

РАЗДЕЛ 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Тема: ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА СЕТЯХ. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.3. Основные понятия теории графов

Теория графов применяется в различных областях знаний. В частности, она нашла важные приложения в управлении производством, в календарном и сетевом планировании, при обработке экономической информации. Основным объектом этой теории является граф.

Граф – это множество точек плоскости или пространства и множество линий, соединяющих все или некоторые из этих точек. Точки множества называются *вершинами*, а линии, их соединяющие, – *дугами* (если указано, какая вершина является начальной) или *ребрами* (если ориентация не указана). Примерами графов могут служить схемы железных или шоссейных дорог, схемы связи поставщиков и потребителей, структурные формулы молекул и т.д.

Математически *конечным графом* $G(V, U)$ называется совокупность двух конечных множеств, а именно: непустого множества точек V – множества вершин V_i , и множества U – пар вершин $(V_i, V_j) = u_{ij}$, связанных между собой (рис. 2.1).

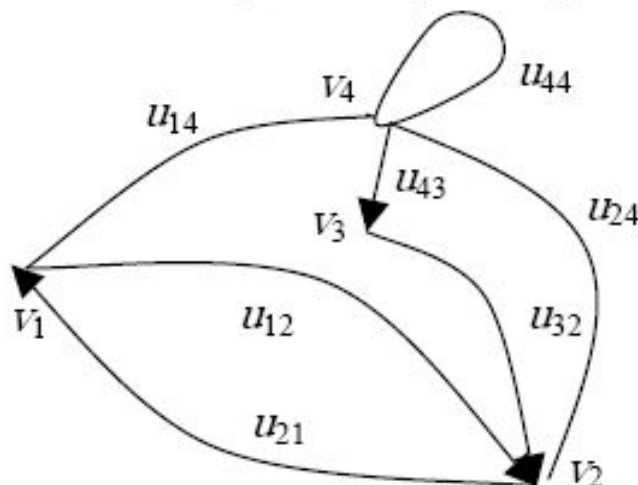


Рис. 2.1

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\};$$

$$U = \{u_{12}, u_{14}, u_{21}, u_{24}, u_{32}, u_{43}, u_{44}\}.$$

Граф, состоящий из дуг, называется *ориентированным* (или *орграфом*), а образованный ребрами – *неориентированным*. Граф, состоящий из дуг и ребер, называется *смешанным*. На рис. 2.1 показан смешанный граф.

Вершина и ребро (дуга) называются *инцидентными* друг другу, если вершина является началом или концом ребра (дуги). На рис. 2.1 вершина v_2 инцидентна ребру u_{24} и дугам u_{12} , u_{21} , u_{32} .

Два ребра (дуги) называются *смежными*, если они имеют общую концевую вершину. На рисунке смежные дуги, например, u_{43} и u_{32} или дуга u_{14} и ребро u_{24} .

Две вершины называются *смежными*, если они соединены некоторым ребром или дугой. На рис. 2.1 смежные следующие вершины: v_1 и v_2 , v_1 и v_4 , v_2 и v_3 , v_2 и v_4 , v_3 и v_4 .

Путем в неориентированном графе называют такую последовательность ребер, в которой любые два соседних ребра смежные. На рисунке путь составляют, например, ребра $u_{14} - u_{24}$.

Путем в орграфе называется последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. На рис. 2.1 путем является последовательность дуг $u_{43} - u_{32} - u_{21}$ или вершин $v_4 - v_3 - v_2 - v_1$, но не является путем следующая последовательность $v_1 - v_2 - v_3$.

Конечный путь в орграфе, у которого начальная вершина совпадает с конечной, называется *контуром*, а в неориентированном графе – *циклом* (на рисунке $v_1 - v_4 - v_2 - v_1$).

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем, в противном случае он называется *несвязным*.

Для установления связности орграфа ориентацию его дуг принимать в расчет не следует. Для орграфа еще существует понятие сильной связности. Говорят, что *орграф сильносвязный*, если между любыми двумя его вершинами существует хотя бы один путь.

Ребра (дуги), имеющие одинаковые концевые вершины, называются *параллельными*, а ребро (дуга), имеющее в качестве концевых вершин одну и ту же вершину (на рис. 2.1 u_{44}), называется *петлей*.

Граф называется *простым*, если он не содержит петель и параллельных дуг (ребер).

2.4. Основы сетевого планирования

Одним из важнейших приложений теории графов является сетевое планирование и управление (СПУ) сложными комплексами взаимосвязанных работ. Для этой цели разработаны специальные методы, основанные на использовании сетевых графиков, являющихся графической моделью всего комплекса работ или производственного процесса. С математической точки зрения *сетевой график* – это связный оргграф без петель и контуров. Дуги на сети изображаются направленными отрезками произвольной длины и интерпретируются как работы. А вершины обычно изображаются кружками, в которых указывают порядковый номер или шифр, и интерпретируются как события. У каждой дуги проставляется время выполнения работы, а иногда и другие числовые характеристики, которые называются *весом дуги*. Такой граф называется *взвешенным*.

Работа – это желательный процесс, который связывает между собой события или переводит одно из них в другое. Работы делятся на действительные и фиктивные. *Действительной* называется работа, которая требует затрат времени и ресурсов (на сетевом графике изображается сплошными линиями). *Фиктивной* называется работа, которая не требует ни затрат времени, ни ресурсов, а отображает только логическую связь между событиями и работами (на сетевом графике изображается штриховыми линиями).

Событие – это результат окончания одной или нескольких работ, необходимых и достаточных для начала выполнения следующей работы. Поэтому любая работа на сети может быть определена двумя событиями, между которыми она находится. Событие может принадлежать нескольким входящим и исходящим из него работам.

2.4.1. Правила построения сетевого графика

Перед построением сетевого графика составляется подробный список всех работ, входящих в комплекс. При этом необходимо четко представлять конечный результат (событие) каждой работы, знать продолжительность выполнения работы, а также предшест-

вующие ей и последующие за ней работы. При создании сложных объектов и систем сетевые графики разрабатываются обычно по частям, а затем «сшиваются» в единый график. Сетевой график строится с соблюдением следующих правил:

1. В сети не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна работа (так называемых «хвостовых»).

2. В сетевом графике не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одна работа (так называемых «тупиковых»).

3. Сетевой график не должен содержать контуров (так как ни одна операция не может предшествовать сама себе).

4. Любая пара смежных событий должна быть связана только одной работой (рис. 2.2, а), т.е. не должно быть параллельных дуг (рис. 2.2, б).

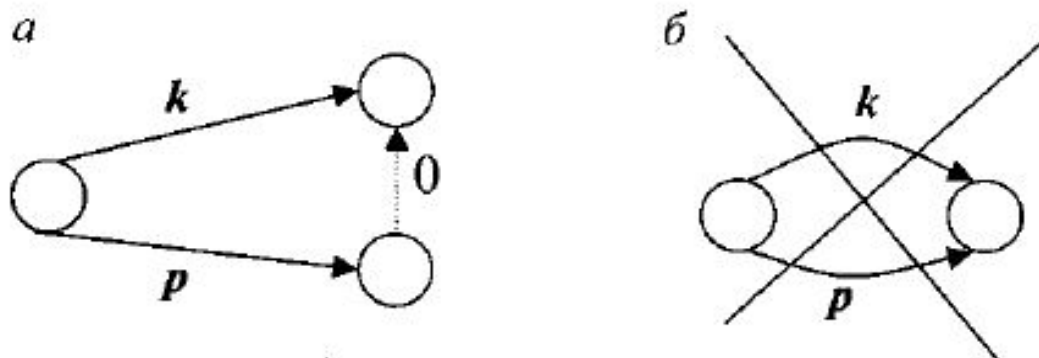


Рис. 2.2

5. Если дано, что после работы p выполняются работы l и m , а после работы k – только m , то правильным будет сетевой график на рис. 2.3, а, а не на рис. 2.3, б.

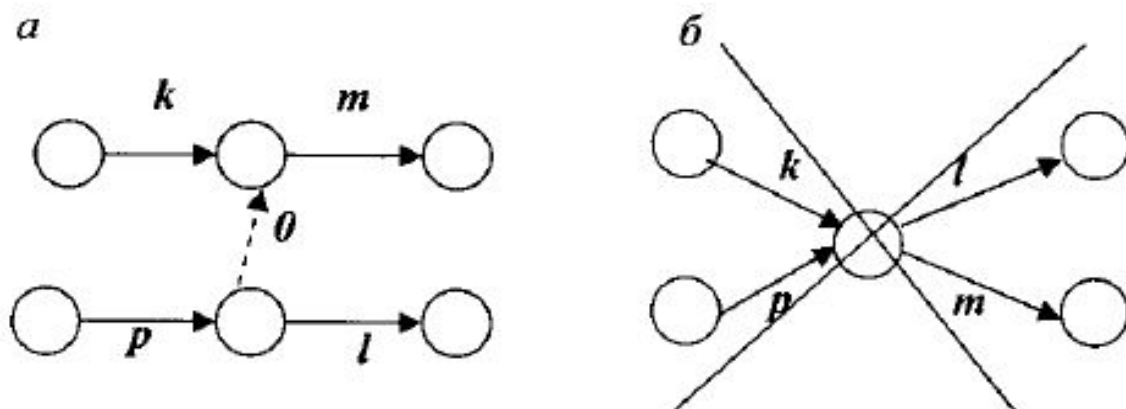


Рис. 2.3

2.4.2. Алгоритм построения сетевого графика

1. Строят черновой вариант сетевого графика:

- а) каждую работу изображают в виде дуги;
- б) связи между работами изображают в виде пунктирной (фиктивной) дуги. Эту дугу-связь проводят из конца дуги, соответствующей предшествующей работе, в начало дуги, соответствующей последующей работе.

2. Упрощают полученную сеть:

- а) выбрасывают некоторые дуги-связи, удаление которых не нарушает порядок выполнения работ, при этом начало и конец выбрасываемой дуги объединяют в одну вершину (по таблице, задающей проект, проверяют, не нарушится ли порядок выполнения операций после выбрасывания дуги);
- б) объединяют вершины, в которые не входит ни одна дуга, в одну;
- в) объединяют вершины, из которых не выходит ни одна дуга, в одну.

3. Находят правильную нумерацию вершин по методу Фалкерсона.

2.4.3. Алгоритм Фалкерсона нахождения правильной нумерации вершин

- 1. Номер 1 получает вершина, в которую не входит ни одна дуга.
- 2. Вычеркивают все дуги, выходящие из вершины с номером 1.
- 3. В полученном сетевом графике всем вершинам, в которые не входит ни одна дуга, присваивают следующие по порядку номера.
- 4. Вычеркивают все дуги, выходящие из пронумерованных вершин.
- 5. Повторяют пункты 3 и 4 до тех пор, пока все вершины не будут пронумерованы. Конечная вершина получает при этом наибольший номер.

