11 ДІЇ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ. НСД, НСК МНОГОЧЛЕНІВ

Многочленом (або *поліномом*) n-степеня від змінної x називають скінчену суму доданків, кожен з яких є добутком цілої невід'ємного степеня змінної x з деяким коефіцієнтом із $\mathbb{C}$(або $\mathbb{R}$):

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0, \tag{11.1}$$

де $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ – коефіцієнти многочленна $f(x)$, причому a_n – *старший коефіцієнт* многочлена $f(x)$, a_0 – *вільний член*.

Доданок, який містить змінну x у найвищому степені, називають *старшим членом* многочлена $f(x)$: $a_n x^n$.

Доданок, який не містить змінної x (тобто містить x^0), називають *вільним членом* многочлена $f(x)$: $a_0 = a_0 x^0$.

Зокрема, якщо $f(x)=a_0 \neq 0$, то $f(x)$ має степінь $n=0$, тобто є *многочленом нульового степеня*.

Якщо $f(x)=a_0=0$, то такий многочлен називають *нульовим многочленом* (або *нуль-многочленом*): $0(x)=0+0\cdot x+...+0\cdot x^n$.

Два многочлени $f(x)$ та $g(x)$ називаються *рівними* (або *тотожно рівними*): $f(x)=g(x)$, якщо в них рівні коефіцієнти при однакових степенях змінної x. У протилежному випадку – нерівні: $f(x)\neq g(x)$.

Члени многочлена можна записувати як за спадними степенями змінної x, так і за зростаючими степенями:

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, \quad a_n \neq 0, \tag{11.2}$$

(11.2) – запис за зростаючими степенями;
(11.1) – запис за спадними степенями.

1) *Додавання многочленів*. Нехай задано два многочлени з довільними коефіцієнтами, записані за зростаючими степенями змінної x (для зручності):

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n,\ a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+...+b_{s-1}x^{s-1}+b_sx^s,\ b_s\neq 0.$$

Якщо, наприклад $n\geq s$, то сумою многочленів $f(x)$ та $g(x)$ називається многочлен

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+...+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n,$$

де $c_i=a_i+b_i$, $i=0,1,...,n$ (причому, при $n>s$ коефіцієнти $b_{s+1}=...=b_n=0$).

Отже, коефіцієнти многочлена $f(x)+g(x)$ є сумою коефіцієнтів многочленів $f(x)$ та $g(x)$, які стоять біля однакових степенів змінної x.

У випадку $n\leq s$ отримаємо аналогічне правило додавання многочленів.

Зауваження 1 $0\leq \deg(f(x)+g(x))\leq \max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\}$.

Многочлен

$$-f(x) = -a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1}x^{n-1} - a_n x^n,$$
називається *протилежним* до $f(x)$: $f(x) + (-f(x)) = 0(x)$.

Звідси випливає правило віднімання многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x)) = \left(a_0 - b_0\right) + \left(a_1 - b_1\right)x + \ldots + \left(a_j - b_j\right)x^j + \ldots = \varphi(x).$$
Отже, при відніманні двох многочленів віднімаються коефіцієнти біля відповідних степенів змінної x.

Приклад 11.1 $f(x) = x + 2x^2 - 7x^5$, $g(x) = 1 + 3x - 2x^2 + 3x^3 + x^4$.

Розв'язання.
$$f(x) + g(x) = 1 + 4x + 3x^3 + x^4 - 7x^5;$$
$$f(x) - g(x) = -1 - 2x + 4x^2 - 3x^3 - x^4 - 7x^5.$$

2) *Множення многочленів.*

Добутком многочленів $f(x)$ та $g(x)$ називається многочлен
$$f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_{n+s}x^{n+s},$$
де $d_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$, $k = \overline{0, n+s}$, тобто коефіцієнти d_k є результатом множення тих коефіцієнтів многочленів $f(x)$ та $g(x)$, сума індексів яких дорівнює k, та додавання таких добутків.

Зокрема, $d_0 = a_0 \cdot b_0$;

$d_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0$;

$d_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 b_0$;

…………………………..

$d_{n+s} = a_n \cdot b_s$.

