

РАЗДЕЛ 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Тема: ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

2.1. Транспортная задача

2.1.1. Математическая модель задачи транспортного типа

Транспортная задача (ТЗ) является важнейшей частной задачей линейного программирования, имеющей обширные практические приложения не только к проблемам транспорта. Она выделяется в линейном программировании определённой экономической характеристикой, особенностями математической модели, наличием специфических методов решения.

Простейшая формулировка транспортной задачи по критерию стоимости следующая: в m пунктах отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ (будем называть их *поставщиками*) находится соответственно $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц однородного груза (*ресурсов*), который должен быть доставлен n потребителям $B_1, B_2, \dots, B_n$ в количествах $b_1, b_2, \dots, b_n$ единиц соответственно (назовем их *потребностями*). Известны транспортные издержки c_{ij} перевозок единицы груза из i -го пункта отправления в j -й пункт потребления ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). Требуется спланировать перевозки (т.е. указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i -го поставщика j -му потребителю) так, чтобы

- 1) весь груз из пунктов отправления был вывезен;
- 2) потребности каждого пункта потребления были полностью удовлетворены;
- 3) суммарные издержки на перевозки были минимальными.

Для наглядности условия транспортной задачи представим в виде таблицы, которая называется транспортной или распределительной.

Транспортная таблица

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{22}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	...	b_n	

Здесь количество груза, перевозимого из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения, равно x_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Предполагается, что все $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Запас груза в i -м пункте отправления определяется величиной $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, а потребность j -го пункта назначения в грузе – $b_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$. Матрица $(c_{ij})_{m \times n}$ называется *матрицей тарифов* (издержек или транспортных расходов). Планом транспортной задачи называется матрица перевозок $X = (x_{ij})_{m \times n}$. Если в плане перевозок переменная x_{ij} принимает положительное значение, то его будем записывать в соответствующую клетку (i, j) и считать ее загруженной (занятой) или *базисной*, если же $x_{ij} = 0$, то клетку (i, j) , как правило, оставляют *свободной*.

Составим *математическую модель* задачи транспортного типа.

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (2.1)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам (2.2), по потребностям (2.3) и условиям неотрицательности (2.4). В математической записи это можно представить так:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Таким образом, среди множества решений системы ограничений (2.2)-(2.3) требуется найти такое неотрицательное решение, которое минимизирует целевую функцию (2.1). Полученная задача является задачей линейного программирования. Решение ТЗ проводится с помощью общего приема последовательного улучшения плана, который реализован в симплексном методе.

2.1.2. Этапы решения транспортной задачи

1. Определение исходного опорного плана.
2. Оценка этого плана.
3. Переход к следующему плану путем однократной замены одной из базисных переменных на свободную.

2.1.3. Условие баланса

Теорема. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т.е. выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.5)$$

Если условие (2.5) выполнено, то модель ТЗ называется *закрытой* (сбалансированной). Задача с отсутствием баланса между ресурсами и потребностями называется *открытой* ($\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$).

1. Если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то в математическую модель вводится фиктивный $(n + 1)$ -й потребитель B_{n+1} , для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставщиков и фактическим спросом потребителей, т.е. $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. Все тарифы на доставку груза с фиктивными потребностями считают равными нулю, т.е. $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1, m}$. Поэтому для новой задачи значение целевой функции не изменится. Иными словами, фиктивный потребитель не нарушит совместности системы ограничений. В транспортной таблице задачи предусматривается дополнительный столбец.

2. Если же $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводится фиктивный $(m + 1)$ -й поставщик A_{m+1} . Для этого в транспортную таблицу добавляется одна строка, запас груза для которой записывают равным $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, а стоимости перевозок полагают равными нулю: $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1, n}$. Поэтому в данном случае значение целевой функции не изменится, а система ограничений останется совместной.

2.1.4. Особенности системы ограничений

Система ограничений транспортной задачи (2.1)–(2.4) имеет ряд особенностей, что позволяет решать ее более рациональными способами.

1. Коэффициенты при неизвестных во всех ограничительных уравнениях равны единице.

2. Любая переменная встречается только в двух уравнениях.
3. Система уравнений ТЗ симметрична относительно всех переменных.

4. Матрица системы ограничений состоит из 0 и 1, причем любой столбец содержит только два элемента, равных 1, а остальные – 0.