Пример 16. Информация о строительстве комплекса задана перечнем работ, их продолжительностью, последовательностью выполнения и оформлена в виде табл. 2.7. Построить сетевой график комплекса работ и найти правильную нумерацию его вершин.

Таблиця 2.7

№ п/п	Наименование работ	Перечень последующих работ	Продолжи- тельность в месяцах
1	Строительство дорог	2,7	4
2	Подготовка карьеров к эксплуатации	5,6	6
3	Строительство поселка	5,6	10
4	Заказ оборудования	7	2
5	Строительство завода	7	10
6	Строительство плотины, дамбы	8	20
7	Соединение завода и трубопроводов	8	6
8	Предварительные испытания	-	3

Решение. Для построения чернового сетевого графика каждую работу изобразим в виде сплошной ориентированной дуги, а связи между работами – в виде пунктирной ориентированной дуги. Эту дугу-связь будем проводить из конца дуги, соответствующей предшествующей работе, в начало дуги, соответствующей последующей работе. Получим сетевой график (рис. 2.4).

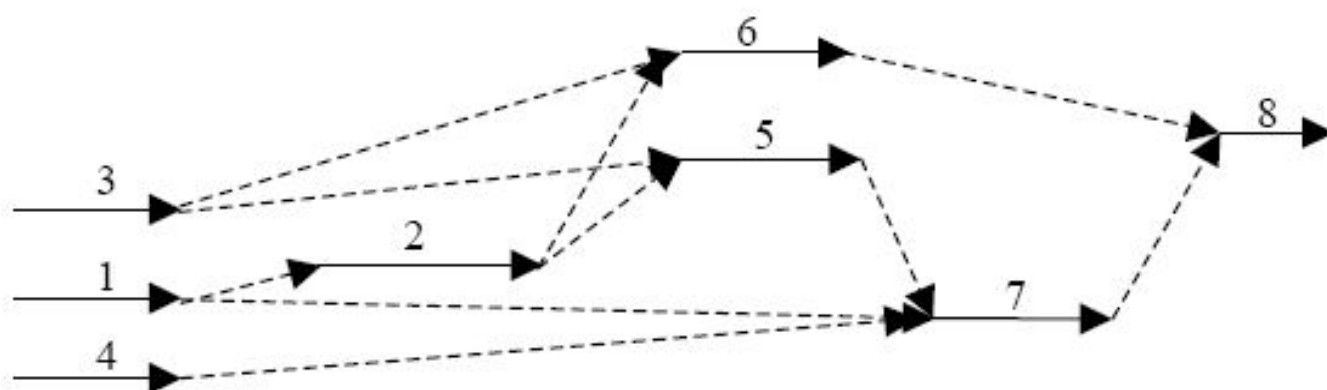


Рис. 2.4

Большое количество дуг усложняет решение, поэтому упростим полученную сеть. Для этого выбросим некоторые дуги-связи, удаление которых не нарушит порядка выполнения работ. Начало и конец выбрасываемой дуги объединим в одну вершину. Вершины, в которые не входит ни одна дуга и из которых не выходит ни одна дуга, также можно объединить в одну. Получим следующий сетевой график (рис. 2.5). Он имеет 6 вершин и 9 дуг. В дальнейшем вершины сетевого графика будем называть событиями.

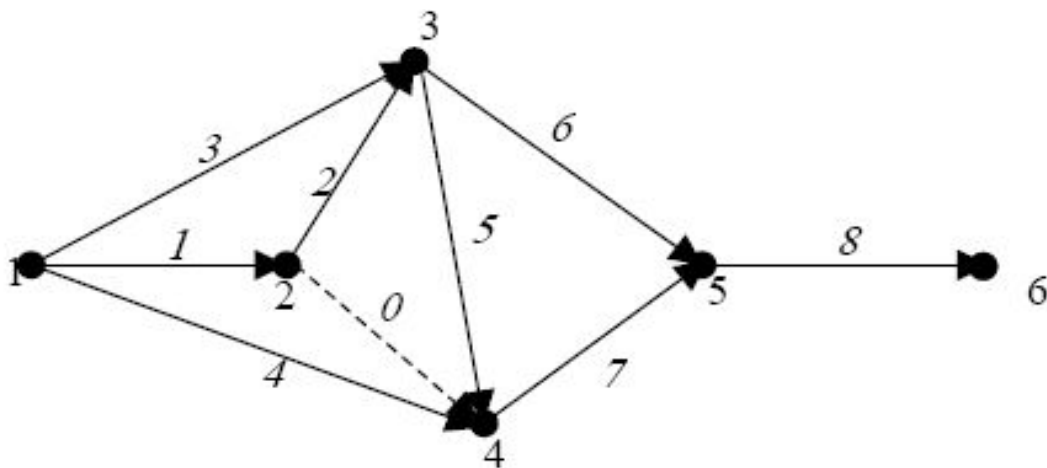


Рис. 2.5

Найдем правильную нумерацию событий полученного сетевого графика. Номер 1 получает вершина, в которую не входит ни одна дуга. Удаляем (мысленно или карандашом) дуги, выходящие из вершины с номером 1. В полученном сетевом графике есть только одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Значит, она и получает следующий по порядку номер 2 (если их несколько, то все вершины, в которые не входит ни одна дуга, получают следующие по порядку номера). Далее снова (мысленно) удаляем дуги, но уже выходящие из вершины с номером 2. В полученном сетевом графике есть только одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Значит, она и получает следующий по порядку номер 3 и т.д. (см. рис. 2.5).

2.5. Временные характеристики задач сетевого планирования

К основным временным параметрам относятся продолжительность критического пути, резервы времени событий и работ.

Пусть t_{ij} – продолжительность работы (i, j) . Это значение обычно надписывают над соответствующей дугой (i, j) и считают ее длиной. *Продолжительность пути* – это время, необходимое для выполнения всех работ, лежащих на данном пути.

Полный путь на сетевом графике – это путь от исходного события I до завершающего события S . Их может быть несколько. Полный путь, имеющий наибольшую продолжительность, называют *критическим*, а его продолжительность $T_{кр}$ – *критическим сроком*. Критических путей также может быть несколько.

2.5.1. Вычисление ранних сроков наступления событий

Ранний срок T_j^p свершения события j – это минимальный срок, необходимый для выполнения всех работ, предшествующих данному событию. Он определяется продолжительностью самого длительного из предшествующих j -му событию путей от исходного. Для вычисления ранних сроков наступления событий используют алгоритм Форда для сети с правильной нумерацией вершин. По сетевому графику при этом перемещаются от исходного события I вправо. Алгоритм заключается в следующем:

1. Полагают $T_1^p = 0$.
2. Для $j = \overline{2, n}$ последовательно вычисляют:

$$T_j^p = \max_{(i,j) \in U^+(j)} (T_i^p + t_{ij}),$$

где $U^+(j)$ – множество работ (дуг), входящих в j -е событие.

Ранний срок наступления конечного события называется *критическим временем* и обозначается $T_{кр}$. Всякий полный путь, длина которого равна $T_{кр}$, называется *критическим путем*.

Для удобства вершину с номером j будем изображать так (рис. 2.6):

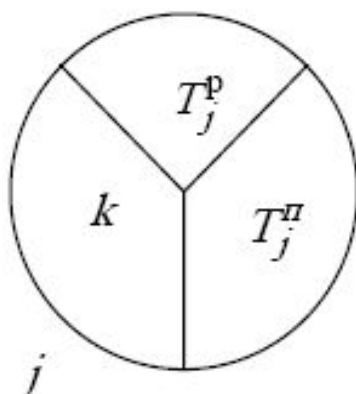


Рис. 2.6

j – номер вершины в правильной нумерации;
 T_j^p – ранний срок наступления события j ;
 $T_j^п$ – поздний срок наступления события j ;
 k – номер предыдущей вершины в пути из I в j , на котором осуществляется ранний срок T_j^p .

2.5.2. Нахождение критического пути

Для определения критического пути двигаются от последней вершины к тем, номера которых указаны в левой части круга.

Работы и события, лежащие на критическом пути, называются *критическими*, а остальные работы и события сети – *некритическими*.

2.5.3. Вычисление поздних сроков наступления событий

Поздним сроком T_i^{Π} свершения события i называется наиболее поздний срок окончания всех работ, входящих в соответствующее событие i . Для конечной вершины поздний срок наступления совпадает со временем выполнения всего проекта $T_{кр}$. При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от завершающего события S влево. Алгоритм заключается в следующем:

1. Полагают $T^{\Pi}(S) = T^P(S) = T_{кр}$.
2. Последовательно вычисляют

$$T_i^{\Pi} = \min_{(i,j) \in U^-(i)} (T_j^{\Pi} - t_{ij}),$$

где $U(i)$ – множество работ (дуг), выходящих из i -го события.

Замечание. События, у которых ранние и поздние сроки свершения совпадают, являются критическими. Они и определяют критический путь.

Пример 17. Рассчитать на сетевом графике (рис. 2.7) ранние и поздние сроки свершения событий. Выделить на нем критические пути.

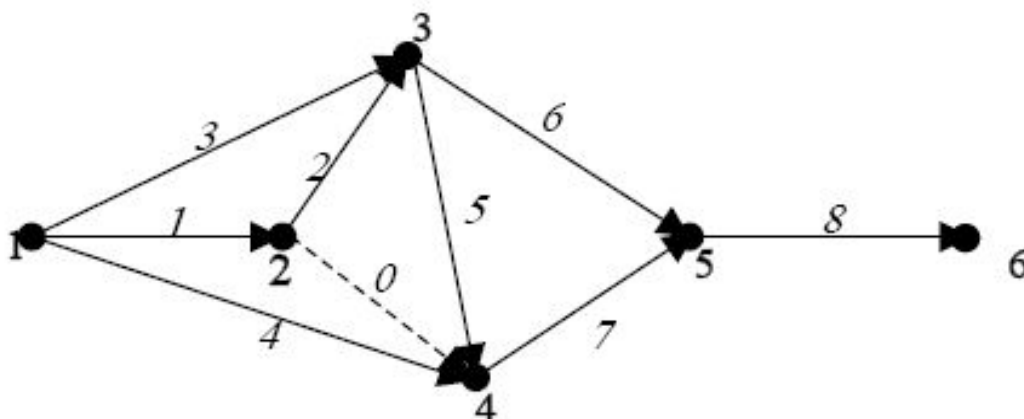


Рис. 2.7

Решение. Для удобства событие с номером j будем изображать кругом, разделенным на три части, в которые проставим основные временные характеристики сетевого графика: в верхнюю треть – ранний срок наступления события T_j^P , в правую треть – поздний срок наступления события T_j^N , а в левую треть – номер предыдущей вершины в пути из источника I в вершину j , на котором осуществляется ранний срок (рис. 2.8).

