розкладемо за базисом  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  радіус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$ :

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (12.2)$$

Одночасно зі зміною радіуса-вектора рухомої точки змінюються її координати:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t). \quad (12.3)$$

На підставі рівностей (12.1) – (12.3) маємо:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (12.4)$$

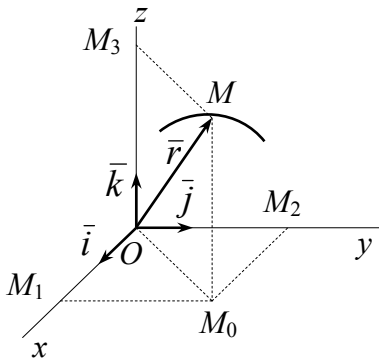


Рис. 12.3

Три рівності (12.4) визначають закон руху точки в координатній (скалярній) формі; інколи їх називають також кінематичними рівняннями руху точки.

У тривимірному просторі величин  $x$ ,  $y$  і  $z$  система скінченних рівнянь (12.4) описує криву лінію – траєкторію точки  $M$ . Незалежна змінна (аргумент)  $t$  функцій  $x(t)$ ,  $y(t)$  і  $z(t)$  відіграє роль параметра. Тому систему (12.4) називають також рівняннями траєкторії точки в параметричній формі.

Оператор диференціювання за часом домовились позначати крапкою; її ставлять над функцією, похідна якої знаходиться:

$$\frac{d}{dt} = (\cdot), \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t).$$

Система (12.4) зручна для побудови траєкторії точки за допомогою комп'ютерів.



Рис. 12.4

Якщо з трьох нелінійних (в загальному випадку) рівнянь (12.4) вдасться яким-небудь чином виключити параметр  $t$ , одержимо траєкторію точки як лінію перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

3. *Натуральний спосіб.* Щоб описати рух точки натуральним способом, потрібно задати: 1) траєкторію ( $AB$ ) точки (рис. 12.4); 2) початок  $O$  відліку довжин дуг на траєкторії, вказавши додатний і від'ємний напрямки відліку; довжина відповідної дуги, взята зі знаком плюс або мінус, називається *дуговою координатою* точки:

$$M(s), \quad s = OM > 0; \quad N(s), \quad s = -ON < 0;$$

3) закон руху точки вздовж траєкторії:

$$s = s(t). \quad (12.5)$$

Якщо рух відбувається в сторону збільшення довжини дуги  $s$ , тобто функція  $s(t)$  у виразі (12.5) зростає, то диференціал дугової координати є додатним:  $ds = \dot{s}(t)dt > 0$ . Якщо ж рух відбувається в сторону зменшення довжини дуги  $s$ , то

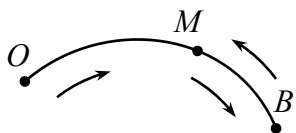


Рис. 12.5

$ds < 0$ . Пригадаємо, що приріст функції відрізняється від диференціала функції нескінченно малими величинами вищого порядку малості:  $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = ds + o(ds)$ , тобто в лінійному наближенні маємо:  $\Delta s \approx ds$ .

Шлях  $\sigma$ , який проходить точка, збільшується незалежно від напрямку руху точки. Він завжди додатний:  $\sigma > 0$ , тобто  $d\sigma = |ds|$ . Якщо, наприклад, точка, рухаючись з початкового положення  $O$ , доходить до положення  $B$ , а потім, переміщуючись у зворотному напрямку, приходить у положення  $M$ , то в цей момент її дугова координата  $s = OM$ , а шлях, пройдений за час руху, дорівнює

$$\sigma = \overset{\frown}{OB} + \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{OM} + 2\overset{\frown}{MB} = s + 2MB > s \quad (\text{рис. 12.5}).$$

### 12.3. Перехід від одного способу описування руху точки до іншого

Всі наведені вище способи описування руху точки взаємозв'язані.

1. *Перехід від координатного способу до векторного.* Якщо відомі рівності (12.4), то для знаходження модуля і напрямних косинусів вектора  $\vec{r} = \overline{OM}$  достатньо скористатись формулами (на рис. 12.6 зображено плоский випадок):

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos(\hat{r}, x) = \frac{x}{r}, \quad \cos(\hat{r}, y) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\hat{r}, z) = \frac{z}{r}.$$

Підставивши замість  $x, y$  і  $z$  відповідні функції  $x(t), y(t)$  і  $z(t)$ , одержимо рівність (12.1) у вигляді:

$$\vec{r} = r[\vec{i} \cos(\vec{r}, x) + \vec{j} \cos(\vec{r}, y) + \vec{k} \cos(\vec{r}, z)].$$

**2. Перехід від координатного способу до натурального.** Нехай точка  $M(x, y, z)$ , рухаючись по певній траєкторії, перейшла в нескінченно близьке положення  $N(x + dx, y + dy, z + dz)$ .

Маючи точки  $M_1(x + dx, 0, 0)$ ,  $M_2(0, y + dy, 0)$  і  $M_3(0, 0, z + dz)$ , побудуємо прямокутний паралелепіпед, зображений на рис. 12.7. Оскільки нескінченно мала дуга  $ds = MN$  еквівалентна нескінченно малій хорді  $\overline{MN}$ , що стягує її кінці, а останню (хорду) можна знайти як діагональ прямокутного паралелепіпеда, то диференціал довжини дуги  $ds$  (його називають ще лінійним елементом евклідового простору) можна знайти з рівності:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Тут

$$ds^2 \equiv (ds)^2, \quad dx^2 \equiv (dx)^2, \quad dy^2 \equiv (dy)^2, \quad dz^2 \equiv (dz)^2, \\ dx = \dot{x}(t)dt, \quad dy = \dot{y}(t)dt, \quad dz = \dot{z}(t)dt.$$

Отже,

$$ds = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

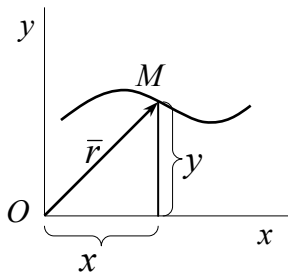


Рис. 12.6

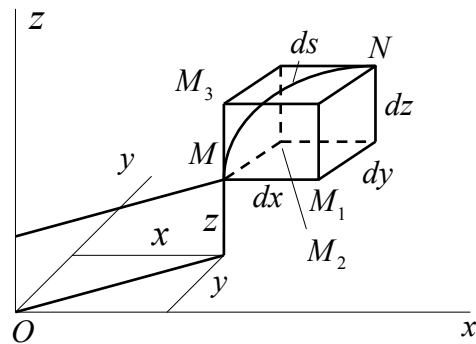


Рис. 12.7

Якщо положенню рухомої точки в початковий момент часу  $t=0$  відповідало нульове значення дугової координати, то

$$s = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Знак плюс береться в тому разі, коли точка рухається в бік вибраного додатного відліку довжини дуги; в протилежному випадку береться знак мінус.

**3. Перехід від натурального способу до координатного.** Ця задача, як відомо з диференціальної геометрії, зводиться до інтегрування рівняння Ріккаті.

## 12.4. Швидкість точки

**Швидкістю точки** (швидкістю руху точки) називається векторна величина, що характеризує бистроту зміни в часі радіуса-вектора рухомої точки.

Іншими словами, швидкістю точки є похідна за часом векторної функції  $\vec{r}(t)$  з рівності (12.1):

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (12.6)$$

1. *Векторний спосіб описування руху точки.* Нехай в момент часу  $t$  рухома точка займала положення  $M$  (рис. 12.8) і за час  $\Delta t$  перейшла в положення  $M_1$ . Вектор переміщення точки  $\overline{MM_1}$  можна подати у вигляді:

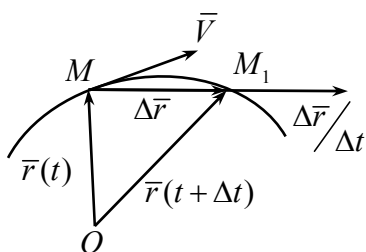


Рис. 12.8

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

Величина  $\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  є середньою швидкістю точки за проміжок часу  $\Delta t$ . Щоб знайти швидкість точки в даний момент часу  $t$ , потрібно перейти до границі:

$$\vec{V} = \vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Оскільки граничним положенням січної (хорди)  $\overline{MM_1}$  є дотична до кривої в точці  $M$ , то швидкість точки є вектором, направленим по дотичній до траєкторії в сторону руху точки.

2. *Координатний спосіб описування руху точки.* Розкладемо вектор  $\vec{V}$  за базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z. \quad (12.7)$$

Нехай  $Oxyz$  – нерухома система координат, тобто орти  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – сталі. З формули (12.6) на підставі (12.2) і (12.3) маємо:

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} [\vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)] = \vec{i}\dot{x}(t) + \vec{j}\dot{y}(t) + \vec{k}\dot{z}(t). \quad (12.8)$$

Враховуючи лінійну незалежність векторів  $\vec{i}, \vec{j}$  та  $\vec{k}$ , з рівностей (12.7) і (12.8) одержуємо:

$$V_x = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad V_y = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad V_z = \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Модуль і напрямні косинуси швидкості  $\vec{V}$  визначаються формулами:

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad \cos(\vec{V}, x) = \frac{V_x}{V} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$\cos(\vec{V}, y) = \frac{V_y}{V} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad \cos(\vec{V}, z) = \frac{V_z}{V} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

**3. Натуральний спосіб описування руху точки.** Нехай закон руху точки по певній траєкторії виражається рівнянням (12.5), а початком відріку довжин дуг є точка  $M_0$ . Рухомою точкою  $M$  в момент часу  $t$  мала дугову координату  $s = M_0M > 0$ , тобто додатний напрямком відріку довжини дуги виберемо вправо від початку відріку  $M_0$ . У момент часу  $t + \Delta t$  рухомою точкою зайняла положення  $M_1$ . Дугова координата точки  $M_1$  дорівнює  $s + \Delta s$ , причому  $\Delta s > 0$  для

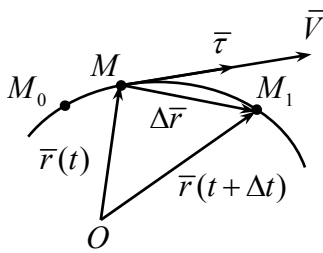


Рис. 12.9

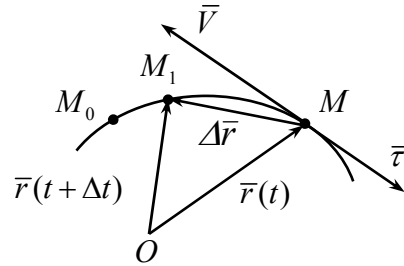


Рис. 12.10

рис. 12.9,  $\Delta s < 0$  для рис. 12.10. В обох випадках  $|\Delta s| = MM_1$ . Таким чином, на рис. 12.9 рух точки відбувається в сторону збільшення дугової координати ( $s + \Delta s > s$ ,  $\Delta s > 0$ ); на рис. 12.10 рух точки відбувається в сторону зменшення дугової координати ( $s + \Delta s < s$ ,  $\Delta s < 0$ ).

На підставі рівностей (12.1) і (12.5) радіус-вектор  $\vec{r}$  рухомої точки можна параметризувати її дуговою координатою  $s$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(s).$$

Функція  $s(t)$  в рівності (12.5) є неперервною: нескінченно малому приросту  $\Delta t$  її аргументу  $t$  відповідає нескінченно малий приріст  $\Delta s$  функції  $s$ , тобто якщо  $\Delta t \rightarrow 0$ , то і  $\Delta s \rightarrow 0$ . Тому

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}. \quad (12.9)$$

Оскільки  $|\Delta \vec{r}|$  і  $|\Delta s|$  – еквівалентні нескінченно малі величини, то  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta s|} = 1$ ,

тобто вектор

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau} \quad (12.10)$$

є одиничним вектором. Таким чином,  $\vec{\tau}$  – орт дотичної до кривої лінії, направлений в сторону збільшення дугової координати  $s$  ( див. рис. 12.9 і 12.10). На підставі (12.10) рівність (12.9) набуває вигляду:

$$\vec{V} = \vec{\tau} \dot{s} = \vec{\tau} V_{\tau}, \quad V_{\tau} = \eta p_{\vec{\tau}} \vec{V} = \dot{s}. \quad (12.11)$$

Для модуля швидкості точки маємо вирази:

$$V = |\vec{V}| = |V_{\tau}| = \pm V_{\tau} = |\dot{s}|, \quad (12.12)$$

причому  $V = V_{\tau}$ , якщо рух точки відбувається в сторону додатного відліку довжин дуг (див. рис. 12.9);  $V = -V_{\tau}$ , якщо точка рухається в сторону від'ємного відліку довжин дуг (див. рис. 12.10).

Оскільки шлях, що проходить рухома точка, є завжди додатною величиною, то  $V = \dot{\sigma} = |\dot{s}|$ .

Підсумовуючи результати, наголосимо ще раз на тому, що вектор  $\vec{V}$  направлений по дотичній до траєкторії точки в сторону руху, а вектор  $\vec{\tau}$  направлений по дотичній до траєкторії в сторону зростання дугової координати  $s$ .

### 12.5. Кривина і радіус кривини плоскої кривої

Нехай крива лінія задана рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (12.13)$$

Позначимо через  $\alpha$  кут нахилу кривої до осі абсцис в точці  $M$  з дуговою координатою  $s$  (рис. 12.11), тобто  $\alpha$  – кут, який дотична до кривої утворює з віссю  $Ox$ . При переміщенні точки  $M(s)$  в точку  $M_1(s + \Delta s)$  кут нахилу стає рівним  $\alpha + \Delta\alpha$ , причому  $\Delta\alpha > 0$  для ввігнутої кривої,  $\Delta\alpha < 0$  для опуклої кривої. Приріст  $\Delta\alpha$  кута  $\alpha$  називається кутом суміжності дотичних.

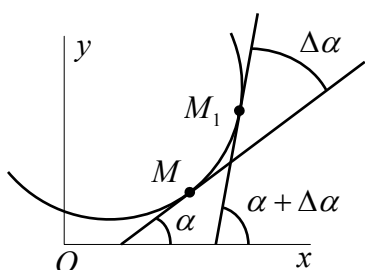


Рис. 12.11

Ступінь викривленості кривої лінії, тобто відхилення її від прямої лінії в околі певної точки  $M$ , може бути схарактеризована величиною  $\left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$ , яка

показує, наскільки швидко змінюється кут нахилу кривої до осі абсцис при переміщенні точки вздовж кривої. Ця міра викривленості називається

кривиною кривої в точці  $M$ :

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|. \quad (12.14)$$

Якщо крива лінія задана параметричними рівняннями (12.13), то

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \dot{s} = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

$$k = \left| \frac{\dot{\alpha}}{\dot{s}} \right|, \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Отже,

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.15)$$

Радіусом кривини кривої в даній точці називається величина, обернена до кривини кривої в цій точці:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|}.$$

Якщо в сторону ввігнутості кривої провести перпендикуляр до дотичної і на ньому відкласти відрізок довжиною  $\rho$ , то кінець відрізка називається центром кривини кривої в даній точці.

Щоб одержати формулу кривини кривої, яка задана явно рівнянням у декартових координатах  $y = y(x)$ , достатньо покласти в рівняннях (12.13) функцію  $x(t)$  тотожно рівною  $t$ :

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y = y(x).$$

Тоді  $\dot{x} = 1$ ,  $\ddot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = y'_x$ ,  $\ddot{y} = y''_{xx}$  і вираз (12.15) набуває вигляду:

$$k = \frac{|y''_{xx}|}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Якщо, наприклад,  $y = ax + b$ , то  $y''_{xx} = 0$ . Отже,  $k = 0$ ,  $\rho = \infty$ , тобто пряма лінія є “невикривлена” крива лінія. Для кола, параметричні рівняння якого є:  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ , з формули (12.15) одержуємо  $k = \frac{1}{R}$ ,  $\rho = R$ , тобто кривина кола в усіх його точках однакова (недарма в давні часи люди вважали коло досконалою кривою).



### 12.6. *Натуральний триєдр (супровідний тригранник) кривої лінії*

Так прийнято називати три одиничних вектори  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$  і  $\vec{\beta}$ , що виходять з однієї точки; при русі точки вздовж кривої ці вектори певним чином повертаються (супроводять точку). Вводяться вони таким чином. Проведемо в якій-небудь точці  $M$  просторової кривої орт  $\vec{\tau}$  дотичної до кривої. Нехай точка  $M_1$  є нескінченно

близька до точки  $M$ , тобто  $\overset{\frown}{MM_1} = |ds|$ . Проведемо в точці  $M_1$  орт  $\vec{\tau}_1$  дотичної до кривої. Перенісши вектор  $\vec{\tau}_1$  в точку  $M$ , одержимо нескінченно малий (елементарний) кут суміжності дотичних  $d\alpha$ . Це кут повороту дотичної при переміщенні точки з положення  $M$  в положення  $M_1$ .

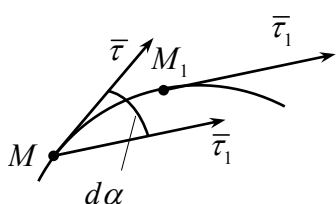


Рис. 12.12

Далі проведемо площину через вектори  $\vec{\tau}$  і  $\vec{\tau}_1$ , прикладені в точці  $M$ . Якщо точка  $M_1$  прагне до точки  $M$ , то ця площина змінює орієнтацію. Її граничне положення називається **стичною площиною** кривої в точці  $M$ . У випадку плоскої кривої вона цілком лежить в стичній площині, для просторової кривої стична площина є “найбільш близькою” до кривої в даній точці.

Площина, проведена через точку  $M$  перпендикулярно дотичній, називається **нормальною площиною**. Лінія перетину стичної і нормальної площин називається **головною нормаллю** до кривої в точці  $M$ . Орт головної нормалі позначається  $\vec{\nu}$ . Площина, проведена через точку  $M$  перпендикулярно головній нормалі, називається **спрямною площиною**. Лінія перетину спрямної та нормальної площин визначає **бінормаль** кривої, її орт позначається  $\vec{\beta}$ . Таким чином, вектори  $\vec{\tau}$  і  $\vec{\nu}$  визначають стичну площину, вектори  $\vec{\tau}$  і  $\vec{\beta}$  – спрямну площину, вектори  $\vec{\nu}$  і  $\vec{\beta}$  – нормальну площину кривої лінії (рис. 12.13). Три взаємно перпендикулярні напрямки, що визначаються ортами  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$  і  $\vec{\beta}$ , утворюють прямокутний триєдр з вершиною в точці  $M$ , який називається природним, натуральним, супровідним або рухомим тригранником. У механіці транспортних засобів осі цього тригранника називаються іноді швидкісними осями вже хоча б тому, що один з координатних ортів ( $\vec{\tau}$ ) колінеарний швидкості  $\vec{V}$ .

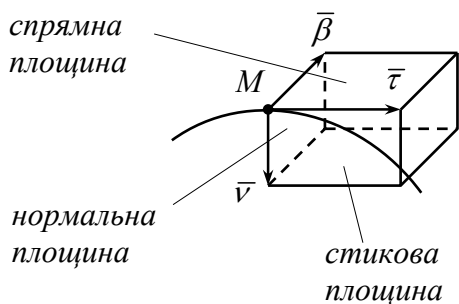


Рис. 12.13

### 12.7. Прискорення точки

**Прискоренням точки** називається векторна величина, що характеризує бистроту зміни в часі швидкості точки, тобто є похідною швидкості:

$$\vec{w} = \dot{\vec{V}} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}. \quad (12.16)$$

1. *Векторний спосіб описування руху точки.* Можливі два випадки: траєкторія – опукла крива (рис. 12.14) або ввігнута крива (рис. 12.15). У момент

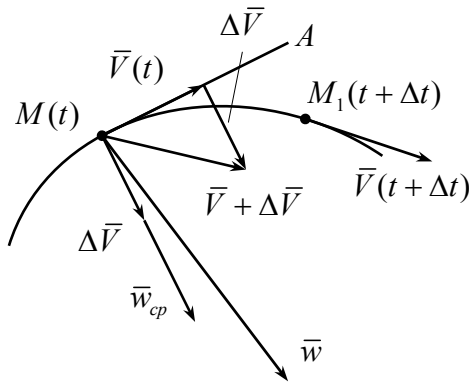


Рис. 12.14

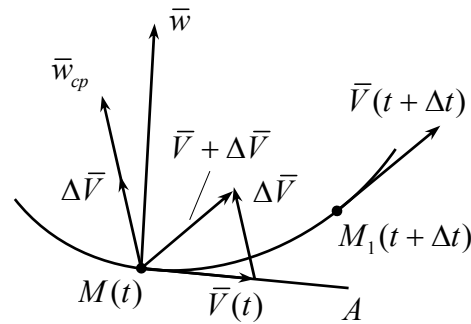


Рис. 12.15

часу  $t$  точка займала положення  $M(t)$  і мала швидкість  $\vec{V}(t)$ . За час  $\Delta t$  точка перейшла в положення  $M_1(t + \Delta t)$  і набула швидкість  $\vec{V}(t + \Delta t) = \vec{V}(t) + \Delta \vec{V}$ .

Величина  $\vec{w}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$  є середнє прискорення точки за проміжок часу  $\Delta t$ . Щоб знайти прискорення точки в даний момент часу  $t$ , потрібно перейти до границі:  $\vec{w} = \vec{w}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{w}_{cp}$ . Вектор  $\Delta \vec{V}$  в обох випадках направлений в сторону ввігнутості траєкторії. Вектор  $\vec{w}$  розташований по ту саму сторону від дотичної  $MA$  до траєкторії, що й вектор  $\Delta \vec{V}$  або вектор  $\vec{w}_{cp}$ . Отже, *прискорення точки є вектором, який завжди направлений в сторону ввігнутості траєкторії.*

На підставі (12.6) і (12.16) маємо:

$$\vec{w} = \vec{w}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}. \quad (12.17)$$

2. *Координатний спосіб описування руху точки.* Нехай закон руху точки визначається системою (12.4). Розкладемо вектор  $\vec{w}$  за базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  і врахуємо формули (12.16) та (12.7):

$$\vec{w} = \vec{i} w_x + \vec{j} w_y + \vec{k} w_z = \frac{d}{dt} (\vec{i} V_x + \vec{j} V_y + \vec{k} V_z).$$

Оскільки  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – постійні вектори і лінійно незалежні, то

$$w_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \dot{V}_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль і напрямні косинуси прискорення  $\vec{w}$  визначаються формулами:

$$w = |\vec{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad \cos(\vec{w}, \hat{x}) = \frac{w_x}{w} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

$$\cos(\vec{w}, \hat{y}) = \frac{w_y}{w} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \quad \cos(\vec{w}, \hat{z}) = \frac{w_z}{w} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.$$

**3. Натуральний спосіб описування руху точки.** Враховуючи вирази (12.11) для швидкості  $\vec{V}$  та її проекції  $V_\tau$  на дотичну до траєкторії, формулу (12.16) перетворимо так:

$$\vec{w} = \frac{d}{dt}(\bar{\tau} V_\tau) = \bar{\tau} \frac{dV_\tau}{dt} + \frac{d\bar{\tau}}{dt} V_\tau, \quad \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} V_\tau.$$

Отже,

$$\vec{w} = \bar{\tau} \frac{dV_\tau}{dt} + \frac{d\bar{\tau}}{ds} V_\tau^2. \quad (12.18)$$

Розглянемо вектор  $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ . Нехай  $s$  – дугова координата точки  $M$ , а точка  $M_1$  має

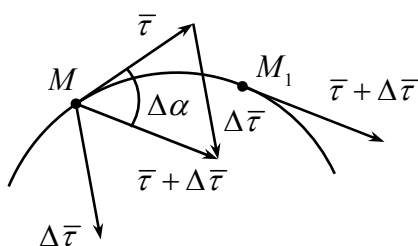


Рис. 12.16

дугову координату  $s + \Delta s$ , тобто  $MM_1 = |\Delta s|$  (рис. 12.16). Спочатку знайдемо модуль цього вектора:

$$\left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} \right|. \quad (12.19)$$

Опишемо дугу кола одиничного радіуса з центром у точці  $M$ . Оскільки нескінченно мала дуга еквівалентна нескінченно малій хорді, що стягує її кінці, то для довжини  $|\Delta \bar{\tau}|$  хорди можна скористатись таким наближеним значенням:

$$|\Delta \bar{\tau}| = |\bar{\tau}| \cdot |\Delta \alpha| = |\Delta \alpha|. \quad (12.20)$$

На підставі виразу (12.14) з рівностей (12.19) і (12.20) дістаємо:

$$\left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = k = \frac{1}{\rho}.$$

Стосовно напрямку вектора  $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$  відмітимо, що цей вектор колінеарний орту  $\vec{v}$  головної нормалі. Дійсно: по-перше, з рис. 12.16 видно, що вектор  $d\bar{\tau}$  лежить в стичній площині; по-друге, з рівності  $\bar{\tau}^2 = \bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = 1$  випливає, що  $2\bar{\tau} \cdot d\bar{\tau} = 0$ , тобто  $d\bar{\tau} \perp \bar{\tau}$ .

Отже,

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\rho}. \quad (12.21)$$

З урахуванням (12.21) рівність (12.18) набуває вигляду:

$$\vec{w} = \vec{\tau} \frac{dV_\tau}{dt} + \vec{v} \frac{V_\tau^2}{\rho} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_v = \vec{\tau} w_\tau + \vec{v} w_v. \quad (12.22)$$

Тут

$$w_\tau = \dot{V}_\tau = \dot{s} \quad (12.23)$$

є дотичним (тангенціальним) прискоренням точки, а

$$w_v = \frac{V_\tau^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \quad (12.24)$$

є нормальне (доцентрове) прискорення точки.

Вектор прискорення точки лежить у стичній площині траєкторії точки і направлений в сторону ввігнутості. Дотичне прискорення характеризує зміну модуля швидкості, нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямом.

Вектори  $\vec{w}_\tau$  і  $\vec{w}_v$  перпендикулярні, тому

$$w = |\vec{w}| = \sqrt{w_\tau^2 + w_v^2}.$$

Оскільки (див. вираз (12.12))

$$V_\tau = \pm V = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

то

$$w_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \pm \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \pm \frac{V_x w_x + V_y w_y + V_z w_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \pm \frac{\vec{V} \cdot \vec{w}}{V} = \vec{w} \cdot \vec{\tau}.$$

У підрозділі 12.4 відзначалось, що напрям вектора  $\vec{\tau}$ , який визначається рівністю (12.10), залежить від вибору напрямку відліку дугової координати точки.

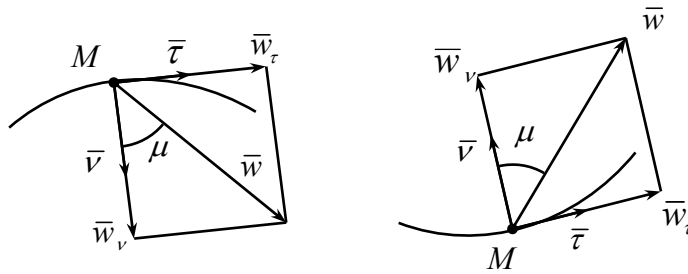


Рис. 12.17

Напрямок вектора  $\vec{w}_\tau$  зумовлений природою руху точки. У загальному випадку ці вектори можуть бути як однаково направленними (рис. 12.17), так і протилежно

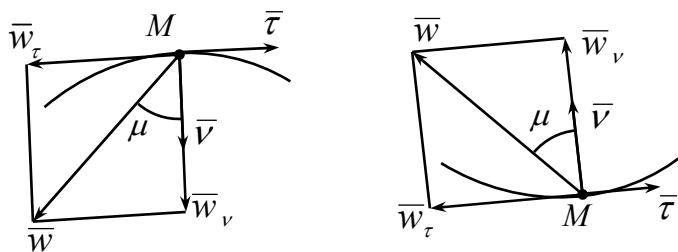


Рис. 12.18

направленими (рис. 12.18). Взаємне розташування цих векторів можна охарактеризувати кутом  $\mu$ , для якого  $\operatorname{tg} \mu = \frac{w_\tau}{w_\nu}$ .

У першому випадку  $w_\tau > 0$ ,  $\mu > 0$ , в другому випадку  $w_\tau < 0$ ,  $\mu < 0$ , тобто  $\mu$  – алгебраїчна величина.

### 12.8. Деякі конкретні важливі випадки рухів точки

1. Криволінійний рух точки називається **прискореним**, якщо модуль швидкості точки збільшується, і **сповільненим**, якщо він зменшується. Оскільки зміна модуля швидкості характеризується дотичним прискоренням, то й умову прискореності чи сповільненості руху можна виразити, природно, через  $w_\tau = \dot{V}_\tau$ . Нагадаємо, що  $V = |V_\tau| = \pm V_\tau$ . Можливі варіанти графіків функції  $V_\tau(t)$  для прискореного руху показані на рис. 12.19, а для сповільненого – на рис. 12.20. Таким чином, якщо  $V_\tau$  і  $w_\tau$  одного знаку (тобто кут між векторами  $\vec{V}$  та  $\vec{w}$

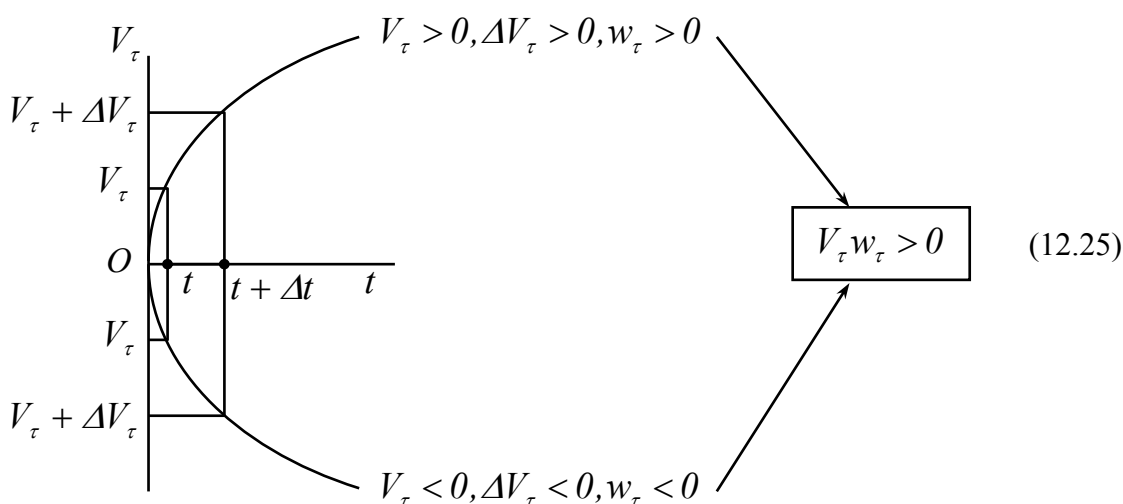


Рис. 12.19

гострий – рис. 12.21, *a*), то рух прискорений. Якщо ж  $V_\tau$  та  $w_\tau$  різних знаків (тобто кут між векторами  $\vec{V}$  і  $\vec{w}$  тупий – рис. 12.21, *б*), то криволінійний рух точки сповільнений.

2. Криволінійний рух точки називається **рівномірним**, якщо модуль швидкості точки сталий:

$$V = |V_\tau| = \text{const} \Rightarrow w_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = 0, \quad \vec{w} = \vec{w}_\nu, \quad V_\tau = \frac{ds}{dt} = \text{const}, \quad ds = V_\tau dt.$$

Поклавши  $s|_{t=0} = s_0$ , одержуємо:

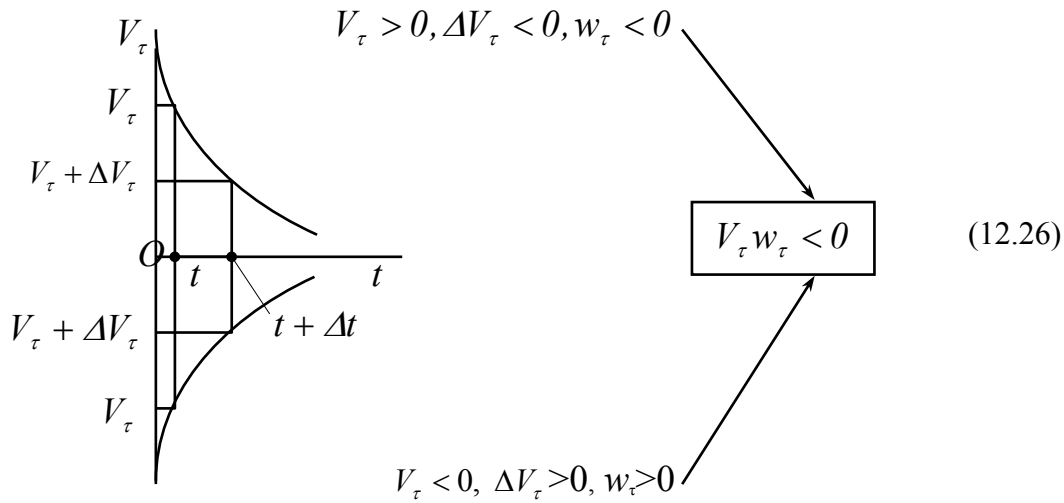


Рис. 12.20

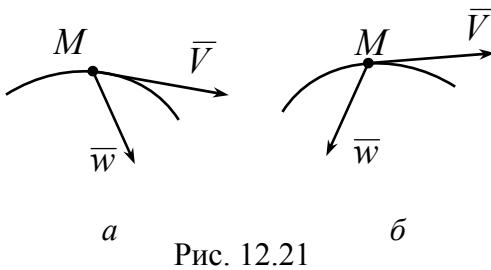


Рис. 12.21

**3.** Криволінійний рух точки називається **рівнозмінним**, якщо дотичне прискорення залишається весь час однаковим:

$$w_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = a = \text{const} \Rightarrow dV_\tau = a dt.$$

Якщо  $s|_{t=0} = s_0$ ,  $V_\tau|_{t=0} = V_0$ , то

$$V_\tau = at + V_0, \quad ds = (at + V_0)dt, \quad s = a \frac{t^2}{2} + V_0 t + s_0.$$

**4.** У **прямолінійному** русі точки  $\rho = \infty$ ,  $w_V = 0$ ,  $\vec{w} = \vec{\tau} w_\tau$ . Направимо одну з координатних осей, наприклад, вісь  $Ox$ , вздовж (прямолінійної) траєкторії точки. Положення рухомої точки у просторі можна повністю визначити, якщо задати абсцису точки як функцію часу:  $x = x(t)$ . Тоді  $\vec{w} = \vec{i} w_x$ ,  $\vec{V} = \vec{i} V_x$ ,  $V_x = \dot{x}$ ,  $w_x = \ddot{x}$ ,  $V = |\dot{x}|$ ,  $w = |\ddot{x}|$ . Якщо  $V_x > 0$ , то рух точки відбувається в сторону додатного напрямку осі  $Ox$ , причому у випадку  $w_x > 0$  рух прискорений, у випадку  $w_x < 0$  – сповільнений. Якщо  $V_x < 0$ , то точка рухається в сторону від'ємного напрямку осі  $Ox$ , причому у випадку  $w_x > 0$  рух сповільнений, у випадку  $w_x < 0$  – прискорений.

**5.** **Круговий рух** точки вздовж кола радіуса  $R$  (рис. 12.22). В цьому випадку

$$\rho = R = \text{const}, \quad ds = R d\varphi, \quad V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega, \quad w_\tau = \dot{V} = R\dot{\omega} = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon,$$

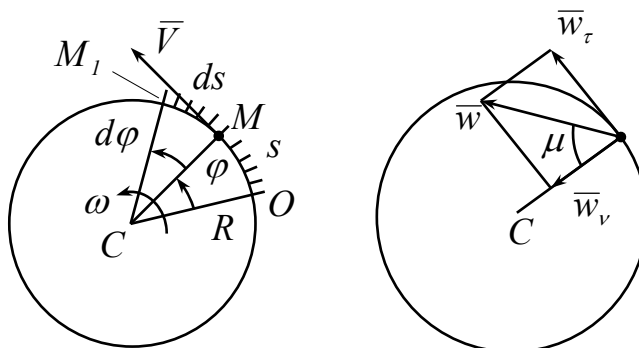


Рис. 12.22

$$w_v = \frac{V^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = \omega^2 R, \quad w = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \text{tg } \mu = \frac{w_\tau}{w_v} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (12.27)$$

Величина  $\omega = \dot{\varphi}$  (швидкість зміни з часом кута  $\varphi$ ) називається *кутовою швидкістю обертання променя*, направленою вздовж радіуса кола. Величина  $\varepsilon = \dot{\omega}$  називається *кутовим прискоренням*. Модуль швидкості точки в круговому русі визначається формулою:

$$V = \omega R. \quad (12.28)$$

Якщо  $V = \text{const}$ , то  $w_\tau = 0$ ,  $\vec{w} = \vec{w}_v$ , тобто прискорення точки направлене вздовж радіального променя до центра кола.

### Питання для самоконтролю

1. Що вивчають в кінематиці?
2. Сформулюйте принцип відносності руху. Наведіть приклади.
3. Як слід тлумачити абсолютний простір та абсолютний час?
4. Сформулюйте векторний спосіб описування руху точки?
5. Сформулюйте координатний спосіб описування руху точки.
6. В чому полягає суть натурального способу описування руху точки?
7. Як отримати рівняння траєкторії точки в декартовій системі прямокутних координат із рівнянь траєкторії точки в параметричній формі?
8. Як перейти від одного способу описування руху точки до іншого?
9. Які обмеження накладаються на функції, що описують рух точки?
10. У чому полягає відмінність між дуговою координатою точки та пройденим шляхом?
11. Чому при криволінійному русі точки вектор повного прискорення навіть при  $v = \text{const}$  відмінний від нуля?
12. Чому дорівнює радіус кривини траєкторії точки в точці перегину?
13. Назвіть елементи натурального триєдру (сутного тригранника) кривої лінії.

### 13. Поступальний рух твердого тіла

**Поступальним рухом** називається такий рух тіла у просторі, при якому будь-яка пряма, проведена через дві точки тіла, переміщується паралельно самій собі.

Прикладом і частинним випадком поступального руху є прямолінійний. Однак при поступальному русі тіла траєкторіями його точок взагалі можуть бути які завгодно криві лінії.

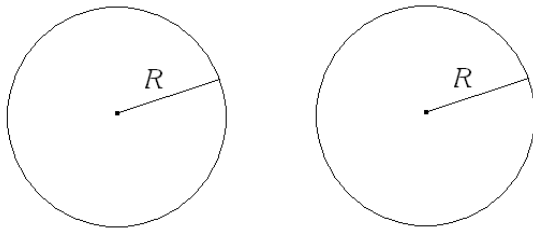


Рис. 13.1

У математиці часто зустрічаються криві лінії, які при накладанні збігаються, тобто вони відрізняються між собою лише положенням у просторі. Такі лінії називаються конгруентними. Прикладом є два кола однакового радіуса (рис. 13.1).

**Теорема.** При поступальному

русі твердого тіла всі точки тіла описують конгруентні траєкторії і мають однакові швидкості і прискорення.

*Доведення.* Розглянемо два положення тіла: зліва – в момент  $t$ , справа – в момент  $t + \Delta t$ . Нехай точка  $A$  за час  $\Delta t$  перемістилася в положення  $A_1$ , а точка  $B$  – в положення  $B_1$ . За означенням поступального руху  $AB \parallel A_1B_1$ . Оскільки відстані між точками абсолютно твердого тіла не змінюються, то  $A_1B_1 = AB$ , тобто

$$\vec{BA} = \vec{B_1A_1} = \vec{\rho} = \text{const}.$$

Позначимо через

$$\Delta \vec{r}_A = \vec{AA_1} \quad \text{і} \quad \Delta \vec{r}_B = \vec{BB_1}$$

вектори переміщень точок  $A$  і  $B$  за час  $\Delta t$ , тобто

$$\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \Delta \vec{r}_A, \quad \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_B + \Delta \vec{r}_B.$$

Оскільки  $AB \parallel A_1B_1$  і  $AB = A_1B_1$ , то фігура  $AA_1B_1B$  – паралелограм, тобто  $\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B$ . Таким чином,

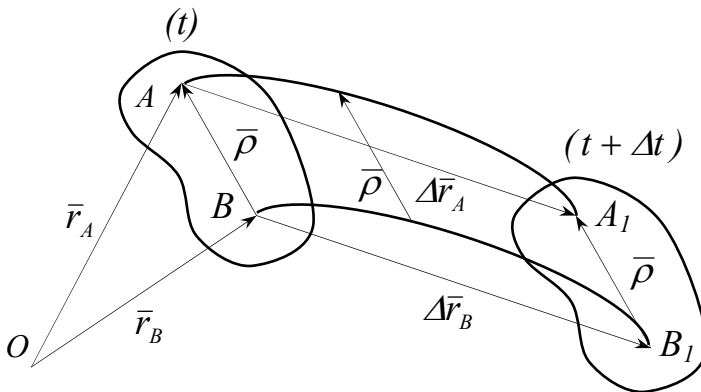


Рис. 13.2

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{\rho}, \quad \vec{r}_{A_1} = \vec{r}_{B_1} + \vec{\rho}. \quad (13.1)$$

Траєкторії точок  $A$  і  $B$  визначаються функціями  $\vec{r}_A(t)$  і  $\vec{r}_B(t)$ . Оскільки  $\vec{\rho} = \text{const}$ , то траєкторію точки  $A$  можна отримати паралельним переносом траєкторії точки  $B$  на постійний вектор  $\vec{\rho}$ , тобто траєкторії всіх точок тіла ( $A$  і  $B$  – довільні точки тіла) при поступальному русі конгруентні. Перша частина теореми доведена.

Для доведення другої частини теореми про диференціюємо за часом перше співвідношення (13.1). На підставі рівності  $\dot{\vec{\rho}} = 0$  з нього одержуємо:



$$\vec{V}_A = \vec{V}_B, \quad \vec{w}_A = \vec{w}_B, \quad (13.2)$$

що й доводить цілком теорему.

*Поступальний рух повністю визначається рухом однієї довільної точки тіла.* Вивчаючи в попередньому розділі кінематику точки, ми водночас вивчали кінематику поступального руху тіла.

Зазначимо також, що швидкість матеріальної точки чи точки тіла, що рухається довільним чином, є вектором, прикладеним до даної точки в даному її положенні, тоді як швидкість тіла, що рухається поступально, є вектором вільним: він може бути прикладений до будь-якої точки тіла. Тільки у випадку поступального руху і можна говорити про швидкість тіла як цілого. В усіх останніх випадках терміни “швидкість тіла”, “прискорення тіла” позбавлені сенсу.

Як **приклад**, розглянемо два колеса локомотива, що рухаються по одній рейці і з'єднані спарником  $AB$  (рис. 13.3). Колеса котяться без ковзання. Рух спарника є поступальним, оскільки він залишається “в цілому” паралельним своєму початковому положенню. Всі точки спарника відносно нерухомої системи координат описують укорочені циклоїди (див. підрозділ 15.9). Ці циклоїди однакової форми, паралельні у відповідних точках і конгруентні.

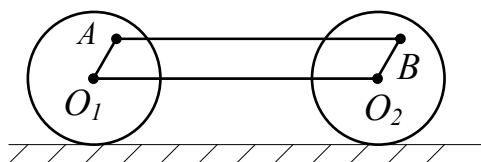


Рис. 13.3

### Питання для самоконтролю

1. Які криві називають конгруентними?
2. Як знайти швидкість і прискорення точок тіла при поступальному русі?
3. Наведіть приклади поступального руху тіл із транспортних галузей.
4. Чому кінематику поступального руху абсолютно твердого тіла можна звести до кінематики точки? якої точки?

## 14. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

### 14.1. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення тіла

**Означення.** Якщо тверде тіло рухається так, що, принаймні, дві його точки  $A$  і  $B$  залишаються нерухомими, то рух тіла називається **обертальним**, а вісь, що проходить через ці точки, називається **віссю обертання** (рис. 14.1).

Оскільки віддалі між точками абсолютно твердого тіла залишаються незмінними, то точки осі обертання нерухомі, а всі останні точки тіла описують кола, площини яких перпендикулярні до осі обертання; центри кіл лежать на цій осі.

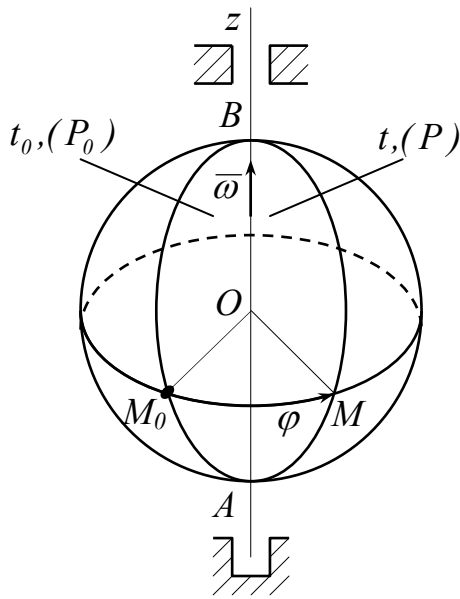


Рис. 14.1

Проведемо через вісь  $Oz$  в початковий момент часу  $t_0$  площину  $(P_0)$  і зафіксуємо її положення в нерухомому просторі та в тілі. Площина  $(P)$  рухається разом з тілом і в момент часу  $t$  утворює з площиною  $(P_0)$  двогранний кут, ребром якого є вісь обертання. Цей двогранний кут називається **кутом повороту тіла** або його **кутовою координатою**. Він вимірюється лінійним кутом  $\varphi$ . Відповідно до вибору правої системи декартових координат  $\varphi > 0$  при повороті тіла проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця осі  $Oz$ . Закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі виражається рівністю:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (14.1)$$

Швидкість зміни функції  $\varphi(t)$  називають *кутовою швидкістю*  $\omega$  тіла, а швидкість зміни з плином часу функції  $\omega(t)$  називають *кутовим прискоренням*  $\varepsilon$  тіла. Вводяться ці величини традиційним для математичного аналізу способом. Наведемо його. Нехай в момент часу  $t + \Delta t$  кут повороту тіла набув значення  $\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \Delta\varphi$ . Величина  $\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$  називається середньою кутовою швидкістю тіла за проміжок часу  $[t, t + \Delta t]$ . Щоб знайти кутову швидкість тіла в даний момент часу  $t$ , потрібно перейти до границі:

$$\omega = \omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (14.2)$$

Аналогічно вводиться кутове прискорення тіла:

$$t \rightarrow \omega(t), \quad t + \Delta t \rightarrow \omega(t + \Delta t) = \omega(t) + \Delta\omega, \quad \varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t},$$

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{cp} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (14.3)$$

Розмірності введених величин такі:  $[\varphi] = \text{рад}$ ,  $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ,  $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ . Оскільки радіан – величина безрозмірна, то часто його опускають:  $[\omega] = \frac{1}{\text{с}}$ ,  $[\varepsilon] = \frac{1}{\text{с}^2}$ .

**Кутова швидкість  $\omega$  та кутове прискорення  $\varepsilon$  – основні кінематичні характеристики обертального руху тіла.** Вони є алгебраїчними величинами. Знак  $\omega$  визначає напрям повороту тіла: якщо  $\omega > 0$ , то функція  $\varphi(t)$  зростає, тобто тіло обертається проти годинникової стрілки, коли спостерігати його з кінця осі  $Oz$ ; якщо ж  $\omega < 0$ , то функція  $\varphi(t)$  спадає, тобто тіло обертається за годинниковою стрілкою, коли спостерігати його з кінця осі обертання.

**Означення.** Обертання тіла називається **прискореним**, якщо абсолютне значення кутової швидкості тіла з плином часу збільшується, і **сповільненим**, якщо  $|\omega(t)|$  з часом зменшується.

Обертання тіла є прискореним, коли  $\omega\varepsilon > 0$ , і сповільненим, якщо  $\omega\varepsilon < 0$ . Доведення цих тверджень ґрунтується на безпосередньому аналізі поведінки графіків функції  $\omega(t)$  у випадках прискореного руху (рис. 14.2) та сповільненого руху (рис. 14.3). Умови (14.4) – (14.5) аналогічні умовам (12.25) – (12.26).

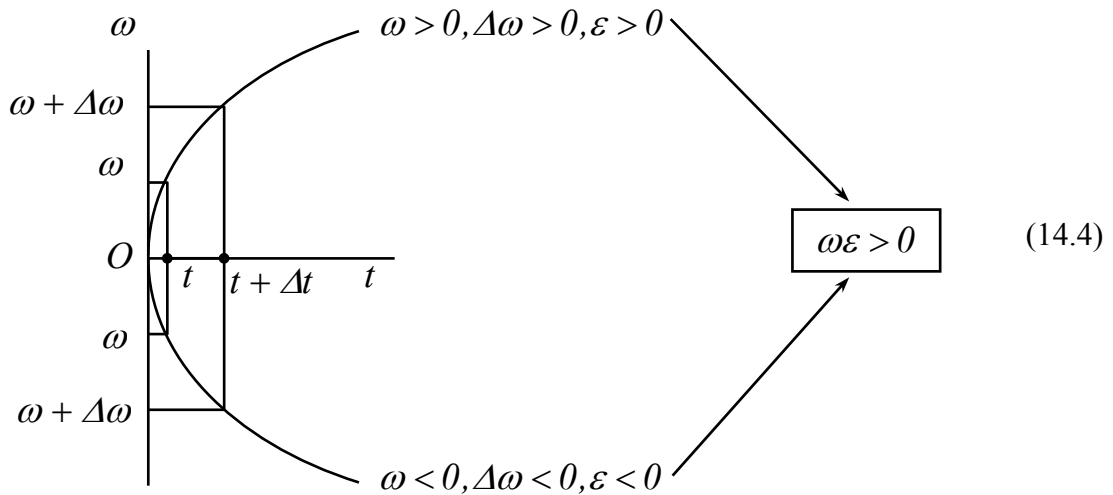


Рис. 14.2

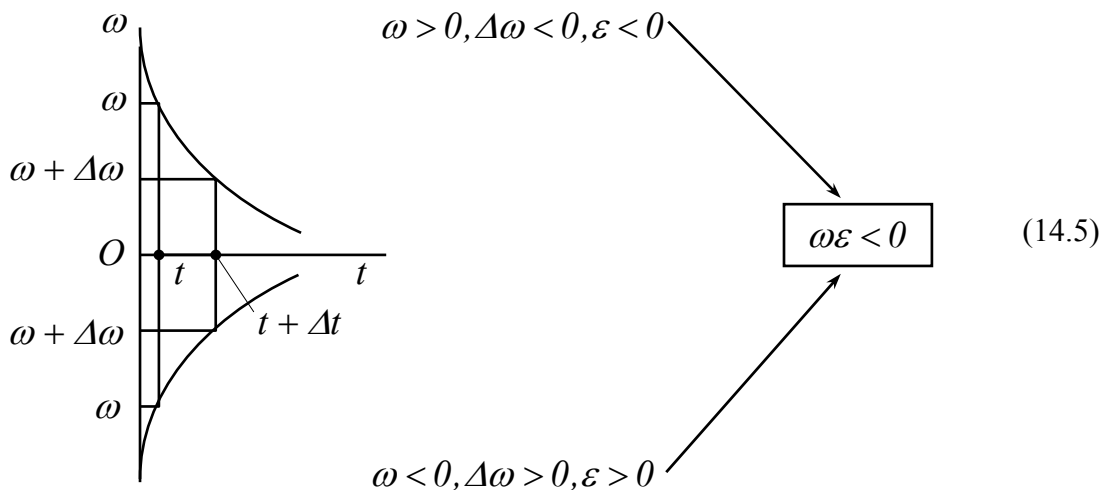


Рис. 14.3

Якщо  $\omega = \text{const}$ , то обертання тіла називається **рівномірним**. У цьому випадку

$$\varepsilon = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad d\varphi = \omega dt, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Якщо  $\varepsilon = \text{const}$ , то обертання тіла називається **рівнозмінним**. У цьому випадку

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad d\omega = \varepsilon dt, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0 \Rightarrow \omega = \varepsilon t + \omega_0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon t + \omega_0, \quad d\varphi = (\varepsilon t + \omega_0) dt, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \Rightarrow \varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0.$$

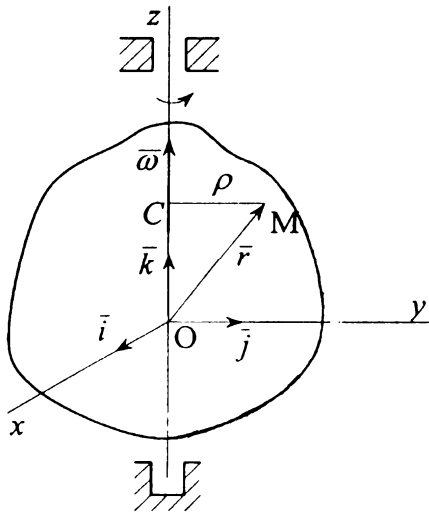


Рис. 14.4

**Вектором кутової швидкості** тіла називається вектор  $\vec{\omega} = \vec{k}\omega$  (рис. 14.1). Він направлений вздовж осі обертання в ту сторону, звідки поворот тіла видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки. Точка прикладання вектора  $\vec{\omega}$  на осі обертання довільна, тобто  $\vec{\omega}$  – ковзний аксіальний вектор.

**Вектором кутового прискорення** тіла називається вектор  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{k} \frac{d\omega}{dt} = \vec{k}\varepsilon$ .

Напрямок вектора  $\vec{\varepsilon}$  збігається з напрямком вектора  $\vec{\omega}$ , якщо тіло обертається прискорено; напрям вектора  $\vec{\varepsilon}$  протилежний напрямку вектора  $\vec{\omega}$  при сповільненому обертанні.

## 14.2. Швидкості точок тіла

Нехай  $Oxyz$  – рухома система координат, незмінно зв'язана з тілом, що

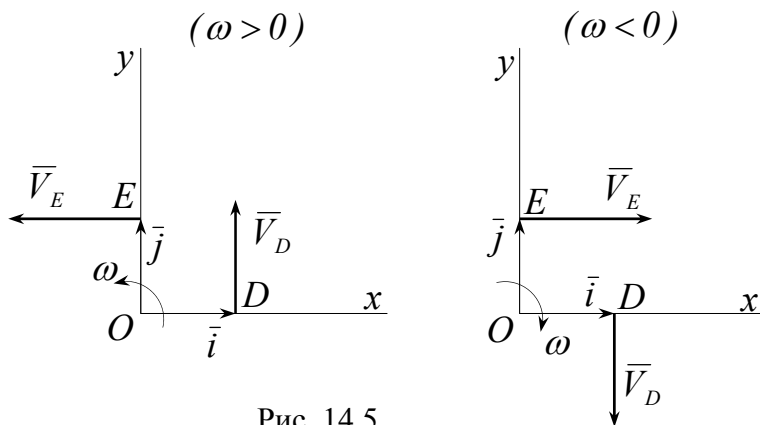


Рис. 14.5

обертається навколо осі  $Oz$  (рис. 14.4). Візьмемо довільну точку  $M(x, y, z)$  у тілі. Розкладемо її радіус-вектор  $\vec{r} = \vec{OM}$  за базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \{x, y, z\}. \quad (14.6)$$

Орт  $\vec{k}$  осі  $Oz$ , а також апліката точки  $M$  при обертанні навколо осі  $Oz$  не змінюються:  $\vec{k} = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ . Осі  $Ox$  та  $Oy$  відслідковують рух тіла, тому

абсциса і ордината точки  $M$  не залежать від часу:  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ . Отже, в рівності (14.6) функціями часу є лише орти  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  (при обертанні тіла змінюються їх напрями); тому

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt}. \quad (14.7)$$

На підставі формули (12.6) похідні  $\frac{d\vec{i}}{dt}$  та  $\frac{d\vec{j}}{dt}$  знайдемо як швидкості кінців  $D$  та  $E$  векторів  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  в їх круговому русі навколо точки  $O$  (рис. 14.5).

Кутова швидкість є алгебраїчною величиною, тобто може бути як додатною, так і від'ємною. Згідно з формулою (12.28) модулі швидкостей точок  $D$  та  $E$  однакові:

$$|\vec{V}_D| = |\vec{V}_E| = |\omega| \cdot 1.$$

Якщо  $\omega > 0$ , то

$$\vec{V}_D = \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{j}\omega, \quad \vec{V}_E = \frac{d\vec{j}}{dt} = -\vec{i}\omega.$$

Для  $\omega < 0$  маємо:

$$\vec{V}_D = \frac{d\vec{i}}{dt} = -\vec{j}|\omega| = \vec{j}\omega, \quad \vec{V}_E = \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{i}|\omega| = -\vec{i}\omega.$$

Отже, кінцеві вирази для  $\frac{d\vec{i}}{dt}$  та  $\frac{d\vec{j}}{dt}$  в обох випадках одні й ті самі.

Формула (14.7) набуває вигляду:

$$\vec{V} = -\vec{i}\omega y + \vec{j}\omega x. \quad (14.8)$$

Оскільки права частина тотожно дорівнює

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

то формула (14.8) для швидкості точки тіла в обертальному русі навколо нерухомої осі може бути подана так:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (14.9)$$

Це *формула Ейлера*.

З виразу (14.8) знаходимо

$$V = |\vec{V}| = \omega\rho, \quad (14.10)$$

де  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  – віддаль між точками  $M(x, y, z)$  та  $C(0, 0, z)$  (рис. 14.4). Іншими словами,  $\rho$  є відстанню точки  $M$  до осі обертання. Звісно, такий же вираз для  $V$  дістанемо, скориставшись формулою (14.9):

$$V = \omega r \sin(\hat{\omega}, \vec{r}) = \omega\rho, \quad \rho = r \sin(\hat{\omega}, \vec{r}).$$

Отже, при обертанні тіла навколо нерухомої осі швидкості точок тіла розподіляються так, що їх модулі пропорційні відстаням точок до осі обертання. Поле швидкостей зображено на рис. 14.6.

### 14.3. Прискорення точок тіла

Продиференціюємо за часом обидві частини рівності (14.9):

$$\vec{w} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (14.11)$$

Позначивши

$$\vec{w}_{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{w}_{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}, \quad (14.12)$$

подамо прискорення точки двома складовими:

$$\vec{w} = \vec{w}_{ob} + \vec{w}_{oc}. \quad (14.13)$$

Перша з них називається *обертальним прискоренням* точки і направлена по дотичній до траєкторії в сторону руху, друга називається *доосьовим прискоренням* (рис.14.7, а), при цьому

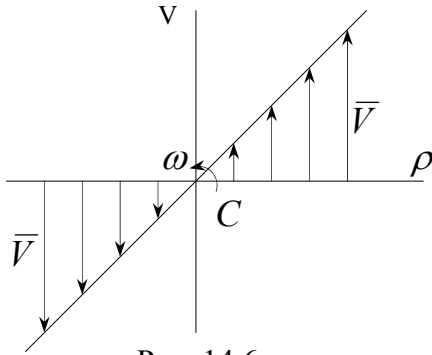


Рис. 14.6

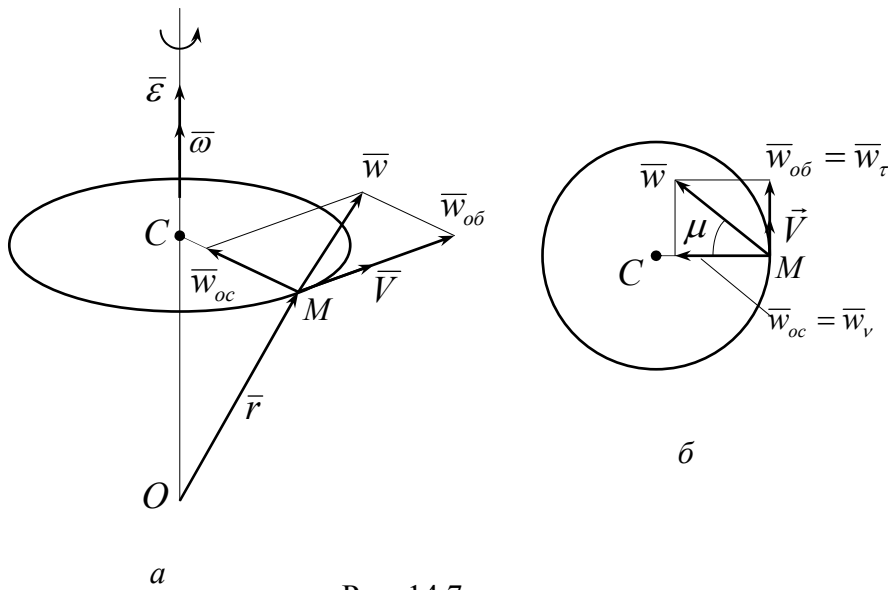


Рис. 14.7

$$w_{ob} = \varepsilon r \sin(\hat{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon \rho, \quad w_{oc} = \omega V = \omega^2 \rho. \quad (14.14)$$

Оскільки кожна точка тіла при обертанні навколо нерухомої осі описує коло, то обертальне прискорення називають також дотичним  $\vec{w}_\tau$ , а доосьове – нормальним (рис. 14.7, б). Як і для кругового руху, знаходимо:

$$w = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \text{tg} \mu = \frac{w_{ob}}{w_{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (14.15)$$

**Питання для самоконтролю**

1. Яке обертання тіла навколо нерухомої осі називають прискореним? сповільненим?
2. Яке обертання тіла навколо нерухомої осі називають рівномірним? рівнозмінним?
3. Як направлений вектор кутової швидкості тіла? кутового прискорення?
4. Як знайти швидкості точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі? модуль швидкості?
5. Чому при обертанні тіла навколо нерухомої осі обертальна складова прискорення еквівалентна тангенціальному (дотичному) прискоренню, а нормальна – доосьовому?

**15. Плоскопаралельний рух твердого тіла**

**15.1. Зведення задачі про плоскопаралельний рух тіла до задачі про рух простіших геометричних образів**

**Означення.** Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла переміщуються паралельно певній нерухомій (основній) площині.

Прикладом такого руху може бути кочення без ковзання циліндра по горизонтальній площині  $xOz$  (рис. 15.1). Кожна твірна циліндра рухається

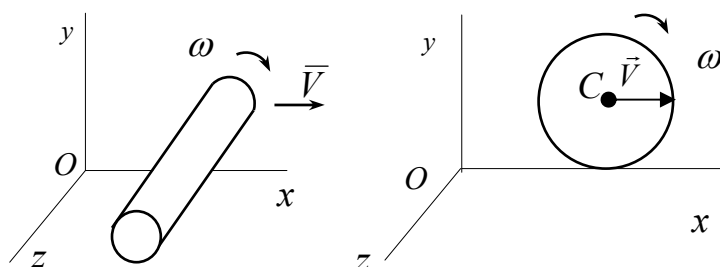


Рис. 15.1

поступально, залишаючись паралельною осі  $Oz$ . Основа циліндра залишається весь час паралельною площині  $xOy$ . Інтуїтивно очевидно, що в кожному мить рух циліндра можна вважати накладанням двох рухів: поступального зі швидкістю  $\vec{V}$  та обертального з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо деякої осі.

Частинними випадками плоскопаралельного руху є обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, розглянутий у попередньому розділі, а також поступальний рух, розглянутий у розділі 13. Отже, рух залізничного колеса, яке котиться вздовж прямолінійної рейки, є плоскопаралельним.

**Теорема 1.** *Задачу вивчення плоскопаралельного руху тіла у тривимірному просторі можна звести до задачі вивчення руху плоскої фігури в її площині; ця фігура є перерізом тіла площиною, паралельною нерухомій площині.*

**Доведення.** Нехай всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних площині  $(P)$  (рис. 15.2). Хоч саме тіло рухається взагалі не поступально, проте будь-який відрізок прямої, проведений в тілі перпендикулярно площині  $(P)$ ,

переміщується поступально. Покажемо це. Нехай відрізок  $CD$  прямої, перпендикулярної до площини  $(P)$ , за час  $\Delta t$  перемістився в положення  $C_1D_1$ .

Оскільки тіло абсолютно тверде (тобто  $C_1D_1 = CD$ ), а переміщення  $\vec{CC}_1$  і  $\vec{DD}_1$  паралельні площині  $(P)$ , то фігура  $CDD_1C_1$  є прямокутником, тобто  $C_1D_1 \parallel CD$ .

Отже, траєкторії всіх точок цієї прямої конгруентні, а швидкості та

прискорення точок її відрізка, що належить тілові, однакові (див. розділ 13). Таким чином, рух точок тіла, що лежать на відрізку прямої, перпендикулярній основній площині, визначається рухом однієї з цих точок (будь-якої). Беручи точки в одній площині  $xOy$ , паралельній

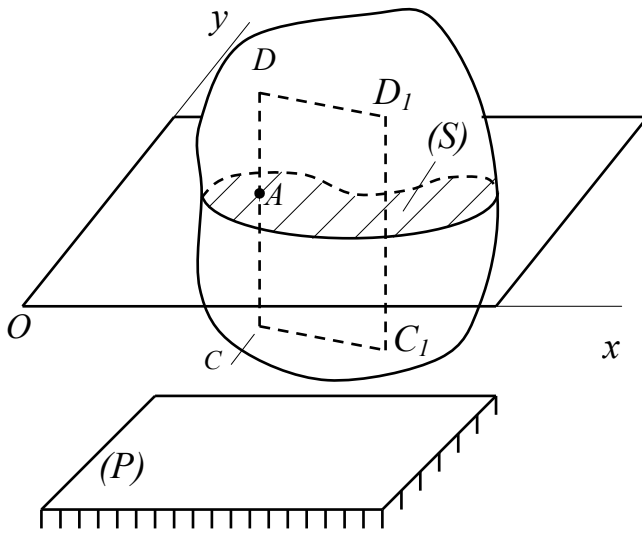


Рис. 15.2

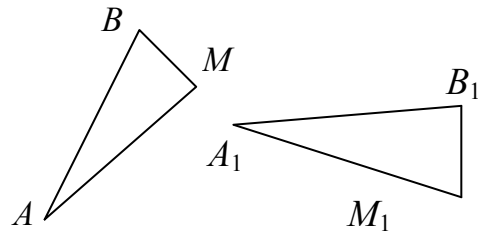


Рис. 15.3

площині  $(P)$ , можна стверджувати, що плоский рух твердого тіла визначається рухом плоскої фігури  $(S)$ , отриманої від перерізу тіла якою-небудь площиною  $xOy$ , паралельною площині  $(P)$ .

На підставі даної теореми математичне моделювання плоского руху твердого тіла зводиться до математичного моделювання руху одного його перерізу. А тому далі будемо досліджувати рух тільки плоскої фігури (перерізу тіла) і вивчати рух точок цього перерізу в його площині.

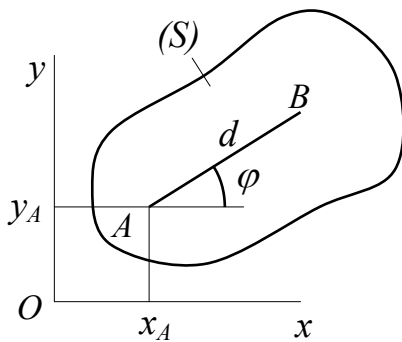


Рис. 15.4

**Теорема 2.** Положення незмінюваної плоскої фігури  $(S)$  в її площині повністю визначається положенням яких-небудь двох її точок  $A$  і  $B$  або, що те ж саме, положенням відрізка  $AB$ , що з'єднує ці точки.

*Доведення.* Нехай маємо відрізок  $AB$  (рис. 15.3). Положення довільної точки  $M$  плоскої фігури цілком визначається віддалами  $AM$  і  $BM$  та розташуванням точки  $M$  відносно відрізка  $AB$ . Нехай відрізок  $AB$ , переміщуючись разом з фігурою в її площині, переходить у нове положення  $A_1B_1$ . Тоді точка  $M$  займе положення

$M_1$ . Його можна знайти, побудувавши на відрізку  $A_1B_1$ , як на основі, трикутник  $A_1B_1M_1$ , рівний трикутнику  $ABM$  (основуючись на тому, що в абсолютно твердому тілі віддалі між точками і кути між прямими залишаються незмінними при будь-яких переміщеннях тіла).

Теорема доведена.



**Теорема 3.** Будь-яке переміщення плоскої фігури в її площині можна здійснити шляхом поступального переміщення разом з довільною точкою (полюсом) і обертального переміщення навколо полюса.

*Доведення.* Нехай  $A(x_A, y_A)$  і  $B(x_B, y_B)$  – дві точки плоскої фігури (рис. 15.4). Оскільки  $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = d^2 = \text{const}$ , то з чотирьох параметрів, якими визначається положення на площині відрізка  $AB$  довжиною  $d$ , незалежними є лише три. За них вибирають координати  $x_A$  та  $y_A$  точки  $A$  і кут  $\varphi$ . Точка  $A$ , яка вибрана для визначення положення фігури ( $S$ ), називається *полюсом*. Якщо фігура рухається, то величини  $x_A$ ,  $y_A$  і  $\varphi$  з часом змінюються. Три функції часу  $x_A(t)$ ,  $y_A(t)$  і  $\varphi(t)$  визначають положення плоскої фігури на площині, і тому *закон її руху* має вигляд:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \quad (15.1)$$

Перші два рівняння (15.1) описують такий рух, який фігура здійснювала б при  $\varphi = \text{const}$ , тобто якби відрізок  $AB$  переміщувався паралельно самому собі.

**Поступальним** рухом плоскої фігури називається такий рух, при якому будь-який прямолінійний відрізок, взятий в площині рухомої фігури, переміщується паралельно самому собі. Всі точки фігури в цьому випадку описують конгруентні траєкторії та мають однакові швидкості і прискорення.

Третє рівняння (15.1) описує такий рух, який фігура здійснювала б при  $x_A = \text{const}$ ,  $y_A = \text{const}$ , тобто якби точка  $A$  залишалась нерухою. **Обертальним** рухом фігури в її площині називається такий рух, при якому одна точка фігури залишається нерухою. Ця точка називається **центром обертання**. У цьому випадку всі точки фігури рухаються вздовж концентричних кіл, центр яких міститься в центрі обертання фігури.

Теорема доведена.

Згідно з цією теоремою *плоскопаралельний рух твердого тіла* можна розглядати як такий, що складається з поступального руху разом з полюсом  $A$  та з обертального руху навколо осі, що перпендикулярна до площини ( $P$ ) і проходить через полюс  $A$ .

## 15.2. Основні кінематичні характеристики плоскопаралельного руху

Основними кінематичними характеристиками цього руху є швидкість і прискорення поступального руху (що дорівнюють швидкості  $\vec{V}_A$  та прискоренню  $\vec{w}_A$  полюсу  $A$ ), а також вектори кутової швидкості  $\vec{\omega}$  та кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  обертального руху навколо полюсу:  $\vec{V}_A$ ,  $\vec{w}_A$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$ . Значення цих характеристик у будь-який момент часу можна дістати, використавши рівняння (15.1).

**Теорема 4.** За полюс можна вибрати яку завгодно точку фігури.

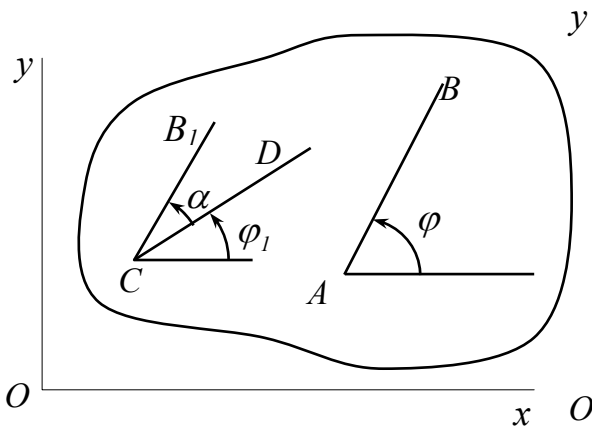


Рис. 15.5

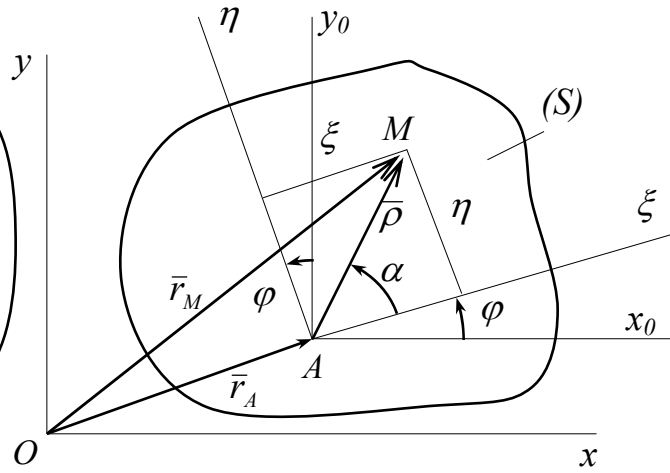


Рис. 15.6

*Доведення.* Нехай точка  $C$  вибрана за полюс замість точки  $A$ . У загальному випадку  $\vec{V}_c \neq \vec{V}_A$ ,  $\vec{\omega}_c \neq \vec{\omega}_A$  (в іншому разі рух фігури був би поступальним), і тому характеристики поступального руху зі зміною полюса, звичайно, змінюються. Проте характеристики обертальної частини руху (тобто  $\vec{\omega}$  та  $\vec{\varepsilon}$ ) залишаються незмінними. Покажемо це. Положення довільного відрізка  $CD$  відносно осі  $Ox$  визначиться кутом  $\varphi_1$  (рис. 15.5). Проведемо  $CB_1 \parallel AB$ . Тоді  $\varphi = \varphi_1 + \alpha$ . Оскільки кут між прямолінійними відрізками в абсолютно твердому тілі залишається незмінним у процесі руху тіла, то  $\alpha = \text{const}$ . Отже,

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 = \omega, \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_1 = \dot{\omega} = \varepsilon.$$

Таким чином, *обертальна частина руху від вибору полюса не залежить.*

### 15.3. Траєкторії точок тіла при плоскому русі

Нехай відомо закон руху тіла, тобто задано рівності (15.1). Знайдемо формули для координат будь-якої точки тіла.

Введемо систему координат  $Ax_0y_0$ , що рухається поступально разом з полюсом  $A$  відносно нерухомої системи координат  $Oxy$ , а також систему координат  $A\xi\eta$ , яка повернута відносно системи  $Ax_0y_0$  на кут  $\varphi$ , незмінно зв'язана з фігурою  $(S)$  і, отже, відтворює всі рухи фігури (рис. 15.6). Позначимо координати довільної точки  $M$  фігури в системі  $Oxy$  через  $x_M$  та  $y_M$ , а в системі  $A\xi\eta$  – через  $\xi$  та  $\eta$ ; орти осей  $A\xi$  і  $A\eta$  позначимо через  $\vec{i}_\xi$  та  $\vec{i}_\eta$ . Розкладемо радіуси-вектори точок  $A$  і  $M$  за відповідними базисами:  $\vec{r}_A = \overline{OA} = \vec{i}_x x_A + \vec{j}_y y_A$ ,  $\vec{r}_M = \overline{OM} = \vec{i}_x x_M + \vec{j}_y y_M$ ,  $\vec{\rho} = \overline{AM} = \vec{i}_\xi \xi + \vec{i}_\eta \eta$ . Ці вектори зв'язані між собою співвідношенням

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}, \tag{15.2}$$

або

$$\vec{i}_x x_M + \vec{j}_y y_M = \vec{i}_x x_A + \vec{j}_y y_A + \vec{i}_\xi \xi + \vec{i}_\eta \eta.$$

Щоб знайти з останньої векторної рівності координати точки  $M$ , домножимо цю рівність скалярно спочатку на орт  $\vec{i}$ , а потім – на орт  $\vec{j}$ :

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + \xi(\vec{i} \cdot \vec{i}_\xi) + \eta(\vec{i} \cdot \vec{i}_\eta), \\ y_M &= y_A + \xi(\vec{j} \cdot \vec{i}_\xi) + \eta(\vec{j} \cdot \vec{i}_\eta). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Скалярні добутки ортів дорівнюють косинусам кутів між відповідними координатними осями:

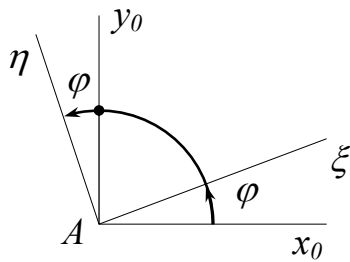


Рис. 15.7

$$\vec{j} \cdot \vec{i}_\xi = \cos(x_0, \xi), \quad \vec{j} \cdot \vec{i}_\eta = \cos(x_0, \eta).$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i}_\xi = \cos(y_0, \xi), \quad \vec{i} \cdot \vec{i}_\eta = \cos(y_0, \eta).$$

На підставі рис. 15.7 таблиця косинусів кутів має вигляд:

$\begin{matrix} \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix}$	$x_\eta$	$y_\eta$
$\xi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
$\eta$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$

Тому рівності (15.3) стають такими:

$$\begin{cases} x_M = x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ y_M = y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \end{cases} \quad (15.4)$$

Отже, якщо відомий закон руху плоскої фігури (15.1) і задані координати  $\xi$  і  $\eta$  довільної точки  $M$  в рухомій системі координат, то з формул (15.4) дістаємо рівності  $x_M = x_M(t)$ ,  $y_M = y_M(t)$ , які дають можливість побудувати траєкторію точки  $M$ .

Дві координатні (скалярні) рівності (15.4) можна подати у вигляді однієї векторної рівності

$$X_M = X_A + A_\varphi X_\rho,$$

ввівши матрицю повороту на кут  $\varphi$

$$A_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

і вектори-стовпці (матриці типу  $2 \times 1$ )

$$X_M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}, \quad X_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \quad X_\rho = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Звичайно, замість декартових координат  $\xi$  та  $\eta$  точки  $M$  в системі координат  $A\xi\eta$  можна користуватись її полярними координатами  $\rho$  і  $\alpha$  (див. рис. 15.6):

$$\xi = \rho \cos \alpha, \quad \eta = \rho \sin \alpha.$$

Підставляючи ці вирази в (15.4), одержимо

$$\begin{cases} x_M = x_A + \rho \cos(\varphi + \alpha), \\ y_M = y_A + \rho \sin(\varphi + \alpha). \end{cases}$$

### 15.4. Швидкості точок тіла при плоскому русі

Продиференціюємо за часом рівність (15.2):

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

або

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

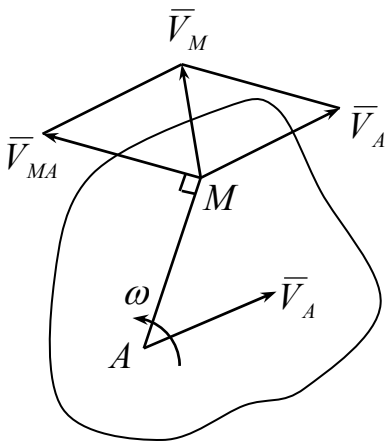


Рис. 15.8

Вектор  $\vec{\rho}$  при русі фігури ( $S$ ) змінюється тільки за напрямом. Похідна  $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$  є швидкістю точки  $M$  відносно рухомої системи координат  $Ax_0y_0$ .

Рух тіла відносно системи  $Ax_0y_0z_0$  являє собою обертання тіла навколо осі  $Az_0$ , що проходить через точку  $A$  і направлена на читача перпендикулярно площині рисунка. Таким чином,  $\vec{V}_{MA} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$  є швидкістю точки  $M$  при обертанні тіла навколо осі  $Az_0$ . Ця швидкість знаходиться за формулою Ейлера (14.9), в якій  $\vec{\omega} = \vec{k}_0\dot{\phi}$ :

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

Отже,

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AM}, \quad (15.5)$$

тобто швидкість будь-якої точки  $M$  плоскої фігури дорівнює сумі швидкості полюсу  $A$  та швидкості точки  $M$  при обертанні плоскої фігури навколо полюсу  $A$ .

Із властивостей векторного добутку випливає, що  $\vec{V}_{MA} \perp \vec{AM}$ . При

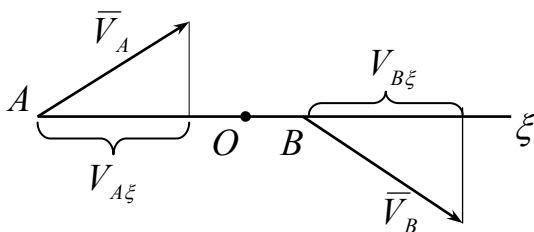


Рис. 15.9

розв'язуванні конкретних задач за полюс звичайно вибирають точку з відомим за умовами задачі вектором швидкості. При геометричному способі розв'язування задачі далі здійснюють побудову, відображену на рис 15.8.

Значне місце посідає проста, але дуже важлива **теорема про швидкості двох точок тіла.**

При плоскому русі проекції швидкостей двох точок тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні між собою.

*Доведення.* Скориставшись формулою (15.5), виразимо швидкість однієї точки через швидкість іншої:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}.$$

Спроектуємо обидві частини цієї рівності на числову вісь  $O\xi$ , що проходить через точки  $A$  і  $B$ . Оскільки  $\vec{\omega} \times \vec{AB}$  є вектор, перпендикулярний до  $\vec{AB}$ , то його проекція на вісь  $O\xi$  дорівнює нулю. Отже,

$$np_{\xi} \vec{V}_A = np_{\xi} \vec{V}_B, \quad \text{або} \quad (\vec{V}_A)_{\xi} = (\vec{V}_B)_{\xi}. \quad (15.6)$$

Теорема доведена.

Рівність (15.6) очевидна із суто фізичних міркувань: якби вона не виконувалась, то при русі віддаль між точками  $A$  і  $B$  змінювалася би, що неможливо, оскільки тіло абсолютно тверде. А тому вона має виконуватись не тільки при плоскопаралельному русі, але і при будь-якому русі абсолютно твердого тіла.

### 15.5. Миттєвий центр швидкостей і способи його знаходження

*Миттєвим центром швидкостей* називається точка  $P$  плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу (в дану мить) дорівнює нулеві.

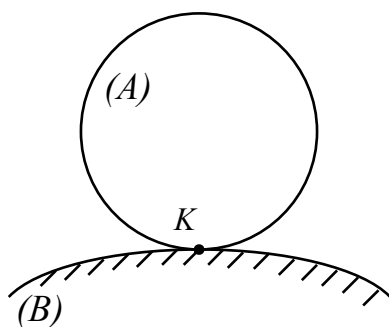


Рис. 15.10

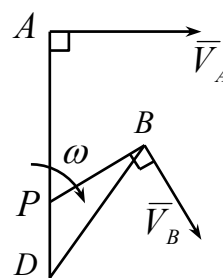


Рис. 15.11

Розглянемо такий *приклад*. Якщо плоскопаралельний рух здійснюється шляхом кочення без ковзання тіла  $(A)$  по поверхні нерухомого тіла  $(B)$  (наприклад, колесо вагона котиться вздовж прямолінійної рейки), то та точка тіла  $(A)$ , яка в дану мить збігається з певною точкою тіла  $(B)$ , має таку ж швидкість, що й ця точка тіла  $(B)$ . Але ж остання нерухома, її швидкість дорівнює нулеві. Отже, такою є і швидкість відповідної точки рухомого тіла. Миттєвим центром швидкостей тіла  $(A)$  є точка  $K$  (рис. 15.10).

*Особливий випадок.* Нехай в даний момент часу  $\omega = 0$ . З формули (15.5) випливає, що швидкості всіх точок тіла в цю мить однакові:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_B = \vec{V}_A = \dots \quad (15.7)$$

Це відмінна риса поступального руху. Оскільки рівність (15.7) справедлива лише в даний момент часу, то рух тіла називається **миттєво поступальним**. Для такого руху миттєвий центр швидкостей перебуває в нескінченно віддаленій точці. Покажемо це. Виберемо за полюс в формулі (15.5) точку  $P$ . Оскільки  $\vec{V}_P = 0$ , то  $\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{PM}$ . Але  $\vec{V}_M \neq 0$ ,  $\omega = 0$ , тому  $PM = \infty$ .

**Теорема існування та єдиності миттєвого центра швидкостей.** *Якщо кутова швидкість плоскої фігури відмінна від нуля (тобто якщо фігура рухається не поступально), то миттєвий центр швидкостей існує, і він єдиний.*

*Доведення.* Нехай для довільної точки  $A$  фігури  $\vec{V}_A \neq 0$  (в іншому разі точка  $A$  була б миттєвим центром швидкостей) і нехай вектор  $\vec{V}_B$  не паралельний вектору  $\vec{V}_A$ . Покажемо, що миттєвим центром швидкостей фігури є точка  $P$  (рис. (15.11)) перетину перпендикулярів  $AP$  і  $BP$ . Використаємо формулу (15.5) для визначення швидкості точки  $P$ , взявши за полюс спочатку точку  $A$ , а потім – точку  $B$ :

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}, \quad (15.8)$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BP}. \quad (15.9)$$

Але ж  $\vec{V}_A \perp \overrightarrow{AP}$  – за побудою,  $(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}) \perp \overrightarrow{AP}$  – за властивостями векторного добутку; обидва доданки в правій частині рівності (15.8) перпендикулярні  $\overrightarrow{AP}$ , тому мусило б бути:  $\vec{V}_P \perp \overrightarrow{AP}$ . З тих же міркувань випливає:  $\vec{V}_P \perp \overrightarrow{BP}$ . Одночасне виконання умов  $\vec{V}_P \perp \overrightarrow{AP}$  і  $\vec{V}_P \perp \overrightarrow{BP}$  можливе в єдиному випадку:  $\vec{V}_P = 0$ , тобто точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей.

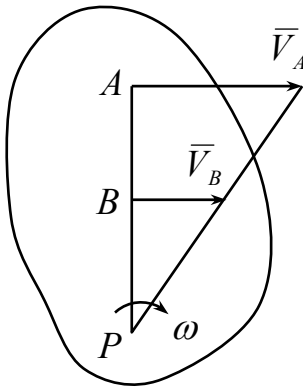


Рис. 15.12

Ніяка інша точка фігури в цей момент часу не може мати нульову швидкість. Це доводиться на підставі теореми про швидкості двох точок фігури. Наприклад, для точки  $D$  (рис. 5.11) було б:  $\vec{V}_D = 0$ ,  $(\vec{V}_D)_{BD} = 0 \neq (\vec{V}_B)_{BD}$  і т. д.

Доведена теорема носить конструктивний характер: нею не тільки стверджується існування, а й пропонується спосіб побудови миттєвого центра швидкостей: для визначення положення миттєвого центра швидкостей достатньо мати прями, вздовж яких направлені швидкості двох точок плоскої фігури, і знайти точку перетину перпендикулярів до них.

Якщо, крім того, відомо вектор швидкості однієї з цих двох точок, то можна знайти миттєву кутову швидкість.

Розглянемо **особливі випадки**.

*Перший випадок.* Якщо  $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B \perp \overrightarrow{AB}$ , то миттєвий центр швидкостей знаходиться побудою, показаною на рис. 15.12. Доведемо, що  $\vec{V}_P = 0$ . Запишемо умову колінеарності векторів  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$ :

$$\vec{V}_A = \lambda \vec{V}_B. \quad (15.10)$$

Нехай  $\lambda \neq 1$ . З подібності відповідних трикутників на рис. 15.12 маємо:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP} = \lambda, \quad \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{BP}. \quad (15.11)$$

Для визначення швидкості точки  $P$  можна записати два такі вирази:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}, \quad (15.12)$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BP}. \quad (15.13)$$

На підставі (15.10) і (15.11) вираз (15.12) набуває вигляду:

$$\vec{V}_P = \lambda (\vec{V}_B + \vec{\omega} \times \overline{BP}). \quad (15.14)$$

З урахуванням (15.13) рівність (15.14) можна записати так:  $\vec{V}_P = \lambda \vec{V}_P \Rightarrow (1 - \lambda) \vec{V}_P = 0$ . Оскільки  $1 - \lambda \neq 0$ , то  $\vec{V}_P = 0$ .

У цьому випадку, на відміну від попереднього, крім напрямів потрібно знати також і модулі швидкостей точок  $A$  і  $B$ .

Якщо  $\lambda = 1$ , тобто  $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ , то  $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \overline{BA} = \vec{V}_B \Rightarrow \vec{\omega} = 0$ . Рух у цьому випадку є миттєво поступальним.

**Другий випадок.** Якщо  $\vec{V}_A = -\mu \vec{V}_B$ ,  $\mu > 0$ ,  $\vec{V}_A \perp \overline{AB}$ , то миттєвий центр швидкостей  $P$  знаходиться побудовою, наведеною на рис. 15.13. Це твердження

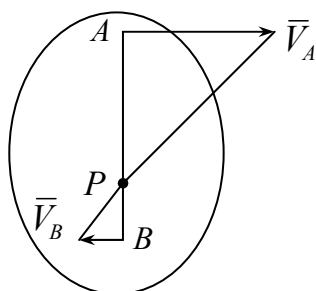


Рис. 15.13

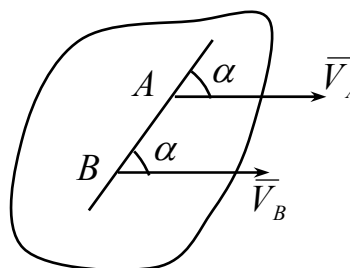


Рис. 15.14

доводиться так само, як і у першому випадку (для цього в наведених вище формулах достатньо вважати  $\lambda = -\mu < 0$ ).

**Третій випадок.** Якщо швидкості двох точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури паралельні між собою, але не перпендикулярні вектору  $\overline{AB}$ , то миттєвий центр швидкостей лежить на нескінченності і швидкості решти точок фігури в даний момент часу дорівнюють  $\vec{V}_A$  (рис.15.14,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ). Доведемо це твердження.

З теореми про швидкості точок  $A$  і  $B$  випливає:

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \alpha,$$

тобто  $V_A = V_B$ . Аналогічний результат одержимо для всіх інших точок фігури. Таким чином, у даний момент часу швидкості всіх точок фігури однакові, тобто фігура має миттєвий поступальний розподіл швидкостей (такий рух тіла називається миттєво поступальним). Кутова швидкість тіла в цей момент часу дорівнює нулеві:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB} = \vec{V}_A \Rightarrow \vec{\omega} = 0,$$

тобто миттєвий центр швидкостей міститься в нескінченно віддаленій точці.

### 15.6. Миттєвий центр обертання. Центроїди

Виберемо за полюс миттєвий центр швидкостей  $P$ . Оскільки  $\vec{V}_P = 0$ , то для швидкості довільної точки  $A$  фігури одержимо:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{\omega} \times \overline{PA} = \vec{\omega} \times \overline{PA}.$$

Отже, швидкості точок плоскої фігури розподіляються в кожний момент часу так само, як і при обертальному русі навколо центра  $P$ . З цієї причини точку нерухої площини, яка збігається з миттєвим центром швидкостей (її також будемо позначати літерою  $P$ ), називають *миттєвим центром обертання*. Вісь  $Pz$ , що перпендикулярна до перерізу  $(S)$  тіла і проходить через точку  $P$ , називається *миттєвою віссю обертання тіла*, яке здійснює плоскопаралельний рух.

Від нерухої осі (або центра) обертання миттєва вісь (або центр) відрізняються тим, що вони весь час змінюють свої положення. Миттєвий центр обертання являє собою точку, елементарним поворотом навколо якої фігура переміщується з даного положення в сусіднє, нескінченно близьке до даного. Плоскопаралельний рух складається із серії послідовних елементарних поворотів навколо миттєвих осей (або центрів) обертання, що неперервно змінюють своє положення.

Геометричну картину руху плоскої фігури в її площині можна ще уявити за допомогою так званих центроїд. На відміну від чисто обертального руху, при плоскому русі миттєвий центр обертання, взагалі кажучи, змінює своє положення на площині. Якщо наклеїти на фігуру, що здійснює плоский рух, лист паперу і в кожний момент часу проколуюти голкою миттєвий центр обертання, то одержимо дві серії позначок: одна – на нерухомій площині, друга – на листі паперу, зв'язаному з фігурою.

Геометричне місце миттєвих центрів обертання, тобто положень точки  $P$  на нерухомій площині, називається **нерухою центроїдою**. Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей, тобто положень точки  $P$  на площині, яка зв'язана з фігурою і рухається разом з нею, називається **рухою центроїдою**.

У даний момент часу обидві центроїди дотикаються одна одній в точці  $P$  (рис. 15.15), яка є для цього моменту миттєвим центром обертання (або миттєвим центром швидкостей). Перетинатись центроїди не можуть: в іншому разі в даний момент часу існувало б більше одного миттєвого центра, що суперечить теоремі існування та єдиності (підрозділ 15.5). У наступний момент часу будуть співпадати точки  $P'_1$  рухої та  $P_1$  нерухої центроїд. Тепер уже ця точка буде для цього наступного моменту миттєвим центром обертання і т. д.

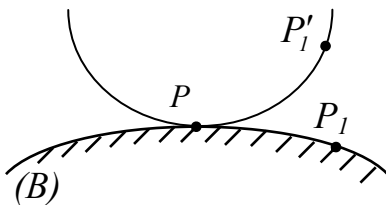


Рис. 15.15

Оскільки положення миттєвого центру  $P$  змінюється неперервно і в кожний момент часу  $\vec{V}_p = 0$ , то при плоскопаралельному русі відбувається кочення без ковзання рухої центроїди по нерухомій.

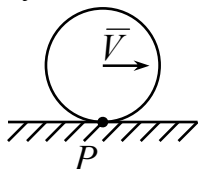


Рис. 15.16

У випадку, *наприклад*, кочення без ковзання циліндра по горизонтальній площині (див. рис. 15.1) нерухою центроїдою є горизонтальна пряма, рухою центроїдою – коло (рис. 15.16).



### 15.7. Прискорення точок тіла при плоскому русі

Відправною є рівність (15.5), в якій  $\vec{\rho} = \vec{AM}$  (див. рис. 15.6). Продиференціюємо її обидві частини за часом:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Тут на підставі результатів з підрозділу 15.4 позначено:

$$\vec{\omega} = \vec{k}\dot{\phi}, \quad \vec{\varepsilon} = \vec{k}\ddot{\phi}, \quad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{AM}.$$

А тому

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AM} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}. \quad (15.15)$$

Введемо вектор

$$\vec{w}_{MA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{AM} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}, \quad (15.16)$$

який визначає прискорення точки  $M$  при закріпленій точці  $A$  (при  $\vec{w}_A = 0$ ). Тоді вираз (15.15) буде мати вигляд

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA}.$$

Таким чином, прискорення будь-якої точки  $M$  плоскої фігури дорівнює сумі прискорення якої-небудь іншої точки  $A$ , яка прийнята за полюс, та прискорення, що його точка  $M$  набуває при обертанні навколо цього полюса.

Прискорення  $\vec{w}_{MA}$  складається із двох прискорень:

$$\vec{w}_{MA} = \vec{w}_{MA}^{ob} + \vec{w}_{MA}^{oc}. \quad (15.18)$$

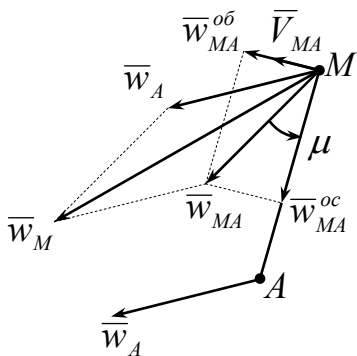


Рис. 15.17

Складаюва

$$\vec{w}_{MA}^{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{AM} \quad (15.19)$$

є вектором, перпендикулярним до  $\vec{AM}$  і колінарним вектору  $\vec{V}_{MA}$ ; цей вектор називається *обертальним прискоренням* точки  $M$  (рис. 15.17).

Складаюва

$$\vec{w}_{MA}^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA} \quad (15.20)$$

є вектором, перпендикулярним до  $\vec{V}_{MA}$ , і називається *доосьовим* прискоренням; тут воно є доцентровим, оскільки направлене до фіксованої точки плоскої фігури – полюса  $A$ .

На підставі виразів (15.16) – (15.20) для прискорення довільної точки  $M$  маємо таку формулу:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA}^{ob} + \vec{w}_{MA}^{oc}. \quad (15.21)$$

Вектори  $\vec{w}_{MA}^{ob}$  і  $\vec{w}_{MA}^{oc}$  являють собою відповідно ті обертальне (дотичне) і доцентрове (нормальне) прискорення, які точка  $M$  мала б, якби фігура здійснювала лише обертання навколо полюса  $A$ . Для їхніх модулів маємо вирази, цілком аналогічні наведеним вище (12.27) і (14.14), (14.15):

$$w_{MA}^{ob} = \varepsilon \cdot AM, \quad w_{MA}^{oc} = \omega V_{MA} = \omega^2 \cdot AM, \quad w_{MA} = AM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (15.22)$$

При розв'язуванні конкретних задач полюсом, звичайно, вибирають точку, прискорення якої легко знаходиться з умови задачі.

Введемо кут  $\mu$  від вектора  $\vec{w}_{MA}$  до вектора  $\vec{w}_{MA}^{oc}$  (рис. 15.17). Він знаходиться із співвідношення:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{w_{MA}^{ob}}{w_{MA}^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (15.23)$$

причому  $\mu < \frac{\pi}{2}$ . В іншому разі прискорення  $\vec{w}_{MA}^{oc}$  було б направлене від полюса, що неможливо. Кут  $\mu$  відраховується в напрямі обертання плоскої фігури, якщо вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  направлені в одну сторону, і в протилежному, якщо ці вектори мають різні напрями. Кут  $\mu$  не залежить від вибору полюса і для всіх точок фігури для одного й того самого моменту часу однаковий.

### 15.8. Миттєвий центр прискорень

Миттєвим центром прискорень  $Q$  називається точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю:  $\vec{w}_Q = 0$ .

Якщо за полюс вибрати точку  $Q$  (припустивши заздалегідь, що миттєвий центр прискорень існує), то вираз (15.17) на підставі виразів (15.16) і (15.18) набуває вигляду:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_{MQ} = \vec{\varepsilon} \times \vec{QM} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MQ} = \vec{w}_{MQ}^{ob} + \vec{w}_{MQ}^{oc}, \quad (15.24)$$

тобто прискорення будь-якої точки в даний момент часу тепер можна знайти так само, як і при обертанні тіла навколо нерухомої осі – див. формули (14.11) – (14.13). Модуль прискорення визначається формулою (15.22):

$$w_M = w_{MQ} = QM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (15.25)$$

тобто модулі прискорень точок плоскої фігури пропорційні їхнім віддалям від миттєвого центра прискорень. Кут  $\mu$  (рис. 15.18), який вектор  $\vec{w}_M$  утворює з прямою, що з'єднує точку  $M$  і точку  $Q$ , визначається на підставі формули (15.23) так:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{w_{MQ}^{ob}}{w_{MQ}^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Наведені міркування дають можливість знайти положення миттєвого центра прискорень і тим самим довести його існування.

#### Теорема існування миттєвого центра прискорень:

Нехай відомі прискорення  $\vec{w}_A$  однієї з точок  $A$  плоскої фігури, кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$ , причому  $\omega$  і  $\varepsilon$  одночасно не дорівнюють нулю, тобто рух непоступальний. Тоді миттєвий центр прискорень існує.

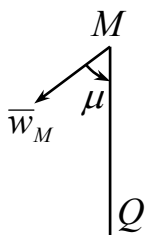


Рис. 15.18

*Доведення.* Знайдемо кут  $\mu$  із рівності:  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ . Через точку  $A$  проведемо промінь під кутом  $\mu$  до вектора  $\vec{w}_A$ , причому кут  $\mu$  відкладається проти годинникової стрілки, якщо  $\varepsilon = \dot{\varphi} > 0$ , і за годинниковою стрілкою, якщо  $\varepsilon = \dot{\varphi} < 0$ . На цьому промені мусить лежати миттєвий центр прискорень, якщо він існує. Щоб знайти положення миттєвого центра прискорень, обчислимо його віддаль від точки  $A$ , скориставшись формулою (15.25). З неї маємо:  $w_A = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ . Отже,

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (15.26)$$

Відкладемо від точки  $A$  вздовж променя відрізок  $AQ$  (рис. 15.19), довжина якого визначається формулою (15.26). Покажемо, що прискорення точки  $Q$  дорівнює нулю. Вибравши за полюс точку  $A$ , одержимо:

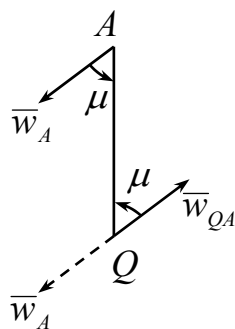


Рис. 15.19

$\vec{w}_Q = \vec{w}_A + \vec{w}_{QA}$ . З рис. 15.17 і формули (15.23) випливає, що кут між вектором  $\vec{w}_{QA}$  (прискоренням точки відносно полюса) і напрямком на полюс не залежить від вибору полюса. Отже, вектор  $\vec{w}_{QA}$  утворює з вектором  $\vec{QA}$  кут  $\mu$ . Такий же кут утворює і вектор  $\vec{w}_A$  з вектором  $\vec{AQ}$ . А тому вектори  $\vec{w}_A$  і  $\vec{w}_{QA}$  паралельні. Внаслідок прийнятого правила відліку кута  $\mu$  вектори  $\vec{w}_A$  і  $\vec{w}_{QA}$  направлені протилежно. Залишається встановити, що їхні модулі однакові. На підставі (15.22)

і (15.26) маємо:

$$w_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

А тому  $\vec{w}_Q = \vec{w}_A + \vec{w}_{QA} = 0$ , що й треба було довести.

Зауважимо, що *миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр прискорень, взагалі кажучи, – різні точки.* У цьому легко переконатись, розглянувши, наприклад, кочення колеса без ковзання так, що швидкість його центра  $\vec{V}_c$  постійна (коло рухається рівномірно і прямолінійно). У підрозділі 15.5 показано, що миттєвий центр швидкостей міститься в точці дотику. Оскільки  $\vec{V}_c = \text{const}$ , то  $\vec{w}_c = 0$ , тобто миттєвий центр прискорень міститься в центрі  $C$  колеса.

Миттєвий центр швидкостей та миттєвий центр прискорень збігаються, коли фігура (тіло) обертається навколо нерухомої осі.

**15.9. Траєкторії, швидкості та прискорення точок колеса, що котиться вздовж прямолінійної рейки**

Коли вагон рухається по рейках, точка колеса, що котиться без ковзання вздовж прямої лінії, описує циклоїду (рис. 15.20); точка реборди колеса ( $CM = d > R$ ) – подовжену циклоїду (рис. 15.21); внутрішня точка колеса ( $CM = d < R$ ) описує вкорочену циклоїду (рис. 15.22).

Вперше циклоїду побудував Галілео Галілей (1564-1642). Назва “циклоїда” означає “крива, що нагадує про круг”. Після смерті Галілея його учні Торрічеллі і Вівіані, які розділяли з ним гіркоту ув’язнення, зайнялись математичним дослідженням циклоїди. Вичерпний аналіз геометричних властивостей циклоїди був опублікований Б.Паскалем у 1659 р. У наступне сорокаріччя працями таких видатних учених, як Х.Гюйгенс, І.Ньютон, Г.В.Лейбніц, брати І.Бернуллі та Я.Бернуллі, були досліджені різноманітні механічні застосування циклоїди. Взагалі можна без перебільшення сказати, що в історії вищої математики і теоретичної механіки циклоїда відіграла винятково важливу роль.

Складемо рівняння циклоїди. Позначимо координати довільної точки  $M$  колеса через  $x$  та  $y$ . Нехай  $t$  – кут повороту колеса (рис. 15.23). Якщо коло котиться без ковзання, то  $OP = MP = Rt$ . Оскільки  $x = OA = OP - AP$ ,  $y = BP = CP - CB$ , то параметричні рівняння циклоїди мають вигляд:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad (15.27)$$

Виключивши параметр  $t$  з системи (15.27), одержимо рівняння циклоїди в декартових координатах:  $x = R \operatorname{Arccos} \frac{R-y}{R} - \sqrt{y(2R-y)}$ , звідки випливає, що

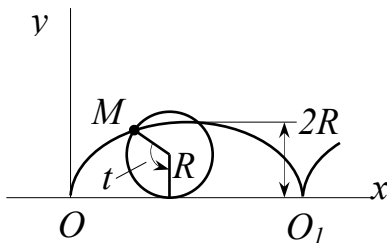


Рис. 15.20

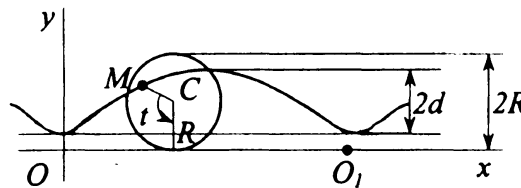


Рис. 15.22

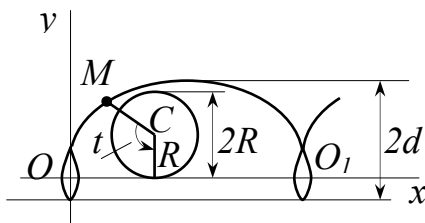


Рис. 15.21

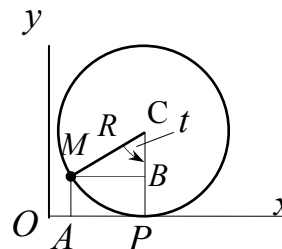


Рис. 15.23

циклоїда – трансцендентна крива. Оскільки функція  $y(t)$  є  $2\pi$ -періодичною ( $0 \leq y \leq 2R$ ), то циклоїда – періодична крива: її період (базис)  $OO_1 = 2\pi R$ .

