12 КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНІВ. ТЕОРЕМА ВІЄТА

Якщо $c \in \mathbb{C}$ – деяке число, то число $f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_1 c + a_0$, називається *значенням многочлена* $f(x)$ при $x = c$.

Властивості:

1. Якщо $f(x) = g(x)$, то $f(c) = g(c),\ \forall\, c \in \mathbb{C}$;
2. якщо $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, $\psi(x) = f(x) \cdot g(x)$, то $\varphi(c) = f(c) + g(c)$, $\psi(c) = f(c) \cdot g(c)$;
3. Якщо $f(x) = a = const$, то $\forall\, c \in \mathbb{C}$: $f(c) = a$.

Якщо $f(c) = 0$, то число c називається *коренем многочлена* $f(x)$. Зокрема, якщо $f(x) = 0(x)$, то будь-яке число є його коренем.

Якщо ж $f(x)$ – многочлен нульового степеня, відмінний від нульового многочлена, то $f(x)$ не має коренів.

Розглянемо окремий випадок ділення многочленів – ділення довільного многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $(x-c)$.

Із теореми про ділення многочленів з остачею маємо:

$$f(x) = (x-c) \cdot q(x) + r(x),$$

де $r(x) = 0(x)$ або $0 \le \deg r(x) < \deg(x-c) = 1 \ \Rightarrow\ \deg r(x) = 0$ або $r(x) = \mathrm{const}$.

Теорема 12.1 (Безу) Остача від ділення многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $(x-c)$ дорівнює значенню $f(c)$ цього многочленна при $x = c$.

Наслідок. Число c буде коренем многочлена $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) \vdots (x-c)$.

Приклад 12.1 Доведіть тотожність

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1 = 0.$$

Розв'язання.

Позначимо вираз $f(x) = \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1.$
Цей вираз тотожно дорівнює многочлену, степінь якого не більший за 2.

Очевидно, що $a \ne b$, $b \ne c$, $c \ne a$. Знайдемо значення многочлена $f(x)$ при $x = a$, $x = b$, $x = c$: $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Отримуємо, що многочлен степеня, не вище 2, має три різних корені. Отже, цей многочлен тотожно дорівнює нулю.

Розглянемо один із методів ділення многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $(x-c)$, більш простий ніж алгоритм ділення многочленів.

Нехай задано многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $n \ge 1$, $a_n \ne 0$. Поділимо многочлен $f(x)$ на $(x-c)$:

$$f(x) = (x-c) \cdot q(x) + r. \tag{12.1}$$

Частка $q(x)$ – це многочлен $(n-1)$-го степеня:

$$q(x)=b_n x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+...+b_2 x+b_1.$$

Розпишемо тепер умову (12.1) детальніше:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0=(x-c)(b_n x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+...+b_2 x+b_1)+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти біля відповідних степенів змінної x:

$$\left.\begin{array}{ll} x^n: & a_n=b_n, \\ x^{n-1}: & a_{n-1}=b_{n-1}-c\cdot b_n, \\ x^{n-2}: & a_{n-2}=b_{n-2}-c\cdot b_{n-1}, \\ ... & \\ x: & a_1=b_1-c\cdot b_2, \\ x^0: & a_0=r-c\cdot b_1, \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n=a_n, \\ b_{n-1}=a_{n-1}+c\cdot b_n, \\ b_{n-2}=a_{n-2}+c\cdot b_{n-1}, \\ ... \\ b_1=a_1+c\cdot b_2, \\ r=a_0+c\cdot b_1. \end{cases} \qquad (12.2)$$

Формули (12.2) називають *схемою Горнера*. Коефіцієнти b_k отримується множенням попереднього коефіцієнта b_{k-1} на c та додаванням відповідного коефіцієнта a_k.

Тобто, коефіцієнти частки та остачу можна послідовно отримати за допомогою однотипних обчислень, які зручно виписувати у вигляді таблиці.