Пусть t_{ij} – заданная продолжительность работы (i, j) . Запишем величину t_{ij} на дуге (i, j) сетевого графика в скобках и будем считать ее длиной.

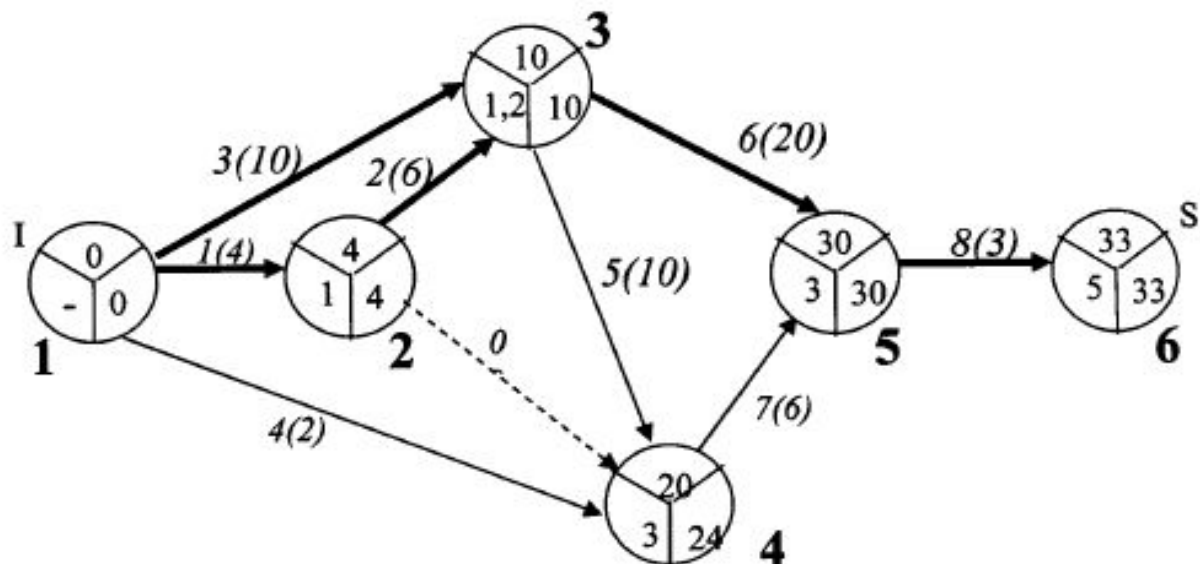


Рис. 2.8

1. При вычислении ранних сроков наступления событий используем алгоритм Форда для сети с правильной нумерацией вершин. Ранний срок наступления начального события полагаем равным нулю:

$$T_1^P = 0.$$

Далее для каждой вершины j в порядке возрастания номеров рассматриваем все *входящие* дуги (i, j) и к ранним срокам начальных вершин i прибавляем продолжительность работ t_{ij} . Максимум из указанной суммы даст величину T_j^P . Это значение запишем в верх-

ней трети вершини j , а номери предшествующих вершин, на которых осуществляется ранний срок, – в левую треть круга. Таким образом,

$$T_2^p = \max_{(i,2) \in U^+(2)} (T_i^p + t_{i2}) = T_1^p + t_{12} = 0 + 4 = 4;$$

$$\begin{aligned} T_3^p &= \max_{(i,3) \in U^+(3)} (T_i^p + t_{i3}) = \max\{T_1^p + t_{13}, T_2^p + t_{23}\} = \\ &= \max\{0 + 10; 4 + 6\} = 10 \end{aligned}$$

(здесь в верхнюю часть 3-й вершины запишем величину 10, а в левую треть – номера 1 и 2);

$$\begin{aligned} T_4^p &= \max_{(i,4) \in U^+(4)} (T_i^p + t_{i4}) = \max\{T_1^p + t_{14}, T_2^p + t_{24}, T_3^p + t_{34}\} = \\ &= \max\{0 + 2; 4 + 0; 10 + 10\} = 20; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_5^p &= \max_{(i,5) \in U^+(5)} (T_i^p + t_{i5}) = \max\{T_3^p + t_{35}, T_4^p + t_{45}\} = \\ &= \max\{10 + 20; 20 + 6\} = 30; \end{aligned}$$

$$T_6^p = \max_{(i,6) \in U^+(6)} (T_i^p + t_{i6}) = T_5^p + t_{56} = 30 + 3 = 33.$$

2. Ранний срок наступления конечного события называется критическим временем и обозначается $T_{кр}$. В нашем примере $T_{кр} = T_6^p = 33$ (месяца). Это минимальное время выполнения всего комплекса работ.

Всякий путь из начальной вершины в конечную с длиной $T_{кр}$ называется критическим. Для определения критических путей будем двигаться от последней вершины к тем, номера которых указаны в левых частях круга:

$$6 - 5 - 3 - 1 \text{ и } 6 - 5 - 3 - 2 - 1.$$

(На сетевом графике (см. рис. 2.8) они выделены жирными линиями.)

На критических путях нельзя менять сроки выполнения работ без нарушения времени завершения всего комплекса.

3. Определим поздние сроки наступления событий. Для конечной вершины поздний срок совпадет со временем выполнения всего проекта и будет равен критическому времени, т.е.

$$T_6^{\Pi} = T_{\text{кр}} = 33 \text{ (месяца)}.$$

Затем просмотрим все вершины в порядке убывания их номеров. Для каждой такой вершины определим множество всех *выходящих* работ и из поздних сроков вычтем их продолжительность. Минимальная из разностей даст величину T_i^{Π} . Это значение запишем в правой трети вершины i :

$$T_5^{\Pi} = \min_{(5,j) \in U^-(5)} (T_j^{\Pi} - t_{5j}) = T_6^{\Pi} - t_{56} = 33 - 3 = 30;$$

$$T_4^{\Pi} = \min_{(4,j) \in U^-(4)} (T_j^{\Pi} - t_{4j}) = T_5^{\Pi} - t_{45} = 30 - 6 = 24;$$

$$\begin{aligned} T_3^{\Pi} &= \min_{(3,j) \in U^-(3)} (T_j^{\Pi} - t_{3j}) = \min\{T_5^{\Pi} - t_{35}, T_4^{\Pi} - t_{34}\} = \\ &= \min\{30 - 20; 24 - 10\} = 10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^{\Pi} &= \min_{(2,j) \in U^-(2)} (T_j^{\Pi} - t_{2j}) = \min\{T_3^{\Pi} - t_{23}, T_4^{\Pi} - t_{24}\} = \\ &= \min\{10 - 6; 24 - 0\} = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1^{\Pi} &= \min_{(1,j) \in U^-(1)} (T_j^{\Pi} - t_{1j}) = \min\{T_2^{\Pi} - t_{12}, T_3^{\Pi} - t_{13}, T_4^{\Pi} - t_{14}\} = \\ &= \min\{4 - 4; 10 - 10; 24 - 2\} = 0. \end{aligned}$$

2.5.4. Вычисление полных и свободных резервов времени

Если выполнение какой-либо критической работы будет задержано на некоторый срок, то это вызовет запаздывание выполнения всего комплекса работ на тот же срок. Чтобы ускорить выполнение комплекса, необходимо сократить сроки выполнения критических работ. Некритические работы допускают некоторое запаздывание с их выполнением, и это не вызывает задержки срока реализации всего комплекса работ. Чтобы определить время, на которое можно задержать выполнение некритических работ, вводятся понятия резервов времени событий и работ, которые в свою очередь выражаются через ранние и поздние сроки свершения событий. Критические работы, как и критические события, резервов времени не имеют.

Полный резерв времени работы (i, j) – это максимальное время, на которое можно задержать начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения, не изменяя срока завершения всего комплекса работ. Вычисляется он по формуле

$$R_{ij} = T_j^{\text{п}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}.$$

Если на некоторой работе использовать ее полный резерв, то путь, проходящий через эту работу, станет критическим. Полный резерв времени любой работы на этом пути станет равным нулю.

Свободный резерв времени работы (i, j) – это максимальный запас времени, на который можно отложить начало работы или (если она началась в свой ранний срок) увеличить продолжительность её выполнения при условии, что ранние сроки начала всех последующих работ не изменятся. Вычисляется он по формуле

$$r_{ij} = T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}.$$

Свободный резерв – это время, которое можно дополнительно выделить для выполнения работы без введения дополнительных ограничений на время выполнения последующих работ.

Резерв времени события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нару-

шения срока свершения завершающего события S . Вычисляется он по формуле

$$R(i) = T_i^{\Pi} - T_i^{\text{P}}.$$

Пример 18. Найти полные и свободные резервы времени работ сетевого графика из примера 16 (см. рис. 2.8). Выяснить, как повлияет на срок выполнения проекта увеличение продолжительности строительства завода на 4 месяца, а строительства плотины, дамбы на 1 месяц. На какое время можно увеличить продолжительности строительства завода и заказа оборудования, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?

Решение. Зная ранние и поздние сроки свершения событий, вычислим резервы времени событий, а также полные и свободные резервы времени работ.

Критические работы, как и критические события, резервов времени не имеют. Значит,

$$R(1) = R(2) = R(3) = R(5) = R(6) = 0 \text{ (мес.)},$$

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = R_{35} = R_{56} = 0 \text{ (мес.)},$$

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = r_{35} = r_{56} = 0 \text{ (мес.)}.$$

Вычислим резервы времени не критических событий:

$$R(4) = T_4^{\Pi} - T_4^{\text{P}} = 24 - 20 = 4 \text{ (мес.)}.$$

(Следовательно, 4-е событие может начаться на 4 месяца позже. При этом срок завершения всего комплекса работ не изменится.)

Вычислим полные резервы времени не критических работ:

$$R_{14} = T_4^{\Pi} - T_1^{\text{P}} - t_{14} = 24 - 0 - 2 = 22 \text{ (мес.)};$$

$$R_{24} = T_4^{\Pi} - T_2^{\text{P}} - t_{24} = 24 - 4 - 0 = 20 \text{ (мес.)};$$

$$R_{34} = T_4^{\Pi} - T_3^{\text{P}} - t_{34} = 24 - 10 - 10 = 4 \text{ (мес.)};$$

$$R_{45} = T_5^{\Pi} - T_4^{\text{P}} - t_{45} = 30 - 20 - 6 = 4 \text{ (мес.)}.$$

Вычислим свободные резервы времени некритических работ:

$$r_{14} = T_4^P - T_1^P - t_{14} = 20 - 0 - 2 = 18 \text{ (мес.)};$$

$$r_{24} = T_4^P - T_2^P - t_{24} = 20 - 4 - 0 = 16 \text{ (мес.)};$$

$$r_{34} = T_4^P - T_3^P - t_{34} = 20 - 10 - 10 = 0 \text{ (мес.)};$$

$$r_{45} = T_5^P - T_4^P - t_{45} = 30 - 20 - 6 = 4 \text{ (мес.)}.$$

Проведем анализ сетевого графика (см. рис. 2.8).