5. Система ограничений содержит $m + n$ уравнений с $m \cdot n$ пере-

менными. А так как $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j$, то ранг

матрицы транспортной задачи на единицу меньше количества уравнений, т.е. $r = m + n - 1$, где m – число поставщиков; n – число потребителей. Следовательно, любое опорное решение системы ограничений транспортной задачи должно содержать $r = m + n - 1$ базисных переменных и $m \cdot n - r = (m - 1)(n - 1)$ свободных переменных, равных нулю.

6. Если все a_i и b_j – целые, тогда значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые. А так как это задача линейного программирования, то оптимальное решение является базисным допустимым решением и, следовательно, целым. (Это является гарантией, что в задаче не будет получено абсурдное решение, например 7,5 тумбочки.)

Пример 10. Урожай картофеля, собранный фермерами Φ_1, Φ_2, Φ_3 в количествах 60, 45 и 130 т соответственно, должен быть доставлен в четыре магазина M_1, M_2, M_3, M_4 . Спрос на картофель равен 50, 70, 60 и 80 т соответственно. Известна матрица транспортных расходов (в ден. ед.) на доставку 1 т картофеля:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 13 & 11 \\ 15 & 11 & 9 & 8 \\ 12 & 17 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Запланировать перевозку картофеля с минимальными затратами при условии, что запросы 3-го магазина должны быть удовлетворены полностью. Составить математическую модель задачи и привести ее к стандартной транспортной задаче с балансом.

Решение. Сведем исходные данные в табл. 2.1:

Таблица 2.1

Магазин Фермер	B_1	B_2	B_3	B_4	Урожай картофеля, т
A_1	14	16	13	11	60
A_2	15	11	9	8	45
A_3	12	17	10	14	130
Потребности магазинов, т	50	70	60	80	$\sum_{i=1}^3 a_i = 235$ $\sum_{j=1}^4 b_j = 260$

Построим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} ($j = \overline{1,4}$, $i = \overline{1,3}$) – количество тонн картофеля, перевозимого i -м фермером j -му магазину. Тогда общие затраты, связанные с реализацией плана перевозок, представятся целевой функцией:

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

или

$$Z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + \\ + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + \\ + 12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} \rightarrow \min.$$

Требуется спланировать перевозки так, чтобы весь груз из пунктов отправления был вывезен. Но поскольку суммарный объем картофеля, вывезенного от каждого фермера, не может превышать собранного им урожая, то переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим ограничениям по запасам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 & (\text{для 1-го фермера}), \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 & (\text{для 2-го фермера}), \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 & (\text{для 3-го фермера}). \end{cases}$$

Аналогічно потреби кожного пункту потреби повинні бути повністю задоволені. Але оскільки потреба магазинів в картоплі (260 т) більше, ніж зібраний фермерами урожай (235 т), то спрос не всіх магазинів буде повністю задоволений. Тому повинні виконуватися обмеження-нерівності по потребах:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 50 & (\text{для 1-го магазину}), \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 70 & (\text{для 2-го магазину}), \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 60 & (\text{для 3-го магазину}), \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 80 & (\text{для 4-го магазину}). \end{cases}$$

Об'єм перевезок картоплі не може бути від'ємним, тому справедливі умови неотрицательності на змінні: $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$.

Таким чином, сформульована вище задача зводиться до задачі знаходження таких неотрицательних значень змінних x_{ij} ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$), які задовольняють системам обмежень по поставкам і потребам і мінімізують цільову функцію витрат.

Однак транспортна задача розв'язима тільки в тому випадку, коли виконується умова балансу: $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$. В нашому прикладі

воно порушено, так як

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_i &= 60 + 45 + 130 = 235, \\ \sum_{j=1}^4 b_j &= 50 + 70 + 60 + 80 = 260. \end{aligned}$$

Следовательно, задача является открытой, несбалансированной.

Поскольку $\sum_{i=1}^3 a_i < \sum_{j=1}^4 b_j$, то введем фиктивного фермера A_4 , уро-

жай картофеля у которого составит:

$$a_4 = \sum_{j=1}^4 b_j - \sum_{i=1}^3 a_i = 260 - 235 = 25 \text{ (т)}.$$

Согласно условию запросы 3-го магазина должны быть полностью удовлетворены. Следовательно, стоимость транспортных расходов на доставку 1 т картофеля от фиктивного фермера A_4 в этот магазин необходимо сделать невыгодной, например $c_{43} > \max_{i,j} c_{ij} = 17$. Пред-

положим, $c_{43} = 20$ (ден. ед.). А стоимость транспортных расходов на доставку 1 т картофеля от фиктивного фермера A_4 во все другие магазины будем полагать равной нулю: $c_{4j} = 0$, $j = \overline{1,4}$, $j \neq 3$.

