

**И. И. ОЛЬХОВСКИЙ,
Ю. Г. ПАВЛЕНКО,
Л. С. КУЗЬМЕНКОВ**

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ФИЗИКОВ

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов университетов,
обучающихся по специальности «Физика»

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1977**

Рецензенты:
кафедра теоретической физики
Томского государственного университета,
проф. В Г Багров

Ольховский И. И., Павленко Ю. Г., Кузьменков Л. С.
Задачи по теоретической механике для физиков. М.,
Изд-во Моск. ун-та, 1977 г.
395 с., 42 ил. Библиогр. 27 назв.

Книга содержит свыше четырехсот задач по классической механике—первому из разделов теоретической физики. В книге собраны задачи, интересные для физиков, в частности задачи, в которых рассматриваются движение зарядов в электромагнитных полях, рассеяние частиц, колебания молекул, нелинейные колебания. Книга содержит также задачи, в которых рассматриваются поглощение энергии волн осцилляторами (мазерные эффекты), колебания систем с медленно меняющимися параметрами, движение систем как суперпозиция медленно меняющегося движения и быстрых осцилляций, электромеханические аналогии. Решение задач способствует более глубокому пониманию физических идей механики, ее общетеоретических положений, помогает студентам развивать необходимые практические навыки, в частности помогает освоить методы решения уравнений Ньютона, Лагранжа, Гамильтона—Якоби, метод Крылова—Боголюбова в теории нелинейных колебаний и методы усреднения уравнений движения. Построение «Задач» соответствует учебнику И. И. Ольховского «Курс теоретической механики для физиков».

○ $\frac{20402-051}{077(02)-77}$ 66—77

© Издательство Московского университета, 1977 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	5	
Глава 1. Кинематика и уравнения движения материальной точки	7	67
§ 1. Кинематика материальной точки	7	67
§ 2. Уравнения движения материальной точки	9	78
Глава 2. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии	13	94
§ 1. Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии материальной точки	13	94
§ 2. Движение в центрально-симметричном поле	16	116
§ 3. Движение под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы	17	120
§ 4. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии системы	20	136
Глава 3. Задача двух тел и рассеяние частиц	23	145
§ 1. Движение двух взаимодействующих материальных точек	23	145
§ 2. Сечения рассеяния и захвата частиц	24	151
Глава 4. Движение относительно неинерциальных систем отсчета	26	160
§ 1. Положение, скорость и ускорение материальной точки относительно разных систем отсчета	26	160
§ 2. Уравнения движения и законы сохранения относительно неинерциальных систем отсчета	26	163
Глава 5. Уравнения Лагранжа	29	173
§ 1. Уравнения Лагранжа с реакциями связей и законы сохранения энергии и момента импульса при наличии связей	29	173
§ 2. Уравнения Лагранжа в независимых координатах и законы сохранения обобщенного импульса и энергии	32	193
§ 3. Движение под действием обобщенно-потенциальных сил	35	207
Глава 6. Линейные колебания	39	222
§ 1. Собственные одномерные колебания	39	222
§ 2. Собственные и главные колебания системы	42	233
§ 3. Вынужденные колебания	45	253

Глава 7. Нелинейные колебания	48	243
§ 1. Собственные колебания и метод Крылова — Боголюбова	48	273
§ 2. Колебания системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты	48	281
§ 3. Методы усреднения	49	288
Глава 8. Динамика твердого тела	53	313
§ 1. Тензор инерции	53	313
§ 2. Плоскопараллельное движение	55	323
§ 3. Общий случай движения	58	339
Глава 9. Уравнения Гамильтона	62	359
§ 1. Канонические уравнения. Скобки Пуассона	62	359
§ 2. Уравнения Гамильтона — Якоби	64	368
§ 3. Канонические преобразования. Интегральные вариационные принципы	65	377
 Литература	 	 391

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положены задачи, которые в течение 1960—1975 гг. предлагались студентам физического факультета Московского университета на лекциях и семинарских занятиях по теоретической механике. «Задачи» написаны в полном соответствии с программой курса «Теоретическая механика» для университетов по физическим специальностям (часть 1, Изд-во МГУ, 1973 г.). Содержание книги и построение в основном соответствует учебнику [1] И. И. Ольховского «Курс теоретической механики для физиков» (издание II, 1974 г., часть 1).

Авторы стремились создать пособие, которое должно помочь студентам физических специальностей глубоко овладеть современными методами исследования движений механических систем на основе уравнений Ньютона, Лагранжа, Гамильтона, Гамильтона—Якоби, а также законов изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии.

В первых четырех главах решения динамических задач основаны на применении уравнений движения Ньютона. Остальные пять глав посвящены уравнениям Лагранжа, Гамильтона, Гамильтона — Якоби. Помимо традиционных задач по теоретической механике в книге предложены и другие задачи, связанные с современными физическими проблемами, в частности задачи, в которых исследуются движение заряженных частиц в электромагнитных полях, поглощение электромагнитных волн осцилляторами (мазерный эффект), рассеяние частиц, колебания молекул, нелинейные колебания. В пособии рассмотрены системы с медленно меняющимися параметрами, а также системы, движение которых можно представить в виде суперпозиции медленно меняющегося и быстро осциллирующего движений.

В предлагаемых решениях задач авторы широко использовали теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, аппарат векторного и тензорного анализа, специальные функции и также современные математические методы, применяемые и в других разделах теоретической физики, как например метод Крылова — Боголюбова в теории нелинейных колебаний и методы усреднений.

Обратим внимание на методические особенности предлагаемой книги. В начале каждого параграфа, как правило, излагаются

наиболее простые задачи, а затем — все более трудные задачи, близкие по содержанию к небольшим научным исследованиям (некоторые из этих задач могут быть использованы в качестве курсовых работ). С целью научить студентов самостоятельно формулировать физические задачи на языке математики авторы сочли полезным предлагать условия ряда задач в достаточно общей форме. Так, в условиях задач иногда не приводятся очевидные данные. Например, если в условии есть указание на наличие вертикали или горизонтали, то не оговаривается, что движение материальной точки происходит в однородном поле тяжести с известной напряженностью.

В заключение авторы приносят благодарность А. А. Соколову, В. Г. Багрову, А. С. Галиуллину с сотрудниками, Н. В. Кудрявцевой за многие ценные советы, а Р. А. Бунатян за полезные замечания и Н. М. Садыкову за участие в чтении корректуры. Авторы также благодарны всем аспирантам и студентам физического факультета МГУ, которые оказали помощь при проверке рукописи.

*И. И. Ольховский,
Ю. Г. Павленко,
Л. С. Кузьменков*

ГЛАВА 1

Кинематика и уравнения движения материальной точки

§ 1. Кинематика материальной точки

1.1. Точка движется по эллипсу $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ с ускорением, параллельным оси y . Найти ускорение как функцию y , если $\mathbf{r}(0) = (0, b)$, $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0)$.

1.2. Точка движется по эллипсу с полуосями a и b с постоянной по величине скоростью v_0 . Определить ускорение и скорость точки как функции координат.

1.3. Точка движется в плоскости с постоянной по величине скоростью v_0 и постоянной угловой скоростью ω . Определить $\mathbf{v}(t)$.

1.4. Точка движется по эллипсу $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ так, что угловая скорость радиуса-вектора, проведенного из центра эллипса к точке, постоянна и равна ω . Определить скорость точки, если в начальный момент времени $x(0) = a$.

1.5. Точка движется в плоскости с постоянной по величине скоростью v_0 и постоянной секторной скоростью σ_0 . Найти $\mathbf{v}(t)$, если $\rho(0) = 2\sigma_0/v_0$.

1.6. Точка движется по окружности радиуса R с постоянной секторной скоростью σ_0 относительно точки O' , лежащей в плоскости окружности на расстоянии $a < R$ от центра окружности (рис. 1.6). Найти величину скорости v точки как функцию расстояния ρ от точки O' до движущейся точки.

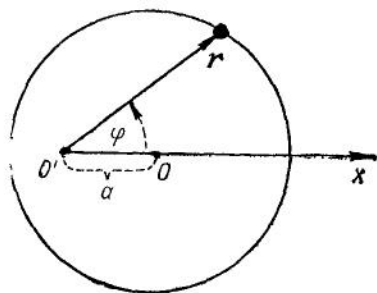


Рис 16

1.7. Точка движется по окружности радиуса R с постоянной секторной скоростью σ_0 относительно точки A , лежащей на окружности. Найти зависимость от времени угла φ между радиусом-вектором точки, проведенным из A , и прямой, соединяющей точку A и центр окружности ($\varphi(0) = 0$).

1.8. Точка движется по траектории $\rho = ae^{k\varphi}$ с постоянной секторной скоростью σ_0 . Найти скорость $\mathbf{v}(t)$ точки, если в начальный момент времени $\varphi(0) = 0$.

1.9. Точка движется по плоской траектории с постоянной секторной скоростью, причем величина линейной скорости точки обратно пропорциональна ее расстоянию ρ от начала координат. Найти уравнение траектории, закон движения $\mathbf{r}(t)$ и ускорение точки как функцию ρ , если $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

1.10. Точка движется по плоской траектории так, что произведение ее расстояний до неподвижных точек F_1 и F_2 есть величина, постоянная и равная a^2 — квадрату половины расстояния между F_1 и F_2 . Проекция секторной скорости точки на направление, перпендикулярное плоскости траектории, сохраняется. Найти уравнение траектории точки и ее ускорение как функцию расстояния от середины отрезка F_1F_2 .

1.11. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость $\sigma_z = k\rho^2/2$, а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен 45° . Найти закон движения и уравнение траектории точки, если $\rho(0) = 0$; $\varphi(0) = 0$; $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$.

1.12. Точка движется в плоскости с постоянной по величине скоростью v_0 , при этом угол между радиусом-вектором точки и ее скоростью равен $\frac{\pi}{6} \omega t$. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент времени $\mathbf{r}(0) = 0$.

1.13. По неподвижной окружности радиуса a катится без проскальзывания лежащая с ней в одной плоскости другая окружность того же радиуса. На подвижной окружности закреплена материальная точка, совпадающая в начальный момент времени с точкой A неподвижной окружности. Найти ускорение материальной точки как функцию ее расстояния до точки A , если подвижная окружность вращается вокруг неподвижной с постоянной угловой скоростью ω .

1.14. Окружность радиуса a катится без проскальзывания по неподвижной окружности радиуса $R > a$ с ее внутренней стороны. Найти траекторию материальной точки, закрепленной на подвижной окружности. При каком условии этой траекторией будет служить отрезок прямой линии?

1.15. Точка движется по сфере, причем в любой момент времени скорость точки образует постоянный угол α с меридианом. Найти уравнение траектории точки.

1.16. Точка движется по окружности радиуса R , причем $\varphi = \omega t$ (φ — угол между радиусом-вектором точки, проведенным из некоторой точки A окружности, и прямой, соединяющей точку A и центр окружности). Найти тангенциальную и нормальную составляющие скорости и ускорения точки.

1.17. Точка движется по параболе $y = kx^2$ так, что ее ускорение параллельно оси y и равно a . Определить компоненты ω_t , ω_n ускорения точки как функции времени.

1.18. Точка движется в плоскости. Ее тангенциальное и нор-

мальное ускорения соответственно равны постоянным a и b . Найти уравнение траектории в полярных координатах.

1.19. В данной плоскости движутся две точки: точка 1 движется по прямой с постоянной скоростью v_1 , а точка 2 — с постоянной по модулю скоростью v_2 , направленной все время на точку 1. Найти траекторию точки 2 и «координату встречи» 1 и 2.

1.20. Точка S движется прямолинейно, а скорость точки K направлена все время на точку S (S и K движутся в одной плоскости). Какую форму должна иметь траектория точки K , чтобы расстояние между K и S было постоянным? Найти ускорение точки K , если известно, что оно ортогонально ее скорости. Каков закон движения S ?

1.21. Точка движется по кардиоиде $\rho = 2a \cos \frac{\varphi}{2}$ с постоянной по величине скоростью. Найти скорость точки и ее ускорение как функцию ρ .

1.22. Точка описывает кардиоиду $\rho = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ таким образом, что ее радиус-вектор вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти скорость точки и ее ускорение как функцию φ .

1.23. Окружность радиуса a вращается вокруг оси, проходящей через некоторую точку O этой окружности перпендикулярно ее плоскости (угловая скорость вращения окружности постоянна и равна ω). По окружности движется точка с постоянной скоростью v относительно окружности. Найти уравнение траектории точки в полярных координатах с началом в точке O .

1.24. Точка движется по спирали $\rho = ae^{\varphi}$ так, что радиальная составляющая ее ускорения равна нулю. Показать, что абсолютные величины скорости и ускорения точки пропорциональны ρ ($\dot{\varphi}(0) = \omega$).

1.25. Точка движется по плоской кривой и в момент времени t_0 проходит со скоростью v_0 через точку, в которой кривизна траектории равна κ . Найти тангенциальную составляющую ускорения движущейся точки и кривизну ее траектории как функции величины скорости, если $\frac{d^2v}{dt^2} = av$, где a — константа.

§ 2. Уравнения движения материальной точки

1.26. Проинтегрировать уравнение движения $\ddot{x} = k \sin \frac{x}{a}$, если $x(0) = \pi a$; $\dot{x}(0) = 2\sqrt{ka}$ ($k, a > 0$).

1.27. Найти скорость, которую приобретет частица в результате действия мгновенной силы $F_x = a\delta(t-t_0)$, если $v(0) = 0$ (здесь $\delta(t)$ — функция Дирака).

1.28. Заряд $e < 0$ в начальный момент времени покоился на расстоянии h от бесконечной проводящей плоскости. Определить время, за которое заряд достигнет плоскости.

1.29. Орудие установлено на холме высоты h (рис. 1.29). Начальная скорость снаряда v_0 направлена под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α_1 дальность полета снаряда максимальна (сопротивлением воздуха пренебречь).

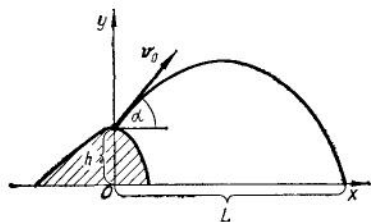


Рис. 1.29

1.30. Шарик массы m падает на горизонтальную плоскость с высоты h . Начальная скорость шарика равна нулю. Движение происходит в среде с квадратичным сопротивлением. Найти высоту подъема шарика после упругого удара о плоскость.

1.31. Тело движется в однородном поле тяжести Земли. Сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости. В начальный момент времени тело находилось на высоте H , а его скорость равнялась нулю. Найти зависимость скорости от времени, скорости от высоты и высоты от времени.

1.32. В некоторый начальный момент времени из неподвижного источника испускаются частицы с одинаковыми по модулю начальными скоростями, которые лежат в плоскости, параллельной напряженности \mathbf{g} однородного поля (частицы вылетают под всеми возможными углами). Найти область, недостижимую для пучка частиц.

1.33. Из некоторой неподвижной точки в начальный момент времени по всем направлениям испускаются частицы с постоянной по абсолютной величине начальной скоростью. Затем частицы движутся в однородном поле тяготения с сопротивлением, пропорциональным скорости. Найти центр и радиус сферы, на которой в момент времени t окажутся частицы.

1.34. Заряд e движется в поле $\mathbf{E} = E_0 \sin \frac{z}{a} \cdot \mathbf{n}_x$ электрического ондулятора. В начальный момент времени $\mathbf{r}(0) = 0$; $\mathbf{v}(0) = v_0 \mathbf{n}_z$. Найти закон движения заряда.

1.35. Протон движется во взаимно перпендикулярных однородных электрических полях с напряженностями $E_1 \cos \omega t$; $E_2 \sin \omega t$. При каких начальных условиях и значениях амплитуд E_1 и E_2 траекторией протона будет циклоида?

1.36. Электрон движется в магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H} = H_0 \cos ay \cdot \mathbf{n}_z$. Найти закон движения и траекторию электрона, если $\mathbf{r}(0) = 0$; $\mathbf{v}(0) = v_0 \mathbf{n}_y$.

1.37. Заряд e движется в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях со взаимно перпендикулярными напряженностями. Найти скорость заряда $\mathbf{v}(t)$, если $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

1.38. Заряд e движется в однородных постоянных электрическом и магнитном полях. Представить скорость заряда в виде $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{v}''$, где \mathbf{v}'' удовлетворяет уравнению $m\dot{\mathbf{v}}'' = \frac{e}{c} [\mathbf{v}'' \mathbf{H}]$.

1.39. Заряд e движется во взаимно перпендикулярных однородных постоянных полях: электрическом, магнитном и гравитационном. В начальный момент заряд покоился. Найти величину максимальной скорости, приобретенной зарядом.

1.40. Заряд e движется в однородном магнитном поле напряженности \mathbf{H} . Найти зависимость скорости и кинетической энергии заряда от времени, если учесть действие на заряд силы лучистого трения $\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}$ и если $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

1.41. Электронно-лучевая трубка помещена в однородное магнитное поле, напряженность \mathbf{H} которого перпендикулярна плоскости экрана. Электроны влетают в электронно-лучевую трубку из электронной пушки с составляющей скорости u вдоль оси трубки и составляющей скорости v_0 перпендикулярно оси. При какой длине L трубки все электроны фокусируются в одной точке экрана?

1.42. Заряженная частица движется в постоянных однородных скрещенных полях $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ в среде с малым линейным сопротивлением ($\mathbf{F}^d = -\gamma \mathbf{v}$). Найти скорость частицы вдоль поля \mathbf{E} , усредненную по периоду $T = 2\pi \frac{mc}{eH}$ (e — заряд частицы).

1.43. Электрон движется в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n}_z$ и поле монохроматической циркулярно поляризованной волны, векторы напряженности которой равны соответственно

$$\mathbf{E}_\sim = E_0 (\cos(\omega t - kz), \sin(\omega t - kz), 0), \quad \mathbf{H}_\sim = [\mathbf{n}_z \mathbf{E}_\sim],$$

где $\omega = \frac{|e|H}{mc}$, $|\mathbf{H}_\sim| \ll H_0$. Найти зависимость кинетической энергии от времени, если в начальный момент времени электрон покоился.

1.44. Заряд движется в однородном нестационарном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H} = H(t) \mathbf{n}_z$; $H(t) = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$.

Найти закон движения заряда, учитывая возникающее вихревое электрическое поле [5, 6].

1.45. Тело массы m движется под действием возвращающей силы $F_1 = -k(t) \mathbf{r}$ и силы сопротивления среды $\mathbf{F}_2 = -\gamma(t) \mathbf{v}$. Како-

му условию должны удовлетворять функции $\gamma(t)$ и $k(t)$, чтобы одним преобразованием времени уравнение движения можно было свести к уравнению движения с постоянными k_0 и γ_0 ? Найти это преобразование.

1.46. Записать уравнение движения точки в естественных координатах.

1.47. Найти решение уравнения $m\ddot{x}=F(t)$ с помощью функции Грина.

1.48. Точка массы m движется вдоль оси x под действием силы

$$F_x = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0; \\ -\frac{\alpha x}{a} & \text{при } 0 \leq x \leq a; \\ -\frac{\alpha a^2}{x^2} & \text{при } x \geq a. \end{cases}$$

Найти скорость точки в начале координат, если $x(0) = 4a$; $\dot{x}(0) = 0$.

1.49. Тело массы m брошено вертикально вверх и движется в среде, сила сопротивления которой $\mathbf{F}^d = -mkv\mathbf{v}$, где k — постоянный коэффициент. При движении вверх и обратно тело имеет одну и ту же величину скорости на высотах h_1 и h_2 соответственно. Показать, что $e^{2k(h_0-h_1)} + e^{-2k(h_0-h_2)} = 2$, где h_0 — максимальная высота подъема.

1.50. Частица массы m движется под действием силы $\mathbf{F} = (-m\lambda^2 x, -m\lambda^2 y, 0)$ и силы сопротивления $\mathbf{F}^d = (-2m\lambda \dot{x}, -2m\lambda \dot{y}, 0)$, где λ — постоянный коэффициент. Найти уравнение траектории, если $x(0) = a$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$; $\dot{y}(0) = \lambda a$; $\dot{z}(0) = 0$.

1.51. Точка движется в плоскости Oxy под действием силы $\mathbf{F} = (a\dot{y}, b\dot{x}, 0)$. Найти уравнение траектории.

1.52. Точка движется вдоль оси x под действием силы $F_x = \alpha x - \gamma x^3$. Найти закон движения $x(t)$, если $x(0) = \sqrt{2\alpha/\gamma}$; $\dot{x}(0) = 0$.

1.53. Точка движется в поле с потенциальной энергией

$$U(x) = \begin{cases} -k_0 x, & x < 0; \\ \frac{1}{2} k_1 x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Найти период колебаний точки.

ГЛАВА 2

Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии

§ 1. Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии материальной точки

2.1. Найти выражение для силы, под действием которой материальная точка массы m движется в плоскости $z=0$ по закону $x=a \operatorname{ch} kt$, $y=b \operatorname{sh} kt$. Приведите значения сохраняющихся при таком движении динамических величин.

2.2. Показать, что при движении точки в центрально-симметричном поле ее траектория лежит в плоскости, проходящей через центр силы.

2.3. Материальная точка движется в центрально-симметричном поле при наличии силы трения $\mathbf{F}^d = -\gamma \mathbf{v}$. Будет ли это тело двигаться в плоскости, проходящей через центр силы при произвольных начальных условиях?

2.4. В начальный момент времени заряд e неподвижен и находится на расстояниях r_0 от двух бесконечно протяженных проводящих пластин, образующих прямой двугранный угол. Найти скорость заряда как функцию его положения.

2.5. Точка движется в поле с потенциалом $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a}$. Найти закон движения точки.

2.6. Точка движется в поле $U(z) = mg(z-h)\theta(z-h)$, где $\theta(z)$ — ступенчатая функция: $\theta(z) = 0$ при $z < 0$; $\theta(z) = 1$, если $z > 0$. В начальный момент времени $\mathbf{r}(0) = 0$; $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha, 0)$. Найти зависимость дальности l от угла α (рис. 2.6).

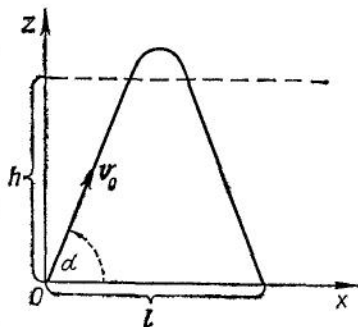


Рис. 2.6

2.7. Расстояние между катодом и анодом в плоском магнетроне равно d , разность потенциалов U , а напряженность магнитного поля \mathbf{H} . Электроны эмитируются с катода с нулевой начальной скоростью. При каком значении поля \mathbf{H} ток в магнетроне отсутствует?

2.8. Найти закон движения заряда в магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H_0 \cos \frac{y}{a})$. Начальные условия в декартовых координатах имеют вид $\mathbf{r}(0) = 0$; $\mathbf{v}(0) = (0, \omega a, 0)$; $\omega = eH_0/mc$.

2.9. Электрон движется в однородном магнитном поле $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n}_z$ и радиальном электрическом поле с потенциалом $\varphi = \frac{U_0}{2R^2} (x^2 + y^2)$.

В начальный момент времени $x(0) = a \cos \alpha$; $y(0) = a \sin \alpha$; $z(0) = 0$; $\mathbf{v}(0) = 0$. Найти закон движения электрона, если $\left(\frac{e_0 H_0}{mc}\right)^2 > \frac{4e_0 U_0}{mR^2}$ (заряд электрона $e = -e_0$).

2.10. Электрон ($e = -e_0$) движется в поле квадрупольной линзы, потенциал которого $\varphi = \frac{U_0}{d^2} (x^2 - z^2)$, и в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n}_z$. Определить закон движения электрона, если $\left(\frac{e_0 H_0}{mc}\right)^2 > \frac{2e_0 U_0}{md^2}$.

2.11. Электрон ($e = -e_0$) движется в неоднородном магнитном поле $\mathbf{H} = \frac{H_0}{\text{ch}^2 ay} \mathbf{n}_z$, образующем магнитную стенку, параллельную оси x . В начальный момент времени электрон находился на бесконечности ($x(0) = 0$, $y(0) = -\infty$, $z(0) = 0$) и имел скорость $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = y_0$. Найти а) условия, при которых возможно отражение и прохождение электрона сквозь стенку; б) закон движения вдоль оси y ; в) уравнение траектории электрона.

2.12. Протон движется в среде с линейным сопротивлением в постоянном однородном магнитном поле и нестационарном электрическом поле. Напряженность электрического поля вращается с постоянной частотой ω в плоскости, перпендикулярной фиксированному направлению напряженности магнитного поля. Найти мощность сил, действующих на частицу, а также мощность сил, усредненную по периоду осцилляций кинетической энергии, предполагая, что сопротивление среды мало.

2.13. Проинтегрировать уравнение движения свободной точки в цилиндрических координатах.

2.14. С внутренней обкладки цилиндрического конденсатора вылетает электрон с начальной скоростью, перпендикулярной оси конденсатора. Найти критическое значение угла вылета электрона, при котором его траектория не будет касаться наружной пластины конденсатора.

2.15. Электрическое поле создается двумя одинаковыми зарядами $+Q$, расположенными на расстоянии $2a$ друг от друга. Частица массы m и заряда $-q$ движется в этом поле по окружности радиуса R , все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от зарядов. Определить момент импульса движущегося заряда относительно оси симметрии системы.

2.16. Электроны движутся между обкладками цилиндрического конденсатора в аксиально симметричном магнитном поле (ось сим-

метрии совпадает с осью конденсатора) и электрическом поле, созданном постоянной разностью потенциалов между обкладками. Найти критическое значение магнитного потока через сечение конденсатора, при котором электроны, двигаясь от внутренней обкладки с нулевой начальной скоростью, перестанут попадать на наружную обкладку конденсатора.

2.17. По бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса a течет постоянный ток J . С поверхности проводника в радиальном направлении испускается электрон со скоростью v_0 . Найти формулу, которая определяет наибольшее удаление электрона от проводника.

2.18. Заряд e движется в однородном постоянном магнитном поле. Доказать, что для момента импульса \mathbf{M} заряда имеет место интеграл движения
$$\mathbf{M}\mathbf{H} + \frac{e}{2c} [\mathbf{r}\mathbf{H}]^2 = C.$$

2.19. Электрон ($e = -e_0$) движется в однородном постоянном магнитном поле. Найти решение уравнений движения в цилиндрических координатах.

2.20. Заряд e движется в однородном постоянном магнитном поле и в поле неподвижного заряда Q . При некотором соотношении заданных величин заряд будет двигаться по окружности. Найти это соотношение и радиус окружности.

2.21. Заряд e движется в поле магнитного монополя $\mathbf{H} = g \frac{\mathbf{r}}{r^2}$.

Найти интеграл движения, следующий из закона изменения момента импульса заряда.

2.22. Заряд движется в электромагнитном поле. Записать в тензорных обозначениях уравнение движения заряда и закон изменения его кинетической энергии.

2.23. Найти собственную гравитационную энергию однородного шара массы M и радиуса a .

2.24. Найти потенциальную энергию взаимодействия однородного шара массы m_1 , радиуса a и находящейся на расстоянии r от его центра точки массы m_2 .

2.25. Учитывая несферичность Земли, найти энергию взаимодействия однородной Земли и точки массы m , находящейся на расстоянии $r \gg a$ от центра Земли (a — экваториальный радиус Земли).

2.26. Оценить, исходя из теоремы о вириале сил, температуру внутри Солнца.

2.27. Обобщить теорему о вириале сил для заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле.

2.28. Частица движется в потенциальной одномерной прямоугольной «яме» с бесконечно высокими «стенками». Ширина ямы

a , полная энергия частицы E . Вычислить среднюю силу, с которой частица действует на стенку.

2.29. Из классической электродинамики следует, что уравнение движения, учитывающее потери энергии заряда на излучение, должно иметь вид [7]

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

Это уравнение может быть использовано в качестве уравнения движения только в том случае, если сила торможения за счет излучения мала по сравнению с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля. Предполагая, что заряд движется в поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$; $\mathbf{H} = [n\mathbf{E}]$, найти условие применимости уравнения (n — постоянный орт).

2.30. Заряд e движется в поле волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$; $\mathbf{H} = [n\mathbf{E}]$ (n — постоянный орт). Учитывая торможение заряда излучением, найти среднюю по времени мощность сил, действующих на заряд, а также среднюю по времени от производной импульса заряда.

§ 2. Движение в центрально-симметричном поле

2.31. Найти зависимость от координат потенциала центрального поля, в котором материальная точка может двигаться по гиперболической спирали $r = \text{const}/\varphi$.

2.32. Точке массы m , находящейся на расстоянии r от центра поля $U = \kappa r^3/3$, сообщена скорость v_0 , составляющая угол $\pm\pi/2$ с направлением на центр поля. При каком значении v_0 материальная точка будет двигаться по окружности?

2.33. Полная энергия материальной точки, движущейся в поле

$$U = -\alpha \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{r^2},$$

равна нулю. Найти траекторию точки.

2.34. Материальная точка движется в центральном поле $U = -\alpha/r^6$. Полная энергия равна нулю. Найти траекторию точки и построить график траектории.

2.35. Найти траекторию материальной точки и смещение ее перигелия в поле $U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.

2.36. Исследовать движение материальной точки в центральном поле

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & \text{при } r < a; \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

2.37. Точка массы m движется по круговой орбите радиуса r_0 под действием центральной силы. Сформулировать критерий устойчивости кругового движения точки.

2.38. Точка движется в центрально-симметричном поле. Показать, что законы сохранения момента импульса и энергии приводят к соотношению, аналогичному закону преломления света для сред, коэффициент преломления которых есть функция величины радиуса-вектора.

§ 3. Движение под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы

2.39. Тело движется в поле тяжести Земли в области высот $z \ll R$; R — радиус Земли. Найти приближенные выражения для интегралов движения, учитывающие кривизну Земли и справедливые при $z \ll R$.

2.40. Тело брошено с поверхности Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью $v_0 \ll \sqrt{gR}$. Найти приближенное уравнение траектории, из которого в случае «плоской» Земли ($R \rightarrow \infty$) следует известное уравнение параболы.

2.41. Показать, что для материальной точки, движущейся в центрально-симметричном поле $U = -a/r$, сохраняется вектор $\mathbf{C} = [\mathbf{vM}] - \frac{a\mathbf{r}}{r}$. Определить расположение вектора \mathbf{C} относительно орбиты точки и связь его величины с эксцентриситетом орбиты.

2.42. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 < \sqrt{2gR}$ под углом β к горизонту (рис. 2.42). Найти дальность полета s (s — отсчитывается по дуге большого круга).

2.43. Тело брошено с поверхности Земли с начальной скоростью $v_0 < \sqrt{gR}$. При каком значении угла β между скоростью и касательной к Земле дальность полета максимальна?

2.44. С какой минимальной скоростью v_0 и под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы оно упало на расстоянии s_0 , отсчитываемом по дуге большого круга?

2.45. Тело брошено с поверхности Земли под углом β к горизонту с начальной скоростью $v_0 < \sqrt{gR}$. Найти время полета тела.

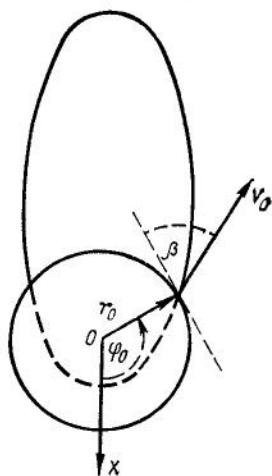


Рис. 2.42

2.46. Известны параметр p и эксцентриситет e орбиты тела, движущегося в поле тяжести Земли. Найти его скорость как функцию расстояния r от центра Земли.

2.47. В поле тяготения Земли движется тело. Найти угол между его радиусом-вектором и скоростью как функцию положения тела.

2.48. В поле тяготения Солнца движется комета с периодом обращения T . В перигелии расстояние от Солнца до кометы равно r_p . Найти расстояние от Солнца до афелия орбиты кометы, зная период обращения Земли вокруг Солнца и значение большой полуоси орбиты Земли.

2.49. Тело выводится на орбиту в точке, находящейся на расстоянии r_0 от центра Земли. При каких условиях орбитой тела будет эллипс, парабола, гипербола или окружность? При каком условии орбита спутника не пересечет поверхность Земли?

2.50. Спутник выводят на орбиту в точке, находящейся на расстоянии r_0 от центра Земли. Чтобы траектория спутника не касалась Земли, вектор начальной скорости должен лежать вне «запретного конуса», т. е. а) вне конической поверхности, касающейся земного шара, с вершиной в точке выведения; б) абсолютная величина начальной скорости должна превосходить некоторое критическое значение. Показать это.

2.51. При выведении спутника на круговую орбиту (на высоте $h=300$ км) его расстояние от Земли отклонилось от расчетного на $\Delta r=3$ км. Найти параметр и эксцентриситет орбиты.

2.52. В момент выведения спутника на круговую орбиту (на высоте $h=300$ км) направление скорости спутника отклонилось от расчетного на $\delta=1^\circ$ в сторону Земли. Найти параметр и эксцентриситет орбиты, а также отклонения в апогее и перигее от круговой орбиты.

2.53. В момент выведения спутника на круговую орбиту (на высоте $h=300$ км) величина скорости отклонилась от расчетной на Δv . Найти эксцентриситет, параметр орбиты, а также отклонения в перигее и апогее от круговой орбиты.

2.54. Спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите. Расстояния от поверхности Земли до перигея и апогея соответственно равны $h_p=170$ км и $h_a=400$ км. Определить изменение модуля скорости в апогее (перигее), необходимое для перехода спутника на орбиту приземления.

2.55. Спутник движется по круговой орбите на высоте h_1 от поверхности Земли. Где и на сколько надо изменить величину скорости спутника, чтобы перевести его на круговую орбиту высотой $h_2 > h_1$? Предполагается, что $h_1, h_2 \ll R$.

2.56. В декартовых координатах x', y' с началом в фокусе эллипса и с осями, лежащими в плоскости эллипса, закон движения спутника в параметрическом представлении имеет вид

$$x' = a(\cos \xi - \varepsilon); \quad y' = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \xi; \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{a}} (\xi - \varepsilon \sin \xi)$$

(положительным направлением оси x' является направление на перигей). Проведем окружность радиуса a с центром, совпадающим с центром O эллипса, и прямую, перпендикулярную большой полуоси эллипса и проходящую через спутник (рис. 2.56). Эти окружность и прямая пересекутся в точке A . Показать, что параметр ξ имеет смысл угла между осью x и радиус-вектором, проведенным из центра эллипса в точку A .

2.57. Закон движения спутника по эллиптической орбите в параметрической форме имеет вид $r = a(1 - \varepsilon \cos \xi)$; $\omega t = \xi - \varepsilon \sin \xi$, где $\omega = (\alpha/ma^3)^{1/2}$ — частота обращения. Найти зависимость от времени декартовых и полярных координат спутника в виде $x(t)$; $y(t)$; $r(t)$; $\cos \varphi(t)$; $\sin \varphi(t)$.

2.58. При выводе на орбиту в точке Γ_0 спутнику сообщили скорость v_0 . Определить положение плоскости орбиты спутника относительно системы отсчета с началом в центре Земли и осью z , направленной по оси вращения Земли (оси x и y направлены на «неподвижные» звезды).

2.59. Спутник Земли, запущенный на круговую орбиту радиуса r_0 , испытывает силу сопротивления атмосферы $F = -\gamma v^n \mathbf{v}$. Работа силы сопротивления за один оборот спутника вокруг Земли мала по сравнению с его кинетической энергией; в связи с этим предполагается, что момент импульса спутника, а также производные момента и полной энергии по времени мало изменяются в течение одного оборота. Найти зависимость от времени момента импульса и полной энергии спутника. Вычислить радиальную и угловую скорости спутника в момент его падения на Землю.

2.60. Показать, что влияние несферичности Земли приводит к изменению со временем ориентации большой оси орбиты спутника.

2.61. Найти траекторию сферической частицы массы m радиуса a , движущейся в поле тяготения Солнца. Предполагается, что электромагнитное излучение Солнца поглощается частицей без отражения. Мощность излучения Солнца \mathcal{N}^0 .

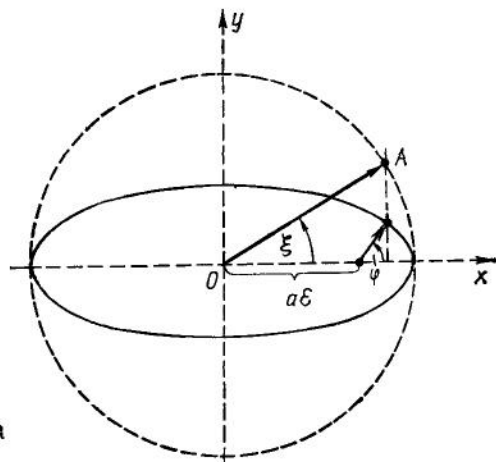


Рис. 2.56

§ 4. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии системы

2.62. Однородный стержень длины l в начальный момент времени занимает вертикальное положение и опирается на гладкую горизонтальную плоскость. Затем под весьма малым случайным воздействием стержень начинает падать на плоскость. Найти траекторию верхнего конца стержня.

2.63. Два тела движутся в однородном поле тяжести Земли. Пренебрегая взаимодействием тел, найти зависимость от времени радиуса-вектора их относительного положения. Начальные условия:

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_{10}; \quad \mathbf{r}_2(0) = \mathbf{r}_{20}; \quad \mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_{10}; \quad \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_{20}.$$

2.64. Два заряда движутся в однородном электрическом поле. Написать уравнение движения центра масс и уравнение относительного движения.

2.65. Две заряженные частицы движутся в однородном магнитном поле \mathbf{H} , причем $e_1/m_1 = e_2/m_2$. Написать уравнение движения центра масс и уравнение относительного движения.

2.66. Спутник Земли, движущийся по круговой орбите радиуса r_0 , испытывает неупругое столкновение с метеором, движущимся по гиперболе с параметром $4r_0$. Скорости спутника и метеора в момент соударения антипараллельны, а масса метеора в n раз больше массы спутника. Найти параметр и эксцентриситет орбиты образовавшегося тела. При каком значении n это тело будет двигаться по гиперболической траектории?

2.67. Проинтегрировать уравнения движения системы N материальных точек, если сила взаимодействия i -той и j -той точек

$$\mathbf{F}_{ij}^{in} = -km_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

2.68. Считая известным время работы реактивного двигателя, найти высоту вертикального подъема ракеты в однородном поле тяжести (масса ракеты изменяется по экспоненциальному закону $m = m_0 \exp(-kt)$, а скорость истечения отработанных газов постоянна).

2.69. Считая известной высоту, на которой прекращает работу реактивный двигатель, найти высоту вертикального подъема ракеты в неоднородном поле тяготения Земли (скорость u истечения газов постоянна).

2.70. Дождевая капля падает в однородном гравитационном поле и равномерно испаряется. Найти работу силы тяжести за время полного испарения капли.

2.71. Капля воды движется в однородном поле тяжести в среде, в которой за счет конденсации происходит увеличение массы капли, пропорциональное ее поверхности. Найти скорость капли

в зависимости от времени, если в начальный момент времени капля была неподвижна, а ее масса равнялась m_0 .

2.72. Найдите наибольшую высоту подъема реактивного снаряда, запущенного в однородном поле тяжести с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Масса снаряда изменяется со временем экспоненциально, скорость u истечения газов постоянна, а время работы двигателя больше, чем время полета снаряда до наивысшей точки его траектории.

2.73. Гибкая нить длины l перекинута через ребро гладкой равнобедренной неподвижной призмы с углом α при основании. Вначале нить покоилась, затем от слабого толчка начала соскальзывать. Найдите скорость нити в момент соскальзывания ее конца с ребра призмы (длина ребра призмы больше l).

2.74. Шарик массы m_1 находится на прямой, проходящей через центр тонкого однородного диска перпендикулярно его плоскости. Масса диска m_2 , радиус R . В начальный момент шарик и диск покоятся. Найдите относительную скорость в момент соударения (гравитационная постоянная γ известна).

2.75. Достаточно длинная доска массы m_2 лежит на горизонтальной гладкой плоскости. На доске находится тело массы m_1 . Коэффициент трения между телом и доской равен K . В начальный момент телу сообщают скорость v_0 (относительно плоскости). Найдите конечную скорость тела и доски и расстояние, пройденное телом m_1 относительно доски.

2.76. Трех одинаковым частицам, расположенным в вершинах равностороннего треугольника со стороной a , сообщили одинаковые скорости v_0 , направленные от одной частицы к другой по часовой стрелке. Определите наибольшее и наименьшее удаление частиц от их центра масс.

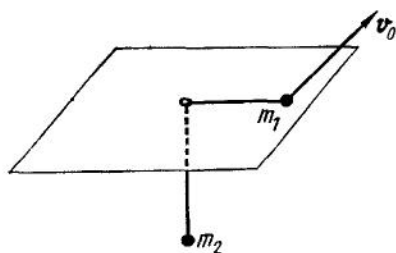


Рис 277

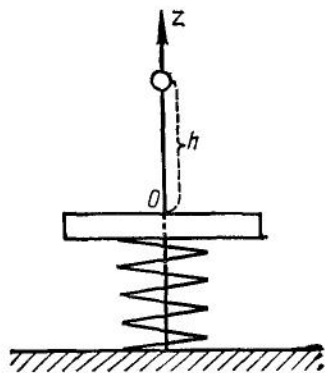


Рис 278

2.77. Точка массы m_1 движется по горизонтальной гладкой плоскости (рис. 2.77). Эта точка соединена со второй точкой массы m_2 нерастяжимой нитью, продетой через отверстие в плоскости.

Вторая точка может перемещаться в однородном поле тяжести только по вертикали. Найти область, в которой расположена траектория первой точки, если в начальный момент времени она находилась на расстоянии ρ_0 от отверстия и имела скорость $\rho_0\omega_0$, направленную перпендикулярно радиусу-вектору точки, проведенному от отверстия.

2.78. Шарик свободно падает с высоты в центр закрепленного на пружине массивного однородного горизонтального диска (рис. 2.78). Пренебрегая воздействием силы тяжести и упругой силы пружины за время соударения, найти законы движения диска и шарика для случаев упругого и полностью неупругого ударов (после первого соударения). При каком условии упругие соударения будут происходить в одной и той же точке пространства с максимальной частотой?

Задача двух тел и рассеяние частиц

§ 1. Движение двух взаимодействующих материальных точек

3.1. Потенциальная энергия взаимодействия двух точек $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\kappa}{2} (|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| - a)^2$. Каковы скорости точек в системе их центра масс в случае движения точек по круговым орбитам (расстояние между точками равно l)?

3.2. Найти среднее за период значение кинетической энергии двух точек относительно системы их центра масс, если точки движутся по эллиптическим орбитам.

3.3. Частица массы m_1 налетает со скоростью v_1 на неподвижное ядро массы m_2 . Происходит неупругое соударение. Какова минимальная скорость v_{min} , необходимая для возбуждения ядра на энергию $\Delta\varepsilon$.

3.4. Порог реакции $\text{He}^4 + \text{N}^{14} = \text{O}^{17} + \text{H}^1$ равен $\varepsilon_0 = 1,13$ МэВ. Какую минимальную энергию должна иметь α -частица, налетающая на неподвижное ядро азота, чтобы произошла реакция?

3.5. Электрон движется в поле неподвижного заряда Q . В начальный момент электрон находился на большом ($r \rightarrow \infty$) расстоянии от заряда Q , имел скорость \mathbf{v}_0 и прицельный параметр ρ (этот вектор по модулю равен прицельному расстоянию и направлен от неподвижного заряда Q к асимптоте траектории электрона по перпендикуляру к ней, т. е. $\rho \perp \mathbf{v}_0$). Вычислить зависимость импульса от времени в первом приближении (в нулевом приближении берется прямолинейная траектория электрона).

3.6. Частицы взаимодействуют по закону $U(r) = -\alpha/r^n$. Найти зависимость прицельного расстояния от угла рассеяния в случае малых углов.

3.7. Частица рассеивается на силовом центре с короткодействующим потенциалом $U(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}$ (потенциал Юкавы).

Определить переданный частице импульс \mathbf{q} в первом приближении (в нулевом приближении $\mathbf{r}_0(t) = \rho + \mathbf{v}_0 t$; $\rho \perp \mathbf{v}_0$).

3.8. Найти в первом приближении импульс, переданный электрону при рассеянии на магнитном диполе, обладающем магнитным моментом (в нулевом приближении берем траекторию $\mathbf{r}_0(t) = \rho + \mathbf{v}_0 t$; $\rho \perp \mathbf{v}_0$).

3.9. Шарик, обладающий скоростью v , испытывает абсолютно упругий удар о движущуюся со скоростью u плоскость. Найти скорость шарика после удара.

3.10. В 1932 г. Чэдвик измерил массу нейтрона, поставив эксперимент, в котором нейтроны получались в результате распада радиоактивного углерода. Падая на парафиновую пленку, нейтроны освобождали ядра водорода, скорость которых измерялась. Затем парафиновая пленка заменялась циановой пластинкой, в которой нейтроны сталкивались с ядрами азота. Считая соударения упругими, сделайте простейший расчет массы нейтрона (для максимальных скоростей ядер водорода и азота Чэдвик соответственно нашел $v_H = 3,3 \cdot 10^9$ см/с; $v_N = 0,47 \cdot 10^9$ см/с).

3.11. Найти соотношение между углом рассеяния в системе центра масс и углом рассеяния в системе координат, связанной с какой-либо из двух рассеивающихся частиц.

3.12. Найти в пространстве импульсов уравнение поверхностей, на которых лежат концы векторов импульсов рассеянных частиц.

§ 2. Сечения рассеяния и захвата частиц

3.13. Найти $\left| \frac{d \cos \theta_m}{d \cos \theta_1} \right|$; $\left| \frac{d \cos \theta_m}{d \cos \theta_2} \right|$ для случая покоящейся до рассеяния частицы l (θ_1, θ_2 — углы рассеяния частиц в л-системе).

3.14. Найти полное сечение упругого рассеяния для шариков радиуса a массы m на таких же покоящихся шариках; сила притяжения между шариками имеет вид $F = -\alpha \frac{r}{r^4}$.

3.15. Найти зависимость дифференциального сечения рассеяния от относительных скоростей частиц до рассеяния, если частицы взаимодействуют по закону $U(r) = \alpha/r^n$. В случае $n=4$ определить угол рассеяния в системе центра масс как функцию прицельного расстояния.

3.16. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц на малые углы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$.

3.17. Восстановить вид рассеивающего поля $U(r)$ по известной зависимости дифференциального сечения от угла рассеяния. Предполагается, что $U(\infty) = 0$; $|U(r)| \ll T_\infty$ (T_∞ — кинетическая энергия частицы до рассеяния).

3.18. Найти выражение дифференциального сечения рассеяния, справедливое для случая произвольного потенциала $U(x, y, z)$ ($U \rightarrow 0$ при $x, y, z \rightarrow \pm \infty$).

3.19. Найти дифференциальное сечение рассеяния электронов на малые углы в поле диполя с моментом d .

3.20. Найти дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц на малые углы в поле магнитного монополя.

3.21. Найти дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в поле магнитного диполя с моментом μ .

3.22. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц на монополях в системе центра масс [9].

3.23. Нейтроны и протоны, налетающие на неподвижные ядра, вызывают ядерные реакции лишь при непосредственных столкновениях с ядрами. Допуская, что ядра представляют собой заряженные сферы одинакового радиуса, вычислить сечения реакций, вызываемых протонами и нейтронами.

3.24. Найти сечение захвата частиц на поверхности сферического тела радиуса R . Потенциальная энергия взаимодействия частиц с телом $U(r) = -\alpha/r^n$ ($\alpha > 0$; $n > 2$).

3.25. Показать, что для достаточно больших прицельных расстояний при рассеянии частиц на силовом центре с потенциалом $U(r) = \alpha/r^n$ ($\alpha > 0$, $n > 1$) классическая теория рассеяния неприменима.

ГЛАВА 4

Движение относительно неинерциальных систем отсчета

§ 1. Положение, скорость и ускорение материальной точки относительно разных систем отсчета

4.1. Точка движется по окружности радиуса R с угловой скоростью ω . Найти уравнение траектории точки в системе отсчета, которая поступательно движется со скоростью v_0 , лежащей в плоскости окружности (в начальный момент времени начала подвижной и неподвижной систем отсчета совпадают).

4.2. Точка движется в плоскости Oxy системы S по прямой $\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + v_0 t (\mathbf{p}_0 \perp \mathbf{v}_0)$. Найти траекторию точки в системе отсчета S' , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно S (начала обеих систем отсчета, а также плоскости Oxy и $O'x'y'$ совпадают).

4.3. В системе S закон движения точки: $x = a \cos \omega t$; $y = z = 0$. Найти уравнение траектории в системе отсчета S' , вращающейся с угловой скоростью ω относительно S (начала обеих систем отсчета, а также плоскости Oxy и $O'x'y'$ совпадают).

4.4. Найти связь между декартовыми координатами точки в системе S и системе S' , повернутой относительно S на углы Эйлера φ , θ , ψ .

4.5. Самолет садится на корабль, движущийся по океану со скоростью v_1 в восточном направлении. Скорость ветра v_2 направлена на север, а самолет снижается по отношению к кораблю вертикально со скоростью v_3 . Определить величину скорости самолета по отношению к движущемуся воздуху.

4.6. Окружность радиуса a вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через одну из ее точек и расположенную перпендикулярно ее плоскости. По окружности движется точка со скоростью u относительно окружности. Найти величину скорости точки в лабораторной системе отсчета.

4.7. Используя представление о совокупностях ортов цилиндрической и сферической систем координат как о подвижных системах отсчета, найти скорость и ускорение точки в этих координатах.

§ 2. Уравнения движения и законы сохранения относительно неинерциальных систем отсчета

4.8. Точка подвеса математического маятника движется с постоянным ускорением a (лежащим в плоскости колебаний маят-

ника) в горизонтальном направлении. Найти закон движения маятника.

4.9. Материальная точка, подвешенная на нити длины l , вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω , а точка подвеса маятника движется вверх по вертикали с постоянным ускорением. Определить ускорение точки подвеса, если известно, что маятник, отклоненный от вертикали на угол φ , остается в том же положении.

4.10. Равнобедренный треугольник высоты h вращается с постоянной угловой скоростью ω в своей плоскости вокруг вершины (рис. 4.10). Вдоль гладкого основания треугольника может двигаться шарик массы m , скрепленный с двумя одинаковыми пружинами жесткости k . Эти пружины нанизаны на основание треугольника и закреплены в его углах. Общая длина пружин в ненапряженном состоянии совпадает с длиной основания. Найти закон движения шарика в инерциальной системе отсчета.

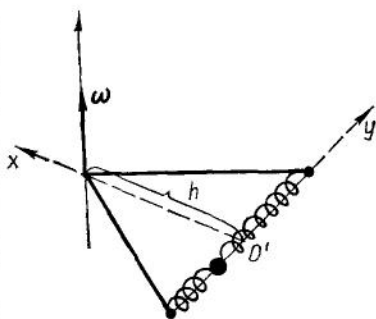


Рис. 4.10

4.11. Шарик движется в поле тяжести Земли по прямой, образующей угол α с вертикалью и вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси (проходящей через прямую). Найти величину скорости шарика как функцию положения.

4.12. Шарик массы m нанизан на гладкую плоскую кривую, расположенную в вертикальной плоскости и равномерно вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис. 4.12). Найти уравнение этой кривой, если шарик находится в равновесии в произвольной точке кривой.

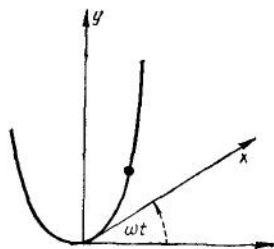


Рис. 4.12

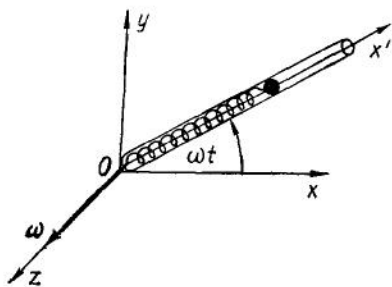


Рис. 4.13

4.13. Внутри гладкой прямой трубки, вращающейся вокруг горизонтальной оси (и перпендикулярной этой оси), движется шарик, прикрепленный к оси вращения с помощью пружины (рис. 4.13). Найти закон движения шарика относительно инерциальной системы отсчета.

4.14. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти закон движения точки в поле тяжести Земли в системе отсчета, связанной с плоскостью. Написать интегралы движения.

4.15. Окружность радиуса R вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω . Из верхней точки окружности по ее гладкой хорде, составляющей угол φ с осью вращения, движется материальная точка массы m (ее начальная скорость равна нулю). Найти время движения точки.

4.16. Оценить величину сил инерции при движении тела вблизи поверхности Земли в малой области пространства.

4.17. Методом последовательных приближений найти решение уравнения движения тела относительно Земли вблизи поверхности Земли (в качестве нулевого приближения взять решение в отсутствие сил инерции).

4.18. Маятник Фуко находится на географической широте λ . Найти закон движения маятника в декартовых координатах.

4.19. Найти закон движения маятника Фуко в сферических координатах.

4.20. Найти в квадратурах закон движения точки в поле Земли относительно системы отсчета, жестко связанной с Землей (в сферических координатах).

4.21. Оценить влияние Луны на ускорение свободного падения в различных точках земной поверхности.

ГЛАВА 5

Уравнения Лагранжа

§ 1. Уравнения Лагранжа с реакциями связей и законы сохранения энергии и момента импульса при наличии связей

5.1. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найти закон движения точки и реакцию плоскости.

5.2. Точка движется в однородном поле тяжести (рис. 5.2) по гладкой неподвижной параболе, расположенной в вертикальной плоскости (ось параболы горизонтальна). Известно начальное положение точки, а ее начальная скорость равна нулю. На какой высоте точка оторвется от параболы?

5.3. Точка движется по гладкому неподвижному эллипсоиду с полуосями a, b, c под действием силы $\mathbf{F} = -\chi \mathbf{r}$ с центром в центре эллипсоида. Найти реакцию связи как функцию положения и скорости.

5.4. Шарик движется в однородном поле тяжести по гладкой кривой $y = y(x)$, лежащей в вертикальной плоскости. В начальный момент времени $x(0) = a, v(0) = 0$. Через какой промежуток времени τ шарик будет находиться в точке с координатой b ?

5.5. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкому круговому конусу, ось симметрии которого расположена вертикально. Найти траекторию точки и реакцию связи.

5.6. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкому цилиндру радиуса R , ось которого образует угол α с вертикалью. Найти реакцию связи как функцию положения точки (в цилиндрических и декартовых координатах).

5.7. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкой сфере радиуса a . Найти реакцию сферы как функцию координат и скорости.

5.8. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкой сфере радиуса a . Найти закон движения точки в цилиндрических и сферических координатах

5.9. На гладкую неподвижную кривую

$$x = a (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi);$$

$$y = a (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \quad (\varphi > 0)$$

(эвольвента окружности) нанизано небольшое колечко массы m . Вычислить реакцию связи как функцию положения на кривой, считая ось Oy направленной вертикально вверх.

5.10. В однородном поле тяжести по гладкой лемнискате $r^2 = 2a^2 \sin 2\varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) с осью симметрии, составляющей угол $\pi/4$ с вертикалью, скользит точка массы m . В начале координат (рис. 5.10) скорость точки равна нулю. Определить, как изменяется со временем реакция связи.

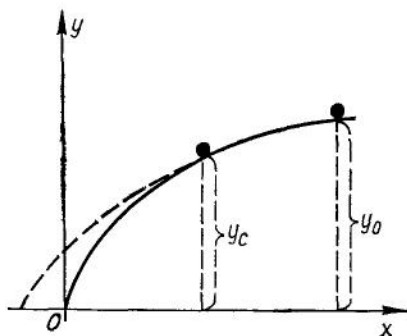


Рис. 5.2

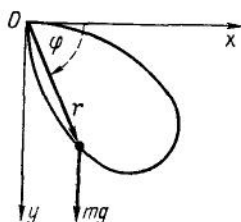


Рис. 5.10

5.11. Точка массы m движется под действием силы тяжести по гладкой циклоиде

$$x = a(\varphi - \sin \varphi);$$

$$y = a(1 - \cos \varphi)$$

с осью y , направленной вверх по вертикали. Найти закон движения точки и реакцию связи как функции параметра φ .

5.12. Шарик массы m движется по гладкой плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг горизонтальной оси. По какому закону меняется со временем реакция связи?

5.13. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкой окружности радиуса a , вращающейся с постоянной угловой скоростью в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, которая проходит через одну из точек окружности. Найти закон движения точки и реакцию окружности.

5.14. Гладкая недеформируемая кривая — лемниската Бернулли $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ — вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг одной из осей симметрии, направленной по вертикали (рис. 5.14). По кривой может двигаться шарик массы m . Найти реакцию связи как функцию положения шарика на кривой.

5.15. Бусинка находится в наинизшей точке вертикально расположенной неподвижной шероховатой окружности радиуса a . Какую минимальную скорость надо сообщить бусинке, чтобы она достигла горизонтального диаметра окружности? Коэффициент трения равен k .

5.16. Двигаясь по горизонтально расположенной шероховатой окружности материальная точка проходит путь l до полной остановки. Какая начальная кинетическая энергия была сообщена точке? Найти реакцию связи как функцию положения точки.

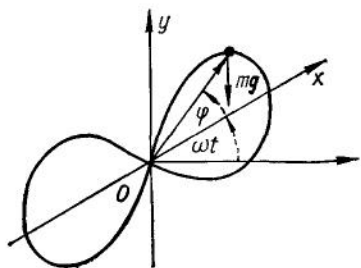


Рис. 5.14

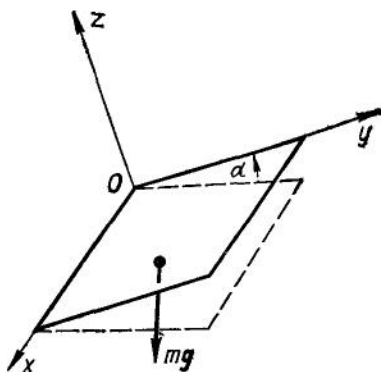


Рис. 5.17

5.17. Материальная точка перемещается по наклонной неподвижной шероховатой плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью (рис. 5.17). Коэффициент трения равен k . Найти закон движения точки и реакцию связи.

5.18. Однородная цепочка длины l перекинута через верхнюю горизонтальную грань неподвижной призмы, сечение которой является трапецией с острыми углами α и β при горизонтальном нижнем основании (рис. 5.18). Каково положение равновесия цепочки на призме с гладкими гранями, если a длина ее верхней грани?

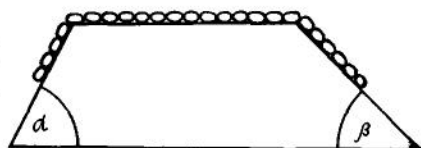


Рис. 5.18

5.19. Материальная точка массы m находится на поверхности гладкого конуса

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 0$$

с вертикальной осью. Точка отталкивается от вершины конуса с силой, пропорциональной расстоянию от вершины конуса с коэффициентом пропорциональности κ . Найти положения равновесия материальной точки.

5.20. Материальные точки с массами $m/2$, m , m попарно взаи-

действуют между собой с силами отталкивания, пропорциональными произведению масс и расстояниям друг от друга. Все три точки находятся на гладкой горизонтальной окружности радиуса a . Найти положения равновесия системы.

5.21 Материальная точка массы m может перемещаться по поверхности гладкого эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c);$$

эллипсоид вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz . Найти положения равновесия материальной точки относительно эллипсоида.

5.22. В гладкой неподвижной полусфере с вертикально расположенной осью симметрии покоится тонкий однородный стержень массы m . Какая часть стержня находится вне полусферы, если радиус сферы r , а длина стержня $l > 2r$?

§ 2. Уравнения Лагранжа в независимых координатах и законы сохранения обобщенного импульса и энергии

5.23. Две точки с массами m_1 и m_2 соединены гладкой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок пренебрежимой массы. Найти функцию Лагранжа и закон движения грузов.

5.24. На одном конце легкой нерастяжимой нити, перекинутой через гладкий блок пренебрежимой массы, укреплен груз массы m_1 . По другому концу нити перемещается обезьяна массы m_2 по закону $\xi(t)$ относительно нити. Найти функцию Лагранжа системы и закон движения обезьяны относительно поверхности Земли.

5.25. Точка массы m может двигаться по гладкой кривой $y = a \sin kx$. Ось x горизонтальна, ось y образует угол α с вертикалью. Найти функцию Лагранжа и интеграл энергии точки.

5.26. Точка массы m , которая может передвигаться по гладкой горизонтальной прямой, соединена пружиной с неподвижной точкой, находящейся на расстоянии h от прямой. Найти функцию Лагранжа, предполагая, что пружина подчинена закону Гука, а жесткость пружины κ и ее длина l_0 в ненапряженном состоянии известны.

5.27. Две точки с массами m_1 и m_2 , соединенные стержнем длины a пренебрежимо малой массы, перемещаются по гладким сторонам неподвижного прямого угла, расположенного в вертикальной плоскости (стороны угла образуют угол $\pi/4$ с горизонтом). Найти лагранжиан системы (рис. 5.27).

5.28. Упругая нить длины $2a$ в ненапряженном состоянии перекинута через два горизонтальных параллельных стержня, располо-

женных на одном уровне на расстоянии a друг от друга. Концы нити прикреплены к шарiku массы m , совершающему колебания по вертикали (рис. 5.28). Найти лагранжиан шарика (нить подчинена закону Гука).

5.29. Шарик массы m прикреплен к нерастяжимой нити, конец которой, в свою очередь, прикреплен к верхней точке неподвижного блока радиуса a (рис. 5.29). Предполагая, что при движении шарика в плоскости, перпендикулярной оси блока, нить остается натянутой, найти функцию Лагранжа и уравнение Лагранжа.

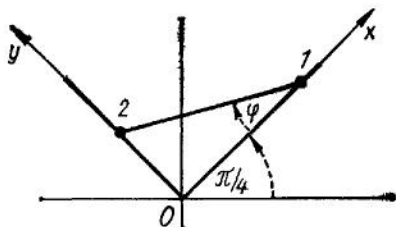


Рис 5.27

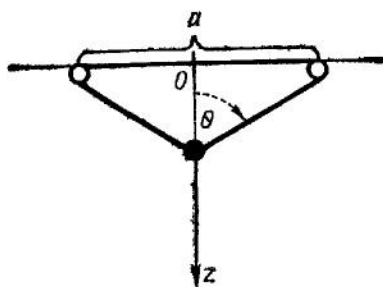


Рис 5.28

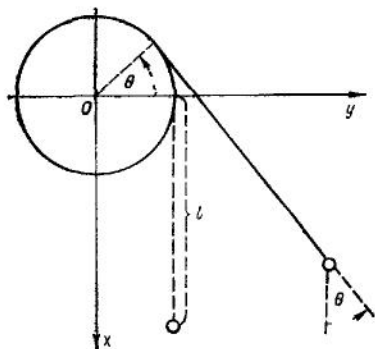


Рис 5.29

5.30 Точка массы m движется по гладкой циклоиде

$$x = a(u - \sin u); \quad y = -a(1 - \cos u)$$

(ось y направлена по вертикали вверх). Найти функцию Лагранжа, первый интеграл и закон движения шарика

5.31. Точка подвеса математического маятника колеблется в вертикальном направлении по закону $s(t)$. Получить лагранжиан и уравнение движения.

5.32. Длина математического маятника, колеблющегося в однородном поле тяжести, изменяется по закону $l(t)$. Найти функцию Лагранжа и уравнение движения маятника.

5.33. Восстановить вид функции Лагранжа по известному закону одномерного движения материальной точки массы m

$$x^2 = \frac{at^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2.$$

5.34. Шарик массы m_1 и m_2 движется в вертикальной плоскости xy так, что первый шарик остается на горизонтальной оси x , а второй — на вертикальной оси y . Шарик связан стержнем длины l пренебрежимо малой массы. Найти лагранжиан и закон движения системы.

5.35. Два шарика, соединенные пружиной, подчиняющейся закону Гука, движутся по гладкой горизонтальной прямой. Найти лагранжиан системы и интегралы движения.

5.36. Найти лагранжиан точки, движущейся по гладкой плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найти первые интегралы движения точки.

5.37. По наклонной плоской поверхности бруска массы m_1 скользит тело массы m_2 (коэффициент трения между телом и поверхностью бруска равен k). Сам брусок может двигаться вдоль гладкой горизонтальной поверхности (рис. 5.37). Найти ускорение бруска.

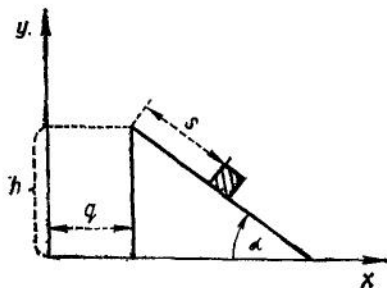


Рис. 5.37

5.38. Точка подвеса математического маятника массы m_2 прикреплена к телу массы m_1 , находящемуся на гладкой горизонтальной прямой. Найти функцию Лагранжа системы, а также интегралы движения.

5.39. Шарик массы m_1 подвешен за нерастяжимую нить длины l_1 . К этому шару прикреплена другая нерастяжимая нить длины l_2 с шариком массы m_2 на конце. Найти лагранжиан системы для случая ее движения в вертикальной плоскости (в этом случае система называется двойным математическим маятником).

5.40. Математический маятник массы m_2 длины l подвешен к телу массы m_1 , прикрепленному к верхнему концу пружины с вертикальной осью. Написать лагранжиан системы, интеграл и уравнения движения.

5.41. Точка движется по гладкой поверхности конуса с углом 2α при вершине; ось конуса расположена вертикально. Найти функцию Лагранжа, первые интегралы и закон движения точки.

5.42. Точка движется по поверхности конуса (см. предыдущую задачу). В начальный момент времени, когда точка находилась на расстоянии r_0 от вершины конуса, ей сообщили скорость v_0 в горизонтальном направлении. Найти границы движения точки.

5.43. В цилиндрических и сферических координатах найти функцию Лагранжа и первые интегралы для сферического маятника, т. е. для точки, движущейся по гладкой сфере радиуса a в однородном поле тяжести.

5.44. Предполагая, что начальные условия в предыдущей задаче заданы в виде $\theta(0) = \theta_0$; $\varphi(0) = 0$; $\dot{\theta}(0) = 0$; $\dot{\varphi}(0) = \varphi_0$, найти границы движения сферического маятника.

5.45. Шарик у сообщают скорость v_0 , горизонтально направленную вдоль касательной к внутренней поверхности гладкой чаши — полусферы радиуса a . Найти такое соотношение начального положения и скорости шарика, при котором шарик в момент достижения края чаши лишь касается его.

5.46. Точка движется в силовом поле, ее потенциальная энергия равна: а) $U = U(x)$, б) $U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$, в) $U = U(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$, г) $U = U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

Написать лагранжиан, уравнения Лагранжа и первые интегралы движения материальной точки.

5.47. Написать функцию Лагранжа для заряда, налетающего на заземленную металлическую сферу радиуса R [10, § 3].

5.48. На гладкой горизонтальной плоскости лежит нерастяжимая с пренебрежимой массой нить, к концам которой прикреплены шарики с массами m_1 и m_2 . Нить образует прямой угол, в вершине которого огибает тонкий гладкий стержень, скрепленный с плоскостью. Первый и второй шарики находятся соответственно на расстояниях l_1 и l_2 от вершины угла. В начальный момент времени первому шарик у сообщили скорость v_0 , перпендикулярную нити. Чему равна скорость второго шарика в момент времени, когда он достигнет стержня? За какое время он достигнет стержня? Найти уравнение траектории первого шарика.

5.49. В горизонтально расположенной плоскости сделано маленькое отверстие, через которое продета нить длины l . На концах нити закреплены точки с массами m_1 и m_2 , причем точка массы m_1 лежит на плоскости. Найти лагранжиан системы и первые интегралы движения.

5.50. Материальные точки одинаковой массы находятся в вершинах ромба, сторонами которого является шарнирно соединенные стержни пренебрежимо малой массы. Точки притягиваются к неподвижному центру с силами, пропорциональными их расстояниям до центра. Полагая, что силовой центр и материальные точки лежат в одной плоскости, определить закон движения системы.