Таблиця 12.1 – Схема Горнера

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
c	$b_n=a_n$	$b_{n-1}=a_{n-1}+c\cdot b_n$	$b_{n-2}=a_{n-2}+c\cdot b_{n-1}$	…	$b_1=a_1+c\cdot b_2$	$r=a_0+c\cdot b_1$

Приклад 12.2 $f(x)=3x^5-4x^4+2x-1$ поділити на $g(x)=x+1=x-(-1)$, $c=-1$.

Таблиця 12.2 – Схема Горнера до прикладу 3.6

	3	0	0	–4	2	–1
–1	3	–3	3	–7	9	–10

Отже, $f(-1)=-10$, $f(x)=(x+1)(3x^4-3x^3+3x^2-7x+9)-10$.

Як було зазначено, за схемою Горнера зручно многократно ділити многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $(x-c)$. За допомогою такого ділення легко отримати розклад довільного многочлена $f(x)$ за степенями $(x-\alpha)$, який широко застосовується в алгебрі та аналізі.

Нехай $f(x)$ – заданий многочлен n-го степеня. Ділення $f(x)$ на $(x-\alpha)$ дає

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot q_1(x)+r_0, \qquad (12.3)$$

де $q_1(x)$ – многочлен $\left(n-1\right)$-го степеня; $r_0\in\mathbb{C}$.

Якщо $n>1$, то аналогічно можна отримати

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x-\alpha)\cdot q_2(x) + r_1, \\ q_2(x) &= (x-\alpha)\cdot q_3(x) + r_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{n-1}(x) &= (x-\alpha)\cdot q_n(x) + r_{n-1}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Степінь кожного з многочленів $q_1(x), q_2(x), ..., q_n(x)$ щоразу зменшується рівно на одиницю. Тому $\deg q_n(x) = 0$.

Позначимо $q_n(x) = r_n$. Рухаючись у формулах (12.4) зверху вниз, виключаючи з них многочлени $q_1(x), q_2(x), ..., q_n(x)$, маємо:

$$f(x) = r_0 + r_1(x-\alpha) + r_2(x-\alpha)^2 + ... + r_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + r_n(x-\alpha)^n. \tag{12.5}$$

Отже, многочлен $f(x)$ з комплексними коефіцієнтами ми подали як многочлен того ж степеня знову з комплексними коефіцієнтами, але вже від змінної $y = x - \alpha$.

При цьому коефіцієнти $r_0, r_1, r_2, ..., r_n$ однозначно визначається через α та коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ многочлена $f(x)$. А саме, r_0 – це остача від ділення $f(x)$ на $(x-\alpha)$; r_1 – це остача від ділення першої частки $q_1(x)$ на $(x-\alpha)$. Що ж до r_n – то це остання частка в процесі послідовного ділення.

При застосуванні схеми Горнера для такого послідовного ділення не потрібно щоразу наново виписувати коефіцієнти часток: закінчення одного з кроків ділення є одразу початком наступного.

Приклад 12.3 Розкласти многочлен $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$ за степенями двочлена $(x-1)$.

Розв'язання. Складаємо схему Горнера:

	1	0	–3	1	–2	1
1	1	1	–2	–1	–3	<u>–2</u>
1	1	2	0	–1	<u>–4</u>	
1	1	3	3	<u>2</u>		
1	1	4	<u>7</u>			
1	1	<u>5</u>				
1	<u>1</u>					

$f(x) = -2 - 4(x-1) + 2(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$.

З курсу математичного аналізу відомо, що кожен многочлен n-го степеня з дійсними коефіцієнтами заданий на множині всіх дійсних чисел, має в кожній точці x похідну $f'(x)$, яка теж є многочлен $(n-1)$-го степеня:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1.$$

У алгебрі розглядають 2-гу, 3-тю, …, k-ту похідну від многочлена $f(x)$:

$f''(x) = (f'(x))'$,

$f'''(x) = (f''(x))'$,

…,

$$f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'.$$

Якщо многочлен $f(x)$ має степінь n, то $f^{(k)}(x)=0$ при $k>n$; $f^{(n)}(x)=n!\cdot a_n$. (a_n – старший коефіцієнт многочлена $f(x)$).