Получим следующую закрытую модель транспортной задачи:

$$z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + \\ + 12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} + 0x_{41} + 0x_{42} + 20x_{43} + 0x_{44} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 & \text{(для 1 - го фермера),} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 & \text{(для 2 - го фермера),} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 & \text{(для 3 - го фермера),} \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 25 & \text{(для фиктивного фермера);} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 50 & \text{(для 1 - го магазина),} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 70 & \text{(для 2 - го магазина),} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 60 & \text{(для 3 - го магазина),} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 80 & \text{(для 4 - го магазина),} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}.$$

Решение сбалансированной транспортной задачи будет являться и решением исходной открытой задачи.

2.1.5. Построение начального опорного плана методом «МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА»

План транспортной задачи называется *опорным*, если из заполненных им $m + n - 1$ клеток нельзя образовать ни одного цикла. *Циклом* в транспортной таблице называется набор клеток матрицы перевозок, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или одной строке, а последняя клетка набора лежит в той же строке или столбце, что и первая. Эту совокупность клеток можно представить так:

$$(i_1, j_1) \rightarrow (i_1, j_2) \rightarrow (i_2, j_2) \rightarrow \dots \rightarrow (i_s, j_s) \rightarrow (i_s, j_1).$$

Графически цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, звенья которой лежат только в строках или столбцах. При этом каждое звено соединяет только две клетки ряда. В цикле всегда четное число клеток. При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить *единственный* цикл, содержащий данную клетку и некоторую часть занятых клеток.

Сущность метода «минимального элемента» заключается в том, что на каждом шаге осуществляется максимально возможное «перемещение» груза в клетку с минимальным тарифом c_{ij} . Заполнение таблицы начинают с клетки, которой соответствует наименьший элемент c_{ij} матрицы тарифов, причем выбирают только среди стоимостей реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика (или потребности фиктивного потребителя) распределяются в последнюю очередь. Пусть $\min_{i,j} c_{ij} = c_{lk}$. Следова-

тельно, загружается клетка (l, k) , т.е. $x_{lk} = \min\{a_l, b_k\}$. Если $a_l > b_k$, то $x_{lk} = b_k$ и из рассмотрения исключают столбец с номером k , соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворён. А новое значение $a'_l = a_l - b_k$. Если $a_l < b_k$, то $x_{lk} = a_l$ и из рассмотрения исключают строку с номером l , соответствующую поставщику, запасы которого израсходованы полностью. Новое значение $b'_k = b_k - a_l$. На некотором шаге (но не на послед-

нем) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (*что-либо одно*). Тогда запасы соответствующего пункта отправления или потребности данного пункта назначения полагают равными нулю. Этот нуль записывают в очередную заполняемую клетку. Опорный план называется *невыврожденным*, если все его $m + n - 1$ компоненты больше нуля, в противном случае он называется *вырожденным*.

Пример 11. Построить начальный опорный план сбалансированной задачи из примера 10.

$$z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + \\ + 12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} + 0x_{41} + 0x_{42} + 20x_{43} + 0x_{44} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 & (\text{для 1-го фермера}), \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 & (\text{для 2-го фермера}), \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 & (\text{для 3-го фермера}), \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 25 & (\text{для фиктивного фермера}); \\ \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 50 & (\text{для 1-го магазина}), \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 70 & (\text{для 2-го магазина}), \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 60 & (\text{для 3-го магазина}), \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 80 & (\text{для 4-го магазина}), \end{cases} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решение. Занесем исходные данные задачи в табл. 2.2:

- 1) в столбец a_i – запасы картофеля i -го фермера, $i = \overline{1,4}$;
- 2) в строку b_j – потребности j -го магазина, $j = \overline{1,4}$;
- 3) в нижний правый угол каждой клетки, расположенной в i -й строке и j -м столбце, – стоимости перевозок x_{ij} , $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$.