Із останнього, оскільки $a_n \neq 0$, $b_s \neq 0$, то $d_{n+s} \neq 0$.

Зауваження 2 $\deg(f(x) \cdot (x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$ – степінь добутку двох многочленів дорівнює сумі степенів цих многочленів.

Висновок 1 Щоб перемножити два многочлени потрібно кожен доданок першого многочлена перемножити на кожен доданок (одночлен) другого многочлена і потім звести подібні (коефіцієнти біля однакових степенів змінної x – додати).

Висновок 2 Добутком двох ненульових многочленів є ненульовий многочлен, степінь якого дорівнює сумі степенів даних многочленів.

Висновок 3 Добутком нульового многочленна на довільний многочлен – нульовий многочлен.

Приклад 11.2 $f(x) = 2 + 3x^2 - x^3$, $g(x) = -x + 3x^3$.

Розв'язання.
$$f(x) \cdot g(x) = -2x + \underline{6x^3} - \underline{3x^3} + 9x^5 + x^4 - 3x^6 = -2x + 3x^3 + x^4 + 9x^5 + 3x^6.$$

3) *Властивості операцій додавання та множення многочленів*. З введених вище правил додавання і множення многочленів та із властивостей

дій над дійсними (чи комплексними) числами випливає справедливість наступних тверджень: $\forall\, f(x),\, g(x),\, h(x)$

1. $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;
2. $\left(f(x)+g(x)\right)+h(x)=f(x)+\left(g(x)+h(x)\right)$;
3. $f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$;
4. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h(x)=f(x)\cdot\left(g(x)\cdot h(x)\right)$;
5. $\left(f(x)+g(x)\right)\cdot h(x)=f(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h(x)$;
6. $f(x)+0(x)=f(x)$;
7. $f(x)+(-f(x))=0(x)$.

4) *Ділення многочленів*. Розглянемо добуток

$$f(x)\cdot g(x)=1=1+0\cdot x+0\cdot x^2+\ldots+0\cdot x^{n+s}. \tag{11.3}$$

Виникає питання: чи для довільного многочленна $f(x)$ існує многочлен $g(x)$, який задовольняє умову (11.3)?

Якщо $\deg f(x)>0$, то такого многочлена $g(x)$ не існує, бо зліва буде многочлен >0, а справа – многочлен нульового степеня.

Висновок. Для многочлена ненульового степеня не існує оберненого до нього многочлена (тобто такого многочлена, який в добутку з даним дає одиницю 1).

Обернений многочлен існує лише для многочленів 0-го степеня, відмінних від нульового многочлена. Причому, в цьому випадку обернений єдиний:

$$\forall\, f(x)\neq 0(x),\quad \deg f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, f(x)=c\neq 0 \,-\text{число};$$

$$\exists\, g(x)=\frac{1}{c}:\quad f(x)\cdot g(x)=1.$$

Розглянемо функцію $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Із попереднього випливає, що лише в окремих випадках функція $\varphi(x)$ буде многочленом. Наприклад, $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$– многочлен; $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ – дробово-раціональна функція (не многочлен).

Існує метод для практичного розв'язання питання, коли результат ділення двох многочленів є многочленом. Це – алгоритм ділення з остачею, відомий нам з елементарної математики для чисел.

Теорема 11.1 (про ділення многочленів з остачею) Для двох довільних многочленів $f(x)$ та $g(x)\neq 0$ існує єдина пара многочленів $\varphi(x)$ та $r(x)$, що

$$f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)+r(x), \tag{11.4}$$

де

$$\deg g(x)>\deg r(x). \tag{11.5}$$

Многочлен $\varphi(x)$ називається *неповною часткою*, а многочлен $r(x)$ – *остачею*.

Приклад 11.3 $f(x)=5x^5-3x^2+2x-1,\ g(x)=x^2+2x+7$.