Выясним, как повлияет на срок выполнения проекта увеличение продолжительности строительства плотины, дамбы (работы № 6 или (3, 5)) на 1 месяц. Так как полный резерв времени этой работы равен нулю ($R_{35} = 0$), то при увеличении продолжительности строительства плотины, дамбы (работы № 6 или (3, 5)) на 1 месяц время выполнения всего проекта также увеличится на 1 месяц.

Выясним, как повлияет на срок выполнения проекта увеличение продолжительности строительства завода (работы № 5 или (3, 4)) на 4 месяца. Так как $R_{34} = 4$, то на данной работе можно использовать ее полный резерв. Иными словами, можно задержать начало работы (3, 4) или увеличить продолжительность ее выполнения на 4 месяца, не изменяя срока завершения всего комплекса работ. При этом путь, проходящий через эту работу, станет критическим. Полный резерв времени любой работы на этом пути станет равным нулю.

Определим, на какое время можно увеличить продолжительности строительства завода (работы № 5 или (3, 4)), не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ. Так как $r_{34} = 0$, то при задержке начала или увеличении продолжительности данной работы ранние сроки начала всех последующих работ изменятся на ту же величину.

Поскольку $r_{14} = 18$, то отложить заказ оборудования (работы № 4) можно на 18 месяцев. Это время, которое можно дополнительно выделить для выполнения работы (1,4) без введения дополнительных ограничений на время выполнения последующих работ.

2.6. Потоки на сетях

2.6.1. Постановка задачи о максимальном потоке

Теория потоков возникла первоначально в связи с разработкой методов решения задач, связанных с рациональной перевозкой грузов. Позднее оказалось, что к задаче о максимальном потоке сводятся следующие: задача об определении максимального количества информации, которая может быть передана по разветвленной сети каналов связи из одного пункта в другой; задачи, связанные с наиболее экономным строительством энергетических сетей, нефти и газопроводов, железных и шоссейных дорог и другие.

Рассмотрим взвешенный конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины I , называемой источником, к вершине S , называемой стоком. Иными словами, рассмотрим сеть $G(V, U)$. Пусть каждой дуге $(i, j) = u_{ij} \in U$, идущей из i в j , поставлено в соответствие неотрицательное число d_{ij} , которое назовем пропускной способностью этой дуги. *Пропускной способностью дуги* называется максимальное количество вещества d_{ij} , которое можно пропустить по дуге u_{ij} за единицу времени (теоретически). Если вершины i и j соединены ребром (неориентированной дугой), то его заменяют парой противоположно ориентированных дуг u_{ij} и u_{ji} с одинаковой пропускной способностью $d_{ij} = d_{ji}$. Каждой дуге u_{ij} поставим в соответствие еще одно неотрицательное число x_{ij} , которое назовем потоком по дуге u_{ij} . *Потоком по дуге u_{ij}* называется количество вещества x_{ij} , проходящего через дугу u_{ij} в единицу времени (фактически). Из физического смысла грузопотока на сети следует неравенство

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad u_{ij} \in U, \quad (2.17)$$

т.е. поток по каждому ребру не может превышать его пропускной способности.

Потоком на сети из I в S называется множество X неотрицательных чисел x_{ij} , т.е. $X = \{x_{ij} \geq 0 \text{ для дуг } u_{ij} \in U\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sum_i x_{iI} - \sum_j x_{Ij} = -Z; \quad (2.18)$$

$$\sum_i x_{iS} - \sum_j x_{Sj} = Z; \quad (2.19)$$

$$\sum_i x_{ik} - \sum_j x_{kj} = 0, \quad k \in V, \quad k \neq S, \quad k \neq I. \quad (2.20)$$

Равенство (2.20) означает, что для любой вершины k сети, кроме источника и стока, количество вещества, поступающего в данную вершину, равно количеству вещества, выходящего из нее. Эта связь называется условием сохранения потока, а именно: в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают. Следовательно, общее количество вещества, выходящего из источника I , совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток S , что и отражается в условиях (2.18) и (2.19). Функция Z называется величиной (*мощностью*) потока на сети и показывает общее количество вещества, которое может пройти по сети. Необходимо найти (построить) максимальный поток из источника I в сток S таким образом, чтобы величина потока x_{ij} по каждой дуге u_{ij} в сети не превышала пропускной способности этой дуги и выполнялось условие сохранения потока, т.е. найти

$$Z \rightarrow \max \quad (2.21)$$

при условиях (2.17) – (2.20).

Это типичная задача линейного программирования. Но так как задача о максимальном потоке имеет специфическую структуру, то для нее имеется более эффективный метод решения, чем симплексный.

2.6.2. Понятие разреза в сети

Каждой дуге ставятся в соответствие два числа (d_{ij}, x_{ij}) : первое – пропускная способность; второе – поток. Очевидно, если сеть является путем из I в S , то максимальный поток будет равен минимальной из пропускных способностей дуг, т.е. дуга с минимальной пропускной способностью является узким местом пути. Аналогом узкого места в сети является разрез.

Пусть множество вершин V в сети $G(V, U)$ разбито на два непересекающихся подмножества R, R' , причем объединение этих подмножеств дает множество V . Разрезом (R, R') в сети $G(V, U)$ называется множество дуг u_{ij} , для которых вершины $v_i \in R$, а вершины $v_j \in R'$. Вообще говоря, разрез (R, R') не совпадает с разрезом (R', R) . Если $I \in R$, а $S \in R'$, то (R, R') будем называть *разрезом, отделяющим источник от стока*. Пропускной способностью разреза (R, R') называется величина

$$C(R, R') = \sum_{u_{ij} \in (R, R')} d_{ij}.$$

Рассмотрим сеть на рис. 2.10.

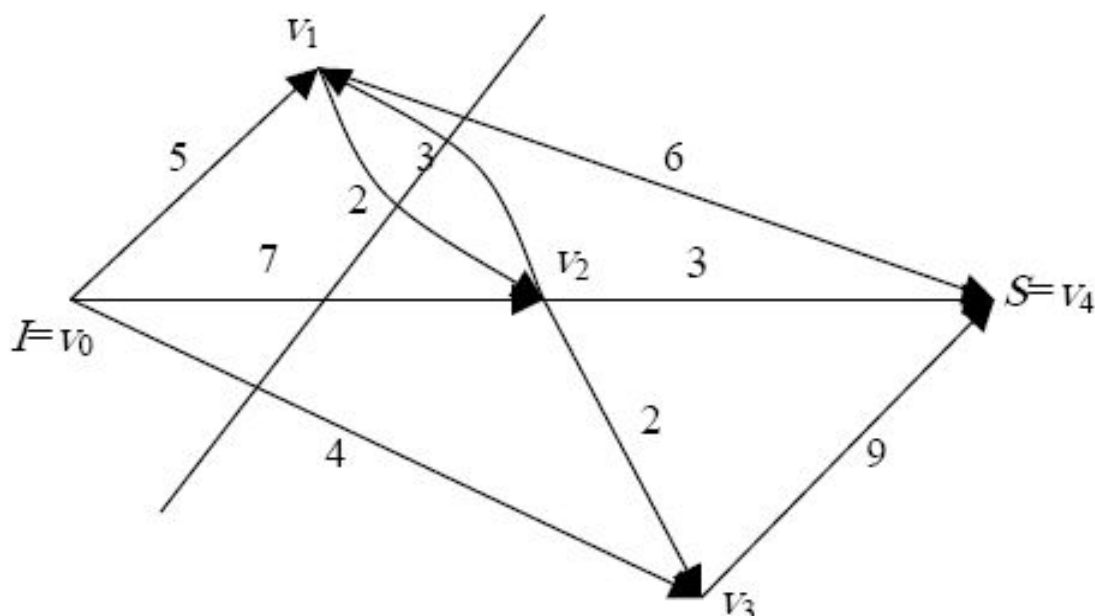


Рис. 2.10

В данной сети можно построить 7 разрезом. Рассмотрим, например, разрез (R, R') , где $R = \{I, v_1\}$, $R' = \{v_2, v_3, S\}$. Тогда

$$(R, R') = \{u_{14}, u_{12}, u_{02}, u_{03}\},$$

$$C(R, R') = d_{14} + d_{12} + d_{02} + d_{03} = 6 + 2 + 7 + 4 = 19.$$

Разрез, отделяющий источник от стока и обладающий минимальной пропускной способностью, называется *минимальным разрезом*.

2.6.3. Алгоритм Форда–Фалкерсона построения максимального потока

Теорема Форда–Фалкерсона (о максимальном потоке и минимальном разрезе). Величина максимального потока в сети $G(V, U)$ из I в S равна минимальной из пропускных способностей разрезом, отделяющих источник от стока.

Если поток x_{ij} по дуге u_{ij} меньше его пропускной способности d_{ij} ($x_{ij} < d_{ij}$), то дуга называется *ненасыщенной*. Если же по дуге u_{ij} поток равен его пропускной способности ($x_{ij} = d_{ij}$), то такая дуга называется *насыщенной*.

Дуга, входящая в некоторый путь, называется *прямой*, если ее направление совпадает с направлением обхода вершин, и *обратной* – в противном случае. Путь из источника I в сток S называется *увеличивающим путем*, если для прямых дуг выполняется условие $x_{ij} < d_{ij}$, а для обратных дуг выполняется условие $x_{ij} > 0$.

Алгоритм Форда–Фалкерсона построения максимального потока и нахождения минимального разреза заключается в следующем:

1. Находят увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. Пусть в сети имеется допустимый поток $X = \{x_{ij}\}$ (например, $\{x_{ij}\} = 0$). Источник $I = v_0$ получает метку $\bar{f}$.

1.2. Просматривают все непомеченные вершины v_i , соседние с v_0 , и присваивают им метку v_0^+ , если u_{0i} – прямая дуга и $x_{0i} < d_{0i}$, и метку v_0^- , если u_{0i} – обратная дуга и $x_{i0} > 0$, и т.д.

...

1. k . Для каждой вершины v_k , помеченной на предыдущем ($k - 1$) шаге, просматривают соседние с ней непомеченные вершины v_i . Каждая такая вершина v_i получает метку v_k^+ , если дуга u_{ki} прямая и $x_{ki} < d_{ki}$, и метку v_k^- , если дуга u_{ik} обратная и $x_{ik} > 0$.

2. Если на k -м шаге не получается пометить сток S , то увеличивающего пути нет и поток в сети является максимальным. Построенный разрез (R, R') , где R – множество помеченных вершин в сети, а R' – множество непомеченных вершин, является минимальным разрезом, и алгоритм заканчивает свою работу. Иначе переходят к пункту 3.