За допомогою похідних легко виразити коефіцієнти r_k розкладу многочлена $f(x)$ за степенями $(x-\alpha)$

Теорема 12.2 (Тейлора) Для довільного многочлена $f(x)$ і довільного числа $\alpha\in C$ справедлива формула

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+...+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n. \quad (12.6)$$

Приклад 12.4 Дивись попередній приклад – розклад $f(x)=x^5-3x^3+x^2-2x+1$ за степенями $(x-1)$. Маємо:

$$f(1)=-2;$$

$$\frac{f'(1)}{1!}=-4\Rightarrow f'(1)=-4;$$

$$\frac{f''(1)}{2!}=2\Rightarrow f''(1)=4;$$

$$\frac{f'''(1)}{3!}=7\Rightarrow f'''(1)=7;$$

$$\frac{f^{(4)}(1)}{4!}=5\Rightarrow f^{(4)}(1)=120;$$

$$\frac{f^{(5)}(1)}{5!}=1\Rightarrow f^{(5)}(1)=120.$$

З'ясуємо, чи $f(x)\,\vdots\,(x-c)^2$, $f(x)\,\vdots\,(x-c)^3$ і т.д. Очевидно, що коли $\deg f(x)=n$, то $f(x)\,\not\vdots\,(x-c)^m$, якщо $m>n$.

Число $c\in\mathbb{C}$ називають k-*кратним коренем,* $k\in\mathbb{N}$, многочлена $f(x)$, якщо: $f(x)\,\vdots\,(x-c)^k$ і $f(x)\,\not\vdots\,(x-c)^{k+1}$.

Якщо $k=1$, то корінь c називають *простим* (*однократним коренем*).

Якщо число $c\in\mathbb{C}$ є k-кратним коренем многочлена $f(x)$, $k\in\mathbb{N}$, то можна записати: $f(x)=(x-c)^k\cdot\varphi(x)$, причому $\varphi(x)\,\not\vdots\,(x-c)$.

Теорема 12.3 (про кратні корені) Якщо число $c\in\mathbb{C}$ є k- кратним коренем многочлена $f(x)$, $k\in\mathbb{N}$, то це число $(k-1)$- кратним коренем його першої похідної $f'(x)$ (якщо $f'(x)\neq const$).

Зауваження. Якщо $k=1$, то $x=c$ не буде коренем похідної $f'(x)$.

Наслідок. k- кратний корінь многочлена $f(x)$ буде $(k-s)$- кратним коренем його s-тої похідної $f^{(s)}(x)$ $(1\le s<k)$.

На практиці, коли потрібно з'ясувати кратність кореня заданого многочлена, зручно користуватись схемою Горнера і формулою Тейлора.

Приклад 12.5 Визначити кратність кореня $x_0=-2$ для многочлена

$$f(x)=x^5+6x^4+11x^3+2x^2-12x-8.$$

	1	6	11	2	–12	8
–2	1	4	3	–4	–4	$\underline{0=f(-2)}$
–2	1	2	–1	–2	$\underline{0=f'(-2)}$	
–2	1	0	–1	$\underline{0=\frac{f''(-2)}{2!}}$		
–2	1	–2	$\underline{3\neq 0}$			

Отже, $k=3$ – кратність кореня $x_0=-2$ для многочлена $f(x)$.

$$f(x)=(x+2)\left(x^4+4x^3+3x^2-4x-8\right)=(x+2)^2\left(x^3+2x^2-x-2\right)=$$

$$=(x+2)^3\underbrace{\left(x^2-1\right)}_{\not\vdots(x+2)}.$$

Теорема 12.4 Для того, щоб $x=c$ був коренем кратності k многочлена $f(x)$, необхідно й достатньо, щоб у точці c

$$f(c)=f'(c)=f''(c)=...=f^{(k)}(c)=0.$$

Головним результатом дослідження питання про існування коренів алгебраїчних рівнянь є так звана основна теорема алгебри.