Розв'язання.

$$
\begin{array}{rl}
-\;5x^5-3x^2+2x-1 & \big|\ x^2+2x+7 \\
5x^5+10x^4+35x^3 & \big|\ \overline{5x^3-10x^2-15x+97} \\
\hline
-\;-10x^4-35x^3-3x^2+2x-1 & \\
-10x^4-20x^3-70x^2 & \\
\hline
-\;-15x^3+67x^2+2x-1 & \\
-15x^3-30x^2-105x & \\
\hline
-\;97x^2+107x-1 & \\
97x^2+194x+679 & \\
\hline
-87x-680 &
\end{array}
$$

Отже, $\varphi(x)=5x^3-10x^2-15x+97$ – неповна частка,

$r(x)=-87x-680$ – остача.

Тобто $f(x)=(x^2+2x+7)\cdot(5x^3-10x^2-15x+97)+(-87x-680)$.

Розглянемо раціональний дріб $\dfrac{5x^5-3x^2+2x-1}{x^2+2x+7}$. За допомогою останньої рівності його можна записати:

$$\frac{5x^5-3x^2+2x-1}{x^2+2x+7}=5x^3-10x^2-15x+97+\frac{-87x-680}{x^2+2x+7}.$$

Права частина цієї рівності є сумою многочлена та дробу. У чисельнику дробу записано многочлен, степінь якого менший від степеня многочлена, який записано в знаменнику. Такий дріб називають *правильним*. Подання раціонального дробу у вигляді суми многочлена та правильного дробу називають *виділенням цілої частини з раціонального дробу*.

Частка двох многочленів $f(x)$ та $g(x)$, $g(x)\neq 0$, буде многочленом тоді і тільки тоді, коли остача від ділення $f(x)$ на $g(x)$ дорівнюватиме нулю.

Кажуть, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)\neq 0$, якщо існує многочлен $\varphi(x)$ такий, що

$$f(x)=g(x)\cdot\varphi(x), \qquad (11.6)$$

У цьому випадку $g(x)$ називають *дільником* многочлена $f(x)$, а $\varphi(x)$ – *часткою* від ділення $f(x)$ на $g(x)$. Позначення: $f(x)\,\vdots\,g(x)$.

Наведемо деякі **властивості подільності многочленів**:

1. Нульовий многочлен ділиться на довільний ненульовий многочлен: $0(x)\,\vdots\,g(x),\ \forall g(x)\neq 0$.

2. Якщо $f(x)\,\vdots\,g(x),\ \ g(x)\neq 0$, то остача від ділення $f(x)$ на $g(x)$ дорівнює нулю, $r(x)=0$.

Наслідок. Якщо остача від ділення многочлена $f(x)$ на $g(x)\neq 0$ дорівнює нулю, то $f(x)\,\vdots\, g(x)$.

3. Якщо $f(x)\,\vdots\, g(x)$ і $h(x)\,\vdots\, g(x)$, то $\left(f(x)\pm h(x)\right)\vdots\, g(x)$.

4. Якщо многочлени $f_1(x)\,\vdots\, g(x)$, $f_2(x)\,\vdots\, g(x)$, …, $f_k(x)\,\vdots\, g(x)$, то для довільних $c_i\in\mathbb{C}(\in\mathbb{R})$, $i=1,2,...,k$

$$\left(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+...+c_k f_k(x)\right)\vdots\, g(x).$$

Тобто лінійна комбінація многочленів, які діляться на $g(x)$, теж діляться на $g(x)$.

5. Якщо $f(x)\,\vdots\, g(x)$, то $\forall h(x)$, добуток $(f(x)\cdot h(x))\vdots\, g(x)$.

6. Якщо $f_1(x)\,\vdots\, g(x)$, $f_2(x)\,\vdots\, g(x)$, …, $f_k(x)\,\vdots\, g(x)$, то для довільних многочленів $h_i(x)$, $i=1,2,...,k$

$$\left(f_1(x)\cdot h_1(x)+f_2(x)\cdot h_2(x)+...+f_k(x)\cdot h_k(x)\right)\vdots\, g(x).$$

7. Довільний многочлен $f(x)$ ділиться на будь-який ненульовий многочлен нульового степеня $c\neq 0$.

8. Якщо $f(x)\,\vdots\, g(x)$, $g(x)\neq 0$, то $\forall\, c\neq 0$, $c\in\mathbb{C}$

$$f(x)\,\vdots\left(c\cdot g(x)\right).$$

9. Якщо $f(x)\vdots\, g(x)$ і $g(x)\vdots\, f(x)$, то $f(x)=c\cdot g(x)$, $c\neq 0$.