5.51. Написать лагранжиан двух свободных материальных точек, соединенных пружиной (подчиненной закону Гука) и движущихся в однородном поле тяжести.

5.52. Два заряда движутся в однородном электрическом поле. Записать функцию Лагранжа системы.

§ 3. Движение под действием обобщенно-потенциальных сил

5.53. Шарик массы m , перемещающийся по гладкому стержню,

соединен пружиной пренебрежимо малой массы с некоторой точкой этого стержня. Предполагая, что стержень движется с постоянным ускорением a , направленным параллельно его оси, найти закон движения шарика.

5.54. Материальная точка движется по гладкой прямой, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через прямую, и наклонена к ней под углом α . Найти лагранжиан точки и указать интеграл движения.

5.55. Точка движется по гладкой вертикальной плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (ось лежит в рассматриваемой вертикальной плоскости). Написать лагранжиан точки.

5.56. Шарик движется по гладкой окружности радиуса a , вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром окружности. Указать интеграл движения и найти закон движения шарика.

5.57. Материальная точка движется по гладкой окружности радиуса a , которая вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через одну из точек окружности, с постоянной угловой скоростью ω . Найти первые интегралы движения и уравнение Лагранжа для независимой координаты.

5.58. В системе отсчета, жестко связанной с Землей, в сферических координатах найти лагранжиан частицы, которая движется под действием тяготения Земли. Найти закон движения частицы в квадратурах.

5.59. Записать функцию Лагранжа для заряда, движущегося в однородных постоянных магнитном и электрическом полях.

5.60. Заряд движется в однородном магнитном поле. Найти функцию Лагранжа и первые интегралы движения в цилиндрических координатах.

5.61. Найти функцию Лагранжа и первые интегралы для электрона, движущегося в цилиндрическом магнетроне. Так называется прибор, представляющий собой два коаксиальных цилиндра с радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$) и потенциалами Φ_1 и Φ_2 соответственно; цилиндры помещены в магнитное поле; напряженность поля \mathbf{H} параллельна оси цилиндров.

5.62. Найти функцию Лагранжа и уравнение движения заряда в поле магнитного диполя.

5.63. Найти функцию Лагранжа и уравнение движения заряда в поле магнитного монополя.

5.64. Найти уравнения Лагранжа для частицы, которая движется в поле магнитного диполя, вращающегося с угловой скоростью ω [11].

5.65. Электрон движется в переменном неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле, вектор-потенциал которого

$$A_{\varphi} = \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \rho H(\rho, z) d\rho; \quad A_{\rho} = A_z = 0.$$

Какому условию должно удовлетворять поле, чтобы электрон двигался по окружности данного радиуса r_0 ?

5.66. Тонкая магнитная линза образована полем, определенным вектором-потенциалом $A_{\varphi} = \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \rho H(\rho, z) d\rho; A_{\rho} = A_z = 0;$

причем $H(\rho, z)$ отлично от нуля в области $z_1 < z < z_2$. Из точки $(0, 0, z_0 < z_1)$ на линзу падает пучок электронов под малыми углами к оси z . Найти фокусное расстояние линзы.

5.67. Заряд движется в магнитном поле Земли. Вектор-потенциал $\mathbf{A} = \frac{[\mu\mathbf{r}]}{r^2}$, где μ — магнитный момент Земли. Найти границы движения заряда в меридиональной плоскости. Качественно исследовать характер движения заряда в экваториальной плоскости.

5.68. В электротехнике при расчете электрических цепей, содержащих конденсаторы, индуктивности, сопротивления и сторонние э. д. с., весьма удобным является метод Лагранжа. В этом случае в качестве обобщенных координат удобно взять параметры q_i , характеризующие механическую конфигурацию системы, и заряды Q_i . Обобщенные скорости \dot{Q}_i являются токами, текущими в проводниках. Лагранжиан системы складывается из лагранжианов электромагнитного поля, механической системы и взаимодействия полей и токов, т. е. имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}^2) dV + \mathcal{L}_{\text{мех}} + \frac{1}{c} \int \mathbf{A} j dV - \int \varphi \rho dV.$$

Энергия магнитного поля заключена в индуктивностях и равна

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathcal{H}^2 dV = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} \dot{Q}_i \dot{Q}_k; \quad L_{ik} = L_{ik}(q, t),$$

а электрического — в конденсаторах:

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathcal{G}^2 dV = \frac{1}{2} \sum \frac{Q_i^2}{C_i(q, t)}$$

(в этих формулах L_{ik} и C_i — коэффициенты индуктивности и емкости соответственно, а суммирование ведется по всем контурам).

Джоулевы потери учитываются введением диссипативной функции

$$D = \frac{1}{2} \sum R_i(q, t) \dot{Q}_i^2,$$

где R_i — сопротивление i -того контура.

Электродвижущие силы \mathcal{E}_i , действующие в i -том контуре, можно учесть, вычисляя виртуальную работу $\delta A = \sum \mathcal{E}_i \delta Q_i$, где Q_i — полный заряд, протекающий в i -том контуре.

Найти уравнения Лагранжа для системы проводников и закон изменения энергии в случае неподвижных проводников.

5.69. Найти функцию Лагранжа и уравнения движения для цепей, изображенных на рис. 5.69, а) и б).

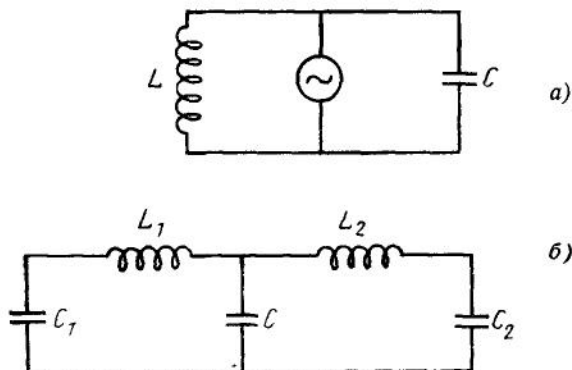


Рис 5 69

5.70. Замкнутая квадратная рамка может вращаться вокруг одной из сторон, расположенной горизонтально. Рамка находится в однородном магнитном поле, силовые линии которого вертикальны. Найти интегралы и закон движения рамки.

5.71. Динамомашинка переменного тока представляет собой совокупность двух контуров: первый (ротор) с заданным током J_1 вращается под действием заданного момента сил, второй (статор) — неподвижный. Найти ток J_2 во втором контуре и угловую скорость вращения ротора в квазистационарном режиме.

§ 1. Собственные одномерные колебания

6.1. Найти частоту колебаний точки массы m , движущейся по абсолютно гладкой горизонтальной прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен на расстоянии h от прямой. Жесткость пружины κ , длина в ненапряженном состоянии l_0 .

6.2. Упругая пренебрежимой массы нить, длина которой в ненапряженном состоянии $l_0 = 2a$, перекинута через два гладких горизонтальных стержня, расположенных на одном уровне на расстоянии a . Оба конца скреплены с шариком массы m . Определить частоту вертикальных колебаний шарика, если в положении равновесия нить образует равносторонний треугольник (см. задачу 5.28).

6.3. Бусинка массы m может двигаться по гладкой параболе $y = \kappa x^2$ с осью y , направленной по вертикали вверх. Определить частоту колебаний бусинки.

6.4. Шарик массы m может двигаться по гладкой параболе $y = \rho x^2$ с осью y , направленной вверх по вертикали. Шарик прикреплен к двум одинаковым пружинам жесткости κ , навитым на параболу и жестко закрепленным другими концами на одинаковых расстояниях от вершины параболы равных a вдоль параболы. Длина каждой пружины в ненапряженном состоянии a . Найти частоту линейных колебаний шарика.

6.5. По гладкой неподвижной окружности радиуса R может перемещаться точка массы m , соединенная с пружиной жесткости κ . Другой конец пружины закреплен в плоскости окружности на расстоянии $a > R$ от ее центра. Длина ненапряженной пружины l_0 . Найти частоту колебаний материальной точки, пренебрегая силой тяжести.

6.6. Точка массы m находится на пересечении прямого вертикально расположенного кругового цилиндра радиуса R и плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 6.6). Найти функцию Лагранжа и частоту линейных колебаний точки вблизи ее положения устойчивого равновесия (связь считается гладкой).

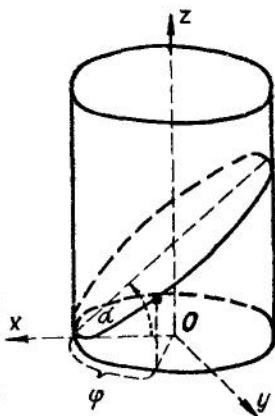


Рис 6.6

6.7. Найти средние за период линейных колебаний значения кинетической и потенциальной энергий точки массы m , которая движется по гладкой линии пересечения горизонтально расположенного цилиндра и плоскости, секущей цилиндр так, что плоскость эллипса, образованного линией пересечения, направлена под углом α к горизонту.

6.8. Точка массы m находится на гладкой кривой $y = a \sin kx$, расположенной так, что ось x горизонтальна, а плоскость Oxy образует с вертикалью угол α . Определить частоту линейных колебаний точки.

6.9. Пусть потенциал взаимодействия двух атомов с массами m_1 и m_2 равен потенциалу Морза

$$U = U_0 e^{-2a(r-r_0)} - 2U_0 e^{-a(r-r_0)},$$

где r — расстояние между атомами, а U_0 , a и r_0 — постоянные. Найти частоту линейных колебаний невращающейся двухатомной молекулы.

6.10. Нить (длины l) математического маятника массы m намотана на горизонтальный неподвижный цилиндр радиуса a (см. задачу 5.29). Найти уравнение движения такого маятника в плоскости поперечного сечения цилиндра. Чему равна частота линейных колебаний маятника?

6.11. На концах гладкой непроводящей трубки длины $2a$ закреплено по заряду Q . Определить частоту колебаний заряда e массы m , движущегося внутри трубки.

6.12. Шарик массы m с зарядом e подвешен на нити длины l . Точка подвеса закреплена на расстоянии $h > l$ от бесконечно протяженной проводящей плоскости. Пренебрегая силой тяжести, найти частоту линейных плоских колебаний заряда.

6.13. Определить частоту колебаний заряда e массы m , который может перемещаться по неподвижному гладкому эллипсу с полуосями a , b ($a > b$). Эллипс расположен между обкладками цилиндрического конденсатора (его внешний и внутренний радиусы равны r_2 и r_1 соответственно). Ось цилиндра перпендикулярна плоскости эллипса и проходит через его центр.

6.14. Электрический заряд совершает линейные колебания с периодом T по неподвижному гладкому эллипсу с полуосями a и b . Эллипс находится в однородном электрическом поле напряженности E , причем большая полуось a параллельна направлению поля. Определить отношение заряда к массе.

6.15. Заряд $e > 0$ массы m может двигаться по гладкому неподвижному эллипсу с полуосями a и b ($a > b$) под действием заряда $Q < 0$, помещенного в центре эллипса. Найти частоту линейных колебаний заряда.

6.16. Точка, имеющая заряд e и массу m , совершает линейные колебания по гладкому неподвижному эллипсу с эксцентриситетом ε и параметром p в поле заряда Q , закрепленного в фокусе эллипса. Найти частоты колебаний заряда для случаев притяжения и отталкивания между зарядами.

6.17. Заряд e массы m может двигаться по гладкому неподвижному эллипсу, в фокусах которого находятся одинаковые заряды $Q > 0$. Найти частоты линейных колебаний заряда.

6.18. Горизонтально расположенный проводящий однородный стержень массы m длины s подвешен за концы на двух одинаковых проводящих пружинах, подчиненных закону Гука. По этому проводнику течет ток силы J_2 . Параллельно ему расположен неподвижный длинный проводник с током J_1 (рис. 6.18). Найти закон движения проводника и частоту его линейных колебаний вблизи положения устойчивого равновесия (действием силы тяжести пренебречь).

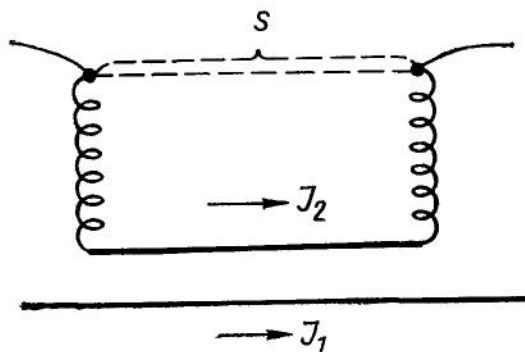


Рис. 6.18

6.19. Точка подвеса математического маятника перемещается с постоянным ускорением a в направлении, перпендикулярном направлению однородного гравитационного поля. Найти среднее за период линейных колебаний значение кинетической энергии маятника.

6.20. Бусинка массы m может двигаться по гладкому обручу радиуса R , который вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг своего вертикального диаметра. Найти частоту линейных колебаний бусинки вблизи положения равновесия.

6.21. Центробежный тахометр в рабочем положении схематично может быть представлен обращенным вершиной вниз равнобедренным треугольником с пружиной жесткости κ вместо основания (рис. 6.21). В точке соединения пружины с одной из двух одинаковых сторон этого треугольника закреплен шарик массы m , а вокруг другой стороны, расположенной вертикально, треугольник вращается. Пренебрегая длиной пружины в ненапряженном состоянии и считая угловую скорость вращения Ω независимой от времени, найти зависимость Ω от угла φ в состоянии динамиче-

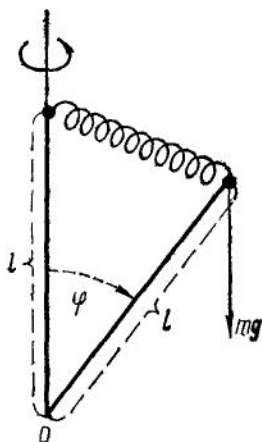


Рис. 6.21

ского равновесия, а также частоту линейных колебаний в окрестности такого состояния.

6.22. Шарик радиуса R массы m подвешен на тонкой нерастяжимой нити длины l в среде с вязкостью η . Предполагая справедливым закон Стокса, рассчитать среднюю мощность диссипативной силы для случая слабо затухающих линейных колебаний шарика в вертикальной плоскости.

6.23. Слабо затухающий осциллятор представляет собой шарик массы m , который колеблется в однородном поле тяжести по циклоиде

$$x = R(\varphi + \sin \varphi); \quad y = R(1 - \cos \varphi)$$

с сопротивлением, пропорциональным скорости (коэффициент пропорциональности k). Как зависит добротность осциллятора от R ? (Добротностью осциллятора называется величина $Q = -\langle E \rangle \omega / \frac{d}{dt} \langle E \rangle$, где среднее вычисляется по периоду $2\pi/\omega$.)

Получите общую формулу для добротности слабо затухающего осциллятора.

6.24. В среде с «линейным» сопротивлением по винтовой линии с горизонтальной осью может двигаться шарик массы m . Найдите общее решение уравнения Лагранжа в случае движения шарика вблизи его положения устойчивого равновесия. Используя это решение, получить закон движения для случаев слабого, критического и сильного затуханий.

§ 2. Собственные и главные колебания системы

6.25. Найдите общее решение, описывающее линейные колебания системы с двумя степенями свободы (потенциальная энергия системы обладает изолированным минимумом).

6.26. На гладкой горизонтально расположенной стержень длины $2l_0$ навиты две одинаковые пружины, концы которых закреплены, а два других конца прикреплены к шарiku массы m (длина каждой пружины в ненапряженном состоянии l_0 , а жесткость κ). К шарiku, в свою очередь, прикреплена нить длины l со вторым шариком массы m на конце. Найдите общее решение и собственные частоты линейных плоских колебаний системы.

6.27. В неподвижной точке закреплена нерастяжимая нить длины l , к которой подвешен шарик массы m . К этому шарiku на такой же нити подвешен второй шарик массы m (рис. 6.27). Найти собственные частоты этой системы и общее решение для ее линейных плоских колебаний в однородном поле тяготения.

6.28. Два шарика с массами m могут скользить по двум гладким полупрямым, образующим угол $\pi/3$. Шарикa связaны между собой, а также с вершиной угла пружинами жесткости κ . Пружина, закрепленные концами в вершине угла, в ненапряженном состоянии имеют длину l_0 , а пружина, соединяющая шарикa — длину l_1 . Найти собственные частоты и закон движения системы в линейном приближении (действием силы тяжести можно пренебречь).

6.29. Точки подвеса двух математических маятников одинаковой массы m и одинаковой длины l находятся на одном уровне на расстоянии l_0 ; материальные точки маятников соединены пружиной жесткости κ длиной l_0 в ненапряженном состоянии. Найти зависимость энергии каждого маятника от времени при условии $\kappa/m \ll g/l$ (g — напряженность поля тяжести).

6.30. В качестве простой модели взаимодействующих атомов с учетом внутренних степеней свободы рассмотрим два линейных осциллятора, колеблющихся в направлении соединяющей их линии. Пусть каждый осциллятор обладает массой m и является диполем, у которого положительный заряд e неподвижен, а отрицательный — e колеблется с частотой ω_0 . Расстояние между положительными зарядами R велико по сравнению с отклонениями осцилляторов от положения равновесия. Найти собственные частоты колебаний системы.

6.31. Предполагая, что инертная масса m отлична от гравитационной массы M , найти частоты линейных колебаний двух одинаковых математических маятников длины l (точки подвеса маятников находятся на расстоянии a).

6.32. Заряд e массы m движется в неоднородном магнитном поле, реализующем «мягкую» фокусировку по окружности радиуса R . Вектор-потенциал поля в цилиндрических координатах имеет вид

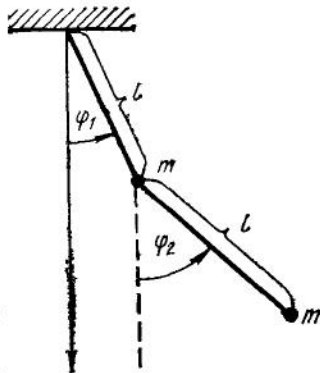


Рис. 6.27

$$A_\rho = A_z = 0; \quad A_\varphi = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho H \rho d\rho - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \rho} + \dots \quad (z \ll R),$$

где $H = H_0(r_0/\rho)^q$, $0 \leq q \leq 1$, H_0 , q и r_0 — постоянные. Найти частоту линейных радиальных и аксиальных колебаний заряда.

6.33. Математический маятник массы m длины l подвешен к телу массы M , которое может перемещаться вдоль прорези в гладкой горизонтальной плоскости. Определить частоты линейных колебаний системы. Каков смысл нулевой частоты?

6.34. Два шарика массы m_1 и m_2 могут двигаться по горизонтальным гладким параллельным стержням, расположенным на расстоянии a друг от друга. Шарики соединены пружиной жесткости κ длиной $l \neq a$ в ненапряженном состоянии. Найти частоту линейных колебаний системы.

6.35. Два одинаковых заряда движутся по гладкой окружности постоянного радиуса R . Найти общее решение в случае линейных колебаний зарядов.

6.36. Два шарика равной массы связаны стержнем длины l и пренебрежимо малой массы. Центр масс этой системы движется по круговой орбите радиуса R вокруг Земли. Найти частоту колебаний описанного маятника в плоскости орбиты ($l \ll R$).

6.37. Найти закон движения электрона в поле

$$U = \frac{e}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) - \frac{e}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)z^2$$

и однородном магнитном поле $\mathbf{H} = Hn_z$.

6.38. Определить частоты продольных и поперечных колебаний линейной трехатомной молекулы (предположить, что силы, действующие на атомы при деформации молекулы, описываются законом Гука).

6.39. Три шарика с массами $m_1 = m$; $m_2 = m/k$; $m_3 = m$ прикреплены последовательно к легкой натянутой струне длины l так, что делят ее на равные части (F_0 — натяжение струны). Одному из шариков массы m сообщается поперечный импульс p_0 . Найти закон движения среднего шарика.

6.40. Пружина длины $3l$ находится под натяжением F_0 между двумя закрепленными точками. Шарик с массой $5m$ и $8m$ прикреплены к пружине так, что делят ее на три равные части. В начальный момент времени шарик с массой $5m$ задается малая поперечная скорость u_0 . Найти закон движения шарика с массой $8m$ [16].

6.41. Определить главные продольные колебания «цепочки» системы N одинаковых материальных точек, движущихся по гладкой горизонтальной прямой и соединенных между собой одинаковыми пружинами, подчиненными закону Гука. Длина каждой пружины равна a , причем $(N+1)a = L$, где L — расстояние между закрепленными концами крайних пружин.

6.42. Определить собственные частоты системы N одинаковых математических маятников длины l и массы m ; точки подвеса

маятников расположены вдоль одной горизонтали на расстоянии a друг от друга (рис. 6.42). Между собой маятники соединены одинаковыми пружинами (длины a в ненапряженном состоянии); крайние маятники соединены такими же пружинами с неподвижными точками, находящимися друг от друга на расстоянии $L = (N+1)a$. Найти собственные частоты системы маятников.

6.43. Получить уравнение колебаний цепочки осцилляторов (см. задачу 6.41) для предельного случая непрерывного распределения массы. Найти дисперсионное уравнение для этого случая.

6.44. Найти уравнение колебаний «цепочки» маятников (см. задачу 6.42) в предельном случае непрерывного распределения маятников.

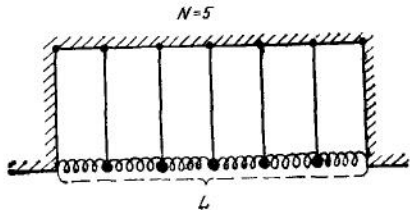


Рис. 6.42

§ 3. Вынужденные колебания

6.45. Определить вынужденные колебания линейного одномерного осциллятора под действием силы $F(t)$, если в начальный момент времени $t=0$ осциллятор находился в состоянии равновесия. Найти также полную переданную осциллятору энергию, если

$$а) F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > \tau, \\ F_0, & 0 < t < \tau, \end{cases}$$

$$б) F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ F_0, & nT < t < nT + \tau; \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \end{cases}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

6.46. Определить энергию, переданную линейному одномерному осциллятору под воздействием силы $F(t) = F_0 e^{-(t/\tau)^2}$. В момент времени $t = -\infty$ осциллятор покоился в положении равновесия.

6.47. На слабо затухающий одномерный осциллятор действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Определить среднее за период $2\pi/\omega$ значение поглощаемой осциллятором мощности в установившемся режиме. Показать, что оно равно среднему значению мощности, расходуемой на трение.

6.48. Найти закон вынужденных колебаний линейного одномерного осциллятора под воздействием силы $F(t)$ при наличии «линейного» сопротивления.

6.49. Два одинаковых маятника соединены пружиной жесткости κ (ее длина в ненапряженном состоянии равна расстоянию между точками подвеса маятников). К одному из них приложена внешняя гармоническая сила, направленная по горизонтали. Исследовать зависимость отношения амплитуд маятников от частоты внешней силы.

6.50. Показать, что интервал частот, на котором поглощаемая осциллятором мощность не меньше половины своего максимального значения, равен 2μ (μ — коэффициент затухания осциллятора).

6.51. Заряд e движется в электрическом поле $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t$. Показать, что наличие сопротивления среды $\mathbf{F}^d = -m\nu\mathbf{v}$ ($\nu \ll \omega$) приводит к поглощению энергии поля зарядом.

6.52. Найти функцию Грина и решение уравнения

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t);$$

здесь λ , ω_0^2 — постоянные величины.

6.53. Определить энергию, переданную электрону атома быстрой пролетающей частицей (в дипольном приближении) [12, с. 475].

6.54. Найти среднее значение мощности, поглощаемой пространственным изотропным осциллятором при взаимодействии с электромагнитной волной.

6.55. Электроны движутся в среде в скрещенных однородном магнитном поле $\mathbf{H} = H\mathbf{n}_z$ и электростатическом поле с потенциалом $\Phi = \frac{U_0}{2R^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$, причем $(e_0 H/mc)^2 > 4e_0 U_0/mR^2$ (U_0 , R — постоянные). Сила сопротивления среды равна $-m\lambda\mathbf{v}$ (m — масса электрона, λ — постоянная). Найти энергию, поглощаемую электронами при взаимодействии с внешней электромагнитной волной в дипольном приближении [13].

6.56. Система линейных одномерных осцилляторов находится в волноводе в среде с линейным сопротивлением и совершает колебания в плоскости, перпендикулярной оси волновода. Напряженность электрического поля волны в волноводе имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{C}(x, y)f(\omega t - kz)$, где ось z направлена по оси волновода. Найти среднее (по времени и начальным фазам осцилляторов) значение мощности, поглощаемой системой при ее слабом взаимодействии с электромагнитной волной.

6.57. Пусть заряженные частицы однородно распределены в пространстве, а их функцией распределения по скоростям является функция Максвелла

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-m\mathbf{v}^2/2\theta}$$

(здесь θ — абсолютная температура, выраженная в единицах энергии).

Найти изменение (для малых интервалов времени) средней кинетической энергии частиц под воздействием электромагнитной волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$ (взаимодействием между частицами можно пренебречь) [14].

6.58. Найти зависимость от времени среднего квадрата радиуса-вектора свободной брауновской частицы [15].

6.59. Найти среднеквадратичное смещение брауновского линейного вибратора с потенциальной энергией $U = \kappa x^2/2$.

§ 1. Собственные колебания и метод Крылова—Боголюбова.

7.1. Найти закон движения математического маятника (при произвольном его отклонении от вертикали).

7.2. Представить период колебаний математического маятника в виде эллиптического интеграла первого рода. Найти зависимость периода малых колебаний маятника и его частоты от амплитуды колебаний.

7.3. Найти закон движения математического маятника в случае малых колебаний методом Крылова—Боголюбова (КБ) [1, 17].

7.4. Найти закон движения математического маятника, находящегося под действием силы тяжести и силы кулонова трения (для малых углов отклонения).

7.5. Математический маятник, движущийся в среде с сопротивлением, один раз за период колебаний возбуждается данным импульсом p_0 при значении угла отклонения φ_0 . Найти условия возникновения стационарного режима линейных колебаний.

7.6. Сначала спутник двигался в поле Земли по круговой орбите. Затем произошло незначительное изменение орбиты, в результате чего спутник стал совершать малые радиальные колебания по отношению к первоначальной орбите. Найти зависимость частоты радиальных колебаний спутника от амплитуды его колебаний.

7.7. Планета массы m движется в поле с потенциальной энергией

$$U(r) = -\frac{\gamma m M}{r} + \delta U(r), \text{ где } \delta U = -\frac{\lambda_1 m}{r^2}; \lambda_1 = \frac{3M^2 \gamma^2}{c^2};$$

при этом $|\delta U| \ll \gamma m M/r$. Найти уравнение орбиты планеты.

§ 2. Колебания системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты

7.8. Длина нити математического маятника изменяется по закону $l = l_0 + vt$. Найти решение уравнений движения в случае когда угол отклонения от вертикали достаточно мал ($\varphi \ll 1$). Исследовать случай $v \ll \sqrt{gl}$.

7.9. Применяя метод Крылова—Боголюбова к системам с медленно меняющимися параметрами, рассмотреть движение математического маятника, длина которого изменяется по закону $l(t) = l_0 + vt$ ($v \ll \sqrt{gl}$).

7.10. Планета массы m движется вокруг звезды массы M по эллипсу с полуосями a и b . Предполагая, что вследствие излучения масса звезды медленно меняется, найти адиабатические инварианты движения планеты.

7.11. Дана система двух тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Предполагая, что гравитационная постоянная $\gamma(t)$ — медленная функция времени, найти адиабатические инварианты движения системы.

7.12. Частица движется в стационарном неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле с напряженностью H_z , возрастающей вдоль оси z . Предполагая, что $R \left| \frac{\partial H_z}{\partial z} \right| \ll |H_z|$ (R — радиус орбиты частицы), найти адиабатический инвариант движения.

7.13. Найти приближенное решение уравнения $\dot{x} + \omega^2(t)x = 0$, где $\omega^2(t) > 0$ при $t < t_0$, $\omega^2(t) < 0$ при $t > t_0$; причем $|\omega|\tau \gg 1$ (τ — время, в течение которого существенно меняется $\omega^2(t)$).

7.14. Пусть движение точки подчинено уравнению $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$, где $\omega^2 > 0$ при $t < t_0$; $\omega^2 = -k^2 < 0$ при $t > t_0$. Найти связь между осциллирующим (при $t < t_0$) и экспоненциальным (при $t > t_0$) решениями уравнения.

§ 3. Методы усреднения

7.15. Применяя метод усреднения [18, 19], получить в первом приближении решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(\omega_1 t, x, \dot{x}),$$

где ε — малый параметр.

7.16. Применяя метод усреднения, найти в первом приближении решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0^2}{3!} \lambda^3.$$

7.17. Используя метод усреднения, найти в первом приближении решение уравнения $\dot{x} + \omega^2(t)x = 0$, где $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \omega_1 t)$, $h = \text{const}$. Рассмотреть случаи $\omega_1 \ll \omega_0$; $\omega_1 \sim 2\omega_0$; $\omega_1 \gg \omega_0$.

7.18. Заряд e движется в электростатическом поле с потенциалом $\Phi = -\frac{x}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$ и однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H} = H\mathbf{n}_z$, на которое наложено переменное поле $\mathbf{H}_\sim = H_1 \cos \omega_1 t \mathbf{h}_z$; $H_1 \ll H$, где $\omega_1 \sim \omega_0 = eH/mc$. Используя метод усреднения, найти закон движения заряда [20].

7.19. Точка движется с периодом $2\pi/\omega_0$ в потенциальном поле $U(q)$. На точку действует также периодическая сила $Q(q, t)$ с частотой $\Omega \gg \omega_0$. Найти уравнение движения точки по «сглаженной» по периоду $2\pi/\Omega$ траектории [21—23].

7.20. Найти уравнение движения по «сглаженной» траектории, предполагая, что точка движется в поле $U(q)$, а также под действием почти-монохроматической силы $Q(q, t) = Q_1(q, t) \cos \omega_1 t$, где $\omega_1 \gg \omega_0$ (ω_0 — частота движения частицы в поле $U(q)$), $\left| \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial t} \right| \ll |Q_1|$.

7.21. Точка подвеса математического маятника совершает вертикальные осцилляции по закону $\xi = \xi_0 \cos \omega t$; $\omega \gg \sqrt{g/l}$. Найти эффективную потенциальную энергию маятника и его положения устойчивого равновесия.

7.22. Точка движется в поле с потенциалом $U(q)$ и под действием силы $Q(q, t) = Q_1(q) \cos \omega_1 t + Q_2(q) \cos \omega_2 t$, где $\omega_1 \sim \omega_2 \gg \omega_0$ (ω_0 — частота движения в поле $U(q)$). Найти уравнение, описывающее движение точки по «плавной» траектории.

7.23. Длина математического маятника изменяется по закону $l(t) = l_0 + vt$; $v \ll \sqrt{gl}$. Получить адиабатический инвариант, используя метод усреднения.

7.24. Частица с зарядом e и массой m движется в статических полях $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$; $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$, на которые наложены неоднородные быстро осциллирующие поля $\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r}, t)$; $\mathbf{H}_\sim(\mathbf{r}, t)$. Найти уравнение движения, описывающее плавную траекторию (частота движения в статическом поле $\Omega \ll \omega_1$ — частоты переменных полей) [24].

7.25. Электрон движется в поле стоячей волны, электрического поле которой $E = E_0 \cos \omega t \cos kz$. Найти среднюю силу, действующую на электрон ($v \ll c$).

7.26. Заряд движется с большой скоростью v_0 под углом к оси системы квадрупольных линз со знакопеременной полярностью. Потенциал линз имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U_0}{2R^2} (x^2 - y^2) f(z),$$

где

$$f(z) = 1 \text{ при } (n-1)L < z < (2n-1)\frac{L}{2};$$

$$f(z) = -1 \text{ при } (2n-1)\frac{L}{2} < z < nL$$

(n — целые числа; U_0, R, L — постоянные).

Найти усредненную по быстрым осцилляциям силу, действующую на частицу.

7.27. Заряд влетает под малым углом к оси системы квадрупольных магнитных линз, повернутых относительно друг друга на 90° . Напряженность поля, создаваемого линзой, равна

$$\mathbf{H} = -H \nabla \varphi \cdot f(z); \quad \varphi = \frac{1}{a} xy,$$

где

$$f(z) = 1 \text{ при } (n-1)L < z < (2n-1)\frac{L}{2};$$

$$f(z) = -1 \text{ при } (2n-1)\frac{L}{2} < z < hL$$

(n — целые числа; H, a, L — постоянные).

Найти усредненную по быстрым осцилляциям силу, действующую на заряд.

7.28. Заряд движется в постоянном однородном магнитном поле и в поле неподвижного заряда Q . Найти уравнение, описывающее движение заряда вдоль силовых линий магнитного поля и усредненное по периоду T вращения в магнитном поле, $T = 2\pi/\omega$ ($\omega = eH/mc$).

7.29. Заряд движется в медленно меняющихся однородных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{H} полях, удовлетворяющих условиям

$$T \left| \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right| \ll |\mathbf{E}|, \quad T \left| \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right| \ll |\mathbf{H}|, \quad T = \frac{2\pi mc}{eH}.$$

Представить радиус-вектор заряда в виде суперпозиции радиуса-вектора, медленно меняющегося со временем (т. е. радиуса-вектора «ведущего центра»), и быстроосциллирующего вектора, описывающего движение заряда вокруг «ведущего центра» в магнитном поле. Найти скорость «ведущего центра».

7.30. Электроны движутся в плоском магнетроне. Плоскость $x=0$ является катодом, плоскость $x=d$ — анодом. Магнитное поле направлено по оси z . Начальная скорость электронов равна ну-

лю. Напряжение на аноде равно U . Показать, что при $d > \sqrt{\frac{2e_0U}{m\omega_0^2}}$ ток отсутствует (e_0, m — величина заряда и масса электрона $\omega_0 = e_0H/mc$). Далее, используя метод усреднения, показать, что высокочастотное поле бегущей волны Φ_{\sim} отпирает магнетрон. Потенциал бегущей волны

$$\Phi_{\sim} = \frac{a}{k_y} \sin(\omega t - k_y y) \operatorname{sh} k_y x,$$

где $k_y = \pi L$ — период структуры вдоль оси y .

7.31. Заряд движется в постоянном неоднородном магнитном поле. Используя метод усреднения, найти скорость ведущего центра траектории заряда и скорость его вращения вокруг силовой линии. Найти адиабатические инварианты движения заряда.

ГЛАВА 8

Динамика твердого тела

§ 1. Тензор инерции

8.1. Найти центр масс материального сектора, вырезанного из однородного тонкого диска радиуса R (угол раствора сектора равен α радиан).

8.2. Показать, что тензор инерции тела аддитивен по отношению к частям, из которых оно состоит.

8.3. Найти моменты инерции однородных линий массы M относительно осей их материальной симметрии; линии имеют форму

а) отрезка прямой длины $2a$;

б) дуги окружности радиуса R , стягивающей центральный угол α радиан.

8.4. Найти главные центральные моменты инерции однородных тонких пластинок массы M , имеющих форму

а) прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$;

б) эллипса с большой полуосью a и малой полуосью b .

8.5. Найти главные центральные моменты инерции однородной пластинки массой m , имеющей форму лемнискаты

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

8.6. Показать, что момент инерции однородной пластинки, имеющей форму эллипса с полуосями a и b , относительно любой оси, проходящей через центр эллипса в его плоскости, может быть выражен формулой

$$J = \frac{1}{4} M (a^2 b^2 / r^2),$$

где $2r$ — длина отрезка оси, отсекаемого эллипсом, а M — масса пластинки.

8.7. Найти главные центральные моменты инерции полой тонкостенной однородной полусферы радиуса a массы m .

8.8. Сферический двуугольник представляет собой область сферической поверхности радиуса a , ограниченную двумя большими окружностями, плоскости которых образуют двугранный угол α . Найти главные моменты инерции однородного тонкого сферического двуугольника массы M относительно осей с началом в центре сферы, из которой образован двуугольник.

8.9. Определить главные центральные моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами длины $2a$, $2b$, $2c$ соответственно и массой M .

8.10. Найти главные центральные моменты инерции однородных объемных тел массы M , имеющих форму

а) прямоугольной пирамиды со сторонами основания $2a$ и $2b$ и высотой h ;

б) прямого круглого конуса с радиусом основания R и высотой h ;

в) шарового сектора радиуса R и высоты h (в последнем случае ограничиться вычислением момента инерции относительно оси материальной симметрии).

8.11. Найти главный центральный момент инерции сплошного однородного полуцилиндра массы m радиуса a (относительно оси, параллельной плоской поверхности полуцилиндра).

8.12. Найти главные центральные моменты инерции однородного полшара a массы m .

8.13. Вычислить главные центральные моменты инерции однородного полого цилиндра массы M (радиус внутренней цилиндрической поверхности равен r , радиус наружной поверхности R , высота цилиндра h); в частности, найти главные центральные моменты инерции однородного сплошного цилиндра.

8.14. Найти главные центральные моменты инерции однородного сплошного эллипсоида массы M с полуосями a , b , c и, как частный случай, моменты однородного шара радиуса R .

8.15. Найти главные центральные моменты инерции однородного прямого эллиптического цилиндра массой M . Высота цилиндра $2h$, полуоси эллиптического основания a , b .

8.16. Определить моменты инерции однородного параболоида вращения высотой h с радиусом a плоской поверхности параболоида — относительно системы координат с началом в некоторой точке O окружности, ограничивающей плоскую поверхность, осью Oy , касательной к этой окружности, и осью Ox , направленной по диаметру окружности (рис. 8.16).

8.17. Найти главные центральные моменты инерции однородного тора массы M , полученного вращением окружности радиуса r относительно оси, лежащей в плоскости окружности и удаленной от ее центра на расстояние $R > r$.

8.18. Вычислить моменты инерции однородной сплошной полусферы массы M радиуса a в системе координат с началом в некоторой точке O окружности основания полусферы, осью Ox , направленной по диаметру основания, и осью Oy , касательной к окружности основания. Определить направления главных осей инерции, проходящих через точку O , и вычислить главные моменты инерции, соответствующие этим осям.

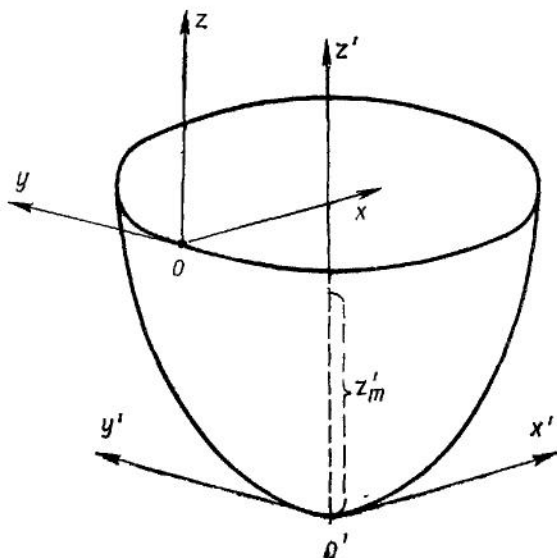


Рис. 8.16

§ 2. Плоскопараллельное движение

8.19. Диск скатывается без скольжения по наклонной плоскости. Найти функцию Лагранжа, закон движения диска и реакцию плоскости (рис. 8.19).

8.20. Концы тонкого стержня массой m длины l скользят по параболе $y=kx^2$ с вертикально расположенной осью y (рис. 8.20). Найти частоты линейных колебаний стержня.

8.21. Однородный полый полуцилиндр (одна из половин цилиндрической поверхности, разрезанной вдоль плоскости, проходящей через ось этой поверхности) массой m радиуса a находится на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и совершает линейные плоскопараллельные колебания (рис. 8.21). Найти период этих колебаний.

8.22. На неподвижный горизонтальный цилиндр радиуса a положен абсолютно шероховатый брусок массы M с прямоугольным поперечным сечением высоты $2b$ так, что продольное направление бруска перпендикулярно оси цилиндра (рис. 8.22). Определить период линейных колебаний бруска, если его главный момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси цилиндра, равен Mk^2 .

8.23. Твердое тело, момент инерции которого относительно некоторой оси равен J , совершает линейные крутильные колебания

вокруг этой оси. Это тело подвешено на нити, которая представляет собой упругий круглый цилиндр длиной l , радиуса R с плотностью массы σ и подчиняется закону Гука. Найти период крутильных колебаний тела с учетом упругости нити.

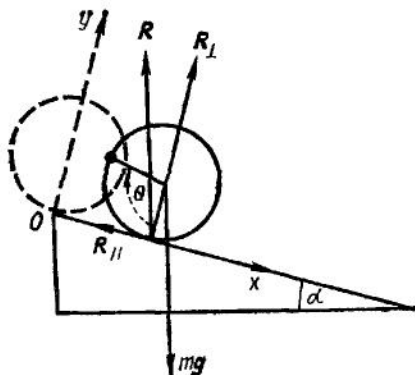


Рис. 8.19

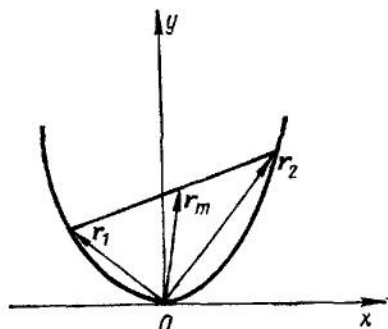


Рис. 8.20

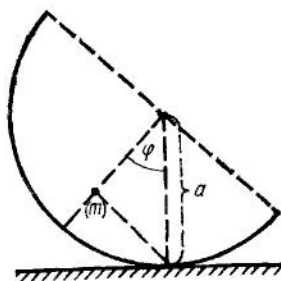


Рис. 8.21

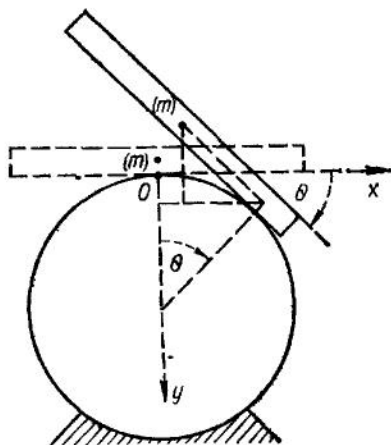


Рис. 8.22

8.24 Ось полого однородного цилиндра радиуса a и массы M служит легкий стержень. В начальный момент цилиндр покоился на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, а математический маятник длины l и массы m , подвешенный к середине оси цилиндра, был отклонен перпендикулярно оси цилиндра на угол α от вертикали. Найти амплитуду колебаний центра масс цилиндра.

8.25. Однородный круговой обруч массы M радиуса a подвешен в одной из своих точек. Обруч совершает свободные колебания в своей плоскости (рис. 8.25). Максимальное значение угла отклонения θ диаметра обруча, проходящего через точку подвеса, от вертикали равно α . Найти наименьшее и наибольшее значения величины реакции точки подвеса.

8.26. Однородный круговой цилиндр массы m радиуса a катится без проскальзывания по внутренней шероховатой поверхности неподвижного полого цилиндра радиуса b (рис. 8.26). Какую минимальную угловую скорость необходимо сообщить первому ци-

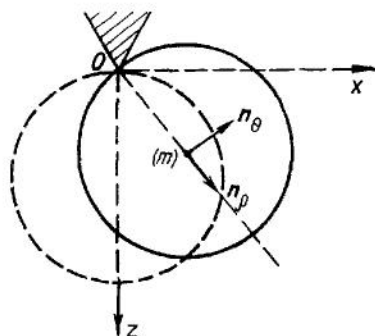


Рис 8.25

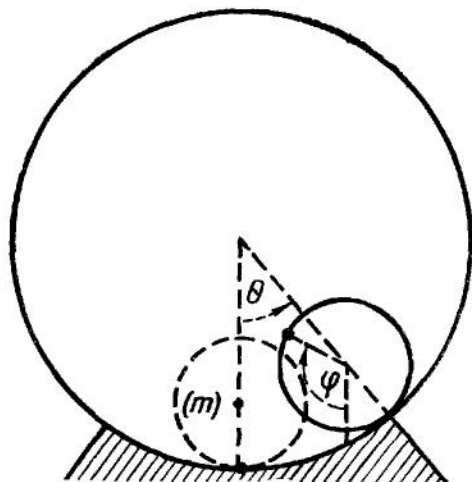


Рис 8.26

линдру в положении равновесия, чтобы он двигался, не отрываясь от внутренней поверхности неподвижного цилиндра.

8.27. Найти общее решение для линейных колебаний двойного маятника, состоящего из двух плоских абсолютно твердых тел: первое тело может вращаться вокруг гладкой горизонтальной неподвижной оси, а второе — вокруг оси скрепленной с первым телом и параллельной неподвижной оси.

8.28. Однородный стержень массой m и длиной $2a$ опирается своим верхним концом на гладкую вертикальную стенку, а нижним — на гладкий горизонтальный пол. Стержень удерживается так, что он составляет угол α с вертикалью и находится в вертикальной плоскости.

Показать, что предоставленный самому себе стержень при падении отделяется от вертикальной стены в тот момент, когда угол его наклона к вертикали θ удовлетворяет условию

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \cos \alpha.$$

8.29. Однородный цилиндр массы M катится с постоянной скоростью центра масс V_0 по горизонтальной абсолютно шероховатой платформе, а затем скатывается по приставленной к платформе наклонной плоскости (скорость V_0 перпендикулярна оси цилиндра и ребру, образованному платформой и плоскостью). Под каким максимальным углом должна быть поставлена плоскость, чтобы при переходе на нее цилиндр не делал скачка?

8.30. Однородная пластинка массы m имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами длиной a . Пластинка вращается по инерции вокруг своего вертикального катета, так что вершина прямого угла служит верхней опорой, а вершина одного из острых углов — нижней. Какова постоянная угловая скорость вращения пластинки, при которой горизонтальная составляющая реакции нижней опоры равна нулю?

8.31. Однородный тяжелый стержень длины $2a$ равномерно вращается без трения вокруг своего верхнего конца, сохраняя постоянный угол α с вертикалью. Определить направление реакции в точке опоры.

8.32. Однородный куб массы a с ребрами длины a может свободно вращаться вокруг вертикального ребра. Вдоль диагонали куба, не пересекающей оси вращения, высверлено тонкое гладкое отверстие. В верхний конец диагонального отверстия вкладывается шарик массы m_2 , после чего система выходит из состояния покоя. Какую угловую скорость приобретает куб после того, как шарик скатится по его диагонали?

8.33. После того, как однородному диску массы m радиуса a сообщили угловую скорость ω_0 , его поставили на шероховатую наклонную плоскость, образующую угол α с горизонталью, при этом диск стал двигаться вверх. Рассмотреть случай, когда диск движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной наклонной поверхности. Коэффициент трения между поверхностями k . Найти а) расстояние, пройденное центром масс диска до того момента, когда он начинает катиться без проскальзывания, и работу сил трения, совершаемую до того же момента; б) максимальное расстояние, пройденное диском вверх по плоскости ($k > \operatorname{tg} \alpha$).

§ 3. Общий случай движения

8.34. Взяв в качестве обобщенных координат твердого тела углы Эйлера φ , θ , ψ , показать, что обобщенные импульсы p_φ , p_θ , p_ψ являются соответственно проекциям кинетического момента тела на ось z , ось узлов и ось z' .

8.35. Однородный стержень массы m длины l одним концом скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Найти лагранжиан стержня и первые интегралы движения.

8.36. Однородный стержень массы m длины l укреплен так, что может вращаться вокруг вертикальной и горизонтальной осей, проходящих через середину стержня. Написать уравнения Лагранжа, найти их решение и частоту колебаний стержня вокруг горизонтальной оси.

8.37. Стержень массы m длины l вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через его

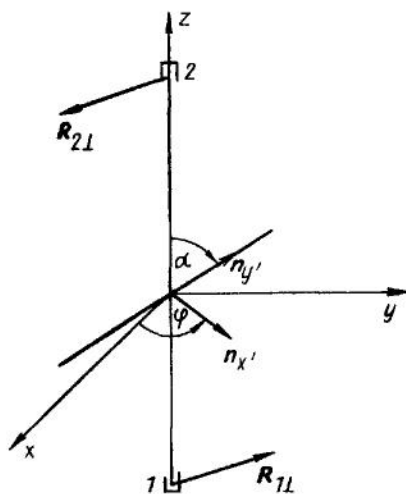


Рис 8.37

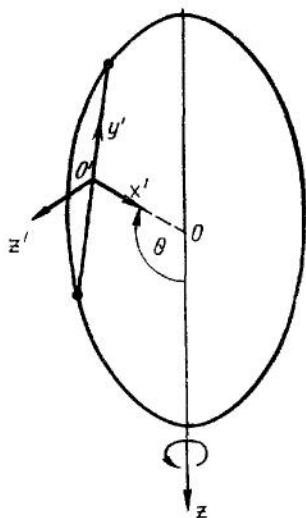


Рис 8.38

середину (рис. 8.37). Расстояния точки пересечения оси и стержня от опор 1 и 2 равны a . Угол α между стержнем и вертикалью остается постоянным. Найти реакцию опор.

8.38. Однородный стержень длины a и массы m при помощи легких колец прикреплен своими концами к гладкой окружности радиуса a и может скользить вдоль нее (рис. 8.38). Окружность вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром окружности. Вычислить скорость центра масс стержня в тот момент, когда он расположен горизонтально (в начальный момент времени стержень покоился относительно окружности в вертикальном положении).

8.39. Вертикальная плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. К оси прикреплен вершиной однородный круговой конус с углом 2α при вершине и образую-

шей длиной l . В начальный момент времени ось конуса занимала горизонтальное положение. Предполагая, что плоскость абсолютно шероховатая, найти границы движения конуса (соприкасающегося с вращающейся плоскостью).

8.40. Один конец оси симметричного волчка закреплен, а другой скользит по гладкой вертикально расположенной окружности с центром в точке закрепления волчка. Эта окружность вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Написать лагранжиан волчка и найти решение уравнений движения в квадратурах.

8.41. Симметричный волчок закреплен в одной точке. Расстояние от точки закрепления до центра масс волчка равно l . Найти решение задачи, исследовать движение быстрого волчка, а также устойчивость волчка при его вращении вокруг вертикальной оси.

8.42. Методом усреднения рассмотреть движение симметричного волчка с закрепленной точкой (кинетическая энергия волчка велика по сравнению с его потенциальной энергией).

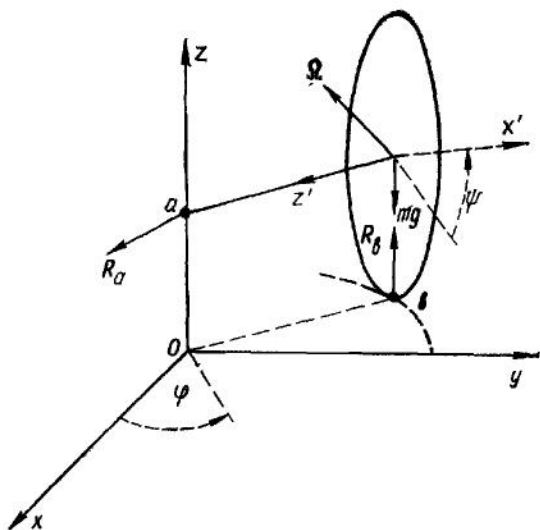


Рис. 8 46

8.43. Шарик движется по шероховатой горизонтальной поверхности, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти угловую скорость вращения шарика и закон движения его центра масс.

8.44. Тонкий однородный диск радиуса a катится по шероховатой поверхности. Найти уравнения движения диска. Исследовать

условия устойчивости при движении диска по прямой линии.

8.45. Обруч радиуса a катится вдоль прямой линии по абсолютно шероховатой горизонтальной поверхности так, что его плоскость остается вертикальной; скорость центра масс обруча равна v . Показать, что при условии $v^2 > 1/4 ga$ движение обруча устойчиво и при небольших возмущениях его плоскость будет колебаться около вертикали с частотой

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{3a}} \sqrt{8v^2 - 2ga}.$$

8.46. Центр однородного тонкого диска массы m радиуса a скреплен с концом оси, перпендикулярной поверхности диска (рис. 8.46). Другой конец оси (длина оси h) шарнирно закреплен на расстоянии a от горизонтальной шероховатой плоскости, по которой диск катится без проскальзывания. Найти реакции связей в точке a шарнирного закрепления оси и в точке b касания диска с плоскостью.

8.47. Центр масс симметричного спутника движется по окружности радиуса r_0 вокруг Земли. Написать уравнения, определяющие положение спутника относительно плоскости орбиты и радиуса-вектора, проведенного из центра Земли в центр масс спутника.

8.48. Исследовать прецессию и нутацию оси симметрии Земли, обусловленную силами притяжения со стороны Солнца.

§ 1. Канонические уравнения. Скобки Пуассона

9.1. Материальная точка движется по гладкой поверхности конусового конуса с вертикальной осью; раствор конуса направлен вверх, угол раствора 2α .

9.2. Найти канонические уравнения материальной точки, движущейся в однородном гравитационном поле по гладкой сферической поверхности (радиус сферы изменяется по закону $r=r(t)$).

9.3. Записать уравнения Гамильтона для заряда в постоянном однородном магнитном поле и электрическом поле с потенциалом φ . Получить интегралы движения в случае $\varphi=0$.

9.4. Рассматривая углы Эйлера в качестве обобщенных координат твердого тела с одной неподвижной точкой, получить функцию Гамильтона для этого тела. Получить динамические уравнения Эйлера из уравнений Гамильтона.

9.5. Найти траекторию одномерного гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

9.6. Показать, что уравнения Гамильтона можно записать в виде

$$\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} \quad (i = 1, \dots, s),$$

симметрично относительно канонических переменных¹.

9.7. Показать, что для функции $f(q, p, t)$ канонических переменных имеют место соотношения

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}; \quad \{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

9.8. Показать, что функция

$$f = x - pt/m$$

является интегралом движения свободной частицы в отсутствие внешних сил.

9.9. Доказать, что скобки Пуассона

$$а) \{M, p^2\} = 0; \quad б) \{M, r^2\} = 0.$$

¹ Здесь и далее для скобки Пуассона от функций f_1 и f_2 канонических переменных используется обозначение $\{f_1, f_2\}$.

9.10 С помощью скобок Пуассона показать, что импульс \mathbf{P} системы является интегралом движения, если ее гамильтониан инвариантен относительно произвольного параллельного переноса системы в пространстве.

9.11. Используя скобки Пуассона, показать, что обобщенный импульс p_i является интегралом движения, если гамильтониан $H(q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s)$ инвариантен относительно преобразования $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$.

9.12. С помощью скобок Пуассона показать, что кинетический момент системы сохраняется, если ее гамильтониан

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N)$$
 инвариантен относительно произвольного бесконечно малого поворота системы.

9.13. Используя скобки Пуассона, показать, что при движении частицы в поле $U(|\mathbf{r}|)$ сохраняется ее момент импульса.

9.14. Пусть гамильтониан системы явно не зависит от времени. Доказать, что значение функции $F(q(t), p(t))$ канонических переменных в момент времени t выражается через значение $F(q(0), p(0))$ в момент времени $t=0$ формулой

$$F(q(t), p(t)) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \{ \dots \{ \{ F H \} H \} \dots \} H \}_{t=0},$$

где $q(t), p(t)$ — удовлетворяют уравнениям движения, а $F(0) = F(q(0), p(0))$. Вычислить с помощью этой формулы $x(t)$ и $p(t)$ для одномерного гармонического осциллятора.

9.15. Одномерный точечный осциллятор взаимодействует с полем излучения, гамильтониан которого

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\nu} (p_{\nu}^2 + \omega_{\nu}^2 q_{\nu}^2).$$

Взаимодействие с этим полем учитывается заменой в гамильтониане невозмущенного полем осциллятора импульса \mathbf{p} на $\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r})$, где вектор-потенциал поля имеет вид $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} q_{\nu} \mathbf{A}_{\nu}(\mathbf{r})$ (\mathbf{A}_{ν} — вектор-потенциал поля излучения ν -той моды). Написать уравнения Гамильтона для системы осциллятор + поле излучения в приближении $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{A}(0)$.

9.16. Гамильтониан молекулы, взаимодействующей с излучением, имеет вид $H = H^{(0)} + H_f + H_m$, где $H^{(0)}$ — гамильтониан, невозмущенный полем молекулы; $H_f = \frac{1}{2} \sum_{\nu} (p_{\nu}^2 + \omega_{\nu}^2 q_{\nu}^2)$ — гамильто-

ниан поля излучения; $H_{in} = \sum B_\nu p_\nu$ — энергия взаимодействия, причем $B_\nu = \sum_s \frac{e_s}{m_s c} (\mathbf{p}_s \mathbf{A}_\nu(\mathbf{r}_s))$ (индексом ν обозначены величины,

относящиеся к определенной моде поля излучения, индексом s обозначены номера атомов). Используя скобки Пуассона, найти изменение энергии k -той моды, обусловленное взаимодействием с молекулой.

§ 2. Уравнение Гамильтона—Якоби

9.17. Найти действие материальной точки, движущейся в отсутствие поля и проходящей через точки $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$.

9.18. Найти действие одномерного гармонического осциллятора, проходящего через точки $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$.

9.19. Найти действие для одномерного осциллятора с переменной частотой $\omega(t)$.

9.20. Найти действие для заряда, движущегося в однородном магнитном поле.

9.21. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для точки движения точки.

9.22. Составить уравнения Гамильтона — Якоби для точки, движущейся в однородном гравитационном поле. Найти полный интеграл этого уравнения, а также траекторию и закон движения точки.

9.23. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для тела, движущегося по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом.

9.24. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для математического маятника и закон его движения в квадратуре.

9.25. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для электрона, движущегося в постоянном однородном магнитном поле (в декартовых координатах). Найти также закон движения электрона и его траекторию.

9.26. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для заряда, движущегося в постоянном однородном магнитном поле (в цилиндрических координатах). Получить закон движения и траекторию в квадратурах.

9.27. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для электрона, движущегося во взаимно-перпендикулярных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях.

9.28. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для заряда, движущегося в поле волны с вектором-потенциалом $\mathbf{A} = a \cos \omega t$. Найти закон движения заряда.

9.29. Однородный стержень массы m скользит по гладкой вер-

тикальной плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (J — главный центральный момент стержня). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для стержня. Определить закон движения стержня.

9.30. Исходя из уравнения Гамильтона — Якоби, получить уравнение, выражающее второй закон Ньютона.

§ 3. Канонические преобразования. Интегральные вариационные принципы

9.31. Найти каноническое преобразование, соответствующее производящей функции $\Phi_1(q, Q, t) = \sum q_i Q_i$.

9.32. Показать, что производящая функция $\Phi_2(q, \mathcal{P}) = \sum q_i \mathcal{P}_i$ определяет тождественное каноническое преобразование.

9.33. Показать, что выражение

$$\sum_{i=1}^s (p_i \delta q_i - \mathcal{P}_i \delta Q_i)$$

является полным дифференциалом относительно $2s$ переменных q, Q , если «старые» и «новые» переменные подчинены каноническому преобразованию

9.34. Найти каноническое преобразование, соответствующее производящей функции $\Phi_2(q_1, \mathcal{P}_1, t) = q_1 \mathcal{P}_1 + (bq - a\mathcal{P})t$, где a, b — константы. Записать в новых переменных уравнения Гамильтона

9.35. Найти каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$\Phi_1 = \frac{m}{2} \omega(t) q^2 \operatorname{ctg} Q.$$

Записать уравнения движения в переменных Q, \mathcal{P} для осциллятора с переменной частотой.

9.36. Известна функция Гамильтона системы с двумя степенями свободы

$$H = \frac{1}{2} [p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + q_2^2].$$

Найти коэффициенты a_1, a_2 производящей функции канонического преобразования

$$\Phi_1 = a_1^2 (q_1 + q_2)^2 \operatorname{ctg} Q_1 + a_2^2 (q_1 - q_2)^2 \operatorname{ctg} Q_2,$$

при котором гамильтониан приобретает вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}_1 + \sqrt{3} \mathcal{P}_2.$$

Найти собственные частоты и главные координаты системы.

9.37. Показать, что гамильтониан является инвариантом при бесконечно малом каноническом преобразовании с производящей функцией

$$S(q, \mathcal{P}) = \sum_i q_i \mathcal{P}_i + \varepsilon f(q, \mathcal{P}),$$

где $\varepsilon \ll 1$, а $f(q, \mathcal{P})$ — интеграл движения.

9.38. Найти уравнение, которому удовлетворяет производящая функция $S(q, \mathcal{P}, t)$, порождающая каноническое преобразование к постоянным импульсам и координатам.

9.39. Найти производящую функцию и каноническое преобразование, обращающее новый гамильтониан \mathcal{H} осциллятора в нуль.

9.40. Получить уравнение Лагранжа для голономных систем из принципа наименьшего действия.

9.41. Вывести уравнения Лагранжа для системы с идеальными линейными неголономными связями из интегрального вариационного принципа.

9.42. Написать принцип Мопертюи для свободного заряда, движущегося в заданном стационарном электромагнитном поле; найти дифференциальное уравнение траектории заряда.

9.43. Найти действие для свободной частицы, движущейся в отсутствие полей с энергией E_0 (траектория частицы проходит через точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2).

9.44. Найти форму плоской траектории $y(x)$, для которой время движения τ между двумя заданными точками в однородном поле тяжести минимально.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

Кинематика и уравнения движения материальной точки

§ 1. Кинематика материальной точки

1.1. Используя параметрическое представление эллипса

$$x = a \cos \xi \quad y = b \sin \xi,$$

находим, что отличная от нуля компонента ускорения равна

$$\ddot{y} = b (\cos \xi \cdot \ddot{\xi} - \sin \xi \cdot \dot{\xi}^2). \quad (1)$$

Далее, поскольку $\ddot{x} = 0$, то $\dot{x} = \dot{x}(0) = v_0$. Из этого условия получим

$$v_0 = -a \sin \xi \cdot \dot{\xi}.$$

Следовательно,

$$\dot{\xi} = -\frac{v_0}{a \sin \xi}; \quad \ddot{\xi} = \frac{v_0}{a} \dot{\xi} \frac{\cos \xi}{\sin^2 \xi} = -\frac{v_0^2}{a^2} \cdot \frac{\cos \xi}{\sin^3 \xi}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), найдем

$$\ddot{y} = -\frac{bv_0^2}{a^2 \sin^3 \xi} = -\frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}.$$

1.2

$$\dot{x} = -\frac{ayv_0}{b \left[\left(\frac{ay}{b} \right)^2 + \left(\frac{bx}{a} \right)^2 \right]^{1/2}}; \quad \dot{y} = \frac{bxv_0}{a \left[\left(\frac{ay}{b} \right)^2 + \left(\frac{bx}{a} \right)^2 \right]^{1/2}},$$
$$\ddot{x} = -\frac{v_0^2 b^2 x}{\left[\left(\frac{ay}{b} \right)^2 + \left(\frac{bx}{a} \right)^2 \right]^2}; \quad \ddot{y} = -\frac{v_0^2 a^2 y}{\left[\left(\frac{ay}{b} \right)^2 + \left(\frac{bx}{a} \right)^2 \right]^2}.$$

1.3. Совместим начало координат с начальным положением точки. Из условия задачи (в полярных координатах)

$$\dot{\psi} = \omega, \quad (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2)^{1/2} = v_0$$

получим

$$\varphi = \omega(t - t_0); \quad \dot{\rho} = (v_0^2 - \rho^2 \omega^2)^{1/2}.$$

Отсюда найдем

$$\int \frac{d\rho}{(v_0^2 - \rho^2 \omega^2)^{1/2}} = t - t_0$$

или

$$\rho = (v_0/\omega) \sin \omega(t - t_0); \quad (0 \leq t - t_0 \leq \pi/\omega).$$

Следовательно,

$$\dot{\rho} = v_0 \cos \omega(t - t_0)$$

и

$$\mathbf{v} = v_0 \cos \omega(t - t_0) \mathbf{n}_\rho + v_0 \sin \omega(t - t_0) \mathbf{n}_\varphi.$$

1.4. Так как угловая скорость постоянна, а $y(0) = 0$, то $x = \rho \cos \omega t$; $y = \rho \sin \omega t$. Подставляя эти функции в уравнение эллипса, найдем

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v} = (\dot{\rho}, \rho\omega) = \left(\frac{ab \omega (b^2 - a^2) \sin 2\omega t}{2(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}, \frac{ab \omega}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2}} \right).$$

1.5. Согласно условию задачи

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \sigma_0; \quad \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = v_0^2.$$

Исключая $\dot{\varphi}$, найдем

$$\dot{\rho}^2 + \left(\frac{2\sigma_0}{\rho} \right)^2 = v_0^2; \quad \int \frac{d\rho}{\sqrt{v_0^2 - \left(\frac{2\sigma_0}{\rho} \right)^2}} = t + c;$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{2\sigma_0}{v_0} \right)^2 + v_0^2 t^2}.$$

Подставляя эту функцию в условие постоянства секторной скорости, получим

$$\dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\left(\frac{2\sigma_0}{v_0} \right)^2 + v_0^2 t^2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v} = (\dot{\rho}, \rho\dot{\varphi}) = \left(\frac{v_0^2 t}{\left[\left(\frac{2\sigma_0}{v_0} \right)^2 + v_0^2 t^2 \right]^{1/2}}, \frac{2\sigma_0}{\left[\left(\frac{2\sigma_0}{v_0} \right)^2 + v_0^2 t^2 \right]^{1/2}} \right).$$

1.6. Используя выражение $\mathbf{r} = \rho \mathbf{n}_\rho$ радиуса-вектора точки, движущейся в плоскости, запишем секторную скорость в виде

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho [\mathbf{n}_\rho \mathbf{v}].$$

Следовательно,

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \rho v \sin \alpha = \sigma_0, \quad (1)$$

где α — угол между скоростью и ортом \mathbf{n}_ρ . Далее, из треугольника, вершинами которого являются точка O' , центр окружности и движущаяся точка, находим

$$a^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \sin \alpha. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$v = \frac{4\sigma_0 R}{\rho^2 + R^2 - a^2}.$$

1.7. Из постоянства секторной скорости относительно системы координат с началом в точке A следует

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \sigma_0. \quad (1)$$

Записывая уравнение окружности в полярных координатах

$$\rho = 2R \cos \varphi, \quad (2)$$

из (1), (2) находим

$$2R^2 \cos^3 \varphi \cdot \dot{\varphi} = \sigma_0. \quad (3)$$

Интегрируя (3), получим

$$\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi = \frac{\sigma_0}{R^2} t.$$

Это соотношение в неявном виде определяет зависимость $\varphi(t)$.