Твердження, близьке до ОТА, висловили ще в XVII ст. Жірар (1629) і Декарт (1637). Воно полягало в тому, що кожне алгебраїчне рівняння n-степеня має n коренів; якщо ж дійсних коренів менше n, то решту коренів слід вважати «уявними» (це не те, що комплексні – їх просто треба уявити).

Наприкінці XVIII ст. Леонард Ейлер вперше чітко сформулював ОТА. Її намагалися довести Даламбер (1746), Л. Ейлер (1749), Лагранж (1772), але з деякими обмеженнями і недоліками.

Прийнято вважати, що перше строге доведення ОТА дав Гаусс у 1799 р. (Уточнення своїх доведень Гаусс дав у 1815 та 1816 рр.)

Ця теорема має дуже важливе значення не тільки для алгебри.

Теорема 12.5 (основна теорема алгебри) Довільний многочлен $f(x)$ степеня $n\geq 1$ з комплексними коефіцієнтами має щонайменше один корінь (у загального випадку – комплексний).

Наслідок 1 Кожен многочлен n-того степеня $(n\geq 1)$ має рівно n коренів.

Доведення.

Нехай $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, де $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n\in\mathbb{C}$, $a_0\neq 0$, $n\geq 1$.

Із основної теореми випливає, що многочлен $f(x)$ має хоча б один корінь. Позначимо його α_1. За теоремою Безу, $f(x)\vdots\left(x-\alpha_1\right) \Leftrightarrow f(x)=\left(x-\alpha_1\right) f_1(x)$, де $f_1(x)$ – степеня $n-1$.

Якщо $(n-1)\geq 1$, то з основної теореми алгебри випливає, що $f_1(x)$ має хоча б один корінь. Позначимо його через α_2. Тоді із теоремою Безу випливає

$$f_1(x)\vdots\left(x-\alpha_2\right) \Leftrightarrow f_1(x)=\left(x-\alpha_2\right) f_2(x),$$

де $f_2(x)=n-2$. І так далі $f_{n-1}(x)=a_0\left(x-\alpha_n\right)$.

Підставляючи все це знизу вверх, отримаємо:

$$f(x)=a_0\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)...\left(x-\alpha_n\right). \qquad (12.7)$$

Отже, $f(x)$ має рівно n коренів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, бо $f(\alpha_1)=0,\ f(\alpha_2)=0, ...,\ f(\alpha_n)=0$. Розклад многочлена $f(x)$ на лінійні множники виду (3.20) єдиний з точністю до розташування множників.

Зауваження. Якщо серед множників у (12.7) є кілька однакових, то їх можна замінити степенями. Тоді розклад (12.7) матиме вигляд:

$$f(x)=a_0\left(x-\alpha_1\right)^{k_1}\left(x-\alpha_2\right)^{k_2}...\left(x-\alpha_s\right)^{k_s}, \qquad (12.8)$$

де $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathbb{C}$ – різні числа, $k_1, ..., k_s \in \mathbb{N}$, причому $k_1+...+k_s=n$. Тоді розклад (12.8) теж єдиний з точністю до порядку запису множників. Числа $k_1, ..., k_s$ визначають кратність відповідних коренів $\alpha_1, ..., \alpha_s$.

Висновок. Кожен многочлен $f(x)$ степеня $n\geq 1$ з довільними комплексними коефіцієнтами має рівно n коренів, якщо кожен корінь рахувати стільки разів, яка його кратність.