Наслідок. Якщо $g(x)=0(x)$, то $f(x)=0(x)$.

10. Якщо $f(x)\neq 0$, то множина всіх дільників многочлена $f(x)$, які мають такий же степінь, як і $f(x)$, вичерпується множиною $\left\{cf(x)\,\middle|\, c\neq 0, c\in\mathbb{C}\right\}$.

Многочлен $d(x)\neq 0(x)$ називається *спільним дільником* многочленів $f(x)$ та $g(x)$, якщо $f(x)\vdots\, d(x)$ та $g(x)\vdots\, d(x)$.

Многочлен $D(x)$ називається *найбільшим спільним дільником* многочленів $f(x)$ та $g(x)$, якщо:

а) $D(x)$ – є спільним дільником $f(x)$ і $g(x)$;

б) $D(x)\vdots\, d(x)$, де $d(x)$ – довільний спільний дільник многочленів f і g.

Позначення: $D(x)=\text{НСД}\left(f(x),g(x)\right)=\left(f(x),g(x)\right)$. Властивості НСД:

1. Прийнято вважати $\text{НСД}(0,0)=0$.

2. $\forall\ g(x)\neq 0,\ \text{НСД}(g(x),0)=cg(x)),\ \ (c\in\mathbb{C},\ c\neq 0)$.

3. Якщо $D(x)=\text{НСД}(f(x),g(x))$, то

$$\forall\, c\in C,\ c\neq 0: c\cdot D(x)=\text{НСД}(f(x),g(x)).$$

Алгоритм Евкліда знаходження НСД двох многочленів базується на наступній теоремі.

Теорема 11.2 НСД двох ненульових многочленів $f(x)$ та $g(x)$ дорівнює останній ненульовій остачі в алгоритмі Евкліда:

$$\text{НСД}(f(x),g(x))=r_k(x). \tag{11.7}$$

Нехай задано два многочлени $f(x)\neq 0$ та $g(x)\neq 0$. Виконуємо послідовне ділення:

а) $f(x)$ на $g(x)$ – позначимо частку $q(x)$, остачу $r(x)$;

б) ділимо $g(x)$ на остачу $r(x)$ – частка $q_1(x)$, остача $r_1(x)$;

в) ділимо $r(x)$ на остачу $r_1(x)$ – частка $q_2(x)$, остача $r_2(x)$;

і так далі – послідовно ділимо частку на остачу. Запишемо це у вигляді рівностей:

$$\begin{cases} f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x), \quad \deg r(x)<\deg g(x); \\ g(x)=r(x)\cdot q_1(x)+r_1(x), \quad \deg r_1(x)<\deg r(x); \\ r(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x), \quad \deg r_2(x)<\deg r_1(x); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x)=r_{k-1}(x)\cdot q_k(x)+r_k(x), \quad \deg r_k(x)<\deg r_{k-1}(x); \\ r_{k-1}(x)=r_k(x)\cdot q_{k+1}(x)+0. \end{cases} \tag{11.8}$$

Степені остач $r(x), r_1(x), r_2(x), ..., r_k(x), ...$ будуть утворювати спадну послідовність, але оскільки вони є цілими невід’ємними числами, то така послідовність не може бути нескінченою. Отже, процес ділення не може бути нескінченним – нарешті ми прийдемо до остачі $r_k(x)$, яка є дільником попередньої остачі $r_{k-1}(x)$ (тобто $r_{k+1}(x)=0$). Ця остання остача $r_k(x)\neq 0$ і буде НСД($f(x), g(x)$).

Приклад 11.4 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $g(x)=x^3+x^2-x-1$.

Розв’язання. Застосуємо алгоритм Евкліда.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x^3+x^2-x-1 \\ x^4+x^3-x^2-x & \overline{x=q} \\ \hline -2x^2-3x-1=r & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-x-1 & -2x^2-3x-1=r \\ \hline -\,2x^3+2x^2-2x-2 & -x+1=q_1 \\ 2x^3+3x^2+x & \\ \hline -x^2-3x-2 & \\ \hline -\,-2x^2-6x-4 & \\ -2x^2-3x-1 & \\ \hline -3x-3=r_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -2x^2-3x-1 & -3x-3=r_1 \\ \hline -\,-6x^2-9x-3 & 2x+1 \\ -6x^2-6x & \\ \hline -\,-3x-3 & \\ -3x-3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Отже, НСД($f(x), g(x)$) $=-3x-3$.