1.8. Запишем скорость в виде

$$\mathbf{v} = (\dot{\rho}, \rho\dot{\varphi}) = (ake^{k\varphi} \dot{\varphi}, ae^{k\varphi} \dot{\varphi}).$$

Из условия постоянства секторной скорости следует уравнение

$$\frac{1}{2} a^2 e^{2k\varphi} \dot{\varphi} = \sigma_0. \quad (1)$$

Его решением, удовлетворяющим заданному начальному условию, является функция

$$e^{k\varphi} = \left(\frac{t}{t_0} + 1 \right)^{1/2}; \quad t_0 = \frac{a^2}{4k\sigma_0}. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2k(t+t_0)}.$$

Итак,

$$\mathbf{v} = \left(\left(\frac{k\sigma_0}{t+t_0} \right)^{1/2}, \left(\frac{\sigma_0}{k(t+t_0)} \right)^{1/2} \right) = (k, 1) \left(\frac{\sigma_0}{kt + \frac{a^2}{4\sigma_0}} \right)^{1/2}.$$

1.9. По условию задачи

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \sigma_0; \quad (1)$$

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{a^2}{\rho^2}. \quad (2)$$

Постоянные σ_0 и a находятся из начальных условий

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 \sin \alpha; \quad a = \rho_0 v_0,$$

где α — угол между скоростью и радиусом-вектором в начальный момент времени. Исключая φ из (1) и (2), получим уравнение

$$\dot{\rho}^2 + \left(\frac{2\sigma}{\rho} \right)^2 = \left(\frac{a}{\rho} \right)^2.$$

Его решение

$$\rho^2 = \rho_0^2 + 2(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2} t. \quad (3)$$

Далее, из (2) и (3) следует

$$\dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\rho_0^2 + 2(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2} t};$$

$$\varphi = \frac{\sigma_0}{(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2}} \ln \frac{\rho_0^2 + 2(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2} t}{\rho_0} + \varphi_0. \quad (4)$$

Исключая время из (3) и (4), найдем траекторию

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\frac{(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2}}{2\sigma_0} (\varphi - \varphi_0) \right].$$

В данном случае ускорение имеет только составляющую по орту \mathbf{n}_ρ , которая определяется формулой Бине:

$$\omega_\rho = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \left[\left(\frac{1}{\rho} \right)'' + \frac{1}{\rho} \right].$$

Следовательно,

$$\omega_\rho = -\frac{a^2}{\rho^3}.$$

1.10. Выберем в качестве оси Ox прямую, проходящую через центры F_1 и F_2 (рис. 1.10). За начало координат возьмем середину отрезка F_1F_2 . Тогда по условию задачи

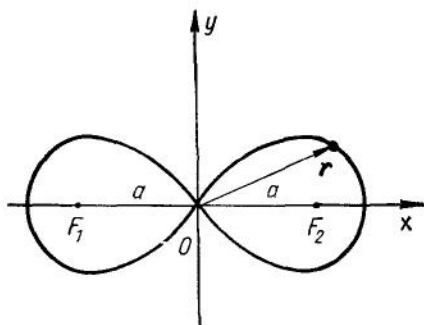


Рис. 1.10

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2,$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Следовательно, траектория точки представляет собой лемнискату Бернулли. В полярных координатах ее уравнение имеет вид

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi. \quad (1)$$

Из условия постоянства проекции секторной скорости $\sigma_z = \sigma_0$ имеем

$$\dot{\varphi} = 2\sigma_0/\rho^2. \quad (2)$$

Для проекции ускорения на радиальное направление согласно формуле Бине и уравнению траектории (1) имеем

$$\omega_\rho = -\frac{48\sigma_0^2 a^4}{\rho^7}.$$

1.11. Согласно условию

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \frac{k}{2} \rho^2; \quad (1)$$

$$\frac{w_{n_\rho}}{|w|} = \cos 45^\circ. \quad (2)$$

Из (1) следует, что $\dot{\varphi} = k$, а из (2) находим $\omega_\rho = w_\varphi$. Следовательно,

$$\ddot{\rho} - 2k\dot{\rho} - k^2\rho = 0.$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\rho = Ce^{\lambda t}$. Получим

$$\lambda^2 - 2\lambda k - k^2 = 0; \lambda_{1,2} = k(1 \pm \sqrt{2});$$

$$\rho = e^{kt} (A \operatorname{sh} k\sqrt{2} t + B \operatorname{ch} k\sqrt{2} t).$$

Используя начальные условия, найдем

$$B = 0; A = \frac{\dot{\rho}_0}{k\sqrt{2}}.$$

Таким образом, получаем закон движения

$$\rho = \frac{\dot{\rho}_0}{k\sqrt{2}} e^{kt} \operatorname{sh} k\sqrt{2} t; \varphi = kt$$

и уравнение траектории

$$\rho = \frac{\dot{\rho}_0}{k\sqrt{2}} e^{\varphi} \operatorname{sh} \sqrt{2} \varphi.$$

$$1.12. x^2 + \left(y - \frac{3v_0}{\pi\omega}\right)^2 = \left(\frac{3v_0}{\pi\omega}\right)^2.$$

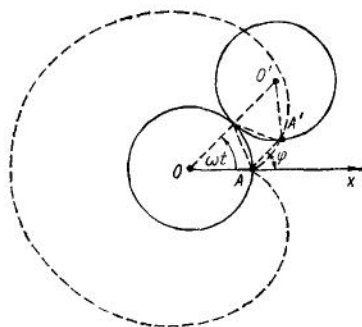


Рис. 1.13

1.13. Выберем начало координат в точке A , а полярную ось направим по прямой, соединяющей центр неподвижной окружности O и точку A . Как нетрудно видеть из рис. 1.13, $\varphi = \omega t$. Определяя расстояние между материальной точкой A' и точкой A , получим уравнение траектории материальной точки:

$$\rho = 2a(1 - \cos \varphi).$$

Эта кривая называется кардиоидой. Приведенные формулы позволяют вычислить компоненты ускорения материальной точки:

$$w_\rho = 2\omega^2(a - \rho);$$

$$w_\varphi = \begin{cases} |\omega_\varphi|, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ -|\omega_\varphi|, & \pi \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$W_\varphi = 4a\omega^2 \sqrt{\frac{\rho}{a} \left(1 - \frac{\rho}{4a}\right)}.$$

1.14. Траекторией точки является гипоциклоида

$$x = R(1 - m) \cos \varphi + mR \cos \left(\frac{1-m}{m} \varphi\right);$$

$$y = R(1 - m) \sin \varphi - mR \sin \left(\frac{1-m}{m} \varphi\right),$$

где $m = a/R$. Точка будет двигаться по отрезку прямой, если $R = 2a$.

1.15. Очевидно, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{v_\theta}{v_\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta \dot{\varphi}} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi}. \quad (1)$$

Интегрируя (1), находим

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \varphi \operatorname{ctg} \alpha + \ln C,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = C e^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (2)$$

Кривая (2) называется локсодромией.

1.16. По определению имеем

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{n}_\tau, \quad \mathbf{w} = \ddot{s} \mathbf{n}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n},$$

где s — длина дуги траектории; \mathbf{n}_τ , \mathbf{n} — соответственно касательный и нормальный к траектории орты; R — радиус кривизны. Поскольку $s = 2R\omega t$, то

$$\mathbf{v} = 2R\omega \mathbf{n}_\tau; \quad \omega_t = 0; \quad \omega_n = 4R\omega^2.$$

1.17. Учитывая, что $\ddot{x} = 0$, получим

$$\ddot{y} = 2k\dot{x}^2 = a$$

и, следовательно,

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{a}{2k}}; \quad \dot{y} = 2kx\dot{x} = at;$$

$$\dot{s} = v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{a}{2k}} (1 + 2kat^2)^{1/2}.$$

Затем находим радиус кривизны

$$R = \frac{\dot{s}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \frac{1}{2k} (1 + 2kat^2)^{3/2}.$$

Итак,

$$\omega_\tau = \ddot{s} = t \left(\frac{2ka^3}{1 + 2kat^2} \right)^{1/2};$$

$$\omega_n = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{a}{(1 + 2kat^2)^{1/2}}.$$

1.18. Согласно условию в естественных координатах имеем

$$\ddot{s} = a; \quad (1)$$

$$\dot{s}^2/R = b. \quad (2)$$

Из (1) найдем

$$\ddot{s} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \dot{s} = \frac{dv}{ds} v = a,$$

или

$$\dot{s}^2 = \dot{s}_0^2 + 2a(s - s_0).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (2) и учитывая определение радиуса кривизны

$$R = \frac{ds}{d\alpha}$$

(здесь α — угол между касательной к траектории и положительным направлением оси x), находим

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{b} [\dot{s}_0^2 + 2a(s - s_0)].$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$2a(s - s_0) + \dot{s}_0^2 = A e^{\frac{2a}{b}\alpha},$$

где постоянная интегрирования $A = \dot{s}_0^2 e^{-\frac{2a}{b}\alpha_0}$. Так как

$$dx = \cos \alpha \cdot ds = \frac{A}{b} e^{\frac{2a}{b}\alpha} \cos \alpha d\alpha;$$

$$dy = \sin \alpha \cdot ds = \frac{A}{b} e^{\frac{2a}{b}\alpha} \sin \alpha d\alpha,$$

то

$$x = \frac{A}{b} e^{\frac{2a}{b}\alpha} \frac{\left(\frac{2a}{b} \cos \alpha + \sin \alpha\right)}{\left(\frac{2a}{b}\right)^2 + 1}; \quad (3)$$

$$y = \frac{A}{b} e^{\frac{2a}{b}\alpha} \frac{\left(\frac{2a}{b} \sin \alpha - \cos \alpha\right)}{\left(\frac{2a}{b}\right)^2 + 1}. \quad (4)$$

В обеих квадратурах постоянные интегрирования приравнены нулю (тем самым в плоскости движения выбрана определенная система декартовых координат).

Теперь положим

$$\operatorname{tg} \psi \equiv \frac{2a}{b}.$$

Тогда (3) и (4) можно записать в виде

$$x = \frac{\dot{s}_0^2 e^{\frac{2a}{b}(\alpha - \alpha_0)}}{b \sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^2 + 1}} \sin(\alpha + \psi); \quad (5)$$

$$y = -\frac{\dot{s}_0^2 e^{\frac{2a}{b}(\alpha - \alpha_0)}}{b \sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^2 + 1}} \cos(\alpha + \psi). \quad (6)$$

Из (5), (6) следует, что

$$\rho = \frac{\dot{s}_0^2}{b \sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^2 + 1}} e^{\frac{2a}{b}(\alpha - \alpha_0)}; \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} = -\operatorname{ctg}(\alpha + \psi). \quad (8)$$

Таким образом, в выбранной системе координат полярный угол φ отличается от α на постоянный угол, т. е.

$$\varphi = \alpha + \psi \pm \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Итак, переобозначая постоянный множитель в (7) и используя (9), найдем, что точка движется по логарифмической спирали

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{2a}{b}(\varphi - \varphi_0)}.$$

1.19. Пусть точка 1 движется от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль оси Ox . При этом скорость точки 2 меняет свое направление на противоположное, так что в некоторый момент времени ($t=0$) скорость v_2 оказывается перпендикулярной оси Ox . Координаты точки 2 в этот момент можно положить равными $x=0$; $y=y_0$.

Координата x точки 2 и координата x_1 точки 1 связаны условием

$$x = x_1 + y \frac{dx}{dy} = v_1 t + y \frac{dx}{dy}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по времени, получим

$$\dot{x} = v_1 + \dot{y} \left(\frac{dx}{dy} + y \frac{d^2x}{dy^2} \right).$$

Так как скорость v_2 постоянна, то производные \dot{x} и \dot{y} можно исключить из предыдущего выражения с помощью формул

$$\frac{ds}{dt} = -\dot{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} = v_2;$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{dy}{dx} \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} = v_2$$

(здесь перед радикалом взят знак минус, поскольку с возрастанием длины дуги ордината y убывает). В результате найдем, что

$$\frac{1}{y} = \frac{v_2}{v_1} \frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}}.$$

Умножая обе части этого уравнения на dy и интегрируя по y в пределах от y_0 до y , а по dx/dy в пределах от нуля до dx/dy , получим

$$\frac{v_1}{v_2} (\ln y - \ln y_0) = \ln \left\{ \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \right\},$$

т. е.

$$\left(\frac{y}{y_0} \right)^{\frac{v_1}{v_2}} = \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}.$$

Отсюда находим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{\frac{v_1}{v_2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{-\frac{v_1}{v_2}}.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального положения точки 2, найдем ее траекторию при $v_1 \neq v_2$:

$$x = \frac{y_0 \frac{v_1}{v_2}}{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}} + \frac{y_0}{2 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 + \frac{v_1}{v_2}} - \frac{y_0}{2 \left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 - \frac{v_1}{v_2}}$$

и при $v_1 = v_2$:

$$x = \frac{y_0}{4} \left(\frac{y^2}{y_0^2} - 2 \ln \frac{y}{y_0} - 1 \right)$$

Точка 2 «догонит» дочку 1, если ее скорость $v_2 > v_1$. Это произойдет в точке оси Ox

$$x = \frac{y_0 \frac{v_1}{v_2}}{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}}$$

1.20. Выберем ось Ox декартовых координат вдоль траектории точки S . Если φ — угол наклона скорости точки K к оси Ox , а x, y — ее координаты, то

$$y = a \sin \varphi; \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi,$$

где a — постоянное расстояние между K и S . Интегрируя дифференциальное уравнение

$$dx = a \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi,$$

находим параметрическое уравнение траектории точки K :

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right); \quad (1)$$

$$y = a \sin \varphi \quad (2)$$

(постоянная интегрирования, определяющая положение траектории относительно оси координат, выбрана равной нулю). Полученная кривая называется трактрисой.

Поскольку от нуля отлична лишь нормальная составляющая ускорения точки K , находим, что

$$\dot{s}^2 = \dot{s}_0^2 = a^2 \dot{\varphi}^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\sin \varphi = \exp \left\{ -\frac{s_0}{a} (t - t_0) \right\}. \quad (3)$$

Отсюда

$$\dot{\varphi} = \frac{s_0}{a} \frac{\exp \left\{ -\frac{\dot{s}_0}{a} (t - t_0) \right\}}{\sqrt{1 - \exp \left\{ -\frac{2\dot{s}_0}{a} (t - t_0) \right\}}}. \quad (4)$$

Формулы (1), (2), (3) определяют закон движения точки K . Закон движения точки S также определяется этими формулами, поскольку между координатами обеих точек имеется связь.

$$x_s = x + a \cos \varphi; \quad y_s = 0.$$

Отличная от нуля нормальная составляющая ускорения точки K равна

$$\omega_n = \frac{v^2}{R} = s_0^2 \frac{d\varphi}{ds} = \dot{s}_0 \varphi.$$

Подставляя сюда φ из (4), находим ускорение, как функцию времени

§ 2. Уравнения движения материальной точки

1 26. Представляя уравнение движения в виде

$$\ddot{x} - k \sin \frac{x}{a} = 0,$$

умножим обе его части на \dot{x} и проинтегрируем полученное выражение. Тогда с учетом начальных условий получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + ka \cos \frac{x}{a} = ka,$$

т. е.

$$x = 2\sqrt{ka} \operatorname{sn} \frac{x}{2a}.$$

Отсюда находим

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sn} \frac{x}{2a}} = 2\sqrt{ka} t + C; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{4a} = e^{\sqrt{\frac{k}{a}} t}.$$

1.27. Решением уравнения движения $m\ddot{x} = a\delta(t - t_0)$ является функция

$$\dot{x} = \frac{a}{m} \int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt = \frac{a}{m} \theta(t - t_0),$$

где разрывная функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Эту функцию можно записать в виде $\theta(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|x|}{x} \right)$.

1.28. Выберем ось z перпендикулярно проводящей плоскости. На заряд действует сила электростатического притяжения, равная $-e^2/(2z)^2$. Поэтому

$$m\ddot{z} = -\frac{e^2}{4z^2}. \quad (1)$$

Умножая обе части (1) на z и интегрируя, получим

$$\frac{mz^2}{2} - \frac{e^2}{4z} = -\frac{e^2}{4h}.$$

Отсюда найдем время падения T :

$$T = \frac{\sqrt{2m}}{e} \int_h^0 \frac{dz}{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{h}\right)^{1/2}} = \frac{\pi h}{e} \sqrt{\frac{mh}{2}}.$$

1.29. Сначала найдем закон движения снаряда:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha;$$

$$y(t) = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Он позволяет определить время полета t_1 и дальность L , так как в момент падения $y(t_1) = 0$; $L = x(t_1)$, т. е.

$$0 = h + v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{gt_1^2}{2};$$

$$L = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left[v_0 \sin \alpha + \left(v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh \right)^{1/2} \right].$$

Вычисляя производную $\partial L/\partial \alpha$ и приравнявая ее нулю, получим

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2}\right)}}.$$

1.30. Если ось z направить по нормали к плоскости, то уравнение шарика можно представить в виде

$$\ddot{z} \mp \frac{k}{m} z^2 + g = 0,$$

где знак «минус» соответствует движению вниз. Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{k}{m} z^2 \mp g = C e^{\pm \frac{2k}{m} z}.$$

Выразим постоянную интегрирования C через начальные значения координаты и скорости шарика. Тогда вместо последней формулы будем иметь

$$\dot{z}^2 \mp \frac{mg}{k} = \left(\dot{z}_0^2 \mp \frac{mg}{k} \right) e^{\pm \frac{2k}{m} (z-z_0)}. \quad (1)$$

Полагая в этой формуле $\dot{z}_0=0$; $z_0=h$; $z=0$ (для движения вниз), найдем квадрат скорости перед падением:

$$\dot{z}_1^2 = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2k}{m} h}\right),$$

а следовательно, и начальную скорость шарика при его движении вверх.

Полагая в (1) $z_0=0$; $\dot{z}_0^2=\dot{z}_1^2$; $\dot{z}=0$ (для движения вверх), найдем высоту z_2 подъема шарика:

$$z_2 = \frac{m}{2k} \ln \left(2 - e^{-\frac{2k}{m} h}\right).$$

1.31. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{r} = mg - kuv. \quad (1)$$

Направим ось z по вертикали вверх. Тогда из (1) и начальных условий следует, что $x=y=0$, а движение подчинено уравнению

$$m\ddot{z} = -mg + kz^2. \quad (2)$$

Вводя обозначения $z = v$; $u^2 = mg/k$, представим (2) в форме

$$\dot{v} = -g \left(1 - \frac{v^2}{u^2} \right). \quad (3)$$

Интегрируя (3), получим

$$v(t) = -u \operatorname{th} \frac{gt}{u}. \quad (4)$$

Из таблиц $\operatorname{th} x$ следует, что при $\frac{gt}{u} \approx 2$ $\operatorname{th} \frac{gt}{u} \approx 1$. Поэтому начиная с $t \approx 2u/g$, движение происходит практически с постоянной скоростью u .

Переходя в (2) к переменной z

$$\frac{dv}{dz} v = -g \left(1 - \frac{v^2}{u^2} \right)$$

и интегрируя это уравнение, находим зависимость скорости от высоты

$$v(z) = -u \left[1 - \exp \left[-\frac{2g}{u^2} (H - z) \right] \right]^{1/2}.$$

Интегрируя (4), получим высоту как функцию времени:

$$z(t) = H - \frac{u^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{u}.$$

1.32. В системе координат (рис. 1.32) с началом в источнике, осью y , направленной по вертикали вверх, и осью x , лежащей в заданной плоскости, закон движения каждой частицы определяется функциями

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot t; \\ y &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned}$$

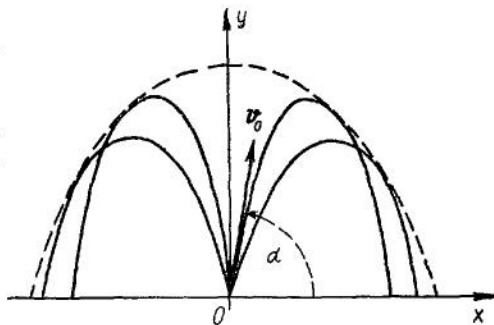


Рис. 1.32

где α — угол между начальной скоростью и осью x .

Следовательно, уравнение траектории частицы имеет вид

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1)$$

Точки, лежащие на огибающей $y_1(x)$, принадлежат траекториям и удовлетворяют условию

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad (2)$$

откуда следует, что $\operatorname{tg} \alpha = v_0^2/gx$. Затем из (1) и (2) получим уравнение огибающей

$$y_1(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (3)$$

Таким образом, область, недостижимой для рассматриваемого пучка частиц, является область, лежащая вне «параболы безопасности» (3).

1.33. Пусть \mathbf{k} — орт, направленный по вертикали вверх. Тогда уравнение движения любой из частиц имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{k} - m\kappa\dot{\mathbf{r}}.$$

Это уравнение можно переписать в форме

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}e^{\kappa t}) = -ge^{\kappa t}\mathbf{k},$$

откуда

$$\dot{\mathbf{r}}e^{\kappa t} = -\frac{g}{\kappa}e^{\kappa t}\mathbf{k} + \mathbf{v}_0 + \frac{g}{\kappa}\mathbf{k},$$

где \mathbf{v}_0 — начальная скорость некоторой частицы. Так как при $t=0$ $\mathbf{r}=0$ (начало координат помещено в «испускающую» точку), то

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{v}_0}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t}) - \frac{gt}{\kappa}\mathbf{k} + \frac{g}{\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t})\mathbf{k}.$$

Это закон движения произвольно выбранной частицы.

Из равенства

$$\left| \mathbf{r} + \left[\frac{gt}{\kappa} - \frac{g}{\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t}) \right] \mathbf{k} \right| = \frac{v_0}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t})$$

следует, что в момент времени t все частицы независимо от направления начальной скорости окажутся на расстоянии

$$\frac{v_0}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t})$$

от точки, лежащей на расстоянии

$$\frac{gt}{\kappa} - \frac{g}{\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t})$$

от начала координат вниз по вертикали.

1.34. Уравнениями движения в координатах x , y , z являются

$$\ddot{x} = \frac{eE_0}{m} \sin \frac{z}{a}; \quad \ddot{y} = 0; \quad \ddot{z} = 0.$$

Следовательно,

$$y = 0; \quad z = v_0 t; \quad \ddot{x} = \frac{eE_0}{m} \sin \frac{v_0 t}{a}.$$

Отсюда

$$\dot{x} = -\frac{eE_0 a}{m v_0} \left(\cos \frac{v_0 t}{a} - 1 \right);$$

$$x = -\frac{eE_0 a}{m v_0} \left(\frac{a}{v_0} \sin \frac{v_0 t}{a} - t \right).$$

1.35. Проинтегрировав уравнение движения протона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_1 \cos \omega t + e\mathbf{E}_2 \sin \omega t,$$

получим

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}_1}{m\omega^2} \cos \omega t - \frac{e\mathbf{E}_2}{m\omega^2} \sin \omega t + \mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — постоянные интегрирования. Направляя ось x декартовых координат вдоль вектора \mathbf{E}_1 , а ось y — вдоль \mathbf{E}_2 , найдем

$$x = \frac{eE_1}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \dot{x}_0 t + x_0;$$

$$y = \frac{eE_2}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t) + \dot{y}_0 t + y_0;$$

$$z = \dot{z}_0 t + z_0.$$

Отсюда видно, что траектория протона будет циклоидой, лежащей в плоскости $z=z_0$, если $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ и $E_1 = E_2$.

1.36. Запишем уравнение движения электрона в координатах:

$$\ddot{x} = -\omega \cos ay \cdot \dot{y}; \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \omega \cos ay \cdot \dot{x}; \quad (2)$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (3)$$

где $\omega = \frac{|e|H_0}{mc}$.

Из (3) с учетом начальных условий следует, что $z=0$, а из (1) находим

$$\dot{x} = -\frac{\omega}{a} \sin ay. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим уравнение

$$\ddot{y} = -\frac{\omega^2}{2a} \sin 2ay. \quad (5)$$

Умножая обе части (5) на y и интегрируя, найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\omega^2}{4a^2} \cos 2ay.$$

Следовательно,

$$\dot{y}^2 = \frac{\omega^2}{2a^2} \cos 2ay + C_1; \quad C_1 = \dot{y}_0^2 - \frac{\omega^2}{2a^2},$$

т. е.

$$\dot{y}^2 = \dot{y}_0^2 - \frac{\omega^2}{a^2} \sin^2 ay. \quad (6)$$

Кстати, уравнение (6) следует непосредственно из закона сохранения кинетической энергии

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{y}_0^2$$

и (4). Далее, из (6) находим

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - \left(\frac{\omega}{a} \sin ay \right)^2}} = t. \quad (7)$$

Соотношение (7) дает зависимость $y(t)$ в квадратуре. Используя ее, из (4) можно найти $x(t)$, а из (4) с помощью (7) — уравнение траектории в виде

$$\cos ay = \frac{y_0 a}{\omega} \operatorname{sh} ax + \operatorname{ch} ax.$$

137. Направим ось x вдоль напряженности \mathbf{E} электрического поля, а ось z — вдоль напряженности \mathbf{H} магнитного поля. Тогда уравнения движения примут вид

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} + \frac{e}{m} E; \quad (1a)$$

$$\ddot{y} = -\omega \dot{x}; \quad (1b)$$

$$\dot{z} = 0, \quad (1c)$$

где $\omega = eH/mc$.

Учитывая начальные условия $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, из (1с) находим

$$z = \dot{z}_0 t + z_0. \quad (2)$$

Интегрирование (1а) и (1б) удобно провести, вводя комплексную координату $\xi = x + iy$. Умножая (1б) на i и складывая результат умножения почленно с (1а), получим

$$\ddot{\xi} = -i\omega\dot{\xi} + \frac{e}{m} E \quad (3)$$

с начальными условиями $\xi(0) = x_0 + iy_0$, $\dot{\xi}(0) = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0$. Интегрируя (3), найдем

$$\dot{\xi}(t) = C_1 e^{-i\omega t} - \frac{ieE}{m\omega}, \quad (4)$$

где

$$C_1 = \dot{\xi}(0) + \frac{ieE}{m\omega}.$$

Итак,

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}(0) e^{-i\omega t} + \frac{ieE}{m\omega} (e^{-i\omega t} - 1). \quad (5)$$

Поскольку $x = \operatorname{Re} \dot{\xi}$, $\dot{y} = \operatorname{Im} \dot{\xi}$, из (5) следует

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos \omega t + \dot{y}_0 \sin \omega t + \frac{eE}{m\omega} \sin \omega t; \quad (6)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 \cos \omega t - \dot{x}_0 \sin \omega t + \frac{eE}{m\omega} (\cos \omega t - 1).$$

Из (6) видно, что заряд имеет постоянную составляющую скорости в направлении $[\mathbf{EH}]$, равную по величине $eE/m\omega = cE/H$.

1.38 Уравнение движения заряда

$$m\mathbf{v} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]$$

после замены

$$\mathbf{v} = c \frac{[\mathbf{EH}]}{H^2} + \mathbf{v}'$$

преобразуется в уравнение

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e \frac{\mathbf{H}}{H^2} (\mathbf{EH}) + \frac{e}{c} [\mathbf{v}'H].$$

Далее, подстановка

$$\mathbf{v}' = e \frac{\mathbf{H}}{mH^2} (\mathbf{EH}) t + \mathbf{v}''$$

дает

$$m\dot{\mathbf{v}}^n = \frac{e}{c} [\mathbf{v}^n \mathbf{H}].$$

Следовательно, скорость заряда может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2} + \frac{e\mathbf{H}}{mH^2} (\mathbf{E}\mathbf{H})t + \mathbf{v}^n.$$

Здесь первый член правой части равен скорости дрейфа электрона в направлении, перпендикулярном к плоскости, проходящей через векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , а второй член характеризует ускоренное движение вдоль магнитного поля.

1.39.

$$v_{\max}^2 = 4c^2 \frac{e^2 E^2 + g^2 m^2}{e^2 H^2}.$$

1.40. 1) Из уравнения движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \gamma\mathbf{v} \quad (1)$$

получим уравнения в координатах

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega\dot{y} - (\gamma/m)\dot{x}; \\ \ddot{y} &= -\omega\dot{x} - (\gamma/m)\dot{y}; \\ \ddot{z} &= -(\gamma/m)\dot{z}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}; \quad (2)$$

$$u(t) = \dot{x} + i\dot{y} = u(0) e^{-i\omega t - \frac{\gamma}{m}t}, \quad (3)$$

где $u(0) = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0$.

Из (2) и (3) находим

$$v^2(t) = |u(t)|^2 + \dot{z}^2 = (|u(0)|^2 + \dot{z}_0^2) e^{-\frac{2\gamma}{m}t} = v_0^2 e^{-\frac{2\gamma}{m}t}.$$

$$\text{Итак, } T = T_0 e^{-\frac{2\gamma}{m} t}; \quad T_0 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

2) Умножим обе части (1) скалярно на \mathbf{v} . Тогда получим, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = -\gamma v^2,$$

$$\text{т. е. } T = T_0 e^{-\frac{2\gamma}{m} t}.$$

1.41. Поместим начало отсчета системы координат в место вылета электронов из электронной пушки, а ось z направим по оси трубки вдоль вектора \mathbf{H} . Тогда уравнения движения примут вид

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y}; \quad \ddot{y} = \omega \dot{x}; \quad \ddot{z} = 0 \quad (\omega = |e|H/mc), \quad (1)$$

а начальными условиями будут $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$; $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha$; $\dot{z}(0) = u$ (α — угол между проекцией скорости на плоскость Oxy и осью Ox). Интегрируя (1), находим

$$x = \frac{v_0}{\omega} [\sin(\alpha + \omega t) - \sin \alpha];$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} [\cos \alpha - \cos(\alpha + \omega t)]; \quad z = ut.$$

Пусть t_1 — время пролета электронов до экрана ($t_1 = L/u$). Электроны, вылетающие под разными углами α , фокусируются в разных местах трубки, так как

$$x(t_1) = \frac{v_0}{\omega} [\sin(\alpha + \omega t_1) - \sin \alpha];$$

$$y(t_1) = \frac{v_0}{\omega} [\cos \alpha - \cos(\omega t_1 + \alpha)].$$

Однако если выполняется условие

$$\omega t_1 = \frac{\omega L}{u} = 2\pi n$$

(n — целые числа), то все электроны фокусируются в одной точке $x=y=0$; $z=L$.

Итак, длина трубки должна удовлетворять требованию

$$L = 2\pi c \frac{mu}{|e|H} n.$$

1.42 Выберем оси координат так, что $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$; $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Тогда уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} - \omega \dot{y} + \lambda \dot{x} = \frac{eE}{m}; \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \omega \dot{x} + \lambda \dot{y} = 0; \quad \ddot{z} + \lambda \dot{z} = 0, \quad (2)$$

где $\omega = eH/mc$, $\lambda = k/m$.

Вводя $u = \dot{x} + i\dot{y}$, из (1), (2) находим

$$\dot{u} + \lambda u + i\omega u = \frac{eE}{m}.$$

Следовательно,

$$u = ae^{-i\omega t - \lambda t} + \frac{eE}{m(\lambda + i\omega)}; \quad a = Ae^{-i\alpha}.$$

Искомая скорость

$$\dot{x} = \text{Re } u = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{eE\lambda}{m(\lambda^2 + \omega^2)}.$$

При усреднении по периоду $T = 2\pi/\omega$ экспоненциальный множитель можно вынести за знак усреднения, так как $\lambda \ll \omega$. Поэтому

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{eE\lambda}{m(\lambda^2 + \omega^2)} = \frac{eEk^2}{c^2k^2 + e^2H^2}.$$

1.43. Поскольку $|H_-| \ll H_0$, то уравнения движения имеют вид ($e = -e_0$)

$$\ddot{x} = -\frac{e_0}{m} E_0 \cos(\omega t - kz) - \dot{y}\omega; \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{e_0}{m} E_0 \sin(\omega t - kz) + \dot{x}\omega; \quad (2)$$

$$\ddot{z} = 0.$$

Из последнего уравнения следует $z = z_0$. Вводя комплексную скорость $u = \dot{x} + i\dot{y}$, из (1), (2)

$$\dot{u} = -ae^{i(\omega t - \alpha)} + i\omega u; \quad a = \frac{e_0 E_0}{m}; \quad \alpha = kz_0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $u = Ae^{i\omega t}$. Тогда из (3) получим

$$\dot{A} = -ae^{-i\alpha}; \quad A = C - ate^{-i\alpha}; \quad C = 0.$$

Следовательно, $u(t) = -ate^{i(\omega t - \alpha)}$. Таким образом, $v^2 = |u|^2 + \dot{z}^2 = a^2 t^2$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{(e_0 E_0 t)^2}{m}.$$

1.44. При изменении магнитного поля возникает электрическое поле, которое определяется уравнением Максвелла

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} d\mathbf{S},$$

откуда

$$E_{\varphi} = -\frac{\rho}{2c} \frac{d}{dt} \frac{H_0}{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} = \frac{H_0}{c\tau^2} \frac{\rho t}{\left[1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right]^2}.$$

Следовательно, имеют место уравнения движения заряда в декартовых координатах:

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c} y\dot{H} + \frac{1}{2c} ey\dot{H};$$

$$m\ddot{y} = -\frac{e}{c} x\dot{H} - \frac{1}{2c} ex\dot{H}; \quad m\ddot{z} = 0.$$

Вводя переменную $\xi = \dot{x} + iy$, получим

$$\ddot{\xi} = -i\omega \xi \dot{f} - i\xi \frac{\omega}{f} \dot{f},$$

где $\omega = \frac{eH_0}{mc}$; $f = \frac{1}{1 + (t/\tau)^2}$.

Замена функции

$$\xi = w \exp\left\{-\frac{i\omega}{2} \int f dt\right\}$$

приводит к уравнению

$$\ddot{w} + \left(\frac{\omega f}{2}\right)^2 w = 0.$$

Переходя к переменным

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{t}{\tau}; \quad w = \frac{v}{\sin \theta},$$

найдем, что

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + \mu^2 v = 0; \quad \mu^2 = \left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2 + 1.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v = a_1 e^{i\mu\theta + i\alpha_1} + a_2 e^{-i\mu\theta - i\alpha_2}.$$

Таким образом,

$$\xi = \frac{1}{f} \left[a_1 e^{i(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1})\theta + i\left(\alpha_1 - \frac{\omega\tau\pi}{4}\right)} + a_2 e^{-i(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1})\theta - i\left(\alpha_2 + \frac{\omega\tau\pi}{4}\right)} \right],$$

а

$$x = \operatorname{Re} \xi, \quad y = \operatorname{Im} \xi.$$

1.45. Имеем уравнение движения тела

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \gamma(t)\dot{\mathbf{r}} + k(t)\mathbf{r} = 0.$$

Предположим, что существует такое преобразование времени $\tau = \tau(t)$, которое приводит к уравнению

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} + \gamma_0 \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} + k_0 \mathbf{r} = 0$$

с постоянными γ_0 и k_0 .

Переходя к новой независимой переменной τ в первом уравнении и сравнивая результат со вторым уравнением, найдем, что функции $\gamma(t)$ и $k(t)$ должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{m}{\left| \frac{k(t)}{k_0} \right|} \cdot \frac{d}{dt} \sqrt{\left| \frac{k(t)}{k_0} \right|} + \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\left| \frac{k(t)}{k_0} \right|}} = \gamma_0.$$

а преобразование времени определяется интегралом

$$\tau = \int \sqrt{\left| \frac{k(t)}{k_0} \right|} dt.$$

1.46. В качестве ортов выбираем орт

$$\mathbf{n}_\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

направленный по касательной к траектории (s — длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории), орт \mathbf{n} , нормальный к траектории и направленный к центру кривизны:

$$\mathbf{n} = R \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} = R \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2},$$

где $R = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|^{-1}$ — радиус кривизны, и орт

$$\mathbf{n}_b = [\mathbf{n}_\tau \mathbf{n}].$$

Найдем скорость и ускорение:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \dot{s} = \dot{s} \mathbf{n}_\tau;$$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{s}\mathbf{n}_\tau + \dot{s}\dot{\mathbf{n}}_\tau = \ddot{s}\mathbf{n}_\tau + \dot{s}^2 \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} = \ddot{s}\mathbf{n}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}.$$

Следовательно,

$$m\ddot{s} = F_\tau; \quad m \frac{\dot{s}^2}{R} = F_n; \quad 0 = F_b.$$

1.47. 1) Рассмотрим уравнение

$$m\ddot{x} = F(t) \quad (1)$$

с начальными условиями $x(t_0) = 0$; $\dot{x}(t_0) = 0$. Обозначим через L оператор, преобразующий функцию $F(t)$ в решение уравнения

$$x(t) = LF(t). \quad (2)$$

В силу линейности уравнения (1) оператор L обладает свойством суперпозиции

$$L(F_1 + F_2) = LF_1 + LF_2 \quad (3)$$

и свойством

$$L(CF) = CL(F), \quad (4)$$

где C — постоянная.

Будем понимать под функцией Грина $G(t, t')$ результат воздействия единичной силы, действующей в момент времени t' . Тогда

$$G(t, t') = L\delta(t - t'). \quad (5)$$

Как с помощью функции Грина $G(t, t')$ выразить результат преобразования (2) любой заданной функции $F(t)$? Для этого представим $F(t)$ в виде

$$F(t) = \int_{t_0}^{\infty} F(t') \delta(t - t') dt'.$$

Следовательно,

$$x(t) = L \int_{t_0}^{\infty} F(t') \delta(t - t') dt'.$$

Согласно свойствам (3), (4) и определению (5)

$$x = \int_{t_0}^{\infty} LF(t') \delta(t - t') dt' = \int_{t_0}^{\infty} F(t') L\delta(t - t') dt' = \int_{t_0}^{\infty} G(t, t') F(t') dt'. \quad (6)$$

Функция Грина (5) удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{G} = \delta(t - t'), \quad (7)$$

а начальные условия имеют вид

$$G(t = t' - \varepsilon, t') = 0; \dot{G}(t = t' - \varepsilon, t') = 0. \quad (8)$$

Интегрируя (7) и учитывая (8), находим

$$m(\dot{G}_{t'+\varepsilon} - \dot{G}_{t'-\varepsilon}) = 1; \dot{G}_{t'+\varepsilon} = 1/m, \quad (9)$$

т. е. при $t=t'$ имеем конечный разрыв. Поэтому сама функция G при $t=t'$ разрывов не имеет:

$$G_{t'-\varepsilon} = G_{t'+\varepsilon} = 0. \quad (10)$$

При $t < t'$ решением уравнения (7), удовлетворяющим начальным условиям (8), является $G(t, t') = 0$. При $t > t'$ уравнение (7), т. е. $\ddot{G} = 0$, имеет решение

$$G(t, t') = At + B.$$

Из начальных условий (9), (10) находим

$$A = \frac{1}{m}; B = -At' = -\frac{t'}{m}.$$

Следовательно,

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & t_0 < t < t'; \\ \frac{1}{m}(t - t'), & t' < t < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом,

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, t') F(t') dt' = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') (t - t') dt'; \quad (12)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt'. \quad (13)$$

Формула (12) может быть также получена двукратным интегрированием уравнения (1)

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \right) dt_1.$$

Действительно, меняя порядок интегрирования, найдем

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t d\tau \int_{\tau}^t F(\tau) dt_1 = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(\tau) (t - \tau) d\tau.$$

Воспользовавшись (13), решение (12) можно представить в форме

$$x(t) = tv(t) - \frac{1}{m} \int_{t_0}^t t' F(t') dt'. \quad (14)$$

В том случае, когда сила действует в течение конечного промежутка времени, (14) удобно переписать в виде

$$x(t) = v(t)(t - \theta);$$

$$\theta = \frac{1}{m} \left[\int_{t_0}^t t' F(t') dt' \right] \left[\int_{t_0}^t F(t') dt' \right]^{-1}.$$

2) Для более компактного вычисления функции Грина используем метод Фурье-преобразований. Поскольку (7) является неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами, представим $G(t, t')$ в виде

$$G(t, t') = \int G_{\omega} e^{i\omega(t-t')} d\omega. \quad (15)$$

Учитывая, что

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega,$$

из (7) и (15) найдем $-m\omega^2 G_{\omega} = \frac{1}{2\pi}$, т. е.

$$G(t, t') = -\frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{\omega^2}.$$

Это выражение не определено пока не задано правило обхода полюсов. Учитывая, что при $t-t' > 0$ $\text{Im}\omega > 0$, а величина $\text{Re}i\omega(t-t') < 0$, находим, что в случае $t-t' > 0$ контур интегрирования надо замкнуть в верхней полуплоскости переменной ω . Это обстоятельство можно учесть, заменяя в (15) $\omega \rightarrow \omega - i\varepsilon$ (ε — малая положительная величина, которую после вычисления интеграла надо положить равной нулю). Итак,

$$G(t-t') = -\frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{(\omega - i\varepsilon)^2}. \quad (16)$$

Замыкая контур интегрирования при $t-t' > 0$ в верхней полуплоскости ω , а при $t-t' < 0$ в нижней полуплоскости, из (16) получим результат (11).

ГЛАВА 2

Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии

§ 1. Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии материальной точки

2.1. Движение происходит под действием центральной силы отталкивания

$$\mathbf{F} = mk^2 \mathbf{r}.$$

При этом сохраняется момент импульса (или секторная скорость σ)

$$\mathbf{M} = 2m \sigma = kab \mathbf{n}_z,$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор вдоль оси z . Также сохраняется энергия материальной точки:

$$E = \frac{mk^2}{2} (b^2 - a^2).$$

2.2. Используя выражение для силы

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

а также закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}] = 0,$$

$m[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \mathbf{M}_0$. найдем, что

Умножая обе части этого уравнения скалярно на \mathbf{r} , получим

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{r} = 0,$$

т. е. уравнение плоскости, проходящей через центр силы.

2.3. Сила, действующая на тело, имеет вид

$$\mathbf{F} = f(r) \mathbf{r} - \gamma \mathbf{v}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}] = -\gamma [\mathbf{r}\mathbf{v}] = -\frac{\gamma}{m} \mathbf{M}.$$

Отсюда

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 e^{-\frac{\gamma}{m} t}. \quad (1)$$

Умножая обе части (1) скалярно на \mathbf{r} , находим уравнение

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{r} = 0$$

плоскости, проходящей через центр силы.

2.4. Потенциальная энергия заряда

$$U = -\frac{e^2}{4y} - \frac{e^2}{4x} + \frac{e^2}{4\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(начало координат помещено на ребре двугранного угла, а оси x и y направлены по его граням перпендикулярно ребру).

Используя закон сохранения полной энергии заряда

$$\frac{e^2}{4r_0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right) = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4x} - \frac{e^2}{4y} - \frac{e^2}{4\sqrt{x^2 + y^2}},$$

найдем

$$v^2 = \frac{2e^2}{m} \left[\frac{1}{r_0\sqrt{2}} - \frac{2}{r_0} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right].$$

2.5. Исходим из первых интегралов движения

$$\dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0; \quad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} + U_0 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a} = E_0. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U_0 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a} = E_1 = E_0 - \frac{m}{2} (\dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2).$$

Следовательно,

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E_1 - U_0 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a} \right)}}.$$

Вычисляя интеграл (заменой $\sin x/a = u$), получим

$$x = a \arcsin \left[\sqrt{\frac{E_1}{E_1 + U_0}} \sin \sqrt{\frac{2(E_1 + U_0)}{m}} \frac{t}{a} \right]. \quad (3)$$

Из (3) следует, что движение точки периодически с периодом

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E_1 - U_0 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a} \right)}} = 2\pi a \sqrt{\frac{m}{2(E_1 + U_0)}};$$

здесь $x_{1,2}$ — корни уравнения $E_1 - U_0 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a} = 0$ (положение точек поворота).

2.6. Предположим, что начальная скорость точки лежит в плоскости xz . Используя интегралы движения

$$m\dot{x} = mv_0 \cos \alpha; \quad \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + U(z) = \frac{mv_0^2}{2},$$

найдем уравнение траектории в виде

$$x = \int_0^z \frac{v_0 \cos \alpha dz}{[v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g(z-h)\theta(z-h)]^{1/2}}. \quad (1)$$

В наивысшей точке траектории $dz/dx = 0$, поэтому координата вершины траектории

$$z_1 = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2)$$

Вычисляя интеграл (1), находим уравнение восходящей части траектории

$$x = \begin{cases} z \operatorname{ctg} \alpha & (z < h); \\ h \operatorname{ctg} \alpha + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} - \sqrt{\frac{2}{g}} v_0 \cos \alpha \sqrt{z_1 - z} & (z > h). \end{cases}$$

Следовательно, дальность

$$l = 2x(z_1) = 2h \operatorname{ctg} \alpha + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (3)$$

Теперь найдем максимальную дальность. Производя в (3) замену $u = \operatorname{ctg} \alpha$, получим

$$l = 2hu + \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{u}{1+u^2}.$$

Затем, вычисляя $\partial l / \partial u = 0$, найдем, что l_{\max} достигается при

$$\operatorname{ctg} \alpha = k - 1 \mp \sqrt{k^2 - 4k}; \quad k = \frac{v_0^2}{2gh}.$$

При $h=0$, $k=\infty$, $\operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$. При $k > 4$, т. е. при $v_0^2 > 8gh$, имеются две экстремальные точки.

Значения углов α , при которых материальная точка достигнет заданной дальности $l_1 < l_{\max}$, определяются уравнением

$$2u^3 - \frac{l_1}{h} u^2 + 2u(1 + 2k) - \frac{l_1}{h} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что существуют три значения угла α , при которых $l=l_1$.

Рассмотренная задача является механической аналогией задачи о траектории луча в ионосфере в том случае, когда зависимость концентрации электронов имеет вид $n(z) \sim (z-h)\Theta(z-h)$.

2.7. Пусть $y=0$ — плоскость катода, а $y=d$ — плоскость анода. Магнитное поле направим вдоль оси z Используя закон сохранения энергии (заряд электрона $e = -e_0 < 0$)

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{e_0 U}{d} y = 0$$

и интегралы уравнений $\ddot{x} = -\omega \dot{y}$; $\ddot{z} = 0$, $(\omega = \frac{e_0 H}{mc})$, т. е. интегралы движения

$$\dot{x} = -\omega y; \quad \dot{z} = 0,$$

находим

$$\frac{m}{2} (\omega^2 y^2 + \dot{y}^2) - \frac{e_0 U}{d} y = 0.$$

По условию $\dot{y}(y=d) = 0$, следовательно,

$$\frac{m}{2} \omega^2 d^2 = e_0 U.$$

Отсюда заключаем, что ток в магнетроне отсутствует, если

$$H \geq H_1 = \frac{1}{d} \left(\frac{2mc^2 U}{e_0} \right)^{1/2}.$$

2.8. Воспользуемся законом сохранения энергии

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega^2 a^2 \quad (1)$$

и интегралом уравнения

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} \cos y/a,$$

т. е.

$$\dot{x} = \omega a \sin y/a. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$\dot{y}^2 = \omega^2 a^2 \cos^2 y/a. \quad (3)$$

Далее из (3) находим, что

$$\omega t = \int_0^y \frac{dy}{a \cos y/a} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin y/a}{1 - \sin y/a}}; \quad (4)$$

$$\sin y/a = \operatorname{th} \omega t.$$

Наконец, из (2) и (4) получим

$$\dot{x} = \omega a \operatorname{th} \omega t, \quad x = a \ln \operatorname{ch} \omega t.$$

2.9. Запишем уравнение движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e_0 \mathbf{E} - \frac{e_0}{c} [\mathbf{vH}]$$

в декартовых координатах:

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + \Omega \dot{y} = 0; \quad (1)$$

$$\ddot{y} - \omega_0^2 y - \Omega \dot{x} = 0; \quad (2)$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0^2 = e_0 U_0 / mR^2$; $\Omega = e_0 H_0 / mc$.

Из (3) находим $z(t) = 0$, а из (1) и (2), вводя комплексную координату $\xi = x + iy$, с учетом начальных условий получим

$$\ddot{\xi} - \omega_0^2 \xi - i \Omega \dot{\xi} = 0; \quad \xi(0) = ae^{i\alpha}; \quad \dot{\xi}(0) = 0.$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде $\xi = Ce^{i\omega t}$. Следовательно, $\omega^2 + \omega_0^2 - \omega\Omega = 0$; т. е.

$$\omega_{1,2} = \frac{\Omega}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\omega_0}{\Omega} \right)^2} \right).$$

Таким образом,

$$\xi = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t}.$$

Отсюда, используя начальные условия, найдем

$$C_1 = -\frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} ae^{i\alpha}; \quad C_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} ae^{i\alpha}.$$

Итак,

$$\xi = \frac{ae^{i\alpha}}{\omega_1 - \omega_2} (-\omega_2 e^{i\omega_1 t} + \omega_1 e^{i\omega_2 t});$$

$$x = \operatorname{Re} \xi = \frac{a}{\omega_1 - \omega_2} [-\omega_2 \cos(\omega_1 t + \alpha) + \omega_1 \cos(\omega_2 t + \alpha)];$$

$$y = \operatorname{Im} \xi = \frac{a}{\omega_1 - \omega_2} [-\omega_2 \sin(\omega_1 t + \alpha) + \omega_1 \sin(\omega_2 t + \alpha)].$$

2.10. Запишем уравнения движения электрона в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{e_0}{c} \dot{y} H_0 + \frac{2e_0 U_0}{d^2} x; \\ m\ddot{y} &= \frac{e_0}{c} \dot{x} H_0; \\ m\ddot{z} &= -\frac{2e_0 U_0}{d^2} z. \end{aligned} \quad (1)$$

Перепишем эти уравнения, вводя обозначения для частот $\omega_0 = e_0 H/mc$; $\Omega_s^2 = 2e_0 U_0/md^2$:

$$\ddot{x} + \omega_0 \dot{y} - \Omega_s^2 x = 0; \quad (2)$$

$$\ddot{y} - \omega_0 \dot{x} = 0; \quad (3)$$

$$\ddot{z} + \Omega_s^2 z = 0. \quad (4)$$

Из (4) сразу следует, что

$$z = z_0 \cos \Omega_s t + \frac{\dot{z}_0}{\Omega_s} \sin \Omega_s t. \quad (5)$$

Затем, интегрируя (3), получим

$$\dot{y} - \omega_0 x = -C, \quad (6)$$

а из (2) и (6) найдем

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \omega_0 C \quad (\Omega^2 = \omega_0^2 - \Omega_s^2).$$

Подставляя решение этого уравнения

$$x = \frac{\omega_0 C}{\Omega^2} + a \sin(\Omega t + \alpha) \quad (7)$$

в (6) и полагая $C = v_1 \frac{\Omega^2}{\Omega_s^2}$, получим

$$y = b + v_1 t - \frac{a \omega_0}{\Omega} \cos(\Omega t + \alpha) \quad (8)$$

(здесь b , v_1 , a , α — произвольные постоянные).

Далее, используя начальные условия, найдем, что скорость дрейфа электрона вдоль оси y равна

$$v_1 = (x_0 \omega_0 - \dot{y}_0) \left(\frac{\Omega_s}{\Omega} \right)^2$$

и может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Кроме того, получим выражения, определяющие амплитуду и фазу:

$$a^2 = \frac{\dot{x}_0^2}{\Omega^2} + \frac{(\dot{y}_0 - v_1)^2}{\omega_0^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}_0}{a \Omega}; \quad \sin \alpha = \frac{\dot{y}_0 - v_1}{\omega_0 a}.$$

Из (7) и (8) следует, что проекция траектории на плоскость xu образует эллипс, перемещающийся в направлении оси y со скоростью v_1

$$\left(x - \frac{v_1 \omega_0}{\Omega_s^2} \right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 (y - b - v_1 t)^2 = a^2.$$

2.11. Запишем уравнения движения заряда в декартовых координатах

$$\ddot{x} = -\omega \frac{\dot{y}}{\operatorname{ch}^2 ay}; \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \omega \frac{\dot{x}}{\operatorname{ch}^2 ay},$$

где $\omega = e_0 H_0 / mc$. Из (1) находим, что

$$x = \frac{P_{x0}}{m} - \frac{\omega}{a} \operatorname{th} ay, \quad (2)$$

где P_{x0}/m — постоянная интегрирования.

Используя закон сохранения кинетической энергии и (2), получим

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = T_0 = \frac{m \dot{y}_0^2}{2};$$

$$\frac{m}{2} \dot{y}^2 = T_0 - U_{\text{eff}}; \quad U_{\text{eff}} = \frac{1}{2m} \left(P_{x0} - \frac{m\omega}{a} \operatorname{th} ya \right)^2. \quad (3)$$

Теперь предположим, что $P_{x0} < 0$. Тогда из анализа зависимости $U_{\text{eff}}(y)$ следует, что движение частицы невозможно, если

$$T_0 < \frac{1}{2m} \left(-|P_{x0}| + \frac{m\omega}{a} \right)^2.$$

При

$$\frac{1}{2m} \left(-|P_{x0}| + \frac{m\omega}{a} \right)^2 < T_0 < \frac{1}{2m} \left(|P_{x0}| + \frac{m\omega}{a} \right)^2$$

электрон отразится назад, а при

$$T_0 > \frac{1}{2m} \left(|P_{x0}| + \frac{m\omega}{a} \right)^2$$

электрон пройдет сквозь магнитную стенку. Последнее условие можно записать в форме

$$\dot{y}_0^2 > 4\omega^2/a^2,$$

поскольку $P_{x0} = -m\omega/a$, $T_0 = m\dot{y}_0^2/2$.

Из (3) найдем закон движения вдоль оси y :

(4)

$$t = \int_{-\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - \frac{\omega^2}{a^2} (1 + \operatorname{th} ay)^2}}.$$

Уравнение траектории следует из (2) и (4):

$$x = - \int_{-\infty}^y \frac{\omega}{a} \frac{(1 + \operatorname{th} ay) dy}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - \frac{\omega^2}{a^2} (1 + \operatorname{th} ay)^2}}.$$

2.12. Направим ось z декартовых координат вдоль напряженности магнитного поля. Тогда уравнения движения протона могут быть представлены в виде

$$m\ddot{x} = eE \cos \omega t - k\dot{x} + \frac{e}{c} \dot{y}H;$$

$$m\ddot{y} = eE \sin \omega t - k\dot{y} - \frac{e}{c} \dot{x}H;$$

$$m\ddot{z} = -k\dot{z}.$$

Проекция скорости протона на ось z находится без труда:

$$\dot{z} = be^{-\gamma t},$$

где $\gamma = k/m$. Чтобы найти решения двух других уравнений, умножим обе части второго уравнения на мнимую единицу, а результат умножения сложим почленно с первым уравнением. Тогда получим

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + (\gamma + i\Omega)(\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{eE}{m} e^{i\omega t},$$

где $\Omega = eH/mc$.

Будем искать частное решение этого уравнения в виде

$$\dot{x} + i\dot{y} = B e^{i\omega t}.$$

Подстановка в уравнение дает

$$B = \frac{eE/m}{\gamma + i(\omega + \Omega)}.$$

Добавляя к найденному частному решению решение однородного уравнения, получаем общее решение неоднородного уравнения

$$\dot{x} + i\dot{y} = A e^{-(\gamma+i\Omega)t} + \frac{eE/m}{\gamma + i(\omega + \Omega)} e^{i\omega t}.$$

Полагая $A = a e^{-i\alpha}$ и отделяя действительную и мнимую части решения, находим

$$\dot{x} = a e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \alpha) + d [\gamma \cos \omega t + (\omega + \Omega) \sin \omega t];$$

$$\dot{y} = -a e^{-\gamma t} \sin(\Omega t + \alpha) + d [\gamma \sin \omega t - (\omega + \Omega) \cos \omega t],$$

где

$$d = \frac{eE/m}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2}.$$

Последние формулы вместе с выражением для \dot{z} дают возможность вычислить мгновенное значение мощности. Так как

$$v^2 = (a^2 + b^2) e^{-2\gamma t} + d^2 [\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2] +$$

$$+ 2ade^{-\gamma t} \{ \gamma \cos [(\omega + \Omega)t + \alpha] + (\omega + \Omega) \sin [(\omega + \Omega)t + \alpha] \},$$

то

$$\frac{dT}{dt} = -k(a^2 + b^2) e^{-\frac{2k}{m}t} + mad \left[(\omega + \Omega)^2 - \frac{k^2}{m^2} \right] e^{-\frac{k}{m}t} \times$$

$$\times \cos [(\omega + \Omega)t + \alpha] - 2kad(\omega + \Omega) e^{-\frac{k}{m}t} \sin [(\omega + \Omega)t + \alpha].$$

Усредняя это выражение по периоду $2\pi/(\omega + \Omega)$ и учитывая, что $(k/m) \ll (\omega + \Omega)$, получим

$$\left\langle \frac{dT}{dt} \right\rangle = -k(a^2 + b^2) e^{-\frac{2k}{m}t}.$$

Заметим, что при $\omega = -\Omega$ (т. е. для электронов) имеет место резонанс. В этом случае при $\alpha = 0$

$$\frac{dT}{dt} = -k(a^2 + b^2)e^{-\frac{2k}{m}t} - mad \frac{k^2}{m^2} e^{-\frac{k}{m}t}.$$

2.13. Согласно законам сохранения момента импульса и кинетической энергии имеем

$$m\rho^2\dot{\varphi} = M_0; \quad \frac{m\rho^2}{2} + \frac{M_0^2}{2m\rho^2} = E_0.$$

Отсюда получим

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{M_0}{m\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - M_0^2/2m\rho^2)}} = -\arcsin \frac{M_0}{\sqrt{2mE_0}} \cdot \frac{1}{\rho},$$

т. е. уравнение траектории — прямой линии:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos \varphi}; \quad \rho_0 = \frac{M_0}{\sqrt{2mE_0}} \quad \left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \right)$$

и закон движения:

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{M_0^2}{2m\rho^2}\right)}} = t + C; \quad \rho = \left[\rho_0^2 + \frac{2E_0}{m}(t - t_0)^2 \right]^{1/2}.$$

Нетрудно видеть, что $\rho_0 = M_0/\sqrt{2mE_0}$ является кратчайшим расстоянием от начала координат до прямой

2.14. Ось z цилиндрической системы координат совместим с осью конденсатора. Тогда потенциальная энергия электрона в конденсаторе имеет вид

$$U = -2e\kappa \ln \rho,$$

где κ — заряд единицы длины конденсатора.

Закон сохранения энергии дает интеграл

$$\frac{mv_0^2}{2} - 2e\kappa \ln \rho_0 = \frac{mv_1^2}{2} - 2e\kappa \ln \rho_1,$$

где индексом «0» снабжены величины на внутренней обкладке конденсатора, а индексом «1» — на наружной. Из закона сохранения момента импульса электрона имеем

$$mv_0 \rho_0 \sin \alpha_0 = m \rho_1^2 \dot{\varphi}_1,$$

где α_0 — угол между радиусом-вектором электрона и его скоростью в начальный момент времени. Присоединяя к интегралам энергии и момента импульса условие $\rho_1=0$ (в этом случае траектория касается наружной пластины), для критического значения угла α_0 найдем выражение

$$\sin^2 \alpha_0 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 \left(1 + \frac{4e \kappa}{m v_0^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} \right).$$

2.15. В цилиндрических координатах с началом в центре окружности и осью z , направленной по прямой, соединяющей заряды Q , напряженность поля равна

$$E = \frac{2Q\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} n_\rho.$$

Следовательно, выражение для эффективной потенциальной энергии может быть представлено в виде

$$U_{\text{eff}} = - \frac{2Qq^*}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} + \frac{M^2}{2m\rho^2}.$$

Согласно условию задачи

$$\left. \frac{dU_{\text{eff}}}{d\rho} \right|_{\rho=R} = 0.$$

Таким образом, квадрат момента импульса частицы

$$M^2 = \frac{2QqmR^4}{(R^2 + a^2)^{3/2}}.$$

2.16. Совмещая ось z цилиндрических координат с осью симметрии конденсатора и проектируя обе части уравнения движения электрона на ось, определяемую ортом n_ϕ , получим

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi}) = - \frac{e}{c} \rho \dot{\phi} H_z,$$

где $H_z = H(\rho)$ — заданная функция.

Интегрируя это уравнение в пределах от $\rho=a$ (на внутренней обкладке конденсатора) до $\rho=b$ (на наружной обкладке), получим

$$mb^2 \dot{\phi}(b) - ma^2 \dot{\phi}(a) = - \frac{e}{2\pi c} \int_a^b H(\rho) 2\pi\rho d\rho.$$

Второе слагаемое в левой части обращается в нуль по условию задачи, а интеграл в правой части представляет собой поток Φ

напряженности магнитного поля через сечение конденсатора. Поэтому

$$\Phi = - \frac{2\pi c}{e} m b^2 \dot{\varphi}(b).$$

Определяя $\dot{\varphi}(b)$ из закона сохранения энергии, в котором следует положить $\dot{\rho}|_{\rho=b} = 0$, окончательно найдем

$$\Phi = 2\pi c b \sqrt{\frac{2mU}{|e|}},$$

где U — разность потенциалов между обкладками конденсатора.

2.17. В магнитном поле $\mathbf{H} = (2J/c\rho)\mathbf{n}_\varphi$ прямого тока имеют место законы сохранения момента импульса и кинетической энергии

$$m\rho^2 \dot{\varphi} = M_{z0};$$

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = T_0. \quad (1)$$

Воспользуемся также интегралом

$$\dot{z} = \frac{2eJ}{mc^2} \ln \frac{\rho}{a}, \quad (2)$$

который следует из уравнения движения электрона вдоль оси z . Тогда, используя начальные условия и исключая \dot{z} из интеграла энергии, найдем уравнение для ρ_{\max} :

$$\frac{4e^2 J^2}{m^2 c^4} \ln^2 \frac{\rho_{\max}}{a} = \dot{\rho}_0^2.$$

2.18. а) Из закона изменения момента импульса в векторных обозначениях имеем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{r}[\mathbf{v}\mathbf{H}]] = \frac{e}{c} (\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{r}\mathbf{v})).$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на \mathbf{H} , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}\mathbf{H}}{dt} &= \frac{e}{c} \{(\mathbf{H}\mathbf{v})(\mathbf{H}\mathbf{r}) - H^2 \mathbf{r}\mathbf{v}\} = \\ &= \frac{e}{2c} \frac{d}{dt} ((\mathbf{H}\mathbf{r})^2 - H^2 r^2) = - \frac{e}{2c} \frac{d}{dt} [\mathbf{H}\mathbf{r}]^2. \end{aligned}$$

так как

$$[\mathbf{ab}]^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{ab})^2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}\mathbf{H} + \frac{e}{2c} [\mathbf{r}\mathbf{H}]^2 = C.$$

б) Повторим этот вывод в тензорных обозначениях. С этой целью заметим, что компоненты векторного произведения можно записать в виде

$$[ab]_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha kl} a_k b_l, \quad (1)$$

где по повторяющимся в произведении индексам ведется суммирование, а ε_{ijk} — символы Леви — Чивита, по определению равные

1) $\varepsilon_{ijk} = 0$, если среди индексов i, j, k имеются хотя бы два одинаковых;

2) $\varepsilon_{ijk} = 1$, если упорядоченная система индексов i, j, k отличается четным числом транспозиций от 1, 2, 3;

3) $\varepsilon_{ijk} = -1$, если упорядоченная система индексов i, j, k отличается от 1, 2, 3 нечетным числом транспозиций.

Используя (1), получим

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{r}[\mathbf{vH}]]_i = \frac{e}{c} \varepsilon_{i\beta\gamma} x_{\beta} \varepsilon_{\gamma kl} v_k H_l.$$

Далее учтем, что

$$\varepsilon_{i\beta\gamma} \varepsilon_{kl\gamma} = \delta_{ik} \delta_{\beta l} - \delta_{il} \delta_{\beta k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} &= \frac{e}{c} (v_i (x_{\beta} H_{\beta}) - H_i (x_{\beta} v_{\beta})); \\ \frac{d}{dt} M_i H_i &= \frac{e}{c} ((v_i H_i) (x_{\beta} H_{\beta}) - H^2 (x_{\beta} v_{\beta})) = \\ &= \frac{e}{2c} \cdot \frac{d}{dt} [(H\mathbf{r})^2 - H^2 r^2] = -\frac{e}{2c} \cdot \frac{d}{dt} [H\mathbf{r}]^2. \end{aligned}$$

2.19. Запишем законы сохранения в цилиндрических координатах:

$$m\rho^2 \dot{\varphi} = \frac{e_0}{2c} \rho^2 H = M_{z0}; \quad (1)$$

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = E_0; \quad (2)$$

$$m\dot{z} = p_{z0}. \quad (3)$$

Далее из (1) — (3) найдем

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m} \left[E_{\perp} - \frac{1}{2m\rho^2} \left(M_{z0} + \frac{e_0}{2c} H\rho^2 \right)^2 \right], \quad (4)$$

где

$$E_{\perp} = E_0 - \frac{p_{z0}^2}{2m}.$$

Затем из (1), (4) получим

$$d\varphi = \frac{\left(M_{z0} + \frac{e_0}{2c} \rho^2 H\right) d\rho}{m\rho^2 \left\{ \frac{2}{m} \left(E_{\perp} - \frac{1}{2m\rho^2} \left(M_{z0} + \frac{e_0 H}{2c} \rho^2 \right)^2 \right) \right\}^{1/2}}. \quad (5)$$

Вводя обозначения

$$R = \frac{p_{\perp} c}{e_0 H}; \quad p_{\perp}^2 = 2mH_{\perp};$$

$$R^2 - \frac{2M_{z0}}{m\omega} = r_0^2; \quad \omega = \frac{e_0 H}{mc},$$

перепишем (5) в виде

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{d\left(\rho - \frac{R^2 - r_0^2}{\rho}\right)}{\sqrt{4r_0^2 - \left(\rho - \frac{R^2 - r_0^2}{\rho}\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$R^2 = \rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi. \quad (6)$$

Это уравнение окружности радиуса R , ее центр находится на расстоянии r_0 от начала координат. Если $M_{z0} > 0$, то $R > r_0$ — окружность охватывает начало координат; если $M_{z0} < 0$, то $R < r_0$ — окружность не охватывает начало координат.

Наконец, из (4) находим зависимость $\rho(t)$:

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega} \int \frac{d\rho^2}{\sqrt{4R^2 r_0^2 - [\rho^2 - (R^2 + r_0^2)]^2}};$$

$$\rho^2(t) = R^2 + r_0^2 + 2Rr_0 \cos \omega(t - t_0).$$

2.20. Напишем интегралы момента импульса и энергии в цилиндрических координатах:

$$m\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{eH}{2c} \rho^2 = M_{z0}; \quad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{eQ}{r} = E_0. \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) $\dot{\varphi}$, найдем

$$E_0 = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + U_{\text{eff}}(\rho, z, M_{z0}),$$

где

$$U_{\text{eff}}(\rho, z, M_{z0}) = \frac{1}{2m\rho^2} \left(M_{z0} - \frac{eH}{2c} \rho^2 \right)^2 + \frac{eQ}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$U_{\text{eff}}(\rho, z, -M_{z0}) = U_{\text{eff}}(\rho, z, M_{z0}) + \frac{eHM_{z0}}{mc},$$

поэтому ограничимся случаем $M_{z0} > 0$.