3. Если на k -м шаге сток S оказался помеченным, то выписывают увеличивающий путь P , двигаясь от стока S к вершине, номер которой указан в ее метке; затем от нее к вершине, номер которой указан в ее метке; и в результате приходят к источнику.

4. Выписывают множество P^+ (прямых дуг) и множество P^- (обратных дуг) увеличивающего пути P .

5. Вычисляют для прямых дуг величину

$$\varepsilon_1 = \min_{u_{ij} \in P^+} (d_{ij} - x_{ij}),$$

а для обратных – величину

$$\varepsilon_2 = \min_{u_{ij} \in P^-} x_{ij}.$$

6. Вдоль дуг увеличивающего пути P изменяют поток $X = \{x_{ij}\}$ на величину $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ и получают новый поток $X' = \{x'_{ij}\}$, такой что

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & u_{ij} \notin P; \\ x_{ij} + \varepsilon, & u_{ij} \in P^+; \\ x_{ij} - \varepsilon, & u_{ij} \in P^-. \end{cases}$$

Переходят к пункту 1.

Пример 19. Хозяйственно-питьевой водопровод (сеть на рис. 2.11) соединяет водонапорную башню (источник I) с фермой (стоком S).

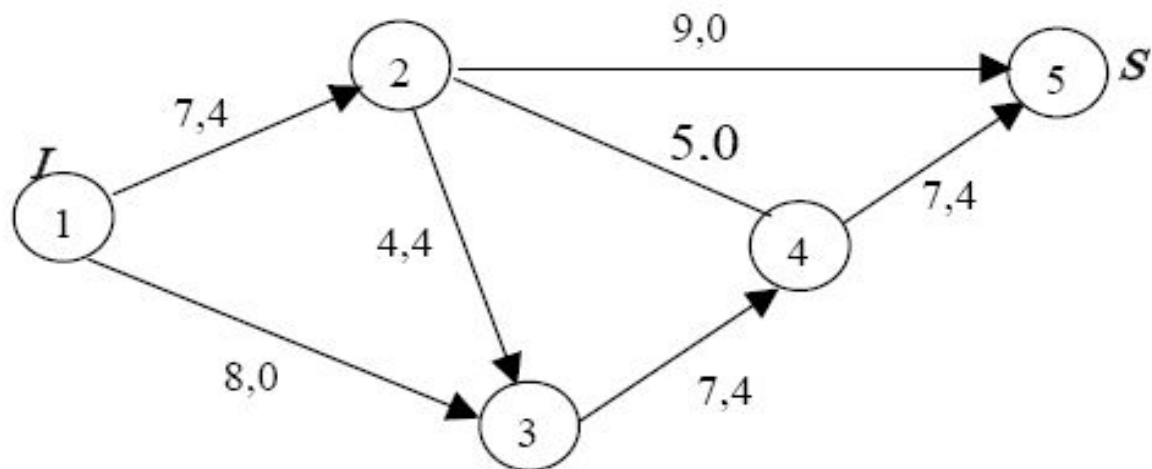


Рис. 2.11

Имеется несколько путей, по которым можно доставлять воду из источника в сток. Вершины сети соответствуют пересечениям труб, а ребра и дуги – участкам труб между пересечениями. На сети указаны пропускные способности труб, т.е. максимальное количество воды в м^3 , которое можно пропустить по трубам за 1 ч. Также сформирован начальный поток с мощностью Z_0 ($\text{м}^3/\text{ч}$). Какой поток воды максимальной мощности можно пропустить на данном трубопроводе? Указать «узкое место» сети и найти его пропускную способность.

Решение. А. Вершины 2 и 4 соединены ребром (неориентированной дугой), поэтому надо заменить его парой противоположно ориентированных дуг u_{24} и u_{42} с одинаковой пропускной способностью $d_{24} = d_{42} = 5$ ($\text{м}^3/\text{ч}$) (рис. 2.12).

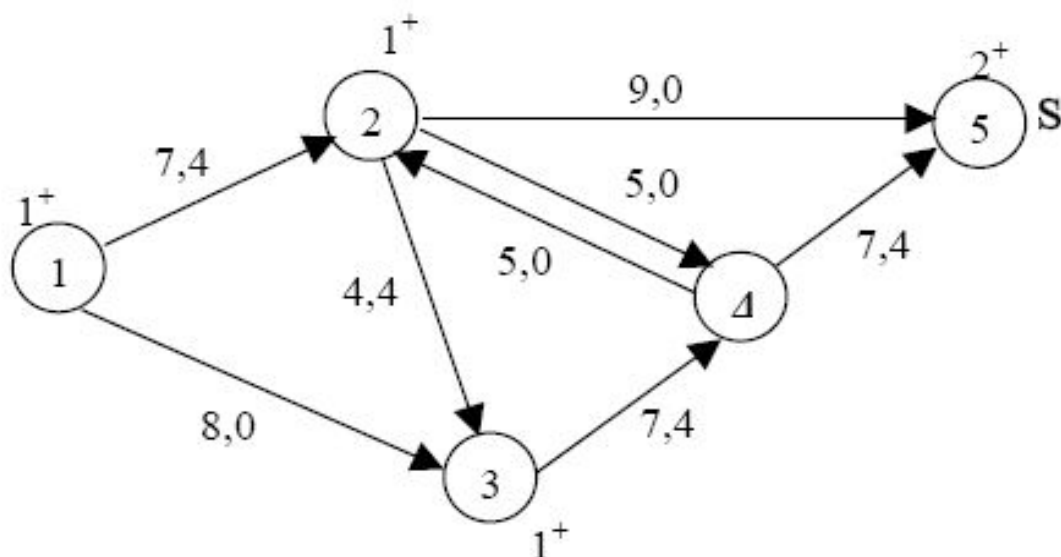


Рис. 2.12

Применим алгоритм Форда–Фалкерсона для построения максимального потока и нахождения минимального разреза.

1. Найдем увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. В сети имеется допустимый поток:

$$z_0 = - \sum_i x_{iI} + \sum_j x_{Ij} = -0 + (4 + 0) = 4 \text{ (м}^3\text{/ч)}.$$

(Сколько воды вытекло из источника I , столько и должно втечь в сток S). Источник $I = 1$ получает метку 1^+ .

1.2. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 1. Это вершины 2 и 3. Присваиваем вершине 2 метку 1^+ , так как u_{12} – прямая дуга и $x_{12} < d_{12}$ ($4 < 7$). Вершине v_3 также присваиваем метку 1^+ , поскольку u_{13} – прямая дуга и $x_{13} < d_{13}$ ($0 < 8$).

1.3. Теперь просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 2. Это вершины 4 и 5. Присваиваем вершине 5 метку 2^+ , так как u_{25} – прямая дуга и $x_{25} < d_{25}$ ($0 < 9$). Поскольку вершина 5 – это сток S , то на данном этапе вершину 4 можно не рассматривать.

2. Так как сток оказался помеченным, то выписываем увеличивающий путь P_1 , двигаясь от стока S к вершине 2, номер которой указан в ее метке; затем от нее к вершине 1, номер которой указан в метке. Таким образом, приходим к источнику I .

$$P_1: 1 - 2 - 5.$$

3. Выписываем множество P^+ (прямых дуг) и множество P^- (обратных дуг): $P^+ = \{u_{12}, u_{25}\}$, а $P^- = \emptyset$ (пустое множество), поскольку обратные дуги в увеличивающий путь не входят.

4. Для прямых дуг вычисляем величину

$$\varepsilon_1 = \min_{u_{ij} \in P^+} (d_{ij} - x_{ij}) = \min \{d_{12} - x_{12}; d_{25} - x_{25}\} = \min \{7 - 4; 9 - 0\} = 3.$$

Так как обратных дуг нет, то величину ε_2 не рассматриваем.

5. Вдоль дуг увеличивающего пути P_1 (рис. 2.13) изменяем поток $z_0 = 4$ (м³/ч) на величину $\varepsilon = \varepsilon_1 = 3$ и получаем новый поток $z_1 = z_0 + \varepsilon = 4 + 3 = 7$ (м³/ч), такой что

$$x_{12} := x_{12} + \varepsilon = 4 + 3 = 7, u_{12} \in P^+;$$

$$x_{25} := x_{25} + \varepsilon = 0 + 3 = 3, u_{25} \in P^+.$$

Остальные x_{ij} остаются без изменений, так как не входят в увеличивающий путь P_1 .

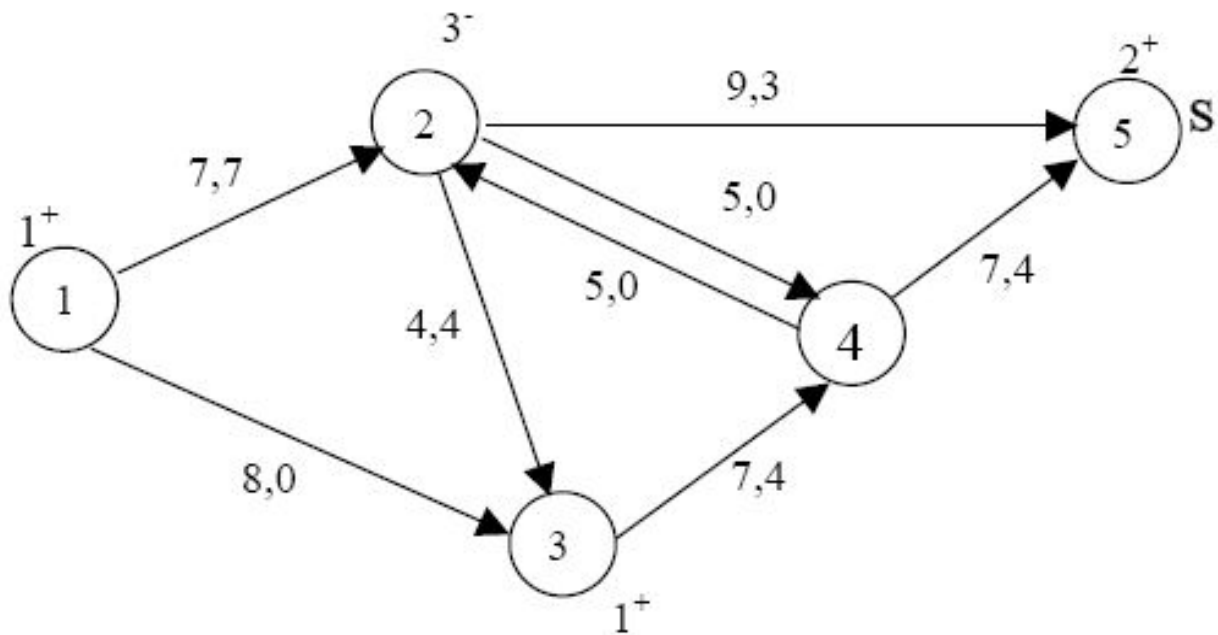


Рис. 2.13

В. Опять применим алгоритм Форда–Фалкерсона для построения максимального потока и нахождения минимального разреза.