Построим начальный опорный план задачи методом «минимального элемента». Для этого найдем наименьший элемент c_{ij} матрицы тарифов (при этом выбирать будем только среди стоимостей реальных фермеров и магазинов, а запасы фиктивного фермера распределим в последнюю очередь). Он находится в клетке (2, 4): $\min_{i,j} c_{ij} = c_{24} = 8$.

Следовательно, будет загружаться клетка (2, 4), т.е. $x_{24} = \min\{45; 80\} = 45$. Так как $a_2 = 45 < 80 = b_4$, то из рассмотрения исключим строку с номером 2, соответствующую фермеру, запасы которого израсходованы полностью. Новое значение $b'_4 = b_4 - a_2 = 80 - 45 = 35$.

Из оставшихся клеток снова находим клетку с наименьшим тарифом и проводим действия, аналогичные описанным выше:

$$\min_{(i,j) \neq (2,4)} c_{ij} = c_{33} = 10 \Rightarrow x_{33} = \min\{130; 60\} = 60.$$

Так как $a_3 = 130 > 60 = b_3$, то из рассмотрения исключаем столбец с номером 3, соответствующий магазину, спрос которого полностью удовлетворен. Новое значение $a'_3 = a_3 - b_3 = 130 - 60 = 70$ и т.д.

Проверяем условие для базисных клеток (их должно быть $m + n - 1$):

$$m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7.$$

Заполнено также 7 клеток. Следовательно, начальный опорный план построен верно. При этом значение целевой функции будет равно:

$$z_0 = 16 \cdot 25 + 11 \cdot 35 + 8 \cdot 45 + 12 \cdot 50 + 17 \cdot 20 + 10 \cdot 60 + 0 \cdot 25 = 2685 \text{ (ден. ед.)}$$

Таблица 2.2

$a_i \backslash b_j$	50	70	60	80
60	- 14	25 16	- 13	35 11
45	- 15	- 11	- 9	45 8
130	50 12	20 17	60 10	- 14
25	- 0	25 0	- 20	- 0

2.1.6. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

1. Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения баланса приводят задачу к закрытой модели.

2. Условие задачи записывают в форме транспортной таблицы.

3. Строят начальный опорный план перевозок.

4. Проверяют условие для базисных клеток (их должно быть $m + n - 1$). Если это условие не выполняется, то в одну из свободных клеток (как правило, в клетку с наименьшим тарифом) вписывают число 0, и такая клетка считается базисной. Однако число 0 записывают лишь в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками.

5. Вычисляют потенциалы u_i и v_j . Каждому поставщику (каждой строке) ставят в соответствие некоторое число u_i , называемое *потенциалом поставщика* A_i ($i = \overline{1, m}$), и записывают справа от таблицы, а каждому потребителю (или столбцу) – некоторое число v_j , называемое *потенциалом потребителя* B_j ($j = \overline{1, n}$), и записывают под таблицей. Числа u_i и v_j выбирают так, чтобы в любой базисной клетке их сумма равнялась тарифу, т.е. $u_i + v_j = c_{ij}$. Так как количество всех потенциалов u_i и v_j составляет $m + n$, а занятых клеток $m + n - 1$, то для определения чисел u_i и v_j придется решать систему из $m + n - 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными. Поэтому одному из неизвестных потенциалов придают произвольное значение. Тогда остальные определяются однозначно.

6. Для проверки оптимальности плана просматривают свободные клетки, для которых определяют оценки Δ_{ij} – разность между тарифом клетки и суммой потенциалов строки и столбца, т.е. $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Экономическая оценка показывает, на сколько денежных единиц изменятся транспортные издержки от загрузки данной клетки единицей груза. Если все оценки неотрицательные,

т.е. $\Delta_{ij} \geq 0$, то план оптимальный и остается подсчитать транспортные расходы. Иначе переходят к п. 7.