Уравнение, определяющее разрешенную область изменения координат ρ и z , запишем в виде

$$U_{\text{eff}}(\rho, z, M_{z0}) \leq E_0. \quad (3)$$

Вычислим далее

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \rho} = -\frac{M_{z0}^2}{m\rho^3} + \frac{m}{4} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2 \rho - \frac{eQ\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial z} = -\frac{eQz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Из (4), (5) следует, что орбита — окружность — должна лежать в плоскости $z=0$. Радиус ρ_0 этой окружности определяется уравнением

$$\frac{m\omega^2}{4} \rho_0^4 - eQ\rho_0 = \frac{M_{z0}^2}{m}; \quad \omega = \frac{eH}{mc}.$$

В случае $eQ = -e_0Q < 0$

$$\rho_0 = \frac{M_{z0}^2}{me_0Q} \quad \text{при } \rho_0 \ll l;$$

$$\rho_0 = \left(\frac{2M_{z0}}{m\omega} \right)^{1/2} \quad \text{при } \rho_0 \gg l,$$

где $l = \left(\frac{Q}{I_0} \cdot \frac{mc^2}{H^2} \right)^{1/3}$ — размер области, в которой энергия магнитного поля порядка mc^2 . В случае $eQ > 0$

$$\rho_0 > \left(\frac{4eQ}{m\omega^2} \right)^{1/3}.$$

2.21. а) Преобразуем закон изменения момента импульса к виду

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{rF}] = \frac{eg}{cr^3} [\mathbf{r}[\mathbf{vr}]] = \frac{eg}{cr^3} (\mathbf{vr}^2 - \mathbf{r}(\mathbf{rv})).$$

Поскольку $r^2 = \mathbf{r}^2$, то $\dot{r}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}$ и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{eg}{c} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{eg}{c} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M} = \frac{eg}{c} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{C}.$$

б) В тензорных обозначениях имеем

$$\begin{aligned} \frac{dM_l}{dt} &= \frac{eg}{c} \varepsilon_{ikl} x_k \varepsilon_{lmn} \dot{x}_m x_n = \\ &= \frac{eg}{c r^3} (\dot{x}_l r^2 - x_l \dot{x}_m x_m) = \frac{eg}{c} \left(\frac{\dot{x}_l}{r} - \frac{x_l}{r^3} (\dot{x}_m x_m) \right) = \\ &= \frac{eg}{c} \cdot \frac{d}{dt} \frac{x_l}{r}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M_l = \frac{eg}{c} \cdot \frac{x_l}{r} = C_l.$$

2.22. Запишем векторное уравнение движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

в тензорных обозначениях

$$m\ddot{x}_i = eE_i + \frac{e}{c} \varepsilon_{ikl} \dot{x}_k H_l. \quad (1)$$

Умножая обе части (1) на x_i и суммируя по i , получим

$$m\ddot{x}_i x_i = eE_i \dot{x}_i + \frac{e}{c} \varepsilon_{ikl} \dot{x}_k H_l \dot{x}_i.$$

Теперь заметим, что

$$\varepsilon_{ikl} \dot{x}_k \dot{x}_l = \varepsilon_{kll} \dot{x}_i \dot{x}_k = -\varepsilon_{ikl} \dot{x}_k \dot{x}_l,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{ikl} \dot{x}_k \dot{x}_l = 0.$$

Кроме того,

$$\ddot{x}_i \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \frac{x_i^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \frac{m \dot{x}_i^2}{2} = eE_i \dot{x}_i$$

или в векторном виде

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = e \mathbf{E} \mathbf{v}.$$

2.23. Пусть ρ — плотность шара; r , θ , φ — сферические координаты элементарного объема шара. Энергия взаимодействия шара радиуса $r < a$ и элементарной массы $dm = \rho dv$, расположенной на поверхности этого шара, равна

$$\begin{aligned} dU &= -\gamma \left(\frac{4\pi r^3}{3} \rho \right) \frac{\rho dv}{r} = \\ &= -\gamma \left(\frac{4\pi r^3}{3} \rho \right) \rho r dr \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, собственная гравитационная энергия шара радиуса a равна

$$U = -\frac{4\pi}{3} \gamma \rho^2 \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{1}{3} \gamma (4\pi\rho)^2 \frac{a^5}{5}.$$

Поскольку масса шара

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho a^3,$$

то

$$U = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\gamma M^2}{a}.$$

2.24. Потенциальная энергия равна

$$U = -\gamma \int_{m_1} \frac{m_2 dm}{r'},$$

где r' — расстояние от элемента шара массы dm до точки массы m_2 . Введем сферические координаты с началом в центре шара. Тогда

$$\begin{aligned} r' &= r - \xi; \quad r'^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos \theta; \\ U &= -\gamma \int_0^a \xi^2 d\xi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho m_2}{(r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos \theta)^{1/2}} = \\ &= -\frac{2\pi\gamma\rho m_2}{r} \int_0^a \xi d\xi [r + \xi - \sqrt{(r - \xi)^2}]. \end{aligned}$$

Если $r > a$, то $\sqrt{(r-\xi)^2} = r-\xi$; а

$$U = -\frac{4\pi\gamma\rho m_2}{r} \int_0^a \xi^2 d\xi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Если же $r < a$, то

$$\begin{aligned} U &= -\frac{2\pi\gamma\rho m_2}{r} \left[\int_0^r 2\xi^2 d\xi + \int_r^a 2r\xi d\xi \right] = \\ &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{2a} \left[3 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

2.25. 1) Потенциальная энергия равна

$$U = -\gamma \int \frac{m dm}{r'};$$

здесь $r' = |\mathbf{r} - \xi|$, а \mathbf{r} и ξ — радиусы-векторы точки с массой m и элемента dm соответственно.

Имея в виду $r \gg a$, получим приближенно

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \xi \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \xi_i \xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{r}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\gamma m}{r} \int dm + \gamma m \int \frac{\xi \mathbf{r}}{r^3} dm + \dots = \\ &= -\gamma \frac{mM}{r} + \gamma \frac{m \mathbf{rd}}{r^3} - \frac{\gamma}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

где M — масса Земли, $\mathbf{d} = \int \xi dm$;

$$D_{\alpha\beta} = \int (3 \xi_\alpha \xi_\beta - \xi^2 \delta_{\alpha\beta}) dm.$$

Помещая начало координат в центр Земли, найдем что $\mathbf{d}=0$. Теперь предположим, что Земля представляет собой симметричный эллипсоид с полуосями a , a , c . Направим ось z по оси симметрии эллипсоида. Тогда интегрирование по объему эллипсоида может быть сведено к интегрированию по объему сферы заменой переменных $\xi_1 = ax$; $\xi_2 = ay$; $\xi_3 = cz$. Выполняя это интегрирование, получим

$$D_{11} = D_{22} = \frac{1}{5} M (a^2 - c^2);$$

$$D_{33} = -\frac{2}{5} M (a^2 - c^2); D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = 0.$$

Затем учтем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_k}{r^5},$$

и найдем

$$U = -\gamma \frac{mM}{r} - \frac{\gamma mM(a^2 - c^2)}{10r^3} (1 - 3\cos^2 \theta),$$

где θ — полярный угол вектора \mathbf{r} .

Измерения дают значение $\frac{a^2 - c^2}{10} = 0,000546 a^2$.

2) Используя соотношение

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \chi), \quad \chi = \widehat{\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}},$$

где $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, найдем

$$U = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\gamma m}{r^{l+1}} \int \xi^l P_l(\cos \chi) dm.$$

Учитывая, что

$$P_1(\cos \chi) = \cos \chi; \quad P_2(\cos \chi) = \frac{1}{2} (\cos^2 \chi - 1) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}}{\xi r} \right)^2 - 1 \right),$$

получим

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\gamma mM'}{r} - \frac{\gamma m}{2r^3} \int \left[\left(\frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}}{r} \right)^2 - \xi^2 \right] dm = \dots = \\ &= -\gamma \frac{mM}{r} - \frac{\gamma m \rho a^2 b}{30 r^3} [3(a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta) - (2a^2 + c^2)] + \dots = \\ &= -\gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{10r^3} (a^2 - c^2) (1 - 3\cos^2 \theta). \end{aligned}$$

2.26. Запишем теорему о вироале сил для любого числа частиц, удерживаемых внутри некоторого ограниченного объема силами притяжения. Полная потенциальная энергия такой системы равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}}$$

$$(\alpha_{ij} = \gamma m_i m_j; \quad (\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

(1)

уравнение движения i -той частицы имеет вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j \\ (j \neq i)}} \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (2)$$

Умножим обе части (2) скалярно на \mathbf{r}_i и результат умножения просуммируем по всем частицам:

$$\sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i) = \sum_i \sum_{\substack{j \\ (j \neq i)}} \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{r}_i. \quad (3)$$

После преобразования левая часть (3) становится равной

$$-2 \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{d}{dt} m_i \mathbf{r}_i \mathbf{v}_i. \quad (4)$$

Преобразуем теперь правую часть:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}^3} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{r}_i + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_j] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}^3} = U. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим (4) и (5) в (3) и усредним (3) по большому промежутку времени. Тогда, учитывая ограниченность всех \bar{r}_i и \bar{v}_i ,

$$\left\langle \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle.$$

Поскольку U является собственной гравитационной энергией Солнца*

$$\langle U \rangle = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\gamma M^2}{R},$$

где M , R — масса и радиус Солнца.

Далее, согласно закону равномерного распределения кинетической энергии по степеням свободы получим

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kTN;$$

здесь N — число частиц Солнца, в основном атомов водорода и гелия. Следовательно,

$$T = \frac{\gamma M^2}{5RNk} = \frac{\gamma Mm}{5kR},$$

где $m = M/N$ — средняя масса одного атома.

Для оценок примем $M = 2 \cdot 10^{33}$ г; $R = 7 \cdot 10^{10}$ см; $m = 3 \cdot 10^{-24}$ г. Тогда

$$T \approx 10^7 \text{ К}^{\circ}.$$

2.27. Умножая обе части уравнения движения заряда

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

скалярно на \mathbf{r} и учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}^2,$$

найдем, что

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2 r^2}{dt^2} - mv^2 = \mathbf{r}\mathbf{F} + \frac{e}{c} \mathbf{H}[\mathbf{r}\mathbf{v}]. \quad (1)$$

Если движение заряда происходит в ограниченной области пространства, то, усредняя (1) по большому интервалу времени, получим

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{r}\mathbf{F} \rangle - \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{mc} \langle \mathbf{H}\mathbf{M} \rangle, \quad (2)$$

где $\mathbf{M} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$ — момент импульса. В частности, для потенциальной силы \mathbf{F} из (2) следует

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{r}\nabla U \rangle - \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{mc} \langle \mathbf{H}\mathbf{M} \rangle.$$

2.28. $\langle F \rangle = 2E/a$.

2.29. Пренебрегая силой торможения

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (1)$$

из уравнения движения находим с точностью до величин порядка v/c

$$\ddot{\mathbf{v}} \approx \frac{e}{m} \dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc} [\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}].$$

В том же приближении $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$, следовательно,

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2 c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (2)$$

Соответственно этому приближению имеем

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (3)$$

Поэтому для нерелятивистских скоростей условиями малости силы \mathbf{f} являются условия

$$\frac{2e^3}{3mc^3} |\dot{\mathbf{E}}| \ll eE \left(\frac{e^2}{mc^3} \omega \ll 1 \right); \quad (4)$$

$$\frac{2e^4}{3m^2c^4} |[\mathbf{E}\mathbf{H}]| \ll eE. \quad (5)$$

Условие (4) можно записать в виде

$$\lambda \sim \frac{c}{\omega} \gg \frac{e^2}{mc^2} = r_0$$

(r_0 — «классический радиус» электрона), а условие (5) — в виде $H \ll m^2c^4/c^3$.

2.30. Среднее за период $T=2\pi/\omega$ значение мощности сил, действующих на заряд, равно

$$e \langle \mathbf{v}\mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{v}\mathbf{f} \rangle. \quad (1)$$

Подставляя сюда найденные в предыдущей задаче выражения

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

и

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}_0 \sin \omega t,$$

получим

$$N = \frac{e^4}{3m^2c^3} E_0^2 > 0. \quad (2)$$

С другой стороны, среднее значение производной импульса

$$\langle \dot{\mathbf{p}} \rangle = \frac{e^4}{3m^2c^4} E_0^2 \mathbf{n}. \quad (3)$$

Таким образом, из (2) и (3) следует, что

$$\langle \dot{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{c} \langle N \rangle \mathbf{n}.$$

§ 2. Движение в центрально-симметричном поле

2.31. Из уравнения траектории [1, стр. 81] находим, что

$$\frac{M_0/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{\text{eff}})}} = \pm \frac{\text{const}}{r^2}.$$

Отсюда $U = -\text{const}/r^2$.

2.32. Эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{eff}} = \frac{\kappa r^3}{3} + \frac{M_0^2}{2mr^2}$$

достигает минимума при

$$r = \left(\frac{M_0^2}{m\kappa} \right)^{1/5}.$$

Отсюда получим

$$v_0^2 = \frac{\kappa}{m} r_0^3.$$

2.33. Решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$\pm(\varphi + c) = \int \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(\alpha \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{r^2} - \frac{M_0^2}{2mr^2} \right)}}.$$

Результат можно представить в виде

$$r = r_0 \exp \left\{ \frac{m\alpha}{2M_0^2} (\varphi + c)^2 + \frac{M_0^2}{2m\alpha} \right\}.$$

2.34. Траектория точки определяется квадратурой

$$(\varphi + c) = \pm \int \frac{-\frac{M_0}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{\text{eff}})}}.$$

где следует положить $E_0 = 0$ и

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r^6} + \frac{M_0^2}{2mr^2}.$$

Вычисления приводят к траектории — лемнискате Бернулли:

$$r^2 = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{M} \cos 2(\varphi + c).$$

Ее график при $c=0$ см. на рис. 1.10, с. 69.

2.35. Уравнение траектории определяется квадратурой

$$\mp(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E_0 + \frac{\alpha}{r} - \left(\beta + \frac{M_0^2}{2m} \right) \frac{1}{r^2} \right]}}.$$

Интеграл в правой части вычисляем так же, как и соответствующий интеграл в задаче Кеплера. В результате получим

$$r = \frac{p + 2(\beta/\alpha)}{1 + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4E\beta}{\alpha^2} \cos} \sqrt{1 + \frac{2\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{p} (\varphi - \varphi_0)}}, \quad (1)$$

где p, ε — значения параметра и эксцентриситета в задаче Кеплера.

При $E_0 < 0$ движение является финитным. Смещение перигелия за один оборот определяется интегралом

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E_0 + \frac{\alpha}{r} - \left(\beta + \frac{M_0^2}{2m} \right) \frac{1}{r^2} \right]}} - 2\pi.$$

где

$$\frac{1}{r_{\left(\begin{smallmatrix} \min \\ \max \end{smallmatrix}\right)}} = \frac{\alpha m}{\sqrt{2\beta m + M_0^2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 m^2}{(2\beta m + M_0^2)^2} + \frac{2E_0 m}{2\beta m + M_0^2}}.$$

Поэтому смещение

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 2m\beta/M_0^2}} - 2\pi.$$

2.36. При $r > a$ траектория точки определяется интегралом

$$\mp(\varphi + c) = \int \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 - \frac{M_0^2}{2mr^2} \right)}}$$

и представляет собой прямую

$$r = \frac{M_0/\sqrt{2mE_0}}{\cos(\varphi + c)}, \quad (1)$$

отстоящую на расстоянии $M_0/\sqrt{2mE_0}$ от центра силового поля.

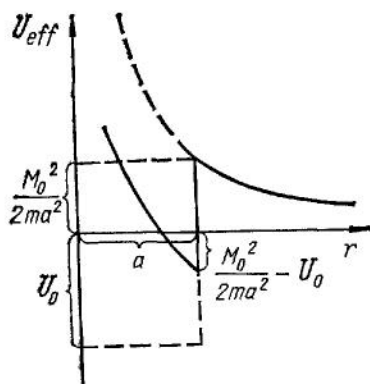


Рис. 2.36

При $r < a$ и значениях энергии, лежащих в интервале

$$\frac{M_0}{2ma^2} - U_0 < E < \frac{M_0}{2ma^2},$$

движение будет финитным (рис. 2.36). Огибающей семейства траекторий является окружность радиуса $M_0/\sqrt{2m(E_0 + U_0)}$, а точки поворота лежат на окружности радиуса a в плоскости движения. Между точками поворота материальная точка движется по отрезку прямой

$$r = \frac{M_0/\sqrt{2m(E_0 + U_0)}}{\cos(\varphi + c)}. \quad (2)$$

На сфере $r=a$ происходит отражение точки таким образом, что ее скорость скачком меняет направление на угол, равный

$$\pi - 2 \arcsin \frac{M}{a} \sqrt{2m(E + U_0)}.$$

При условии

$$\arcsin \frac{M}{a} \sqrt{2m(E + U_0)} = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

траектория будет замкнутой ломаной линией.

Если энергия и момент импульса точки связаны соотношением

$$E > \frac{M^2}{2m\gamma^2},$$

то движение становится инфинитным. Вне сферы $r=a$ траектория есть прямая (1), а внутри сферы — прямая (2). Следовательно, на границе траектория преломляется на угол

$$\arcsin \frac{M_0}{a} \sqrt{2m(E_0 + U_0)} - \arcsin \frac{M_0}{a} \sqrt{2mE_0}.$$

При $r > a$ точка движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\sqrt{2E_0/m}$. При $r < a$ на участках ломаной линии точка движется также равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\sqrt{2(E_0 + U_0)/m}.$$

2.37. Уравнения движения частицы под действием центральной силы (в плоскости движения) дают

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F, \quad m r^2 \dot{\varphi} = M_0.$$

Отсюда получим уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{mF}{M_0^2 u^2},$$

где $u \equiv 1/r$. Это уравнение запишем в виде

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\frac{m}{M^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} U_{\text{eff}}, \quad (1)$$

где $U_{\text{eff}} = U + \frac{M_0^2 u^2}{2m}$, а U — потенциал центральной силы.

Полагая для слабо возмущенной круговой орбиты

$$u = u_0 + \xi \quad (u_0 \equiv 1/r_0; \quad |\xi| \ll u_0)$$

и учитывая, что при круговом движении

$$E_0 = U_{\text{eff}}; \quad U'_{\text{eff}} = 0,$$

из (1) с точностью до первого отличного от нуля члена найдем

$$\frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} = -\frac{m}{M_0^2} \xi U''_{\text{eff}}(u_0).$$

Это уравнение имеет гармоническое решение тогда и только тогда, когда

$$U''_{\text{eff}}(u_0) > 0$$

или

$$1 + \frac{m}{M^2} \cdot \frac{d}{du} \left(\frac{F}{u^2} \right) \Big|_{u_0} > 0.$$

Так как в случае круговой орбиты

$$M_0^2/m = -F/u^3,$$

критерий устойчивости можно записать в виде

$$3F + r \frac{dF}{dr} < 0. \quad (2)$$

Если сила притяжения пропорциональна r^{-n} , то условие устойчивости (2) выполнено при $n < 3$.

2.38. Для сред с показателем преломления $n=n(|\mathbf{r}|)$ закон Снелла имеет вид

$$rn(r) \sin \alpha(r) = \text{const}, \quad (1)$$

где α — угол между радиусом-вектором и направлением распространения луча.

При движении точки в центрально-симметричном поле

$$\frac{mv^2}{2} + U = E_0; \quad (2)$$

$$mrv \sin \alpha = M_0. \quad (3)$$

Из (2), (3) находим

$$M_0 = r \sqrt{2m[E_0 - U(r)]} \sin \alpha. \quad (4)$$

Сравнивая (4) с (1), видим, что роль показателя преломления играет величина

$$n(r) = \sqrt{2m[E_0 - U(r)]}.$$

§ 3. Движение под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы

2.39. Поместим начало координат в центр Земли, оси координат направим на «неподвижные» звезды, а одну из координатных плоскостей совместим с плоскостью движения. Далее запишем интегралы момента импульса и энергии в полярных координатах:

$$m\rho^2\dot{\varphi} = M_0; \quad (1)$$

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} + U_{\text{eff}} = E'_0, \quad (2)$$

где

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{M_0^2}{2m\rho^2}, \quad E'_0 = E_0 - mgR \quad (g = \alpha/mR^2).$$

Затем положим $\rho = R + z$ ($z \ll R$) и разложим (1) и (2) в ряд Тейлора в «точке» $z = 0$:

$$mR\dot{x} = M_0 \quad (x = R\varphi);$$

$$\begin{aligned} & \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{M_0^2}{2mR^2} \left(+ mzg - \frac{M_0^2}{m^2R^3} \right) = \\ & = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mz \left(g - \frac{M_0^2}{m^2R^3} \right) = E_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) видно, что влияние кривизны Земли приводит к эффективному изменению ускорения свободного падения.

2.40. Используя систему координат, выбранную в предыдущей задаче (эта же система используется в задачах 2.41—2.47). Тогда уравнение траектории тела имеет вид

$$r = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (1)$$

причем в точке бросания

$$R = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \varphi_0}. \quad (2)$$

Поскольку $v_0^2 \ll gR$, можно положить $r = R + z$, где $z \ll R$. Затем обозначим через $x = R(\varphi - \varphi_0)$ длину дуги большого круга, секущего поверхность Земли в плоскости траектории. После этого разложим (1) в ряд Тейлора в точке $\varphi = \varphi_0$ и получим

$$\begin{aligned} r = R + z &= \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \varphi_0} + \frac{\rho \varepsilon \sin \varphi_0}{(1 + \varepsilon \cos \varphi_0)^2} \cdot \frac{x}{R} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\rho \varepsilon \cos \varphi_0}{(1 + \varepsilon \cos \varphi_0)^2} + \frac{2\rho \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_0}{(1 + \varepsilon \cos \varphi_0)^3} \right] \frac{x^2}{R^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь запишем параметр и эксцентриситет орбиты в виде

$$\rho = kR \cos^2 \alpha; \quad \varepsilon^2 = 1 - (2 - k) k \cos^2 \alpha, \quad (4)$$

где $K = v_0^2 / gR$, а α — угол между начальной скоростью и горизонтом. Тогда из (2) и (4) следует, что

$$\varepsilon \cos \varphi_0 = k \cos^2 \alpha - 1; \quad \varepsilon \sin \varphi_0 = k \sin \alpha \cos \alpha. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), находим

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - k - k \sin^2 \alpha}{k \cos^2 \alpha} \cdot \frac{x^2}{R}. \quad (6)$$

Если в числителе второго слагаемого в (6) пренебречь членами $\sim k$, то получим уравнение параболы

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2v_0^2} \cdot \frac{g}{\cos^2 \alpha} x^2,$$

справедливое в случае «плоской» Земли.

2.41. Производная вектора \mathbf{C} по времени равна

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = [\dot{\mathbf{v}}\mathbf{M}] + [\mathbf{v}\dot{\mathbf{M}}] - \frac{\alpha \dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} (\mathbf{r}\mathbf{v}).$$

Далее, поскольку $\dot{\mathbf{M}} = 0$, а $m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$, получим

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3} [\mathbf{r}[\mathbf{rv}]] - \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} (\mathbf{rv}) = 0.$$

Вектор \mathbf{C} лежит в плоскости орбиты, так как $\mathbf{CM} = 0$. Этот вектор направлен вдоль большой оси эллипса в сторону перигея. Действительно,

$$\mathbf{C}\mathbf{r} = [\mathbf{vM}]\mathbf{r} - \alpha r = \frac{M^2}{m} - \alpha r;$$

$$C r \cos \varphi = \frac{M^2}{m} - \alpha r;$$

$$r = \frac{\frac{M^2}{m}}{\alpha + C \cos \varphi}.$$

Следовательно, $p = M^2/m\alpha$; $\varepsilon = C/\alpha$.

Вектор \mathbf{C} удобно использовать для определения ориентации большой оси эллипса и положения перигея относительно радиуса-вектора начального положения.

2.42. Используя интеграл движения

$$\mathbf{C} = [\mathbf{vM}] - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1)$$

найдем положение большой оси орбиты. Умножая обе части (1) скалярно на \mathbf{r}_0 , получим

$$CR \cos \varphi_0 = p\alpha - \alpha R; \quad \cos \varphi_0 = \frac{p - R}{\varepsilon R},$$

где φ_0 — угол между радиусом-вектором начального положения и прямой, проходящей через начало координат и перигей.

По условию задачи

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - mgR; \quad M_0 = mv_0 R \cos \beta.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^2 = 1 - (2 - k)k \cos^2 \beta; \quad p = kR \cos^2 \beta; \quad k = \frac{v_0^2}{gR}; \quad (2)$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{k \cos^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - (2 - k)k \cos^2 \beta}}.$$

Из (2) найдем, что при $k \cos^2 \beta < 1$ $\varphi_0 > \pi/2$, при $k \cos^2 \beta > 1$ $\varphi_0 < \pi/2$. Траектория лежит между углами $\varphi_1 = \varphi_0$ и

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{\pi}{R} \left(\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{2R} \right).$$

Для точки бросания или падения из уравнения траектории находим

$$R = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \frac{s}{2R}}.$$

Следовательно,

$$s = 2R \arccos \left[\left(1 - \frac{p}{R} \right) \frac{1}{\varepsilon} \right].$$

Например, для достижения диаметрально противоположной точки поверхности Земли необходимо, чтобы $p=R$ или $k \cos^2 \beta = 1$.

При заданной скорости дальность s_1 может быть достигнута при углах бросания β_1 и β_2

$$\cos^2 \beta_{1,2} = \frac{1}{2k} [(2 - (2 - k)x^2 \pm x \sqrt{(2 - k)^2 x^2 - 4(1 - k)}],$$

$$x = \cos \frac{s_1}{2R}.$$

2.43. Используя результат предыдущей задачи

$$\cos \frac{s}{2R} = \left(1 - \frac{p}{R} \right) \frac{1}{\varepsilon},$$

из условия $\frac{\partial}{\partial \beta} \cos \frac{s}{2R} = 0$ находим, что

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{2 - k} = \frac{Rg}{2Rg - v_0^2}.$$

При этом

$$p = \frac{kR}{2 - k}; \quad \varepsilon^2 = 1 - k;$$

$$\cos \frac{s_{\max}}{2R} = \frac{2\sqrt{1 - k}}{2 - k}$$

(в случае $v_0^2 \ll gR$; $\beta \approx \pi/4$).

2.44. Используя результаты предыдущей задачи, находим, что при

$$\cos \frac{s_0}{2R} > \frac{2\sqrt{1 - k}}{2 - k} \quad (k = v_0^2/gR)$$

задача не имеет решения. Минимальная скорость определяется из условия

$$\cos \frac{s_0}{2R} = \frac{2\sqrt{1 - k}}{2 - k},$$

т. е.

$$v_0^2 = \frac{2gR \sin \frac{s_0}{2R}}{1 + \sin \frac{s_0}{2R}},$$

а угол бросания

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{s_0}{4R}$$

(при $v_0^2 < gR$; $v_0^2 \approx gs_0$; $\beta = \pi/4$).

Для того чтобы бросить тело на расстояние $s_0 \leq \pi R$, минимальная начальная скорость должна быть близка к \sqrt{gR} , а угол $\beta \approx 0$ (в этом предельном случае тело должно двигаться по траектории, близкой к окружности).

2.45. Из интеграла момента импульса и уравнения орбиты тела имеем

$$mr^2\dot{\varphi} = M_0;$$

$$dt = \frac{mr^2}{M_0} d\varphi = \frac{mp^2}{M_0} \cdot \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \sqrt{\frac{m}{\alpha}} p^{3/2} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

Последнее выражение проинтегрируем в пределах от $-\varphi_0/2$ до $\varphi_0/2$, где φ_0 определяется условием (см. решение задачи 2.42)

$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \frac{\varphi_0}{2}}.$$

Тогда найдем время полета

$$\begin{aligned} \Delta t &= \sqrt{\frac{m}{\alpha}} p^{3/2} \int_{+\varphi_0/2}^{-\varphi_0/2} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \\ &= p^2 \sqrt{\frac{m}{\rho\alpha}} \cdot \frac{2}{1 - \varepsilon^2} \left[\frac{\varepsilon \sin \frac{\varphi_0}{2}}{1 + \varepsilon \cos \frac{\varphi_0}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right]. \end{aligned}$$

2.46. Используя интеграл момента импульса и уравнение орбиты, получим

$$v^2(\varphi) = \frac{\alpha}{mp} (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi),$$

откуда следует, что

$$v^2(r) = \frac{\alpha}{mp} \left[1 + \varepsilon^2 + 2 \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right].$$

2.47. Угол между радиусом-вектором и скоростью тела обозначим через θ . Тогда из закона сохранения момента импульса получим

$$\sin \theta = \frac{M_0}{mvr} = \sqrt{\frac{p\alpha}{m}} \cdot \frac{1}{vr}.$$

Отсюда, учитывая зависимость $v(r)$, найдем

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon \cos \varphi}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}}.$$

Затем, имея в виду, что

$$\cos \theta = \frac{\dot{r}}{v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{1}{v} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{M}{mr^2},$$

получим

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}}.$$

2.48. Используем гелиоцентрическую систему отсчета. Учитывая, что период обращения кометы связан с величиной a ее большой полуоси формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}},$$

и имея в виду, что $a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$, находим

$$r_a = 2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} a_0 - r_p,$$

где T_0 — период обращения Земли вокруг Солнца; a_0 — большая полуось орбиты Земли.

2.49. Поместим начало координат в центр Земли, а координатные оси направим на «неподвижные» звезды (эта же система будет использована в задачах 2.50—2.59). Используя закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_0}$$

и полагая в нем $r = \infty$; $v = 0$, найдем начальную скорость v_0 для параболической орбиты

$$v_0 = v_n = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}.$$

При $v_0 < v_n$ орбита эллиптическая, а при $v_0 > v_n$ — гиперболическая.

Если угол между начальными скоростью и радиусом-вектором точки равен 90° , а скорость точки

$$v_0 = v_c = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}},$$

то орбитой является окружность. При $v_0 > v_c$ центр Земли оказывается ближайшим к точке фокусом, а точка выведения — перигеем орбиты; при $v_0 < v_c$ центр Земли оказывается дальним фокусом, а точка выведения — апогеем орбиты.

Для того чтобы спутник двигался над поверхностью Земли, необходимо выполнение условия

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} > R. \quad (1)$$

Пусть в момент выведения угол между начальными скоростью и радиусом-вектором спутника был равен $\pi/2$. Тогда

$$p = \frac{v_0^2 r_0^2}{gR^2}; \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{r_0^2 v_0^2}{g^2 R^4} \left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right).$$

Используя эти выражения, запишем условие (1) в виде

$$v_0 > \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0} \frac{R}{r_0 + R}}$$

(величина, стоящая справа, меньше v_c).

2.50. Условием пролета спутника над Землей является

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \geq R. \quad (1)$$

Обозначая через α угол между начальными радиусом-вектором и скоростью спутника и учитывая, что

$$p = \frac{(mv_0 r_0 \sin \alpha)^2}{m^2 g R^2} = \frac{v_0^2}{gR} \cdot \frac{r_0^2}{R} \sin^2 \alpha;$$

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{gR^4} \left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right),$$

из (1) находим

$$v_0^2 > v_c^2(\alpha); v_c^2 = \frac{2 \left(1 - \frac{R}{r_0}\right)}{\frac{r_0^2}{R^2} \sin^2 \alpha - 1} gR.$$

Следовательно, угол α удовлетворяет условию

$$\sin \alpha > \frac{R}{r_0} = \sin \beta, \text{ т. е. } \alpha > \beta,$$

где β — угол между образующей искомого конуса и его осью.

2.51. Скорость спутника равняется расчетной скорости на круговой орбите данного радиуса, т. е.

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}, \quad r_0 = R + h.$$

В то же время ввиду отклонения расстояния от расчетного полная энергия и момент импульса равны

$$E = \frac{mgR^2}{r_0} \cdot \frac{r_1 - 2r_0}{2r_1};$$

$$M = mR \sqrt{\frac{g}{r_0}} r_1; \quad r_1 = r_0 + \Delta r.$$

Таким образом, эксцентриситет и параметр эллипса равны

$$e = \left[1 + \frac{(r_1 - 2r_0)r_1}{r_0^2} \right]^{1/2} = \frac{\Delta r}{r_0};$$

$$p = \frac{r_1^2}{r_0} = r_0 \left(1 + \frac{\Delta r}{r_0} \right)^2 \approx R + h + 2 \Delta r.$$

Подставляя числовые данные, найдем

$$e = 4 \cdot 10^{-4}; \quad p = (6,680 + 0,006) \cdot 10^6 \text{ м.}$$

2.52. Эксцентриситет и параметр расчетной орбиты соответственно равны $e_0 = 0$; $p_0 = r_0 = R + h$. Для реальной орбиты полная энергия совпадает с расчетной

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{mgR^2}{r_0}.$$

Поскольку расчетная скорость

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}},$$

момент импульса для реальной орбиты

$$M = mR \sqrt{gr_0} \cos \delta.$$

Следовательно, эксцентриситет и параметр орбиты соответственно равны

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m^3 g^2 R^4}} = \sin \delta;$$

$$p = \frac{M^2}{m^2 g R^2} = r_0 \cos^2 \delta,$$

а отклонения в перигее и апогее

$$\Delta r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} - r_0 = r_0 \left(\frac{\cos^2 \delta}{1 + \sin \delta} - 1 \right) \approx -r_0 \delta;$$

$$\Delta r_a = \frac{p}{1 - \varepsilon} - r_0 \approx r_0 \delta.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$\varepsilon = 0,017; \quad p = (6,680 - 0,003) \cdot 10^6 \text{ м};$$

$$\Delta r_p = -0,11 \cdot 10^6 \text{ м}; \quad \Delta r_a = 0,11 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

2.53. Модуль скорости спутника

$$v = v_0 + \Delta v; \quad v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}; \quad r_0 = R + h.$$

Его полная энергия и момент импульса соответственно равны

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_0} = -\frac{mgR^2}{2r_0} \left[2 - \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0} \right)^2 \right];$$

$$M = mR \sqrt{gr_0} \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0} \right).$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \left| \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0} \right)^2 - 1 \right| \approx \frac{2|\Delta v|}{v_0};$$

$$p = r_0 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0} \right)^2 \approx r_0 \left(1 + \frac{2\Delta v}{v_0} \right);$$

$$\Delta r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} - r_0 = 0; \quad \Delta r_a = \frac{p}{1 - \varepsilon} - r_0 \approx 4 \frac{|\Delta v|}{v_0} r_0.$$

2.54. Записывая закон сохранения момента импульса и энергии через величины, взятые в апогее и перигее:

$$r_a v_a = r_p v_p;$$

$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_a} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_p},$$

получим

$$v_p = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_a + r_p} \cdot \frac{r_a}{r_p}}; \quad v_a = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_a + r_p} \cdot \frac{r_p}{r_a}}.$$

Отсюда, учитывая, что $h_p, h_a \ll R$, приближенно получим

$$v_p = \sqrt{gR} \left(1 + \frac{h_a - 3h_p}{4R}\right); \quad v_a = \sqrt{gR} \left(1 + \frac{h_p - 3h_a}{4R}\right).$$

При торможении в апогее для орбиты приземления $h'_a = h_a$; $h'_p = 0$ и, следовательно,

$$\Delta v_a = +\sqrt{gR} \left(1 - \frac{3h_a}{4R}\right) - \sqrt{gR} \left(1 + \frac{h_p - 3h_a}{4R}\right) = -\sqrt{gR} \frac{h_p}{4R}.$$

При торможении в перигее $h'_a = h_p$; $h'_p = 0$, а

$$\Delta v_p = \sqrt{gR} \left(1 - \frac{3h_p}{4R}\right) - \sqrt{gR} \left(1 + \frac{h_a - 3h_p}{4R}\right) = -\sqrt{gR} \frac{h_a}{4R}.$$

Таким образом, выгоднее тормозить в апогее. Подставляя числовые данные, находим

$$\Delta v_a = -53 \text{ м/с}; \quad \Delta v_p = -124 \text{ м/с}.$$

2.55. Скорость спутника

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R + h_1}} \approx \sqrt{gR} \left(1 - \frac{h_1}{2R}\right).$$

Увеличим величину скорости в любой точке орбиты до значения (см. задачу 2.54)

$$v_p = \sqrt{gR} \left(1 + \frac{h_2 - 3h_1}{4R}\right);$$

при этом

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = \sqrt{gR} \frac{h_2 - h_1}{4R}.$$

В результате спутник перейдет на промежуточную орбиту. В апогее этой орбиты скорость надо увеличить от значения

$$v_a = \sqrt{gR} \left(1 + \frac{h_1 - 3h_2}{4R}\right)$$

до величины

$$v_2 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h_2}} \approx \sqrt{gR} \left(1 - \frac{h_2}{2R}\right),$$

соответствующей движению по окружности радиуса $R+h_2$. При этом произойдет изменение скорости

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = \sqrt{gR} \frac{h_2 - h_1}{4R}.$$

Пусть $h_1 = 100$ км, $h_2 = 400$ км, $\Delta v = 64$ м/с.

2.56. Учитывая, что центр эллипса отстоит от фокуса на расстоянии $a\varepsilon$, введем декартовы координаты с началом в точке O :

$$x = a\varepsilon + x'; \quad y = y'. \quad (1)$$

Запишем в этих координатах уравнение эллипса

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1; \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Вводя угол β между осью x и радиусом-вектором, проведенным из центра эллипса в A , получим

$$x = a \cos \beta. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $y = b \sin \beta$. Затем подставим x , x' , y и y' в (1) и найдем, что $\xi \equiv \beta$.

2.57. Вначале найдем $x(t)$, $y(t)$. Из уравнения эллипса

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

и закона движения находим

$$x = r \cos \varphi = a(\cos \xi - \varepsilon); \quad (1)$$

$$y = r \sin \varphi = \sqrt{r^2 - x^2} = b \sin \xi. \quad (2)$$

Поскольку $\cos \xi$ и $\sin \xi$ периодичны с периодом $T = 2\pi/\omega$, то

$$\cos \xi = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t;$$

$$\sin \xi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t.$$

Вычислим коэффициент a_n , интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos \xi \cos n \omega t dt = \frac{2}{T} \left[\cos \xi \frac{\sin n \omega t}{n \omega} \Big|_0^T - \right. \\ &\left. - \int_0^T \frac{\sin n \omega t}{n \omega} \cdot \frac{d \cos \xi}{dt} dt \right] = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \sin [n(\xi - \varepsilon \sin \xi)] \sin \xi d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} J'_n(n\varepsilon); \quad a_0 = -\varepsilon; \end{aligned}$$

здесь использовано представление функций Бесселя [8]

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\xi - x \sin \xi) d\xi.$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \sin \xi \sin n \omega t dt = \frac{2}{T} \left[-\sin \xi \frac{\cos n \omega t}{n \omega} \Big|_0^T + \right. \\ &\left. + \int_0^T \frac{\cos n \omega t}{n \omega} \cdot \frac{d \sin \xi}{dt} dt \right] = \frac{1}{\pi n \varepsilon} \int_0^{2\pi} \cos n \omega t d(\xi - \omega t) = \\ &= \frac{1}{\pi n \varepsilon} \int_0^{2\pi} \cos n(\xi - \varepsilon \sin \xi) d\xi = \frac{2}{\pi \varepsilon} J_n(n\varepsilon). \end{aligned}$$

Итак,

$$x(t) = a \left[-\frac{3}{2} \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J'_n(n\varepsilon) \cos n \omega t \right]; \quad (1)$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon) \sin n \omega t; \quad (2)$$

$$r(t) = a \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{n} J'_n(n\varepsilon) \cos n \omega t \right]. \quad (3)$$

Чтобы вычислить функции

$$\cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} - 1 \right); \quad \sin \varphi = \frac{b}{r} \sin \xi,$$

разложим $1/r$ в ряд Фурье;

$$\frac{1}{r} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n \omega t. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\cos n \omega t dt}{a(1 - \varepsilon \cos \xi)} = \frac{2}{aT\omega} \int_0^{2\pi} \cos n(\xi - \varepsilon \sin \xi) d\xi = \\ &= \frac{2}{a} J_n(n\varepsilon); \quad c_0 = \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Используем также, что

$$\frac{\sin \xi}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n \omega t, \quad d_n = \frac{2}{a} J'_n(n\varepsilon),$$

$$p = a(1 - \varepsilon^2); \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Тогда получим

$$\cos \varphi = -\varepsilon + 2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\varepsilon) \cos n \omega t; \quad (5)$$

$$\sin \varphi = 2\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} J'_n(n\varepsilon) \sin n \omega t. \quad (6)$$

Ряды (1)–(6) являются частными случаями рядов Кептэйна [8, 27]. Из найденных формул можно получить значения некоторых сумм Кептэйна. Например, полагая в (4) $t=0$ ($\xi=0$), найдем

$$\frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\varepsilon).$$

2.58. Вектор $\mathbf{M} = m[\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0]$ перпендикулярен плоскости орбиты. Поэтому угол α между экваториальной плоскостью Земли и плоскостью орбиты равен

$$\cos \alpha = \frac{M_{z0}}{M_0}; \quad M_0 = |\mathbf{M}_0|.$$

Положение прямой, по которой пересекаются эти плоскости, может быть определено из уравнения $\mathbf{M}_0 \mathbf{r} = 0$ (уравнение плоскости траектории), в котором надо положить $z=0$:

$$M_{x0} x + M_{y0} y = 0.$$

Отсюда для φ_0 — азимутального угла искомой прямой — получим

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{M_{x0}}{M_{y0}}.$$

2.59. Из закона изменения момента импульса находим

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma v^{n-1} [rv] = -\gamma \frac{v^{n-1}}{m} M.$$

Усредняя обе части этого уравнения за период обращения, согласно условию задачи получим

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\gamma}{m} M \langle v^{n-1} \rangle = -\frac{\gamma M}{mT} \int_0^T v^{n-1} dt. \quad (1)$$

Учитывая, что на каждом обороте орбита близка к круговой, будем иметь

$$v^2(\varphi) = \frac{\alpha^2}{M^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\gamma \alpha^{n-1}}{m} M^{2-n}. \quad (2)$$

Интегрируя (2), находим

$$M = M_0 e^{-\frac{\gamma}{m} t} \quad (n=1); \quad (3a)$$

$$M = \left[M_0^{n-1} - \frac{\gamma(n-1)\alpha^{n-1}}{m} t \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (n \neq 1), \quad (3b)$$

где $M_0 = mR \sqrt{gr_0}$, r_0 — радиус начальной круговой орбиты.

Из закона изменения полной энергии аналогично найдем

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \langle v^{n+1} \rangle = -\frac{\gamma \alpha^{n+1}}{M^{n+1}}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) получим

$$\frac{dE}{dM} = \frac{m\alpha^2}{M^3}$$

и, следовательно,

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \quad (5)$$

Зависимость параметра от времени определяется формулой

$$\rho(t) = \frac{M^2(t)}{m\alpha}. \quad (6)$$

Скорость изменения расстояния до центра Земли равна

$$\dot{\rho} = \dot{\rho} = \frac{2M\dot{M}}{m\alpha} = -\frac{2\gamma}{m^2} \alpha^{n-2} M^{3-n}.$$

В случае $n = 3$ радиальная скорость постоянна:

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 = -\frac{2\gamma\alpha}{m^2};$$

в случае $n = 1$

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{2\gamma}{m\alpha^2} M_0^2 e^{-\frac{2\gamma t}{m}}.$$

Из (6) можно найти время t_R падения на Землю ($R = M^2/m\alpha$; $n \neq 1$):

$$t_R = \frac{m}{\gamma(n-1)\alpha^{n-1}} [M_0^{n-1} - (m\alpha R)^{\frac{n-1}{2}}].$$

Угловая скорость в момент падения равна

$$\dot{\Phi}_R = \left(\frac{M}{m\rho^2}\right)_{\rho=R} = \frac{m\alpha^2}{M^2} = \left(\frac{\alpha}{mR^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{R}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, угловая скорость в процессе торможения спутника атмосферой возрастает от значения $\frac{R}{r_0} \left(\frac{g}{r_0}\right)^{1/2}$ до $\left(\frac{g}{R}\right)^{1/2}$.

Нетрудно также вычислить радиальную скорость в момент падения:

$$\dot{\rho}_R = -\frac{2\gamma}{m^2} \alpha^{n-2} (m\alpha R)^{\frac{3-n}{2}}.$$

2.60. Отклонение формы Земли от сферической приводит к потенциальной энергии (см. задачу 2.25)

$$U(x, y, z) = U(r) + \delta U(r)$$

или к силе

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}_1(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ — малая нецентральная сила.

При $F_1 = 0$ положение большой оси орбиты спутника определяется вектором (см. задачу 2.41)

$$c = [vM] - \frac{\alpha r}{r}.$$

Однако ввиду наличия малой возмущающей силы F_1 , вектор c медленно изменяется со временем. Действительно,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{m} [F_1 M] + [v[rF_1]] \neq 0.$$

Следовательно, большая ось меняет свое положение в пространстве

2.61. Интенсивность излучения на расстоянии r от Солнца равна

$$J = \frac{N}{4\pi r^2}$$

и связана с плотностью импульса излучения g соотношением $g = J/c^2$. За время Δt к площадке Δs поверхности частицы подходит излучение, заключавшееся в объеме $\Delta s \cos \alpha \cdot c \Delta t$ (α — угол между нормалью к площадке Δs и прямой, соединяющей центры Солнца и частицы). Если происходит полное поглощение, то изменение импульса равно $gsc \Delta t$ ($s = \pi a^2$). Следовательно, сила светового давления, действующая на тело, равна

$$F_r = gsc = \frac{J}{c} s = \frac{Na^2}{4cr^2}.$$

Запишем уравнение движения частицы в гелиоцентрической системе отсчета:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{r} + \frac{k}{r^3} \mathbf{r}; \quad k = \frac{Na^2}{4c}.$$

Поскольку движение частицы плоское, в полярных координатах получим

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = (k - \gamma mM) \frac{1}{\rho^2}; \quad m\rho^2\dot{\varphi} = M_{z0},$$

откуда

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = \frac{(\gamma mM - k) m}{M_{z0}^2}.$$

Интегрируя это уравнение, находим траекторию в виде

$$\frac{1}{\rho} = A \cos \varphi + \frac{(\gamma mM - k) m}{M_{z0}^2}$$

или

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

где

$$\varepsilon = \frac{AM_{z0}^2}{\gamma m M - k}; \quad \rho = \frac{M_{z0}^2}{m(\gamma m M - k)};$$

A — постоянная интегрирования.

§ 4. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии системы

2.62. Центр масс стержня перемещается только по вертикали. Если вдоль этой вертикали направить ось y , траекторию верхнего конца можно записать в виде

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{l^2}{4}.$$

Таким образом, траекторией является эллипс.

2.63. Из уравнений движения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_1 \mathbf{g}; \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = m_2 \mathbf{g}$$

следует, что радиус-вектор центра масс и радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ соответственно подчинены уравнениям $\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{g}$; $\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Поэтому

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_{m0} + \mathbf{v}_{m0}t + \mathbf{g} \frac{t^2}{2},$$

где

$$\mathbf{r}_{m0} = \frac{m_1 \mathbf{r}_{10} + m_2 \mathbf{r}_{20}}{m_1 + m_2}; \quad \mathbf{v}_{m0} = \frac{m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2},$$

а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$ ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}$; $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{20} - \mathbf{v}_{10}$).

2.64. Используя уравнения движения зарядов

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{e_1 e_2}{r^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + e_1 \mathbf{E}; \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{r e_1 e_2}{r^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + e_2 \mathbf{E}; \quad r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (2)$$

и определение

$$\mathbf{r}_m = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

найдем

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_m = (e_1 + e_2) \mathbf{E}.$$

Умножая (1) на m_2 , а (2) на m_1 и почленно вычитая результаты умножения, получим

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = e_1 e_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu \left(\frac{e_2}{m_2} - \frac{e_1}{m_1} \right) \mathbf{E},$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

В случае, когда $e_1/m_1 = e_2/m_2$, электрическое поле не влияет на относительное движение зарядов.

2.65. Исходя из уравнений движения системы

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{e_1 e_2}{r^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{e_1}{c} [\mathbf{v}_1 \mathbf{H}];$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = - \frac{e_1 e_2}{r^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{e_2}{c} [\mathbf{v}_2 \mathbf{H}],$$

получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \frac{k}{c} [\dot{\mathbf{r}}_m \mathbf{H}] \left(k = \frac{e_i}{m_i} \right);$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e_1 e_2}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mu k}{c} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{H}],$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; μ — приведенная масса.

2.66. Очевидно, что столкновение происходит в перигее метеора. Поэтому

$$r_0 = \frac{p_1}{1 + \varepsilon_1},$$

где $p_1 = 4r_0$, следовательно $\varepsilon_1 = 3$.

В момент столкновения сохраняется проекция импульса на направление относительной скорости тел. Отсюда вытекает, что скорость образовавшегося тела

$$v = \frac{nv_1 - v_0}{n + 1};$$

здесь $v_0 = \sqrt{gR^2/r_0}$; $v_1 = \sqrt{gR^2/p_1(1 + \varepsilon_1)} = 2\sqrt{gR^2/r_0}$ — соответственно скорости спутника и метеора в перигее (см. задачу 2.46). Таким образом,

$$v = \frac{(2n - 1)}{n + 1} \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}.$$

Момент импульса образовавшегося тела

$$M = (n+1)m_0 v r_0 = (2n-1)m_0 \sqrt{gR^2 r_0},$$

где m_0 — масса спутника, а полная энергия

$$E = (n+1)m_0 \left[\frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} \right].$$

Далее получим параметр орбиты нового тела

$$p = \frac{M^2}{(n+1)^2 m_0^2 g R^2} = r_0 \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^2$$

и ее эксцентриситет в виде

$$e^2 - 1 = \frac{2EM^2}{m\alpha^2} = \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^2 \left[\left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^2 - 2 \right].$$

Итак, тело будет двигаться по эллиптической орбите при условии $E < 0$, т. е.

$$\frac{2n-1}{n+1} < \sqrt{2} \quad \text{или} \quad 0 < n < \frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}.$$

Если $E > 0$ или $n > 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$, то тело будет двигаться по гиперболической траектории.

2.67. Уравнением движения i -той точки является уравнение

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_j k m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

Просуммируем (1) по всем точкам ($m = \sum_i m_i$) и получим

$$m \ddot{\mathbf{r}}_m = - \sum_{i,j} k (m_i m_j \mathbf{r}_i - m_i m_j \mathbf{r}_j). \quad (2)$$

Заменяя во второй сумме в (2) индексы $i \leftrightarrow j$, найдем

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = 0; \quad \mathbf{r}_m = \mathbf{r}_{m0} + \mathbf{v}_{m0} t. \quad (3)$$

Введем далее радиусы-векторы \mathbf{r}'_i точек в системе центра масс:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Тогда из (1) и (4) получим

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = - k m_i \mathbf{r}'_i \sum_j m_j + k m_i \sum_j m_j \mathbf{r}'_j =$$

$$= -km_i r'_i m + km_i \Sigma m_j r'_j = -km_i m r'_i,$$

так как $\sum_i m_j r'_j = 0$. Следовательно,

$$\ddot{r}'_i + km r'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Решение каждого из этих уравнений имеет вид

$$r'_i = A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t; \quad \omega = \sqrt{km},$$

где A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — постоянные интегрирования, удовлетворяющие условиям

$$\sum_i m_i r'_i = 0; \quad \sum_i m_i v'_i = 0.$$

Наконец, находим закон движения системы

$$r_i(t) = r_{m0} + v_{m0}t + A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

2.68. По условию задачи

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

Поэтому уравнение Мещерского принимает вид

$$\ddot{z} = -g + ku,$$

где u — скорость истечения газов. После интегрирования этого уравнения закон движения ракеты может быть представлен в форме

$$\ddot{z} = \begin{cases} (ku - g) \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \tau; \\ -\frac{gt^2}{2} + (ku - g)t\tau, & t \geq \tau, \end{cases}$$

где τ — время работы двигателя. Отсюда находим

$$z_{\max} = \tau^2 \frac{(ku - g)^2}{2g}.$$

2.69. Согласно условию уравнение Мещерского имеет вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\gamma \frac{m M_3}{r^2} \cdot \frac{r}{r} + km u, \quad (1)$$

где $m = m(t)$; M_3 — масса Земли. Уравнение (1) приводит к интегралу движения

$$\frac{\dot{z}^2}{2} - \frac{\gamma M_3}{z} - kuz = C;$$

здесь начало координат совмещено с центром Земли, а ось z направлена вдоль радиуса-вектора).

Так как

$$C = -\frac{\gamma M_3}{R} - kuR$$

R — радиус Земли), то к концу активного участка траектории

$$\dot{z}_a^2 = 2 \left\{ \gamma M_3 \left(\frac{1}{z_a} - \frac{1}{R} \right) - ku(R - z_a) \right\}$$

(z_a — координата положения ракеты, в котором двигатель прекращает работу). Закон сохранения энергии на пассивном участке траектории приводит к выражению

$$\dot{z}^2 = \dot{z}_a^2 + 2\gamma M_3 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_a} \right).$$

Из двух последних равенств находим

$$z_{\max} = \frac{\gamma M_3 R}{\gamma M_3 - kuR(z_a - R)}.$$

2.70.

$$A = \frac{m_0^2 g}{2c} \left(\frac{m_0 g}{3c} + \dot{z}_0 \right).$$

2.71. Направим ось z по вертикали вверх и допустим, что скорость конденсирующихся частиц относительно капли равна $u_z = -\dot{z}$, где z — координата центра масс капли. Тогда уравнение Мещерского дает $m\ddot{z} = -mg - m\dot{z}$ или $\frac{d}{dt} m\dot{z} = -mg$. Следовательно,

$$\dot{z} = -\frac{g}{m} \int_0^t m dt. \quad (1)$$

Зависимость $m(t)$ найдем из уравнения $\dot{m} = \alpha s$. Поскольку $s = 4\pi r^2$, а $m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$, то

$$\dot{m} = 3\beta m^{2/3}; \quad \beta = \frac{4\pi\alpha}{3} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{2/3},$$

где ρ — плотность воды.

Интегрируя, находим

$$m = (\beta t + m_0^{1/3})^3. \quad (2)$$

Теперь подставим (2) в (1) и получим

$$\dot{z} = -\frac{g}{(\beta t + m_0^{1/3})^3} \int_0^t (\beta t + m_0^{1/3})^3 dt;$$

в частности, если $m_0 = 0$, то

$$\dot{z} = -\frac{gt}{4}.$$

2.72. Максимальная высота подъема снаряда

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{8g} (1 + \sin \alpha)^2 \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right)^{\frac{ku-g}{g}} \left\{ \frac{g}{ku-g} \left[1 - \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^{\frac{ku-g}{g}} \right] - \frac{g}{ku+g} \left[1 - \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^{\frac{ku+g}{g}} \right] \right\}.$$

2.74. Направляя ось x по прямой, соединяющей центр диска и шарик, для потенциальной энергии взаимодействия шарика и элемента dm массы диска найдем

$$dU(x) = -\gamma \frac{m_1 dm}{\sqrt{\rho^2 + x^2}} = -\gamma \frac{m_1 \sigma \rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + x^2}}; \quad \sigma = \frac{m_2}{\pi R^2}.$$

Следовательно,

$$U(x) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\pi R^2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} = -\frac{2\gamma m_1 m_2}{R^2} (\sqrt{R^2 + x^2} - x).$$

Теперь используем закон сохранения полной энергии в системе центра масс диска и шарика

$$0 - \frac{2\gamma m_1 m_2}{R^2} (\sqrt{R^2 + l^2} - l) = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{2\gamma m_1 m_2}{R};$$

здесь l — расстояние между шариком и центром диска в начальный момент времени, v — относительная скорость шарика и диска в момент соударения. Отсюда получим

$$v^2 = \frac{4\gamma}{R^2} (m_1 + m_2) (R + l - \sqrt{R^2 + l^2});$$

в частности, при $l \gg R$

$$v^2 \approx 2\gamma (m_1 + m_2) \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{l} \right).$$

2.75. Из закона сохранения горизонтальной составляющей импульса

$$m_1 v_0 + 0 = (m_1 + m_2) v,$$

где v — скорость тела 1 в момент остановки, получим

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0. \quad (1)$$

Из закона изменения полной энергии системы

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -km_1gs$$

с учетом (1) находим искомое расстояние

$$s = \frac{m_2v_0^2}{2kg(m_1 + m_2)}.$$

2.76. В силу симметрии начальных условий и центральности гравитационного взаимодействия движение каждой из частиц описывается функциями $r_1 = r_2 = r_3 = r$; $\theta_1 = \theta$; $\theta_2 = \theta + 2\pi/3$; $\theta_3 = \theta + 4\pi/3$. Учитывая это и используя закон сохранения энергии системы

$$\frac{3m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - 3\gamma\frac{m^2}{r\sqrt{3}} = \frac{3m}{2}v_0^2 - \frac{3\gamma m^2}{a}$$

и ее кинетического момента

$$3mr^2\dot{\theta} = 3m\frac{a}{\sqrt{3}}v_0\sin 30^\circ,$$

находим

$$\dot{r}^2 = v_0^2 - \frac{2\gamma m}{a} - \frac{a^2v_0^2}{12r^2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\gamma m}{r}.$$

Отсюда, полагая $\dot{r} = 0$, найдем границы движения:

$$r_{1,2} = \frac{1}{\left(\frac{2\gamma m}{a} - v_0^2\right)} \left[\frac{\gamma m}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{(\gamma m)^2}{3} + \left(v_0^2 - \frac{2\gamma m}{a}\right) \frac{a^2v_0^2}{12}} \right].$$

Каждая из частиц движется по эллиптической орбите вокруг центра масс системы.

2.77. Введем цилиндрические координаты с началом в отверстии и осью z , направленной по вертикали вверх. Тогда закон сохранения энергии системы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{\rho}^2 + m_2g(\rho - l) &= \\ &= \frac{m_1}{2}\rho_0^2\omega_0^2 + m_2g(\rho_0 - l). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\dot{\varphi}$ из закона сохранения кинетического момента

$$\dot{\varphi} = \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \omega_0$$

и полагая $\dot{\rho} = 0$ для $\rho = \rho_{\min}$ и $\rho = \rho_{\max}$, приходим к кубическому уравнению

$$\rho^3 - 2a\rho^2 + b = 0,$$

где

$$a = \frac{1}{2} \left(\rho_0 + \frac{m_1 \rho_0^2}{2m_2 g} \omega_0^2 \right); \quad b = \frac{\rho_0^4 \omega_0^2 m_1}{2m_2 g}.$$

Так как в начальный момент времени $\dot{\rho} = 0$, кубическое уравнение имеет корень $\rho = \rho_0$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Остальные два корня ρ_1 и ρ_2 определяются любой парой из следующих трех уравнений (согласно теореме Виетта):

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_0 = 2a;$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_0} = 0;$$

$$\rho_0 \rho_1 \rho_2 = -b.$$

Любое из двух последних уравнений показывает, что кроме корня ρ_0 существует только один положительный корень, например ρ_1 . Комбинируя первое и третье уравнения, легко найдем

$$\rho_1 = \frac{b}{2\rho_0^2} + \sqrt{\frac{b^2}{4\rho_0^4} + \frac{b}{\rho_0}}.$$

Траектория точки I будет лежать между окружностями радиусов ρ_0 и ρ_1 .

2.78. Совместим начало O неподвижной системы координат с центром диска до соударения и направим ось z вертикально вверх. Учитывая, что на высоте h начальная скорость шарика массы m равна нулю, из закона сохранения энергии получаем скорость точки перед ударом ($t = -0$):

$$\dot{z} = -\sqrt{2gh}. \quad (1)$$

Закон сохранения энергии при упругом соударении приводит к равенству

$$\frac{m\dot{z}_0^2}{2} = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{M}{2} \dot{Z}^2, \quad (2)$$

где \dot{z} и \dot{Z} — соответственно скорости шарика и диска после удара (M — масса диска).

Пренебрегая воздействием силы тяжести и упругой силы пружины за время соударения, можно записать закон сохранения импульса:

$$m\dot{z}_0 = m\dot{z} + M\dot{Z}. \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) получим, что материальная точка после упругого удара полетит вверх по закону

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \sqrt{2gh} \frac{M-m}{M+m} t$$

(это возможно при $M > m$), а затем будет падать на диск по закону

$$z = -\frac{gt^2}{2} + h \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

Диск при этом будет совершать гармонические колебания

$$Z = -\sqrt{\frac{2Mgh}{k}} \cdot \frac{2m}{M+m} \sin \sqrt{k/M} t,$$

где k — жесткость пружины.

Максимальная частота соударений в начале координат равна $2\sqrt{k/M}$. Такие соударения будут иметь место, если

$$2 \frac{M-m}{M+m} \sqrt{\frac{2kh}{Mg}} = \pi.$$

В случае неупругого удара из закона сохранения импульса получим

$$m\dot{z}_0 = (m+M)\dot{z} = (m+M)\dot{Z}.$$

Таким образом, диск вместе с материальной точкой совершают синусоидальные колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}},$$

начальной фазой

$$\varphi = \arctg \left(-\sqrt{\frac{(m+M)g}{2kh}} \right)$$

и амплитудой

$$A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+M)g}}$$

около положения равновесия $z_{eq} = -mg/k$.

Задача двух тел и рассеяние частиц

§ 1. Движение двух взаимодействующих материальных точек

3.1. В системе центра масс из законов сохранения энергии и кинетического момента имеем

$$\frac{\mu \dot{\rho}^2}{2} + U_{\text{eff}} = E_0,$$

где

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_0^2}{2\mu\rho^2} + \frac{\kappa}{2} (\rho - a)^2.$$

Для круговой орбиты

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \rho} = -\frac{M_0^2}{\mu\rho^3} + \kappa(\rho - a) = 0,$$

поэтому

$$M_0^2 = \mu\kappa(l - a)l^3 = (\mu l v)^2$$

и, следовательно, относительная скорость v равна

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu} l(l - a)}.$$

Таким образом,

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{\mu}{m_1} v_{\text{отн}} = \frac{1}{m_1} \sqrt{\kappa\mu l(l - a)};$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v = \frac{\mu}{m_2} v_{\text{отн}} = \frac{1}{m_2} \sqrt{\kappa\mu l(l - a)}.$$

3.2. Так как

$$T = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\alpha}{2\rho} (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi),$$

то

$$\langle T \rangle = \frac{\alpha}{4\pi\rho} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \quad (a > b);$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{(a + b \cos x)^2} = -\frac{\partial}{\partial b} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial b} \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{-\pi b}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

найдем

$$\langle T \rangle = \frac{\alpha}{2\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

3.3. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{\mu v_1^2}{2} = \frac{\mu v'^2}{2} + \Delta \epsilon,$$

где v' — относительная скорость после соударения.
Полагая $v' = 0$, находим

$$v_{1 \min} = \sqrt{\frac{2\Delta \epsilon}{\mu}}.$$

3.4. По условию задачи

$$\epsilon_0 = \frac{\mu v^2}{2}; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (1)$$

где m_1, m_2 — массы α -частицы и ядра азота соответственно; относительная скорость $v = v_1$. Искомая энергия

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$T_1 = \epsilon_0 \frac{m_1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \epsilon_0 = 1,45 \text{ МэВ}.$$

3.5. Указанное в условии приближенное рассмотрение возможно только в том случае, когда кинетическая энергия $mv^2/2$ электрона много больше его потенциальной энергии eQ/r .

В уравнении движения электрона

$$\dot{p} = \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{r} \quad (\alpha = -eQ) \quad (1)$$

положим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \dots; \quad \mathbf{r}_0 = \rho + \mathbf{v}_0 t.$$

Тогда из (1) найдем

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \frac{\alpha}{r_0^3} \mathbf{r}_0 = \frac{\alpha(\rho + \mathbf{v}_0 t)}{(\rho^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}$$

и

$$\mathbf{p}_1(t) = \frac{\alpha}{\rho^2} \cdot \frac{t}{(\rho^2 + v_0^2 t^2)^{1/2}} \rho - \frac{\alpha v_0}{v_0^2 (\rho^2 + v_0^2 t^2)^{1/2}} + \frac{\alpha \rho}{v_0 \rho^2}.$$

Основной вклад в изменение импульса q за все время пролета дает составляющая силы, перпендикулярная скорости \mathbf{v}_0 ; действительно,

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}(\infty) - \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1(\infty) = \frac{\alpha}{v_0 \rho^2} \rho.$$

Зависимость $\mathbf{p}(t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{q} \frac{q}{2} \left(1 + \frac{v_0 t}{(\rho^2 + v_0^2 t^2)^{1/2}} \right) - \frac{\alpha v_0}{v_0^2 (\rho^2 + v_0^2 t^2)^{1/2}}.$$

3.6. Изменение импульса μ -точки определяется уравнением

$$\mu \dot{\mathbf{v}} = - \frac{\alpha n}{r^{n+2}} \mathbf{r},$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$; $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

В первом приближении (см. задачу 3.5) изменение относительной скорости равно

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- &= - \frac{\alpha n}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho + v_0 t) dt}{[\rho^2 + v_0^2 t^2]^{1 + \frac{n}{2}}} = \\ &= \frac{\alpha \rho n}{\mu v_0 \rho^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Полагая $\mathbf{v}^+ = v_0 \mathbf{n}_\theta$, где $v_0 = |\mathbf{v}^+| = |\mathbf{v}^-|$, из (1) получим

$$|\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-| = 2 v_0 \sin \frac{\theta}{2} \approx v_0 \theta = \frac{\alpha n}{\mu v_0 \rho^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

В частности, для кулоновского поля $n = 1$ и поэтому $\theta \approx \frac{2a}{\mu v_0^2 \rho}$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \right).$$

3.7. В первом приближении переданный импульс

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} U(\rho + \mathbf{v}_0 t) dt = \\ &= -g \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\rho^2 + v_0^2 t^2)^{1/2}}}{[\rho^2 + v_0^2 t^2]^{1/2}} dt. \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu(x^2 + a^2)^{1/2}}}{(x^2 + a^2)^{1/2}} dx = 2K_0(a\mu),$$

где $K_n(x)$ — функция Макдональда n -го порядка [8, 27]. Эта функция обладает свойством

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x).$$

Тогда получим

$$\mathbf{q} = \frac{2g\mu}{v_0} K_1(\rho\mu) \frac{\rho}{\rho}.$$

При $x \ll 1$

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x}; \quad \mathbf{q} \approx \frac{2g}{v_0 \rho} \cdot \frac{\rho}{\rho}.$$

При $x \gg 1$

$$K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}; \quad \mathbf{q} \approx \frac{g}{v_0} \sqrt{\frac{2\pi\mu}{\rho}} e^{-\mu\rho} \frac{\rho}{\rho}.$$

3.8. Напряженность магнитного поля, создаваемого диполем, равна

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \mathbf{A} = \left[\nabla \frac{1}{r}, \boldsymbol{\mu} \right],$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — момент диполя.

В первом приближении передача импульса $\mathbf{q} = \mathbf{p}(\infty) - \mathbf{p}_0$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\frac{e_0}{c} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}(\rho + \mathbf{v}_0 t)] dt = \\ &= -\frac{2e_0}{\rho^2 c v_0} \left([\mathbf{v}_0 \boldsymbol{\mu}] - \frac{2}{\rho^2} [\mathbf{v}_0 \boldsymbol{\rho}] (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\rho}) \right). \end{aligned}$$

3.9. В системе отсчета, связанной со стенкой, скорость шарика до соударения равна $(\mathbf{v} - \mathbf{u})$. После соударения его скорость равна $-2(\mathbf{nv} - \mathbf{nu})\mathbf{n} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$, где \mathbf{n} — нормаль к плоскости. В лабораторной системе скорости шарика после соударения равна

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2(\mathbf{nv} - \mathbf{nu})\mathbf{n}.$$

3.10. Максимальная скорость, приобретаемая ядром H в результате соударения с нейтроном, равна

$$v_H = \frac{2m_n v_n}{m_n + m_H}.$$

Из этой формулы определить m_n нельзя, так как неизвестна v_n . Чтобы определить m_n , Чэдвик рассмотрел соударения нейтронов с ядрами азота, максимальная скорость которых

$$v_N = \frac{2m_n v_n}{m_n + m_N}.$$

В результате

$$m_n = \frac{m_N v_N - m_H v_H}{v_H - v_N} = 1,16 \text{ а. е. м.}$$

(установленное более точное значение массы нейтрона, равно 1,0089 а. е. м.).

3.11. В системе координат, связанной с частицей, для угла рассеяния θ имеем

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}'}{v^2},$$

где \mathbf{v} , \mathbf{v}' — векторы относительной скорости до и после рассеяния. С другой стороны, для угла рассеяния θ_m в системе центра масс имеем

$$\cos \theta_m = \frac{(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_m) (\dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{r}}'_m)}{|\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_m| |\dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{r}}'_m|},$$

где \mathbf{r} и \mathbf{r}_m — радиусы-векторы μ -точки и центра масс соответственно. Отсюда заключаем, что

$$\theta = \theta_m.$$

3.12. Считая, что после рассеяния относительная скорость $v^+ = -v \mathbf{n}_0$, найдем скорости частиц после рассеяния:

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_m + \frac{m_2}{m} v \mathbf{n}_0;$$

$$\mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_m - \frac{m_1}{m} v \mathbf{n}_0;$$

здесь v_m — скорость центра масс; $m = m_1 + m_2$. Отсюда

$$\mathbf{p}_1^+ = m_1 \mathbf{v}_m + \mu v \mathbf{n}_0; \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_2^+ = m_2 \mathbf{v}_m - \mu v \mathbf{n}_0. \quad (2)$$

Направим ось z параллельно скорости центра масс. Тогда из (1) получим (θ, φ — полярный и азимутальный углы вектора \mathbf{n}_0)

$$p_{1z}^+ = m_1 v_m + \mu v \cos \theta;$$

$$p_{1x}^+ = \mu v \sin \theta \cos \varphi; \quad (3)$$

$$p_{1y}^+ = \mu v \sin \theta \sin \varphi.$$

Из (3) находим

$$(p_{1z}^+ - m_1 v_m)^2 + (p_{1x}^+)^2 + (p_{1y}^+)^2 = (\mu v)^2. \quad (4)$$

Следовательно, уравнением поверхности является сфера радиуса μv с центром в «точке» $m_1 v_m$ на оси p_z .

Аналогично из (2) найдем

$$(p_{2z}^+ - m_2 v_m)^2 + (p_{2x}^+)^2 + (p_{2y}^+)^2 = (\mu v)^2.$$

Рассмотрим частный случай рассеяния на неподвижной мишени.

Тогда $v_m = \frac{m_1}{m} v_1^-$; $v \equiv v_1^-$ и (4) переходит в уравнение ($k = m_1/m_2$)

$$(p_{1z}^+ - k \mu v_1^-)^2 + (p_{1x}^+)^2 + (p_{1y}^+)^2 = (\mu v_1^-)^2.$$

1) При $k < 1$ сфера охватывает начало координат; возможны все углы рассеяния θ_1 .