1. Найдем увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. Источник $I=1$ получает метку 1^+ .

1.2. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 1. Это 2 и 3. Вершине 2 нельзя присвоить метку 1^+ , так как u_{12} – прямая дуга, но $x_{12} = d_{12}$ ($7 = 7$). А вершине 3 присваиваем метку 1^+ , поскольку u_{13} – прямая дуга и $x_{13} < d_{13}$ ($0 < 8$).

1.3. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 3. Это 2 и 4. Вершина 2 получает метку 3^- , так как дуга u_{32} обратная и $x_{23} = 4 > 0$. А вершине 4 присваиваем метку 3^+ , поскольку u_{34} – прямая дуга и $x_{34} < d_{34}$ ($4 < 7$).

1.4. Потом просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 2. Это 4 и 5. Присваиваем вершине 5 метку 2^+ , так как u_{25} – прямая

дуга и $x_{25} < d_{25}$ ($3 < 9$). Поскольку вершина 5 – это сток S , то на данном этапе вершину 4 можно не рассматривать.

2. Так как сток оказался помеченным, то выписываем увеличивающий путь P_2 , двигаясь от S к вершине 2, номер которой указан в ее метке; затем от нее – к вершине 3, номер которой указан в метке, и т.д. пока не придем к источнику.

$$P_2: 1 - 3 - 2 - 5.$$

3. Выписываем множество P^+ (прямых дуг) и множество P^- (обратных дуг): $P^+ = \{u_{13}, u_{25}\}$, $P^- = \{u_{32}\}$.

4. Вычисляем для прямых дуг:

$$\varepsilon_1 = \min_{u_{ij} \in P^+} (d_{ij} - x_{ij}) = \min \{d_{13} - x_{13}; d_{25} - x_{25}\} = \min \{8 - 0; 9 - 3\} = 6,$$

для обратных:

$$\varepsilon_2 = \min_{u_{ij} \in P^-} x_{ij} = x_{23} = 4.$$

5. Вдоль дуг увеличивающего пути P_2 (рис. 2.14) изменяем поток $Z_1 = 7$ ($\text{м}^3/\text{ч}$) на величину $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \min \{6, 4\} = 4$ и получаем новый поток $Z_2 = Z_1 + \varepsilon = 7 + 4 = 11$ ($\text{м}^3/\text{ч}$), такой что

$$x_{13} := x_{13} + \varepsilon = 0 + 4 = 4, \quad u_{13} \in P^+;$$

$$x_{25} := x_{25} + \varepsilon = 3 + 4 = 7, \quad u_{25} \in P^+;$$

$$x_{23} := x_{23} - \varepsilon = 4 - 4 = 0, \quad u_{32} \in P^-.$$

Остальные x_{ij} остаются без изменений, так как не входят в увеличивающий путь P_2 .

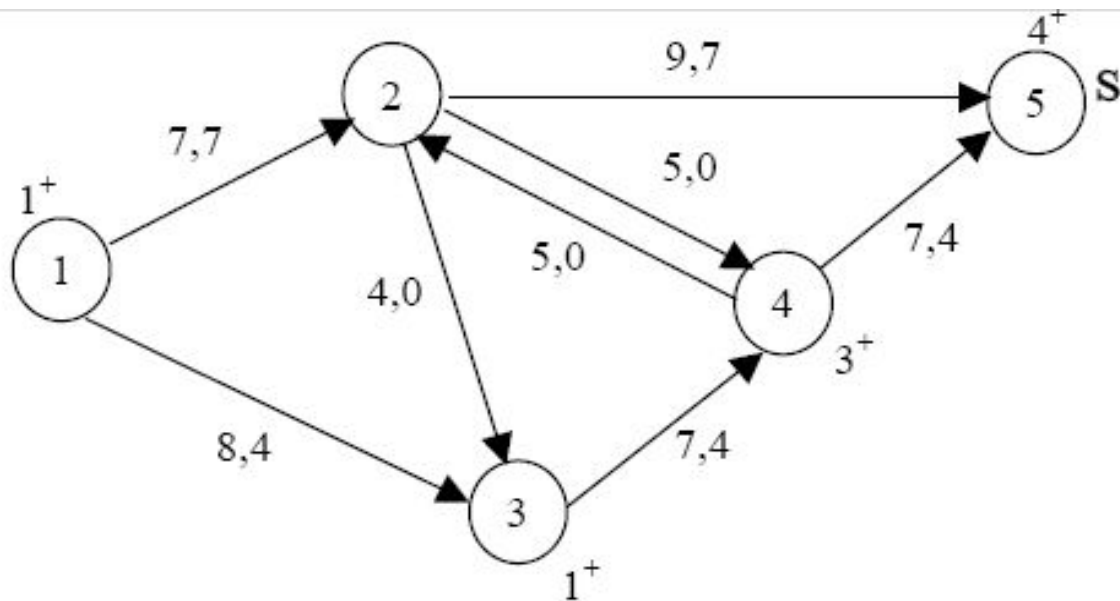


Рис. 2.14

С. Рассуждая, как было написано выше, расставляем метки и выписываем третий увеличивающий путь:

$$P_3: 1 - 3 - 4 - 5.$$

Записываем множества прямых и обратных дуг:

$$P^+ = \{u_{13}, u_{34}, u_{45}\}, P^- = \emptyset.$$

Вычисляем для прямых дуг:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \min_{u_{ij} \in P^+} (d_{ij} - x_{ij}) = \min\{d_{13} - x_{13}; d_{34} - x_{34}; d_{45} - x_{45}\} = \\ &= \min\{8 - 4; 7 - 4; 7 - 4\} = 3. \end{aligned}$$

Так как обратных дуг нет, то ε_2 не вычисляем.

Вдоль дуг увеличивающего пути P_3 (рис. 2.15) изменяем поток $Z_2 = 11$ ($\text{м}^3/\text{ч}$) на величину $\varepsilon = \varepsilon_1 = 3$ и получаем новый поток $Z_3 = Z_2 + \varepsilon = 11 + 3 = 14$ ($\text{м}^3/\text{ч}$), такой что

$$x_{13} := x_{13} + \varepsilon = 4 + 3 = 7, u_{13} \in P^+;$$

$$x_{34} := x_{34} + \varepsilon = 4 + 3 = 7, u_{34} \in P^+;$$

$$x_{45} := x_{45} + \varepsilon = 4 + 3 = 7, u_{45} \in P^+.$$

Остальные x_{ij} остаются без изменений, поскольку не входят в увеличивающий путь P_3 .

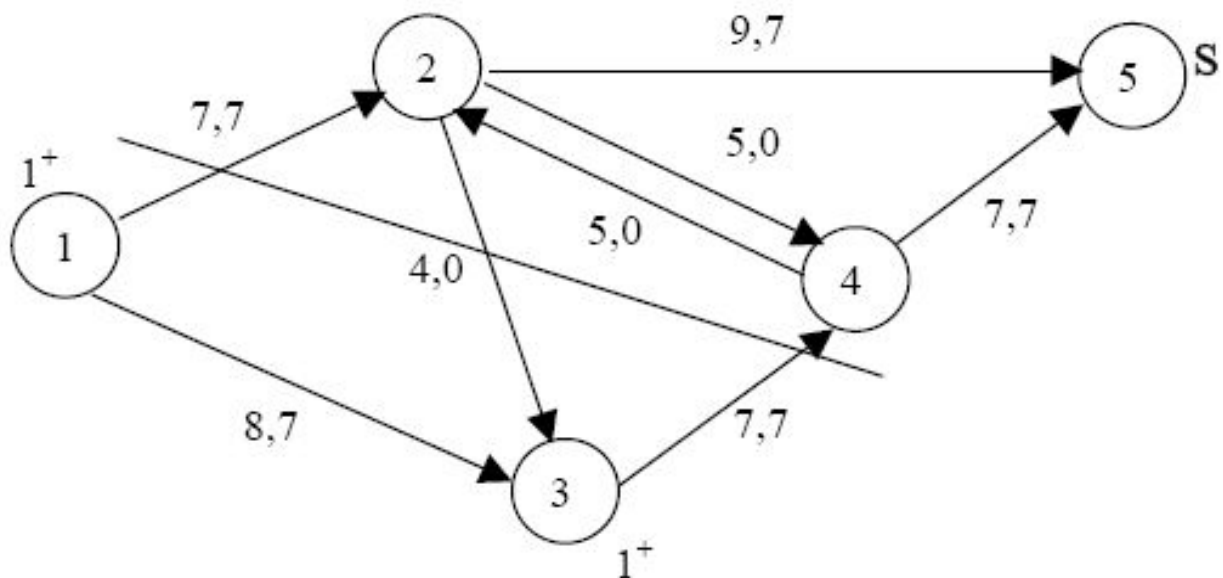


Рис. 2.15

D. 1. Снова находим увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. Источник $I=1$ получает метку 1^+ .

1.2. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 1. Это 2 и 3. Вершине 2 нельзя присвоить метку 1^+ , так как u_{12} – прямая насыщенная дуга, поскольку $x_{12} = 7 = d_{12}$. А вершине 3 присваиваем метку 1^+ , так как u_{13} – прямая дуга и $x_{13} < d_{13}$ ($7 < 8$).

1.3. Затем просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 3. Это 2 и 4. Вершине 2 нельзя присвоить метку 3^- , так как дуга u_{23} обратная, но $x_{23} = 0$. А вершине 4 нельзя присвоить метку 3^+ , поскольку u_{34} – прямая дуга, но $x_{34} = d_{34}$ ($7 = 7$).

2. Так как мы не можем пометить сток S , то увеличивающего пути нет и поток в сети является максимальным: $Z_{\max} = Z_3 = 14$ (м³/ч).

Пусть R – множество помеченных вершин в сети, т.е. $R = \{1, 3\}$, а R' – множество непомеченных вершин, т.е. $R' = \{2, 4, 5\}$. Тогда построенный разрез $(R, R') = \{u_{12}, u_{34}\}$ является минимальным (дуга u_{23} в разрез не входит, так как ее начало – непомеченная вершина, а конец – помеченная). И алгоритм заканчивает свою работу.

Минимальный разрез (R, R') является «узким местом» сети. Найдем его пропускную способность:

$$C(R, R') = \sum_{u_{ij} \in (R, R')} d_{ij} = d_{12} + d_{34} = 7 + 7 = 14 \text{ (м}^3\text{/ч)},$$

что совпадает с величиной максимального потока воды в водопроводе.