Параметричні рівняння подовженої та вкороченої циклоїд є такими:

$$\begin{cases} x = Rt - d \sin t, \\ y = R - d \cos t, \end{cases}$$

де  $d$  – віддаль точки  $M$  від центра колеса.

Розв'яжемо кілька задач з кінематики залізничного колеса.

**Задача 1.** Колесо котиться без ковзання по прямолінійній рейці. Швидкість його центра  $C$  дорівнює  $\vec{V}_C$ . Знайти швидкість тієї точки  $M$  обода колеса, для якої кут  $\angle CKM = \alpha$  (рис. 15.24);  $CM = R$ .

*Розв'язування.* Як було зазначено в підрозділі 15.4, за полюс звичайно вибирають точку, швидкість якої відома. Отже, ним буде точка  $C$ . Тоді  $\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}$ ,  $\vec{V}_{MC} = \vec{\omega} \times \vec{CM}$ ,  $V_{MC} = \omega R$ . Значення  $\omega$  знайдемо з умови:  $\vec{V}_K = 0$ . Отже,

$$\vec{V}_K = \vec{V}_C + \vec{V}_{KC}, \quad \vec{V}_{KC} = \vec{\omega} \times \vec{CK}, \quad \vec{V}_{KC} = -\vec{V}_C, \quad V_{KC} = V_C = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{V_C}{R}.$$

Користуючись загальною формулою (15.5), можна записати:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_K + \vec{V}_{MK} = \vec{V}_{MK} = \vec{\omega} \times \vec{KM} \Rightarrow \vec{V}_M \perp \vec{KM}.$$

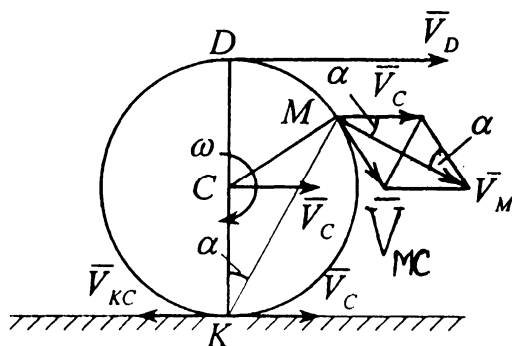


Рис. 15.24

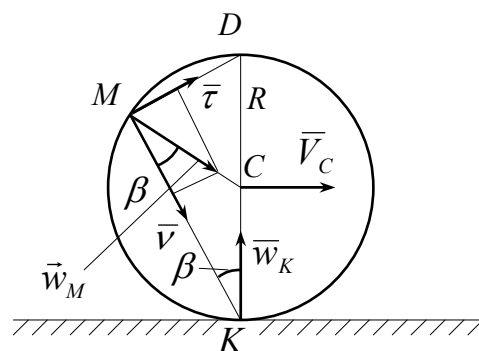


Рис. 15.25

Оскільки  $V_{MC} = V_C$ , то паралелограм, побудований на векторах  $\vec{V}_C$  і  $\vec{V}_{MC}$ , є ромбом. Залишається виразити модуль швидкості точки  $M$  через  $V_C$  та  $\alpha$ . Цього можна досягти кількома способами.

По-перше, величину  $V_M$  можна знайти за теоремою косинусів, розглянувши рівнобедрений трикутник з кутом  $\alpha$  при основі:

$$V_M^2 = V_C^2 + V_{MC}^2 - 2V_C V_{MC} \cos(\pi - 2\alpha) = 2V_C^2 + 2V_C^2 \cos 2\alpha = 4V_C^2 \cos^2 \alpha \Rightarrow V_M = 2V_C \cos \alpha.$$

По-друге, діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і діляться в точці перетину пополам, а тому з прямокутного трикутника, гіпотенузою якого є  $V_C$ , знаходимо катет, прилеглий до кута  $\alpha$ . Одержуємо наведений вище результат.

Найбільшу швидкість має верхня точка колеса:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_K + \vec{V}_{DK} = \vec{V}_{DK} = \vec{\omega} \times \vec{KD}, \quad V_D = 2R\omega = 2V_C.$$

**Задача 2.** Колесо котиться без ковзання вздовж прямолінійної рейки так, що швидкість його центра постійна:  $\vec{V}_C = \text{const}$ . Знайти прискорення точки  $M$  ободу колеса (рис. 15.25).

*Розв'язування.* За умовою задачі  $\vec{w}_C = 0$ , тобто точка  $C$  є миттєвим центром прискорень. Миттєвий центр швидкостей міститься в точці  $K$ , а тому

$$\vec{V}_C = \vec{V}_K + \vec{\omega} \times \vec{KC} = \vec{\omega} \times \vec{KC}, \quad V_C = \omega R.$$

Звідси  $\omega = \frac{V_C}{R} = \text{const}$ ,  $\varepsilon = 0$ . Неважко довести, що прискорення будь-якої точки на ободі колеса направлене до центра колеса. Щоб переконатись у цьому, можна скористатись формулою (15.21), прийнявши за полюс точку  $C$  замість точки  $M$ :  $\vec{w}_M = \vec{w}_C + \vec{w}_{MC}^{ob} + \vec{w}_{MC}^{oc}$ . В даному випадку

$$\vec{w}_C = 0, \quad \vec{w}_{MC}^{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{CM} = 0, \quad \vec{w}_{MC}^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{MC},$$

тобто

$$\vec{w}_M = \vec{w}_{MC}^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{MC}. \quad (15.28)$$

Вектор  $\vec{V}_{MC} = \vec{\omega} \times \vec{CM}$  направлений по дотичній до кола, а тому вектор  $\vec{\omega} \times \vec{V}_{MC}$  дійсно направлений від точки  $M$  до точки  $C$ . Вектор  $\vec{w}_K$  направлений від точки  $K$  до точки  $C$  і т. д.

Модуль вектора  $\vec{w}_M$  визначається формулою (15.25):

$$w_M = CM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = R\omega^2 = \frac{V_C^2}{R}.$$

Звісно, такий же вираз одержимо з (15.28):

$$V_{MC} = \omega R, \quad w_M = \omega V_{MC} \Rightarrow w_M = \omega^2 R.$$

Вектор  $\vec{w}_M$  на рис. 15.25 не є нормальним прискоренням точки  $M$ , оскільки миттєвий центр обертання колеса міститься не в точці  $C$ , а в точці  $K$ . Отже, нормаль до траєкторії точки  $M$  направлена вздовж  $MK$ , а дотична до траєкторії – вздовж  $MD$ . Сама траєкторія зображена на рис. 15.20.

Знайдемо дотичне і нормальне прискорення точки  $M$ . Нехай кут  $\angle MKD = \beta$ , тоді кут  $\angle MKC$  теж дорівнює  $\beta$ . Отже, розкладення вектора  $\vec{w}_M$  за натуральним базисом  $\vec{e}$  і  $\vec{v}$  має вигляд:  $\vec{w}_M = \vec{e} w_{M\tau} + \vec{v} w_{M\nu}$ , де

$$w_{M\tau} = w_M \sin \beta, \quad w_{M\nu} = w_M \cos \beta.$$

### Питання для самоконтролю

1. Чому плоскопаралельний рух твердого тіла зводиться до задачі про рух більш простих геометричних образів? Навести приклад конкретного тіла, що підтверджує загальні міркування.
2. Якими є основні кінематичні характеристики плоскопаралельного руху?
3. Як знайти траєкторії точок тіла при плоскопаралельному русі?
4. Якою є швидкість довільної точки тіла при плоскопаралельному русі?

5. Який рух називається миттєво поступальним? Де знаходиться миттєвий центр швидкостей в такому русі?
6. Як побудувати миттєвий центр швидкостей?
7. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром прискорень?
8. Що називають нерухомою центроїдою? рухомою центроїдою?
9. Як знайти прискорення довільної точки плоскої фігури при плоскопаралельному русі?
10. У якому випадку миттєвий центр швидкостей співпадає з миттєвим центром прискорень?
11. Якими є траєкторії точок колеса, що котиться вздовж прямолінійної рейки? Який вигляд має укорочена циклоїда? видовжена циклоїда?

## 16. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухокої точки

### 16.1. Незалежні параметри, що визначають рух тіла

Задача про обертання твердого тіла навколо нерухокої точки поставлена в 1749 р. Л. Ейлером у зв'язку з проблемою прецесії та нутації земної осі. Такий рух інколи називають сферичним, оскільки всі точки тіла рухаються по поверхнях сфер, спільний центр яких збігається з нерухомою точкою.

Сферичний рух здійснюють: 1) дзига, поставлена вістрям на горизонтальну площину і швидко закручена навколо своєї осі; кінець осі, що ним дзига опирається на нерухому площину, і є тією точкою, навколо якої обертається дзига; 2) будь-яке інше тіло, закріплене з нерухомою основою сферичним шарніром. Одна з важливих практичних реалізацій, що набула широкого розповсюдження в гіроскопічних приладах, – кардановий підвіс.

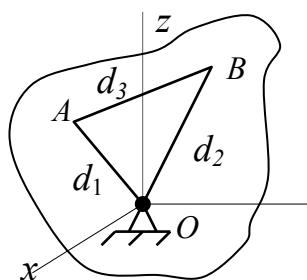


Рис. 16.1

Будемо говорити, що рух твердого тіла задано, якщо вказано спосіб визначення положення довільної його точки в будь-який момент часу. Вияснимо, перш за все, мінімальну кількість параметрів, що потрібні для цього.

У підрозділі 15.1 при вивченні плоскопаралельного руху твердого тіла було показано, що положення незмінюваної плоскої фігури в її площині цілком визначається положенням будь-якого її відрізка. Аналогічно можна показати, що у випадку твердого тіла з однією нерухомою точкою таку саму роль відіграє площина, що проходить через нерухому точку і незмінно зв'язана з тілом. Зупинятись на цьому немає потреби.

Нехай  $Oxyz$  – прямокутна система координат, що рухається разом з тілом (незмінно зв'язана з тілом). У цій системі три точки  $O$ ,  $A$  і  $B$ , що не лежать на одній прямій (рис. 16.1), мають координати:

$$O(0, 0, 0), \quad A(x_A, y_A, z_A), \quad B(x_B, y_B, z_B).$$

Оскільки віддалі між точками абсолютно твердого тіла не змінюються ( $d_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), то

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 &= d_1^2, & x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 &= d_2^2, \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 &= d_3^2. \end{aligned}$$

Шість декартових координат двох точок зв'язані трьома співвідношеннями, а тому незалежними серед цих шести величин є лише три.

Таким чином, рух твердого тіла з однією закріпленою точкою можна задати трьома параметрами. Використання з цією метою трьох декартових координат не є найкращим способом: замість декартових координат вживають кути Л. Ейлера.

### 16.2. Теорема Ейлера. Закон руху тіла

Довільне переміщення твердого тіла з однією закріпленою точкою можна здійснити трьома послідовними поворотами навколо трьох осей, що вибираються певним чином і проходять через нерухому точку.

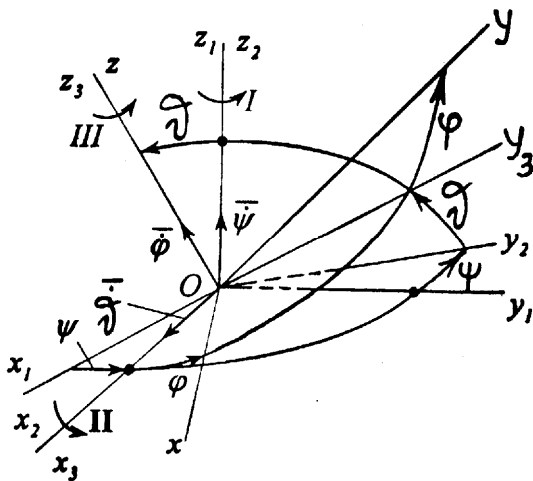


Рис. 16.2

**Доведення.** Нехай початкове положення тіла визначається системою координат  $Ox_1y_1z_1$  (рис. 16.2). Осі цієї системи далі умовимось вважати такими, що збігаються з осями “незмінного” напрямку (“нерухомими”).

Припустимо, що кінцеве положення тіла задане. Нехай  $Ox_2y_2z_2$  – прямокутна система координат, незмінно зв'язана з тілом. Положення системи  $Ox_2y_2z_2$  однозначно визначає положення тіла. Назвемо таке положення кінцевим. Як показав Л. Ейлер, перехід рухомого триєдра осей  $Ox_2y_2z_2$  з початкового положення в

кінцеве можна здійснити за допомогою трьох поворотів, що виконуються в певній послідовності навколо належним чином вибраних осей. При цьому керуються такими настановами.

**Перша настанова.** Призначаються основні осі: одна – нерухома, друга належить тілу. Вони можуть бути однойменними (на рис. 16.2 це  $Oz_1$  та  $Oz$ ) або різнойменними (наприклад,  $Oy_1$  та  $Ox$ ). Перпендикулярні до основних осей площини назвемо основними: це  $Ox_1y_1$  та  $Oxy$ . У них призначаються відрхункові осі:  $Ox_1$  та  $Ox$ .

**Друга настанова.** Вводиться до розгляду лінія перетину основних площин  $Ox_1y_1$  та  $Oxy$  – лінія вузлів  $Ox_2$ . Виберемо на лінії вузлів  $Ox_2$  додатний напрям так, щоб найкоротший поворот від осі  $Oz_1$  до осі  $Oz$  здійснювався б проти годинникової стрілки, якщо дивитись зі сторони додатного напрямку лінії вузлів.



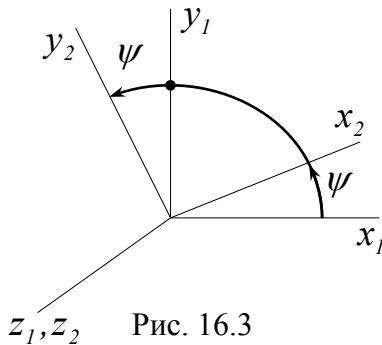


Рис. 16.3

Таблиця 16.1

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x_2$	$\cos \psi$	$\sin \psi$	0
$y_2$	$-\sin \psi$	$\cos \psi$	0
$z_2$	0	0	1

**Третя настанова.** Перший поворот на кут  $\psi \in [0, 2\pi]$  виконується навколо осі  $Oz_1$ . Після першого повороту вісь  $Ox$ , яка в початковий момент часу збігалася з віссю  $Ox_1$ , займе положення лінії вузлів  $Ox_2$ , а вісь  $Oy_1$  займе положення осі  $Oy_2$ .

Оскільки далі доведеться проектувати вектори на різні координатні базиси, то важливо мати формули переходу від одних координатних систем до інших. Найпростіше це робити, маючи косинуси кутів між координатними осями різних базисів. Зв'язок між першими двома координатними системами встановлюється на підставі рис. 16.3. У табл. 16.1 наведено косинуси кутів між відповідними координатними осями систем  $Ox_1y_1z_1$  та  $Ox_2y_2z_2$ , за допомогою якої одержуємо такі формули перетворення координат при повороті на кут  $\psi$ :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi, \\ y_2 = -x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi, \\ z_2 = z_1. \end{cases} \quad (16.1)$$

Формули оберненого перетворення координат (від нового базису до старого):

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \cos \psi - y_2 \sin \psi, \\ y_1 = x_2 \sin \psi + y_2 \cos \psi, \\ z_1 = z_2. \end{cases} \quad (16.2)$$

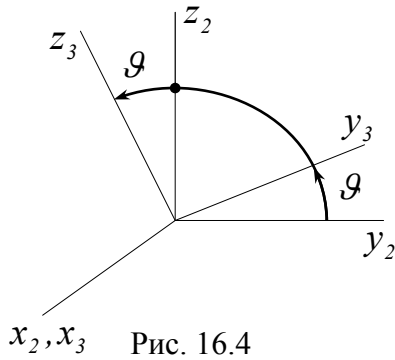
**Четверта настанова.** Другий поворот на кут  $\vartheta \in [0, \pi]$  виконується навколо осі  $Ox_2$ . Вектори  $\vec{j}_2$  та  $\vec{k}_2$ , перпендикулярні до неї, займуть положення  $\vec{j}_3$  та  $\vec{k}_3$ , причому останній визначає вісь  $Oz$  в її кінцевому положенні. На основі рис. 16.4 і табл. 16.2 знаходимо такі формули перетворення координат:

пряме перетворення

$$\begin{cases} x_3 = x_2, \\ y_3 = y_2 \cos \vartheta + z_2 \sin \vartheta, \\ z_3 = -y_2 \sin \vartheta + z_2 \cos \vartheta; \end{cases} \quad (16.3)$$

обернене перетворення

$$\begin{cases} x_2 = x_3, \\ y_2 = y_3 \cos \vartheta - z_3 \sin \vartheta, \\ z_2 = y_3 \sin \vartheta + z_3 \cos \vartheta. \end{cases} \quad (16.4)$$



Таблиця 16.2

$\downarrow \rightarrow$	$x_2$	$y_2$	$z_2$
$x_3$	1	0	0
$y_3$	0	$\cos \vartheta$	$\sin \vartheta$
$z_3$	0	$-\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$

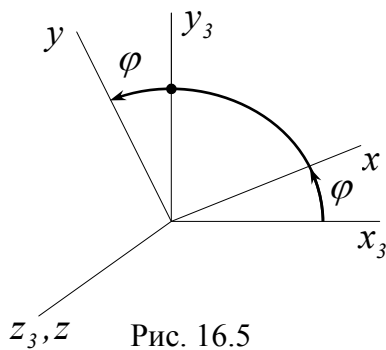
**П'ята настанова.** Третій поворот на кут  $\varphi \in [0, 2\pi]$  виконується навколо осі  $Oz_3$ . На основі рис. 16.5 і табл. 16.3 встановлюємо такі формули перетворення координат:

пряме перетворення

$$\begin{cases} x = x_3 \cos \varphi + y_3 \sin \varphi, \\ y = -x_3 \sin \varphi + y_3 \cos \varphi, \\ z = z_3; \end{cases} \quad (16.5)$$

обернене перетворення

$$\begin{cases} x_3 = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y_3 = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z_3 = z. \end{cases} \quad (16.6)$$



Таблиця 16.3

$\downarrow \rightarrow$	$x_3$	$y_3$	$z_3$
$x$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	0
$y$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
$z$	0	0	1

У результаті третього повороту осі рухомої системи координат займуть своє кінцеве, наперед задане положення. Теорема доведена.

Кути Ейлера мають такі, взяті з небесної механіки, назви:  $\psi$  – кут прецесії,  $\vartheta$  – кут нутації,  $\varphi$  – кут чистого (власного) обертання.

Кожному моменту часу відповідає певне положення тіла і певні значення кутів Ейлера. Щоб знати рух тіла, потрібно знати його положення відносно осей системи  $Ox_1y_1z_1$  в будь-який момент часу, тобто знати залежності

$$\psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (16.7)$$

Вони визначають закон руху тіла.

### 16.3. Застосування векторно-матричної алгебри до знаходження напрямних косинусів

Позначимо

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad A_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\psi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді пряме перетворення (16.1) і обернене перетворення (16.2) можна записати так:

$$X_2 = A_\psi X_1, \quad X_1 = A_\psi^{-1} X_2. \quad (16.9)$$

Тут  $A_\psi$  є матрицею повороту на кут  $\psi$ ,  $A_\psi^{-1}$  – обернена матриця. Поворот належить до ортогональних лінійних перетворень, а тому  $|A_\psi| = |A_\psi^{-1}| = 1$ .

Якщо позначити

$$X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad A_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad A_\vartheta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (16.10)$$

то формули прямого перетворення координат (16.3) і оберненого перетворення координат (16.4) при повороті на кут  $\vartheta$  набувають вигляду:

$$X_3 = A_\vartheta X_2, \quad X_2 = A_\vartheta^{-1} X_3. \quad (16.11)$$

Знайдемо косинуси кутів між осями системи координат  $Ox_1y_1z_1$  і  $Ox_3y_3z_3$ , скориставшись векторно-матричними рівняннями (16.9) і (16.11):

$$X_3 = A_\vartheta (A_\psi X_1) = (A_\vartheta A_\psi) X_1 = A_\vartheta A_\psi X_1. \quad (16.12)$$

Звідси

$$X_1 = (A_\vartheta A_\psi)^{-1} X_3 = A_\psi^{-1} A_\vartheta^{-1} X_3. \quad (16.13)$$

Помноживши матрицю  $A_\vartheta$  на матрицю  $A_\psi$ , одержимо

$$A_\vartheta A_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (16.14)$$

Запишемо векторну рівність (16.12) в розгорнутому вигляді, скориставшись виразом (16.14):

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} x_3 = x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi, \\ y_3 = -x_1 \cos \vartheta \sin \psi + y_1 \cos \vartheta \cos \psi + z_1 \sin \vartheta, \\ z_3 = x_1 \sin \vartheta \sin \psi - y_1 \sin \vartheta \cos \psi + z_1 \cos \vartheta. \end{cases} \quad (16.15)$$

На підставі (16.15) таблицю косинусів кутів між осями систем  $Ox_1y_1z_1$  і  $Ox_3y_3z_3$  можна подати у вигляді табл. 16.4.

Таблиця 16.4

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x_3$	$\cos \psi$	$\sin \psi$	$0$
$y_3$	$-\cos \vartheta \sin \psi$	$\cos \vartheta \cos \psi$	$\sin \vartheta$
$z_3$	$\sin \vartheta \sin \psi$	$-\sin \vartheta \cos \psi$	$\cos \vartheta$

Матрицю повороту на кут  $\varphi$  позначимо  $A_\varphi$  і введемо вектор  $X$ :

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (16.16)$$

Пряме і обернене перетворення (16.5) і (16.6) можна записати у вигляді таких векторно-матричних рівнянь:

$$X = A_\varphi X_3, \quad X_3 = A_\varphi^{-1} X. \quad (16.17)$$

Тепер, нарешті, можна знайти зв'язок між “старими” і “новими” координатами точки тіла, тобто між її координатами в початковій системі координат  $Ox_1y_1z_1$  і в кінцевій системі координат  $Oxyz$ . Для цього досить підставити (16.12) в перше рівняння (16.17):

$$X = A_\varphi (A_\vartheta A_\psi X_1) = (A_\varphi A_\vartheta A_\psi) X_1 = A_\varphi A_\vartheta A_\psi X_1,$$

або підставити друге рівняння (16.17) в (16.13):

$$X_1 = A_\psi^{-1} A_\vartheta^{-1} (A_\varphi^{-1} X) = A_\psi^{-1} A_\vartheta^{-1} A_\varphi^{-1} X = (A_\varphi A_\vartheta A_\psi)^{-1} X.$$

Щоб знайти матрицю  $A_\varphi A_\vartheta A_\psi$ , можна, наприклад, помножити матрицю  $A_\varphi$ , що дається виразом (16.16), на матрицю  $A_\vartheta A_\psi$ , що дається виразом (16.14). Одержимо:

$$A_\varphi A_g A_\psi = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\mathcal{G}\sin\psi, & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\mathcal{G}\cos\psi, & \sin\varphi\sin\mathcal{G} \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\mathcal{G}\sin\psi, & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\mathcal{G}\cos\psi, & \cos\varphi\sin\mathcal{G} \\ \sin\mathcal{G}\sin\psi, & -\sin\mathcal{G}\cos\psi, & \cos\mathcal{G} \end{vmatrix}. \quad (16.18)$$

Оскільки всі матриці  $A_\psi$ ,  $A_g$  і  $A_\varphi$  є ортогональними, то обернена матриця дорівнює транспонованій матриці:

$$(A_\varphi A_g A_\psi)^{-1} = (A_\varphi A_g A_\psi)'$$

Підставивши у векторну рівність (16.18) значення (16.16) і (16.8) векторів  $X$  та  $X_I$  і спроектувавши обидві частини векторної рівності на координатні осі, дістанемо такий скалярний еквівалент її:

$$\begin{cases} x = x_1(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\mathcal{G}\sin\psi) + \\ \quad + y_1(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\mathcal{G}\cos\psi) + z_1\sin\varphi\sin\mathcal{G}, \\ y = x_1(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\mathcal{G}\sin\psi) + \\ \quad + y_1(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\mathcal{G}\cos\psi) + z_1\cos\varphi\sin\mathcal{G}, \\ z = x_1\sin\mathcal{G}\sin\psi - y_1\sin\mathcal{G}\cos\psi + z_1\cos\mathcal{G}. \end{cases} \quad (16.19)$$

На підставі формул (16.19) можна скласти таблицю косинусів кутів між координатними осями початкової та кінцевої систем координат (табл. 16.5).

Таблиця 16.5

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x$	$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\mathcal{G}\sin\psi$	$\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\mathcal{G}\cos\psi$	$\sin\varphi\sin\mathcal{G}$
$y$	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\mathcal{G}\sin\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\mathcal{G}\cos\psi$	$\cos\varphi\sin\mathcal{G}$
$z$	$\sin\mathcal{G}\sin\psi$	$-\sin\mathcal{G}\cos\psi$	$\cos\mathcal{G}$

Якщо назвати перехід від системи  $Ox_1y_1z_1$  до системи  $Oxyz$ , який визначається формулами (16.19), прямим перетворенням, то формули оберненого перетворення легко можна виписати на підставі табл. 16.5.

**Примітка.** Поворот системи координат на певний кут є частинним випадком лінійних перетворень. Нехай, наприклад, вектор  $x$  перетворюється на вектор  $y$  за допомогою матриці  $B$ :

$$x \xrightarrow{B} y, \quad y = Bx,$$

а матриця  $A$  перетворює вектор  $y$  на вектор  $z$ :

$$y \xrightarrow{A} z, \quad z = Ay.$$

Тоді

$$z = A(Bx) = (AB)x, \quad x \xrightarrow{AB} z.$$

Перетворення  $x \rightarrow z$  називається добутком двох даних перетворень  $x \rightarrow y$  та  $y \rightarrow z$ . Добуток двох перетворень – це послідовне їх застосування. Воно здійснюється матрицею, що зветься добутком складових перетворень:  $z = ABx$ .

Якщо  $A$  є матрицею повороту правої декартової системи координат також у праву декартову систему координат, то  $\det A = 1$  (власне обертання); якщо ж права система координат перетворюється на ліву, то  $\det = -1$  (невласне обертання).

#### 16.4. Безпосереднє знаходження напрямних косинусів

У часи Л.Ейлера ні векторного, ні матричного апарату, звісна річ, не існувало; отже, його використання зумовлюється не необхідністю, а зручністю і придатністю для більш широких цілей.

Покажемо, наприклад, як можна дістати табл. 16.4 без використання матричного апарату. Будемо позначати орти осей  $Ox_1$ ,  $Oy_1$  і  $Oz_1$  через  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{j}_1$  і  $\vec{k}_1$  відповідно; орти осей  $Ox_2$ ,  $Oy_2$  і  $Oz_2$  – через  $\vec{i}_2$ ,  $\vec{j}_2$ ,  $\vec{k}_2$ ; і т.д.

На підставі табл. 16.2 можна розкласти орти  $\vec{i}_3$ ,  $\vec{j}_3$  і  $\vec{k}_3$  за базисом  $\vec{i}_2$ ,  $\vec{j}_2$ ,  $\vec{k}_2$ ; коефіцієнтами є напрямні косинуси:

$$\vec{i}_3 = \vec{i}_2, \quad \vec{j}_3 = \vec{j}_2 \cos \vartheta + \vec{k}_2 \sin \vartheta, \quad \vec{k}_3 = -\vec{j}_2 \sin \vartheta + \vec{k}_2 \cos \vartheta. \quad (16.20)$$

Табл. 16.1 дає змогу виразити орти  $\vec{i}_2$ ,  $\vec{j}_2$ ,  $\vec{k}_2$  через орти  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{k}_1$ :

$$\vec{i}_2 = \vec{i}_1 \cos \psi + \vec{j}_1 \sin \psi, \quad \vec{j}_2 = -\vec{i}_1 \sin \psi + \vec{j}_1 \cos \psi, \quad \vec{k}_2 = \vec{k}_1. \quad (16.21)$$

Підставивши (16.21) в (16.20), одержимо:

$$\begin{cases} \vec{i}_3 = \vec{i}_1 \cos \psi + \vec{j}_1 \sin \psi, \\ \vec{j}_3 = -\vec{i}_1 \sin \psi \cos \vartheta + \vec{j}_1 \cos \psi \cos \vartheta + \vec{k}_1 \sin \vartheta, \\ \vec{k}_3 = \vec{i}_1 \sin \psi \sin \vartheta - \vec{j}_1 \cos \psi \sin \vartheta + \vec{k}_1 \cos \vartheta. \end{cases} \quad (16.22)$$

Порівняння дев'яти напрямних косинусів у виразах (16.22) з табл. 16.4 свідчить про їх повну відповідність. Ці дев'ять величин, розташованих у певному порядку, утворюють матрицю (16.14). Якщо замість ортів у рівняннях (16.22) поставити відповідні координати, одержимо рівняння (16.15).

Отже, обидва підходи (і векторно-матричний, і координатний) приводять до одного й того самого результату.

Наведений спосіб одержання формул (16.15) показує, що коефіцієнти при координатах  $x_1$ ,  $y_1$  і  $z_1$  у правих частинах рівнянь (16.15) будуються за такою схемою:

$$\begin{aligned}\cos(x_3, x_1) &= \cos(x_3, x_2)\cos(x_2, x_1) + \cos(x_3, y_2)\cos(y_2, x_1) + \cos(x_3, z_2)\cos(z_2, x_1), \\ \cos(y_3, x_1) &= \cos(y_3, x_2)\cos(x_2, x_1) + \cos(y_3, y_2)\cos(y_2, x_1) + \cos(y_3, z_2)\cos(z_2, x_1)\end{aligned}$$

і т. д. (всього дев'ять подібних формул).

Таким чином, існує просте мнемонічне правило (мнемоніка – наука про запам'ятовування) для складання табл. 16.4: щоб знайти, наприклад,  $\cos(y_3, x_1)$ , потрібно в табл. 16.2  $y_3$  – рядок перемножити на  $x_1$  – стовпчик табл. 16.1. Це правило використовується на практиці найчастіше.

### 16.5. Вектор кутової швидкості тіла

У теоремі Ейлера (16.2) перший поворот тіла відбувався з кутовою швидкістю  $\dot{\psi}$ , другий – зі швидкістю  $\dot{\vartheta}$ , третій – зі швидкістю  $\dot{\varphi}$  (рис. 16.2). Залучивши теорію так званих малих поворотів тіла, логічно припустити, що вектором кутової швидкості тіла є сума векторів цих кутових швидкостей:

$$\vec{\omega} = \vec{k}_1\dot{\psi} + \vec{i}_2\dot{\vartheta} + \vec{k}\dot{\varphi}. \quad (16.23)$$

Оскільки вектори кутових швидкостей є ковзними векторами, то правило паралелограма для їх додавання можна застосовувати лише тоді, коли відповідні їм миттєві осі обертання (див. далі підрозділ 16.7) перетинаються. У теорії складного руху твердого тіла доводиться теорема про те, що сукупність кількох обертань, що відбуваються навколо осей, які перетинаються, еквівалентна одному обертанню, що відбувається з миттєвою кутовою швидкістю, яка дорівнює сумі кутових швидкостей складових обертань (підрозділ 19.3).

Ми обмежимося “інтуїтивною очевидністю” векторної рівності (16.23).

Спроекуємо введений вектор  $\vec{\omega}$  на осі нерухомої та рухомої систем координат:

$$\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_{x_1} + \vec{j}_1\omega_{y_1} + \vec{k}_1\omega_{z_1}, \quad (16.24)$$

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z. \quad (16.25)$$

З (16.23) на підставі (16.22) маємо:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} = \vec{k}_1\dot{\psi} + \vec{i}_3\dot{\vartheta} + \vec{k}_3\dot{\varphi} &= \vec{k}_1\dot{\psi} + \dot{\vartheta}(\vec{i}_1\cos\psi + \vec{j}_1\sin\psi) + \dot{\varphi}(\vec{i}_1\sin\psi\sin\vartheta - \vec{j}_1\cos\psi\sin\vartheta + \vec{k}_1\cos\vartheta) = \\ &= \vec{i}_1(\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta) + \vec{j}_1(\dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta) + \vec{k}_1(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta),\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta, \\ \omega_{y_1} = \dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta, \\ \omega_{z_1} = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta. \end{cases} \quad (16.26)$$

Перейдемо в (16.23) до рухомого базису. Використавши табл. 16.2 і 16.3, вираз (16.23) перетворимо так:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} = \vec{k}_2\dot{\psi} + \vec{i}_3\dot{\vartheta} + \vec{k}\dot{\varphi} &= (\vec{j}_3\sin\vartheta + \vec{k}_3\cos\vartheta)\dot{\psi} + \vec{i}_3\dot{\vartheta} + \vec{k}\dot{\varphi} = (\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi)\dot{\psi}\sin\vartheta + \vec{k}\dot{\psi}\cos\vartheta + \\ &+ (\vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi)\dot{\vartheta} + \vec{k}\dot{\varphi} = \vec{i}(\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi) + \vec{j}(\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi) + \vec{k}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta).\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta. \end{cases} \quad (16.27)$$

Звісно, вирази (16.26) і (16.27) можна знайти безпосереднім проектуванням векторів  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{i}_2$  та  $\vec{k}$  на осі системи  $Ox_1y_1z_1$  і  $Oxyz$ . Ці проекції дорівнюють косинусам кутів між відповідними координатними осями, а тому з виразу (16.23) одержуємо:

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\psi} \cos(z_1, x_1) + \dot{\vartheta} \cos(x_2, x_1) + \dot{\varphi} \cos(z, x_1), \\ \omega_{y_1} = \dot{\psi} \cos(z_1, y_1) + \dot{\vartheta} \cos(x_2, y_1) + \dot{\varphi} \cos(z, y_1), \\ \omega_{z_1} = \dot{\psi} \cos(z_1, z_1) + \dot{\vartheta} \cos(x_2, z_1) + \dot{\varphi} \cos(z, z_1); \end{cases} \quad (16.28)$$

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \cos(z_1, x) + \dot{\vartheta} \cos(x_2, x) + \dot{\varphi} \cos(z, x), \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos(z_1, y) + \dot{\vartheta} \cos(x_2, y) + \dot{\varphi} \cos(z, y), \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos(z_1, z) + \dot{\vartheta} \cos(x_2, z) + \dot{\varphi} \cos(z, z). \end{cases} \quad (16.29)$$

Косинуси кутів між різними координатними осями у виразах (16.28) і (16.29) знаходимо на підставі табл. 16.1 – 16.4. Табл. 16.5 можна використати для додаткової перевірки правильності результатів, враховуючи ту обставину, що вирази (16.28) і (16.29) мають взаємно узгоджуватись.

Корисно також нагадати, що кожний рядок або кожний стовпчик у наведених таблицях являють собою координати (напрямні косинуси) ортів одного базису в іншому. Оскільки

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad (16.30)$$

то суми квадратів величин в якому завгодно рядку або стовпчику будь-якої з таблиць мусять дорівнювати одиниці, а суми попарних добутків величин одного рядка або стовпчика на відповідні величини паралельного рядка або стовпчика мають дорівнювати нулеві. Цю властивість напрямних косинусів можна використовувати для додаткової перевірки правильності складання таблиць.

Зауважимо, нарешті, що дев'ять косинусів кутів у кожній системі (16.28) і (16.29) пов'язані між собою шістьма співвідношеннями (16.30). Отже, незалежними серед цих дев'яти величин є лише три.

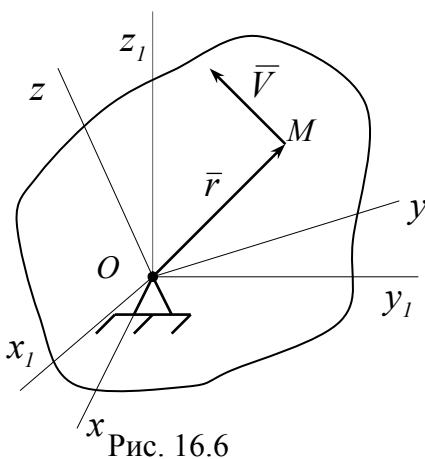


Рис. 16.6



### 16.6. Швидкості точок тіла

Нехай довільна точка  $M$  тіла в системі координат, незмінно зв'язаній з рухомим тілом, має координати  $x, y$  і  $z$ . Розкладемо радіус-вектор точки  $M(x, y, z)$  за базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (16.31)$$

Оскільки віддалі між точками абсолютно твердого тіла не змінюються, то  $\vec{r}^2 = \text{const}$ . Звідси після диференціювання за часом одержуємо:  $2\vec{r} \cdot \vec{V} = 0$ , тобто  $\vec{V} \perp \vec{r}$  (рис.16.6).

У правій частині рівності (16.31) функціями часу є лише орти (при обертанні тіла навколо точки  $O$  змінюються напрями ортів), тому для швидкості точки  $M$  маємо:

$$\vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z = \frac{d\vec{r}}{dt} = x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (16.32)$$

Скалярно перемножимо величини в (16.32) спочатку на  $\vec{i}$ , потім – на  $\vec{j}$ , далі – на  $\vec{k}$ :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \vec{i} &= V_x = x \left( \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{i} \right) + y \left( \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{i} \right) + z \left( \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i} \right), \\ \vec{V} \cdot \vec{j} &= V_y = x \left( \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} \right) + y \left( \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{j} \right) + z \left( \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{j} \right), \\ \vec{V} \cdot \vec{k} &= V_z = x \left( \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{k} \right) + y \left( \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} \right) + z \left( \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{k} \right). \end{aligned} \quad (16.33)$$

З рівностей (16.30) диференціюванням знаходимо:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{j} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} + \vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = 0, \\ \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} + \vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i} + \vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (16.34)$$

Введемо позначення:

$$\omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k}, \quad \omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i}, \quad \omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j}. \quad (16.35)$$

Тоді з останніх трьох рівностей (16.34) одержимо:

$$\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = -\omega_x, \quad \vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = -\omega_y, \quad \vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = -\omega_z. \quad (16.36)$$

На підставі перших трьох рівностей (16.34), а також рівностей (16.35) і (16.36) вирази (16.33) для проекцій вектора швидкості точки набувають вигляду:

$$\begin{cases} V_x = \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y = \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z = \omega_x y - \omega_y x. \end{cases} \quad (16.37)$$

Вираз (16.32) для швидкості точки стає таким:

$$\vec{V} = \vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x).$$

Якщо тепер ввести вектор  $\vec{\omega}$  з проєкціями  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ :

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z,$$

то для швидкості точки тіла в сферичному русі дістаємо *формулу Ейлера*:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad (16.38)$$

Важливо відмітити, що вектор  $\vec{\omega}$ , введений тут формально, є саме тим вектором (16.23), який у підрозділі 16.5 був названий вектором кутової швидкості тіла.

### 16.7. Миттєва вісь обертання. Сенс вектора кутової швидкості тіла

На підставі формули (16.38) геометричне місце точок, швидкості яких в даний момент часу дорівнюють нулю, визначається рівнянням:  $\vec{\omega} \times \vec{r} = 0$ . З нього випливає, що вектори  $\vec{r}$  та  $\vec{\omega}$  колінеарні ( $\vec{r} = \lambda \vec{\omega}$ ), тобто їх однойменні координати пропорційні:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (16.39)$$

Порівнявши рівняння (16.39) з канонічними рівняннями прямої у просторі

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

приходимо до висновку, що рівняння (16.39) визначають пряму лінію, яка проходить через точку  $O(0,0,0)$ ; напрямні косинуси цієї прямої такі:

$$l = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad m = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad n = \frac{\omega_z}{\omega}, \quad \text{тобто пропорційні координатам вектора } \vec{\omega}.$$

*Означення.* Пряма лінія, в кожній точці якої швидкості точок тіла в даний момент часу дорівнюють нулеві, називається **миттєвою віссю обертання** або **миттєвою віссю швидкостей**. У загальному випадку положення миттєвої осі обертання змінюється як відносно тіла, так і відносно нерухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$ . Вектор  $\vec{\omega}$  кутової швидкості тіла направлений вздовж миттєвої осі обертання  $OA$  (рис. 16.7).

Швидкість будь-якої точки  $M$  тіла з однією закріпленою точкою визначається формулою (16.38), форма якої така ж, як і формул (14.9) для швидкостей точок твердого тіла, що обертаються навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Таким чином, швидкості точок твердого тіла з однією нерухомою точкою розподіляються так, наче тіло обертається навколо осі, що

збігається в даний момент часу з миттєвою віссю обертання. Зокрема, модуль швидкості визначається формулою

$$V = \omega r \sin(\hat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = \omega \rho,$$

де  $\rho$  – віддаль від точки  $M$  до миттєвої осі обертання (рис. 16.7). Швидкість точки  $M$  направлена перпендикулярно площині, що проходить через її радіус-вектор  $\vec{r}$  і миттєву вісь обертання.

За аналогією з обертанням тіла навколо нерухої осі вектор  $\vec{\omega}$  у випадку сферичного руху тіла назвемо **вектором кутової швидкості**. Слід мати на увазі, що при обертанні тіла навколо нерухої осі вектор  $\vec{\omega}$  кутової швидкості являє собою вектор, завжди направлений вздовж нерухої осі обертання (рис. 14.1 та 14.4) і характеризує зміну в часі реального кута  $\varphi$  повороту тіла (див. рівність (14.2)).

Для тіла з однією нерухою точкою вектор  $\vec{\omega}$  направлений вздовж миттєвої осі обертання (див. рис. 16.7) і може бути прикладений в будь-якій її точці (ковзний вектор), зокрема в точці  $O$ , спільній для всіх миттєвих осей. При

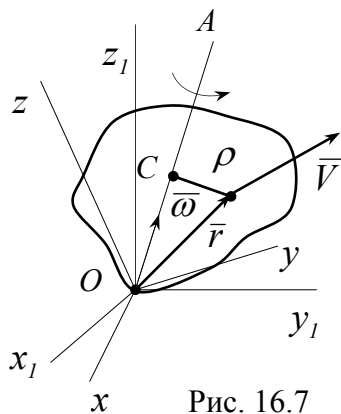


Рис. 16.7

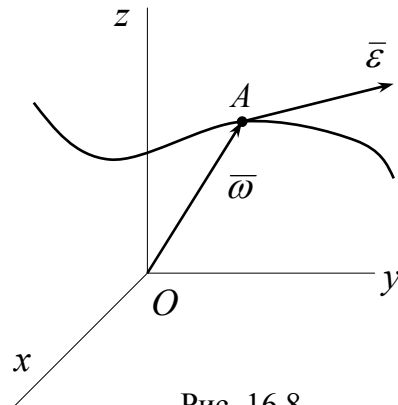
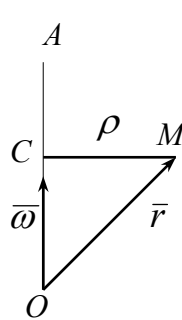


Рис. 16.8

сферичному русі вираз “кутова швидкість” має умовний зміст, оскільки положення тіла визначається не одним, а трьома кутами  $\psi$ ,  $\vartheta$  і  $\varphi$ . Немає такого одного кута, швидкість зміни якого була б рівна  $|\vec{\omega}|$ . Іншими словами, кут нескінченно малого повороту тіла не є диференціалом певної величини.

При русі тіла вектор  $\vec{\omega}$  в загальному випадку змінюється з часом як за модулем, так і за напрямом, тобто є векторною функцією часу:  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ . Проекції цього вектора на координатні осі є функціями кутів Ейлера та їх похідних (див. формули (16.26) і (16.27)). В аналітичній механіці величини, подібні до  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , називаються *квазішвидкостями*.

### 16.8. Вектор кутового прискорення тіла

Вектор кутового прискорення тіла визначимо як бистроту зміни вектора  $\vec{\omega}$  кутової швидкості тіла:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (16.40)$$

Вектор  $\vec{\varepsilon}$  направлений по дотичній до годографа вектора  $\vec{\omega}$  (рис. 16.8). Отже, при сферичному русі тіла, на відміну від обертання тіла навколо нерухомої осі, напрям вектора кутового прискорення не збігається з напрямом вектора  $\vec{\omega}$ .

Використаємо спочатку вираз (16.24) для  $\vec{\omega}$ , тобто розкладемо вектор кутової швидкості тіла за нерухомим базисом. Тоді

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\vec{i}_1\omega_{x_1} + \vec{j}_1\omega_{y_1} + \vec{k}_1\omega_{z_1}).$$

Оскільки  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  – постійні вектори, то

$$\vec{\varepsilon} = \vec{i}_1\dot{\omega}_{x_1} + \vec{j}_1\dot{\omega}_{y_1} + \vec{k}_1\dot{\omega}_{z_1} = \vec{i}_1\varepsilon_{x_1} + \vec{j}_1\varepsilon_{y_1} + \vec{k}_1\varepsilon_{z_1}.$$

Тут

$$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1}, \quad \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1}, \quad \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1} \quad (16.41)$$

є проєкціями вектора кутового прискорення на осі нерухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$ . З формул (16.41) випливають рівності:

$$np_{x_1}\vec{\varepsilon} = np_{x_1}\frac{d\omega_{x_1}}{dt} = \frac{d\omega_{x_1}}{dt} = \frac{d}{dt}np_{x_1}\vec{\omega}, \dots, \quad (16.42)$$

тобто при використанні нерухомого базису операції проектування і диференціювання перестановочні (комутативні).

Тепер використаємо вираз (16.25) для  $\vec{\omega}$ , тобто розкладемо вектор кутової швидкості тіла за рухомим базисом. Тоді

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z). \quad (16.43)$$

Модулі векторів  $\vec{i}, \vec{j}$  та  $\vec{k}$  постійні (дорівнюють одиниці), але напрями змінюються. Здавалося б, що формули, подібні до (16.42), у цьому випадку не мають місця. Покажемо, все-таки, що структура формул (16.41) зберігається і при використанні рухомого базису.

На підставі формули (16.38) праву частину рівності (16.43) можна перетворити так:

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \vec{i}\dot{\omega}_x + \vec{j}\dot{\omega}_y + \vec{k}\dot{\omega}_z + \omega_x \frac{d\vec{i}}{dt} + \omega_y \frac{d\vec{j}}{dt} + \omega_z \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{i}\dot{\omega}_x + \vec{j}\dot{\omega}_y + \vec{k}\dot{\omega}_z + \omega_x(\vec{\omega} \times \vec{i}) + \\ &+ \omega_y(\vec{\omega} \times \vec{j}) + \omega_z(\vec{\omega} \times \vec{k}) = \vec{i}\dot{\omega}_x + \vec{j}\dot{\omega}_y + \vec{k}\dot{\omega}_z + \vec{\omega} \times (\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z) = \vec{i}\dot{\omega}_x + \vec{j}\dot{\omega}_y + \\ &+ \vec{k}\dot{\omega}_z + \vec{\omega} \times \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$ , то

$$\vec{\varepsilon} = \vec{i}\dot{\omega}_x + \vec{j}\dot{\omega}_y + \vec{k}\dot{\omega}_z = \vec{i}\varepsilon_x + \vec{j}\varepsilon_y + \vec{k}\varepsilon_z.$$

Отже, і при використанні рухомого базису справедливі формули типу (16.41):

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z. \quad (16.44)$$

## 16.9. Прискорення точок тіла

На основі формул (12.16) і (16.38) маємо:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (16.45)$$

Вираз (16.45) для прискорення точки  $M$  тіла, що обертається навколо нерухомої точки  $O$ , формально такий же, як і вираз (14.11) для прискорення точки  $M$  тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $C$ , однак, і суттєві відмінності, зумовлені тим, що напрями векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{\varepsilon}$  при сферичному русі тіла не збігаються (рис. 16.8).

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі вектор  $\vec{w}_{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  (див. формулу (14.12)) направлений по дотичній до траєкторії в сторону руху точки, тобто вектори  $\vec{V}$  і  $\vec{w}_{ob}$  колінеарні (рис. 14.7), і тому вектор  $\vec{w}_{ob}$  є дотичним прискоренням точки тіла.

У випадку ж обертання тіла навколо нерухомої точки вектор  $\vec{w}_{ob}$  може бути направлений під будь-яким кутом до вектора  $\vec{V}$ , тобто він не є взагалі вектором

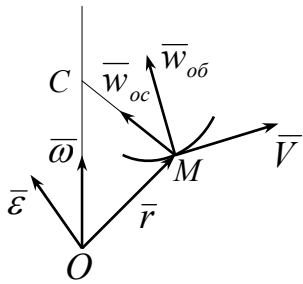


Рис. 16.9

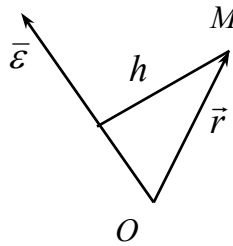
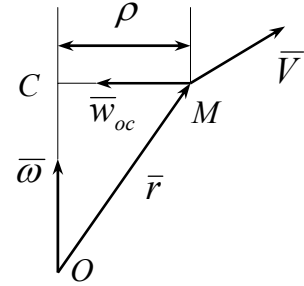


Рис. 16.10



дотичного прискорення точки  $M$  (рис. 16.9).

Оскільки вектор  $\vec{w}_{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}$  направлений (як і у випадку обертання тіла навколо нерухомої осі) до миттєвої осі обертання (вздовж миттєвого радіусу обертання), то він називається *доосьовою складовою прискорення*. Внаслідок цього вектор  $\vec{w}_{ob}$  можна назвати *обертальною складовою прискорення*. Прискорення миттєвого обертального руху тіла є сумою цих двох прискорень:

$$\vec{w} = \vec{w}_{ob} + \vec{w}_{oc}, \quad \vec{w}_{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{w}_{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (16.46)$$

Вектор  $\vec{w}_{oc}$  не буде взагалі нормальним прискоренням точки  $M$  через те, що вектор  $\vec{w}_{ob}$  не є взагалі дотичним прискоренням.

Знайдемо модулі введених складових прискорення на основі формул (16.46) і рис. 16.10:

$$\vec{w}_{ob} = \varepsilon r \sin(\hat{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon h, \quad h = r \sin(\hat{\varepsilon}, \vec{r}), \quad w_{oc} = \omega V,$$

$$V = \omega r \sin(\hat{\omega}, \vec{r}) = \omega \rho, \quad \rho = r \sin(\hat{\omega}, \vec{r}), \quad w_{oc} = \omega^2 \rho = \omega^2 \cdot CM.$$

Тут  $h$  – віддаль від точки  $M$  до вектора  $\vec{\varepsilon}$ .

Вираз (16.46) для осьового прискорення можна подати в розгорнутому вигляді, якщо підставити замість швидкості  $\vec{V}$  її значення (16.38) і розкрити подвійний векторний добуток:

$$\begin{aligned} \vec{w}_{oc} &= \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 = \vec{\omega} \omega r \cos(\hat{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 = \vec{\omega} \omega \cdot OC - \vec{r}\omega^2 = \\ &= \omega^2 \vec{i}_\omega \cdot OC - \omega^2 \vec{r} = \omega^2 (\vec{OC} - \vec{OM}) = \omega^2 \cdot \vec{MC}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}. \quad (16.47)$$

Взявши до уваги координатні вирази для векторного і скалярного добутків:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \varepsilon_{x_1} & \varepsilon_{y_1} & \varepsilon_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \vec{i}_1(\varepsilon_{y_1} z_1 - \varepsilon_{z_1} y_1) + \vec{j}_1(\varepsilon_{z_1} x_1 - \varepsilon_{x_1} z_1) + \vec{k}_1(\varepsilon_{x_1} y_1 - \varepsilon_{y_1} x_1),$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1,$$

спроєкуємо обидві частини рівності (16.47) на осі нерухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$ :

$$\begin{aligned} w_{x_1} &= \varepsilon_{y_1} z_1 - \varepsilon_{z_1} y_1 + \omega_{x_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 x_1, \\ w_{y_1} &= \varepsilon_{z_1} x_1 - \varepsilon_{x_1} z_1 + \omega_{y_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 y_1, \\ w_{z_1} &= \varepsilon_{x_1} y_1 - \varepsilon_{y_1} x_1 + \omega_{z_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 z_1. \end{aligned} \quad (16.48)$$

Проекції вектора  $\vec{w}$  на нерухомі осі виражаються формулами (16.26) і є лінійними комбінаціями похідних кутів Ейлера. Величини  $\varepsilon_{x_1}$ ,  $\varepsilon_{y_1}$  і  $\varepsilon_{z_1}$  зв'язані з величинами  $\omega_{x_1}$ ,  $\omega_{y_1}$  і  $\omega_{z_1}$  співвідношеннями (16.41), і тому праві частини у формулах (16.48) є лінійними функціями других похідних кутів Ейлера.

Частіше приходиться шукати проекції вектора  $\vec{w}$  на осі рухомої системи координат, незмінно зв'язаної з тілом. Приймаючи для  $\vec{w}$  вираз (16.45) і скориставшись координатною формою векторного добутку

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{i}(\omega_y V_z - \omega_z V_y) + \vec{j}(\omega_z V_x - \omega_x V_z) + \vec{k}(\omega_x V_y - \omega_y V_x),$$

знаходимо

$$\begin{aligned} w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_y V_z - \omega_z V_y, \\ w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_z V_x - \omega_x V_z, \\ w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_x V_y - \omega_y V_x. \end{aligned} \quad (16.49)$$

Якщо замість (16.45) використати для  $\vec{w}$  вираз (16.47) і спроектувати обидві частини цієї рівності на осі рухомої системи координат, одержимо:

$$\begin{aligned} w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x, \\ w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 y, \\ w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 z. \end{aligned} \quad (16.50)$$

Тут  $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$ .

Формули (16.50) можна знайти також безпосередньо з формул (16.49). Для цього перетворимо треті і четверті доданки в (16.49), використавши формули (16.37):

$$\begin{aligned}
 \omega_y V_z - \omega_z V_y &= \omega_y (\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z (\omega_z x - \omega_x z) = \\
 &= \omega_x (y \omega_y + z \omega_z) - x (\omega_y^2 + \omega_z^2) = \\
 &= \omega_x (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) - x (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2), \\
 \omega_z V_x - \omega_x V_z &= \omega_y (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) - y (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2), \\
 \omega_x V_y - \omega_y V_x &= \omega_z (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) - z (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2).
 \end{aligned}
 \tag{16.51}$$

Підставивши (16.51) в (16.49), одержимо (16.50).

Як і у виразах (16.48), праві частини рівностей (16.49) і (16.50) є лінійними функціями других похідних кутів Ейлера. Однак координати  $x, y, z$  точки  $M$  у системі координат, незмінно зв'язаній з тілом, постійні. Координати ж  $x_1, y_1, z_1$  точки  $M$  в нерухомій системі координат  $Ox_1y_1z_1$  змінюються з часом. У цьому полягає перевага виразів (16.49) або (16.50) перед виразами (16.48).

Коли змінюється лише один з кутів Ейлера (наприклад,  $\psi$ ), то сферичний рух тіла стає обертанням навколо відповідної осі (в даному випадку навколо осі  $Oz_1$ , причому вектор кутової швидкості  $\vec{\psi} = \psi \vec{k}_1$ ).

### 16.10. Геометризація уявлення про сферичний рух твердого тіла

Якщо вектор кутової швидкості тіла в даний момент часу є  $\vec{\omega}$ , то його елементарне переміщення за час  $dt$  являє собою елементарний поворот на кут  $d\theta = \omega dt$  навколо осі  $OA$ , вздовж якої направлений вектор  $\vec{\omega}$  (див. рис. 16.7). Ця вісь названа в підрозділі 16.7 миттєвою віссю обертання.

Інакше: **миттєва вісь обертання** – це вісь, елементарним поворотом навколо якої тіло переміщується з даного положення в положення, нескінченно близьке до даного. Від нерухої осі миттєва вісь обертання відрізняється тим, що її напрями і в нерухомому просторі, і в самому тілі неперервно змінюються.

Перемістившись елементарним поворотом навколо осі  $OA$  (див. рис. 16.7) в сусіднє положення, тіло із цього, нового, положення в деяке інше положення переміщується елементарним поворотом навколо нової миттєвої осі обертання  $OA_1$  і т.д. Отже, рух твердого тіла навколо нерухої точки складається із серії послідовних елементарних поворотів навколо миттєвих осей обертання, що проходять через нерухому точку.

#### Питання для самоконтролю

1. Чому обертальний рух твердого тіла навколо нерухої точки називають сферичним рухом?
2. Назвіть параметри, що визначають обертальний рух тіла навколо нерухої точки.
3. Якими поворотами можна здійснити довільне переміщення твердого тіла з нерухою точкою?

4. Що називають матрицею повороту тіла на певний кут? На два кути навколо неколінеарних осей?
5. В якому випадку обернена матриця дорівнює транспонованій при обертанні тіла навколо нерухомої точки?
6. Як спроекувати вектор кутової швидкості тіла з нерухомою точкою на осі прямокутної нерухомої декартової системи координат? на осі декартової прямокутної рухомої системи координат?
7. Як знайти швидкості точок тіла із закріпленою точкою?
8. Якими рівняннями описується миттєва вісь обертання?
9. Що називають квазішвидкостями?
10. Як знайти проекції вектора кутового прискорення тіла з однією нерухомою точкою на осі декартової прямокутної системи координат? рухомої?
11. Як знайти проекції прискорення точок тіла із закріпленою точкою на осі декартової прямокутної нерухомої системи координат? рухомої?
12. Що називають миттєвою віссю обертання тіла із закріпленою точкою?

### 17. Рух вільного твердого тіла

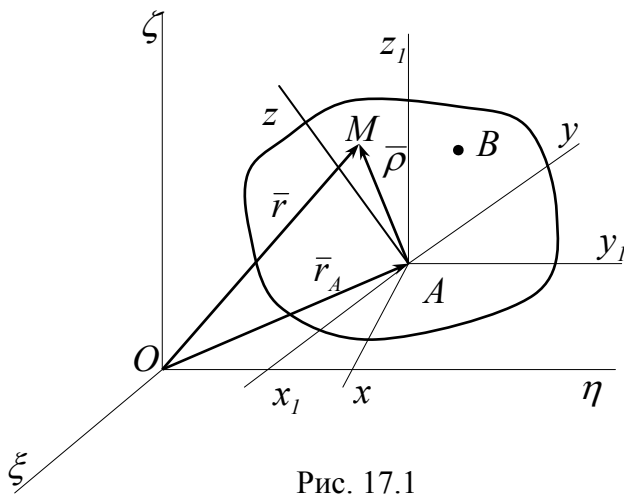


Рис. 17.1

Нехай тіло як завгодно переміщується у просторі, тобто його положення і рух нічим не обмежені. Щоб математично описати рух вільного тіла у просторі, введемо кілька прямокутних систем декартових координат:

- 1)  $O\xi\eta\zeta$  – нерухома система координат (рис. 17.1);
- 2)  $Ax_1y_1z_1$  – рухома система координат, що переміщується поступально відносно системи  $O\xi\eta\zeta$  (тобто  $Ax_1 \parallel O\xi, Ay_1 \parallel O\eta, Az_1 \parallel O\zeta$ ) і

зв'язана з тілом лише в одній точці  $A$ ;

- 3)  $Axyz$  – рухома система координат, жорстко зв'язана з тілом.

Параметрами, що визначають положення тіла в будь-який момент часу, є декартові координати точки  $A$  в системі  $O\xi\eta\zeta$  і кути Ейлера, які характеризують орієнтацію осей системи  $Axyz$  відносно осей системи  $Ax_1y_1z_1$ . Отже, **закон руху** вільного твердого тіла має вигляд:

$$\begin{aligned} \xi_A = f_1(t), \quad \eta_A = f_2(t), \quad \zeta_A = f_3(t), \\ \psi = f_4(t), \quad \vartheta = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t). \end{aligned} \quad (17.1)$$

Між радіусами-векторами довільної точки  $M$  тіла відносно точок  $O$  та  $A$  існує залежність:



$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \quad (17.2)$$

Позначивши  $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ,  $\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$ , після диференціювання обох частин рівності (17.2) знаходимо:

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (17.3)$$

Тут  $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$  є швидкість точки  $M$  відносно рухомої системи координат  $Ax_1y_1z_1$ . Стосовно цієї системи тіло здійснює сферичний рух, а тому відповідну швидкість можна знайти за формулою (16.38):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (17.4)$$

де  $\vec{\omega}$  – вектор кутової швидкості обертання тіла відносно системи координат  $Ax_1y_1z_1$ . Можна показати, що вектор  $\vec{\omega}$  не залежить від вибору полюса  $A$ . З рівності (17.3) на основі (17.4) маємо:

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (17.5)$$

*Швидкість будь-якої точки вільного твердого тіла складається із швидкості її поступального руху (при якому всі точки тіла рухаються як довільно вибраний полюс зі швидкістю  $\vec{V}_A$ ) і швидкості цієї точки в обертальному русі тіла навколо полюса.*

На основі цього результату і підрозділу 16.10 можна зробити висновок, що рух вільного твердого тіла можна розглядати таким, який складається з поступального руху (разом з полюсом  $A$ ) та із серії елементарних поворотів з вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$  навколо миттєвих осей обертання, що проходять через полюс  $A$ .

Якщо за полюс вибрати іншу точку тіла (наприклад, точку  $B$  на рис. 17.1), то її швидкість  $\vec{V}_B$  та прискорення  $\vec{w}_B$  будуть відрізнятися від  $\vec{V}_A$  та  $\vec{w}_A$  (припускається, що тіло рухається не поступально). Але якщо зв'язані з тілом осі, проведені з точки  $B$ , направити так само, як і в точці  $A$ , то кути Ейлера  $\psi$ ,  $\vartheta$  і  $\varphi$  не зміняться. Тому обертальна частина руху тіла від вибору полюса не залежить.

**Теорема.** *Проекції швидкостей двох точок вільного твердого тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні між собою.*

*Доведення.* Запишемо рівність (17.5) так:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}. \quad (17.6)$$

Оскільки  $(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}) \perp \overrightarrow{AM}$  (тобто проекція цього вектора на числову вісь, що проходить через точки  $A$ ,  $M$  дорівнює нулю), то проектуванням на дану вісь векторів із рівності (17.6) отримуємо:

$$np_{AM} \vec{V}_M = np_{AM} \vec{V}_A. \quad (17.7)$$

Теорема доведена. Частинним випадком формули (17.7) є формула (15.6).

Перейдемо до **прискорення точки** вільного твердого тіла. Продиференціювавши за часом обидві частини рівності (17.5), маємо:

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (17.8)$$

або

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \quad (17.9)$$

Тут  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  – вектор миттєвого кутового прискорення твердого тіла. Величина  $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$  є прискоренням точки  $M$  в її русі навколо полюса. Таким чином, прискорення точки вільного твердого тіла дорівнює сумі прискорення полюса і прискорення миттєвого обертального руху точки навколо рухомої осі, що проходить через полюс.

На основі тих же міркувань і з тими ж застереженнями, що і в підрозділі 16.9, складова  $\vec{w}_{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$  називається *обертальним прискоренням*, а складова  $\vec{w}_{ос} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$  називається *доосьовим прискоренням*.

### Питання для самоконтролю

1. Якими параметрами описується рух вільного твердого тіла?
2. Які складові має швидкість довільної точки вільного твердого тіла? прискорення?
3. Якою умовою зв'язуються швидкості двох точок вільного твердого тіла?

## 18. Складний рух точки

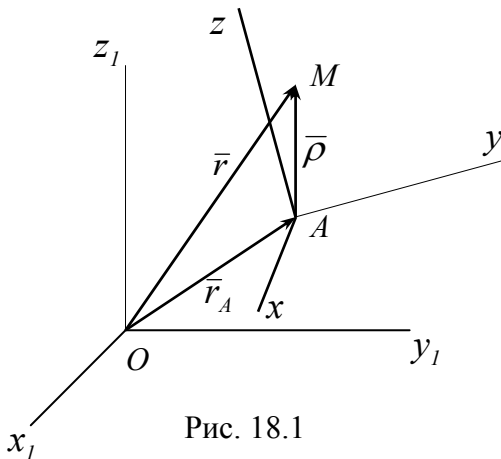


Рис. 18.1

На початку курсу кінематики був сформульований (див. рис. 12.1) принцип відносності руху, згідно з яким механічні рухи, що відбуваються у просторі і часі, мають різний вигляд в різних координатних системах. Спостерігачі, пов'язані з різними системами координат, сприймають по-різному один і той самий об'єктивний механічний рух.

Головне питання кінематики складного руху – встановлення зв'язку між кінематичними величинами, що характеризують одне й те саме механічне явище в двох

різних координатних системах, які мають взаємний відносний рух.

Випадок, коли рухома система координат здійснювала поступальний рух, уже зустрічався раніше: система  $Ax_0y_0z_0$  на рис. 15.6 і система  $Ax_1y_1z_1$  на рис. 17.1. Нижче розглядається випадок руху рухомої системи координат за будь-яким заданим законом.

**Складним** або **абсолютним** рухом точки називається її рух відносно “нерухомої” (умовно нерухомої) системи координат. **Переносний** рух – це рух тієї

точки рухомого середовища, з якою в даний момент часу збігається рухома точка або через яку в даний момент часу проходить рухома точка. **Відносним** рухом називається рух точки відносно рухомого середовища. Якщо з рухомим середовищем жорстко зв'язати (рухому) систему координат і остання відтворює рух середовища, то можна сказати також, що переносний рух – це рух рухомої системи координат відносно нерухомої, а відносний рух – це рух точки відносно рухомої системи координат.

Корисність розкладення руху точки чи тіла на два простіших рухи (які, отже, легше дослідити) введенням додаткової (рухомої) системи відліку ілюструє, наприклад, куля, що котиться по палубі рухомого корабля. Відносно берега куля здійснює складний рух, що складається з (переносного) руху разом з палубою корабля (рухома система відліку) і (відносного) руху стосовно палуби.

Щоб легше уявити походження і зміст терміну “переносний рух”, уявимо собі, що точка  $M$  рухається по поверхні абсолютно твердого тіла, яке саме переміщується у просторі і з яким зв'язана рухома система відліку. Відповідна точка тіла “переносить” в даний момент часу точку  $M$  відносно нерухомої системи відліку. Якби, починаючи з цього моменту часу, точка  $M$  втратила власний рух відносно рухомої системи координат, то її рух був би лише переносним.

Нехай  $Ox_1y_1z_1$  – нерухома система координат;  $Axyz$  – рухома система координат, жорстко зв'язана з рухомим середовищем. Швидкість точки  $M$  відносно системи  $Ox_1y_1z_1$  позначимо  $\vec{V}_a$  (абсолютна швидкість точки  $M$ ). Переносну швидкість точки  $M$  (тобто швидкість тієї точки рухомої системи координат  $Axyz$ , з якою в даний момент часу збігається рухома точка або через яку в даний момент проходить рухома точка) позначимо  $\vec{V}_e$ . Відносну швидкість точки  $M$  (тобто швидкість точки відносно рухомої системи координат) позначимо  $\vec{V}_r$ . Індексами в позначеннях усіх трьох швидкостей є перші літери відповідних латинських слів: absolutivus – абсолютний, relativus – відносний, entainer – захоплювати з собою, переносити.

З рис. 18.1 маємо:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \quad (18.1)$$

Продиференціюємо за часом рівність (18.1). Стосовно першого члена в правій частині ситуація очевидна:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{V}_A \quad (18.2)$$

є швидкістю точки  $A$ . Стосовно похідної другого члена ситуація складніша. Вектор  $\vec{\rho}$  визначений в рухомій системі координат:

$$\vec{\rho} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (18.3)$$

Точка  $M(x, y, z)$  переміщується відносно системи координат  $Axyz$ ; отже, її координати  $x, y, z$  у цій системі є функціями часу. Оскільки  $\vec{i}, \vec{j}$  та  $\vec{k}$  – орти системи  $Axyz$ , осі якої можуть здійснювати як поступальний, так і обертальний рухи, то орти взагалі також можуть змінюватись у часі, а тому

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (18.4)$$

Сума перших трьох доданків характеризує бистроту зміни вектора  $\vec{\rho}$  відносно рухомої системи координат  $Axyz$ , (переносний) рух системи  $Axyz$  не позначається на цих членах. Вона являє собою похідну вектора  $\vec{\rho}$  за умови, що вектори  $\vec{i}, \vec{j}$  та  $\vec{k}$  – постійні, і називається **відносною (локальною, місцевою) похідною** вектора  $\vec{\rho}$  за часом:

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (18.5)$$

Похідна в лівій частині рівності (18.4) називається **абсолютною (повною) похідною** і характеризує швидкість зміни вектора  $\vec{\rho}$  відносно нерухомої системи відліку. Позначається абсолютна похідна так, як завжди позначається похідна:  $\frac{d}{dt}$ .

Сума останніх трьох доданків у правій частині рівності (18.4) характеризує додаткову швидкість зміни вектора  $\vec{\rho}$  відносно системи координат  $Ox_1y_1z_1$ , тобто бистроту зміни, викликану рухом системи  $Axyz$  відносно системи  $Ox_1y_1z_1$ . Кожний доданок цієї суми пропорційний похідній одного з ортів. Похідні одиничних векторів є швидкостями їхніх кінців, тобто швидкостями точок незмінюваної системи, якою є триєдр  $Axyz$ . Загальний рух координатного базису системи  $Axyz$  складається з поступальної та миттєвої обертальної частин. Поступальна частина не спричиняє змін координатних векторів: зміна координатного базису системи  $Axyz$  залежить лише від обертальної частини її загального руху. Остання зводиться до миттєвого обертання навколо осі, що проходить через початок  $A$ . На підставі формули (16.38) маємо:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}. \quad (18.6)$$

Ці формули вже використовувались при перетворенні правої частини рівності (16.43). Отже,

$$x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} = x(\vec{\omega} \times \vec{i}) + y(\vec{\omega} \times \vec{j}) + z(\vec{\omega} \times \vec{k}) = \vec{\omega} \times (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (18.7)$$

На підставі (18.5) та (18.7) рівність (18.4) можна записати таким чином:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (18.8)$$

Похідна обох частин рівності (18.1) за умов (18.2) та (18.8) набуває вигляду:

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (18.9)$$

Для визначення переносної швидкості точки  $M$  закріпимо її в рухомій системі координат, тобто покладемо  $\vec{V}_r = 0$  в рівності (18.9). Одержимо:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (18.10)$$

Таким чином,

$$\vec{V} = \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \quad (18.11)$$

Однак для **прискорення** формула типу (18.11) не має місця. Розглядаючи навіть простіші випадки складного руху, можна переконатись в тому, що

переносне та відносне прискорення ще не визначають абсолютного прискорення. Лише в тих випадках, коли переносний рух є поступальним, абсолютне прискорення дорівнює сумі переносного та відносного прискорень. Покажемо це.

Продиференціюємо рівність (18.9):

$$\vec{w} = \vec{w}_a = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (18.12)$$

На підставі виразу (18.8) для абсолютної похідної вектора, що заданий в рухомій системі координат, маємо:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r = \vec{w}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

Прийнявши до уваги рівність (18.5), відносне прискорення точки  $M$  (тобто її прискорення відносно рухомої системи координат), можна представити так:

$$\vec{w}_r = \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}.$$

Введемо далі вектор прискорення  $\vec{w}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt}$  початку рухомої системи координат, а також вектор кутового прискорення рухомої системи координат. Тоді вираз (18.12) набуває вигляду:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_A + \vec{w}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}),$$

тобто

$$\vec{w}_a = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{w}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r. \quad (18.13)$$

Щоб знайти звідси переносне прискорення  $\vec{w}_e$  точки  $M$  (тобто прискорення тієї точки рухомого середовища, з якою в даний момент збігається рухома точка), закріпимо точку в рухомій системі координат, тобто покладемо  $\vec{V}_r = 0$  і  $\vec{w}_r = 0$ :

$$\vec{w}_e = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}).$$

Переносне прискорення точки  $M$  дорівнює прискоренню тієї незмінно зв'язаної з системою  $Axyz$  точки, в якій перебуває точка  $M$  в даний момент часу.

Щоб підкреслити зв'язок вектора  $\vec{\omega}$  з переносним рухом, позначимо  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e$ .

Введемо ще одне позначення:

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r. \quad (18.14)$$

Тоді вираз (18.13) можна записати в такій узагальненій формі:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c, \quad (18.15)$$

яка виражає собою **теорему Г. Коріоліса** (1792–1843). Вектор, що має структуру (18.14), називається *коріолісовим (поворотним) прискоренням*. Якщо переносний рух (тобто рух рухомої системи  $Axyz$ ) є поступальним ( $\vec{\omega}_e = 0$ ), то

$$\vec{w}_c = 0 \Rightarrow \vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r.$$

При поступальному переносному русі абсолютне прискорення дорівнює сумі переносного та відносного прискорень. Коріолісове прискорення з'являється тільки тоді, коли рухомі осі при своєму русі повертаються (звідси термін “поворотне” прискорення).

При розв'язуванні задач слід мати на увазі, що швидкість  $\vec{V}_e$  і прискорення  $\vec{w}_e$  обчислюються як швидкість і прискорення тієї точки рухомої системи відліку,

з якою в даний момент збігається рухома точка. Оскільки рухома система координат рухається як абсолютно тверде тіло, то обчислення векторів  $\vec{V}_e$  і  $\vec{w}_e$  виконується за формулами кінематики твердого тіла. Величини  $\vec{V}_r$  і  $\vec{w}_r$  обчислюються звичайними методами кінематики точки, при цьому рухома система відліку розглядається як основна (нерухома).

**Приклад.** Нехай точка  $M$  рухається вздовж меридіана з півночі на південь зі швидкістю  $\vec{V}_r$ . У північній півкулі вектор  $\vec{w}_c$  направлений на схід по дотичній до паралелі (рис. 18.2). На екваторі  $\vec{w}_c = 0$ , а в південній півкулі вектор  $\vec{w}_c$  направлений на захід.

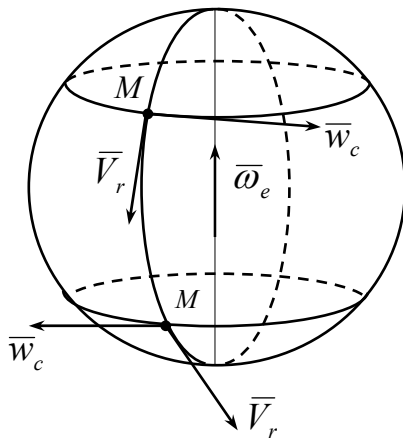


Рис. 18.2

Припустимо тепер, що точка  $M$  є частинкою води в річці. Виходячи тут за межі кінематики, згадаємо зі шкільного курсу фізики, що прискорення викликається певною силою. Отже, наявність  $\vec{w}_c$  пояснюється наявністю сили, прикладеної до частинок води і направлених у північній півкулі на схід. Ця сила виникає внаслідок взаємодії між Землею і частинкою води в річці. Але кожній дії відповідає рівна за величиною і протилежна за напрямом протидія (підрозділ 1.5). Таким чином, частинки води річки діють на її русло з силами, направленими в північній півкулі на захід. Внаслідок цього річки, що течуть у північній півкулі з півночі на південь вздовж меридіана,

підмивають свій правий берег (з тієї ж причини права рейка залізничної колії зношується більше, ніж ліва). У південній півкулі підмивається лівий берег.

### Питання для самоконтролю

1. В яких випадках рух точки можна розглядати як складний?
2. Як зв'язані між собою абсолютна та відносна похідні векторної функції? Що вони характеризують?
3. Як визначається абсолютна швидкість точки у складному русі?
4. В яких випадках коріолісове прискорення точки дорівнює нулю? Що воно характеризує?
5. Чому при русі точки в напрямку до північного і південного полюсів Землі коріолісове прискорення буде направлене в різні боки?

## 19. Складний рух твердого тіла

### 19.1. Постановка задачі синтезу рухів

У попередніх розділах ми займались аналізом рухів: прагнучи вивчити складний рух, ми розкладали його на простіші рухи. Наприклад, рух вільного твердого тіла можна розглядати як складний рух, що складається з поступального

руху тіла разом з полюсом та із миттєво обертального руху навколо осі, яка проходить через полюс.

Часто виникає обернена задача або задача синтезу чи складання рухів: утворити (побудувати та вивчити) складний рух тіла з простіших рухів. Конкретно задача ставиться таким чином: в кожний даний момент часу при різних часткових припущеннях про характер відносного та переносного рухів знайти вигляд того результуючого складного руху, якому відповідає розподіл абсолютних швидкостей точок тіла в цей момент. Таким чином, тут буде йти мова про складання миттєвих (нескінченно малих) переміщень тіла.

Оскільки розподіл швидкостей точок твердого тіла в даний момент залежить

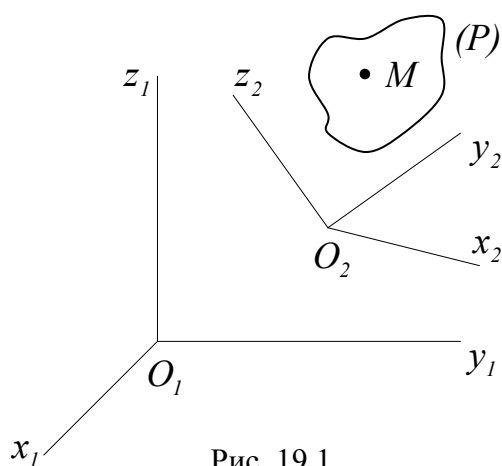


Рис. 19.1

від його поступальної і кутової швидкостей в цей момент, то цю задачу можна ще назвати задачею про складання векторів миттєвих поступальних і кутових швидкостей тіла. Складові рухи комутативні в тому сенсі, що миттєвий розподіл швидкостей результуючого руху не зміниться, якщо відносний і переносний рухи поміняти місцями. Наголосимо, що якби складались не миттєві, а скінченні переміщення тіла, то відповідні теореми звучали б інакше.

Введемо нерухому систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ . Нехай тверде тіло  $(P)$  рухається відносно системи координат  $O_2x_2y_2z_2$ , яка, в свою чергу, переміщується відносно системи  $O_1x_1y_1z_1$ . У цьому випадку кажуть, що тіло здійснює складний рух, який складається з двох складових рухів (рис. 19.1).

У більш загальних випадках складний рух може складатись з  $n$  складових рухів. При цьому маємо  $n$  систем координат і задається  $n$  рухів: рух тіла відносно системи координат  $O_nx_ny_nz_n$ , рух системи  $O_nx_ny_nz_n$  відносно системи  $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$  і т. д. Нарешті задається рух системи  $O_2x_2y_2z_2$  відносно нерухомої системи  $O_1x_1y_1z_1$ . Рух тіла або рух якої-небудь однієї системи координат відносно іншої в загальному випадку нічим не обмежено. Задача полягає в знаходженні залежностей між основними характеристиками складових рухів і складного руху.

## 19.2 Додавання поступальних рухів

Нехай система  $O_2x_2y_2z_2$  на рис. 19.1 рухається поступально відносно нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$  зі швидкістю  $\vec{V}_2$ . Через  $\vec{V}_1$  позначимо швидкість поступального руху тіла  $(P)$  відносно системи  $O_2x_2y_2z_2$ . Тоді рух тіла відносно системи  $O_1x_1y_1z_1$  є складним: його рух стосовно трієдра  $O_2x_2y_2z_2$  можна

трактувати як відносний ( $\vec{V}_r = \vec{V}_1$ ), а рух триєдра  $O_2x_2y_2z_2$  стосовно триєдра  $O_1x_1y_1z_1$  є переносним ( $\vec{V}_e = \vec{V}_2$ ). Рух точки  $M \in (P)$  відносно системи  $O_1x_1y_1z_1$  є абсолютним, швидкість цього руху можна знайти за формулою (18.11). Оскільки  $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ , то

$$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (19.1)$$

Таким чином, абсолютні швидкості всіх точок тіла виявились однаковими. Отже, при додаванні поступальних рухів твердого тіла результуючий рух буде також поступальним. Швидкість результуючого руху дорівнює сумі швидкостей складових рухів.

Формула (19.1) узагальнюється на  $n$  поступальних рухів:

$$\vec{V}_M = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i. \quad (19.2)$$

Коли всі складові рухи є поступальними, то (на відміну від усіх наступних випадків) теорема про додавання швидкостей формулюється і доводиться однаково як для миттєвих, так і для скінченних переміщень.

Рух, в якому швидкості всіх точок тіла тільки в даний момент часу виявляються рівними між собою, називається миттєво поступальним. Прискорення точок при цьому, звичайно, різні.

### 19.3. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються

Конкретизуємо тепер рухи триєдрів, зображених на рис. 19.1, таким чином.

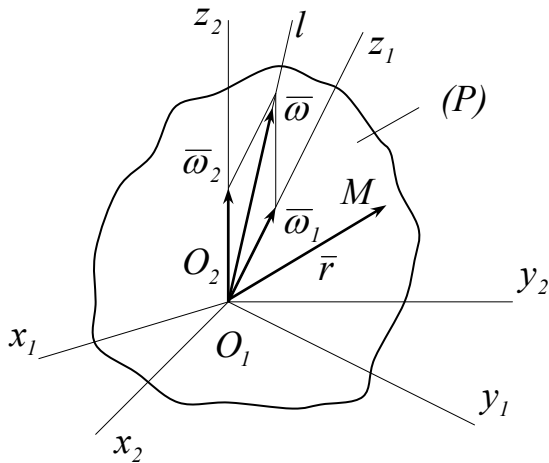


Рис. 19.2

Нехай, як і раніше, система  $O_1x_1y_1z_1$  є нерухомою. Система координат  $O_2x_2y_2z_2$  обертається навколо осі  $O_1z_1$  системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ , причому  $\vec{\omega}_1$  (рис. 19.2) є вектором кутової швидкості цього обертання. Через  $\vec{\omega}_2$  позначимо вектор кутової швидкості обертання тіла  $(P)$  навколо осі  $O_2z_2$  відносно системи координат  $O_2x_2y_2z_2$ . Точка  $O_1$  (чи  $O_2$ ) залишається нерухомою, тому результуючий рух тіла буде сферичним (див. підрозділ 16). Нехай  $\vec{\omega}$  – вектор кутової швидкості цього

руху (абсолютного). Тоді абсолютну швидкість довільної точки  $M \in (P)$  тіла можна знайти за формулою Ейлера (16.38), тобто

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (19.3)$$

Разом з тим,

$$\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \quad \vec{V}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \quad \vec{V}_r = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}.$$

Звідси

$$\vec{V}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}. \quad (19.4)$$



Порівнявши формули (19.3) і (19.4), дістаємо:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (19.5)$$

Таким чином, сукупність двох обертань, що відбуваються навколо осей, які перетинаються, еквівалентна одному обертанню навколо миттєвої осі  $O_1l$  з вектором (миттєвої) кутової швидкості  $\vec{\omega}$ , який дорівнює сумі векторів кутових швидкостей складових обертань. Миттєва вісь  $O_1l$  направлена вздовж вектора  $\vec{\omega}$ , тобто по діагоналі паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$ . З плином часу вісь  $O_1l$  змінює положення, описуючи конічну поверхню з вершиною в точці  $O_1$ .

Формула (19.5) узагальнюється на сукупність  $n$  обертань:

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i. \quad (19.6)$$

#### 19.4. Додавання обертань навколо двох паралельних осей

Розглянемо таку задачу. На кривошипі  $GH$  (рис. 19.3) закріплена вісь  $HA$ , навколо якої обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1$  тіло  $(P)$ . Сам кривошип разом з тілом  $(P)$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_2$  навколо осі  $GB$ . Будь-яка точка тіла  $(P)$  перебуває в складному русі (див. підрозділ 18). Переносим є рух системи кривошип – тіло ( $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_2$ ), відносним рухом є обертання тіла навколо осі  $HA$  ( $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1$ ).

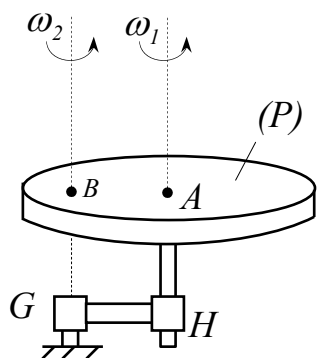


Рис. 19.3

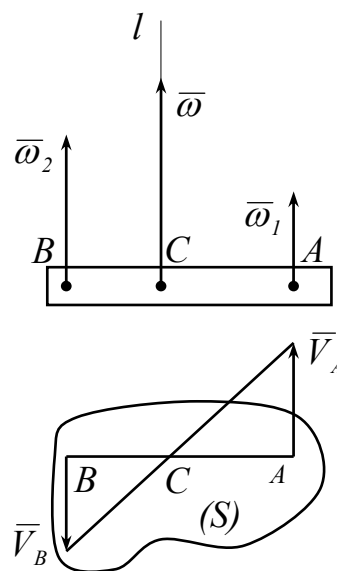


Рис. 19.4

Рух тіла  $(P)$  є плоскопаралельним, тому досить розглянути швидкості точок, розташованих в якій-небудь площині, перпендикулярній до векторів кутових швидкостей  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  (див. підрозділ 15.1). Позначимо через  $(S)$  переріз тіла  $(P)$

площиною, перпендикулярною до осей обертання. Сліди осей в перерізі ( $S$ ) позначимо  $A$  і  $B$ .

**19.4.1. Випадок, коли вектори миттєвих кутових швидкостей паралельні і однаково направлені (обертання в один бік)**

Оскільки точка  $A$  лежить на осі  $HA$ , то вона одержує швидкість лише від обертання навколо осі  $GB$ , а тому (рис. 19.4)

$$V_A = \omega_2 \cdot AB. \quad (19.7)$$

З аналогічних міркувань

$$V_B = \omega_1 \cdot AB. \quad (19.8)$$

Швидкості точок  $A$  і  $B$  направлені в протилежні боки. У відповідності з рис. 15.12 миттєвим центром швидкостей є точка  $C$  на рис. 19.4, вісь  $Cl$  – миттєва вісь обертання тіла,  $\omega$  – миттєва кутова швидкість. Отже (див. формулу (15.5)),

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{AC} = \vec{\omega} \times \vec{CA}, \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{BC} = \vec{\omega} \times \vec{CB}.$$

Таким чином,

$$V_A = \omega \cdot CA, \quad V_B = \omega \cdot CB. \quad (19.9)$$

Складемо тепер почленно рівності (19.7) і (19.8), а потім – рівності (19.9):

$$V_A + V_B = (\omega_1 + \omega_2) \cdot AB,$$

$$V_A + V_B = \omega \cdot (CA + CB) = \omega \cdot AB.$$

Прирівнявши праві частини останніх рівностей, знаходимо:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (19.10)$$

Тепер прирівняємо між собою вирази (19.7) і (19.9) для величини  $V_A$ , а потім вирази (19.8) і (19.9) для величини  $V_B$ :

$$\omega_2 \cdot AB = \omega \cdot CA, \quad \omega_1 \cdot AB = \omega \cdot CB.$$

Звідси

$$\frac{\omega_1}{CB} = \frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_2}{CB},$$

або

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (19.11)$$

Рівності (19.10) і (19.11) дають можливість сформулювати таке правило. Якщо тіло бере участь одночасно в двох направлених в один бік обертаннях навколо паралельних осей з кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , то його результуючий рух буде миттєвим обертанням з абсолютною кутовою швидкістю  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  навколо миттєвої осі, паралельної даним. Миттєва вісь ділить відрізок між осями внутрішнім чином на частини, обернено пропорційні кутовим швидкостям  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .

З плином часу миттєва вісь обертання  $Cl$  (рис. 19.4, зверху) змінює своє положення, описуючи циліндричну поверхню.

**19.4.2. Випадок, коли вектори миттєвих кутових швидкостей антипаралельні (обертання направлені в різні боки)**

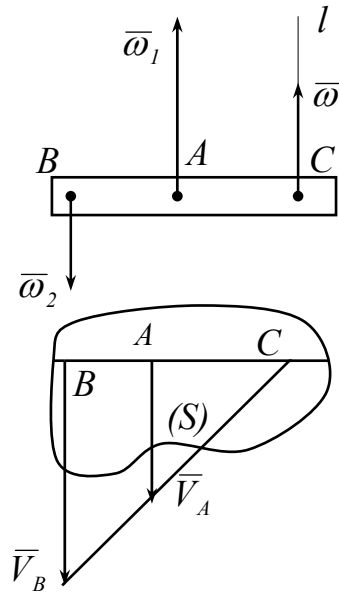


Рис. 19.5

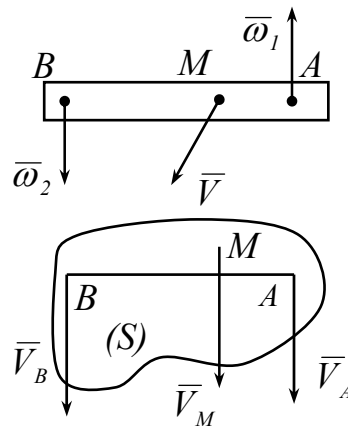


Рис. 19.6

Нехай, для визначеності,  $\omega_1 > \omega_2$  (рис. 19.5). Тоді

$$V_A = \omega_2 \cdot AB < V_B = \omega_1 \cdot AB. \quad (19.12)$$

На підставі рис. 15.12 миттєва вісь обертання проходить через точку C, а тому

$$V_A = \omega \cdot AC, \quad V_B = \omega \cdot BC. \quad (19.13)$$

З рівностей (19.12) і (19.13) знаходимо такі два вирази для різниці модулів швидкостей точок B і A:

$$V_B - V_A = (\omega_1 - \omega_2) \cdot AB, \quad V_B - V_A = \omega \cdot (BC - AC) = \omega \cdot AB.$$

Отже,

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \quad (19.14)$$

Прирівняємо між собою вирази (19.12) і (19.13) модулів швидкостей точок A і B:

$$\omega_2 \cdot AB = \omega \cdot AC, \quad \omega_1 \cdot AB = \omega \cdot BC.$$

Складемо пропорцію:

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega_1}{BC}.$$

Таким чином,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (19.15)$$

Рівності (19.14) і (19.15) дозволяють сформулювати таке правило. Сукупність двох протилежно направлених обертань навколо паралельних осей приводиться до одного обертання, миттєва вісь якого ділить зовнішнім чином відрізок між миттєвими осями складових обертань на частини, обернено пропорційні кутовим

швидкостям. Миттєва вісь розташована за віссю, навколо якої обертання відбувається з більшою кутовою швидкістю. Внаслідок рівності (19.14) вектор результуючої кутової швидкості направлений в бік більшої з кутових швидкостей  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .

### 19.4.3. Пара обертань

Нехай вектори  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  кутових швидкостей антипаралельні, причому  $\omega_1 = \omega_2$  (рис. 19.6). Сукупність двох миттєвих обертань навколо паралельних осей з однаковими кутовими швидкостями і протилежними за напрямками векторами кутових швидкостей утворює пару миттєвих обертань, а вектори  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  утворюють пару векторів кутових швидкостей.

У результаті граничного переходу з рівностей (19.14) і (19.15) одержуємо:

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} \omega = 0, \quad \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} BC = AC.$$

Отже, у випадку антипаралельних векторів кутових швидкостей при  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  результуюча кутова швидкість прагне до нуля, а миттєва вісь результуючого руху разом з точкою  $C$  (рис. 19.5) прямує до нескінченності (оскільки  $BC \rightarrow AC$ ). Отже, результуючий рух не є обертальним.

З рис. 19.6 маємо:

$$V_A = \omega_2 \cdot AB, \quad V_B = \omega_1 \cdot AB \Rightarrow V_A = V_B \equiv V.$$

Знайдемо швидкість довільної точки  $M$ :

$$\begin{aligned} \vec{V}_M &= \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{BM} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AM} - \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{BM} = \vec{\omega}_1 \times (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) = \\ &= \vec{\omega}_1 \times (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB} = \vec{V}_B = -\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{BA} = \vec{V}_A = \overrightarrow{AB} \times \vec{\omega}_2 \equiv \vec{V}. \end{aligned} \quad (19.16)$$

Отже, швидкості всіх точок тіла в даний момент часу однакові, тобто пара миттєвих кутових швидкостей еквівалентна миттєвому поступальному рухові. Швидкість  $\vec{V}$  результуючого поступального руху визначається так само, як в статиці визначається момент пари сил (див. формулу (3.1)). А тому вектор  $\vec{V}$  називається моментом пари обертань. Відстань  $AB$  між векторами миттєвих



Рис. 19.7

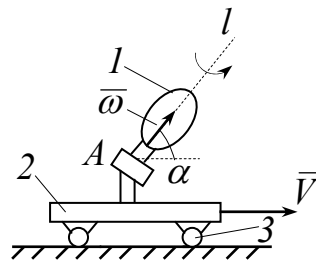


Рис. 19.8

кутових швидкостей  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  називається *плечем пари*. Оскільки момент пари обертань може бути прикладений в будь-якій точці тіла, то він – вільний вектор: так само, як і момент пари сил (див. підрозділ 5.1).

Прикладом такого руху може бути поступальний рух велосипедної педалі  $DE$  відносно рами велосипеда. Він складається з відносного обертання педалі навколо

осі  $A$ , закріпленої на кривошипі  $BA$ , та переносного обертання кривошипа  $BA$  навколо осі  $B$ . Оскільки в будь-який момент часу кут повороту  $\varphi_1$  педалі відносно кривошипа  $BA$  дорівнює куту повороту  $\varphi_2$  кривошипа, то вектори кутових швидкостей  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  цих обертань за модулем однакові, а за напрямом протилежні. Швидкість поступального руху педалі дорівнює  $V = \omega_2 \cdot AB$ . Цей приклад свідчить, що пара обертань може бути еквівалентною не лише миттєвому, а і перманентному (неперервному) поступальному рухові.

### 19.5. Додавання поступального і обертального рухів

Щоб уявити постановку задачі, розглянемо спочатку такий приклад (рис. 19.8). Тіло  $1$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $Al$ , закріпленої на платформі  $2$ . Це відносний рух тіла  $1$ . Платформа  $2$  рухається поступально зі швидкістю  $\vec{V}$ , тобто тіло  $1$  одночасно бере участь у двох рухах. Таке ж можна сказати і про колесо  $3$ , для якого обертання навколо власної осі – відносний рух, а переносним є рух платформи  $2$ .

Залежно від значення кута  $\alpha$  між векторами  $\vec{\omega}$  і  $\vec{V}$  (для колеса цей кут дорівнює  $\frac{\pi}{2}$ ) можливі три випадки:  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Абстрагуючись від прикладу, питання поставимо так: тверде тіло здійснює миттєве обертання з кутовою швидкістю  $\omega$  відносно системи координат  $O_2x_2y_2z_2$ , а сама ця система перебуває у поступальному русі зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно нерухомої системи  $O_1x_1y_1z_1$  (чи навпаки, що внаслідок комутативності миттєвих рухів несуттєво).

#### 19.5.1. Випадок, коли швидкість поступального руху перпендикулярна до осі обертання

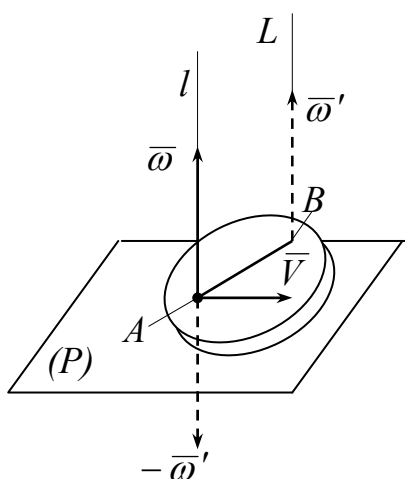


Рис. 19.9

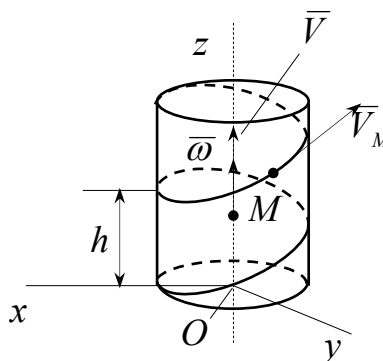


Рис. 19.10

Цю ситуацію ( $\vec{V} \perp \vec{\omega}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) ілюструє рис. 19.9. Нехай площина  $(P)$  перпендикулярна осі обертання  $Al$ . Очевидно, що результуючий рух тіла являє

собою плоскопаралельний рух (розділ 15). Площина ( $P$ ) на рис. 19.9 відіграє ту ж роль, що і на рис. 15.2. Якщо прийняти точку  $A$  за полюс, то рух тіла (як і будь-який плоскопаралельний) буде дійсно складатися з поступального руху зі швидкістю  $\vec{V}_A = \vec{V}$  (тобто зі швидкістю полюса) та із обертального руху навколо осі  $Al$ , що проходить через полюс.

На підставі підрозділу 19.4 (пункт 3) замінімо миттєву поступальну швидкість  $\vec{V}$  парюю векторів кутових швидкостей  $(\vec{\omega}', -\vec{\omega}')$ , взявши  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$  ( $\vec{\omega}$  – вектор заданої кутової швидкості тіла). Розташуємо пару так, як показано на рис. 19.9. Згідно з (19.16) маємо:

$$V = \omega' \cdot AB = \omega \cdot AB.$$

Звідси для плеча пари знаходимо:

$$AB = \frac{V}{\omega}. \quad (19.17)$$

Миттєві обертання навколо однієї й тієї ж осі з векторами кутових швидкостей  $\vec{\omega}$  та  $-\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$  взаємно знищуються, а тому рух тіла можна розглядати як миттєве обертання навколо осі  $BL$  з вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ . Точка  $B$  для перерізу тіла є миттєвим центром швидкостей (оскільки  $\vec{V}_B = 0$ ).

Таким чином, при складанні миттєвого обертального руху з кутовою швидкістю  $\omega$  і поступального руху зі швидкістю  $\vec{V} \perp \vec{\omega}$  результуючий рух є миттєвим обертанням з таким же (за модулем і напрямом) вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$ , але навколо миттєвої осі, зміщеної в площині, що перпендикулярна вектору  $\vec{\omega}$ , на величину (19.17).

### 19.5.2. Випадок, коли швидкість поступального руху паралельна осі обертання

Нехай  $\vec{V} \parallel \vec{\omega}$ ,  $\alpha = 0$  (рис. 19.10). Якщо рух тіла складається з *рівномірного* обертання з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі *постійного* напрямку і *рівномірного* *прямолінійного* поступального руху зі швидкістю  $\vec{V}$ , паралельній  $\vec{\omega}$ , то результуючий рух тіла називається *перманентним гвинтовим рухом* або просто *гвинтовим рухом*, а вісь обертання – *віссю гвинта*. Такий складний рух тіла називається *кінематичним гвинтом*.

У випадку, коли вектори  $\vec{V}$  і  $\vec{\omega}$  направлені в один бік, гвинт називається *правим*; коли в різні боки – *лівим*. Будь-яка точка  $M$  тіла залишається весь час на поверхні кругового циліндра, описуючи гвинтову лінію. Знайдемо її рівняння. Нехай  $R$  – віддаль точки  $M$  до осі гвинта (радіус циліндра),  $\varphi$  – кут повороту радіального променя (рис. 19.11). Якщо в початковий момент точка  $M$  перебувала на осі  $Ox$ , то

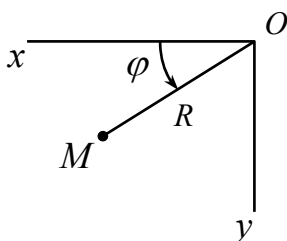


Рис. 19.11

$$\dot{z} = V = \text{const} \Rightarrow z = Vt, \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{const} \Rightarrow \varphi = \omega t.$$

Величини  $R$ ,  $\varphi$  і  $z$  є циліндричними координатами точки  $M$ . Віддаль  $h$ , яку проходить ця точка за час  $T$  одного оберту, називається *кроком гвинта*:

$$\omega T = 2\pi, \quad h = VT \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad h = 2\pi \frac{V}{\omega}.$$

Величина  $p = \frac{V}{\omega}$  називається *параметром гвинта*. Апліката  $z$  точки  $M$  має задовольняти умовам:

$$z|_{\varphi=0} = 0, \quad z|_{\varphi=2\pi} = h.$$

Звідси  $z = h \frac{\varphi}{2\pi}$ . Таким чином, параметричні рівняння гвинтової лінії мають вигляд:

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t, \\ y = R \sin \omega t, \\ z = Vt. \end{cases}$$

Гвинтова лінія – просторова крива постійної кривини і постійного кручення.

Якщо швидкість  $\vec{V}$  і кутова швидкість  $\omega$  змінні, то рух тіла буде *миттєво-поступальним* рухом. Параметр гвинта в загальному випадку також буде змінним.

### 19.5.3. Випадок, коли швидкість поступального руху утворює довільний кут з віссю обертання

Складний рух, здійснюваний тілом у цьому випадку, являє собою рух, описаний у розділі 17, тобто є рухом вільного твердого тіла в загальному випадку. Розкладемо вектор  $\vec{V}$  на дві складові (рис. 19.12):

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}'', \quad V' = V \cos \alpha, \quad V'' = V \sin \alpha.$$

Оскільки швидкість  $\vec{V}''$  перпендикулярна до  $\vec{\omega}$ , її можна замінити на

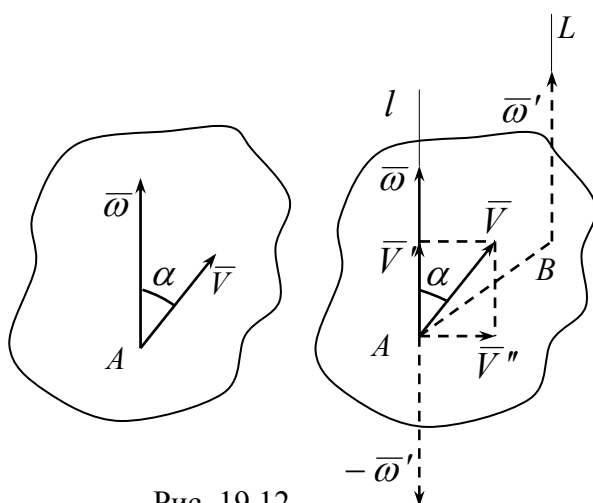


Рис. 19.12

підставі пункту 1 цього підрозділу парю векторів  $(\vec{\omega}', -\vec{\omega}')$ , взявши  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ . Згідно з (19.16) маємо:  $V'' = \omega \cdot AB$ , а тому плече пари визначається так:

$$AB = \frac{V''}{\omega} = \frac{V \sin \alpha}{\omega}.$$

Таким чином,

$$[\vec{V}, \vec{\omega}] \sim [\vec{V}', \vec{V}'', \vec{\omega}] \sim [\vec{V}', \vec{\omega}', -\vec{\omega}', \vec{\omega}] \sim [\vec{V}', \vec{\omega}'].$$

У результаті будемо мати вектор миттєвої кутової швидкості  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ , направлений вздовж осі  $BL$ , і паралельну йому швидкість

$\vec{V}'$  поступального руху. При їх додаванні одержуємо миттєвий гвинтовий рух з параметром  $p = \frac{V'}{\omega} = \frac{V}{\omega} \cos \alpha$ . Отже, результуючий рух буде миттєвим гвинтовим рухом навколо осі  $BL$ , паралельній  $\vec{\omega}$  і віддаленій від осі  $Al$  на відстань  $AB$ .

Описаними операціями ми перейшли від полюса  $A$  до полюса  $B$ . Результат підтверджує, що в загальному випадку руху твердого тіла при зміні полюса кутова швидкість не змінюється ( $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ ), а змінюється лише поступальна частина ( $\bar{V}' \neq \bar{V}$ ).

Оскільки при русі вільного твердого тіла величини  $\bar{V}$ ,  $\bar{\omega}$  і  $\alpha$  будуть взагалі весь час змінюватись, то буде неперервно змінюватись і положення осі  $BL$ . Тому її називають *миттєвою гвинтовою віссю*. Таким чином, рух вільного твердого тіла можна ще розглядати як такий, що складається із серії миттєвих гвинтових рухів навколо гвинтових осей, які неперервно змінюються.

### **Питання для самоконтролю**

1. В чому полягає різниця між аналізом та синтезом рухів твердого тіла?
2. В яких випадках теорема про додавання швидкостей точок тіл формулюється однаково як для миттєвих, так і для скінченних переміщень?
3. Чи можна замінити сукупність двох обертань навколо осей, що перетинаються, одним обертанням?
4. Що називають парою обертань?
5. Який рух тіла називають кінематичним гвинтом?



---

## Частина 3. Динаміка точки

От і дочекались ми, шановний читачу, коли два бурхливі потоки “Статика” і “Кінематика” зустрілись. Досі кожен з них жив за своїми звичками, законами, принципами. Зустрівшись і злившись один з одним, вони створили щось зовсім нове – “Динаміку”.