Наслідок 2 (формули Вієта) Нехай

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0=a_n\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)...\left(x-\alpha_n\right),$$

$a_n\neq 0,\ \alpha_1, ..., \alpha_n$ – корені многочлена $f(x)$ (деякі з них можуть бути рівними). Прирівняємо в цих записах коефіцієнти біля відповідних степенів змінної x:

x^n: $\quad a_n=a_n,$

x^{n-1}: $\quad a_{n-1}=a_n\left(-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_n\right),$

x^{n-2}: $\quad a_{n-2}=a_n\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n\right),$

x^{n-3}: $\quad a_{n-3}=a_n\left(-\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2\alpha_3-...-\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n\right),$

...

x: $\quad a_1=a_n\left(\left(-1\right)^{n-1}\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}+...+\left(-1\right)^{n-1}\alpha_2...\alpha_n\right),$

x^0: $\quad a_0=a_n\left(-1\right)^{n-1}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n.$

Звідси

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3+...+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n}, \tag{12.9}$$
$$...$$
$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}+...+\alpha_2...\alpha_n=(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n},$$
$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n=(-1)^{n-1}\frac{a_0}{a_n}.$$

Формули (12.9) називають *формулами Вієта*.

Зокрема при $n=2$: $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, якщо α_1,α_2- корені $f(x)$, то

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{a_1}{a_2},\\ \alpha_1\alpha_2=\dfrac{a_0}{a_2}.\end{cases}$$

Приклад 12.6 Побудувати многочлен третього степеня, якщо $a_3=1$, $\alpha_1=-1,\ \alpha_2=4,\ \alpha_3=-2$ – його корені.

Розв'язання. Запишемо формули Вієта для многочлена $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\dfrac{a_2}{a_3},\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\dfrac{a_1}{a_3},\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\dfrac{a_0}{a_3}.\end{cases}$$

У даному випадку:
$a_1=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-(-1)\cdot 4\cdot(-2)=-8$,
$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=-4+2-8=-10$,
$a_3=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=-(-1+4+(-2))=-1$.

Отже, $f(x)=x^3-x^2-10x-8$ – шуканий многочлен.

Наслідок 3 (про корені многочлена з дійсними коефіцієнтами) Якщо комплексне число α є коренем многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, ..., a_n \in R$, то спряжене до α комплексне число $\bar{\alpha}$ теж є коренем многочлена $f(x)$.

Зауваження. Якщо комплексне число α є коренем k-ї кратності $(k \geq 2)$ многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене до α комплексне число $\bar{\alpha}$ є коренем многочлена $f(x)$ тієї ж кратності k.

Висновок. Многочлен $f(x)$ непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має хоча б один дійсний корінь.

Приклад 12.7 Знайти всі корені многочлена $f(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$, якщо відомий один з його коренів: $x_1 = 1 + i\sqrt{2}$.

Розв'язання.

Використовуючи наслідок 3 (про корені многочлена з дійсними коефіцієнтами), будемо мати $x_1 = 1 + i\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 1 - i\sqrt{2}$. Отже, $f(x)$ ділиться на $\left(x - 1 + i\sqrt{2}\right)\left(x - 1 + i\sqrt{2}\right) = x^2 - 2x + 3$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
x^6 - 2x^5 + 3x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & x^4 - x^2 + 1 \\ \cline{1-1}
-\;-x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 & \\
-x^4 + 2x^3 - 3x^2 \qquad\quad\;\; & \\ \cline{1-1}
-\;x^2 - 2x + 3 & \\
x^2 - 2x + 3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Тепер розв'яжемо біквадратне рівняння $x^4 - x^2 + 1 = 0$:

$$\text{заміна}: \ t = x^2,$$

$$t^2 - t + 1 = 0, \ D = -3 = 3i^2,$$

$$t_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \ t_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $x^2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ або $x^2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$. Для знаходження коренів представимо числа в тригонометричній формі та скористаємося формулою добування кореня з комплексного числа в тригонометричній формі:

1) $\quad x^2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$:

$r = 1, \ \varphi = \dfrac{\pi}{3},$

$z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3},$

$$\sqrt{z}=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2},$$

$$x_3=z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

$$x_4=z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{-\sqrt{3}-i}{2};$$

2) $\quad x^2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$r=1,\ \varphi=-\frac{\pi}{3},$$

$$z=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\sqrt{z}=\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2},$$

$$x_5=z_0=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}-i}{2},$$

$$x_6=z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{-\sqrt{3}+i}{2};$$

Відповідь: $x_2=1-i\sqrt{2}$, $x_3=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $x_4=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$, $x_5=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$, $x_6=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$.

Наслідок 4 (про розклад многочлена на множники) Якщо многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами розкладається на добуток дійсних множників першого степеня (які відповідають дійсним кореням цього многочлена) та множників другого степеня, які відповідають парам комплексних спряжених коренів:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,$$

з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, ..., a_n\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=a_n\left(x-\alpha_1\right)^{k_1}\left(x-\alpha_2\right)^{k_2}...\left(x-\alpha_l\right)^{k_l}\times$$
$$\times\left(x^2+p_{l+1}x+q_{l+1}\right)^{k_l+1}...\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{k_m}.$$

Перейдемо тепер до основного завдання теорії многочленів – до знаходження коренів довільного многочлена через коефіцієнти цього многочлена. Цю задачу називають також проблемою розв’язування алгебраїчних рівнянь в радикалах: вираження коренів рівняння через його коефіцієнти за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та добування коренів n-го степеня.

Розглянемо питання про елементарні способи знаходження раціональних коренів многочленів (рівнянь) з раціональними коефіцієнтами.

Нехай задано многочлен

$$g(x) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + ... + r_0,$$

де $r_n \neq 0$, $r_0, r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$.

Коефіцієнти $r_k (0 \leq k \leq n)$ можуть бути, як цілими, так і дробовими. Якщо всі дробові коефіцієнти звести до спільного знаменника, то після домножування многочлена $g(x)$ на цей спільний знаменник отримаємо многочлен з цілими коефіцієнтами, корені якого збігаються з коренями многочлена $g(x)$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0, \tag{12.9}$$

$a_n \neq 0$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

А тому обмежимося розглядом многочленна з цілими коефіцієнтами.

Зауваження. Якщо $a_n \neq 0$, то многочлен $f(x)$ може мати як цілі, так і дробові корені.

Теорема 12.6 Якщо нескоротній дріб $\frac{l}{m}$ $\left(l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right)$ є раціональними коренями многочленна $f(x)$ з цілими коефіцієнтами (12.9), то l є дільником вільного члена a_n; m є дільником старшого коефіцієнта a_0.

Наслідок 1 Цілий корінь многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами повинен бути дільником вільного члена.

Наслідок 2 Многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ зі старшими коефіцієнтами $a_n = 1$ та цілими коефіцієнтами $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ може мати тільки цілі корені (інші корені – або ірраціональні, або комплексні).

Оскільки дільників вільного члена та й старшого коефіцієнта може бути дуже багато. Тому щоб не перебирати всі дроби на предмет кореня, варто мати ознаку, за якою можна відкидати ті числа, які не можуть бути коренями. Побудуємо спочатку таку ознаку для цілих коренів.

Теорема 12.7 Для того, щоб ціле число k було коренем многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами *необхідно* щоб числа

$$\frac{f(1)}{k-1} \text{ та } \frac{f(-1)}{k+1} \tag{12.10}$$

були одночасно цілими.

Зауваження. Не всі числа, які задовольняють умову (12.10) будуть коренями рівняння $f(x) = 0$. Тобто (12.10) – необхідна, але не достатня умова того, що ціле число k є коренем многочлена $f(x)$ користуємося, наприклад, схемою Горнера.