Проведем анализ сети. Проверим условие сохранения потока на примере 2-й вершины. Известно, что в промежуточных вершинах пути потоки не создаются и не исчезают, т.е.

$$\sum_i x_{i2} - \sum_j x_{2j} = 0.$$

Действительно, $(x_{12} + x_{42}) - (x_{23} + x_{24} + x_{25}) = (7 + 0) - (0 + 0 + 7) = 0 \text{ (м}^3\text{/ч)}$.

Покажем также, что общее количество воды, вытекающей из источника I (из водонапорной башни), совпадает с общим количеством воды, поступающей в сток S (на ферму), т.е.

$$-\sum_i x_{iI} + \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS} - \sum_j x_{Sj} = Z_{\max} \Rightarrow$$

$$-0 + (x_{12} + x_{14}) = (x_{25} + x_{45}) - 0 \Rightarrow 7 + 7 = 7 + 7 = 14 \text{ (м}^3\text{/ч)}.$$

Лабораторная работа №4

Задание 1. ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА СЕТЯХ

Постановка задачи.

Хозяйственно-питьевой водопровод (сеть) соединяет источник I со стоком S . Имеется несколько путей, по которым можно доставлять воду из источника в сток. Вершины сети соответствуют пересечениям труб, а ребра и дуги – участкам труб между пересечениями. На сети указаны пропускные способности труб, т.е. максимальное количество воды в м^3 , которое можно пропустить по трубам за 1 ч. Также сформирован начальный поток с мощностью Z_0 ($\text{м}^3/\text{ч}$). Какой поток воды максимальной мощности можно пропустить по данному трубопроводу?

Требуется:

- 1) посчитать мощность начального потока воды Z_0 ($\text{м}^3/\text{ч}$);
- 2) построить на сети поток воды максимальной мощности $Z_{\max}$ ($\text{м}^3/\text{ч}$), направленный из источника I к стоку S ;
- 3) указать «узкое место» сети и найти его пропускную способность;
- 4) провести анализ результатов решения.

Задание 2. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Постановка задачи.

Информация о строительстве комплекса задана нумерацией работ, их продолжительностью (в ед. времени), последовательностью выполнения и оформлена в виде таблицы. За какое минимальное время может быть завершён весь комплекс работ?

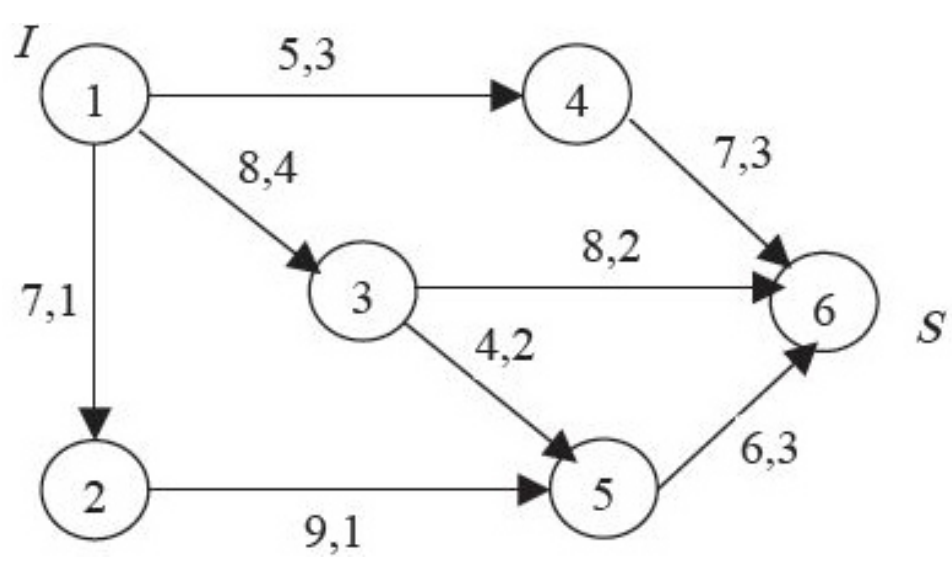
Требуется:

- 1) по данным таблицы построить сетевой график комплекса работ и найти правильную нумерацию его вершин;
- 2) рассчитать на сетевом графике ранние и поздние сроки наступления событий, а также резервы времени событий;
- 3) выделить на сетевом графике критические пути;
- 4) для некритических работ найти полные и свободные резервы времени;
- 5) выполнить анализ сетевого графика.

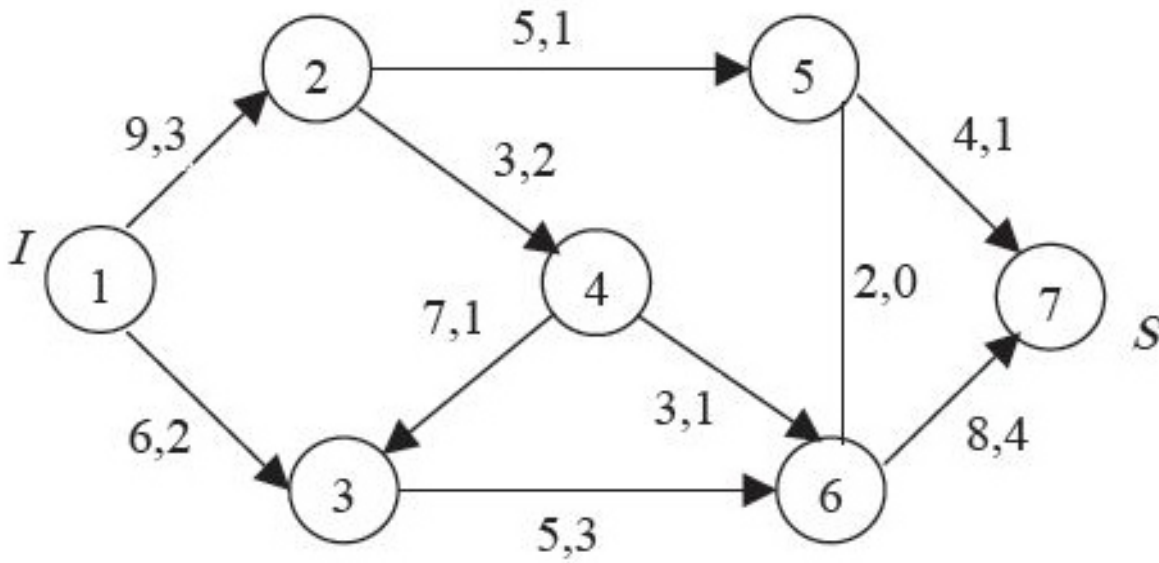
Варианты заданий

Вар.	Задания																										
1 вариант	1 задание: <pre>graph LR; 1((1)) -- "5,2" --> 2((2)); 1 -- "8,3" --> 3((3)); 2 -- "4,2" --> 5((5)); 2 -- "7,0" --> 3; 3 -- "7,2" --> 4((4)); 3 -- "2,1" --> 6((6)); 4 -- "4,3" --> 5; 5 -- "10,5" --> 7((7)); 6 -- "4,0" --> 7; style 1 fill:none,stroke:none; style 7 fill:none,stroke:none;</pre>																										
	2 задание: <table><tr><th>№ работы</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><th>Последующие работы</th><td>2, 4, 5</td><td>3, 8</td><td>-</td><td>8</td><td>6</td><td>7</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><th>Продолжительность работы</th><td>2</td><td>5</td><td>1</td><td>11</td><td>4</td><td>8</td><td>7</td><td>8</td></tr></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 3 на 6 месяцев, работы № 5 на 1 месяц? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 3 и № 2, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	2, 4, 5	3, 8	-	8	6	7	-	-	Продолжительность работы	2	5	1	11	4	8	7
№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
Последующие работы	2, 4, 5	3, 8	-	8	6	7	-	-																			
Продолжительность работы	2	5	1	11	4	8	7	8																			

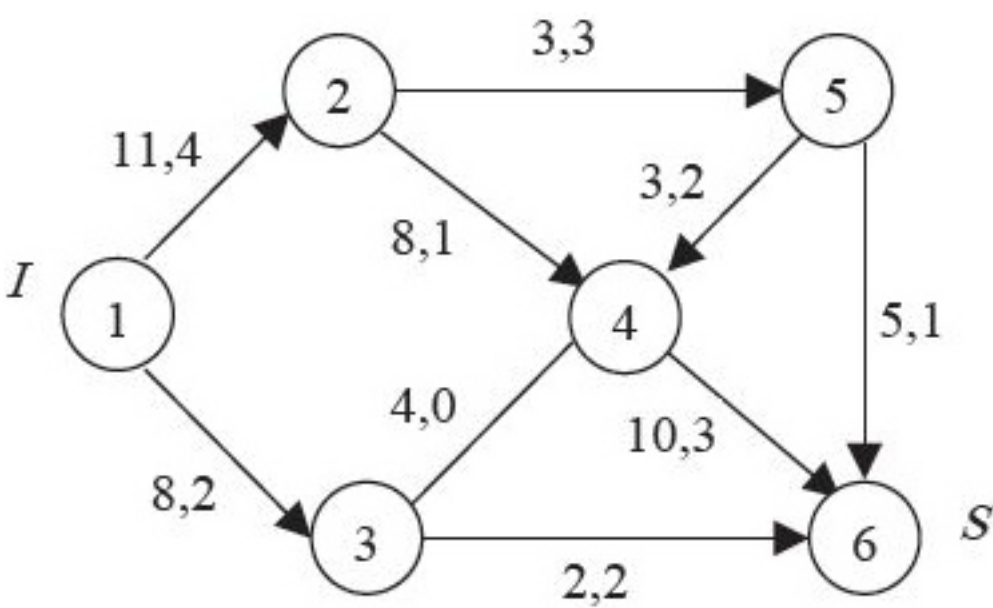
Варианты заданий

Вар.	Задания																											
2 вариант	1 задание:  <pre>graph LR I((I)) -- "5,3" --> 4((4)) I -- "8,4" --> 3((3)) I -- "7,1" --> 2((2)) 2 -- "9,1" --> 5((5)) 3 -- "4,2" --> 5 3 -- "8,2" --> 6((6)) 4 -- "7,3" --> 6 5 -- "6,3" --> 6 6 -- "S" --> S((S))</pre> 2 задание: <table border="1" data-bbox="213 1397 1465 1554"><thead><tr><th>№ работы</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr></thead><tbody><tr><td>Последующие работы</td><td>6</td><td>4, 6</td><td>5, 7</td><td>5, 7</td><td>8</td><td>8</td><td>6</td><td>-</td></tr><tr><td>Продолжительность работы</td><td>20</td><td>12</td><td>8</td><td>4</td><td>14</td><td>7</td><td>7</td><td>10</td></tr></tbody></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 3 на 8 месяцев, работы № 7 на 2 месяца? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 1 и № 3, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	6	4, 6	5, 7	5, 7	8	8	6	-	Продолжительность работы	20	12	8	4	14	7	7	10
	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
Последующие работы	6	4, 6	5, 7	5, 7	8	8	6	-																				
Продолжительность работы	20	12	8	4	14	7	7	10																				