Не можна сказати, що, існуючи окремо, Статика і Кінематика не приносили людям користь. Та тільки об’єднавшись, вони відчули справжню свою силу і свої можливості. Останні виявились фантастичними! Дуже багато явищ і процесів, що відбуваються у Всесвіті, описуються класичною динамікою. Винятком є лише мікросвіт та рухи зі швидкостями, близькими до швидкості світла.

То ж давайте, дорогий студенте, приступимо до опанування динамікою, точніше – так званою класичною динамікою. Не пошкодуєте, бо Ви відчуєте дивну гармонію, красу і упорядкованість Природи і вражаючі можливості людського розуму пізнавати і описувати все це засобами математики.

### 20. Вступ до динаміки матеріальної точки

#### 20.1. Основні поняття динаміки точки

**Динамікою** називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються рухи матеріальних тіл (кінематика), які спричинені і відбуваються під дією сил (статика). З певною часткою умовності це означення можна формалізувати так:

$$\boxed{\text{Динаміка}} = \boxed{\text{Кінематика}} + \boxed{\text{Статика}}$$

Пригадаємо (підрозділ 1.7), що сили можна розділити на дві категорії: активні сили  $\vec{F}_i$  та реакції в’язей  $\vec{R}_j$ :

$$\text{Сили} = \vec{F} + \vec{R}.$$

*Активною* називається сила  $\vec{F}$ , яка, почавши діяти на нерухоме тіло, може привести його в рух. Модуль і напрям кожної активної сили (або їхня залежність від часу, координат рухомої точки і швидкості) відомі заздалегідь і від інших прикладених до тіла сил не залежать:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}).$$

*Реакція*  $\vec{R}$  в’язі тільки обмежує рух і не може його спричинити, тобто вона є “пасивною” силою. Її модуль, а іноді і напрям залежать ще від інших сил, що діють на тіло, і від руху тіла (за відсутності активних сил і руху реакції взагалі не виникають):

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{F}, \vec{V}), \quad \vec{R}(0, 0) = 0.$$

При  $\vec{V} = 0$  маємо статичні реакції, при  $\vec{V} \neq 0$  – динамічні.

*Матеріальна точка* – це геометрична точка, наділена скінченною масою (підрозділ 1.1). У практичних задачах під матеріальною точкою мають на увазі тіло, розмірами і відмінностями в рухах окремих точок якого за умовами і змістом задачі можна знехтувати. Наприклад, Сонце і планети в так званій небесній механіці вважаються точками, хоча заява будь-кого з нас про те, що він живе на “точці”, викликала б посмішку.

Яку б матеріальну точку  $M$  ми не взяли, на її механічний рух впливають інші точки, тіла чи силові поля (одні – більшою мірою, інші – меншою), оскільки у Всесвіті все взаємопов’язане. Нехай  $\vec{F}_i$  – сила, з якою точка  $M_i$  діє на точку  $M$ . *Ізольованою матеріальною точкою* називається матеріальна точка, яка:

1) не взаємодіє з іншими точками чи тілами ( $\vec{F}_i = 0$ );

або

2) коли сили, що діють на точку, взаємно зрівноважуються, тобто рівнодійна цих сил дорівнює нулеві:  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ .

В другому випадку результат впливу на точку  $M$  інших точок  $M_1, \dots, M_n$  (строго кажучи, в цьому випадку точку  $M$  ізольованою назвати не можна) є таким же, як і в першому. Показовим прикладом другого випадку є Лебідь, Рак і Щука: незважаючи на їхні героїчні зусилля, віз (як свідчить відомий байкар) і досі залишається нерухомим. Тому можна також сказати (підрозділ 1.1), що ізольована матеріальна точка – це точка, дією на яку інших точок або тіл можна знехтувати.

## 20.2. Закони динаміки

Механіка спирається на невелику кількість основних законів, які неможливо вивести безпосередньо. До них прийшли довгим шляхом індукції, а одержані з них висновки підтверджуються спостереженнями.

Часто (і небезпідставно) закони динаміки пов’язують з іменем геніального механіка, математика і фізика Ісаака Ньютона (1643 – 1727). Це не означає, звичайно, що він сформулював їх “з чистого аркуша”. В своєму баченні механіки він користувався надбанням інших учених і всіма тими здобутками науки, які на той час були відомі. В принципі всі наведені нижче чотири закони динаміки відіграють роль постулатів, перевірених не тільки прямими експериментами, а й багатомісячною практикою людства. Їх викладено у книзі І. Newton “Principia mathematica philosophiae naturalis” (“Математичні засади натуральної філософії”, 1687).

**1. За перший закон** І. Ньютон прийняв принцип інерції, до сучасного розуміння суті якого на прикладі конкретної механічної системи близько підійшов Г. Галілей (1564 – 1642). Іноді навіть зустрічається перебільшене твердження, що Г. Галілей відкрив цей закон у 1638 р. Г. Галілей не тільки не був автором закону інерції, а за своїм світоглядом і не міг бути ним. В 1638 р. він опублікував книгу “Бесіди...”, в якій є висловлювання про те, що в результаті граничних переходів

від похилої площини до горизонтальної тіло буде рухатись по останній площині зі сталою швидкістю.

Якщо І. Ньютон з його релігійно-метафізичними уявленнями про світ міг виставити свій перший закон як абсолютну істину (аксіому), що відкрилась йому зверху, то Г. Галілей зі світоглядом скептичного емпірика базувався лише на результатах дослідів. Абстрактне апріорне твердження І. Ньютона не може одержати підтвердження на досліді, бо неможливо здійснити повну ізоляцію тіла від дії інших оточуючих його тіл. Ряд блискучих конкретних результатів Г. Галілея, а також його внесок у створення наукової методології механіки настільки значні, що дали підставу деяким авторам писати “механіка Галілея–Ньютона” або “механіка Ньютона–Галілея”.

Сучасне формулювання **принципу інерції** таке:

*Ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою або рівномірного і прямиолінійного руху.*

З кінематики відомо, що будь-який рух є за своєю суттю відносним і потребує обов'язкового посилання на систему відліку, відносно якої він розглядається (принцип відносності руху, див. підрозділ 12.1). Одна й та сама точка відносно однієї системи відліку може перебувати в стані спокою або рухатись рівномірно і прямиолінійно, а відносно іншої системи відліку здійснювати нерівномірний криволінійний рух. Звідси випливає, що *закон інерції* має місце по відношенню до певних конкретних систем відліку, які зветься **інерціальними** (іноді їх умовно називають **нерухомими**).

Закон інерції відображує одну з основних властивостей матерії – перебувати незмінно в русі. Цим законом у науці було відкинуто уявлення про те, що природним станом матерії є спокій (концепція Арістотеля про так звану “косність” матерії).

2. Вплив тіл, що оточують дане тіло, полягає в тому, що вони, взаємодіючи з ним, змінюють його рух (або спричинюють деформації тіла). Ця взаємодія може відбуватись як при безпосередньому співдотикі, так і на віддалі (з погляду класичної механіки Галілея–Ньютона). Ефект взаємодії залежить від властивостей тіл і від їхнього розташування у просторі. Величина, яка є основною мірою механічної взаємодії матеріальних тіл, називається в механіці *силою* (див. підрозділ 1.1).

Поняття сили так само, як і поняття механічного руху, виникло із спостережень і досвіду. Істотна відміна цих понять полягає в тому, що поняття механічного руху цілком піддається математичній абстракції, тоді як поняття сили потребує подальшої абстракції. Очевидно, що в загальному випадку взаємодія між тілами не вичерпується механічними силами. Зокрема, це поняття не може бути застосоване при аналізі хімічних зв'язків між тілами.

Крім зовнішніх впливів (сил), рух будь-якого матеріального тіла визначається ще його інертністю (або інерцією), яка є однією з основних властивостей матерії. Ця якість проявляється у здатності тіла зберігати свій рух за відсутності сил і змінювати його під дією сил не відразу, а поступово і тим повільніше, чим більше речовини (матерії) міститься в тілі. Чим більше речовини в тілі, тим більша його інерція. Величина, яка є мірою інерції тіла, називається **масою**. Сила і маса – основні поняття динаміки. Вони пов'язані між собою, а також із прискоренням точки співвідношенням, що становить суть **другого закону**

**Ньютона**, сформульованого в 1687 р. Зважаючи на його роль, цей закон називається **основним законом динаміки**:

Сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке в інерціальній системі відліку задовольняє умову:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}). \quad (20.1)$$

Для точки постійної маси ( $m=\text{const}$ ) другий закон динаміки формулюється так: Прискорення  $\vec{w}$  точки, зумовлене силою  $\vec{F}$ , в інерціальній системі відліку колінеарне силі:

$$m\vec{w} = \vec{F}. \quad (20.2)$$

Чисто формально другий закон охоплює і перший: якщо  $\vec{F}=0$ , то  $\vec{V}=\text{const}$ . Але вважати перший закон простим наслідком другого не можна, тому що в формулюванні другого закону є поняття (інерціальна система відліку), породжене першим законом.

Коефіцієнт пропорційності  $m$  у виразі (20.2) є мірою інертних властивостей матеріальної точки. Чим він більший, тим менше за модулем прискорення одержує точка під дією однієї й тієї самої сили, тобто тим повільніше змінюється швидкість руху точки під дією даної сили. З цих міркувань коефіцієнт  $m$  називається **інертною масою**. Ще одне поняття (**гравітаційна маса**) можна ввести на основі закону всесвітнього тяжіння, згідно з яким дві матеріальні точки з масами  $m_1$  і  $m_2$ , віддалені одна від одної на величину  $r$ , притягуються з силами, модуль яких дорівнює

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (20.3)$$

де  $f$  – гравітаційна стала.

Нехай  $m_1 = m_0$  – еталонна маса (тобто маса, прийнята за одиницю виміру),  $m_2 = M$  – маса Землі,  $m$  – вимірювана маса, точки з масами  $m_0$  і  $m$  розташовані в одному й тому самому місці земної поверхні,  $F_0$  і  $F_1$  – модулі сил взаємодії з Землею відповідних точок. Тоді

$$F_0 = f \frac{m_0 M}{r^2}, \quad F_1 = f \frac{m M}{r^2}.$$

Звідси

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{m}{m_0}.$$

Отже,

$$m = \frac{F_1}{F_0} m_0. \quad (20.4)$$

Тут  $m$  – гравітаційна маса точки.

Якщо одна й та сама сила з модулем  $F$  діє на точки, які мають інертні маси  $m_0$  і  $m$ , то вона породжує прискорення точок  $\vec{w}_0$  і  $\vec{w}$ , що зв'язані з силою  $\vec{F}$  співвідношеннями типу (20.2), а тому  $m_0 w_0 = m w$ . Звідси

$$m = \frac{w_0}{w} m_0. \quad (20.5)$$

Таким чином, маса однієї й тієї самої матеріальної точки може бути знайдена з двох цілком різних дослідів за формулами (20.4), (20.5). Значення обох мас збігаються на підставі досліджень, проведених у 1971 р., з точністю  $10^{-12}$ . Цей експериментальний факт називається *принципом еквівалентності*. А. Ейнштейн поклав його в основу своєї загальної теорії відносності (теорії тяжіння).

**Отже, маса точки є мірою інерції і, в той же час, мірою кількості речовини, тобто інерція і матеріальність проявляються в механіці як еквівалентні якості.**

Гравітаційну масу можна також відшукати, знаючи вагу тіла (див. підрозділ 10.2). Саме за вагою тіла в повсякденному житті судять про “кількість речовини, що міститься в тілі”. Але вага тіла, як відомо, змінюється залежно від географічної широти місця і висоти над рівнем моря. Кількість же речовини в тілі від цих факторів залежати не може, оскільки вона має визначатись властивостями самого тіла. Тому вагу тіла не можна прийняти за міру кількості речовини. Водночас відношення ваги тіла до прискорення його вільного падіння в безповітряному просторі (пустоті) поблизу поверхні Землі є величиною сталою для даного тіла і не залежить від місця спостереження:  $\frac{P}{g} = m = \text{const}$ . Так знайдену величину

називають **ваговою** (гравітаційною) **масою**.

Виходячи з викладеного, в механіці користуються єдиним терміном “маса”, визначаючи масу як *міру інертності тіла і його гравітаційних властивостей*.

Відмітимо також, що при великих швидкостях  $m = m(V)$ . Так, в спеціальній теорії відносності відома формула

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

де  $m_0$  – маса точки при  $V = 0$ ,  $c$  – швидкість світла у пустоті.

Про одиниці вимірювання маси див. розділ 2 зі Вступу до механіки.

**3. Закон рівності (за модулями) дії та протидії** в динаміці формулюється так само, як і в статиці: *Дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, рівними за модулями і направленими вздовж прямої, що з'єднує ці точки, в протилежні боки*.

Деякі коментарі цього закону наведено у підрозділі 1.5.

**4. Фундаментальне положення в механіці займає закон незалежності дії сил.** Уже з назви цього (**четвертого**) закону випливає, що *дія однієї сили не залежить від дії іншої сили*. Але дія сили виражається прискоренням, якого ця сила надає точці. Отже, прискорення, одержуване точкою від однієї сили, не залежить від того, чи діє на точку (або тіло) ще якась сила, чи не діє. Тому цей закон можна сформулювати ще так:

*Якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то прискорення точки дорівнює сумі тих прискорень (векторній сумі, оскільки прискорення – вектор), які точка отримала б, знаходячись під дією кожної сили зокрема.*

Інакше кажучи, *сили надають точці одне й те саме прискорення і тоді, коли вони прикладаються до нерухомої точки, і тоді, коли вони прикладаються до точки, що рухається довільно.*

Отже, якщо на точку з масою  $m$  діє система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , то кожна сила  $\vec{F}_i$  надає точці прискорення  $\vec{w}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$ . Прискорення, одержуване точкою від дії всієї системи сил, буде

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{w}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Інакше кажучи, стосовно прискорень має місце *принцип суперпозиції* (накладення): результуючий ефект складного процесу діяння являє собою суму ефектів, зумовлених кожним діянням зокрема за умови, що останні взаємно не впливають один на одного. Принцип суперпозиції строго застосовний до лінійних систем. З останньої рівності випливає:

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (20.6)$$

Таким чином, система декількох сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  діє на матеріальну точку так само, як одна сила

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (20.7)$$

Цей наслідок з четвертого закону динаміки являє собою **узагальнений закон паралелограма сил**. Звідси випливає, що систему сил, що діють на точку, можна замінити їхньою рівнодійною.

Як підсумок, наведемо стислі формулювання законів динаміки.

**Перший закон динаміки (принцип інерції).** *Існує така система відліку, в якій матеріальна точка перебуває в спокої або рухається рівномірно і прямолінійно, якщо на неї не діють сили.* Така система відліку називається інерціальною (“нерухомою”).

**Другий (основний) закон динаміки.** *В інерціальній системі відліку прискорення матеріальної точки постійної маси колінеарне силі, що діє на точку.*

**Третій закон динаміки (закон рівності дії та протидії).** *Дії завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежно направлена протидія.*

**Четвертий закон динаміки (закон незалежності дії сил).** *Прискорення, одержуване точкою від певної сили, не залежить від того, чи діє на точку ще якась сила, чи не діє.*

### 20.3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Означення вільного та невольного твердих тіл вводились у підрозділі 1.5 у зв'язку з поняттям в'язей. Наведемо більш деталізовані означення, використовуючи також деякі поняття кінематики.

Якщо незалежним вибором закону зміни сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  і початкових умов (тобто початкового положення і початкової швидкості) матеріальну точку можна примусити рухатись по будь-якій траєкторії з довільними швидкостями, то матеріальна точка називається **вільною**, а її рух – **вільним рухом**. Прикладом може слугувати рух керованого космічного корабля. Нагадаємо, що прискорення, породжене діючими на точку силами, визначається формулою (20.6).

### 20.3.1 Векторний спосіб математичного описування руху точки

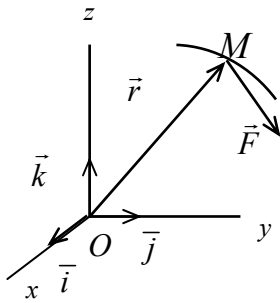


Рис. 20.1

Згідно з підрозділом 12.2 положення матеріальної точки  $M$  в інерціальній системі координат  $Oxyz$  (рис. 20.1) будемо визначати її радіусом-вектором  $\vec{r}$ . Нехай  $\vec{F}$  – рівнодійна прикладених до точки сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , тобто виражається через них формулою (20.7). У загальному випадку сили, що діють на точку, можуть явно залежати від часу, поточного положення точки та її швидкості  $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$ . На підставі формули (12.17) і співвідношення (20.6) диференціальне рівняння руху матеріальної точки маси  $m$  у векторній формі має вигляд

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left( t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right). \quad (20.8)$$

До рівняння (20.8) потрібно приєднати початкові умови

$$\vec{r} \Big|_{t=t_0} = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}} \Big|_{t=t_0} = \dot{\vec{r}}_0 = \vec{V}_0. \quad (20.9)$$

Загальний розв'язок нелінійного (в загальному випадку) диференціального рівняння другого порядку (20.8) має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2),$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі інтегрування. Задача знаходження такого розв'язку диференціального рівняння (20.8), який задовольняє початкові умови (20.9), називається (як відомо з курсу вищої математики) **задачею Коші**. Цей розв'язок є частинним розв'язком диференціального рівняння (20.8) (якщо  $\vec{r}_0$  і  $\vec{V}_0$  – конкретні величини) і має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{V}_0). \quad (20.10)$$

Рівняння (20.10) виражає суть **класичного (лапласового) детермінізму**: існує строго однозначний зв'язок між величинами, які характеризують механічний стан (положення і швидкості) системи в початковий момент часу, і значеннями цих величин в будь-який інший момент часу (попередній або наступний).

Векторний спосіб описування руху точки застосовується, головним чином, в теоретичних дослідженнях.

### 20.3.2 Координатний спосіб математичного описування руху точки

Кінематичні характеристики руху в цьому випадку наведено у підрозділах 12.2, 12.4, 12.7. Розкладемо силу  $\vec{F}$  за базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  інерціальної системи координат  $Oxyz$  (див. рис. 20.1):

$$\vec{F} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z. \quad (20.11)$$

Визначимо положення точки  $M(x, y, z)$  у просторі її декартовими координатами, тоді  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ . Спроектувавши векторні рівності (20.8) і (20.9) на координатні осі, дістанемо:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} = Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} = Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases} \quad (20.12)$$

$$\begin{cases} x|_{t=t_0} = x_0, & \dot{x}|_{t=t_0} = \dot{x}_0 = V_{x_0}, \\ y|_{t=t_0} = y_0, & \dot{y}|_{t=t_0} = \dot{y}_0 = V_{y_0}, \\ z|_{t=t_0} = z_0, & \dot{z}|_{t=t_0} = \dot{z}_0 = V_{z_0}. \end{cases} \quad (20.13)$$

Знаходження закону руху точки зводиться до розв'язування **задачі Коші** (20.12) – (20.13), яка складається із системи звичайних диференціальних рівнянь (20.12) шостого порядку, розв'язаної відносно старших похідних, і початкових умов (20.13). Якщо всі функції  $X, Y, Z$  – лінійні відносно змінних  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ , то маємо систему лінійних диференціальних рівнянь. Якщо ж хоча б одна із цих функцій нелінійно залежить від одного чи кількох із наведених аргументів, то (20.12) – система нелінійних диференціальних рівнянь.

Як при аналітичних дослідженнях, так і для одержання чисельного розв'язку на комп'ютерах, доцільно привести систему (20.13) до **нормальної форми Коші**

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (20.14)$$

Один з найпростіших і найпоширеніших способів для цього полягає у введенні нових шуканих функцій, за які приймають координати точки і проєкції її швидкості:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = y, \quad x_4 = \dot{y}, \quad x_5 = z, \quad x_6 = \dot{z}.$$

Задача Коші (20.12) – (20.13) в нових змінних формулюється так: необхідно знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} X(t, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m} Y(t, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6), \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = \frac{1}{m} Z(t, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6), \end{cases} \quad (20.15)$$

який задовольняє початкові умови

$$\begin{aligned} x_1|_{t=t_0} = x_0, \quad x_2|_{t=t_0} = \dot{x}_0, \quad x_3|_{t=t_0} = y_0, \\ x_4|_{t=t_0} = \dot{y}_0, \quad x_5|_{t=t_0} = z_0, \quad x_6|_{t=t_0} = \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (20.16)$$

В результаті інтегрування системи (20.15) з'являються постійні величини  $C_1, C_2, \dots, C_6$ . Їх вибирають потім так, щоб виконувались умови (20.16).

Величини  $x_i, \dot{x}_i$  називаються *фазовими координатами* або *змінними стану*.

Остання назва пояснюється тим, що знання їх дозволяє відшукати на підставі рівнянь руху (20.12) всю інформацію про механічний стан точки, включаючи прискорення і силу, яка породжує цей стан.



### 20.3.3. Натуральний спосіб математичного описування руху точки

Запишемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на осі  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{\beta}$  натурального тригранника, якого було введено у підрозділі 12.6. Нехай точка  $M$  в момент часу  $t$  має дугову координату  $s = OM = s(t)$ . Згідно з підрозділами 12.4 і 12.7 маємо

$$\begin{aligned} V &= |V_{\tau}|, & V_{\tau} &= \dot{s}, & \vec{w} &= \vec{\tau}w_{\tau} + \vec{\nu}w_{\nu}, \\ w_{\tau} &= \frac{dV_{\tau}}{dt} = \ddot{s}, & w_{\nu} &= \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Розкладемо силу  $\vec{F}$  за базисом  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{\beta}$  (рис. 20.2):

$$\vec{F} = \vec{\tau}F_{\tau} + \vec{\nu}F_{\nu}, \quad F_{\tau} = F \cos \alpha, \quad F_{\nu} = F \sin \alpha. \quad (20.18)$$

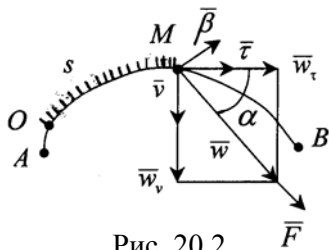


Рис. 20.2

Істотна відміна між рівностями (20.11) і (20.18) полягає в тому, що орти  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  є сталими величинами, тоді як орти  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{\beta}$  змінюються за напрямом. Рівнодійна сила завжди розташована в стиковій площині (див. підрозділ 12.6) траєкторії, оскільки її проекція на бінормаль  $\vec{\beta}$  дорівнює нулю. Спроектувавши векторну рівність (20.6) на осі натурального тригранника і врахувавши залежності

(20.7), (20.17) і (20.18), одержимо такі диференціальні рівняння руху матеріальної точки в натуральній формі:

$$\begin{cases} m \frac{dV_{\tau}}{dt} = F \cos \alpha, \\ m \frac{V^2}{\rho} = F \sin \alpha, \\ 0 = F_{\beta} \end{cases} \quad (20.19)$$

або

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_{\tau}(t, s, \dot{s}), \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_{\nu}(t, s, \dot{s}), \\ F_{\beta}(t, s, \dot{s}) = 0. \end{cases} \quad (20.20)$$

Ці рівняння з успіхом використовував для розв'язування задач динаміки понад два століття тому Л.Ейлер.

### 20.4. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Конкретизуємо означення невільної матеріальної точки, наведене у підрозділі 1.5. Матеріальна точка називається **невільною**, якщо вона не може займати довільних положень у просторі або, маючи можливість рухатись по будь-

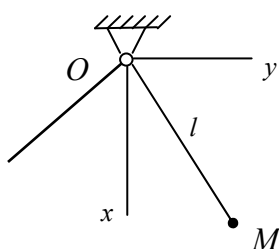


Рис. 20.3

яких траєкторіях, не може мати при цьому довільної швидкості. Обмеження, які заважають свободі руху точки, називаються **в'язями**. З наведеного означення випливає, що в'язі можуть мати геометричне або кінематичне походження.

Прикладом невільної матеріальної точки з геометричною в'яззю може бути точка  $M$ , що міститься на кінці нерозтягнутого стержня довжиною  $l = OM$ , другий кінець якого за допомогою шарніра закріплено в нерухомій точці  $O$  (рис. 20.3). Така механічна система називається *сферичним маятником*. При будь-яких силах, прикладених до точки  $M(x, y, z)$ , вона здійснює рух по поверхні сфери радіуса  $l$ , тобто її декартові координати в будь-який момент часу задовольняють рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (20.21)$$

Рух точки  $M$  є обертанням навколо нерухомої точки  $O$ , тобто є сферичним рухом. Кінематика таких рухів вивчалася у розділі 16.

Кількість змінних, за допомогою яких можна описати рух у цьому прикладі, зменшується з трьох до двох, оскільки одну змінну можна виключити. З рівняння (20.21) одна з декартових координат (наприклад, апліката  $z$ ) може бути виражена через останні дві:

$$z = \pm \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}.$$

Серед трьох координат  $x, y, z$ , які визначають положення точки  $M$  у просторі, незалежними є лише дві. *Геометрична в'язь накладає обмеження не тільки на положення рухомої точки у просторі, а й на її швидкість*. У даному прикладі це проявляється в тому, що швидкість точки  $M$  завжди розташовується в дотичній площині до сфери. Початкові умови (20.13) не можуть бути вибрані як-завгодно: координати точки в початковому положенні повинні задовольняти рівнянню (20.21) сфери, а початкова швидкість точки повинна розташовуватись у дотичній площині.

При розв'язуванні питання фізичної реалізації геометричних і кінематичних в'язей важливе місце посідає **принцип звільнюваності**. Він формулюється так само, як і в статичці (див. підрозділ 1.8): *Невільну матеріальну точку можна розглядати як вільну, замінивши дію в'язей їхніми реакціями*.

Таким чином, істотна відміна невільної точки від вільної полягає в тому, що на невільну точку при її русі, крім активних сил, діють ще реакції в'язей. Тому рівняння (20.2) замінюється таким:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (20.22)$$

де  $\vec{R}$  – рівнодійна реакцій в'язей.

При русі точки по поверхні або кривій реакцію в'язі можна розкласти на нормальну і дотичну складові (див. підрозділ 1.9). Дотична складова реакції являє собою силу тертя. Чим більш гладенькою є поверхня чи крива, тим меншою є дотична складова реакції. Якщо поверхня або крива є абсолютно гладенькими, то реакція в'язі направлена по нормалі. *Ідеальними в'язями* називаються в'язі без тертя (див. підрозділ 1.9). Звичайно сили тертя реальних в'язей включають до складу активних сил. Під реакцією поверхні мають на увазі тоді нормальну

складову реакції. Її модуль наперед не відомий і залежить взагалі як від діючих активних сил, так і (на відміну від статички) від закону руху точки.

Таким чином, основна задача динаміки невіЛЬНОї матеріальної точки полягає в тому, щоб, знаючи активні сили, які діють на точку, і початкові умови, визначити закон руху точки і реакції накладених в'язей.

### 20.5. Дві задачі динаміки

При заданій масі  $m$  точки співвідношення (20.2) можна розглядати як рівняння відносно однієї з двох векторних величин: прискорення  $\vec{w}$  точки або сили  $\vec{F}$ . Перша з цих величин пов'язана із законом руху. Виходячи з цього, можна поставити такі дві взаємно обернені задачі.

**Пряма задача динаміки:** знаючи закон руху точки, знайти діючу на неї силу. При всіх формах математичного описування руху точки (векторній, координатній і натуральній – див. підрозділ 12.2) розв'язування задачі зводиться до подвійного диференціювання:

$$\text{закон руху } \vec{r} = \vec{r}(t) \xRightarrow{\frac{d^2}{dt^2}} \text{сила } \vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}).$$

Тому першу задачу динаміки точки можна вважати досить елементарною, хоча розв'язуючи саме цю задачу І. Ньютон встановив закон всесвітнього тяжіння – див. вираз (20.3).

Для невіЛЬНОї матеріальної точки перша задача динаміки звичайно полягає в тому, щоб, знаючи рух точки і прикладені до неї активні сили, визначити реакцію в'язі.

**Обернена (основна) задача динаміки:** знаючи діючі на точку сили, визначити закон руху точки. Ця задача зводиться до подвійного інтегрування системи диференціальних рівнянь руху точки. Умовно її можна схематизувати у вигляді

$$\text{сила } \vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}) \xRightarrow{\iint} \text{закон руху } \vec{r} = \vec{r}(t).$$

Друга задача набагато складніша від першої і далеко не завжди розв'язується точно.

При невіЛЬНОМУ русі ця задача розпадається на дві: 1) знайти закон руху точки, 2) визначити реакцію накладеної в'язі.

#### Питання для самоконтролю

1. Які відмінності між активними силами та реакціями в'язей?
2. Що називають інертною масою? гравітаційною масою?
3. Сформулюйте аксіому (принцип) незалежності дії сил.
4. Сформулюйте суть класичного (лапласового) детермінізму.
5. В чому полягає задача Коші? Яке значення вона має для механіки?
6. Як звести диференціальні рівняння руху матеріальної точки до нормальної форми Коші?

7. Що називають фазовими координатами точки або змінними стану?
8. В яких випадках доцільно користуватись натуральним способом описування руху точки?
9. Якою є основна задача динаміки невіЛЬНОї матеріальної точки?
10. Сформулюйте дві задачі динаміки.

## **21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії**

### **21.1. Поняття коливальних рухів**

**Коливаннями** матеріальної точки навколо положення рівноваги називаються рухи, при яких точка протягом певних проміжків часу перебуває по чергово по різні боки положення рівноваги – то з одного боку, то з протилежного.

Необхідною (але не достатньою) умовою здійснюваності коливальних рухів є наявність парного елемента (пари), який породжує так звану відновлюючу силу. Під її дією точка, віхилившись від положення рівноваги, прагне повернутись до нього.

Як правило, закони природи виражаються нелінійними математичними співвідношеннями. Це стосується, зокрема, і механічних характеристик пружних або пружнов'язких елементів коливних систем, а також середовища, в якому відбуваються коливання. Вони, як правило, описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Труднощі, пов'язані з точним або наближеним аналітичним інтегруванням останніх, змушують шукати обхідні шляхи. Найбільш вдалим є свідоме обмеження постановки задачі вивченням тих ділянок силових характеристик, які можна з достатньою точністю замінити відрізками прямих ліній. Адже в достатньо малому околі точки неперервну гладеньку функцію можна лінеаризувати, тобто значну кількість глобально нелінійних процесів можна вважати локально лінійними.

**Малими (лінійними)** називаються коливання, що описуються лінійними диференціальними рівняннями. Нижче розглядаються три типи коливань:

- 1) вільні (власні) коливання вздовж прямої лінії;
- 2) коливання в середовищі з опором;
- 3) вимушені коливання.

Коливання точки відбуваються під дією специфічних сил. Сили, які прагнуть повернути точку в положення рівноваги при відхиленнях від нього в той чи інший бік (поновити рівновагу), називаються **відновлюючими**. Прикладами відновлюючих сил є: а) сила, зумовлена пружними властивостями стиснутої або розтягнутої пружини і яка виникає при деформаціях пружини; б) при вертикальних відхиленнях плаваючого понтона від положення рівноваги виникає додаткова (архімедова) сила, яка направлена проти відхилення і яка відіграє роль відновлюючої сили.

Крім відновлюючих сил, в подібних випадках, як правило, одночасно діють також **сили опору**, які залежать від швидкості руху. Такими є: а) тертя між тілом і

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

горизонтальною поверхнею, коли тіло рухається по ній; б) опір середовища, в якому рухається тіло (опір повітря або води в задачі про понтон, що плаває); в) внутрішнє тертя матеріалу пружини.

Найпростішими для дослідження є випадки коливальних рухів, коли відновлююча сила пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, а сила опору пропорційна швидкості точки. Це означає, що в тейлоровських розвиненнях сил беруться лише члени, лінійні відносно відхилення або його похідної. Врахування наступних членів у рядах Тейлора приводить до нелінійних диференціальних рівнянь, точне інтегрування яких у скінченному аналітичному вигляді не завжди можливе.

21.2. Вільні коливання матеріальної точки без урахування опору

Нехай на матеріальну точку діє тільки відновлююча сила. Тіло вагою  $P = mg$  прикріплено до пружини, масою якої нехтуємо. Оскільки тіло здійснює поступальний рух, будемо розглядати його як матеріальну точку (див. розділ 13). При русі точки пружина деформується, внаслідок чого виникає внутрішня

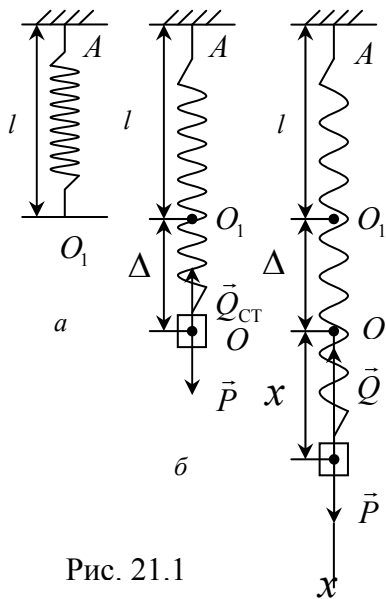


Рис. 21.1

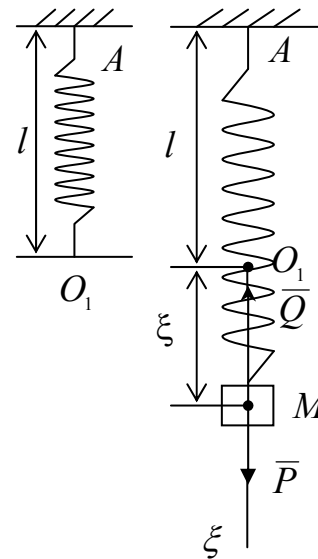


Рис. 21.2

сила пружної реакції, прикладена до точки  $M$  (рис. 21.1). Довжину недеформованої (ненавантаженої) пружини позначимо  $l$  (рис. 21.1, а). Кінець  $A$  пружини закріплено нерухомо. До другого кінця  $O_1$  пружини прикріпимо тіло вагою  $P$ . Тоді пружина розтягнеться на величину  $\Delta$  (рис. 21.1, б). При невеликих значеннях відносного подовження  $\frac{\Delta}{l}$  воно виявляється пропорційним вазі тіла.

Вперше результати відповідних експериментів описав Роберт Гук (1635–1703) у книзі “Про відновлюючу силу ...” (1678), в якій, зокрема, було зроблено заявку на “істинну теорію пружності і цупкості”. Теза “яке подовження, така і сила” – це

якраз те, що входить тепер в інженерну і будівельну практику під назвою “закон Гука”.

Позначимо буквою  $c$  жорсткість пружини, тобто модуль сили, яка змінює довжину пружини (розтягує або стискує пружину) на один метр. Оскільки пружина розтягнута на  $\Delta$  метрів, це означає, що до неї було прикладено силу, модуль якої дорівнює  $Q_{\text{ст}} = c\Delta$ . Нехай точка  $O$  є положенням рівноваги сил  $\vec{P}$  і  $\vec{Q}_{\text{ст}}$ , тобто виконується рівність  $P = Q_{\text{ст}}$ . Таким чином,

$$mg = c\Delta. \quad (21.1)$$

Виберемо початок осі  $x$  в точці  $O$ , а саму вісь  $Ox$  направимо вертикально вниз (рис. 21.1, в). Тоді  $\vec{P} = \vec{i}P$ ,  $\vec{Q} = \vec{i}Q_x$ ,  $Q_x = -|\vec{Q}| = -Q = -c(\Delta + x)$ . На точку  $M$  діють дві сили  $\vec{P}$  і  $\vec{Q}$ . Модуль останньої сили дорівнює  $Q = c(\Delta + x)$ , оскільки на рис. 21.1, в пружину розтягнуто на величину  $\Delta + x$ . Пружина для точки  $M$  є в’язю. Реакція в’язі (відновлююча сила) в даній постановці задачі має дві складові: статичну  $\vec{Q}_{\text{ст}} = -\vec{i}c\Delta$  і динамічну  $\vec{Q}_{\text{д}} = -\vec{i}cx$ . Повна реакція  $\vec{Q} = \vec{Q}_{\text{ст}} + \vec{Q}_{\text{д}}$ .

Точка  $M$  здійснює одновимірний рух, тому з трьох диференціальних рівнянь (20.12) залишається лише перше. Воно має в даному випадку вигляд:

$$m\ddot{x} = P + Q_x,$$

або

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta + x). \quad (21.2)$$

З урахуванням залежності (21.1) рівняння (21.2) спрощується:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (21.3)$$

Сила ваги  $\vec{P}$  в рівнянні руху точки  $M$  не увійшла. Це зумовлено вибором початку координат в положенні статичної рівноваги  $O$  (рис. 21.1, б). Якби початок координат вибрати, наприклад, в точці  $O_1$ , то сила  $\vec{P}$  увійшла б у диференціальне рівняння руху точки. Покажемо це. Розглянемо рух тіла відносно осі  $O_1\xi$  (рис. 21.2). Прикріпивши до нижнього кінця  $O_1$  пружини тіло вагою  $P$ , ми спричинимо подовження пружини на величину  $\xi$ . З міркувань, наведених вище, замість тіла достатньо розглянути рух якої-небудь його точки, наприклад, центра ваги  $M$ . На точку  $M$  діють дві сили  $\vec{P} = \vec{i}_\xi P$ ,  $\vec{Q} = -\vec{i}_\xi c\xi$ , де  $\vec{i}_\xi$  – орт осі  $O_1\xi$ . Тому перше диференціальне рівняння системи (20.12) набуває вигляду:

$$m\ddot{\xi} = P - c\xi,$$

або

$$m\ddot{\xi} + c\xi = P. \quad (21.4)$$

Обидва диференціальні рівняння (21.3) і (21.4) руху точки  $M$  є лінійними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами, однак рівняння (21.3) однорідне, тоді як рівняння (21.4) неоднорідне.

І в механіці, і в математиці дуже часто зустрічаються випадки, коли вдалий вибір системи координат набагато спрощує розв’язування задачі. Можна також сказати, що перехід від однієї системи координат до іншої пов’язаний із заміною шуканих функцій. В даному випадку ця заміна є

$$\xi = x + \Delta. \quad (21.5)$$

Підставивши (21.5) в (21.4) і врахувавши (21.1), дістанемо (21.3).

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

Система з одним ступенем вільності (тобто, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку), що коливається навколо положення рівноваги, називається **осцилятором** (від англійського *oscillation* – коливання). Часто і відповідне диференціальне рівняння називають осцилятором. Осцилятори (21.3) і (21.4) відрізняються тим, що мають різні положення рівноваги. Щоб знайти положення рівноваги, потрібно прирівняти нулеві швидкості і прискорення. З рівнянь (21.3) і (21.4), врахувавши співвідношення (21.1), маємо відповідно:

$$\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$\dot{\xi} = 0, \ddot{\xi} = 0 \Rightarrow \xi = \frac{P}{c} = \frac{mg}{c} = \Delta.$$

Оскільки диференціальне рівняння (21.3) є простішим, ніж (21.4), надалі будемо розглядати саме його.

Сила ваги тіла виключається з диференціального рівняння коливань не тільки тоді, коли коливання вертикальні, а початок координат вибрано в положенні рівноваги, але, зрозуміла річ, також і при горизонтальних коливаннях. На рис. 21.3, *а* зображено пружину, довжина якої в недеформованому стані рівна  $l$ , лівий кінець  $A$  закріплено нерухомо, а до правого кінця прикріплено тіло, яке може вільно (без тертя) ковзати вздовж горизонтальної основи. На рис. 21.3, *б* пружину розтягнуто на величину  $x$ , тому її реакція  $\vec{Q} = \vec{i} Q_x$ ,  $Q_x = -cx$ . На

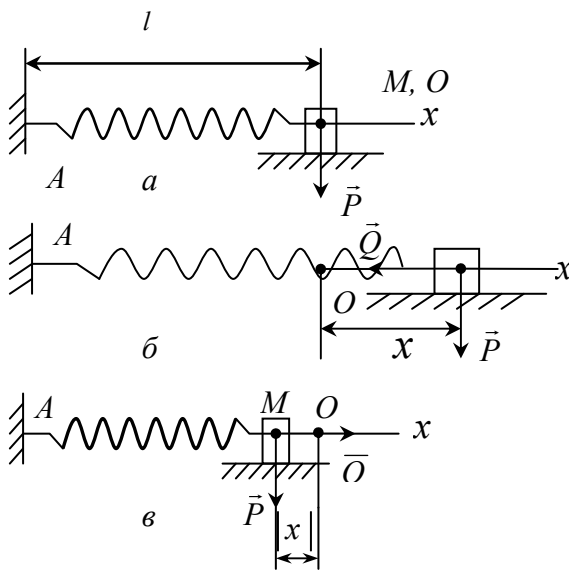


Рис. 21.3

рис. 21.3, *в* пружину стиснуто на величину  $|x|$ , тому для її реакції маємо вираз  $\vec{Q} = \vec{i} Q_x$ ,  $Q_x = c|x| = -cx$ . Отже, в обох випадках  $Q_x = -cx$ . Нагадаємо, що залежність  $Q_x(x)$  є лінійною лише при “малих” значеннях  $|x|$ , при “немалих” же значеннях  $|x|$  функція  $Q_x(x)$  є нелінійною. Крива  $Q_x = Q_x(x)$  має, як правило, експериментальне походження.

Крім реакції  $\vec{Q}$  пружини, на тіло діє сила ваги, прикладена в його центрі ваги  $M$  і направлена вертикально вниз. Оскільки проекція сили  $\vec{P}$  на вісь  $Ox$  рівна нулеві, перше рівняння системи (20.12) в даному випадку має вигляд:

$$m\ddot{x} = Q_x,$$

тобто ми знову приходимо до рівняння (21.3).

Це рівняння є однорідним відносно параметрів  $m$  і  $c$ , тому істотним є лише їхнє відношення. Позначимо

$$\omega^2 = \frac{c}{m}. \quad (21.6)$$

Рівняння (21.3) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (21.7)$$

Інший підхід полягає в тому, що в рівнянні (21.3) вибором нових одиниць вимірювання один з двох параметрів  $m$  і  $c$  можна зробити рівним одиниці. В даному випадку можна покласти в ньому  $m=1$ , а параметр  $c$  віднести до маси точки.

Якщо  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  – лінійно незалежні частинні розв'язки диференціального рівняння (21.7), а  $q_1$  і  $q_2$  – довільні сталі величини, то загальний розв'язок цього рівняння (внаслідок лінійності) є лінійною комбінацією згаданих частинних розв'язків:

$$x(t) = q_1 x_1(t) + q_2 x_2(t). \quad (21.8)$$

Л. Ейлер запропонував шукати нетривіальний частинний розв'язок рівняння (21.7) у формі:

$$x = q e^{\lambda t}, \quad q \neq 0. \quad (21.9)$$

Функція (21.9) є розв'язком рівняння (21.7) тоді і тільки тоді, коли параметр  $\lambda$  задовольняє рівняння

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0. \quad (21.10)$$

Воно називається характеристичним рівнянням і має корені  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ , де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця. Кожному з коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  характеристичного рівняння відповідають такі частинні розв'язки диференціального рівняння (21.7):  $e^{i\omega t}$ ,  $e^{-i\omega t}$ . Оскільки ці функції є лінійно незалежними, на підставі формули (21.8) загальний розв'язок рівняння (21.7) має вигляд:

$$x(t) = q_1 e^{i\omega t} + q_2 e^{-i\omega t}. \quad (21.11)$$

Незручність розв'язку у формі (21.11) полягає в тому, що дійсна функція  $x(t)$  виражається через комплексно значні функції  $e^{i\omega t}$  і  $e^{-i\omega t}$ . Останні є комплексно спряженими. Їхня лінійна комбінація може давати дійсну величину тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти комбінації також є комплексно спряженими величинами. Скористаємось цим положенням, попередньо застосувавши формулу Ейлера, за допомогою якої експоненціальна функція з уявним показником виражається через тригонометричні функції дійсного аргументу:

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t, \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Підставивши формули (21.12) у вираз (21.11), дістаємо

$$x = (q_1 + q_2) \cos \omega t + i(q_1 - q_2) \sin \omega t.$$

Введемо нові постійні величини

$$\begin{cases} C_1 = q_1 + q_2, \\ C_2 = i(q_1 - q_2). \end{cases} \quad (21.13)$$

Розглянемо формули (21.13) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $q_1$  і  $q_2$ . Щоб виразити старі сталі  $q_1$  і  $q_2$  через нові константи  $C_1$  і  $C_2$ , подамо систему (21.13) у вигляді:



21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = C_1, \\ q_1 - q_2 = \frac{C_2}{i} = -C_2 i. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} q_1 = \frac{C_1 - iC_2}{2}, \\ q_2 = \frac{C_1 + iC_2}{2}. \end{cases}$$

Величини  $q_1$  і  $q_2$  справді виявились комплексно спряженими, величини  $C_1$  і  $C_2$  – дійсні числа. Функція  $x(t)$  набуває вигляду:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (21.14)$$

Першої мети досягнуто: справа у виразі (21.14) містяться дійсні функції дійсного аргументу. Оскільки функції  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$  є лінійно незалежними, а  $C_1, C_2$  – довільні постійні величини, то права частина в (21.14) має структуру правої частини у виразі (21.8), тобто функція (21.14) є загальним розв'язком диференціального рівняння (21.7).

Але з погляду практичного використання функцію (21.14) доцільно подати інакше. Замість сталих величин  $C_1$  і  $C_2$  введемо нові сталі величини  $a$  і  $\alpha$  таким чином:

$$\begin{cases} C_1 = a \sin \alpha, \\ C_2 = a \cos \alpha. \end{cases}$$

Вираз (21.14) набуває вигляду:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha). \quad (21.15)$$

Постійні  $a$  і  $\alpha$  в (21.15) визначимо так, щоб виконувались початкові умови:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0. \quad (21.16)$$

З (21.15) і (21.16) дістаємо систему рівнянь для знаходження значень  $a$  і  $\alpha$ :

$$\begin{cases} a \sin \alpha = x_0, \\ a \omega \cos \alpha = \dot{x}_0. \end{cases} \quad (21.17)$$

Хоч невідома  $a$  входить у систему (21.17) лінійно, однак друга невідома  $\alpha$  входить неалгебраїчно: вона є аргументом синуса і косинуса. Останні функції належать до трансцендентних. Трансцендентна система рівнянь (21.17) є досить простою і, на відміну від багатьох інших, може бути розв'язаною точно. Для цього спочатку поділимо друге рівняння (21.17) на  $\omega$ . Піднісши ліву і праву частини нових рівнянь до квадрату і додавши результати, ми виключимо тим самим невідому  $\alpha$ . Поділивши однойменні частини рівнянь, ми виключимо невідому  $a$ . Таким способом знаходимо:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \alpha = \text{Arctg} \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}. \quad (21.18)$$

Отже, розв'язок задачі Коші (21.7) і (21.16) має вигляд:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + \text{Arctg} \frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}\right). \quad (21.19)$$

**Періодом коливань** називається довжина  $T$  проміжку часу, протягом якого точка здійснює одне повне коливання. Покажемо, що рівностями (21.15) або (21.19) виражаються періодичні функції часу. **Періодом функції**  $x(t)$  називається число  $T$ , збільшення (або зменшення) на яке аргументу функції не змінює значення функції:  $x(t+T) = x(t)$ . Отже,

$$\sin[\omega(t+T) + \alpha] = \sin(\omega t + \alpha + \omega T) = \sin(\omega t + \alpha). \quad (21.20)$$

$\omega T = 2k\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Найменше додатне значення  $T$ , при якому виконується умова (21.20), визначається рівністю  $\omega T = 2\pi$ . Таким чином,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (21.21)$$

Врахувавши позначення (21.6), маємо

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (21.22)$$

**Частотою коливань**  $f$  називається кількість коливань за одну секунду. Позначається частота першою літерою англійського *frequency*. Якщо за  $T$  секунд відбувається одне коливання, то за одну секунду відбувається  $\frac{1}{T}$  коливань. Отже,

$$f = \frac{1}{T}. \quad (21.23)$$

Частота коливань вимірюється в герцах:  $[f] = \text{Гц}$ . Один герц відповідає одному коливанню за секунду. Підставивши (21.21) в (21.23), дістаємо

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (21.24)$$

Величину  $\omega$  називають **круговою, циклічною або власною частотою коливань**. З (21.24) випливає, що вона дорівнює кількості коливань за  $2\pi$  секунд.

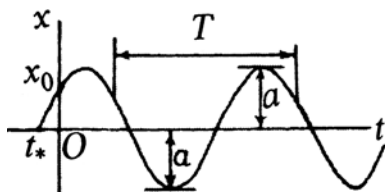


Рис. 21.4

**Амплітудою коливань**  $a$  називається найбільше відхилення матеріальної точки від положення рівноваги в який-небудь бік. Аргумент  $\omega t + \alpha$  функції (21.15) називається **фазою коливань**,  $\alpha$  – початкова фаза.

На рис. 21.4 зображено графік функції (21.15) для випадку  $\dot{x}_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$ . Значення  $t_*$

дістаємо з умови  $\omega t_* + \alpha = 0$ , звідки  $t_* = -\frac{\alpha}{\omega}$ .

Закон руху точки (21.15) може бути подано так:

$$x = a \sin \omega(t - t_*).$$

Рух, що відбувається за законом синуса або косинуса, називається **гармонічним коливанням**. Функції  $\cos nt$  і  $\sin nt$ , де  $n$  – ціле число, називаються **простими гармоніками**. Ряд Фур'є дає змогу (за певних, досить широких умов) функцію з довільним періодом представити у вигляді нескінченної суми простих гармонік.

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

Коливання з невеликими амплітудами, що відбуваються в околі положення рівноваги матеріальної точки і описуються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, відрізняються від інших видів коливань. **Ізохронністю коливань** (від грецького *isos* – рівний, однаковий; *chrónos* – час) називається незалежність періоду власних коливань системи від амплітуди цих коливань. Згідно з першим виразом (21.18) амплітуда власних коливань визначається початковими значеннями координати і швидкості точки та параметрами системи. Малі коливання є ізохронними: їхній період не залежить ні від початкових умов, ні від амплітуди коливань.

Нарешті відмітимо, що роль пружини в даній задачі зводиться тільки до породження відновлюючої сили. Її інерційними характеристиками було знехтувано. Подібні елементи називаються безінерційними, або безмасовими.

21.3. Зведення двох послідовно або паралельно з'єднаних пружних елементів до одного

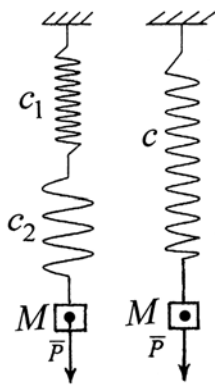


Рис. 21.5

Розглянемо спочатку випадок, коли два пружні елементи з жорсткостями  $c_1$  і  $c_2$  з'єднані **послідовно** (рис. 21.5). При дослідженні малих коливань (і тільки в цьому випадку) систему кількох пружин можна замінити однією пружиною. Нехай  $c$  – приведена жорсткість;  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  – статичні видовження окремо взятих пружин, до нижнього кінця яких підвішене тіло вагою  $P$ ;  $\Delta$  – статичне видовження еквівалентної пружини. На підставі рівності (21.1) маємо:

$$\Delta_1 = \frac{P}{c_1}, \quad \Delta_2 = \frac{P}{c_2}, \quad \Delta = \frac{P}{c}.$$

Внаслідок лінійності коливань критерій еквівалентності доречно сформулювати у вигляді рівності:  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ , тобто

$\frac{P}{c} = \frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_2}$ . Розділивши обидві частини цієї рівності на  $P$ , одержимо:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

Величина, обернена жорсткості пружини, називається її *податливістю*. Співвідношення між жорсткостями пружин є нелінійним, тоді як їхні податливості підлягають закономірності лінійності: податливість еквівалентної (приведеної) пружини дорівнює сумі податливостей складових пружин.

З останньої рівності знаходимо шуканий вираз приведеної жорсткості:

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \quad (21.25)$$

Оскільки

$$c = c_1 \frac{c_2}{c_1 + c_2} < c_1, \quad c = c_2 \frac{c_1}{c_1 + c_2} < c_2,$$

то  $c < \min(c_1, c_2)$ . Кругова частота і період власних коливань виражаються рівностями (21.6) і (21.21), тобто

$$\omega_{\text{осл}}^2 = \frac{1}{m \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)}, \quad T_{\text{осл}} = 2\pi \sqrt{m \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)}. \quad (21.26)$$

При **паралельному** розташуванні пружних елементів (рис. 21.6) статичне зміщення тіла залежить від його положення відносно пружин. Розглянемо спочатку випадок, коли *тіло однаково віддалене від осей пружин (симетричне підвішування)*. Тоді обидві пружини розтягують сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , модулі яких однакові. Вони знаходяться методами статки. Оскільки  $\vec{P}$  є рівнодійною двох

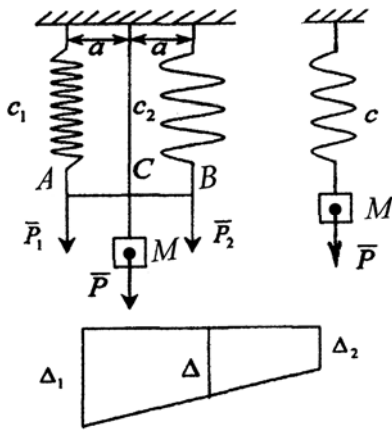


Рис. 21.6

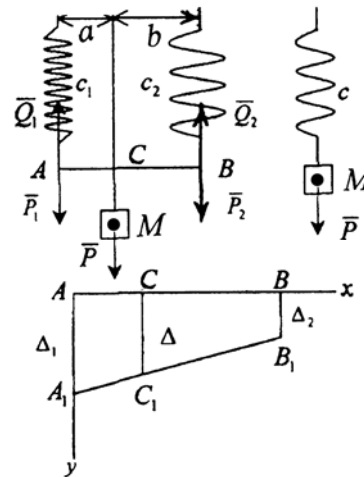


Рис. 21.7

паралельних однаково направлених сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , то згідно з формулами (4.3) і (4.6) маємо рівності:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = P, \\ P_1 a - P_2 a = 0, \end{cases} \quad (21.27)$$

звідки  $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$ . Нехай  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  – статичні видовження пружин, жорсткості яких є  $c_1$  і  $c_2$ . На підставі рівності (21.1) вони виражаються формулами

$$\Delta_1 = \frac{P_1}{c_1} = \frac{P}{2c_1}, \quad \Delta_2 = \frac{P_2}{c_2} = \frac{P}{2c_2}.$$

Позначимо  $c$  – жорсткість однієї пружини, яка замінює дві паралельно з'єднані пружини і яка розтягується силою  $\vec{P}$  (рис. 21.6, справа). Тіло вагою  $P$ , підвішене до неї, зміститься вниз на величину  $\Delta = \frac{P}{c}$ . Її можна виразити через

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

статичні зміщення точок  $A$  і  $B$  (як середню лінію трапеції з основами  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$ ) таким чином:

$$\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}. \quad (21.28)$$

Підставою для подібних міркувань є лінійність усіх співвідношень при розгляді малих коливань. З виразів (21.27) і (21.28) дістаємо:

$$\frac{P}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{P}{2c_1} + \frac{P}{2c_2} \right)$$

або після скорочення на  $P$  і розв'язування відносно  $c$ :

$$c = \frac{4c_1c_2}{c_1 + c_2}. \quad (21.29)$$

Вирази (21.6) для кругової частоти і (21.21) для періоду власних коливань набувають вигляду:

$$\omega_{\text{нар}}^2 = \frac{4c_1c_2}{m(c_1 + c_2)}, \quad T_{\text{нар}} = \pi \sqrt{m \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)}. \quad (21.30)$$

З порівняння між собою виразів (21.26), (21.29) і (21.30) впливають співвідношення

$$\omega_{\text{нар}} = 2\omega_{\text{посл}}, \quad c_{\text{нар}} = 4c_{\text{посл}}, \quad T_{\text{нар}} = \frac{T_{\text{посл}}}{2}.$$

В частинному випадку однакових пружин ( $c_1 = c_2$ ) формули (21.27) – (21.29) переходять в такі:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta, \quad c = 2c_1. \quad (21.31)$$

Більш складним для дослідження є *несиметричне підвішування тіла до двох паралельно з'єднаних пружин* (рис. 21.7). Позначимо віддалі точки  $C$  підвішування тіла до осей пружин через  $a$  і  $b$ , жорсткості пружин дорівнюють  $c_1$  і  $c_2$ . Силу ваги  $\vec{P}$  тіла розкладемо на дві паралельні сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ . Кожна з цих гравітаційних сил, прикладених у точках  $A$  і  $B$  відповідно, зрівноважується відновлюючими силами пружин  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$ , причому за аксіомою 1 з підрозділу 1.4 маємо  $P_1 = Q_1$ ,  $P_2 = Q_2$ . Якщо  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  – статичні видовження пружин під дією сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , то

$$Q_1 = c_1\Delta_1, \quad Q_2 = c_2\Delta_2. \quad (21.32)$$

Замінімо два пружні елементи з жорсткостями  $c_1$  і  $c_2$  одним еквівалентним елементом з (приведеною) жорсткістю  $c$ . Ця заміна, як уже не один раз наголошувалось раніше, стосується в даному разі лише малих коливань, при яких між відповідними характеристиками справедливі лінійні співвідношення. Нехай  $\Delta$  – статичне видовження еквівалентної пружини, тобто

$$P = c\Delta. \quad (21.33)$$

Система трьох паралельних сил ( $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}_1$ ,  $\vec{Q}_2$ ) на рис. 21.7 цілком аналогічна системі ( $\vec{Q}$ ,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ) на рис. 7.5, справа. Тому з формул (7.11) маємо в даному випадку залежності:

$$Q_1 = P \frac{b}{l}, \quad Q_2 = P \frac{a}{l}, \quad (21.34)$$

де  $l = a + b$ . Зміщення  $\Delta$  точки  $C$  є лінійною функцією зміщень  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  точок  $A$  і  $B$ . Щоб знайти цю функцію, складемо в системі координат  $Axy$  рівняння прямої, що проходить через точки  $A_1(0, \Delta_1)$  і  $B_1(l, \Delta_2)$ . Згадавши рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

маємо

$$\frac{x}{l} = \frac{y - \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}. \quad (21.35)$$

Координати точки  $C_1(a, \Delta)$  тотожно задовольняють рівняння (21.35), тому

$$\frac{a}{l} = \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}. \quad \text{Звідси}$$

$$\Delta = \frac{b\Delta_1 + a\Delta_2}{l}. \quad (21.36)$$

Із співвідношень (21.32) – (21.34) маємо

$$\Delta_1 = \frac{P}{c_1} \frac{b}{l}, \quad \Delta_2 = \frac{P}{c_2} \frac{a}{l}, \quad \Delta = \frac{P}{c}. \quad (21.37)$$

Підставивши вирази (21.37) у співвідношення (21.36) і розв'язавши одержане рівняння відносно приведеної жорсткості  $c$ , знаходимо:

$$c = \frac{c_1 c_2 l^2}{c_1 a^2 + c_2 b^2}. \quad (21.38)$$

Це і є шукана формула. При  $a = b$  вона переходить в (21.29), а вираз (21.36) – в (21.28).

В частинному випадку  $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$  маємо:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_1 c_2 l^2}{a \left( c_1 a + c_2 b \frac{b}{a} \right)} = \frac{c_1 c_2 l^2}{a c_2 b \left( 1 + \frac{b}{a} \right)} = c_1 l \frac{l}{a} \frac{1}{\left( 1 + \frac{b}{a} \right)} = \\ &= c_1 l \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \frac{1}{b \left( 1 + \frac{b}{a} \right)} = c_1 \frac{l}{b} = c_1 \left( 1 + \frac{a}{b} \right) = c_1 + \frac{c_2 b}{b} = c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Отже, жорсткість еквівалентної пружини дорівнює сумі жорсткостей складових паралельних пружин:  $c = c_1 + c_2$ . Такою ж, по суті, є і формула (21.31) для випадку симетричного підвішування однакових паралельних пружин, коли  $a = b$ ,  $c_1 = c_2$ .

### 21.4. Вільні прямолінійні коливання матеріальної точки за наявності лінійно-в'язкого опору

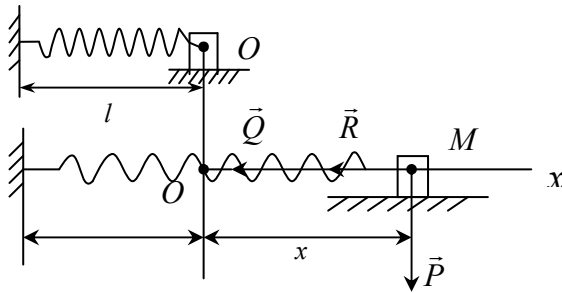


Рис. 21.8

Доповнимо розрахункову схему, зображену на рис. 21.3, врахуванням тієї обставини, що рух реального тіла по поверхні іншого тіла завжди супроводжується тертям. Воно може бути сухим або в'язким (див. підрозділ 9.2). Будемо вважати, що при деформаціях пружини на тіло, прикріплене до одного з її кінців  $O$  (рис. 21.8), починає діяти не тільки відновлююча сила  $\bar{Q}$ , а й сила в'язкого

опору, що лінійно (адже розглядаються малі коливання) залежить від швидкості руху. Оскільки при горизонтальних коливаннях тіла сила ваги  $\bar{P}$  виключається з розгляду (вона перпендикулярна до напрямку руху, і, отже, її проекція на вісь  $Ox$  дорівнює нулеві), то рух тіла відбувається під впливом сил  $\bar{Q}$  і  $\bar{R}$ , причому  $\bar{Q} = \bar{i}Q_x$ ,  $Q_x = -cx$ ,  $\bar{R} = -\mu\bar{V}$ ,  $\bar{V} = \bar{i}\dot{x}$ ,  $\bar{R} = \bar{i}R_x$ ,  $R_x = -\mu\dot{x}$ ,  $\bar{Q} = -\bar{i}cx$ ,  $\bar{R} = -\bar{i}\mu\dot{x}$ .

Коефіцієнт  $\mu$  пропорційності сили в'язкого опору швидкості руху тіла істотно залежить від форми і розмірів тіла та фізичних властивостей середовища, в якому відбувається рух. Перше рівняння (20.12) в даному випадку має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = Q_x + R_x$$

або

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0. \quad (21.39)$$

Рівняння (21.39) є однорідним відносно трьох параметрів  $m$ ,  $\mu$  і  $c$ , тому істотними є лише два їхні відношення. Звичайно за них приймають

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{\mu}{m}. \quad (21.40)$$

Після переходу до параметрів (21.40) рівняння (21.39) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (21.41)$$

Воно відрізняється від (21.7) наявністю члена з першою похідною шуканої функції. Оскільки (21.41) – лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, його загальний розв'язок має вигляд (21.8). Згідно з методом Ейлера частинний розв'язок рівняння (21.41) шукаємо у вигляді (21.9), що приводить до характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0. \quad (21.42)$$

Коренями характеристичного рівняння є

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}.$$

Можливі три випадки:

$$1) h < \omega \Rightarrow \lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2} = -h \pm i\omega_1, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (21.43)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}; \quad (21.44)$$

$$2) h = \omega \Rightarrow \lambda_{1,2} = -h; \quad (21.45)$$

$$3) h > \omega \Rightarrow \lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2} < 0. \quad (21.46)$$

При зміні співвідношення між параметрами  $\omega$  і  $h$  характер коренів

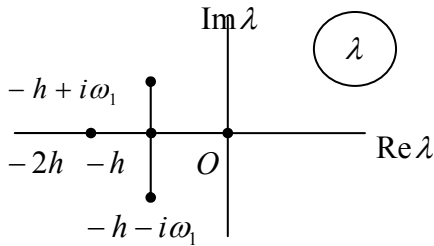


Рис. 21.9

характеристичного рівняння змінюється.

Зафіксуємо  $h$  і будемо змінювати  $\omega$ .

Введемо комплексну площину ( $\lambda$ ), тобто

площину комплексних чисел  $\lambda = \text{Re } \lambda + i \text{Im } \lambda$

(рис. 21.9), де  $\text{Re } \lambda$  – дійсна частина

комплексного числа (латинське *realis* –

дійсний),  $\text{Im } \lambda$  – уявна частина (латинське

*imaginarius* – уявний). Для  $\omega > h$  на площині

( $\lambda$ ) маємо дві точки  $\lambda_1 = -h + i\omega_1$  та

$\lambda_2 = -h - i\omega_1$ . При зменшенні  $\omega$  корені (21.43) прямують назустріч один одному і

при  $\omega = h$  зливаються один з одним, стаючи рівними значенню (21.45). При

подальшому зменшенні кругової частоти ( $\omega < h$ ) корені  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  розходяться,

прямуючи вздовж дійсної осі до значень 0 і  $-2h$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda_1(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda_2(\omega) = -2h.$$

Далі розглянемо кожний із трьох випадків (21.43), (21.45) і (21.46) окремо.

### 21.4.1. Випадок “малого” опору

Прийmemo  $h < \omega$ . Двом кореням (21.43) характеристичного рівняння (21.42)

відповідають такі два лінійно незалежні (це доводиться в курсі вищої математики)

частинні розв’язки диференціального рівняння (21.41):  $e^{(-h+i\omega_1)t}$  та  $e^{(-h-i\omega_1)t}$ .

Відповідно до формули (21.8) загальний розв’язок диференціального рівняння

(21.41) є

$$x = q_1 e^{(-h+i\omega_1)t} + q_2 e^{(-h-i\omega_1)t},$$

або

$$x = e^{-ht} (q_1 e^{i\omega_1 t} + q_2 e^{-i\omega_1 t}). \quad (21.47)$$

Перетворюючи вираз у дужках так само, як функцію (21.11), ми одержимо вираз

(21.15), в якому лише потрібно величину  $\omega$  замінити величиною  $\omega_1$ . Тому права

частина в (21.47) може бути представлена так:

$$x = a e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha). \quad (21.48)$$

Тут  $a$  і  $\alpha$  – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов (21.16). В

даному випадку ці умови приводять до співвідношень:



21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

$$\begin{cases} a \sin \alpha = x_0, \\ a \cos \alpha = \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega_1}. \end{cases} \quad (21.49)$$

Враховуючи повну аналогію між виразами (21.17) і (21.49), на підставі (21.18) маємо

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{\omega_1^2}}, \quad \alpha = \text{Arctg} \frac{\omega_1 x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}. \quad (21.50)$$

Співвідношеннями (21.48) і (21.50) дається розв'язок задачі Коші (21.41) і (21.16). Оскільки  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-ht} = 0$ , а  $\sin(\omega_1 t + \alpha)$  – обмежена функція на всій числовій осі, то для функції (21.48) маємо  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , тобто коливання матеріальної точки з

врахуванням в'язкого тертя затухають. З (21.40) випливає, що це затухання зумовлене саме наявністю тертя: при  $\mu = 0$  (як видно з рис. 21.4) коливання відбуваються з постійною амплітудою, тобто є незатухаючими. Через наявність синусоїдального множника в (21.48) ці затухаючі рухи носять коливальний характер, оскільки точка  $M$  (рис. 21.8) проходить стан рівноваги нескінченну кількість разів в моменти часу  $t'_n$ :

$$\omega_1 t + \alpha = n\pi \Rightarrow t = t'_n = \frac{n\pi - \alpha}{\omega_1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

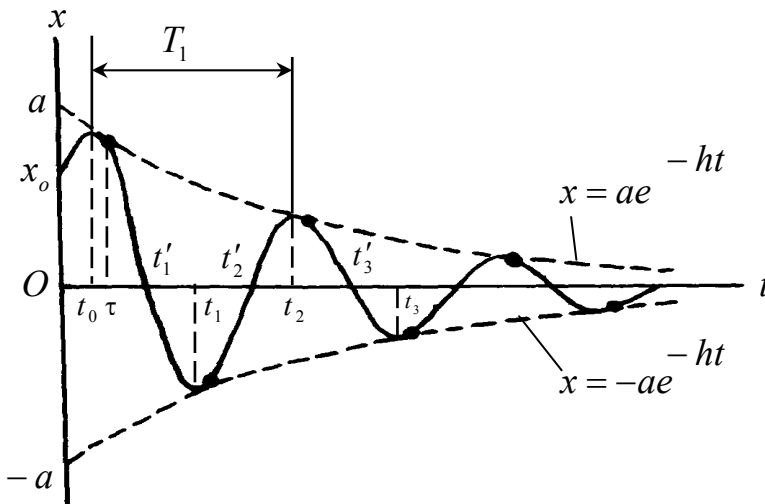


Рис. 21.10

Графік функції (21.48) зображено на рис. 21.10 для  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 > 0$ . Рух точки не є періодичним, оскільки з плином часу послідовні максимальні відхилення точки від положення рівноваги в той чи інший бік (вправо чи вліво на рис. 21.8) зменшуються. Довжина проміжку часу між двома будь-якими послідовними відхиленнями кривої

$x=x(t)$  (наприклад, в бік додатного напрямку осі  $Ox$ ) є сталою величиною, що дорівнює періоду функції  $\sin(\omega_1 t + \alpha)$ . Цю величину  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  умовно називають

періодом затухаючих коливань. Установимо зв'язок між  $T_1$  і періодом (21.21) вільних коливань. Врахувавши залежність (21.44), маємо:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} > T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Більш конкретне співвідношення між величинами  $T_1$  і  $T$  дозволяє встановити використання біноміального ряду:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\left(1 - \frac{h^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{\omega^2} - \frac{3}{8} \frac{h^4}{\omega^4} + \dots\right),$$

тобто

$$T_1 = T + \frac{\pi}{\omega} \frac{h^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{h^2}{\omega^2} + \dots\right).$$

Знайдемо екстремуми функції (21.48). Оскільки вона всюди диференційовна, для відшукування екстремальних значень аргументу  $t_e$  потрібно прирівняти до нуля похідну функції  $x(t)$ :

$$\dot{x} = ae^{-ht} [-h \sin(\omega_1 t + \alpha) + \omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha)] = 0 \Rightarrow h \sin(\omega_1 t_e + \alpha) = \omega_1 \cos(\omega_1 t_e + \alpha) \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(\omega_1 t_e + \alpha) = \frac{\omega_1}{h} \Rightarrow \omega_1 t_e + \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{h} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

З останньої рівності випливає, що  $t_e$  залежить від  $k$ :

$$t_e = t_k = \frac{\operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{h} - \alpha + k\pi}{\omega_1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Першого екстремуму (на рис. 21.10 це максимум) функція (21.48) досягає при  $k=0$ :

$$t_0 = \frac{\operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{h} - \alpha}{\omega_1}. \quad (21.51)$$

Всі інші значення  $t_k$  виражаються через  $t_0$  так:

$$t_k = t_0 + k \frac{\pi}{\omega_1} = t_0 + k \frac{T_1}{2}. \quad (21.52)$$

Звичайними засобами математичного аналізу (або обчислюючи  $\ddot{x}(t_k)$ , або знаходячи знак  $\dot{x}(t)$  в малому околі точки  $t = t_k$ ) можна показати, що при  $t = t_k$  функція (21.48) дійсно досягає екстремуму.

На підставі (21.52) екстремальні значення функції (21.48) дорівнюють

$$x(t_k) = ae^{-ht_k} \sin(\omega_1 t_k + \alpha). \quad (21.53)$$

Звідси

$$x(t_0) = ae^{-ht_0} \sin(\omega_1 t_0 + \alpha), \quad x(t_1) = x\left(t_0 + \frac{T_1}{2}\right) =$$

$$= ae^{-h\left(t_0 + \frac{T_1}{2}\right)} \sin\left[\omega_1 \left(t_0 + \frac{T_1}{2}\right) + \alpha\right] = \quad (21.54)$$

$$= ae^{-ht_0} e^{-h\frac{T_1}{2}} \sin(\omega_1 t_0 + \alpha + \pi) = -ae^{-ht_0} e^{-h\frac{T_1}{2}} \sin(\omega_1 t_0 + \alpha) = -x(t_0) e^{-h\frac{T_1}{2}},$$

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_0 + T_1) = ae^{-h(t_0+T_1)} \sin[\omega_1(t_0 + T_1) + \alpha] = \\ &= ae^{-ht_0} e^{-hT_1} \sin(\omega_1 t_0 + \alpha + 2\pi) = \\ &= ae^{-ht_0} e^{-hT_1} \sin(\omega_1 t_0 + \alpha) = x(t_0) e^{-hT_1}, \dots \end{aligned}$$

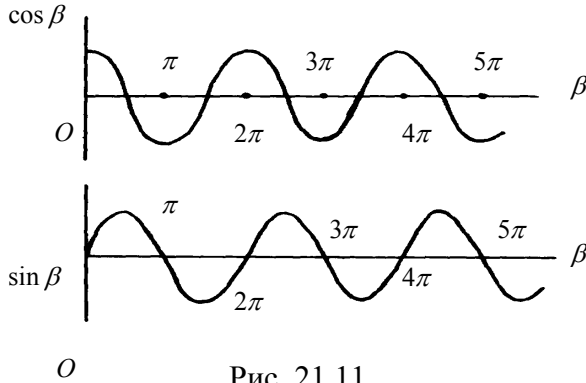


Рис. 21.11

Таким чином, кожне наступне екстремальне значення відрізняється знаком від попереднього, а за модулем зменшується (оскільки воно домножується на експоненту з від'ємним показником). Це твердження повністю узгоджується з формою кривої лінії  $x = x(t)$  на рис. 21.10.

Доповнивши перші три екстремальні значення (21.54) кількома наступними, можна встановити закономірність їх

утворення, яка дозволить оцінити інтенсивність затухання коливань. Зробимо це таким чином. Перш за все подамо вираз (21.53) так:

$$x(t_k) = ae^{-h\left(t_0 + k\frac{T_1}{2}\right)} \sin(\omega_1 t_0 + \alpha + k\pi).$$

Оскільки  $\sin k\pi = 0$ ,  $\cos k\pi = (-1)^k$  (рис. 21.11), то

$$\sin(\omega_1 t_0 + \alpha + k\pi) = \sin(\omega_1 t_0 + \alpha) \cos k\pi + \cos(\omega_1 t_0 + \alpha) \sin k\pi = (-1)^k \sin(\omega_1 t_0 + \alpha)$$

З рівності (21.51) випливає  $\operatorname{tg}(\omega_1 t_0 + \alpha) = \frac{\omega_1}{h}$ , а тому із врахуванням (21.44) маємо:

$$\sin(\omega_1 t_0 + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\omega_1 t_0 + \alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\omega_1 t_0 + \alpha)}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + h^2}} = \frac{\omega_1}{\omega} < 1. \quad (21.55)$$

Отже,

$$x(t_k) = ae^{-ht_0} e^{-kh\frac{T_1}{2}} (-1)^k \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Оскільки  $x(t_0) = ae^{-ht_0} \frac{\omega_1}{\omega}$ , то

$$x(t_k) = (-1)^k x(t_0) e^{-kh\frac{T_1}{2}}.$$

Послідовність кількох перших екстремальних значень функції  $x(t)$  має вигляд:

$$x(t_0) = ae^{-ht_0} \frac{\omega_1}{\omega}, \quad x(t_1) = -x(t_0) e^{-h\frac{T_1}{2}},$$

$$x(t_2) = x(t_0) e^{-hT_1}, \quad x(t_3) = -x(t_0) e^{-\frac{3}{2}hT_1}, \quad \dots$$

Бистроту затухання коливного процесу можна характеризувати або відношенням наступного максимального відхилення вздовж додатного напрямку осі  $Ox$  до попереднього, або відношенням двох послідовних найбільших за модулем відхилень в різні боки. Обидва такі відношення постійні. Покажемо це. В першому випадку

$$q = \frac{x(t_{2n+2})}{x(t_{2n})}, \quad x(t_{2n}) = x(t_0) e^{-2nh\frac{T_1}{2}}, \quad x(t_{2n+2}) = x(t_0) e^{-(2n+2)h\frac{T_1}{2}},$$

$$x(t_{2n+2}) = x(t_{2n}) e^{-hT_1}, \quad q = e^{-hT_1}.$$

Звичайно, такий же результат одержимо, якщо за показник бистроти затухання

взяти величину  $q = \left| \frac{x(t_{2n+3})}{x(t_{2n+1})} \right|$ .

У другому випадку

$$q = \left| \frac{x(t_{n+1})}{x(t_n)} \right|, \quad x(t_n) = (-1)^n x(t_0) e^{-nh\frac{T_1}{2}}, \quad x(t_{n+1}) = (-1)^{n+1} x(t_0) e^{-(n+1)h\frac{T_1}{2}},$$

$$x(t_{n+1}) = -x(t_n) e^{-h\frac{T_1}{2}}, \quad q = e^{-h\frac{T_1}{2}}.$$

В обох випадках послідовність абсолютних значень найбільших відхилень точки від стану рівноваги утворює спадну геометричну прогресію зі знаменником  $q$ . Величина  $q$  в кожному з випадків називається **декрементом коливаний** (від англійського *decrement* – зменшення). Величина  $D = |\ln q|$  називається **логарифмічним декрементом коливаний**:

$$D = \begin{cases} hT_1 & \text{в першому випадку,} \\ \frac{hT_1}{2} & \text{у другому випадку.} \end{cases}$$

Затухання коливаний зумовлено наявністю в законі руху точки (21.48) експоненти з від'ємним показником. При розв'язуванні практичних задач значеннями експоненти  $e^{-\frac{t}{t_*}}$  можна знехтувати для  $t > (4 \div 5)t_*$ . Величина  $t_*$  називається постійною часу перехідного процесу.

Покажемо, що екстремуми функції (21.48) не збігаються з екстремумами функції  $\sin(\omega_1 t_0 + \alpha)$ : вони досягаються раніше, при менших значеннях часу  $t$ . Дійсно, перший екстремум (на рис. 21.10 це – максимум) функція (21.48) досягає при  $t = t_0$ , тоді як згідно з (21.55)  $\sin(\omega_1 t_0 + \alpha) < 1$ . Позначимо значення часу, при якому  $\sin(\omega_1 t + \alpha)$  досягає першого максимуму, через  $\tau$ , тобто

$$\sin(\omega_1 \tau + \alpha) = 1 \Rightarrow \omega_1 \tau + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tau = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\omega_1}.$$

Звідси і з виразу (21.51) маємо

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

$$\tau - t_0 = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\omega_1} - \frac{\arctg \frac{\omega_1}{h} - \alpha}{\omega_1} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega_1}{h}}{\omega_1} > 0,$$

тобто  $\tau - t_0 > 0$ , що й треба було довести:  $\tau > t_0$ .

Саме при  $t = \tau$  (а не при  $t = t_0$ ) крива (21.48) та крива  $A = ae^{-ht}$  мають спільну точку. Стосовно спільної дотичної відмітимо, що крива (21.48) при  $t = t_0$  має горизонтальну дотичну, тоді як дотична до кривої  $A = ae^{-ht}$  утворює з віссю  $Ot$  тупий кут при  $\forall t$ . Спільну дотичну обидві криві мають при  $t = \tau$ , оскільки для кривої (21.48) знаходимо:

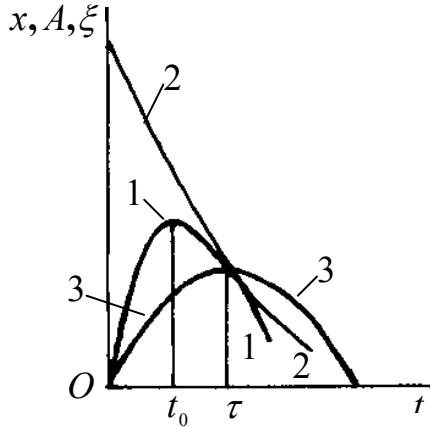


Рис. 21.12

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau} = ae^{-h\tau} [-h \sin(\omega_1\tau + \alpha) + \omega_1 \cos(\omega_1\tau + \alpha)] = -hae^{-h\tau} < 0,$$

тобто кут нахилу дотичної до цієї кривої також тупий. Тут враховано, що  $\sin(\omega_1\tau + \alpha) = 1$ ,  $\cos(\omega_1\tau + \alpha) = 0$ . Взаємне розташування кривих в невеликому околі початку координат показано на рис. 21.12, причому цифри 1 – 3 відносяться до кривих  $x = x(t)$ ,  $A = A(t)$  та  $\xi = a \sin(\omega_1 t + \alpha)$  відповідно.

### 21.4.2. Пограничний (проміжний випадок)

Візьмемо  $h = \omega$ . Згідно з виразом (21.45) характеристичне рівняння (21.42) має в цьому випадку один двократний корінь:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -h$ . Загальним розв'язком диференціального рівняння (21.41) є функція

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-ht}, \quad (21.56)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – довільні сталі величини. Хоч формально добуток  $te^{-ht}$  при  $t \rightarrow +\infty$  веде себе як неозначеність типу  $\infty \cdot 0$ , але яка завгодно степенева функція  $t^\gamma$  (де  $\gamma > 0$ ) змінюється повільніше, ніж показникова функція  $e^{-ht}$  (де  $h > 0$ ), тому  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^\gamma e^{-ht}) = 0$ . Не обмежуючись цими якісними міркуваннями, розкриємо дану неозначеність методом, що рекомендується в курсі вищої математики. Як відомо, неозначеність типу  $\infty \cdot 0$  спочатку зводиться до неозначеності типу  $\frac{\infty}{\infty}$  або типу

$\frac{0}{0}$ , а далі застосовується правило Лопіталя. Використовуючи цю стандартну процедуру, маємо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (te^{-ht}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{ht}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{he^{ht}} = 0.$$

Таким чином,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ .

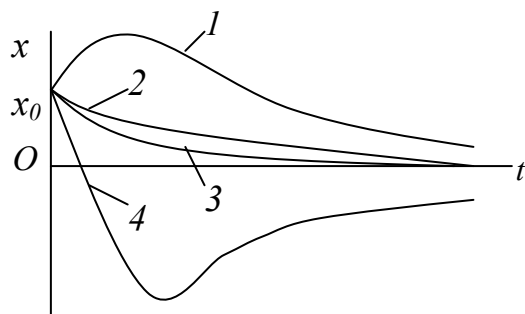


Рис. 21.13

Оскільки  $\dot{x} = -he^{-ht}(C_1 + C_2t) + C_2e^{-ht}$ , то з початкових умов (21.16) маємо  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \dot{x}_0 + hx_0$ , тобто закон руху матеріальної точки має вигляд:  $x = [x_0 + (hx_0 + \dot{x}_0)t]e^{-ht}$ . Сім'ю кривих  $x = x(t)$  зображено на рис. 21.13 для  $x_0 > 0$ , причому криві 1 – 4 побудовано для  $\dot{x}_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $-d < \dot{x}_0 < 0$  та  $\dot{x}_0 < -d < 0$  відповідно. Порівняння

графіків функцій  $x(t)$ , зображених на рис. 21.10 і 21.13, показує на їхню істотну відмінність: в другому випадку крива  $x = x(t)$  має горизонтальну асимптоту  $x = 0$ .

### 21.4.3. Випадок великого опору

Беремо  $h > \omega$ . Згідно з виразом (21.46) маємо  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Тому загальний розв'язок (21.8) диференціального рівняння (21.41) є таким:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (21.57)$$

Обидві експоненти в (21.57) з плином часу згасають, тобто  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Зі збільшенням часу  $t$  відхилення  $x$  точки від положення статичної рівноваги зменшується і (як і в попередньому випадку) асимптотично прагне до нуля.

## 21.5. Вимушені коливання матеріальної точки в середовищі без опору

**Вимушеними** називаються коливання матеріальної точки під дією зовнішньої змінної сили  $\vec{F}(t)$ , яка називається **збурною** (збурювальною, збурюючою) **силою**. При нехтуванні опором такі коливання описуються лінійним *неоднорідним* диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$m\ddot{x} = -cx + F(t). \quad (21.58)$$

У частинному випадку сталої сили  $F(t) \equiv F_0 = \text{const}$  матеріальна точка здійснює вільні коливання навколо зміщеного положення рівноваги  $x = \frac{F_0}{c}$ .

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

---

Оскільки заміною шуканої функції  $x = \frac{F_0}{c} + \xi$  диференціальне рівняння (21.58) зводиться до однорідного диференціального рівняння

$$m\ddot{\xi} = -c\xi,$$

тобто до рівняння типу (21.3), то далі цей випадок не розглядається.

Обмежимося найпростішим, але практично вельми важливим випадком гармонічної сили  $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$ :

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \sin(pt + \beta). \quad (21.59)$$

Це рівняння є однорідним відносно трьох параметрів  $m$ ,  $c$  і  $F_0$ , тому істотними є лише два їхні відношення, наприклад такі:

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{F_0}{m}. \quad (21.60)$$

Рівняння (21.59) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = H \sin(pt + \beta). \quad (21.61)$$

В останнє рівняння входять тільки два параметри:  $\omega^2$  і  $H$ . Вирази (21.60) свідчать про те, що в рівнянні (21.61) параметри  $c$  і  $F_0$  віднесено до маси точки, тобто за рахунок вибору нових одиниць вимірювання один із параметрів  $m$ ,  $c$  і  $F_0$  можна зробити рівним одиниці. В даному випадку в рівнянні (21.59) можна з самого початку покласти  $m = 1$  кг.

### 21.5.1. Випадок нульової початкової фази ( $\beta = 0$ ) збурної сили

Рівняння (21.61) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = H \sin pt. \quad (21.62)$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння будь-якого порядку з постійними (як у даному випадку) чи зі змінними коефіцієнтами (коли параметри рівняння змінюються з часом) складається із суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x = y + X, \quad (21.63)$$

де

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (21.64)$$

$$\ddot{X} + \omega^2 X = H \sin pt. \quad (21.65)$$

Рівнянням (21.64) описуються вільні коливання. Воно відрізняється від (21.7) лише позначенням шуканої функції:  $y$  замість  $x$ . Тому за аналогією з (21.14) маємо

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (21.66)$$

Знаходження розв'язку диференціального рівняння (21.65) залежить від співвідношення між параметрами  $\omega$  і  $p$ .

**1.  $\omega \neq p$ : нерезонансний випадок** – частота вільних (власних) коливань відрізняється від частоти збурної сили. Згідно з методом неозначених коефіцієнтів,

відомим із курсу диференціальних рівнянь, частинний розв'язок рівняння (21.65) шукаємо у вигляді:

$$X = G \sin pt + G_1 \cos pt. \quad (21.67)$$

Підставивши вираз (21.67) у (21.65), ми маємо одержати тотожність:

$$-Gp^2 \sin pt - G_1 p^2 \cos pt + G\omega^2 \sin pt + G_1 \omega^2 \cos pt \equiv H \sin pt.$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти зліва і справа при  $\sin pt$ ,  $\cos pt$ :

$$\begin{array}{l|l} \sin pt & (-p^2 + \omega^2)G = H, \\ \cos pt & (-p^2 + \omega^2)G_1 = 0. \end{array}$$

Оскільки  $-p^2 + \omega^2 \neq 0$ , то  $G = \frac{H}{\omega^2 - p^2}$ ,  $G_1 = 0$ . На підставі (21.63) маємо:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin pt.$$

Довільні сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  знаходимо з початкових умов (21.16). Останні приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = x_0, \\ C_2 \omega + \frac{Hp}{\omega^2 - p^2} = \dot{x}_0. \end{cases}$$

Підставивши замість  $C_1$  і  $C_2$  їхні вирази через  $x_0$  та  $\dot{x}_0$ , одержуємо:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{Hp}{\omega(\omega^2 - p^2)} \sin \omega t + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin pt. \quad (21.68)$$

Таким чином, *вимушені коливання матеріальної точки є суперпозицією (superposition – накладання) трьох груп коливань: 1) вільних коливань* (перші два члени у формулі (21.68)); *2) вимушених коливань з частотою вільних коливань* (третій член) і *3) суто вимушених коливань, або вимушених коливань з частотою збурної сили* (четвертий член в (21.68)).

Амплітуда вимушених коливань, що відбуваються як з частотою  $\omega$ , так і з частотою  $p$ , не залежить від початкових умов. Навіть за нульових початкових умов ( $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ) матеріальна точка буде здійснювати коливання, які відбуваються із власною частотою, при цьому зі збільшенням частоти  $p$  збурної сили амплітуда вимушених коливань прагне до нуля. Отже, дія збурної сили, частота  $p$  якої дуже велика порівняно з частотою  $\omega$  власних коливань, майже не порушує режиму власних коливань.

**2.  $\omega = p$ : резонансний випадок** – частота вільних (власних) коливань дорівнює частоті збурної сили. Згідно з методом неозначених коефіцієнтів, відомим із курсу диференціальних рівнянь, частинний розв'язок рівняння (21.65) у цьому випадку, на відміну від (21.67), шукаємо у вигляді:

$$X = t(A \sin pt + B \cos pt). \quad (21.69)$$



21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

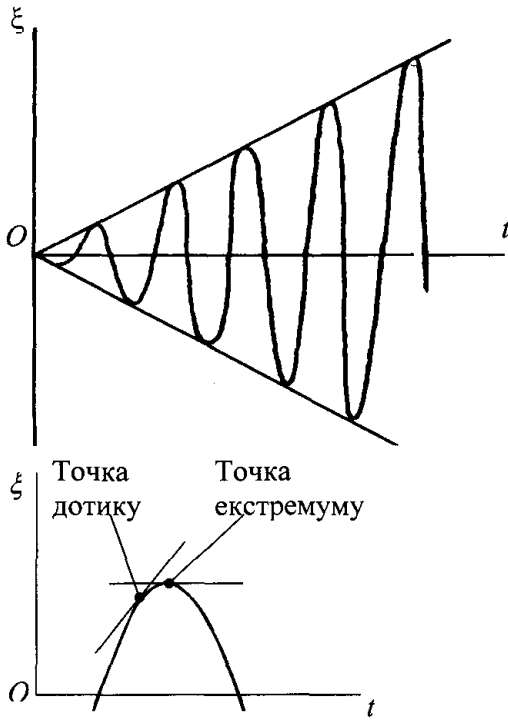


Рис. 21.14

Підставивши вираз (21.69) у (21.65), ми маємо одержати тотожність:

$$2Ap \cos pt - 2Bp \sin pt \equiv H \sin pt, \text{ а}$$

тому коефіцієнти при  $\sin pt$ ,  $\cos pt$  в лівій і правій частинах мусять бути однаковими:

$$\begin{aligned} \sin pt & \Big| & -2Bp & = H \\ \cos pt & \Big| & 2Ap & = 0 \end{aligned}$$

Звідси  $A = 0$ ,  $B = -\frac{H}{2p}$ . На підставі

формул (21.63), (21.66) і (21.69) загальним розв'язком диференціального рівняння (21.62) є функція

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{H}{2p} t \cos pt. \quad (21.70^*)$$

початкових умов (21.16) для постійних інтегрування знаходимо вирази

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{H}{2p\omega}.$$

Тому для загального розв'язку

диференціального рівняння дістаємо вираз

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{H}{2p\omega} \sin \omega t - \frac{H}{2p} t \cos pt. \quad (21.70^*)$$

Цей же результат маємо з виразу (21.68), перейшовши від неозначеності  $\infty - \infty$  до неозначеності  $\frac{0}{0}$  і розкривши останню за правилом Лопітала:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow p} \left[ \frac{\sin pt}{\omega^2 - p^2} - \frac{p \sin \omega t}{\omega(\omega^2 - p^2)} \right] &= \lim_{\omega \rightarrow p} \frac{\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - p^2} = \lim_{\omega \rightarrow p} \frac{\frac{p}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{pt}{\omega} \cos \omega t}{2\omega} = \\ &= \frac{\sin pt}{2p^2} - \frac{t \cos pt}{2p}. \end{aligned}$$

Останній член у формулі (21.70<sup>\*</sup>) має вигляд:

$$\xi = -\frac{H}{2p} t \cos pt.$$

Графік цієї функції зображено на рис. 21.14 зверху. На нижньому рисунку показано його фрагмент. Як і у випадку кривої на рис. 21.10, крива лінія  $\xi = \xi(t)$  спочатку дотикається до відповідної прямої лінії, а потім досягає екстремуму. Вирази подібного типу називаються *секулярними або віковими членами*. Вперше до них прийшли, розв'язуючи певні задачі небесної механіки методом рядів.

Внаслідок того, що амплітуда функції  $\xi(t)$  пропорційна часу і з його плином необмежено зростає, в багатьох інженерних спорудах явище резонансу є небажаним і його слід уникати, підбираючи співвідношення між частотами  $p$  і  $\omega$

так, щоб амплітуди вимушених коливань  $\frac{H}{\omega^2 - p^2}$  у виразі (21.68) були якомога меншими ( $p \gg \omega$ ) навіть при великих значеннях амплітуди  $F_0$  збурної сили. Протилежний приклад маємо в радіотехніці, де резонанс виявляється дуже корисним і використовується для відокремлення сигналів однієї радіостанції від сигналів усіх останніх (настроювання приймача). Тут за рахунок збігу (або близькості) частот  $p$  і  $\omega$  можна отримати інтенсивні вимушені коливання навіть за малої величини амплітуди збурної сили.

### 21.5.2. Випадок ненульової початкової фази ( $\beta \neq 0$ ) збурної сили

Оскільки загальний розв'язок (21.66) однорідного рівняння (21.64) залишається тим же, задача інтегрування диференціального рівняння (21.61) зводиться до знаходження частинного розв'язку рівняння

$$\ddot{X} + \omega^2 X = H \sin(pt + \beta). \quad (21.70)$$

1. Розглянемо спочатку **нерезонансний випадок** ( $\omega \neq p$ ). Частинний розв'язок диференціального рівняння (21.70) шукаємо у вигляді відповідної тригонометричної функції  $X = G \sin(pt + \gamma)$ , де  $G$  і  $\gamma$  – неозначені коефіцієнти. Підставляючи її у (21.70)

$$-Gp^2 \sin(pt + \gamma) + G\omega^2 \sin(pt + \gamma) \equiv H \sin(pt + \beta),$$

з умови тотожного виконання рівності дістаємо  $\gamma = \beta$ ,  $G = \frac{H}{\omega^2 - p^2}$ . Отже, на підставі рівнянь (21.63), (21.66) і (21.70) загальний розв'язок диференціального рівняння (21.61) є таким:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta). \quad (21.71)$$

Початкові умови (21.16) приводять до таких значень сталих інтегрування:

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin \beta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{p}{\omega} \frac{H}{\omega^2 - p^2} \cos \beta.$$

Тому розв'язок (21.71) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} x = & x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - \\ & - \frac{H}{\omega^2 - p^2} \left( \sin \beta \cos \omega t + \frac{p}{\omega} \cos \beta \sin \omega t \right) + \\ & + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta). \end{aligned} \quad (21.72)$$

Кожним рядком цього виразу описуються ті складові результуючого коливання, про які йшлося при аналізі виразу (21.68). Звісно, тепер ці складові мають більш загальний вигляд ( $\beta \neq 0$ ).

Дослідимо останній доданок у виразі (21.71), який описує суто вимушені коливання і не залежить від початкових значень координати і швидкості матеріальної точки. Амплітуда цих коливань дорівнює

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

$$A = \frac{H}{|\omega^2 - p^2|} = \begin{cases} \frac{H}{\omega^2 - p^2}, & \text{якщо } \omega > p, \\ -\frac{H}{\omega^2 - p^2}, & \text{якщо } \omega < p. \end{cases} \quad \text{Звідси } \frac{H}{\omega^2 - p^2} = \begin{cases} A, & \text{якщо } \omega > p, \\ -A, & \text{якщо } \omega < p. \end{cases}$$

Отже,

$$X = \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta) = \begin{cases} A \sin(pt + \beta), & \text{якщо } \omega > p, \\ -A \sin(pt + \beta) = A \sin(pt + \beta - \pi), & \text{якщо } \omega < p. \end{cases}$$

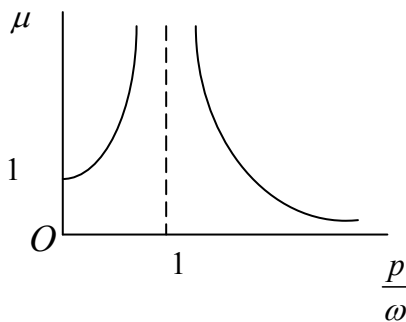


Рис. 21.15

Таким чином, при  $\omega > p$  фаза вимушених коливань збігається з фазою збурної сили. Якщо  $\omega < p$ , то вимушені коливання є зсунутими по фазі від збурної сили на  $\pi$ . Простежимо залежність амплітуди вимушених коливань від відношення частот  $\frac{p}{\omega}$ . Маємо  $A = \frac{H}{\omega^2} \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right|}$ . Щоб установити

фізичний зміст величини  $\frac{H}{\omega^2}$ , залучимо

позначення (21.60):  $\frac{H}{\omega^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{m}{c} = \frac{F_0}{c}$ . Максимальне статичне відхилення матеріальної точки від положення рівноваги буде при дії сили, модуль якої дорівнює максимальному значенню  $F_0$  модуля збурної сили. Отже, з (21.59) маємо

$$cx_{\text{ст}} = F_0, \quad x_{\text{ст}} = \frac{F_0}{c} = \frac{H}{\omega^2}, \quad A = \frac{x_{\text{ст}}}{\left|1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right|}.$$

Введемо коефіцієнт динамічності  $\mu = \frac{A}{x_{\text{ст}}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right|}$ . Він показує, у скільки разів

амплітуда вимушених коливань перевищує статичне відхилення. При  $\frac{p}{\omega} \rightarrow 1$  коефіцієнт динамічності стрімко зростає (рис. 21.15).

2. Тепер перейдемо до **резонансного випадку** ( $\omega = p$ ). Будемо шукати частинний розв'язок диференціального рівняння (21.65) у вигляді  $X = At \sin(pt + \gamma)$ , де  $A$  і  $\gamma$  – неозначені коефіцієнти. Оскільки  $\dot{X} = A \sin(pt + \gamma) + Apt \cos(pt + \gamma)$ , то зазначена функція буде задовольняти рівнянню (тобто перетворювати його в тотожність після її підстановки) тоді і тільки тоді, коли  $2Ap \cos(pt + \gamma) \equiv H \sin(pt + \beta)$ . Нескладне перетворення  $\sin(pt + \beta) = \sin[(pt + \gamma) + (\beta - \gamma)]$  приводить до тотожності

$$2Ap \cos(pt + \gamma) \equiv H \sin(pt + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + H \cos(pt + \gamma) \sin(\beta - \gamma).$$

Звідси

$$\begin{cases} \sin(pt + \gamma) & H \cos(\beta - \gamma) = 0, \\ \cos(pt + \gamma) & 2Ap = H \sin(\beta - \gamma). \end{cases}$$

Таким чином,  $\beta - \gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $A = \frac{H}{2p}$ . Звідси видно, що не можна було шукати функцію  $X$  у вигляді  $At \sin(pt + \beta)$ , оскільки  $\gamma \neq \beta$ . На підставі рівності  $\sin(pt + \gamma) = \sin\left(pt + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - pt - \beta\right) = -\cos(pt + \beta)$  загальний розв'язок диференціального рівняння (21.61) у випадку резонансу має вигляд:

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt - \frac{H}{2p} t \cos(pt + \beta).$$

З початкових умов (21.16) для сталих інтегрування дістаємо вирази  $C_1 = x_0$ ,

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{p} + \frac{H}{2p^2} \cos \beta. \text{ Отже,}$$

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{H}{2p^2} [\cos \beta \sin pt - pt \cos(pt + \beta)] \quad (21.73^*)$$

Звичайно, такий же вираз отримаємо із (21.72), перейшовши від неозначеності  $\infty - \infty$  до неозначеності  $\frac{0}{0}$  і розкривши останню за правилом Лопіталя:

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \omega} \left[ \frac{\sin(pt + \beta)}{\omega^2 - p^2} - \frac{\sin \beta \cos \omega t + \frac{p}{\omega} \cos \beta \sin \omega t}{\omega^2 - p^2} \right] = \\ & = \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{\sin(pt + \beta) - \sin \beta \cos \omega t - \frac{p}{\omega} \cos \beta \sin \omega t}{\omega^2 - p^2} = \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{t \cos(pt + \beta) - \frac{\cos \beta}{\omega} \sin \omega t}{-2p} = \\ & = -\frac{t}{2\omega} \cos(\omega t + \beta) + \frac{\cos \beta}{2\omega^2} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Домноживши цей вираз на  $H$  і врахувавши резонансність випадку ( $\omega = p$ ), одержимо останній член в (21.73\*).

### 21.5.3. Явище биття

Нехай  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ , а частота  $p$  вимушених коливань близька до частоти  $\omega$  власних коливань:  $p \approx \omega$ ,  $\frac{p}{\omega} \approx 1$ ,  $\frac{p + \omega}{2} \approx p$ . З (21.72) маємо:

$$\begin{aligned} x & \approx -\frac{H}{\omega^2 - p^2} (\sin \beta \cos \omega t + \cos \beta \sin \omega t) + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta) = \\ & = \frac{H}{\omega^2 - p^2} [\sin(pt + \beta) - \sin(\omega t + \beta)] = \frac{2H}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{p - \omega}{2} t \cos(pt + \beta) = f_1(t) f_2(t), \end{aligned}$$

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

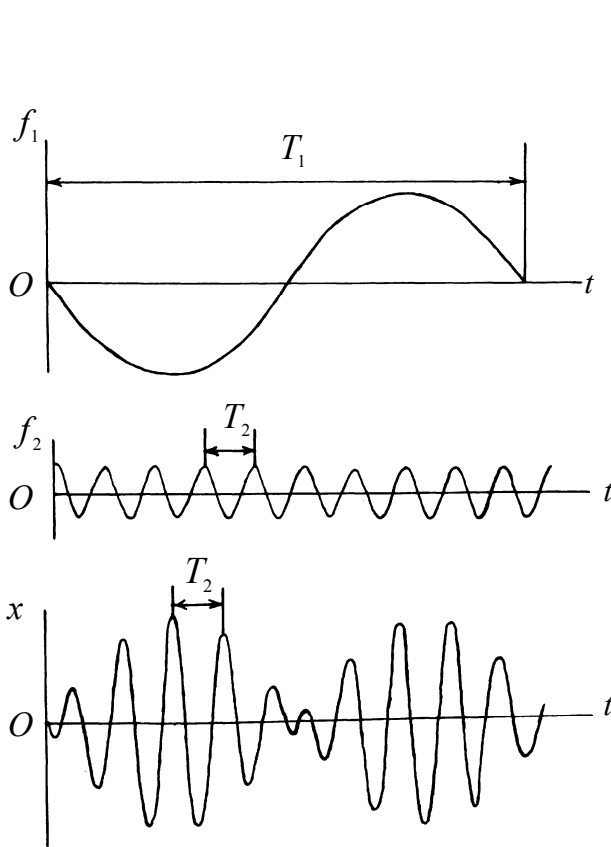


Рис. 21.16

$$f_1(t) = \frac{2H}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{p - \omega}{2} t,$$

$$f_2(t) = \cos(pt + \beta).$$

Обидві функції  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  є періодичними з періодами  $T_1 = \frac{4\pi}{p - \omega}$  і  $T_2 = \frac{2\pi}{p}$  відповідно, причому як період  $T_1$  функції  $f_1(t)$ , так і її амплітуда  $\frac{2H}{\omega^2 - p^2}$  набувають достатньо великих значень. Графіки функцій  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  і  $x(t)$  зображено на рис. 21.16. Періодична функція  $x(t)$  має специфічний характер і описує явище, що зветься **биттям**.

**21.6. Вимушені коливання матеріальної точки в середовищі з лінійно-в'язким опором**

З вигляду кривої лінії на верхній частині рис. 21.14 випливає, що при резонансі амплітуда коливань необмежено збільшується. В дійсності за наявності значного тертя в осях чи деталях машин і опору середовища амплітуда вимушених коливань не зростає пропорційно часові, хоча все ж може досягти великих значень. Важливість подібних питань при дослідженні

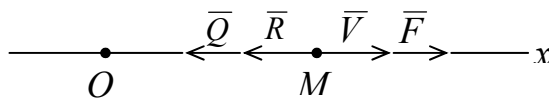


Рис. 21.17

коливальних явищ і в розрахунках на динамічну міцність інженерних споруд змушує розглянути окремо вплив сил опору на вимушені коливання.

Нехай на матеріальну точку  $M$  діють відновлювальна сила  $\vec{Q}$ , сила опору  $\vec{R}$  і збурна сила  $\vec{F}(t)$  (рис 21.17). Враховуючи розташування координатної осі  $Ox$ , маємо  $\vec{Q} = \vec{i} Q_x$ ,  $Q_x = -cx$ ,  $\vec{R} = \vec{i} R_x$ ,  $R_x = -\mu\dot{x}$ ,  $\vec{F} = \vec{i} F$ ,  $F = F_0 \sin(pt + \beta)$ . Диференціальним рівнянням руху матеріальної точки є

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = F_0 \sin(pt + \beta)$$

або

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = H \sin(pt + \beta), \quad (21.73)$$

де

$$2h = \frac{\mu}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{F_0}{m}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (21.73) має структуру (21.63). Його складові  $y$  та  $X$  задовольняють диференціальні рівняння

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (21.74)$$

$$\ddot{X} + 2h\dot{X} + \omega^2 X = H \sin(pt + \beta). \quad (21.75)$$

Характеристичним рівнянням для диференціального рівняння (21.74) є (21.42). Із трьох можливих випадків (21.43), (21.45) і (21.46) розглянемо найтипівіший – випадок відносно малого опору ( $h < \omega$ ). На підставі коренів (21.43) характеристичного рівняння (21.42) загальним розв'язком диференціального рівняння (21.74) є функція

$$y = e^{-ht} (C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t), \quad (21.76)$$

в якій  $\omega_1$  визначається формулою (21.44). Частинний розв'язок диференціального рівняння (21.75) будемо шукати методом неозначених коефіцієнтів. Це можна зробити двома способами.