2) При $k = 1$ сфера проходит через начало координат. Предельный угол рассеяния $\theta_1 = \pi/2$.

3) При $k > 1$ начало координат лежит вне сферы. Предельный угол рассеяния $\theta_{1 \max} = \arcsin(m_2/m_1)$. Кроме того, одному углу рассеяния θ_1 соответствуют два угла рассеяния в системе центра масс:

$$\cos \theta_m = -k^2 \cos^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}.$$

§ 2. Сечения рассеяния и захвата частиц

3.13. Ответ:

$$\left| \frac{d \cos \theta_m}{d \cos \theta_2} \right| = \begin{cases} 2k \cos \theta_2 + \frac{1 + k^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_2}}, & k = \frac{m_2}{m_1} \leq 1; \\ \frac{1 + k^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_2}}, & k \geq 1; \end{cases}$$

$$\left| \frac{d \cos \theta_m}{d \cos \theta_1} \right| = 4 \cos \theta_1.$$

3.14. Максимальное значение прицельного параметра, при котором столкновения еще возможны, найдем из условия

$$U_{\text{eff}}|_{r=r_{\text{min}}+2a} = E_0 r_{\text{min}} = 2a.$$

Отсюда получим

$$\rho_{\text{max}}^2 = 4a^2 + \frac{4a}{mv^2}$$

и, следовательно,

$$\sigma = 4\pi a^2 + \frac{4\pi a}{mv^2}.$$

3.15. Вводя безразмерный прицельный параметр

$$b = \rho \left(\frac{T_\infty}{\alpha} \right)^{1/n} \left(T_\infty = \frac{\mu v^2}{2} \right),$$

найдем

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi \left(\frac{2\alpha}{\mu} \right)^{2/n} v^{-4/n} b db.$$

Величина

$$v d\sigma = 2\pi \left(\frac{2\alpha}{\mu} \right)^{2/n} v^{(n-4)/n} b db$$

является важным множителем, входящим в кинетическое уравнение Больцмана.

Молекулы, взаимодействие которых определяется потенциалом с $n=4$, называются максвелловскими молекулами. Для таких молекул вес рассеяния $v d\sigma$ не зависит от относительной скорости. Угол рассеяния в системе центра масс для случая $n=4$ может быть представлен в виде эллиптического интеграла

$$\theta = \pi - \frac{2\rho v}{\mu} \int_0^{u_2} \frac{du}{\sqrt{(u_0^2 - u^2)(u^2 + u_1^2)}},$$

где

$$u = 1/r;$$

$$u_0^2 = \frac{v\mu}{4\alpha} \left(-\rho^2 v + \sqrt{\rho^4 v^2 + \frac{8\alpha}{\mu}} \right);$$

$$u_1^2 = \frac{v\mu}{4\alpha} \left(\rho^2 v + \sqrt{\rho^4 v^2 + \frac{8\alpha}{\mu}} \right).$$

3.16. Согласно задаче 3.6

$$\rho^n = \frac{\alpha n}{\mu v^2 \theta} B \left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right),$$

где B — бета-функция [8]. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_m} &= \sigma(\theta_M) = \frac{1}{2\theta} \left| \frac{d\rho^2}{d\theta} \right| = \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{\alpha n}{\mu v^2} B \left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right) \right]^{2/n} \frac{1}{\theta^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}. \end{aligned}$$

В частности, для кулоновского поля ($n=1$)

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{2\alpha^2}{\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}.$$

3.17. При рассеянии частиц большой энергии угол рассеяния определяется переданным импульсом

$$\mathbf{q} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(r)}{\partial \rho} dt \quad (\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t); \quad (1)$$

$$q^2 = 4m^2 v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sim (mv\theta)^2. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\rho}{r}; \quad dt = \frac{r dr}{v \sqrt{r^2 - \rho^2}},$$

из (1) и (2) находим

$$\theta(\rho) = - \frac{2}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\rho dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что прицельный параметр зависит не от угла θ и кинетической энергии T порознь, а только от их комбинации $\tau = \theta T$.

Из определения сечения

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} \rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|$$

вытекает, что

$$\frac{1}{2} \rho^2(\theta) = \int \sigma(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (4)$$

Поэтому функцию $\rho(\theta)$ или $\theta(\rho)$ будем считать заданной (если есть данные о зависимости $\sigma(\theta)$ в достаточно широкой области углов).

Умножая (3) на $\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$ и интегрируя по ρ в пределах (x, ∞) , получим

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{\tau(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} &= - \int_x^\infty \rho d\rho \int_\rho^\infty \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)(\rho^2 - x^2)}} = \\ &= - \int_x^\infty \frac{\partial U}{\partial r} dr \int_x^r \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)(\rho^2 - x^2)}} = - \frac{\pi}{2} \int_x^\infty \frac{\partial U}{\partial r} dr = \frac{\pi}{2} U(x). \end{aligned}$$

Следовательно, потенциальная энергия

$$U(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^\infty \frac{T \theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}.$$

3.18. Сначала вычислим относительную скорость после рассеяния как функцию прицельного параметра ϱ : $\mathbf{v}^{+'} = \mathbf{v}^{+'}(\mathbf{v}^-, \varrho)$ (\mathbf{v}^- — относительная скорость до рассеяния). Если ввести декартову систему координат с осью z , направленной параллельно относительной скорости до рассеяния, то из этого соотношения можно найти $\rho_x(\theta, \varphi)$, $\rho_y(\theta, \varphi)$ (θ, φ — соответственно полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{v}^{+'}$). Тогда дифференциальное сечение рассеяния

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\rho_x d\rho_y = \left| \frac{\mathcal{D}(\rho_x, \rho_y)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)} \right| \cdot \frac{d\Omega}{\sin \theta} = \\ &= \left| \frac{\partial \rho_x}{\partial \cos \theta} \cdot \frac{\partial \rho_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho_x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \rho_y}{\partial \cos \theta} \right| d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

В общем случае дифференциальное сечение зависит от полярного и азимутального углов.

Если ввести азимутальный угол φ_0 вектора ϱ ($\rho_x = \rho \cos \varphi_0$, $\rho_y = \rho \sin \varphi_0$), то $d\sigma$ может быть представлено в виде

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi_0 = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{\mathcal{D}(\rho, \varphi_0)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)} \right| d\Omega = \\ = \rho \left| \frac{\partial \rho}{\partial \cos \theta} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \cos \theta} \right| d\Omega.$$

3.19. Сила, действующая на электрон в поле диполя, равна

$$\mathbf{F} = -\nabla U; \quad U = e\varphi = e \frac{d\mathbf{r}}{r^3}.$$

Поэтому

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{r^3}.$$

Отсюда найдем изменение импульса в процессе рассеяния

$$\mathbf{q} = -e \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d\rho) dt}{[\rho^2 + \sigma^2 t^2]^{3/2}} = -e \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho^2 v}.$$

Затем получим

$$\mathbf{q} = -\frac{e}{v} \left(\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \frac{\rho}{\rho^2} = -\frac{e}{v\rho^2} \left\{ \mathbf{d} - 2\rho \frac{(\rho \mathbf{d})}{\rho^2} \right\}.$$

Пусть ось z параллельна \mathbf{v} , а вектор \mathbf{d} параллелен оси x . Тогда

$$q_x = mv \sin \theta \cos \varphi = \frac{ed}{v\rho^2} \cos 2\varphi_0; \quad (1)$$

$$q_y = mv \sin \theta \sin \varphi = \frac{ed}{v\rho^2} \sin 2\varphi_0. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим, что

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = -\operatorname{tg} \varphi;$$

$$mv \sin \theta \approx mv \theta = \frac{e}{v} \frac{d}{\rho^2}.$$

Следовательно,

$$\rho \frac{d\rho}{d \cos \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \rho^2}{\partial \cos \theta} \approx -\frac{1}{2\theta} \cdot \frac{\partial \rho^2}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ed}{mv^2 \theta^3};$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \cos \theta} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0.$$

Таким образом,

$$d\sigma = \frac{1}{4} \cdot \frac{ed}{mv^2 \theta^3} d\Omega = \frac{ed}{8T_{\infty} \theta^3} d\Omega,$$

т. е. сечение не обладает азимутальной асимметрией.

3.20. Используя уравнение движения заряда

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]; \quad \mathbf{H} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

(g — «заряд» монополя), найдем изменение импульса при рассеянии

$$\mathbf{q} = \frac{eg}{c} [\mathbf{v}\rho] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{t}}{[\rho^2 + v^2 t^2]^{3/2}} = \frac{2eg [\mathbf{v}\rho]}{c v^2}.$$

Следовательно,

$$mv \sin \theta \cos \varphi = - \frac{2eg}{c v} \sin \varphi_0;$$

$$mv \sin \theta \sin \varphi = \frac{2eg}{c v} \cos \varphi_0.$$

Отсюда находим

$$\rho = \frac{2eg}{m c v \theta}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = - \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \cos \theta} \approx - \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{2eg}{m c v \theta^2}; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} = 1; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0.$$

Следовательно,

$$d\sigma = \left(\frac{2eg}{m c v} \right)^2 \frac{1}{\theta^4} d\Omega.$$

3.21. Передача импульса определяется соотношением (см. задачу 3.8)

$$\mathbf{q} = \frac{2e}{c \rho^2} \left(\frac{2[\mathbf{v}\rho]\mu\rho}{\rho^2} - [\mathbf{v}\mu] \right).$$

Если $\mu \uparrow \uparrow \mathbf{v}$, то рассеяния на малые углы не происходит. Если $\mu \perp \mathbf{v}$, то, выбирая оси координат так, чтобы $\mu = (\mu, 0, 0)$, найдем

$$mv \sin \theta \cos \varphi = - \frac{2e\mu}{c \rho^2} \sin 2\varphi_0;$$

$$mv \sin \theta \sin \varphi = \frac{2e\mu}{c \rho^2} \cos 2\varphi_0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = - \operatorname{ctg} \varphi; \quad \rho^2 = \frac{2e\mu}{m c v \theta}; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \rho^2}{\partial \cos \theta} = \frac{e\mu}{m c v \theta^2}; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}.$$

Окончательно получим

$$d\sigma = \frac{e\mu}{2m c v} \cdot \frac{1}{\theta^3} d\Omega.$$

3.22. Уравнение относительного движения заряда e массой m_1 и монополя заряда g массой m_2 в системе их центра масс сводится к уравнению

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{eg}{c} \left[\mathbf{r} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right], \quad (1)$$

где μ — приведенная масса. Из этого уравнения следует, что абсолютная величина относительной скорости является интегралом движения.

После умножения обеих частей (1) слева векторно на \mathbf{r} и простых преобразований находим

$$\frac{d}{dt} \mu [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] = -\frac{eg}{c} \left[\mathbf{r} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right) - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} \right]. \quad (2)$$

Правую часть этого уравнения можно представить в виде

$$\frac{eg}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (3)$$

поэтому интегралом движения является также вектор

$$\mathbf{I} = \mathbf{M} + \mathbf{S} \equiv \mu [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - \frac{eg}{c} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4)$$

Возводя (4) в квадрат, получим

$$I^2 = M^2 + S^2. \quad (5)$$

Отсюда видно, что абсолютная величина кинетического момента

$$M = |\mu [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]|$$

является интегралом движения.

Поскольку имеют место интегралы $M = M_0$ и $v = v_0$, траекторией μ -точки в плоскости, нормальной вектору \mathbf{M} , является прямая. Расстояние этой прямой от начала координат есть прицельный параметр ρ . Следовательно,

$$r^2 = (vt)^2 + \rho^2.$$

Чтобы определить движение вращающейся плоскости, нормальной к \mathbf{M} , направим ось z декартовых координат вдоль вектора \mathbf{J} . В этом случае для азимутального угла сферической системы координат имеем

$$\dot{\psi} = \frac{I}{\mu r^2} = \frac{eg}{\mu c \cos \psi} \cdot \frac{1}{(vt)^2 + \rho^2}, \quad (6)$$

где угол ψ определяется соотношением

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{s}{M} = \frac{eg}{\mu v c}$$

и является половиной угла раствора конуса с осью, параллельной \mathbf{J} , — на этом конусе расположена траектория μ -точки.

Интегрируя (6) по времени, находим полное изменение азимутального угла за время рассеяния:

$$\Phi_{\infty} = \frac{eg \pi}{v \rho \mu c \cos \psi} = \frac{\pi}{\sin \psi}.$$

Угол рассеяния θ_m , как показывает геометрическое построение, связан с углом ψ_{∞} соотношением

$$\cos \theta_m = -\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos \left(\frac{\pi}{\sin \psi} \right),$$

которое вместе с выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(eg/\mu v c)^2 \sin \psi / \cos^4 \psi}{\left| 2 \sin \psi \left[1 + \cos(\pi/\sin \psi) + \frac{\pi}{2} \sin(\pi/\sin \psi) \right] \right|}$$

определяет дифференциальное сечение рассеяния (для малых углов сечение аналогично сечению для кулонового взаимодействия с зарядами e и $e' = gv/c$).

3.23. Реакцию вызовут те протоны, которые, по крайней мере, касаются сферической поверхности ядра. Наименьшее расстояние между протоном и центром ядра определяется уравнением

$$E_0 = U_{\text{eff}}.$$

Полагая это расстояние равным радиусу R ядра, получим

$$E_0 = \frac{Ze^2}{R} + \frac{M_0^2}{2mR^2}.$$

Движение по такой траектории ($r_{\min} = R$) характеризуется моментом импульса протона

$$M_0 = \rho_{\max} \sqrt{2ME_0}.$$

Следовательно,

$$\rho_{\max}^2 = R^2 - \frac{Ze^2 R}{E_0},$$

а сечение реакции

$$\sigma_p = \pi R^2 \left(1 - \frac{Ze^2}{RE_0} \right) \quad \text{при } E_0 > \frac{Ze^2}{R};$$

$$\sigma_p = 0 \quad \text{при } E_0 < \frac{Ze^2}{R}.$$

Сечение реакции для нейтронов

$$\sigma_n = \pi R^2.$$

3.24. Потенциальная эффективная энергия

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{T_{\infty} \rho^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

обладает максимумом при

$$r_1 = \left(\frac{n\alpha}{2T_{\infty}\rho^2} \right)^{\frac{1}{n-2}},$$

а ее экстремальное значение равно

$$U_{\text{eff}}(r_1) = \frac{\alpha}{2} (n-2) \left(\frac{n\alpha}{2T_{\infty}\rho^2} \right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Для точечного тела захват реализуется при $\rho < \rho_0$, для которого $U_{\text{eff}}(r_1, \rho_0) \leq T_{\infty}$; значение

$$\rho_0 = n^{1/2} (n-2)^{\frac{2-n}{2n}} \left(\frac{\alpha}{2T_{\infty}} \right)^{1/n}.$$

В этом случае U_{eff} достигает максимума при

$$r_1(\rho_0) = (n-2)^{1/n} \left(\frac{2T_{\infty}}{\alpha} \right)^{-1/n}.$$

Если $R < r_1(\rho_0)$, то сечение захвата

$$\sigma = \pi \rho_0^2 = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{\alpha}{2T_{\infty}} \right)^{2/n}.$$

Если же $R > r_1(\rho_0)$, то будут захвачены все частицы, для которых $\rho < \rho_1$, где ρ_1 определяется из уравнения

$$\frac{T_{\infty} \rho_1^2}{R^2} - \frac{\alpha}{R^n} = T_{\infty};$$

поэтому

$$\sigma = \pi \rho_1^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{T_{\infty} R^n} \right).$$

3.25. Рассмотрим рассеяние частиц, прицельные расстояния которых лежат в интервале $(\rho, \rho + \Delta\rho)$, при этом согласно условию задачи $\Delta\rho \ll \rho$. Разброс $\Delta\rho$ прицельных расстояний связан

соотношением неопределенностей $\Delta p \Delta r \approx \hbar$ с неточностью Δp , составляющей импульса, перпендикулярной скорости пучка до рассеяния. Эта неточность соответствует ошибке в измерении угла рассеяния на величину

$$\theta_{\text{кв}} \sim \frac{\Delta p}{\mu v} \sim \frac{\hbar}{\mu v \Delta r} \gg \frac{\hbar}{\mu v r}.$$

Для применимости классической механики в теории рассеяния необходимо, чтобы угол рассеяния $\theta_{\text{кл}}$, вычисленный по классической теории, удовлетворял неравенству

$$\theta_{\text{кл}} \gg \theta_{\text{кв}} \gg \frac{\hbar}{\mu v r}.$$

Для кулоновского потенциала $\theta_{\text{кл}} \sim \alpha / \mu v^2 r$, и, следовательно, классическая теория рассеяния справедлива для любых углов, если

$$\frac{\alpha}{\hbar v} \gg 1,$$

т. е. классическая теория справедлива для достаточно медленных частиц.

Для потенциалов, убывающих с расстоянием быстрее, чем кулоновский потенциал,

$$\theta_{\text{кл}} \sim \frac{\alpha}{\mu v^2 r^n} \quad (n > 1).$$

Поэтому всегда найдется прицельный параметр

$$r_1 \sim \left(\frac{\alpha}{\hbar v} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

для которого $\theta_{\text{кл}} \sim \theta_{\text{кв}}$. Таким образом, при $r \geq r_1$ классическая теория неприменима.

ГЛАВА 4

Движение относительно неинерциальных систем отсчета

§ 1. Положение, скорость и ускорение материальной точки относительно разных систем отсчета

4.1. Применяя преобразование Галилея, находим, что в движущейся системе отсчета

$$x' = R \cos \omega t - v_0 t, \quad y' = R \sin \omega t.$$

4.2. В системе S выберем оси так, чтобы

$$x = v_0 t; \quad y = \rho_0.$$

Тогда в системе S' (если в начальный момент оси x и x' совпадают)

$$x' = v_0 t \cos \omega t + \rho_0 \sin \omega t; \quad y' = -v_0 t \sin \omega t + \rho_0 \cos \omega t.$$

4.3. Координаты относительно систем S и S' связаны преобразованием

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t, \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$x' = a \cos^2 \omega t = \frac{a}{2} (1 + \cos 2\omega t); \quad y' = -\frac{a}{2} \sin 2\omega t.$$

Отсюда получим уравнение траектории относительно S'

$$\left(x' - \frac{a}{2}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

4.4. Переход от одной декартовой системы к другой может быть выполнен посредством трех последовательных поворотов, совершаемых в определенном порядке. Прежде всего перейдем к осям $S^*(x^*, y^*, z^*)$, повернув исходную систему на угол φ вокруг оси z против хода часовой стрелки. Тогда $(x^* = x_1^*, y^* = x_2^*, z^* = x_3^*)$

$$x_i^* = D_{ik} x_k, \quad D_{ik} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Затем перейдем к осям $S^{**}(x^{**}, y^{**}, z^{**})$, совершив поворот S^* на угол θ вокруг оси x^* против хода часовой стрелки. В результате получим

$$x_i^{**} = C_{li}x_i^*; \quad C_{li} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Перейдя, наконец, к осям $S'(x', y', z')$ с помощью поворота системы S^{**} на угол ψ вокруг оси z^{**} против хода часовой стрелки, найдем

$$x'_m = B_{ml}x_l^{**},$$

где

$$B_{ml} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, суммарное преобразование

$$x'_m = B_{ml}C_{li}D_{ik}x_k = A_{mk}x_k$$

определяется матрицей A с элементами

$$a_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi;$$

$$a_{21} = -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi;$$

$$a_{31} = \sin \theta \sin \varphi;$$

$$a_{12} = \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi;$$

$$a_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi;$$

$$a_{32} = -\sin \theta \cos \varphi;$$

$$a_{13} = \sin \psi \sin \theta;$$

$$a_{23} = \cos \psi \sin \theta;$$

$$a_{33} = \cos \theta.$$

Преобразование координат

$$x_i = A_{ik}^{-1}x'_k,$$

обратное рассмотренному, определяется матрицей, транспонированной относительно матрицы A .

4.5. Для двух наблюдателей, находящихся в поступательно движущихся относительно друг друга системах S и S' , скорость точки p может быть записана в виде

$$\mathbf{v}_{ps} = \mathbf{v}_{ps'} + \mathbf{v}_{s's},$$

где v_{ps} — скорость p -того тела относительно s -того. Отсюда, обозначая буквами O, K, B, C соответственно океан, корабль, воздух и самолет, получим

$$\mathbf{v}_{CK} = \mathbf{v}_{CB} + \mathbf{v}_{BK}; \quad \mathbf{v}_{BO} = \mathbf{v}_{BK} + \mathbf{v}_{KO}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_{CK} - \mathbf{v}_{BK} = \mathbf{v}_{CK} - \mathbf{v}_{BO} + \mathbf{v}_{KO}.$$

Направляя оси x и y соответственно на восток и север, найдем

$$(v_{CB})_x = v_1; \quad (v_{CB})_y = -v_2; \quad (v_{CB})_z = -v_3.$$

Следовательно, величина искомой скорости

$$v_{CB} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

4.6. Выберем неинерциальную систему с началом в центре окружности. Так как

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] + \mathbf{v}',$$

то

$$v^2 = a^2 \omega^2 + \omega^2 a^2 + u^2 + 2v_O' [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] + 2v_O' \mathbf{v}' + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] \mathbf{v}'.$$

Учитывая, что

$$v_O' [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] = \omega [\mathbf{r}' v_O'] = \omega^2 a^2 \sin \frac{u}{a} t; \quad v_O' \mathbf{v}' = \omega a u \sin \frac{u}{a} t;$$

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] \mathbf{v}' = \omega [\mathbf{r}' \mathbf{v}'] = \omega a u,$$

получим

$$v^2 = a^2 \omega^2 + (\omega a + u)^2 + 2\omega a (\omega a + u) \sin \frac{u}{a} t.$$

4.7. а) Цилиндрические координаты.

Разложение радиуса-вектора по ортам $\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\varphi, \mathbf{n}_z$ цилиндрических координат имеет вид

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{n}_\rho + z \mathbf{n}_z.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \rho \dot{\mathbf{n}}_\rho + \dot{z} \mathbf{n}_z + z \dot{\mathbf{n}}_z.$$

Здесь

$$\dot{\mathbf{n}}_\rho = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_\rho]; \quad \dot{\mathbf{n}}_\varphi = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_\varphi]; \quad \dot{\mathbf{n}}_z = 0,$$

где $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{n}_z$ — угловая скорость триэдра $\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\varphi, \mathbf{n}_z$ относительно системы отсчета $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$. Таким образом, получим

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi + \dot{z} \mathbf{n}_z;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{n}}_\rho + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) \mathbf{n}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{n}_z = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \mathbf{n}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} (\rho^2\dot{\varphi}) \mathbf{n}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{n}_z. \end{aligned}$$

б) Сферические координаты.

Разложение радиуса-вектора по ортам \mathbf{n}_r , \mathbf{n}_θ , \mathbf{n}_φ сферических координат имеет вид

$$\mathbf{r} = r \mathbf{n}_r,$$

а угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ триэдра \mathbf{n}_r , \mathbf{n}_θ , \mathbf{n}_φ относительно системы отсчета \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z равна $\boldsymbol{\omega} = \theta \mathbf{n}_\varphi + \dot{\varphi} \mathbf{n}_z$. Отсюда, учитывая, что

$$\mathbf{n}_z = \mathbf{n}_r \cos \theta - \mathbf{n}_\theta \sin \theta,$$

получим

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{n}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{n}_\theta + \dot{\theta} \mathbf{n}_\varphi.$$

Поэтому

$$\dot{\mathbf{n}}_r = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_r] = \dot{\theta} \mathbf{n}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{n}_\varphi;$$

$$\dot{\mathbf{n}}_\theta = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_\theta] = -\dot{\theta} \mathbf{n}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{n}_\varphi;$$

$$\dot{\mathbf{n}}_\varphi = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_\varphi] = -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{n}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{n}_\theta.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{n}_r + r \dot{\mathbf{n}}_r = \dot{r} \mathbf{n}_r + r \dot{\theta} \mathbf{n}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{n}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{n}_\theta + \\ &+ (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{n}_\varphi. \end{aligned}$$

§ 2. Уравнения движения и законы сохранения относительно неинерциальных систем отсчета

4.8. Запишем уравнение движения в системе отсчета с началом в точке подвеса

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} - m\mathbf{a}, \quad (1)$$

где \mathbf{R} — натяжение нити.

Проектируя обе части (1) на касательную к окружности — траектории маятника, получим

$$m l \ddot{\varphi} = -m g \sin \varphi - m a \cos \varphi.$$

Полагая здесь $g = \sqrt{a^2 + g^2} \cos \varphi_{eq}$; $a = -\sqrt{a^2 + g^2} \sin \varphi_{eq}$, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l} \sin n(\varphi - \varphi_{eq}) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, положение равновесия определяется углом φ_{eq} . Производя в (2) замену $\varphi = \varphi_{eq} + x$, находим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0; \quad \omega^2 = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}.$$

Решение этого уравнения см. в задаче 7.1.

4.9. Условие равновесия маятника в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω и движущейся с ускорением w_0 , имеет вид

$$R + mg = mw_{0r} - m\omega^2 r.$$

Проектируя обе части этого уравнения на горизонталь и вертикаль и исключая реакцию подвеса R , найдем величину ускорения

$$w_{0r} = -g + \omega^2 l \cos \varphi,$$

где l — длина подвеса маятника.

4.10. В системе отсчета, жестко связанной с треугольником, выберем декартовы координаты с осью y , направленной вдоль основания треугольника, и началом координат в точке равновесия шарика. В этой системе имеем уравнение

$$m\ddot{y} + (2x - m\omega^2)y = 0,$$

решение которого запишем в виде

$$y = a \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

где a, φ_0 — постоянные, определяемые начальными условиями, а

$$\Omega = \sqrt{2 \frac{x}{m} - \omega^2}$$

есть частота колебаний (она не зависит от параметров треугольника).

В инерциальной системе отсчета найдем закон движения шарика:

$$x = h \cos \omega t - a \cos(\Omega t + \varphi_0) \sin \omega t;$$

$$y = h \sin \omega t + a \cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \omega t.$$

4.11. Из закона сохранения энергии во вращающейся системе отсчета следует, что

$$\frac{mv^2}{2} + mgs \cos \alpha - \frac{m}{2} \omega^2 s^2 \sin^2 \alpha = E'_0,$$

где s — расстояние, отсчитываемое вдоль прямой. Следовательно,

$$v^2 = \frac{2}{m} \left(E'_0 - mgs \cos \alpha + \frac{m}{2} \omega^2 s^2 \sin^2 \alpha \right).$$

4.12. В системе отсчета, вращающейся вместе с кривой, имеет место закон сохранения энергии шарика

$$\frac{mv^2}{2} + mgy - \frac{m}{2} [\omega \mathbf{r}]^2 = E'_0.$$

Полагая здесь $v = 0$ и раскрывая $[\omega \mathbf{r}]^2$, найдем

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + \frac{E'_0}{mg}.$$

4.13. Пусть ось x' вращающейся с угловой скоростью ω системы координат направлена вдоль трубки. Тогда уравнение движения шарика относительно трубки имеет вид

$$m\ddot{x}' + \kappa(x' - l_0) - m\omega^2 x' = -mg \sin \omega t,$$

где κ — жесткость пружины, а l_0 — ее длина в ненапряженном состоянии. Решением этого уравнения является

$$x' = \frac{g}{\omega^2 - \Omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega t \right) + \frac{l_0}{\Omega^2} \left(\frac{\kappa}{m} - \omega^2 \cos \Omega t \right),$$

где $\Omega^2 = \frac{\kappa}{m} - \omega^2$. Подставляя полученное решение в формулы преобразования

$$x = x' \cos \omega t; \quad y = x' \sin \omega t,$$

найдем закон движения шарика в неподвижных координатах.

4.14. Записывая уравнение движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m[\omega \mathbf{v}] - m[\omega [\omega \mathbf{r}]]$$

в координатах

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} + \omega^2 x; \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -2\omega \dot{x} + \omega^2 y; \tag{2}$$

$$\ddot{z} = -g \tag{3}$$

и вводя перемещенную $\xi = x + iy$, из (1) — (2) получим

$$\ddot{\xi} - \omega^2 \xi + 2i\omega \dot{\xi} = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\xi = e^{-i\omega t} (A + Bt).$$

Полагая здесь $A = ae^{i\alpha}$; $B = be^{i\beta}$, найдем

$$x = a \cos(\omega t - \alpha) + bt \cos(\omega t - \beta);$$

$$y = -a \sin(\omega t - \alpha) - bt \sin(\omega t - \beta);$$

кроме того, из (3) имеем:

$$z = -gt^2/2 + \dot{z}_0 t + z_0.$$

При движении точки сохраняются обобщенная энергия и проекция момента вектора обобщенного импульса на ось z :

$$\frac{mv^2}{2} + mgz - \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = E'_0;$$

$$m(x\dot{y} - \dot{x}y) + m\omega(x^2 + y^2) = M_{z0}.$$

4.15. Во вращающейся вместе с окружностью системе отсчета имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - mgr - \frac{m}{2} [\omega r]^2 = E'_0.$$

Выберем начало координат в верхней точке окружности и направим ось x вдоль хорды, а ось y перпендикулярно хорде в плоскости окружности. Тогда, учитывая, что в рассматриваемой задаче $E'_0 = 0$, получим уравнение

$$\frac{mx^2}{2} - mgx \cos \varphi - \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

Отсюда получим интеграл, определяющий время движения точки:

$$t = \int_0^{2R \cos \varphi} \frac{dx}{\sqrt{\omega^2 x^2 \sin^2 \varphi + 2gx \cos \varphi}}.$$

Вычисление этого интеграла приводит к следующему результату:

$$t = \frac{1}{\omega \sin \varphi} \ln \left[\frac{1}{g} \sqrt{2R\omega^2 \sin^2 \varphi (2R\omega^2 \sin^2 \varphi + 2g)} + \right. \\ \left. + \frac{2R\omega^2 \sin^2 \varphi}{g} + 1 \right].$$

4.16. В системе отсчета, связанной с Землей, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}_0' - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] - 2m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'],$$

где \mathbf{F}_0' — сила притяжения Земли, а \mathbf{r}' — радиус-вектор точки с началом в центре инерции Земли. Введем теперь систему отсчета

S' с началом на поверхности Земли. Полагая $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, (\mathbf{R} — радиус-вектор начала S , проведенный из центра масс Земли), получим

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}], \quad (1)$$

где $\mathbf{g} = -\frac{\gamma M}{R^3}\mathbf{R} + [\boldsymbol{\omega}[\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}]]$ (M — масса Земли).

Отношения максимальных величин основной части центробежной силы, силы $m\omega^2 r$ и силы Кориолиса к силе притяжения ($\omega = 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$) соответственно равны

$$\frac{m\omega^2 R}{F_0} \approx 3,2 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{m\omega^2 r}{F_0} \approx 0,5 \cdot 10^{-9} r; \quad \frac{F^c}{F_0} = \frac{2\omega R^2}{\gamma M} v \approx 1,5 \cdot 10^{-5} v$$

(здесь r и v — численные значения в системе СИ).

Следовательно, при $r \ll 3,0 \cdot 10^4 v$ частью центробежной силы $\sim m\omega^2 r$ в (1) можно пренебречь.

4.17. Исходным уравнением движения является

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}], \quad (1)$$

где $\mathbf{g} = -\frac{\gamma M}{R^3}\mathbf{R} - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}]]$; \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из центра Земли в ту точку ее поверхности, в окрестности которой рассматривается движение тела (см. задачу 4.16). Ищем решение (1) в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{r}^{(1)} + \dots, \quad (2)$$

где $|\mathbf{r}^{(1)}| \sim \frac{\omega v}{g} |\mathbf{r}^{(0)}|$. Подставляя (2) в (1) и приравнявая члены одного порядка малости, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(0)} = \mathbf{g}; \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(1)} = -2[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}^{(0)}]. \quad (4)$$

Так как

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)t + \mathbf{g} \frac{t^2}{2},$$

то (4) имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(1)} = 2[\dot{\mathbf{r}}(0)\boldsymbol{\omega}] + 2[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]t.$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = 2[\dot{\mathbf{r}}(0)\boldsymbol{\omega}]t + [\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]t^2;$$

$$\mathbf{r}^{(1)} = [\dot{\mathbf{r}}(0)\boldsymbol{\omega}] \frac{t^2}{2} + [\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] \frac{t^3}{3}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)t + \mathbf{g} \frac{t^2}{2} + [\dot{\mathbf{r}}(0)\boldsymbol{\omega}] \frac{t^2}{2} + [\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] \frac{t^3}{3}.$$

4.18. Уравнение движения маятника Фуко имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] + \mathbf{R}, \quad (1)$$

где \mathbf{R} — реакция нити подвеса.

Выберем ось z по вертикали вверх, ось x направим по касательной к меридиану в направлении север — юг, ось y направим по касательной к параллели в направлении запад — восток. Тогда $\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos \lambda \cdot \mathbf{n}_x + \omega \sin \lambda \cdot \mathbf{n}_z$. Запишем уравнение (1) в компонентах.

$$\ddot{x} = 2\omega \sin \lambda \cdot \dot{y} + \frac{R_x}{m};$$

$$\ddot{y} = -2\omega \cos \lambda \cdot \dot{z} - 2\sin \lambda \cdot \omega \dot{x} + \frac{R_y}{m};$$

$$\ddot{z} = 2\omega \cos \lambda \cdot \dot{y} + \frac{R_z}{m} - g.$$

Ограничимся далее случаем малых колебаний $z \ll l$ ($z_1 = l$ — координата точки подвеса); $\dot{z} \ll \dot{x}$, \dot{y} . В этом случае $R_x \approx -\frac{mg}{l}x$; $R_y \approx -\frac{mg}{l}y$; $R_z \approx mg$. Следовательно, уравнения движения можно записать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega \sin \lambda \cdot \dot{y} = 0; \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega \sin \lambda \cdot \dot{x} = 0,$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

Вводя переменную $\xi = x + iy$, сведем эту систему к уравнению

$$\ddot{\xi} + 2i\omega \sin \lambda \cdot \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0.$$

Его решение ищем в виде $\xi = Ae^{ikt}$. Подстановка дает

$$k_{1,2} = -\omega \sin \lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2 \sin^2 \lambda} \approx -\omega \sin \lambda \pm \omega_0;$$

$$\xi = e^{-i\omega \sin \lambda t} (a_1 e^{i\omega_0 t + i\alpha_1} + a_2 e^{-i\omega_0 t + i\alpha_2}).$$

Отделяя здесь реальную и мнимую части, находим

$$x = a_1 \cos [(\omega_0 - \omega \sin \lambda)t + \alpha_1] + a_2 \cos [(\omega_0 + \omega \sin \lambda)t - \alpha_2];$$

$$y = a_1 \sin [(\omega_0 - \omega \sin \lambda)t + \alpha_1] - a_2 \sin [(\omega_0 + \omega \sin \lambda)t - \alpha_2].$$

Отсюда видно, что при произвольных начальных условиях в отсутствие вращения Земли маятник очерчивает эллипс, а учет вра-

щения Земли приводит к прецессии этого эллипса с угловой скоростью $\omega \sin \lambda$.

4.19. В сферических координатах (с началом координат в точке подвеса и осью z , направленной по вертикали вверх) угловая скорость имеет составляющие

$$\omega_r = -\omega \cos \lambda \sin \theta \cos \varphi + \omega \sin \lambda \cos \theta;$$

$$\omega_\theta = -\omega \cos \lambda \cos \varphi - \omega \sin \lambda \sin \theta;$$

$$\omega_\varphi = \omega \cos \lambda \sin \varphi.$$

Два уравнения движения в координатах, не содержащие реакции подвеса, получаются проектированием обеих частей уравнения движения на орты \mathbf{n}_θ и \mathbf{n}_φ :

$$\frac{d}{dt} l^2 \dot{\theta} - l^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 2l (\omega_r l \sin \theta \dot{\varphi}) + l g \sin \theta; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = -2l \sin \theta \omega_\varphi l \dot{\theta}. \quad (2)$$

Для малых колебаний $\theta = \pi - u$; $u \ll 1$. Тогда (1), (2) имеют вид ($\omega_r \approx -\omega \sin \lambda$)

$$\ddot{u} = u \dot{\varphi}^2 + 2\omega_1 u \dot{\varphi} - \omega_0^2 u; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} u^2 \dot{\varphi} = -2u \omega_1 \dot{u}, \quad (4)$$

где

$$\omega_1 = \omega \sin \lambda; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Из (4) находим интеграл

$$\dot{\varphi} u^2 + \omega_1 u^2 = C. \quad (5)$$

Учитывая (5), из (3) получим

$$\ddot{u} + \omega_2^2 u = \frac{C^2}{u^3} \quad (\omega_2^2 = \omega_0^2 + \omega^2 \sin^2 \lambda). \quad (6)$$

Следовательно,

$$\dot{u}^2 + \omega_2^2 u^2 = -\frac{C^2}{u^2} + C_1; \quad t = \int \frac{du}{\sqrt{C_1 - \frac{C^2}{u^2} - \omega_2^2 u^2}},$$

т. е.

$$u^2 = \frac{1}{2\omega_2^2} \left[C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C^2 \omega_2^2 \sin(2\omega_2 t - C_2)} \right].$$

Таким образом, точка в общем случае колеблется в области

$$\frac{l^2}{2\omega_2^2} (C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4\omega_2^2 C^2}) \leq x^2 + y^2 \leq \frac{l^2}{2\omega_2^2} (C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4\omega_2^2 C^2}),$$

в общем случае не проходя через начало координат. Угловую скорость вращения плоскости колебаний найдем из (5):

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{a^2} - \omega \sin \lambda = \frac{2\omega_2^2 C}{C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C^2\omega_2^2} \sin(2\omega_2 t - C_2)} - \omega \sin \lambda,$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_2 C \operatorname{tg} \omega_2 t}{C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4\omega_2^2 C^2}} \right) - \omega \sin \lambda t.$$

4.20. В системе отсчета, жестко связанной с Землей, движение точки подчинено уравнению движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} - 2m[\omega \dot{\mathbf{r}}] - m[\omega[\omega \mathbf{r}]] \quad (1)$$

(начало координат помещено в центр Земли). Имея в виду выражение для силы, из уравнения изменения момента импульса получим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}] = -2m(\omega(\mathbf{r}\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\omega\mathbf{r})) - m\mathbf{r}\omega. \quad (2)$$

Умножая обе части (2) скалярно на ω , получим

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}\omega = -2m\{\omega^2(\mathbf{r}\mathbf{v}) - (\omega\mathbf{r})(\omega\mathbf{v})\}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}\omega + m[\omega\mathbf{r}]^2 = \text{const}. \quad (3)$$

Другой интеграл вытекает из закона сохранения полной энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} - \frac{m}{2}[\omega\mathbf{r}]^2 = E_0. \quad (4)$$

В сферических координатах интегралы (3) и (4) имеют вид

$$mr^2 \sin^2 \theta (\dot{\varphi} + \omega) = M_{z0}; \quad (5)$$

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} - \frac{m}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = E_0. \quad (6)$$

Проектируя обе части уравнения (1) на орт \mathbf{n}_θ , получим

$$\frac{d}{dt} mr^2 \dot{\theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta (\dot{\varphi} + \omega)^2. \quad (7)$$

Затем, учитывая (5), из (7) найдем

$$\frac{d}{dt} mr^2\dot{\theta} = \frac{M_{z0}^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} = -\frac{M_{z0}^2}{2mr^2} \cdot \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin^2 \theta}. \quad (8)$$

Отсюда, умножая обе части (8) на $r^2\dot{\theta}$, получим

$$m (r^2\dot{\theta})^2 + \frac{M_{z0}^2}{m \sin^2 \theta} = \frac{M_0^2}{m}. \quad (9)$$

Наконец, исключая $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$ из (6), (5), найдем в квадратурах

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 - \frac{M_0^2}{2mr^2} + M_{z0}\omega + \frac{\alpha}{r} \right)}} = t - t_0;$$

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{M_0^2 - \frac{M_{z0}^2}{\sin^2 \theta}}} = \int \frac{dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 - \frac{M_0^2}{2Mr^2} + M_{z0}\omega + \frac{\alpha}{r} \right)}};$$

$$\varphi + \omega t = \int \frac{M_{z0}}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{M_0^2 - \frac{M_{z0}^2}{\sin^2 \theta}}}.$$

4.21. Поскольку Земля и Луна вращаются вокруг общего центра масс, в системе отсчета, связанной с Землей, получим уравнение движения тела (при этом пренебрегаем центробежной силой, силой инерции и силой Кориолиса)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} - m\mathbf{w}_0,$$

здесь \mathbf{F} — сила притяжения тела Луной; \mathbf{w}_0 — ускорение центра Земли относительно центра масс системы Земля — Луна; \mathbf{r} — радиус-вектор тела, проведенный из центра Земли.

Очевидно,

$$\mathbf{w}_0 \approx -\gamma \frac{m_{\text{Л}}}{r_1^3} \mathbf{r}_1,$$

где \mathbf{r}_1 — радиус-вектор, соединяющий центры Луны и Земли. Ясно также, что

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mm_{\text{Л}}}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}|^2} (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1).$$

Таким образом,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + m\Delta\mathbf{g},$$

где

$$\Delta\mathbf{g} = \gamma m_L \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}|^3} \right).$$

Теперь учтем, что $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}_1|$, и, следовательно,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}|^3} \approx \frac{1}{r_1^3} \left(1 - \frac{3\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}}{r_1^2} \right)$$

Тогда получим

$$\Delta\mathbf{g} = \frac{\gamma m_L}{r_1^2} \left(\frac{3\mathbf{r}_1}{r_1^2} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}) - \frac{\mathbf{r}}{r_1} \right). \quad (1)$$

В точке, наиболее удаленной от Луны, вектор (1) имеет величину $\frac{2\gamma m_L}{r_1^3} R$ и направлен от центра Земли, в точке, наиболее

близкой к Луне, вектор (1) имеет величину $\frac{2\gamma m_L}{r_1^3} R$ и также направлен от центра Земли. В точках земной поверхности, которые лежат посередине между наиболее близкой и наиболее далекой точками, вектор (1) направлен к центру Земли и по величине равен $\frac{\gamma m_L}{r_1^3} R$.

Итак, под влиянием Луны в наиболее близкой и далекой от Луны точках ускорение g уменьшается, а на средней линии возрастает на величину $\sim 1,1 \cdot 10^{-6}$ м/с². Этот «малый» эффект приводит к ежесуточному перемещению воды Мирового океана, т. е. к возникновению приливов и отливов, при этом кинетическая энергия перемещающихся масс воды равна $\sim 10^{16}$ кГм

ГЛАВА 5

Уравнения Лагранжа

§ 1. Уравнения Лагранжа с реакциями связей и законы сохранения энергии и момента импульса при наличии связей

5.1. а) Направим ось z вверх по вертикали, а ось y в плоскости движения по горизонтали. Тогда уравнение связи и уравнения движения примут вид

$$f = x \operatorname{tg} \alpha + z = 0; \quad (1)$$

$$m\ddot{x} = \lambda \operatorname{tg} \alpha; \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = 0; \quad (3)$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda. \quad (4)$$

Из (1) получим

$$\ddot{x} \operatorname{tg} \alpha + \ddot{z} = 0. \quad (5)$$

Отсюда, учитывая (2) — (4), найдем

$$\lambda = mg \cos^2 \alpha. \quad (6)$$

Это дает возможность найти закон движения

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{4} g \sin 2\alpha \cdot t^2; \quad (7)$$

$$y = y_0 + \dot{y}_0 t; \quad (8)$$

$$z = -x \operatorname{tg} \alpha = -(x_0 + \dot{x}_0 t) \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha \cdot t^2 \quad (9)$$

и реакцию плоскости

$$R_x = mg \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$R_y = 0;$$

$$R_z = mg \cos^2 \alpha.$$

б) В случае стационарных идеальных связей более удобным приемом решения системы (1) — (4) является следующий прием. Используем закон сохранения полной энергии

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E_0 \quad (10)$$

и исключим отсюда \dot{x} , \dot{y} с помощью (1), (3). Тогда получим

$$\frac{m}{2} [\dot{z}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)] + mgz = E_0 - \frac{m}{2} \dot{y}_0^2 = E_0'. \quad (11)$$

Затем из (11) найдем

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{2 \sin^2 \alpha}{m} (E_0' - mgz)}} = t - t_0.$$

Проще, однако, найти $z(t)$, взяв от обеих частей (11) производную по времени

$$\frac{m\dot{z}\ddot{z}}{\sin^2 \alpha} + mg\dot{z} = 0; \quad \ddot{z} = -g \sin^2 \alpha. \quad (12)$$

Интегрируя (12), получим (9), т. е.

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha \cdot t^2.$$

5.2. Движение точки до соскальзывания подчинено связи

$$f = y^2 - ax = 0.$$

Поэтому уравнения Лагранжа первого рода можно записать в виде

$$m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y; \quad m\ddot{x} = -a\lambda.$$

Если в начальный момент времени точка была на высоте y_0 , то из закона сохранения энергии для квадрата скорости точки получим

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2g(y_0 - y).$$

Учитывая уравнение связи, отсюда находим

$$\dot{y}^2 = 2a^2 g (y_0 - y) / (4y^2 + a^2).$$

Так как, кроме того,

$$2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = a\ddot{x},$$

уравнения Лагранжа сводятся к уравнению

$$\dot{y}^2 + y \left(\frac{2\lambda}{m} y - g \right) = -\frac{a^2 \lambda}{2m}.$$

Подставляя сюда \dot{y}^2 как функцию y , получим

$$\lambda = \frac{2m}{(4y^2 + a^2)} \left[\frac{2a^2 g (y - y_0)}{4y^2 + a^2} + gy \right].$$

В точке соскальзывания реакция связи обращается в нуль. Поэтому высота y_c такой точки является действительным положительным корнем уравнения

$$4y^3 + 3a^2y - 2a^2y_0 = 0.$$

При $a = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $y_0 = 15/4$ значение этого корня $y_c = 1$.

5.3. Выберем систему координат так, чтобы уравнение связи приняло вид

$$f = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0.$$

Отсюда найдем

$$\frac{1}{2}\ddot{f} = \frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2} + \frac{\ddot{x}x}{a^2} + \frac{\ddot{y}y}{b^2} + \frac{\ddot{z}z}{c^2} = 0. \quad (1)$$

Теперь с помощью уравнения движения, записанного в декартовых координатах, исключим из (1) компоненты ускорения. Тогда получим, что

$$\lambda = -\frac{m}{2} \cdot \frac{\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2} - \frac{x}{m}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}, \quad (2)$$

реакция эллипсоида

$$R = 2\lambda \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right).$$

5.4. Из закона сохранения полной энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = mgy(a)$$

с учетом того, что

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} \dot{x} = y' \dot{x},$$

найдем

$$\dot{x}^2(1 + y'^2) = 2g(y(a) - y).$$

Следовательно,

$$\tau = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2g(y(a) - y)}}.$$

5.5. Согласно законам сохранения энергии и момента количества движения

$$\frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2 \theta} + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mg\rho \operatorname{ctg} \theta = E_0; \quad m\rho^2 \dot{\varphi} = M_{z0}.$$

Здесь 2θ — угол раствора конуса, а ось z направлена вверх по вертикали. Из этих двух уравнений находим уравнение траектории в квадратуре

$$\varphi = \int \frac{\frac{M_{z0}}{m \sin \theta} \cdot \frac{d\rho}{\rho^3}}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 - mg\rho \operatorname{ctg} \theta - \frac{M_{z0}^2}{2m\rho^2} \right)}} + C.$$

Проектируя обе части уравнения Лагранжа первого рода на нормаль к поверхности конуса, получим

$$-m\rho \cos \theta \dot{\varphi}^2 = mg \sin \theta - R,$$

откуда

$$R = mg \sin \theta + \frac{M_{z0}^2}{m\rho^3} \cos \theta.$$

5.6. 1) В цилиндрических координатах, направляя ось z по оси цилиндра, а ось x по горизонтали, получим уравнения связи и движения

$$f = \rho - R = 0; \quad (1)$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = \lambda + mg\rho; \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} \rho^2 \dot{\varphi} = g_\varphi; \quad (3)$$

$$\ddot{z} = g_z.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{g} = g \sin \alpha \mathbf{n}_y - g \cos \alpha \mathbf{n}_z = g_\rho \mathbf{n}_\rho + g_\varphi \mathbf{n}_\varphi + g_z \mathbf{n}_z,$$

находим

$$g_\rho = g \sin \alpha \sin \varphi, \quad g_\varphi = g \sin \alpha \cos \varphi, \quad g_z = -g \cos \alpha.$$

Тогда из (2) и (1) следует, что

$$\lambda = -(mR\dot{\varphi}^2 + mg \sin \alpha \sin \varphi).$$

Кроме того, из (3) и (1) получим интеграл

$$\frac{R \dot{\varphi}^2}{2} - g \sin \alpha \sin \varphi = c.$$

Поэтому

$$\lambda = -3mg \sin \alpha \sin \varphi - 2cm.$$

2) При том же выборе координатных осей

$$f = x^2 + y^2 - R^2 = 0; \quad (4)$$

$$m\ddot{x} = 2\lambda x; \quad (5)$$

$$m\ddot{y} = mg \sin \alpha + 2\lambda y; \quad (6)$$

$$m\ddot{z} = -mg \cos \alpha. \quad (7)$$

Из (4) — (6) следует

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} = 0,$$

т. е.

$$\lambda = -\frac{m}{2R^2} (v_{\perp}^2 + gy \sin \alpha).$$

Далее из закона сохранения энергии и уравнения (7) получим

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2} + \frac{mz^2}{2} - mg \sin \alpha \cdot y + mg \cos \alpha \cdot z = E_0;$$

$$\frac{mz^2}{2} + mg \cos \alpha \cdot z = C.$$

Таким образом,

$$\lambda = -\frac{m}{2R^2} \left[\frac{2}{m} (E_0 - C) + 3gy \sin \alpha \right].$$

5.7. Помещая начало координат в центр сферы, получим уравнения связи и движения в виде

$$f = r^2 - a^2 = 0; \quad (1)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{r}. \quad (2)$$

Из (1) найдем

$$\frac{1}{2} \dot{f} = v^2 + \mathbf{r} \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

Это соотношение с учетом (2) приводит к

$$\lambda = -\frac{m}{2a^2} (v^2 + gr).$$

Исключая отсюда v^2 с помощью интеграла энергии

$$\frac{mv^2}{2} - mgr = E_0,$$

получим

$$\lambda = -\frac{1}{2a^2} [2E_0 + 3mgr].$$

Рассмотрим частные случаи.

1) Если $v(0) = 0$; $z(0) = a$; $x(0) = y(0) = 0$, то $E_0 = mga$. Реакция обращается в нуль при $z = \frac{2}{3}a$ (координата точки отрыва).

2) Если $v(0) = (ga)^{1/2}$; $z(0) = a$; $x(0) = y(0) = 0$, то $E_0 = (3/2)mga$. Реакция обращается в нуль при $z = a$.

5.8. а) В цилиндрических координатах с началом в центре сферы и осью z , направленной по вертикали вверх, уравнения связи и движения имеют вид

$$f = \rho^2 + z^2 - a^2 = 0; \quad (1)$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = 2\lambda\rho; \quad (2)$$

$$\frac{m}{\rho} \frac{d}{dt} \rho^2 \dot{\varphi} = 0; \quad (3)$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z. \quad (4)$$

Из (3) получим интеграл момента

$$m\rho^2\dot{\varphi} = M_0. \quad (5)$$

Затем используем закон сохранения энергии

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E_0, \quad (6)$$

что позволяет избежать вычисления λ .

Исключим из интеграла энергии ρ , $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ как функции z :

$$\rho = \sqrt{a^2 - z^2}; \quad \dot{\rho} = -\frac{z\dot{z}}{\sqrt{a^2 - z^2}}; \quad \dot{\varphi} = \frac{M_0}{m(a^2 - z^2)}$$

(эти выражения следуют из (1) и (5)). Тогда (6) приобретает вид уравнения первого порядка, которое приводит к квадратуре

$$\pm \int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}} = t - t_0, \quad (7)$$

где

$$Q(z) = \frac{2g}{a^2} \left[\left(\frac{E_0}{mg} - z \right) (a^2 - z^2) - \frac{M_0^2}{2m^2g} \right]. \quad (8)$$

В общем случае интеграл (7) не выражается через элементарные функции. Поэтому рассмотрим частные случаи.

1. В случае Гринхилла задаются следующие начальные условия:

$$z(0) = 0; \quad \dot{z}(0) = 0.$$

Следовательно,

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}; \quad M_0 = mav_0;$$

$$Q(z) = \frac{2g}{a^2} \left[-z(a^2 - z^2) - z^2 \frac{v_0^2}{2g} \right];$$

$$\varphi - \frac{v_0}{2a} t = -\arcsin v_0 \left(\frac{-z}{2g(a^2 - z^2)} \right)^{1/2}.$$

2. Найдем условия, при которых точка движется по горизонтальной окружности на высоте z_0 . В этом случае

$$Q(z_0) = 0; \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0$$

или

$$\left(\frac{E_0}{mg} - z_0 \right) (a^2 - z_0^2) = \frac{M_0^2}{2m^2g}; \quad 3z_0^2 - \frac{2E_0}{mg} z_0 - a^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$E_0 = \frac{mg}{2z_0} (3z_0^2 - a^2); \quad M_0^2 = -\frac{m^2g}{z_0} (a^2 - z_0^2)^2.$$

Следовательно, $z_0 < 0$, а

$$\varphi = \sqrt{-\frac{g}{z_0}} (t - t_0).$$

3. Рассмотрим движение вблизи положения «равновесия» $z_{\text{eq}} = -a$. Разлагая функцию $Q(z)$ в положении «равновесия» до членов второго порядка малости включительно, получим

$$Q(z) = \frac{2g}{a^2} \left[-\frac{M_0^2}{2m^2g} + 2(z+a) \left(\frac{E_0}{mg} + a \right) a - (z+a)^2 \left(3a + \frac{E_0}{mg} \right) \right]. \quad (9)$$

С другой стороны,

$$\dot{z}^2 = Q(z)$$

и, следовательно,

$$2z\ddot{z} = \dot{Q}. \quad (10)$$

Теперь, используя (10) и (9), найдем

$$\ddot{z} = \frac{2g}{a} \left(\frac{E_0}{mg} + a \right) - \frac{2g}{a^2} (z + a) \left(3a + \frac{E_0}{mg} \right).$$

Полагая $u = z + a$, получим

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{2g}{a} \left(\frac{E_0}{mg} + a \right),$$

где

$$\omega^2 = \frac{2g}{a^2} \left(3a + \frac{E_0}{mg} \right).$$

Таким образом, координата z точки совершает гармоническое колебание

$$z = \frac{2g}{a\omega^2} \left(a + \frac{E_0}{mg} \right) - a + A \cos(\omega t + \alpha),$$

а угловая скорость изменяется по закону

$$\dot{\varphi} = \frac{M_0}{2(a^2 - z^2)} \approx \frac{M_0}{2ma(a+z)}.$$

б) В сферических координатах получим уравнение связи и законы сохранения

$$f = r^2 - a^2 = 0; \quad (1)$$

$$mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = M_{z0}; \quad (2)$$

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \theta = E_0. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) найдем

$$\dot{\varphi} = \frac{M_{z0}}{ma^2 \sin^2 \theta}; \quad (4)$$

$$\frac{ma^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{M_{z0}^2}{2ma^2 \sin^2 \theta} + mga \cos \theta = E_0. \quad (5)$$

Уравнение (5) дает возможность определить $t(\theta)$ как квадратуру

$$\int \frac{d\theta}{\left[\frac{2}{ma^2} \left(E_0 - \frac{M_{20}^2}{2ma^2 \sin^2 \theta} - mga \cos \theta \right) \right]^{1/2}} = t - t_0, \quad (6)$$

а эта квадратура совместно с (4) позволяет найти $\varphi(t)$.

5.9. Так как угол наклона касательной к оси Ox равен φ и, кроме того,

$$ds = a\varphi d\varphi,$$

то, проектируя обе части уравнения движения на нормаль к кривой, получим

$$\frac{mv^2}{a\varphi} + mg \cos \varphi = |R|.$$

Квадрат скорости находим из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mga (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) = E_0.$$

В результате найдем реакцию

$$R = \frac{2}{a\varphi} (E_0 - mga \sin \varphi) + 3mg \cos \varphi.$$

5.10. В рассматриваемом примере угол между касательной и осью Ox равен 3φ . Поэтому, проектируя обе части уравнения движения на нормаль к лемнискате, получим

$$\frac{mv^2}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} \sin 2\varphi}{a} + mg \cos 3\varphi = R.$$

С другой стороны, согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mga \sin \varphi \sqrt{2 \sin 2\varphi}.$$

Следовательно,

$$R = mg (6 \sin 2\varphi \sin \varphi + \cos 3\varphi). \quad (1)$$

Замечая, далее, что

$$\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} = -\sqrt[4]{8g^2 a^2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi},$$

разделим переменные:

$$dt = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{ctg}^{-\frac{3}{4}} \varphi \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Интегрируя последнее выражение и полагая при этом $\varphi = \pi/2$ при $t=0$, получим

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{16} (g/a)^2 t^4.$$

Теперь подставим эту функцию в (1) и найдём окончательно

$$R = \frac{mgt^4}{\sqrt{\left(\frac{4a}{g}\right)^4 + t^8}} \left[9 - \frac{8t^8}{\left(\frac{4a}{g}\right)^4 + t^8} \right].$$

5.11. Уравнение движения точки можно представить в виде

$$\dot{v} \mathbf{n}_\tau + v^2 \mathbf{n} \frac{d\alpha}{ds} = \mathbf{g} + \mathbf{R}/m,$$

где \mathbf{n}_τ — орт, направленный по касательной к кривой вдоль движения точки; \mathbf{n} — орт, направленный по нормали к кривой; α — угол наклона вектора \mathbf{n}_τ к оси Ox . Для циклонды

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \quad (2)$$

и, кроме того,

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (d\varphi)^2. \quad (3)$$

Учитывая (2) и (3) и рассматривая уравнение (1) вдоль касательной:

$$m\dot{v} = -mg \cos \frac{\varphi}{2},$$

найдем интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} - mga \cos \varphi = E_0. \quad (4)$$

Из (4) после разделения переменных имеем

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 + mga \cos \varphi)}},$$

т. е.

$$t = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \ln \frac{\lambda \cos \frac{\varphi_0}{2} + \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} + 1}}{\lambda \cos \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 1}},$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{2mga}{E_0 - mga}}.$$

Обращение этой формулы определяет закон движения точки по циклоиде $x = x(\varphi(t))$; $y = y(\varphi(t))$.

Реакцию связи найдем из уравнения движения вдоль направления нормали к циклоиде

$$m v^2 \frac{d\alpha}{ds} = -mg \sin \frac{\varphi}{2} + R.$$

Производная $d\alpha/ds$ согласно (2) равна

$$d\alpha/ds = -\frac{1}{2} d\varphi/ds.$$

Поэтому

$$R = mg \sin \frac{\varphi}{2} - m v^2 / 4a \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Принимая во внимание интеграл энергии, окончательно находим

$$R = mg \sin \frac{\varphi}{2} - (E_0 + mga \cos \varphi) / 2a \sin \frac{\varphi}{2};$$

$$R_x = R \sin \frac{\varphi}{2}; \quad R_y = R \cos \frac{\varphi}{2}.$$

5.12. В системе отсчета, вращающейся вместе с плоскостями, направим ось z вдоль оси вращения, а ось y вдоль нормали к плоскостям. Тогда уравнения Лагранжа первого рода имеют вид

$$\ddot{x} - \omega^2 x = -g \sin \omega t; \quad R_y = mg \cos \omega t + 2m\dot{x}\omega; \quad \ddot{z} = 0.$$

Закон движения точки можно представить в виде

$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\dot{x}_0 - \frac{g}{\omega} \right) \operatorname{sh} \omega t + \frac{g}{\omega^2} \sin \omega t;$$

$$y = 0; \quad z = \dot{z}_0 t + z_0.$$

Следовательно, реакция связи изменяется во времени по закону

$$R = 3mg \cos \omega t + 2m \omega^2 x_0 \operatorname{sh} \omega t + 2m \omega \left(\dot{x}_0 - \frac{g}{\omega} \right) \operatorname{ch} \omega t.$$

5.13. В неинерциальной системе отсчета с началом в точке пересечения вертикальной оси и окружности введем цилиндрические координаты (ось z направлена по оси вращения, а ось x — по диаметру окружности). Тогда уравнения связи имеют вид

$$f_1 = \rho - 2a \cos \varphi = 0; \quad f_2 = z = 0. \quad (1)$$

Запишем также уравнение движения

$$m \ddot{\mathbf{r}} = m \mathbf{g} - 2m [\omega \mathbf{v}] - m [\omega [\omega \mathbf{r}]] + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2, \quad (2)$$

откуда следует, что

$$m \ddot{z} = -mg + \lambda_2; \quad \lambda_2 = mg. \quad (3)$$

Теперь из закона сохранения полной энергии

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2} \omega^2 \rho^2 + mgz = E_0$$

и уравнений (1) находим

$$2ma^2 \dot{\varphi}^2 - 2ma^2 \omega^2 \cos^2 \varphi = E_0,$$

откуда следует закон движения в квадратуре:

$$\int \frac{d\varphi}{\left[\frac{E}{2ma^2} + \omega^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2}} = t - t_0. \quad (4)$$

Множитель λ_1 можно найти, используя (4), (1) и любое из оставшихся уравнений

$$m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = 2m \rho \dot{\varphi} \omega + m \rho \omega^2 + \lambda_1;$$

$$\frac{m}{\rho} \frac{d}{dt} \rho^2 \dot{\varphi} = -2 \dot{\rho} \omega m + \rho \omega^2 m + \frac{\lambda_1}{\rho} 2a \sin \varphi.$$

5.14. Уравнение движения шарика и уравнение связи в системе отсчета, жестко связанной с кривой, имеют вид

$$m \ddot{\mathbf{r}} = m \mathbf{g} - 2m [\omega \mathbf{v}] - m \omega (\omega \mathbf{r}) + m \mathbf{r} \omega^2 + \mathbf{R}; \quad (1)$$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi. \quad (2)$$

Тангенс угла α наклона касательной лемнискаты к оси Ox равен

$$\operatorname{tg} \alpha = dy/dx = -\operatorname{ctg} 3\varphi, \quad (3)$$

Отсюда заключаем, что

$$d\alpha/ds = 3 d\varphi/ds, \quad (4)$$

причем

$$(ds)^2 = \frac{2a^2}{\cos 2\varphi} (d\varphi)^2. \quad (5)$$

Поэтому уравнение движения вдоль нормали к лемнискате имеет вид

$$\frac{3mv^2 \sqrt{\cos 2\varphi}}{a\sqrt{2}} = -mg \cos \alpha - m\omega^2 r \cos \alpha \sin \varphi + \\ + m\omega^2 r (\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha) + R_n.$$

Отсюда, учитывая (3), получим

$$R_n = \frac{3mv^2 \sqrt{\cos 2\varphi}}{a\sqrt{2}} + mg \sin 3\varphi - m\omega^2 a \cos \varphi \cos 3\varphi \sqrt{2\cos 2\varphi}. \quad (6)$$

Затем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mga \sin \varphi \sqrt{2\cos 2\varphi} - \frac{m}{2} (\omega a \cos \varphi \sqrt{2\cos 2\varphi})^2 = E_0 \quad (7)$$

получим скорость шарика как функцию положения. Формулы (6) и (7) приводят к требуемому результату.

5.15. Помещая начало координат в центр окружности и направляя ось z по вертикали вниз, получим уравнения движения в цилиндрических координатах

$$m\ddot{\alpha}\varphi = -mg \sin \varphi - kR; \quad (1)$$

$$m\dot{\alpha}\varphi^2 = R - mg \cos \varphi, \quad (2)$$

где R — нормальная реакция окружности. Из (1) и (2) следует, что

$$R = m\dot{\alpha}\varphi^2 + mg \cos \varphi; \quad (3)$$

$$m\ddot{\alpha}\varphi = -g(\sin \varphi + k \cos \varphi) - k\dot{\alpha}\varphi^2. \quad (4)$$

Теперь введем функцию $\omega = \dot{\alpha}\varphi$; тогда

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} \dot{\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi},$$

а уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} + 2k\omega^2 = -\frac{2g}{a}(\sin \varphi + k \cos \varphi). \quad (5)$$

Это уравнение имеет решение

$$\omega^2 = A(\varphi) e^{-2k\varphi},$$

где

$$A(\varphi) = - \int_0^\varphi \frac{2g}{a} (\sin \varphi + k \cos \varphi) e^{2k\varphi} d\varphi + C.$$

Таким образом,

$$\omega^2 = C e^{-2k\varphi} + \frac{2g}{(1 + 4k^2)a} [(1 - 2k^2) \cos \varphi - 3k \sin \varphi].$$

Используя начальные условия

$$\varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = \omega(0) = \frac{v_0}{a},$$

найдем

$$C = \frac{v_0^2}{a^2} - \frac{2g(1 - 2k^2)}{a(1 + 4k^2)}.$$

Наконец, полагая $\omega^2(\varphi = \pi/2) = 0$, для искомой скорости получим

$$v_0^2 = \frac{2ga}{1 + 4k^2} (3ke^{k\pi} + 1 - 2k^2).$$

5.16. Уравнения движения и связей запишем в цилиндрических координатах (начало координат помещено в центр окружности)

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) &= R_\rho; \\ \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) &= -k \sqrt{R_\rho^2 + R_z^2}; \\ m\ddot{z} &= -mg + R_z; \\ \rho &= \rho_0; \quad z = 0. \end{aligned}$$

Здесь k — коэффициент трения; ρ_0 — радиус окружности. Отсюда получим уравнение

$$\ddot{\varphi} = -k \sqrt{\dot{\varphi}^4 + g^2/\rho_0^2},$$

в котором перейдем от дифференцирования по времени к дифференцированию φ по длине дуги окружности. Тогда

$$\frac{d\dot{\varphi}^2}{\sqrt{\dot{\varphi}^4 + g^2/\rho_0^2}} = -\frac{2k}{\rho_0} ds$$

или после интегрирования

$$\ln \frac{\dot{\varphi}^2 + \sqrt{\dot{\varphi}^4 + g^2/\rho_0^2}}{\dot{\varphi}_0^2 + \sqrt{\dot{\varphi}_0^4 + g^2/\rho_0^2}} = -\frac{2k}{\rho_0} s,$$

где $\dot{\varphi}_0$ — угловая скорость в начальный момент времени (материальная точка при этом находилась в точке $s_0=0$).