Теорема 11.3 НСД многочленів $f(x)$ та $g(x)$ є єдиним з точністю до множника нульового степеня.

Теорема 11.4 Якщо НСД$(f(x), g(x)) = D(x)$, то існують такі многочлени $u(x)$, $v(x)$, що

$$f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=D(x). \qquad (11.9)$$

При цьому, якщо степені многочленів $f(x)$ та $g(x)$ більші нуля, то многочлени $u(x)$ та $v(x)$ можна вибирати так, щоб

$$\begin{aligned}\deg u(x) &< \deg g(x),\\ \deg v(x) &< \deg f(x).\end{aligned} \qquad (11.10)$$

Узагальнимо поняття НСД для декількох многочленів.

НСД многочленів $f_1(x), ..., f_s(x),\ s > 2$ називається такий їх спільний дільник, який ділиться на довільний інший їх спільний дільник.

Теорема 11.5 НСД$\left(f_1, f_2, ..., f_s\right) =$ НСД$\left(f_s, \text{НСД}\left(f_1, f_2, ..., f_{s-1}\right)\right)$.

Многочлени $f(x)$ та $g(x)$ називаються *взаємно простими*, якщо

$$\text{НСД}(f(x), g(x)) = c, \quad c \neq 0 = const. \qquad (11.11)$$

Оскільки НСД двох многочленів визначається лише з точністю до множника нульового степеня, то можна вважати, що $f(x)$ та $g(x)$ – взаємно прості, якщо

$$\text{НСД}(f(x), g(x)) = 1. \qquad (11.12)$$

Згідно теоремі 11.4 $\exists\ u(x), v(x)$ такі, що

$$f(x)\cdot u(x) + g(x)\cdot v(x) = 1 \qquad (11.13)$$

де $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$ для взаємно простимих многочленів.

Наведемо деякі **властивості взаємно простих многочленів**:

1. Якщо НСД$(f(x), \varphi(x)) = 1$, НСД$(f(x), \psi(x)) = 1$, то НСД$(f(x), \varphi(x)\cdot\psi(x)) = 1$.
2. Якщо $(f(x)\cdot\varphi(x)) \vdots g(x)$ та НСД$(f(x), g(x)) = 1$, то $\varphi(x) \vdots g(x)$.
3. Якщо $f(x) \vdots \varphi(x)$ та $f(x) \vdots g(x)$, де НСД$(\varphi(x), g(x)) = 1$, то $f(x) \vdots (\varphi(x)\cdot g(x))$.
4. Якщо многочлен $f(x)$ взаємно простий з кожним з многочленів $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)$, то він взаємно простимий з їх добутком:

$$\left.\begin{array}{l}\text{НСД}(f(x), \varphi_1(x)) = 1\\ \text{НСД}(f(x), \varphi_2(x)) = 1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \text{НСД}(f(x), \varphi_k(x)) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{НСД}(f, \varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\ldots\cdot\varphi_k) = 1.$$

Многочлени $f_1(x), ..., f_s(x),\ s > 2$ називаються *взаємно простими*, якщо їх НСД$(f_1(x), ..., f_s(x)) = 1$.

Многочлени $f_1(x), ..., f_s(x),\ s > 2$ називаються *попарно взаємно простими*, якщо кожні два з них є взаємно простими.

Якщо многочлени попарно взаємно прості, то вони всі взаємно прості. Обернене твердження невірне.

Приклад 11.5 $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = x^2 - 1$, $f_3(x) = x^2 + x$. Многочлени f_1, f_2, f_3 – взаємно прості, бо НСД$(f_1, f_2, f_3) = 1$. Але вони не попарно взаємно прості, бо НСД$(f_1, f_2) = x - 1$, НСД$(f_1, f_3) = x$, НСД$(f_2, f_3) = x + 1$.