*Перший спосіб.* Неозначеними коефіцієнтами є  $A$  і  $\gamma$ , а шукана функція має вигляд:

$$X = A \sin(pt + \gamma). \quad (21.77)$$

Підставляючи розв'язок (21.77) в рівняння (21.75), ми маємо отримати тотожність

$$-Ap^2 \sin(pt + \gamma) + 2Aph \cos(pt + \gamma) + A\omega^2 \sin(pt + \gamma) \equiv H \sin(pt + \beta). \quad (21.78)$$

Звідси видно, що, шукаючи розв'язок диференціального рівняння (21.75) з одним неозначеним коефіцієнтом  $A$ , тобто у вигляді функції  $X = A \sin(pt + \beta)$ , ми прийшли б до суперечності: з однієї сторони  $A = \frac{H}{\omega^2 - p^2}$ , з іншої сторони  $A = 0$ .

Повертаючись до тотожності (21.78), подамо її праву частину так:  $\sin(pt + \beta) = \sin[(pt + \gamma) + (\beta - \gamma)]$ . Тому ця тотожність переходить у таку:

$$\begin{aligned} & -Ap^2 \sin(pt + \gamma) + 2Aph \cos(pt + \gamma) + A\omega^2 \sin(pt + \gamma) \equiv \\ & \equiv H \sin(pt + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + H \cos(pt + \gamma) \sin(\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Для невідомих  $A$  і  $\gamma$  маємо систему трансцендентних рівнянь:

$$\begin{cases} A(\omega^2 - p^2) = H \cos(\beta - \gamma), \\ 2Aph = H \sin(\beta - \gamma). \end{cases}$$

Її можна звести до двох незалежних рівнянь:

$$\begin{aligned} A^2(\omega^2 - p^2)^2 + 4A^2 p^2 h^2 &= H^2, \\ \operatorname{tg}(\beta - \gamma) &= \frac{2ph}{\omega^2 - h^2}. \end{aligned}$$

Звідси

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

$$A = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}}, \quad \gamma = \beta - \arctg \frac{2ph}{\omega^2 - p^2}. \quad (21.79)$$

Отже, функція (21.77) має вигляд

$$X = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}} \sin(pt + \beta + \gamma'), \quad (21.80)$$

де  $\gamma' = \gamma - \beta$ .

Другий спосіб побудови частинного розв'язку диференціального рівняння (21.75) є більш стандартним і полягає в тому, що цей розв'язок, замість (21.77), шукаємо у формі:

$$X = M \sin(pt + \beta) + N \cos(pt + \beta), \quad (21.81)$$

де  $M$  і  $N$  – неозначені коефіцієнти. Підставляючи (21.81) в (21.75), одержуємо рівність

$$\begin{aligned} & -Mp^2 \sin(pt + \beta) - Np^2 \cos(pt + \beta) + 2Mph \cos(pt + \beta) - 2Nph \sin(pt + \beta) + \\ & + M\omega^2 \sin(pt + \beta) + N\omega^2 \cos(pt + \beta) = H \sin(pt + \beta). \end{aligned}$$

Вона може бути тотожністю тоді і тільки тоді, коли невідомі  $M$  і  $N$  є розв'язками такої лінійної неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} M(\omega^2 - p^2) - 2Nph = H, \\ 2Mph + N(\omega^2 - p^2) = 0. \end{cases}$$

Ця система має розв'язок

$$M = \frac{H(\omega^2 - p^2)}{\Delta}, \quad N = -\frac{2Hph}{\Delta},$$

де  $\Delta = (\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2$ . Функцію (21.81) представимо в “тригонометричній формі”:

$$\begin{aligned} X &= \frac{H(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2} \sin(pt + \beta) - \frac{2Hph}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2} \cos(pt + \beta) = \\ &= B \sin(pt + \beta - \varepsilon). \end{aligned} \quad (21.82)$$

Тут позначено

$$B \cos \varepsilon = \frac{H(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}, \quad B \sin \varepsilon = \frac{2Hph}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} B^2 &= H^2 \frac{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}{[(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2]^2}, \quad B = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2h^2}} = \sqrt{M^2 + N^2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{2ph}{\omega^2 - p^2} = -\frac{N}{M}. \end{aligned} \quad (21.83)$$

Функція (21.82) збігається з (21.80), оскільки з виразів (21.79) і (21.83) випливає  $B = A$ ,  $\varepsilon = \beta - \gamma$ .

Таким чином, на підставі формул (21.63), (21.76) і (21.80) загальним розв'язком диференціального рівняння (21.73) є функція

$$x = e^{-ht} (C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t) + A \sin(pt + \beta + \gamma'). \quad (21.84)$$

Враховуючи початкові умови (21.16), а також вираз похідної

$$\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t) + \omega_1 e^{-ht} (C_1 \cos \omega_1 t - C_2 \sin \omega_1 t) + Ap \cos(pt + \beta + \gamma'),$$

для постійних інтегрування отримуємо значення

$$C_1 = \frac{1}{\omega_1} [\dot{x}_0 + hx_0 - hA \sin(\beta + \gamma')] - Ap \cos(\beta + \gamma'),$$

$$C_2 = x_0 - A \sin(\beta + \gamma').$$

Отже,

$$\begin{aligned} x = e^{-ht} & \left( \frac{hx_0 + \dot{x}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + x_0 \cos \omega_1 t \right) - \\ & - e^{-ht} \left\{ \frac{A}{\omega_1} [h \sin(\beta + \gamma') + p \cos(\beta + \gamma')] \sin \omega_1 t + A \sin(\beta + \gamma') \cos \omega_1 t \right\} + \\ & + A \sin(pt + \beta + \gamma'). \end{aligned} \quad (21.85)$$

Звідси випливає, що коливальний рух матеріальної точки  $M$  є **суперпозицією трьох груп коливань**: 1) *вільних затухаючих коливань*, що зумовлені відхиленнями точки від положення рівноваги в початковий момент часу (початковими збуреннями); 2) *затухаючих коливань, які мають частоту вільних коливань, але спричинені збурною силою*; 3) *суто вимушених коливань*.

Перші два доданки в (21.85) відповідають вільним і так званим супровідним коливанням. Наявність у них експоненціального множника приводить до того, що вони досить швидко затухають. Через певний проміжок часу, який називають *часом установалення*  $\tau$ , ними практично можна знехтувати. Запишемо (21.85) так:

$$x = x_1 + x_2 = Ce^{-ht} \sin(\omega_1 t + \delta) + A \sin(pt + \beta + \gamma').$$

Реальний процес установалення коливального режиму системи з опором при дії на неї гармонічної збурної сили ілюструють криві лінії на рис. 21.18. Якщо, наприклад, вважати, що коливаннями із власною частотою можна знехтувати, коли їхні розмахи не перевищуватимуть  $0,01A$ , то  $Ce^{-ht} = 0,01A$ ,  
 $-ht = \ln \frac{A}{100C}$ ,  $\tau = \frac{1}{h} \ln \frac{100C}{A}$ .

Отже, чим менший опір, тим час установалення коливань більший. Практично можна вважати, що при  $t > \tau$  коливання є суто вимушеними:

$$x \approx A \sin(pt + \beta + \gamma').$$

Звичайно, це наближення описує лише глобальну конфігурацію графіка функції  $x(t)$ , не вловлюючи її локальних відхилень від синусоїди  $x = A \sin(pt + \beta + \gamma')$ . За наявності опору вимушені коливання зсунуто по фазі на  $\gamma'$  відносно збурної сили. Розглянемо детально їхню амплітуду. З виразів (21.79) маємо:

$$A = \frac{H}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{p^2}{\omega^2} \frac{h^2}{\omega^2}}}. \quad (21.86)$$



21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

Позначимо  $z = \frac{p}{\omega}$ ,  $\lambda = \frac{h}{\omega}$ . Якщо  $x_{\text{ст}}$  – статичне відхилення матеріальної точки від положення рівноваги під дією сталої сили  $\vec{F} = \vec{i}F_0$  (рис. 21.17), то з (21.73) випливає:

$$cx_{\text{ст}} = F_0, \quad \omega^2 x_{\text{ст}} = H, \quad x_{\text{ст}} = \frac{F_0}{c} = \frac{H}{\omega^2}.$$

Величина  $x_{\text{ст}}$  показує, на якій віддалі від притягувального центра  $O$  (рис. 21.17) матеріальна точка  $M$  буде перебувати в рівновазі під дією відновлювальної сили  $\vec{Q} = -\vec{i}cx$  і постійної збурної сили  $\vec{F} = \vec{i}F_0$ . В нових позначеннях амплітуду (21.86) збурної сили можна подати так:

$$A = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}}.$$

Введемо коефіцієнт динамічності

$$\mu = \frac{A}{x_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}},$$

який характеризує динамічний ефект, зумовлений періодичною збурною силою. Перш за все дослідимо функцію  $f(z) = (1-z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2$ , тоді  $\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}$ . Її

перша і друга похідні мають вигляд:

$$f'(z) = 4z[z^2 - (1-2\lambda^2)],$$

$f''(z) = 4[3z^2 - (1-2\lambda^2)]$ . Стационарними

для неї є точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = \sqrt{1-2\lambda^2}$  (остання за умови  $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ). Можуть

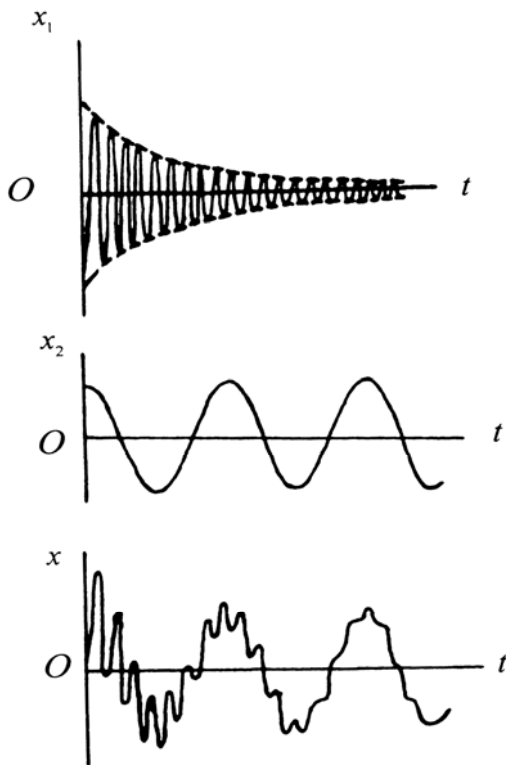


Рис. 21.18

зустрітись кілька випадків.

Якщо  $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , то

$$f''(0) = -4(1-2\lambda^2) < 0 \Rightarrow f(0) = \max f(z) = \min \mu(z) = 1,$$

$$f''(z_2) = 8(1-2\lambda^2) > 0 \Rightarrow f(z_2) = \min f(z) = 4\lambda^2(1-\lambda^2),$$

$$\mu(z_2) = \frac{1}{\sqrt{f(z_2)}} = \max \mu(z) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

При  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$  знаходимо:

$$z_2 = z_1 = 0, \quad f'(z) = 4z^3, \quad f''(z) = 12z^2, \quad f'''(z) = 24z, \quad f^{IV}(z) = 24,$$

$$f(z) = 1 + \frac{24}{4!}z^4 = 1 + z^4, \quad f(0) = \min f(z) = 1.$$

Нехай, нарешті,  $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Тоді

$$f''(0) = -4(1 - 2\lambda^2) > 0 \Rightarrow f(0) = \min f(z) = \max \mu(z) = 1.$$

Отже, ми маємо всі підстави побудувати сім'ю кривих  $\mu = \mu(z)$ , параметризованих безрозмірним відношенням  $\lambda$ . Її, а також залежність  $\beta - \gamma$  від  $z$ , де  $\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{2\lambda z}{1 - z^2}$ , показано на рис. 21.19. Аналізуючи конфігурацію кривих ліній, побудованих для конкретних числових значень параметра  $\lambda$ , слід мати на

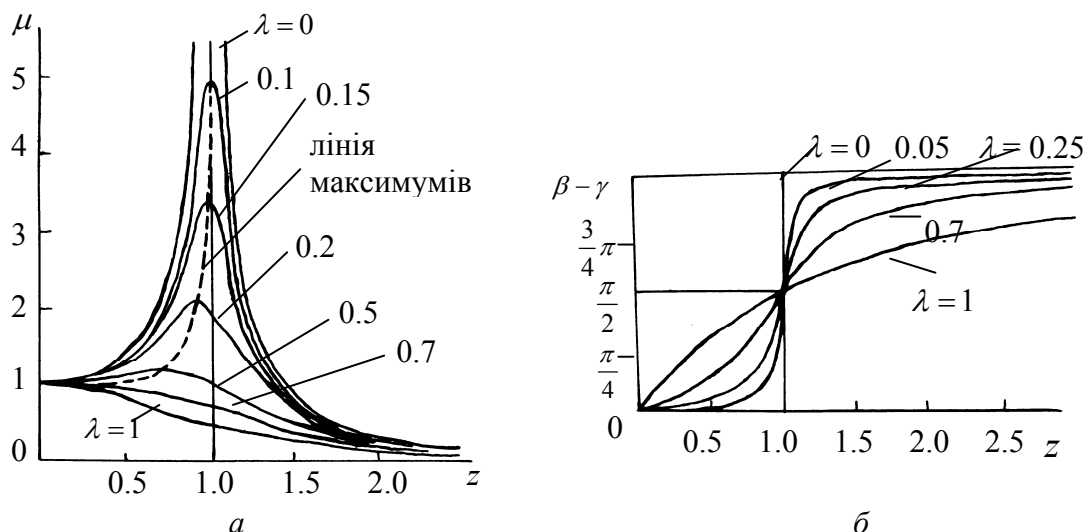


Рис. 21.19

увазі, що точному значенню  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$  відповідає таке наближене значення:

$\lambda \approx 0.707$ . Амплітуда вимушених коливань при значеннях  $z$ , достатньо великих, а також достатньо малих порівняно з одиницею дуже слабо залежить від опору середовища.

При  $z$  близьких до 1 вплив опору є дуже істотним. Якщо  $z$  набуває великих значень, тобто частота збурної сили значно перевищує власну частоту коливної системи, то амплітуда вимушених коливань досить мала.

Штрихова лінія на рис. 21.19, *а* проходить через точки максимумів функції  $\mu(z)$  при різних  $\lambda$ . Максимальних значень ця функція досягає при  $z = z_2 = \sqrt{1 - 2\lambda^2}$ . Тому це значення  $z$  інколи називають резонансним. Інші ж автори резонансним, як і раніше, називають випадок  $z = 1$ , тобто  $p = \omega$ . В останньому випадку максимум амплітуди є зсунутим відносно точки резонансу. Цей зсув, як правило, буває невеликим, оскільки  $\lambda \ll 1$ . Компромісний погляд полягає в тому, щоб областю резонансу умовно називати область швидкого зростання амплітуд.

21.7. Ілюстрація впливу системи координат на методику дослідження коливальних рухів

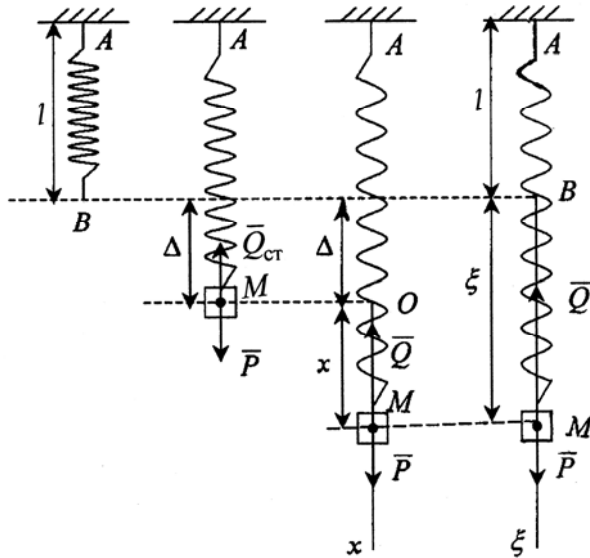


Рис. 21.20

Істотна залежність характеру спостережуваного руху (а отже, і системи диференціальних рівнянь (20.12), що його описує) від системи координат декларується принципом відносності руху (підрозділ 12.1). Тому наведені нижче відомості з ідейних міркувань не є чимось новим: про це вже йшлося в підрозділі 21.2. Зокрема, вільні коливання (коливання навколо положення рівноваги внаслідок початкових збурень) можуть описуватись неоднорідними лінійними диференціальними рівняннями, якщо початок осі координат вибрати не в положенні рівноваги. Мета цього підрозділу – відтінити деякі математичні особливості методики дослідження

коливань в різних системах координат.

**Задача.** Пружина  $AB$  (рис. 21.20), закріплена одним кінцем в точці  $A$ , є такою, що для видовження (стиснення) її на 1 м необхідно прикласти в точці  $B$  при статичному навантаженні силу з модулем 19,6 Н. В певний момент часу до нижнього кінця  $B$  недеформованої пружини підвішують гирю  $M$  з масою 0,1 кг і відпускають її без початкової швидкості.

Нехтуючи масою пружини, написати рівняння подальшого руху і вказати амплітуду і період її коливань. Відповідно до позначень, прийнятих у підрозділі

21.2, маємо  $c = 19,6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ ,  $m = 0,1$  кг.

*Традиційний підхід.* Спочатку віднесемо рух гирі до осі  $Ox$ , проведеної вертикально вниз із положення  $O$  статичної рівноваги гирі. На підставі підрозділу 21.2 основні співвідношення задачі та її розв'язок мають вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{P} = \vec{i}P, \quad P = mg, \quad \vec{Q} = -\vec{i}Q, \quad Q = c(\Delta + x) = Q_{cm} + cx, \quad mg = c\Delta \equiv Q_{cm}, \\ m\ddot{x} = P - Q, \quad m\ddot{x} = mg - c(\Delta + x), \quad m\ddot{x} + cx = 0, \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \\ \begin{cases} x|_{t=0} = -\Delta, & x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, & C_1 = -\Delta, \quad C_2 = 0, & x = -\Delta \cos \omega t, \\ \dot{x}|_{t=0} = 0; & \Delta = \frac{mg}{c} = 0,05\text{м}, & T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 0,45\text{с}, & a = \max|x(t)| = \Delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Графік функції  $x(t)$  наведено на рис. 21.21. Середнє значення функції  $x(t)$  на проміжку  $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$  обчислюємо за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi/\omega} \int_0^{\pi/\omega} x(t) dt = -\frac{\Delta}{\pi/\omega} \int_0^{\pi/\omega} \cos \omega t dt = 0.$$

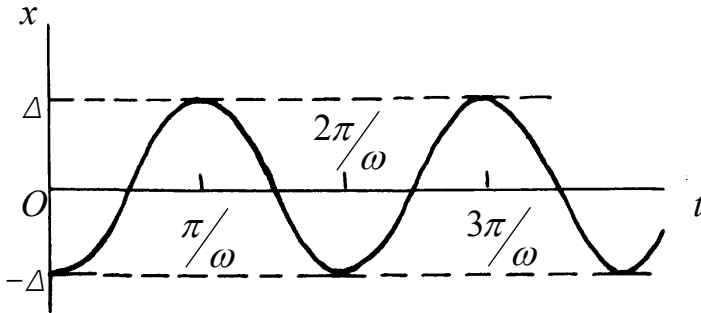


Рис. 21.21

$$x_2 = \dot{x}:$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1. \end{cases} \quad (21.87)$$

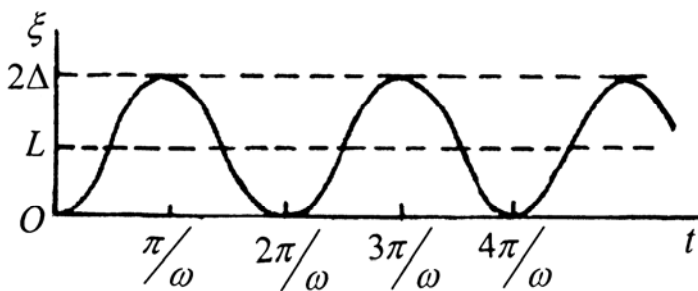


Рис. 21.22

Воно збігається з абсцисою положення рівноваги.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння (21.7) вільних коливань матеріальної точки можна звести до системи двох лінійних однорідних рівнянь в нормальній формі Коші відносно функцій  $x_1 = x$ ,

Змінні  $x_1$  і  $x_2$  називаються фазовими змінними або змінними стану. Щоб знайти положення рівноваги, потрібно прирівняти до нуля праві частини системи (21.87):  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0$ , тобто  $x_* = 0$ ,  $\dot{x}_* = 0$ .

*Нетрадиційний підхід.*

Віднесемо рух гирі до осі

$B\xi$ , проведеної вертикально вниз із кінця  $B$  недеформованої пружини (рис. 21.20). На підставі підрозділу 21.2 основні співвідношення задачі та її розв'язок мають вигляд:

$$\vec{P} = \vec{i}_\xi P, \quad P = mg, \quad \vec{Q} = -\vec{i}_\xi Q, \quad Q = c\xi, \quad m\ddot{\xi} = mg - c\xi, \quad \begin{cases} \xi|_{t=0} = 0, \\ \dot{\xi}|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\xi = K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2}, \quad K_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{mg}{c} = -\Delta, \quad K_2 = 0,$$

$$\xi = -\Delta \cos \omega t + \Delta = \Delta(1 - \cos \omega t) = 2\Delta \sin^2 \frac{\omega t}{2}.$$

Якщо рух гирі розглядати відносно осі  $Ox$ , то диференціальне рівняння руху є однорідним, а початкові умови – ненульовими. Зв'язок між змінними  $x$  та  $\xi$  дається формулою (21.5). Знайдемо середнє значення функції  $\xi(t)$  на проміжку

$$\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]:$$

21. Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги вздовж прямої лінії

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\pi/\omega} \int_0^{\pi/\omega} \xi(t) dt = \frac{\Delta}{\pi/\omega} \int_0^{\pi/\omega} (1 - \cos \omega t) dt = \frac{\Delta \omega}{\pi} \left( \frac{\pi}{\omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^{\pi/\omega} \right) = \Delta.$$

Графік функції  $\xi(t)$  наведено на рис. 21.22. Її коливання відбуваються навколо середнього значення  $\bar{\xi} = \Delta$ . Воно збігається, як показано у підрозділі 21.2, з абсцисою положення рівноваги в системі координат  $B\xi$ . Якщо ввести нові шукані функції  $\xi = x_1$ ,  $\dot{\xi} = x_2$ , то замість одного лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку одержимо систему двох лінійних неоднорідних рівнянь у нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + g. \end{cases} \quad (21.88)$$

Щоб знайти положення рівноваги, потрібно, як і раніше, прирівняти нулеві праві частини системи (21.88):  $x_2^* = 0$ ,  $-\omega^2 x_1^* + g = 0$ , тобто  $\xi_* = \frac{g}{\omega^2} = \Delta$ ,  $\dot{\xi}_* = 0$ .

### Питання для самоконтролю

1. Що необхідно для виникнення коливань точки?
2. В якому сенсі коливання точки вважаються малими?
3. Що називають осцилятором?
4. В чому полягає ізохронність коливань?
5. Що таке лінеаризація функції?
6. В якому сенсі і коли два послідовно з'єднані пружні елементи можна вважати еквівалентними одному?
7. Як знайти жорсткість еквівалентної пружини при симетричному підвішуванні тіла до двох паралельно з'єднаних пружин з неоднаковими жорсткостями?
8. Те ж саме при несиметричному підвішуванні.
9. Коли і для чого вводиться декремент коливань?
10. Як впливає величина сил лінійнов'язкого тертя на характер перехідного процесу матеріальної точки?
11. Чи може матеріальна точка здійснювати коливання при нульових початкових умовах і наявності збурної сили?
12. Назвіть складові вимушених коливань матеріальної точки.
13. В чому полягає резонанс при лінійних коливаннях і який характер руху при цьому?
14. Як впливає ненульова початкова фаза збурної сили на характер коливань в нерезонансному випадку? у резонансному випадку?
15. Що таке явище биття?
16. Що називають коефіцієнтом динамічності?
17. Як впливає вибір системи відліку на методику дослідження коливальних рухів?

## 22. Теорема про міри руху точки та їх застосування

У декартовій прямокутній системі координат рух вільної матеріальної точки описується системою звичайних диференціальних рівнянь (20.12) шостого порядку. Її інтегрування в аналітичному вигляді можливе лише в примітивних випадках. Давно, однак, помічено, що про рух точки можна скласти часткову, а іноді і повну уяву, якщо ввести до розгляду специфічні скалярні і векторні величини – так звані **міри руху**.

Нижче наводяться спеціальні перетворення диференціальних рівнянь руху, які приводять до того, що в різних теоремах виділено і зв'язано між собою ті чи інші міри рухів. У деяких випадках із цих теорем можна одержати перші інтеграли диференціальних рівнянь руху, за допомогою яких понизити потім порядок системи рівнянь (20.12). Ці теореми, як і рівняння руху (20.12), описують поведінку точки під дією будь-яких сил (у загальному випадку). Однак вибір конкретної міри руху зумовлює доцільність застосування тієї чи іншої теореми до певних класів рухів.

Диференціальні рівняння руху (20.12) мають локальний характер. Деякі із теорем про міри руху можуть мати як локальний характер – диференціальна форма теореми, так і глобальний (або інтегральний) характер – скінченна форма теореми.

### 22.1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки (теорема імпульсів)

#### 22.1.1. Диференціальна форма теореми

Кількістю руху матеріальної точки  $M$  з масою  $m$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно певної інерціальної системи відліку, називається векторна величина  $\vec{q} = m\vec{V}$  (рис. 22.1). Якщо  $m = const$ , то  $m\vec{w} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \frac{d\vec{q}}{dt}$ . Тому рівність

(20.2) можна подати у формі

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}, \quad (22.1)$$

де  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – рівнодійна прикладених до точки

сил. І. Ньютон сформулював другий закон динаміки у вигляді, придатному і для точки змінної маси  $m = m(t)$ . В сучасних термінах це формулювання, яке основане на рівностях (20.1) і (22.1), звучить так:

*Швидкість зміни (похідна за часом) кількості руху матеріальної точки, яка (кількість руху) обчислена відносно певної інерціальної системи відліку, дорівнює прикладеній силі (або рівнодійній прикладених сил, якщо цих сил декілька).*

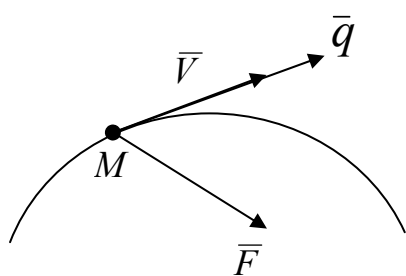


Рис. 22.1

У формулі (22.1)  $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}) = \vec{F}[t, \vec{r}(t), \vec{V}(t)]$ . Будемо розглядати ліву частину не як результат дії одного оператора  $\left(\frac{d}{dt}\right)$  на функцію  $\vec{q}(t)$ , а як результат послідовного виконання трьох операцій: 1) надаємо незалежній змінній  $t$  певного приросту  $\Delta t = dt$ , 2) знаходимо відповідний приріст функції  $\Delta \vec{q}$  і його диференціал  $d\vec{q}$  як головну частину приросту:  $\Delta \vec{q} = d\vec{q} + o(d\vec{q})$ , 3) ділимо  $d\vec{q}$  на  $dt$ . Тоді рівність (22.1) можна подати так:

$$d\vec{q} = \vec{F}dt. \quad (22.2)$$

Назвемо добуток  $\vec{F}dt$  **елементарним імпульсом сили  $\vec{F}$** , тобто імпульсом сили  $\vec{F}$  за нескінченно малий проміжок часу. Отже, *диференціал кількості руху матеріальної точки відносно певної інерціальної системи відліку дорівнює елементарному імпульсу рівнодійної прикладених до точки сил*:

$$d(m\vec{V}) = \vec{F}dt. \quad (22.3)$$

### 22.1.2. Скінченна (інтегральна) форма теореми

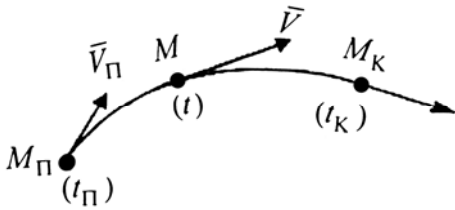


Рис. 22.2

Розглянемо тепер рух матеріальної точки  $M$  на скінченному проміжку часу  $[t_{\Pi}, t_K]$ . Нехай (рис. 22.2)

$$\vec{V}|_{t=t_{\Pi}} = \vec{V}_{\Pi}, \quad \vec{V}|_{t=t_K} = \vec{V}_K.$$

Вважаючи  $m = \text{const}$ , проінтегруємо за час руху обидві частини рівності (22.3):

$$m \int_{\vec{V}_{\Pi}}^{\vec{V}_K} d\vec{V} = \int_{t_{\Pi}}^{t_K} \vec{F}dt$$

або

$$m\vec{V}_K - m\vec{V}_{\Pi} = \vec{S}, \quad (22.4)$$

де

$$\vec{S} = \int_{t_{\Pi}}^{t_K} \vec{F}dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{\Pi}}^{t_K} \vec{F}_i dt = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i.$$

Величина  $\vec{S}_i = \int_{t_{\Pi}}^{t_K} \vec{F}_i dt$  є імпульсом сили  $\vec{F}_i$  за проміжок часу  $[t_{\Pi}, t_K]$ , а величина  $\vec{S}$

є імпульсом рівнодійної за той же проміжок часу. Введемо позначення  $\vec{q}_{\Pi} = m\vec{V}_{\Pi}$ ,  $\vec{q}_K = m\vec{V}_K$ ,  $\Delta \vec{q} = \vec{q}_K - \vec{q}_{\Pi}$ . Тоді рівність (22.4) можна записати так:

$$\Delta \vec{q} = \vec{S}. \quad (22.5)$$

Таким чином, *приріст кількості руху матеріальної точки (обчисленої відносно певної інерціальної системи відліку), якою точка набула за час руху, дорівнює імпульсу рівнодійної прикладених до точки сил за цей проміжок часу*.

Стосовно проміжку часу  $[0, t]$ , якщо  $\vec{V}|_{t=0} = \vec{V}_0$ , маємо:

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (22.6)$$

У проєкціях на осі декартової прямокутної системи координат  $Oxyz$  рівність (22.6) дає три скалярні рівняння:

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = S_x, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = S_y, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = S_z, \quad (22.7)$$

де

$$S_x = \int_0^t F_x dt, \quad S_y = \int_0^t F_y dt, \quad S_z = \int_0^t F_z dt$$

є проєкціями імпульсу рівнодійної на осі координат.

### 22.1.3. Випадки існування перших інтегралів диференціальних рівнянь руху

Першим інтегралом диференціального рівняння  $F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = 0$  називається функція  $f(\dot{x}, x, t)$ , для якої  $\frac{df}{dt} = 0$ , тобто ця функція на інтегральній кривій  $x = x(t)$  диференціального рівняння залишається незмінною:

$$f(\dot{x}, x, t) = C, \quad C = \text{const}. \quad (22.8)$$

Інколи першим інтегралом називають саме співвідношення (22.8).

Розглянемо випадки, коли теорема про зміну кількості руху дозволяє знайти перші інтеграли диференціальних рівнянь руху точки.

**1. Нехай  $\vec{F} = 0$ .** Тоді з рівняння (22.6) відразу дістаємо векторний інтеграл

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \equiv \vec{C},$$

або (в проєкціях на координатні осі) три скалярні перші інтеграли

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = C_2, \quad \dot{z} = C_3.$$

Цей результат відображає той факт, що при відсутності сили вільна матеріальна точка рухається рівномірно і прямолінійно (відносно інерціальної системи відліку), тобто за інерцією.

**2. Нехай на точку діє сила постійного напрямку,** наприклад паралельна весь час осі  $Oz$ , тобто  $\vec{F} = k\vec{F}_z$ . Тоді  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$  і рівність (22.3) дає два перші інтеграли:

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = C_2. \quad (22.9)$$

Звідси  $C_1\dot{y} = C_2\dot{x}$ ,  $C_1dy - C_2dx = 0$ . Інтегруючи, знаходимо:

$$C_1y - C_2x = \text{const}.$$



Ми одержали рівняння площини, паралельної осі  $Oz$ , тобто силі  $\vec{F}$ . Оскільки координати  $x$  і  $y$  точки весь час задовольняють цьому рівнянню, то точка рухається в цій площині. Отже, перші інтеграли (22.9) геометрично означають, що траєкторією точки в даному випадку є плоска крива, яка лежить у площині, паралельній осі  $Oz$ , тобто лінії дії сили.

**3. Якщо сила весь час перпендикулярна якій-небудь осі**, наприклад осі  $Ox$ , то  $F_x = 0$  і рівність (22.3) дає один перший інтеграл  $\dot{x} = C_1$ , тобто рух точки відбувається так, що проекція її швидкості на вісь, перпендикулярну до сили, залишається незмінною величиною.

**4. Якщо діюча сила постійна ( $\vec{F} = \text{const}$ ) або залежить тільки від часу**, тобто  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ , то інтеграл  $\int_0^t \vec{F} dt$  в (22.6) обчислюється безпосередньо і теорема імпульсів дає один векторний або, в проекціях на осі координат, три скалярні перші інтеграли диференціальних рівнянь руху точки. Ці перші інтеграли виражаються рівностями (22.6) або (22.7), в яких імпульси  $\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt$  або  $S_x, S_y$  і  $S_z$  будуть (після обчислення відповідних означених інтегралів зі змінною верхньою границею) відомими функціями часу.

**5. Якщо деякі з проекцій рівнодійної  $\vec{F}$  є функціями лише часу**, то можна одержати перші інтеграли диференціальних рівнянь руху. Нехай, наприклад,  $X = X(t)$ . Тоді з виразу (22.7) маємо

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \Phi(t),$$

де  $\Phi(t) = \int_0^t X(t) dt$ . Подальше інтегрування також не викликає труднощів:

$$mx - mx_0 - m\dot{x}_0 t = \int_0^t \Phi(t) dt.$$

## 22.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

### 22.2.1. Загальний випадок

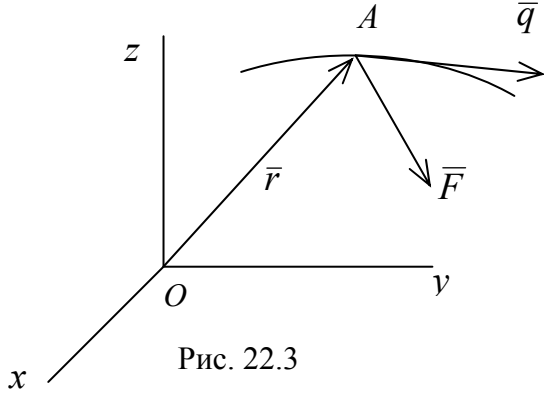
Нехай точка  $A$  маси  $m$  рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно інерціальної системи координат  $Oxyz$  під дією сили  $\vec{F}$  (рис. 22.3). За аналогією з моментом сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (22.10)$$

назвемо моментом кількості руху  $\vec{q}$  матеріальної точки  $A$  відносно точки  $O$  величину

$$\vec{G}_O = \vec{M}_O(\vec{q}) = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times (m\vec{V}). \quad (22.11)$$

Вважаючи  $m = \text{const}$ , запишемо диференціальне рівняння руху точки (20.2) у формі



$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}. \quad (22.12)$$

Домножимо зліва обидві частини рівності (22.12) векторно на  $\vec{r}$ :

$$m \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (22.13)$$

Безпосередніми обчисленнями переконаємось у справедливості такої формули:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{V}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{V}).$$

Отже, рівність (22.13) набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{V}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

З урахуванням позначень (22.10) і (22.11) її можна подати так:

$$\frac{d\vec{G}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (22.14)$$

Похідна за часом (швидкість зміни) моменту кількості руху матеріальної точки  $A$  відносно довільної нерухомої точки  $O$  дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до точки  $A$ , відносно тієї ж точки  $O$ .

Перейдемо до координатної форми запису рівності (22.14). Якщо радіус-вектор  $\vec{r}$  точки  $A$ , сила  $\vec{F}$  і момент  $\vec{M}_O$  в декартовому прямокутному базисі  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  розкладаються таким чином:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \{x, y, z\}, \quad \vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = \{F_x, F_y, F_z\}, \\ \vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{i}M_x(\vec{F}) + \vec{j}M_y(\vec{F}) + \vec{k}M_z(\vec{F}) = \{M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})\}, \\ M_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y, \quad M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z, \quad M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x, \end{aligned} \quad (22.15)$$

то

$$\vec{G}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \vec{i}G_{Ox} + \vec{j}G_{Oy} + \vec{k}G_{Oz}, \quad (22.16)$$

$$G_{Ox} = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad G_{Oy} = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad G_{Oz} = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (22.17)$$

Величини  $G_{Ox}$ ,  $G_{Oy}$  і  $G_{Oz}$  називаються моментами кількості руху матеріальної точки  $A$  відносно осей  $Ox, Oy, Oz$  відповідно. Векторна рівність (22.14) рівносильна трьом скалярним рівностям

$$\begin{cases} \frac{dG_{Ox}}{dt} = M_x(\vec{F}), \\ \frac{dG_{Oy}}{dt} = M_y(\vec{F}), \\ \frac{dG_{Oz}}{dt} = M_z(\vec{F}). \end{cases} \quad (22.18)$$

Похідна за часом (швидкість зміни) моменту кількості руху матеріальної точки відносно якої-небудь осі дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до точки, відносно цієї осі.

У розгорнутому вигляді рівності (22.18) є такими:

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = yF_z - zF_y, \\ m \frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_x - xF_z, \\ m \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = xF_y - yF_x. \end{cases} \quad (22.19)$$

До диференціальних рівнянь руху точки у формі (22.19) ми прийшли, виходячи з другого закону динаміки (22.12) або (в координатній формі) з рівнянь (20.12), записаних у вигляді

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (22.20)$$

Реалізовано, по суті, перехід (22.20)  $\rightarrow$  (22.19). Всі перетворення йшли спочатку в векторній формі, а потім проводилось проектування на осі координат. Можна цей перехід здійснити безпосередньо в координатній формі. Передусім запишемо рівняння (22.19) інакше, виконавши диференціювання в лівих частинах (22.19):

$$\begin{cases} m(y\ddot{z} - z\ddot{y}) = yF_z - zF_y, \\ m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) = zF_x - xF_z, \\ m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = xF_y - yF_x. \end{cases} \quad (22.19a)$$

На основі системи рівнянь (22.20) складемо дві інші системи рівнянь:

$$\begin{cases} my\ddot{z} = yF_z, & \begin{cases} mz\ddot{y} = zF_y, \\ mx\ddot{z} = xF_z, \\ my\ddot{x} = yF_x. \end{cases} \\ mz\ddot{x} = zF_x, \\ mx\ddot{y} = xF_y, \end{cases} \quad (22.20a)$$

Виконавши операцію віднімання перших, других і третіх рівнянь обох систем (22.20a), одержимо (22.19a). Отже, рівняння (22.19a), а значить, і (22.19) є лінійною комбінацією рівнянь (22.20), тобто якихось “нових” рівнянь, порівняно з системою (22.20), система (22.19) не дає. Це лише інша форма запису другого закону динаміки у формі (22.20).

### 22.2.2. Випадок центральної сили

Хоч рівняння (22.19) є результатом лінійного (відносно координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  рухомої точки) перетворення базових рівнянь (22.20), користування теоремою моментів (як і теоремою імпульсів) за певних обмежень на сили, прикладені до точки, дозволяє “побачити” (частіше, все ж, доводиться відшукувати додаткові побудови) перші інтеграли диференціальних рівнянь руху точки.

Одним із подібних прикладів є випадок дії **центральної сили**. Так називається сила, яка в будь-якій точці простору направлена по прямій, що проходить через одну й ту саму нерухому точку поля (ця остання точка називається *центром*), причому модуль сили залежить тільки від віддалі точки від центра. Виберемо центр за початок координат (рис. 22.4). Центральною є сила притягування планети  $P$  до Сонця  $S$  або штучного супутника до Землі. Оскільки  $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F} = 0$ , то з рівняння моментів (22.14) дістаємо:

$$\vec{G}_O = \text{const.} \quad (22.21)$$

На підставі (22.16) і (22.17) ми відразу одержуємо три перші інтеграли:

$$\begin{cases} y\dot{z} - z\dot{y} = C_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} = C_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = C_3. \end{cases} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Домноживши кожен із них на  $x$ ,  $y$  і  $z$  відповідно і додавши результати, одержимо

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0.$$

Це рівняння площини (що проходить через точку  $O(0, 0, 0)$ ), в якій рухається точка  $A(x, y, z)$ , тобто траєкторія точки  $A$  – плоска крива.

Наведемо інше, геометричне доведення. Якщо вектор  $\vec{G}_O = m(\vec{r} \times \vec{V})$  зберігає незмінним свій напрям у просторі, то вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{V}$  повинні весь час лежати в одній площині, що проходить через центр  $O$ . Отже, *траєкторія точки, яка рухається під дією центральної сили, є плоскою кривою*.

Подальші висновки про характер руху точки  $A$  можна зробити, ввівши поняття **секторної швидкості**. Так називається вектор, що характеризує

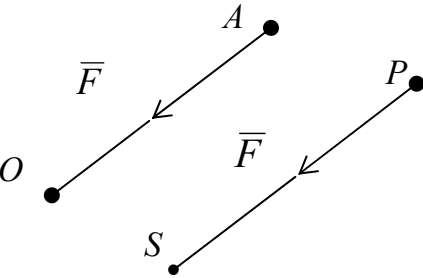


Рис. 22.4

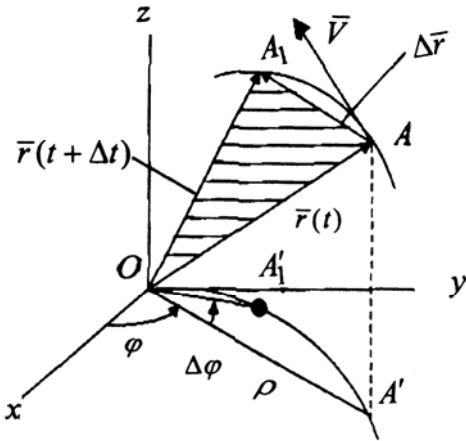


Рис. 22.5

бистроту зміни площі, яка описується радіусом-вектором  $\vec{OA}$  точки  $A$ . На підставі рис. 22.5 маємо

$$\Delta\sigma = S_{\Delta OAA_1} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|, \quad \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right|,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = V_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| \right) = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{V}|.$$

Величина  $V_\sigma$  називається модулем секторної швидкості. За напрям вектора секторної швидкості беремо напрям вектора  $\vec{r} \times \vec{V}$ . Секторна швидкість точки  $A$  визначається формулою:

$$\vec{V}_\sigma = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{M}_O(\vec{V}) = \frac{1}{2} \text{mom}_O(\vec{V}). \quad (22.22)$$

Зіставивши вирази (22.11) і (22.22), дістаємо:

$$\vec{G}_O = 2m\vec{V}_\sigma. \quad (22.23)$$

Очевидно, що секторна швидкість точки  $A$  залежить від центра  $O$ , відносно якого вона визначається. Для кожного центра вона має своє значення. Тому, задаючи секторну швидкість рухомої точки, необхідно зазначити центр, відносно якого вона береться.

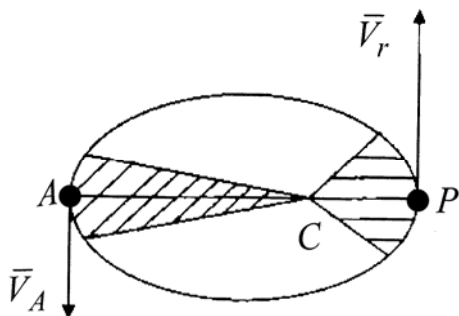


Рис. 22.6

Із співвідношень (22.21) і (22.23) випливає:  $\vec{V}_\sigma = \text{const}$ . Отже, у випадку дії на матеріальну точку  $A$  центральної сили секторна швидкість точки залишається незмінною, тобто *радіус-вектор  $A$  описує однакові площі за будь-які однакові відрізки часу*. Це **закон площ**. Він має місце при русі планет або супутників і виражає собою один із законів І. Кеплера (1571 – 1630). До цих

законів він прийшов емпірично, обробляючи матеріали спостережень за рухами Марса.

Траєкторією точки  $A$  є еліпс, в одному із фокусів якого міститься притягувальний центр  $O$ . Найближча до центра  $O$  точка орбіти планети називається перигелієм, найвіддаленіша – афелієм. На рис. 22.6  $C$  – Сонце,  $P$  – перигелій,  $A$  – афелій. На підставі наведеного вище знаходимо:

$$V_\sigma = \frac{1}{2} |\vec{M}_C(\vec{V}_P)| = \frac{1}{2} V_P \cdot CP = \frac{1}{2} |\vec{M}_C(\vec{V}_A)| = \frac{1}{2} V_A \cdot CA = \text{const}. \text{ Таким чином,}$$

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow V_P = \max V, \quad V_A = \min V.$$

Якщо траєкторія точки  $A$  розташована в площині  $xOy$ , то з (22.16), (22.17) і (22.21) маємо:

$$\vec{G}_O = \vec{k}G_{Oz} = \vec{k}m(xy - yx) = \text{const}.$$

Диференціальні рівняння руху точки допускають перший інтеграл

$$xy - yx = C. \quad (22.24)$$

Перейдемо від декартових координат до полярних (рис. 22.5):  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Оскільки

$$xy - yx = \rho \cos \varphi \cdot (\rho \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi) - \rho \sin \varphi \cdot (\rho \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi) = \rho^2 \dot{\varphi},$$

то перший інтеграл (22.24) набуває вигляду:

$$\rho^2 \dot{\varphi} = C. \quad (22.25)$$

Перший інтеграл (22.25) називається *інтегралом площ*.

## 22.3. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

### 22.3.1. Диференціальна форма теореми

Візьмемо рівність (22.12), в якій  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ . Скалярно домножимо обидві її частини на швидкість  $\vec{V}$  рухомої точки  $M$ :

$$m\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}. \quad (22.26)$$

Використовуючи тотожність  $\vec{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = V^2$ , перетворимо ліву частину (22.26) до вигляду:

$$m\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{V}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} \right).$$

Рівність (22.26) можна записати так:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{V}^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \vec{V}. \quad (22.27)$$

Величина  $T = \frac{m\vec{V}^2}{2}$  називається **кінетичною енергією точки  $M$** . Таку величину як характеристику динамічних якостей ввів у механіку в 1686 р. Г. Лейбніц (1646 – 1716), назвавши її “живою силою”. Погляди Г. Лейбніца поділяв і захищав І. Бернуллі. Між прибічниками Г. Лейбніца і Р. Декарта (1596 – 1650) [останніх називали картезіанцями] виникла жвава дискусія про “міри руху”. Р. Декарт на основі спостережень дійшов висновку, що динамічні якості тіл (при поступальних рухах – хоч це обмеження не формулювалось ним явно) визначаються їхньою кількістю руху. Полеміка була зупинена Ж.Л. Д’Аламбером (1717–1783), який показав формальну несуперечливість обох поглядів. Відмітимо, що поняття механічної сили в XVII – XVIII ст.ст. було досить невизначеним.

Величина  $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$  називається **сумарною потужністю всіх діючих на точку сил**. Через введені до розгляду нові величини  $T$  і  $N$  рівність (22.27) записується так:

$$\frac{dT}{dt} = N. \quad (22.28)$$

Швидкість зміни (похідна за часом) кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює сумарній потужності всі діючих на точку сил.

Звичайно рівність (22.28) представляють в іншому вигляді, вводячи замість потужності  $N$  величину, яка характеризує дію сили на певному переміщенні точки і яка називається роботою сили. Запишемо цю рівність у диференціальній формі:

$$dT = Ndt. \quad (22.29)$$

Величина

$$d'A = Ndt = \vec{F} \cdot \vec{V}dt = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (22.30)$$

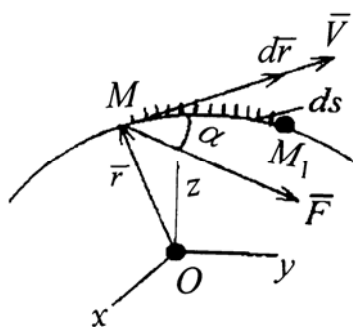


Рис. 22.7

називається роботою сили  $\vec{F}$  на елементарному (нескінченно малому) переміщенні точки  $M$ , або **елементарною роботою сили  $\vec{F}$**  (рис. 22.7). Символ  $d'$  вжито з метою відрізнити його від знака диференціала  $d$ , оскільки вираз  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  у загальному випадку не є повним диференціалом якої-небудь функції навіть у тих випадках, коли сила  $\vec{F}$  залежить тільки від положення точки  $M$ , тобто коли  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ . Лише для особливого класу сил (його ми будемо розглядати далі) вираз  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  дорівнює повному диференціалу деякої функції координат рухомої точки. (Деякі автори елементарну роботу позначають символом  $\delta A$ . Ми будемо позначати символом  $\delta A$  роботу сили  $\vec{F}$  на віртуальному переміщенні  $\delta\vec{r}$  – про останнє мова вестиметься далі).

Прийнявши для векторів  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$  розкладення (22.15) за декартовим прямокутним базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , одержимо вираз елементарної роботи (22.30) в координатній формі

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (22.31)$$

Нехай  $s$  – дугова координата точки  $M$ , а  $M_1$  – нескінченно близька точка траєкторії:  $\overset{\cup}{MM_1} = ds = |d\vec{r}|$ . З виразу (22.30) дістаємо  $d'A = F \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha$  або

$$d'A = F \cos \alpha \cdot ds. \quad (22.32)$$

Тепер рівність (22.29) набуває вигляду:

$$dT = d'A. \quad (22.33)$$

### 22.3.2. Скінченна (інтегральна) форма теореми

Нехай матеріальна точка  $M$ , рухаючись під дією сили  $\vec{F}$  по певній траєкторії, перемістилася з положення  $M_n$  в положення  $M_k$  і змінила швидкість з  $\vec{V}_n$  на  $\vec{V}_k$  (рис. 22.8). На підставі формул (22.31) і (22.32) робота сили  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$  на скінченному переміщенні точки  $M$  виражається криволінійним інтегралом другого роду (за координатами):

$$A_{(M_n M_k)} = \sum_{i=1}^n A_{(M_n M_k)}^{(i)} = \int_{(M_n M_k)} F \cos \alpha \cdot ds = \int_{(M_n M_k)} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (22.34)$$

Криволінійний інтеграл уздовж кривої  $(M_n M_k)$  від лівої частини рівності (22.33) є криволінійним інтегралом від повного диференціала, який, як відомо, не залежить від форми кривої, а тільки від її початкової та кінцевої точок:

$$\int_{(M_n M_k)} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_{M_n}^{M_k} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{mV_k^2}{2} - \frac{mV_n^2}{2} = T_k - T_n = \Delta T. \quad (22.35)$$

Таким чином, інтегрування обох частин рівності (22.33) вздовж дуги  $(M_n M_k)$  траєкторії точки  $M$  на підставі виразів (22.34) і (22.35) приводить до співвідношення

$$\Delta T = \sum_{i=1}^n A_{(M_n M_k)}^{(i)} \equiv A_{(M_n M_k)}. \quad (22.36)$$

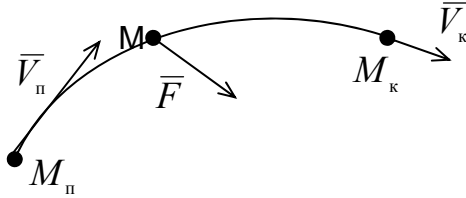


Рис. 22.8

Приріст кінетичної енергії матеріальної точки при її переміщенні з початкового положення  $M_n$  в кінцеве положення  $M_k$  дорівнює роботі, виконаній всіма силами, що діють на точку на ділянці  $(M_n M_k)$  її траєкторії.

Відмітимо, що приріст кінетичної енергії (як і приріст будь-якої функції в математиці) є алгебраїчною величиною. Одиниця вимірювання роботи – джоуль, потужності – ват, при цьому  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

З рівності (22.30) випливає:  $N = \frac{d'A}{dt}$ .

### 22.4. Силі поля. Потенціальноє силі поле. Консервативні матеріальні системи

Вище неодноразово зазначалося, що взагалі  $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V})$ . Однак в теорії коливань зустрічались частинні випадки, коли  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ , або  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , або  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{V})$ . Сили, які залежать тільки від положення точки у просторі і часу, називаються **позиційними**:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t). \quad (22.37)$$

Для таких сил введемо поняття **силового поля** – частини простору, в кожній точці якої на вміщену туди матеріальну частинку дія сила, що однозначно визначена за модулем і напрямом в будь-який момент часу. Силі поле називається **нестационарним**, якщо сила  $\vec{F}$  явно залежить від часу  $t$ : сила (22.37) в кожній точці  $M(x, y, z)$  змінюється з плином часу. В протилежному випадку, коли  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ , поле називається **стационарним**. Крива лінія, дотична в кожній точці якої збігається з напрямом сили, прикладеної в цій точці, називається **силовою лінією**. Для точок силової лінії вектори  $d\vec{r}$  і  $\vec{F}$  колінеарні (рис. 22.9).

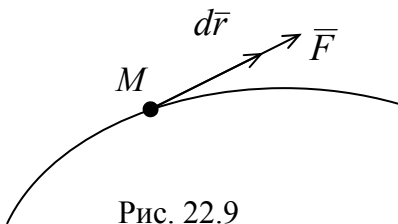


Рис. 22.9

Диференціальні рівняння силової лінії мають вигляд:

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z, t)}. \quad (22.38)$$

Кількість незалежних рівнянь в системі (22.38) дорівнює двом. Якщо, наприклад,  $F_x(x, y, z, t) \neq 0$ , цю систему можна записати в нормальній формі Коші:



$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{F_y(x, y, z, t)}{F_x(x, y, z, t)} \equiv f_1(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dx} = \frac{F_z(x, y, z, t)}{F_x(x, y, z, t)} \equiv f_2(x, y, z, t). \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x, C_1, C_2), \\ z = \varphi_2(x, C_1, C_2). \end{cases}$$

Ми одержали дві циліндричні поверхні з твірними, паралельними осям  $Oz$  і  $Oy$  відповідно. Перетинаючись між собою, ці поверхні дають шукану силову лінію.

**Силовую функцією** стаціонарного силового поля називається функція  $U(x, y, z)$ , для якої

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (22.39)$$

Відповідне силове поле називається **потенціальним**, а сили, що діють у цьому полі – **потенціальними силами**. **Потенціальною енергією** поля називається функція  $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$ . Формули (22.39) набувають вигляду:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (22.40)$$

Введемо далі символічний вектор (оператор) Гамільтона

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

вектор градієнт скалярної функції  $U(x, y, z)$

$$\text{grad}U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z} \equiv \vec{\nabla}U$$

та ротор (вихор) вектора  $\vec{F}$

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Три скалярні рівності (22.40) рівносильні одній векторній:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Pi = -\text{grad}\Pi.$$

Для потенціальності векторного поля необхідно і достатньо його безвихровості:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U \Leftrightarrow \text{rot}\vec{F} = 0,$$

тобто

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

В потенціальному силовому полі вираз (22.31) елементарної роботи набуває вигляду:

$$d'A = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU = -d\Pi. \quad (22.41)$$

**Теорема.** Робота сил потенціального поля при переміщенні матеріальної точки з одного положення в інше не залежить від форми траєкторії і визначається лише положеннями початкової і кінцевої точок шляху.

*Доведення.* На підставі рівностей (22.34) і (22.41) та властивостей криволінійних інтегралів від повного диференціала маємо (рис. 22.10):

$$\begin{aligned} A_{(M_n M_k)} &= \int_{(M_n M_k)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(M_n M_k)} dU(M) = \int_{M_n}^{M_k} dU(M) = U(M) \Big|_{M_n}^{M_k} = U(M_k) - U(M_n) = \\ &= \Pi(M_n) - \Pi(M_k), \\ A_{(M_n M_k)_1} &= A_{(M_n M_k)_2} = U(x_k, y_k, z_k) - U(x_n, y_n, z_n) = \\ &= \Pi(x_n, y_n, z_n) - \Pi(x_k, y_k, z_k). \end{aligned} \quad (22.42)$$

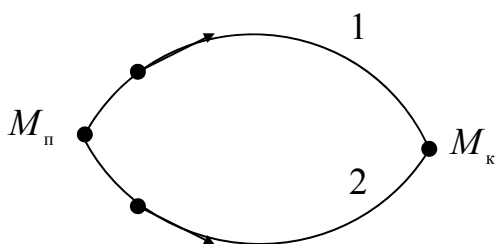


Рис. 22.10

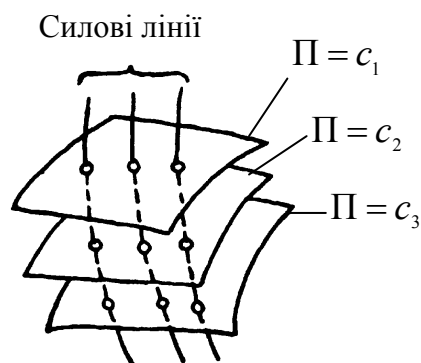


Рис. 22.11

Цифрами 1 і 2 показано два різні шляхи переходу від точки  $M_n$  до точки  $M_k$ .

Отже, робота потенціальної сили дорівнює різниці значень (приросту) силової функції в кінцевій і початковій точках шляху. Потенціальна енергія матеріальної частинки є величиною, що характеризує “запас роботи”, яким володіє частинка в даному пункті силового поля.

Щоб порівняти між собою ці “запаси роботи”, слід домовитись про вибір початку відліку, тобто нульової точки, оскільки функції  $U$  та  $\Pi$  визначаються з точністю до постійної величини.

Поверхня  $\Pi(x, y, z) = c$ , на якій потенціальна енергія має певне стале значення, називається **поверхнею рівня** або **еквіпотенціальною поверхнею**. Для даного поля ці поверхні утворюють сім'ю з параметром  $c$ . Даючи сталій  $c$  різні значення, одержимо різні поверхні рівня, які у випадку однозначної функції  $\Pi$  не перетинаються і розділяють силове поле на шари (рис. 22.11). Оскільки вектор

$\text{grad}\Pi = \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right\}$  направлений по нормалі до поверхні рівня, силові лінії

потенціального поля ортогональні поверхням рівня. Робота сил поля при переміщенні точки з одного положення на поверхні рівня в інше дорівнює нулеві.

В потенціальному силовому полі має місце так званий **інтеграл енергії**. Щоб одержати його, розглянемо рівність (22.33) з урахуванням виразу (22.41), тобто  $dT = -d\Pi$ . Інтегруванням знаходимо

$$T + \Pi = h, \quad (22.43)$$

де  $h = \text{const}$ . При заданому значенні  $h$  потенціальна енергія характеризує здатність сил поля активно виконувати роботу, змінюючи при цьому кінетичну енергію матеріальної точки. Запишемо рівність (22.43) інакше:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0. \quad (22.44)$$

В розгорнутому вигляді ця рівність є такою:

$$\frac{mV^2}{2} + \Pi(x, y, z) = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi(x_0, y_0, z_0). \quad (22.45)$$

Кожна з трьох рівностей (22.43) – (22.45) має назву інтеграла енергії. Таким чином, *при русі матеріальної точки під дією потенціальних сил повна механічна енергія точки (тобто  $T + \Pi$ ) залишається незмінною*. Це твердження має назву **закону збереження механічної енергії точки**.

Механічна система, для якої справедливий інтеграл енергії, називається **консервативною системою**. В ній повна механічна енергія є законсервованою (залишається незмінною).

### 22.5. Дисипативна функція. Поняття автоколивань

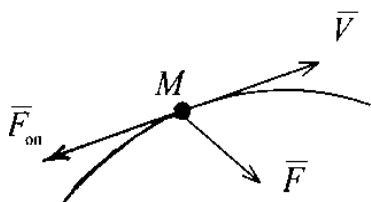


Рис. 22.12

У реальних умовах на рухому матеріальну точку поряд з потенціальними силами неминуче діють різні непотенціальні сили у вигляді сил опору середовища, тертя і таке інше. Це приводить до того, що з плином часу повна механічна енергія точки зменшується (розсіюється), переходячи відповідно до загального фізичного закону збереження

енергії в інші форми енергії (наприклад, теплову). З цієї причини зазначені сили опору називаються дисипативними. Напрямок сил опору  $\vec{F}_{\text{он}}$  завжди протилежний швидкості  $\vec{V}$  (рис. 22.12). Модуль сил опору  $|\vec{F}_{\text{он}}|$  може бути різним: він може бути сталим (кулонове тертя), пропорційним будь-якому степеню швидкості (в'язке тертя) або будь-яким іншим чином залежати від швидкості точки, її положення і часу  $t$ . На підставі рівностей (22.30) і (22.41) елементарна робота потенціальної сили  $\vec{F}$  і сили опору  $\vec{F}_{\text{он}}$  визначається так:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} + \vec{F}_{\text{он}} \cdot d\vec{r} = -d\Pi + \vec{F}_{\text{он}} \cdot d\vec{r}.$$

Використовуючи рівність (22.33) звідси маємо:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} + \vec{F}_{\text{он}} \cdot \vec{V}.$$

Отже,

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = -F_{\text{он}} V < 0.$$

Повна механічна енергія точки під дією сил опору зменшується. Мірою її зменшення може слугувати абсолютне значення потужності  $|\vec{F}_{\text{оп}} \cdot \vec{V}| = F_{\text{оп}} V$  сили опору.

Найпростішим є випадок **лінійно-в'язкого опору**:

$$\vec{F}_{\text{оп}} = -\mu\vec{V}, F_{\text{оп}}V = \mu V^2, \frac{d(T + \Pi)}{dt} = -\mu V^2 \equiv -2\Phi, \Phi = \frac{\mu V^2}{2}, F_{\text{оп}} = \mu V = \frac{d\Phi}{dV}.$$

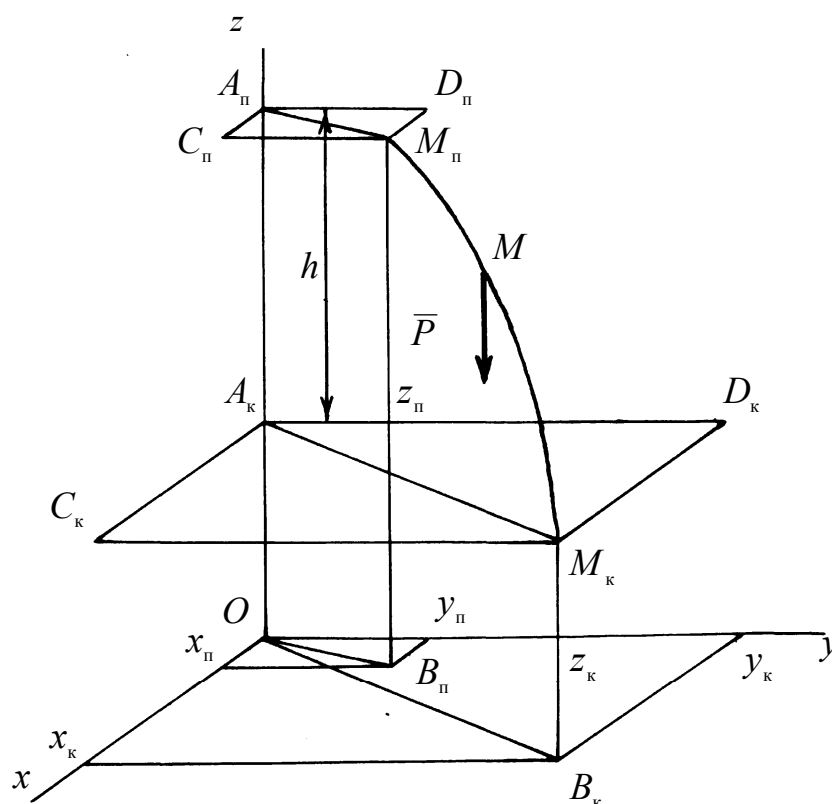


Рис. 22.13

Функція  $\Phi$  називається *функцією розсіювання* або *дисипативною функцією Релея*. Вона дорівнює абсолютному значенню половини механічної енергії, яка втрачається за одиницю часу.

При прямолінійному русі точки вздовж осі  $Ox$  маємо:  $V = \dot{x}$ ,  $\Phi = \frac{\mu \dot{x}^2}{2}$ .

Щоб механічна система за наявності сил опору не втрачала повну механічну енергію, необхідно енергію, що зменшується через сили опору, компенсувати притоком енергії ззовні. Наприклад, окремо взятий маятник є дисипативною системою. У годинникового маятника втрата енергії компенсується періодичним надходженням енергії ззовні за рахунок гирі, що опускається, заводної пружини і т.д. В результаті маятник здійснює незатухаючі коливання, які називаються **автоколиваннями**. Від вимушених коливань автоколивання відрізняються тим, що: 1) відбуваються не під дією збурної сили, яка залежить від часу, 2) амплітуда і частота визначаються властивостями самої системи (при вимушених коливаннях вони залежать від збурної сили).

## 22.6. Силві функції деяких важливих сил

### 22.6.1. Поле сили тяжіння

Якщо поблизу земної поверхні виділити область простору, діаметр якої малий у порівнянні з радіусом Землі, то в усіх точках області силу тяжіння  $\vec{P} = m\vec{g}$  можна вважати сталою за модулем і напрямом. Такі силві поля називаються *однорідними*.

Нехай точка  $M$  під дією певних сил перемістилась з початкового положення  $M_{\Pi}$  в кінцеве положення  $M_{\kappa}$ . Віднесемо її рух до інерціальної системи відліку  $Oxyz$  (рис. 22.13). Тоді

$$\begin{aligned} M_{\Pi}(x_{\Pi}, y_{\Pi}, z_{\Pi}), M_{\kappa}(x_{\kappa}, y_{\kappa}, z_{\kappa}), x_{\Pi} = A_{\Pi}C_{\Pi}, y_{\Pi} = A_{\Pi}D_{\Pi}, z_{\Pi} = OA_{\Pi} = B_{\Pi}M_{\Pi}, \\ x_{\kappa} = A_{\kappa}C_{\kappa}, y_{\kappa} = A_{\kappa}D_{\kappa}, z_{\kappa} = OA_{\kappa} = B_{\kappa}M_{\kappa}, \vec{P} = -\vec{k}mg, P_x = P_y = 0, P_z = -mg, \\ d'A = P_z dz = -mgdz, A = \int_{(M_{\Pi}M_{\kappa})} (-mgdz) = -mg \int_{z_{\Pi}}^{z_{\kappa}} dz = mg(z_{\Pi} - z_{\kappa}), A = mgh, \\ h = z_{\Pi} - z_{\kappa} = A_{\kappa}A_{\Pi}. \end{aligned} \quad (22.46)$$

Оскільки поле сили ваги – потенціальне, тобто робота сили  $m\vec{g}$  не залежить від форми траєкторії, замість кривої лінії  $(M_{\Pi}M_{\kappa})$  (див. рис. 22.13) можна взяти відрізок вертикальної прямої – результат буде тим же (рис. 22.14):  $A_{(M_{\Pi}M_{\kappa})} = A_{(A_{\Pi}A_{\kappa})}$ .

Знайдемо силву функцію сили ваги. З виразів (22.42) і (22.46) маємо  $(x_{\Pi} = y_{\Pi} = x_{\kappa} = y_{\kappa} = 0)$ :

$$A_{(M_{\Pi}M_{\kappa})} = mgz_{\Pi} - mgz_{\kappa} = U(z_{\kappa}) - U(z_{\Pi}) = \Pi(z_{\Pi}) - \Pi(z_{\kappa}). \quad (22.47)$$

Оскільки  $z_{\Pi}$  і  $z_{\kappa}$  – довільні числа, ніяк не пов'язані між собою, то  $U(z_{\kappa}) = -mgz_{\kappa}$ ,  $U(z_{\Pi}) = -mgz_{\Pi}$ ,  $\Pi(z_{\kappa}) = mgz_{\kappa}$ ,  $\Pi(z_{\Pi}) = mgz_{\Pi}$ . Отже,

$$U(z) = -mgz, \Pi(z) = mgz. \quad (22.48)$$

Цей же результат можна дістати інакше. На підставі (22.39) для сили ваги знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} P_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow U(x, y, z) = \varphi(y, z) \\ P_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow U(x, y, z) = \Psi(x, z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U(x, y, z) = \alpha(z) \quad (22.49)$$

$$P_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -mg \Rightarrow U(x, y, z) = -mgz + \omega(x, y). \quad (22.50)$$

Порівнюючи між собою два вирази (22.49) і (22.50) однієї й тієї самої функції, приходимо до висновку:  $\omega(x, y) = C = \text{const}$ . Таким чином,

$U(x, y, z) = -mgz + C$ , тобто для сили ваги  $U = U(z)$ . Якщо вважати  $U|_{z=0} = 0$ , то  $C = 0$ . Ми знову прийшли до виразу (22.48).

Поверхні рівня утворюють сім'ю горизонтальних площин. Оскільки  $\vec{P} = \text{grad } U = -\vec{k}mg = \vec{k} \frac{dU}{dz}$ , то сили поля направлені по нормалі до поверхней рівня в бік зростання силової функції. Силowymi лініями є прямі, паралельні осі  $Oz$ .

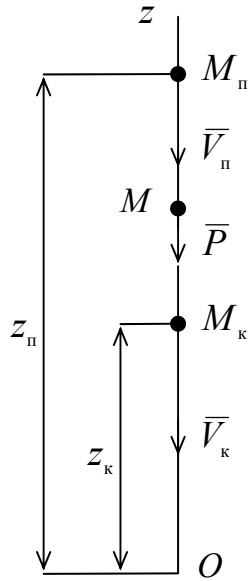


Рис. 22.14

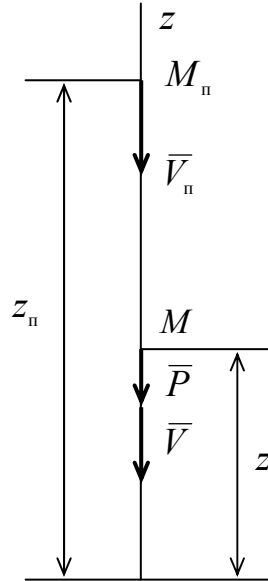


Рис. 22.15

### 22.6.2. Формула Галілея

Якщо точка  $M$  переміщується під дією сили ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$  з положення  $M_n$  з початковою швидкістю  $\vec{V}_n$  в положення  $M_k$ , в якому її швидкість дорівнює  $\vec{V}_k$  (рис. 22.14), то зв'язок між цими швидкостями можна дістати з рівностей (22.35), (22.36) і (22.47):

$$\frac{mV_k^2}{2} - \frac{mV_n^2}{2} = mg(z_n - z_k).$$

Звідси

$$V_k^2 = V_n^2 + 2gh, \quad h = z_n - z_k. \quad (22.51)$$

Якщо точка переміщується з положення  $M_n$  з початковою швидкістю  $\vec{V}_n$ , то квадрат її швидкості в довільному положенні  $M(z)$  знайдеться за формулою:

$$V^2 = V_n^2 + 2gh(z_n - z). \quad (22.52)$$

При  $V_n = 0$  і  $h = z_n - z$  звідси дістаємо формулу Галілея:  $V^2 = 2gh$ .

Звичайно, формулу (22.52) можна одержати і з другого закону динаміки (рис. 22.15), вважаючи, що точка  $M$  рухається під дією сили  $\vec{P} = -\vec{k}mg$  і має швидкість  $\vec{V} = \vec{k}V_z = \vec{k}\dot{z}$ ,  $V_z = \dot{z} < 0$ ,  $|\vec{V}| = V = |V_z| = -\dot{z}$ . Тоді

$$m\ddot{z} = -mg, \quad \ddot{z} = -g, \quad \dot{z} = -gt + C_1, \quad z = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2,$$

$$\begin{cases} z|_{t=0} = z_{\Pi} \\ \dot{z}|_{t=0} = -V_{\Pi} \end{cases} \Rightarrow C_1 = -V_{\Pi}, \quad C_2 = z_{\Pi}.$$

Отже,

$$z = -\frac{gt^2}{2} - V_{\Pi}t + z_{\Pi}. \quad (22.53)$$

Звідси  $\dot{z} = -V = -gt - V_{\Pi}$ , тобто

$$V = gt + V_{\Pi}. \quad (22.54)$$

Виключимо з рівності (22.54) час  $t$ , скориставшись рівністю (22.53). Маємо:

$$\frac{gt^2}{2} + V_{\Pi}t - (z_{\Pi} - z) = 0 \Rightarrow t = \frac{-V_{\Pi} + \sqrt{V_{\Pi}^2 + 2g(z_{\Pi} - z)}}{g}.$$

Підставивши цей вираз  $t$  в (22.54), дістанемо (22.52).

### 22.6.3. Поле відновлювальної сили пружини (сили пружності)

Малі коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги під дією сили пружності розглянуто в підрозділі 21.2 (в середовищі без опору) і підрозділі 21.4 (з урахуванням опору). Щоб виключити з розгляду сили ваги, розташуємо пружний елемент горизонтально (рис. 22.16). Тоді

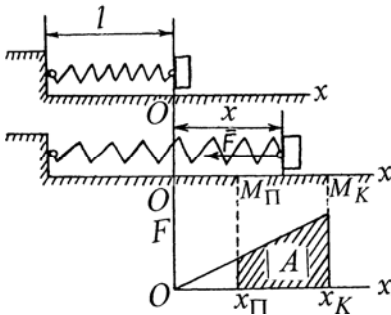


Рис. 22.16

$$\vec{F} = \vec{i}F_x, \quad F_x = -cx, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0,$$

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -cxdx,$$

$$A = \int_{(M_{\Pi}M_K)} (-cxdx) = -c \int_{x_{\Pi}}^{x_K} xdx = -\frac{c}{2}(x_K^2 - x_{\Pi}^2) = \frac{c}{2}(x_{\Pi}^2 - x_K^2).$$

Якщо  $|x_K| > |x_{\Pi}|$  (кінець пружини віддаляється від положення рівноваги), то  $A < 0$ . При  $|x_K| < |x_{\Pi}|$  (кінець пружини наближається до положення рівноваги) виконана силою  $\vec{F}$  робота  $A > 0$ . Покладемо  $U|_{x=0} = 0$ . Із співвідношень (22.41) дістаємо:

$$d'A = dU = -d\Pi, \quad A = U = -c \int_0^x xdx = -\frac{cx^2}{2}, \quad \Pi = \frac{cx^2}{2}.$$

### 22.6.4. Поле центральної сили

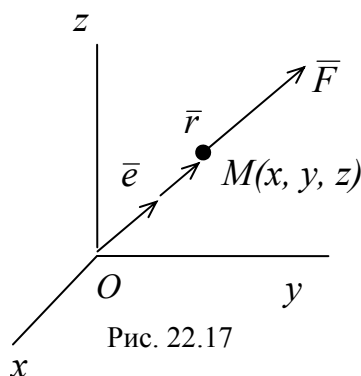


Рис. 22.17

Означення центральної сили наведено в підрозділі 22.2. На підставі рис. 22.17 маємо

$$\vec{F} = \vec{e} F_e(r), \quad \vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Якщо  $F_e(r) > 0$ , то  $\vec{F}$  – сила відштовхування; якщо ж  $F_e(r) < 0$ , то  $\vec{F}$  – сила притягування. Використовуючи рівності (22.30) і (22.41), знаходимо:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{F_e(r)}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{F_e(r)}{r} r dr = F_e(r) dr = dU,$$

$$U(r) = \int F_e(r) dr + C, \quad r = \text{const} \Rightarrow U(r) = \text{const},$$

тобто поверхнями рівня центральної сили є концентричні сфери з центром у центрі  $O$  центральної сили.

Прикладами центральних сил є сили пружності і сили тяжіння. Згідно із законом всесвітнього тяжіння (20.3)

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad F_e = -f \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_e dr = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = d\left(f \frac{m_1 m_2}{r}\right) = dU,$$

$$U = f \frac{m_1 m_2}{r} + C, \quad \Pi = -f \frac{m_1 m_2}{r} + \text{const}.$$

В цьому полі на матеріальну точку з масою  $m$  діє сила  $\vec{F} = -\frac{\mu m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ , де

$\mu = \text{const}$ . Тому елементарна робота  $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\mu m}{r^2} dr = d\left(\frac{\mu m}{r}\right) = dU$ ,

$U = \frac{\mu m}{r} + C$ . Вважаючи, що притягувальний центр міститься в нескінченно віддаленій точці, дістаємо:

$$U \Big|_{r=\infty} = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow U = \frac{\mu m}{r}.$$

### 22.7. Математичний маятник

Математичним маятником називається матеріальна точка  $A$ , яка за допомогою невагомго стрижня довжиною  $l$  з'єднана з циліндричним шарніром  $O$  (рис. 22.18). Стрижень  $OA$  обертається з кутовою швидкістю  $\varphi$  навколо осі  $Oz$ , а точка  $A(x, y, 0)$  рухається в площині  $xOy$ , описуючи коло радіусом  $OA = l$ :

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = l^2.$$



Тертям в шарнірі і опором середовища, як правило, нехтують. Маятник здійснює коливальні (або обертальні) рухи навколо осі  $Oz$ .

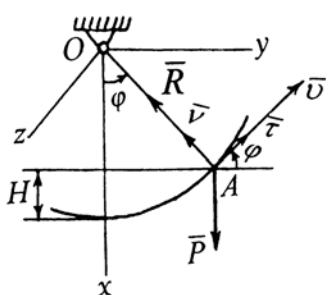


Рис. 22.18

Згідно з підрозділом 20.4 як сферичний (просторовий), так і математичний (плоский) маятники є невільними матеріальними точками. В'язю для точки  $A$  є стержень  $OA$ . На підставі принципу звільнюваності від в'язей відкинемо її, доповнивши активну силу  $\vec{P} = \vec{i}mg$  реакцією в'язі  $\vec{R}$ . Згідно з теоремою моментів (22.14) маємо:

$$\frac{d\vec{G}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P} + \vec{R}).$$

Безпосередньо знаходимо, користуючись рис. 22.18:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{R}) &= 0, \quad \vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P} = OA \times \vec{P} = -\vec{k}mgl \sin \varphi = \vec{k}M_z, \quad V = l\dot{\varphi}, \\ \vec{V} &= l\dot{\varphi}(-\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi) = -\vec{i}l\dot{\varphi} \sin \varphi + \vec{j}l\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \vec{G}_O &= \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{k}mVl = \vec{k}ml^2\dot{\varphi} = \vec{k}\vec{G}_{Oz}. \end{aligned}$$

Звісно, такі ж вирази одержимо, користуючись координатною формою:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y, \quad \vec{V} = \dot{\vec{r}} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} = -\vec{i}l\dot{\varphi} \sin \varphi + \vec{j}l\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \varphi & l \sin \varphi & 0 \\ mg & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}mgl \sin \varphi,$$

$$\vec{G}_O = \vec{r} \times m\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ m\dot{x} & m\dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}m(xy - y\dot{x}) =$$

$$= \vec{k}m(l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}l \cos \varphi + l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}l \sin \varphi) = \vec{k}ml^2\dot{\varphi}.$$

Таким чином, для маятника рівність (22.14) має вигляд:

$$\vec{k}ml^2\ddot{\varphi} = -\vec{k}mgl \sin \varphi.$$

Спроектувавши обидві частини останньої рівності на вісь  $Oz$  (тобто домноживши обидві її частини скалярно на  $\vec{k}$ ), одержимо:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi, \quad (22.55)$$

або

$$\frac{dG_{Oz}}{dt} = M_z, \quad G_{Oz} = ml^2\dot{\varphi} = I_z\dot{\varphi}, \quad I_z = ml^2. \quad (22.56)$$

До інтерпретації виразів (22.56) ми ще повернемося в наступних розділах. З виразу (22.55) дістаємо таке диференціальне рівняння руху математичного маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (22.57)$$

Відповідно до підрозділу 20.4 для невільної матеріальної точки, крім закону руху, потрібно знайти також реакцію в'язі. Для цього в даному випадку доцільно скористатись натуральною формою (20.19) диференціальних рівнянь руху точки. Ввівши орти дотичної  $\vec{\tau}$  і головної нормалі  $\vec{\nu}$  траєкторії точки  $A$ , маємо:

$$\begin{cases} m \frac{dV_\tau}{dt} = -mg \sin \varphi, \\ m \frac{V^2}{l} = -mg \cos \varphi + R. \end{cases} \quad (22.58)$$

Оскільки  $V_\tau = V = l\dot{\varphi}$ , то перше рівняння (22.58) збігається з (22.57). Друге рівняння (22.58) слугує для визначення модуля реакції в'язі:

$$R = m(g \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2) = R_1(\varphi) + R_2(\dot{\varphi}), \quad R_1(\varphi) = mg \cos \varphi, \quad R_2(\dot{\varphi}) = ml\dot{\varphi}^2.$$

Чим більшою є кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  обертання маятника, тим більша складова  $R_2$ , а отже, і  $R$ . Складова  $R_1$  залежить від положення точки  $A$  (рис. 22.19):

$$\varphi = 0 \Rightarrow \vec{R}_1 = -\vec{i} mg, \quad \vec{R} = -\vec{i}(mg + R_2),$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{R}_1 = 0, \quad \vec{R} = -\vec{j} R_2,$$

$$\varphi = \pi \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{i} mg, \quad \vec{R} = \vec{i}(mg + R_2),$$

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \vec{R}_1 = 0, \quad \vec{R} = \vec{j} R_2.$$

Домножимо рівняння (22.55) на  $\dot{\varphi}$ :

$$ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + mgl \dot{\varphi} \sin \varphi = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi \right) = 0.$$

Інтегруванням знаходимо:

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = C_0. \quad (22.59)$$

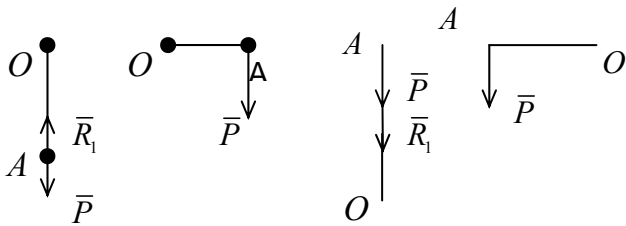


Рис. 22.19

Отже, функція  $\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi$  є першим інтегралом диференціального рівняння (22.55). Щоб з'ясувати механічний зміст рівності (22.59), відмітимо, що перший доданок є кінетичною енергією точки  $A$ :

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Скориставшись формулами (22.40), знайдемо потенціальну енергію:

$$P_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = mg, \quad P_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \quad P_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \Pi = \Pi(x), \quad \Pi = -mgx + C_1,$$

$$\Pi = -mgl \cos \varphi + C_1, \quad \Pi|_{\varphi=0} = 0 \Rightarrow C_1 = mgl, \quad \Pi = -mgl \cos \varphi + mgl, \quad (22.60)$$

$$\Pi = mgl(1 - \cos \varphi), \quad \Pi = mglH, \quad H = l(1 - \cos \varphi).$$

Запишемо тепер інтеграл енергії  $T + \Pi$  для диференціального рівняння руху математичного маятника. На підставі (22.43) маємо:

$$T + \Pi = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi + mgl = h,$$

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = h_0, \quad h_0 = h - mgl. \quad (22.61)$$

Рівності (22.59) і (22.61) рівносильні, оскільки  $h - mgl = C_0 = \text{const}$ . Таким чином, перший інтеграл (22.59) виражає собою незмінність повної механічної енергії математичного маятника, тобто є інтегралом енергії. Щоб знайти закон руху точки  $A$  (маючи перший інтеграл (22.61)), знадобиться одна квадратура:

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} = h_0 + mgl \cos \varphi, \quad l \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{h_0 + mgl \cos \varphi},$$

$$t = K \pm l \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{h_0 + mgl \cos \varphi}}.$$

Тут  $h_0$  і  $K$  – постійні інтегрування, які знаходяться з початкових умов:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}|_{t=0} = \dot{\varphi}_0. \quad (22.62)$$

Позначивши  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ , запишемо диференціальне рівняння (22.57) так:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (22.63)$$

Порядок цього рівняння можна понизити на одиницю двома способами. По-перше, можна скористатись описаним вище способом домноження обох частин рівняння на  $\dot{\varphi}$  і виділення похідної за часом:

$$\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \omega^2 \dot{\varphi} \sin \varphi = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega^2 \cos \varphi \right) = 0,$$

тобто

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega^2 \cos \varphi = C. \quad (22.64)$$

По-друге, можна використати ту обставину, що в рівняння (22.63) незалежна змінна  $t$  явно не входить (автономне рівняння). Тоді доцільно прийняти за нову незалежну змінну стару шукану функцію  $\varphi$ , а за нову шукану функцію – величину  $\dot{\varphi}$ :

$$\dot{\varphi} = p, \quad \ddot{\varphi} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\varphi} p, \quad p \frac{dp}{d\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad p dp = -\omega^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Інтегруванням знаходимо:

$$\frac{p^2}{2} = \omega^2 \cos \varphi + C. \quad (22.65)$$

Перші інтеграли (22.64) і (22.65) рівносильні між собою.

В стані спокою (“рівноваги”) маятника його швидкість і прискорення дорівнюють нулеві:

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}, \quad \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Істотно різними є лише два положення рівноваги: нижнє  $\varphi = 0$  і верхнє  $\varphi = \pi$ .

Введемо фазові змінні (змінні стану)  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$ . Замість одного рівняння

другого порядку (22.63) одержимо систему двох рівнянь, кожне з яких є першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1. \end{cases} \quad (22.66)$$

Лінеаризувавши праву частину другого рівняння (22.66) в околі значення  $x_1 = 0$ , дістанемо систему (21.87). Звісно, система (22.66) дає ті ж положення рівноваги маятника, що і рівняння (22.63). Щоб знайти їх, потрібно прирівняти нулеві обидві фазові швидкості:

$$x_2 = 0, \quad \sin x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Зрозуміла річ, ми знову отримали попередній результат.

Виключимо час  $t$  із системи (22.66), розділивши обидві частини другого рівняння на відповідні частини першого:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega^2 \frac{\sin x_1}{x_2}. \quad (22.67)$$

Щоб одержати рівняння фазових траєкторій, проінтегруємо диференціальне рівняння (22.67) першого порядку:

$$x_2 dx_2 = -\omega^2 \sin x_1 dx_1, \quad \frac{x_2^2}{2} = \omega^2 \cos x_1 + \frac{D}{2}, \quad D = \text{const.}$$

Отже ( $D$  – довільна постійна інтегрування),

$$x_2^2 - 2\omega^2 \cos x_1 = D. \quad (22.68)$$

Очевидно, що рівняння фазових траєкторій (22.68) є не чим іншим, як першим інтегралом (22.64).

Досвід показує, що маятник, виведений в результаті початкових збурень (22.62) з нижнього положення рівноваги  $\varphi = 0$ , здійснює навколо цього положення незатухаючі коливання (чим більші сили опору, тим інтенсивніше затухають коливання). Напроти, поставивши маятник вертикально вверху ( $\varphi = \pi$ ) і відпустивши потім його, ми одержимо, що в результаті як завгодно малих початкових збурень (22.62) маятник відійде від положення рівноваги  $\varphi = \pi$  достатньо далеко і здійснюватиме коливання в певному околі нижнього положення рівноваги  $\varphi = 0$ . Про такі положення рівноваги говорять, що положення  $\varphi = 0$  є стійким, а положення  $\varphi = \pi$  є нестійкими.

Дослідимо поведінку фазових траєкторій в малих околах обох положень рівноваги. “Малість” будемо розуміти в тому сенсі, що при математичному описуванні таких рухів у диференціальних рівняннях нелінійні функції без значної похибки можна замінити їхніми лінійними наближеннями (лінеаризувати). Покладемо  $\varphi = \varphi_* + \psi$ , де  $\varphi_* = n\pi$  ( $n = 0, 1$ ),  $\psi$  – поточне збурення. Останнє будемо вважати “малим”. Рівняння (22.63) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \omega^2 \sin(n\pi + \psi) &= 0, \quad \ddot{\psi} + \omega^2 (\sin n\pi \cos \psi + \cos n\pi \sin \psi) = 0, \\ \ddot{\psi} + (-1)^n \omega^2 \sin \psi &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{6} + \dots$ , то лінеаризація функції  $\sin \psi$  приводить до такого диференціального рівняння:

$$\ddot{\psi} + (-1)^n \omega^2 \psi = 0. \quad (22.69)$$

**22.7.1. Рух математичного маятника в околі нижнього положення рівноваги**

Нехай  $n = 0$ , тобто  $\varphi_* = 0$ . Рівняння (22.69) набуває вигляду:

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0. \tag{22.70}$$

Оскільки диференціальні рівняння (22.70) і (21.7) однакові, інтегральна крива  $\psi = \psi(t, a, \alpha)$  рівняння (22.70) є такою ж, як і зображена на рис. 21.4. Для фазових змінних маємо вирази:

$$\begin{cases} \psi = a \sin(\omega t + \alpha), \\ \dot{\psi} = a \omega \cos(\omega t + \alpha). \end{cases} \tag{22.71}$$

Виключивши з системи (22.71) часу  $t$ , одержимо канонічне рівняння еліпса на фазовій площині:

$$\psi^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{\omega^2} = a^2. \tag{22.72}$$

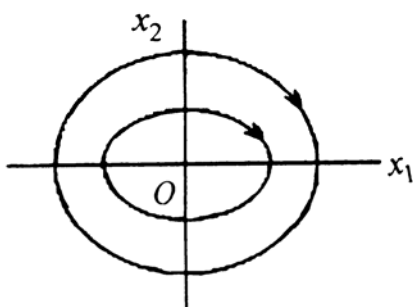


Рис. 22.20

Тут  $a^2 = \psi_0^2 + \frac{\dot{\psi}_0^2}{\omega^2}$ , тобто

$$\psi^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{\omega^2} = \psi_0^2 + \frac{\dot{\psi}_0^2}{\omega^2}. \tag{22.73}$$

Співвідношення (22.73) є першим інтегралом (22.64), в якому збережено лише головні частини нелінійностей в околі точки  $\varphi = 0$ . Дійсно,

покладемо в (22.64)  $\varphi = \psi$ ,  $\cos \varphi = 1 - \frac{\psi^2}{2} + \dots$ . Тоді

$$\dot{\psi}^2 - 2\omega^2 \left( 1 - \frac{\psi^2}{2} + \dots \right) = 2C, \quad \psi^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{\omega^2} + \dots = 2 \left( \frac{C}{\omega^2} + 1 \right) \equiv a^2.$$

Відкинувши в останньому співвідношенні малі величини вище другого порядку, приходимо до (22.73).

Введемо фазові змінні  $x_1 = \psi$ ,  $x_2 = \dot{\psi}$ . Співвідношення (22.72) стає таким:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2 \omega^2} = 1.$$

Постійна  $a$  може набувати різних значень, що залежать від початкових збурень  $\psi_0$  і  $\dot{\psi}_0$ . Це означає, що на фазовій площині маємо сім'ю еліпсів (рис. 22.20). Оскільки система (22.66) в лінеаризованому вигляді є

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1, \end{cases}$$

то фазові траєкторії проходяться за годинниковою стрілкою. В точці  $O(0, 0)$

векторне поле не визначене:  $\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{(0,0)} = \frac{0}{0}$ , тобто вона є особливою точкою

векторного поля. Її називають **центром**.

### 22.7.2. Рух математичного маятника в околі верхнього положення рівноваги

Нехай  $n = 1$ , тобто  $\varphi_* = \pi$ . Рівняння (22.69) набуває вигляду:

$$\ddot{\psi} - \omega^2 \psi = 0. \quad (22.74)$$

Для фазових змінних диференціального рівняння (22.74) маємо вирази:

$$\begin{cases} \psi = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}, \\ \dot{\psi} = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t}. \end{cases} \quad (22.75)$$

Виключимо з системи (22.75) час  $t$ . Покладемо  $\xi = e^{\omega t}$ . Тоді

$$\begin{cases} \psi = C_1 \xi + \frac{C_2}{\xi}, \\ \frac{\dot{\psi}}{\omega} = C_1 \xi - \frac{C_2}{\xi}. \end{cases} \quad (22.76)$$

Склавши відповідні частини виразів (22.76), одержимо:

$$2C_1 \xi = \psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega} \Rightarrow \xi = \frac{\psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega}}{2C_1}.$$

Підставимо цей вираз  $\xi$  в перше співвідношення (22.76):

$$\psi = \frac{\psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega}}{2} + \frac{C_2}{\frac{\psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega}}{2C_1}}, \quad \psi = \frac{\psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega}}{2} + \frac{2C_1 C_2}{\psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega}}, \quad 2\psi \left( \psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega} \right) = \left( \psi + \frac{\dot{\psi}}{\omega} \right)^2 + 4C_1 C_2.$$

Отже, виключивши із (22.75) час  $t$ , одержуємо:

$$\psi^2 - \frac{\dot{\psi}^2}{\omega^2} = 4C_1 C_2. \quad (22.77)$$

Введемо фазові змінні  $x_1 = \psi$ ,  $x_2 = \dot{\psi}$ . Рівність (22.77) стає такою:

$$x_1^2 - \frac{x_2^2}{\omega^2} = 4C_1 C_2, \quad 4C_1 C_2 \equiv x_{10}^2 - \frac{x_{20}^2}{\omega^2}. \quad (22.78)$$

Співвідношення (22.78) є першим інтегралом (22.64), в якому збережено лише головні частини нелінійностей в околі точки  $\varphi = \pi$ . Дійсно, покладемо в (22.64)

$$\varphi = \pi + \psi, \quad \cos \varphi = -\cos \psi = -\left( 1 - \frac{\psi^2}{2} + \dots \right). \quad \text{Тоді}$$

$$\dot{\psi}^2 + 2\omega^2 \left( 1 - \frac{\psi^2}{2} + \dots \right) = 2C, \quad \dot{\psi}^2 - \omega^2 \psi^2 + \dots = 2C - 2\omega^2.$$

Відкинувши в останньому співвідношенні малі величини вище другого порядку, приходимо до (22.77).

Рівняння (22.78) є канонічним рівнянням гіперболи. Її розташування на фазовій площині  $x_1x_2$  залежить від знаку правої частини  $4C_1C_2$ . Якщо

$x_{10}^2 - \frac{x_{20}^2}{\omega^2} = d^2$ , то фазові траєкторії описуються рівнянням

$$\frac{x_1^2}{d^2} - \frac{x_2^2}{\omega^2 d^2} = 1. \quad (22.79)$$

Гіпербола (22.79) має асимптоти  $x_2 = \pm \frac{\omega d}{d} x_1$ , тобто  $x_2 = \pm \omega x_1$ . Якщо ж

$x_{10}^2 - \frac{x_{20}^2}{\omega^2} = -c^2$ , то фазові траєкторії мають такі рівняння:

$$\frac{x_1^2}{c^2} - \frac{x_2^2}{\omega^2 c^2} = -1. \quad (22.80)$$

Гіперболи (22.79) і (22.80) є спряженими. Їх зображено на рис. 22.21. Диференціальні рівняння фазових траєкторій в малому околі верхнього положення рівноваги одержимо з (22.66), поклавши  $\varphi = x_1 = \pi + \psi$ . Оскільки  $\sin(\pi + \psi) = -\sin \psi = -\psi + \dots$ , то маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \omega^2 x_1. \end{cases} \quad (22.81)$$

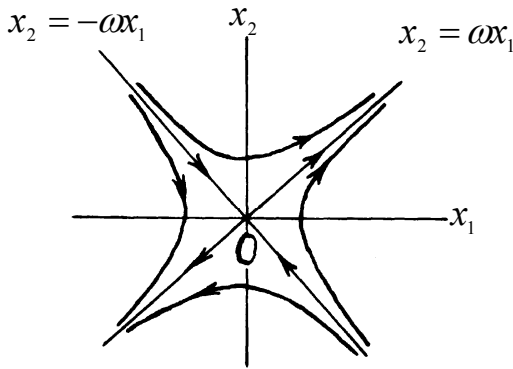


Рис. 22.21

Саме ці рівняння визначають напрям обходу фазових траєкторій, показаний стрілками на рис. 22.21. В точці  $O(0, 0)$

векторне поле не визначене:  $\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{(0,0)} = \frac{0}{0}$ , тобто вона є особливою точкою векторного поля. Її називають *сідлом*.

### 22.7.3. Глобальний фазовий портрет нелінійного консервативного осцилятора

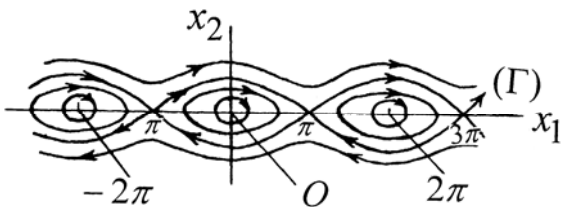


Рис. 22.22

На рис. 22.20 і 22.21 представлено локальні фазові портрети математичного маятника. Їх побудовано в невеликих околах положень рівноваги  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \pi$  відповідно на основі лінеаризованих математичних моделей.

Фазові криві для всієї площини  $x_1x_2$  показано на рис. 22.22. Стани рівноваги  $\varphi = \pm n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) нелінійного маятника на фазовій площині розташовані вздовж осі  $Ox_1$ . Поблизу центрів

( $\varphi = \pm 2k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) фазовий портрет якісно відповідає лінійному осцилятору: траєкторії є концентричними замкнутими кривими, близькими до кіл, які відображають характер малих за амплітудою коливань, близьких до гармонічних. Через нестійкі точки  $\varphi = \pm(2k+1)\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  проходять особливі інтегральні криві ( $\Gamma$ ), що зветься *сепаратрисами сідла*. Вони розділяють фазову площину на області з принципово різною поведінкою. Зі збільшенням енергії маятника його коливання від квазігармонічних поблизу точок типу “центр” еволюціонують до нелінійних періодичних коливань поблизу сепаратрис (рухи всередині області, обмеженої сепаратрисами). Подальше збільшення енергії приводить до обертального руху маятника (рух зовні сепаратрис). Ситуація, коли енергія маятника відповідає рухові по сепаратрисі, називається негрубою. Як завгодно малі відхилення енергії в той чи інший бік приводять до якісно різних типів рухів: коливального або обертального.

### Питання для самоконтролю

1. Назвіть міри руху матеріальної точки.
2. В чому полягає принципова відмінність диференціальної форми теореми від скінченної?
3. В яких випадках теорема про зміну кількості руху матеріальної точки дозволяє знайти перші інтеграли диференціальних рівнянь руху?
4. Чи дає теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки інші диференціальні рівняння, ніж ті, які впливають із другого закону динаміки?
5. Що називають інтегралом площі?
6. Як знайти роботу сили потенціального поля при скінченному переміщенні матеріальної точки?
7. Яким є механічний зміст інтеграла енергії?
8. Чим відрізняються автоколивання від вимушених коливань?
9. Якими є силові лінії поля сили тяжіння?
10. Чим відрізняється статична реакція в'язі у випадку математичного маятника від динамічної?
11. Якими є фазові траєкторії математичного маятника в околі нижнього положення рівноваги?
12. Те ж саме в околі верхнього положення рівноваги?
13. Наведіть глобальний фазовий портрет нелінійного консервативного осцилятора.



## Частина 4. Динаміка механічної системи і твердого тіла

### 23. Вступ до динаміки системи матеріальних точок

#### 23.1. Поняття механічної системи. Зовнішні та внутрішні сили

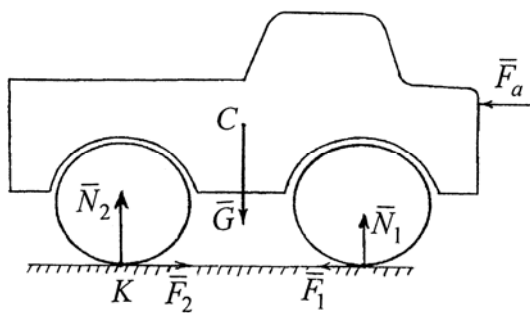


Рис. 23.1

Системою матеріальних точок або механічною системою називається сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух кожної точки залежать від положення і рухів інших точок даної сукупності, тобто положення і рухи точок взаємно пов'язані. Сили, викликані взаємодією точок, що входять до системи, називаються **внутрішніми силами**; головний вектор внутрішніх сил позначається  $\vec{F}^i$  (від латинського *interior* – внутрішній). Сили, зумовлені взаємодією точок даної системи з точками (або тілами) інших систем, називаються **зовнішніми силами**; головний вектор зовнішніх сил позначається  $\vec{F}^e$  (від латинського *exterior* – зовнішній).

Класичним прикладом системи, підпорядкованої лише внутрішнім силам, є *Сонячна система*, всі точки якої зв'язані силами взаємного притягування.

Трапляються зовнішні сили, що виникають внаслідок дії внутрішніх сил. Як приклад, розглянемо двовісний *автомобіль* з приводом на задні колеса, що рухається прямолінійно по горизонтальній дорозі зліва направо (рис. 23.1).

Автомобіль є невідільною механічною системою: в'язку для нього є дорога. Відкинемо в'язь, замінивши її дію реакціями. **Зовнішніми силами** для автомобіля є:

$\vec{G}$  – сила ваги, зумовлена притягуванням Землі;

$\vec{F}_a$  – аеродинамічна сила опору повітря;

$\vec{N}_1, \vec{N}_2$  – рівнодійні нормальних складових реакції дороги на передні та задні колеса відповідно;

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$  – рівнодійні сил тертя, зумовлених обертанням ведених (у даному випадку – передніх) і ведучих (задніх) коліс (зверніть увагу на напрям сили тертя  $\vec{F}_2$ ).

Серед зовнішніх сил активними є  $\vec{G}$  та  $\vec{F}_a$ . Сили  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2$  є реакціями в'язей.

**Внутрішніми силами** для автомобіля є:

- 1) сила тиску газів на поршні двигуна;
- 2) сили тиску поршнів двигуна на шатуни;
- 3) сили тиску шатунів на кривошипи колінчастого вала;
- 4) сили тертя в осях коліс і т.д.

Зовнішня сила тертя ковзання  $\vec{F}_2$  між задніми (ведучими) колесами автомобіля і дорогою не може виникнути без внутрішніх сил, що передають обертальний момент  $\vec{M}$  на ведучі колеса. Під дією цього моменту точка дотику  $K$  прагне скочити вліво. При обертанні коліс покриття відштовхується від

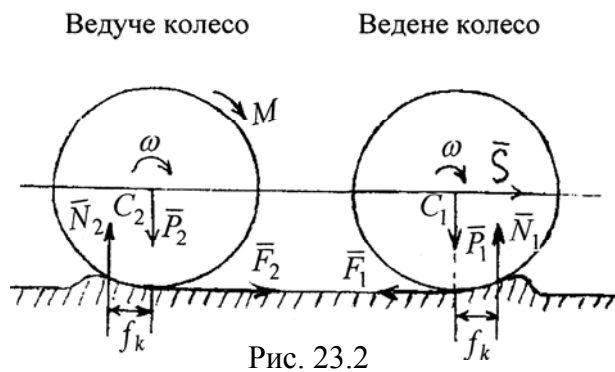


Рис. 23.2

поверхні дороги, діючи на неї в бік, протилежний напрямку руху машини. За третім законом динаміки поверхня дороги діє на автомобіль в напрямі руху. Зчеплення коліс з поверхнею дороги може здійснитись тільки за рахунок тертя. Сила тертя  $\vec{F}_2$ , що діє на колесо і направлена вправо, і є тією зовнішньою силою, завдяки якій колесо рухається

вправо. Таким чином, хоч кочення ведучого колеса відбувається під дією обертального моменту двигуна, саме тангенціальна реакція, направлена в бік руху, є відносно колеса штовхаючою або тяговою силою.

Під час руху колеса виникає деформація опорної площини і колеса. Для *ведучого колеса* деформаційний валик, що викликає зміщення точки прикладання нормальної реакції  $\vec{N}_2$  площини дороги, міститься зліва від центра  $C_2$  колеса, якщо останнє рухається вправо. Тому для ведучого колеса напрям сили тертя  $\vec{F}_2$  збігається з напрямом його руху.

*Кочення веденого колеса* відбувається під дією сили  $\vec{S}$ , прикладеної до його осі. В передній частині області контакту, де колесо набігає на дорогу, відбувається наростання деформацій, в задній – зменшення, тобто для веденого колеса деформаційний валик зміщений відносно центра  $C_1$  у напрямі руху. Сила тертя  $\vec{F}_1$  направлена в бік, протилежний напрямку руху центра колеса  $C_1$ . В цьому випадку сила тертя зумовлює можливість кочення, а не ковзання колеса по поверхні дороги. Саме таку ситуацію показано на рис. 9.7.