Варианты заданий

Вар.	Задания																											
3 вариант	1 задание:  2 задание: <table><tr><th>№ работы</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><th>Последующие работы</th><td>4</td><td>6</td><td>7, 8</td><td>5</td><td>-</td><td>8</td><td>5</td><td>-</td></tr><tr><th>Продолжительность работы</th><td>10</td><td>13</td><td>8</td><td>7</td><td>15</td><td>17</td><td>10</td><td>3</td></tr></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 4 на 1 месяц, работы № 6 на 2 месяца? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 1 и № 4, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	4	6	7, 8	5	-	8	5	-	Продолжительность работы	10	13	8	7	15	17	10	3
	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
Последующие работы	4	6	7, 8	5	-	8	5	-																				
Продолжительность работы	10	13	8	7	15	17	10	3																				

Варианти заданий

Вар.	Задания																											
4 вариант	1 задание:  2 задание: <table><tr><td>№ работы</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>Последующие работы</td><td>7</td><td>4, 5, 6</td><td>6</td><td>8</td><td>7</td><td>8</td><td>8</td><td>-</td></tr><tr><td>Продолжительность работы</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>10</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td><td>2</td></tr></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 7 на 1 месяц, работы № 3 на 5 месяцев? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 3 и № 1, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	7	4, 5, 6	6	8	7	8	8	-	Продолжительность работы	2	1	2	10	3	4	7	2
	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
	Последующие работы	7	4, 5, 6	6	8	7	8	8	-																			
Продолжительность работы	2	1	2	10	3	4	7	2																				

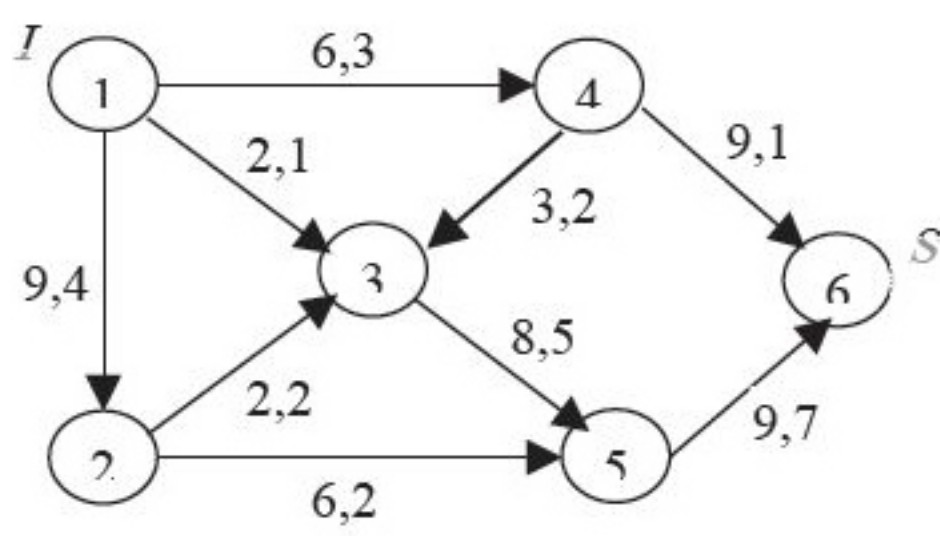
Варианты заданий

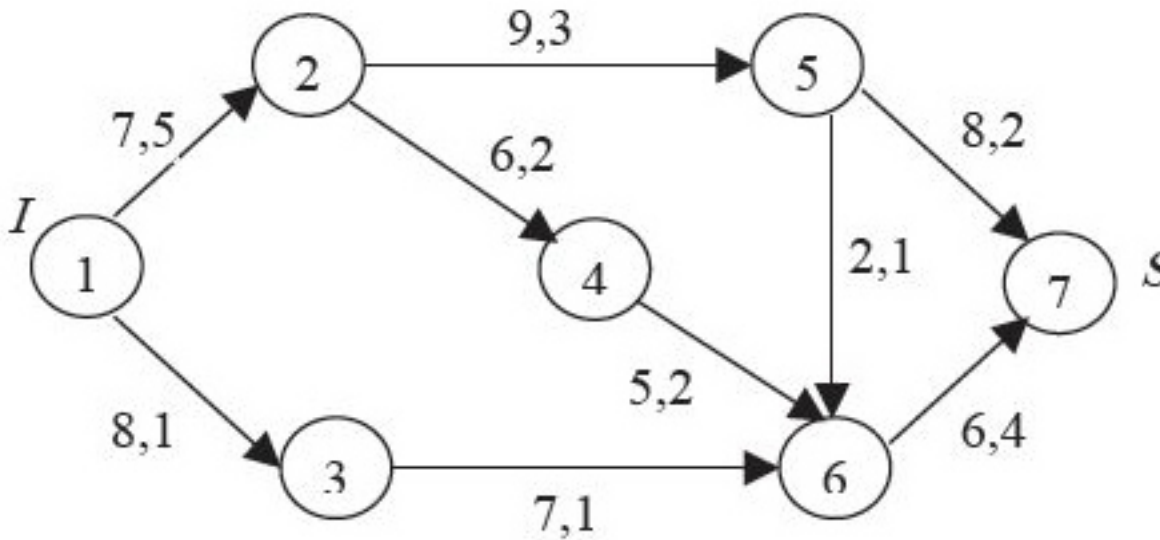
Вар.	Задания																											
5 вариант	1 задание: <pre>graph LR I((I)) -- "6,2" --> 2((2)) I -- "7,2" --> 4((4)) I -- "5,2" --> 3((3)) 2 -- "4,2" --> 5((5)) 2 -- "3,0" --> 4 3 -- "3,2" --> 6((6)) 4 -- "4,3" --> 7((7)) 4 -- "2,1" --> 6 5 -- "9,2" --> 7 6 -- "5,1" --> 7 style I fill:none,stroke:none style 7 fill:none,stroke:none style S fill:none,stroke:none</pre>																											
	2 задание: <table><tr><th>№ работы</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><th>Последующие работы</th><td>2, 5</td><td>3</td><td>-</td><td>3, 8</td><td>-</td><td>7</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><th>Продолжительность работы</th><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td><td>4</td><td>8</td><td>6</td></tr></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 5 на 12 месяцев, работы № 8 на 1 месяц? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 5 и № 1, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	2, 5	3	-	3, 8	-	7	3	7	Продолжительность работы	2	2	3	4	7	4	8	6
	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
Последующие работы	2, 5	3	-	3, 8	-	7	3	7																				
Продолжительность работы	2	2	3	4	7	4	8	6																				

Варианти заданий

Вар.	Задания																											
6 вариант	1 задание: 2 задание: <table><tr><th>№ работы</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr><tr><td>Последующие работы</td><td>2, 5, 8</td><td>3, 4</td><td>-</td><td>8</td><td>6</td><td>7</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>Продолжительность работы</td><td>12</td><td>10</td><td>8</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 6 на 4 месяца, работы № 2 на 1 месяц? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 6 и № 7, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	2, 5, 8	3, 4	-	8	6	7	-	-	Продолжительность работы	12	10	8	4	2	4	8	4
	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
	Последующие работы	2, 5, 8	3, 4	-	8	6	7	-	-																			
Продолжительность работы	12	10	8	4	2	4	8	4																				

Варианти заданий

Вар.	Задания																										
7 вариант	1 задание:  <pre>graph LR I((I)) -- "6,3" --> 4((4)) I -- "2,1" --> 3((3)) I -- "9,4" --> 2((2)) 4 -- "3,2" --> 3 2 -- "2,2" --> 3 2 -- "6,2" --> 5((5)) 3 -- "8,5" --> 5 4 -- "9,1" --> 6((6)) 5 -- "9,7" --> 6 S((S))</pre>																										
	2 задание: <table><tr><td>№ работы</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>Последующие работы</td><td>2, 7</td><td>5</td><td>4, 5</td><td>6</td><td>6</td><td>-</td><td>8</td><td>-</td></tr><tr><td>Продолжительность работы</td><td>2</td><td>8</td><td>8</td><td>1</td><td>10</td><td>2</td><td>10</td><td>10</td></tr></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 5 на 3 месяца, работы № 3 на 11 месяцев? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 3 и № 4, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	2, 7	5	4, 5	6	6	-	8	-	Продолжительность работы	2	8	8	1	10	2	10
№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
Последующие работы	2, 7	5	4, 5	6	6	-	8	-																			
Продолжительность работы	2	8	8	1	10	2	10	10																			

Вар.	Задания																										
8 вариант	1 задание:  <pre>graph LR I((I)) -- "7,5" --> 2((2)) I -- "8,1" --> 3((3)) 2 -- "9,3" --> 5((5)) 2 -- "6,2" --> 4((4)) 3 -- "7,1" --> 6((6)) 4 -- "5,2" --> 6 5 -- "2,1" --> 6 5 -- "8,2" --> 7((7)) 6 -- "6,4" --> 7 7 -- "S" --> S((S))</pre>																										
	2 задание: <table border="1"><thead><tr><th>№ работы</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr></thead><tbody><tr><td>Последующие работы</td><td>2, 7</td><td>5, 6</td><td>7</td><td>5, 6</td><td>8</td><td>7</td><td>8</td><td>-</td></tr><tr><td>Продолжительность работы</td><td>2</td><td>4</td><td>14</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td><td>3</td><td>2</td></tr></tbody></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 4 на 4 месяца, работы № 7 на 2 месяца? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 4 и № 5, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	2, 7	5, 6	7	5, 6	8	7	8	-	Продолжительность работы	2	4	14	2	6	8	3
№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																			
Последующие работы	2, 7	5, 6	7	5, 6	8	7	8	-																			
Продолжительность работы	2	4	14	2	6	8	3	2																			

Вар.	Задания																											
9 вариант	1 задание:																											
	2 задание:																											
	<table><tr><td>№ работы</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>Последующие работы</td><td>4</td><td>5, 6, 7</td><td>6</td><td>8</td><td>4</td><td>8</td><td>8</td><td>-</td></tr><tr><td>Продолжительность работы</td><td>10</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>8</td><td>4</td><td>8</td><td>10</td></tr></table> Как повлияет на срок выполнения комплекса работ увеличение продолжительности работы № 5 на 4 месяца, работы № 3 на 5 месяцев? На какое время можно увеличить продолжительность работ № 6 и № 3, не изменяя ранние сроки выполнения последующих работ?	№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8	Последующие работы	4	5, 6, 7	6	8	4	8	8	-	Продолжительность работы	10	2	3	2	8	4	8	10
№ работы	1	2	3	4	5	6	7	8																				
Последующие работы	4	5, 6, 7	6	8	4	8	8	-																				
Продолжительность работы	10	2	3	2	8	4	8	10																				