Так как при $s=l$ $\dot{\varphi}=0$, из последнего выражения находим

$$\dot{\varphi}_0^2 + \sqrt{\dot{\varphi}_0^4 + g^2/\rho_0^2} = \frac{g}{\rho_0} e^{2kl/\rho_0}.$$

Отсюда можно получить

$$\dot{\varphi}_0^2 - \sqrt{\dot{\varphi}_0^4 + g^2/\rho_0^2} = -\frac{g}{\rho_0} e^{-2kl/\rho_0}.$$

Складывая оба эти результата, приходем к значению начальной кинетической энергии

$$T_0 = -mg \operatorname{sh} \frac{2k}{\rho_0} (l-s).$$

Затем найдем компоненты реакции связи

$$R_\rho = -mg \operatorname{sh} \frac{2k}{\rho_0} (l-s); \quad R_z = mg.$$

5.17. Уравнения движения и связи материальной точки, перемещающейся по наклонной шероховатой плоскости, имеют вид (см. рис. 5.17)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k |\nabla f| \frac{\lambda \dot{x}}{|\mathbf{v}|} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \\ m\ddot{y} &= mg \sin \alpha - k |\nabla f| \frac{\lambda \dot{y}}{|\mathbf{v}|} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \\ m\ddot{z} &= -mg \cos \alpha - k |\nabla f| \frac{\lambda \dot{z}}{|\mathbf{v}|} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}; \\ f &= z = 0. \end{aligned}$$

Из третьего и четвертого уравнений находим

$$\lambda = mg \cos \alpha.$$

Тогда первые два уравнения можно представить в виде

$$\ddot{x} = -kg \cos \alpha \cdot \frac{\dot{x}}{v_{\parallel}}; \quad (1)$$

$$\ddot{y} = g \sin \alpha - kg \cos \alpha \frac{\dot{y}}{v_{\parallel}}, \quad (2)$$

где

$$v_{\parallel} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Если ввести новые переменные v_{\parallel} и φ согласно формулам

$$\dot{x} = v_{\parallel} \cos \varphi; \quad \dot{y} = v_{\parallel} \sin \varphi,$$

то (1) и (2) преобразуются к виду

$$\dot{v}_{\parallel} \cos \varphi - v_{\parallel} \dot{\varphi} \sin \varphi = -kg \cos \alpha \cos \varphi;$$

$$\dot{v}_{\parallel} \sin \varphi + v_{\parallel} \dot{\varphi} \cos \varphi = g \sin \alpha - kg \cos \alpha \sin \varphi.$$

Отсюда получим

$$\dot{v}_{\parallel} = g \sin \alpha \sin \varphi - kg \cos \alpha;$$

$$v_{\parallel} \dot{\varphi} = g \sin \alpha \cos \varphi$$

или

$$\frac{dv_{\parallel}}{v_{\parallel}} = \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{k \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \varphi} \right) d\varphi; \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{v_{\parallel}} g \sin \alpha \cos \varphi. \quad (4)$$

Решение уравнения (3) есть

$$v_{\parallel} = c \left[\operatorname{tg}^{\gamma+1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{tg}^{\gamma-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right], \quad (5)$$

где $\gamma = k \operatorname{ctg} \alpha$. Подставляя это решение в уравнение (4), найдем

$$dt = -\frac{c}{g \sin \alpha} \operatorname{tg}^{\gamma-2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \times \\ \times d \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

а затем

$$t = \frac{-c}{g \sin \alpha} \left[\frac{1}{\gamma-1} \operatorname{tg}^{\gamma-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma+1} \operatorname{tg}^{\gamma+1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] + c_1. \quad (6)$$

Возвращаясь к переменным x, y , получим, что

$$dx = \frac{-2c^2}{g \sin \alpha} \operatorname{tg}^{2\gamma-2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \times \\ \times d \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right);$$

$$dy = \frac{-c^2}{g \sin \alpha} \operatorname{tg}^{2\gamma-3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \times \\ \times d \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

и, следовательно,

$$x = \frac{-2c^2}{g \sin \alpha} \left[\frac{1}{2\gamma-1} \operatorname{tg}^{2\gamma-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\gamma+1} \operatorname{tg}^{2\gamma+1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] + c_2;$$

$$y = \frac{-c^2}{g \sin \alpha} \left[\frac{1}{2\gamma-2} \operatorname{tg}^{2\gamma-2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\gamma+2} \operatorname{tg}^{2\gamma+2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] + c_3.$$

Теперь выразим постоянные интегрирования через начальные условия $x = x_0$; $y = y_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$; $\dot{y} = \dot{y}_0$ при $t = 0$:

$$c = \left[\operatorname{tg}^{\gamma-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) + \operatorname{tg}^{\gamma+1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) \right]^{-1} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2};$$

$$c_1 = \frac{c}{g \sin \alpha} \left[\frac{1}{\gamma-1} \operatorname{tg}^{\gamma-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) + \frac{1}{\gamma+1} \operatorname{tg}^{\gamma+1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) \right];$$

$$c_2 = x_0 + \frac{2c^2}{g \sin \alpha} \left[\left(\frac{1}{2\gamma-1} \operatorname{tg}^{2\gamma-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2\gamma+1} \operatorname{tg}^{2\gamma+1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) \right) \right];$$

$$c_3 = y_0 + \frac{c^2}{g \sin \alpha} \left[\frac{1}{2\gamma-2} \operatorname{tg}^{2\gamma-2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\gamma+2} \operatorname{tg}^{2\gamma+2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) \right];$$

здесь $\operatorname{tg} \varphi_0 = \dot{y}_0 / \dot{x}_0$.

При $\gamma \geq 1$ «скатывающая» сила $mg \sin \alpha$ не превосходит силу трения, равную $k mg \cos \alpha$. Скорость материальной точки в этом

случае обращается в нуль в положении $x=c_2$; $y=c_3$ в момент времени $t=c_1$. При $\gamma < 1$ материальная точка не имеет точки остановки. Однако при $1/2 \leq \gamma < 1$ траектория имеет асимптоту, проходящую через точку $x=c_2$ параллельно оси ординат.

Шероховатая наклонная плоскость действует на материальную точку с силой

$$|R| = mg \cos \alpha \sqrt{1 + k^2}.$$

5.18. Пусть на левой грани находится часть цепочки длины s , а δs — виртуальное перемещение цепочки по граням призмы. Виртуальная работа силы тяжести на перемещении левой части цепочки равна $\rho g s \sin \alpha \delta s$, а правой части $(l-a-s)\rho g \sin \beta \delta s$, где ρ — линейная плотность цепочки (виртуальная работа на перемещении цепочки по верхней грани равна нулю). Следовательно, условием равновесия является условие

$$-\rho g s \sin \alpha \delta s + (l-a-s)\rho g \sin \beta \delta s = 0.$$

Отсюда

$$s = \frac{(l-a) \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta},$$

так что разность вертикальных координат концов цепочки равна

$$\Delta h = \frac{(l-a) \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

и обращается в нуль при $\alpha = \beta$.

5.19. Вследствие уравнения связи виртуальные перемещения точки удовлетворяют условию

$$x \delta x + 4y \delta y - 4z \delta z = 0.$$

Для виртуальной работы имеем

$$\kappa x \delta x + \kappa y \delta y + (\kappa z - g) \delta z = 0.$$

Умножив последнее уравнение на неопределенный множитель λ и сложив результат умножения почленно с первым уравнением, получим

$$(1 + \kappa \lambda) x \delta x + (4 + \kappa \lambda) y \delta y - \{(4 - \kappa \lambda) z + \lambda g\} \delta z = 0.$$

Таким образом, используя метод неопределенных множителей Лагранжа, получим систему уравнений

$$(1 + \kappa \lambda) x = 0; (4 + \kappa \lambda) y = 0; (4 - \kappa \lambda) z + \lambda g = 0;$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0.$$

Эта система приводит к следующим положениям равновесия и значениям λ , определяющим реакцию конуса:

$$x = 0, y = \pm \frac{g}{2\kappa}, z = \frac{g}{2\kappa}, \lambda = -\frac{4}{\kappa};$$

$$x = \pm \frac{2g}{5\kappa}, y = 0, z = \frac{g}{5\kappa}, \lambda = -\frac{1}{\kappa}.$$

5.20. Запишем уравнение связи в виде

$$x^2 + y^2 = a^2$$

(начало координат помещено в центр окружности). Учтем также, что на первую точку действуют силы с компонентами

$$F_{21}^x = \kappa \frac{m^2}{2} r_{21} \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} = \kappa \frac{m^2}{2} (x_1 - x_2);$$

$$F_{21}^y = \kappa \frac{m^2}{2} (y_1 - y_2);$$

$$F_{31}^x = \kappa \frac{m^2}{2} (x_1 - x_3);$$

$$F_{31}^y = \kappa \frac{m^2}{2} (y_1 - y_3).$$

Таким образом, согласно принципу виртуальных перемещений

$$\begin{aligned} & \kappa \left[\frac{m^2}{2} (x_1 - x_2) + \frac{m^2}{2} (x_1 - x_3) \right] \delta x_1 + \\ & + \kappa \left[\frac{m^2}{2} (y_1 - y_2) + \frac{m^2}{2} (y_1 - y_3) \right] \delta y_1 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

а согласно уравнению связи

$$x_1 \delta x_1 + y_1 \delta y_1 = 0. \quad (2)$$

Применяя к уравнению (1) совместно с (2) метод неопределенных множителей, получим уравнение

$$(2x_1 - x_2 - x_3 + \lambda_1 x_1) \delta x_1 + (2y_1 - y_2 - y_3 + \lambda_1 y_1) \delta y_1 = 0,$$

откуда следует, что

$$2x_1 - x_2 - x_3 + \lambda_1 x_1 = 0; \quad 2y_1 - y_2 - y_3 + \lambda_1 y_1 = 0.$$

Если выбрать ось x , проходящую через первую точку, т. е. положить $x_1 = a$; $y_1 = 0$, то найдем, что $y_2 = -y_3$.

Аналогичные вычисления для второй точки приводят к условиям равновесия

$$(3 + \lambda_2) x_2 - x_1 - 2x_3 = 0; \quad (3 + \lambda_2) y_2 - y_1 - 2y_3 = 0,$$

т. е.

$$\frac{x_1 + 2x_3}{x_2} = \frac{y_1 + 2y_3}{y_3}.$$

Однако $x_1 = a$; $y_1 = 0$; $y_2 = -y_3$, следовательно,

$$x_2 + x_3 = -\frac{a}{2}.$$

Теперь учтем, что $x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$, и найдем положения равновесия второй и третьей точек:

$$x_2 = x_3 = -\frac{a}{4}; \quad y_2 = -y_3 = \pm \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

5.21. Положения равновесия точки:

1) $x = 0, y = 0, z = \pm c$;

2) $x = 0, y = \pm \frac{\sqrt{\omega^4 b^4 - g^2 c^2}}{\omega^2 b}, z = -\frac{gc^2}{\omega^2 b^2}$;

3) $x = \pm \frac{\sqrt{\omega^4 a^4 - g^2 c^2}}{\omega^2 a}, y = 0, z = -\frac{gc^2}{\omega^2 a^2}$.

5.22. Обозначим через φ угол наклона стержня к горизонту. Реакция R_1 в нижней точке соприкосновения стержня с полусферой направлена по радиусу к центру сферы, а реакция R_2 на краю полусферы направлена перпендикулярно стержню; причем векторы R_1, R_2 и mg лежат в одной плоскости. Таким образом, уравнения равновесия стержня можно записать в виде

$$R_1 \cos 2\varphi - R_2 \sin \varphi = 0,$$

$$R_1 \sin 2\varphi + R_2 \cos \varphi = mg,$$

$$mg \cos \varphi \left(2r \cos \varphi - \frac{l}{2} \right) = 2R_1 r_0 \cos \varphi \sin \varphi.$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно $\cos \varphi$, находим

$$\cos \varphi = \frac{l}{16r} + \left[\left(\frac{l}{16r} \right)^2 + \frac{1}{2} \right]^{1/2}.$$

Часть стержня, расположенная вне полусферы, имеет длину

$$l - 2r \cos \varphi = \frac{7}{8} l - 2r \left[\left(\frac{l}{16r} \right)^2 + \frac{1}{2} \right]^{1/2}.$$

Выражение для $\cos \varphi$ обращается в единицу при $l = 4r$.

§ 2. Уравнения Лагранжа в независимых координатах и законы сохранения обобщенного импульса и энергии

5.23. В качестве независимой координаты выберем расстояние x по вертикали от оси вращения блока до груза m_1 , тогда координаты точек: $x_1 = x$, а $x_2 = l - x$, где l — длина нити за вычетом половины длины окружности блока. Следовательно, функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g (l - x)$$

(ось x направлена вниз). Составляя уравнение Лагранжа и интегрируя его, получим

$$x = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{g t^2}{2} + \dot{x}_0 t + x_0,$$

что и определяет $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$.

5.24 Пусть z — расстояние от оси вращения блока до обезьяны. Тогда функцию Лагранжа системы можно записать в виде

$$L = \frac{m_2}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_1}{2} (\dot{\xi} - \dot{z})^2 + m_2 g z + m_1 g (\xi - z)$$

(ось z направлена вниз по вертикали). Отсюда получим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \{ (m_1 + m_2) \dot{z} - m_1 \dot{\xi} \} = (m_2 - m_1) g.$$

Полагая для простоты, что при $t = 0$ $\xi = 0$; $\dot{\xi} = 0$, а также $z = 0$; $\dot{z} = 0$, найдем решение

$$z = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi + \frac{1}{2} \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} g t^2.$$

5.25. Выбирая x в качестве независимой координаты, получим

$$v^2 = (1 + a^2 k^2 \cos^2 kx) \dot{x}^2;$$

$$U = -m(\text{gr}) = mgy \cos \alpha = mga \cos \alpha \sin kx.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (1 + a^2 k^2 \cos^2 kx) \dot{x}^2 - mga \cos \alpha \sin kx;$$

$$\frac{m}{2} (1 + a^2 k^2 \cos^2 kx) \dot{x}^2 + mga \cos \alpha \sin kx = E_0.$$

5.26. а) Выбирая в качестве независимой координаты s — декартову координату точки на прямой, получим

$$\mathcal{L} = \frac{ms^2}{2} - \frac{\kappa}{2} (\sqrt{h^2 + s^2} - l_0)^2.$$

б) Если за независимую координату взять угол θ между осью пружины и перпендикуляром, опущенным из точки закрепления пружины на прямую, то $s = h \operatorname{tg} \theta$, а

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \frac{h^2 \dot{\theta}^2}{\cos^4 \theta} - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{h}{\cos \theta} - l_0 \right)^2.$$

5.27. Помещая начало координат в вершину угла и направляя оси x и y по сторонам угла, получим

$$x_1 = 0; y_1 = -a \sin \varphi; x_2 = a \cos \varphi; y_2 = 0$$

(здесь φ — угол между стержнем и правой стороной угла). Следовательно,

$$\mathcal{L} = \frac{a^2 \dot{\varphi}^2}{2} (m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi) - \frac{ga}{\sqrt{2}} (m_1 \sin \varphi + m_2 \cos \varphi).$$

5.28. а) Если обобщенной координатой является угол θ (см. рис. 5.28), то

$$z = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \theta; \dot{z} = -\frac{a}{2 \sin^2 \theta} \dot{\theta}.$$

Тогда длина нити $l = a + \frac{a}{\sin \theta}$, а лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2 \dot{\theta}^2}{8 \sin^4 \theta} - \frac{\kappa a^2}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta} - 1 \right)^2 + mg \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \theta.$$

б) Пусть обобщенной координатой является смещение s шарика по вертикали. Тогда длина нити $l = a + 2\sqrt{(a/2)^2 + s^2}$, а

$$\mathcal{L} = \frac{ms^2}{2} - \frac{\kappa}{2} \left[2 \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + s^2} - a \right]^2 + mgs.$$

5.29. Пусть угол θ между нитью и вертикалью является независимой координатой. Тогда

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta + (l + a\theta) \sin \theta; \\ y &= a \sin \theta - (l + a\theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

где l — длина свешивающегося конца нити в равновесии. Далее получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} (l + a\theta)^2 \dot{\theta}^2 + mg [(l + a\theta) \cos \theta - a \sin \theta]; \\ (l + a\theta) \ddot{\theta} + a \dot{\theta}^2 + g \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

5.30. Выберем в качестве обобщенной координаты длину дуги s :

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{x'^2 + y'^2} du = 2a \int_0^u \left| \sin \frac{u}{2} \right| du = 8a \sin^2 \frac{u}{4}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{s}^2; \quad y = -2a \sin^2 \frac{u}{2} = -8a \left(\frac{s}{8a} \right) \left(1 - \frac{s}{8a} \right)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{s}^2}{2} + 8mga \left[\frac{s}{8a} - \left(\frac{s}{8a} \right)^2 \right].$$

Из интеграла энергии

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} + 8mga \left[\frac{s}{8a} - \left(\frac{s}{8a} \right)^2 \right] = E_0$$

найдем квадратуру

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E_0 + mgs \left(1 - \frac{s}{8a} \right) \right]}}$$

Однако проще воспользоваться уравнением Лагранжа

$$m\ddot{s} = mg - \frac{mgs}{4a},$$

откуда сразу видно, что

$$s = A \cos(\omega t + \alpha) + 4a \quad \left(\omega^2 = \frac{g}{4a} \right),$$

т. е. точка, движущаяся по циклоиде в однородном поле тяжести, совершает гармоническое колебание.

5.31 Направляя ось y по вертикали вверх, ось x — в плоскости качания маятника, введем независимую координату φ — угол отклонения маятника от вертикали. Тогда

$$x = l \sin \varphi; \quad y = s - l \cos \varphi; \quad v^2 = \dot{s}^2 + 2s\dot{\varphi} \sin \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{s}^2 + 2s\dot{\varphi} \sin \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2] - mg(s - l \cos \varphi). \quad (1)$$

Это выражение можно упростить, учитывая, что

$$s \dot{\varphi} \sin \varphi = - \frac{d}{dt} s \cos \varphi + \ddot{s} \cos \varphi,$$

и опуская затем в (1) функции только времени и полные производные от таких функций. Таким образом, получим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + m(g + \ddot{s})l \cos \varphi$$

и уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{\ddot{s}}{l} \right) \sin \varphi = 0.$$

5.32 Помещая начало координат в точку подвеса маятника, совмещая плоскость xy с плоскостью качаний маятника и направляя ось y вверх по вертикали, найдем

$$x = l \sin \varphi; \quad y = -l \cos \varphi;$$

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi;$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

5.33. Дифференцируя закон движения

$$x^2 = \left(\frac{\alpha}{x_0^2} + v_0^2 \right) t^2 + 2x_0 v_0 t + x_0^2,$$

получим

$$x^2 \dot{x}^2 = \left[\left(\frac{\alpha}{x_0^2} + v_0^2 \right) t + x_0 v_0 \right]^2.$$

Исключая из этих двух выражений время, находим

$$\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{\alpha}{x_0^2} + v_0^2.$$

Этому интегралу движения соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\alpha m}{2x^2}.$$

5.35. Направляя ось x по указанной прямой, получим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{\kappa}{2} (x_2 - x_1 - l_0)^2.$$

Однако в качестве независимых координат удобнее выбрать x_m — координату центра масс шариков и x — расстояние между ними. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_m^2 + \frac{\mu}{2} \dot{x}^2 - \frac{\kappa}{2} (x - l_0)^2. \quad (1)$$

Ввиду того, что $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$, из (1) следует интеграл энергии

$$\frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_m^2 + \frac{\mu}{2} \dot{x}^2 + \frac{\kappa}{2} (x - l_0)^2 = E_0.$$

Далее из цикличности координаты x_m вытекает сохранение импульса системы

$$p_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_m} = (m_1 + m_2) \dot{x}_m.$$

5.36. Направим ось y по горизонтали в рассматриваемой плоскости, а ось z — по вертикали вверх. Введем в качестве обобщенных координат точки координату y и координату s — расстояние точки до оси y . Тогда

$$x = s \cos \alpha; \quad y = y; \quad z = -s \sin \alpha,$$

а

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgs \sin \alpha.$$

Ввиду того, что $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$, энергия точки

$$E = \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - \mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \dot{y}^2) - mgs \sin \alpha$$

сохраняется; кроме того, сохраняется обобщенный импульс

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}.$$

5.37. Предположим вначале, что трение отсутствует. Пусть s — расстояние до тела, отсчитываемое от вершины наклонной плоскости; q — координата, определяющая положение бруска (рис. 5.37). Тогда

$$x_1 = q; \quad y_1 = \text{const};$$

$$x_2 = q + s \cos \alpha; \quad y_2 = h - s \sin \alpha,$$

а лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} \dot{q}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{q}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{q}\dot{s} \cos \alpha) + m_2 g s \sin \alpha.$$

Теперь получим уравнения движения

$$(m_1 + m_2) \ddot{q} + m_2 \ddot{s} \cos \alpha = 0;$$

$$\ddot{s} + \ddot{q} \cos \alpha = g \sin \alpha,$$

откуда найдем, что

$$\ddot{s} = \frac{g \sin \alpha}{1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \alpha}; \quad \ddot{q} = -g \frac{m_2 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}.$$

Далее, записав уравнение движения тела в виде

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = m_2 \mathbf{g} + \mathbf{R}_2,$$

получим

$$\mathbf{R}_2 = m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{g}) \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — орт, перпендикулярный поверхности наклонной плоскости. Таким образом,

$$R_2 = m_2 (\ddot{q} \sin \alpha + g \cos \alpha).$$

С учетом силы трения уравнения движения тела имеют вид

$$(m_1 + m_2) \ddot{q} + m_2 \ddot{s} \cos \alpha = 0;$$

$$m_2 (\ddot{s} + \ddot{q} \cos \alpha) = m_2 g \sin \alpha - k m_2 (\dot{q} \sin \alpha + g \cos \alpha).$$

Из них находим искомое ускорение

$$\ddot{x}_1 = \ddot{q} = -g \frac{m_2 (\sin \alpha - k \cos \alpha) \cos \alpha}{m_1 + m_2 (\sin \alpha - k \cos \alpha) \sin \alpha}.$$

5.38. Пусть обобщенными координатами являются координата s тела l на прямой и угол φ отклонения маятника от вертикали. Тогда

$$x_1 = s; \quad y_1 = 0;$$

$$x_2 = l \sin \varphi + s; \quad y_2 = -l \cos \varphi$$

(ось y направлена вверх по вертикали).

Далее находим лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 \dot{s}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{s}^2 + 2\dot{s}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2) + m_2 g l \cos \varphi.$$

Отсюда видно, что координата s — циклическая. Следовательно, обобщенный импульс

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = (m_1 + m_2) \dot{s} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

сохраняется. Этот интеграл представляет собой проекцию импульса системы $(m_1 + m_2) \dot{x}_m$ на горизонтальную ось

«Цикличность» времени приводит к сохранению энергии

$$\frac{m_1 \dot{s}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{s}^2 + 2\dot{s}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2) - m_2 g l \cos \varphi = E_0.$$

5.39 В качестве обобщенных координат возьмем $\varphi_1; \varphi_2$ — углы отклонения первого и второго шариков от вертикали. Ось y на-

правим из точки подвеса первого маятника по вертикали вверх, а ось x — в плоскости качаний. Тогда

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \varphi_1; & y_1 &= -l_1 \cos \varphi_1; \\x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2; & y_2 &= -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2] + \\&+ m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2).\end{aligned}$$

5.40. Выберем следующие обобщенные координаты: s — положение точки подвеса, φ — угол отклонения маятника от вертикали. Ось y направим по вертикали вверх и проведем через тело l . Тогда

$$x_1 = 0; \quad y_1 = s; \quad x_2 = l \sin \varphi; \quad y_2 = s - l \cos \varphi.$$

Затем получим

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_1 \dot{s}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{s}^2 + 2l \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2) - \\&- \frac{\kappa}{2} (s - l_0)^2 - m_1 s g - m_2 g (s - l \cos \varphi),\end{aligned}$$

откуда следует, что энергия сохраняется:

$$\begin{aligned}\frac{m_1 \dot{s}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{s}^2 + 2l \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2) + \\+ \frac{\kappa}{2} (s - l_0)^2 + m_1 s g + m_2 g (s - l \cos \varphi) = E_0,\end{aligned}$$

а уравнения движения являются

$$(m_1 + m_2) \ddot{s} + \frac{d}{dt} m_2 l \dot{\varphi} \sin \varphi = -\kappa (s - l_0) - (m_1 + m_2) g;$$

$$\frac{d}{dt} m_2 (l \dot{s} \sin \varphi + l^2 \dot{\varphi}) = -m_2 g l \sin \varphi + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

5.41. Обобщенными координатами пусть будут расстояние r от начала координат, помещенного в вершину конуса, до точки, а также азимутальный угол φ . Тогда

$$x = r \sin \alpha \cos \varphi; \quad y = r \sin \alpha \sin \varphi; \quad z = r \cos \alpha;$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \alpha.$$

Поскольку φ — циклическая координата, проекция момента импульса на ось конуса сохраняется:

$$M = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi} = M_0.$$

Далее ввиду «циклическости» времени получим

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \alpha = E_0.$$

Из интегралов энергии и момента найдем $t(r)$, т. е.

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U_{\text{eff}}(r))}},$$

где

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M_0^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha.$$

Затем из интеграла момента получим

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M_0}{\sqrt{2m} \sin^2 \alpha} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{(E_0 - U_{\text{eff}})}}.$$

5.42. Энергия и момент импульса в начальный момент времени соответственно равны

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + mgr_0 \cos \alpha; \quad M_0 = mv_0 r_0 \sin \alpha.$$

Границы движения точки получим из условия $E_0 = U_{\text{eff}}$ или

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgr_0 \cos \alpha = \frac{mv_0^2 r_0^2}{2r^2} + mgr \cos \alpha.$$

Отсюда найдем, что $r_1 \leq r \leq r_2$, где

$$r_1 = r_0; \quad r_2 = \frac{1}{2} (k + \sqrt{k^2 + 4kr_0}); \quad k = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha}.$$

5.43. а) В независимых цилиндрических координатах z, φ (начало координат помещено в центре сферы, а ось z направлена по вертикали вниз)

$$x = \sqrt{a^2 - z^2} \cos \varphi; \quad y = \sqrt{a^2 - z^2} \sin \varphi; \quad z = z;$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[(a^2 - z^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{a^2 \dot{z}^2}{a^2 - z^2} \right] - mgz.$$

Следовательно, имеют место интегралы момента и энергии

$$M = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m(a^2 - z^2) \dot{\varphi} = M_0; \quad (1)$$

$$E = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[(a^2 - z^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{a^2 \dot{z}^2}{a^2 - z^2} \right] = E_0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем $t(z)$ в виде

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}} = t + t_0,$$

где

$$Q = \frac{2g}{a^2} \left[\left(\frac{E_0}{mg} - z \right) (a^2 - z^2) - \frac{M_0^2}{2m^2g} \right].$$

б) В сферических координатах получим

$$x = a \sin \theta \cos \varphi; \quad y = a \sin \theta \sin \varphi; \quad z = a \cos \theta;$$

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mga \cos \theta,$$

а затем интегралы движения

$$M = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = M_0; \quad (3)$$

$$E = \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mga \cos \theta = E_0. \quad (4)$$

Эти интегралы приводят к уравнению

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ma^2} (E_0 - U_{\text{eff}}(\theta)),$$

где

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_0^2}{2ma^2 \sin^2 \theta} + mga \cos \theta.$$

Отсюда получим закон движения $t(\theta)$ в виде

$$t - t_0 = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ma^2} [E_0 - U_{\text{eff}}(\theta)]}}. \quad (5)$$

Затем, исключая время из (3) с помощью (5), найдем уравнение траектории

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M_0}{a \sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{E_0 - U_{\text{eff}}(\theta)}}.$$

5.44. Границы движения маятника определяются положением точек поворота, в которых $\dot{\theta}=0$, т. е. определяются уравнением

$$E_0 = U_{\text{eff}}(\theta). \quad (1)$$

Согласно начальным условиям

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + mga \cos \theta_0; \quad M_0 = mv_0 a \sin \theta_0.$$

Поэтому из (1) получим

$$\frac{mv_0^2}{2} + mga \cos \theta_0 = \frac{mv_0^2 \sin^2 \theta}{2 \sin^2 \theta} + mga \cos \theta. \quad (2)$$

Запишем (2) в виде

$$(\cos \theta - \cos \theta_0) \left[1 + \frac{k(\cos \theta + \cos \theta_0)}{\sin^2 \theta} \right] = 0$$

(здесь $k = v_0^2/2ga$). Это уравнение имеет корни $\theta_1 = \theta_0$ и θ_2 , причем

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{2} [k - \sqrt{k^2 + 4(1 + k \cos \theta_0)}].$$

При $k \gg 1$ $\cos \theta_2 \approx -\cos(\theta_0/k)$, т. е. $\theta_2 \ll \pi$, если $\pi/2 < \theta_0 < \pi$; при $k \ll 1$ $\cos \theta_2 \approx -1 + 2k \sin^2(\theta_0/2)$.

5.45. Используя сферические координаты задачи 5.43, напишем выражение эффективной потенциальной энергии

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{M_0^2}{2ma^2 \sin^2 \theta} + mga \cos \theta \quad (1)$$

и уравнение для точек поворота

$$E_0 = \frac{ma^2}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta). \quad (2)$$

Учитывая, что $E_0 = mv_0^2/2 + mga \cos \theta_0$, а $M_0 = mav_0 \sin \theta_0$, с помощью (1) получим (2) в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} + mga (\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0. \quad (3)$$

Первый корень (3) равен $\theta_1 = \theta_0$, второй подчинен уравнению

$$\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta_2}{\sin^2 \theta_2} + mga = 0.$$

По условию задачи $\theta_2 = \pi/2$. Следовательно,

$$\frac{m}{2} v_0^2 \cos \theta_0 + mga = 0$$

или $v_0^2 = -\frac{2ga}{\cos \theta_0}$, т. е. $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$.

5.47. Как известно, энергия взаимодействия заряда с заземленной сферой

$$U(r) = -\frac{e^2 R}{2(r^2 - R^2)},$$

где r — расстояние от центра сферы до заряда. Следовательно,

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e^2 R}{2(r^2 - R^2)}.$$

5.48. Введем обобщенные координаты: r и φ — полярные координаты первого шарика (начало координат совмещено с вершиной прямого угла). Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{m_2 \dot{r}^2}{2}$$

и, следовательно, сохраняются момент импульса

$$m_1 r^2 \dot{\varphi} = M_0 \quad (1)$$

и энергия

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 = E_0. \quad (2)$$

Используя начальные условия, отсюда получим

$$m_1 r^2 \dot{\varphi} = m_1 l_1 v_0; \quad (3)$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2} \dot{r}^2 + \frac{m_1 r^2}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{m_1 v_0^2}{2}. \quad (4)$$

Таким образом, радиальная скорость первого шарика

$$\dot{r} = \frac{v_0}{r} \sqrt{\frac{m_1 (r^2 - l_1^2)}{m_1 + m_2}}. \quad (5)$$

Следовательно, скорость второго шарика в момент достижения стержня будет равна

$$v = \frac{-v_0}{l_1 + l_2} \sqrt{\frac{m_1 [(l_1 + l_2)^2 - l_1^2]}{m_1 + m_2}}.$$

Этот шарик достигнет стержня за время

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{v_0} \int_{l_1}^{l_1+l_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - l_1^2}} = \\ &= \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} l_2 (2l_1 + l_2). \end{aligned}$$

Далее из (3) и (5) найдем уравнение траектории первого шарика:

$$r = l_1 \sec \left(\varphi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \right).$$

5.49. Положение точки 1 будем определять полярными координатами ρ и φ_1 , а положение точки 2 — углом θ отклонения нити от вертикали и азимутальным углом φ_2 . Тогда лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m_1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}_1^2) + \frac{m_2}{2} [\dot{\rho}^2 + (l - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + (l - \rho)^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \theta] + \\ & + m_2 g (l - \rho) \cos \theta \end{aligned}$$

и дает следующие интегралы движения:

$$M_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = m_1 \rho^2 \dot{\varphi}_1 = M_{10};$$

$$M_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 (l - \rho)^2 \dot{\varphi}_2 \sin^2 \theta = M_{20}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E = & \frac{m_1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}_1^2) + \frac{m_2}{2} [\dot{\rho}^2 + (l - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + \\ & + (l - \rho)^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \theta] - m_2 g (l - \rho) \cos \theta = E_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если начальные условия выбраны так, что $\varphi_{20} = \theta_0 = 0$; $\theta_0 = 0$, из (1) и (2) получим

$$\frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{M_{10}^2}{2m_1 \rho^2} - m_2 g (l - \rho) = E_0.$$

5.50. Рассматриваемая плоская система имеет четыре степени свободы. В качестве независимых координат выберем: x_0, y_0 — координаты геометрического центра ромба; φ — угол, образованный осью абсцисс и диагональю ромба, которая соединяет первую и третью материальные точки; ξ — расстояние первой материальной точки до центра ромба. Декартовы координаты удобно отсчитывать от силового центра. Тогда имеем

$$x_1 = x_0 - \xi \cos \varphi; \quad y_1 = y_0 - \xi \sin \varphi;$$

$$x_2 = x_0 - \sqrt{l^2 - \xi^2} \sin \varphi; \quad y_2 = y_0 + \sqrt{l^2 - \xi^2} \cos \varphi;$$

$$x_3 = x_0 + \xi \cos \varphi; \quad y_3 = y_0 + \xi \sin \varphi;$$

$$x_4 = x_0 + \sqrt{l^2 - \xi^2} \sin \varphi; \quad y_4 = y_0 - \sqrt{l^2 - \xi^2} \cos \varphi,$$

где l — длина стороны ромба

Дифференцируя эти формулы и подставляя значения производных по времени в формулу для кинетической энергии системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2),$$

после упрощения найдем

$$T = m \left(2x_0^2 + 2y_0^2 + \frac{l^2 \dot{\xi}^2}{l^2 - \xi^2} + l^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$

Так как на i -тую материальную точку действует сила

$$\mathbf{F}_i = -\alpha \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

то обобщенные силы равны

$$Q_j = -\alpha \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_i)^2 \right] \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Выражение в квадратных скобках выразим через независимые координаты

$$\sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_i)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2) + 2l^2.$$

Следовательно,

$$Q_1 = -4\alpha x_0; \quad Q_2 = -4\alpha y_0; \quad Q_3 = Q_4 = 0.$$

Далее находим уравнения Лагранжа в независимых координатах:

$$m\ddot{x}_0 + \alpha x_0 = 0, \quad m\ddot{y}_0 + \alpha y_0 = 0; \quad \ddot{\xi}/\xi + \dot{\xi}^2/(l^2 - \xi^2) = 0; \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Приведем общее решение этой системы:

$$x_0 = a_x \cos \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t + b_x \sin \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t;$$

$$y_0 = a_y \cos \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t + b_y \sin \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t;$$

$$\xi = l \sin (\Omega_0 t + \psi_0); \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0;$$

здесь a_x , a_y , b_x , b_y , φ_0 , $\dot{\varphi}_0$, Ω_0 , ψ_0 — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Из общего решения видно, что центр ромба описывает эллипс вокруг силового центра. При этом ромб равномерно вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$ вокруг своего геометрического центра, а его диагонали изменяют свою длину с частотой $\Omega_0/2\pi$.

5.51 В качестве обобщенных координат выберем координаты радиуса-вектора \mathbf{r}_m центр масс системы и вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Далее запишем лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_m^2 + \frac{\mu \mathbf{r}^2}{2} - \frac{\kappa}{2} (r - l_0)^2 + (m_1 + m_2) \mathbf{g} \mathbf{r}_m$$

и уравнения Лагранжа

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{g}; \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\kappa (r - e_0) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

5.52. Если в качестве независимых координат взять координаты радиусов-векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 зарядов, то

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - \frac{e_1 e_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + e_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_2.$$

Если же за независимые координаты выбрать координаты радиуса-вектора центра масс \mathbf{r}_m и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_m^2 + \frac{\mu \mathbf{r}^2}{2} - \frac{e_1 e_2}{r} + (e_1 + e_2) \mathbf{E} \mathbf{r}_m + \\ & + \frac{1}{m_1 + m_2} (e_2 m_1 - e_1 m_2) \mathbf{E} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Приведем соответствующие последним координатам уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_m} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_m}; \quad (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_m - (e_1 + e_2) \mathbf{E}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}}; \quad \mu \dot{\mathbf{r}} = \frac{e_1 e_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \left(\frac{e_2}{m_2} - \frac{e_1}{m_1} \right) \mu \mathbf{E}. \end{aligned}$$

§ 3. Движение под действием обобщенно-потенциальных сил

5.53. Пусть обобщенной координатой шарика является x — расстояние до точки закрепления пружины. В случае пружины, подчиненной закону Гука, получим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{\kappa}{2} (x - l_0)^2 + m a x,$$

где a — ускорение прямой, и соответствующее уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 + a; \quad \omega_0^2 = \frac{\kappa}{m}.$$

Записывая решение этого уравнения

$$x = l_0 + \frac{a}{\omega_0^2} + A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

мы видим, что шарик колеблется около смещенного на величину a/ω_0^2 положения равновесия. Устройство, в принципе подобное рассмотренному, называется акселерометром и применяется при измерении перегрузок, вызванных движением системы с ускорением

554. а) Введем независимую координату s — расстояние от начала координат, помещенного на пересечении прямой и оси, до материальной точки (ось z направим по вертикали вверх). Тогда

$$x = s \sin \alpha \cos \omega t; \quad y = s \sin \alpha \sin \omega t; \quad z = s \cos \alpha;$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2 \sin^2 \alpha) - mgs \cos \alpha. \quad (1)$$

Используя лагранжиан, получим интеграл обобщенной энергии

$$H = \dot{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - \mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 - \omega^2 s^2 \sin^2 \alpha) + mgs \cos \alpha.$$

б) В неинерциальной системе отсчета, связанной с прямой, запишем потенциальную энергию в поле центробежной силы инерции:

$$U^h = - \frac{m}{2} [\omega \mathbf{r}']^2 = - \frac{m}{2} \omega^2 s^2 \sin^2 \alpha. \quad (2)$$

Затем учтем, что $-m[\omega \mathbf{r}'] \mathbf{v}' = 0$, поскольку \mathbf{r}' , \mathbf{v}' коллинеарны. Далее, записывая лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = T' - U^h + mgr'$$

и используя (2), придем опять к (1).

555 Введем обобщенные координаты: ρ — расстояние от точки до оси вращения по горизонтали; z — высота точки (ось z направлена вверх). Тогда, имея в виду уравнение связи $\varphi = \omega t$, найдем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

и уравнения Лагранжа $\dot{z} = -g$; $\ddot{\rho} = \rho \omega^2$. Интеграл обобщенной энергии имеет вид

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2 + mgz = H_0.$$

556. Поместим начало координат в центр окружности, а ось z направим вверх по вертикали. В качестве обобщенной координаты

наты возьмем угол θ между осью z и радиусом-вектором точки. Тогда

$$x = a \sin \theta \cos \omega t; \quad y = a \sin \theta \sin \omega t; \quad z = a \cos \theta;$$

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mga \cos \theta. \quad (1)$$

Отсюда получим интеграл

$$H = \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} (\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta) + mga \cos \theta = H_0,$$

который приводит к уравнению

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ma^2} [H_0 - U_{\text{eff}}(\theta)], \quad (2)$$

где

$$U_{\text{eff}} = mga \cos \theta - \frac{m}{2} a^2 \omega^2 \sin^2 \theta.$$

Из (2) следует закон движения точки в виде

$$t - t_0 = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ma^2} (H_0 - U_{\text{eff}}(\theta))}}$$

Рассматривая движение относительно неинерциальной системы, связанной с окружностью, можно получить потенциальную энергию

$$U^h = -\frac{m}{2} [\omega \mathbf{r}']^2 = -\frac{m}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \theta,$$

обобщенный потенциал $\mathcal{U} = U^h$ (поскольку $[\omega \mathbf{r}'] \perp \mathbf{v}'$), а затем лагранжиан (1).

5.57. а) Поместим начало координат в неподвижную точку окружности, а плоскость Oxy совместим с плоскостью окружности. За обобщенную координату возьмем φ — угол между прямой, проходящей через ось вращения и центр окружности, и прямой, соединяющей центр окружности и точку. Тогда

$$x = a \cos \omega t + a \cos(\omega t + \varphi); \quad y = a \sin \omega t + a \sin(\omega t + \varphi);$$

$$v^2 = [\omega^2 + (\omega + \dot{\varphi})^2 + 2\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi] a^2.$$

Опуская члены вида $\frac{d}{dt} f(\varphi, t)$, найдем

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} (\dot{\varphi}^2 + 2\omega^2 \cos \varphi). \quad (1)$$

Далее, получим интеграл обобщенной энергии

$$\frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2 - ma^2 \omega^2 \cos \varphi = H_0$$

и уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0,$$

т. е. уравнение математического маятника.

б) В неинерциальной системе S' с началом в неподвижной точке окружности и осью x' , направленной по диаметру окружности, получим

$$x' = a + a \cos \varphi; \quad y' = a \sin \varphi.$$

Используя эти функции, найдем кинетическую энергию в S' , равную

$$T' = \frac{mv'^2}{2} = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2,$$

и обобщенный потенциал

$$\mathcal{U} = -m[\omega \mathbf{r}'] \mathbf{v}' - \frac{m}{2} [\omega \mathbf{r}']^2 = -m\omega a^2 \dot{\varphi} (1 + \cos \varphi) - m\omega^2 a^2 (1 + \cos \varphi).$$

Опуская опять члены вида $\frac{d}{dt} f(\varphi, t)$, получим (1).

в) В системе отсчета S' , связанной с окружностью и началом в ее центре, будем иметь

$$x' = a \cos \varphi, \quad y' = a \sin \varphi.$$

Следовательно, обобщенный потенциал

$$\mathcal{U} = -m[\omega \mathbf{r}'] \mathbf{v}' - \frac{m}{2} [\omega \mathbf{r}']^2 + m\omega_0 \mathbf{r}',$$

где

$$\omega_0 \mathbf{r}' = -\omega^2 a^2 \cos \varphi.$$

Таким образом, придем к лагранжиану (1).

5.58. Совмещая начало координат с центром Земли и направляя ось z по оси вращения Земли, найдем, что

$$[\mathbf{\Omega} \mathbf{r}']^2 = \Omega^2 r'^2 - (\mathbf{\Omega} \mathbf{r})^2 = \Omega^2 r'^2 \sin^2 \theta;$$

$$[\mathbf{\Omega} \mathbf{r}'] \mathbf{v}' = \mathbf{\Omega} [\mathbf{r}' \mathbf{v}'] = \Omega r'^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi},$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли. Тогда лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} (r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} + \frac{m}{2} r^2\Omega^2\sin^2\theta + m\Omega r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = \\ &= \frac{m}{2} (r^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2} r^2\sin^2\theta (\dot{\varphi} + \Omega)^2 - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned}$$

Затем получим интегралы обобщенной энергии и обобщенного импульса

$$H = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2} r^2\sin^2\theta (\dot{\varphi} + \Omega)^2 - \frac{\alpha}{r} = H_0; \quad (1)$$

$$M_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta (\dot{\varphi} + \Omega) = M_{z0}. \quad (2)$$

Кроме того, из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} mr^2\dot{\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta (\dot{\varphi} + \Omega)^2 = \frac{M_{z0}^2 \cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} = -\frac{M_{z0}^2}{2mr^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin^2\theta}$$

при помощи умножения на $r^2\theta$ найдем интеграл

$$\frac{mr^4\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_{z0}^2}{2m\sin^2\theta} - \frac{M_{z0}^2}{2m}. \quad (3)$$

Таким образом, из (1) — (3) получим интеграл энергии в виде

$$\frac{mr^2}{2} + \frac{M_{z0}^2}{2mr^2} - M_{z0}\Omega - \frac{\alpha}{r} = H_0,$$

что позволяет найти закон движения

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (H_0 - U_{\text{eff}})}}$$

здесь

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M_{z0}^2}{2mr^2}.$$

Из тех же соотношений найдем уравнение траектории

$$\int \frac{v \sqrt{2m} d\theta}{\sqrt{M_{z0}^2 - \frac{M_{z0}^2}{\sin^2\theta}}} = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{H_0 - U_{\text{eff}}}};$$

$$\varphi \perp \Omega t = \int \frac{M_{z0}}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{M_0^2 - \frac{M_{z0}^2}{\sin^2 \theta}}}.$$

5.59. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}, \quad (1)$$

где вектор-потенциал магнитного поля

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \mathbf{r}],$$

а потенциал электрического поля

$$\varphi = -\mathbf{E} \mathbf{r}.$$

Учитывая, что $[\mathbf{H} \mathbf{r}] \mathbf{v} = \mathbf{H} [\mathbf{r} \mathbf{v}]$, из (1) получим

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + e \mathbf{E} \mathbf{r} + \frac{e}{2c} \mathbf{H} [\mathbf{r} \mathbf{v}].$$

5.60. Направляя ось z вдоль направления напряженности магнитного поля, получим

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} H.$$

Отсюда найдем интегралы движения:

$$p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{2c} \rho^2 H = p_{\varphi 0};$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} = p_{z0};$$

$$H = \rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} = H_0.$$

5.62 Вектор-потенциал магнитного диполя с моментом μ равен

$$\mathbf{A} = \frac{[\mu \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \cdot \frac{\mu [\mathbf{r} \mathbf{v}]}{r^3}.$$

Отсюда найдем уравнение Лагранжа

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

где

$$\mathbf{H} = \frac{3\mathbf{r}(\mu\mathbf{r}) - \mu r^2}{r^5}.$$

5.63. Учитывая, что вектор-потенциал монополя

$$\mathbf{A} = \frac{g}{r} \cdot \frac{[\mathbf{nr}]}{r - \mathbf{nr}},$$

найдем (\mathbf{n} — единичный вектор)

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{eg}{rc} \cdot \frac{[\mathbf{nr}] \mathbf{v}}{r - \mathbf{nr}}$$

и, следовательно,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{eg}{c} \frac{[\mathbf{vr}]}{r^3}.$$

5.64. Напишем лагранжиан частицы (см. задачу 5.62)

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{[\mathbf{rv}]}{r^3};$$

здесь $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t)$, причем $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\mu}]$. Следовательно,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} \frac{[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\mu}]]}{r^3} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

Приведем также закон изменения кинетической энергии

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \frac{e}{c} \frac{[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\mu}]] \mathbf{v}}{r^3}.$$

Заметим, что вращение нейтронных звезд, обладающих дипольным моментом, приводит к появлению вихревого электрического поля и к ускорению заряженных частиц.

5.65. Напишем лагранжиан заряда в цилиндрических координатах:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{e\dot{\varphi}}{c} \int_0^{\rho} \rho H d\rho,$$

уравнения и интеграл движения.

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{e}{c} \varphi \rho H, \quad (1)$$

$$m\rho^2\dot{\varphi} - \frac{e}{c} \int_0^{\rho} \rho H d\rho = M_0; \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{e\dot{\varphi}}{c} \int_0^{\rho} \rho \frac{\partial H}{\partial z} d\rho. \quad (3)$$

Полагая $z = 0$, $\rho = r_0$, из (1) — (3) найдем

$$m\dot{\varphi} = \frac{e}{c} H(r_0, t); \quad (4)$$

$$mr_0^2\dot{\varphi} - \frac{e}{c} \int_0^{r_0} \rho H d\rho = M_0; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Уравнение (5) можно представить в виде

$$mr_0^2\dot{\varphi} - \frac{e}{2\pi c} \Phi = M_0, \quad (6)$$

где $\Phi = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} H \rho d\rho d\varphi$ — поток напряженности поля через площадку, охватываемую орбитой электрона. Из (6) и (4) найдем

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi r_0^2 \frac{dH}{dt}. \quad (7)$$

Это соотношение связывает скорость изменения указанного потока со скоростью изменения напряженности магнитного поля. Интегрируя (7) по циклу ускорения, получим

$$\Phi = 2\pi r_0^2 H$$

или

$$\Phi = 2\Phi_0; \quad \Phi_0 = \pi r_0^2 H.$$

Таким образом, поток Φ должен быть вдвое больше того потока, который был бы, если бы поле внутри орбиты было однородно, а напряженность поля равна напряженности на орбите. Это так называемое бетатронное правило «2 : 1»

5.66. Лагранжиан электрона в цилиндрических координатах

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\dot{\varphi}}{c} \int_0^{\rho} \rho H d\rho.$$

Отсюда следуют уравнения движения и первый интеграл

$$m\ddot{\varphi} = m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{e}{c} \rho\dot{\varphi}H; \quad (1)$$

$$m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e}{c} \int_0^{\rho} \rho H d\rho = M_0; \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = \frac{e}{c} \dot{\varphi} \int_0^{\rho} \rho \frac{dH}{dz} d\rho. \quad (3)$$

Для параксиальных пучков электронов из (2) найдем

$$m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c} \rho^2 H(0, z) \approx M_0.$$

Затем, учитывая начальные условия, получим $M_0 = 0$ или

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{2mc} H(0, z). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получим уравнение

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{eH(0, z)}{2mc} \right)^2 \rho = 0. \quad (5)$$

Замечая, что область, занятая магнитным полем, мала, а продольная составляющая (по оси z) скорости электрона много больше поперечной, можно считать, что $\dot{z} = u = \text{const}$. Имея это в виду, перейдем в (5) к аргументу z :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dz} \dot{z} = u \frac{d\rho}{dz}; \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = u^2 \frac{d^2\rho}{dz^2}$$

и получим

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} + \left(\frac{eH(0, z)}{2mcu} \right)^2 \rho = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что $\frac{d^2\rho}{dz^2} < 0$, т. е. траектория имеет выпуклость в направлении орта \mathbf{n}_ρ , а линза является собирающей. Интегрируя (6), найдем

$$\left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{z_2} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{z_1} = -\rho \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{eH}{2mcu} \right)^2 dz, \quad (7)$$

где z_1, z_2 — начальная и конечная точки траектории (здесь также учтено, что на протяжении тонкой линзы ρ почти не меняется).

Для параксиальных пучков

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{z_1} = \frac{\rho}{d}; \quad \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{z_2} = -\frac{\rho}{f}, \quad (8)$$

где d и f — расстояния от линзы до источника и изображения соответственно. Подставляя (8) в (7), получим формулу линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{F} = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{eH}{2mcu}\right)^2 dz,$$

где F — фокусное расстояние. Заметим, что изображение повернуто относительно оригинала на угол

$$\Delta\varphi = -\frac{e}{2mc} \int_{z_1}^{z_2} H(z) dz.$$

5 67 а) В сферической системе координат с полярной осью, направленной вдоль μ , компоненты вектора-потенциала

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0; \quad A_\varphi = \frac{\mu \sin \theta}{r^2}.$$

Сначала найдем уравнение силовой линии. Учитывая, что

$$\mathbf{H} = \frac{2r(\mu r) - \mu r^2}{r^5},$$

получим составляющие

$$H_r = \frac{2\mu \cos \theta}{r^3}, \quad H_\theta = \frac{\mu \sin \theta}{r^3}, \quad H_\varphi = 0.$$

Для силовой линии

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{H_r}{H_\theta}, \quad \frac{1}{r} dr - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = 0$$

находим $r = k \sin^2 \theta$, где k — константа, определяющая данную силовую линию

Лагранжиан заряда

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{e\mu \sin^2 \theta}{rc} \dot{\varphi}.$$

Выпишем также интегралы движения

$$v^2 = r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = v_0^2; \quad (1)$$

$$M = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + \frac{e\mu}{c} \frac{\sin^2 \theta}{r} = M_0. \quad (2)$$

Очевидно, $|v_\varphi| < v_0$, т. е.

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{m^2 r^2 \sin^2 \theta} \left(M_0 - \frac{e\mu}{cr} \sin^2 \theta \right)^2 < v_0^2. \quad (3)$$

Далее предположим, что имеют место следующие начальные условия:

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Тогда $M_0 = e\mu/cr_0 > 0$, а из (3) следует

$$\left| \frac{\sin \theta}{r^2} - \frac{1}{rr_0 \sin \theta} \right| \leq \frac{1}{a_0^2}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{e\mu}{mcv_0}}. \quad (4)$$

Величина a_0 имеет размерность длины. Например, для протона при $v_0 \sim 0,1c$ в магнитном поле Земли ($\mu = 8,1 \cdot 10^{25}$ элст. ед.) получим

$$a_0 = \left(\frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 8,1 \cdot 10^{25}}{1,67 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20} \cdot 0,1} \right)^{1/2} = 1,61 \cdot 10^{10} \text{ см.}$$

Величина $a_0 \gg R$ — радиуса Земли ($R = 6,37 \cdot 10^8$ см). Кроме того, при малых скоростях $a_0 \approx 5 \cdot 10^{10} \sqrt{c/v_0}$ и (4) переходит в соотношение

$$\frac{\sin \theta}{r^2} - \frac{1}{rr_0 \sin \theta} \approx 0,$$

из которого вытекает, что

$$r = r_0 \sin^2 \theta.$$

Таким образом, в этом случае протон движется по силовой линии. Если $r_0 \sim 2R$, то, пренебрегая неоднородностью поля, для «радиуса» орбиты получим

$$\rho_0 = \frac{mcv(0)}{eH(r_0)}; \quad H(r_0) \approx \frac{\mu}{r_0^3}; \quad \rho_0 \approx 78 \text{ км.}$$

Определим теперь границы области, в которой может находиться протон. Из (4) имеем

$$\frac{\sin \theta}{r^2} - \frac{1}{rr_0 \sin \theta} = \pm \frac{1}{a_0^2}$$

или

$$\frac{r}{a_0} = \frac{a_0}{2r_0 \sin \theta} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2r_0}{a_0} \right)^2 \sin^3 \theta} \right];$$

$$\frac{r}{a_0} = \frac{a_0}{2r_0 \sin \theta} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2r_0}{a_0} \right)^2 \sin^3 \theta} \right].$$

Соответствующие области для случая $r_0/a_0 < 1/2$ показаны на рис. 5.67, а.

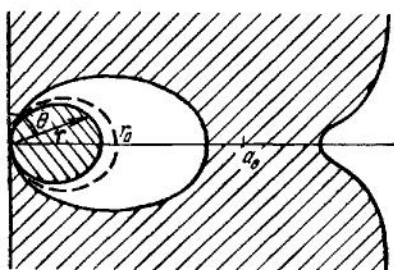
б) Полагая $\theta = \pi/2$, из (1), (2) получим

$$\frac{m \dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r) = \frac{mv_0^2}{2} = E_0,$$

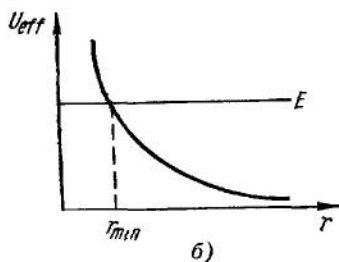
где

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2mr^2} \left(M_0 - \frac{e\mu}{cr} \right)^2.$$

Графики U_{eff} для случаев $M_0 < 0$ и $M_0 > 0$ изображены на рис. 5.67, б, в соответственно.

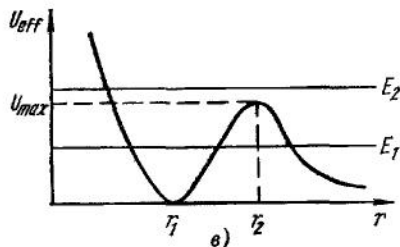


а)



б)

Рис 5.67



в)

В случае $M_0 < 0$ для любой энергии E_0 движение инфинитно. Траектория симметрична относительно прямой, соединяющей центр Земли с точкой r_{min} , которая определяется из уравнения $E_0 = U_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$.

В случае $M_0 > 0$ при

$$0 < E_0 \leq U_{\text{max}} = U(r_2) = \frac{e^2 M_0^4}{32 m e^2 \mu^2}$$

возможно рассеяние или захват частиц. Из уравнения (2), которое представим в виде

$$\dot{\psi} = \frac{M_0}{mr^2} - \frac{e\mu}{mcr^3},$$

следует, что $\dot{\varphi} > 0$ при $r > r_1 = \frac{e\mu}{cM_0}$ и $\dot{\varphi} < 0$ при $r < r_1$. При $r = r_1$ частица имеет «точки поворота» по координате φ . При $E_0 > U_{eff}(r_2)$ движение инфинитно, причем при $r = r_1$ $\varphi = 0$, т. е. в двух положениях ее скорость параллельна радиусу-вектору.

5.68. Лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = (T_{\text{мех}} - U_{\text{мех}}) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \dot{L}_{ik} \dot{Q}_i \dot{Q}_k - \frac{1}{2} \sum_i \frac{Q_i^2}{C_i}, \quad (1)$$

которому при наличии сопротивлений и э.д.с. соответствуют уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{Q}_i} + \mathcal{E}_i. \quad (2)$$

Раскрывая (2), получим

$$\frac{d}{dt} \sum_k L_{ik} \dot{Q}_k + \frac{Q_i}{C_i} = -R_i \dot{Q}_i + \mathcal{E}_i, \quad (3)$$

где \mathcal{E}_i — э. д. с., действующая в i -том контуре. Если L_{ik} и C_i постоянны, из (3) находим уравнения

$$\sum_k L_{ik} \frac{d^2 Q_k}{dt^2} + R_i \frac{dQ_i}{dt} + \frac{Q_i}{C_i} = \mathcal{E}_i, \quad (4)$$

представляющие закон Ома для переменного тока.

Запишем закон изменения энергии для системы неподвижных проводников. Обобщенная энергия системы

$$H_{\text{э.д.м}} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \dot{Q}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} \dot{Q}_i \dot{Q}_k + \frac{1}{2} \sum_i \frac{Q_i^2}{C_i}. \quad (5)$$

Далее

$$\frac{dH_{\text{э.д.м}}}{dt} = - \sum_i R_i \dot{Q}_i^2 + \sum_i \mathcal{E}_i \dot{Q}_i. \quad (6)$$

Следовательно, разность между работой в единицу времени сторонних э.д.с. и выделяемым джоулевым теплом идет на увеличение энергии электрического и магнитного полей.

Теперь выпишем уравнения Лагранжа в координатах q (координата q_i характеризует пространственную конфигурацию i -того контура).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i.$$

Очевидно, величина

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik}(q_1, \dots, q_s, t) \dot{Q}_i \dot{Q}_k$$

является обобщенной силой, обусловленной взаимодействием токов

5 69. а) Выберем направление тока между узлами по часовой стрелке. Тогда получим

$$\mathcal{L} = \frac{L\dot{Q}_1^2}{2} - \frac{Q_2^2}{2C} + \mathcal{E}(Q_1 - Q_2);$$

$$L\ddot{Q}_1 = \mathcal{E}; \quad 0 = -\frac{Q_2}{C} - \mathcal{E}.$$

Далее предположим, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, и найдем импеданс Z системы. Полагая $\dot{Q}_1 = J_1 e^{i\omega t}$; $\dot{Q}_2 = J_2 e^{i\omega t}$; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$, получим

$$iL\omega J_1 = \mathcal{E}_0; \quad 0 = \frac{J_2}{C} + i\omega \mathcal{E}_0.$$

Учитывая, что $J = J_1 - J_2$, найдем

$$\mathcal{E} = JZ; \quad Z = \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} + iC\omega}; \quad |Z| = \frac{\omega L}{1 - CL\omega^2}.$$

б) Аналогично получим

$$\mathcal{L} = \frac{L_1 \dot{Q}_1^2}{2} - \frac{Q_1^2}{2C_1} - \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{2C} + \frac{L_2 \dot{Q}_2^2}{2} - \frac{Q_2^2}{2C_2};$$

$$L_1 \ddot{Q}_1 - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{(Q_1 - Q_2)}{C} = 0; \quad L_2 \ddot{Q}_2 - \frac{Q_2}{C_2} + \frac{(Q_1 - Q_2)}{C} = 0.$$

5 70 Энергия взаимодействия тока с магнитным полем может быть представлена в виде

$$\frac{1}{c} \int \mathbf{A} j dv = \frac{1}{c} \sum_i \Phi_i \dot{Q}_i,$$

где Φ_i — поток магнитной индукции, пронизывающий i -тый контур. Тогда лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + 3 m g l_m \cos \varphi + \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 + \frac{1}{c} H a^2 \dot{Q} \sin \varphi; \quad (1)$$

здесь $I = 5/3 m a^2$ — момент инерции рамки относительно оси вращения; m — масса одной стороны рамки, $l_m = \frac{2}{3} a$ — расстоя-

ние от оси до центра масс рамки; L — индуктивность рамки; φ — угол между плоскостью рамки и вертикалью

Согласно (1) имеем интеграл энергии

$$E = \frac{5ma^2}{6} \dot{\varphi}^2 - 2mga \cos \varphi + \frac{1}{2} L\dot{Q}^2 = E_0 \quad (2)$$

и интеграл

$$\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = L\dot{Q} + Ha^2 \sin \varphi = \Phi_0, \quad (3)$$

связанный с циклическостью координаты Q и имеющий смысл полного потока магнитной индукции через рамку. Из (2) и (3) найдем

$$\frac{5ma^2}{6} \dot{\varphi}^2 + U_{\text{eff}}(\varphi) = E_0,$$

где

$$U_{\text{eff}} = -2mga \cos \varphi + \frac{1}{2L} (\Phi_0 - Ha^2 \sin \varphi)^2,$$

и, таким образом, получим закон движения рамки в виде

$$t - t_0 = \int \frac{ad\varphi}{\sqrt{\frac{6}{5m} (E_0 - U_{\text{eff}})}}.$$

Если проводник обладает сопротивлением, то уравнениями движения являются

$$\frac{d}{dt} (L\dot{Q} + Ha^2 \sin \varphi) = -4R\dot{Q};$$

$$\frac{d}{dt} I\dot{\varphi} = -2mga \sin \varphi + Ha^2 \dot{Q} \cos \varphi,$$

которые, в частности, для линейных колебаний сводятся к системе

$$L\ddot{Q} + Ha^2\dot{\varphi} + 4R\dot{Q} = 0;$$

$$I\ddot{\varphi} + 2mga \varphi - Ha^2 \dot{Q} = 0.$$

5.71. Пусть φ — угол поворота первого контура. Тогда

$$\mathcal{L} = L_{12} J_1 \dot{Q} + \frac{1}{2} L_{22} \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - U_{\text{мех}}.$$

Затем получим уравнения движения системы:

$$\frac{d}{dt} (L_{12} J_1 + L_{22} \dot{Q}) = -R_2 \dot{Q};$$

$$\frac{d}{dt} (I\dot{\varphi}) = \frac{dL_{12}}{d\varphi} J_1 \dot{Q} + M_0; \quad M_0 = -\frac{\partial U_{\text{мех}}}{\partial \varphi},$$

которые представим в виде

$$J_1 \frac{dL_{12}}{d\varphi} \dot{\varphi} + L_{12} \dot{J}_1 + R_2 J_2 + L_{22} \dot{J}_2 = 0; \quad (1)$$

$$I \ddot{\varphi} - \frac{dL_{12}}{d\varphi} J_1 J_2 = M_0. \quad (2)$$

Поскольку R_2 велико (большая нагрузка в цепи статора), то из (1) следует, что

$$J_2 \approx - \frac{J_1}{R_2} \cdot \frac{dL_{12}}{d\varphi} \dot{\varphi}. \quad (3)$$

Учитывая (3), из (2) получим

$$I \ddot{\varphi} + \left(\frac{dL_{12}}{d\varphi} \right)^2 \frac{J_1^2}{R_2} \dot{\varphi} = M_0.$$

Однако в квазистационарном режиме $\ddot{\varphi}$ мало, поэтому

$$\dot{\varphi} = \frac{M_0 R_2}{J_1^2} \left(\frac{dL_{12}}{d\varphi} \right)^{-2}.$$

ГЛАВА 6

Линейные колебания

§ 1. Собственные одномерные колебания

6.1. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ между вертикалью и пружиной. Затем найдем смещение точки $x = h \operatorname{tg} \varphi$. Следовательно, кинетическая и потенциальная энергии соответственно равны

$$T = \frac{m}{2} \frac{h^2 \dot{\varphi}^2}{\cos^4 \varphi}; \quad U(\varphi) = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{h}{\cos \varphi} - l_0 \right)^2.$$

Положение равновесия определяется условием $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, т. е.

$$\kappa \left(\frac{h}{\cos \varphi} - l_0 \right) \frac{h \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0.$$

Таким образом, точка обладает тремя положениями равновесия:

$$\varphi_1 = 0, \quad h > l_0; \quad \cos \varphi_{2,3} = \frac{h}{l_0}, \quad h < l_0.$$

В первом положении равновесия

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1} = \kappa h (h - l_0); \quad \omega^2 = \frac{\kappa (h - l_0)}{mh};$$

во втором и третьем положениях равновесия

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{2,3}} = \kappa (l_0^2 - h^2) \frac{l_0^2}{h^2}; \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{m} \cdot \frac{l_0^2 - h^2}{l_0^2}.$$

6.2. В качестве обобщенной координаты выберем угол θ между вертикалью и частью нити между шариком и одним из стержней. Тогда кинетическая и потенциальная энергии соответственно равны

$$T = \frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{8 \sin^4 \theta};$$

$$U(\theta) = -mg \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{a}{\sin \theta} - a \right)^2.$$

Положение равновесия определяется из условия

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{mga}{2\sin^2 \theta} - \kappa a^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} - 1 \right) \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0$$

при $2\theta = 60^\circ$. Следовательно, $\kappa = mg/a\sqrt{3}$. Далее, найдем

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_{eq} = \frac{14}{\sqrt{3}} mga$$

и поэтому

$$\omega^2 = \frac{7}{2\sqrt{3}} \frac{g}{a}.$$

6.3. В качестве обобщенной координаты выберем x . Тогда

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (1 + 4k^2 x^2) \dot{x}^2; \quad U(x) = mgkx^2.$$

Очевидно, положением равновесия, определяемым из условия

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2mgkx = 0,$$

является $x_{eq} = 0$. Затем получим

$$\omega^2 = 2gk.$$

6.4. Шарик имеет одну степень свободы. Кинетическая энергия шарика

$$T = \frac{m}{2} (1 + 4\rho^2 x^2) \dot{x}^2,$$

а потенциальная энергия

$$U(x) = mg\rho x^2 + \kappa \left[\int_0^x du \sqrt{1 + 4\rho^2 u^2} \right]^2.$$

Положение устойчивого равновесия шарика находится в вершине параболы. Так как

$$\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=0} = 2\rho mg + 2\kappa,$$

то

$$\omega^2 = 2\rho g + 2 \frac{\kappa}{m}.$$

6.5. Функция Лагранжа точки

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{2} [\sqrt{a^2 - 2aR \cos \varphi + R^2} - l_0]^2,$$

где в качестве обобщенной координаты выбран центральный угол φ , отсчитываемый от прямой, которая соединяет центр окружности и точку закрепления пружины. Потенциальная энергия достигает минимума в точках

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0 \quad \text{при } a > R + l_0; \\ \varphi_{2,3} &= \pm \arccos \frac{a^2 + R^2 - l^2}{2aR} \quad \text{при } l_0 - R < a < l_0 + R; \\ \varphi_4 &= \pi \quad \text{при } a < l_0 - R.\end{aligned}$$

Эти точки являются положениями устойчивого равновесия материальной точки.

Частоты линейных колебаний в окрестностях точек $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ находятся по формуле

$$\omega_{1,2,3,4}^2 = \frac{\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{1,2,3,4}}{mR^2}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{ka(a-R-l_0)}{mR(a-R)}; \quad \omega_4^2 = \frac{ka(l_0-a-R)}{mR(a+R)}; \\ \omega_{2,3}^2 &= \frac{k}{4mR^2 l_0^2} [4a^2 R^2 - (a^2 + R^2 - l_0^2)^2].\end{aligned}$$

6.6. Направим ось z вверх по оси цилиндра, а ось x через нижнюю точку пересечения цилиндра и секущей плоскости. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ цилиндрической системы координат. Исключим зависимость кинетической и потенциальной энергий точки от z и \dot{z} с помощью уравнения секущей плоскости. Затем получим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \dot{\varphi}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi) + mgR \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

и следующее выражение для квадрата частоты:

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \operatorname{tg} \alpha.$$

6.7. Линией пересечения горизонтального цилиндра с плоскостью является эллипс. Направим ось z перпендикулярно плоскости эллипса, а оси x и y вдоль его полуосей. Затем перейдем к параметрическому представлению эллипса:

$$x = \frac{R}{\sin \alpha} \cos \xi; \quad y = R \sin \xi;$$

здесь R — радиус цилиндра, а α — угол наклона секущей плоскости к горизонту. Тогда получим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \xi}{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \xi \right) \dot{\xi}^2 + mgR \cos \xi,$$

с помощью которой найдем, что частота колебаний в окрестности положения устойчивого равновесия $\xi=0$ не зависит от угла наклона секущей плоскости и равна $\sqrt{g/R}$.