### 23.2. Властивості внутрішніх сил

**Теорема.** Головний вектор внутрішніх сил системи дорівнює нулеві. Головний момент внутрішніх сил відносно довільної точки простору рівний нулеві:

$$\vec{F}^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0, \quad \vec{M}_O^i = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = 0. \quad (23.1)$$

**Доведення.** Спочатку розглянемо дві точки  $A$  і  $B$ , на кожену з яких діють відповідно сили  $\vec{F}_1^i$  та  $\vec{F}_2^i$  (рис. 23.3). Згідно з законом рівності дії та протидії (див. підрозділ 1.5)  $\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i$ . Тому  $\vec{F}^i = \vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = 0$ . Отже, першу частину теореми доведено. Для доведення другої частини розглянемо суму моментів сил  $\vec{F}_1^i$  та  $\vec{F}_2^i$  відносно деякої точки  $O$  простору:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}_1^i) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^i) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^i + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^i + (\vec{r}_1 + \vec{AB}) \times (-\vec{F}_1^i) = \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^i - \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^i = 0. \end{aligned}$$

Останню рівність можна прокоментувати ще й так, що плечі обох сил  $\vec{F}_1^i$  та

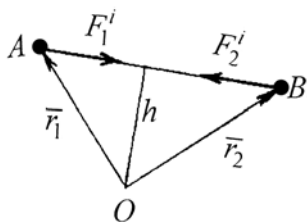


Рис. 23.3

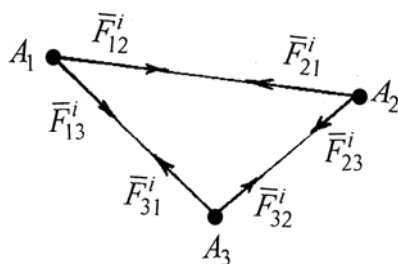


Рис. 23.4

$\vec{F}_2^i$  відносно точки  $O$  рівні  $h$ , а сили направлені в протилежні боки, тому їхні моменти мають однакові модулі і протилежні напрями.

Доведення цих властивостей для будь-якої кількості внутрішніх сил ґрунтується на тому,

що вони входять в систему попарно.

Рівність нулеві головного вектора і головного моменту внутрішніх сил матеріальної системи не означає, що ці сили для конкретної точки системи є врівноваженими (рис. 23.4). Це пояснюється тим, що внутрішні сили прикладені до різних матеріальних точок, які в загальному випадку можуть переміщуватись відносно одна одної. Прикладом може бути Сонячна система, планети якої та їхні супутники здійснюють вельми складні рухи під дією одних лише внутрішніх сил.

### 23.3. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок

Нехай маємо систему матеріальних точок  $A_1, \dots, A_n$  з масами  $m_1, \dots, m_n$  відповідно. Положення точок будемо визначати їхніми радіусами-векторами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  відносно нерухомої точки  $O$ . Застосуємо принцип звільнюваності від в'язей (див. підрозділи 1.8, 20.4) і замінимо в'язі їхніми реакціями. Нехай  $\vec{F}_k^e$  та  $\vec{F}_k^i$  – рівнодійні всіх зовнішніх і внутрішніх сил (серед них є як активні, так і реактивні сили), прикладені до  $k$ -ї матеріальної точки. Тоді кожену точку можна розглядати як вільну. Згідно рівняння (20.8) диференціальні рівняння руху системи точок мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ \dots \\ m_n \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{array} \right. \quad (23.2)$$

### 23.4. Центр мас системи

Додавши почленно векторні рівності (23.2) і врахувавши першу рівність (23.1), одержимо:

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_n \vec{r}_n) = \vec{F}^e, \quad (23.3)$$

де  $\vec{F}^e = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$  – головний вектор зовнішніх сил. Вигляд виразу у дужках рівності (23.3) наводить на думку ввести скалярну величину  $m$  і векторну величину  $\vec{r}_C$  так, щоб

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_n \vec{r}_n = m \vec{r}_C, \end{array} \right. \quad (23.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \sum_{k=1}^n m_k \equiv m_1 + \dots + m_n. \end{array} \right. \quad (23.5)$$

Параметр  $m$  визначається рівністю (23.5) і є масою системи (сумою мас точок). Знаючи  $m$ , з рівності (23.4) знаходимо:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (23.6)$$

Точка  $C$  простору, радіус-вектор якої визначається формулою (23.6), називається центром мас (центром інерції) системи. Розкладемо вектор  $\vec{r}_C$  за декартовим прямокутним базисом, в якому координати цього вектора (або проєкції на осі координат) позначимо  $x_C, y_C, z_C$ :

$$\vec{r}_C = \vec{i}x_C + \vec{j}y_C + \vec{k}z_C = \{x_C, y_C, z_C\}. \quad (23.7)$$

На підставі формули (23.6) вони визначаються формулами

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{m}. \quad (23.8)$$

Відмітимо, що в формулах (10.16) маємо  $P_s = m_s g$ . Порівняння формул (10.16) (з урахуванням останнього зауваження) і (23.8) свідчить про те, що геометрично центр мас системи матеріальних точок збігається з центром ваги. Однак поняття центра ваги пов'язане з дією специфічних сил – сил ваги. Воно виникло внаслідок наближеного припущення про те, що сили ваги, прикладені до точок матеріальної

системи, утворюють систему паралельних сил. Поняття центра мас є вільним від припущення про дію сил будь-якого фізичного походження.

**Теорема про рух центра мас системи.** На підставі позначення (23.4) рівність (23.3) набуває вигляду:

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}^e, \quad (23.9)$$

або

$$m\vec{w}_C = \vec{F}^e. \quad (23.10)$$

Рівність (23.9) можна трактувати так, що центр мас системи рухається як матеріальна точка, в якій зосереджено всю масу системи і до якої прикладено всі зовнішні сили, що діють на систему.

Розкладемо головний вектор зовнішніх сил за декартовим базисом:

$$\vec{F}^e = \vec{i}X^e + \vec{j}Y^e + \vec{k}Z^e$$

і спроекуємо векторну рівність (23.9) на осі нерухомої декартової системи координат:

$$m\ddot{x}_C = X^e, \quad m\ddot{y}_C = Y^e, \quad m\ddot{z}_C = Z^e. \quad (23.11)$$

Це координатна форма теореми.

*Значення теореми про рух центра мас* визначається такими міркуваннями.

*По-перше*, вона дає додаткове обґрунтування значущості такого ідеалізованого поняття механіки, як точка. Із (23.10) видно, що розв'язки, які ми одержуємо, розглядаючи дане тіло як матеріальну точку, визначають закон руху центра мас цього тіла, тобто мають цілком конкретний зміст. До того ж, якщо тіло рухається поступально, то його рух повністю визначається рухом центра мас. Тіло, що рухається поступально, можна моделювати матеріальною точкою з масою, рівною масі тіла. В решті випадків тіло можна розглядати як матеріальну точку лише тоді, коли для визначення положення тіла практично достатньо знати положення його центра мас і за умовами розв'язуваної задачі допустимо не брати до уваги обертальну частину руху тіла.

*По-друге*, практична цінність теореми полягає також у тому, що вона дозволяє при визначенні закону руху центра мас довільної системи виключати з розгляду всі, наперед невідомі внутрішні сили.

#### **Наслідки теореми.**

**1.** *Одними лише внутрішніми силами неможливо змінити характер руху центра мас системи.*

Розповідаючи, яким оригінальним способом барон Мюнхаузен не потону в озері, він думав, що перед ним – наївні та довірливі слухачі, які не вчили теоретичну механіку.

Підніmemo автомобіль (відірвемо колеса автомобіля від поверхні дороги). Хоч як би швидко не крутились колеса, центр мас автомобіля залишиться нерухомим. Лише поставивши автомобіль на землю, ми можемо привести його в рух. Цей приклад є свідченням того, що внутрішні сили можуть справляти посередній (непрямий) вплив на рух центра мас тільки через зовнішні сили.

**2.** *Якщо  $\vec{F}^e = 0$ , то  $\vec{v}_C = \vec{v}_C|_{t=0} = \text{const}$ , тобто центр мас матеріальної системи перебуває в спокої або рухається рівномірно і прямолінійно. Це твердження називають ще **теоремою про збереження руху центра мас**.*

3. Якщо  $X^e = 0$ , то  $(v_C)_x = \dot{x}_C = \text{const}$ . Цей результат називають ще *теоремою про збереження руху центра мас в напрямі осі  $Ox$* .

4. Пара сил, прикладена до твердого тіла, не може змінити рух його центра мас (вона може викликати тільки обертання тіла).

### 23.5. Використання теореми про рух центра мас для пояснення деяких явищ

1. **Рух центра мас Сонячної системи.** Оскільки притягуванням зірок практично можна знехтувати, то можна вважати, що на Сонячну систему ніякі зовнішні сили не діють. Отже, з певним ступенем точності центр мас Сонячної системи рухається рівномірно і прямолінійно відносно зірок.

2. **Рух людини по горизонтальній площині.** На людину, що перебуває на горизонтальній площині, діють дві зовнішні сили: сила ваги і реакція площини.

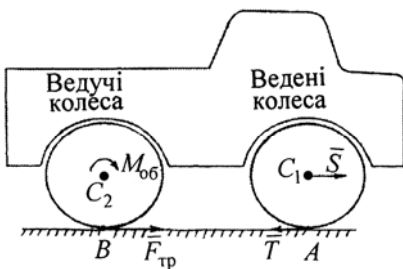


Рис. 23.5

Якщо тертя відсутнє, то сума проекцій на будь-яку горизонтальну вісь  $Ox$  усіх прикладених до людини зовнішніх сил дорівнює нулеві, і центр мас людини не буде переміщуватись вздовж площини. Якщо, наприклад, людина винесе праву ногу вперед, то її ліва нога ковзне назад (щоб центр мас залишався нерухомим).

За наявності ж тертя сковзанню лівої ноги назад буде перешкоджати сила тертя, яка в цьому випадку буде направлена вперед. Ця сила і є тією зовнішньою силою, яка дозволить людині переміщуватись в бік її дії, тобто вперед.

3. Аналогічно відбувається **рух автомобіля чи тепловоза**. Сила тиску газів у двигуні є внутрішньою силою і сама по собі не може перемістити центр мас екіпажу. Рух екіпажу відбувається тому, що двигун передає відповідним колесам (ведучим) обертальний момент. При цьому точка дотику  $B$  (рис. 23.5) ведучого колеса прагне сковзати вліво. Тоді на колесо буде діяти сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направлена вправо. Ця зовнішня сила і спричинить рух вправо центра мас екіпажу. Якщо цієї сили немає або якщо вона недостатня, щоб подолати опір, якому піддаються ведучі колеса, руху вправо не буде: ведучі колеса будуть при цьому крутитись на місці (буксувати).

На ведені колеса діє не обертальний момент, а сила  $\vec{S}$ , прикладена до їхньої осі. Під її дією ведене колесо, а з ним і точка дотику  $A$  колеса з ґрунтом, прагне зрушити вперед. При цьому на колесо буде діяти сила тертя  $\vec{T}$ , направлена назад. Ця зовнішня сила гальмує рух.

Рух об'єкта в явищах 2 і 3 відбувається за рахунок роботи внутрішніх сил (мускулів ніг людини – в прикладі 2 або двигуна автомобіля – в прикладі 3). Наголосимо ще раз, що привести в рух центр мас об'єкта внутрішні сили можуть лише тоді, коли вони зумовлюють таку взаємодію об'єкта із зовнішнім

середовищем, при якій на об'єкт починають діяти зовнішні сили (в наведених вище прикладах 2 і 3 це сили тертя). Іншою можливістю є реактивний ефект.

**4. Гальмування автомобіля.** Щоб зменшити швидкість автомобіля, до барабана, жорстко зв'язаного з колесом, що котиться, притискають гальмівну колодку. Сила тертя колодки об барабан, яка виникає, є внутрішньою силою і, отже, сама по собі не змінить рух центра мас, тобто не загальмує автомобіль або вагон. Однак тертя колодки об барабан буде сповільнювати обертання колеса навколо його осі і збільшить силу тертя колеса з ґрунтом чи рейкою, яка направлена протилежно напрямку руху. Ця зовнішня сила і буде сповільнювати рух центра мас автомобіля чи вагона, тобто спричиняти гальмування.

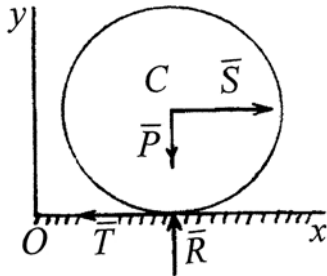


Рис. 23.6

### 23.6. Задачі на застосування теореми про рух центра мас системи

**Задача 1.** Колесо котиться з ковзанням по горизонтальній прямій під дією сили  $\vec{S}$  (рис. 23.6). Знайти закон руху центра мас  $C$  колеса, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ , вага колеса рівна  $P = mg$ , модуль сили  $\vec{S}$  дорівнює  $S = 5fP = 5fmg$ . В початковий момент часу колесо перебувало у спокої.

**Розв'язання.** В цій задачі колесо є веденим. На підставі рівностей (23.11) диференціальне рівняння руху центра мас колеса в напрямі осі  $Ox$  є таким:

$$m\ddot{x}_C = S - T.$$

Модуль сили тертя ковзання визначається формулою (9.4), тобто  $T = fP = fmg$ . Отже,

$$m\ddot{x}_C = 5fmg - fmg,$$

тобто

$$\ddot{x}_C = 4fg.$$

Двічі послідовно інтегруючи за часом, дістаємо:

$$\dot{x}_C = 4fgt + C_1,$$

$$x_C = 2fgt^2 + C_1t + C_2.$$

Початкові умови

$$x_C|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}_C|_{t=0} = 0$$

приводять до таких значень постійних інтегрування:  $C_1 = 0, C_2 = 0$ .

**Відповідь:**  $x_C = 2fgt^2$ .

**Задача 2.** Колесо котиться з ковзанням по горизонтальній прямій під дією прикладеного до нього обертового моменту  $\vec{M}$  (рис. 23.7). Знайти закон руху

центра мас  $C$  колеса, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ , вага колеса  $P = mg$ . В початковий момент часу колесо перебувало у спокої.

**Розв'язання.** В цій задачі колесо є ведучим. Двигун передає ведучим колесам обертальний момент  $\vec{M}$ , під дією якого точка дотику  $K$  ведучого колеса прагне скочити вліво. Тоді на колесо буде діяти сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направлена вправо. Ця зовнішня сила і дозволить колесу рухатись вправо. Оскільки  $\vec{F}_{\text{тр}} = fmg$ , то на підставі рівностей (23.11) диференціальне рівняння руху центра мас колеса в напрямі осі  $Ox$  є таким:

$$m\ddot{x}_C = fmg,$$

звідки

$$\ddot{x}_C = fg, \quad \dot{x}_C = fgt + C_1, \quad x_C = fg \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

З початкових умов

$$x_C|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}_C|_{t=0} = 0$$

дістаємо:  $C_1 = 0, C_2 = 0$ .

**Відповідь:**  $x_C = \frac{fg}{2} t^2$ .

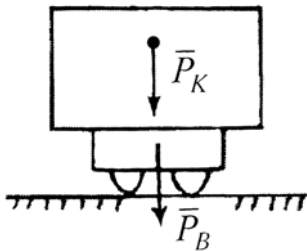


Рис. 23.8

**Задача 3.** Трамвайний вагон здійснює вертикальні гармонічні коливання на ресорах з амплітудою  $a = 2,5$  см і з періодом  $T = 0,5$  с. Маса кузова з вантажем дорівнює 10 т, маса візка з колесами дорівнює 1 т. Знайти силу тиску вагона на рейки (рис. 23.8).

**Розв'язання.** Нехай  $c$  – жорсткість ресор,  $m_K$  – маса кузова з вантажем,  $m_B$  – маса візка з колесами. Виберемо початок осі  $Ox$  в положенні рівноваги системи. Згідно з рівнянням (21.3)

диференціальне рівняння вертикальних коливань кузова з вантажем вздовж осі  $Ox$  має вигляд:

$$m_K \ddot{x} + cx = 0.$$

Період цих коливань визначається формулою (21.22), тобто

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_K}{c}}.$$

Звідси  $c = \frac{4\pi^2 m_K}{T^2}$ . Підставляючи числові значення параметрів, дістаємо

$$c = 1579 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

З підрозділі 21.2 випливає, що максимальне значення модуля

відновлюючої сили ресор визначається виразом  $Q_{\text{max}} = ca$ , тобто в даній задачі  $Q_{\text{max}} = 39$  кН. Статична сила тиску вагона на рейки дорівнює  $P = (m_K + m_B)g$ , тобто  $P = 107.9$  кН. Повна сила тиску вагона на рейки коливається від  $P - Q_{\text{max}}$  до  $P + Q_{\text{max}}$ .

**Відповідь:** сила тиску вагона на рейки коливається від 68 кН до 147 кН.



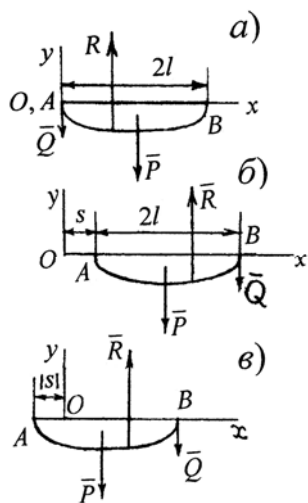


Рис. 23.9

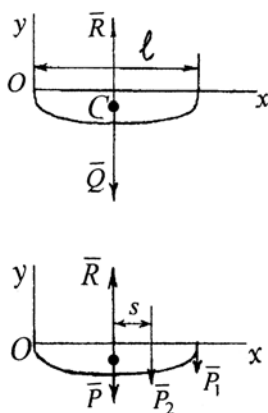


Рис. 23.10

**Задача 4.** На одному кінці човна, що перебуває у спокої, в точці  $A$  стоїть людина. Вага човна дорівнює  $P$ , вага людини дорівнює  $Q$  (рис.23.9,  $a$ ). Людина переходить потім на правий кінець  $B$  човна (рис. 23.9,  $б$ ). Нехтуючи опором води, знайти віддаль, на яку зміститься при цьому човен.

**Розв'язання.** Шукане зміщення човна позначимо  $s$ . Знак величини  $s$  наперед невідомий. Щоб уникнути помилки в її знаку, рекомендується незалежно від того, в який бік (вліво чи вправо) насправді зміщується

човен, зображувати систему у зміщеному положенні так, щоб  $s > 0$ . Якщо в результаті розв'язування задачі виявиться, що  $s < 0$ , то це означатиме, що за умовами задачі зміщення відбувається в протилежний бік.

Щоб виключити з розгляду невідомі нам сили тертя підшв об дно човна і мускульні зусилля людини, будемо розглядами човен та людину як одну систему (при цьому названі сили стануть внутрішніми). Зовнішніми силами будуть  $\bar{Q}, \bar{P}, \bar{R}$ , де  $\bar{R}$  – архімедова (виштовхна) сила води. Нехай  $C$  – центр мас системи. Оскільки

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^3 X_i^e = 0,$$

то  $\dot{x}_C = \text{const}$  (теорема про збереження руху центра мас в напрямку осі  $Ox$ ). Але ж у початковий момент часу система перебувала у спокої:

$$\dot{x}_C|_{t=0} = 0.$$

Тому в будь-який інший момент часу  $\dot{x}_C = 0$ . Звідси  $x_C = \text{const}$ , тобто

$$x_C|_{t=0} = x_C|_{t \neq 0}.$$

На підставі рис. 23.9,  $a$  і першої формули (23.8) маємо:

$$x_C|_{t=0} = \frac{Q \cdot 0 + Pl}{P + Q}.$$

З рис. 23.9,  $б$  і першої формули (23.8) маємо:

$$x_C|_{t \neq 0} = \frac{Q(s + 2l) + P(s + l)}{P + Q}.$$

Прирівнявши останні вирази, дістаємо:

$$Pl = Q(s + 2l) + P(s + l).$$

Звідси

$$s = -\frac{2Q \cdot l}{P + Q}.$$

Отже, човен зміщується вліво (як показано на рис. 23.9, в).

**Задача 5.** На середній лавці човна, що перебуває у спокої, сидять двоє людей. Один із них (його маса  $m_1 = 50$  кг) перемістився вправо на ніс човна. В якому напрямку і на яку віддаль повинна переміститись друга людина (її маса  $m_2 = 70$  кг) для того, щоб човен залишився нерухомим? Довжина човна  $l = 4$  м. Опором води рухові човна і мускульними зусиллями людей знехтувати.

**Розв'язання.** Користуючись вказівкою при розв'язуванні попередньої задачі, шукане зміщення другої людини позначимо  $s$ . Нехай  $P = mg$  – вага човна,  $P_1 = m_1 g$ ,  $P_2 = m_2 g$  – вага першого і другого пасажирів. Загальну вагу позначимо  $Q = (m + m_1 + m_2)g$ . Хід розв'язування цієї задачі такий же, як і попередньої:

$$x_C|_{t=0} = \frac{(m + m_1 + m_2) \frac{l}{2}}{m + m_1 + m_2},$$

$$x_C|_{t \neq 0} = \frac{m \frac{l}{2} + m_2 \left( \frac{l}{2} + s \right) + m_1 l}{m + m_1 + m_2}.$$

Звідси

$$(m + m_1 + m_2) \frac{l}{2} = m \frac{l}{2} + m_2 \left( \frac{l}{2} + s \right) + m_1 l.$$

Отже,

$$s = -\frac{m_1 l}{2m_2}.$$

Підставивши числові значення параметрів, дістаємо  $s = -1,43$  м.

**Відповідь:** друга людина повинна переміститись вліво (ближче до корми човна) на відстань 1,43 м.

### 23.7. Геометрія мас механічної системи

У повсякденному житті людина постійно переконується в тому, що характер руху системи матеріальних точок і твердих тіл залежить не тільки від мас точок і тіл, а й від їхнього розташування у просторі (“геометрії мас”).

**Моментом інерції точки  $M$**  (рис. 23.11, а), маса якої  $m$ , а віддаль до осі  $Ox$  дорівнює  $h$ , називається невід’ємна величина

$$I_x = mh^2.$$

**Моментом інерції системи матеріальних точок  $M_1, M_2, \dots, M_n$**  (рис. 23.11, б) з масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , відстані яких до осі  $Ox$  дорівнюють  $h_1, h_2, \dots, h_n$  відповідно, називається сума моментів інерції відносно цієї осі усіх точок системи:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + \dots + I_x^{(n)} = \sum_{s=1}^n m_s h_s^2.$$

Щоб знайти віддалі  $h_x, h_y, h_z$  (рис. 23.12) до координатних осей  $Ox, Oy$  і  $Oz$  матеріальної точки  $M$  з масою  $m$ , потрібно спроектувати точку на ці осі.

Одержимо точки  $M_1, M_2$  і  $M_3$ . Ці віддалі можна знайти як віддалі між точками з відомими координатами або як гіпотенузи прямокутних трикутників з відомими катетами  $M_1M_0, M_0M; M_2M_0, M_0M; OM_1, M_1M_0$ . Тому

$$I_x = mh_x^2, I_y = mh_y^2, I_z = mh_z^2.$$

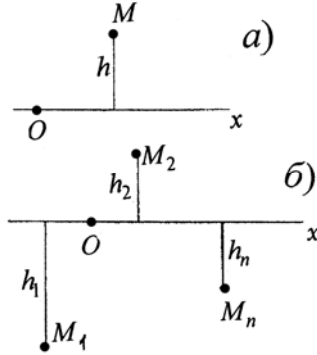


Рис. 23.11

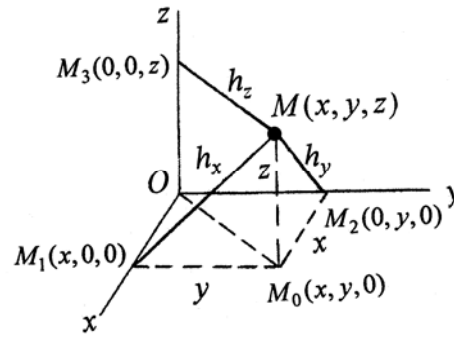


Рис. 23.12

Отже,

$$I_x = m(y^2 + z^2), I_y = m(x^2 + z^2), I_z = m(x^2 + y^2).$$

Відцентровими моментами інерції точки  $M$  називаються величини

$$I_{xy} = mxy, I_{yz} = myz, I_{xz} = mxz.$$

Очевидними є рівності:

$$I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}.$$

Відцентрові моменти інерції характеризують не тільки віддаленість точки до відповідних осей, а і її розташування відносно цих осей, оскільки вони пропорційні координатам точки (які є алгебраїчними величинами).

Для дискретної **системи**  $n$  матеріальних точок  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$  з масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  відповідно маємо:

$$I_x = \sum_{s=1}^n m_s (y_s^2 + z_s^2), I_y = \sum_{s=1}^n m_s (z_s^2 + x_s^2), I_z = \sum_{s=1}^n m_s (x_s^2 + y_s^2), \quad (23.12)$$

а також

$$I_{xy} = \sum_{s=1}^n m_s x_s y_s, I_{yz} = \sum_{s=1}^n m_s y_s z_s, I_{zx} = \sum_{s=1}^n m_s z_s x_s. \quad (23.13)$$

Кожна наступна величина (23.12) і (23.13) одержується з попередньої круговою (циклічною) перестановкою літер  $x, y$  і  $z$ .

Введемо аналогічні характеристики для твердого тіла (континуальної системи), скориставшись основною ідеєю інтегрального числення. Нехай тіло займає просторову область  $(v)$  (рис. 23.13). Об'єм елементарної області  $(\Delta v)$  позначимо  $\Delta v$ . Нехай вона буде прямокутним паралелепіпедом з ребрами  $\Delta x, \Delta y$  і  $\Delta z$ , а  $M \in (\Delta v)$  – довільна точка області. Тоді  $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Масу області  $(\Delta v)$  позначимо  $\Delta m$ . Середньою щільністю розподілу мас в області  $(\Delta v)$

називається величина  $\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta v}$ . Щільністю розподілу мас в довільній точці  $M(x, y, z)$  області називається величина

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z) = \lim_{\substack{(\Delta v) \rightarrow M \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}.$$

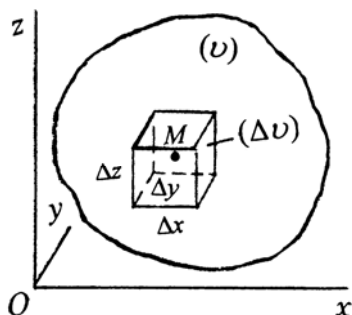


Рис. 23. 13

Тут  $dv = dxdydz$  – елемент об'єму в декартових координатах. Він є головною частиною приросту об'єму:

$$\Delta v = dv + o(dv).$$

Елементом маси називається величина

$$dm = \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Маса  $m$  області  $(v)$  виражається потрібним інтегралом:

$$m = \iiint_{(v)} \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Якщо тіло однорідне (тобто  $\rho(x, y, z) = \text{const}$ ), то

$$m = \rho v.$$

Елементарним моментом інерції тіла (тобто моментом інерції області  $(dv)$ ) відносно осі  $Ox$  називається величина

$$dI_x = h_x^2 dm = (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Аналогічно:

$$dI_y = (z^2 + x^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$dI_z = (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Осьові моменти інерції тіла відносно координатних осей знаходяться потрібним інтегруванням:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{(v)} \rho(x, y, z) \cdot (y^2 + z^2) dxdydz, \\ I_y &= \iiint_{(v)} \rho(x, y, z) \cdot (z^2 + x^2) dxdydz, \\ I_z &= \iiint_{(v)} \rho(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2) dxdydz. \end{aligned} \quad (23.14)$$

Для відцентрових моментів інерції тіла маємо вирази:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_{(v)} \rho(x, y, z) \cdot xy dxdydz, \\ I_{yz} &= \iiint_{(v)} \rho(x, y, z) \cdot yz dxdydz, \\ I_{zx} &= \iiint_{(v)} \rho(x, y, z) \cdot zx dxdydz. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Формально вирази (23.14) і (23.15) одержуються з (23.12) і (23.13) (тобто перехід від дискретної системи до континуальної) замінами:

$$\sum_s \rightarrow \iiint_{(v)}; \quad m_s \rightarrow dm; \quad x_s, y_s, z_s \rightarrow x, y, z.$$

Крім реальних (тривимірних) тіл, буває корисно вводити до розгляду “вироджені” тіла, у яких один або два розміри набагато менші інших, тобто дво- і одновимірні. Тоді замість об’ємних (потрійних) інтегралів будуть подвійні, поверхневі, криволінійні або означені інтеграли.

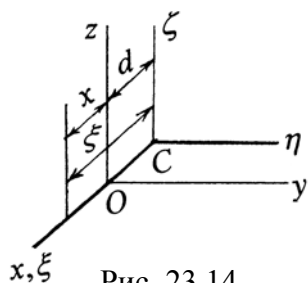


Рис. 23.14

Радіусом інерції тіла відносно певної осі називається віддаль від осі до такої точки, в якій потрібно зосередити масу  $m$  тіла, щоб момент інерції цієї точки відносно даної осі дорівнював моменту інерції тіла відносно тієї самої осі:

$$I_x = m\rho_x^2, \quad I_y = m\rho_y^2, \quad I_z = m\rho_z^2.$$

Крім осьових і відцентрових моментів інерції, в певних задачах механіки геометрію мас буває доцільним характеризувати ще й іншими величинами.

Моментами інерції тіла відносно координатних площин називаються величини

$$J_{xy} = J_{yx} = \iiint_{(v)} \rho z^2 dx dy dz, \quad J_{yz} = J_{zy} = \iiint_{(v)} \rho x^2 dx dy dz,$$

$$J_{xz} = J_{zx} = \iiint_{(v)} \rho y^2 dx dy dz.$$

Очевидними є формули

$$I_x = J_{xy} + J_{xz}, \quad I_y = J_{yx} + J_{yz}, \quad I_z = J_{zx} + J_{zy}.$$

Полярним моментом інерції тіла (тобто моментом інерції тіла відносно полюса  $O$ ) називається величина

$$I_O = \iiint_{(v)} \rho(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Очевидною є залежність

$$I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z).$$

### 23.8. Моменти інерції відносно паралельних осей

Залежність між моментами інерції відносно паралельних осей була відома ще визначному голландському механіку, математику і фізику Х. Гюйгенсу (1629–1695). У зв’язку з винайденим ним маятниковим годинником він вивчав коливання фізичного маятника і ввів поняття моменту інерції тіла. Сам термін “момент інерції” запропонував Л. Ейлер (1707–1783). Він же вперше строго довів у 1763 р. формулу, якою пов’язані моменти інерції відносно паралельних осей.

**Теорема.** Момент інерції системи (тіла) відносно певної осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас, плюс маса системи (тіла) помножена на квадрат відстані між осями, тобто (рис. 23.14)

$$I_{Oz} = I_{Cz} + md^2. \tag{23.16}$$

Позначивши  $I_{Oz} \equiv I_O$ ,  $I_{Cz} \equiv I_C$ , маємо

$$I_O = I_C + md^2.$$

*Доведення.* Обмежимося (для конкретності) системою матеріальних точок  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Нехай  $O$  – довільна точка,  $C$  – центр мас. Розглянемо системи декартових прямокутних координат  $Oxyz$  і  $C\xi\eta\zeta$ , осі  $Oz$  і  $C\zeta$  яких паралельні, відстань між ними дорівнює  $d$ . Формули перетворення координат при паралельному перенесенні осей мають вигляд:

$$x = \xi - d, \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

Якщо  $M_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) – довільна точка матеріальної системи, то її координати у зазначених системах зв'язані співвідношеннями

$$x_s = \xi_s - d, \quad y_s = \eta_s, \quad z_s = \zeta_s. \quad (23.17)$$

На підставі формул (23.12) маємо:

$$I_{Oz} = \sum_{s=1}^n m_s (x_s^2 + y_s^2), \quad I_{C\zeta} = \sum_{s=1}^n m_s (\xi_s^2 + \eta_s^2). \quad (23.18)$$

Враховуючи вирази (23.17), знаходимо:

$$\begin{aligned} I_{Oz} = \sum_{s=1}^n m_s (\xi_s^2 - 2d\xi_s + d^2 + \eta_s^2) = \sum_{s=1}^n m_s (\xi_s^2 + \eta_s^2) - \\ - 2d \sum_{s=1}^n m_s \xi_s + d^2 \sum_{s=1}^n m_s. \end{aligned} \quad (23.19)$$

З рівностей (23.5) і (23.8) дістаємо:

$$\sum_{s=1}^n m_s = m, \quad \sum_{s=1}^n m_s \xi_s = m\xi_C. \quad (23.20)$$

З рис. 23.14 видно, що  $\xi_C = 0$ . Із врахуванням рівностей (23.20) і другої рівності (23.18) рівність (23.19) переходить у (23.16), що й доводить теорему.

*Означення.* Момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас системи (тіла), називається центральним моментом інерції.

*Наслідок з теореми 3.* З формули (23.16) випливає, що з усіх моментів інерції відносно різних паралельних осей найменшим є момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас, тобто найменшим є центральний момент інерції.

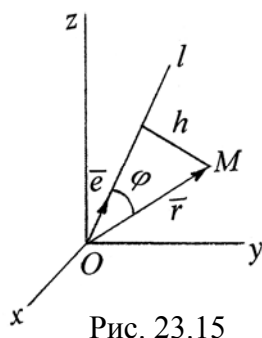


Рис. 23.15

### 23.9. Момент інерції тіла відносно довільної осі. Тензор інерції

Нехай  $Ol$  – певна вісь,  $\vec{e}$  – її орт (рис. 23.15),  $h$  – віддаль довільної точки  $M(x, y, z)$  тіла до осі  $Ol$ ,  $\rho$  – щільність розподілу мас у тілі,  $(\tau)$  – область простору, зайнята тілом. Згідно з виразами (23.14) момент інерції тіла відносно осі  $Ol$  є

$$I_l = \iiint_{(\tau)} \rho h^2 dx dy dz.$$

Нехай вісь  $Ol$  утворює з координатними осями  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  кути  $\alpha, \beta, \gamma$ , тобто

$$\vec{e} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma.$$

Оскільки

$$h = r \sin \varphi = |\vec{e} \times \vec{r}|,$$

$$\vec{e} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(z \cos \beta - y \cos \gamma) +$$

$$+ \vec{j}(x \cos \gamma - z \cos \alpha) + \vec{k}(y \cos \alpha - x \cos \beta),$$

то

$$h^2 = (z \cos \beta - y \cos \gamma)^2 + (x \cos \gamma - z \cos \alpha)^2 + (y \cos \alpha - x \cos \beta)^2 =$$

$$= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma -$$

$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha.$$

Оскільки напрямні косинуси осі  $OI$  не залежать від області  $(v)$ , то

$$I_l = \iiint_{(\tau)} \rho(y^2 + z^2) dx dy dz \cdot \cos^2 \alpha + \iiint_{(\tau)} \rho(x^2 + z^2) dx dy dz \cdot \cos^2 \beta +$$

$$+ \iiint_{(\tau)} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz \cdot \cos^2 \gamma - 2 \iiint_{(\tau)} \rho xy dx dy dz \cdot \cos \alpha \cos \beta -$$

$$- 2 \iiint_{(\tau)} \rho yz dx dy dz \cdot \cos \beta \cos \gamma - 2 \iiint_{(\tau)} \rho xz dx dy dz \cdot \cos \alpha \cos \gamma.$$

На підставі виразів (23.14) і (23.15) остаточно дістаємо:

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta -$$

$$- 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma. \quad (23.21)$$

Матриця

$$\Theta^O = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \quad (23.22)$$

називається тензором інерції тіла в точці  $O$ .

Тензорне числення сформувалось у ХХ ст. Спочатку в науку було введено числа (скаляри), потім – вектори або упорядковані трійки чисел. Деякі геометричні об'єкти, а також низка фізичних властивостей тіл потребують для їхньої характеристики більшої, ніж три, кількості чисел. Розглянемо найбільш прості з них – афінні ортогональні тензори другого рангу або афінори. Так називається сукупність дев'яти величин  $p_{rs}$ , які розташовані у вигляді матриці

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

відповідають певній прямолінійній прямокутній системі координат  $Ox_1x_2x_3$  і перетворюються у величини  $p'_{kl}$ , що відповідають іншій системі координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ , за формулами

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (23.23)$$

де  $\alpha_{kr} = \cos(\widehat{x'_k, x_r})$ .

Скаляри – це тензори нульового рангу, вектори – тензори першого рангу. Прикладами тензорів другого рангу є тензор інерції (23.22), тензор пружних напруг чи тензор пружних деформацій в механіці твердого деформівного тіла.

Істотна різниця між названим підходом до визначення тензора і методом аналітичної геометрії полягає в тому, що при визначенні тензора жодній із координатних систем не надається ні найменшої переваги. Оскільки права частина у формулі (23.21) є однорідною квадратичною формою, то тензор інерції (23.22) є тензором другого рангу. В аналітичній геометрії в основу міркувань завжди покладена певна координатна система. При побудові векторного числення системи координат намагаються уникнути, зіставляючи з кожним вектором направлений відрізок у просторі, що дає змогу визначити різні операції з векторами суто геометричним чином. Так само з симетричним тензором другого рангу (тензор (23.22) є симетричним) можна зіставити центральну поверхню другого порядку. Однак при вивченні складніших об'єктів можливість простого наочного представлення їх втрачається.

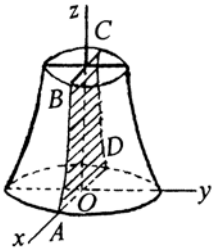


Рис. 23.16

### 23.10. Головні осі інерції та способи їх знаходження

Головною віссю інерції тіла називається координатна вісь, для якої обидва відцентрові моменти інерції, що містять індекс цієї осі, дорівнюють нулеві. Так, вісь  $Oy$  є головною віссю інерції, якщо  $I_{xy} = 0, I_{yz} = 0$ .

Головною центральною віссю інерції називається головна вісь інерції, що проходить через центр мас тіла.

Під матеріальною симетрією тіла мають на увазі не тільки геометричну симетрію, а й симетричний розподіл мас.

**Теорема 1.** Якщо тіло має площину матеріальної симетрії, то для усіх її точок вісь, перпендикулярна цій площині, є головною віссю інерції.

**Доведення.** Нехай площина  $xOz$  є площиною матеріальної симетрії тіла (рис. 23.16). В перетині тіла з цією площиною одержуємо переріз  $ABCD$ . Кожній точці з масою  $m_s$  і координатами  $x_s, y_s, z_s$  відповідає точка з масою  $m_s$  і координатами  $x_s, -y_s, z_s$ . Цим двом точкам в інтегральній сумі будуть відповідати члени

$$m_s x_s y_s - m_s x_s y_s, \quad m_s y_s z_s - m_s y_s z_s.$$

Тому  $I_{xy} = 0, I_{yz} = 0$ , тобто  $Oy$  – головна вісь інерції тіла, що й доводить теорему.

**Теорема 2.** Якщо тіло має вісь матеріальної симетрії, то ця вісь є головною центральною віссю інерції (такі осі називаються осями динамічної симетрії).



**Доведення.** Нехай  $Oz$  (рис. 23.16) – вісь матеріальної симетрії тіла. Кожній точці  $M_s$  тіла з масою  $m_s$  і координатами  $x_s, y_s, z_s$  буде відповідати точка  $M_s^*$  з масою  $m_s$  і координатами  $-x_s, -y_s, z_s$  (на рис. 23.17  $A$  – довільна точка осі  $Oz$ ). Внаслідок цього відповідні інтегральні суми будуть нульовими:

$$\sum_s (m_s x_s z_s - m_s x_s^* z_s) = 0, \quad \sum_s (m_s y_s z_s - m_s y_s^* z_s) = 0,$$

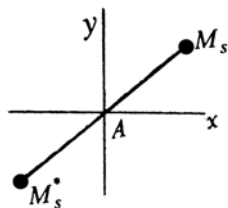


Рис. 23.17

тобто  $I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$ . Отже, вісь  $Oz$  є головною віссю інерції тіла. Центральною вона є тому, що центр мас тіла лежить на ній.

На рис. 23.16 зображене тіло, для якого всі три осі  $Ox, Oy$  і  $Oz$  для точки  $O$  є головними осями інерції:  $Oz$  як вісь симетрії,  $Ox$  і  $Oy$  як осі, перпендикулярні площинам симетрії  $yOz$  і  $xOz$ .

### 23.11 Моменти інерції деяких конкретних тіл

#### 1. Однорідний прямолінійний стержень (рис. 23.18):

$$I_{Oy} = \rho \int_0^l x^2 dx = \rho \frac{l^3}{3},$$

$$m = \rho l,$$

$$I_{Oy} = \frac{ml^2}{3}.$$

$$I_{Cy} = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\rho \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{2}{3} \rho \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}.$$

Отже,

$$I_{Oy} = \frac{ml^2}{3}, \tag{23.24}$$

$$I_{Cy} = \frac{ml^2}{12}. \tag{23.25}$$

Ці вирази пов'язані між собою формулою (23.16):

$$I_{Oy} = I_{Cy} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2, \quad m \frac{l^2}{3} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4}.$$

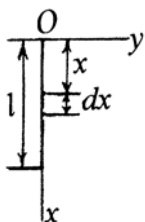


Рис. 23.18

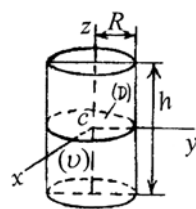
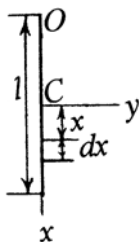


Рис. 23.19

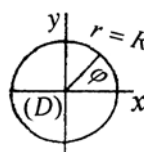


Рис. 23.20

**2. Однорідний прямий круговий циліндр** (рис. 23.19). З геометричних міркувань очевидно, що  $I_x = I_y$ . Покажемо це обчисленнями:

$$I_x = \rho \iiint_{(v)} (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \iint_{(D)} y^2 dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \rho \iint_{(D)} dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \rho h \iint_{(D)} \left( y^2 + \frac{h^2}{12} \right) dx dy,$$

$$I_y = \rho \iiint_{(v)} (x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \iint_{(D)} x^2 dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \rho \iint_{(D)} dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \rho h \iint_{(D)} \left( x^2 + \frac{h^2}{12} \right) dx dy,$$

$$I_z = \rho \iiint_{(v)} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \rho h \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Область  $(D)$  є кругом радіуса  $R$ . Підінтегральні функції тут такі, що доцільно перейти від декартових координат до полярних за формулами  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ . Отже,

$$\begin{aligned} I_x &= \rho h \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r \left( r^2 \sin^2 \phi + \frac{h^2}{12} \right) dr = \rho h \int_0^{2\pi} \left( \frac{R^4}{4} \sin^2 \phi + \frac{h^2 R^2}{24} \right) d\phi = \\ &= \frac{\rho h R^2}{4} \int_0^{2\pi} \left( R^2 \frac{1 - \sin 2\phi}{2} + \frac{h^2}{6} \right) d\phi = \frac{\rho h R^2}{4} \left( R^2 \pi + \frac{h^2 \pi}{3} \right) = \\ &= \frac{\pi \rho h R^2}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad I_y = \rho h \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r \left( r^2 \cos^2 \phi + \frac{h^2}{12} \right) dr = \\ &= \rho h \int_0^{2\pi} \left( \frac{R^4}{4} \cos^2 \phi + \frac{h^2 R^2}{24} \right) d\phi = \frac{\rho h R^2}{4} \int_0^{2\pi} \left( R^2 \frac{1 + \cos 2\phi}{2} + \frac{h^2}{6} \right) d\phi = \\ &= \frac{\rho h R^2}{4} \left( R^2 \pi + \frac{h^2 \pi}{3} \right) = \frac{\pi \rho h R^2}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \\ I_z &= \rho h \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \rho h R^4}{2}. \end{aligned}$$

Маса циліндра  $m = \rho\pi R^2 h$ . Остаточно маємо:

$$I_x = I_y = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad I_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (23.26)$$

### 3. Однорідна кругла пластинка (рис. 23.21).

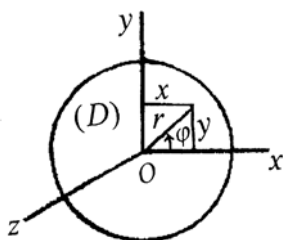


Рис. 23.21

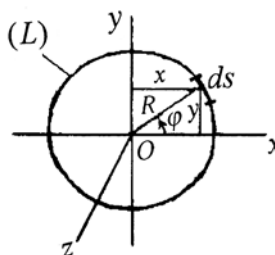


Рис. 23.22

$$I_x = \rho \iint_{(D)} y^2 dx dy = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \sin^2 \phi d\phi dr = \rho \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi \cdot \int_0^R r^3 dr = \rho\pi \frac{R^4}{4},$$

$$I_y = \rho \iint_{(D)} x^2 dx dy = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \cos^2 \phi d\phi dr = \rho \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi \cdot \int_0^R r^3 dr = \rho\pi \frac{R^4}{4},$$

$$I_z = \rho \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 d\phi dr = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^R r^3 dr = \pi\rho \frac{R^4}{2}.$$

Маса пластинки  $m = \rho\pi R^2$ , тому

$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}, \quad I_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (23.27)$$

Діаметральні моменти інерції  $I_x = I_y$  пластинки (23.27) одержуються з моментів інерції  $I_x = I_y$  круглого циліндра (23.26) при  $h = 0$ . Момент інерції  $I_z$  пластинки такий же, як і момент інерції  $I_z$  круглого циліндра.

**4. Однорідне кругле тонке кільце** (рис. 23.22). Моменти інерції виражаються криволінійними інтегралами за довжиною дуги:

$$I_x = \rho \int_{(L)} y^2 ds, \quad I_y = \rho \int_{(L)} x^2 ds, \quad I_z = \rho \int_{(L)} R^2 ds.$$

Оскільки параметричні рівняння кола радіуса  $R$  мають вигляд:

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \\ y = R \sin \phi \end{cases}$$

то

$$ds = \sqrt{x_\phi'^2 + y_\phi'^2} d\phi = \sqrt{R^2 \sin^2 \phi + R^2 \cos^2 \phi} d\phi = R d\phi.$$

Зауважимо, що цей результат є очевидним із геометричних міркувань. Отже,

$$I_x = \rho \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \phi \cdot R d\phi = \rho R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi = \rho\pi R^3,$$

$$I_y = \rho \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 \phi \cdot R d\phi = \rho R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = \rho \pi R^3, \quad I_z = \rho \int_0^{2\pi} R^2 \cdot R d\phi = 2\pi \rho R^3.$$

Введемо до розгляду масу кільця:  $m = 2\pi\rho R$ . Тоді

$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}, \quad I_z = mR^2.$$

### Питання для самоконтролю

1. Чому головний вектор внутрішніх сил системи дорівнює нулю?
2. Чим відрізняється кочення ведучого колеса автомобіля від кочення веденого колеса?
3. Чому головний момент внутрішніх сил системи відносно довільної точки простору рівний нулю?
4. В чому полягає різниця між центром мас системи та центром ваги системи?
5. Сформулюйте теорему про збереження руху центра мас системи.
6. Те ж саме в напрямі координатної осі.
7. Чому рух по гладенькій поверхні неможливий?
8. Пояснити процес гальмування автомобіля.
9. Якими є характеристики «геометрії мас»?
10. Як знайти характеристики «геометрії мас» для дискретної системи? для твердого тіла?
11. Чому центральний момент інерції є найменшим з усіх моментів інерції відносно різних паралельних осей?
12. Що таке тензор інерції тіла?
13. Як знайти головну вісь інерції тіла, що має площину матеріальної симетрії?
14. Як знайти головну центральну вісь інерції тіла, що має вісь матеріальної симетрії?
15. Як обчислити моменти інерції тіла? пластинки? стержня?

## 24. Теорема про міри руху системи матеріальних точок

При розв'язуванні конкретних задач складність використання диференціальних рівнянь руху матеріальної системи у формі (23.2) полягає перш за все в тому, що, як правило, аналітичні вирази внутрішніх сил і реакцій в'язей заздалегідь невідомі. Але про рух матеріальної системи можна скласти часткове, а іноді і повне уявлення, якщо ввести до розгляду певні скалярні і векторні величини, що зветься мірами руху. В деякій мірі вони характеризують рух всієї матеріальної системи. Крім того, іноді з теорем про міри руху можна отримати перші інтеграли системи диференціальних рівнянь руху, за допомогою яких знизити потім порядок цієї системи.

Міри руху системи матеріальних точок природно ввести як суми мір руху всіх точок системи. На відміну від ізольованої матеріальної точки, точки системи взаємодіють. Ця взаємодія описується внутрішніми силами системи. Оскільки

їхній головний вектор і головний момент відносно довільної точки дорівнюють нулеві (див. підрозділ 23.2), то на зміну кількості руху системи та кінетичного моменту внутрішні сили безпосередньо не можуть вплинути.

## 24.1. Теорема про зміну кількості руху системи

### 24.1.1. Диференціальна форма теореми

Розглянемо довільну точку  $M_s$  ( $s=1, \dots, n$ ) матеріальної системи з масою  $m_s$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{v}_s$  відносно певної інерціальної системи відліку  $Oxyz$ . Радіус-вектор точки  $M_s$  відносно точки  $O$  позначимо  $\vec{r}_s$ . Її кількістю руху є вектор  $\vec{q}_s = m_s \vec{v}_s$ . Кількістю руху системи матеріальних точок називається вектор

$$\vec{Q} = \sum_{s=1}^n \vec{q}_s = \sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s. \quad (24.1)$$

На підставі рівності (23.4) маємо:

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n m_s \vec{r}_s = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_C) = m \vec{v}_C = \vec{q}_C. \quad (24.2)$$

Отже, кількість руху матеріальної системи дорівнює кількості руху, яку мав би центр мас системи, якщо в ньому зосередити масу всієї системи.

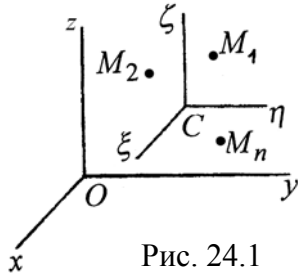


Рис. 24.1

Крім інерціальної системи відліку  $Oxyz$ , побудуємо систему координат  $C\xi\eta\zeta$  з початком у центрі мас і з осями, що рухаються поступально (рис. 24.1). Тепер рух кожної точки системи можна розглядати як складний рух: переносний разом з осями системи координат  $C\xi\eta\zeta$  і рух відносно цих осей. Тому  $\vec{v}_C = (\vec{v}_C)_e + (\vec{v}_C)_r$ . Але

$(\vec{v}_C)_r = 0$ , отже  $\vec{v}_C = (\vec{v}_C)_e$ . Таким чином,

$$\vec{Q} = (\vec{q}_C)_e.$$

Кількість руху матеріальної системи характеризує її поступальний рух разом з центром мас.

Рівняння (23.2) можна записати так:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \dots, m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i,$$

або

$$\frac{d\vec{q}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \dots, \frac{d\vec{q}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i.$$

Суму лівих частин цих рівнянь прирівнюємо сумі правих частин. Врахувавши першу рівність (23.1), а також (24.1), одержимо:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e, \quad (24.3)$$

де  $\vec{F}^e = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s^e$  – головний вектор зовнішніх сил.

Рівність (24.3) виражається наступна теорема.

**Теорема.** Похідна за часом (швидкість зміни) кількості руху матеріальної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на точки системи.

Якщо вектори  $\vec{Q}$  і  $\vec{F}^e$  розкласти за декартовим базисом

$$\vec{Q} = \vec{i}Q_x + \vec{j}Q_y + \vec{k}Q_z, \quad \vec{F}^e = \vec{i}F_x^e + \vec{j}F_y^e + \vec{k}F_z^e,$$

то замість однієї векторної рівності (24.3) одержимо три скалярні рівності:

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = F_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = F_z^e. \quad (24.4)$$

Підставивши у формулу (24.3) вираз  $\vec{Q}$  згідно з (24.2), отримаємо рівність (23.10).

### Наслідки.

**1.** Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кількості руху матеріальної системи. Вони можуть лише непрямо вплинути через зовнішні сили (про це йшла мова у підрозділі 23.4 при розгляді руху центра мас, але ж рівності (23.10) і (24.3) згідно з (24.2) рівносильні).

**2.** Якщо  $\vec{F}^e = 0$ , то  $\vec{Q} = \text{const}$ , тобто

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0, \quad (24.5)$$

де  $\vec{Q}_0 = \vec{Q}|_{t=0}$ . Перший інтеграл (24.5) виражає собою закон збереження кількості руху матеріальної системи.

**3.** Якщо, наприклад,  $F_x^e = 0$ , то з рівностей (24.4) маємо:

$$Q_x|_{t \neq 0} = Q_x|_{t=0}. \quad (24.6)$$

Перший інтеграл (24.6) виражає собою закон збереження кількості руху матеріальної системи в напрямі осі  $Ox$ .

### 24.1.2. Скінченна (інтегральна) форма теореми

З рівності (24.3) маємо

$$d\vec{Q} = \vec{F}^e dt. \quad (24.7)$$

Якщо  $\vec{Q}|_{t=t_{\Pi}} = \vec{Q}_{\Pi}$ ,  $\vec{Q}|_{t=t_K} = \vec{Q}_K$ , то інтегруванням рівності (24.7) знаходимо:

$$\int_{t_{\Pi}}^{t_K} d\vec{Q} = \int_{t_{\Pi}}^{t_K} \vec{F}^e dt, \quad \vec{Q}_K - \vec{Q}_{\Pi} = \vec{S}^e.$$

Величина  $\vec{S}^e = \int_{t_{\Pi}}^{t_K} \vec{F}^e dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{\Pi}}^{t_K} \vec{F}_j^e dt = \sum_{j=1}^n \vec{S}_j^e$  є головним вектором імпульсів усіх

зовнішніх сил за проміжок часу  $[t_{\Pi}, t_K]$ . Далі позначимо  $\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_K - \vec{Q}_{\Pi}$ . Тоді

$$\Delta\vec{Q} = \vec{S}^e. \quad (24.8)$$

Цією рівністю виражається наступна теорема.

**Теорема.** Приріст кількості руху матеріальної системи за відрізок часу  $[t_{\Pi}, t_K]$  дорівнює головному вектору імпульсів усіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи за цей відрізок часу.

## **24.2. Використання теореми про зміну кількості руху системи для пояснення деяких явищ**

**1. Віддача гвинтівки і відкат ствола гармати.** Якщо розглянути гвинтівку і кулю як одну механічну систему, то тиск порохових газів у момент пострілу є внутрішньою силою. Ця кількість руху до пострілу дорівнювала нулеві. Оскільки порохові гази, діючи на кулю, наділяють її певною кількістю руху, направленою вперед, то одночасно вони повинні наділити гвинтівку такою ж кількістю руху в протилежному напрямі. Це викличе рух гвинтівки назад – так звану віддачу.

Аналогічне явище відбувається при стрільбі з гармат (відкат ствола гармати).

**2. Функціонування гребного гвинта (пропелера).** Гвинт спонукає певну кількість повітря (або води) рухатись вздовж осі гвинта, відкидаючи цю кількість повітря (води) назад. Якщо розглядати її та літак (або судно) як одну систему, то сили взаємодії гвинта і середовища (як внутрішні) не можуть змінити сумарну кількість руху. Тому при відкиданні певного обсягу повітря (води) назад літак (судно) одержує відповідну кількість руху вперед – таку, щоб кількість руху всієї системи залишалась рівною нулеві (оскільки вона була нульовою до початку руху).

Аналогічний ефект досягається дією весел чи гребних коліс.

**3. Реактивний рух.** В реактивному снаряді (ракеті) газоподібні продукти згорання палива з великою швидкістю викидаються з отвору у хвостовій частині ракети (із сопла ракетного двигуна). Діючи при цьому сили тиску є внутрішніми силами. Тому вони не можуть змінити кількість руху системи ракета – продукти згорання палива. Оскільки гази, що вириваються назовні, мають певну кількість руху, яка направлена назад, то ракета отримує при цьому відповідну швидкість, направлену вперед.

Звернімо увагу на те, що гвинтовий двигун (попередній приклад) наділяє об'єкт (літак, судно) рухом за рахунок відкидання назад частинок того середовища, в якому він рухається. Тому в безповітряному просторі такий рух неможливий. Реактивний же двигун наділяє рухом об'єкт за рахунок відкидання назад частинок, які виробляються в самому двигуні (продукти згорання). Тому такий рух однаково можливий як у повітрі, так і в безповітряному просторі.

## **24.3. Задачі на застосування закону збереження кількості руху системи**

При розв'язуванні конкретних задач користування названим законом дає змогу виключити з розгляду усі внутрішні сили. Тому систему, що розглядається, треба вибирати так, щоб усі (або частину) раніше невідомих сил зробити внутрішніми.

Закон збереження кількості руху зручно застосовувати в тих випадках, коли по зміні поступальної швидкості однієї частини системи потрібно знайти швидкість іншої частини системи. Зокрема, цей закон широко використовується в теорії удару тіл.

**Задача 1.** Маса ствола гармати дорівнює  $11 \cdot 10^3$  кг. Маса снаряда дорівнює 54 кг, швидкість снаряда біля дульного отвору становить 900 м/с. Знайти швидкість вільного відкату ствола гармати в момент вильоту снаряда.

**Розв'язання.** Оскільки єдиними зовнішніми силами в цій задачі є (вертикальні) сили ваги снаряда і ствола, то згідно з рівністю (24.8)

$$\Delta Q_x = 0,$$

тобто

$$m_{\text{сн}} v_{\text{сн}} - m_{\text{ств}} v_{\text{ств}} = 0.$$

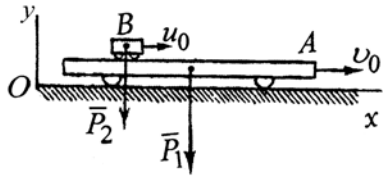


Рис. 24.2

Звідки

$$v_{\text{ств}} = \frac{m_{\text{сн}}}{m_{\text{ств}}} v_{\text{сн}}.$$

**Відповідь:**  $v_{\text{ств}} = 4,4$  м/с .

**Задача 2.** По горизонтальній платформі  $A$  (рис. 24.2), що рухається за інерцією зі швидкістю  $\vec{v}_0$ , переміщується візок  $B$  з постійною відносною швидкістю  $\vec{u}_0$ . В певний момент часу візок був загальмований. Маса платформи дорівнює  $M$ , маса візка –  $m$ . Знайти загальну швидкість  $\vec{v}$  платформи з візком після зупинки візка.

**Розв'язання.** Для системи платформа – візок зовнішніми є сили ваги  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  платформи та візка та реакції рейки на платформу. Всі ці сили паралельні осі  $Oy$ . Оскільки  $F_x^e = 0$ , то виконується рівність (24.6). До зупинки візка маємо:

$$Q_x|_{t=0} = Mv_0 + m(v_0 + u_0).$$

Після зупинки візка

$$Q_x|_{t \neq 0} = (M + m)v.$$

Прирівнюємо останні величини:

$$Mv_0 + m(v_0 + u_0) = (M + m)v.$$

Звідси

$$v = v_0 + \frac{m}{M + m} u_0.$$

Отже,  $v > v_0$ .

**Задача 3.** Зберігши умову попередньої задачі, знайти шлях  $s$ , який пройде візок  $B$  по платформі  $A$  з моменту початку гальмування до повної зупинки, а також час  $\tau$  гальмування, якщо при гальмуванні виникає стала за модулем сила опору  $\vec{F}$ .

**Розв'язання.** Нехай  $v_a, w_a$  – проекції абсолютної швидкості й абсолютного прискорення візка на вісь  $Ox$ ,  $v$  – проекція його переносної швидкості (тобто швидкості платформи),  $u$  – проекція швидкості візка відносно платформи. Тоді

$$m \frac{dw_a}{dt} = -F, \quad w_a = \frac{dv_a}{dt}, \quad v_a = v + u, \quad u = \dot{x}, \quad m(\dot{v} + \ddot{x}) = -F.$$

Оскільки

$$x|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}|_{t=0} = u_0, \quad x|_{t=\tau} = s, \quad \dot{x}|_{t=\tau} = 0,$$

то  $Q_x = \text{const}$ , тобто



$$Mv + m(v + u) = \text{const}, \quad M\dot{v} + m(\dot{v} + \dot{u}) = 0, \quad \dot{v} = -\frac{m}{m+M}\dot{u}.$$

Диференціальне рівняння відносно руху візка по платформі набуває вигляду:

$$m\left(\ddot{x} - \frac{m\ddot{x}}{m+M}\right) = -F, \quad \frac{mM}{m+M}\ddot{x} = -F, \quad \ddot{x} = -F\frac{m+M}{mM} \equiv -F_1.$$

Інтегруванням знаходимо:

$$\dot{x} = -F_1 t + C, \quad x = -\frac{F_1}{2}t^2 + Ct + C_1, \quad C = u_0, \quad C_1 = 0,$$

$$\dot{x} = -F_1 t + u_0, \quad x = -\frac{F_1}{2}t^2 + u_0 t.$$

Далі маємо:

$$-F_1 \tau + u_0 = 0, \quad \tau = \frac{u_0}{F_1} = \frac{u_0 m M}{F(m+M)}, \quad s = -\frac{F_1}{2}\tau^2 + u_0 \tau =$$

$$= -u_0 \frac{\tau}{2} + u_0 \tau = \frac{u_0 \tau}{2} = \frac{u_0^2 m M}{2F(m+M)}.$$

$$\text{Відповідь: } \tau = \frac{u_0 m M}{F(m+M)}, \quad s = \frac{u_0^2 m M}{2F(m+M)}.$$

#### 24.4. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи

Моментом кількості руху матеріальної точки  $M_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) відносно нерухомої точки  $O$  (рис. 24.1) згідно з виразом (22.11) є величина

$$\left(\vec{G}_O\right)_s = \vec{M}_O(\vec{q}_s) = \vec{r}_s \times \vec{q}_s = \vec{r}_s \times m_s \vec{v}_s.$$

Головний момент кількостей руху системи (кінетичний момент системи) відносно нерухомої точки  $O$  дорівнює

$$\vec{G}_O = \sum_{s=1}^n \left(\vec{G}_O\right)_s = \sum_{s=1}^n \vec{r}_s \times m_s \vec{v}_s. \quad (24.9)$$

Підумки звільнимо систему від в'язей, замінивши їхню дію реакціями, і розіб'ємо всі сили (активні і реакції в'язей) на зовнішні  $\vec{F}_s^e$  та внутрішні  $\vec{F}_s^i$ . На підставі виразу (22.14) маємо:

$$\frac{d\left(\vec{G}_O\right)_s}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_s^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_s^i),$$

або

$$\frac{d\left(\vec{G}_O\right)_s}{dt} = \vec{r}_s \times \vec{F}_s^e + \vec{r}_s \times \vec{F}_s^i.$$

Додамо почленно всі ці рівності. На підставі формул (24.9) і (23.1) одержимо:

$$\frac{d\vec{G}_O}{dt} = \vec{M}_O^e. \quad (24.10)$$

Похідна за часом (швидкість зміни) кінетичного моменту системи, обчисленого відносно будь-якої нерухомої точки, дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно цієї ж точки.

Нехай  $Oxyz$  – нерухома система декартових прямокутних координат. Розкладемо вектори  $\vec{G}_O$  і  $\vec{M}_O^e$  за її базисом:

$$\vec{G}_O = \vec{i}G_x + \vec{j}G_y + \vec{k}G_z, \vec{M}_O^e = \vec{i}M_x^e + \vec{j}M_y^e + \vec{k}M_z^e.$$

Спроектувавши векторну рівність (24.10) на осі цієї системи координат, одержимо три скалярні рівності:

$$\frac{dG_x}{dt} = M_x^e, \frac{dG_y}{dt} = M_y^e, \frac{dG_z}{dt} = M_z^e. \quad (24.11)$$

Теорему про зміну кінетичного моменту коротко називають теоремою моментів. Рівність (24.10) виражає теорему моментів відносно нерухомої точки, а рівності (24.11) – відносно довільної нерухомої осі.

**Наслідки.**

**1.** Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кінетичного моменту. Вони можуть лише непрямо вплинути через зовнішні сили.

**2.** Якщо  $\vec{M}_O^e = 0$ , то

$$\vec{G}_O = \text{const}. \quad (24.12)$$

**3.** Якщо  $M_x^e = 0$ , то

$$G_x = \text{const}. \quad (24.13)$$

Перші інтеграли (24.10) і (24.13) виражають закони збереження кінетичного моменту (відносно точки і відносно осі відповідно).

### 24.5. Вираз кінетичного моменту системи відносно довільної точки через кінетичний момент системи відносно її центра мас

Нехай  $Oxyz$  інерціальна система відліку,  $Cx'y'z'$  – система, яка переміщується поступально відносно системи  $Oxyz$  (рис. 24.3). Тоді

$$\vec{r}_s = \vec{r}_C + \vec{\rho}_s, \quad \vec{v}_s = \dot{\vec{r}}_s, \quad \vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C, \quad \vec{v}_s^r = \dot{\vec{\rho}}_s, \\ \vec{v}_s = \vec{v}_C + \vec{v}_s^r,$$

де  $\vec{v}_s^r$  – відносна швидкість точки  $M_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ). Маємо:

$$\vec{G}_O = \sum_{s=1}^n \vec{r}_s \times m_s \vec{v}_s = \sum_{s=1}^n m_s (\vec{r}_C + \vec{\rho}_s) \times (\vec{v}_C + \vec{v}_s^r) = \\ = \sum_{s=1}^n m_s (\vec{r}_C \times \vec{v}_C) + \sum_{s=1}^n m_s \vec{r}_C \times \vec{v}_s^r + \sum_{s=1}^n m_s \vec{\rho}_s \times \vec{v}_C + \sum_{s=1}^n m_s \vec{\rho}_s \times \vec{v}_s^r = \\ = (\vec{r}_C \times \vec{v}_C) \sum_{s=1}^n m_s + \vec{r}_C \times \sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s^r + \left( \sum_{s=1}^n m_s \vec{\rho}_s \right) \times \vec{v}_C + \sum_{s=1}^n m_s \vec{\rho}_s \times \vec{v}_s^r.$$

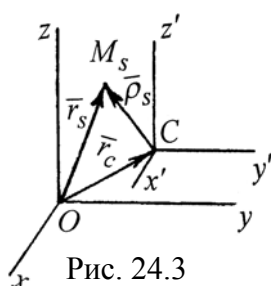


Рис. 24.3

На підставі рівностей (23.4) і (23.5) маємо:

$$\sum_{s=1}^n m_s = m, \quad \sum_{s=1}^n m_s \vec{\rho}_s = m \vec{\rho}_C, \quad \sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s^r = m \vec{v}_C^r.$$

Але  $\vec{\rho}_C = 0$ ,  $\vec{v}_C^r = \frac{d\vec{\rho}_C}{dt} = 0$ . Тому

$$\vec{G}_O = \vec{r}_C \times \vec{q}_C + \vec{G}_C^r, \quad (24.14)$$

де

$$\vec{q}_C = m \vec{v}_C, \quad \vec{G}_C^r = \sum_{s=1}^n \vec{\rho}_s \times m_s \vec{v}_s^r.$$

Отже, кінетичний момент системи відносно довільної нерухомої точки дорівнює моменту відносно цієї точки кількості руху центра мас за припущення, що в ньому зосереджено масу всієї системи, плюс кінетичний момент системи відносно центра мас в її русі відносно рухомої системи відліку, яка переміщується разом з центром мас поступально.

### 24.6. Теорема моментів відносно центра мас

Рівність (24.10) стосується абсолютного руху, тобто руху матеріальної системи відносно інерціальної системи відліку, причому точка  $O$  нерухома. Ці обмеження вносять певні незручності при дослідженні обертальних рухів тіл, які не мають нерухомих точок (літаків, суден, ракет, автомобілів, поїздів, танків, а також приладів, установлених на них). Тому є потреба встановити вигляд теореми моментів для відносного руху.

Підставимо вираз (24.14) в рівність (24.10):

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_C \times m \vec{v}_C) + \frac{d\vec{G}_C^r}{dt} = \vec{M}_O^e. \quad (24.15)$$

Перетворимо праву частину:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^e &= \sum_{s=1}^n \vec{r}_s \times \vec{F}_s^e = \sum_{s=1}^n (\vec{r}_C + \vec{\rho}_s) \times \vec{F}_s^e = \sum_{s=1}^n \vec{r}_C \times \vec{F}_s^e + \\ &+ \sum_{s=1}^n \vec{\rho}_s \times \vec{F}_s^e = \vec{r}_C \times \sum_{s=1}^n \vec{F}_s^e + \sum_{s=1}^n \vec{M}_C(\vec{F}_s^e) = \vec{r}_C \times \vec{F}^e + \vec{M}_C^e. \end{aligned}$$

Рівність (24.15) набуває вигляду:

$$\vec{r}_C \times m \vec{w}_C + \frac{d\vec{G}_C^r}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{F}^e + \vec{M}_C^e. \quad (24.16)$$

З (23.10) випливає рівність

$$\vec{r}_C \times m \vec{w}_C = \vec{r}_C \times \vec{F}^e.$$

Отже, рівність (24.16) набуває вигляду:

$$\frac{d\vec{G}_C^r}{dt} = \vec{M}_C^e. \quad (24.17)$$

Рівність (24.17) виражається така теорема.

**Теорема.** При русі матеріальної системи відносно центра мас похідна за часом від суми моментів кількостей руху всіх точок системи відносно центра мас

дорівнює сумі моментів всіх прикладених до точок зовнішніх сил відносно центра мас системи.

Таким чином, для руху відносно центра мас теорема про зміну кінетичного моменту виражається так, ніби центр мас є нерухомою точкою. Оскільки рівність (24.17) за формою збігається з (24.10), то рух матеріальної системи відносно її центра мас відбувається так, наче центр мас є нерухомою точкою.

### 24.7. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називається сума кінетичних енергій усіх точок:

$$T = \sum_{s=1}^n T_s = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s v_s^2. \quad (24.18)$$

Подумки звільнимо систему від в'язей, замінивши їх відповідними реакціями. Усі прикладені до точок  $M_s$  сили (активні та реакції в'язей) розділимо на дві групи: зовнішні сили, рівнодійну яких позначимо  $\vec{F}_s^e$ , та внутрішні сили з рівнодійною  $\vec{F}_s^i$ . Тоді кожна точку системи можна розглядати як вільну, що перебуває під дією двох сил  $\vec{F}_s^e$  та  $\vec{F}_s^i$ . Згідно з рівністю (22.33) маємо:

$$dT_s = d'A_s^e + d'A_s^i. \quad (24.19)$$

На підставі формули (22.30) для елементарних робіт згаданих сил дістаємо вирази

$$d'A_s^e = \vec{F}_s^e \cdot d\vec{r}_s, \quad d'A_s^i = \vec{F}_s^i \cdot d\vec{r}_s. \quad (24.20)$$

Додамо почленно всі рівності (24.19), врахувавши (24.18) та (24.20):

$$dT = d'A^e + d'A^i. \quad (24.21)$$

Тут

$$d'A^e = \sum_{s=1}^n d'A_s^e = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s^e \cdot d\vec{r}_s, \quad d'A^i = \sum_{s=1}^n d'A_s^i = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s^i \cdot d\vec{r}_s \quad (24.22)$$

є елементарні роботи усіх зовнішніх та усіх внутрішніх сил відповідно. Розділимо рівність (24.21) на  $dt$ :

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (24.23)$$

де

$$N^e = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s^e \cdot \vec{v}_s, \quad N^i = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s^i \cdot \vec{v}_s$$

є сумарні потужності зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до точок системи.

Рівністю (24.23) виражається **теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи в диференціальній формі**: похідна за часом (швидкість зміни) кінетичної енергії матеріальної системи дорівнює сумі потужностей всіх зовнішніх та всіх внутрішніх сил, що діють на точки системи.

Аналогічно пункту 22.3.2 сформулюємо далі теорему про зміну кінетичної енергії системи в скінченній (інтегральній) формі. Розглянемо два моменти часу: початковий  $t_{\Pi}$  і кінцевий  $t_K$ , причому за відрізок часу  $[t_{\Pi}, t_K]$  точка  $M_s$  описала

траєкторію  $(M_{\Pi}M_K)_s$ . Проінтегруємо обидві частини рівності (24.19) вздовж кривої лінії  $(M_{\Pi}M_K)_s$ :

$$\begin{aligned} \int_{(M_{\Pi}M_K)_s} d\left(\frac{m_s v_s^2}{2}\right) &= \int_{(M_{\Pi})_s}^{(M_K)_s} d\left(\frac{m_s v_s^2}{2}\right) = \int_{(v_{\Pi})_s}^{(v_K)_s} d\left(\frac{m_s v_s^2}{2}\right) = \\ &= \frac{m_s (v_K^2)_s}{2} - \frac{m_s (v_{\Pi}^2)_s}{2} = (T_K)_s - (T_{\Pi})_s = \Delta T_s, \\ \int_{(M_{\Pi}M_K)_s} d'A_s^e &= A_s^e, \quad \int_{(M_{\Pi}M_K)_s} d'A_s^i = A_s^i. \end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta T_s = A_s^e + A_s^i \quad (s=1, \dots, n).$$

Додавши почленно всі ці рівності, одержимо

$$\Delta T = A^e + A^i. \quad (24.24)$$

Тут позначено:

$$\Delta T = \sum_{s=1}^n \Delta T_s, \quad A^e = \sum_{s=1}^n A_s^e, \quad A^i = \sum_{s=1}^n A_s^i.$$

Рівністю (24.24) виражається наступна теорема.

**Теорема.** Приріст кінетичної енергії матеріальної системи при переході її з якого-небудь початкового положення («П») в кінцеве («К») дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи.

На відміну від попередніх теорем (див. рівності (24.3), (24.8), (24.10)), внутрішні сили при використанні теореми про зміну кінетичної енергії з розгляду не виключаються.

## 24.8. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії

**1.** При русі автомобіля з двигуном внутрішнього згорання рушійною силою є сила тертя  $\vec{F}_2$  (див. рис. 23.1) між ведучими колесами і полотном дороги. Однак за відсутності ковзання коліс сила  $\vec{F}_2$  роботу не виконує, оскільки ця сила прикладена у миттєвому центрі швидкостей  $P$  (див. рис. 15.16) ведучого колеса, елементарне переміщення якого  $d\vec{r}_P = 0$ . Корисну роботу при переміщенні автомобіля виконують внутрішні сили тиску газів, що утворились при згоранні горючої суміші.

**2.** При русі людини по горизонтальній підлозі або при її підніманні по драбині рушійними силами є сили тертя між підлогою і підошвами ніг людини або, відповідно, реакції щаблів драбини. Однак корисну роботу виконують не ці зовнішні сили, а внутрішні мускульні зусилля людини.

В подібних задачах важливим є поняття змінювальної чи незмінювальної системи, тобто механічної системи, в якій віддалі між будь-якими двома взаємодіючими точками можуть змінюватись чи, відповідно, залишатись весь час постійними.

### 24.9. Інтеграл енергії

Нехай усі сили (зовнішні і внутрішні), що діють на систему, є потенціальними, і під дією цих сил система перейшла з початкового положення в певне поточне положення. Тоді рівність (24.21) на підставі (22.41) набуде вигляду:

$$dT = d'A = -d\Pi, \quad d(T + \Pi) = 0.$$

Звідси

$$T + \Pi = h, \quad h = T_0 + \Pi_0 = \text{const.} \quad (24.25)$$

Інтеграл енергії (24.25) виражає **закон збереження повної механічної енергії**: якщо механічна система рухається під дією лише потенціальних сил, то сума її кінетичної та потенціальної енергій не змінюється. Такі механічні системи називаються **консервативними**.

### 24.10. Вираз кінетичної енергії системи через кінетичну енергію центра мас (теорема Кьоніга)

Використавши припущення і результати розділу 28, маємо:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s (\vec{v}_C + \vec{v}_s^r)^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s [v_C^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_s^r + (\vec{v}_s^r)^2] = \\ &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \vec{v}_C \cdot \sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s^r + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s (\vec{v}_s^r)^2. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s^r = m \vec{v}_C^r = 0, \quad T_r = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s (\vec{v}_s^r)^2,$$

то

$$T = \frac{m v_C^2}{2} + T_r. \quad (24.26)$$

Кінетична енергія матеріальної системи в її абсолютному русі дорівнює сумі кінетичної енергії поступального (переносного) руху системи, що визначається рухом центра мас за припущення, що в ньому зосереджено масу всієї системи, і кінетичної енергії руху відносно центра мас, тобто відносно осей  $Sx'y'z'$  (див. рис. 24.3), що переміщуються в інерціальному просторі разом із центром мас.

#### Питання для самоконтролю

1. Як виражається кількість руху системи через кількість руху її центра мас?
2. Коли має місце закон збереження кількості руху матеріальної системи?

3. Як пояснити відкат ствола гармати? віддачу гвинтівки?
4. Як виражається кінетичний момент системи відносно довільної точки через кінетичний момент системи відносно її центра мас?
5. Чим пояснюється доцільність використання центра мас системи в якості полюса при формулюванні теореми про зміну моменту кількості руху?
6. В чому проявляється відмінність у формулюванні теорем про зміну різних мір руху?
7. Який механічний зміст інтегралу енергії?
8. Які зручності надає використання теореми Кьоніга?

## 25. Вступ до динаміки твердого тіла

### 25.1. Кількість руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

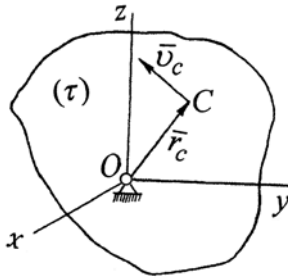


Рис. 25.1

Якщо тверде тіло займає область  $(\tau)$  простору і обертається навколо нерухомого сферичного шарніра  $O$  (рис. 25.1), то траєкторії усіх точок тіла лежать на сферах (тому такий рух називається сферичним). Швидкості точок визначаються формулою Ейлера (16.38):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (25.1)$$

і, отже,  $\vec{v} \perp \vec{r}$ . Зокрема, для центра мас  $C$  тіла швидкість

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}.$$

Кількість руху тіла можна знайти за формулою (24.2), тобто як кількість руху його центра мас:

$$\vec{Q} = m \vec{v}_C.$$

Розклавши вектор  $\vec{Q}$  за базисом рухомої декартової прямокутної системи координат  $Oxyz$ , для його проєкцій дістаємо вирази:

$$Q_x = m(\omega_y z_C - \omega_z y_C),$$

$$Q_y = m(\omega_z x_C - \omega_x z_C),$$

$$Q_z = m(\omega_x y_C - \omega_y x_C).$$

## 25.2. Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Кінетичний момент дискретної системи матеріальних точок визначається формулою (24.9). Щоб перейти до твердого тіла (суцільного середовища), необхідно в цій формулі провести зміни, описані в підрозділі 23.7. Тому

$$\vec{G}_O = \iiint_{(r)} \rho \vec{r} \times \vec{v} dx dy dz.$$

Тут  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Розкладемо вектор  $\vec{G}_O$  за декартовим базисом:

$$\vec{G}_O = \vec{i} G_x + \vec{j} G_y + \vec{k} G_z. \quad (25.2)$$

На підставі формули (25.1) маємо:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Вираз у правій частині є подвійним векторним добутком. В аналітичній геометрії зустрічаються два види подвійних векторних добутків:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}). \end{aligned}$$

Вигляд правих частин цих рівностей дає можливість сформулювати таке спільне правило: подвійний векторний добуток дорівнює середньому вектору, помноженому на скалярний добуток двох інших, мінус крайній вектор дужки, помножений на скалярний добуток двох інших. Доведемо першу з цих рівностей.

$$\begin{aligned} \vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, & \begin{aligned} d_x &= b_y c_z - b_z c_y, \\ d_y &= b_z c_x - b_x c_z, \\ d_z &= b_x c_y - b_y c_x, \end{aligned} \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{d} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y d_z - a_z d_y) + \\ &+ \vec{j}(a_z d_x - a_x d_z) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\vec{k}(a_x d_y - a_y d_x) = \vec{i}[a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)] + \\
 & +\vec{j}[a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x)] + \vec{k}[a_x(b_z c_x - b_x c_z) - \\
 & - a_y(b_y c_z - b_z c_y)] = \vec{i}[b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z)] + \\
 & +\vec{j}[b_y(a_x c_x + a_z c_z) - c_y(a_x b_x + a_z b_z)] + \vec{k}[b_z(a_y c_y + a_x c_x) - \\
 & - c_z(a_x b_x + a_y b_y)] = \vec{i}[b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + \\
 & + a_y b_y + a_z b_z)] + \vec{j}[b_y(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_y(a_x b_x + \\
 & + a_y b_y + a_z b_z)] + \vec{k}[b_z(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_z(a_x b_x + a_y b_y + \\
 & + a_z b_z)] = (\vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z)(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - \\
 & - (\vec{i}c_x + \vec{j}c_y + \vec{k}c_z)(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),
 \end{aligned}$$

що й треба було довести.

Отже,

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = (\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z)(x^2 + y^2 + z^2) - \\
 & - (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) = \vec{i}[\omega_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(\omega_x x + \\
 & + \omega_y y + \omega_z z)] + \vec{j}[\omega_y(x^2 + y^2 + z^2) - y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)] + \\
 & + \vec{k}[\omega_z(x^2 + y^2 + z^2) - z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)] = \vec{i}[\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \\
 & - \omega_z xz] + \vec{j}[\omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z yz - \omega_x xy] + \vec{k}[\omega_z(x^2 + y^2) - \omega_x xz - \omega_y yz].
 \end{aligned}$$

При інтегруванні за декартовими координатами  $x, y, z$  величини  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  виносяться з-під знаків інтегралів, оскільки  $\omega_x = \omega_x(t)$ ,  $\omega_y = \omega_y(t)$ ,  $\omega_z = \omega_z(t)$ .

Таким чином,

$$\begin{aligned}
 G_x &= \omega_x \iiint_{(\tau)} \rho(y^2 + z^2) dx dy dz - \omega_y \iiint_{(\tau)} \rho xy dx dy dz - \\
 & - \omega_z \iiint_{(\tau)} \rho xz dx dy dz, \quad G_y = \omega_y \iiint_{(\tau)} \rho(x^2 + z^2) dx dy dz - \\
 & - \omega_x \iiint_{(\tau)} \rho yz dx dy dz - \omega_x \iiint_{(\tau)} \rho xy dx dy dz, \\
 G_z &= \omega_z \iiint_{(\tau)} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz - \omega_x \iiint_{(\tau)} \rho xz dx dy dz - \\
 & - \omega_y \iiint_{(\tau)} \rho yz dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Кожний із потрібних інтегралів є або осьовим (23.14), або відцентровим (23.15) моментом інерції тіла. Тому

$$\begin{aligned}
 G_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\
 G_y &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\
 G_z &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z.
 \end{aligned} \tag{25.3}$$

Упорядкована сукупність трьох величин є (алгебраїчним) вектором у тривимірному просторі. Ми будемо ототожнювати його з (геометричним)

вектором як направленим відрізком. Алгебраїчний вектор є також матрицею-рядком, матрицею-стовпчиком або тензором першого рангу:

$$\vec{G}_O = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Використавши введене раніше поняття тензора інерції тіла в точці  $O$  (23.22), три скалярні рівності (25.3) можна записати у вигляді однієї:

$$\vec{G}_O = \Theta^O \vec{\omega}. \quad (25.4)$$

### 25.3. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Перетворимо загальний вираз кінетичної енергії твердого тіла

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{(\tau)} \rho(x, y, z) v^2 dx dy dz$$

з урахуванням формули (25.1). Оскільки

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= v^2 = (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = [\vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x)]^2 = \\ &= \omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (x^2 + z^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) - 2\omega_x \omega_y xy - 2\omega_y \omega_z yz - \\ &- 2\omega_x \omega_z xz, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [\omega_x^2 \iiint_{(\tau)} \rho (y^2 + z^2) dx dy dz + \omega_y^2 \iiint_{(\tau)} \rho (x^2 + z^2) dx dy dz + \\ &+ \omega_z^2 \iiint_{(\tau)} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz - 2\omega_x \omega_y \iiint_{(\tau)} \rho xy dx dy dz - \\ &- 2\omega_y \omega_z \iiint_{(\tau)} \rho yz dx dy dz - 2\omega_x \omega_z \iiint_{(\tau)} \rho xz dx dy dz], \end{aligned}$$

тобто

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{xz} \omega_x \omega_z). \quad (25.5)$$

### 25.4. Зв'язок між кінетичною енергією та кінетичним моментом твердого тіла з однією нерухомою точкою

Візьмемо частинні похідні функції  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \omega_x} &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_y} &= I_y \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_z} = I_z \omega_z - I_{yz} \omega_y - I_{xz} \omega_x.$$

Порівнявши праві частини з рівностями (25.3), дістаємо

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_x} = G_x, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_y} = G_y, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_z} = G_z. \quad (25.6)$$

Інший підхід полягає в тому, що кінетичну енергію тіла можна безпосередньо виразити через його кінетичний момент:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iiint_{(\tau)} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint_{(\tau)} \rho \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{(\tau)} \rho \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) dx dy dz = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \iiint_{(\tau)} \rho (\vec{r} \times \vec{v}) dx dy dz. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{G}_O.$$

### 25.5. Елементарна робота сил, прикладених до абсолютно твердого тіла

Прийmemo довільну точку  $P$  тіла за полюс. Згідно з формулою (24.20) і рис. 25.2 маємо:

$$\begin{aligned} d'A &= \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \cdot d\vec{r}_s, \quad \vec{r}_s = \vec{r}_P + \vec{\rho}_s, \\ \frac{d\vec{r}_s}{dt} &= \frac{d\vec{r}_P}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_s, \quad d\vec{r}_s = d\vec{r}_P + \\ &+ \vec{\omega} dt \times \vec{\rho}_s = d\vec{r}_P + d\varphi \times \vec{\rho}_s. \end{aligned}$$

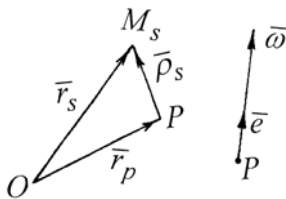


Рис. 25.2

Тут  $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt = \vec{e} d\varphi$  – вектор нескінченно малого повороту тіла навколо миттєвої осі, що проходить через точку  $P$ ,  $\vec{e}$  – орт миттєвої осі повороту тіла. Вектор миттєвої кутової швидкості тіла  $\vec{\omega} = \vec{e} \omega$ . Величина  $\omega = \dot{\varphi}$  є квазішвидкістю, а кут  $\varphi$  – квазікоординатою або неголономною координатою. Лише при обертанні тіла навколо нерухомої осі кут повороту тіла  $\varphi$  навколо цієї осі є реальною координатою. Отже,

$$d'A = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \cdot d\vec{r}_P + \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \cdot (d\varphi \times \vec{\rho}_s) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_P + d\varphi \cdot \left( \sum_{s=1}^n \vec{\rho}_s \times \vec{F}_s \right).$$

Оскільки

$$\vec{F} = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s, \quad \vec{M}_P = \sum_{s=1}^n \vec{\rho}_s \times \vec{F}_s$$

є головним вектором системи сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  і головним моментом відносно полюса, то остаточно

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}_p + \vec{M}_p \cdot d\vec{\varphi}. \quad (25.7)$$

Рівністю (25.7) виражається наступна теорема.

**Теорема.** Елементарна робота сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, дорівнює елементарній роботі головного вектора системи сил на переміщенні полюса плюс елементарна робота головного моменту системи сил відносно полюса на обертальному переміщенні тіла навколо миттєвої осі, що проходить через полюс.

Часто за полюс вибирають центр мас тіла.

### 25.6. Робота сил тертя, що діють на колесо, яке котиться по площині

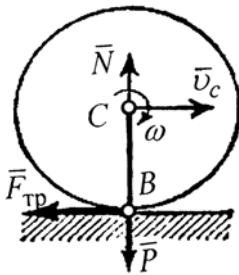


Рис. 25.3

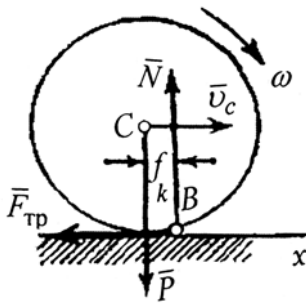


Рис. 25.4

1. Розглянемо спочатку випадок **недеформівних тіл** (рис. 25.3). На колесо радіусом  $R$ , що котиться по недеформівній площині без ковзання, діє прикладена в точці дотику  $B$  сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , яка перешкоджає ковзанню точки  $B$  по площині. Її елементарна робота  $d'A = F_{\text{тр}} ds_B$ , де  $ds_B = v_B dt$ . Але  $v_B = 0$ , тому що точка  $B$  збігається з миттєвим центром швидкостей. Отже, для кожного елементарного переміщення колеса  $ds_B = 0$  і  $d'A = 0$ . З цієї ж причини дорівнює нулю і робота нормальної реакції  $\vec{N}$  (якщо тіла вважати недеформівними і силу  $\vec{N}$  прикладеною в точці  $B$ ).

2. **Деформівність тіл** призводить до опору коченню, який створюється парою сил  $(\vec{N}, \vec{P})$  (рис. 25.4). Детально про це йшла мова у підрозділі 9.4. Алгебраїчний момент пари  $M_k = f_k N$ , де  $f_k$  – коефіцієнт тертя кочення (рис. 9.6). Елементарне переміщення центра колеса  $C$  є  $d\vec{r}_C = \vec{i} ds$ ,  $ds = R d\varphi$ , де  $\varphi$  – кут повороту колеса ( $\omega = \dot{\varphi}$ ). Тому елементарна робота сил опору коченню дорівнює

$$d'A_{\text{коч}} = -M_{\text{коч}} d\varphi = -M_{\text{коч}} \frac{ds}{R} = -\frac{f_k}{R} N ds.$$

Якщо  $N = \text{const}$ , то повна робота сил опору коченню

$$A_{\text{коч}} = -\frac{f_k}{R} N s = -f_k N \varphi.$$

Оскільки  $\frac{f_k}{R}$  є малою величиною (див. підрозділ 9.4), то за наявності інших опорів опором коченню в першому наближенні можна знехтувати.

Потужність сили опору коченню

$$N_{\text{коч}} = \frac{d'A_{\text{коч}}}{dt} = -M_{\text{коч}} \frac{d\varphi}{dt} = -M_{\text{коч}} \omega.$$

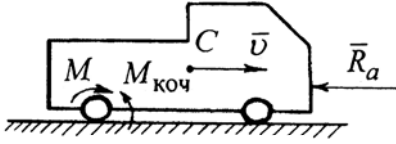


Рис. 25.5

Якщо на колесо діє обертовий момент  $\vec{M}$ , то його потужність  $N = M\omega$ . Отже, при одній і тій самій потужності обертовий момент є тим більшим, чим меншою є кутова швидкість колеса.

**Задача.** Автомобіль маси  $m$  рухається прямолінійно по горизонтальній дорозі зі швидкістю  $\bar{v}$  (рис. 25.5). Коефіцієнт тертя коченню між колесами автомобіля і дорогою дорівнює  $f_k$ , радіус коліс  $r$ , сила аеродинамічного опору  $\vec{R}_a$  повітря має модуль, пропорційний квадрату швидкості:  $R_a = \mu m v^2$ , де  $\mu$  – коефіцієнт, що залежить від форми автомобіля. Знайти потужність  $N$  двигуна, що передається на осі ведучих коліс, в усталеному режимі.

**Розв'язання.** В усталеному режимі руху  $v = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ . Умовою його існування, як випливає з рівності (24.21), є вимога:  $N^e + N^i = 0$ . До зовнішніх належать сили, породжені тертям кочення і опором повітря:

$$N^e = -R_a v - M_{\text{коч}} \omega = -\mu m v^3 - \frac{f_k}{r} m g v.$$

Внутрішні сили зумовлені обертовим моментом двигуна:

$$N^i = N = M\omega.$$

Оскільки  $N^i = -N^e$ , то

$$N = \mu m v^3 + \frac{f_k}{r} m g v.$$

**Відповідь:**  $N = m g v \left( \mu v^2 + \frac{f_k}{r} \right).$

### 25.7. Диференціальні рівняння руху вільного твердого тіла

Прямий (безпосередній) спосіб складання диференціальних рівнянь руху вільного твердого тіла полягає у використанні рівностей (23.10) і (24.15):

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}^e, \quad \frac{d\vec{G}_C^r}{dt} = \vec{M}_C^e. \quad (25.8)$$

Розкладемо радіус-вектор  $\vec{r}_C$  центра мас  $C$  тіла і головний вектор зовнішніх сил за декартовим прямокутним базисом інерціальної системи відліку  $Oxuz$  (рис. 25.6):

$$\begin{aligned} \vec{r}_C &= \vec{i}x_C + \vec{j}y_C + \vec{k}z_C, \\ \vec{F}^e &= \vec{i}F_x^e + \vec{j}F_y^e + \vec{k}F_z^e. \end{aligned}$$

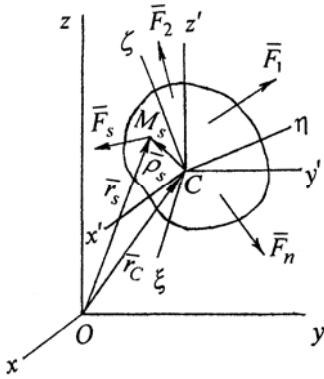


Рис. 25.6

Кінетичний момент  $\vec{G}_C^r$  відносного руху тіла навколо центра мас  $C$  розкладемо за декартовим базисом рухомої, незмінно зв'язаної з тілом системи координат  $C\xi\eta\zeta$ :

$$\vec{G}_C^r = \vec{i}_\xi G_\xi^r + \vec{i}_\eta G_\eta^r + \vec{i}_\zeta G_\zeta^r.$$

Нехай  $\vec{\omega}$  – вектор миттєвої кутової швидкості тіла:

$$\vec{\omega} = \vec{i}_\xi \omega_\xi + \vec{i}_\eta \omega_\eta + \vec{i}_\zeta \omega_\zeta.$$

Відносну (локальну, місцеву) похідну вектора за часом позначимо, згідно з виразом (18.5), значком  $\sim$  (тильда) зверху. На підставі рівності (18.8) для абсолютної похідної вектора маємо:

$$\frac{d\vec{G}_C^r}{dt} = \tilde{d}\vec{G}_C^r + \vec{\omega} \times \vec{G}_C^r. \quad (25.9)$$

Спроектувавши рівності (25.8) на відповідні осі, одержимо систему диференціальних рівнянь руху вільного руху твердого тіла в скалярній (координатній) формі:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= F_x^e, \quad m\ddot{y}_C = F_y^e, \quad m\ddot{z}_C = F_z^e, \\ \frac{\tilde{d}G_\xi^r}{dt} + \omega_\eta G_\zeta^r - \omega_\zeta G_\eta^r &= M_\xi^e, \\ \frac{\tilde{d}G_\eta^r}{dt} + \omega_\zeta G_\xi^r - \omega_\xi G_\zeta^r &= M_\eta^e, \\ \frac{\tilde{d}G_\zeta^r}{dt} + \omega_\xi G_\eta^r - \omega_\eta G_\xi^r &= M_\zeta^e. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Диференціальні рівняння обертального руху тіла навколо центра мас (три останні рівняння системи (25.10)) набувають найпростішого вигляду, якщо цей рух віднести до головних осей інерції тіла в точці  $C$ . Тоді тензор інерції тіла (23.22) стає діагональним, а формули (25.3) спрощуються за рахунок відкидання членів з відцентровими моментами інерції. Тому в цьому випадку

$$G_\xi^r = I_\xi \omega_\xi, \quad G_\eta^r = I_\eta \omega_\eta, \quad G_\zeta^r = I_\zeta \omega_\zeta.$$

Підгрупа трьох останніх рівнянь системи (25.10) набуває вигляду:

$$\begin{cases} I_\xi \dot{\omega}_\xi + (I_\zeta - I_\eta) \omega_\eta \omega_\zeta = M_\xi^e, \\ I_\eta \dot{\omega}_\eta + (I_\xi - I_\zeta) \omega_\xi \omega_\zeta = M_\eta^e, \\ I_\zeta \dot{\omega}_\zeta + (I_\eta - I_\xi) \omega_\xi \omega_\eta = M_\zeta^e. \end{cases} \quad (25.11)$$

## 25.8. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

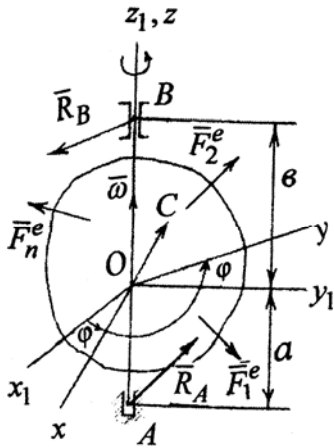


Рис. 25.7

Тіло може обертатись навколо нерухомої осі за наявності підшипника  $B$  і підп'ятника  $A$  (рис. 25.7). Нехай  $\vec{\omega}$  – вектор кутової швидкості тіла,  $\omega = \dot{\varphi}$  – кутова швидкість,  $\varphi$  – кут повороту тіла навколо осі  $Oz_1$ , тобто кут між площинами  $x_1Oz_1$  і  $xOz$ . Тіло є невільним. Звільнивши його від в'язей, їхню дію на тіло замінимо реакціями  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$ . Головний вектор зовнішніх сил  $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$  і головний момент їх відносно точки  $O$ , а також реакції в'язей розкладемо за рухомим декартовим базисом:

$$\begin{aligned} \vec{F}^e &= \vec{i}F_x^e + \vec{j}F_y^e + \vec{k}F_z^e, \\ \vec{M}_O^e &= \vec{i}M_x^e + \vec{j}M_y^e + \vec{k}M_z^e, \\ \vec{R}_A &= \vec{i}X_A + \vec{j}Y_A + \vec{k}Z_A, \\ \vec{R}_B &= \vec{i}X_B + \vec{j}Y_B + \vec{k}Z_B. \end{aligned} \quad (25.12)$$

Використаємо теореми про зміну кількості руху і моменту кількості руху твердого тіла. Для цього рівності (24.3) і (24.10) слід доповнити членами, що містять реакції відкинутих в'язей:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \vec{F}^e + \vec{R}_A + \vec{R}_B, \\ \frac{d\vec{G}_O}{dt} &= \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^e(\vec{R}_A) + \vec{M}_O^e(\vec{R}_B). \end{aligned} \quad (25.13)$$

Для кількості руху тіла доцільно скористатись формулою (24.2), а для знаходження швидкості центра мас – формулою (25.1):

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= m\vec{v}_C, \quad \vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \\ &= -\vec{i}y_C\dot{\varphi} + \vec{j}x_C\dot{\varphi}, \quad \vec{Q} = -\vec{i}m y_C\dot{\varphi} + \vec{j}m x_C\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

В рівностях (25.12) абсолютна похідна векторів виражається через їхню відносну похідну формулами типу (25.9):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \frac{\tilde{d}\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q} = -\vec{i}m y_C\ddot{\varphi} + \vec{j}m x_C\ddot{\varphi} + \\ &+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ -m y_C\dot{\varphi} & m x_C\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}m(y_C\ddot{\varphi} + x_C\dot{\varphi}^2) + \vec{j}m(x_C\ddot{\varphi} - y_C\dot{\varphi}^2). \end{aligned} \quad (25.14)$$

Оскільки  $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \dot{\varphi}$ , то вирази (25.3) набувають вигляду:

$$G_x = -I_{xz}\dot{\varphi}, \quad G_y = -I_{yz}\dot{\varphi}, \quad G_z = I_z\dot{\varphi}. \quad (25.15)$$

На підставі (25.9) для абсолютної похідної кінетичного моменту тіла маємо:

$$\frac{d\vec{G}_O}{dt} = \frac{d\vec{G}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}_O = -\vec{i}I_{xz}\ddot{\varphi} - \vec{j}I_{yz}\ddot{\varphi} + \vec{k}I_z\ddot{\varphi} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ -I_{xz}\dot{\varphi} & -I_{yz}\dot{\varphi} & I_z\dot{\varphi} \end{vmatrix} = \vec{i}(-I_{xz}\ddot{\varphi} + I_{yz}\dot{\varphi}^2) - \vec{j}(I_{yz}\ddot{\varphi} + I_{xz}\dot{\varphi}^2) + \vec{k}I_z\ddot{\varphi}.$$

Знайдемо моменти реакцій відносно точки  $O$ :

$$\vec{M}_O(\vec{R}_A) = \vec{OA} \times \vec{R}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -a \\ X_A & Y_A & Z_A \end{vmatrix} = \vec{i}aY_A - \vec{j}aX_A, \quad (25.16)$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}_B) = \vec{OB} \times \vec{R}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & b \\ X_B & Y_B & Z_B \end{vmatrix} = -\vec{i}bY_B + \vec{j}bX_B.$$

Спроектувавши векторні рівності (25.12) на осі рухомої системи координат  $Oxyz$  і врахувавши вирази (25.12) – (25.16), одержимо систему диференціальних рівнянь руху тіла навколо нерухомої осі в координатній (скалярній) формі:

$$\begin{cases} -m y_C \ddot{\varphi} - m x_C \dot{\varphi}^2 = F_x^e + X_A + X_B, & (25.17) \\ m x_C \ddot{\varphi} - m y_C \dot{\varphi}^2 = F_y^e + Y_A + Y_B, & (25.18) \\ 0 = F_z^e + Z_A + Z_B, & (25.19) \\ -I_{xz} \ddot{\varphi} + I_{yz} \dot{\varphi}^2 = M_x^e + aY_A - bY_B, & (25.20) \\ -I_{yz} \ddot{\varphi} - I_{xz} \dot{\varphi}^2 = M_y^e - aX_A + bX_B, & (25.21) \\ I_{yz} \ddot{\varphi} = M_z^e. & (25.22) \end{cases}$$

Рівняння (25.22) не містить реакцій в'язей і дає можливість за відомим законом  $\varphi = \varphi(t)$  обертання тіла знайти  $M_z^e$  (перша або пряма задача динаміки) або за відомим моментом зовнішніх сил відносно осі обертання  $M_z^e$  при заданих початкових умовах знайти закон обертання тіла  $\varphi = \varphi(t)$  (друга або обернена задача динаміки) (див. § 20.5).

Як приклад використання рівняння (25.22), наведемо диференціальне рівняння руху математичного маятника (рис. 22.18):

$$I_z = ml^2, \quad M_z^e = M_z(\vec{P}) = -mgl \sin \varphi, \quad ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Одержаний результат збігається з (22.57).

Рівняння (25.17) – (25.21) слугують для визначення реакцій в'язей  $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B$ . Оскільки кількість невідомих (шість) перевищує кількість рівнянь (п'ять), то система виявляється невизначеною. “Винуватцем” невизначеності є рівняння (25.19): з нього можна знайти лише суму  $Z_A + Z_B$ . Цю невизначеність можна усунути належним вибором форм в'язей в точках  $A$  і  $B$ .



Почасти саме цим пояснюється характер в'язі в точці  $B$  на рис. 25.7 – підшипник. Тоді

$$Z_B = 0, Z_A = -F_z^e.$$

З рівнянь (25.17), (25.18), (25.20) і (25.21) випливає, що поперечні складові реакцій зумовлюються характером сил, прикладених до тіла, законом руху тіла і розташуванням осі обертання відносно тіла. Якщо вісь обертання тіла є головною центральною віссю інерції, то

$$x_C = 0, y_C = 0, I_{xz} = 0, I_{yz} = 0.$$

Рівняння для поперечних реакцій набувають вигляду:

$$\begin{cases} F_x^e + X_A + X_B & = 0 \\ F_y^e + Y_A + Y_B & = 0 \\ M_x^e + aY_A - bY_B & = 0 \\ M_y^e - aX_A + bX_B & = 0 \end{cases} \quad (25.23)$$

Отже, поперечні реакції викликаються діючими на тіло активними силами, причому останні можуть залежати від закону руху тіла (наприклад, сили опору, які залежать від швидкості обертання тіла). Формально рівняння (25.23) мають такий же вигляд, як і рівняння (25.17), (25.18), (25.20) і (25.21) для нерухомого тіла. Тому розв'язок системи (25.23) умовно називають “статичними” реакціями. Позначимо їх індексом “ст” зверху. Вони задовольняють системі

$$\begin{cases} X_A^{-\text{ст}} + X_B^{-\text{ст}} & = -F_x^e, \\ Y_A^{-\text{ст}} + Y_B^{-\text{ст}} & = -F_y^e, \\ aY_A^{-\text{ст}} - bY_B^{-\text{ст}} & = -M_x^e, \\ aX_A^{-\text{ст}} - bX_B^{-\text{ст}} & = M_y^e. \end{cases} \quad (25.24)$$

Величини  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$ , що входять в (25.17), (25.18), (25.20) і (25.21), доцільно представити у вигляді сум:

$$X_A = X_A^{\text{ст}} + X_A^{\text{д}}, Y_A = Y_A^{\text{ст}} + Y_A^{\text{д}}, X_B = X_B^{\text{ст}} + X_B^{\text{д}}, Y_B = Y_B^{\text{ст}} + Y_B^{\text{д}}, \quad (25.25)$$

де індексом “д” зверху позначено додаткові величини, які зумовлені характером розподілу мас у тілі і характером руху тіла. Їх називають “динамічними” реакціями. Для знаходження цих величин маємо систему

$$\begin{cases} -m y_C \ddot{\phi} - m x_C \dot{\phi}^2 & = X_A^{\text{д}} + X_B^{\text{д}}, \\ m x_C \ddot{\phi} - m y_C \dot{\phi}^2 & = Y_A^{\text{д}} + Y_B^{\text{д}}, \\ -I_{xz} \ddot{\phi} + I_{yz} \dot{\phi}^2 & = aY_A^{\text{д}} - bY_B^{\text{д}}, \\ -I_{yz} \ddot{\phi} - I_{xz} \dot{\phi}^2 & = -aX_A^{\text{д}} + bX_B^{\text{д}}. \end{cases} \quad (25.26)$$

Іноді динамічні реакції в багато разів перевищують статичні. Якщо конструкція містить тіла, що обертаються навколо осі (маховики, ротори, шків тощо), то динамічні реакції, прикладені до осі обертання, можуть різко зменшити міцність конструкції. Тому в усіх випадках, коли це можливо, їх прагнуть зменшити або повністю ліквідувати. В особливо важливих випадках це досягається спеціальним балансуванням.