Теорема 12.8 Для того, щоб нескоротній дріб $\frac{l}{m}$ $\left(l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right)$ був коренем многочлена $f(x)$, необхідно, щоб числа

$$\frac{f(1)}{l-m} \text{ та } \frac{f(-1)}{l+n}$$

були одночасно цілими.

Зауваження. Дробові корені многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами можна також знайти за допомогою наступного алгоритму.

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Домножимо цей многочлен на a_n^{n-1}:

$$a_n^{n-1} f(x) = a_n^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \cdot a_n^{n-1}.$$

Зробимо заміну: $a_n x = y$. Позначимо многочлен $a_n^{n-1} f(x) = g(y)$. Тоді $g(y) = y^n + \tilde{a}_{n-1}y^{n-1} + ... + \tilde{a}_1 y + \tilde{a}_0$, де $\tilde{a}_0, ..., \tilde{a}_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

Знаходимо цілі корені цього многочлена. Тоді дробові корені многочлена $f(x)$ маємо із формули $x = \frac{y}{a_n}$.

Приклад 12.8 Знайти раціональні корені многочленів:

1. $f(x) = x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;
2. $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 5x - 6$.

Розв'язання.

1. Даний многочлен може мати лише цілі корені (бо $a_n = 1$), які є дільниками вільного члена $a_0 = 36$. Решта коренів – або ірраціональні, або комплексні.

$a_0 = 36 \vdots\ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 16, \pm 18, \pm 36 \Rightarrow k$;

$f(1) = 1 - 7 - 12 + 6 + 36 = 24$;

$f(-1) = -1 + 7 + 12 - 6 - 36 = 24$.

Числа $\frac{f(1)}{l-m}$ та $\frac{f(-1)}{l+n} \in \mathbb{Z}$ – одночасно. Тобто $\frac{24}{k-1}$ і $\frac{24}{k+1} \in \mathbb{Z}$. Можливі корені: 2; –2; 3; –3. Перевіримо їх за допомогою схеми Горнера:

	1	0	–7	–12	6	36
2	1	2	–3	–18	–42	–48
–2	1	–2	–3	–6	18	0
–2	1	–4	5	–16	50	
3	1	1	0	–6	0	
3	1	4	12	30		
–3	1	–2	6	–24		

Отже, $\alpha_1 = -2; \alpha_2 = 3$ – корені $f(x)$. Крім того,

$$f(x) = (x+2)(x-3)\left(x^3 + x^2 - 6\right).$$

2. $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 5x - 6 \Big| \cdot 2^3$,

$2^3 \cdot f(x) = 2^3 \cdot 2x^4 - 2^3 \cdot 6x^3 - 2^3 \cdot x^2 + 2^3 \cdot 5x - 2^3 \cdot 6$,

$y = 2x$; $8f(x) = g(x)$, маємо $g(y) = y^4 - 6y^3 - 2y^2 + 20y - 48$;

$g(1) = -35$; $g(-1) = 1 + 6 - 2 - 20 - 48 = -63$.

Шукаємо цілі корені многочленна $g(y)$:

$a_0 = -48 \vdots\ \pm 1, \pm 2;\ \pm 4, \pm 3;\ \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 48 \Rightarrow k$,

$\frac{g(1)}{k-1}$ та $\frac{g(-1)}{k+1}$; $\qquad \frac{-35}{k-1}$ та $\frac{-63}{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Можливі корені: 2; –4; 6; 8. Перевіримо їх за допомогою схеми Горнера:

	1	–6	–2	20	–48
2	1	–4	–10	0	–48
–4	1	–10	38	–132	480
6	1	0	–2	8	0
6	1	6	34	212	
8	1	8	62	504	

Отже, $\alpha_1 = 6$. Цілих коренів $g(y)$: $y_1 = 6 \Rightarrow$ дробові корені $f(x)$: $x_1 = \frac{y_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$; решта ірраціональні або комплексні.