7. Из отрицательных оценок ($\Delta_{ij} \leq 0$) выбирают минимальную. Пусть это будет Δ_{lk} . Тогда клетку (l, k) вводят в число базисных, т.е. строят цикл по загруженным клеткам с началом в этой клетке и перераспределяют поставки так, чтобы баланс цикла сохранился. Для этого вершинам цикла приписывают чередующиеся знаки «+» и «-» (свободной клетке (l, k) приписывают положительный знак «+»). В «минусовых» клетках отыскивают наименьший груз w , т.е. $w = \min_{"-"} x_{ij} = x_{st}$, который и «перемещается» по клеткам замкнутого цикла, т.е. прибавляется к перевозкам x_{ij} в клетках со знаком «+» (включая свободную) и вычитается из перевозок x_{ij} в клетках со знаком «-». Следовательно, клетка (s, t) станет свободной и переменная x_{st} уйдет из базиса. Значение остальных базисных переменных переписываются. Таким образом, получают новую транспортную таблицу с улучшенным планом, для которого транспортные издержки изменятся на величину $\Delta_{lk} \cdot x_{st}$. Переходят к пункту 4.

Замечания.

1. При сдвиге по циклу вместо одной может освободиться сразу несколько клеток (вырожденная задача). Свободной оставляют только одну (с наибольшим тарифом), а в остальные освободившиеся клетки вписывают нули и считают их загруженными.

2. Если все оценки $\Delta_{ij} > 0$, то оптимальный план единственный. Если существует хотя бы одна оценка $\Delta_{ij} = 0$, то задача имеет множество оптимальных планов, которое представляет собой выпуклую линейную комбинацию оптимальных решений. Другие оптимальные планы можно получить, загружая по очереди клетки с нулевыми оценками.

Пример 12. Решить задачу из примера 10 методом потенциалов.

$$\begin{aligned} z = & 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + \\ & + 12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} \rightarrow \min, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 & (\text{для 1 - го фермера}), \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 & (\text{для 2 - го фермера}), \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 & (\text{для 3 - го фермера}); \\ \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 50 & (\text{для 1 - го магазину}), \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 70 & (\text{для 2 - го магазину}), \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 60 & (\text{для 3 - го магазину}), \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 80 & (\text{для 4 - го магазину}), \end{cases} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решение. 1. Приведем задачу к закрытой модели (см. пример 10).

2. Запишем условие в виде транспортной таблицы (см. пример 11).

3. Построим начальный опорный план перевозок (см. пример 11).

4. Проверим условие для базисных клеток (см. пример 11).

5. Вычислим потенциалы фермеров u_i и магазинов v_j . Для этого в строку или в столбец с наибольшим количеством заполненных клеток (3-я строка или 2-й столбец в табл. 2.3) запишем нулевой потенциал, например $v_2 = 0$. Далее, используя уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$, для базисных (заполненных) клеток найдем остальные потенциалы u_i и v_j всех строк и столбцов:

$$v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = c_{12} - v_2 = 16 - 0 = 16, u_3 = c_{32} - v_2 = 17 - 0 = 17,$$

$$u_4 = c_{42} - v_2 = 0 - 0 = 0;$$

$$u_1 = 16 \Rightarrow v_4 = c_{14} - u_1 = 11 - 16 = -5;$$

$$u_3 = 17 \Rightarrow v_1 = c_{31} - u_3 = 12 - 17 = -5, v_3 = c_{33} - u_3 = 10 - 17 = -7;$$

$$v_4 = -5 \Rightarrow u_2 = c_{24} - v_4 = 8 - (-5) = 13.$$

Таблиця 2.3

$a_i \backslash b_j$	50	70	60	80	$u_i \downarrow$
60	3 14	- 25 16	4 13	+ 35 11	16
45	7 15	+ -2 11	3 9	- 45 8	13
130	50 12	20 17	60 10	2 14	17
25	5 0	25 0	27 20	5 0	0
$v_j \rightarrow$	-5	0	-7	-5	

6. Затем по формуле $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ подсчитаем оценки небазисных (пустых) клеток и занесем их значения в левые нижние углы незаполненных клеток табл. 2.3. Например,

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 13 - (16 - 7) = 4;$$

$$\Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 11 - (13 + 0) = -2 \text{ и т.д.}$$

7. Проведем анализ оценок Δ_{ij} . Так как среди оценок есть отрицательные ($\Delta_{22} = -2$), то данный опорный план неоптимален. Переменную x_{22} включим в базис, т.е. перейдем к построению нового опорного плана, улучшенного в том смысле, что значение целевой функции станет меньше. Построим цикл по загруженным клеткам с началом в клетке (2, 2): $(2, 2) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (2, 4)$.

(В табл. 2.3 цикл изображен пунктирной линией.)