Знайдемо умови, при виконанні яких додаткові, “динамічні” реакції відсутні, тобто  $X_A^{\text{д}} = 0, X_B^{\text{д}} = 0, Y_A^{\text{д}} = 0, Y_B^{\text{д}} = 0$ . Система (25.26) стає такою:

$$\begin{cases} x_C \dot{\phi}^2 + y_C \ddot{\phi} = 0, \\ x_C \ddot{\phi} - y_C \dot{\phi}^2 = 0, \\ I_{xz} \ddot{\phi} - I_{yz} \dot{\phi}^2 = 0, \\ I_{xz} \dot{\phi}^2 + I_{yz} \ddot{\phi} = 0. \end{cases} \quad (25.27)$$

Відносно величин  $x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz}$ , що характеризують “геометрію мас” тіла, система (25.27) є системою чотирьох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Вона розпадається на дві незалежні підсистеми другого порядку з визначниками, що відрізняються лише знаками:

$$\begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{vmatrix} = -(\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2), \quad \begin{vmatrix} \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \\ \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \end{vmatrix} = \ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4.$$

Оскільки вони не дорівнюють нулеві, то і визначник системи (25.27)

$$\begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} & 0 & 0 \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^6 M_i A_i = \begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \\ \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \end{vmatrix} = -(\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4)^2 \neq 0.$$

Єдиним розв’язком системи (25.27) є нульовий:

$$x_C = 0, y_C = 0, I_{xz} = 0, I_{yz} = 0. \quad (25.28)$$

За умов (25.28) система (25.26) набуває вигляду:

$$\begin{cases} X_A^n + X_B^n = 0, \\ -aX_A^n + bX_B^n = 0, \\ Y_A^n + Y_B^n = 0, \\ aY_A^n - bY_B^n = 0, \end{cases} \quad (25.29)$$

тобто також розпадається на дві підсистеми. Визначники цих підсистем відрізняються знаками:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{vmatrix} = a + b, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{vmatrix} = -(a + b).$$

Кожний із них не дорівнює нулеві, тому єдиним розв’язком підсистем (25.29) є нульовий:

$$X_A^n = 0, X_B^n = 0, Y_A^n = 0, Y_B^n = 0.$$

Вирази (25.25) стають такими:

$$X_A = X_A^{ct}, \quad Y_A = Y_A^{ct}, \quad X_B = X_B^{ct}, \quad Y_B = Y_B^{ct},$$

тобто за умов (25.28) реакції в’язей залежать лише від зовнішніх сил і визначаються системою (25.24). Проаналізуємо ці умови. Перші дві з них означають, що центр мас  $C$  тіла міститься на осі обертання. В цьому випадку говорять, що тіло статично врівноважене. Для знищення додаткових динамічних

реакцій однієї статистичної врівноваженості тіла недостатньо. Необхідно, крім того, щоб  $I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$ .

Таким чином, **щоб при обертанні тіла навколо нерухомої осі не виникали додаткові динамічні реакції, необхідно і достатньо, щоб вісь обертання тіла була головною центральною віссю інерції.**

Розглянемо деякі випадки, коли умови (25.28) не виконуються.

**1. Вісь обертання тіла є головною ( $I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$ ) нецентральною ( $x_C \neq 0, y_C \neq 0$ ).** Два останні рівняння системи (25.26) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} aY_A^d - bY_B^d &= M_x(\vec{R}^d) = 0, \\ -aX_A^d + bX_B^d &= M_y(\vec{R}^d) = 0, \end{aligned}$$

тобто  $\vec{M}_O(\vec{R}^d) = 0$ . Оскільки головний момент динамічних реакцій відносно точки  $O$  дорівнює нулеві, то згідно з підрозділом 11.6 (п. 3) *система динамічних реакцій зводиться до рівнодійної.*

**2. Вісь обертання тіла є центральною ( $x_C = 0, y_C = 0$ ) неголовною віссю інерції ( $I_{xz} \neq 0, I_{yz} \neq 0$ ).** Два перші рівняння системи (25.26) набувають вигляду:

$$X_A^d + X_B^d = F_x^d = 0, \quad Y_A^d + Y_B^d = F_y^d = 0,$$

тобто  $\vec{R}^d = 0$ . Оскільки головний вектор динамічних реакцій дорівнює нулеві, то згідно з підрозділом 11.6 (п. 3) *система динамічних реакцій зводиться до пари сил.*

### 25.9. Аналогія між поступальним рухом тіла та обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі

Тип руху	Поступальний рух	Обертальний рух
Коефіцієнт (параметр) інерції	$m$	$I_z$
Характеристика положення (координата) тіла	$x$	$\varphi$
Проекція швидкості	$v_x = \dot{x}$	$\omega_z = \dot{\varphi}$
Проекція прискорення	$w_x = \ddot{x}$	$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$
Міра механічної дії на тіло оточуючих тіл	$F_x$	$M_z$
Диференціальне рівняння руху	$m\ddot{x} = F_x$	$I_z\ddot{\varphi} = M_z$

### 25.10. Фізичний маятник

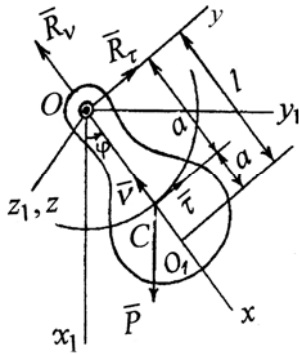


Рис. 25.8

У підрозділі 22.7 вивчався рух математичного маятника, тобто матеріальної точки  $A$  (див. рис. 22.18), яка рухається по гладенькому колу, розташованому у вертикальній площині. Практично це можна здійснити, наприклад, підвісивши матеріальну точку до невагомій нерозтягуваної нитки, другий кінець якої з'єднано з циліндричним шарніром. При цьому початкова швидкість підвішеної точки має розташовуватись у вертикальній площині і бути перпендикулярною до нитки. Такий маятник за характером руху називають ще круговим. Бувають також маятники еліптичні, циклоїдальні, сферичні, складені (наприклад подвійні)

тощо.

Фізичним маятником називається тверде тіло, яке може повертатись навколо нерухомої осі під дією сили ваги (рис. 25.8). Нехай вісь обертання маятника є горизонтальною. Проведемо через центр ваги  $C$  тіла площину, перпендикулярну до осі обертання. Точка  $O$  перетину цієї площини з віссю обертання називається точкою підвішування. Диференціальним рухом маятника є рівняння (25.22):

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e.$$

Тут

$$M_z^e = -mga \sin \varphi,$$

тому для знаходження закону руху маятника маємо рівняння:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (25.30)$$

де

$$\omega^2 = \frac{mga}{I_z}.$$

Рівняння (25.30) є звичайним нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Воно є узагальненням рівняння (22.57). Задача інтегрування цього рівняння, як показано у підрозділі 22.7, зводиться до квадратури.

При “невеликих” відхиленнях маятника від вертикалі  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Операція заміни функції  $\sin \varphi$  її першим членом розкладення в ряд Тейлора в околі точки  $\varphi = 0$  називається лінеаризацією функції в цьому околі. Малі коливання маятника описуються рівнянням

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд (21.15):

$$\varphi = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Період малих коливань фізичного маятника визначається, згідно з формулою (21.21), виразом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mga}}.$$

Щоб знайти тиск маятника на вісь обертання, потрібно визначити реакції осі обертання, яка для маятника є в'язю: опорою у вигляді кривої лінії (підрозділ 23.4). Складемо диференціальні рівняння руху точки  $C$  (рис. 25.8) в натуральній формі (підрозділ 20.3). Маятник є невільною матеріальною точкою, тому до активної сили  $\vec{P}$  слід додати реакції в'язі (підрозділ 20.4). Тоді перші два рівняння (20.19) набувають вигляду

$$\begin{cases} m \frac{dv_\tau}{dt} = -mg \sin \varphi + R_\tau, \\ m \frac{v^2}{a} = -mg \cos \varphi + R_v. \end{cases}$$

Оскільки  $v_\tau = a\dot{\varphi}$ , то

$$\begin{aligned} R_\tau &= mg \sin \varphi + ma\ddot{\varphi}, \\ R_v &= mg \cos \varphi + ma\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Врахувавши диференціальне рівняння (25.30) для кута  $\varphi$ , маємо:

$$\begin{aligned} R_\tau &= mg \left( 1 - \frac{ma^2}{I_z} \right) \sin \varphi, \\ R_v &= m(g \cos \varphi + a\dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

Для математичного маятника, який є частинним випадком фізичного маятника,  $I_z = ma^2$  і, отже,  $R_\tau = 0$ , тобто  $\vec{R} = \vec{R}_v = \vec{v}R$ . Останній результат повністю узгоджується з рис. 22.18.

Рух математичного маятника довжиною  $OA = l$  (рис. 22.18) описується диференціальним рівнянням (22.57), фізичного маятника – рівнянням (25.30). Обидва маятники рухаються однаково, тобто закон руху  $\varphi = \varphi(t)$  є одним і тим самим, якщо

$$\frac{g}{l} = \frac{mga}{I_z}.$$

Величина  $l = \frac{I_z}{ma}$  називається *приведеною довжиною фізичного маятника*. На

підставі формули (23.16)  $I_z = I_C + ma^2$ . Тому  $l = \frac{I_C}{ma} + a$ . Запровадимо позначення:

$$a_1 = \frac{I_C}{ma}. \text{ Тоді}$$

$$l = a_1 + a. \quad (25.31)$$

Точка  $O_1$  (див. рис. 25.8) називається *центром качання* фізичного маятника. Х. Гюйгенс показав, що точка підвішування  $O$  та центр качання  $O_1$  характеризуються властивістю взаємності: *якщо старий центр качання зробити новою точкою підвішування, то стара точка підвішування стає новим центром качання*. Доведемо це.

Нехай вісь обертання проходить через точку  $O_1$  (новою точкою підвішування є  $O_1$ ), тобто  $a \rightarrow a_* = a_1$ ,  $a_1 \rightarrow a_1^* = a$ . Для нової приведенної довжини згідно з виразом (25.31) мусить бути

$$l_* = \frac{I_C}{ma_*} + a_* = \frac{I_C}{ma_1} + a_1 = \frac{I_C}{I_C} + a_1 = a + a_1 = l,$$

тобто  $l_* = l$ , що й потрібно було довести.

### 25.11. Диференціальні рівняння плоскопаралельного (плоского) руху абсолютно твердого тіла

Кінематика такого руху вивчалась у підрозділах 15.1 – 15.9. Вільне тверде тіло буде рухатись плоскопаралельно, якщо в ньому:

- 1) існує плоский переріз, відносно якого маса тіла розподілена симетрично;
- 2) сили, що діють на тіло, розташовані в площині цього перерізу;
- 3) початкові швидкості всіх точок тіла лежать у площинах, паралельних площині згаданого перерізу.

Рух тіла може бути плоским також і внаслідок накладених на нього в'язей, але це буде уже невольний рух.

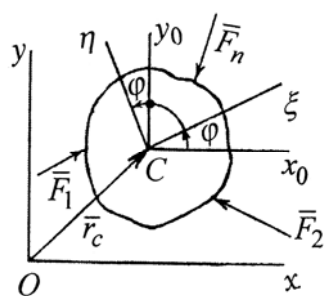


Рис. 25.9

Нехай (як і на рис. 15.6)  $Oxy$  – нерухома система декартових прямокутних координат. Система  $Cx_0y_0$  (рис. 25.9) рухається поступально відносно системи  $Oxy$ ,  $C$  – центр мас тіла, система  $C\xi\eta$  незмінно зв'язана з тілом і повернута на кут  $\varphi$  відносно системи  $Cx_0y_0$ . Використаємо теорему про рух центра мас (23.9) і теорему про зміну моменту кількостей руху у відносному русі (24.17). Оскільки

$$\vec{r}_C = \vec{i}x_C + \vec{j}y_C, \quad \vec{G}_C^r = \vec{i}_\xi I_C \dot{\varphi},$$

то

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_x^e, \\ m\ddot{y}_C = F_y^e, \\ I_C \ddot{\varphi} = M_C^e. \end{cases} \quad (25.32)$$

Якщо рух тіла є невольним, то

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_x^e + R_x, \\ m\ddot{y}_C = F_y^e + R_y, \\ I_C \ddot{\varphi} = M_C^e + M_C^R. \end{cases} \quad (25.33)$$

Тут  $M_C^R \equiv M_{C_\zeta}(\vec{R})$ . До рівнянь (25.33) слід приєднати рівняння в'язей.

Іноді замість одного з рівнянь (25.33) буває доцільним скористатись теоремою про зміну кінетичної енергії. Остання визначається формулами (24.26) і (25.5):

$$T = \frac{m}{2} v_C^2 + T_r = \frac{m}{2} (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{I_C}{2} \dot{\varphi}^2.$$

Якщо траєкторія центра мас тіла задана (відома), то замість перших двох рівнянь (25.33) іноді доцільно взяти рівняння в проекціях на дотичну і головну нормаль до траєкторії центра мас:

$$m \frac{dv_C}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{it\tau}, \quad m \frac{v_C^2}{\rho_C} = \sum_{i=1}^n F_{iv}.$$

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти зовнішні сили і частково початкові умови, щоб плоскопаралельний рух тіла був динамічно можливий. Відправними є диференціальні рівняння руху (25.10) вільного твердого тіла, в яких слід покласти

$$\omega_\xi = 0, \omega_\eta = 0, \omega_\zeta = \omega = \dot{\varphi}, \dot{\omega}_\zeta = \varepsilon.$$

Вирази (25.3) набувають вигляду:

$$G_\xi^r = -I_{\xi\xi}\omega, \quad G_\eta^r = -I_{\eta\eta}\omega, \quad G_\zeta^r = I_\zeta\omega.$$

Тому диференціальні рівняння (25.10) стають такими:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_x^e, m\ddot{y}_C = F_y^e, 0 = F_z^e, \\ -I_{\xi\xi}\varepsilon - \omega(-I_{\eta\eta}\omega) = M_\xi^e, \\ -I_{\eta\eta}\varepsilon + \omega(-I_{\xi\xi}\omega) = M_\eta^e, \\ I_\zeta\dot{\omega} = M_\zeta^e, \end{cases}$$

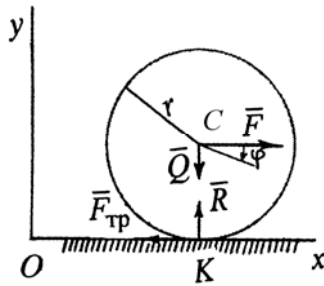


Рис. 25.10

або

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_x^e, \\ m\ddot{y}_C = F_y^e, \\ F_z^e = 0, \\ -I_{\xi\xi}\varepsilon + I_{\eta\eta}\omega^2 = M_\xi^e, \\ -I_{\eta\eta}\varepsilon - I_{\xi\xi}\omega^2 = M_\eta^e, \\ I_\zeta\dot{\omega} = M_\zeta^e. \end{cases}$$

Отже, умови здійсненності плоского руху є такими:

$$F_z^e = 0, -I_{\xi\xi}\varepsilon + I_{\eta\eta}\omega^2 = M_\xi^e, -I_{\eta\eta}\varepsilon - I_{\xi\xi}\omega^2 = M_\eta^e.$$

### 25.12. Задачі на плоский рух тіла

**Задача 1.** Колесо з масою  $m$  котиться прямолінійно без ковзання під дією горизонтальної сили  $\vec{F}$  (тобто є веденим), прикладеної в центрі ваги  $C$  (рис. 25.10). Закон руху точки  $C$  є відомим:

$$x_C = \frac{w}{2}t^2, \quad w = \text{const} > 0.$$

Вважаючи колесо суцільним однорідним диском, знайти  $F$ , нормальну реакцію  $\vec{R}$  і силу тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  колеса об горизонтальну площину.

**Розв'язання.** Нехай  $\varphi$  – кут повороту колеса навколо власної осі,  $\vec{\omega} = -\vec{k}\dot{\varphi}$ , де  $\vec{k}$  – орт цієї осі. Диференціальні рівняння (25.32) набувають вигляду:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F - F_{\text{тр}}, \\ m\ddot{y}_C = Q - R, \\ I_C\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}}r. \end{cases}$$

Оскільки  $y_C = r$ , то  $R = Q = mg$ . За відсутності ковзання колеса миттєвий центр швидкостей перебуває в точці  $K$ . Тому

$$v_C = \dot{x}_C = \omega r = \dot{\varphi}r = wt, \quad \dot{\varphi} = \frac{wt}{r}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{w}{r},$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{I_C\ddot{\varphi}}{r} = \frac{I_C}{r^2}w = \frac{m}{2}w,$$

$$F = m\ddot{x}_C + F_{\text{тр}} = mw + \frac{mw}{2} = \frac{3}{2}mw.$$

**Відповідь:**  $F = \frac{3}{2}mw$ ,  $R = mg$ ,  $F_{\text{тр}} = \frac{m}{2}w$ .

**Задача 2.** Розв'язати попередню задачу, враховуючи тертя кочення колеса об горизонтальну площину. Коефіцієнт тертя кочення дорівнює  $f_k$  (рис. 25.11).

**Розв'язання.** Внаслідок деформацій колеса і опорної площини їхній співдотик відбувається по невеликій дузі ( $KM$ ). Сумарна реакція площини, знайдена з урахуванням дуги співдотику ( $KM$ ), розкладається на вертикальну  $\vec{R}$  і горизонтальну  $\vec{F}_{\text{тр}}$  складові. Вона проходить через центр колеса  $C$  (див. підрозділ 9.4). Нормальна складова  $\vec{R}$  зміщена в сторону руху на величину  $f_k$ . Дотична складова є силою тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Коефіцієнт тертя кочення залізничного колеса має

порядок сотих долей сантиметра. Система диференціальних рівнянь (25.32) в цьому випадку має вигляд:

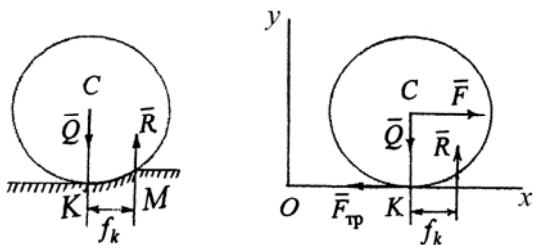


Рис. 25.11

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F - F_{\text{тр}}, \\ m\ddot{y}_C = mg - R, \\ I_C\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}}r - Rf_k. \end{cases}$$



Оскільки  $y_C = r$ , то  $R = mg$ . Використовуючи результати розв'язання попередньої задачі, знаходимо:

$$F_{\square p} = \frac{1}{r}(I_C \ddot{\varphi} + f_k mg) = \frac{1}{r} \left( \frac{mr^2}{2} \frac{w}{r} + f_k mg \right) = m \left( \frac{w}{2} + \frac{f_k}{r} g \right),$$

$$F = m\ddot{x}_C + F_{\square p} = mw + m \left( \frac{w}{2} + \frac{f_k}{r} g \right) = m \left( \frac{3}{2} w + \frac{f_k}{r} g \right).$$

**Відповідь:**  $F = m \left( \frac{3}{2} w + \frac{f_k}{r} g \right)$ ,  $R = mg$ ,  $F_{\square p} = m \left( \frac{w}{2} + \frac{f_k}{r} g \right)$ .

**Задача 3.** Вага автомобіля з колесами дорівнює  $P$ , вага кожного з чотирьох його коліс дорівнює  $Q$ , радіус колеса дорівнює  $r$ , радіус інерції колеса відносно власної осі дорівнює  $\rho$ , до задніх (ведучих) коліс прикладено обертальний момент

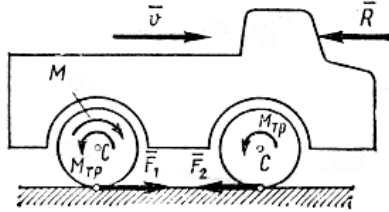


Рис. 25.12

$\vec{M}$ . Автомобіль починає рухатись зі стану спокою. Модуль сили опору повітря пропорційний квадрату його поступальної швидкості:  $R = \mu v^2$ . Момент тертя в осі кожного колеса є сталим:  $M_{\text{tp}} = \text{const}$ . Нехтуючи опором коченню, знайти гранично можливу швидкість автомобіля, а також силу тертя ковзання, що діє на ведучі та ведені колеса при русі.

**Розв'язання.** Скористаємось формулою (24.21):

$$dT = \sum_{k=1}^n d'A_k^e + \sum_{k=1}^n d'A_k^i. \quad (25.34)$$

Кінетична енергія автомобіля  $T$  дорівнює сумі кінетичних енергій кузова і коліс. Оскільки рух автомобіля поступальний, то всі його точки мають однакові швидкості  $\vec{v}$ , де  $v = \omega r$ ,  $\omega$  – кутова швидкість власного обертання колеса. Тому

$$T = \frac{P}{g} \frac{v^2}{2} + 4 \frac{I_C}{2} \omega^2, \quad I_C = \frac{Q}{g} \rho^2, \quad (25.35)$$

$$T = \left( P + 4Q \frac{\rho^2}{r^2} \right) \frac{v^2}{2g}.$$

Із зовнішніх сил роботу виконує тільки сила опору повітря, оскільки опором коченню ми нехтуємо, а робота сил тертя  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  коліс об ґрунт дорівнює в цьому випадку нулеві (підрозділ 31). Отже,

$$\sum_{k=1}^n d'A_k^e = -R ds = -\mu v^2 ds, \quad (25.36)$$

де  $ds$  – модуль елементарного переміщення точки прикладання сили  $\vec{R}$ , тобто  $ds = ds_C = r d\varphi$ , де  $\varphi$  – кут власного повороту колеса ( $\omega = \dot{\varphi}$ ).

Для роботи внутрішніх сил (обертального моменту і сил тертя в осях коліс) маємо:

$$\sum_{k=1}^n d'A_k^e = (M - 4M_{\text{тр}})d\varphi = (M - 4M_{\text{тр}})\frac{ds}{r}. \quad (25.37)$$

Оскільки  $v = \frac{ds}{dt}$ ,  $\frac{dv}{dt} = w$ , то з рівностей (25.34) – (25.37) дістаємо:

$$\left(P + 4Q\frac{\rho^2}{r^2}\right)\frac{vw}{g} dt = -\mu v^2 v dt + (M - 4M_{\text{тр}})\frac{v dt}{r},$$

або після скорочення на  $v dt$

$$\left(P + 4Q\frac{\rho^2}{r^2}\right)\frac{w}{g} = \frac{M - 4M_{\text{тр}}}{r} - \mu v^2. \quad (25.38)$$

Гранично можлива швидкість досягається тоді, коли прискорення стає рівним нулеві. Тому з рівності (25.38) дістаємо:

$$v_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{M - 4M_{\text{тр}}}{\mu r}}.$$

Цей результат є наслідком рівності нулеві правої частини формули (25.34).

Щоб знайти сили тертя, що діють на кожне колесо, складемо рівняння обертального руху коліс відносно їхніх осей. Для двох ведучих коліс маємо:

$$2\frac{Q}{g}\rho^2\varepsilon = M - 2M_{\text{тр}} - 2F_1r.$$

Оскільки  $r\dot{\varphi} = v$ ,  $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\dot{v}}{r} = \frac{w}{r}$ , то

$$-2\frac{Q}{g}\rho^2\frac{w}{r} + M - 2M_{\text{тр}} = 2F_1r,$$

звідки

$$F_1 = \frac{M}{2r} - \frac{M_{\text{тр}}}{r} - Q\frac{w\rho^2}{g r^2}. \quad (25.39)$$

Для кожного веденого колеса маємо:

$$\frac{Q}{g} \rho^2 \varepsilon = F_2 r - M_{\text{тр}},$$

тому

$$F_2 = \frac{M_{\text{тр}}}{r} + Q \frac{w \rho^2}{g r^2}.$$

З рівності (25.38) випливає, що зі збільшенням швидкості прискорення спадає, прагнучи до нуля, коли  $v \rightarrow v_{\text{тр}}$ . Таким чином, сила тертя на ведучих колесах при розгоні дещо зростає і досягає найбільшого значення, коли рух установлюється ( $w = 0$ ). Якщо підставити значення  $w$  з рівності (25.38), то останній доданок у формулі (25.39) буде набагато меншим, ніж перший, оскільки  $P \gg Q$ . Тому значення  $F_1$  практично зміниться ненабагато.

На ведених колесах сила тертя має найбільше значення в момент початку руху, потім спадає і при рівномірному русі ( $w = 0$ ) дорівнює  $\frac{M_{\text{тр}}}{r}$ .

Якщо коефіцієнт тертя коліс об ґрунт не буде достатнім для того, щоб сила тертя змогла набути значення  $F_1$  або  $F_2$ , то відповідні колеса будуть буксувати. Оскільки  $M \gg M_{\text{тр}}$ , то в першу чергу буксування загрожує ведучим колесам.

При виключеному двигуні всі колеса є веденими і на них спочатку буде діяти сила тертя  $F = \frac{M_{\text{тр}}}{r}$ . Дія гальмівних колодок еквівалентна збільшенню моменту  $M_{\text{тр}}$  в осях, а отже, і сили тертя, що діє на кожне з коліс, чим і прискорюється гальмування автомобіля.

### Питання для самоконтролю

1. Чи можна знайти кількість руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, як кількість руху однієї точки?
2. Як знайти кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, відносно координатних осей?
3. Як знайти кінетичну енергію твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
4. Вказати зв'язок між кінетичною енергією і кінетичним моментом твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.
5. Що називають вектором нескінченно малого повороту тіла?
6. Коли квазікоордината (неголономна координата) є реальною координатою?
7. Як знайти елементарну роботу сил, прикладених до абсолютно твердого тіла?
8. Якими диференціальними рівняннями описується рух вільного твердого тіла?
9. Навести диференціальні рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.
10. Як знайти реакції в'язей при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі?
11. Що означає статична рівноваженість тіла, що обертається навколо нерухомої осі?

12. Навести необхідні і достатні умови, щоб при обертанні тіла навколо нерухомої осі не виникали динамічні реакції.
13. Якою є аналогія між поступальним рухом тіла і його обертальним рухом навколо нерухомої осі?
14. Що називають приведеною довжиною фізичного маятника?
15. Навести диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла.

## Частина 5. Основи аналітичної механіки

Творцем аналітичної механіки є Ж. Л. Лагранж. Розроблений ним оригінальний математичний апарат вийшов далеко за межі механіки і знайшов широке застосування в різноманітних галузях природознавства.

Особливістю творчого методу Лагранжа є «глобальний аналітизм»: у двотомному курсі аналітичної механіки Лагранжа немає жодного рисунка. Ж. Л. Лагранж кваліфікував це як своє досягнення.

Уявлення про здобутки світової науки з аналітичної механіки за час, що минув після опублікування творіння Лагранжа (1788 р.), можна скласти, ознайомившись із книгами А.І.Лур'є [18] та Г.К. Сулова [31].

### 26. Основи аналітичної механіки невідільної системи матеріальних точок

#### 26.1. Поняття в'язі в аналітичній механіці

Система матеріальних точок називається **вільною**, якщо її точки можуть займати будь-які положення у просторі, а їхні швидкості можуть набувати довільних значень. Прикладом вільної системи є повітряна куля у просторі.

**Невідільною** називається матеріальна система, на положення точок якої і (або) на їхні швидкості накладено обмеження. Будь-який механізм є прикладом невідільної матеріальної системи. Невідільні системи підпорядковані певним в'язям. **В'язями** називаються тіла або обставини, які спричиняють обмеження на координати чи швидкості (або і на координати, і на швидкості) всіх або деяких точок. Обмежуючі положення чи переміщення матеріальних точок системи, в'язі діють на ці точки силами, що називаються **реакціями** в'язей.

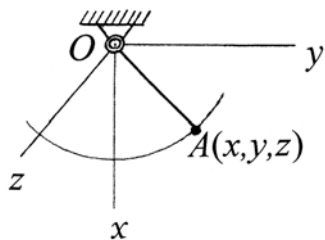


Рис. 26.1

Як приклад, розглянемо невагомий недеформівний стержень  $OA$ , на одному з кінців якого розташована матеріальна точка  $A$  (рис. 26.1). Точки  $O$  та  $A$  не можуть ні наблизитись, ні віддалитись. Якщо точку  $O$  закріпити, з'єднавши з нерухомим середовищем за допомогою сферичного шарніра, то точка  $A$  може переміщуватись вздовж кривої, що лежить на сфері радіусом  $l = OA$ , тому

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (26.1)$$

З позицій формальної логіки в'яззю для матеріальної точки  $A$  є стержень

$OA$ . Звичайно, можна скласти рівняння відрізка  $OA$  прямої (тобто, формально – рівняння в'язі), але, по-перше, в цьому немає необхідності, по-друге, в слова «рівняння в'язі» в аналітичній механіці, яка має справу з координатами точки, прийнято вкладати дещо інший зміст. Безперечно, що для трійки чисел  $x, y, z$  (декартових координат точки  $A$ ) в'язю є рівність (26.1). Оскільки між точками і всіма їхніми координатами існує взаємно однозначна відповідність і оскільки при аналітичному підході ми маємо справу з координатами матеріальної точки, то нам знадобляться лише ті співвідношення, які описують обмеження на зміну цих координат або їхніх похідних і які породжено фізичними тілами або обставинами руху, тобто в'язями в початковому трактуванні цього слова. З цих міркувань логічним є вислів: матеріальна точка  $A$ , яка міститься на кінці стрижня  $OA$ , є невільною матеріальною точкою, оскільки на неї накладено в'язь (26.1). В подальшому рівняннями в'язей (а іноді і просто в'язями) будемо називати обмеження на координати або (і) на швидкості точок. Підставами для цього є також і те, що згідно з принципом звільнюваності вихідна (фізична) в'язь відкидається, тоді як аналітично обмеження на координати чи їхні похідні зберігаються.

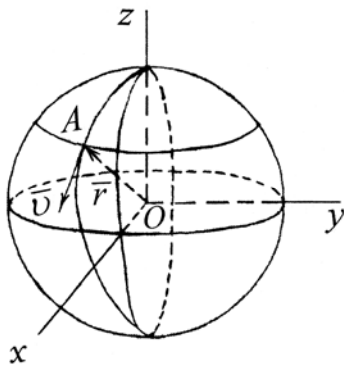


Рис. 26.2

Сукупність вказаних міркувань приводить до того, що в аналітичній механіці термін «в'язь» традиційно переноситься з реальних тіл на рівності або нерівності, що породжені фізичними тілами або обставинами руху.

В'язь (26.1) має геометричне походження. Геометрична в'язь (26.1) обмежує не тільки положення точки у просторі (матеріальна точка  $A$  мусить весь час перебувати на сфері радіусом  $l$  і з центром в початку координат), але й її рух, адже швидкість точки  $A$  мусить бути дотичною до траєкторії, тобто лежати в площині, дотичній до сфери в точці  $A$  (рис. 26.2). Це впливає ще й з того, що диференціюванням рівності  $\vec{r}^2 = l^2$  знаходимо  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ . Звідси  $\vec{v} \perp \vec{r}$ . Таке саме обмеження на швидкість точки  $A$  маємо з рівності (26.1):

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \quad (26.2)$$

тобто

$$xv_x + yv_y + zv_z = 0.$$

Замінивши сферичний шарнір у точці  $O$  (рис. 26.1) на циліндричний, ми накладемо на точку  $A$  ще одну в'язь  $z = 0$ , в результаті чого точка  $A$  змушена буде рухатись у площині  $xOy$  вздовж кола. Замість сферичного (просторового) маятника матимемо математичний (плоский) маятник. Зміна координат точки  $A$  обмежується в цьому разі двома в'язями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - l^2 = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (26.3)$$

Якщо стрижень замінити нерозтягуваною гнучкою ниткою, то точка  $A$  не зможе віддалитись від точки  $O$  більше, ніж на віддаль  $l$ , але зможе наблизитись до точки  $O$  внаслідок зминання нитки (момент настання зминання визначається за перетворенням на нуль реакції в'язі – натягу нитки). Отже, координати точки  $A$  мусять задовольняти умові

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0. \quad (26.4)$$

Нарешті, прив'язавши точку  $A$  до гумової нитки, довжина  $l$  якої змінюється за певним законом:  $l = l(t)$ , одержимо, що час  $t$  увійде явно в рівняння (26.1):

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0. \quad (26.5)$$

Така в'язь змінюється з полином часу.

Звичайно, замість сфери (26.1) можна уявити яку-небудь іншу поверхню

$$f(x, y, z) = 0, \quad (26.6)$$

по якій з певних причин мусить рухатись точка.

## 26.2. Класифікація в'язей

Розглядаючи загальний випадок, відмітимо, що **конструктивно** в'язі реалізуються у вигляді шарнірів, направляючих, стрижнів, ниток, поверхонь і т.д. Незалежно від фактичної реалізації в'язей вони можуть бути задані аналітично. **Аналітично** в'язі проявляються у вигляді рівнянь або нерівностей (тобто обмежень на області зміни, які вони накладають на координати і (або) швидкості точок системи). У зв'язку з цим там, де це не призводить до непорозумінь, досить часто самі ці рівняння або нерівності називають в'язями.

Геометричні в'язі, накладені на точку, можуть змушувати точку рухатись по деякій поверхні, кривій лінії або перебувати весь час у строго фіксованій частині простору. Рівняння поверхні чи лінії, по яких мусить рухатись матеріальна точка, називаються рівняннями геометричної в'язі. Якщо точка змушена залишатись у певній області простору, то в'язь аналітично описується у вигляді нерівностей.

Якщо в'язь з часом не змінюється, тобто час  $t$  не входить явно в рівняння в'язі, то вона називається **стаціонарною**, або усталеною (наприклад (26.1) чи (26.3)), у супротивному разі – **нестационарною**, або неусталеною (наприклад (26.5)).

В'язі називаються **двосторонніми** (або **утримуючими**), якщо вони обмежують переміщення матеріальних точок як у певних конкретних напрямках, так і в прямо протилежних напрямках. Такі в'язі описуються рівностями. В'язі називаються **односторонніми** (або **неутримуючими**), якщо вони обмежують переміщення матеріальних точок у деяких напрямках, але не обмежують переміщення в прямо протилежних напрямках. Такі в'язі виражаються нерівностями.

Розглядаючи в'язі *невільного твердого тіла*, доречно говорити не про зв'язки між окремими його точками (кількість яких нескінченно велика), а про зв'язки, що обмежують положення і (або) рух тіла як одного (цілого) об'єкта.

Відповідно до цього для невільного твердого тіла слід скласти рівняння чи нерівності для параметрів, що визначають положення (рух) тіла в цілому.

Диференціюванням рівняння (26.1) геометричної в'язі (тобто в'язі, яка накладає обмеження на положення точки у просторі) ми отримали рівняння (26.2) кінематичної в'язі (яка обмежує переміщення точки у просторі). Навпаки, маючи рівняння (26.2) кінематичної в'язі, інтегруванням можна отримати рівняння геометричної в'язі:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = C.$$

Але якщо перша операція (диференціювання) можлива завжди, то обернена операція (інтегрування) можлива не завжди.

В'язі, що накладають обмеження на положення точок матеріальної системи, називаються **голономними** (або геометричними). **Неголономними** називаються в'язі, що накладають обмеження на швидкості точок системи (тобто це диференціальні в'язі), причому рівняння цих в'язей не можуть бути проінтегровані (незалежно від диференціальних рівнянь руху системи). Неголономні в'язі мають кінематичне походження і не можуть бути зведені до геометричних в'язей. Таким чином, неголономні в'язі обмежують переміщення

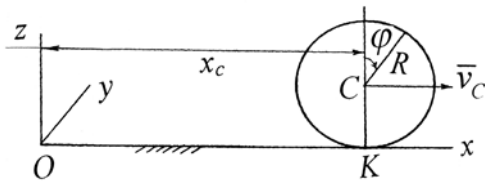


Рис. 26.3

точок системи, тоді як положення точок можуть бути будь-якими. Особливості дослідження систем з неголономними в'язями описано в книгах [1 – 4]. В задачах про кочення одного тіла по поверхні іншого неголономні в'язі виражають умову відсутності ковзання. Скоріше винятком, ніж правилом, є приклади залізничної колісної пари (двох коліс, насаджених на

спільну вісь, тобто співвісних) і циліндра. Покажемо, що тут ми маємо в'язь кінематичного походження, яка зводиться до геометричної в'язі. Розглянемо одне з коліс пари, яке котиться без ковзання вздовж прямолінійної рейки  $Ox$  (рис. 26.3), або переріз циліндра площиною, перпендикулярною до його осі. Позначимо через  $x_c, y_c, z_c$  декартові прямокутні координати центра  $C$  колеса в нерухомій системі координат  $Oxyz$ . Рух колеса є плоским (плоскопаралельним): всі його точки переміщуються в площинах, паралельних площині  $xOz$ . Візьмемо за полюс центр  $C$  колеса. Згідно з підрозділом 15.1 плоскопаралельний рух колеса можна розглядати як такий, що складається з поступального руху разом з полюсом  $C$  та з обертального руху навколо осі, що перпендикулярна до площини  $xOz$  і проходить через полюс  $C$ . Миттєву кутову швидкість такого обертання позначимо  $\dot{\varphi}$ . Закон руху колеса в загальному випадку плоскопаралельного руху має вигляд (15.1), тобто  $x_c = x_c(t), y_c = y_c(t), \varphi = \varphi(t)$ . Оскільки колесо залишається вертикальним, то  $z_c = R$ . Це голономна в'язь. При русі вздовж осі  $Ox$  накладається ще одна голономна в'язь:  $y_c = 0$ . Згідно з підрозділом 15.5 миттєвим центром швидкостей колеса є точка  $K$ , а тому умова  $\vec{v}_K = 0$  набуває вигляду:



$$\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CK} = \vec{i}\dot{x}_C + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{vmatrix} = \vec{i}(\dot{x}_C - R\dot{\varphi}) = 0.$$

Отже,

$$\dot{x}_C - R\dot{\varphi} = 0. \quad (26.7)$$

В'язь (26.7) є кінематичною інтегрованою в'яззю:

$$x_C - R\varphi = \text{const}.$$

Постійну величину в правій частині рівності можна зробити рівною нулеві, вибравши належним чином початок відліку кута  $\varphi$  і точку  $O$ , а саме:  $x_C = 0$  при  $\varphi = 0$ . Таким чином,  $x_C - R\varphi = 0$ . Геометричний зміст цієї рівності полягає в тому, що при коченні без ковзання довжина відповідного відрізка осі  $Ox$  дорівнює довжині дуги кола радіуса  $R$  з центральним кутом  $\varphi$ .

Більш складним є, наприклад, випадок, коли диск котиться без ковзання, описуючи на площині  $xOy$  довільну траєкторію і маючи можливість відхилитись від вертикальної площини  $xOz$  (останнє із згаданих його переміщень називається боковим креном). Тоді умови

$$(\vec{v}_K)_x = 0, \quad (\vec{v}_K)_y = 0$$

приводять до рівнянь неголономних в'язей. Детальні відомості про кочення обруча і кулі по площині наведено в праці [21], диска, тора і кулі – в [18], диска, монети і кулі – в [29], тора – в [24].

До поняття неголономної в'язі приводить, зокрема, така задача [15]. Нехай матеріальна точка  $M(x, y, z)$  рухається у просторі так, що її траєкторія  $(L)$  в кожній своїй точці ортогональна заданому в цій точці вектору  $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ , тобто на рух накладено в'язь

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$$

або в координатній формі

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \quad (26.8)$$

Сукупність значень  $x, y, z$ , які задовольняють диференціальному рівнянню Пфаффа (26.8), утворюють многовид (інтегральний многовид) виміру 2 або 1, тобто це рівняння можна проінтегрувати поверхнями (якщо  $\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{a} = 0$ ) або кривими лініями (якщо  $\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{a} \neq 0$ ). Необхідні і достатні умови голономізації довільної кількості систем Пфаффа з багатьма змінними наведено в [15].

Розглянемо основні конкретні випадки невіЛЬНОГО руху матеріальної точки.

### 26.3. Рух матеріальної точки по гладенькій поверхні. Диференціальні рівняння Лагранжа першого роду

Нехай поверхню, по якій рухається матеріальна точка  $M$ , задано неявним рівнянням в декартових координатах (рис. 26.4):

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (26.9)$$

Якщо  $\vec{R} = \bar{n}R$  – реакція в'язі, то диференціальне рівняння руху точки  $M$  у векторній формі має вигляд:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (26.10)$$

Замість (26.9) введемо більш загальне рівняння

$$f(x, y, z, t) = \text{const}. \quad (26.11)$$

Розглянемо ліву частину рівняння (26.11) як функцію точки  $M(x, y, z)$  простору. Рівняння (26.11) при фіксованому часі  $t$  визначає сім'ю поверхонь рівня функції  $f(x, y, z, t)$ . З цього погляду рівняння (26.9) визначає нульову поверхню рівня. Використовуючи термінологію, запроваджену в підрозділі 22.4, можна сказати, що маємо скалярне поле.

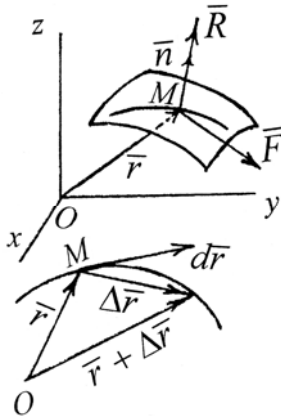


Рис. 26.4

Вектор

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

лежить у дотичній площині до поверхні (26.9). Введемо далі символічний вектор

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

який називається оператором Гамільтона. Подіявши цим оператором на функцію  $f$ , одержуємо реальний вектор

$$\nabla f = \text{grad } f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

У кожний фіксований момент часу  $t = \text{const}$  значення вектора  $d\vec{r}$  позначимо  $\delta\vec{r}$ . Аналогічно  $\delta f$  позначає диференціал функції  $f$  при  $t = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt, \\ \delta f &= \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z, \\ \delta\vec{r} &= \vec{i} \delta x + \vec{j} \delta y + \vec{k} \delta z. \end{aligned} \quad (26.12)$$

Тоді

$$\delta f = \text{grad } f \cdot \delta \vec{r} = 0,$$

тобто  $\text{grad } f \perp \delta \vec{r}$ : градієнт функції є вектором, що направлений по нормалі до поверхні рівня даної функції, тобто вектори  $\vec{R}$  і  $\text{grad } f$  колінеарні:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad (26.13)$$

Розкладемо силу  $\vec{F}$  за декартовим базисом:

$$\vec{F} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z.$$

Одне векторне рівняння (26.10) рівносильне трьом скалярним рівнянням:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X + R_x, \\ m\ddot{y} = Y + R_y, \\ m\ddot{z} = Z + R_z. \end{cases} \quad (26.14)$$

Приєднавши до системи (26.14) рівняння (26.9) і (26.13), одержимо систему шести рівнянь з шістьма невідомими  $x, y, z, R_x, R_y, R_z$ . Розв'язання цієї системи починають з виключення реакції в'язі. На підставі (26.13) позначимо:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (26.15)$$

Система (26.14) стає такою:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{cases} \quad (26.16)$$

Доповнивши систему (26.16) рівнянням (26.9), одержимо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими  $x, y, z, \lambda$ . Реакція в'язі знаходиться за формулою

$$\vec{R} = \lambda \text{grad } f. \quad (26.17)$$

Рівняння (26.16) називаються рівняннями Лагранжа першого роду, а величина  $\lambda$  – множником Лагранжа. Наперед він невідомий. Тому його називають неозначеним множником Лагранжа.

Розв'язування системи рівнянь (26.16) і (26.9) починають з виключення  $\lambda$ . Продиференціюємо рівняння (26.9) двічі за часом (поспідовно):

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (26.18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} + \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t) = 0. \quad (26.19)$$

Із системи рівнянь (26.16) знаходимо:

$$m\ddot{x} \frac{\partial f}{\partial x} = X \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2,$$

$$m\ddot{y} \frac{\partial f}{\partial y} = Y \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2,$$

$$m\ddot{z} \frac{\partial f}{\partial z} = Z \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2.$$

Звідси

$$m \left( \ddot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \ddot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \ddot{z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Врахувавши рівняння (26.19), маємо:

$$-m\varphi = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Таким чином,

$$\lambda = - \frac{X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + m\varphi}{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}, \quad (26.20)$$

або

$$\lambda = - \frac{\vec{F} \cdot \text{grad } f + m\varphi}{(\text{grad } f)^2}.$$

Підставивши (26.20) в (26.16), одержимо систему трьох диференціальних рівнянь з трьома невідомими функціями  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

#### 26.4. Рух матеріальної точки по гладенькій кривій лінії

Нехай траєкторією точки  $M(x, y, z)$  є лінія перетину двох поверхонь (рис. 26.5), які для точки є в'язями:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, t) = 0, \\ f_2(x, y, z, t) = 0. \end{cases} \quad (26.21)$$

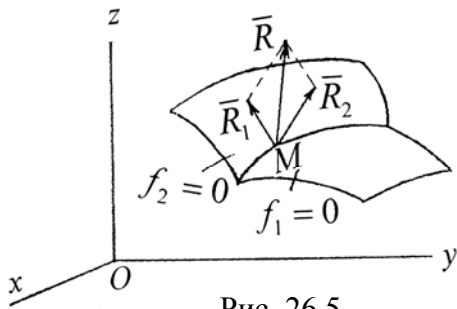


Рис. 26.5

Якщо  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$  – реакції в'язей, то згідно з виразом (26.17) маємо:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \lambda_1 \text{grad } f_1, \\ \vec{R}_2 &= \lambda_2 \text{grad } f_2. \end{aligned}$$

Результуюча реакція  $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ .  
Скористаємось рівнянням (20.22) невідільного руху матеріальної точки:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}.$$

Звідси в координатній формі дістаємо:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (26.22)$$

Рівняння (26.22) разом з (26.21) складають систему п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими  $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ .

Якщо точка рухається по **нерухомій** кривій, то зручніше користуватись диференціальними рівняннями руху в натуральній формі:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_\tau}{dt} &= F_\tau + R_\tau, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_\nu + R_\nu, \\ 0 &= F_\beta + R_\beta. \end{aligned} \quad (26.23)$$

З третього рівняння випливає, що бінормальна складова реакції визначається статично через бінормальну складову активної сили і від закону руху точки не залежить.

Якщо крива є **гладенькою**, то реакція  $\vec{R}$  лежить у нормальній площині кривої, по якій рухається точка. Тому  $R_\tau = 0$ . Перше рівняння (26.23) визначає в цьому випадку закон руху точки по кривій, друге і третє рівняння дають змогу знайти реакцію в'язі. Таким чином, користуючись натуральними рівняннями руху,

можна знаходити закон невільного руху, не знаходячи реакцію в'язі, чого за допомогою системи (26.22) зробити не можна.

Якщо крива є **шорсткою**, то величина  $\vec{R}_\tau$  є силою тертя ковзання. Її модуль визначається формулою

$$(R_\tau) = f \sqrt{R_\nu^2 + R_\beta^2},$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання. Сила тертя ковзання направлена завжди протилежно швидкості, тому

$$R_\tau = -f \sqrt{R_\nu^2 + R_\beta^2} \frac{v_\tau}{v}.$$

## 26.5. Принцип Д'Аламбера

Під назвою «принцип Д'Аламбера» в сучасній механіці мають на увазі твердження, яким наука завдячує кільком ученим. Я. Герман (1678 – 1733, член Петербурзької академії наук) запропонував у 1716 р. метод розв'язування задач динаміки, який потім був узагальнений Л. Ейлером (1707 – 1783). Ж. Д'Аламбер (1717 – 1783) опублікував у 1743 р. працю, в якій висловив твердження, назване ним загальним принципом механіки невільних систем. Д'Аламбер розв'язав ряд окремих задач, але загальної методики застосування принципу не розробив. Аналізуючи різні принципи механіки, Ж. Лагранж (1736 – 1813) у книзі «Аналітична механіка» (том 1) зауважив, що в курсах механіки під назвою «принцип Даламбера» викладають, по суті, принцип Германа–Ейлера. Сучасне формулювання принципу Даламбера, як і в часи Лагранжа, ближче відповідає суті принципу Германа–Ейлера.

### 26.5.1. Випадки вільної матеріальної точки і вільного твердого тіла

Нехай до вільної матеріальної точки  $A$  прикладено силу  $\vec{F}$  (вона може бути рівнодійною кількох прикладених сил). Прискорення, зумовлене нею, задовольняє умову:

$$m\vec{w} = \vec{F}. \quad (26.24)$$

Позначивши

$$\vec{F}_i = -m\vec{w}, \quad (26.25)$$

рівняння (26.24) можна подати інакше:

$$\vec{F} + \vec{F}_i = 0. \quad (26.26)$$

Вектор  $\vec{F}_i$  в (26.25), а також у (26.26) має розмірність сили. Він дістав назву сили інерції. Рівність (26.26) є рівнянням руху матеріальної точки  $A$ , записаним у формі умови рівноваги сил: активної сили  $\vec{F}$  і сили інерції  $\vec{F}_i$ . Згідно з виразом (26.26) в кожний момент часу сума активної сили та сили інерції дорівнює нулю, тобто **активна сила, прикладена до матеріальної точки, урівноважується силою інерції**. Іншими словами, **рухому точку можна розглядати як нерухому, доповнивши діючі на неї сили «силами інерції»**. В цьому полягає суть **методу кінетостатики** – розділу технічної механіки, в якому задачі динаміки зводяться до задач статички. Але крім вирішення питань зручності в застосуванні, необхідно встановити правові підстави методу кінетостатики.

За умовою задачі до точки  $A$  прикладена лише одна сила:  $\vec{F}$ . Про жодну іншу силу, прикладену до цієї точки, говорити не можна (таких сил не існує). Тим більше не можна говорити про врівноваження сили  $\vec{F}$  іншою силою. Мова може йти лише про формальну аналогію рівності (26.26) з умовою рівноваги сил  $\vec{F}$  та  $\vec{F}_i$ , якби обидві були прикладені до точки  $A$ . Але ж цього немає! Тому рівність (26.26) можна лише формально, умовно (тільки за зовнішньою ознакою) трактувати як умову рівноваги. Це «квазірівновага».



Рис. 26.6

Розглянемо питання про фізичну природу сили  $\vec{F}_i$ . Нехай сила  $\vec{F}$  (що прикладена до точки  $A$ ) зумовлена дією точки  $B$  на точку  $A$ , тобто точка  $B$  є прискорюючою, точка  $A$  є прискорюваною. Точки  $A$  і  $B$  взаємодіють між собою. Якщо  $\vec{F}$  – дія, то протидія (згідно з підрозділом 1.5 або підрозділом 20.2) дорівнює  $-\vec{F} = \vec{F}_i$ . Отже, сили  $\vec{F}$  та  $\vec{F}_i$  прикладено до точок  $A$  і  $B$  відповідно (рис. 26.6). Як такі, що прикладені до різних точок, ці сили не можуть урівноважитись. В цьому проявляється умовність методу кінетостатики.



Рис. 26.7

Наведені міркування переносяться на випадок обертальних рухів тіл  $(A)$  і  $(B)$  (рис. 26.7). Якщо момент сил  $\vec{M}$ , прикладений від тіла  $(B)$  до тіла  $(A)$ , породжує кутове прискорення  $\vec{\varepsilon}$  тіла  $(A)$ , то замість (26.24) маємо (див. підрозділ 25.8):

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}.$$

Взаємодія тіл  $(A)$  та  $(B)$  проявляється в тому, що до тіла  $(B)$  прикладено момент сил  $\vec{M}_i = -\vec{M}$ , тобто

$$\vec{M} + \vec{M}_i = 0. \quad (26.27)$$

Це аналог рівності (26.26). Тут  $\vec{M}_i$  – момент сил інерції.

### 26.5.2. Випадок невідільної матеріальної точки

Якщо  $\vec{F}$  і  $\vec{R}$  – рівнодійні активних сил і реакцій в'язей, то згідно з підрозділом 20.4 диференціальне рівняння руху точки має вигляд:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}.$$

Звідси

$$\vec{F} + \vec{R} - m\vec{w} = 0. \quad (26.28)$$

Силу  $\vec{F} + \vec{R}$  Ж. Д'Аламбер назвав рушійною силою (*force motrice*). Сила  $\vec{N} = \vec{F} - m\vec{w}$  урівноважується реакцією  $\vec{R}$  в'язей і не надає точці прискорення:

$$\vec{N} + \vec{R} = 0.$$

Тому Ж. Д'Аламбер назвав силу  $\vec{N}$  втраченою силою. Сила  $\vec{F}_i = -m\vec{w}$  згідно з виразом (26.25) є силою інерції. Рівність (26.28) записується так:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_i = 0, \quad (26.29)$$

тобто формально набуває вигляду умови рівноваги сил: **активні сили, прикладені до матеріальної точки, і реакції в'язей «урівноважуються» силами інерції**. Це і є принцип Д'Аламбера для невільної матеріальної точки. Звичайно, рівновага, про яку йде мова у формулюванні принципу Д'Аламбера, є умовною, фіктивною, оскільки сили інерції не прикладено до матеріальної точки, на яку діють насправді лише сили  $\vec{F}$  і  $\vec{R}$ . Мова йде тільки про формальний спосіб, що дозволяє записати рівняння руху точки у вигляді рівняння рівноваги сил. Такий підхід інколи називають **методом кінестатики**.

На відміну від вільної матеріальної точки, сили інерції у випадку невільної матеріальної точки частково прикладено до «прискорюючих» точок і частково до в'язей. Проілюструємо це на прикладі. Нехай на матеріальну точку накладено одну в'язь. Тоді ця (невільна) матеріальна точка є прискорюваною, а в'язь замінює прискорюючу

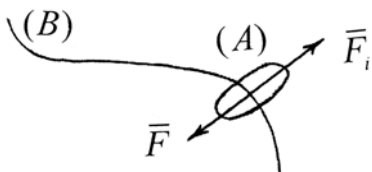


Рис. 26.8

точку, про яку йшла мова у попередньому пункті 26.5.1. Траєкторію матеріальної точки наперед визначено в'яззю. Якщо на матеріальну точку діє активно сила, то до в'язі прикладено зі сторони матеріальної точки протидію, що зветься «силою інерції». Нехай роль «прискорюваної точки» відіграє кільце (A), а в'яззю є дріт (B) (рис. 26.8) – «прискорююча точка». Під дією сили  $\vec{F}$ , прикладеної до кільця зі сторони дроту, кільце (A) набуває нормального (доцентрового) прискорення (підрозділ 12.7). На основі закону дії та протидії до відповідної точки дроту прикладено протидію, яка зветься силою інерції  $\vec{F}_i$ .



### 26.5.3. Випадок системи точок

Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок  $A_1, \dots, A_n$  з масами  $m_1, \dots, m_n$  відповідно, які перебувають під дією рівнодійних активних сил  $\vec{F}_s$  та реакцій в'язей  $\vec{R}_s$ , мають вигляд:

$$m_s \vec{w}_s = \vec{F}_s + \vec{R}_s \quad (s = 1, \dots, n). \quad (26.30)$$

Ввівши силу інерції

$$(\vec{F}_s)_i = -m_s \vec{w}_s$$

точки  $A_s$ , рівняння руху (26.30) цієї точки можна подати так:

$$(\vec{F}_s)_i + \vec{F}_s + \vec{R}_s = 0.$$

Щоб перейти до матеріальної системи, потрібно підсумувати всі ці рівності:

$$\sum_{s=1}^n (\vec{F}_s)_i + \sum_{s=1}^n \vec{F}_s + \sum_{s=1}^n \vec{R}_s = 0. \quad (26.31)$$

Отже, **сили інерції точок матеріальної системи «зрівноважують» активні сили та реакції в'язей.**

Інакше: **якщо в певний момент часу зупинити систему і разом з цим прикласти до її точок сили інерції, не змінюючи активні сили, то система перебуватиме у рівновазі і реакції в'язей залишаться такими, якими вони були під час руху системи.**

Із властивостей внутрішніх сил випливає (підрозділ 23.2), що в рівності (26.31) зберігаються тільки зовнішні активні сили.

Ввівши головні вектори сил

$$\vec{F}_i = \sum_{s=1}^n (\vec{F}_s)_i, \quad \vec{F} = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s, \quad \vec{R} = \sum_{s=1}^n \vec{R}_s,$$

рівності (26.31) для матеріальної системи можна надати вигляду:

$$\vec{F}_i + \vec{F} + \vec{R} = 0,$$

який формально збігається з рівністю (26.29) для однієї точки.

Для головного вектора сил інерції точок системи знаходимо, врахувавши рівності (24.1) і (24.2), вирази:

$$\vec{F}_i = \sum_{s=1}^n (\vec{F}_s)_i = -\sum_{s=1}^n m_s \vec{w}_s = -\frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -m\vec{w}_c,$$

тобто **головний вектор сил інерції точок матеріальної системи дорівнює силі інерції центра мас системи за припущення, що в ньому зосереджена маса всієї системи.**

Знайдемо головний момент сил інерції точок системи відносно довільної точки  $O$ , врахувавши рівність (24.9):

$$\begin{aligned}\vec{M}_0^i &= \sum_{s=1}^n \vec{OA}_s \times (\vec{F}_s)_i = -\sum_{s=1}^n \vec{r}_s \times m_s \vec{w}_s = -\sum_{s=1}^n \vec{r}_s \times \frac{d(m_s \vec{v}_s)}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n \vec{r}_s \times m_s \vec{v}_s + \sum_{s=1}^n \frac{d\vec{r}_s}{dt} \times m_s \vec{v}_s = -\frac{d\vec{G}_0}{dt}.\end{aligned}$$

Таким чином, головний вектор сил інерції точок матеріальної системи дорівнює взятій з протилежним знаком похідній за часом кількості руху матеріальної системи, а головний момент сил інерції точок матеріальної системи відносно довільної нерухомої точки дорівнює взятій з протилежним знаком похідній за часом кінетичного моменту системи відносно цієї ж точки:

$$\vec{F}_i = -\frac{d\vec{Q}}{dt}, \quad \vec{M}_0^i = -\frac{d\vec{G}_0}{dt}.$$

У випадку **твердого тіла** за полюс  $O$  доцільно вибрати центр мас  $C$  тіла. Тоді

$$\vec{F}_i = -m\vec{w}_C, \quad \vec{M}_C^i = -\frac{d\vec{G}_C}{dt}.$$

Нехай система координат  $Cxyz$  жорстко зв'язана з тілом. Тоді

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{G}_C}{dt} &= \frac{d\vec{G}_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}_C, \quad \vec{G}_C = \vec{i}G_x + \vec{j}G_y + \vec{k}G_z, \\ \vec{M}_C^i &= \vec{i}M_x^i + \vec{j}M_y^i + \vec{k}M_z^i,\end{aligned}$$

причому координати вектора  $\vec{G}_C$  визначаються формулами (25.3). Звідси

$$\frac{d\vec{G}_C}{dt} = \vec{i} \frac{dG_x}{dt} + \vec{j} \frac{dG_y}{dt} + \vec{k} \frac{dG_z}{dt} + \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} M_x^i = -\frac{dG_x}{dt} - \omega_y G_z + \omega_z G_y, \\ M_y^i = -\frac{dG_y}{dt} - \omega_z G_x + \omega_x G_z, \\ M_z^i = -\frac{dG_z}{dt} - \omega_x G_y + \omega_y G_x. \end{cases}$$

Підставивши замість величин  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $G_z$  вирази (25.3), дістаємо остаточні вирази для координат головного моменту сил інерції твердого тіла відносно його центра мас:

$$\begin{aligned}
 M_x^i &= -I_x \varepsilon_x + I_{xy} \varepsilon_y + I_{xz} \varepsilon_z - \omega_y (I_z \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y) + \\
 &\quad + \omega_z (I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z - I_{xy} \omega_x), \\
 M_y^i &= -I_y \varepsilon_y + I_{yz} \varepsilon_z + I_{xy} \varepsilon_x - \omega_z (I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) + \\
 &\quad + \omega_x (I_z \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y), \\
 M_z^i &= -I_z \varepsilon_z + I_{xz} \varepsilon_x + I_{yz} \varepsilon_y - \omega_x (I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z - I_{xy} \omega_x) + \\
 &\quad + \omega_y (I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z),
 \end{aligned}$$

або

$$\begin{cases}
 M_x^i = -I_x \varepsilon_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - \\
 \quad - I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\
 M_y^i = -I_y \varepsilon_y + I_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{yx} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - \\
 \quad - I_{zx} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x, \\
 M_z^i = -I_z \varepsilon_z + I_{zx} (\varepsilon_x - \omega_z \omega_y) + I_{zy} (\varepsilon_y + \omega_z \omega_x) - \\
 \quad - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y.
 \end{cases}$$

#### 26.5.4. Історичний нарис

Свій знаменитий принцип Д'Аламбер сформулював у «Трактаті про динаміку» (1743 р.), коли йому було 26 років. Він міркував таким чином.

Нехай на точку  $M$  невідільної матеріальної системи (рис. 26.9) діє сила  $\vec{F}$  (рівнодійна всіх сил, прикладених до точки). Якби точка  $M$  була вільною, то під дією сили  $\vec{F}$  вона б рухалась із прискоренням  $\vec{w}$ , причому  $\vec{F} = m\vec{w}$ . Але ж точка невідільна, тому її фактичне прискорення  $\vec{w}_1$  відрізняється від прискорення  $\vec{w}$ . Силу  $\vec{F}_1 = m\vec{w}_1$  можна назвати рушійною силою. Розкладемо силу  $\vec{F}$  за правилом паралелограма на дві сили, одна з яких нехай дорівнює  $\vec{F}_1$ , тобто  $\vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_1$ . Цим

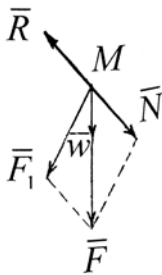


Рис. 26.9

самим інша сила  $\vec{N}$  (її можна назвати втраченою силою) визначається однозначно. Якби  $\vec{N} = 0$ , тоді б  $\vec{F} = \vec{F}_1$  і точка  $M$  рухалася б так, наче є вільною. Таким чином, наявність втраченої сили  $\vec{N}$  зумовлюється в'язями системи. Отже, є ще певна додаткова сила  $\vec{R} = -\vec{N}$ , тобто  $\vec{N} + \vec{R} = 0$ . Останньою рівністю виражається принцип Д'Аламбера: для кожної точки матеріальної системи сума втраченої сили і додаткової сили  $\vec{R}$ , що з'являється в результаті наявності в'язей, дорівнює нулю.

Зараз принцип Д'Аламбера формулюють дещо інакше, оскільки,  $\vec{F} - \vec{F}_1 + \vec{R} = 0$ ,  $\vec{F} + (-m\vec{w}_1) + \vec{R} = 0$ . Остання рівність  $\vec{N} = \vec{F} - \vec{F}_1$  збігається, за

своєю суттю, з (26.29). Отже, для матеріальної точки завжди дорівнює нулю сума таких сил: сила, що діє на точку, реакція в'язі і певна сила, модуль якої дорівнює добуткові маси точки на модуль фактичного прискорення і яка направлена в бік, протилежний прискоренню. Цю останню силу називають силою інерції.

Інше формулювання: якщо до матеріальної точки, що рухалась під дією сил, прикласти ще силу інерції, то далі точка буде рухатись рівномірно.

Є ще й таке формулювання: якщо рухому матеріальну точку запити, приклавши до неї всі сили, що діяли на неї до зупинки, і силу інерції, то точка більше рухатись не буде.

Застосування принципу Д'Аламбера перетворює будь-яку динамічну задачу на статичну: доповнення сил, що діяли на матеріальну точку, силами інерції перетворює систему сил на взаємно врівноважену.

### 26.5.5. Застосування до задачі про конічний маятник

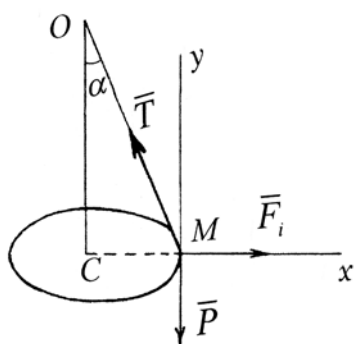


Рис. 26.10

Кулька  $M$  з масою  $m$  перебуває на нижньому кінці стержня довжиною  $OM = l$ , кут  $\alpha = \text{const}$  (рис. 26.10). Траєкторією точки  $M$  є коло радіуса  $CM = R = l \sin \alpha$ . Якщо до активної сили  $\vec{P} = -\vec{j}mg$  і реакції в'язі  $\vec{T}$  додати ще силу інерції  $\vec{F}_i = \vec{i}F_i$ ,  $F_i = \frac{mv^2}{R}$ , де  $v$  – швидкість точки  $M$  в її круговому русі, то відповідно до принципу Д'Аламбера три сили  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}$  і  $\vec{F}_i$  взаємно урівноважуються:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_i = 0.$$

В проекціях на осі  $Mx$ ,  $My$  (рис. 26.10) звідси отримуємо:

$$\begin{cases} -T \sin \alpha + \frac{mv^2}{R} = 0, \\ -mg + T \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Отже,

$$v^2 = \frac{R}{m} T \sin \alpha, \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Таким чином,

$$v^2 = \frac{R}{m} \frac{mg}{\cos \alpha} \sin \alpha = \frac{gl \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, \quad v = \sqrt{\frac{gl}{\cos \alpha}} \sin \alpha.$$

Якщо  $\tau$  – період руху, тобто час, за який кулька описує повне коло, то  $v\tau = 2\pi R$ , звідки

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi l \sin \alpha}{\sqrt{gl \sin \alpha}} \sqrt{\cos \alpha}, \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

## 26.6. Теорія відносного руху матеріальної точки

### 26.6.1. Основні положення механіки відносного руху точки

Часто виникає необхідність розглядати рух точки відносно систем відліку, що як завгодно переміщуються відносно інерціальної системи відліку. Такий рух точки називається *відносним*. Рух відносно інерціальної («нерухомої») системи відліку називається *абсолютним*.

Вивчення механічних явищ, пов'язаних з розглядом руху матеріальних точок і тіл відносно «абсолютної» системи координат, в багатьох випадках пов'язане зі значними незручностями. Навряд чи, наприклад, є сенс розвивати теорію маятника Фуко в «абсолютній» системі координат (з початком у центрі мас Сонячної системи і осями, направленими на нерухомі зорі). Система координат з початком у точці підвішування маятника і з осями, що не змінюють свого розташування відносно Землі, видається тут незрівнянно більш доцільною і природною. Однак така система координат є не «абсолютною», а рухомою неінерціальною системою

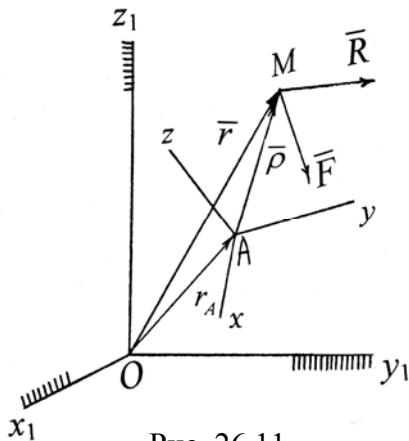


Рис. 26.11

координат. Її початок має ненульове «абсолютне» прискорення, а вона сама обертається з кутовою швидкістю Землі. Якщо рух даної системи відліку відносно інерціальної не є поступальним, рівномірним і прямолінійним, то ця система є неінерціальною, і в ній основні закони динаміки (і, зокрема, закон інерції) не мають місця. По суті, неінерціальною є і звична для нас система відліку, зв'язана з Землею. Між іншим, лише вельми «тонкі» досліди можуть виявити неінерціальність геоцентричної системи відліку. Якщо зв'язати систему відліку з ліфтом, що піднімається прискорено,

з кораблем, літаком, трамваєм чи автомобілем, що рухаються криволінійно, то неінерціальність виявиться настільки значною, що результати, отримані без урахування цієї неінерціальності, виявляться глибоко невірними.

Укажемо метод складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку  $Axyz$  (рис. 26.11), яка довільним чином переміщується відносно інерціальної системи відліку  $Ox_1y_1z_1$ . Диференціальні рівняння руху точки відносно системи  $Ox_1y_1z_1$  мають вигляд:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (26.32)$$

Тут  $\vec{F}$  – рівнодійна всіх активних сил,  $\vec{R}$  – рівнодійна реакцій в’язей,  $\vec{w} = \vec{w}_a$  – прискорення точки  $M$  відносно інерціальної системи відліку  $Ox_1y_1z_1$  (абсолютне прискорення). Для останнього згідно з формулою (18.15) маємо вираз

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c.$$

Тут  $\vec{w}_e, \vec{w}_r$  і  $\vec{w}_c$  є переносним, відносним і коріолісовим прискоренням відповідно, причому (розділ 18)

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r.$$

Тому рівняння (26.32) стає таким:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{J}_e + \vec{J}_c. \quad (26.33)$$

Величини

$$\vec{J}_e = -m\vec{w}_e, \quad \vec{J}_c = -m\vec{w}_c \quad (26.34)$$

природно назвати силами інерції переносного руху і коріолісовою силою інерції відповідно. У розділі 18 встановлено:

$$\vec{w}_e = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}).$$

Розглянемо важливі частинні випадки.

**1. Відшукаємо такі системи координат, в яких виконується перший закон динаміки.** Для цього достатньо поставити вимогу, щоб при відсутності сил точка рухалась рівномірно і прямолінійно. Із виразу (26.33) випливає, що для цього необхідно, щоб

$$\vec{J}_e + \vec{J}_c = 0. \quad (26.35)$$

Ця умова виконується, якщо  $\vec{J}_e = 0$ . Дійсно, в цьому випадку рухома система відліку повинна рухатись поступально, рівномірно і прямолінійно. Але тоді вектор її кутової швидкості  $\vec{\omega}_e = 0$ , звідки  $\vec{w}_c = 0$ ,  $\vec{J}_c = 0$ , тобто умова (26.35) виконується.

**2. Рухома система відліку також може бути інерціальною.** Це буде мати

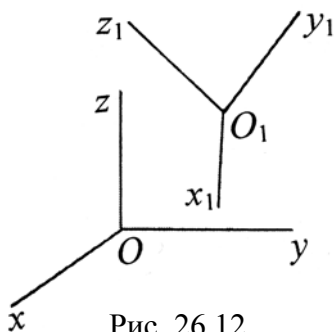


Рис. 26.12

місце, якщо рівняння (26.32) і (26.33) збігаються, тобто якщо  $\vec{w}_c = 0$ ,  $\vec{w}_e = 0$ . При довільному вигляді залежності  $\vec{v}_r(t)$  це можливо лише тоді, коли система  $Axyz$  рухається відносно системи  $Ox_1y_1z_1$  поступально (тоді  $\vec{\omega}_e = 0$ ) так, що рух її початку є рівномірним і прямолінійним (тоді  $\vec{w}_e = 0$ ).

Для інерціальності рухомої системи відліку достатньо, щоб її початок рухався зі сталою швидкістю, а кутова швидкість системи весь час дорівнювала нулю:  $\vec{w}_A = 0$ ,  $\vec{\omega}_e = 0$ . В цьому випадку

$\vec{J}_e = 0$ ,  $\vec{J}_c = 0$ , і рівняння (26.33) стає таким:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R}, \quad (26.36)$$

тобто в цьому випадку має місце і другий закон динаміки.

Об’єднуючи обидва випадки, можна сказати: **якщо існує хоча б одна система відліку, в якій виконуються закони Ньютона, то існує нескінченна множина таких систем. Всі вони рухаються відносно одна одної поступально,**

**рівномірно і прямолінійно.** З цього результату, в свою чергу, випливає, що *ніяким механічним експериментом неможливо виявити, перебуває дана система відліку у спокої чи здійснює поступальний, рівномірний і прямолінійний рух.* Останнє твердження має назву **принципу відносності у класичній механіці.**

Математична сутність принципу відносності зводиться до того, що **формули переходу від однієї інерціальної системи координат до іншої є лінійними.** Покажемо це. Нехай  $Oxyz$  і  $Ox_1y_1z_1$  (рис. 26.12) є дві інерціальні системи координат, причому

$$\begin{cases} x_1 = \xi + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y_1 = \eta + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z_1 = \zeta + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \quad (26.37)$$

$$\xi = a_1 + b_1t, \quad \eta = a_2 + b_2t, \quad \zeta = a_3 + b_3t,$$

$$a_{ij} = \text{const}, \quad a_i = \text{const}, \quad b_i = \text{const}.$$

Запишемо рівняння (20.12):

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z. \quad (26.38)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{y} + a_{13}\ddot{z}, \\ \ddot{y}_1 &= a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{y} + a_{23}\ddot{z}, \\ \ddot{z}_1 &= a_{31}\ddot{x} + a_{32}\ddot{y} + a_{33}\ddot{z}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= a_{11} \cdot m\ddot{x} + a_{12} \cdot m\ddot{y} + a_{13} \cdot m\ddot{z}, \\ m\ddot{y}_1 &= a_{21} \cdot m\ddot{x} + a_{22} \cdot m\ddot{y} + a_{23} \cdot m\ddot{z}, \\ m\ddot{z}_1 &= a_{31} \cdot m\ddot{x} + a_{32} \cdot m\ddot{y} + a_{33} \cdot m\ddot{z}. \end{aligned}$$

Використавши рівняння (26.38), отримаємо

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ m\ddot{y}_1 &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ m\ddot{z}_1 &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z. \end{aligned} \quad (26.39)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ Y_1 &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ Z_1 &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z. \end{aligned}$$

Система (26.39) набуває вигляду:

$$m\ddot{x}_1 = X_1, \quad m\ddot{y}_1 = Y_1, \quad m\ddot{z}_1 = Z_1,$$

тобто диференціальні рівняння (26.38) інваріантні відносно перетворення (26.37).

Розглянемо **відносний спокій точки**, коли  $\vec{v}_r = 0$ ,  $\vec{w}_r = 0$ . Тоді  $\vec{w}_c = 0$ ,  $\vec{J}_c = 0$ , тобто в стані відносного спокою точки має виконуватись умова

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{J}_e = 0. \quad (26.40)$$

При наданні точці відносної швидкості, по-перше, з'являється доданок  $\vec{J}_c = -2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$  і, по-друге, може змінитись доданок  $\vec{J}_e = -m\vec{w}_e$  (він залежить

від положення точки в рухомій системі відліку). Таким чином, при виконанні умови (26.40) після надання матеріальній точці початкової швидкості точка не буде рухатись рівномірно і прямолінійно, як це має місце в інерціальних системах відліку.

З умови (26.40) випливає, що рівняння відносного спокою складаються так само, як рівняння рівноваги в нерухомій (інерціальній) системі відліку, якщо до діючих на точку сил взаємодії з іншими тілами приєднати величину  $\vec{J}_e$ , що має розмірність сили.

Наголосимо на відмінності понять про умови рівноваги в інерціальній і неінерціальній системах відліку. В інерціальній системі відліку умова рівноваги  $\vec{F} + \vec{R} = 0$  означає, що точка може перебувати або у спокої, або в стані рівномірного прямолінійного руху. В неінерціальній системі відліку рівняння (26.40) визначає тільки умову відносного спокою точки. Якщо ж точка здійснює рівномірний і прямолінійний відносний рух ( $\vec{v}_r = \text{const} \neq 0$ ,  $\vec{w}_r = 0$ ), рухома система рухається непоступально ( $\vec{\omega}_e \neq 0$ ) і швидкість  $\vec{v}_r$  не колінеарна вектору  $\vec{\omega}_e$ , то діючі на точку сили задовольняють рівняння

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{J}_e + \vec{J}_c = 0.$$

### 26.6.2. Класифікація сил інерції

Наведений нижче погляд висвітлено в книзі [9]. Її автор О.Ю. Ішлінський – всесвітньо відомий механік, знаний оригінальними постановками задач і дотепними їх розв’язаннями як в теоретичній механіці, так і в механіці твердого деформівного тіла. Як ніхто інший, він своїми науковими здобутками підтвердив думку М.С. Жуковського про те, що не той механік, хто записує складні диференціальні рівняння руху, а той, хто вмie скласти такі диференціальні рівняння, які можна розв’язати. Основна частина життя О.Ю. Ішлінського пройшла в Москві. Вельми успішним є київський період, де О.Ю. Ішлінський створив потужну наукову школу і заклав підґрунтя важливих наукових напрямів.

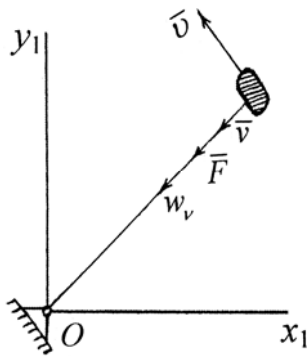


Рис. 26.13

Закони класичної механіки постулюються для руху тіл відносно певної «абсолютної» системи відліку, за яку можна, зокрема, прийняти тригранник, утворений осями деякої прямокутної декартової системи координат з початком у центрі мас Сонячної системи. Осі «абсолютної» системи не змінюють свою

орієнтацію відносно напрямів на віддалені зірки. Останні умовно вважаються нерухомими. В такій системі координат закони механіки Галілея–Ньютона справджуються з винятковою точністю.

Прийнято називати галілеєвою або інерціальною довільну систему відліку (систему координат і зв’язаний з нею годинник), що переміщується поступально, прямолінійно і рівномірно відносно «абсолютної» системи. Неважко показати, що рух тіл відносно довільної інерціальної системи підкоряється одним і тим самим за



формою запису законам Галілея–Ньютона. В цьому сенсі **всі інерціальні системи рівноправні** (принцип відносності Галілея, наведений вище). В таких рухомих системах не тільки коріолісові, а й переносні сили інерції дорівнюють нулю. Тому основне рівняння динаміки відносного руху (26.33) для галілеєвих систем за формою збігається з основним рівнянням динаміки (26.24) для руху відносно «абсолютної» системи координат.

Найменування інерціальної системи координат галілеєвою слугує скоріше меті додаткового увічнення імені геніального вченого, ніж відображує той факт, що ця система була запропонована самим Галілеєм саме в такому вигляді, як її тепер тлумачать. Г. Галілей у своїх знаменитих «Бесідах» вважає, що *всередині корабля, який рухається рівномірно в одному й тому ж напрямі, всі механічні явища (зокрема, падіння тіл) не відрізняються від аналогічних явищ, що відбуваються всередині нерухомого корабля, пришвартованого до пірсу*. Однак Галілею сферична форма Землі та факт її обертання були добре відомі. Отже, Галілей за інерціальну систему координат приймав, по суті, систему, що рівномірно обертається навколо Землі по великому колу.

О.Ю. Ішлінський класифікує всі сили на три групи:

- 1) ньютоніві (фізичні або природні) сили, які породжують прискорення відносно «абсолютної» системи координат;
- 2) даламберові сили інерції (сили інерції переносного руху);
- 3) ейлерові сили інерції (коріолісові сили інерції), які зумовлені вибором рухомої системи координат.

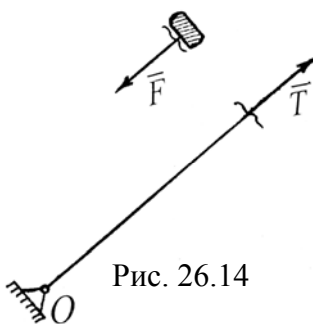


Рис. 26.14

Ньютонові сили зумовлюють прискорення тіл в «абсолютній» системі координат. В класичній механіці прийнято вважати, що ньютоніві сили зустрічаються в природі попарно і задовольняють третьому закону Ньютона (підрозділ 20.2). Тому, якщо за сукупністю цих властивостей ньютоніві сили називати силами реальними, то, як наслідок, сили інерції слід вважати нереальними, тобто фіктивними або псевдосилами. І все ж доцільність введення в класичну механіку сил інерції повністю виправдана практикою дослідження руху і рівноваги досить різноманітних тіл у природі та

у творіннях людини (зокрема, розрахунку складних машин, пристроїв, конструкцій і технологічних процесів).

Термін «ейлерові сили інерції» О.Ю. Ішлінський вводить у зв'язку з тим, що саме Л. Ейлер вперше вжив рухомі системи координат для розв'язування складних задач механіки, наприклад руху твердого тіла навколо нерухомої точки (розділ 16). До Л. Ейлера Христіан Гюйгенс застосував при вивченні удару куль рухомі системи координат, які поступально переміщувались зі сталою за модулем і напрямом швидкістю, тобто інерціальні.

**Даламберові і ейлерові сили інерції дорівнюють тим фізичним силам, якими слід доповнити вихідні фізичні сили, щоб відтворити відносний рух якої-небудь механічної системи як рух «абсолютний».** Для ілюстрації розглянемо приклад, наведений О.Ю. Ішлінським у книзі [8]. Прив'яжемо камінець до мотузки, і нехай вони здійснюють круговий рух. Що тут натягує мотузку, якщо не звертати увагу на силу ваги камінця (мотузка вважається невагомою) і опір середовища? Оскільки камінець рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  по

колу, він має нормальне (доцентрове) прискорення  $\vec{w}_v = \vec{v} \frac{v^2}{R}$ . Значить, мусить

бути сила  $m\vec{w}_v = \vec{v} m \frac{v^2}{R}$ , яка змушує камінь відповідно до законів механіки рухатись по колу. Ця сила фізична, вона породжена дією мотузки на камінь.

Позначимо її  $\vec{F} = \vec{v} m \frac{v^2}{R}$  (рис. 26.13). Проведемо мислений (уявний) переріз мотузки в безпосередньому околі біля камінця. За законом рівності і протилежної направленості дії та протидії існує сила дії камінця на мотузку. Це інша фізична сила, позначимо її  $\vec{T}$  (рис. 26.14). Саме вона і натягує мотузку:

$$\vec{T} = -\vec{F}, \quad T = F = m \frac{v^2}{R}.$$

Сила  $\vec{F}$  є доцентровою, сила  $\vec{T}$  є відцентровою (натяг мотузки).

На рис. 26.13  $Ox_1y_1$  є нерухомою системою координат. Візьмемо тепер систему координат  $Oxy$ , яка обертається разом з мотузкою і каменем з кутовою

швидкістю  $\omega = \frac{v}{R}$  (рис. 26.15).

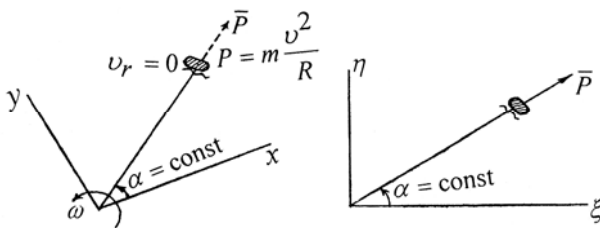


Рис. 26.15

Камінь відносно цієї системи не рухається (тобто перебуває у стані рівноваги), а мотузка натянута. Повторимо для такого частинного випадку те детальне міркування, яке наводилось вище для уточнення поняття сил інерції. Візьмемо

той же камінь і ту ж мотузку, але «прив'яжемо» їх до початку «абсолютної системи координат  $\xi\eta$ ». Тепер слід відтворити все те, що спостерігається в рухомій системі координат  $xу$ . Там же мотузка натянута і разом з камінцем перебуває у відносному спокої. Отже, потрібно, щоб мотузка і камінь були тепер нерухомими відносно абсолютної системи  $\xi\eta$ , а мотузка мала той же самий натяг. Для цього необхідно до камінця (мотузку для простоти вважається позбавленою маси) прикласти додаткову фізичну силу, яка відповідає переносній силі інерції при відносній рівновазі камінця в рухомій системі координат  $xу$ . Це буде сила, прикладена до камінця і направлена по продовженню радіуса від центра

обертання. Її модуль  $P = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$ . Сила  $\vec{P}$  називається всіма нами

відцентровою силою інерції. Камінь в абсолютній системі координат нерухомий. Отже, перед нами – задача статички. Відцентрова сила інерції, ставши тепер фізичною, натягує мотузку. Щоб знайти натяг, проведемо мислено переріз мотузки і розглянемо умову рівноваги уявних камінця і куска мотузки. На них діє відцентрова сила інерції (що стала фізичною силою) і сила дії на відрізаний разом з каменем кусок мотузки зі сторони відкинutoї її частини (вона залишилась фізичною силою). Відповідно до законів статички ці сили мусять бути рівними за модулями і протилежними за напрямками. Значить, натяг у мисленій мотузці

дорівнює відцентровій силі інерції. Так само має бути і з дійсними каменем і мотузкою, що обертаються по колу.

На рис. 26.15 зіставлено відносну (ліворуч) і абсолютну (праворуч) рівноваги. В системі координат  $xu$  камінь і мотузка перебувають у відносному спокої ( $v_r = 0$ ). Сила  $\vec{P}$  уявна, до каменю вона не прикладена і використовується

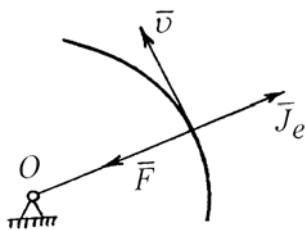


Рис. 26.16

лише для підрахунку зусилля, що виникає у мотузці. Праворуч  $\vec{P}$  – «справжня» фізична (або ньютонова) сила, направлена також уздовж мотузки. Відносний спокій камінця можна «змодельовати» (поставити у відповідність) рівновагою іншого такого самого камінця, з такою самою мотузкою в системі координат  $\xi\eta$ , приклавши до нього силу. Вона діє на іншу мотузку саме так, як рухомий камінь на рисунку зліва, і утворює з віссю  $\xi$  постійний кут  $\alpha$  такий самий, як і сила  $\vec{P}$  з віссю  $x$ . Натяг обох

мотузок, зрозуміла річ, один і той самий.

Для розв'язання задачі визначення натягу нитки, що утримує рухому матеріальну точку на колі, за методом Д'Аламбера розглянемо рівновагу двох сил: натягу нитки  $\vec{F}$  і фізичної сили, що дорівнює даламберовій силі інерції  $\vec{J}_e$  (рис. 26.16). Нитка розривається, коли ця фізична сила стане достатньо великою. Слід, однак, пам'ятати, що «д'аламберова рівновага» є лише уявною моделлю або, точніше, розрахунковою схемою істинного «абсолютного» руху і ніяких фізичних даламберових сил насправді не існує. Обрив нитки виникає внаслідок недостатньої міцності матеріалу, яка не дає змогу здійснити заданий рух з великими прискореннями. Відповідні внутрішні напруги, зрозуміла річ, можна повністю знайти на підставі законів механіки пружного або пружно-пластичного тіла і без будь-якого залучення даламберових сил інерції.

## 26.7. Дійсні та віртуальні переміщення точки

### 26.7.1. Диференціал і варіація функції

Нехай графіком функції  $f(x)$  є крива лінія  $(L)$ , рівняння якої має вигляд  $y = f(x)$  (рис. 26.17). Візьмемо на лінії  $(L)$  точку  $M(x, y)$ . Приріст  $\Delta x = dx$  незалежної змінної  $x$  викликає приріст  $\Delta y$  функції. На кривій  $(L)$  одержуємо нову точку  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ , де  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Якщо функція  $f(x)$  диференційовна (тобто крива  $(L)$  є гладенькою), то

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad o(\Delta x) = \alpha \cdot \Delta x,$$

де  $\alpha$  – нескінченно мала величина, коли  $\Delta x \rightarrow 0$ . Диференціал  $dy = f'(x)dx$  функції  $f(x)$  є головною частиною приросту  $\Delta y$  функції, зумовленого приростом незалежної змінної функції. Він є приростом ординати дотичної до графіка функції в точці  $M$ . Різниця між приростом функції та диференціалом функції є нескінченно малою величиною вищого порядку малості, ніж  $\Delta x$ .

Звичайно, можна змінювати (варіювати) не аргумент функції, а саму функцію, залишаючи її аргумент незмінним. Одержимо нову криву лінію  $(L_1)$ ,

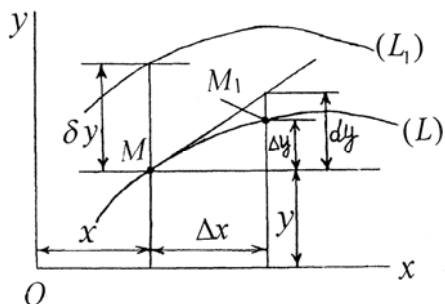


Рис. 26.17

яка є графіком функції  $f_1(x)$ , тобто рівняння лінії  $(L_1)$  має вигляд  $y = f_1(x)$ . Варіацією  $\delta y$  функції  $f(x)$  називається приріст функції, зумовлений зміною вигляду функції, при фіксованому значенні аргументу:  $f_1(x) = f(x) + \delta y$ ,  $\delta y = f_1(x) - f(x)$ . Правила варіювання функцій зовні подібні до правил диференціювання функції. Наприклад, для функції  $f(x, y, z)$  маємо:

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz,$$

$$\delta f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \delta z.$$

### 26.7.2. Означення дійсних і віртуальних переміщень точки та їх знаходження при стаціонарних і нестаціонарних в'язях

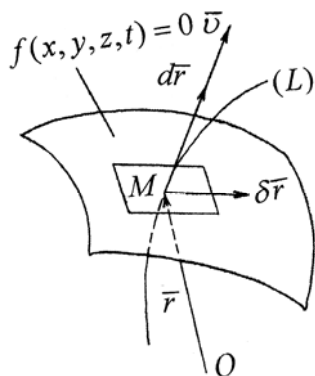


Рис. 26.18

На основі математичних операцій  $d$  (диференціал) і  $\delta$  (варіація) в механіці вводять два види переміщення точки: дійсне і віртуальне (лат. *virtualis* – можливий).

Нехай  $Oxyz$  – інерціальна система координат, а рух точки  $M(x, y, z)$  обмежено нестаціонарною в'яззю

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (26.41)$$

Конкретним прикладом такої в'язі є (26.5).

**Дійсне** або істинне, справжнє переміщення точки (позначається

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz = \{dx, dy, dz\}) \quad - \quad \text{це її}$$

переміщення, що здійснюється під дією

прикладених сил з дотриманням накладених на точку в'язей і відбувається з плином часу. Довжину відповідного відрізка часу позначимо  $dt$ . Якщо точка  $M$  в момент часу  $t$  має швидкість  $\vec{v}$  і описує у просторі траєкторію  $(L)$  (рис. 26.18), то дійсне переміщення визначається виразом

$$d\vec{r} = \vec{v}dt. \quad (26.42)$$

Проекції дійсного переміщення на декартові прямокутні осі дорівнюють

$$dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt, \quad dz = \dot{z}dt. \quad (26.43)$$

Дійсне переміщення точки направлене по дотичній до траєкторії ( $L$ ) точки. В момент часу  $t$  множина точок  $M(x, y, z)$ , координати яких задовольняють рівнянню (26.41), утворює поверхню. В результаті дійсного переміщення  $d\vec{r}$  точка  $M$  за час  $dt$  перейде на нову поверхню

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0. \quad (26.44)$$

Виявилось, що поряд з дійсними переміщеннями  $d\vec{r}$  є сенс розглядати уявні, мислені, можливі або віртуальні переміщення  $\delta\vec{r}$ , які не порушують в'язі і відбуваються при фіксованому часі  $t$ . Ці переміщення так само, як і  $d\vec{r}$ , є малими. Проекції віртуального переміщення  $\delta\vec{r}$  точки на осі координат є варіаціями координат точки:

$$\delta\vec{r} = \vec{i} \delta x + \vec{j} \delta y + \vec{k} \delta z = \{\delta x, \delta y, \delta z\},$$

причому  $\delta t = 0$ .

Переміщення	Ознаки
$d\vec{r}$ (дійсне)	1. Відбувається під дією сил. 2. Відбувається з дотриманням в'язей. 3. Відбувається в часі: $dt \neq 0$ .
$\delta\vec{r}$ (віртуальне)	1. Відбувається з дотриманням в'язей. 2. Відбувається у фіксований момент часу ( $\delta t = 0$ ).

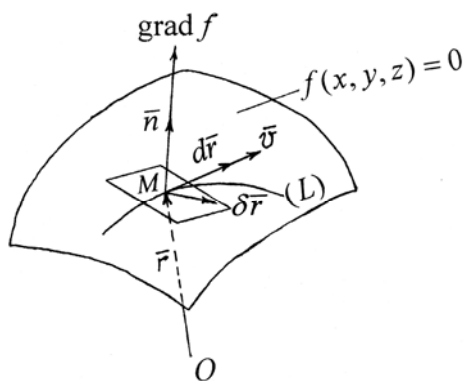


Рис. 26.19

Очевидно, що не будь-яке, навіть мале переміщення  $\delta\vec{r}$  можна здійснити, не порушуючи в'язь. Вияснимо, яке і в якому сенсі мале переміщення  $\delta\vec{r}$  не порушує в'язь. Після переміщення на  $\delta\vec{r}$  точка займе нове положення, що визначається радіусом-вектором  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ . В новому положенні  $M_1$  точка має координати  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ , які задовольняють рівнянню (26.41), тобто

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0.$$

Розкладемо ліву частину в ряд Тейлора в околі точки  $M$ :

$$f(x, y, z, t) + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \delta z + \dots = 0.$$

Врахувавши рівність (24.41), отримаємо:

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \delta z + \dots = 0. \quad (26.45)$$

**Віртуальним переміщенням** точки назвемо таке мале переміщення  $\delta\vec{r}$ , мислено здійснюване із даного положення при фіксованому часі  $t$ , яке з **точністю до членів першого порядку малості** не порушує в'язь. З цього означення випливає, що віртуальне переміщення  $\delta\vec{r} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}$  повинне задовольняти рівнянню, яке одержується із (26.45) відкиданням усіх членів вищого порядку. Таким чином, проекції  $\delta x, \delta y, \delta z$  віртуального переміщення  $\delta\vec{r}$  задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \delta z = 0, \quad (26.46)$$

тобто вони перетворюють на нуль першу варіацію лівої частини рівняння в'язі (26.41) за умови, що час не варіюється:

$$\delta f(x, y, z, t) = 0, \quad \delta t = 0 \quad (26.47)$$

Згадавши градієнт скалярної функції, введений у підрозділі 26.3, рівняння (26.47) можна подати так:

$$\text{grad } f \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

При фіксованому значенні часу  $t$  рівняння в'язі (26.41) визначає у просторі деяку поверхню (рис. 26.18). Градієнт функції  $f(x, y, z, t)$  є вектором, направленим по нормалі до поверхні в точці  $M$ . Оскільки  $\text{grad } f \perp \delta \vec{r}$ , то віртуальне переміщення  $\delta \vec{r}$  точки лежить в дотичній площині, проведеній до поверхні (26.41) при фіксованому часі  $t$  в даній точці  $M(x, y, z)$ . Цей результат має таке кінематичне пояснення: при  $\delta t = 0$  точка може рухатись лише по поверхні, тому переміщення  $\delta \vec{r}$  мусить бути дотичним до траєкторії і, отже, лежати в дотичній площині.

Щоб встановити співвідношення між дійсними і віртуальними переміщеннями, слід розглядати окремо випадки стаціонарних і нестаціонарних в'язей.

При **стаціонарній в'язі** рівняння (26.6) визначає поверхню, яка не змінюється з плином часу (рис. 26.19). Траєкторія ( $L$ ) точки  $M$  повністю лежить на цій поверхні. Дотична площина до поверхні в точці  $M$  містить в цьому випадку швидкість  $\vec{v}$  точки  $M$ , і, отже, завжди можна побудувати одне віртуальне переміщення  $\delta \vec{r}$ , яке буде збігатися з дійсним переміщенням  $d\vec{r}$ . Таким чином, **у випадку стаціонарних в'язей дійсне переміщення точки є одним з віртуальних переміщень цієї точки**. Такий результат можна отримати також і з аналітичних міркувань. Аналогічно (26.46) проєкції  $dx, dy, dz$  дійсного переміщення повинні задовольняти умові

$$df(x, y, z) \equiv \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} dz = 0. \quad (26.48)$$

Ця умова збігається з умовою (26.46), якщо в останній покласти  $dx = \delta x, dy = \delta y, dz = \delta z$ .

Для математичного маятника (рис. 22.18) сталої довжини  $l = OM$  за припущення, що нитка весь час натягнута, рівняння в'язі є

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Це стаціонарна утримуюча голономна в'язь типу (26.6). При плоскому русі точки  $M$  поверхня, яка визначається рівнянням в'язі, вироджується у криву лінію – траєкторію точки  $M$ . Ця точка рухається вздовж кола радіуса  $l$ . З положення  $M$ , яке займає точка в даний момент часу  $t$ , мислено надамо мале переміщення  $\delta \vec{r}$ , направлене по дотичній до кола. Це й буде віртуальне переміщення  $\delta \vec{r}$  математичного маятника. Змінюючи модуль і напрям вздовж дотичної вектора  $\delta \vec{r}$ , можна здійснити нескінченну кількість віртуальних переміщень. Дійсне

переміщення  $d\vec{r}$  направлено по дотичній до траєкторії. Воно збігається з одним із віртуальних переміщень (рис. 26.20).

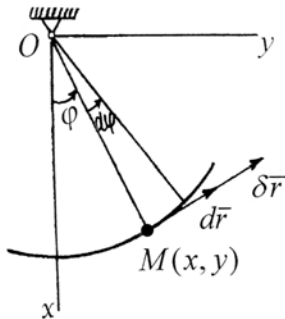


Рис. 26.20

При **нестационарній в'язі дійсне переміщення не є частинним випадком віртуального**: воно не збігається з жодним віртуальним переміщенням. Наведемо два доведення цього твердження.

**Геометричне доведення.** Віртуальне переміщення точки розглядається при фіксованому значенні часу  $t$ , тобто при миттєво зупинених в'язях. Оскільки при дійсному переміщенні  $d\vec{r}$  точка  $M$  за час  $dt$  перейде на нову поверхню (26.44), то дійсне переміщення  $d\vec{r}$  не збігається з жодним із віртуальних переміщень  $\delta\vec{r}$ , які лежать у дотичній площині до поверхні (26.41).

**Аналітичне доведення.** Проекції  $dx, dy, dz$  дійсного переміщення  $d\vec{r}$  задовольняють умову

$$df(x, y, z) \equiv \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} dz + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} dt = 0. \quad (26.49)$$

Оскільки  $\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \neq 0$ , то (26.49) не може збігатися з (26.48) при  $dx = \delta x, dy = \delta y, dz = \delta z$ .

Вище вказувалось, що латинське слово *virtualis* означає можливий, тому інколи замість «віртуальне переміщення» говорять «можливе переміщення».

Однак якщо користуватись терміном «можливе переміщення», то для нестационарних в'язей ми маємо сказати: «дійсне переміщення є неможливим» (оскільки  $d\vec{r}$  не збігається з жодним із  $\delta\vec{r}$ ). Українською мовою така фраза звучить неприродно.

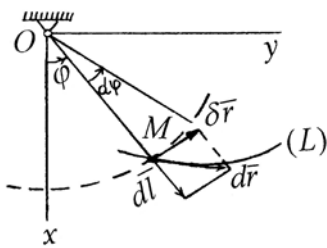


Рис. 26.21

Як приклад, візьмемо математичний маятник, довжина якого змінюється за певним законом:  $l = l(t)$ . Для визначеності будемо вважати, що вона збільшується (рис. 26.21). Рівняння в'язі є

$$x^2 + y^2 = l^2(t).$$

Це нестационарна голономна в'язь. Зафіксуємо час  $t$  і через дане положення  $M$  проведемо коло, що визначається рівнянням в'язі при  $t = \text{const}$ . На рис. 26.21 воно зображене штриховою лінією. На відміну від попереднього випадку при дійсному русі за час  $dt$  змінюється не тільки кут  $\varphi$  на величину  $d\varphi$ , але змінюється також і довжина нитки на величину  $dl$ . На цьому ж рисунку суцільною лінією зображено ділянку справжньої траєкторії  $(L)$  маятника при збільшеній його довжині на величину  $dl$  і збільшеному на  $d\varphi$  значенні кута  $\varphi$ . Дійсне переміщення  $d\vec{r} = \delta\vec{r} + d\vec{l}$  маятника не збігається з жодним із віртуальних переміщень  $\delta\vec{r}$ .

## 26.8 Віртуальне переміщення системи матеріальних точок

Розглянемо систему матеріальних точок  $M_1, M_2, \dots, M_N$ , положення яких визначається радіусами-векторами  $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ ,  $\dots$ ,  $\vec{r}_N = \{x_N, y_N, z_N\}$ . Швидкості і віртуальні переміщення кожної з точок є:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 &= \{\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1\}, \dots, \vec{v}_N = \dot{\vec{r}}_N = \{\dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N\}, \\ \delta\vec{r}_1 &= \{\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1\}, \dots, \delta\vec{r}_N = \{\delta x_N, \delta y_N, \delta z_N\}.\end{aligned}$$

Нехай ця система  $N$  матеріальних точок підпорядкована  $k$  голономним нестационарним утримуючим в'язям

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

або

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (26.50)$$

На підставі рівності (26.47) віртуальним переміщенням матеріальної системи називається таке мислене мале переміщення  $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N$  окремих її точок із даного положення при фіксованому часі  $t$ , при якому справедливі рівності

$$\delta f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

тобто

$$\sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \delta x_s + \frac{\partial f_i}{\partial y_s} \delta y_s + \frac{\partial f_i}{\partial z_s} \delta z_s \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (26.51)$$

Крім (або замість) геометричних в'язей (26.50), матеріальна система може бути підпорядкована  $m$  диференціальним в'язям

$$\begin{aligned}& \varphi_{j1}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{x}_1 + \psi_{j1}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{y}_1 + \\ & + \omega_{j1}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{z}_1 + \dots + \varphi_{jN}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{x}_N + \\ & + \psi_{jN}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{y}_N + \omega_{jN}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{z}_N + \\ & + \varphi_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}& \sum_{s=1}^N [\varphi_{js}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{x}_s + \\ & + \psi_{js}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{y}_s + \\ & + \omega_{js}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \dot{z}_s] + \\ & + \varphi_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \\ & (j = 1, 2, \dots, m).\end{aligned} \quad (26.52)$$

В цьому випадку проекції віртуального переміщення мають задовольняти додатковим умовам

$$\sum_{s=1}^N (\varphi_{js} \delta x_s + \psi_{js} \delta y_s + \omega_{js} \delta z_s) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (26.53)$$



Умови, за яких в'язі (26.51) є неголономними, наведено в монографії [15].

### 26.9. Степені вільності системи матеріальних точок

Вільне тверде тіло (підрозділи 17, 25.7) може, взагалі, переміщуватись у напрямках трьох взаємно перпендикулярних осей і повертатись навколо них. Будемо вважати, що кожному з таких переміщень відповідає степінь вільності. Тоді сумарна кількість степенів вільності вільного твердого тіла дорівнюватиме шести. Математичний маятник (підрозділ 22.7) має один степінь вільності.

Наявність  $k$  голономних і (або)  $t$  диференціальних в'язей спричиняє принципову різницю між вільними і невідільними системами, яка полягає в тому, що внаслідок існування обмежень (26.51), (26.52) у випадку невідільних механічних систем певна кількість варіацій декартових координат є незалежними, тоді як решта варіацій (лінійно) виражаються через них. **Кількістю степенів вільності як голономних, так і неголономних матеріальних систем називається кількість незалежних варіацій координат.**

Для голономних систем кількість ступенів вільності дорівнює кількості незалежних декартових координат. Зокрема, для системи із в'язями (26.50) вона дорівнює  $3N - k$ . Для неголономних систем кількість ступенів вільності менша кількості незалежних координат.