Кинетическая и потенциальная энергии как функции времени соответственно равны

$$T = \frac{mR^2}{2} \left[\sqrt{\frac{g}{R}} A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t + \beta \right) \right]^2;$$

$$U = \frac{1}{2} mgRA^2 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t + \beta \right).$$

Следовательно,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}} \int_0^{2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}} T dt = \frac{1}{4} mgRA^2.$$

Аналогично

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} mgRA^2 = \langle T \rangle.$$

6.8. Выберем x в качестве обобщенной координаты. Тогда

$$T = \frac{m}{2} (1 + a^2 k^2 \cos^2 kx) \dot{x}^2,$$

а потенциальная энергия

$$U = -mgr = mga \cos \alpha \sin kx.$$

Приравнивая нулю производную

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kmga \cos \alpha \cos kx = 0,$$

найдем положения равновесия:

$$x_{eq} = \frac{\pi}{2k} (2n + 1); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Затем получим, что при нечетных n

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=x_{eq}} = -mgk^2 a \cos \alpha \sin kx = mga k^2 \cos \alpha > 0.$$

Таким образом,

$$\omega^2 = g a k^2 \cos \alpha.$$

6.9. Ответ: $\omega = \left(\frac{2a^2 V_0}{\mu} \right)^{1/2}.$

6.11. Поместим начало координатной оси в середину трубки и выберем в качестве обобщенной координаты смещение x заряда вдоль оси. Тогда

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$U = \frac{eQ}{a-x} + \frac{eQ}{a+x} = \frac{2eQa}{a^2 - x^2}.$$

Так как $U' = \frac{2eQa}{(a^2 - x^2)^2} 2x$, то положение равновесия $x_{eq} = 0$; кроме того, $U''(x_{eq}) = 4eQ/a^3$. Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{4eQ}{ma^3} \quad (eQ > 0).$$

6.12. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ отклонения нити от вертикали. Тогда $T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2$, а потенциальная энергия взаимодействия заряда с его изображением

$$U = - \frac{e^2}{2(h-l \cos \varphi)}.$$

Из условия $U' = 0$ получим $\varphi_{eq} = 0$, а затем

$$U''(\varphi_{eq}) = \frac{e^2 l}{2(h-l)^2}.$$

Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{e^2}{2m(h-l)^2 l}.$$

6.13. В качестве обобщенной координаты выберем параметр ξ , определяющий положение заряда согласно соотношениям

$$x = a \cos \xi; \quad y = b \sin \xi.$$

Тогда

$$T = \frac{m}{2} (a^2 \dot{\xi}^2 \sin^2 \xi + b^2 \dot{\xi}^2 \cos^2 \xi) \xi^2.$$

Затем учтем, что потенциал поля между обкладками конденсатора в цилиндрических координатах равен

$$\Phi(\rho) = \Phi_0 \ln \frac{\rho}{r_1} / \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(ось z совмещена с осью обкладок конденсатора). Следовательно,

$$U = \frac{e\Phi_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{1}{r_1} \sqrt{a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi}.$$

Из условия $U' = 0$ получим положения равновесия:

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = \frac{\pi}{2}; \quad \xi_3 = \pi; \quad \xi_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Далее найдем

$$U''(\xi_1) = U''(\xi_3) = \frac{e\Phi_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2} < 0;$$

$$U''(\xi_2) = U''(\xi_4) = \frac{e\Phi_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} > 0.$$

Таким образом, ξ_2, ξ_4 являются положениями устойчивого равновесия с одинаковой частотой колебаний, которая равна

$$\omega = \left[\frac{e\Phi_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ma^2b^2} \right]^{1/2}.$$

6.14. Зададим уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$x = a \cos \xi, \quad y = b \sin \xi.$$

Параметр ξ удобно выбрать в качестве обобщенной координаты. Тогда потенциальная энергия заряда равна

$$U = -eEa \cos \xi.$$

Она имеет изолированный минимум в точке $\xi = 0$.

В окрестности этой точки получим приближенное выражение для функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} b^2 \dot{\xi}^2 - eaE \frac{\xi^2}{2},$$

которое приводит к значению удельного заряда

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi^2 b^2}{ET^2 a}.$$

6.15. Вводя обобщенную координату ξ с помощью функций

$$x = a \cos \xi; \quad y = b \sin \xi,$$

найдем

$$T = \frac{m}{2} (a^2 \dot{\xi}^2 \sin^2 \xi + b^2 \dot{\xi}^2 \cos^2 \xi);$$

$$U = \frac{eQ}{\sqrt{a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi}}.$$

Положения равновесия определяются из условия $U' = 0$:

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = \frac{\pi}{2}; \quad \xi_3 = \pi; \quad \xi_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Вычисляя вторую производную потенциальной энергии, находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} (\xi = \xi_1, \xi_3) = \frac{eQ}{a^3} (a^2 - b^2) < 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} (\xi = \xi_2, \xi_4) = -\frac{eQ}{b^3} (a^2 - b^2) > 0.$$

Следовательно, заряд может колебаться около положений ξ_2, ξ_4 с частотой

$$\omega = \left[\frac{|eQ|(a^2 - b^2)}{ma^2b^3} \right]^{1/2}.$$

6.16. Потенциальная энергия заряда e в полярных координатах с началом в фокусе эллипса равна

$$U = \frac{Qe}{\rho} (1 + \varepsilon \cos \varphi).$$

Она имеет изолированный минимум в точке $\varphi_1 = 0$ при $Qe < 0$ и в точке $\varphi_2 = \pi$ для случая $Qe > 0$. Соответственно получим

$$\omega_1^2 = -\frac{Qe}{m\rho^3} (1 + \varepsilon)^3; \quad \omega_2^2 = \frac{Qe}{m\rho^3} (1 - \varepsilon)^2.$$

6.17. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ полярной системы координат с центром в одном из фокусов эллипса. Тогда для точки имеем

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad T = \frac{m\rho^2}{2} \cdot \frac{1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^4} \dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия точки равна

$$U = \frac{eQ}{\rho} + \frac{eQ}{\rho_1} = \frac{2eQ}{\rho} \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2},$$

так как сумма расстояний точки до фокусов $\rho + \rho_1 = 2\rho/(1 - \varepsilon^2)$.
Затем определим положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi; \quad \cos \varphi_{3,4} = -\varepsilon.$$

Далее находим в первом и втором положениях равновесия

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi_1} = -\frac{4eQ\varepsilon^2}{\rho} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} > 0 \quad (e < 0);$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi_2} = -\frac{4eQ\varepsilon^2}{\rho(1 - \varepsilon)^2} > 0 \quad (e < 0).$$

Следовательно,

$$\omega^2(\varphi_{1,2}) = -\frac{4eQ\varepsilon^2}{m\rho^3} \quad (e < 0).$$

Для третьего и четвертого положений равновесия получим

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi_{3,4}} = \frac{4eQ\varepsilon^2}{\rho} > 0 \quad (e > 0);$$

$$\omega^2(\varphi_{3,4}) = \frac{4eQ\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)^3}{m\rho^3}.$$

6.18. Пусть a — расстояние между проводниками в отсутствие токов, x — смещение верхнего проводника. Сила, действующая на проводник со стороны тока J_1 , равна

$$\frac{2J_1J_2s}{c^2(a-x)}.$$

Суммарная сила, действующая на проводник,

$$F = -2\kappa \left[x - \frac{a}{a-x} \right],$$

где $\alpha = J_1J_2s/\kappa c^2$; κ — коэффициент жесткости пружины. Потенциалом силы F является

$$U = \kappa \left[x^2 + 2\alpha \ln \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right]. \quad (1)$$

Закон движения проводника

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U)}}$$

следует из закона сохранения энергии.

Положения равновесия

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \alpha}.$$

В этих положениях

$$U''(x_1) = 2\kappa \frac{x_2 - x_1}{x_2} < 0; \quad U''(x_2) = 2\kappa \frac{x_1 - x_2}{x_1} > 0.$$

Следовательно, частота линейных колебаний около положения x_2 устойчивого равновесия равна

$$\omega = \left[\frac{2\kappa}{m} \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1} \right]^{1/2}.$$

6.19. Запишем потенциальную энергию маятника длины l и массы m как функцию угла отклонения от вертикали:

$$U = -mgl \cos \varphi + mal \sin \varphi.$$

Вводя обозначение $\operatorname{tg} \alpha = -a/g$, перепишем это выражение в виде

$$U = -ml \sqrt{g^2 + a^2} \cos(\varphi - \alpha).$$

Далее для частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \frac{1}{l} \sqrt{g^2 + a^2}.$$

Среднее за период колебаний значение кинетической энергии оказывается равным

$$\langle T \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} T(t) dt = \frac{mA^2 l}{4} \sqrt{g^2 + a^2},$$

где A — амплитуда колебаний.

6.20. Рассмотрим движение бусинки в неинерциальной системе отсчета, связанной с обручем. Направляя ось z вертикально вверх по оси вращения и выбирая в качестве обобщенной координаты полярный угол θ , найдем

$$T = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2}, \quad U(\theta) = mgR \cos \theta - \frac{m}{2} R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta.$$

Положения равновесия определяются из условия $U' = 0$:

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \pi; \quad \cos \theta_{3,4} = -g/R\Omega^2.$$

Далее найдем

$$U''(\theta_1) = -mgR - mR^2 \Omega^2 < 0;$$

$$U''(\theta_2) = mgR - mR^2 \Omega^2 > 0 \text{ при } \Omega^2 < \frac{g}{R};$$

$$U''(\theta_{3,4}) = mR^2 \Omega^2 - \frac{mg^2}{\Omega^2} > 0 \text{ при } \Omega^2 > \frac{g}{R}.$$

Итак,

$$\omega^2(\theta_2) = \frac{g}{R} - \Omega^2, \quad \Omega < \sqrt{\frac{g}{R}},$$

$$\omega^2(\theta_{3,4}) = \Omega^2 - \frac{g^2}{\Omega^2 R^2}, \quad \Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

6.21. Удобно ввести цилиндрические координаты, жестко связанные с вращающимся треугольником, с началом в вершине треугольника и полярной осью, направленной вверх по оси вращения. Тогда получим уравнение движения шарика в азимутальном направлении

$$m\ddot{\varphi} = mg \sin \varphi + \frac{1}{2} ml \Omega^2 \sin 2\varphi - \kappa l \sin \varphi, \quad (1)$$

где l — сторона треугольника. Отсюда видно, что в положении динамического равновесия

$$\Omega^2 ml \cos \varphi_{eq} = -mg + \kappa l. \quad (2)$$

Разлагая правую часть уравнения (1) в ряд по отклонению положения φ_{eq} с точностью до линейных членов включительно, найдем

$$\ddot{\varphi} + \left[\left(\frac{\kappa}{m} - \frac{g}{l} \right) \cos \varphi_{eq} - \Omega^2 \cos 2\varphi_{eq} \right] \varphi = 0.$$

Таким образом, для частоты колебаний получим

$$\omega = \left[\Omega^2 - \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{g}{l} - \frac{\kappa}{m} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

6.22. Выберем θ — угол отклонения маятника от вертикали — в качестве независимой координаты. Тогда уравнением линейных колебаний шарика явится уравнение

$$\ddot{\theta} + \frac{6\pi R \eta}{ml} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

а его решением — функция

$$\theta(t) = e^{-\frac{3\pi R \eta}{ml} t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t),$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{3\pi R \eta}{ml} \right)^2, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Для случая слабо затухающих колебаний ($m\omega_0 l / 3\pi R \eta \gg 1$). Поэтому при усреднении по времени можно вынести экспоненциальные множители за знак интеграла. Таким образом, для среднего по периоду колебаний значения энергии получим

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle &= \frac{1}{2} ml^2 \langle \dot{\theta}^2 \rangle + \frac{1}{2} mgl \langle \theta^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} ml^2 \omega_0^2 (A^2 + B^2) e^{-\frac{6\pi R \eta}{ml} t}. \end{aligned}$$

Следовательно, диссипация энергии равна

$$-\frac{d}{dt} \langle E \rangle = \langle E(t) \rangle \frac{6\pi R \eta}{ml}.$$

6.23. Общее решение уравнения

$$\ddot{\xi} + 2\mu \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$

для слабо затухающих колебаний имеет вид

$$\xi = e^{-\mu t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t).$$

Поэтому среднее за период значение энергии

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle = \frac{m}{2} \omega_0^2 (A^2 + B^2) e^{-2\mu t},$$

а средняя мощность диссипативной силы

$$\langle \mathcal{N}^0(t) \rangle = -2\mu \langle E \rangle.$$

Таким образом, добротность

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\mu},$$

а для рассматриваемого осциллятора

$$Q \approx \frac{m}{2k} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

и возрастает с убыванием радиуса образующей окружности циклоиды.

6.24. В системе координат с осью z , направленной вдоль вин-

товой линии, и осью x , направленной вертикально вниз, уравнение винтовой линии, лагранжиан и диссипативная функция имеют вид

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = b \theta;$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (a^2 + b^2) \dot{\theta}^2 + mga \cos \theta;$$

$$D = \frac{k}{2} (a^2 + b^2) \dot{\theta}^2,$$

где θ — параметр.

Общее решение уравнения Лагранжа

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{ga}{a^2 + b^2} \theta = 0$$

можно представить в виде

$$\theta(t) = e^{-\mu t} \left\{ \theta(0) \cos \omega t + [\dot{\theta}(0) + \mu \theta(0)] \frac{\sin \omega t}{\omega} \right\},$$

где

$$\mu = \frac{k}{2m}; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \mu^2; \quad \omega_0^2 = \frac{ga}{(a^2 + b^2)}.$$

Колебания являются слабо затухающими, если $\mu \ll \omega_0$. В этом случае

$$\theta(t) \cong e^{-\mu t} \left\{ \theta(0) \cos \omega_0 t + [\dot{\theta}(0) + \mu \theta(0)] \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right\}.$$

Чтобы найти закон движения при $\mu = \omega_0$, учтем, что $\lim_{\omega \rightarrow 0} \cos \omega t = 1$,

а $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t$. Таким образом получим

$$\theta(t) \simeq e^{-\mu t} \{ \theta(0) + [\dot{\theta}(0) + \mu \theta(0)] t \}.$$

Наконец, в случае сильно затухающих колебаний ($\mu \gg \omega_0$) найдем

$$\theta(t) = e^{-\mu t} \left\{ \theta(0) \operatorname{ch} |\omega| t + [\dot{\theta}(0) + \mu \theta(0)] \frac{\operatorname{sh} |\omega| t}{|\omega|} \right\}.$$

§ 2. Собственные и главные колебания системы

6.25. Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{x}_1^2 + 2a_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + a_{22} \dot{x}_2^2); \quad U = \frac{1}{2} (c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2).$$

Здесь $x_i = q_i - q_{ieq}$ — отклонения от положения равновесия, а

$$c_{11} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right|_{eq}; \quad c_{12} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{eq}; \quad c_{22} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right|_{eq}.$$

Далее найдем уравнения Лагранжа:

$$a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 0;$$

$$a_{22}\ddot{x}_2 + a_{12}\ddot{x}_1 + c_{22}x_2 + c_{12}x_1 = 0.$$

Решение этой системы ищем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t},$$

где A_1 и A_2 — комплексные постоянные.

Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 a_{11} + c_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} \\ c_{12} - \omega^2 a_{12} & c_{22} - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

находим два значения квадрата частоты ω_1^2 .

Полагая $A_2 = ae^{i\alpha}$, получим первое частное решение ($\omega = \omega_1$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_{22} - \omega_1^2 a_{22}}{\omega_1^2 a_{12} - c_{12}} \\ 1 \end{pmatrix} a e^{i\omega_1 t + i\alpha}.$$

Полагая $A_2 = be^{i\beta}$, найдем второе частное решение ($\omega = \omega_2$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2^2 a_{12} - c_{12}}{c_{11} - \omega_2^2 a_{11}} \\ 1 \end{pmatrix} b e^{i\omega_2 t + i\beta}.$$

Общее решение определяется реальной частью суммы полученных частных решений

$$x_1 = \frac{c_{22} - \omega_1^2 a_{22}}{\omega_1^2 a_{12} - c_{12}} a \cos(\omega_1 t + \alpha) + \frac{\omega_2^2 a_{12} - c_{12}}{c_{11} - \omega_2^2 a_{11}} b \cos(\omega_2 t + \beta); \quad (2)$$

$$x_2 = a \cos(\omega_1 t + \alpha) + b \cos(\omega_2 t + \beta),$$

где a , b , α , β — произвольные действительные постоянные.

Представим также общее решение (2), описывающее собственные колебания системы, в виде суперпозиции функций

$$\theta_1 = A \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad \theta_2 = B \cos(\omega_2 t + \beta),$$

описывающих главные колебания. Тогда решение (2) принимает форму

$$x_1 = \Delta_1^1 \theta_1 + \Delta_1^2 \theta_2; \quad x_2 = \Delta_2^1 \theta_1 + \Delta_2^2 \theta_2,$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} \Delta_1^1 &= c_{22} - \omega_1^2 a_{11}; & \Delta_1^2 &= -(c_{12} - \omega_2^2 a_{12}); \\ \Delta_2^1 &= -(c_{12} - \omega_1^2 a_{12}); & \Delta_2^2 &= c_{11} - \omega_2^2 a_{11}. \end{aligned}$$

6.26. В качестве обобщенных координат выберем смещение x_1 от положения равновесия первого шарика и величину $x_2 = l\varphi$, где φ — угол отклонения нити от вертикали. Тогда

$$\begin{aligned} T &= \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \frac{x_2}{l} + \dot{x}_2^2); \\ U &= \kappa x_1^2 - mgl \cos \frac{x_2}{l}. \end{aligned}$$

В положении равновесия $x_{1eq} = x_{2eq} = 0$, а вблизи положения равновесия

$$\begin{aligned} T &= \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2; \\ U &= \kappa x_1^2 + \frac{mg}{2l} x_2^2. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнения движения имеют вид

$$2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\Omega^2 x_1 = 0; \quad \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0, \quad (1)$$

где $\Omega^2 = \kappa/m$, $\omega_0^2 = g/l$.

Характеристическое уравнение системы (1)

$$2(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \omega_0^4 = 0$$

имеет решения

$$\omega_{1,2}^2 = \Omega^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{\Omega^4 + \omega_0^4}.$$

Затем получим общее решение в виде

$$x_1 = \Delta_1^1 \theta_1 + \Delta_1^2 \theta_2; \quad x_2 = \Delta_2^1 \theta_1 + \Delta_2^2 \theta_2,$$

где θ_1, θ_2 — главные координаты системы, а коэффициенты

$$\begin{aligned} \Delta_1^1 &= \omega_0^2 - \omega_1^2; & \Delta_1^2 &= \omega_2^2; \\ \Delta_2^1 &= \omega_1^2; & \Delta_2^2 &= 2\Omega^2 - \omega_2^2. \end{aligned}$$

6.27. В приближении линейных колебаний функция Лагранжа двойного маятника имеет вид (см. рис. 6.27)

$$\mathcal{L} = ml^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} \right) + ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - mgl \left(\varphi_1^2 + \frac{\varphi_2^2}{2} \right).$$

Решение уравнений Лагранжа

$$2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2\omega_0^2 \varphi_1 = 0;$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 = 0 \quad (\omega_0^2 = g/l)$$

ищем в виде $\varphi_{1,2} = A_{1,2} e^{i\omega t}$. Тогда

$$2(\omega_0^2 - \omega^2) A_1 - \omega^2 A_2 = 0; \quad -A_1 \omega^2 + A_2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0.$$

Отсюда найдем собственные частоты

$$\omega_{1,2} = \omega_0^2 (2 \mp \sqrt{2})$$

и закон движения

$$\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2; \quad \varphi_2 = \Delta_{21}\theta_1 + \Delta_{22}\theta_2,$$

где θ_1, θ_2 — главные координаты; $\Delta_{21} = +\sqrt{2}$; $\Delta_{22} = -\sqrt{2}$.

6.28. Пусть x_1, x_2 — расстояния первого и второго шариков от вершины угла. Тогда потенциальная энергия системы имеет вид

$$U = \frac{\kappa}{2} [(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 x_2 - l_1)^2 + (x_1 - l_0)^2 + (x_2 - l_0)^2].$$

Определим далее положение устойчивого равновесия

$$(x_1)_{eq} = \frac{2l_0 + l_1}{3}; \quad (x_2)_{eq} = \frac{2l_0 + l_1}{3}.$$

В этом положении для вторых производных функции U находим выражения:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right)_{eq} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right)_{eq} = \kappa \left[\frac{5}{4} + \frac{3(l_0 - l_1)}{2(2l_0 + l_1)} \right];$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{eq} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} \right)_{eq} = \kappa \left[\frac{1}{4} - \frac{3(l_0 - l_1)}{2(2l_0 + l_1)} \right].$$

Поэтому частоты соответственно равны

$$\omega_1^2 = 3\kappa/2m; \quad \omega_2^2 = \kappa/m + \frac{3\kappa}{m} (l_0 - l_1) / (2l_0 + l_1).$$

Свободные колебания системы определяются законом

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2; \quad \xi_2 = \theta_1 - \theta_2,$$

где ξ_1, ξ_2 — смещения из положения равновесия, а θ_1, θ_2 — главные координаты.

6.29. Пусть φ_1, φ_2 — углы отклонения маятников от вертикали. Следовательно, вблизи положения равновесия

$$U = \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\kappa l^2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad (1)$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Учитывая, что $a_{12} = 0$; $a_{11} = a_{22} = ml^2$; $c_{12} = -\kappa l^2$; $c_{11} = c_{22} = mgl + \kappa l^2$, из уравнения (1) задачи 6.25 найдем

$$\omega_1^2 = \omega_0^2; \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2,$$

где $\omega_0^2 = g/l$; $\Omega^2 = \kappa/m$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a \cos(\omega_1 t + \alpha) + b \cos(\omega_2 t + \beta); \\ \varphi_2 &= a \cos(\omega_1 t + \alpha) - b \cos(\omega_2 t + \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\Omega \ll \omega_0$, то решение (2) описывает почти-гармонические колебания. Чтобы показать это, запишем (2) в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a e^{i\alpha} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} b e^{i\omega_2 t + i\beta} \right\} e^{i\omega_1 t} = \text{Re} \left(\begin{matrix} A_1 e^{i\gamma_1} \\ A_2 e^{i\gamma_2} \end{matrix} \right) e^{i\omega_\delta t}, \quad (3)$$

где ω_δ — частота биений: $\omega_\delta = \omega_2 - \omega_1 \approx \Omega^2/\omega_0$.

Из (3) найдем

$$\begin{aligned} A_{1,2}^2 &= a^2 + b^2 \pm 2ab \cos(\omega_\delta t + \beta - \alpha); \\ \text{tg } \gamma_{1,2} &= \frac{a \sin \alpha \pm b \sin(\omega_\delta t + \beta)}{a \cos \alpha \pm b \cos(\omega_\delta t + \beta)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Амплитуды $A_{1,2}$ медленно изменяются с частотой $\omega_\delta \ll \omega_0$ в пределах $|a-b| \leq A_{1,2} < a+b$.

Найдем среднюю за период $2\pi/\omega_0$ полную энергию первого маятника. Поскольку $A_1(t)$ практически постоянна в течение одного цикла колебаний частоты ω_0 , то

$$E_1 \approx \left\langle \frac{ml^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + (mgl + \kappa l^2) \frac{\varphi_1^2}{2} \right\rangle \approx \frac{ml^2}{2} \langle \dot{\varphi}_1^2 + \omega_0^2 \varphi_1^2 \rangle = \frac{ml^2 \omega_0^2}{2} A_1^2. \quad (5)$$

Аналогично $E_2 = \frac{ml^2\omega_0^2}{2} A_2^2$. Следовательно, полная энергия системы

$$E = E_1 + E_2 = ml^2 \omega_0^2 (a^2 + b^2). \quad (6)$$

Из (5) и (4) видно, что энергия каждого маятника меняется со временем (эффект биений). Этот эффект будет наибольшим, если $a \sim b$. Например, выберем начальные условия в виде

$$\dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0; \quad \varphi_1(0) = \varphi_0; \quad \varphi_2(0) = 0.$$

Тогда $\alpha = \beta = 0$; $a = b = \varphi_0/2$. В этом случае $A_1 = \varphi_0 \cos \omega_m t$; $A_2 = \varphi_0 \sin \omega_m t$, где частота модуляции $\omega_m = \omega_0/2$. Таким образом, из (6) и (5) следует

$$E = \frac{ml^2 \omega_0^2 \varphi_0^2}{2};$$

$$E_1 = \frac{E}{2} (1 + \cos \omega_0 t); \quad E_2 = \frac{E}{2} (1 - \cos \omega_0 t).$$

6.30. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2},$$

где x_1 — отклонение i -того отрицательного заряда от соответствующего положительного заряда. Потенциальная энергия системы

$$U = -\frac{e^2}{R-x_1} + \frac{e^2}{R+x_2-x_1} - \frac{e^2}{R+x_2} + \frac{m\omega_0^2}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Предполагая, что расстояние R велико по сравнению с x_1 и x_2 , после разложения в ряд находим

$$U = -\frac{2e^2}{R^3} x_1 x_2 - \frac{e^2}{R} + \frac{m\omega_0^2}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Далее запишем уравнения движения системы

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \Omega^2 x_2 = 0; \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \Omega^2 x_1 = 0;$$

$$\Omega^2 = \frac{2e^2}{mR^3}.$$

Из характеристического уравнения

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \Omega^4 = 0$$

найдем собственные частоты

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm \Omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{2e^4}{mR^3}. \quad (1)$$

При рассмотрении этой задачи по квантовой теории энергия системы имеет дискретные значения

$$E_{n_1, n_2} = \hbar \omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right),$$

где n_1, n_2 — квантовые числа ($n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$). Для энергии основного состояния ($n_1 = n_2 = 0$) находим

$$E_{00} = \frac{\hbar}{2} (\omega_1 + \omega_2). \quad (2)$$

Используем здесь значения частот из (1) и учтем, что $\Omega^2 \ll \omega_0^2$. Тогда, разлагая в ряд (2), получим

$$E_{00} = \hbar \omega_0 \left(1 - \frac{e^4}{2m^2 R^3 \omega_0^4} + \dots \right).$$

Следовательно, взаимодействие атомов приводит к добавочной отрицательной потенциальной энергии $\sim 1/R^6$. Таким образом, осцилляторы будут притягиваться с силой $\sim 1/R^7$, которая называется силой Ван-дер-Ваальса.

6.31. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}_2^2;$$

здесь φ_1, φ_2 — углы отклонения маятников от вертикали. Потенциальная энергия

$$U = -Mgl \cos \varphi_1 - Mgl \cos \varphi_2 - \frac{\gamma M^2}{R};$$

$$R^2 = [a + l \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_1]^2 + l^2 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2 \quad (1)$$

(ось z направлена по вертикали вниз).

Предполагая далее, что $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$, $l\varphi_1, l\varphi_2 \ll a$, получим после разложения в ряд

$$U = \frac{Mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\gamma M^2}{a} \left[1 - \frac{l}{a} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{l^2}{a^2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \right]. \quad (2)$$

Затем найдем положение равновесия

$$\varphi_{1eq} = -\varphi_{2eq} = \frac{\gamma M^2 l}{a^3 \left(Mgl - 4\gamma \frac{M^2 l^2}{a^2} \right)}.$$

Следовательно,

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} \right|_{eq} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right|_{eq} = Mgl - \frac{2\gamma M^2 l^2}{a^3}; \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right|_{eq} = \frac{2\gamma M^2 l^2}{a^3}.$$

Вводя отклонения $q_i = \varphi_i - \varphi_{ieq}$ материальных точек от положения равновесия, найдем

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \left(\frac{M}{m} \omega_0^2 - 2 \frac{\gamma M^2}{ma^3} \right) q_1 + \frac{2\gamma M^2}{ma^3} q_2 &= 0; \\ \ddot{q}_2 + \left(\frac{M}{m} \omega_0^2 - 2 \frac{\gamma M^2}{ma^3} \right) q_2 + \frac{2\gamma M^2}{ma^3} q_1 &= 0. \end{aligned}$$

Из характеристического уравнения получим

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{M}{m} \omega_0^2 - \frac{2\gamma M^2}{ma^3} \pm \frac{2\gamma M^2}{ma^3}.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{M}{m} \omega_0^2}; \quad \omega_2 \approx \omega_1 \left(1 - \frac{2\gamma M}{a^3 \omega_0^2} \right),$$

а частота биений

$$\omega_b = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2\gamma M^{3/2}}{\sqrt{m} a^3 \omega_0}.$$

Наконец, полагая $M - m = \Delta m$, находим

$$\omega_b = \frac{2\gamma m}{\omega_0 a^3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta m}{m} \right).$$

6.32. Лагранжиан заряда в цилиндрических координатах имеет вид ($e = -e_0 < 0$)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{e_0}{c} \dot{\varphi} \left[\int_0^{\rho} H \rho d\rho - \frac{1}{2} z^2 \rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \right].$$

Запишем далее интегралы энергии и обобщенного импульса

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = T_0, \quad (1)$$

$$m \rho^2 \dot{\varphi} - \frac{e_0}{c} \left[\int_0^{\rho} \rho H d\rho - \frac{z^2}{2} \rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \right] = M_0. \quad (2)$$

Исключая из (1) $\dot{\phi}$ с помощью (2), получим

$$T_0 = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + U, \quad (3)$$

где

$$U = \frac{1}{2m} \left[\frac{M_0}{\rho} + \frac{e_0}{c\rho} \int_0^\rho \rho H d\rho - \frac{e_0 z^2}{2c} \frac{\partial H}{\partial \rho} \right]^2. \quad (4)$$

Положение равновесной орбиты определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} &= \frac{1}{m} \left[\frac{M_0}{\rho} + \frac{e_0}{c\rho} \int_0^\rho \rho H d\rho - \frac{e_0}{2c} z^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \right] \times \\ &\times \left[-\frac{M_0}{\rho^2} - \frac{e_0}{c\rho^2} \int_0^\rho \rho H d\rho + \frac{e_0}{c} H - \frac{e_0}{2c} z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \right] = 0; \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{1}{m} \left[\frac{M_0}{\rho} + \frac{e_0}{c\rho} \int_0^\rho \rho H d\rho - \frac{e_0}{2c} z^2 \frac{\partial H}{\partial \rho} \right] \left(-\frac{e_0}{c} z \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим

$$\rho_{eq} \equiv R = \left[\frac{cM_0(2-q)}{e_0 H_0(1-q)r_0^q} \right]^{\frac{1}{2-q}}; \quad z_{eq} = 0.$$

Разлагая U в ряд вблизи положения равновесия $\rho_{eq} = R$; $z_{eq} = 0$ по степеням отклонений $x = \rho - R$ и z , найдем

$$U = \frac{c_{11}x^2}{2} + \frac{c_{22}z^2}{2}, \quad (5)$$

где

$$c_{11} = \frac{1}{m} \left(\frac{e_0 H(R)}{c} \right)^2 (1-q); \quad c_{22} = \frac{1}{m} \left(\frac{e_0 H(R)}{c} \right)^2 q. \quad (6)$$

Далее приближенно получим

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_1^2}{2}x^2 + \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega_2^2}{2}z^2,$$

где

$$\omega_1 = \frac{e_0 H(R)}{mc} \sqrt{1-q}; \quad \omega_2 = \frac{e_0 H(R)}{mc} \sqrt{q} \quad (6)$$

— частоты радиальных и аксиальных колебаний соответственно. Частоты этих колебаний порядка частоты вращения по равновесной орбите $\omega_0 = e_0 H(R) / mc$. Из (6) следует, что радиальные колебания устойчивы при условии $0 < q < 1$ (мягкая фокусировка).

6.33. В качестве обобщенных координат удобно выбрать координату x точки подвеса и угол φ отклонения математического маятника от вертикали. В этих координатах функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m+M}{2} \dot{x}^2 + ml \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

(ось z направлена вниз по вертикали). Далее согласно общей процедуре решения найдем, что

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2^2 = \frac{M+m}{M} \frac{g}{l}.$$

6.34. Направим ось x вдоль одного из стержней. Тогда

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2; \quad U = \frac{\kappa}{2} (\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2} - l)^2.$$

Преобразуем эти выражения, выделяя движение центра масс и относительное движение. В результате получим функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \dot{x}_m^2 + \frac{\mu \dot{x}^2}{2} - \frac{\kappa}{2} (\sqrt{x^2 + a^2} - l)^2,$$

где μ — приведенная масса; x_m — координата центра масс; $x = x_2 - x_1$.

Координата x_m — циклическая, что приводит к нулевой частоте (это соответствует сохранению скорости центра масс). В системе центра масс шариков положениями устойчивого равновесия являются точки $x_{eq} = 0$ при $a > l$ и

$$x_{eq} \pm (l^2 - a^2)^{1/2}, \quad \text{при } l > a.$$

Им соответствуют частоты

$$\omega = \left[\frac{\kappa(a-l)}{\mu a} \right]^{1/2} (a > l); \quad \omega = \left[\frac{\kappa(l^2 - a^2)}{\mu l^2} \right]^{1/2} (l > a).$$

6.35. Будем отсчитывать координаты зарядов — углы φ_1 и φ_2 — от некоторой точки окружности против часовой стрелки и напишем лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{e^2}{2R \left| \sin \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right|},$$

где m — масса каждой из точек; e — ее заряд. Пусть φ — угловая координата центра масс, а ψ — угловая координата относительного положения зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_1); \quad \psi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left(2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{2} \right) - \frac{e^2}{2R |\sin(\psi/2)|}.$$

Поскольку координата φ — циклическая, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Далее рассмотрим поведение координаты ψ в окрестности точек ψ_{eq} , которые удовлетворяют требованию $\partial U / \partial \psi = 0$ ($\psi_{eq} = \pi k$, где $k = 1, 3, \dots$). Частота линейных колебаний координаты ψ в окрестностях этих точек одна и та же и равна

$$\omega^2 = \frac{e^2}{4mR^3}.$$

Общее решение в указанном приближении имеет вид

$$\varphi_1 = c + at + \frac{1}{2} b \cos(\omega t + \beta);$$

$$\varphi_2 = c + at - \frac{1}{2} b \cos(\omega t + \beta).$$

6.36. Начало координат поместим в центр Земли и введем обобщенные координаты: θ — угол, между радиусом-вектором центра масс системы и фиксированным направлением, лежащим в плоскости орбиты; φ — угол, образуемый стержнем с радиусом-вектором центра масс. Тогда

$$x_{1,2} = R \cos \theta \mp \frac{l}{2} \cos(\theta + \varphi); \quad y_{1,2} = R \sin \theta \mp \frac{l}{2} \sin(\theta + \varphi).$$

Следовательно,

$$v_1^2 + v_2^2 = 2 \left[R^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \right];$$

кроме того, получим потенциальную энергию ($R \gg l$):

$$U = - \frac{\gamma mM}{\left[R^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 - Rl \cos \varphi \right]^{1/2}} - \frac{\gamma mM}{\left[R^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 + Rl \cos \varphi \right]^{1/2}} \approx$$

$$\approx - \frac{\gamma mM}{R} \left[2 + \frac{3}{4} \left(\frac{l}{R} \cos \varphi \right)^2 \right].$$

Таким образом, лагранжиан маятника

$$\mathcal{L} = m \left[R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4} (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \right] + \frac{3}{4} m \omega_0^2 l^2 \cos^2 \varphi,$$

где $\omega_0^2 = \gamma M/R^3$.

Теперь запишем уравнения движения:

$$R^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{l}{2} \right)^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = 0; \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} = -3\omega_0^2 \cos \varphi \sin \varphi. \quad (2)$$

Из (1) получим

$$\ddot{\theta} = -\frac{l^2}{4R^2 + l^2} \ddot{\varphi},$$

откуда следует, что $|\ddot{\theta}| \ll |\ddot{\varphi}|$. Поэтому пренебрежем в (2) ускорением $\ddot{\theta}$ и, рассматривая линейные колебания $\varphi \ll 1$, найдем

$$\ddot{\varphi} + 3\omega_0^2 \varphi = 0.$$

Итак, частота колебаний рассмотренного маятника в $\sqrt{3}$ раз больше частоты вращения центра масс маятника вокруг Земли.

637. Имеем уравнения движения в заданных координатах ($e = -e_0$)

$$\ddot{x} + \Omega \dot{y} - \omega_{01}^2 x = 0; \quad (1)$$

$$\ddot{y} - \Omega \dot{x} - \omega_{02}^2 y = 0; \quad (2)$$

$$\ddot{z} + (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) z = 0,$$

где $\Omega = e_0 H / mc$; $\omega_{01}^2 = e_0 \kappa_1 / m$; $\omega_{02}^2 = e_0 \kappa_2 / m$.

Решение уравнений (1), (2) удобно искать в комплексном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}.$$

Характеристическое уравнение системы (1) и (2)

$$\begin{vmatrix} -(\omega^2 + \omega_{01}^2) & i\Omega\omega \\ -i\Omega\omega & -(\omega^2 + \omega_{02}^2) \end{vmatrix} = 0$$

имеет решение

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\Omega^2 - \omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\Omega^2 - \omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 - 4\omega_{01}^2 \omega_{02}^2} \right],$$

которое запишем в виде

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} [\sqrt{\Omega^2 - (\omega_{01} - \omega_{02})^2} \pm \sqrt{\Omega^2 - (\omega_{01} + \omega_{02})^2}];$$

при этом $\Omega \geq \omega_{01} + \omega_{02}$.

Первое частное решение ($\omega = \omega_1$) определяется амплитудами

$$C_1 = a; \quad C_2 = -i \frac{\omega_1^2 + \omega_{01}^2}{\Omega \omega_1} a.$$

Аналогично для второго частного решения получим

$$C_1 = b; \quad C_2 = -i \frac{\omega_2^2 + \omega_{01}^2}{\Omega \omega_2} b.$$

Отделяя, наконец, реальную часть общего решения в комплексной форме, находим

$$x = A \cos(\omega_1 t + \alpha) + B \cos(\omega_2 t + \beta);$$

$$y = A \frac{\omega_1^2 + \omega_{01}^2}{\Omega \omega_1} \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \frac{\omega_2^2 + \omega_{01}^2}{\Omega \omega_2} \sin(\omega_2 t + \beta)$$

(здесь A, B, α, β — действительные произвольные постоянные).

6.38. Положим \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -того атома равным $\mathbf{r}_{i0} + \mathbf{u}_i$, где \mathbf{r}_{i0} — радиус-вектор i -того атома в положении равновесия, \mathbf{u}_i — смещение этого атома от положения равновесия; при этом допустим, что полный импульс и кинетический момент молекулы равны нулю. Тогда

$$\sum m_i \mathbf{u}_i = 0; \quad (1)$$

$$\sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] \approx \sum m_i [\mathbf{r}_{i0} \dot{\mathbf{u}}_i] = \frac{d}{dt} \sum m_i [\mathbf{r}_{i0} \mathbf{u}_i] = 0. \quad (2)$$

В случае линейных колебаний условие (2) приобретает вид

$$\sum m_i [\mathbf{r}_{i0} \mathbf{u}_i] = 0$$

(начало координат может быть выбрано произвольным образом). Направляя ось x вдоль оси молекулы, получим ($\mathbf{u} = (x, y)$)

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0; \quad (3)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0; \quad (4)$$

$$m_1 y_1 = m_3 y_3. \quad (5)$$

1) Рассмотрим вначале продольные колебания. Вводя обобщенные координаты $\xi_1 = x_2 - x_1$; $\xi_2 = x_3 - x_2$, найдем

$$x_1 = -\frac{1}{M} [(m_3 + m_2) \xi_1 + m_3 \xi_2], \quad M = m_1 + m_2 + m_3;$$

$$x_2 = \frac{1}{M} [m_1 \xi_1 - m_3 \xi_2];$$

$$x_3 = \frac{1}{M} [m_1 \xi_1 + (m_1 + m_2) \xi_2].$$

Следовательно, лагранжиан молекулы

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2M} (m_1(m_2 + m_3) \dot{\xi}_1^2 + m_3(m_1 + m_2) \dot{\xi}_2^2 + \\ & + 2\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 m_1 m_3) - \frac{\kappa_1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2), \end{aligned}$$

где κ_1 — жесткость молекулы при ее продольных деформациях.

Далее из уравнений Лагранжа

$$m_1(m_3 + m_2) \ddot{u}_1 + m_1 m_3 \ddot{u}_2 - \kappa_1 M u_1 = 0;$$

$$m_3(m_1 + m_2) \ddot{u}_2 + m_1 m_3 \ddot{u}_1 - \kappa_1 M u_2 = 0$$

находим уравнение для определения частот продольных колебаний

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} + \frac{2}{m_2} \right) \kappa_1 + \frac{\kappa_1^2 M}{m_1 m_2 m_3} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 = & \frac{\kappa_1}{2} \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} + \frac{2}{m_2} \right) \pm \right. \\ & \left. \pm \kappa_1 \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{m_3} \right)^2 + \frac{4}{m_2^2} - \frac{2}{m_1 m_3}} \right]. \end{aligned}$$

В частности, для симметричной молекулы ($m_1 = m_3 = m$; $m_2 = M$)

$$\omega_1^2 = \kappa_1 \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right); \quad \omega_2^2 = \frac{\kappa_1}{m},$$

а для несимметричной ($m_1 = m_2 = m$; $m_3 = M$)

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\kappa_1}{2} \left(\frac{3}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm \sqrt{\frac{5}{m^2} + \frac{1}{M^2} - \frac{2}{mM}}.$$

2) Рассмотрим теперь поперечные колебания молекулы. Потенциальную энергию изгиба молекулы запишем в виде

$$\frac{\kappa_2 l^2}{2} \delta^2,$$

где δ — отклонение угла от значения π ;

$$\delta = \frac{1}{l} [(y_3 - y_2) + (y_1 - y_2)]; \quad (6)$$

κ_2 — жесткость молекулы при изгибе.

Используя (4), (5) и (6) и выражая все смещения y_1, y_2, y_3 через δ :

$$y_1 = \frac{m_3}{m_1} y_3; \quad y_2 = -\frac{2m_3}{m_2} y_3; \quad y_3 = \frac{lm_1m_2}{m_1m_2 + 4m_1m_3 + m_2m_3} \delta,$$

найдем лагранжиан, характеризующий поперечные колебания молекул

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum \frac{m_i}{2} \dot{y}_i^2 - \frac{\kappa_2 l^2}{2} \delta^2 = \\ &= \frac{m_1 m_2 m_3 l^2}{2(m_1 m_2 + 4m_1 m_3 + m_2 m_3)} \dot{\delta}^2 - \frac{\kappa_2 l^2}{2} \delta^2 \end{aligned}$$

и квадрат собственной частоты

$$\omega^2 = \kappa_2 \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_2} \right).$$

Для симметричной молекулы ($m_1 = m_3 = m$; $m_2 = M$)

$$\omega^2 = 2\kappa_2 \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right),$$

а для несимметричной ($m_1 = m_2 = m$; $m_3 = M$)

$$\omega^2 = \kappa_2 \left(\frac{5}{m} + \frac{1}{M} \right).$$

6.39. Начало координат поместим в одну из точек закрепления струны, ось x направим по импульсу \mathbf{p}_0 , а ось y — вдоль покоящейся струны. На материальную точку с номером n действует сила

$$-\frac{4}{l} F_0 (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}),$$

следовательно, уравнениями движения системы являются

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\alpha (2x_1 - x_2); \\ \ddot{x}_2 &= -k\alpha (2x_2 - x_1 - x_3); \\ \ddot{x}_3 &= -\alpha (2x_3 - x_2), \end{aligned}$$

где $\alpha = 4F_0/ml$. Отсюда получим уравнение для амплитуд c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{aligned}(2\alpha - \omega^2) c_1 - \alpha c_2 &= 0; \\ -k\alpha c_1 + (2k\alpha - \omega^2) c_2 - k\alpha c_3 &= 0; \\ -\alpha c_2 + (2\alpha - \omega^2) c_3 &= 0.\end{aligned}$$

Затем из характеристического уравнения найдем квадраты собственных частот

$$\omega_1^2 = 2\alpha; \quad \omega_{2,3}^2 = \alpha[(k+1) \pm \sqrt{k^2+1}],$$

а из уравнений для амплитуд — соотношения между амплитудами

$$\begin{aligned}c_2^{(1)} &= 0; \quad c_1^{(1)} = -c_3^{(1)}; \\ c_1^{(2)}(2\alpha - \omega_2^2) &= \alpha c_2^{(2)}; \quad c_3^{(2)} = c_1^{(2)}; \\ c_1^{(3)}(2\alpha - \omega_3^2) &= \alpha c_2^{(3)}; \quad c_3^{(3)} = c_1^{(3)}.\end{aligned}$$

Наконец, получим общее решение

$$\begin{aligned}x_1 &= \text{Im} \{ c_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + c_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} + c_1^{(3)} e^{i\omega_3 t} \}; \\ x_2 &= \text{Im} \left\{ \frac{1}{\alpha} (2\alpha - \omega_2^2) c_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} + \frac{1}{\alpha} (2\alpha - \omega_3^2) c_1^{(3)} e^{i\omega_3 t} \right\}; \\ x_3 &= \text{Im} \{ -c_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + c_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} + c_1^{(3)} e^{i\omega_3 t} \}.\end{aligned}$$

Если в начальный момент времени $t=0$ $x_{10}=x_{20}=x_{30}=0$, а скорости точек $\dot{x}_{20}=\dot{x}_{30}=0$; $\dot{x}_{10}=p_0/m$, то из общего решения найдем

$$x_2 = \frac{p_0(2\alpha - \omega_2^2)(2\alpha - \omega_3^2)}{2m\alpha(\omega_2^2 - \omega_3^2)} \left[\frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} - \frac{\sin \omega_3 t}{\omega_3} \right].$$

6.40. Поперечное смещение шарика с массой $8m$ равно

$$\frac{5}{14} \cdot \frac{u_0}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{20}{3}} \sin \sqrt{\frac{3}{20}} \alpha t - \sqrt{2} \sin \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \right),$$

где $\alpha^2 = F_0/ml$.

6.41. Пусть N материальных точек совершают продольные колебания, а точки с номерами $0, N+1$ (крайние концы пружины) закреплены. Обозначим через x_n отклонение n -ой точки от положения равновесия. Тогда кинетическая энергия системы

$$T = \sum_{n=1}^N \frac{m_n \dot{x}_n^2}{2},$$

а потенциальная энергия

$$U = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\kappa}{2} (x_n - x_{n-1})^2, \quad x_0 = x_{N+1} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{\partial x_n}{\partial x_k} = \delta_{nk}$ — символ Кронекера, находим

$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = \kappa (2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}),$$

где κ — жесткость одной пружины. Следовательно, из уравнений Лагранжа получим систему

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) = 0, \quad (1)$$

где $\omega_0^2 = \kappa/m$.

Ищем решение (1) в виде

$$x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), найдем

$$-\omega^2 A_n = \omega_0^2 (A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}). \quad (3)$$

Каждое из этих уравнений напоминает дифференциальное уравнение, так как связывает значение амплитуды A_n в «точке» n с ее значениями в близких «точках» $n+1$ и $n-1$. Поскольку уравнение линейное, то естественно искать решение системы (3) в виде

$$A_n = A e^{ikna}. \quad (4)$$

Действительно, амплитуды такого вида удовлетворяют системе (3), если частота является определенной функцией волнового числа k , а именно

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, получим решение (2) в действительной форме

$$x_n = C \cos(kna + \alpha) \cos(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

где $\omega(k)$ определено в (5).

Далее из граничных условий $x_0 = x_{N+1} = 0$ находим $\alpha = \pi/2$ и набор возможных волновых чисел

$$k_m = \frac{\pi m}{(N+1)a} \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

Этот набор определяет собственные частоты

$$\omega_m = 2\omega_0 \left| \sin \frac{k_m a}{2} \right| = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\pi m}{2(N+1)} \right| \quad (8)$$

и амплитуды

$$C_n(m) = C \sin \frac{\pi m n}{N+1}. \quad (9)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) При $N=1$ существует одно главное колебание ($m=1$) с частотой $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_0$ и амплитудой $C_1=C$.

2) Если $N=2$, то первое главное колебание ($m=1$) совершается с частотой $\omega_1 = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{6} = \omega_0$. Амплитуды этого колебания соответственно равны

$$C_1(1) = C \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} C; \quad C_2(1) = C \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} C.$$

Для второго главного колебания ($m=2$) получим частоту $\omega_2 = 2\omega_0 \sin \frac{2\pi}{6} = \sqrt{3}\omega_0$ и амплитуды

$$C_1(2) = C \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} C; \quad C_2(2) = C \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} C.$$

Очевидно, что каждую моду (т. е. главное колебание) можно возбудить, задавая начальные условия, соответствующие «конфигурации» амплитуд данной моды

Фазовая скорость волн, бегущих по рассматриваемой цепочке, равна

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0(N+1)a}{\pi m} \sin \frac{\pi n}{2(N+1)}$$

и различна для волн различной длины $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2(N+1)a}{m}$.

Например, в случае $N \gg 1$ для коротких волн, возникающих при возбуждении самой высокой моды ($m=N$),

$$\lambda_{\min} = \frac{2a(N+1)}{N} \approx 2a;$$

$$\omega_{\max} = 2\omega_0 \sin \frac{\pi N}{2(N+1)} \approx 2\omega_0; \quad v = \frac{2\omega_0 a}{\pi}.$$

Для длинных волн, соответствующих моде $m=1$,

$$\lambda_{\max} = 2(N+1)a = 2L \quad (L - \text{длина цепочки});$$

$$\omega_{\min} = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{2(N+1)} \approx \frac{\omega_0 \pi}{N+1}; \quad v = \omega_0 a.$$

Следовательно, скорость распространения длинных волн больше, чем коротких.

6.42. Функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2}{2} \sum_{n=1}^N \dot{\varphi}_n^2 - \frac{mg}{2} \sum_{n=1}^N \varphi_n^2 - \frac{\kappa l^2}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2,$$

где φ_n — угол отклонения от вертикали n -ного маятника; $\varphi_0 = \varphi_{N+1} = 0$; κ — жесткость одной пружины. Тогда уравнение Лагранжа для маятника с номером n имеет вид

$$\ddot{\varphi}_n = -\frac{\kappa}{m} [2\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}] - \frac{g}{l} \varphi_n. \quad (1)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$\varphi_n = A_n \cos(\omega t + \beta). \quad (2)$$

После постановки (2) в (1) найдем, что

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{m}{\kappa} \omega^2 + \frac{g}{l} \cdot \frac{m}{\kappa} \right).$$

Затем, полагая $A_n = A \sin kna + B \cos kna$ и учитывая, что в этом случае

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A_n \cos ka,$$

придем к дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

Отсюда, учитывая заданные граничные условия, находим квадраты собственных частот

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l} + \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\pi}{2(N+1)} n \quad (n=1, 2, \dots, N).$$

6.43. Запишем систему (1) задачи 6.41 в виде

$$\frac{m}{as} \ddot{x}_n - \frac{\kappa a}{s} \left[\frac{x_{n+1} - x_n}{a^2} - \frac{x_n - x_{n-1}}{a^2} \right] = 0, \quad (1)$$

где s — площадь сечения непрерывного стержня, эквивалентного пружине.

Ясно, что при $a \rightarrow 0$ отношение m/as переходит в плотность массы ρ . Далее, при этом предельном переходе координата x_n должна перейти в переменную u , характеризующую деформацию стерж-

ня, а индекс n — в координату z , т. е. $x_n \rightarrow u(z)$. Также очевидно, что

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{a} = \frac{u(z+a) - u(z)}{a} \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_z;$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{a} = \frac{u(z) - u(z-a)}{a} \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z-a};$$

$$\left[\frac{x_{n+1} - x_n}{a} - \frac{x_n - x_{n-1}}{a} \right] \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_z - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z-a} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Произведение $\kappa a/s$ в пределе даст модуль Юнга $E = \lim_{a \rightarrow 0} \kappa a/s$.

Итак, продольные колебания непрерывного упругого стержня будут описываться дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $v^2 = E/\rho$.

Приближение непрерывного распределения массы справедливо в случае, когда a весьма мало по сравнению с длиной волны. Действительно, используя выражение для скорости длинных волн (см. задачу 6.41), получим

$$v^2 = \frac{\kappa a^2 s}{ms} = \frac{as}{m} \cdot \frac{\kappa a}{s} \rightarrow \frac{E}{\rho}.$$

Для нахождения дисперсионного соотношения будем искать решение (1) в виде плоских волн $u = e^{-i\omega t - ikz}$. Тогда найдем, что $\omega = kv$. Это соотношение говорит об отсутствии дисперсии скорости.

6.44. В предельном случае непрерывного распределения маятника с номером n будет соответствовать положение равновесия в некоторой точке x (ось x направлена по горизонтали); следовательно, отклонению φ_n (как функции n) будет соответствовать функция $\varphi(x, t)$. Для смещения «непрерывных» маятников, расположенных в окрестности точки x , имеем

$$\varphi_{n+1} \rightarrow \varphi(x+a, t) = \varphi(x, t) + a \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + \dots;$$

$$\varphi_{n-1} \rightarrow \varphi(x-a, t) = \varphi(x, t) - a \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

Аналогично для обобщенного ускорения получим

$$\ddot{\varphi}_n \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}.$$

Используя эти предельные выражения, вместо уравнений движения «дискретных» маятников

$$\ddot{\varphi}_n = \frac{\kappa}{m} (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n) - \frac{g}{l} \varphi_n$$

получим волновое уравнение Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\kappa a^2}{m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \frac{g}{l} \varphi$$

(подобное уравнение справедливо для волн де-Бройля релятивистских свободных частиц).

§ 3. Вынужденные колебания

6.45. Уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t) \quad (1)$$

можно проинтегрировать, вводя переменную $\xi = \dot{x} + i\omega_0 x$. Тогда вместо (1) получим уравнение первого порядка

$$\dot{\xi} - i\omega_0 \xi = \frac{1}{m} F(t).$$

Его решением является функция

$$\xi = e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega_0 t'} \frac{1}{m} F(t') dt'.$$

Следовательно

$$x = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} \xi = \frac{1}{m\omega_0} \int_{-\infty}^t F(t') \sin \omega_0(t-t') dt'. \quad (2)$$

Энергия осциллятора в момент времени t

$$E(t) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{m}{2} |\xi|^2 = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^t F(t') e^{-i\omega_0 t'} dt' \right|^2. \quad (3)$$

Энергия, переданная осциллятору в случае а), равна

$$E(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} F(t) dt = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega_0 t} dt \right|^2 = \frac{2\pi^2}{m} |F_{\omega_0}|^2, \quad (4)$$

где

$$F_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} F_0 e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

коэффициент Фурье функции $F(t)$.

Чтобы получить энергию, переданную осциллятору в случае б), разложим функцию $F(t)$ в ряд Фурье

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\Omega t}; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-in\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} F_0 e^{-in\Omega t} dt \quad (6)$$

и, сравнивая (5) и (6), найдем, что $C_n = \Omega F_{\omega=n\Omega}$.

Теперь используем полученные формулы:

а) Согласно (2) при $t \geq \tau$

$$x = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^{\tau} F_0 \sin \omega_0(t-t') dt' = \frac{2F_0}{m\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \sin \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 \tau}{2} \right).$$

Из (3) найдем для энергии осциллятора

$$E(t) = \frac{2F_0^2}{m\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}, \quad 0 < t < \tau;$$

$$E(t) = \frac{2F_0^2}{m\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 \tau}{2}, \quad t \geq \tau.$$

В случае $\omega_0 \tau \ll 1$ энергия, переданная осциллятору,

$$E(\infty) = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right|^2 = \frac{F_0^2 \tau^2}{2m}.$$

б) Для силы, действующей на бесконечном интервале времени

$$\xi = \frac{e^{i\omega_0 t}}{m} \int_0^t F(t') e^{-i\omega_0 t'} dt' = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{in\Omega t} - e^{i\omega_0 t}}{(\omega_0 - n\Omega) m},$$

где $C_n = A_n e^{i\alpha_n}$. Отсюда

$$x = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} \xi = \frac{1}{m\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\cos(n\Omega t + \alpha_n) - \cos(\omega_0 t + \alpha_n)}{\omega_0 - n\Omega},$$

причем в резонансном $n_r \Omega = \omega_0$, а

$$x = \frac{t A_{n_r}}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t + \alpha_{n_r}).$$

В нашем примере

$$C_n = \frac{F_0}{T} \int_0^T e^{-in\Omega t} dt = \frac{iF_0}{2\pi n} (e^{-in\Omega T} - 1)$$

и, следовательно,

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\Omega T}{2}; \quad \alpha_n = -\frac{n\Omega T}{2};$$

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0 \pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\Omega T}{2}}{n(\omega_0 - n\Omega)} [\cos(n\Omega t + \alpha_n) - \cos(\omega_0 t + \alpha_n)].$$

Заметим также, что энергия осциллятора в резонансном случае растет пропорционально t^2 .

6.46. Используя (4), (5) задачи 6.45, получим

$$F_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{F_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/\tau)^2 - i\omega t} dt = \frac{F_0 \tau}{2\sqrt{\pi}} e^{-(\omega\tau/2)^2}$$

и, следовательно,

$$E(\infty) = \frac{\pi F_0^2 \tau^2}{2m} e^{-\frac{(\omega_0 \tau)^2}{2}}.$$

Отсюда ясно, что при мгновенном ударе ($\omega_0 \tau \ll 1$) или медленном включении силы ($\omega_0 \tau \gg 1$) передача энергии мала. Максимум передачи энергии достигается при $\tau_1 \approx \sqrt{2}/\omega_0$, $E(\infty)_{\max} = \pi F_0^2 / m\omega_0^2 e$.

6.47. Исходное уравнение

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

имеет решение

$$x = A_a \sin \omega t + A_d \cos \omega t,$$

где

$$A_a = \frac{F_0}{m} \frac{2\mu\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2]}; \quad A_d = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2]}$$

(эти амплитуды называются амплитудами поглощения и дисперсии соответственно).

Используя это решение, легко находим среднее значение площади в установившемся режиме мощности

$$\mathcal{N}^0 = \frac{1}{2} F_0 \omega A_a.$$

С другой стороны, средняя мощность, расходуемая на трение, равна

$$\tilde{\mathcal{N}}^0 = m\omega^2\mu [A_a^2 + A_d^2].$$

Пользуясь определениями величин A_a и A_d , находим, что

$$\mathcal{N}^0 = \tilde{\mathcal{N}}^0.$$

6.48. Перепишем исходное уравнение

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$$

в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \left(i\omega_1 + \frac{\gamma}{2} \right) x \right] - \left(i\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right) \left[\dot{x} + \left(i\omega_1 + \frac{\gamma}{2} \right) x \right] = \frac{1}{m} F(t),$$

где $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} > 0$. Отсюда получим

$$\dot{\xi} - \left(i\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right) \xi = \frac{1}{m} F(t), \quad (1)$$

где $\xi = \dot{x} + \left(i\omega_1 + \frac{\gamma}{2} \right) x$.

Решением однородного уравнения, соответствующего (1), является функция

$$\xi = Ae^{\left(i\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right) t}.$$

Следуя общему правилу, ищем решение неоднородного уравнения (1) в форме

$$\xi = A(t)e^{\left(i\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right) t}.$$

Тогда получим

$$\dot{A} = \frac{1}{m} F(t) e^{-\left(i\omega_1 - \frac{\gamma}{2}\right)t},$$

и, следовательно,

$$\xi = C e^{\left(i\omega_1 - \frac{\gamma}{2}\right)t} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') e^{\left(i\omega_1 - \frac{\gamma}{2}\right)(t-t')} dt'.$$

Полагая константу C равной $\omega_1 a e^{i\alpha}$, найдем

$$x = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Im} \xi = a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \\ + \frac{1}{m\omega_1} \int_{t_0}^t F(t') e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt'.$$

6.49. Используя обозначения задачи 6.29, запишем лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{\kappa l^2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - U_e,$$

где U_e — энергия взаимодействия системы с внешним однородным полем

$$U_i = - \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i = - F_{2y} y_2 \approx - F_0 \cos \omega_e t \cdot l \varphi_2.$$

Выбирая вместо координат φ_1 и φ_2 главные координаты θ_1 и θ_2 (согласно формуле (2) задачи 6.29)

$$\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \varphi_2 = \theta_1 - \theta_2,$$

получим

$$\frac{\mathcal{L}}{ml^2} = \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - \omega_1^2 \theta_1^2 - \omega_2^2 \theta_2^2 + \frac{F_0}{ml} (\theta_1 - \theta_2) \cos \omega_e t.$$

Соответствующие уравнения движения

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = \frac{F_0}{2ml} \cos \omega_e t,$$

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = - \frac{F_0}{2ml} \cos \omega_e t$$

имеют решения

$$\theta_1 = \frac{F_0}{2ml} \frac{\cos \omega_e t}{\omega_1^2 - \omega_e^2}, \quad \theta_2 = - \frac{F_0}{2ml} \frac{\cos \omega_e t}{\omega_2^2 - \omega_e^2}.$$

Следовательно, вынужденные колебания описываются функциями

$$\varphi_1 = \frac{F_0}{2ml} \cos \omega_e t \cdot \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_e^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_e^2} \right],$$

$$\varphi_2 = \frac{F_0}{2ml} \cos \omega_e t \cdot \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_e^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_e^2} \right].$$

Отношение амплитуд φ_{10} и φ_{20} маятников равно

$$\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{20}} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega_e^2}.$$

Если частота внешней силы $\omega_e \gg \omega_2$ — наибольшей собственной частоты системы, то

$$\left| \frac{\varphi_{10}}{\varphi_{20}} \right| \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_e^2} \ll 1. \quad (1)$$

Для частоты $\omega_e \ll \omega_1$ — наименьшей собственной частоты —

$$\left| \frac{\varphi_{10}}{\varphi_{20}} \right| \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} < 1. \quad (2)$$

Из (1) и (2) видно, что рассматриваемая система маятников может служить «фильтром», т. е. может сильно ослаблять влияние внешней силы частоты ω_e , лежащей вне интервала (ω_1, ω_2) .

6.51. Запишем уравнение движения зарядов без учета сопротивления

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 \cos \omega t.$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}_0 \sin \omega t,$$

а средняя мощность, передаваемая полем частице,

$$\langle \mathcal{N} \rangle = e \langle \mathbf{E} \mathbf{v} \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{m\omega} \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0.$$

Если учесть сопротивление, то

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 \cos \omega t - m\nu \dot{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

Решение этого уравнения удобно искать в комплексной форме.

В связи с этим вместо (1) напишем

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t} - m\nu \dot{\mathbf{r}}. \quad (2)$$

Частный интеграл уравнения (2) имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} e^{i\omega t},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{e}{m(\nu + i\omega)} \mathbf{E}_0 = \frac{e(\nu - i\omega)}{m(\omega^2 + \nu^2)} \mathbf{E}_0 = \\ &= \frac{e}{m\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

причем

$$\cos \varphi = \frac{\nu}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{-\omega}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}}.$$

Взяв реальную часть от $\mathbf{A} e^{i\omega t}$, получим частное решение уравнения (1)

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Следовательно, общим решением уравнения (1) является функция

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} e^{-\nu t} + \frac{e}{m\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Средняя энергия, передаваемая частице, теперь равна

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N}^0 \rangle &= \frac{e^2 E_0^2}{m\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \langle \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \rangle = \\ &= \frac{e^2 E_0^2}{2m\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \cos \varphi = \frac{e^2 E_0^2 \nu}{2m(\omega^2 + \nu^2)}. \end{aligned}$$

Влияние сопротивления, таким образом, сводится к появлению составляющей скорости, совпадающей по фазе с фазой внешней силы. Следствием этого является передача энергии поля заряду.

6.52. В силу линейности уравнения его решение можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') f(t') dt'. \quad (1)$$

Если внешнее воздействие имеет вид $f(t) = \delta(t - t_1)$, то

$$x(t) = G(t, t_1). \quad (2)$$

Поскольку $x(t) = 0$ при $t < t_1$, то

$$G(t, t_1) = 0 \quad \text{при } t < t_1. \quad (3)$$

Функцию $G(t, t')$ называют функцией Грина. Согласно (1) и (2) она удовлетворяет исходному уравнению, в котором неоднородный член представляет собой дельта-функцию:

$$\ddot{G} + \lambda \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t - t'). \quad (4)$$

Учитывая, что

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega,$$

решение (4) ищем в виде

$$G(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega. \quad (5)$$

Из (4) получим

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + i\omega\lambda - \omega^2}.$$

Следовательно,

$$G(t, t') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega, \quad (6)$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{i\lambda}{2} \pm \omega_0'; \quad \omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}}.$$

Благодаря тому, что полюсы подынтегрального выражения находятся в верхней полуплоскости, (6) обращается в нуль при $t - t' < 0$. Действительно, при $t - t' < 0$ реальная часть $i\omega(t - t')$, равная $-\omega''(t - t')$, положительна, а контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости $\omega'' = \text{Im}\omega < 0$. При $t - t' > 0$, замыкая контур в верхней полуплоскости, находим

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0'} e^{-\frac{\lambda(t-t')}{2}} \sin \omega_0'(t - t'), & t - t' > 0; \\ 0, & t - t' < 0. \end{cases}$$

Таким образом, получим решение исходного уравнения, удовлетворяющее условиям $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0'} \int_{t_0}^t f(t') e^{-\frac{\lambda}{2}(t-t')} \sin \omega_0'(t - t') dt'.$$

6 53. Предположим, что электрон осциллирует около ядра, которое находится в начале координат. Тогда уравнение движения электрона будет иметь вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} - \lambda \dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2 \mathbf{r} = e \mathbf{E}(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|), \quad (1)$$

где $-\lambda \dot{\mathbf{r}}$ — сила, обусловленная потерями энергии на излучение;
 \mathbf{E} — электрическое поле, создаваемое частицей,
 \mathbf{R} — радиус-вектор налетающей частицы.

В дипольном приближении можно пренебречь зависимостью поля от положения электрона, полагая $\mathbf{E}(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|) \approx \mathbf{E}(R)$. Влияние электрона на движение быстрой частицы также мало. Поэтому электрическое поле \mathbf{E} можно взять в виде

$$\mathbf{E} = \frac{Q(\rho + \mathbf{v}t)}{[\rho^2 + v^2 t^2]^{3/2}}, \quad (2)$$

где Q — заряд налетающей частицы; ρ — ее прицельный параметр, \mathbf{v} — ее скорость.

Используя (2) и представляя решение уравнения (1) в виде

$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}_\omega e^{i\omega t} d\omega; \quad \mathbf{r}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t) e^{-i\omega t} dt,$$

найдем

$$\mathbf{r}_\omega = \frac{e}{m} \cdot \frac{\mathbf{E}_\omega}{\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2}; \quad \gamma = \frac{\lambda}{m}.$$

Работа, совершаемая в единицу времени полем быстрой частицы, равна

$$\frac{dT}{dt} = e \mathbf{E} \mathbf{v}.$$

Следовательно, передача энергии при пролете частицы

$$\begin{aligned} \Delta T &= e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{E} dt = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_\omega e^{i\omega t} d\omega \mathbf{E}(t) dt = \\ &= 2\pi e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_\omega \mathbf{E}_{-\omega} d\omega = 2\pi e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_\omega \mathbf{E}_\omega^* d\omega = \\ &= 2\pi e \int_0^{\infty} (\mathbf{v}_\omega^* \mathbf{E}_\omega + \mathbf{v}_\omega \mathbf{E}_\omega^*) d\omega = 4\pi e \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \mathbf{v}_\omega \mathbf{E}_\omega^* d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathbf{v}_\omega = i\omega \mathbf{r}_\omega$, находим

$$\Delta T = 4\pi \frac{e^2}{m} \int_0^{\infty} \frac{|E_\omega|^2 \omega^2 \gamma d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (3)$$

Поскольку E_ω не имеет особенностей, находим

$$\Delta T = \frac{2\pi^2 e^2}{m} |E_{\omega_0}|^2. \quad (4)$$

Теперь получим амплитуду Фурье

$$E_\omega = \frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} (\rho + \mathbf{v} t)}{[\rho^2 + v^2 t^2]^{3/2}} dt. \quad (5)$$

Учтем, что [8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy} dx}{[a^2 + x^2]^{3/2}} = 2 \frac{y}{a} K_1(ay); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ixy} dx}{[a^2 + x^2]^{3/2}} = 2yK_0(ay),$$

где $K_n(x)$ — функция Макдональда.

Тогда (5) можно представить в виде

$$E_\omega = \frac{Q\omega}{\pi v^2} \left[\frac{\rho}{\rho} K_1\left(\frac{\omega\rho}{v}\right) + \frac{\mathbf{v}}{v} K_0\left(\frac{\omega\rho}{v}\right) \right], \quad (6)$$

а из (4) и (6) получить

$$\Delta T = \frac{2e^2 Q^2}{m v^2 \rho^2} \xi^2 [K_1^2(\xi) + K_0^2(\xi)], \quad (7)$$

где $\xi = \omega_0 \rho / v$.

Если $\xi \gg 1$, то $K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ и, следовательно,

$$\Delta T = \frac{2e^2 Q^2 \pi}{m v^2 \rho^2} \xi e^{-2\xi}.$$

Таким образом, передаваемая энергия весьма мала. Если $\xi \ll 1$, то

$$K_0(x) \rightarrow -\ln \frac{x}{2}; \quad K_1(x) \rightarrow \frac{1}{x}.$$

Поэтому

$$\Delta T = \frac{2e^2 Q^2}{m v^2 \rho^2}.$$

Отсюда видно, что передаваемая энергия сильно возрастает в случае близких пролетов частицы.