Вершинам цикла присвоим чередующиеся знаки «+» и «-». Причем клетку (2, 2), вводимую в базис, пометим знаком «+». Далее выберем клетку с наименьшим грузом среди «минусовых» (в нашем примере это клетка (1, 2)) и перераспределим поставки так, чтобы баланс цикла сохранился. Для этого груз $w = x_{12} = 25$ прибавим к перевозкам в клетках, помеченных знаком «+»:

$$x'_{22} = x_{22} + 25 = 0 + 25 = 25 \quad \text{и} \quad x'_{14} = x_{14} + 25 = 35 + 25 = 60,$$

и вычтем из величин x_{ij} в клетках, помеченных знаком «-»:

$$x'_{24} = x_{24} - 25 = 45 - 25 = 20 \quad \text{и} \quad x'_{12} = x_{12} - 25 = 25 - 25 = 0.$$

Объемы остальных перевозок не изменятся.

Таким образом, клетка (1, 2) исключается из базисного множества, а клетка (2, 2) вводится вместо нее. Получим новую табл. 2.4 с улучшенным планом, для которого транспортные издержки изменятся на величину $\Delta_{22} \cdot x_{12} = -2 \cdot 25 = -50$, т.е. транспортные расходы уменьшатся на 50 ден. ед. При втором опорном плане перевозок значение целевой функции составит:

$$z_1 = 11 \cdot 60 + 11 \cdot 25 + 8 \cdot 20 + 12 \cdot 50 + 17 \cdot 20 + 10 \cdot 60 + 0 \cdot 25 = 2635 \text{ (ден. ед.)}$$

Таблица 2.4

$a_j \backslash b_j$	50	70	60	80	$u_i \downarrow$
60	5 14	2 16	6 13	60 11	14
45	9 15	+ 25 11	5 9	- 20 8	11
130	50 12	- 20 17	60 10	+ 0 14	17
25	5 0	25 0	27 20	3 0	0
$v_j \rightarrow$	-5	0	-7	-3	

Полученный опорный план оптимален, так как среди оценок нет отрицательных. Выпишем его:

$$X_{opt}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 25 & 0 & 20 \\ 50 & 20 & 60 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_{\min} = z(X_{opt}^1) = 2635.$$

Итак, чтобы перевезти картофель с минимальными затратами 2635 ден. ед., необходимо:

- от 1-го фермера в 4-й магазин перевезти 60 т картофеля;
- от 2-го фермера во 2-й магазин перевезти 25 т картофеля;
- от 2-го фермера в 4-й магазин перевезти 20 т картофеля;
- от 3-го фермера в 1-й магазин перевезти 50 т картофеля;
- от 3-го фермера во 2-й магазин перевезти 20 т картофеля;
- от 3-го фермера в 3-й магазин перевезти 60 т картофеля.

Наличие 25 т картофеля у фиктивного фермера свидетельствует о том, что при условии полной перевозки картофеля от всех фермеров спрос 2-го магазина не будет удовлетворён полностью. Он недополучит 25 т картофеля.

Оптимальный план не единственный, так как существует нулевая оценка: $\Delta_{34} = 0$. Второе решение X_{opt}^2 получим в новой транспортной табл. 2.5.

Таблица 2.5

$a_i \backslash b_j$	50	70	60	80	$u_i \downarrow$
60	5 14	2 16	6 13	60 11	-3
45	9 15	45 11	5 9	0 8	-6
130	50 12	0 17	60 10	20 14	0
25	5 0	25 0	27 20	3 0	-17
$v_j \rightarrow$	12	17	10	14	

В табл. 2.4 загружаем клетку с нулевой оценкой (3, 4), как было описано выше, т.е. построим цикл и перераспределим по нему поставки. При сдвиге по циклу вместо одной клетки у нас освободятся сразу две (вырожденная задача): (3, 2) и (2, 4). Но свободной оставим только одну клетку с наибольшим тарифом (17 ден. ед.): (3, 2); а во вторую освободившуюся клетку (2, 4) впишем нуль и будем считать ее загруженной. Получили новый оптимальный план X_{opt}^2 , для которого транспортные издержки не изменятся, т.е. $z_{min} = 2635$ (ден. ед.).