Крім декартових координат, положення матеріальної системи можна визначити іншими величинами (параметрами). Кількістю ступенів вільності матеріальної системи, підпорядкованої голономним в'язям, називається кількість незалежних параметрів, які однозначно визначають положення точок системи. Наприклад, залізничне колесо, яке котиться без ковзання по прямолінійній рейці (рис. 25.10), має один степінь вільності. За незалежний параметр, який визначає положення точок колеса, доцільно вибрати кут  $\varphi$ . Тоді абсциса центра колеса однозначно виражається через  $\varphi$ , а ордината і апліката мають сталі значення (підрозділ 25.12):  $x_C = R\varphi$ ,  $y_C = 0$ ,  $z_C = R$ . Кут  $\varphi$  як функція часу визначається з динамічного рівняння, яке є диференціальним рівнянням (другого порядку) обертального руху колеса навколо своєї осі. При рівномірному прямолінійному русі колеса  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ .

Кількість степенів вільності обруча, диска, кулі, тора, які котяться без ковзання по площині або поверхні, дорівнює трьом [18, 28].

### 26.10. Віртуальна робота сил

Нехай  $\vec{F}_s$  є рівнодійною активних сил, прикладених до точки  $M_s$  ( $s = 1, \dots, N$ ). Будемо вважати, що сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$  не змінюються на віртуальних переміщеннях  $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_N$  точок системи. Віртуальною роботою заданих сил називається величина

$$\delta A_F = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta\vec{r}_s. \quad (26.54)$$

### 26.11. Ідеальні в'язі

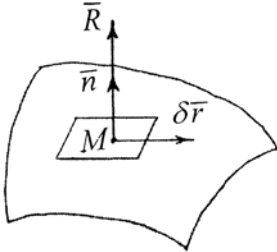


Рис. 26.22

Позначимо через  $\vec{R}_s$  рівнодійну всіх реакцій в'язей, прикладених до точки  $M_s$ . **Ідеальними в'язями** називаються такі, для яких сума робіт усіх реакцій в'язей на будь-якому віртуальному переміщенні системи невід'ємна:

$$\delta A_R = \sum_{s=1}^N \vec{R}_s \cdot \delta \vec{r}_s \geq 0. \quad (26.55)$$

**Приклад 1.** Нехай в'язю для точки  $M$  (рис. 26.22) є абсолютно гладенька поверхня (26.41) (ілюстрацією може бути шайба, що рухається по абсолютно гладенькому льоду). Реакція такої в'язі направлена по нормалі до поверхні:  $\vec{R} = \vec{n}R$ . Тому  $\vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0$ . Дещо розширюючи трактування ідеальних в'язей, їх іноді називають в'язями без тертя.

**Приклад 2.** Аналогічного типу в'язі зустрічаються в задачах дослідження кочення без ковзання одного абсолютно твердого тіла по поверхні іншого [1, 2, 4,

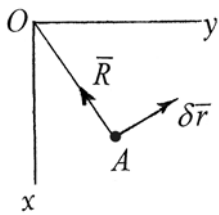


Рис. 26.23

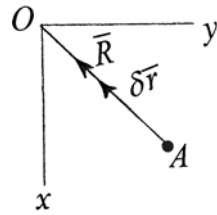


Рис. 26.24

5]. Оскільки обидва тіла абсолютно тверді, то тертя кочення відсутнє (підрозділ 9.4). Нехай  $K$  є точкою контакту (рис. 15.10). Відсутність ковзання означає, що вона є миттєвим центром швидкостей (підрозділ 15.5), тобто  $\delta \vec{r}_K = 0$ .

Якщо  $\vec{R}$  – реакція в'язі, то  $\vec{R} \cdot \delta \vec{r}_K = 0$ . За наявності тертя кочення реакція в'язі не була б прикладеною в точці  $K$  та її робота на віртуальному переміщенні не була б нульовою.

**Приклад 3.** Нерозтягуваний невагомий стержень  $OA$  (рис. 26.23) довжиною  $l$  накладає на точку  $A(x, y)$  в'язь

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (26.56)$$

Звідси

$$x \cdot \delta x + y \cdot \delta y = 0. \quad (26.57)$$

Якщо  $\vec{r} = \vec{OA} = \vec{i}x + \vec{j}y$ ,  $\delta \vec{r} = \vec{i}\delta x + \vec{j}\delta y$ , то рівність (26.57) набуває вигляду  $\vec{r} \cdot \delta \vec{r} = 0$ , тобто  $\vec{r} \perp \delta \vec{r}$ . Оскільки  $\vec{R} = -\lambda \vec{r}$ , де  $\lambda > 0$ , то виконується умова

$$\vec{r} \cdot \delta \vec{r} = 0, \quad (26.58)$$

тобто маємо ідеальну стаціонарну утримуючу в'язь.

**Приклад 4.** Замінімо стержень гнучкою ниткою (рис. 26.24). При її зминанні

$$x^2 + y^2 - l^2 < 0, \quad (26.59)$$

звідки

$$x \cdot \delta x + y \cdot \delta y < 0, \quad \vec{r} \cdot \delta \vec{r} < 0,$$

тобто вектори  $\vec{r}$  і  $\delta\vec{r}$  утворюють тупі кути. В'язь (26.58) є неутримуючою. При наданні точкам системи віртуальних переміщень, які звільнюють ці точки від в'язей, реакції в'язей зберігаються такими ж, якими вони були до залишення точками системи в'язей. Напрями векторів  $\vec{r}$  і  $\delta\vec{r}$  протилежні, тобто вектори  $\vec{R}$  і  $\delta\vec{r}$  направлені в один бік:

$$\vec{R} \cdot \delta\vec{r} > 0. \quad (26.60)$$

### 26.12. Принцип віртуальних переміщень

Узагальнюючи досягнення попередників, французький математик і механік Ж. Лагранж у 1788 р. сформулював принцип, вельми зручний для застосування до різноманітних механічних систем. Цей принцип став результатом осмислення дії відомих ще в стародавньому світі популярних механізмів – важелів, поліспаствів, похилих площин тощо, а потім – досліджень уже в середні віки західноєвропейських учених Г. Убальді, Г. Галілея, Е. Торрічелі, Р. Декарта, Д. Валліса, І. Бернуллі. Згадані механізми успішно використовувались при будівництві фортифікаційних споруд, артилерії, кораблів, пірамід, замків.

Принцип Лагранжа встановлює умови рівноваги системи матеріальних точок з ідеальними стаціонарними в'язями, хоча у XVIII ст. чіткого уявлення про ідеальні в'язі не існувало. Тривалий час це був саме принцип, тобто положення, яке приймається без доведення («на віру»). Зараз віддають перевагу виведенню всіх умов цього принципу, користуючись законами Ньютона та їх наслідками. Іншими словами, принцип почали розглядати як теорему. Сам Ж. Лагранж у двотомнику «Mecanique Analytique» (Paris, 1788) писав, що цей принцип, хоч і дуже простий, не є очевидним настільки, щоб його можна було приймати як аксіоматичне твердження без доведення. Він базується на принципі дії важеля, відомого ще Архімеду (287 – 212 рр. до н.е.), і на аксіомі паралелограма сил. Принципом віртуальних переміщень даються умови «рівноваги системи матеріальних точок». Лапки поставлено тому, що за своєю суттю термін «рівновага» у буквальному розумінні скоріше стосується сил, аніж матеріальних точок. Зазвичай рівновагу матеріальних точок трактують як спокій. Проте поняття рівноваги не рівнозначне поняттю «спокій»: якщо сили, прикладені до вільної матеріальної точки, урівноважуються, то це означає лише те, що сума сил дорівнює нулю. З цього не випливає, що точка залишається у стані спокою: вона може також рухатись рівномірно і прямолінійно. Щоб матеріальна точка перебувала у спокої, умови, накладені на сили, необхідно доповнити вимогою рівності нулю початкової швидкості точки. Сукупність цих двох умов на підставі закону інерції буде достатньою.

Однак за багатовіковою традицією, в динаміці слово «рівновага» вживається не тільки стосовно сил, а й системи матеріальних точок. При цьому під словами «рівновага системи матеріальних точок» мають на увазі стан спокою системи. При такому трактуванні цих слів найбільш загальні умови рівноваги (тобто спокою) системи матеріальних точок можна сформулювати так:

*для рівноваги системи матеріальних точок, підпорядкованої ідеальним стаціонарним геометричним в'язям, необхідно і достатньо, щоб суми всіх сил,*

що діють на кожну точку системи, і швидкості всіх точок системи в початковий момент часу дорівнювали нулю:

$$\vec{F}_s + \vec{R}_s = 0, \quad (26.61)$$

$$\vec{v}_s|_{t=0} = 0 \quad (s = 1, \dots, N). \quad (26.62)$$

Рівновага систем з нестационарними геометричними в'язями можлива лише у виняткових випадках, коли крім звичайних умов рівноваги виконуються принаймні дві додаткові умови:

1) на кожній в'язі є точки з незалежними від часу координатами («стаціонарні», або «нерухомі» точки),

2) всі матеріальні точки системи містяться в «стаціонарних» точках нестационарних в'язей.

Прикладом слугує в'язь

$$xf_1(t) + yf_2(t) + zf_3(t) = 0,$$

для якої точка  $O(0, 0, 0)$  є «стаціонарною».

**Означення.** Положенням рівноваги системи називається таке положення, в якому система перебуватиме весь час, якщо в початковий момент часу вона перебувала в ньому і швидкості всіх її точок дорівнювали нулю, тобто це такий рух, для якого

$$\vec{r}_s(t) = (\vec{r}_s)_0 = \text{const} \quad (s = 1, \dots, N).$$

Умови (26.61) мають одну істотну ваду: вони вимагають врахування всіх сил (включаючи, звісна річ, і реакції в'язей), що діють на кожну точку системи. За таких обставин ці умови, крім рідкісних випадків, не можуть практично використовуватись для дослідження рівноваги матеріальної системи, але ними можна скористатись для доведення інших, простіших умов рівноваги системи матеріальних точок. Пам'ятаючи про анахронізм терміна, доведемо твердження, наведене нижче.

**Теорема (принцип віртуальних переміщень):** щоб система матеріальних точок, підпорядкована ідеальним стаціонарним голономним в'язям, перебувала у рівновазі, необхідно і достатньо недодатності роботи всіх активних сил на довільному віртуальному переміщенні системи і рівності нулю в початковий момент часу швидкостей усіх точок:

$$\delta A_F \equiv \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta \vec{r}_s \leq 0, \quad (26.63)$$

$$\vec{v}_s|_{t=0} = 0 \quad (s = 1, \dots, N). \quad (26.64)$$

**Доведення. Необхідність.** Нехай система перебуває у рівновазі; отже, маємо, зокрема, рівності (26.61). Із даного положення надамо системі віртуальне переміщення  $\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_N$ . Скалярно помножимо обидві частини рівностей (26.61) на  $\delta \vec{r}_s$  і підсумуємо по всіх  $s$ :

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta \vec{r}_s + \sum_{s=1}^N \vec{R}_s \cdot \delta \vec{r}_s = 0.$$

Врахувавши умови (26.55), одержимо:

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta \vec{r}_s = -\sum_{s=1}^N \vec{R}_s \cdot \delta \vec{r}_s \leq 0.$$

Умова  $\delta A_F \leq 0$  збігається з (26.63).

Достатність умови (26.63) (разом із (26.64)) для рівноваги системи доведемо методом від протилежного. Припустимо, що незважаючи на (26.63), система під дією прикладених сил почала рухатись зі стану спокою. Оскільки в'язі стаціонарні, то дійсне переміщення системи за час  $dt$  буде збігатися з одним із віртуальних переміщень. Переміщення окремих точок системи із стану спокою буде направлено по рівнодійній сил  $\vec{F}_s$  і  $\vec{R}_s$ . Оскільки система отримала додатний приріст кінетичної енергії, то віртуальна робота всіх діючих на систему активних і реактивних сил (яка в даному випадку є роботою на дійсних переміщеннях) додатна:

$$\Delta T = \sum_{s=1}^N (\vec{F}_s + \vec{R}_s) \cdot \delta \vec{r}_s > 0 \Rightarrow \delta A_F + \delta A_R > 0.$$

Звідси випливає, що при утримуючих в'язях (для яких виконується умова  $\delta A_R = 0$ )  $\delta A_F > 0$ , що суперечить необхідній умові (26.63).

Отже, при утримуючих ідеальних в'язях

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta \vec{r}_s = 0. \quad (26.65)$$

Рівність (26.65) виражає собою **принцип віртуальних переміщень**:

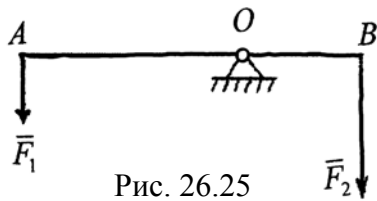


Рис. 26.25

щоб певне (сумісне із в'язями) положення системи було положенням рівноваги, необхідно і достатньо, щоб у цьому положенні сума робіт активних сил на довільних віртуальних переміщеннях системи дорівнювала нулю.

Зазвичай принцип віртуальних переміщень застосовують при стаціонарних в'язях. Тоді

термін “сумісне із в'язями положення” означає, що положення системи задовольняє скінченні в'язі. Диференціальні ж в'язі, будучи лінійними і однорідними відносно швидкостей, автоматично задовольняються, оскільки  $\vec{v}_j = 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Якщо в'язі нестаціонарні, то термін “сумісне із в'язями положення” означає, що вони задовольняються при будь-якому значенні часу  $t$ , якщо в них покласти  $\vec{r}_s = (\vec{r}_s)_0$  і  $\vec{v}_s = 0$  ( $s = 1, \dots, N$ ). У цьому випадку при різних  $t$  можуть бути різними і віртуальні переміщення  $\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_N$ . Взагалі  $\vec{F}_j = \vec{F}_j(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Припускається, що рівність (26.65) має місце при будь-якому значенні  $t$ , якщо у виразах для  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$  покласти всі  $\vec{r}_k = (\vec{r}_k)_0$  і всі  $\vec{v}_s = 0$ .

У простих частинних випадках принцип віртуальних переміщень був відомий ще за часів Г. Галілея під назвою «**золотого правила механіки**», обґрунтування якого Г. Галілей приписував Арістотелю. В загальному формулюванні принцип віртуальних переміщень зустрічається в 1717 р. у І. Бернуллі. Викладемо суть правила.

Нехай на кінцях невагомому важелю (рис. 26.25) або блока (без тертя) перебувають у рівновазі два вантажа в точках  $A$  і  $B$  під дією сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ . Модулі дотичних (до можливих траєкторій) складових цих сил позначимо  $F'_1$  і  $F'_2$ , а

модулі відповідних віртуальних переміщень позначимо  $\delta l_A$  і  $\delta l_B$ . З рівності (26.65) маємо  $F'_1 \cdot \delta l_A = F'_2 \cdot \delta l_B$ , тобто

$$\frac{F'_1}{F'_2} = \frac{\delta l_B}{\delta l_A}.$$

Виграш у силі компенсується програшем у переміщенні – це і є «золоте правило механіки».

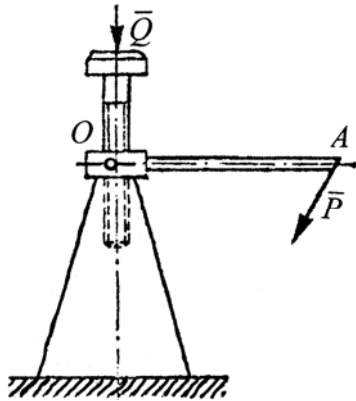


Рис. 26.26

### 26.13. Задачі на застосування принципу віртуальних переміщень

**Задача 1.** Вантаж вагою  $Q$  піднімається за допомогою домкрата, який приводиться в рух ручкою  $OA = 0,6$  м. До кінця ручки перпендикулярно до неї прикладено силу  $\vec{P}$ , модуль якої  $P = 160$  Н. Знайти вагу вантажу, якщо крок гвинта домкрата  $h = 12$  мм (рис. 26.26).

**Розв'язання.** Нагадаємо, що

гвинтова лінія – це траєкторія точки  $K$  (рис. 26.27, а), яка рівномірно рухається вздовж твірної кругового циліндра, коли сама твірна рівномірно обертається навколо осі циліндра. На рис. 26.27, а зображено дугу ( $AKB$ ) гвинтової лінії. Розрізняють праву (рис. 26.27, б) і ліву (рис. 26.27, в) гвинтові лінії залежно від того, як рухається твірна: проти ходу годинникової стрілки чи за, якщо дивитись з боку додатного напрямку осі  $z$  циліндра. Відстань  $KB = h$ , яку точка  $K$  проходить вздовж вертикалі за час

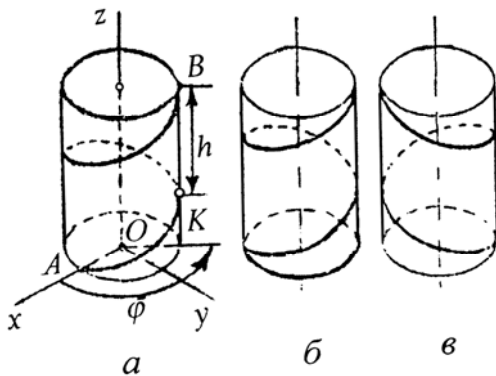


Рис. 26.27

повного оберту навколо осі циліндра, називається кроком гвинтової лінії. Параметричні рівняння гвинтової лінії мають вигляд:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi} \varphi,$$

де  $r$  – радіус циліндра.

Нехай  $\delta\varphi$  – варіація кута повороту ручки домкрата навколо своєї осі,  $M$  – момент сил, прикладених до ручки, відносно її осі;  $\delta z$  – варіація аплікати вантажу. Згідно з рівністю (26.65) сума віртуальних робіт усіх активних сил, прикладених до домкрата, дорівнює нулю:

$$M \cdot \delta\varphi - Q \cdot \delta z = 0. \quad (26.66)$$

Тут  $M = P \cdot OA$ . Якщо  $\delta\varphi = 2\pi$ , то  $\delta z = h$ . Тому

$$P \cdot OA \cdot 2\pi - Q \cdot h = 0 \Rightarrow Q = P \cdot \frac{OA \cdot 2\pi}{h}, \quad Q = 160 \cdot \frac{0,6 \cdot 2\pi}{0,012} \text{ Н.}$$

**Відповідь:**  $Q = 50,2 \text{ кН.}$

**Задача 2.** До повзуна  $A$  механізму еліпсографа прикладено силу  $\vec{P}$ , направлену вздовж напрямної повзуна до осі обертання  $O$  кривошипа ( $OC$ ). Який обертальний момент потрібно прикласти до кривошипа ( $OC$ ) для того, щоб механізм перебував у рівновазі в положенні, коли кривошип ( $OC$ ) утворює з напрямною повзуна кут  $\varphi$ ? Механізм розташований в горизонтальній площині, причому  $OC = AC = CB = l$  (рис. 26.28).

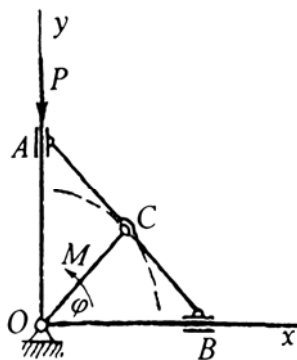


Рис. 26.28

**Розв'язання.** Аналогічно рівності (26.66) умова рівноваги механізму еліпсографа полягає у виконанні рівності

$$M \cdot \delta\varphi - P \cdot \delta y_A = 0. \quad (26.67)$$

Тут  $y_A = 2y_C$ ,  $y_C = l \sin \varphi$ . Тому рівність (26.67) набуває вигляду

$$M \cdot \delta\varphi - P \cdot 2l \cos \varphi \cdot \delta\varphi = 0,$$

звідки  $M = 2Pl \cos \varphi$ .

**Відповідь:**  $M = 2Pl \cos \varphi$ .

**Задача 3.** На рис. 26.29 зображено систему важелів, що використовується для піднімання вантажу  $K$ : верхній важіль ( $BO$ ), нижній важіль ( $CE$ ) і тяга ( $AC$ ). Вантаж підвішено до нижнього важеля в точці  $D$ . Піднімання здійснюється завдяки силі  $\vec{F}$ , направленій вздовж вертикалі уверх і прикладеній в точці  $B$  верхнього важеля. Знайти вагу  $P$  вантажу, що піднімається, якщо  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $\frac{b}{a} = 10$ .

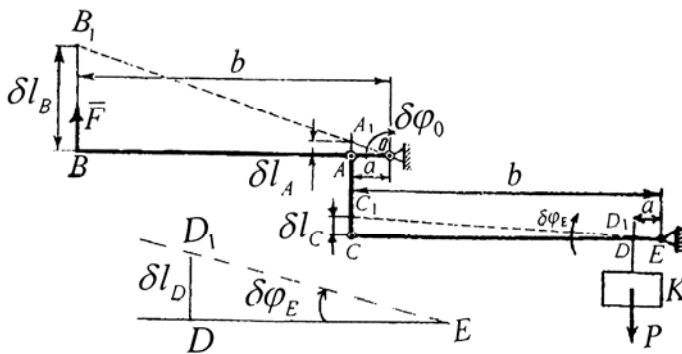


Рис. 26.29

**Розв'язання.** Задачу можна розв'язати методами статички: подумки розітнути тягу ( $AC$ ), замінити її дію на верхній ( $BO$ ) і нижній ( $CE$ ) важелі реакціями в'язей і розглянути окремо рівновагу верхнього і нижнього важелів. Виключивши з рівнянь рівноваги реакції тяги ( $AC$ ), можна знайти  $P$ . За допомогою принципу віртуальних переміщень задача розв'язується простіше.

*Перший спосіб.* Надамо точці  $B$  віртуальне переміщення уверх, його модуль позначимо  $\delta l_B$ . Тоді точка  $D$  нижнього важеля отримає віртуальне переміщення (теж уверх) з модулем  $\delta l_D = DD_1$ . Із подібності трикутників  $AA_1O$  і  $BB_1O$ ,  $DD_1E$  і  $CC_1E$  маємо:

$$\frac{\delta l_A}{\delta l_B} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\delta l_D}{\delta l_C} = \frac{a}{b}. \quad (26.68)$$

Оскільки тяга ( $AC$ ) є абсолютно жорстким стержнем, то  $\delta l_A = \delta l_C$ . Скористаємось принципом віртуальних переміщень (26.65):

$$F \cdot \delta l_B - P \cdot \delta l_D = 0.$$

Із співвідношень (26.68) знаходимо

$$\delta l_D = \frac{a}{b} \delta l_C = \frac{a}{b} \delta l_A = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \delta l_B = \frac{a^2}{b^2} \delta l_B,$$

тому

$$F \cdot \delta l_B - P \cdot \frac{a^2}{b^2} \delta l_B = 0, \quad F = P \cdot \frac{a^2}{b^2}, \quad P = F \left( \frac{b}{a} \right)^2.$$

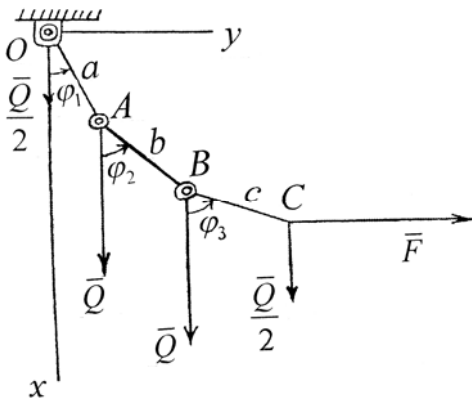


Рис. 26.30

Підставляючи задані числові значення

$$F \text{ і } \frac{b}{a}, \text{ дістаємо } P = 1000 \text{ кН.}$$

*Другий спосіб.* Надамо верхньому важелю ( $BO$ ) віртуальне кутове переміщення  $\delta\varphi_O$  навколо точки  $O$ . Тоді нижній важіль ( $CE$ ) отримає віртуальне кутове переміщення  $\delta\varphi_E$  навколо точки  $E$ . При цьому точки  $A$  і  $C$  отримають віртуальні переміщення вгору з модулями  $\delta l_A = a \cdot \delta\varphi_O$ ,  $\delta l_C = b \cdot \delta\varphi_E$ . З умови  $\delta l_A = \delta l_C$  дістаємо:

$$a \cdot \delta\varphi_O = b \cdot \delta\varphi_E.$$

Для знаходження віртуальної роботи сил на кутових переміщеннях  $\delta\varphi_O$  і  $\delta\varphi_E$  скористаємось теоремою підрозділу 25.5. З урахуванням умови (26.65) одержимо:

$$M_O(\vec{F}) \cdot \delta\varphi_O + M_E(\vec{P}) \cdot \delta\varphi_E = 0,$$

$$M_O(\vec{F}) = -Fb, \quad M_E(\vec{P}) = Pa.$$

Отже,

$$-Fb \cdot \delta\varphi_O + Pa \cdot \frac{a}{b} \cdot \delta\varphi_O = 0,$$

$$-Fb + P \frac{a^2}{b^2} = 0, \quad P = F \frac{b^2}{a^2}.$$

**Відповідь:**  $P = F \frac{b^2}{a^2}.$

**Задача 4.** Три стрижні однакової ваги  $Q$  з'єднано між собою шарнірами (рис. 26.30). Перший стрижень може повертатись навколо нерухомого шарніра  $O$ , а до вільного кінця третього стрижня прикладено горизонтальну силу  $\vec{F}$ , яка утримує всю систему у вертикальній площині у рівновазі. Знайти кути  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , якщо  $F = Q$ .



**Розв'язання.** На шість декартових координат точок  $A, B$  і  $C$  накладено три умови:  $OA = a = \text{const}$ ,  $AB = b = \text{const}$ ,  $BC = c = \text{const}$ . Тому система має три степені вільності. Сили ваги кожного стрижня можна розкласти на дві складові, прикладені до його кінців. Отримаємо систему сил, показану на рис. 26.30. Умова рівноваги сил (26.65) набуває вигляду:

$$Q \cdot \delta x_A + Q \cdot \delta x_B + \frac{Q}{2} \cdot \delta x_C + F \cdot \delta y_C = 0$$

або

$$\delta x_A + \delta x_B + \frac{\delta x_C}{2} + \delta y_C = 0. \quad (26.69)$$

Але ж

$$\begin{aligned} x_A &= a \cos \varphi_1, & x_B &= a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2, \\ x_C &= a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2 + c \cos \varphi_3, \\ y_C &= a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2 + c \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Тому з рівності (26.69) дістаємо:

$$\begin{aligned} &-a \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 - a \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 - b \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 - \frac{1}{2}(a \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 + \\ &+ b \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 + c \sin \varphi_3 \cdot \delta \varphi_3) + a \cos \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 + \\ &+ b \cos \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 + c \cos \varphi_3 \cdot \delta \varphi_3 = 0, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{5}{2}a \sin \varphi_1 + a \cos \varphi_1\right) \delta \varphi_1 - \left(\frac{3}{2}b \sin \varphi_2 - b \cos \varphi_2\right) \delta \varphi_2 + \\ &+ \left(c \cos \varphi_3 - \frac{c}{2} \sin \varphi_3\right) \delta \varphi_3 = 0. \end{aligned}$$

З умови лінійної незалежності варіацій  $\delta \varphi_1, \delta \varphi_2$  і  $\delta \varphi_3$  випливає, що

$$\cos \varphi_1 - \frac{5}{2} \sin \varphi_1 = 0, \quad \cos \varphi_2 - \frac{3}{2} \sin \varphi_2 = 0, \quad \cos \varphi_3 - \frac{\sin \varphi_3}{2} = 0.$$

Звідси

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{2}{5}, \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{2}{3}, \quad \text{tg } \varphi_3 = 2.$$

**Відповідь:**  $\varphi_1 = 21^\circ 48'$ ,  $\varphi_2 = 33^\circ 42'$ ,  $\varphi_3 = 63^\circ 26'$ .

### 26.14. Принцип Д'Аламбера–Лагранжа

Згідно з принципом Д'Аламбера, прикладаючи до точок системи їхні сили інерції (разом з активними силами), можна вважати, що система перебуває у рівновазі. Принцип віртуальних переміщень Лагранжа встановлює необхідні і достатні умови рівноваги системи. Використання принципу Д'Аламбера дає змогу поширити принцип Лагранжа на випадок руху системи. Отже, для системи, яка рухається, умова (26.63) набуває вигляду:

$$\sum_{s=1}^N (\vec{F}_s - m_s \vec{w}_s) \cdot \delta \vec{r}_s \leq 0, \quad (26.70)$$

тобто якщо на систему накладено ідеальні в'язі, то сума робіт, виконаних на віртуальних переміщеннях активними силами і силами інерції, не додатна.

### 26.15. Загальне рівняння динаміки

Якщо неутримуючі в'язі відсутні або при віртуальних переміщеннях, які залишають точки матеріальної системи на в'язях, співвідношення (26.70) набуває вигляду рівності:

$$\sum_{s=1}^N (\vec{F}_s - m_s \vec{w}_s) \cdot \delta \vec{r}_s = 0. \quad (26.71)$$

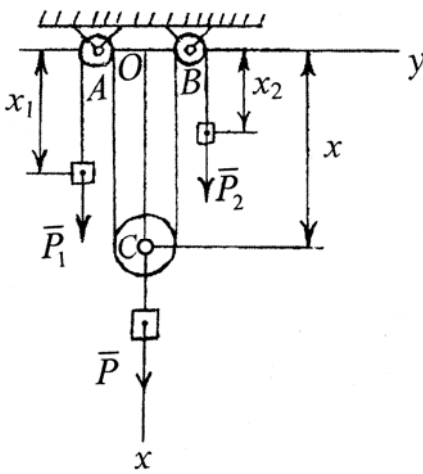


Рис. 26.31

Рівняння (26.71) Ж. Лагранж назвав загальним рівнянням динаміки і прийняв за вихідне (початкове, базове) при побудові створеної ним аналітичної механіки.

Розглянемо приклад використання загального рівняння динаміки.

**Задача.** Через блоки  $A, B, C$  з нерухомими осями перекинута трос, який підтримує рухомий блок  $C$  (рис. 26.31). Блок  $C$  навантажено гирею вагою  $P$ , а до кінців троса прикріплено вантажі вагою  $P_1$  і  $P_2$ . Знайти прискорення всіх трьох вантажів, нехтуючи масами блоків і троса, а також тертям в осях. Вважати, що всі вантажі рухаються прямолінійно (вверх або вниз).

**Розв'язання.** Оскільки довжина троса незмінна і дорівнює, наприклад,  $l = \text{const}$ , то

$$x_1 + 2x + x_2 = l. \quad (26.72)$$

Три декартові координати  $x_1, x_2, x_3$ , які визначають положення системи, зв'язані однією умовою, тобто система має два степені вільності. За незалежні координати виберемо  $x_1$  і  $x_2$ . Тоді

$$x = \frac{l}{2} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \delta x = -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2). \quad (26.73)$$

Рівняння (26.71) для досліджуваної системи набуває вигляду:

$$\left( P_1 - \frac{P_1}{g} w_1 \right) \delta x_1 + \left( P - \frac{P}{g} w \right) \delta x + \left( P_2 - \frac{P_2}{g} w_2 \right) \delta x_2 = 0.$$

Врахувавши (26.73), дістаємо, що

$$P_1 - \frac{P_1}{g} w_1 - \frac{1}{2} \left( P - \frac{P}{g} w \right) (\delta x_1 + \delta x_2) + \left( P_2 - \frac{P_2}{g} w_2 \right) \delta x_2 = 0,$$

або

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g}w_1 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g}w\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g}w_2 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g}w\right)\delta x_2 = 0.$$

Оскільки варіації  $\delta x_1, \delta x_2$  є лінійно незалежними, то остання рівність може виконуватись тоді і лише тоді, коли

$$\begin{aligned} \frac{P}{2g}w - \frac{P_1}{g}w_1 &= \frac{P}{2} - P_1, \\ \frac{P}{2g}w - \frac{P_2}{g}w_2 &= \frac{P}{2} - P_2. \end{aligned}$$

Ще одне рівняння отримаємо подвійним диференціюванням в'язі (26.72):

$$w_1 + 2w + w_2 = 0.$$

Три останні рівняння дають змогу знайти значення невідомих  $w, w_1, w_2$  при заданих значеннях сил ваги вантажів  $P, P_1$  і  $P_2$ . Якщо значення якоїсь невідомої виявиться додатним, то прискорення відповідної точки направлене вниз, якщо від'ємним, то – вверх.

### 26.16. Узагальнені координати системи і узагальнені сили. Умови рівноваги в узагальнених координатах

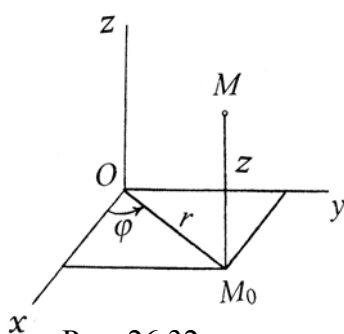


Рис. 26.32

У багатьох задачах використання декартових координат для визначення положення систем призводить до незручностей і ускладнень при дослідженні їх руху. Замість декартових (навіть прямокутних) координат часто вводять так звані узагальнені (криволінійні, лагранжеві) координати, які можуть бути лінійними чи кутовими величинами, а також параметрами з розмірністю площі, об'єму й т.і.

По суті, не вживаючи цей термін, ми неодноразово вже користувались (інтуїтивно) узагальненими координатами. Наприклад, положення фізичного і математичного маятників визначалось кутом відхилення від вертикалі; положення твердого тіла з однією нерухомою точкою – трьома кутами Ейлера; положення твердого тіла, яке здійснює плоский рух, – двома декартовими координатами полюса і одним кутом повороту тіла; положення вільного твердого тіла – трьома декартовими і трьома кутовими координатами.

Прикладами узагальнених (криволінійних, лагранжевих) координат є відомі з курсу вищої математики циліндричні і сферичні координати. Нехай точка  $M$  має декартові координати  $x, y, z$ ;  $M_0(x, y, 0)$  – її проекція на площину  $xOy$ . Циліндричні координати  $r, \varphi, z$  (рис. 26.32) є поєднанням полярних координат точки  $M_0$  з аплікатою (тобто однією з декартових координат) точки  $M$ . Формули, що пов'язують циліндричні координати з декартовими, мають вигляд

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (26.74)$$

Ці формули відображають область  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $-\infty < z < +\infty$  на весь простір декартових координат  $x, y, z$ . Координатні поверхні (сукупності точок простору декартових координат, на яких дві криволінійні координати залишаються незмінними) є такими:

$r = \text{const}$  – циліндричні поверхні, рівняння яких у декартових координатах має вигляд  $x^2 + y^2 = r^2$ , тобто їхні твірні паралельні осі  $Oz$ ;

$\varphi = \text{const}$  – півплощини, що проходять через вісь  $Oz$  і рівняння яких у декартових координатах має вигляд  $y = x \operatorname{tg} \varphi$ ;

$z = \text{const}$  – площини, паралельні площині  $xOy$ .

Сферичні координати  $r, \varphi, \theta$  (рис. 26.33) інакше називають полярними координатами у просторі. Вони зв'язані з декартовими координатами формулами:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta \\ (0 \leq r < +\infty, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \theta \leq \pi). \end{aligned} \quad (26.75)$$

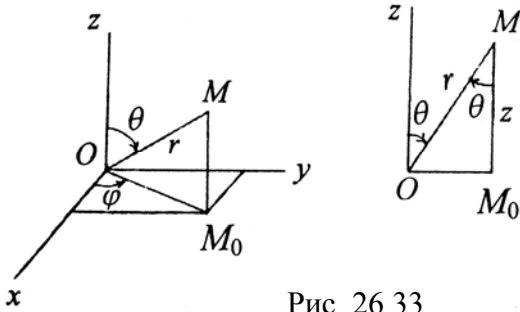


Рис. 26.33

На земній сфері  $\theta$  – географічна широта,  $\varphi$  – географічна довгота. Координатні поверхні:

$r = \text{const}$  – концентричні сфери з центром у початку координат, рівняння яких у декартових координатах має вигляд  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ;

$\theta = \text{const}$  – поверхні кругових конусів, віссю яких є вісь  $Oz$ ; рівняння поверхні має вигляд

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \theta = 0;$$

$\varphi = \text{const}$  – півплощини, що проходять через вісь  $Oz$ .

Звичайно, можлива безліч інших способів введення криволінійних координат, зокрема таких:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (26.76)$$

Ці формули задають перетворення тривимірного простору декартових прямокутних координат  $x, y, z$  у тривимірний простір криволінійних координат  $\xi, \eta, \zeta$ .

Перейдемо до загального випадку. Якщо на механічну систему накладено  $k$  голономних в'язей (26.50), то вона має  $n = 3N - k$  ступенів вільності. З часів Ж.Л. Лагранжа узагальнені координати механічної системи позначають  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

Отже, замість конкретних виразів (26.74) – (26.76) в загальному випадку маємо

$$\begin{cases} x_s = x_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ y_s = y_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ z_s = z_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots, N). \quad (26.77)$$

Тому

$$\vec{r}_s = \{x_s, y_s, z_s\} = \vec{i}x_s + \vec{j}y_s + \vec{k}z_s = \vec{r}_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (s = 1, 2, \dots, N). \quad (26.78)$$

Праві частини у формулах (26.77) вибирають так, щоб рівняння в'язей (26.50) задовольнялись тотожно. Це маємо, до речі, у випадку математичного маятника (підрозділ 22.7). На підставі виразу (26.78) дійсні і віртуальні переміщення механічної системи та швидкості точок системи є такими:

$$d\vec{r}_s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t}, \quad (26.79)$$

$$\delta \vec{r}_s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (26.80)$$

$$\vec{v}_s = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t}. \quad (26.81)$$

Величини  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  називають узагальненими швидкостями.

Знайдемо роботу всіх активних сил на віртуальному переміщенні системи (якщо є сили тертя, то вони зараховуються до активних сил):

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta \vec{r}_s = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \delta q_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i. \end{aligned} \quad (26.82)$$

Переконаємось, що в подвійних сумах зі скінченною кількістю доданків послідовність підсумовування можна переставляти місцями.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^4 \sum_{i=1}^3 \beta_{si} &= \sum_{s=1}^4 (\beta_{s1} + \beta_{s2} + \beta_{s3}) = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} + \beta_{31} + \\ &+ \beta_{32} + \beta_{33} + \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}, \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^4 \beta_{si} = \sum_{i=1}^3 (\beta_{1i} + \beta_{2i} + \beta_{3i} + \beta_{4i}) = \\ &= \beta_{11} + \beta_{21} + \beta_{31} + \beta_{41} + \beta_{12} + \beta_{22} + \beta_{32} + \beta_{42} + \beta_{13} + \beta_{23} + \beta_{33} + \beta_{43}, \end{aligned}$$

тобто

$$\sum_{s=1}^4 \sum_{i=1}^3 \beta_{si} = \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^4 \beta_{si}, \quad \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^n \vec{F}_s \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \delta q_i.$$

У виразі (26.82) запроваджено позначення

$$Q_i = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (26.83)$$

за яким  $Q_i$  є узагальнена сила, віднесена до узагальненої координати  $q_i$  (яка відповідає узагальненій координаті  $q_i$ ). Такі сили знаходять або безпосередньо за формулою (26.83), або з виразу (26.82) віртуальної роботи. Якщо потрібно, наприклад, знайти  $Q_1$ , то системі надають таке віртуальне переміщення, при якому всі варіації узагальнених координат, крім  $\delta q_1$ , дорівнюють нулю:  $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \dots = \delta q_n = 0$ . Тоді  $\delta A = Q_1 \delta q_1$ . Аналогічно обчислюється решта узагальнених сил.

Часто сили задаються їхніми проекціями на осі декартової прямокутної системи координат:

$$\vec{F}_s = \{X_s, Y_s, Z_s\} = \vec{i}X_s + \vec{j}Y_s + \vec{k}Z_s,$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – ортонормований базис. Вирази (26.83) набувають вигляду:

$$Q_i = \sum_{s=1}^N X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_i} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (26.84)$$

Розглянемо важливий частинний випадок – **потенціальне силове поле**. Нехай існує скалярна функція

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N), \quad (26.85)$$

така, що

$$X_s = \frac{\partial U}{\partial x_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_s}, \quad Y_s = \frac{\partial U}{\partial y_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_s}, \quad Z_s = \frac{\partial U}{\partial z_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_s} \quad (26.86)$$

$$(s=1, 2, \dots, N).$$

Функція  $U$  називається силовою функцією поля;  $\Pi = -U$  – потенціальна енергія. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{F}_s &= \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x_s} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y_s} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z_s} = -\left( \vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x_s} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y_s} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z_s} \right) = \\ &= \text{grad} U = -\text{grad} \Pi = \vec{\nabla} U = -\vec{\nabla} \Pi. \end{aligned}$$

де  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  – оператор Гамільтона («набла»). Підставивши (26.77) у (26.85), отримуємо, що

$$\begin{aligned} \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) &= \\ &= \Pi[x_1(q_1, \dots, q_n, t), y_1(q_1, \dots, q_n, t), z_1(q_1, \dots, q_n, t), \dots \\ &\dots, x_N(q_1, \dots, q_n, t), y_N(q_1, \dots, q_n, t), z_N(q_1, \dots, q_n, t), t], \end{aligned}$$

тобто  $\Pi$  є складеною функцією незалежних змінних  $q_1, \dots, q_n, t$ :

$$\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n, t).$$

На підставі (26.84) і (26.86) маємо:

$$Q_i = -\sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial q_i} \right).$$

Отже,

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (26.87)$$

Принцип віртуальних переміщень для систем з утримуючими ідеальними в'язями (26.65) при переході до узагальнених координат набуває вигляду (26.82). Для голономних систем варіації узагальнених координат є лінійно незалежними, тому рівність

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_n = 0. \quad (26.88)$$

Покажемо, наприклад, що  $Q_n = 0$ . Для цього візьмемо таке віртуальне переміщення системи, при якому  $\delta q_1 = \dots = \delta q_{n-1} = 0, \delta q_n \neq 0$ . З умови  $Q_n \delta q_n = 0$

впливає  $Q_n = 0$ . Таким же чином переконаємось у справедливості решти рівностей (26.88).

Отже, необхідні і достатні умови рівноваги (спокою) механічної системи за умов (26.64) полягають у виконанні рівностей (26.88).

Для руху системи в потенціальному силовому полі умови (26.88) на підставі (26.87) набувають вигляду:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0. \quad (26.89)$$

Інколи умови рівноваги системи в потенціальному силовому полі записують інакше. Принцип віртуальних переміщень для систем з утримуючими ідеальними в'язями (26.65) з урахуванням (26.86) записується так:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta \vec{r}_s &= \sum_{s=1}^N (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) = \\ &= - \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_s} \delta x_s + \frac{\partial \Pi}{\partial y_s} \delta y_s + \frac{\partial \Pi}{\partial z_s} \delta z_s \right) = - \delta \Pi = 0, \end{aligned}$$

тобто необхідною і достатньою умовою рівноваги системи з утримуючими в'язями за умов (26.64) є рівність нулю першої варіації потенціальної енергії системи.

### 26.17. Диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду)

Щоб віднести рух системи до узагальнених координат, Ж.Л. Лагранж скористався загальним рівнянням динаміки (26.71):

$$\sum_{s=1}^N \left( m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} - \vec{F}_s \right) \cdot \delta \vec{r}_s = 0.$$

Замість віртуальних переміщень підставимо їх вирази (26.80):

$$\sum_{s=1}^N \left( m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} - \vec{F}_s \right) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (26.90)$$

Одним із вирішальних етапів у перетворенні рівняння (26.90) до узагальнених координат є тотожність

$$\frac{d\vec{v}_s}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \right) - \vec{v}_s \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i}.$$

З виразу (26.81) знаходимо:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i}.$$

Безпосереднім обчисленням дістаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} &= \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_i \partial t}, \\ \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial t \partial q_i}. \end{aligned}$$

У задачах механіки функції  $\vec{r}_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$  є неперервно диференційовними (принаймні, двічі) за всіма незалежними змінними, тому мішані другі похідні рівні між собою (результат диференціювання не залежить від порядку диференціювання):

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_j \partial q_i}, \quad \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial t \partial q_i}.$$

Отже,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i}.$$

Рівняння (26.90) набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{s=1}^N m_s \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i} \right) - \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i} \right] - \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i} - \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (26.91)$$

Наступний рішучий крок, зроблений Ж.Л. Лагранжем, полягає у введенні до розгляду кінетичної енергії системи:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s^2.$$

Тоді

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i}.$$

З урахуванням виразів (26.83) рівність (26.91) набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0. \quad (26.92)$$

Таким чином, загальне рівняння динаміки (26.71) перетворено до рівняння (26.92), тобто (26.92) є загальним рівнянням динаміки в узагальнених координатах. Проводячи паралелі між (26.71) і (26.92), зауважимо, що  $-m_s \vec{w}_s$  в (26.71) є силою інерції матеріальної точки  $M_s$ , тому  $-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}$  є узагальненою силою інерції, яка відповідає узагальненій координаті  $q_i$ .

Оскільки узагальнені координати  $q_1, q_2, \dots, q_n$  є незалежними, то у випадку голономних в'язей їх варіації  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$  можуть набувати будь-яких значень. Тому із (26.92) випливають рівняння

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (26.93)$$

Це і є знамениті рівняння Лагранжа другого роду. Лише одних їх вистачило б, щоб принести їх автору світове визнання. Кількість рівнянь (26.93) дорівнює кількості степенів вільності системи.

Нагадаємо, що при обчисленні узагальнених сил  $Q_i$  враховуються лише активні сили, прикладені до системи. Реакції ідеальних в'язей не враховуються (їх



віртуальна робота дорівнює нулю). Якщо ж є сили тертя, то їх приєднують до активних сил.

У певних задачах механіки буває доцільно визначати конфігурацію системи параметрами  $q_1, \dots, q_{n+m}$ , кількість яких перевищує  $n$ . Тоді  $m$  з цих  $n+m$  параметрів називають *надлишковими координатами* [2]. Звичайно, між  $n+m$  параметрами  $q_1, \dots, q_{n+m}$  існують  $m$  співвідношень, які можуть містити і час:

$$\Psi_k(q_1, \dots, q_{n+m}, t) = 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Переваги, процедура і приклади використання надлишкових координат описані в [18].

### 26.18. Випадок потенціального силового поля

За умов (26.87) система диференціальних рівнянь (26.93) набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

або

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (26.94)$$

де  $L = T - \Pi$  – функція Лагранжа, або кінетичний потенціал. Тут враховано, що  $T = T(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$ ,  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$ .

Як приклад, повернемося до розгляду **математичного маятника** (підрозділ 22.7). Його положення на площині визначається двома декартовими координатами  $x$  і  $y$ , які зв'язані одним рівнянням в'язі:

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

Тому кількість незалежних декартових координат дорівнює одиниці. Можна скласти диференціальне рівняння (другого порядку) відносно будь-якої з декартових координат, інша знайдеться з рівняння в'язі. Для  $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$  маємо:

$$\cos \varphi = \frac{x}{l}, \sin \varphi = \frac{y}{l}. \text{ Отже,}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - R \frac{x}{l}, \\ m\ddot{y} = -R \frac{y}{l}, \\ x\dot{x} + y\dot{y} = 0. \end{cases}$$

Оскільки  $R = -ml \frac{\ddot{y}}{y}$ , то перше рівняння набуває вигляду:

$$\ddot{x} - \frac{x}{y} \ddot{y} = g. \quad (26.95)$$

Продиференціюємо за часом третє рівняння системи:

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

Звідси

$$\ddot{y} = -\frac{1}{y}(x\ddot{x} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Тому рівняння (26.95) послідовно стає таким:

$$y\ddot{x} + \frac{x}{y}(x\ddot{x} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) = gy,$$

$$\ddot{x}(x^2 + y^2) + x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = gy^2,$$

$$\ddot{x}l^2 + x\left(\dot{x}^2 + \frac{x^2}{y^2}\dot{x}^2\right) = gy^2,$$

$$l^2\ddot{x} + x\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = gy^2,$$

$$l^2\ddot{x} + x\dot{x}^2\frac{l^2}{l^2 - x^2} = g(l^2 - x^2).$$

Остаточно

$$\ddot{x} + \frac{x\dot{x}^2}{l^2 - x^2} = g\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Простішого вигляду диференціальне рівняння руху математичного маятника набуває, коли за шукану функцію прийняти  $\varphi(t)$ . Тоді

$$x = l \cos \varphi, \quad \dot{x} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \ddot{x} = -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$-l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = g \sin^2 \varphi.$$

Таким чином, приходимо до рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

яке збігається з рівнянням (22.57), одержаним іншим шляхом. Такий спосіб отримання рівняння (22.57) наведено з суто ілюстративних, методичних міркувань. Можна (знов-таки, з цих же міркувань) скористатись рівняннями (26.93), прийнявши  $n = 1, q_1 = \varphi$ . Рівняння Лагранжа другого роду для системи з одним ступенем вільності є таким:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Тут

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2(l^2 \sin^2 \varphi + l^2 \cos^2 \varphi) = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{I_z}{2}\dot{\varphi}^2$$

або

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(l\dot{\varphi})^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2.$$

Для знаходження узагальненої сили  $Q_\varphi$  можна скористатись формулою (26.83):

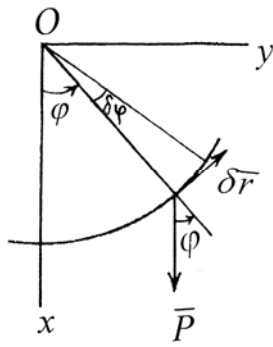
$$Q_\varphi = \vec{P} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = P_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + P_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} = mg(-l \sin \varphi) = -mgl \sin \varphi = M_z(\vec{P})$$

або формулою (26.82) і рис. 26.34, тоді

$$\delta A = \vec{P} \cdot \delta \vec{r} = mg \cdot l \delta \varphi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -mgl \sin \varphi \cdot \delta \varphi = Q_\varphi \cdot \delta \varphi,$$

$$Q_\varphi = -mgl \sin \varphi.$$

Нарешті зауважимо, що як силова функція, так і потенціальна енергія знаходяться як розв'язок диференціального рівняння і, отже, неоднозначні. У випадку математичного маятника крім диференціальних рівнянь



$$\left. \begin{aligned} P_x &= mg = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ P_y &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \\ P_z &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Pi = -mgx + C_1,$$

потрібно ще задати початкове значення функції  $\Pi(x)$ . На вибір останнього немає обмежень, його можна задавати як завгодно. У виразі (22.60) прийнято  $\Pi|_{x=l} = 0$ . Тоді

Рис. 26.34

$$C_1 = mgl, \quad \Pi = -mgx + mgl,$$

$$\Pi = mgl(1 - \cos \varphi).$$

Це традиційний вираз для  $\Pi$ , але зовсім не обов'язковий. Обов'язковою є лише умова  $\frac{d\Pi(x)}{dx} = -mg$ . Можна, наприклад, вважати  $\Pi|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$ . Тоді  $\Pi = -mgl \cos \varphi$ .

### 26.19. Вираз кінетичної енергії системи через узагальнені швидкості і координати

На підставі виразів швидкостей точок системи (26.81) знаходимо:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \left[ \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_n} \dot{q}_n \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_n} \dot{q}_n \right) + \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} \right)^2 \right] = T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned}$$

де

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \left[ \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \right)^2 \dot{q}_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_n} \right)^2 \dot{q}_n^2 + \right. \\
 &\left. + 2 \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2 \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_{n-1}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_n} \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = \sum_{s=1}^N m_s \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_j}, \\
 T_1 &= \sum_{s=1}^N m_s \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i, \quad b_i = \sum_{s=1}^N m_s \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i}, \\
 T_0 &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \left( \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Таким чином, **кінетична енергія системи є сумою квадратичної  $T_2$ , лінійної  $T_1$  і нульової  $T_0$  форм відносно узагальнених швидкостей.** Величини  $a_{ij} = a_{ji}$  називають узагальненими коефіцієнтами інерції.

При стаціонарних в'язях для руху, що вивчається відносно інерціальних осей, час  $t$  явно не входить у вирази  $\vec{r}_s$ . Тоді  $\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} = 0$  і, отже,  $b_i = 0$ ,  $T_1 = 0$ ,  $T_0 = 0$ , тобто  $T = T_2$  – кінетична енергія є квадратичною формою узагальнених швидкостей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n; t). \quad (26.96)$$

Кінетична енергія системи завжди додатна (як сума позитивних величин  $\frac{1}{2} m_s v_s^2$ ) і нулем вона може стати лише тоді, коли система перебуває в спокої. Тому **квадратична форма (26.96) завжди додатно означена.**

### Питання для самоконтролю

1. Чи є принципова різниця між поняттями в'язі у статиці та в аналітичній механіці?
2. Як тлумачити поняття в'язі та рівняння в'язі?
3. Як конструктивно реалізуються в'язі?
4. В чому аналітично проявляються в'язі?
5. Чим відрізняються неголономні в'язі від голономних?
6. Як знайти реакцію в'язі у випадку руху точки по гладенькій поверхні?
7. Як знайти реакції в'язей при русі точки по гладенькій кривій лінії?
8. Чи «реальними» є сили інерції?
9. В чому полягає метод кінетостатики?
10. Що означає «втрачена сила» в трактовці Д'Аламбера?
11. Сформулюйте принцип відносності у класичній механіці.

12. Якими є формули переходу від однієї інерціальної системи координат до іншої?
13. Що називають відносним спокоєм точки?
14. Дайте класифікацію сил за Ішлінським.
15. Чим відрізняється варіація функції від диференціала?
16. В якому випадку дійсне переміщення точки є одним із віртуальних?
17. Як аналітично знайти віртуальне переміщення точки?
18. Коли дійсне переміщення точки не є частинним випадком віртуального?
19. Як визначають кількість степенів вільності голономних і неголономних механічних систем?
20. Наведіть приклади ідеальних в'язей.
21. Як трактують в механіці положення рівноваги системи?
22. Сформулюйте необхідні і достатні умови рівноваги системи матеріальних точок.
23. Сформулюйте «золоте правило механіки».
24. Чим відрізняється загальне рівняння динаміки від принципу Д'Аламбера–Лагранжа?
25. Що можна приймати за узагальнені координати системи?
26. Наведіть умови рівноваги системи в потенціальному силовому полі.
27. Які координати називають надлишковими?
28. Назвіть надлишкові координати у випадку математичного маятника.
29. Що називають узагальненими коефіцієнтами інерції? Якими можуть бути їхні значення в частинних випадках?
30. Чи може кінетична енергія системи бути від'ємно означеною формою?

## **27. Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги**

### **27.1. Диференціальні рівняння малих коливань**

Коливання систем з кількома степенями вільності, які мають важливе практичне застосування, відрізняються від коливань з одним ступенем вільності низкою істотних особливостей. Щоб скласти певне уявлення про ці особливості, розглянемо випадок вільних коливань системи з двома степенями вільності навколо положення стійкої рівноваги. Не розглядаючи зараз математичне означення поняття стійкості руху, обмежимося інтуїтивними уявленнями про стани рівноваги математичного маятника (підрозділ 22.7). Їх два: нижнє положення рівноваги  $\varphi = 0$  є стійким і тому доречно говорити про малі коливання навколо цього положення; верхнє положення рівноваги  $\varphi = \pi$  є нестійким. Маятник, виведений з цього положення, відходить від нього достатньо далеко. Врахування нелінійностей, які завжди є в реальних механічних системах, приводить до того, що механічна система, виведена зі стану нестійкої рівноваги, або притягується іншим, стійким станом рівноваги чи стаціонарному стану

(атрактором, який взагалі може бути досить складним), або рухається періодично чи якзавгодно. Після втрати стійкості стану рівноваги чи періодичного руху детермінована механічна система може рухатись навіть хаотично (це явище дістало назву детермінованого хаосу).

Диференціальні рівняння коливань одержимо на підставі рівнянь Лагранжа другого роду. Обмежимося дослідженням малих коливань, що описуються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Такою є найпростіша лінеаризована модель механічної системи. Для цього у виразах кінетичної і потенціальної енергій достатньо зберегти члени лише другого порядку малості відносно узагальнених швидкостей і узагальнених координат.

Розглянемо одне з положень стійкої рівноваги стаціонарної голономної системи. Узагальнені координати виберемо таким чином, щоб точка  $O(0, 0, \dots, 0)$  була положенням рівноваги. Розкладемо потенціальну енергію в ряд Маклорена в околі цієї точки за степенями  $q_1, q_2, \dots, q_n$ :

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = & \Pi(0, 0, \dots, 0) + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \dots + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} \right)_0 q_n + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right)_0 q_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \right)_0 q_n^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots + \right. \\ & \left. + 2 \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{n-1} \partial q_n} \right)_0 q_{n-1} q_n \right] + \dots \end{aligned}$$

Оскільки потенціальна енергія визначається з точністю до адитивної сталої, то без обмеження загальності аналізу можна вважати, що в цьому положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю:

$$\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Усі коефіцієнти при  $q_1, q_2, \dots, q_n$  в першому степені також рівні нулю на підставі умов (26.89). Величини

$$c_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$$

називаються узагальненими жоркостями, причому  $c_{ij} = c_{ji}$ :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j + \dots = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + \dots + c_{nn} q_n^2 + \\ & + 2c_{12} q_1 q_2 + 2c_{13} q_1 q_3 + \dots + 2c_{n-1, n} q_{n-1} q_n) + \dots \end{aligned}$$

Крапками позначено члени вищого за другий порядку.

Нехай система **консервативна** і  $n = 2$ . Розкладемо узагальнені коефіцієнти інерції  $a_{ij}(q_1, q_2)$  в ряди Маклорена за степенями  $q_1$  та  $q_2$  і обмежимося малими величинами нульового порядку (для того щоб кінетична енергія містила члени не вище другого порядку малості відносно  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2$ ):

$$a_{ij}(q_1, q_2) \approx a_{ij}(0, 0) = a_{ij}.$$

Отже, при малих коливаннях навколо положення рівноваги маємо:

27. Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad (27.1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (27.2)$$

Якщо це положення рівноваги є стійким, то квадратична форма (27.2) додатно означена.

**Теорема Сільвестра:** щоб квадратична форма  $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^nc_{ij}q_iq_j$  була додатно означеною, необхідно і достатньо додатності усіх головних діагональних мінорів матриці квадратичної форми

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

тобто щоб

$$\Delta_{11} = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

З критерію Сільвестра випливає, що додатна означеність квадратичних форм (27.1) і (27.2) накладає такі обмеження на коефіцієнти цих форм:

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad (27.3)$$

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (27.4)$$

Оскільки  $L = T - \Pi$ , то стосовно функцій (27.1) і (27.2) маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = c_{11}q_1 + c_{12}q_2, \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = c_{12}q_1 + c_{22}q_2.$$

Тому система рівнянь Лагранжа другого роду (26.94) відносно узагальнених координат  $q_1$  і  $q_2$  набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (27.5)$$

Перше з цих рівнянь складено відносно змінної  $q_1$ , друге – відносно змінної  $q_2$ . Конфігурація механічної системи з двома степенями вільності в кожний момент часу  $t$  визначається двома величинами:  $q_1(t)$  і  $q_2(t)$ . Її рух є **двовимірним**. Особливістю  $n$ -вимірних рухів ( $n \geq 2$ ) є та, що зміна в часі однієї координати повинна узгоджуватись зі зміною (співвідноситись до зміни) в часі інших координат. У цьому полягає взаємозв'язаність рухів точок системи.

Із системи двох диференціальних рівнянь (27.5) з невідомими  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  випливає: рух механічної системи, що описується зміною в часі координати  $q_2$ , впливає на рух механічної системи, що описується зміною в часі координати  $q_1$ , і навпаки. Простіше можна сказати, що координата  $q_2$  впливає на координату  $q_1$ , і навпаки. Цей вплив проявляється завдяки інерційним і пружним зв'язкам, які в консервативних системах взаємні:  $a_{12} = a_{21}$ ,  $c_{12} = c_{21}$ . Якщо такі зв'язки відсутні ( $a_{12} = a_{21} = 0$ ,  $c_{12} = c_{21} = 0$ ), то система (27.5) розпадається на два незалежних рівняння:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0, \quad (27.6)$$

$$a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 = 0. \quad (27.7)$$

Відповідні кругові частоти коливань

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}, \quad \omega_2^* = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}} \quad (27.8)$$

називають парціальними круговими частотами. Як у загальному випадку (27.5), так і в особливих випадках (27.6) і (27.7) рух системи в напрямку узагальненої координати  $q_1$  визначається величинами  $a_{11}$  і  $c_{11}$ , в напрямку узагальненої координати  $q_2$  – величинами  $a_{22}$  і  $c_{22}$ . Проте в загальному випадку існує крім того взаємний вплив координат, що характеризується величинами  $a_{12}$ ,  $c_{12}$  і  $a_{21}$ ,  $c_{21}$ , причому зв'язки рівноправні:  $a_{12} = a_{21}$ ,  $c_{12} = c_{21}$ .

Частинний розв'язок системи (27.5) шукаємо у формі

$$q_1 = A \sin(\omega t + \alpha), \quad q_2 = B \sin(\omega t + \alpha). \quad (27.9)$$

Сталі  $A$ ,  $B$  і  $\omega$  слід підібрати належним чином. Підставивши функції (27.9) у систему рівнянь (27.5), маємо:

$$\begin{cases} A(-a_{11}\omega^2 + c_{11}) + B(-a_{12}\omega^2 + c_{12}) = 0, \\ A(-a_{12}\omega^2 + c_{12}) + B(-a_{22}\omega^2 + c_{22}) = 0. \end{cases} \quad (27.10)$$

Система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь (27.10) має ненульовий розв'язок (нульовий розв'язок  $A = 0$ ,  $B = 0 \Rightarrow q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$  відповідає стану спокою механічної системи) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & -a_{12}\omega^2 + c_{12} \\ -a_{12}\omega^2 + c_{12} & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (27.11)$$

або

$$\begin{aligned} \Delta(\omega^2) &= (c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})\omega^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \end{aligned} \quad (27.12)$$

Рівняння (27.11) називається рівнянням частот, або віковим рівнянням. Позначивши  $\Omega = \omega^2$ , перепишемо рівняння (27.12) інакше:

$$\Delta(\omega^2) = \Delta(\Omega) = (c_{11} - a_{11}\Omega)(c_{22} - a_{22}\Omega) - (c_{12} - a_{12}\Omega)^2 = 0, \quad (27.13)$$

тобто

$$\begin{aligned} \Delta(\Omega) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\Omega^2 - \\ &- (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})\Omega + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \end{aligned} \quad (27.14)$$



27. Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги

Корені квадратного рівняння (27.12) позначимо  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ . Покажемо, що обидва вони дійсні і додатні. Перш за все звернемо увагу на парціальні кругові частоти (27.8):

$$\omega_1^{*2} = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \Omega_1^*, \quad \omega_2^{*2} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \Omega_2^*.$$

Припустимо для визначеності, що  $\Omega_1^* < \Omega_2^*$ , тобто

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}.$$

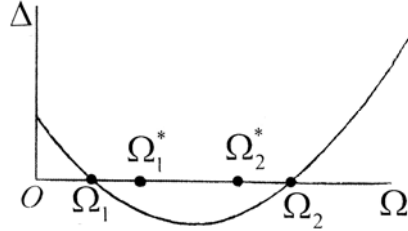


Рис. 27.1

Цього завжди можна досягти відповідною нумерацією узагальнених координат  $q_1(t)$  і  $q_2(t)$ . Із (27.14) випливає, що

$$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2, \quad \Delta(\infty) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Згадавши умови (27.3) і (27.4), дістаємо:  $\Delta(0) > 0$ ,  $\Delta(\infty) > 0$ . На підставі (27.13) маємо:

$$\Delta(\Omega_1^*) = -(c_{12} - a_{12}\Omega_1^*)^2 = -\left(c_{12} - a_{12}\frac{c_{11}}{a_{11}}\right)^2 = -\frac{(a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11})^2}{a_{11}^2} < 0,$$

$$\Delta(\Omega_2^*) = -(c_{12} - a_{12}\Omega_2^*)^2 = -\left(c_{12} - a_{12}\frac{c_{22}}{a_{22}}\right)^2 = -\frac{(a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22})^2}{a_{22}^2} < 0.$$

Отже, графік функції  $\Delta(\Omega)$  перетинає вісь абсцис у двох точках  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ , які визначають два додатних корені  $\omega_1^2$  і  $\omega_2^2$  рівняння частот. Цей графік показує, що парціальні частоти більші за меншу частоту системи  $\omega_1$  і менші за більшу частоту системи  $\omega_2$ .

Знайшовши  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ , обмежимося лише додатними значеннями квадратних коренів із них:  $\omega_1 = \sqrt{\Omega_1}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\Omega_2}$ . Кожному з цих значень відповідає один частинний розв'язок (27.9) системи (27.5), причому кожній частоті  $\omega_1$  і  $\omega_2$  відповідають свої значення  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ :

$$\omega_1 \rightarrow \begin{cases} q_1^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \\ q_2^{(1)} = B_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \end{cases} \quad \omega_2 \rightarrow \begin{cases} q_1^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ q_2^{(2)} = B_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (27.15)$$

Частинні розв'язки (27.15) є лінійно незалежними, тому загальний розв'язок системи рівнянь (27.5) є їх лінійною комбінацією:

$$\begin{cases} q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} \\ q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}, \end{cases} \quad (27.16)$$

тобто

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= B_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Між сталими величинами  $A_1$  і  $B_1$ ,  $A_2$  і  $B_2$  існує зв'язок, який зумовлюється системою (27.10). Якщо підставити в неї  $\omega_1$  чи  $\omega_2$  замість  $\omega$ , то визначник

системи дорівнюватиме нулю:  $\Delta(\omega_1^2) \equiv 0$ ,  $\Delta(\omega_2^2) \equiv 0$ . Отже, з двох рівнянь цієї системи незалежне тільки одне. Візьмемо одне з них, наприклад, перше (при розв'язуванні практичних задач слід вибирати більш просте) і знайдемо з нього, що

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{-a_{11}\omega_i^2 + c_{11}}{a_{12}\omega_i^2 - c_{12}} \equiv \mu_i \quad (i = 1, 2).$$

Звідси

$$B_1 = \mu_1 A_1, \quad B_2 = \mu_2 A_2.$$

Загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь (27.5) набуває такого остаточного вигляду:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ q_2 = B_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (27.17)$$

або (27.16), де

$$\begin{cases} q_1^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \\ q_2^{(1)} = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \end{cases} \quad (27.18)$$

$$\begin{cases} q_1^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ q_2^{(2)} = \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (27.19)$$

Коливання, що визначаються законами руху (27.18) і (27.19), називають **головними коливаннями**, а їхні частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$  – називаються **власними частотами** механічної системи. Коливання з частотою  $\omega_1$  (завжди меншій:  $\omega_1 < \omega_2$ ) називають **першим головним коливанням**, а з частотою  $\omega_2$  – **другим головним коливанням**. Числа  $\mu_1$  і  $\mu_2$ , що дорівнюють відношенню амплітуд (або самих координат, бо згідно з (27.9)  $\frac{B}{A} = \frac{q_2}{q_1}$ ) у кожному з цих коливань,

визначають **форми коливань**. Коефіцієнти форм показують, у скільки разів амплітуда відповідного головного коливання в одній з координат більша (чи менша) за амплітуду коливань в іншій координаті.

Усі координати в кожному головному коливанні змінюються за гармонічним законом, маючи однакові частоти і фази. Це означає, що координати одночасно стають рівними нулю і одночасно досягають максимальних значень, причому координати в кожному головному коливанні перебувають у постійному відношенні  $\mu_i$ , яке не залежить від початкових умов.

Кругові частоти коливань  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , а також коефіцієнти власних форм коливань  $\mu_1$  і  $\mu_2$  є основними характеристиками малих коливань системи. [Нагадаємо, що мова йде саме про малі коливання, які описуються лінеаризованими диференціальними рівняннями руху (27.5)]. У частинних випадках за відповідних початкових умов система може здійснювати одне з головних коливань (наприклад, перше, якщо  $A_2 = 0$ ), і тоді коливання буде одночастотним. У загальному випадку результуюче коливання (27.17) не є періодичним, якщо частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$  непорівнянні, тобто якщо не існують цілі

числа  $n_1$  і  $n_2$  такі, що  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}$ . Ці функції (27.18) називають квазіперіодичними.

При розв'язуванні конкретних задач можна, певна річ, користуватись наведеними загальними формулами. Однак корисніше для кожного прикладу всі перетворення виконувати з самого початку окремо. Це пояснюється тим, що метод запам'ятати значно простіше, ніж формули.

### 27.2. Нормальні координати

Розглянемо спеціальну систему узагальнених координат, в якій як кінетична, так і потенціальна енергії системи виражаються додатно означеними квадратичними формами в канонічному вигляді. В ньому немає членів з добутками змінних, тобто додатно означені квадратичні форми є сумою квадратів відповідних змінних.

Одну квадратичну форму можна безліччю способів звести до канонічного вигляду методом, наприклад, виділення квадратів. Проілюструємо його. Квадратична форма

$$2x^2 + 5xy + 4y^2 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}xy + 2y^2\right) = 2\left[\left(x + \frac{5}{4}y\right)^2 + \frac{7}{16}y^2\right]$$

заміною змінних  $\xi = x + \frac{5}{4}y$ ,  $\eta = \frac{\sqrt{7}}{4}y$  зводиться до суми квадратів  $2(\xi^2 + \eta^2)$ .

У нормальній системі координат обидві квадратичні форми  $T$  і  $\Pi$  разом приводяться до канонічного вигляду. В курсах вищої алгебри доводиться теорема: якщо одна з квадратичних форм  $T$  або  $\Pi$  є означеною (в нашому випадку додатно означеною є  $T$ ), то існує лінійне перетворення координат

$$q_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

яке приводить  $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2), \Pi(q_1, q_2)$  одночасно до канонічного вигляду:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \dot{x}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2.$$

Рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$$

стають такими:

$$a_i \ddot{x}_i + c_i x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (27.20)$$

Координати  $x_i$  називають узагальненими координатами.

Механічна система, що розглядається, має  $n$  степенів вільності. Її рух описується в узагальнених координатах системою звичайних диференціальних рівнянь  $2n$ -го порядку. Такий же порядок має і система диференціальних рівнянь (27.20). Проте в нормальних координатах система рівнянь  $2n$ -го

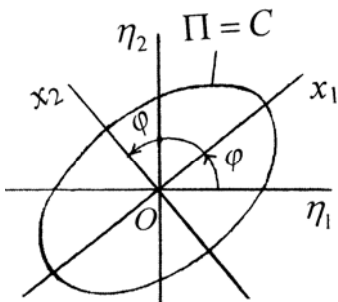


Рис. 27.2

порядку розпадається на  $n$  незалежних диференціальних рівнянь, кожне з яких є другого порядку.

Загальний розв'язок  $i$ -го диференціального рівняння (27.20) має вигляд (21.14), тобто

$$x_i = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (27.21)$$

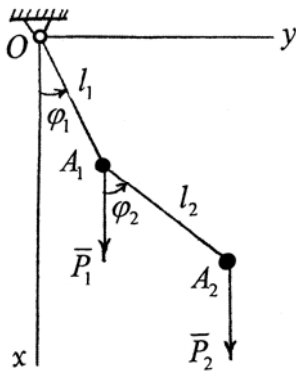


Рис. 27.3

Рух механічної системи в напрямку  $i$ -ї нормальної координати є гармонічним коливанням з круговою частотою  $\omega_i$ . Рух у напрямках узагальнених координат, які є лінійними функціями нормальних координат, є складними коливаннями як результат накладання  $n$  простих, гармонічних коливань.

Розглянемо спочатку механічну систему з  $n=2$  степенями вільності. Це дасть змогу вказати елементарну геометричну інтерпретацію переходу до нормальних координат, яку потім можна поширити на систему з  $n > 2$  степенями вільності. Отже, маємо вирази (27.1) і (27.2) кінетичної і потенціальної енергій в узагальнених координатах. Методом

виділення квадратів приведемо кінетичну енергію до канонічного вигляду:

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} \dot{\xi}_1^2 + A_{22} \dot{\xi}_2^2), \quad A_{11} > 0, \quad A_{22} > 0.$$

В нових змінних

$$\eta_1 = \sqrt{A_{11}} \xi_1, \quad \eta_2 = \sqrt{A_{22}} \xi_2$$

маємо суму квадратів:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2). \quad (27.22)$$

У цій системі координат потенціальна енергія (27.2) виражається, як і раніше, додатно означеною квадратичною формою:

$$\Pi = \frac{1}{2} (d_{11} \eta_1^2 + 2d_{12} \eta_1 \eta_2 + d_{22} \eta_2^2). \quad (27.23)$$

Питання введення нормальних координат звелось до пошуку такого перетворення координат  $\eta_1, \eta_2$ , щоб кінетична енергія зберігала канонічну форму (27.22), а потенціальна енергія (27.23) набула б канонічної форми. Задача знаходження нормальних координат для механічної системи з двома степенями вільності рівнозначна задачі приведення рівняння алгебраїчної кривої другого порядку до канонічної форми. Дійсно, нехай координати  $\eta_1$  і  $\eta_2$  будуть прямокутними декартовими координатами точок на площині. Скористаємось ортогональним перетворенням координат

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, \\ \eta_2 &= x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (27.24)$$

яке зводиться до повороту системи координат  $O\eta_1\eta_2$  навколо початку координат  $O$  на кут  $\varphi$  (рис. 27.2). Косинуси кутів між осями старої  $O\eta_1\eta_2$  і нової  $Ox_1x_2$  систем координат наведено нижче у вигляді таблиці:

$\vec{\eta}$	$\eta_1$	$\eta_2$
$x_1$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
$x_2$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$

Підставимо формули (27.24) у вираз (27.23):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} [d_{11} (x_1^2 \cos^2 \varphi + x_2^2 \sin^2 \varphi - 2x_1 x_2 \sin \varphi \cos \varphi) + d_{22} (x_1^2 \sin^2 \varphi + \\ & + x_2^2 \cos^2 \varphi + 2x_1 x_2 \sin \varphi \cos \varphi) + 2d_{12} (x_1^2 \sin \varphi \cos \varphi + x_1 x_2 \cos 2\varphi - \\ & - x_2^2 \sin \varphi \cos \varphi)] = \frac{1}{2} \{x_1^2 (d_{11} \cos^2 \varphi + d_{22} \sin^2 \varphi + 2d_{12} \sin \varphi \cos \varphi) + \\ & + x_2^2 (d_{11} \sin^2 \varphi + d_{22} \cos^2 \varphi - 2d_{12} \sin \varphi \cos \varphi) + \\ & + 2x_1 x_2 [(d_{22} - d_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + d_{12} \cos 2\varphi]\}. \end{aligned}$$

Виберемо кут повороту  $\varphi$  так, щоб

$$(d_{22} - d_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + d_{12} \cos 2\varphi = 0,$$

тобто

$$\frac{1}{2} (d_{22} - d_{11}) \sin 2\varphi + d_{12} \cos 2\varphi = 0,$$

або

$$(d_{11} - d_{22}) \sin 2\varphi = 2d_{12} \cos 2\varphi.$$

Звідси

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2d_{12}}{d_{11} - d_{22}}. \quad (27.25)$$

Якщо кут  $\varphi$  визначити формулою (27.25), то вираз потенціальної енергії системи набуває канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} [(d_{11} \cos^2 \varphi + d_{22} \sin^2 \varphi + 2d_{12} \sin \varphi \cos \varphi) x_1^2 + \\ & + (d_{11} \sin^2 \varphi + d_{22} \cos^2 \varphi - 2d_{12} \sin \varphi \cos \varphi) x_2^2] = \frac{1}{2} (\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2), \end{aligned}$$

де

$$\omega_1^2 = d_{11} \cos^2 \varphi + d_{22} \sin^2 \varphi + 2d_{12} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\omega_2^2 = d_{11} \sin^2 \varphi + d_{22} \cos^2 \varphi - 2d_{12} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Знайдемо вираз кінетичної енергії системи в нових координатах. Оскільки

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_2 \sin \varphi, \quad \dot{\eta}_2 = \dot{x}_1 \sin \varphi + \dot{x}_2 \cos \varphi,$$

то

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 \cos^2 \varphi + \dot{x}_2^2 \sin^2 \varphi - 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \sin \varphi \cos \varphi + \\ & + \dot{x}_1^2 \sin^2 \varphi + \dot{x}_2^2 \cos^2 \varphi + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \sin \varphi \cos \varphi) = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \end{aligned}$$

Координати  $x_1, x_2$  справді є нормальними, і рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$$

набувають вигляду:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = 0.$$

Загальний розв'язок цих рівнянь замість (27.21) подамо у вигляді (21.15):

$$x_1 = a_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1), \quad x_2 = a_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2).$$

Тут  $\omega_1$  і  $\omega_2$  – кругові частоти власних коливань.

### 27.3. Подвійний математичний маятник у потенціальному силовому полі

Він є узагальненням математичного маятника, що розглядався в підрозділах 22.7 і 26.18. У постановці задачі про дволанковий маятник передбачимо традиційні для одноланкового маятника припущення: ланки ( $OA_1$ ) і ( $A_1A_2$ ) невагомі; їхні довжини незмінні:  $OA_1 = l_1 = \text{const}$ ,  $A_1A_2 = l_2 = \text{const}$ ; шарніри  $O$  і  $A_1$  абсолютно гладенькі (без тертя); шарнір  $O$  нерухомий; обидві ланки рухаються в площині  $xOy$ , тобто рух маятника є плоскопаралельним; матеріальними є лише точки  $A_1$  та  $A_2$ , їхні маси позначимо  $m_1$  і  $m_2$  відповідно. Декартові координати точки  $A_1$  позначимо  $x_1, y_1$ ; точки  $A_2$  –  $x_2, y_2$  (рис. 27.3). Маятник є невідільною механічною системою: чотири декартові координати точок  $A_1$  і  $A_2$  зв'язані двома в'язями:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2. \quad (27.26)$$

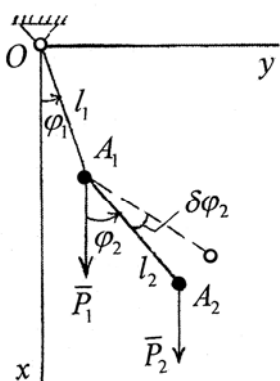


Рис. 27.4

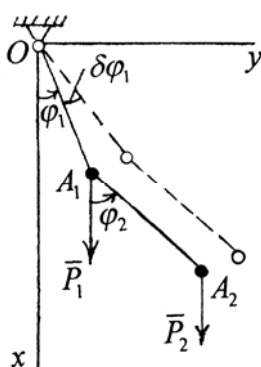


Рис. 27.5

Ці в'язі є утримуючими, ідеальними, стаціонарними. Реакції в'язей (27.26) направлені вздовж відповідних ланок. Кількість степенів вільності дволанкового маятника дорівнює двом. За узагальнені координати маятника доцільно взяти кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , тобто  $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2$ . Ці кути між собою незалежні, оскільки можна змінювати кут  $\varphi_2$ , зберігаючи незмінним

кут  $\varphi_1$ , і навпаки. На рис. 27.4  $\varphi_1 = \text{const}, \varphi_2 = \text{var}$ ; на рис. 27.5  $\varphi_1 = \text{var}$ ,

27. Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги

$\varphi_2 = \text{const}$ . Варіації  $\delta\varphi_1$  і  $\delta\varphi_2$  визначають незалежні між собою віртуальні переміщення маятника. Вирази декартових координат через узагальнені координати є такими:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = l_1 \sin \varphi_1; \\ x_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (27.27)$$

Система складається із двох матеріальних точок. Тому її *кінетична енергія*

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} v_{A_1}^2 + \frac{m_2}{2} v_{A_2}^2, \quad \vec{v}_{A_1} = \vec{i}\dot{x}_1 + \vec{j}\dot{y}_1, \quad \vec{v}_{A_2} = \vec{i}\dot{x}_2 + \vec{j}\dot{y}_2, \\ \dot{x}_1 &= -l_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, \quad \dot{y}_1 = l_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, \quad \dot{x}_2 = -l_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2, \\ \dot{y}_2 &= l_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, \quad v_{A_1}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad v_{A_2}^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \\ &= l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

набуває вигляду:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (27.28)$$

Швидкості точок  $A_1$  і  $A_2$  можна знайти також, врахувавши, що маятник рухається плоскопаралельно:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A_1} &= \vec{\varphi}_1 \times \vec{OA}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 & l_1 \sin \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}\dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 + \vec{j}\dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1, \\ |\vec{v}_{A_1}| &= l_1 \dot{\varphi}_1, \quad (\vec{v}_{A_1})_x = -\dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1, \quad (\vec{v}_{A_1})_y = \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1, \end{aligned}$$

$$\vec{OA}_2 = \vec{OA}_1 + A_1 A_2, \quad \vec{v}_{A_2} = \frac{d(\vec{OA}_2)}{dt} = \vec{v}_{A_1} + \vec{v}_{A_2 A_1},$$

$$\vec{v}_{A_2A_1} = \frac{d(\vec{A}_1A_2)}{dt} = \vec{\dot{\varphi}}_2 \times \vec{A}_1A_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}_2 \\ l_2 \cos \varphi_2 & l_2 \sin \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i}l_2\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \vec{j}l_2\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, \quad \vec{v}_{A_2} = -\vec{i}(l_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) +$$

$$+ \vec{j}(l_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) = \vec{i}\dot{x}_2 + \vec{j}\dot{y}_2.$$

Цей вираз збігається з попереднім.

**Узагальнені сили**, віднесені до узагальнених координат  $\varphi_1, \varphi_2$  і породжені силами ваги  $\vec{P}_1 = \vec{i}m_1g, \vec{P}_2 = \vec{i}m_2g$ , можна обчислити кількома способами.

По-перше, згідно з формулами (26.84)

$$Q_1 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} + Y_2 \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} + Z_2 \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_1} =$$

$$= m_1g(-l_1 \sin \varphi_1) + m_2g(-l_1 \sin \varphi_1) = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1,$$

$$Q_2 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} + Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_2} + Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} + Y_2 \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_2} + Z_2 \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_2} =$$

$$= m_2g(-l_2 \sin \varphi_2) = -m_2gl_2 \sin \varphi_2.$$

По-друге, на підставі формули (26.82)

$$\delta A = m_1g\delta x_1 + m_2g\delta x_2 = m_1g(-l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1) + m_2g(-l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 -$$

$$- l_2 \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2) = -(m_1gl_1 \sin \varphi_1 + m_2gl_1 \sin \varphi_1)\delta \varphi_1 - m_2gl_2 \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 =$$

$$= Q_1\delta \varphi_1 + Q_2\delta \varphi_2, \quad Q_1 = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = -m_2gl_2 \sin \varphi_2.$$

По-третє, скористаємось порадою в підрозділі 26.16: для обчислення  $Q_2$  надамо системі таке віртуальне переміщення, при якому кут  $\varphi_1$  залишається незмінним, а кут  $\varphi_2$  одержить приріст  $\delta \varphi_2$  (рис. 27.4). При такому переміщенні системи роботу виконує тільки сила  $\vec{P}_2$  (точка прикладання  $A_1$  сили  $\vec{P}_1$  залишилась у колишньому положенні). Роботу  $\delta A_2$  сили  $\vec{P}_2$  на віртуальному переміщенні, зумовленому варіаціями  $\delta \varphi_1 = 0, \delta \varphi_2 \neq 0$ , обчислимо як роботу сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $A_1z$ :

$$\delta A_2 = \text{mom}_{A_1z}(\vec{P}_2) \cdot \delta \varphi_2, \quad \text{mom}_{A_1z}(\vec{P}_2) = -P_2l_2 \sin \varphi_2 =$$

$$= -m_2gl_2 \sin \varphi_2, \quad \delta A_2 = -m_2gl_2 \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 = Q_2\delta \varphi_2.$$

Отже,

$$Q_2 = -m_2gl_2 \sin \varphi_2.$$



27. Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги

Для обчислення узагальненої сили  $Q_1$  надамо системі віртуальне переміщення, при якому  $\delta\varphi_1 \neq 0, \delta\varphi_2 = 0$  (рис. 27.5). Обертальні переміщення точок  $A_1$  і  $A_2$  однакові, оскільки при незмінному куті  $\varphi_2$  другий стержень ( $A_1A_2$ ) переміщується поступально. Роботу виконують обидві сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , тому  $\delta A_1 = (\delta A_1)_1 + (\delta A_1)_2$ . За аналогією з попереднім,

$$(\delta A_1)_1 = \text{mom}_{O_z}(\vec{P}_1) \cdot \delta\varphi_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta\varphi_1.$$

Віртуальна робота сили  $\vec{P}_2$  отримується заміною  $m_1 \rightarrow m_2$ :

$$(\delta A_1)_2 = \text{mom}_{O_z}(\vec{P}_2) \cdot \delta\varphi_1 = -m_2 g l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta\varphi_1.$$

Сумарна робота обох сил

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 = \\ &= Q_1 \cdot \delta\varphi_1. \end{aligned}$$

Звідси

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

Ці вирази збігаються з раніше отриманими.

По-четверте, скористаємось потенціальністю обох сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ . За формулами (26.86),

$$\begin{aligned} X_1 = (\vec{P}_1)_x &= m_1 g = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}, \quad U_1 = m_1 g x_1 + C_1, \quad U_1 = m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + C_1, \\ \Pi_1 &= -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - C_1. \end{aligned}$$

Вважаючи потенціальну енергію в положенні рівноваги рівною нулю, маємо:

$$\Pi_1|_{\varphi_1=0} = 0 \Rightarrow C_1 = -m_1 g l_1.$$

Звідси

$$\Pi_1 = m_1 g l_1 (1 - \cos \varphi_1).$$

Аналогічно

$$X_2 = (\vec{P}_2)_x = m_2 g = \frac{\partial U_2}{\partial x_2}, \quad U_2 = m_2 g x_2 + C_2, \quad U_2 = m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) + C_2, \quad \Pi_2 = -m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) - C_2, \\ \Pi_2|_{\varphi_1=0, \varphi_2=0} = 0 \Rightarrow C_2 = -m_2 g (l_1 + l_2), \\ \Pi_2 = -m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) + m_2 g (l_1 + l_2).$$

Потенціальна енергія обох силових полів

$$\Pi = (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos \varphi_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos \varphi_2). \quad (27.29)$$

Вираз (27.29) одержано за припущення, що за ненульовий береться рівень у вертикальному положенні маятника:

$$\Pi|_{\varphi_1=0, \varphi_2=0} = 0. \quad (27.30)$$

На підставі формули (22.42)

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = -A_{(M_{\Pi} M_K)} = A_{(M_K M_{\Pi})},$$

тобто потенціальна енергія (27.29) дорівнює роботі, яку сили  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  можуть виконати при переміщенні маятника з даного положення  $\varphi_1, \varphi_2$  у нижнє вертикальне положення:  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ . Замість умови (27.30) можна брати за нульовий рівень потенціальної енергії той, який маємо в горизонтальному положенні ланок:

$$\Pi|_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}, \varphi_2=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Тоді

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2. \quad (27.31)$$

Цей вираз є роботою сил  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  при переміщенні маятника із даного положення  $\varphi_1, \varphi_2$  в горизонтальне положення. В обох випадках [і (27.29), і (27.31)] маємо:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1, \\ Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

На підставі виразу (27.28) кінетичної енергії знаходимо:

27. Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2).\end{aligned}$$

Після перетворень диференціальні рівняння Лагранжа другого роду (26.94) для подвійного математичного маятника набувають вигляду:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \\ \quad + (m_1 + m_2)g \sin \varphi_1 = 0, \\ l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1^2 + g \sin \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (27.32)$$

У стані рівноваги (спокою) маятника  $\dot{\varphi}_1 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0, \ddot{\varphi}_1 = 0, \ddot{\varphi}_2 = 0$ . Тому рівняння рівноваги маятника є такими:

$$\begin{cases} \sin \varphi_1 = 0, \\ \sin \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (27.33)$$

Система (27.33) має розв'язок:

$$\varphi_1 = 0; \varphi_1 = \pi; \varphi_2 = 0, \varphi_2 = \pi.$$

Таким чином, подвійний маятник у потенціальному силовому полі має чотири положення рівноваги:

- 1)  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ ; 2)  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$ ;
- 3)  $\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$ ; 4)  $\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = \pi$ .

**Теорема Лагранжа–Діріхле:** якщо в положенні ізольованої рівноваги консервативної системи з ідеальними і стаціонарними в'язями потенціальна енергія має мінімум, то це положення рівноваги є стійким.

**Теорема Четаєва:** якщо в ізольованому положенні рівноваги потенціальна енергія є аналітичною функцією узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$  і не має мінімуму, то рівновага нестійка.

З чотирьох положень рівноваги подвійного маятника тільки для першого положення потенціальна енергія [яка визначається будь-яким із виразів (27.29) або (27.31)] в положенні рівноваги досягає мінімуму і, отже, лише воно є стійким.

Якщо користуватись виразом (27.29), то цей мінімум дорівнює 0; якщо ж виразом (27.31), то він дорівнює  $-(m_1 + m_2)gl_1 - m_2gl_2$ .

Обмежуючись членами не вище другого порядку малості, знаходимо з виразу (27.29):

$$\begin{aligned} \Pi &= (m_1 + m_2)gl_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) \right] + m_2gl_2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [(m_1 + m_2)gl_1\varphi_1^2 + m_2gl_2\varphi_2^2] \end{aligned} \quad (27.34)$$

з виразу (27.31) маємо:

$$\begin{aligned} \Pi &= -(m_1 + m_2)gl_1 \left( 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) - m_2gl_2 \left( 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \right) = \\ &= -(m_1 + m_2)gl_1 - m_2gl_2 + \frac{1}{2} [(m_1 + m_2)gl_1\varphi_1^2 + m_2gl_2\varphi_2^2] \end{aligned} \quad (27.35)$$

Якщо у формулі (27.35) відкинути постійні доданки, то (27.35) збігається з (27.34).

Лінеаризуючи динамічні рівняння (27.32) в околі стійкого положення рівноваги  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ , для невеликих кутових відхилень ланок подвійного маятника від рівноважних значень отримаємо рівняння:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)g\varphi_1 = 0, \\ l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (27.36)$$

Частинний розв'язок системи (27.36) шукаємо у вигляді (27.9):

$$\varphi_1 = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \varphi_2 = B \sin(\omega t + \alpha). \quad (27.37)$$

Кожній круговій частоті  $\omega$  маятника відповідають свої значення амплітуд коливань, які задовольняють системі

$$\begin{cases} -A\omega^2(m_1 + m_2)l_1 - B\omega^2m_2l_2 + A(m_1 + m_2)g = 0, \\ -A\omega^2l_1 - B\omega^2l_2 + Bg = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} A(m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) - Bm_2l_2\omega^2 = 0, \\ -Al_1\omega^2 + B(g - l_2\omega^2) = 0. \end{cases} \quad (27.38)$$

Необхідною і достатньою умовою існування нетривіального розв'язку системи (27.38) є рівність нулю її визначника:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) & -m_2l_2\omega^2 \\ -l_1\omega^2 & g - l_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$m_1l_1l_2\omega^4 - g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)\omega^2 + (m_1 + m_2)g^2 = 0. \quad (27.39)$$

Подальші викладки в загальному вигляді виконувати нераціонально: потрібно вказувати числові значення параметрів маятника або їх співвідношення. Нехай ланки маятника однакові:

$$m_1 = m_2 = m, \quad l_1 = l_2 = l,$$

тоді рівняння частот (27.39) стає таким:

27. Малі коливання систем з двома степенями вільності навколо положення рівноваги

$$\omega^4 - \frac{4g}{l}\omega^2 + \frac{2g^2}{l^2} = 0.$$

Позначивши  $\Omega = \omega^2$ , одержуємо квадратне рівняння відносно шуканої  $\Omega$ :

$$\Omega^2 - \frac{4g}{l}\Omega + \frac{2g^2}{l^2} = 0.$$

Двом його кореням

$$\Omega_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}, \quad \Omega_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}$$

відповідають дві кругові частоти маятника

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}}. \quad (27.40)$$

Для відношення амплітуд  $\frac{B}{A}$  з другого рівняння (27.38) отримуємо:

$$\frac{B}{A} = \frac{l_1\omega^2}{g - l_2\omega^2}.$$

Для кожної кругової частоти (27.40) дістаємо:

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \frac{B_1}{A_1} = \frac{l_1\omega_1^2}{g - l_2\omega_1^2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2},$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \frac{B_2}{A_2} = \frac{l_1\omega_2^2}{g - l_2\omega_2^2} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\frac{(2 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = -\sqrt{2}.$$

Отже,

$$B_1 = \sqrt{2}A_1, \quad B_2 = -\sqrt{2}A_2.$$

Коефіцієнти  $\frac{B_i}{A_i} = \mu_i$  власних форм коливань дволанкового маятника є

такими:  $\mu_1 = \sqrt{2}$ ,  $\mu_2 = -\sqrt{2}$ . На підставі розв'язку (27.37) двом круговим частотам  $\omega_1$  і  $\omega_2$  відповідають частинні лінійно незалежні розв'язки системи диференціальних рівнянь (27.36):

$$\begin{cases} \varphi_1^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \\ \varphi_2^{(1)} = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \end{cases} \quad (27.41)$$

та

$$\begin{cases} \varphi_1^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2^{(2)} = \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (27.42)$$

Загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь (27.36) є лінійною комбінацією частинних розв'язків:

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2 = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (27.43)$$

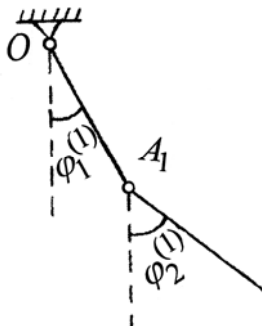
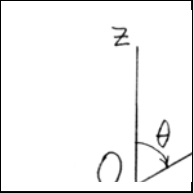


Рис. 27.6

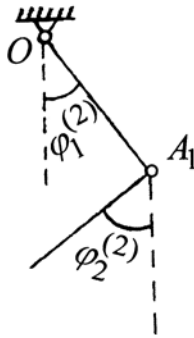


Рис. 27.7

де  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  – довільні сталі інтегрування, які знаходяться із початкових умов. Кругові частоти  $\omega_1, \omega_2$  і коефіцієнти  $\mu_1, \mu_2$  визначають власні форми коливань. На рис. 27.6 зображено першу головну форму коливань (27.41), на рис. 27.7 – другу головну форму коливань (27.42).

### Питання для самоконтролю

1. Що називають узагальненими жорсткостями? Якими можуть бути їхні значення в частинних випадках?
2. Сформулюйте необхідні і достатні умови додатно означеності квадратичної форми.
3. Що називають головними коливаннями системи з двома степенями вільності? власними частотами?
4. Який зміст коефіцієнтів форм коливань?
5. Який вигляд мають кінетична та потенціальна енергії системи з двома степенями вільності в нормальних координатах?
6. Наведіть достатні умови стійкості положення рівноваги консервативної системи.
7. Те ж саме для нестійкості.
8. Якими є головні форми коливань подвійного математичного маятника?

---

## Частина 6. Елементи теорії динамічних систем

### 28. Основні сучасні методи аналізу руху

У попередніх розділах висвітлено основи так званої класичної механіки.

У цьому розділі зроблено спробу перекинути місток між класичною і сучасною теоретичною механікою. Основним надбанням останньої є динамічні системи – поняття, яке об'єднало практично всі галузі науки, в яких вивчаються змінні з часом процеси. Нині поняття динамічної системи набуло міждисциплінарного характеру. Такі надбання теорії динамічних систем, як біфуркації та катастрофи стаціонарних станів, біфуркації граничних циклів, детермінований хаос, біфуркація народження із стійкого періодичного розв'язку стійкого двовимірного тора широко використовуються в різних галузях сучасної науки та техніки.

Мета авторів – ознайомити випускників університетів з цими поняттями та методами дослідження, оскільки без знання основ сучасної теорії динамічних систем неможливим є формування повноцінного інженера чи науковця.

#### 28.1. Поняття динамічної системи. Означення та приклади

У сучасній науці *динамічною системою* називають математичну модель будь-якого природного чи штучного утворення, яке змінюється з плином часу. Реальна природа динамічної системи може бути досить різноманітною, оскільки все у Всесвіті змінюється: тіла змінюють свою форму чи своє положення, чи одне й друге відразу. Сонячна система, Галактика, автомобіль, вагон, літак, ракета, човен, фізичний маятник, кривошипний механізм, економічна, екологічна чи фінансова система певного регіону – все це динамічні системи.

Історично першою і до того ж гладенькою динамічною системою є механічна система з кількома степенями вільності. Механічний стан цієї системи характеризується положенням (конфігурацією) і швидкістю зміни останнього. В простих випадках стан системи можна описувати узагальненими (криволінійними, лагранжевими) координатами  $q_1, q_2, \dots, q_N$  і узагальненими швидкостями  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$ . Величини, що характеризують положення і швидкості, називаються фазовими координатами, або змінними стану. Позначимо їх  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Крива,

що описується динамічною системою з плином часу у просторі змінних стану, називається фазовою траєкторією.

Абстрагуючись від конкретного змісту, Дж.Д.Біркгоф у 1927 р. назвав **динамічною системою** систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda). \end{cases} \quad (28.1)$$

Тут  $t$  – час,  $\frac{d}{dt} = \left( \cdot \right)$ ,  $\lambda$  – параметр.

Розв'язком динамічної системи (28.1) називається сукупність функцій  $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$  таких, що після заміни

$$x_1 = F_1(t), x_2 = F_2(t), \dots, x_n = F_n(t) \quad (28.2)$$

кожне з рівнянь системи перетворюється на тотожність відносно аргументу  $t$ . Практично важливим є випадок:

$$F_i(t) = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (28.3)$$

Залежно від конкретного змісту величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  розв'язок (28.3) можна інтерпретувати як стаціонарний стан динамічної системи або ж стан її рівноваги.

**Приклади. 1.** Нехай еволюція живого організму в середовищі без конкурентів при необмеженій кількості їжі відбувається за законом

$$\frac{dN}{dt} = bN, \quad N|_{t=0} = N_0. \quad (28.4)$$

Тоді

$$N = N_0 e^{bt}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty.$$

За аналогічним законом відбувається розмноження бактерій. Станів рівноваги в динамічній системі (28.4) не існує, оскільки функція  $N(t)$  необмежено зростає з плином часу.

**2.** Врахуємо наявність конкурента, тобто розглянемо пару хижак – жертва (наприклад, вовки – зайці, щуки – карасі, гризуни – трава), або відносини запит – задовільник чи споживання – відтворення. Якщо, наприклад,  $N_1$  – популяція зайців,  $N_2$  – популяція вовків, то еволюція двовимірної динамічної системи може відбуватись за законом: ( $N_1 \neq 0, N_2 \neq 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = b_1 N_1 - a_1 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -b_2 N_2 + a_2 N_1 N_2. \end{cases} \quad (28.5)$$

Якщо в (28.4) знехтувати взаємодією (взаємним впливом) змінних  $N_1$  і  $N_2$ , тобто вважати  $a_1 = 0, a_2 = 0$ , то система рівнянь (28.5) розпадеться на два незалежні рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = b_1 N_1 &\Rightarrow N_1 = N_{10} e^{b_1 t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} N_1(t) = +\infty, \\ \frac{dN_2}{dt} = -b_2 N_2 &\Rightarrow N_2 = N_{20} e^{-b_2 t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} N_2(t) = 0, \end{aligned}$$



тобто популяція вовків зникає, зайців – необмежено зростає. Насправді чисельність вовків і зайців у конкретному ареалі коливається навколо певних значень! Це тому, що динамічна система (28.5) має стан рівноваги:

$$\dot{N}_1 = 0 \Rightarrow b_1 N_1^* = a_1 N_1^* N_2^* \Rightarrow N_2^* = \frac{b_1}{a_1}, \quad (28.6)$$

$$\dot{N}_2 = 0 \Rightarrow b_2 N_2^* = a_2 N_1^* N_2^* \Rightarrow N_1^* = \frac{b_2}{a_2}.$$

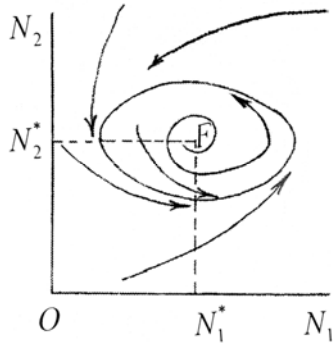


Рис. 28.1

Тому система (28.5) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = a_1 N_1 (N_2^* - N_2), \\ \dot{N}_2 = a_2 N_2 (N_1 - N_1^*). \end{cases} \quad (28.7)$$

Зменшення порівняно з  $N_1^*$  кількості зайців спричинить голод і, отже, вимирання певної кількості вовків. Зменшення популяції вовків приведе до збільшення чисельності зайців. Завдяки цьому в ареалі відбувається співіснування вовків і зайців при коливанні їхньої чисельності навколо

точки рівноваги  $F$ . Стрілками на рис. 28.1 показано напрямки зміни з плином часу функцій  $N_1(t)$  і  $N_2(t)$ .

Зазначимо, що систему двох диференціальних рівнянь (28.7) можна звести, наприклад, до такого диференціального рівняння:

$$\ddot{N}_1 - \frac{\dot{N}_1^2}{N_1} - a_2 \dot{N}_1 (N_1 - N_1^*) + a_1 a_2 N_2^* N_1 (N_1 - N_1^*) = 0. \quad (28.8)$$

Популяція вовків впливає на розв'язки рівняння (28.8) через параметри  $a_2, N_2^*$ .

## 28.2. Побудова стаціонарних станів динамічних систем методом продовження за параметром

До стаціонарних, або усталених рухів (рухів, що установились) належать стани рівноваги (в сенсі спокою – підрозділ 26.12), а також рівномірні та прямолінійні (чи обертальні) рухи. Всі такі рухи поєднує те, що їм відповідають постійні значення змінних стану системи. Якщо узагальнена координата механічної системи не є циклічною, то у стаціонарному русі вона є сталою. Якщо ж ця координата циклічна, то сталою є її похідна за часом, а сама вона є лінійною функцією часу.

Згідно з цією термінологією, до якої, зокрема, можна прийти після ознайомлення з монографією основоположника теорії стійкості руху О.М. Ляпунова “Общая задача об устойчивости движения” [19], періодичні рухи належать до нестаціонарних, або неусталених, рухів. Там, де це не спричинює непорозумінь, замість терміна “стаціонарні стани” будемо вживати термін “стани рівноваги” (які, взагалі, є частинними випадками стаціонарних станів).

Нижче викладено метод японського автора Y. Shinohara [34]. Ідея методу: знайшовши якимось чином (точно або наближено) стан рівноваги при одному значенні параметра, звести задачу пошуку решти станів рівноваги до розв'язання

задачі Коші. Область існування станів рівноваги наперед невідома: необхідно встановити, при яких значеннях параметра  $\lambda$  система скінченних рівнянь

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (28.9)$$

має розв'язок і знайти його. Будемо вважати ранг матриці Якобі  $\left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\|$  рівним  $n$ .

У  $n+1$ -вимірному просторі змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  і параметра  $\lambda$  система (28.9) може визначати певну криву лінію ( $L$ ) – криву станів рівноваги динамічної системи (28.1):

$$x_1 = x_1(\lambda), x_2 = x_2(\lambda), \dots, x_n = x_n(\lambda).$$

Параметризуємо її власною дуговою координатою  $s$ , тобто запишемо параметричні рівняння кривої ( $L$ ) у формі

$$x_1 = x_1(s), \dots, x_n = x_n(s), \lambda = \lambda(s). \quad (28.10)$$

На цій кривій, очевидно, справедливі співвідношення

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds} + \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0. \end{cases} \quad (28.11)$$

Відносно  $n+1$  невідомих  $\frac{dx_1}{ds}, \dots, \frac{dx_n}{ds}, \frac{d\lambda}{ds}$  система (28.11) є системою  $n$  лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, тобто такою, в якій кількість невідомих на 1 перевищує кількість рівнянь. Такі системи мають нескінченну кількість розв'язків, які можуть утворювати одно- або багатопараметричну сім'ю розв'язків [7, 11].

Спочатку розглянемо  $n=2$ : це дозволяє дати прозору геометричну інтерпретацію математичним викладкам. Системи (28.9) і (28.11) набувають вигляду:

$$f_1(x_1, x_2, \lambda) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, \lambda) = 0, \quad (28.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0. \end{cases} \quad (28.13)$$

Позначивши

$$a_x = \frac{dx_1}{ds}, \quad a_y = \frac{dx_2}{ds}, \quad a_z = \frac{d\lambda}{ds}, \quad b_x = \frac{\partial f_1}{\partial x_1},$$

$$b_y = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad b_z = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}, \quad c_x = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad c_y = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad c_z = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda},$$

подамо рівняння (28.13) так:

$$b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = 0, \quad c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z = 0. \quad (28.14)$$

Увівши вектори

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \quad \vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$$

умови (28.14) можна інтерпретувати таким чином:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}.$$

Звідси

$$\vec{a} = \beta \vec{b} \times \vec{c} = \beta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$$a_x = \beta(b_y c_z - b_z c_y), \quad a_y = \beta(b_z c_x - b_x c_z), \quad a_z = \beta(b_x c_y - b_y c_x),$$

$$\frac{dx_1}{ds} = \beta \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right), \quad \text{або} \quad \frac{dx_2}{ds} = \beta \left( \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \right),$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \beta \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right).$$

Якщо

$$D_1 = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, \lambda)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, \lambda)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, x_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

трактувати як якобіани функцій  $f_1, f_2$  за відповідними змінними, то

$$\frac{dx_1}{ds} = \beta D_1, \quad \frac{dx_2}{ds} = -\beta D_2, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \beta D_3. \quad (28.15)$$

Оскільки квадрат лінійного елемента кривої ( $L$ ) у просторі змінних  $x_1, x_2, \lambda$  задовольняє умові

$$dx_1^2 + dx_2^2 + d\lambda^2 = 1,$$

то

$$\left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 = 1.$$

Звідси

$$\beta^2 (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) = 1, \quad \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}.$$

Два знаки коефіцієнта  $\beta$  відповідають двом протилежним напрямкам обходу кривої станів рівноваги ( $L$ ). Отже,

$$\frac{dx_1}{ds} = \pm \frac{D_1}{D}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \mp \frac{D_2}{D}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \pm \frac{D_3}{D}, \quad D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}. \quad (28.16)$$

Нехай відомо розв'язок  $x_{10}, x_{20}$  системи (28.12) при деякому значенні  $\lambda_0$  параметра  $\lambda$ :

$$f_1(x_{10}, x_{20}, \lambda_0) \equiv 0, \quad f_2(x_{10}, x_{20}, \lambda_0) \equiv 0.$$

Точка  $(x_{10}, x_{20}, \lambda_0) \in (L)$  є стартовою. Вибравши верхній знак у (28.16), маємо для побудови кривої  $(L)$  наступну задачу Коші:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{dx_2}{ds} = -\frac{D_2}{D}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{D_3}{D}, \quad (28.17)$$

$$x_1|_{s=0} = x_{10}, \quad x_2|_{s=0} = x_{20}, \quad \lambda|_{s=0} = \lambda_0. \quad (28.18)$$

Вся крива  $(L)$  отримується долученням до кривої (26.17), (28.18) також кривої лінії, що одержується при розв'язанні ще однієї задачі Коші:

$$\frac{dx_1}{ds} = -\frac{D_1}{D}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{D_2}{D}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{D_3}{D},$$

$$x_1|_{s=0} = x_{10}, \quad x_2|_{s=0} = x_{20}, \quad \lambda|_{s=0} = \lambda_0.$$

Обидві криві взаємно симетричні відносно стартової точки. Зауважимо нарешті, що

$$\frac{dx_1}{ds} : \frac{dx_2}{ds} : \frac{d\lambda}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

для обох гілок кривої  $(L)$ .

Наведемо *ще один, прямий або безпосередній підхід* до розгляду системи (28.13). Якщо

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то за формулами Крамера

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{d_1}{d}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{d_2}{d}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{vmatrix} \frac{d\lambda}{ds},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{vmatrix} \frac{d\lambda}{ds}.$$

Отже,

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{D_1}{D_3} \frac{d\lambda}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds} = -\frac{D_2}{D_3} \frac{d\lambda}{ds}.$$

В системі (28.13) кількість невідомих  $\frac{dx_1}{ds}$ ,  $\frac{dx_2}{ds}$ ,  $\frac{d\lambda}{ds}$  на одиницю перевищує кількість рівнянь. При  $d \neq 0$  вона має нескінченну кількість розв'язків, оскільки одна невідома  $\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)$  може набувати довільних значень. Покладемо

$$\frac{dx_1}{ds} = \beta D_3.$$

Тоді

$$\frac{dx_1}{ds} = \beta D_1, \quad \frac{dx_2}{ds} = -\beta D_2, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \beta D_3.$$

Ці формули збігаються із знайденими раніше іншим способом формулами (28.15).

**У випадку**  $n=3$  одна з гілок лінії  $(L)$  описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{ds} = -\frac{D_1}{D}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{D_2}{D}, \quad \frac{dx_3}{ds} = -\frac{D_3}{D}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{D_4}{D},$$

$$D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2},$$

$$D_1 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_2, x_3, \lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \end{vmatrix}},$$

$$D_2 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_3, \lambda)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}},$$

$$D_3 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, \lambda)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}},$$

або

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{(-1)^i D_i}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, 4). \quad (28.19)$$

Повертаючись до випадку довільного  $n$ , скористаємось відомими положеннями лінійної алгебри. Нехай ранг системи  $n-1$  лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з  $n$  невідомими

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (28.20)$$

дорівнює  $n-1$ . За її нетривіальний розв'язок можна взяти сукупність мінорів, що одержуються з матриці  $\|a_{ij}\|_{n-1}^n$  почерговим викреслюванням кожного стовпчика, причому ці мінори беруться зі знаками, які чергуються. Такий розв'язок утворює фундаментальну систему розв'язків, і всі інші розв'язки йому пропорційні. Загальний розв'язок системи (28.20) має вигляд

$$x_j = \alpha A_{kj} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (28.21)$$

де  $A_{kj}$  – алгебраїчне доповнення елемента  $a_{kj}$  у визначнику  $\Delta$ , причому  $k$  вибрано так, щоб хоча одне із  $A_{kj}$  не дорівнювало нулю;  $\alpha$  – довільна стала. Розв'язки, що одержуються при різних  $k$ , тотожні.

Зіставляючи системи (28.11) і (28.20), маємо формальні відповідності:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \rightarrow a_{ij}, \quad \frac{dx_j}{ds} \rightarrow x_j.$$

Тому стосовно системи

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds} + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

вирази (28.21) набувають вигляду (якщо прийняти  $k = n$  та включити множник  $(-1)^n$  у довільну сталу) [7]:

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{ds} &= \alpha(-1)^j \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \alpha(-1)^{n+1} \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.\end{aligned}\tag{28.22}$$

### 28.3. Стійкість руху

Стійкість – фундаментальне поняття динамічних систем. Загальноприйнятими у світі є означення і методи дослідження, запропоновані видатним механіком і математиком О.М.Ляпуновим (25.05.1857 – 3.11.1918), творче життя якого пов'язане з Петербургом, Харковом і знову Петербургом. Останні роки життя пройшли в Одесі, Новоросійську. Його життя трагічно обірвалося після смерті дружини.

Основна робота [19] була надрукована Харківським математичним товариством у 1892 р. і захищена в Московському університеті 30.09.1892 р. як дисертація на науковий ступінь доктора прикладної математики. В 1907 р. в журналі “Annales de la Faculte des sciences de l'Université de Toulouse” з'явився її французький переклад. Низка доповнень до неї була зроблена як самим О.М. Ляпуновим, так і його послідовниками у ХХ ст. Статті О.М. Ляпунова, що доповнюють основоположну роботу [19] і увійшли в [20], були надруковані свого часу в різних періодичних журналах Росії та Франції.

У повсякденному житті, характеризуючи різні явища, процеси, люди часто говорять “стійкий”, “стабільний”, не особливо переймаючись точним змістом цих слів і часто трактуючи стійкість як здатність долати перешкоди, протидіяти їм. Саме таке інтуїтивне, “життєве” уявлення про стійкість вкладається у вирази: “Політ ракети стійкий”, “долар – стабільна (стійка) грошова одиниця”. На основі підрозділів 22.7, 25.10 можна сказати, що при врахуванні лінійно-в'язкого тертя в шарнірі нижнє положення рівноваги  $\varphi = 0$  фізичного маятника

$$I\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + mga \sin \varphi = 0,$$

а також розв'язок  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$  динамічної системи

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{mg}{I} \sin \varphi_1 - \frac{2\mu}{I} \varphi_2\end{aligned}\tag{28.23}$$

є стійкими, тоді як верхнє положення рівноваги  $\varphi = \pi$  маятника, а також розв'язок  $\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$  цієї динамічної системи є нестійкими.

Кожний стаціонарний (а також нестаціонарний) стан динамічної системи може бути стійким або нестійким. Стійкість є необхідною умовою реалізованості стану. Якби не було стійких явищ і процесів, життя було б неможливим, оскільки в реальних системах перешкоди, “збурення” є завжди. В цьому проявляється діалектика життя.

Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – величини, що описують стан системи (змінні стану, фазові координати);  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$  – фазові швидкості;  $x_{10} = x_1|_{t=t_0}, x_{20} = x_2|_{t=t_0}, \dots, x_{n0} = x_n|_{t=t_0}$  – початкові значення;  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  – відомі функції, задані в певній області фазового простору. Вони відображають закони, які регламентують певні об'єктивні процеси (наприклад, закони руху механічної системи). Прирівнюючи вказані функції фазовим швидкостям, одержуємо динамічну систему

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (28.24)$$

Нехай, далі, функції  $X_i$  задовольняють умовам, за яких розв'язок системи (28.24) існує і він єдиний

$$x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), \dots, x_n = f_n(t). \quad (28.25)$$

Тут

$$x_{10} = f_1(t_0), x_{20} = f_2(t_0), \dots, x_{n0} = f_n(t_0). \quad (28.26)$$

$$\frac{df_i}{dt} \equiv X_i(f_1, f_2, \dots, f_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (28.27)$$

Розв'язок (28.25) системи (28.24) О.М.Ляпунов назвав **незбуреним розв'язком**, а рух, що описується функціями (28.25) – **незбуреним рухом**. Інші початкові умови, можливі для системи при тих же силах

$$x_1|_{t=t_0} = f_1(t_0) + \varepsilon_1, x_2|_{t=t_0} = f_2(t_0) + \varepsilon_2, \dots, x_n|_{t=t_0} = f_n(t_0) + \varepsilon_n, \quad (28.28)$$

породять інший розв'язок системи та інший рух. Частинний розв'язок системи (28.24) (і відповідний рух), що породжуються зміненими початковими умовами (28.28), називаються збуреним розв'язком і збуреним рухом. Значення змінних у збуреному русі позначимо  $y_i$ . Різниця значень змінних для незбуреного та збуреного рухів

$$x_i - y_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (28.29)$$

називаються збуреннями. Диференціальні рівняння, яким задовольняють відхилення

$$y_i = x_i(t) - f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

називаються диференціальними рівняннями збуреного руху. Щоб знайти їх, слід у системі (28.24) замінити змінні за формулами (28.29):

$$\dot{y}_i + \frac{df_i}{dt} = X_i(f_1 + y_1, f_2 + y_2, \dots, f_n + y_n). \quad (28.30)$$

Будемо розглядати лише випадки, коли праві частини рівнянь (28.30) можна представити рядами Тейлора:



$$\dot{y}_i + \frac{df_i}{dt} = X_i(f_1, f_2, \dots, f_n) + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \right)_0 y_1 + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_2} \right)_0 y_2 + \dots + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \right)_0 y_n + X_i^*(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

де  $X_i^*$  – сукупності членів, що залежать від відхилень  $y_j$  в степені вищому за перший,

$$\left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0 = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x_1=f_1, \dots, x_n=f_n}.$$

З урахуванням тотожностей (28.27) отримуємо:

$$\dot{y}_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n + X_i^*(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (28.31)$$

де

$$a_{i1} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \right)_0, \quad a_{i2} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_2} \right)_0, \quad \dots, \quad a_{in} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \right)_0.$$

Незбурений рух називається **стійким** по відношенню до змінних  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), якщо для будь-якого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  існує додатне число  $\delta = \delta(\varepsilon)$  таке, що для всіх збурених рухів, для яких у початковий момент часу  $t_0$  виконуються нерівності

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (28.32)$$

для всіх  $t > t_0$  виконуються нерівності

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (28.33)$$

О.М. Ляпунову належить ще одне означення. Незбурений рух називається **асимптотично стійким** по відношенню до змінних  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), якщо він стійкий і при цьому будь-який збурений рух при достатньо малих початкових збуреннях прагне до незбуреного руху, тобто

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_i(t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (28.34)$$

Якщо всі відхилення дорівнюють нулю:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad \dots, \quad y_n = 0,$$

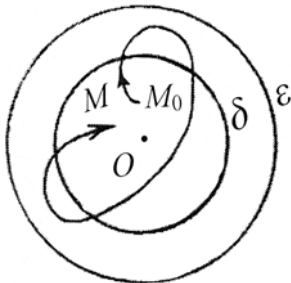


Рис. 28.2

то збурений розв'язок ( $i$  рух)  $y_i(t)$  буде збігатися з незбуреним розв'язком ( $i$  рухом)  $f_i(t)$ ; іншими словами, незбуреному розв'язку ( $i$  рухові) відповідають нульові значення змінних  $y_i$ .

Замість умов (28.32) і (28.33) інколи означення Ляпунова беруть у такій формі. Якщо по довільному додатному числу  $\varepsilon$ , яким би малим воно не було, можна знайти таке додатне число  $\delta(\varepsilon)$ , що при всіх збуреннях  $y_{i0} = y_i(t_0)$ , які задовольняють умові

$$\sum_{i=1}^n y_{i0}^2 \leq \delta,$$

виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 < \varepsilon$$

при довільних  $t \geq t_0$ , то незбурений рух **стійкий**, у протилежному випадку – **нестійкий** за Ляпуновим.

Геометрична інтерпретація останнього означення є наступною. Сукупність чисел  $y_1, y_2, \dots, y_n$  в  $n$ -вимірному просторі визначає точку цього простору (вона називається зображувальною). Розглянемо сферу  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \varepsilon$ . Виберемо радіус  $\sqrt{\varepsilon}$  сфери достатньо малим. Якщо рух стійкий, то для цієї сфери має знайтись інша сфера  $\sum_{i=1}^n y_{i0}^2 = \delta$  радіусом  $\sqrt{\delta}$  така, що зображувальна точка  $M$ , почавши свій рух з довільного положення  $M_0$ , що лежить всередині чи на поверхні сфери радіусом  $\sqrt{\delta}$ , при своєму подальшому русі завжди залишається всередині сфери радіусом  $\sqrt{\varepsilon}$ , ніколи не досягаючи її поверхні. На рис. 28.2 сфери радіусами  $\sqrt{\delta}$  і  $\sqrt{\varepsilon}$  (внутрішня і зовнішня) позначені як  $\delta$ -сфера і  $\varepsilon$ -сфера відповідно.

#### 28.4. Атрактори та їхні області притягування

Задача про стійкість за Ляпуновим розв'язку  $x = x_* = \text{const}$  векторного рівняння

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in R^n, \quad \lambda \in R^k, \quad f : R^n \times R^k \rightarrow R^n, \quad (28.35)$$

де  $x \in R^n$  – вектор станів динамічної системи,  $\lambda \in R^k$  – постійний вектор параметрів,  $f(x_*, \lambda) = 0$ , в некритичних випадках розв'язується, наприклад, знаходженням власних значень матриці Якобі

$$\left\| \frac{D(f_1(x_*, \lambda), f_2(x_*, \lambda), \dots, f_n(x_*, \lambda))}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right\|.$$

Однак нелінійність функції  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  може призвести до того, що одному вектору  $\lambda$  відповідає декілька векторів  $x_*$ , так що виникає нетривіальне питання про області притягування кожного із розв'язків  $x_*$  у фазовому просторі. Без знання останніх формулювання практичних рекомендацій на основі одних лише умов стійкості не може бути повноцінним.

Іншим істотним фактором необхідності глобальної постановки задачі стійкості є те, що при зміні одного чи декількох параметрів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  можливі

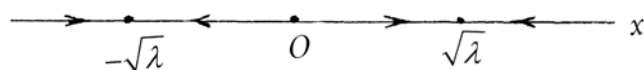


Рис. 28.3

різні біфуркації – народження чи злиття стаціонарних станів, народження граничного циклу з фокусу, народження стійкого двовимірного інваріантного тора із стійкого періодичного розв'язку, стохастичні рухи. Незважаючи на наявність в якісній теорії диференціальних рівнянь значних загальних результатів, розв'язання вказаних проблем для більшості конкретних динамічних систем продовжує залишатись мистецтвом.

Для рівняння (28.35) множина  $N$  фазового простору  $\{x\}$  називається **атрактором**, якщо при  $t \rightarrow +\infty$  до нього необмежено наближаються всі розв'язки  $x = x(t)$  цього рівняння, які в початковий момент часу перебувають в області  $R \subset \{x\}$ . Остання називається **областю притягування** даного атрактора. Якщо при цьому  $x(0) \in N$ , то  $x(t) \in N$  для  $\forall t$ .

Часто атрактор – це точка (яка є стійким станом рівноваги) або ізольована замкнута траєкторія (яка називається стійким граничним циклом) – як на рис. 28.1. Множини, стійкість яких поєднується з нестійкістю кожної індивідуальної траєкторії, називаються **дивними атракторами**. Вони породжують хаотичну і по суті випадкову поведінку добре визначеної детермінованої моделі. Дивний атрактор має значно складнішу структуру, ніж звичайний: всередині дивного атрактора траєкторії блукають явно нерегулярним чином і вельми чутливі до варіації початкових умов.

Простий приклад атрактора – точки дає скалярне рівняння

$$\dot{x} = x(\lambda - x^2). \quad (28.36)$$

При  $\lambda > 0$  його загальний інтеграл має вигляд:

$$\frac{x^2}{|\lambda - x^2|} = Ce^{2\lambda t}.$$

Звідси

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pm\sqrt{\lambda}, \quad x(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0.$$

Тому стани рівноваги  $x_* = \pm\sqrt{\lambda}$  є стійкими, стан рівноваги  $x_* = 0$  нестійкий. Звісна річ, цей же результат впливає безпосередньо з рівняння (28.36): по-перше,  $f(x, \lambda) \equiv x(\lambda - x^2) = 0$  при  $x = 0$  і  $x = \pm\sqrt{\lambda}$ ; по-друге,  $\dot{x} > 0$ , тобто функція  $x(t)$  зростає, для  $x < -\sqrt{\lambda}$  та  $0 < x < \sqrt{\lambda}$ ;  $\dot{x} < 0$ , тобто функція  $x(t)$  спадає, для  $-\sqrt{\lambda} < x < 0$  та  $x > \sqrt{\lambda}$ . Геометрична ілюстрація цієї обставини, наведена на рис. 28.3, має назву **фазового портрету одновимірної динамічної системи (28.36)**. Областю притягування атрактора  $x_* = \sqrt{\lambda}$  є піввісь  $x > 0$ , атрактор  $x_* = -\sqrt{\lambda}$  притягує піввісь  $x < 0$ .

Якщо  $\lambda = 0$ , то загальний інтеграл рівняння (28.36) має вигляд

$$x^2 = \frac{1}{2t + C}.$$

Оскільки  $x \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , то стан рівноваги  $x = 0$  є стійким. Це впливає також безпосередньо з рівняння

$$\dot{x} = -x^3,$$

оскільки  $\dot{x} < 0$  при  $x > 0$  та  $\dot{x} > 0$  при  $x < 0$ .

У випадку  $\lambda = -\mu^2 < 0$  рівняння

$$\dot{x} = -x(\mu^2 + x^2)$$

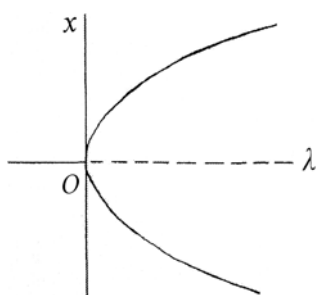


Рис. 28.4

має станом рівноваги лише точку  $x = 0$ . Загальний інтеграл рівняння має вигляд:

$$x^2 = C(x^2 + \mu^2)e^{-\mu^2 t}.$$

Областю притягування атрактора  $x = 0$ , як і в попередньому випадку, є вся вісь  $x$ . Залежність положень рівноваги від параметра в системі координат  $\lambda x$  має форму тризуба (рис. 28.4): многовиди стійких станів рівноваги мають рівняння  $x_* = 0$  при  $\lambda \leq 0$  та  $x_*^2 = 0$  при  $\lambda > 0$ . Многовидом нестійких станів рівноваги є точка  $x_* = 0$  при  $\lambda > 0$ . Зі збільшенням

параметра  $\lambda$  і при його проходженні через нуль в системі відбувається біфуркація (розгалуження) положення рівноваги, яке полягає в тому, що від положення рівноваги  $x_* = 0$ , яке втрачає стійкість при  $\lambda > 0$ , відгалужуються два нових положення рівноваги  $x_* = \pm\sqrt{\lambda}$  (при  $\lambda > 0$ ). Це біфуркація народження станів рівноваги, в результаті якої старий стан рівноваги хоч і продовжує існувати, але втрачає стійкість. Нові стани рівноваги (новонароджені) є стійкими.

Під областю притягування нульового розв'язку двовимірної динамічної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (28.37)$$

мають на увазі множину

$$\{(x_0, y_0) : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0, y_0) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, x_0, y_0) = 0\},$$

де  $x(t, x_0, y_0)$ ,  $y(t, x_0, y_0)$  – розв'язок системи.

Знання області притягування нульового розв'язку рівнянь збуреного руху дозволяє конкретизувати величини початкових збурень, що гарантують затухання з плином часу поточних (подальших, наступних) збурень.

### 28.5. Особливі точки векторних полів

Розглянемо гладеньке векторне поле, що задається диференціальним рівнянням

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n. \quad (28.38)$$

Тут  $f : R^n \rightarrow R^n \in C^\infty$ -відображенням. Точка  $x_0 \in R^n$  називається неособливою точкою поля, якщо вектор поля в цій точці ненульовий. Тоді кожній точці деякої області простору рівнянням (28.38) ставиться у відповідність певний напрям. У випадку, наприклад, плоского векторного поля швидкостей, що задається системою (28.37), цей напрям утворює з віссю  $Ox$  кут  $\alpha$ , для якого  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ .

Для характеристики поля важливе значення мають особливі точки і конфігурація ліній поля поблизу них. **Особливою точкою поля** називається точка, в якій векторне поле не означене:  $f(x_*) = 0$ . Особливій точці (нерухомій точці,

точці спокою) векторного поля відповідає стан рівноваги або стаціонарний рух динамічної системи.

Через неособливі точки інтегральна крива диференціального рівняння проходить плавно і монотонно, наче рейковий шлях. Особлива точка уподібнюється до вузлової станції, стрілки або тупику. Щоб ознайомитись із залізничним маршрутом, достатньо простого переліку тих станцій, що зустрічаються по дорозі, і тих гілок, що відходять від основної магістралі. Таким же чином, щоб уявити всю інтегральну криву в цілому, слід знати, як розташовані її особливі точки і що відбувається в цих точках з кривою лінією. Щоб вивчити криву лінію за диференціальним рівнянням, яке її визначає, необхідно, перш за все, навчитись добувати з цього рівняння всю інформацію про особливі точки. Анрі Пуанкаре [30], який зі студентських років перебував під значним впливом ідей Ш.Брію та Ж.Буке, успішно скористався в подальшому їхньою рекомендацією.

### 28.6. Фазові портрети двовимірних динамічних систем

Ввівши площину змінних  $x$  та  $y$ , будемо розглядати  $x$  та  $y$  як прямокутні декартові координати. На фазовій площині  $xy$  кожному стану системи відповідає точка  $M(x, y)$ , її називають зображальною точкою. З плином часу точка  $M$ , переміщуючись по площині, описує криву лінію, яка називається фазовою траєкторією. Її можна одержати як інтегральну криву диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (28.39)$$

Особливі точки, координати яких задовольняють рівнянням

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0,$$

є станами рівноваги (спокою) вихідної матеріальної системи. Швидкість зображальної точки в них дорівнює нулю:

$$\vec{v} = \vec{i} \dot{x} + \vec{j} \dot{y} = 0.$$

Класифікацію особливих точок розглянемо на прикладах конкретних механічних систем.

Рівняння (22.57) руху математичного маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (28.40)$$

після заміни  $x = \varphi$ ,  $y = \dot{x}$ ,  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  зводиться до системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x. \end{cases} \quad (28.41)$$

Малі коливання маятника в околі нижнього положення рівноваги  $\varphi = 0$  описуються лінійною системою:

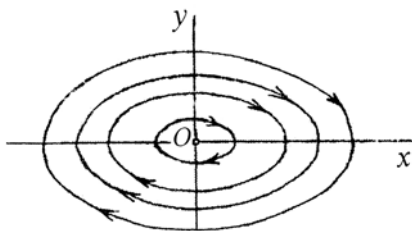


Рис. 28.5

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Рівняння (28.39) набуває вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y},$$

загальний інтеграл якого є

$$\omega^2 x^2 + y^2 = c = \text{const}.$$

Фазовими траєкторіями є сім'я еліпсів, які заповнюють всю фазову площину, за винятком початку координат: в цій точці еліпс, який відповідає значенню  $c = 0$ , вироджується в точку (рис. 28.5). Особлива точка  $O(0, 0)$ , через яку не проходить жодна фазова траєкторія і яку оточують замкнуті фазові траєкторії, називається **центром**. Характеристичне рівняння лінійного наближення для диференціального рівняння (28.40) або системи рівнянь (28.41) в околі центра має суто уявні корені:  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ .

Якісно інший характер мають фазові траєкторії математичного маятника в околі верхнього положення рівноваги  $\varphi = \pi$  (§ 22.7). Лінеаризоване рівняння руху має вигляд (22.74):

$$\ddot{\varphi} - \omega^2 \varphi = 0, \quad (28.42)$$

або ( $x = \varphi$ )

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega^2 x. \end{cases} \quad (28.43)$$

Звідси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y}. \quad (28.44)$$

Інтегруючи рівняння (28.44), отримуємо сім'ю гіпербол

$$y^2 - \omega^2 x^2 = c,$$

що заповнюють фазову площину (рис. 28.6). При  $c = 0$  інтегральна крива рівняння (28.44) вироджується у дві прямі  $y = \omega x$  та  $y = -\omega x$ , що проходять через особливу точку  $O(0, 0)$  системи (28.43). Ці прямі є асимптотами тих інтегральних кривих рівняння (28.44), для котрих  $c \neq 0$ . Особлива точка в цьому випадку називається **сідлом**. Характеристичне рівняння в околі сідла

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \text{ має корені } \lambda_{1,2} = \pm \omega.$$

У підрозділі 21.4 розглядалось диференціальне рівняння (21.41) коливального руху матеріальної точки під дією відновлювальної сили в середовищі з лінійно-в'язким опором:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Це рівняння зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2hy. \end{cases}$$

Звідси маємо таке диференціальне рівняння фазових траєкторій:

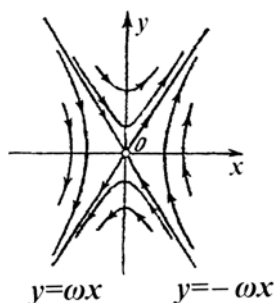


Рис. 28.6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega^2 x - 2hy}{y}$$

Враховавши (21.48), отримуємо наступне рівняння фазових траєкторій.

При  $h < \omega$ :

$$\sqrt{y^2 + 2hxy + \omega^2 x^2} = ce^{\frac{h}{\omega_1} \arctg \frac{y+hx}{\omega_1 x}}, \quad (28.45)$$

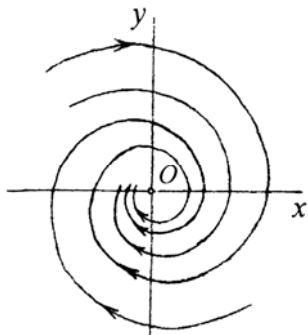


Рис. 28.7

де  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ . Криві (28.45) є спіралями, що намотуються на початок координат. Точка  $O(0,0)$  називається **стійким фокусом**. У підрозділі 21.4 показано, що при  $h < \omega$  корені характеристичного рівняння (21.42) є комплексно-спряженими:  $\lambda_{1,2} = -h \pm i\omega_1$ . При будь-яких початкових умовах матеріальна точка здійснює затухаючі коливання, асимптотично наближаючись до стану рівноваги (якщо тільки  $h < \omega$ ) (рис. 28.7).

При  $h > \omega$  обидва корені характеристичного рівняння (21.42) є додатними:  $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2} < 0$ . Фазові траєкторії описуються рівняннями

$$y^2 + 2hxy + \omega^2 x^2 = c \left( \frac{\frac{y}{x} + h - \sqrt{h^2 - \omega^2}}{\frac{y}{x} + h + \sqrt{h^2 - \omega^2}} \right)^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - \omega^2}}}. \quad (28.46)$$

Вони зображенні на рис. 28.8. Особлива точка, через котру проходять усі фазові траєкторії, називається вузлом. Оскільки зображувальна точка рухається по всіх фазових траєкторіях до особливої точки, то остання називається **стійким вузлом**. Прямі 1 – 3 описуються рівняннями:

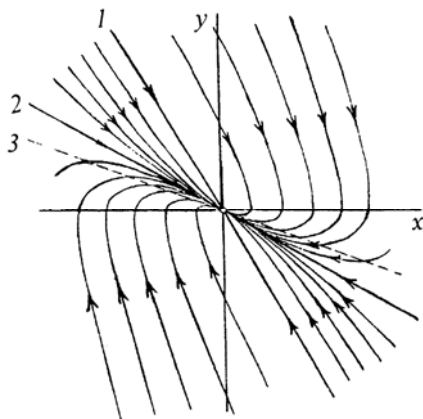


Рис. 28.8

$$1 \Rightarrow y = \lambda_2 x = -q_2 x,$$

$$2 \Rightarrow y = \lambda_1 x = -q_1 x,$$

$$3 \Rightarrow y = -\frac{\omega^2}{2h} x,$$

де

$$q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega^2},$$

$$q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega^2},$$

$$q_2 > q_1 > 0, \quad \lambda_1 = -q_1, \quad \lambda_2 = -q_2.$$

Подробиці побудови кривих на рис. 28.6 – 28.8 наведено в праці [1]. В загальному випадку особливі точки диференціального рівняння (28.39) розглянуто в [30].

## 28.7. *Поняття біфуркацій та катастроф динамічних систем*

Термін біфуркація (або *Abzweigung*) запроваджено К.Якобі в 1834 р. в його дослідженні розгалуження сфероїдальних фігур рівноваги (еліпсоїдів Маклорена) самогравітуючих частинок, що обертаються. Французьке слово *bifurcation* (роздвоєння, розгалуження) введено А.Пуанкаре в 1885 р. при дослідженні цієї ж проблеми.

Нині термін “біфуркація” в широкому сенсі вживається для позначення будь-яких якісних перетворень процесу або топологічної перебудови його геометричного образу при зміні параметрів. Об’єкти можуть бути вельми різноманітні: дійсні або комплексні криві та поверхні, функції і відображення, многовиди та розшарування, векторні поля і рівняння.

**Біфуркацією** зветься ситуація, при якій певний об’єкт  $A = A(\lambda)$  залежить від параметра  $\lambda$  (не обов’язково скалярного) і в довільному околі деякого значення  $\lambda_0$  останнього (біфуркаційне значення, точка біфуркації) досліджувані якісні властивості об’єкта  $A(\lambda)$  не є однаковими для усіх  $\lambda$ . Однією з типових ситуацій є така: досліджувані якісні властивості об’єкта  $A$  полягають в існуванні інших об’єктів  $B$ , певним чином зв’язаних із ним. Біфуркація полягає в тому, що при зміні параметра  $\lambda$  об’єкти  $B$  виникають або зникають (зокрема, вони можуть зливатись один з одним або із одного об’єкта можуть народжуватись кілька).

Досліджувані об’єкти  $B$ , які зіставляються з динамічною системою (28.35) – це положення рівноваги та періодичні розв’язки, а інколи також певні інваріантні многовиди (переважно тори) та гіперболічні інваріантні многовиди. Розглядаються народження цих об’єктів, що відбуваються як локально (біля певного положення рівноваги чи періодичного розв’язку), так і напівлокально, тобто в околі замкнутого контуру, утвореного кількома траєкторіями, які при  $t \rightarrow \pm\infty$  прагнуть до положення рівноваги чи до періодичних розв’язків.

*Прикладом біфуркації* є розгалуження розв’язків нелінійних скінчених рівнянь, тобто явище переходу певного розв’язку нелінійного рівняння в декілька розв’язків (або повне зникнення розв’язку) при невеликих змінах параметрів. Нехай, наприклад, нелінійне рівняння

$$f(x, \lambda) = 0, \quad f(x, \lambda) \in R^1 \quad (28.47)$$

має при фіксованім значенні  $\lambda_0$  параметра  $\lambda$  розв’язок  $x_0$ , а при значеннях  $\lambda$ , близьких до  $\lambda_0$  – декілька розв’язків  $x(\lambda)$ , близьких до  $x_0$ . Кажуть, що відбувається розгалуження розв’язку  $x_0$ , а пара  $(x_0, \lambda_0)$  називається точкою розгалуження рівняння (28.47). Так, рівняння  $x^2 - \lambda = 0$ , де  $\lambda > 0$ , має точку біфуркації  $(x_0, \lambda_0) \equiv (0, 0)$ , оскільки розв’язок  $x = 0$  (для  $\lambda = 0$ ) розгалужується при малих  $\lambda \neq 0$  на два малих нетривіальних розв’язки  $x = \sqrt{\lambda}$  та  $x = -\sqrt{\lambda}$  (рис. 28.4).

У більш загальному випадку вивчення еволюції системи (28.35) при дрейфі параметрів приводить до необхідності розв’язати систему (28.9), яка визначає стаціонарні стани динамічної системи (28.35). Якщо в області  $(V)$ , що розглядається,  $n$ -вимірному простору немає точки, в якій усі елементи матриці



Якobi  $\|\partial f_i / \partial x_j\|_1^n$  одночасно стають нулями, то якобiан  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$  тотожно дорiвнює нулю в областi ( $V$ ) тодi i тiльки тодi, коли у кожної точки цiєї областi iснує такий окiл, в якому функцiї  $f_i$  зв'язанi певним неперервно диференцiйованим сiввiдношенням  $\varphi(f_1, \dots, f_n) = 0$ , причому похiднi  $\frac{\partial \varphi}{\partial f_i}$  не всi одночасно дорiвнюють нулю. В цьому випадку кажуть, що функцiї  $f_i$  функцiонального залежнi в даному окiлi, так що  $x_j$  не визначенi однозначно.

Припустимо, що при  $\lambda = \lambda_0$  має місце втрата єдиностi продовження по параметру (тобто бiфуркацiя) i процес  $x(\lambda)$  розгалужується на процеси  $x^{(s)}(\lambda)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). Таке розгалуження є властивiстю тих рiвнянь, що описують процес, тобто фiзичних законiв, на пiдставi яких складено диференцiальнi рiвняння (28.35). Про подальший розвиток еволюцiйного процесу що-небудь однозначно сказати неможливо. Дiйсно, внаслiдок багатозначностi не можна встановити, в окiлi котрого зi стацiонарних станiв  $x^{(s)}(\lambda)$  виявиться дослiджувана система. Множина можливих напрямкiв розвитку процесу зумовлюється фiзичними законами, але який конкретний шлях буде реалiзовано, передбачити заздалегiд неможливо. Звiдси впливає принципова непередбачуванiсть еволюцiйного процесу.

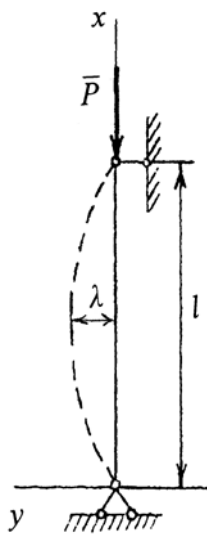


Рис. 28.9

Іншим важливим прикладом є бiфуркацiї фазових портретiв динамiчних систем в окiлi станiв рiвноваги, розглянутi вище.

Зi змiною параметра  $\lambda$  iнтегральнi кривi системи (28.35) змiнюються. У бiльшостi випадкiв малi змiни приводять лише до кiлькiсних змiн. Такi системи називаються грубими (або релятивно грубими, тобто грубими вiдносно даної залежностi вiд параметра) [1]. Однак при великих змiнах параметрiв характер руху фiзичної системи може значно змiнитись. Наприклад, при деяких значеннях параметрiв в системi (28.35) можуть виникнути автоколивання, тодi як при iнших значеннях параметрiв їх може не бути.

Стосовно динамiчної системи (28.35) значення  $\lambda_0$  параметра  $\lambda$  називається бiфуркацiйним, якщо знайдуться як завгодно близькi до  $\lambda_0$  значення  $\lambda$ , для котрих топологiчна структура системи (28.35) в розглядуванiй областi вiдмiнна вiд топологiчної структури системи (28.35) при  $\lambda = \lambda_0$ . Змiна топологiчної структури при неперервнiй змiнi параметра може вiдбуватись лише при переходi через бiфуркацiйну точку. Звiдси очевидно, що для бiфуркацiйного значення параметра система не може бути грубою (структурно стiйкою). Це надає виняткової ваги теорiї критичних випадкiв О.М. Ляпунова [19]. Примiтивний випадок бiфуркацiї народження станiв рiвноваги, в результатi якої старий стан рiвноваги зберiгається, але втрачає стiйкiсть (стiйкими є новi стани рiвноваги), iлюструє диференцiальне рiвняння (28.36).

За сучасною термінологією теорія біфуркацій вивчає перебудови якісної картини руху при зміні параметрів, а застосування теорії біфуркацій до дослідження стрибкоподібних реакцій механічних, фізичних, хімічних, біологічних, економічних та інших систем на плавну зміну зовнішніх умов чи внутрішніх властивостей системи дістали назву теорії катастроф [2, 33].

Коротко опишемо етапи **становлення та розвитку теорії біфуркацій**. Після робіт А.Пуанкаре математики поступово прийшли до думки, що повний набір розв'язків диференціальних рівнянь, отриманих (як правило) кропіткою працею і витонченими міркуваннями, може стати на заваді розумінню якісних змін у поведінці розв'язків при варіюванні параметрів. Не занижуючи важливості досліджень з виявлення кількісних змін, слід все ж визнати, що задача виявлення переходів кількісних змін у якісні є ключовою в розкритті суті глибинних процесів і явищ, що відбуваються в природі. Звідси – підсилений інтерес до теорії біфуркацій та катастроф, який проявляється останнім часом в багатьох країнах, хоч історія цих питань нараховує більше двох століть. Якісна динаміка матеріальної системи стає визначеною, як тільки вдається ідентифікувати багатовид стаціонарних станів з катастрофою та відшукати біфуркаційну множину останньої.

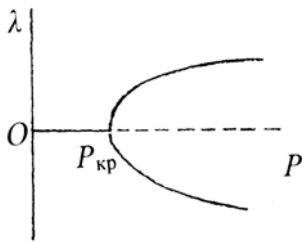


Рис. 28.10

Теорія катастроф народилась на стику топології та математичного аналізу. Її витоками є теорія особливостей [4] гладеньких (тобто нескінченно диференційовних) відображень, розвинута математиками Х. Уїтні, Дж. Мазером, В.І. Арнольдом та ін., і теорія стійкості та біфуркацій динамічних систем (О.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, О.О. Андронов), які злились в єдину теорію, дякуючи зусиллям Р. Тома [2]. Останнім запропоновано і саму назву “Теорія катастроф”. Варто відмітити також внесок С. Смейла,

який синтезував диференціальну топологію і якісну динаміку в топологічну теорію динамічних систем.

Зародження теорії біфуркацій відноситься до 1744 р., коли Л. Ейлер використав щойно створене ним варіаційне обчислення для встановлення рівноважних конфігурацій пружної колони, верхній торець якої зазнає дії вертикального навантаження. В задачі про стиснутий стрижень потенціальна енергія залежить від поздовжнього навантаження  $P$  та від змінних, що визначають форму стрижня у збуреному стані (рис. 28.9). Нехай  $P_{кр}$  – так зване

критичне значення стискальної сили  $\vec{P}$ , знайдене Л. Ейлером. Якщо  $P < P_{кр}$ , то стрижень має єдиний рівноважний стан – прямолінійний ( $\lambda = 0$ ). Зі збільшенням модуля сили  $\vec{P}$  і проходженням його значень через  $P_{кр}$  відбувається перехід стрижня в якісно інший стан, коли рівноважними станами є криволінійні (згин або вліво, або вправо). Позначимо через  $\lambda$  бокове відхилення середнього перерізу стрижня ( $P < P_{кр} \Rightarrow \lambda = 0$ ). Будемо відкладати значення  $P$  вздовж горизонтальної осі, значення  $\lambda$  – вздовж вертикальної. Точка  $(P_{кр}, 0)$  площини  $P\lambda$  є біфуркаційною, оскільки зі зростанням  $P$  від втрачаючого (при  $P = P_{кр}$ ) стійкості положення рівноваги  $\lambda = 0$  відгалужуються два нових положення рівноваги  $\lambda > 0$

та  $\lambda < 0$ . Це біфуркація народження станів рівноваги, в результаті якої старий стан рівноваги зберігається, але втрачає стійкість. Новонароджені стани рівноваги стійкі. Біфуркаційна діаграма  $\lambda = \lambda(P)$  в цій задачі має форму тризуба. Тому біфуркації такого типу (див. також рис. 28.4) отримали назву біфуркацій типу виделки, біфуркацій трикратної рівноваги тощо.

Тривалу історію має в механіці задача про форми рівноваги певної маси однорідної ідеальної рідини, що обертається як тверде тіло з кутовою швидкістю  $\omega$  (параметр) навколо певної осі, причому між окремими молекулами діють сили взаємного притягування. Її розв'язок (А. Пуанкаре, О.М. Ляпунов, Д. Дарвін, М.Г. Четаєв та ін.) пов'язаний з космогонічною теорією подвійних зірок. Знаходження нових стаціонарних станів наштовхнулось в цій задачі на значні математичні труднощі.

В подальшому коло та тематика динамічних задач розширились настільки, що теорія біфуркацій і катастроф набули міждисциплінарного характеру.

Розглядаючи задачу про автоколивання в ламповому генераторі, О.О. Андронов у 1933 р. встановив зв'язок між залежністю стаціонарних режимів від параметра та теорією біфуркацій Пуанкаре, на фізичному рівні (без математичних формул) відкрив біфуркацію народження граничного циклу із фокуса на площині та біфуркацію стягування граничного циклу у фокус. В книзі [1] (її перше видання побачило світ у 1937 р.) вказані біфуркації викладено уже з математичним доведенням, вказано їхній зв'язок з ляпуновськими величинами і наведено рекурентні диференціальні рівняння для цих величин. Біфуркацію народження граничного циклу із складного фокуса скінченновимірної динамічної системи належало б назвати біфуркацією Пуанкаре–Андронova–Хопфа, однак в зарубіжній літературі часто використовується коротка назва – біфуркація Хопфа.

Описані біфуркації належать до простіших. Зрозуміло, що можливі більш складні біфуркації: наприклад, народження із стійкого періодичного розв'язку стійкого двовимірного інваріантного тора. Так, при обтіканні кулі в'язкою рідиною для малих чисел Рейнольдса поле швидкостей позаду кулі є стаціонарним. Зі зростанням  $N_{Re}$  відбуваються послідовні біфуркації: стаціонарне поле – періодичний розв'язок – періодична траєкторія на стійкому двовимірному торі – турбулентність (хаос).

Повернемось до розглянутого у підрозділі 28.2 методу побудови стаціонарних станів динамічних систем, запропонованого Шінохаром [34], при  $n = 2$  (останнє обмеження не є істотним). Рівняння (28.13) утворюють відносно невідомих  $\frac{dx_1}{ds}$  та  $\frac{dx_2}{ds}$  систему двох лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь, яка має розв'язок лише за умови

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} \neq 0. \quad (28.48)$$

В точках кривої лінії

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s), \quad \lambda = \lambda(s),$$

в яких  $D_3 = 0$ , втрачається функціональна незалежність рівнянь системи (28.12). З останнього рівняння системи (28.17) випливає, що в цих точках швидкість зміни

функції  $\lambda(s)$  стає рівною нулеві. Якщо з усіх старших похідних  $\frac{d^n \lambda}{ds^n}$  похідна найнижчого порядку, яка не дорівнює нулю, має парний порядок, то такі точки є біфуркаційними. В точках біфуркації напрям зміни параметра  $\lambda$  змінюється на протилежний.

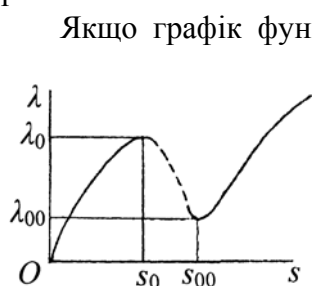


Рис. 28.11

Якщо графік функції  $\lambda(s)$  є таким, як на рис. 28.11, то значення  $\lambda$ , що відповідають точкам екстремуму  $(s_0, \lambda_0)$  і  $(s_{00}, \lambda_{00})$ , є біфуркаційними. При наближенні до біфуркаційних точок  $A$  і  $B$  (рис. 28.12) з певної сторони (зліва – для точки  $A$ , справа – для точки  $B$ ) два стани рівноваги (стійкі стани на рис. 28.12 позначено суцільною лінією, нестійкі – штриховою) зливаються в один: відбувається катастрофа складки (Fold). При збільшенні  $\lambda$  і переході через значення  $\lambda_0$

відбувається катастрофа зборки (Cusp), тобто стрибкоподібний перехід системи від одного стійкого стану рівноваги до іншого.

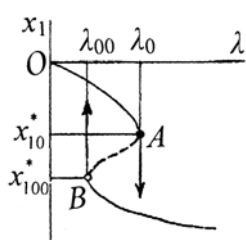


Рис. 28.12

Те ж саме відбувається при зменшенні  $\lambda$  і переході через значення  $\lambda_{00}$ . Такі стрибки на рис. 28.12 позначено вертикальними стрілками.

Можна показати, що на кривих

$$x_1^* = x_1^*(\lambda), \quad x_2^* = x_2^*(\lambda) \quad (28.49)$$

біфуркаційні точки відмежовують ділянки стійкості (всі точки на них відповідають стійким особливим точкам динамічної системи типу вузлових або фокусних) від ділянок нестійкості (всі точки на них є особливими точками типу сідлових).

Це пояснюється тим, що в точках біфуркацій якобіан лівих частин рівнянь рівноваги (28.12)

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0.$$

Але цей якобіан дорівнює вільному члену характеристичного рівняння, складеного в околі даного положення рівноваги. За теоремою Вієтта останній дорівнює добуткові коренів характеристичного рівняння з відповідним знаком, тобто в точці біфуркації маємо нульовий корінь характеристичного рівняння матриці лінеаризації. При переході через точку біфуркації один корінь характеристичного рівняння змінює знак із мінуса (стійкість) на плюс (нестійкість). Такі біфуркації називаються дивергентними або статичними на відміну від флатерних біфуркацій.

Розглянемо механічну систему з двома ступенями вільності:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = F_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \\ \ddot{q}_2 = F_2(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2). \end{cases} \quad (28.50)$$

Прийнявши за нові шукані функції величини  $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2 = \dot{q}_2$ , запишемо систему (28.50) в нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= F_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= F_2(x_1, x_2, x_3, x_4).\end{aligned}\tag{28.51}$$

Розглянемо особливу точку  $x_1 = x_1^*$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = x_3^*$ ,  $x_4 = 0$  динамічної системи (28.51). Вона відповідає положенню рівноваги  $q_1 = q_1^*$ ,  $q_2 = q_2^*$ ,  $\dot{q}_1^* = 0$ ,  $\dot{q}_2^* = 0$  механічної системи (28.50). У збуреному русі маємо:

$$x_1 = x_1^* + \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = x_3^* + \xi_3, \quad x_4 = \xi_4,$$

де  $\xi_i$  – варіації змінних  $x_i$ . Лінеаризуємо систему (28.51) в околі точки  $M(x_1^*, 0, x_3^*, 0) \in R^4$ :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = F_1(x_1^*, 0, x_3^*, 0) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Big|_M \xi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Big|_M \xi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \Big|_M \xi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \Big|_M \xi_4, \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 = F_2(x_1^*, 0, x_3^*, 0) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Big|_M \xi_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Big|_M \xi_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \Big|_M \xi_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \Big|_M \xi_4.\end{cases}\tag{28.52}$$

Оскільки

$$F_1(x_1, 0, x_3, 0) = f_1(x_1, x_2, \lambda),$$

$$F_2(x_1, 0, x_3, 0) = f_2(x_1, x_2, \lambda),$$

то вільні члени в системі (28.52) тотожно дорівнюють нулю. Позначимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Big|_M &= \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = a_{11}, & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Big|_M &= a_{12}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \Big|_M &= \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = a_{13}, & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \Big|_M &= a_{14}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Big|_M &= \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = a_{21}, & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Big|_M &= a_{22}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \Big|_M &= \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = a_{23}, & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \Big|_M &= a_{24}.\end{aligned}$$

Система (28.52) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4, \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24}\xi_4.\end{cases}\tag{28.53}$$

Запишемо характеристичне рівняння системи (28.53):

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -a_{11} & \lambda - a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & \lambda - a_{24} \end{vmatrix} = 0.$$

В розгорнутому вигляді воно є таким:

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0, \quad (28.54)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= -a_{12} - a_{24}, & A_2 &= a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} - a_{23} - a_{11}, \\ A_3 &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} + a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}, & A_4 &= a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}. \end{aligned} \quad (28.55)$$

Оскільки  $A_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = D_3$ , де  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  – корені рівняння (28.54), то крива (28.49) в точках, у яких  $D_3 = 0$ , має вертикальну дотичну, тобто до таких точок

підходять дві гілки кривої, на кожній з яких існують скінченні похідні  $\frac{dx_1^*}{d\lambda}$  і  $\frac{dx_2^*}{d\lambda}$ .

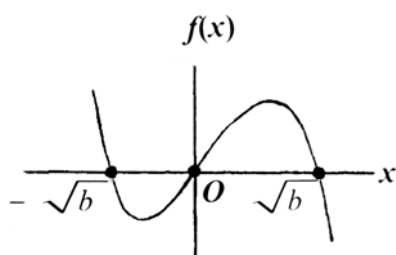


Рис. 28.13

При наближенні вздовж кривої (28.49) до таких точок відбуваються катастрофи складки (рис. 28.12), тобто вони є кратними особливими точками системи (28.51). В них відбуваються біфуркації народження або злиття рівноважних станів. Одне власне значення матриці лінеаризації при підході до точок біфуркації змінює знак. Тому характер стійкості станів рівноваги, що відповідають різним гілкам кривої (28.49), протилежний: стійкість (нестійкість) змінюється нестійкістю (стійкістю). В точках, де сходяться гілки, одне власне значення матриці

лінеаризації є нульовим, тобто маємо критичний випадок теорії Ляпунова.

### 28.8. Неособливі та критичні випадки теорії стійкості руху

Згідно з означеннями, наведеними у підрозділі 28.3, для виявлення стійкості чи нестійкості певного стану рівноваги або більш складного руху достатньо дослідити поведінку розв’язків диференціальних рівнянь збуреного руху (28.31). Наприклад, щоб переконатись у інтуїтивно очевидній стійкості нижнього і нестійкості верхнього положень рівноваги математичного маятника (підрозділ 22.7 – без урахування тертя, підрозділ 28.3 – з урахуванням лінійно-в’язкого тертя в шарнірі), досить було координаті  $\varphi$  чи похідній  $\dot{\varphi}$  надати достатньо малих, ненульових значень. Після “завершення перехідного процесу” маятник повертався у нижнє положення рівноваги  $\varphi = 0$  і не повертався (не рахуючи миттєвого проходження) у верхнє положення рівноваги  $\varphi = \pi$ . Цю ж ідею покладено О.М. Ляпуновим [19] в основу концепції загальної теорії стійкості. У праці [19] доведено, що в багатьох випадках (вони названі неособливими, або некритичними) питання характеру стійкості розв’язується аналізом поведінки розв’язків лінеаризованих рівнянь збуреного руху, які отримуються з системи (28.31)

лінеаризацією нелінійних функцій, тобто їхньою заміною лінійними членами розвинень в ряди Маклорена. Задача розв'язання (інтегрування) лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами зводиться, за своєю суттю, до знаходження коренів характеристичного рівняння, або власних значень матриці лінеаризації.

Якщо всі корені є простими (кратними) і серед них відсутні нульові або суто уявні, то висновок про характер стійкості незбуреного руху можна зробити на підставі дійсних частин коренів характеристичного рівняння. Такі випадки дістали назву (від О.М. Ляпунова) неособливих або некритичних. Найбільш простими серед критичних випадків є випадок одного нульового кореня та пари суто уявних коренів.

### 28.9. Фазові портрети одновимірних динамічних систем

Візьмемо одновимірну ( $n = 1$ ) однопараметричну динамічну систему

$$\dot{x} = x(b - x^2), \quad (28.56)$$

де  $b$  – параметр. Позначимо

$$f(x) = x(b - x^2), \quad (28.57)$$

тобто динамічна система складається з одного рівняння

$$\dot{x} = f(x).$$

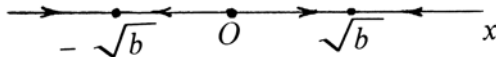


Рис. 28.14

При  $b > 0$  графік функції  $f(x)$  наведено на рис. 28.12, а фазовий портрет – на рис. 28.13. Зі структури фазового портрету випливає, що динамічна система (28.56)

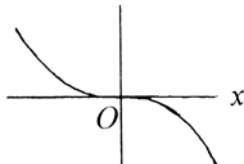


Рис. 28.15

має дві стійкі особливі точки  $x = \sqrt{b}$  та  $x = -\sqrt{b}$  і одну нестійку особливу точку  $x = 0$ . Звичайно, висновок про характер стійкості особливої точки можна зробити і на підставі загального інтеграла диференціального рівняння (28.56):

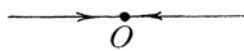


Рис. 28.16

$$\frac{x^2}{|b - x^2|} = Ce^{2bt}. \quad (28.58)$$

Оскільки

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pm\sqrt{b}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0,$$

то особливі точки  $\pm\sqrt{b}$  є стійкими, точка  $x = 0$  – нестійка особлива точка.

При  $b = 0$  рівняння (28.56) стає таким:

$$\dot{x} = -x^3, \quad (28.59)$$

тобто в цьому випадку  $f(x) = -x^3$ . Графік функції  $f(x)$  та фазовий портрет динамічної системи наведено на рис. 28.14 та рис. 28.15 відповідно. З них випливає, що динамічна система (28.59) має одну особливу точку

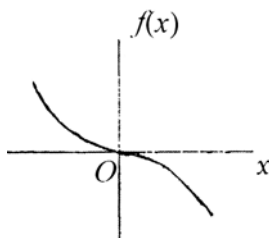


Рис. 28.17

$x = 0$ , яка до того ж є стійкою. Такий її характер стійкості впливає також із загального інтеграла

$$x^2 = \frac{1}{2t + C}.$$

З нього випливає, що  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , тобто  $x = 0$  – стійка особлива точка. В цьому випадку нестійких особливих точок не існує, оскільки границя  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$  не існує.

При  $b < -a^2 < 0$  рівняння (28.56) набуває вигляду:

$$\dot{x} = -x(a^2 + x^2), \quad (28.60)$$

тобто  $f(x) = -x(a^2 + x^2)$ . Графік функції  $f(x)$  наведено на рис. 28.16. Фазовий портрет динамічної системи (28.60) збігається з наведеним на рис. 28.15. Загальний інтеграл диференціального рівняння (28.60) є таким:

$$\frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{C}{e^{2a^2 t}}.$$

З нього знаходимо:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$  не існує, тобто єдиною (стійкою) особливою точкою динамічної системи (28.60) є початок координат ( $x = 0$ ).

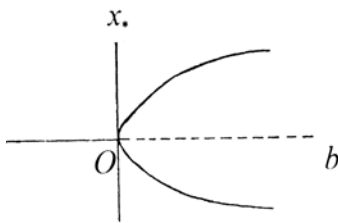


Рис.28.18

Біфуркаційну діаграму динамічної системи (28.56) зображено на рис. 28.17. Вона має традиційний для біфуркації виделки вигляд (рис. 28.4, 28.10). Тут  $x_* = \pm\sqrt{b}$  – новонароджені стани рівноваги. Старий стан рівноваги  $x = 0$  (при  $b \leq 0$ ) з появою нових станів рівноваги втрачає стійкість

(хоч і продовжує існувати) – штрихова лінія на рис. 28.18.

### 28.10. Особливості поведінки динамічної системи у випадку нульового кореня характеристичного рівняння

Розглянемо динамічну систему

$$\dot{x} = \lambda x + f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in R^1. \quad (28.61)$$

Точка  $x = 0$  є особливою, або стаціонарним станом системи (28.61). О.М. Ляпуновим доведено теорему: при  $\lambda \neq 0$  нелінійні члени многочлена Маклорена функції  $f(x)$  не впливають на характер стійкості розв'язку  $x = 0$ : він визначається лише знаком  $\lambda$ . В цьому випадку рівняння у варіаціях

$$\dot{\xi} = \lambda \xi \quad (28.62)$$

має розв'язок

$$\xi = C e^{\lambda t}. \quad (28.63)$$

Оскільки  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = +\infty$  при  $\lambda > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = 0$  при  $\lambda < 0$ , то особлива точка  $\xi = 0$  є стійкою при  $\lambda < 0$  і нестійкою при  $\lambda > 0$ . Те ж саме впливає із аналізу



розв'язку (28.63) при різних (за знаком)  $\lambda \neq 0$ . Логічним є питання: якою є поведінка динамічної системи (28.61) при  $\lambda = 0$ . З відповідної теореми О.М. Ляпунова [5] випливає, що характер стійкості нульового розв'язку динамічної системи (одновимірної) (28.61) визначається в цьому випадку головними частинами нелінійних членів розвинення функції  $f(x)$  в ряд Маклорена в околі точки  $x = 0$ :

$$f(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Тут враховано, що розвинення функції  $f(x)$  в ряд Маклорена в околі нульового значення не містить лінійного наближення. Таким чином, логічним буде розглянути динамічні системи

$$\dot{x} = x^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (28.64)$$

$$\dot{x} = -x^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (28.65)$$

$$\dot{x} = x^{2n+1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (28.66)$$

$$\dot{x} = -x^{2n} + 1 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (28.67)$$

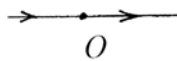


Рис. 28.19

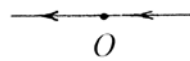


Рис. 28.20

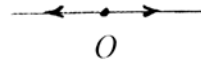


Рис. 28.21



Рис. 28.22

Їхні фазові портрети зображено на рис. 28.18 – 28.21 відповідно. З усіх чотирьох можливих варіантів особлива точка  $x = 0$  динамічних систем (28.64) – (28.67) є стійкою лише у випадку (28.67). Стосовно систем (28.64) та (28.65) інколи говорять, що вони є односторонньо стійкими, тобто стійкими при наданні початковим збуренням певного знака. Ці результати можна узагальнити на випадки динамічних систем

$$\dot{x} = -ax^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (28.68)$$

$$\dot{x} = -ax^{2n+1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (28.69)$$

де  $a$  – параметр. При різних знаках параметра  $a$  графік функції  $f(x) = -ax^{2n}$  та фазові портрети наведено на рис. 28.22 ( $a > 0$ ) та рис. 28.23 ( $a < 0$ ). На рис. 28.24 і рис. 28.25 зображено ці ж характеристики динамічної системи (28.69), причому  $f(x) = -ax^{2n+1}$  ( $a > 0$  для рис. 28.24,  $a < 0$  для рис. 28.25). Особлива точка  $x = 0$  є стійкою лише у випадку динамічної системи (28.69) при  $a > 0$ .

Таким чином, для стійкості особливої точки  $x = 0$  динамічної системи

$$\dot{x} = bx^k \quad (28.70)$$

необхідно і достатньо виконання умов

$$b < 0, \quad k = 2n + 1.$$

Це нелінійна стійкість.

### 28.11. Особливості поведінки динамічної системи у випадку пари суто уявних коренів характеристичного рівняння

Розглянемо лінійну динамічну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y, \\ \dot{y} = \omega x, \end{cases} \quad (28.71)$$

яка зводиться до диференціального рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Тут  $x, y$  – фазові координати або змінні стану. При  $x > 0$  маємо  $\dot{y} > 0$ , тобто функція  $y(t)$  зростає; якщо ж  $x < 0$ , то  $\dot{y} < 0$ , тобто функція  $y(t)$  спадає. Помноживши перше рівняння (28.71) на  $x$ , друге – на  $y$  і додавши результати, одержимо:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = 0, \quad \begin{array}{l} x\dot{x} + y\dot{y} = 0, \\ \text{або} \end{array}$$

Звідси маємо перший інтеграл динамічної системи (28.71):

$$x^2 + y^2 = C. \quad (28.72)$$

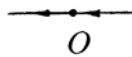
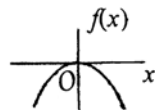


Рис. 28.23

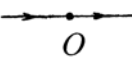
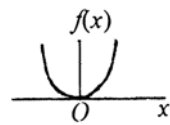


Рис. 28.24

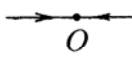
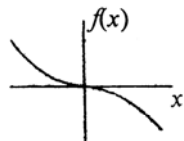


Рис. 28.25

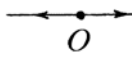
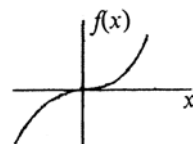


Рис. 28.26

Множина точок  $(x, y)$ , що визначаються системою (28.71), утворює сім'ю концентричних кіл з центром у початку координат. Позначивши

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{vmatrix},$$

запишемо динамічну систему (28.71) у векторній формі

$$\dot{X} = AX.$$

Характеристичне рівняння системи (28.71)

$$\begin{vmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

має суто уявні корені:  $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Тому загальний розв'язок системи є таким:

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= R \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

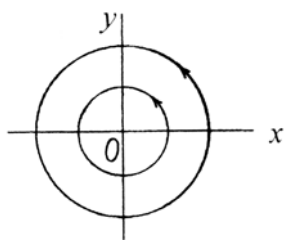


Рис. 28.27

де  $R, \alpha$  – сталі інтегрування. Довільна стала  $C$  у загальному інтегралі (28.72) має вигляд:

$$C = x_0^2 + y_0^2, \quad x_0 = x|_{t=0}, \quad y_0 = y|_{t=0}.$$

Фазові траєкторії на рис. 28.26 можна знайти і безпосередньо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad xdx + ydy = 0 \Rightarrow d\frac{x^2 + y^2}{2} = 0.$$

Інколи говорять, що особлива точка  $x = 0, y = 0$  є стійкою (не асимптотично) за лінійним наближенням, тобто це – лінійна стійкість, але треба зважити на те, що випадок  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  є критичним з погляду теорії Ляпунова. Тому якщо система (28.71) є лінеаризованою, тобто реальна система містить нелінійні члени, то їх необхідно врахувати при оцінці характеру стійкості.

Розглянемо випадок, коли відкинуті (при лінеаризації системи в околі точки  $x = 0, y = 0$ ) члени є такими:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + ax^3, \\ \dot{y} &= \omega x + ay^3. \end{aligned} \tag{28.73}$$

Як функцію Ляпунова візьмемо квадратичну форму:

$$V = x^2 + y^2.$$

Її повна похідна, обчислена з урахуванням динамічної системи (28.71), має вигляд:

$$\dot{V} = 2x(-\omega y + ax^3) + 2y(\omega x + ay^3) = 2a(x^4 + y^4).$$

Знак похідної збігається зі знаком параметра  $a$  системи (28.73), тоді як сама функція невід'ємна:  $V \geq 0$ . На підставі відповідної теореми Ляпунова [5] можна зробити висновок: динамічна система (28.73) є такою, що при  $a < 0$  маємо  $V > 0, \dot{V} < 0$ ; при  $a > 0$  маємо  $V > 0, \dot{V} > 0$ . Тому її нульовий розв'язок (особлива точка векторного поля) є асимптотично стійкою при  $a < 0$  і нестійкою при  $a > 0$ , тобто розв'язання питання характеру стійкості стану рівноваги залежить від знака параметра нелінійності  $a$ . Це нелінійна стійкість ( $a < 0$ ) чи нелінійна нестійкість ( $a > 0$ ).

### 28.12. Неконсервативні динамічні системи з одним степенем вільності

Нагадаємо (підрозділ 22.4), що консервативними називаються системи, які рухаються в потенціальному силовому полі. Нехай рух описується одним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{x} = f(x). \quad (28.74)$$

Незалежна змінна  $t$  явно не входить в (28.74). Як відомо з курсу вищої математики, в цьому випадку порядок диференціального рівняння можна знизити на одиницю, взявши за нову шукану функцію похідну старої шуканої функції, а за нову незалежну змінну – стару шукану функцію, оскільки тоді  $\ddot{x} = \frac{dy}{dx} y$ . Рівняння (28.74) замінюється таким:

$$y \frac{dy}{dx} = f(x). \quad (28.75)$$

Можна також ввести фазові змінні (змінні стану)  $x$  та  $\dot{x} = y$ . Відносно них матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x). \end{cases} \quad (28.76)$$

Задача інтегрування одного звичайного диференціального рівняння (28.74) другого порядку рівносильна задачі інтегрування системи двох диференціальних рівнянь того ж порядку (28.76). Розділивши змінні в диференціальному рівнянні (28.75), знаходимо його перший інтеграл (див. пункт 22.1.3):

$$y dy = f(x) dx, \quad \frac{y^2}{2} - \int f(x) dx = h.$$

Цьому інтегралу можна надати механічний зміст, якщо ввести кінетичну енергію системи на одиницю маси  $T = \frac{y^2}{2}$  та потенціальну функцію

$$\Pi(x) = -\int f(x) dx.$$

Таким чином, ми отримали інтеграл енергії (див.(22.43))

$$\frac{y^2}{2} + \Pi(x) = h = \text{const}, \quad T(y) + \Pi(x) = h = \text{const}. \quad (28.77)$$

Отже, умовою консервативності системи можна вважати існування такої функції  $F(x, y)$ , для якої

$$F(x, y) = h = \text{const}. \quad (28.78)$$

Наведемо інший (прямий, або безпосередній) спосіб отримання першого інтеграла (28.77):

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} = f(x)\dot{x}, \quad \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} = f(x) \frac{dx}{dt}, \quad \dot{x} d\dot{x} = f(x) dx, \quad d \frac{\dot{x}^2}{2} = f(x) dx, \quad \frac{\dot{x}^2}{2} = \int f(x) dx + h, \\ \frac{y^2}{2} + \Pi(x) = h, \end{aligned}$$

де  $y = \dot{x}$ .

Далі розглянемо довільну динамічну систему другого порядку, зосередивши увагу на консервативних системах за наявності тертя [25]:

$$\ddot{x} = \Phi(x, \dot{x}), \quad (28.79)$$

або

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \Phi(x, \dot{x}), \end{cases} \quad (28.80)$$

або

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \Phi(x, y). \end{cases} \quad (28.81)$$

Оскільки

$$dt = \frac{dx}{y}, \quad (28.82)$$

то шляхом виключення незалежної змінної  $t$  систему (28.81) можна звести до одного диференціального рівняння першого порядку

$$y \frac{dy}{dx} = \Phi(x, y).$$

Звідси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Phi(x, y)}{y}.$$

Для консервативності системи (28.81) необхідно і достатньо існування однозначного інтеграла (28.78), тобто виконання умови

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = 0,$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial F}{\partial y} \Phi(x, y) = 0. \quad (28.83)$$

У випадку системи (28.74), або (28.76), тобто для  $\Phi(x, y) = f(x)$ , умова (28.83) набуває вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial F}{\partial y} f(x) = 0. \quad (28.84)$$

Якщо, до того ж, система є лінійною:  $f(x) = -\omega^2 x$ , тобто має вигляд:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad (28.85)$$

то співвідношення (28.82) стає таким:

$$\frac{\partial F}{\partial x} y - \frac{\partial F}{\partial y} \omega^2 x = 0. \quad (28.86)$$

Візьмемо  $\frac{\partial F}{\partial y} = y$ . Із (28.86) дістаємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \omega^2 x.$$

Інтегруванням двох останніх виразів одержуємо:

$$F = \frac{y^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}.$$

Це не що інше, як інтеграл енергії (28.77).

Повернемось до рівняння (28.74) другого порядку або до системи (28.76). В положеннях рівноваги (спокою)

$$\dot{x} = 0, \quad \ddot{x} = 0 \Rightarrow x = x_i \Rightarrow f(x_i) = 0,$$

тобто положенням рівноваги механічної системи відповідають особливі точки на фазовій площині. Оскільки

$$f(x) = -\frac{d\Pi}{dx},$$

то

$$\left. \frac{d\Pi}{dx} \right|_{x=x_i} = 0. \quad (28.87)$$

Якщо  $\left. \frac{d^2\Pi}{dx^2} \right|_{x=x_i} > 0$ , то потенціальна функція  $\Pi(x)$  при  $x = x_i$  набуває мінімуму.

Розвинувши її в ряд Тейлора в околі точки  $x = x_i$ , маємо:

$$\Pi(x) = \Pi(x_i) + \frac{d\Pi(x_i)}{dx}(x - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2\Pi(x_i)}{dx^2}(x - x_i)^2 + \dots$$

Врахувавши (28.87) та позначивши

$$\xi = x - x_i, \quad \alpha = \frac{d^2\Pi(x_i)}{dx^2},$$

дістаємо:

$$\Pi(\xi) = \Pi(x_i) + \frac{\alpha}{2} \xi^2 + \dots$$

Позначимо

$$\Pi(x_i) = h_i, \quad y = \eta.$$

Рівняння (28.77) фазової траєкторії в околі положення рівноваги набуває вигляду:

$$\frac{\eta^2}{2} + h_i + \frac{\alpha}{2} \xi^2 + \dots = h, \quad \alpha \xi^2 + \eta^2 + \dots = 2(h - h_i).$$

Для малих варіацій змінних  $x, y$  поблизу положення рівноваги, відкинувши вищі степені  $\xi$ , отримаємо сім'ю еліпсів:

$$\alpha \xi^2 + \eta^2 = 2(h - h_i), \quad (28.88)$$

або

$$\frac{\xi^2}{\frac{2(h-h_i)}{\alpha}} + \frac{\eta^2}{2(h-h_i)} = 1. \quad (28.89)$$

Таким чином, в околі особливої точки, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії, відбуваються періодичні рухи з еліптичними фазовими траєкторіями, що відповідають гармонічним коливанням. Реальні рухи тим ближчі до гармонічного, чим меншою є величина  $h - h_i$ , тобто чим меншим є перевищення запасу  $h$  повної енергії системи над запасом енергії  $h_i$  в точці рівноваги.

Даному положенню рівноваги (*мінімуму потенціальної функції*) відповідає на фазовій площині особлива точка типу **центр** (рис. 28.5) при  $\alpha > 0$ . Якщо ж

$$\left. \frac{d^2\Pi}{dx^2} \right|_{x=x_i} = -\alpha < 0,$$

то функція  $\Pi(x)$  при  $x = x_i$  досягає максимуму. Оскільки в цьому випадку

$$\Pi(x) = \Pi(x_i) - \frac{\alpha}{2} \xi^2 + \dots,$$

то замість (28.88) отримаємо:

$$-\alpha \xi^2 + \eta^2 = 2(h - h_i).$$

Звідси

$$\frac{\xi^2}{2(h - h_i)} - \frac{\eta^2}{2(h - h_i)} = -1.$$

$\alpha$

Це сім'я гіпербол з асимптотами

$$\eta = \pm \sqrt{\alpha} \xi.$$

Максимуму потенціальної функції відповідає на фазовій площині особлива точка типу *сідло*, положення рівноваги тоді є нестійким (рис. 28.6).

Із першого рівняння системи (28.80) випливає, що  $y > 0 \Rightarrow \dot{x}(t) > 0$ , тобто функція  $x(t)$  з плином часу зростає,  $y < 0 \Rightarrow \dot{x}(t) < 0$ , тобто функція  $x(t)$  з плином часу спадає. Фазовий потік еволюціонує таким чином, що з плином часу фазова точка (точка площини  $xOy$ ) рухається за годинниковою стрілкою (рис. 28.28).

До двох основних елементів фазового портрету консервативної системи (центр чи сідло) слід залучити ще фазові траєкторії, що розділяють області фазової площини, які відповідають рухам з різним характером (прикордонні або розмежувальні траєкторії) (рис. 28.29). Ці лінії називаються *сепаратрисами*. Їх розташування показує області можливих рухів різного типу і ті значення фазових координат  $x$ ,  $y$ , при яких один рух переходить в інший. На підставі (28.82) та (28.77) дістаємо:

$$dt = \frac{dx}{\pm \sqrt{2[h - \Pi(x)]}}. \quad (28.90)$$

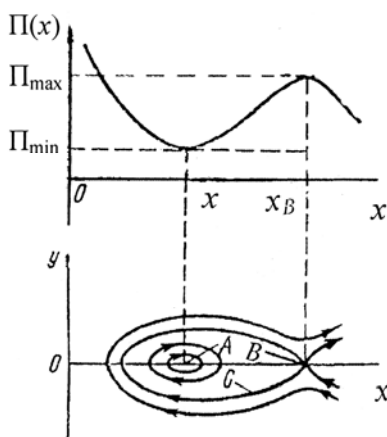


Рис. 28.29

Розглядаючи рух в додатному напрямі осі  $t$  (лише він має механічний зміст) та враховуючи симетрію фазових траєкторій відносно осі  $Ox$ , отримаємо з (28.90) при заданій амплітуді коливань вираз для періоду коливань  $T$ . Якщо  $x(t_1) = a_1$ ,  $x(t_2) = a_2$ , де  $a_1, a_2$  – відхилення системи від положення рівноваги в моменти проходження змінної  $y = \dot{x}$  через нульові значення (тобто  $a_2 - a_1$  – повний розмах коливань при даному, але довільному запасі енергії  $h$ ), то (рис. 28.30)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = \frac{T}{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}}.$$

Звідси

$$T = \sqrt{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{h - \Pi(x)}}. \quad (28.91)$$

Період коливань залежить від  $a_1, a_2$ , тобто для нелінійних систем період залежить від загального запасу енергії або розмаху здійснюваних коливань. В цьому проявляється **неізохронність** коливань в нелінійних системах. Лише для лінійної системи, коли

$$\Pi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2,$$

для коливань навколо положення рівноваги

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha_2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_2}},$$

тобто період не залежить від амплітуди здійснюваних коливань. В цьому випадку коливання стають ізохронними і період вільних коливань не залежить від наданого лінійній системі початкового запасу енергії.

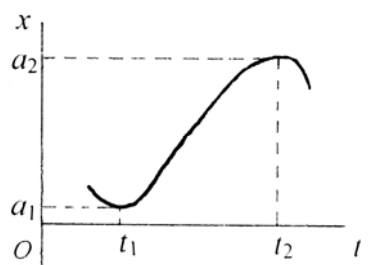


Рис. 28.30

Для ілюстрації розглянемо **ідеальний математичний маятник** (підрозділ 22.7). Диференціальне рівняння руху має вигляд (22.57) або

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x, \quad (28.92)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ . Отже, в даному випадку

$$f(x) = -\omega_0^2 \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{\sin x}{y}, \quad (28.93)$$

$$\Pi(x) = \omega_0^2 \int \sin x dx = -\omega_0^2 \cos x + C.$$

Інтеграл енергії (28.77) стає таким:

$$\frac{y^2}{2} = h + \omega_0^2 \cos x. \quad (28.94)$$

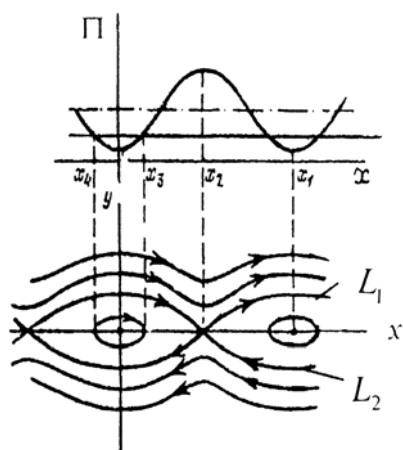


Рис. 28.31

На рис. 28.31 (внизу) відтворено фазовий портрет маятника (22.22). Два типи фазових траєкторій відповідають двом типам рухів маятника. Замкнуті траєкторії, що оточують особливу точку динамічної системи (28.80) або (22.81) типу центр ( $x = \pm 2n\pi, y = 0$ ) відповідають коливальним рухам маятника навколо нижнього положення рівноваги, в якому потенціальна енергія набуває мінімуму. Особливі точки  $x = \pm(2n+1)\pi, y = 0$  є сідловими, вони відповідають верхньому положенню рівноваги маятника (пункт 22.7.2), в якому потенціальна енергія досягає

максимуму.

Траєкторії, що розбігаються, тобто незамкнуті траєкторії на рис. 28.31, які отримуються при  $h > \omega_0^2$  і (28.94), відповідають обертальним рухам маятника, що виникають при наданні йому початкової кількості руху, яка забезпечує йому



проходження через верхнє положення рівноваги з ненульовою швидкістю. На фазовій площині це відповідає виходу зображальної точки за межі області, обмеженої сепаратрисами  $(L_1)$  та  $(L_2)$ . Останні розділяють топологічно різні області фазової площини: область замкнених траєкторій та область траєкторій, що приходять із  $-\infty$  та ідуть у  $+\infty$ .

Якщо при  $x = \pm a$  маємо  $y = 0$ , то

$$h = \Pi(a) = -\omega_0^2 \cos a.$$

Тому із (28.91) маємо:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\Pi(a) - \Pi(x)}} = \sqrt{2} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\omega_0^2 \cos x - \omega_0^2 \cos a}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 \sqrt{\cos a}} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{\cos x}{\cos a} - 1}}. \end{aligned}$$

Звідси  $T = T(a)$ , тобто період коливань залежить від амплітуди: «великі» коливання неізохронні.

Для лінійної (або лінеаризованої) системи справедливі рівності

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \quad \frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}.$$

На підставі (28.77) маємо:

$$\frac{y^2}{2} = h - \Pi(x), \quad \frac{y^2}{2} = h + \omega_0^2 \cos x - C.$$

З (28.93) випливають співвідношення

$$\Pi(0) = -\omega_0^2 + C, \quad \Pi(0) = 0 \Rightarrow C = \omega_0^2,$$

$$\frac{y^2}{2} = h + \omega_0^2 (\cos x - 1).$$

Обмежуючись малими величинами другого порядку, маємо:

$$\frac{y^2}{2} = h - \frac{\omega_0^2 x^2}{2}.$$

Якщо  $a$  – амплітуда коливань, тобто  $y|_{x=\pm a} = 0$ , то

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}}} = \frac{2}{\omega_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2}{\omega_0} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = \frac{2\pi}{\omega_0}. \end{aligned}$$

### 28.13. Автоколивання і граничні цикли

Ці питання пов'язані зі стійкістю та коливаннями динамічних систем.

Основоположником теорії стійкості рухів (та розв'язків звичайних диференціальних рівнянь є О.М. Ляпунов (див. підрозділ 28.3)). Підгрунтя теорії нелінійних коливань та лінійних коливань систем із залежними від часу параметрами створюють методи О.М. Ляпунова [19, 20], А. Пуанкаре [30], М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського [3]. Важливе місце в цій теорії посідають роботи А.А. Андронова та його школи [1]. Вагомий внесок в теорію нелінійних коливань становлять монографії І.Г. Малкіна [22, 23]. Саме вони стали основою журнальних публікацій [16, 17].

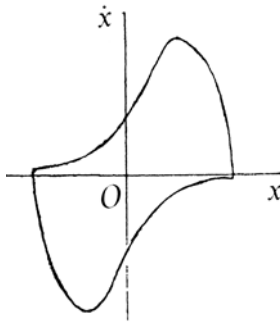


Рис. 28.32

Будь-якому періодичному рухові на фазовій площині динамічної системи (28.37) відповідає замкнута фазова траєкторія. Замкнуті фазові траєкторії консервативних систем (як лінійних, так і нелінійних) утворюють цілий континуум траєкторій, вкладених одна в одну. Особлива точка, через яку не проходить жодна фазова траєкторія і яку оточують замкнуті фазові траєкторії, називається центром (рис. 22.20). Лінійно-в'язке тертя спричиняє експоненціальне затухання вільних коливань, а особлива точка  $x = 0, y = 0$  (де  $y = \dot{x}$ ) диференціального рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

стає фокусом (стійким при  $\varepsilon > 0$ , нестійким при  $\varepsilon < 0$ ). На перший погляд, перехід до неконсервативності системи унеможливує існування в ній періодичних рухів. Все ж у ХХ ст. теоретично і експериментально було доведено існування систем, в яких, незважаючи на наявність в'язкого тертя (тобто неконсервативних), з плином часу встановлюються і підтримуються незатухаючі коливання за рахунок сил, що залежать від самої системи, причому «амплітуда» цих коливань визначається властивостями системи, а не початковими умовами. Такі коливання А.А. Андронов у 1922 р. назвав автоколиваннями. На фазовій площині (якщо система має один степінь вільності), чи у фазовому просторі (якщо система має більшу кількість степенів вільності) автоколиванням відповідає ізольована замкнута траєкторія, яку називають граничним циклом. Останні можуть бути стійкими, нестійкими і напівстійкими. Граничний цикл називається стійким, якщо існує така область на фазовій площині, що всі фазові траєкторії, що починаються в ній, асимптотично при  $t \rightarrow +\infty$  наближаються до граничного циклу («намотуються» на нього як іззовні, так і зсередини). Стійкий граничний цикл відповідає автоколиванням. Якщо ж у довільному як завгодно малому околі граничного циклу існує хоча б одна фазова траєкторія, що не наближається при

$t \rightarrow +\infty$  до граничного циклу, то він називається нестійким. Напівстійким називається граничний цикл, якщо з однієї сторони фазові траєкторії на нього намотуються, а з іншої – розмотуються.

Ізольованість замкнутої траєкторії є специфічною ознакою граничного циклу. Крім того, «амплітуда» автоколивань в широких межах не залежить від початкових умов, на відміну від періодичних рухів у консервативних системах.

Наведемо приклади динамічних систем із відомими граничними циклами.

**Задача 1.** Для рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0,$$

яке він досліджував у 1920 – 1930 рр., граничний цикл зображено на рис. 28.32.

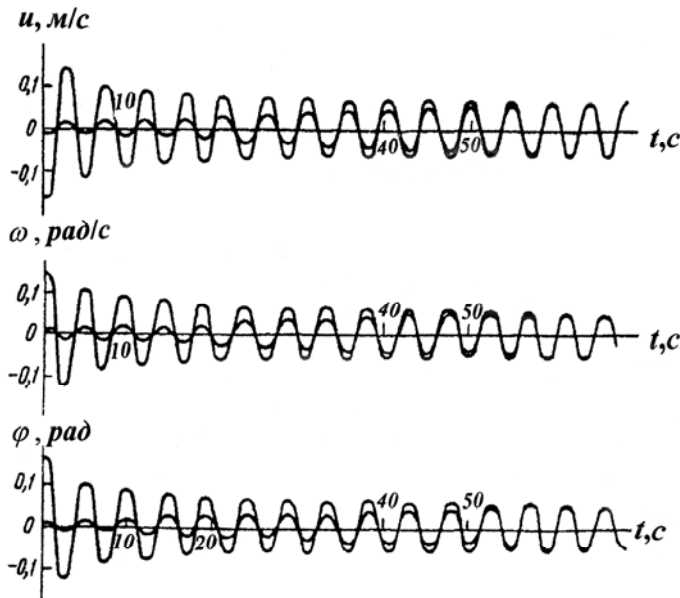


Рис. 28.33

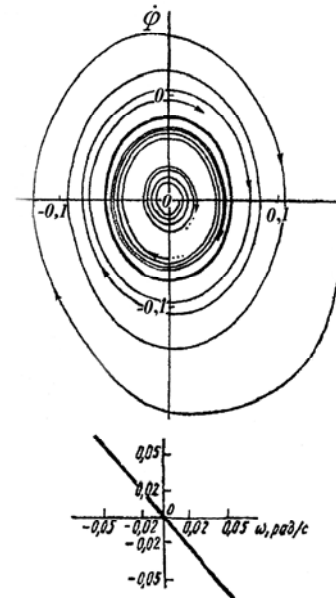


Рис. 28.34

**Задача 2.** В книзі [14] досліджувалась можливість управління динамічною поведінкою дволанковим автопоїздом (тягачем з напівприцепом) за допомогою квадратичного демпфера, що розвиває турбулентний опір, з належним чином підбраною характеристикою:

$$M_1 = C_\alpha \dot{\varphi}^2 \text{sign} \dot{\varphi}, \quad \text{sign} \dot{\varphi} = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{\varphi} > 0, \\ 0 & \text{при } \dot{\varphi} = 0, \\ -1 & \text{при } \dot{\varphi} < 0. \end{cases}$$

Диференціальне рівняння руху складено відносно змінних  $u, \omega, \varphi$ , де  $u = -\dot{x} \sin \dot{\varphi} + \dot{y} \cos \dot{\varphi}$  – бокова проекція швидкості центра мас тягача,  $\omega = \dot{\vartheta}$  –

кутова швидкість тягача,  $\vartheta$  – кут, утворений поздовжньою віссю тягача з горизонтальною віссю,  $\varphi$  – кут відхилення напівпричепа від осі тягача. Відповідна динамічна система має четвертий порядок, оскільки  $u$  – квазішвидкість (похідна неголономної координати [15]),  $\omega$  – реальна швидкість,  $\varphi$  – узагальнена, криволінійна або лагранжева координата.

На рис. 28.33 наведено інтегральні криві відповідної динамічної системи [14], побудовані асимптотичним методом змінних масштабів часу [26, 27]. Асимптотична поведінка цих кривих очевидна: при  $t \rightarrow +\infty$  в системі встановлюються періодичні коливання: стійкі як «знизу» (при незначних початкових збуреннях), так і «зверху» (при більших початкових збуреннях). Цим автоколиванням відповідає стійкий граничний цикл у 4-вимірному фазовому просторі, проекції якого на фазові площини  $\varphi\dot{\varphi}$  та  $\omega\dot{\omega}$  показано на рис. 28.34. Еліпс на площині  $\omega\dot{\omega}$  виявився настільки вузьким, що візуально сприймається як відрізок прямої.

### **Питання для самоконтролю**

- 1 Що називають динамічною системою?
- 2 Навести приклади динамічних систем.
- 3 В чому полягає метод продовження за параметром при побудові стаціонарних станів?
- 4 Що називають збуреним рухом системи?
- 5 Дати означення атратора та області притягування.
- 6 Яка різниця між особливими та «звичайними» точками векторних полів?
- 7 Навести типи особливих точок двовимірних динамічних систем.
- 8 Якою є поведінка фазових траєкторій в околах особливих точок?
- 9 Що називають біфуркаціями та катастрофами динамічних систем?
- 10 Що називають критичними випадками теорії стійкості?
- 11 Якою є поведінка одновимірної динамічної системи у випадку нульового кореня характеристичного рівняння?
- 12 Чим визначається поведінка динамічної системи у випадку пари суто уявних коренів характеристичного рівняння?
- 13 Дати означення автоколивань та граничних циклів.
- 14 Якими бувають граничні цикли?

---

## Література

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 916 с.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
4. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. – М.: Мир, 1988. – 264 с.
5. Бутенин Н. В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1985. – Т. 1: Статика и кинематика. – 240 с. – Т. 2: Динамика. – 496с.
6. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. – М.: Наука, 1969. – Часть 1: Кинематика, статика, динамика материальной точки.– 468 с. – Часть 2: Динамика системы. – 332 с.
7. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1970. – 528 с.
8. Ишлинский А.Ю. Механика: идеи, задачи, приложения. – М.: Наука, 1985. – 624 с.
9. Ишлинский А.Ю. Механика относительного движения и силы инерции. – М.: Наука, 1981. – 192 с.
10. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука.– Т. 1.– 1972.– 456 с.– Т. 2. – 1977. – 544 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
12. Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.
13. Лобас Л.Г. Инвариантные многообразия и поведение динамических систем с симметрией вблизи границы области устойчивости // Прикладная механика. – 1996. – Т. 32, № 5. – С. 81–88.
14. Лобас Л.Г. Механика многосвязных систем с качением. – К.: Наук. думка, 2000. – 270 с.
15. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
16. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. Бифуркация рождения предельного цикла и оценка области притяжения в маятниковых двухсвязных системах с качением // Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела. – 1994. – № 3. – С. 61–66.
17. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. Существование и единственность периодического движения в маятниковых двухсвязных системах с качением

- // Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела. – 1993. – № 5. – С. 23–31.
18. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
  19. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
  20. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений: В 3 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т.2. – 473 с.
  21. *Мак-Миллан В.Д.* Динамика твердого тела. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. – 468 с.
  22. *Малкин И.Г.* Некоторые нелинейные задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956.
  23. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 244 с.
  24. *Мартынюк А.А., Лобас Л.Г., Никитина Н.В.* Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин. – К.: Техніка, 1981. – 224 с.
  25. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
  26. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. – М.: Изд-во «Мир», 1984. – 536 с.
  27. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. – М.: Изд-во «Мир», 1976. – 456 с.
  28. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неавтономных систем. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
  29. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 636 с.
  30. *Пуанкаре А.О.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями (перевод с французского). – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 392 с.
  31. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
  32. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
  33. *Troger H., Steindl A.* Nonlinear stability and bifurcation theory. – Wien; New York: Springer-Verlag, 1991. – 407 p.
  34. *Shinohara Y.* A geometric method for the numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. – 1972. – Vol.8, № 1. – P. 13-42.

---

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Автоколивання 227  
Аксиома статики 23  
– паралелограма сил 24  
Алгебра векторно-матрична 139  
Амплітуда коливань 186  
Атрактор 370  
– дивний 371
- Биття 204  
Біномаль 105  
Біфуркація 376
- Вага 29  
– питома 81  
Варіація функції 315  
Вектор головний 53  
– – плоскої системи сил 57  
– кутового прискорення тіла 116, 147  
– кутової швидкості тіла 116, 146  
Взаємодія механічна 15  
Вихор (ротор) 225  
Вісь гвинта 91, 93  
– головна 256  
– – центральна 256  
– обертання 113, 167  
– миттєва гвинтова 168  
– – обертання 146  
Вузол 375  
В'язь 25, 27, 168, 279  
– внутрішня 64  
– геометрична 296  
– голономна 296  
– зовнішня 64  
– ідеальна 31, 307  
– неголономна 296  
– нестационарна 295  
– неутримуюча 295  
– одностороння 295  
– стаціонарна 295  
– утримуюча 295  
Вузол 375
- Гармоніка проста 186  
Гвинт динамічний 91  
– кінематичний 166  
– лівий 91  
– правий 91  
Гвинта параметр 91  
Гвинтова лінія 167  
Геометрія мас 250  
Гідравліка 15  
Гідромеханіка 15  
Градiєнт 225, 318
- Декремент коливань 196  
– – логарифмічний 196  
Детермінізм 175  
Динама 91, 93  
Динаміка газова 15  
– точки 169  
Диференціал функції 315  
Додавання обертань 160  
– рухів 159  
– – поступального і обертального 165
- Енергія кінетична точки 222  
– – системи 268, 339  
– потенціальна поля 224
- Жорсткість 182

- Задача динаміки пряма 179  
– – обернена 179  
– Коші 176  
– статично означена 37  
– – неозначена 37  
Закон Амонтона–Кулона 70  
– збереження енергії 215  
– – кількості руху 262  
– незалежності дії сил 173  
– Ньютона 16, 170  
– рівності дії та протидії 25  
– руху вільного твердого тіла 152  
– – точки 97  
– – – у векторній формі 97  
– – – в координатній формі 98  
– – – в натуральній формі 99  
– узагальнений паралелограма сил 174  
Зведення двох пружних елементів до одного при послідовному з'єднанні 187  
– – – – – паралельному – 188  
Зміна кількості руху точки 214  
– – – системи 261  
– моменту кількості руху точки 217  
Зусилля внутрішні 65
- Ізохронність коливань 187  
Імпульс сили елементарний 215  
– – за відрізок часу 215  
Інваріант приведення 89  
– статичний 90  
Інтеграл енергії точки 226  
– – системи 270  
– площ 221  
Інтеграл (перші) диференціальних рівнянь 216  
Інтенсивність розподіленої сили 22
- Катастрофа 376  
Квазікоордината 303  
Кількість руху точки 214  
– – системи 261  
– – твердого тіла з нерухомою точкою 271  
Кінематика 95  
– точки 95
- Коефіцієнт тертя ковзання в русі 70  
– динамічний тертя ковзання 70  
– тертя кочення 74  
– динамічності 203, 209  
Колесо залізничне 15  
– автомобільне 16  
– ведуче 242  
– ведоме 242  
Коливання головні 346  
– точки 180  
– – гармонічні 186  
– – лінійні 180  
– – вільні 181  
– – – з урахуванням опору 191, 194  
– – – вимушені 198  
– – – – нерезонансні 199  
– – – – резонансні 200, 203  
– систем з двома степенями вільності 342  
Конус тертя 71  
Координати нормальні 347  
– фазові 166  
– узагальнені 331  
– надлишкові 337  
Корені характеристичного рівняння 184  
– – – суто уявні 386  
Корінь нульовий 384  
Косинуси напрямні 139  
Кривина плоскої кривої 103  
Кут повороту тіла 114  
– тертя 71
- Лінія силова 224
- Маса 17  
– інерційна 172  
– гравітаційна 172  
– вагова 173  
– точки у спокої 174  
Матриця Якобі 375  
– повороту 139  
Маятник конічний 308  
– математичний 232  
– подвійний 350  
– фізичний 284  
Метод вирізання вузлів 41



- кінетостатики 304
- науковий 16
- перерізів 41
- продовження за параметром 345
- Механіка 15
  - аналітична 293
  - класична 15
  - космічних польотів 15
  - Ньютона 16
  - прикладна 15
  - теоретична (загальна) 15
- Міри руху 214
- Модель абсолютно твердого (недеформівного) тіла 15
  - математична 16
  - фізична 16
- Момент головний 52, 57
  - кінетичний 266
  - статичний 78
  - інерції відцентровий 251
    - – осьовий 250, 257
    - – – відносно паралельних осей 253
    - – – – довільної осі 254
  - сили 42
  - – тертя кочення 74
  - відносно точки 42
  - – – алгебраїчний 57
  - відносно осі 43
  - кількості руху точки відносно точки 218
  - – – – осі 219
  - – – системи відносно точки 266
  - пари сил 49
  - – – алгебраїчний 58
- Обертання тіла прискорене 115
  - – сповільнене 115
  - в одну сторону 162
  - в різні сторони 163
  - тіла навколо осі 279
- Область притягування 370
- Одиниці вимірювання 17
- Оператор Гамільтона 334
- Опір матеріалів 15
- Опора 31
  - у вигляді жорсткого закріплення 62
  - – – кривої лінії 31
  - – – поверхні 31
  - – – точки 31
  - шарнірно-нерухома 33
  - шарнірно-рухома 33
- Осцилятор 183
- Пара обертань 164
  - сил 49
  - – приєднана 52
- Переміщення скінченні 159
  - миттєві 159
  - дійсні 316
  - віртуальні 316
- Період коливань 186
  - функції 186
- Підвішування симетричне 188
  - несиметричне 189
- Підп'ятник 34
- Підшипник 33
- Плече пари 164
  - сили 42
- Плоска система сил 56
- Площина стична 105
  - нормальна 105
  - спрямна 105
- Поверхня гладенька 31
  - еквіпотенціальна 226
  - з аналітичною особливістю 31
  - рівня 226
- Податливість 187
- Поле силове 224
  - – стаціонарне 224
  - – нестаціонарне 224
  - – потенціальне 225, 334, 337
  - – центральної сили 232
  - – сили тяжіння 232
- Положення рівноваги маятника нижнє 235
  - – – верхнє 235
- Полнос 121
- Портрет фазовий 225, 227, 239, 367
  - – осцилятора 239
- Потужність сили 222
- Похідна абсолютна 156
  - відносна 156
  - локальна 156
  - місцева 156

- повна 156
- Принцип відносності руху 95
- віртуальних переміщень 323
- Даламбера 302
- Даламбера-Лагранжа 323
- затвердіння 26
- звільнюваності від в'язей 28, 178
- Прискорення вільного падіння 17
- доосьове 118, 129, 154
- земного тяжіння 17
- Коріоліса 157
- обертальне 118, 129, 154
- сили ваги 17
- точки 106
- – дотичне 108
- – нормальне 108
- – колеса 132
- точок тіла 118, 148
- – – при плоскому русі 129
- Проекція сили на площину 44
- Простір абсолютний 96
  
- Радіус кривини 103
- Реакція в'язі 27, 28, 32, 169, 293
- Рівновага 16, 19, 25, 38, 54
- тіла за наявності тертя 67
- Рівняння загальне динаміки точки 330
- Лагранжа першого роду 298
- – другого роду 335
- неоднорідне лінійне 198
- руху точки 177
- траєкторії точки 98
- Робота сили елементарна 222, 275
- – віртуальна 322
- Розв'язок диференціального рівняння 184
- загальний 175, 184
- незбурений 368
- частинний 184
- Ротор (вихор) 225
- Рух асимптотично стійкий 369
- вільного твердого тіла 152, 174, 277
- рівномірний і прямолінійний 19, 26
- тіла поступальний 112
- – абсолютний 298
- – відносний 298
- – обертальний навколо нерухомої осі 113
- – – – точки 135
- – переносний 298
- – сферичний 151
- точки прискорений 109
- – абсолютний 154, 298
- – відносний 155, 298
- – гвинтовий 166
- – криволінійний 109, 110
- – круговий 110
- – по гладенькій кривій лінії 301
- – складний 154
- – сповільнений 109
- тіла плоскопаралельний 119, 273
- – поступальний 112
- – миттєво поступальний 125, 167
- Сепаратриса 375
- Сила 19, 26
- активна 27, 169
- відновлююча 180
- втрачена 307
- збурена 198
- зосереджена 21
- зрівноважуюча 20
- інерції 303, 308
- – даламберова 313
- – ейлерова 313
- нормального тиску 68
- опору 180
- пасивна 28, 169
- позиційна 79
- притягування 16
- реакції в'язі 27
- рівнодійна 20, 24, 35, 36
- – системи збіжних сил 35
- розподілена 21
- – по поверхні 22
- – – лінії 22
- тиску на в'язь 27
- тертя 16, 31
- – ковзання 67
- – статичного 69
- – спокою 69
- – кочення 73
- тяги 16

- тяжіння 79
- узагальнена 331
- центральна 219
- Сили внутрішні 22, 241, 243
- зовнішні 22, 241
- Синтез рухів 158
- Система динамічна 359
- дискретна 15
- збіжних сил 35, 37
- інерціальна 171, 311
- консервативна 227, 270
- механічна 241
- неконсервативна 387
- неперервна (континуальна) 15
- нерухома 16
- одиниць вимірювання 17
- сил еквівалентна 17, 22
- Сідло 358
- Спокій 19, 26
- Сталі інтегрування 184
- Статика 17, 19
- споруд 15
- Степені вільності 306
- Стержень (стрижень) 26, 28, 29
- Стійкість руху 367
  
- Тензор інерції 254, 255
- деформацій 256
- напруг 256
- Теорема Варіньона 87, 88
- Ейлера 136
- Лагранжа–Діріхле 356
- моментів 265
- про збереження руху центра мас 245
- – три сили 26
- Сільвестра 343
- статика основна 52
- Четаєва 356
- Теорія відносного руху 309
- механізмів і машин 15
- пластичності 15
- пружності 15
- Тертя вертіння 67
- ковзання 67
- кочення 67, 71
- спокою 69
  
- статичне 69
- сухе 68
- Тіло абсолютно тверде 15, 20, 23, 26
- – – вільне 25
- – – невольне 25
- деформівне 20
- Точка матеріальна 20
- особлива 372
- – ізольована 20, 26, 160
- Траєкторії точок колеса 132
- Трієдр натуральний 105
- Тригранник супутний 105
  
- Умова рівноваги системи сил 37
- – – – в аналітичній формі 37
- – – – – геометричній формі 37
- – – – у векторній формі 37
- – – – у просторі 54
- – – – на площині 56, 59, 60
- Умови рівноваги необхідні і достатні 335
- – частково закріпленого тіла 66
  
- Фаза коливань 186
- – початкова 186, 199, 202
- Ферма 38
- жорстка 40
- кранова 39
- кроквяна 39
- мостова 39
- плоска 40
- просторова 40
  
- Ферми умова жорсткості 40
- Фокус 375
- Форми коливань 347
- – подвійного маятника 350
- Формула Галілея 230
- Ейлера 117
- Функція силова 225, 229
- дисипативна 227
- Центр 374, 390
- ваги дискретної системи 79
- – дуги кола 84
- – криволінійної пластинки 85
- – кругового сектора 85
- – твердого тіла 79, 82

- – фігури обмеженої трикутником 82  
– – – трапецією 83  
– качання 286  
– мас 18, 244  
– моментів 59  
– миттєвий 125, 126  
– – обертання 127  
– – прискорень 130, 131  
– обертання 121  
– паралельних сил 75, 78, 88  
– приведення 52, 86  
– сили (центральної) 220
- Центроїда нерухома 128  
– рухома 128  
Цикл граничний 378  
Циклоїда 132  
– видовжена 132  
– укорочена 132
- Час абсолютний 96  
Частота коливань 186
- – власна 186  
– – кругова 186  
– – циклічна 186  
Члени секулярні (вікові) 201
- Шарнір 32  
– циліндричний 32  
– сферичний 34  
Швидкість точки 101  
– кутова 111, 143  
– – Землі 18  
– секторна 220  
– світла в пустоті 173  
Швидкості точок колеса 133  
– – при плоскому русі 124  
– двох точок тіла при плоскому русі 124  
Широта географічна 18  
– на екваторі 18  
– на полюсі 18
- Якобіан 377

## ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

- Амонтон 69, 70  
Андронов О.О. 378, 394, 397  
Арістотель 325  
Арнольд В.І. 378, 397  
Архімед 323
- Бернуллі І. 132, 323, 325  
Бернуллі Я., 132  
Біркгоф Дж.Д. 360  
Боголюбов М.М. 394, 397  
Бріо Ш. 373  
Брус Дж. 397  
Буке Ж. 373  
Бутенін М. В. 397  
Бухгольць М.М. 397
- Ван-дер-Поль 395  
Валліс Д. 323  
Варіньон 87, 88  
Вівіані 132  
Вітт А.А. 397
- Галілей Г. 132, 170, 171, 230, 312, 313, 323, 325  
Гамільтон 225, 298  
Герман Я. 302  
Герц Г. (Hertz H.) 19  
Гук Р. 181  
Гюйгенс Х. 132, 254, 286, 313
- Д'Аламбер 222, 302, 304, 307, 308, 315, 329  
Дарвін Д. 379  
Декарт Р. 222, 323  
Джиблін П. 397  
Діріхле 355
- Ейлер Л. 13, 135, 136, 139, 142, 143, 146, 150, 151, 184, 254, 272, 302, 331, 378  
Ейнштейн А. 173

- Єфімов М.В. 397
- Жуковський М.Є. 312
- Ішлінський О.Ю. 312, 313, 397
- Кеплер І. 221
- Кільчевський М.А. 397
- Корн Г. 397
- Корн Т. 397
- Коріоліс Г. 157, 309
- Коші 175, 176, 362, 364
- Крилов О.М. 14, 394
- Крюков Б.И. 397
- Кулон 69, 70
- Лагранж Ж.Л. 13, 293, 298, 299, 302, 323, 329, 335, 336, 350, 355
- Лейбніц Г.В. 132, 222
- Лобас Л.Г. 397, 398
- Лунц Я.Л. 397
- Лур'є А.І. 293, 398
- Ляпунов О.М. 13, 361, 367, 368, 369, 370, 378, 379, 382, 383, 384, 387, 394
- Мазер Дж. 378
- Маклорен 342, 384, 385
- Мак-Міллан В.Д. 398
- Малкін І.Г. 394, 398
- Мартинюк А.А. 398
- Медведев В.І. 398
- Меркін Д.Р. 397
- Мігулін В.В. 398
- Мітропольський Ю.О. 394, 397
- Мустель Є.Р. 398
- Найфэ А.Х. 398
- Неймарк Ю.И. 398
- Нікітіна Н.В. 398
- Ньютон І. 16, 19, 95, 132, 170, 171, 310, 312, 313, 323
- Паригін В.М. 398
- Парс Л.А. 398
- Паскаль Б. 132
- Пуанкаре А. О. 373, 376, 378, 379, 394, 398
- Розендорн Э.Р. 397
- Сільвестр 343
- Смейл С. 378
- Суслов Г.К. 293, 398
- Тарг С.М. 398
- Тейлор 368, 390
- Том Р. 378
- Томсон В. (лорд Кельвін) 14
- Торрічелі Е. 323
- Убальді Г. 323
- Уітні Х. 378
- Фуко 309
- Фур'є 186
- Фуфаєв М.О. 398
- Хайкін С.Е. 397
- Хопф 379
- Хребет В.Г. 397
- Четаєв М.Г. 355, 379
- Шінохар 379
- Якобі К. 362, 376
- Newton I. 170
- Shinohara Y. 361, 398
- Steindl A. 398
- Troger H. 398

Навчальне видання

**Лобас Леонід Григорович**  
**Лобас Людмила Геннадіївна**

**Теоретична механіка**  
Підручник

Редактор *Т.І.Заболотна*  
Комп'ютерний набір і верстка *Н.Ф.Рябова*

---

Підписано до друку	Формат	Папір
Друк	Ум. друк. арк. 21,48. Обл.-вид. арк. 33,25	

---

Віддруковано в Редакційно-видавничому центрі Державного  
економіко технологічного університету транспорту  
03049, м. Київ-49, вул. Миколи Лукашевича, 19

Свідоцтво