Выпишем X_{opt}^2 из табл. 2.5.

$$X_{opt}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 60 & 20 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_{min} = z(X_{opt}^2) = 2635.$$

Итак, для того чтобы перевезти картофель с минимальными затратами 2635 ден. ед., необходимо:

- от 1-го фермера в 4-й магазин перевезти 60 т картофеля;
- от 2-го фермера во 2-й магазин перевезти 45 т картофеля;
- от 3-го фермера в 1-й магазин перевезти 50 т картофеля;
- от 3-го фермера в 3-й магазин перевезти 60 т картофеля;
- от 3-го фермера в 4-й магазин перевезти 20 т картофеля.

Наличие 25 т картофеля у фиктивного фермера свидетельствует о том, что при условии полной перевозки картофеля от всех фермеров спрос 2-го магазина не будет удовлетворён полностью. Он недополучит 25 т картофеля.

Общее решение задачи представляет собой выпуклую линейную комбинацию оптимальных планов X_{opt}^1 и X_{opt}^2 , т.е.

$$X_{opt} = \lambda_1 X_{opt}^1 + \lambda_2 X_{opt}^2, \text{ где } \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0.$$

Лабораторная работа №3 ПЛАНИРОВАНИЕ ПЕРЕВОЗОК

Постановка задачи.

Товары с m баз поставляются в n магазинов. Потребности магазинов в товарах равны b_j тыс. ед., $j = \overline{1, n}$. Запасы товаров на базах составляют a_i тыс. ед., $i = \overline{1, m}$. Затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара в ден. ед. представлены матрицей затрат $C_{m \times n}$. Запланировать перевозку с минимальными затратами при заданном дополнительном условии.

Требуется:

- 1) свести исходные данные в таблицу;

База \ Магазин	B_1	B_2	$\dots$	B_n	Запасы товаров на базах, тыс.ед.
A_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_m
Потребности магазинов, тыс. ед.	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{j=1}^n b_j$

- 2) составить математическую модель задачи;
- 3) привести ее к стандартной транспортной задаче (с балансом);
- 4) построить начальный опорный план задачи (методом минимального элемента);
- 5) решить задачу (методом потенциалов);
- 6) проанализировать результаты решения.

Варианты заданий для выполнения лабораторной работы №3

вариант	Задание	вариант	Задание
1 вариант	$\vec{a} = (12; 14; 8; 10),$ $\vec{b} = (9; 11; 7; 6; 9),$ $C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью освободить 4-ю базу.	2 вариант	$\vec{a} = (10; 9; 8; 15; 7),$ $\vec{b} = (16; 11; 12; 13),$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью удовлетворить потребности 3-го магазина.
3 вариант	$\vec{a} = (10; 20; 18; 12; 25),$ $\vec{b} = (30; 25; 20; 15),$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью удовлетворить потребности 3-го магазина.	4 вариант	$\vec{a} = (10; 12; 11; 7),$ $\vec{b} = (8; 9; 9; 6; 5),$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью освободить 1-ю базу.

вариант	Задание	вариант	Задание
5 вариант	$\vec{a} = (30; 25; 20; 15),$ $\vec{b} = (10; 20; 18; 12; 25),$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью освободить 3-ю базу.	6 вариант	$\vec{a} = (9; 8; 7; 14; 7), \vec{b} = (15; 10; 11; 12),$ $C = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 10 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью удовлетворить потребности 4-го магазина.
7 вариант	$\vec{a} = (16; 11; 12; 13),$ $\vec{b} = (10; 9; 8; 15; 7),$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью освободить 2-ю базу.	8 вариант	$\vec{a} = (14; 11; 14; 9; 4), \vec{b} = (20; 14; 10; 6),$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью освободить 2-ю базу.

варіант	Задание	варіант	Задание
9 вариант	$\vec{a} = (12; 9; 8; 15; 13),$ $\vec{b} = (20; 15; 12; 13),$ $C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью удовлетворить потребности 1-го магазина.	10 вариант	$\vec{a} = (20; 14; 10; 6),$ $\vec{b} = (14; 11; 14; 9; 4),$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью удовлетворить потребности 5-го магазина.
11 вариант	$\vec{a} = (20; 15; 12; 13),$ $\vec{b} = (12; 9; 8; 15; 13),$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью освободить 3-ю базу.	12 вариант	$\vec{a} = (9; 11; 7; 6; 9), \quad \vec{b} = (12; 14; 8; 10),$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$ Необходимо полностью удовлетворить потребности 3-го магазина.