6.54. Плотность u потока энергии электромагнитной волны ($|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$) равна

$$u = \frac{1}{8\pi c} \frac{1}{T} \int_0^T (E^2 + H^2) dt = \int_0^\infty u_\omega d\omega,$$

где u_ω — спектральная плотность потока излучения

$$u_\omega = \frac{1}{cT} |E_\omega|^2; \quad E_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

Примем в качестве исходного следующее уравнение движения осциллятора в поле волны ($e = -e_0 < 0$):

$$\ddot{\mathbf{r}} + \lambda \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e_0}{m} \mathbf{E}(t); \quad (2)$$

здесь ω_0 — собственная частота осциллятора, λ — коэффициент затухания, $\mathbf{E}(t)$ — напряженность поля волны. Решением (2) является

$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}_\omega e^{i\omega t} d\omega; \quad \mathbf{r}_\omega = -\frac{e_0}{m} \cdot \frac{E_\omega}{\omega_0^2 + i\lambda\omega - \omega^2}. \quad (3)$$

Среднее значение передаваемой осциллятору мощности

$$\mathcal{N}^0 = -e_0 \langle \mathbf{E} \mathbf{v} \rangle = -\frac{e_0}{T} \int_0^T \mathbf{E} \mathbf{v} dt = -\frac{2\pi e_0}{T} \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega^* \mathbf{v}_\omega d\omega. \quad (4)$$

Отсюда, учитывая, что $\mathbf{v}_\omega = i\omega \mathbf{r}_\omega$, получим

$$\mathcal{N}^0 = -\frac{2\pi e_0}{mT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega |E_\omega|^2 d\omega}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)},$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{i\lambda}{2} \pm \omega_0'; \quad \omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}}.$$

Согласно принципу причинности контур интегрирования в последнем интеграле надо замкнуть в верхней полуплоскости $\text{Im}\omega > 0$. Применяя теорему вычетов, находим

$$\mathcal{N}^0 = \frac{4\pi^2 e_0^2}{mT} |E_{\omega_0'}|^2. \quad (5)$$

Учитывая (1), выражение (5) можно представить также в виде

$$\mathcal{N}^0 = \frac{4\pi^2 e_0^2 c}{m} u_{\omega_0'}.$$

Пусть электромагнитная волна задана напряженностью

$$\mathbf{E}(t) = E_0 e^{-\frac{\gamma_1 t}{2}} \cos \omega_1 t \theta(t), \quad \text{где } \theta = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} E_{\omega} &= \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma_1 t}{2}} \cos \omega_1 t e^{-i\omega t} dt = \\ &= -\frac{1}{4\pi} E_0 \left[\frac{1}{i(\omega_1 - \omega) - \frac{\gamma_1}{2}} - \frac{1}{i(\omega_1 + \omega) + \frac{\gamma_1}{2}} \right]; \\ |E_{\omega_0}|^2 &\sim \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega_1)^2 + \left(\frac{\gamma_1 + \lambda}{2}\right)^2} E_0^2. \end{aligned}$$

Следовательно, среднее значение мощности, поглощаемой осциллятором (среднее за $1/\lambda$ — «время жизни» осциллятора), будет равно

$$\mathcal{M}^0 = \frac{\lambda e_0^2}{4m} E_0^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega_1)^2 + \left(\frac{\gamma_1 + \lambda}{2}\right)^2}.$$

6.55. Предположим, что волна распространяется вдоль оси y . Тогда уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \Omega \dot{y} - \frac{\omega_0^2}{2} x = -\frac{e_0}{m} E_x; \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \lambda \dot{y} - \Omega \dot{x} - \frac{\omega_0^2}{2} y = 0; \quad (2)$$

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e_0}{m} E_z, \quad (3)$$

где $\Omega = e_0 H / mc$; $\omega_0^2 = 2e_0 U_0 / mR^2$. Систему (1), (2) можно свести к одному уравнению введением комплексной координаты $\xi = x + iy$:

$$\ddot{\xi} + \lambda \dot{\xi} - i\Omega \dot{\xi} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi = -\frac{e_0}{m} E_x.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде интеграла

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Тогда

$$\xi_{\omega} = \frac{e_0}{m} \frac{E_x(\omega)}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)},$$

где

$$\omega_1 \approx \frac{i\lambda}{2} + \omega_{10}; \quad \omega_2 \approx \frac{i\lambda}{2} + \omega_{20};$$

$$\omega_{10,20} = \frac{1}{2} \left(\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 2\omega_0^2} \right) \quad (\omega_{10} > \omega_{20}).$$

Решение (3) также ищем в виде интеграла

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} z_{\omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (5)$$

В результате подстановки найдем

$$z_{\omega} = \frac{e_0}{m} \frac{E_z(\omega)}{(\omega - \omega_3)(\omega - \omega_4)},$$

где

$$\omega_{3,4} = \frac{i\lambda}{2} \pm \omega'_0; \quad \omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}}.$$

Средняя мощность, передаваемая волной электронам, равна

$$\mathcal{N}^0 = -e_0 \langle \mathbf{E} \mathbf{v} \rangle = -e_0 \langle \text{Re}(\dot{\xi} E_x + \dot{z} E_z) \rangle =$$

$$= -\frac{2\pi e_0^2}{mT} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i\omega |E_x(\omega)|^2}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} + \frac{i\omega |E_z(\omega)|^2}{(\omega - \omega_3)(\omega - \omega_4)} \right] d\omega. \quad (6)$$

Вычислим (6), предполагая, что $E_x(\omega)$ и $E_z(\omega)$ не имеют особенностей. Замыкая контур в верхней полуплоскости ω , получим

$$\mathcal{N}^0 = \frac{2\pi^2 e_0^2 c}{m} \left[\frac{\omega_1 u_x(\omega_{10})}{\omega_{10} - \omega_{20}} - \frac{\omega_2 u_x(\omega_{20})}{\omega_{10} - \omega_{20}} + 2u_z(\omega'_0) \right], \quad (7)$$

где $u_i(\omega) = \frac{1}{cT} |E_i(\omega)|^2$ — спектральная интенсивность i -той компоненты поля. Таким образом, если спектр волны сосредоточен вблизи частоты ω_{20} , то поглощаемая мощность отрицательна. Это означает, что электроны передают энергию волне, т. е. в системе электронов, движущихся в заданной конфигурации полей, возникает индуцированное излучение на частоте ω_{20} .

В том случае, когда $|E_i(\omega)|^2$ произвольно, (6) можно представить в виде

$$\mathcal{N}^0 = \frac{\lambda\pi e^2 c}{m} \int_0^{\infty} d\omega \left\{ \frac{u_x(\omega)}{\omega_{10} - \omega_{20}} \left[\frac{\omega_{10}}{(\omega - \omega_{10})^2 + \frac{\lambda^2}{4}} + \frac{\omega_{20}}{(\omega - \omega_{20})^2 + \frac{\lambda^2}{4}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2u_z(\omega)}{(\omega - \omega_0')^2 + \frac{\lambda^2}{4}} \right\}.$$

6.56. Решение уравнений движения

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E(\mathbf{r}, t) \quad (E(\mathbf{r}, t) \equiv E_x)$$

будем искать в виде

$$x = x_0 + x_1 + \dots,$$

где x_0 — решение не возмущенного волной уравнения, т. е.

$$x_0 = a \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (1)$$

Обусловленное слабым внешним полем возмущение x_1 удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_1 + \lambda \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{e}{m} E(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, 0, 0).$$

Его решение может быть представлено в виде

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\omega} e^{i\omega t} dt, \quad (2)$$

где

$$x_{\omega} = - \frac{eE_{\omega}}{m(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}; \quad \omega_{1,2} \approx \frac{i\lambda}{2} \pm \omega_0,$$

а

$$E_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x_0, t) e^{-i\omega t} dt.$$

Поскольку (в силу (1)) $E(x_0, t)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\omega_0$, то

$$E(x_0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(a, t) e^{in\varphi}; \quad \varphi = \omega_0 t + \alpha.$$

Следовательно,

$$E_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum E_n(a, t) e^{in(\omega_0 t + \alpha) - i\omega t} dt = \sum E_n^*(a, \omega + n\omega_0) e^{-in\alpha}, \quad (3)$$

где

$$E_n(a, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_n(a, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(при вычислении (3) учтено, что $E_{-n} = E_n^*$).

Мощность, передаваемая внешним полем осциллятору,

$$\mathcal{N}^0 = e E \dot{\mathbf{r}} = -e \nabla \varphi \quad \dot{\mathbf{r}} = -e \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

При усреднении по времени первый член даст нуль, так что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N}^0 \rangle &= \left\langle e \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = e \left\langle \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(\mathbf{r}_0, t) + \mathbf{r}_1 \nabla \varphi(\mathbf{r}_0, t) + \dots] \right\rangle = \\ &= e \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}_0, t) \right\rangle - e \left\langle \mathbf{r}_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

При усреднении по начальным фазам α первый член в (4) не дает вклада. Поэтому среднее по времени T и фазам α значение мощности равно

$$\langle\langle \mathcal{N}^0 \rangle\rangle = -\frac{e}{2\pi T} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\infty}^T \mathbf{r}_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(x_0, t) dt. \quad (5)$$

Учитывая (2) и (3), из (5) после усреднения по фазам получим

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathcal{N}^0 \rangle\rangle &= \frac{e^2}{mT} \sum_n \int_{-\infty}^T \frac{\dot{E}_n(a, t) e^{in\omega_0 t} E_n(a, \omega + n\omega_0) e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega dt = \\ &= -\frac{2\pi e^2}{mT} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\omega + n\omega_0) |E_n(a, \omega + n\omega_0)|^2}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда, применяя теорему вычетов, находим

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathcal{N}^0 \rangle\rangle &= \frac{2\pi^3 e^2}{m\omega_0 T} \sum_n \left\{ |E_n(a, (n+1)\omega_0)|^2 \left[\frac{i\lambda}{2} + \omega_0(n+1) \right] - \right. \\ &\quad \left. - |E_n(a, (n-1)\omega_0)|^2 \left[\frac{i\lambda}{2} + (n-1)\omega_0 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Этот ряд можно представить в виде суммы по положительным значениям n :

$$\langle\langle \mathcal{N}^0 \rangle\rangle = \frac{4\pi^3 e^2}{mT} \sum_{n=0}^{\infty} n [|E_{n-1}(a, n\omega_0)|^2 - |E_{n+1}(a, n\omega_0)|^2]. \quad (7)$$

Согласно условию электрическое поле в волноводе

$$E(\mathbf{r}, t) = C(x, y) f(\omega t - kz)$$

(ось z направлена по оси волновода). Тогда (7) принимает вид

$$\langle\langle \mathcal{N}^0 \rangle\rangle = \frac{4\pi^2 e^2}{mT} \sum_{n=0}^{\infty} n \{ |C_{n-1}(a)|^2 - |C_{n+1}(a)|^2 \} f_{n\omega_0}.$$

Из этого выражения следует, что неоднородный спектр внешнего поля может существенно изменить величину поглощаемой мощности. При определенных условиях она может быть отрицательной, т. е. осциллятор может отдавать свою энергию переменному полю — возникает мазерный эффект.

Величина $\langle\langle \mathcal{N}^0 \rangle\rangle T$ определяет фактически полную энергию, переданную осцилляторам при взаимодействии с конечным во времени импульсом излучения. Если же электромагнитное поле меняется во времени периодически, то взаимодействие с осцилляторами удобно характеризовать средней мощностью. Рассмотрим, например, взаимодействие осцилляторов с волной, период которой равен $2\pi/\Omega$. В этом случае

$$E(x_0, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(x_0, m) e^{im\Omega t} = \sum_{n,m} E_n(a, m) e^{im\Omega t + in(\omega_0 t + \alpha)}. \quad (8)$$

Тогда из уравнения движения найдем

$$x_{nk} = \sum_{k,n} x_{nk} e^{ik\Omega t + in(\omega_0 t + \alpha)}, \quad (9)$$

где

$$x_{nk} = - \frac{e_0 E_n(a, k)}{m [(k\Omega + n\omega_0)^2 - i\lambda (k\Omega + n\omega_0) - \omega_0^2]}.$$

Подставляя (9) и (8) в (5), получим

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathcal{N}^0 \rangle\rangle &= - \frac{e_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_1 \frac{\partial E(x_0, t)}{\partial t} dt = \\ &= \frac{e_0^2}{2mT} \int_{-T}^T dt \sum_{k, k', n} \frac{E_n(a, k) i k' \Omega E_{-n}(a, k') e^{i(k+k')\Omega t}}{(k\Omega + n\omega_0)^2 - i\lambda (k\Omega + n\omega_0) - \omega_0^2} = \\ &= - \frac{ie^2}{m} \sum_{k,n} \frac{k\Omega |E_n(a, k)|^2}{(k\Omega + n\omega_0)^2 - i\lambda (k\Omega + n\omega_0) - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

6.57. Каждая частица подчиняется следующему уравнению движения:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = eE_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1)$$

Поскольку воздействие волны на заряд мало, для достаточно малых интервалов времени можно допустить, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{r}^{(1)} + \dots,$$

где $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_0 t$ — закон движения заряда без воздействия поля, а $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ — возмущение закона движения, связанное с волной. Тогда, интегрируя (1), находим

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = \frac{eE_0}{m(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)} \sin[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)t - \varphi],$$

где $\varphi = \mathbf{k}\mathbf{p}$ — начальная фаза частицы.

Различным частицам соответствуют различные значения фазы φ . Если частицы распределены в пространстве однородно, то и распределение фаз также однородно. Найдем среднее по фазам значение кинетической энергии, приходящейся на одну частицу:

$$\langle T \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{2} (\mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}}^{(1)})^2 d\varphi = \frac{m v_0^2}{2} + T_1;$$

$$T_1 = \frac{e^2 E_0^2}{m(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2} \sin^2 \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)t}{2}.$$

Теперь вычислим среднее по распределению начальных скоростей значение T_1 :

$$\begin{aligned} \langle T_1 \rangle_{\mathbf{v}_0} &= \int T_1 f(\mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0 = \\ &= \frac{e^2 E_0^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi t}} e^{-\frac{m v_1^2}{2t}} \frac{\sin^2(\omega - k v_1) \frac{t}{2}}{(\omega - k v_1)^2} dv_1. \end{aligned}$$

Здесь v_1 — компонента скорости, параллельная \mathbf{k} . Наибольший вклад в последний интеграл дает область $v_1 \sim \omega/k$, причем размеры этой области уменьшаются с ростом t . Поэтому

$$\langle T_1 \rangle_{\mathbf{v}_0} = \frac{e^2 E_0^2}{m} f_1 \left(\frac{\omega}{k} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega - k v_1) \frac{t}{2}}{(\omega - k v_1)^2} dv_1 =$$

$$= \frac{e^2 E_0^2}{m} f_1 \left(\frac{\omega}{k} \right) \frac{t}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi e^2 E_0^2}{2mk} f_1 \left(\frac{\omega}{k} \right) t;$$

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\theta}} e^{-\frac{mx^2}{2\theta}}.$$

Следовательно, частицы с тепловыми скоростями $v_T = \sqrt{2\theta/m} \sim \omega/k$ заметно поглощают энергию электромагнитного поля; если же тепловая скорость частиц $v_T \ll \omega/k$ — фазовой скорости волны, то поглощение энергии весьма мало.

6.58. Скорость броуновской частицы

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

где $\Delta t < \tau_0 \sim 10^{-8}$ с — промежуток времени, в течение которого частица практически сохраняет свою скорость. Сила \mathbf{F} , действующая на частицу, обусловлена хаотическими и нескомпенсированными ударами молекул жидкости о поверхность частицы. В результате сила \mathbf{F} флуктуирует с характерным временем $\tau_1 \sim a/v$, где a — среднее расстояние между молекулами жидкости; v — тепловая скорость молекул. Следовательно, $\tau_1 \sim 10^{-8}/10^5$ с $\sim 10^{-13}$ с $\ll \tau_0$. Таким образом, при усреднении величин, характеризующих броуновскую частицу, за промежуток времени $\tau_1 \ll \Delta t \ll \tau_0$ движение частицы происходит практически с постоянной скоростью.

Уравнение движения броуновской частицы имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\lambda\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

где $-\lambda\dot{\mathbf{r}}$ — сила сопротивления среды.

Умножая обе части (1) скалярно на $\dot{\mathbf{r}}$ и учитывая, что

$$\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} - r^2,$$

получим

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2 r^2}{dt^2} - m\dot{v}^2 = -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{dr^2}{dt} + \mathbf{r}\mathbf{F}.$$

Усредним это уравнение по множеству частиц. Тогда

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \langle r^2 \rangle - 3kT = -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{d}{dt} \langle r^2 \rangle, \quad (2)$$

так как

$$\langle m\dot{v}^2 \rangle = 3kT; \quad \langle \mathbf{r}\mathbf{F} \rangle = 0$$

(здесь k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура жидкости).

После первого интегрирования уравнения (2) получим

$$\frac{d}{dt} \langle r^2 \rangle = Ce^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{6kT}{\lambda}.$$

Поскольку рассматриваются большие интервалы времени $\frac{\lambda}{m}t \gg 1$, то

$$\frac{d}{dt} \langle r^2 \rangle \approx \frac{6kT}{\lambda}$$

и, следовательно,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{6kT}{\lambda} t.$$

Таким образом, среднеквадратичное смещение броуновской частицы растет линейно со временем.

При движении шарообразной частицы $\lambda = 6\pi\eta a$, где a — радиус частицы; η — коэффициент вязкости жидкости. В известных опытах Перрена масса частиц $m = 10^{-14}$ г, $a = 10^{-5}$ см, $\eta = 10^{-2}$ г/см·с. Поэтому величина $m/\lambda = m/6\pi\eta a \sim 10^{-8}$ с и, следовательно, сделанное выше допущение оправдано.

6.59. Из уравнения движения броуновского вибратора

$$m\ddot{x} = -\kappa x - \lambda\dot{x} + F$$

аналогично предыдущей задаче найдем

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - kT = -\kappa \langle x^2 \rangle - \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle.$$

Очевидно, что

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{\kappa} + C_1 e^{v_1 t} + C_2 e^{-v_2 t}, \quad (1)$$

где

$$v_{1,2} = -\frac{\lambda}{2m} \left[1 \mp \sqrt{1 - 8 \frac{m\kappa}{\lambda^2}} \right]. \quad (2)$$

Из (1) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{\kappa}.$$

Это соотношение является следствием статистической теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Действительно, в силу этой теоремы

$$\left\langle \frac{1}{2} \kappa x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} kT,$$

откуда

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{\kappa}.$$

При $8mk > \lambda^2$ корень в (2) мнимый; поэтому

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{\kappa} + e^{-\frac{\lambda}{2m}t} [C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t];$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8m\kappa}{\lambda^2} - 1}.$$

При $8m\kappa < \lambda^2$ движение аperiodично. Если $8m\kappa \ll |\lambda^2|$, то

$$v_1 \approx -\frac{2\kappa}{\lambda}; \quad v_2 \approx -\frac{\lambda}{m}; \quad |v_1| \ll |v_2|.$$

Следовательно, в этом случае

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{\kappa} + C_1 e^{-\frac{2\kappa t}{\lambda}}.$$

§ 1. Собственные колебания и метод Крылова — Боголюбова

7.1. Запишем лагранжиан маятника:

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Полная энергия маятника сохраняется, т. е.

$$\frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = E_0. \quad (1)$$

Вместо E_0 введем константу a согласно соотношению

$$E_0 = -mgl + \frac{ma^2 l^2}{2} \omega_0^2; \quad \omega_0^2 = g/l. \quad (2)$$

Тогда из (1) получим

$$\dot{\varphi}^2 = 4\omega_0^2 \left[\frac{a^2}{4} - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]. \quad (3)$$

Разделяя переменные, из (3) найдем

$$2\omega_0 t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \sin^2(\varphi/2)}}. \quad (4)$$

Обозначим

$$2\omega_0 \tau = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \sin^2(\varphi/2)}},$$

из (4) получим

$$2\omega_0(t + \tau) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \sin^2(\varphi/2)}}.$$

Этот интеграл подстановкой $x = \frac{2}{a} \sin(\varphi/2)$ приводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\omega_0(t + t_0) = \int_0^{\frac{2}{a} \sin(\varphi/2)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \left(1 - \frac{a^2 x^2}{4}\right)}}. \quad (5)$$

Напомним, что по определению эллиптическим синусом $\operatorname{sn}(u, k)$ с аргументом u и модулем k называется функция, обратная по отношению к интегралу

$$u = \int_0^{\operatorname{sn}(u, k)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}. \quad (6)$$

Сопоставляя (5) с (6), решение можно записать в виде

$$\sin(\varphi/2) = \frac{a}{2} \operatorname{sn} \left[\omega_0(t + \tau), \frac{a}{2} \right]. \quad (7)$$

Используя соотношение [8]

$$\operatorname{sn} \left(ku, \frac{1}{k} \right) = k \operatorname{sn}(u, k),$$

представим (7) также в виде

$$\sin(\varphi/2) = \operatorname{sn} \left[\frac{a}{2} \omega_0(t + \tau), \frac{2}{a} \right].$$

Это представление можно получить непосредственно из (5) подстановкой $y = \sin(\varphi/2)$.

7.2. Вместо полной энергии удобно ввести постоянную a (см. задачу 7.1), играющую роль амплитуды линейных колебаний. Действительно, максимальная амплитуда φ_{\max} определяется условием $\sin(\varphi_{\max}/2) = a/2$ (при малых отклонениях $\varphi_{\max} \sim a$).

Функция $\operatorname{sn}(\tau, k)$ периодическая, причем ее период по переменной τ равен $4K$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \left(1 - \frac{a^2}{4} x^2\right)}}.$$

Период колебаний T равен

$$T = \frac{4K}{\omega_0}. \quad (1)$$

Подстановкой $x = \sin u$ ($x = \frac{2}{a} \sin \frac{\varphi}{2}$) приведем (1) к виду

$$\dot{T} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{a \sin u}{2}\right)^2}}.$$

При малых отклонениях ($a \ll 1$)

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a \sin u}{2}\right)^2 + \dots \right] = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{a^2}{16} + \dots \right).$$

В том же приближении частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16} \right).$$

7.3. Уравнение Лагранжа математического маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0,$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, а $\omega_0^2 = g/l$. Отсюда в случае малых колебаний с точностью до первого нелинейного члена включительно получим уравнение в стандартной форме метода КБ:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \varepsilon Q(\varphi),$$

где

$$\varepsilon Q(\varphi) = \frac{\omega_0^2}{3!} \varphi^3.$$

Решением этого уравнения в первом приближении по методу КБ является функция

$$\varphi = a \cos \psi,$$

где

$$\dot{a} = 0; \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon \beta_1}{2\omega_0 a},$$

а

$$\varepsilon \beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q(a \cos \psi) \cos \psi d\psi.$$

Вычисляя этот интеграл, получим, что $\varepsilon\beta_1 = \omega a^3/8$ и, следовательно, частота нелинейных колебаний

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16} \right)$$

(см. предыдущую задачу).

Таким образом, закон движения математического маятника в случае малых нелинейных колебаний задается функцией

$$\varphi = a_0 \cos \left[\omega_0 \left(1 - \frac{a_0^2}{16} \right) t + \psi_0 \right].$$

7.4. Поскольку сила кулонова трения

$$\mathbf{F} = -F_0 \frac{\mathbf{v}}{v} \theta(v)$$

($\theta(v)$ — функция Хевисайда, см. задачу 1.27), уравнение движения маятника имеет вид

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \varphi + lF_0 \frac{\varphi}{|\dot{\varphi}|} = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \varepsilon Q(\dot{\varphi}),$$

где

$$\varepsilon Q = -\lambda \frac{\varphi}{|\dot{\varphi}|}; \quad \lambda = \frac{F_0}{ml}.$$

Согласно методу КБ

$$\varphi = a \cos \psi; \quad \dot{a} = -\frac{\varepsilon \alpha_1}{2\omega_0}; \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon \beta_1}{2\omega_0 a},$$

где

$$\varepsilon \alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda \sin \psi}{|\sin \psi|} \sin \psi d\psi = \begin{cases} \frac{4\lambda}{\pi}, & a \neq 0; \\ 0, & a = 0; \end{cases}$$

$$\varepsilon \beta_1 = 0$$

и, следовательно,

$$\dot{a} = -\frac{2\lambda}{\pi\omega_0} (a \neq 0); \quad a = a_0 - \frac{2\lambda}{\pi\omega_0} t;$$

$$\dot{a} = 0 \quad (a = 0).$$

(1)

Таким образом,

$$\varphi = \left(a_0 - \frac{2\lambda t}{\pi\omega_0} \right) \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Из (1) следует, что при $t = \pi \omega_0 a_0 / 2\lambda$ движение прекращается.

7.5. Запишем уравнение колебаний маятника

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \varphi = -kl^2 \dot{\varphi} + lP_0 \frac{\dot{\varphi} - |\dot{\varphi}|}{2} \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (1)$$

где k — коэффициент сопротивления среды, P_0 — величина возбуждающего импульса, а $\varphi_0 > 0$. Вводя обозначения

$$\lambda = \frac{k}{m}; \quad I = \frac{P_0}{ml},$$

перепишем (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = -\lambda \dot{\varphi} + I \frac{\dot{\varphi} - |\dot{\varphi}|}{2} \delta(\varphi - \varphi_0).$$

Согласно методу КБ

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon \alpha_1}{2\omega_0}; \quad \psi = \omega_0 - \frac{\varepsilon \beta_1}{2\omega_0 a},$$

причем

$$\begin{aligned} \varepsilon \alpha_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\lambda a \omega_0 \sin \psi - I a \omega_0 \frac{\sin \psi + |\sin \psi|}{2} \delta(a \cos \psi - \varphi_0) \right] \cdot \sin \psi d\psi = \\ &= \lambda a \omega_0 - \frac{I a \omega_0}{\pi} \int_0^{\pi} \delta(a \cos \psi - \varphi_0) \sin^2 \psi d\psi = \\ &= \begin{cases} \lambda a \omega_0 - \frac{I \omega_0 \sin \psi_0}{\pi}, & \cos \psi_0 = \frac{\varphi_0}{a} < 1; \\ \lambda a \omega_0, & \varphi_0 > a; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \beta_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\omega_0 \lambda a \sin \psi - I a \omega_0 \frac{\sin \psi + |\sin \psi|}{2} \delta(a \cos \psi - \varphi_0) \right] \cdot \cos \psi d\psi = \\ &= \begin{cases} -\frac{I \omega_0 \cos \psi_0}{\pi}, & \cos \psi_0 < 1; \\ 0, & \varphi_0 > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, если $a > \varphi_0$, то

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\lambda a}{2} + \frac{I}{2\pi a} \sqrt{a^2 - \varphi_0^2}; \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \frac{I \varphi_0}{2\pi a^2}; \end{aligned} \quad (2)$$

если же $a < \varphi_0$, то

$$\dot{a} = -\frac{\lambda a}{2}; \quad \dot{\psi} = \omega_0; \quad \varphi = a_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Полагая в (2) $a=0$, находим

$$a_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{\pi \lambda} \right)^2 \mp \left[\frac{1}{4} \left(\frac{l}{\pi \lambda} \right)^4 - \varphi_0^2 \left(\frac{l}{\pi \lambda} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Здесь корень будет вещественным при условии $\rho_0 > 2\pi k \varphi_0 l$. Следовательно, в случае $\rho_0 < 2\pi k \varphi_0 l$ стационарные колебания невозможны. Из (2) также вытекает:

- если $a(0) < a_1$, то $a(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$;
 если $a_1 < a(0) < a_2$, то $a(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow a_2$;
 если $a(0) > a_2$, то $a(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow a_2$.

Итак, для возбуждения незатухающих колебаний с амплитудой a_2 необходимо, чтобы начальная амплитуда была больше a_1 .

Нетрудно видеть, что в этом случае средняя за период мощность возбуждающей силы

$$N^e = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 \frac{\dot{\varphi} - |\dot{\varphi}|}{2} \delta(\varphi - \varphi_0) \dot{\varphi} dt = ml^2 \omega_0^2 \frac{l}{2\pi} \sqrt{a^2 - \varphi_0^2}$$

равна средней мощности, рассеиваемой вследствие сопротивления среды

$$N^d = \frac{1}{T} \int_0^T kl^2 \dot{\varphi} \varphi dt = ml^2 \omega_0^2 \frac{\lambda a^2}{2}.$$

7.6. Запишем уравнение для радиального движения спутника массы m в виде

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial U}{\partial \rho}; \quad (1)$$

$$U(\rho) = \frac{M_0^2}{2m\rho^2} - \frac{mgR_0^2}{\rho}, \quad (2)$$

где R_0 — радиус Земли.

Пусть значение $\rho_{eq} = R$ соответствует радиусу невозмущенной орбиты. При этом частота обращения связана с моментом импульса соотношением $M = m\omega_0 R^2$; $\omega_0^2 = gR_0^2/R^3$. Следовательно,

$$U(\rho) = m\omega_0^2 R^2 \left(\frac{R^2}{2\rho^2} - \frac{R}{\rho} \right).$$

Далее разложим «эффективную» силу $-\frac{\partial U}{\partial \rho}$ в точке $\rho_{eq}=R$ по степеням $x=\rho-R$. В результате с точностью до членов третьего порядка малости включительно получим

$$-\frac{\partial U}{\partial \rho} = -m\omega_0^2 x + \frac{3m\omega_0^2}{R} x^2 - \frac{6m\omega_0^2}{R^3} x^3$$

и, следовательно,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon Q(x),$$

где

$$\varepsilon Q(x) = \frac{3\omega_0^2}{R} x^2 - \frac{6\omega_0^2}{R^3} x^3.$$

Применяя далее к этому уравнению метод КБ, получим

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{9}{4} \left(\frac{a_0}{R} \right)^2 \right),$$

где a_0 — амплитуда колебаний.

7.7. Помещая начало координат в центр силы и совмещая плоскость Oxy с плоскостью движения, запишем лагранжиан планеты

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - U(\rho),$$

одно из уравнений Лагранжа и интеграл момента

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - \gamma \frac{mM}{\rho^2} - \frac{2m\lambda}{\rho^3}, \quad (1)$$

$$m\rho^2\dot{\varphi} = M_{z0}. \quad (2)$$

Используя (2), перейдем в (1) к переменной ρ

$$\dot{\rho} = \rho' \dot{\varphi} = \rho' \frac{M_z}{m\rho^2} = -\frac{M_z}{m} \left(\frac{1}{\rho} \right)',$$

$$\ddot{\rho} = -\frac{M_z}{m} \left(\frac{1}{\rho} \right)'' \dot{\varphi} = -\frac{M_z^2}{m^2 \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \right)''.$$

Следовательно, из (1) получим ($u=1/\rho$)

$$u'' + u = \frac{1}{\rho_0} + \frac{2\lambda m^2}{\rho_0 \gamma M} u, \quad \rho_0 = \frac{M_z^2}{\gamma m^2 M}. \quad (3)$$

Для того чтобы представить (3) в стандартной форме, введем функцию

$$x = u - \frac{1}{\rho_0}.$$

Тогда из (3) найдем

$$x'' + x = \frac{2\lambda}{\gamma\rho_0 M} \left(x + \frac{1}{\rho_0} \right). \quad (4)$$

Решение (4) ищем в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon \beta_0 + \varepsilon \sum_{n \neq 1} \frac{1}{1-n^2} (\beta_n \cos n\psi + \alpha_n \sin n\psi),$$

причем

$$a' = -\frac{\varepsilon \alpha_1}{2}, \quad \psi' = 1 - \frac{\varepsilon \beta_1}{2a},$$

$$\varepsilon \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\lambda}{\gamma\rho_0 M} \left(x + \frac{1}{\rho_0} \right) \cos n\psi d\psi = \frac{2\lambda}{\gamma\rho_0 M} \left(a \delta_{n1} + \frac{1}{\rho_0} \delta_{n0} \right),$$

$$\varepsilon \alpha_n = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a &= a_0, \quad \psi = \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma\rho_0 M} \right) \varphi + \varphi_0, \\ x &= \frac{2\lambda}{\gamma\rho_0^2 M} + a_0 \cos \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma\rho_0 M} \right) \varphi + \varphi_0 \right] = \\ &= \frac{6\gamma M}{\rho_0^2 c^2} + a_0 \cos \left[\left(1 - \frac{3\gamma M}{\rho_0 c^2} \right) \varphi + \varphi_0 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{a} = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \left[\left(1 - \frac{3\gamma M}{\rho_0 c^2} \right) \varphi + \varphi_0 \right]}, \\ \rho &= \rho_0 \left(1 - \frac{6\gamma M}{\rho_0 c^2} \right), \quad \varepsilon = a_0 \rho. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что траектория тела является незамкнутым эллипсом. Угловое смещение большой полуоси за время одного оборота $\delta\varphi = \frac{6\pi\gamma M}{\rho_0 c^2}$. Выражая его через длину большой полуоси a и эксцентриситет ε_0 , с помощью формулы

$$\rho_0 = \frac{M_z^2}{\gamma m^2 M} = a(1 - \varepsilon_0^2)$$

получим

$$\delta\varphi = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 a (1 - \varepsilon_0^2)}.$$

§ 2. Колебания системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты

7.8. Запишем лагранжиан маятника для случая $|\varphi| \ll 1$:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} mgl\varphi^2;$$

здесь $l=l(t)$. Тогда уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} ml^2 \dot{\varphi} + mgl\varphi = 0.$$

Отсюда, переходя к новой переменной l , получим

$$\frac{d}{dl} l^2 v^2 \frac{d\varphi}{dl} + gl\varphi = 0$$

или

$$\varphi'' + \frac{2}{l} \varphi' + \frac{g}{lv^2} \varphi = 0. \quad (1)$$

Решением (1) в области $l > 0$ является

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \left[AJ_1 \left(\frac{2}{v} \sqrt{gl} \right) + BN_1 \left(\frac{2}{v} \sqrt{gl} \right) \right], \quad (2)$$

где $J_1(x)$ и $N_1(x)$ — соответственно функции Бесселя и Неймана первого индекса. В случае $v \ll \sqrt{gl}$ аргумент функций велик. Поэтому можно воспользоваться их асимптотикой:

$$\left. \begin{array}{l} J_1(z) \\ N_1(z) \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(z - \frac{3}{4} \pi \right); \\ \sin \left(z - \frac{3}{4} \pi \right). \end{array} \right.$$

Тогда решение (2) приобретает форму

$$\varphi = Cl^{-3/4} \cos \left(\frac{2}{v} \sqrt{gl} + \gamma \right), \quad (3)$$

где C и γ — произвольные постоянные. В этом случае ($v \ll \sqrt{gl}$) решение (3) может быть получено методом КБ (см. задачу 7.9).

7.9. Запишем уравнение движения маятника в виде

$$\frac{d}{dt} (m(\tau) \dot{\varphi}) + k(\tau) \varphi = 0,$$

где $m(\tau) = m_0 l^2$; $k(\tau) = m_0 gl$; $l = l_0 + v\tau$; $\tau = \epsilon t$ (здесь ϵ — символический малый параметр).

Применяя к этому уравнению метод КБ, в первом приближении получим $\varphi = a \cos \psi$, причем

$$a = -\frac{a}{2m\omega} \cdot \frac{d}{dt} m\omega; \quad (1)$$

$$\varphi = \omega(t) = \sqrt{\frac{g}{l_0 + vt}}. \quad (2)$$

Интегрируя (1) и (2), находим

$$a^2 m \omega = \text{const}; \quad a^2 l^{3/2} = \text{const}; \quad \psi = \frac{2}{v} \sqrt{gl} + \psi_0. \quad (3)$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\varphi = a_0 \left(\frac{l_0}{l}\right)^{3/4} \cos\left(\frac{2}{v} \sqrt{gl} + \psi_0\right),$$

а условием медленности изменения длины является $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} \ll 1$, т. е. $v \ll l\omega = \sqrt{gl}$.

7.10. Закон изменения полной энергии планеты в поле звезды приводит к уравнению

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \gamma \frac{mM}{r} = -\dot{M} \frac{m\gamma}{r}. \quad (1)$$

Усредним (1) по периоду невозмущенного движения, т. е. по периоду T обращения планеты при постоянной массе M ,

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/\alpha}, \quad \alpha = \gamma mM.$$

Величины E и M при усреднении за время T практически не изменяются, следовательно,

$$\frac{dE}{dt} \approx -\dot{M} m \gamma \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = -\dot{M} m \gamma \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r}. \quad (2)$$

Теперь используем параметрическое представление $r(t)$:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi); \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - \varepsilon \sin \xi); \quad dt = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \cdot \frac{r}{a} d\xi.$$

В результате из (2) найдем

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \frac{m\dot{M}}{a}$$

или, поскольку $E = -\gamma \frac{mM}{2a}$,

$$\frac{dE}{dt} = 2E \frac{\dot{M}}{M}.$$

Таким образом, получим адиабатические инварианты

$$\frac{E}{M^2} = \text{const}; \quad Ma = \text{const}.$$

Ввиду того, что квадрат малой полуоси

$$b^2 = \frac{M_z^2}{2m|E|} \propto \frac{M_z^2}{2mM^2},$$

имеется еще один адиабатический инвариант

$$Mb = \text{const}.$$

Поскольку Ma и Mb адиабатически сохраняются, орбита планеты остается подобной.

7.11. Аналогично предыдущей задаче находим

$$\frac{dE}{dt} = -\dot{\gamma} \left\langle \frac{mM}{r} \right\rangle = -\dot{\gamma} \frac{mM}{a} = 2 \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} E,$$

где a — большая полуось орбиты μ -точки

Далее получим

$$E\gamma^{-2} = \text{const}; \quad a\gamma = \text{const}; \quad b\gamma = \text{const}.$$

7.12. Поскольку магнитное поле изменяется вдоль оси z , то из уравнений Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$ следует, что кроме компоненты H_z отлична от нуля и другая компонента H_ρ . Вектор-потенциал рассматриваемого поля имеет одну составляющую [26]

$$A_\varphi = \frac{\rho}{2} H(z) - \frac{\rho^3}{16} H''(z) + \dots$$

Следовательно,

$$H_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{\rho}{2} H'(z) + \dots;$$

$$H_z = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) = H(z) + \dots$$

Далее из уравнений движения

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c} (\dot{y}H + z \frac{y}{2} H');$$

$$\ddot{m}y = -\frac{e}{c} \left(\dot{x}H + \frac{1}{2} \dot{z}xH' \right)$$

находим

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{mv_{\perp}^2}{2} = -\frac{e}{2c} (xy - yx) H, \quad (1)$$

где v_{\perp} — составляющая скорости в плоскости Oxy .

Усредним (1) по такому движению, какое имело бы место при постоянном поле H и происходило по закону

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \alpha); \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \alpha); \quad \omega = \frac{eH}{mc}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) и (1) и усредняя по периоду $2\pi/\omega$, получим

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{e}{2c} \frac{v_{\perp}^2}{\omega} \dot{H} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} \cdot \frac{\dot{H}}{H}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\frac{T_{\perp}}{H} = \text{const}, \quad T_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2}. \quad (4)$$

Существование инварианта (4) приводит к интересным следствиям. Запишем интеграл энергии в виде

$$T_{\perp} + \frac{m\dot{z}^2}{2} = T_0. \quad (5)$$

Подставляя сюда T_{\perp} из (4), получим

$$\dot{z}^2 = \frac{2}{m} \left[T_0 - \frac{T_{\perp 0}}{H_0} H(z) \right],$$

где $T_{\perp 0}$, H_0 — значения энергии поперечного движения и поля в некоторой точке z_0 . Если $H(z)$ возрастает, то в точке z_1 , определяемой условием

$$T_0 - \frac{T_{\perp 0}}{H_0} H(z_1) = 0,$$

частица отразится — составляющая скорости \dot{z} изменит знак. Поверхность $z=z_1$, непроницаемая для частиц, называется магнитным зеркалом.

Пусть теперь частица сталкивается с двумя магнитными зеркалами, движущимися навстречу друг другу со скоростью u . Тогда после каждого отражения компонента скорости z частицы возрастает на $2u$. Эта идея была высказана Э. Ферми в качестве возможного механизма ускорения частиц.

7.13 Поскольку $\omega^2(t)$ медленно меняющаяся (в масштабе τ) функция времени, то при $|\omega|\tau \gg 1$ будем искать решение в виде

$$x = A(t) e^{i s(t)t}.$$

Из уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ имеем

$$\ddot{A} + 2i\dot{A}\dot{s} + i\ddot{s}A - \dot{s}^2 A + \omega^2 A = 0.$$

Отделяя здесь мнимую и вещественную части, получим два уравнения:

$$\ddot{A} - \dot{s}^2 A + \omega^2 A = 0; \quad (1)$$

$$2A\dot{s} + \ddot{s}A = 0. \quad (2)$$

Из (2) находим, что

$$A = \frac{a}{\sqrt{\dot{s}}}. \quad (3)$$

Из (1) следует

$$s^2 = \omega^2 + \frac{\ddot{A}}{A}. \quad (4)$$

Если

$$\left| \frac{\ddot{A}}{A\omega^2} \right| \ll 1, \quad (5)$$

то в первом приближении можно считать

$$s^2 = \omega^2.$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$x = \frac{a}{\sqrt{\omega}} \cos \left(\int \sqrt{\omega^2} dt + \alpha \right) \text{ при } \omega^2 > 0 \quad (6)$$

и

$$x = \frac{a_1}{\sqrt{k}} e^{\int \sqrt{k^2} dt} + \frac{a_2}{\sqrt{k}} e^{-\int \sqrt{k^2} dt} \text{ при } \omega^2 = -k^2 < 0. \quad (7)$$

Решения (6), (7) в окрестности точек t_0 , где $\omega^2(t_0) = 0$, становятся бесконечными. Это обстоятельство связано с тем, что в области $t \sim t_0$ приближенные решения (6), (7) становятся непри-

менимыми. Определим окрестность $|t-t_0|$, в которой еще можно пользоваться (6), (7) Подставляя $s = \sqrt{\omega}$ в (5), получим

$$\ddot{A} \sim \omega^{-5/2} \dot{\omega}^2, \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right)^2 \ll 1. \quad (8)$$

Разлагая $\omega^2(t)$ в ряд в точке t_0 , будем иметь $\omega^2(t) = -b(t-t_0)$, где $b = -\left. \frac{d\omega^2}{dt} \right|_{t_0} > 9$. Тогда из (8) найдем

$$\frac{b}{b^{3/2}(|t-t_0|)^{3/2}} \ll 1, \text{ т. е. } |t-t_0| \gg b^{-1/3}.$$

Учитывая, что в $b \sim \omega^2/\tau$, получим

$$|t-t_0| \gg \frac{\tau}{(\omega\tau)^{2/3}}. \quad (9)$$

При $|\omega|\tau \gg 1$ условие применимости решений (6), (7) выполняется, начиная с момента $\frac{\tau}{(|\omega|\tau)^{2/3}} \ll \tau$. Условие (8) является условием адиабатичности изменения величины ω , так как по определению какая-либо величина $p(t)$ меняется адиабатически, если $\left| \frac{\dot{p}}{\omega p} \right| \ll 1$.

7.14. В области $t > t_0$ два линейно независимых решения имеют вид

$$x_1 = \frac{c}{\sqrt{k}} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \sqrt{k^2} dt \right\}; \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{D}{\sqrt{k}} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \sqrt{k^2} dt \right\}, \quad (2)$$

а в области $t < t_0$

$$x_1 = \frac{A}{\sqrt{\omega}} \sin \left(\int_t^{t_0} \sqrt{\omega^2} dt + \alpha \right); \quad (3)$$

$$x_2 = \frac{B}{\sqrt{\omega}} \cos \left(\int_t^{t_0} \sqrt{\omega^2} dt + \beta \right). \quad (4)$$

Искомая связь может быть найдена из условий непрерывного перехода решения в точке $t=t_0$. В окрестности этой точки

$$\omega^2(t) = -b(t-t_0)$$

и, следовательно,

$$\ddot{x} - b(t - t_0)x = 0.$$

Решением этого уравнения при $t > t_0$ являются функции Эйри [8]

$$\Phi_1(\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2}\right);$$

$$\Phi_2(\tau) = \sqrt{\frac{\pi\tau}{3}} \left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2}\right) + I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2}\right) \right],$$

где

$$\tau = b^{1/3}(t - t_0), \quad \Phi_1(0) = \frac{3^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 0,629,$$

$$\Phi_2(0) = \frac{3^{1/3}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

При $\tau < 0$ аналитическое продолжение дает

$$\Phi_1(\tau) \rightarrow \varphi_1(\tau) = \frac{\sqrt{\pi(-\tau)}}{3} \left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-\tau)^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-\tau)^{3/2}\right) \right];$$

$$\Phi_2(\tau) \rightarrow \varphi_2(\tau) = \sqrt{\frac{\pi(-\tau)}{3}} \left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-\tau)^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-\tau)^{3/2}\right) \right];$$

$$(\varphi_1)_{\max} = 0,95 \text{ при } \tau = -1,02.$$

При больших положительных τ

$$\Phi_1(\tau) \rightarrow \frac{1}{2\tau^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}\tau^{3/2}\right); \quad (5)$$

$$\Phi_2(\tau) \rightarrow \frac{1}{\tau^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2}\right), \quad (6)$$

а при больших отрицательных τ

$$\varphi_1(\tau) \rightarrow \frac{1}{(-\tau)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-\tau)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]; \quad (7)$$

$$\varphi_2(\tau) \rightarrow \frac{1}{(-\tau)^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3}(-\tau)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]. \quad (8)$$

Учитывая, что

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{k^2} dt = \frac{2}{3}\tau^{3/2}; \quad \dot{s} = \sqrt{k^2} = b^{1/3}\tau^{1/2},$$

из сравнения (5), (7) с (1), (3) находим $c=A/2$, $\alpha=\pi/4$. Из сравнения (6), (8) с (2), (4) найдем $D=B$; $\beta=\pi/4$.

Таким образом, получим две пары «сшитых» линейно независимых решений

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{A}{2\sqrt{k}} \exp \left[- \int_{t_0}^t \sqrt{-\omega^2} dt \right], & t \gg t_0; \\ \frac{A}{\sqrt{\omega}} \sin \left[\int_t^{t_0} \sqrt{\omega^2} dt + \frac{\pi}{4} \right], & t \ll t_0; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{B}{\sqrt{k}} \exp \left[\int_{t_0}^t \sqrt{-\omega^2} dt \right], & t \gg t_0; \\ \frac{B}{\sqrt{\omega}} \cos \left[\int_t^{t_0} \sqrt{\omega^2} dt + \frac{\pi}{4} \right], & t \ll t_0. \end{cases}$$

§ 3. Методы усреднения

7.15. Используем замену переменных, которые определяются формулами

$$x = z e^{i\omega_0 t} + z^* e^{-i\omega_0 t}; \quad (1)$$

$$\dot{x} = i\omega_0 z e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 z^* e^{-i\omega_0 t}, \quad (2)$$

где z и z^* — комплексно сопряженные функции времени. Тогда исходное уравнение приведем к виду

$$\dot{z} = \varepsilon F(\omega_1 t, x, \dot{x}),$$

где

$$F = - \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0 t} f(x, \dot{x}, \omega_1 t). \quad (3)$$

Представим далее z как суперпозицию плавно меняющегося члена ξ (с характерным временем изменения параметров $t \gg 2\pi/\omega_0$) и суммы малых вибрационных членов, т. е. представим z в виде

$$z = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t) + \dots, \quad (4)$$

где функция ξ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\xi} = \varepsilon a_1(\xi, t) + \varepsilon^2 a_2(\xi, t) + \dots, \quad (5)$$

при этом функции u_i , a_i в (4) и (5) подлежат определению.

Так как $F(x, \dot{x}, \omega_1 t)$ периодична (с периодом $T=2\pi/\omega_0$), то

$$F(x, \dot{x}, \omega_1 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t} F_n(z, z^*, \omega_1 t). \quad (6)$$

Далее из (4) и (5) следует, что

$$\dot{z} = \dot{\xi} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \dot{\xi} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots \approx \varepsilon \left(a_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} a_1 + \dots \quad (7)$$

В свою очередь, правую часть (3) согласно (6) и (4) можно представить в виде ряда

$$F(x, \dot{x}, \omega_1 t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-in\omega_0 t} \left[F_n(\xi, \xi^*, \omega_1 t) + \varepsilon u_1 \frac{\partial F_n}{\partial z} \Big|_{z=\xi} + \varepsilon u_1^* \frac{\partial F_n}{\partial z^*} \Big|_{z^*=\xi^*} + \dots \right]. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (3), в первом приближении найдем

$$a_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t} F_n(\xi, \xi^*, \omega_1 t). \quad (9)$$

Теперь усредним (9) по периоду $T=2\pi/\omega_0$, имея в виду, что ξ — медленная функция времени. В результате получим

$$a_1(\xi, t) = \bar{F}(\xi, \xi^*, t), \quad (10)$$

где

$$\bar{F}(\xi, \xi^*, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-in\omega_0 t'} F_n(\xi, \xi^*, \omega_1 t') dt'. \quad (11)$$

Учитывая (10), из (9) после интегрирования найдем

$$u_1(\xi, t) = \int_0^t \left[\sum e^{-in\omega_0 t} F_n(\xi, \xi^*, \omega_1 t) - \bar{F} \right] dt. \quad (12)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если $\omega_1 \ll \omega_0$, то

$$\bar{F}(\xi, \xi^*, t) = F_0(\xi, \xi^*, \omega_1 t).$$

б) Предположим, что $f(x, \dot{x}, \omega_1 t)$ периодична с периодом $2\pi/\omega_1$. Тогда

$$F_n(\xi, \xi^*, \omega_1 t) = \sum_{n_1} F_{nn_1}(\xi, \xi^*) e^{-in_1 \omega_1 t}.$$

Следовательно, при точном резонансе

$$\bar{F}(\xi, \xi^*, t) = \sum_{n\omega_0 + n_1\omega_1 = 0} F_{nn_1}(\xi, \xi^*).$$

Для нахождения решения вблизи резонанса положим $n_1\omega_1 + n\omega_0 = \delta \ll \omega_0$. Тогда

$$\bar{F}(\xi, \xi^*, t) = \sum_{n\omega_0 + n_1\omega_1 \approx \delta} F_{nn_1}(\xi, \xi^*) e^{-i\delta t}.$$

в) Если $\omega_1 \gg \omega_0$, то $\bar{F} = 0$, т. е. $\dot{\xi} = 0$ при $\xi = \text{const}$.

Итак, в первом приближении рассмотренного метода $z = \xi$, $\dot{\xi} = \varepsilon \bar{F}(\xi, \xi^*, t)$, где $\bar{F}(\xi, \xi^*, t)$ определяется формулой (11).

7.16. В рассматриваемом случае

$$\varepsilon F(x, \dot{x}, \omega_1 t) = -\frac{i}{2\omega_0} \frac{\omega_0^2}{3!} (ze^{i\omega_0 t} + z^* e^{-i\omega_0 t})^3 e^{-i\omega_1 t}.$$

Следовательно, из формулы (11) предыдущей задачи получим

$$\varepsilon \bar{F}(\xi, \xi^*) = -\frac{i\omega_0}{4} |\xi|^2 \xi.$$

При этом функция ξ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\xi} = -\frac{i\omega_0}{4} |\xi|^2 \xi.$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\xi = Ae^{i\psi}$. Тогда

$$\dot{A} = 0; \quad \dot{\psi} = -\frac{\omega_0}{4} A^2.$$

Таким образом,

$$A = \frac{a_0}{2}; \quad \dot{\psi} = -\frac{\omega_0}{16} a_0^2.$$

Учитывая, что

$$z = \xi = Ae^{i\psi}; \quad x = ze^{i\omega_0 t} + z^* e^{-i\omega_0 t},$$

получим

$$x = a_0 \cos \left[\omega_0 \left(1 - \frac{a_0^2}{16} \right) t + \psi_0 \right].$$

7.17. В этой задаче

$$\begin{aligned} \varepsilon f &= -\omega_0^2 h \cos \omega_1 t \cdot x; \\ \varepsilon F(x, \dot{x}, \omega_1 t) &= -\frac{\omega_0 h}{2i} \cos \omega_1 t (ze^{i\omega_0 t} + z^* e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega_0 t}; \\ \varepsilon \bar{F}(\xi, \dot{\xi}^*, t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{T} \int_t^{t+T} F(z, \dot{z}, \omega_1 t) |_{z=\xi} dt. \end{aligned} \quad (1)$$

1) В случае $\omega_1 \ll \omega_0$ при вычислении функции (11) задачи 7.15 $\cos \omega_1 t$ можно вынести за знак интеграла. Тогда

$$\varepsilon \bar{F}(\xi, \dot{\xi}^*, t) = -\frac{\omega_0 h}{2i} \cos \omega_1 t \xi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\omega_0 h}{2i} \cos \omega_1 t \xi; \\ \xi &= \frac{a}{2} \exp \left[\frac{i\omega_0 h}{2} \int \cos \omega_1 t dt + \psi_0 \right]; \\ x &= a \cos \psi; \quad \psi = \int_0^t \omega_0 \left(1 + \frac{h}{2} \cos \omega_1 t \right) dt + \psi_0. \end{aligned}$$

Это решение можно получить, используя результаты задачи 7.13, поскольку $\sqrt{\omega^2} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{h}{2} \cos \omega_1 t \right)$.

2) В случае $\omega_1 \sim 2\omega_0$ введем обозначение $\omega_1 - 2\omega_0 = \delta$. Тогда

$$\bar{F}(\xi, \dot{\xi}^*, t) = \frac{ih}{4} \omega_0 \xi^* e^{i\delta t}; \quad \dot{\xi} = \frac{ih}{4} \omega_0 \xi^* e^{i\delta t}.$$

Решение последнего уравнения ищем в виде $\xi = \eta e^{t \frac{\delta}{2}}$. Следовательно, функция η удовлетворяет уравнению

$$\dot{\eta} + \frac{i\delta}{2} \eta - \frac{ih\omega_0}{4} \eta^* = 0.$$

Полагая $\eta = u + iv$ и отделяя мнимую и действительные части, получим систему уравнений:

$$\dot{u} - \frac{\delta}{2} v - \frac{h\omega_0}{4} v = 0;$$

$$\dot{v} + \frac{\delta}{2} u - \frac{h\omega_0}{4} u = 0.$$

Решение этой системы ищем в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Ее характеристический детерминант приводит к двум корням:

$$\lambda = \pm s; \quad s = \left[\left(\frac{h\omega_0}{4} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Для первого частного решения $\lambda = s$ получим

$$C_1 = a; \quad C_2 = \frac{1}{2s} \left(-\delta + \frac{h\omega_0}{2} \right) a.$$

Для второго частного решения $\lambda = -s$ найдем $C_1 = b$;

$$C_2 = -\frac{1}{2s} \left(-\delta + \frac{h\omega_0}{2} \right) b.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= ae^{st} + be^{-st}; \\ v &= \frac{1}{2s} \left(-\delta + \frac{h\omega_0}{2} \right) (ae^{st} - be^{-st}); \\ x &= u \cos \frac{\omega_1 t}{2} - v \sin \frac{\omega_1 t}{2}. \end{aligned}$$

Согласно равенству (2) условием вещественности s является

$$\frac{h\omega_0}{4} > \left| \omega_0 - \frac{\omega_1}{2} \right|.$$

Таким образом, если частота ω_1 внешнего воздействия лежит в интервале

$$2\omega_0 \left(1 - \frac{h}{4} \right) < \omega_1 < 2\omega_0 \left(1 + \frac{h}{4} \right), \quad (2)$$

то в системе возникает параметрический резонанс, а амплитуда возрастает по экспоненциальному закону. Неравенство (2) определяет зону, внутри которой положение равновесия оказывается неустойчивым.

В области устойчивости $s^2 = -s_0^2 < 0$

$$\begin{aligned} x &= a \left[1 + \frac{1}{2s_0} \left(-\delta + \frac{h\omega_0}{2} \right) \right] \cos \left[\left(\frac{\omega_1}{2} + s_0 \right) t + \alpha \right] + \\ &+ a \left[1 - \frac{1}{2s_0} \left(-\delta + \frac{h\omega_0}{2} \right) \right] \cos \left[\left(\frac{\omega_1}{2} - s_0 \right) t - \alpha \right]; \\ s_0^2 &= \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - \left(\frac{h\omega_0}{4} \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

3) Если $\omega_1 \gg \omega_0$, то

$$\bar{F}(\xi, \xi^*, t) = 0; \quad \dot{\xi} = 0; \quad \xi = \frac{a}{2}; \quad a = Ae^{i\alpha},$$

а решение имеет вид

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

7 18. Запишем напряженность магнитного поля в виде

$$H_z = Hf; \quad f = 1 + h \cos \omega_1 t. \quad (1)$$

Здесь H — «ведущее» поле, $h = \frac{H_1}{H}$ — «коэффициент модуляции» ($h \ll 1$). Если магнитное поле создается соленоидом, то напряженность возникающего вихревого электрического поля

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2} [\mathbf{Hr}] \dot{f}. \quad (2)$$

Потенциал Φ электростатического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$ и может быть реализован соответствующей конфигурацией металлических поверхностей.

Включение переменной составляющей магнитного поля приводит к существенному изменению траектории и энергии частицы. Оценивая среднюю мощность, передаваемую частице вихревым электрическим полем, можно убедиться, что главный резонанс возникает на частоте $\omega_1 = \Omega$:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}; \quad \omega_0 = \frac{eH}{mc}, \quad \omega_z^2 = \frac{2\kappa e}{m}. \quad (3)$$

Теперь найдем решение уравнений движения ($\xi = x + iy$):

$$\ddot{\xi} + i\omega_0 f \dot{\xi} + \frac{1}{2} (i\omega_0 \dot{f} - \omega_z^2) \xi = 0; \quad (4)$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что частица совершает аксиальные колебания только в том случае, когда $\kappa e > 0$. В дальнейшем будем считать это условие выполненным

Заменой переменных

$$\xi = \omega \exp \left[-\int \frac{i\omega_0}{2} f dt \right] \quad (6)$$

уравнение (4) сводится к уравнению Хилла

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{\omega_0^2 f^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2} \right) \omega = 0. \quad (7)$$

В том случае, когда $\Omega^2 \gg \omega_0^2 h$, уравнение (7) может быть решено с помощью метода усреднения. Это условие можно реализовать, выбирая значения κ и H таким образом, что $2\omega_2^2 \ll \omega_0^2$. При этом Ω порядка циклотронной частоты ω_0 . Запишем уравнение (7) в эквивалентной форме:

$$\ddot{w} - \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 w = F(w); \quad (8)$$

$$F(w) = \frac{1}{4} (\omega_1^2 - \Omega^2 - 2h\omega_0^2 \cos \omega_1 t - h^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_1 t) W.$$

Переходя к новым переменным

$$w = a_1 e^{\frac{i\omega_1 t}{2}} - a_2 e^{-\frac{i\omega_1 t}{2}}; \quad (9)$$

$$\dot{w} = \frac{\omega_1}{2} a_1 e^{\frac{i\omega_1 t}{2}} - \frac{i\omega_1}{2} a_2 e^{-\frac{i\omega_1 t}{2}}, \quad (10)$$

получаем уравнения для амплитуд a_1 и a_2 :

$$\dot{a}_1 = -\frac{i}{\omega_1} F(w) e^{-\frac{i\omega_1 t}{2}}; \quad \dot{a}_2 = \frac{i}{\omega_1} F(w) e^{\frac{i\omega_1 t}{2}}. \quad (11)$$

Операция усреднения приводит к сглаживанию быстрых пульсаций амплитуд a_1 и a_2 и позволяет учесть эффект воздействия переменного магнитного поля на их систематические изменения. Очевидно, время усреднения $T = 2\pi/\omega_1$. После усреднения система (11) приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i(\Delta\lambda a_1 - \lambda_0 a_2), & \dot{a}_2 &= i(\Delta\lambda a_2 - \lambda_0 a_1); \\ \lambda_0 &= \frac{\omega_0^2 h}{4\omega_1}; & \Delta\lambda &= \frac{1}{4\omega_1} \left(\omega_1^2 - \Omega^2 - \frac{\omega_0^2 h^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Характер решения системы зависит от корней характеристического уравнения $\pm \lambda (\lambda = \sqrt{\lambda_0^2 - \Delta\lambda^2})$.

Общее решение системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 &= ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t}; \\ a_2 &= ae^{\lambda t - i\gamma} + be^{-\lambda t + i\gamma}; \end{aligned} \quad (13)$$

здесь $\lambda_0 \cos \gamma = \Delta\lambda$, $\lambda_0 \sin \gamma = \lambda$. Условие $\lambda^2 > 0$ определяет область неустойчивости

$$\sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2 h + \frac{\omega_0^2 h^2}{2}} \leq \omega_1 \leq \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2 h + \frac{\omega_0^2 h^2}{4}}. \quad (14)$$

Учитывая (6) и (9), получаем выражение для комплексной координаты:

$$\xi = ae^{-i\Omega_1 t} + be^{-i\Omega_2 t}, \quad (15)$$

где $\Omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)$; $\Omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_1)$. Коэффициенты a и b в выражении (15) определяются из начальных условий $\xi(0) = \xi_0$ и $\dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0$ соотношениями

$$a \approx \frac{i}{2\omega_1 \sin \gamma} [i\dot{\xi}_0(1 + e^{i\gamma}) - \Omega_2 \xi_0 e^{i\gamma}];$$

$$b \approx \frac{i}{2\omega_1 \sin \gamma} [\Omega_2 \xi_0 e^{-i\gamma} - i\dot{\xi}_0(1 + e^{-i\gamma})]. \quad (16)$$

Из выражений (13) и (15) следует, что траектория представляет спиралеобразную кривую. Радиус кривизны спирали и расстояние от оси z до центра кривизны спирали экспоненциально возрастают со временем. Центр спирали вращается с угловой скоростью Ω_1 , а вокруг этого центра обращается частица с угловой скоростью Ω_2 .

При точном резонансе $\omega_1 = \Omega$, $\cos \gamma = -h/2 \approx 0$. В установившемся режиме $\lambda t \gg 1$ частица движется по разворачивающейся спирали, многократно проходящей вблизи оси z . Действительно, представляя a_1 и a_2 в виде $a_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$; $a_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$, находим из выражения (15) расстояние ρ от оси z до частицы в момент времени t

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\omega_1 t + \alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Таким образом, начиная с момента $t \gg 1/\lambda_0 = 4/\omega_0 h$ расстояние ρ изменяется за период $T = 2\pi/\omega_1$ от значения

$$\rho_{\min} = |r_1 - r_2| \approx \frac{|a^* b + b^* a|}{|a|} e^{-\lambda t} \quad (17)$$

до значения

$$\rho_{\max} = |r_1 + r_2| - 2|a|e^{\lambda t}. \quad (18)$$

Из (13) и (15) следует, что кинетическая энергия частицы $T = m|\dot{\xi}|^2/2$ экспоненциально возрастает. Предположим, что вначале частица покоилась в некоторой точке с координатами $r_0 = (r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha, 0)$. Тогда, учитывая (16) из (17) и (18), найдем нижний $\rho_{\min} = r_0 e^{-\lambda t}$ и верхний $\rho_{\max} = r_0 e^{\lambda t}$ пределы удаления частицы от оси z . При $t \gg 1/\lambda_0$ кинетическая энергия частицы $T = \frac{m\omega_0^2}{8} \rho_{\max}^2$ определяется частотой переменного поля и размерами системы.

Для ионов массы m заряда ze условие $\omega_1 \sim \omega_0$ приводит к значению ведущего поля $H = \frac{m\omega_1}{zm_0} 10^{-4} \text{ Э}$ (m_0 — масса протона). Поскольку для реализуемых на практике полей $H \leq 10^4 \text{ Э}$, то рассмотренный механизм ускорения может быть использован для ионов массы $m < \frac{zm_0}{\omega_1} 10^8$ в области нерелятивистских энергий.

Например, при $\omega_1 = 10^7 \text{ Гц}$, $r_0 = 1 \text{ см}$ находим, что протон достигает энергии $T = 10 \text{ кэВ}$ за время $t_1 = 14/\omega_0 h$, совершив $14/2\pi h$ оборотов. Наибольшее удаление ρ_{\max} в этом случае составляет 33 см. Ведущее поле $H = 10^3 \text{ Э}$. Если ускоряются однократно заряженные ионы легких элементов ($m \sim 10 m_0$), то соответствующее значение энергии равно 100 кэВ. Ведущее магнитное поле в этом случае $H = 10^4 \text{ Э}$.

7.19. Запишем уравнение движения точки

$$a\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q, t), \quad (1)$$

где периодическая сила Q может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$Q(q, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_n(q) e^{in\Omega t};$$

$$Q_n(q) = \frac{1}{T} \int_0^T Q(q, t) e^{-in\Omega t} dt. \quad (2)$$

Далее ввиду условия положим, что координата q складывается из ξ — плавно меняющейся за время $2\pi/\Omega$ функции и быстроосциллирующей функции $u(t)$, т. е.

$$q = \xi + u. \quad (3)$$

Поскольку $\Omega \gg \omega_0$, то амплитуда вибраций мала и, следовательно, $|u| \ll |\xi|$. Поэтому уравнение (1) можно представить в виде

$$a(\ddot{\xi} + \ddot{u}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial q} + u \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} + \dots\right) \Big|_{q=\xi} +$$

$$+ \sum \left(Q_n + u \frac{\partial Q_n}{\partial q} + \dots\right) \Big|_{q=\xi} e^{in\Omega t}. \quad (4)$$

Теперь усредним (4) по периоду $2\pi/\Omega$ и найдем

$$a\ddot{\xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} + Q_0(\xi) + \left\langle u \sum_{n \neq 0} \frac{\partial Q_n}{\partial \xi} e^{in\Omega t} \right\rangle. \quad (5)$$

Вычитая (5) из (4) и пренебрегая членами $\sim u$, получим уравнение

$$a\ddot{u} = \sum_{n \neq 0} Q_n(\xi) e^{in\Omega t}. \quad (6)$$

При решении этого уравнения можно считать $Q_n(\xi)$ постоянными. Тогда

$$u = - \sum_{n \neq 0} \frac{Q_n(\xi)}{a(n\Omega)^2} e^{in\Omega t}. \quad (7)$$

Далее, учитывая (7), из (5) получим

$$a\ddot{\xi} = - \frac{\partial U}{\partial \xi} + F(\xi), \quad (8)$$

где

$$F(\xi) = Q_0(\xi) - \frac{1}{a} \left\langle \sum_{n \neq 0} \frac{Q_n(\xi)}{(n\Omega)^2} e^{in\Omega t} \sum_{n' \neq 0} \frac{\partial Q_{n'}}{\partial \xi} e^{in'\Omega t} \right\rangle. \quad (9)$$

При вычислении среднего значения учтем, что

$$\langle e^{i(n+n')\Omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} e^{i(n+n')\Omega t} dt = \delta_{n, -n'}, \quad (10)$$

и вместо (9) найдем

$$\begin{aligned} F(\xi) &= Q_0(\xi) - \frac{1}{a} \sum_{n \neq 0} \frac{Q_n(\xi)}{n^2 \Omega^2} \frac{\partial Q_n^*}{\partial \xi} = \\ &= Q_0(\xi) - \frac{1}{2a} \sum_{n \neq 0} \frac{\partial |Q_n|^2}{\partial \xi} \frac{1}{n^2 \Omega^2} \end{aligned}$$

или

$$F(\xi) = Q_0(\xi) - \frac{1}{2a} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \left[\int Q_{\sim}(\xi, t) dt \right]^2 \right\rangle; \quad Q_{\sim} = Q(\xi, t) - Q_0.$$

Таким образом, уравнение (8) принимает вид

$$a\ddot{\xi} = - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \xi}; \quad U_{\text{eff}}(\xi) = U(\xi) + \Phi(\xi),$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2a} \left\langle \left[\int Q_{\sim}(\xi, t) dt \right]^2 \right\rangle - \int Q_0(\xi) d\xi.$$

Отсюда видно, что действие быстро осциллирующей силы сводится к изменению эффективного потенциального поля, в котором движется точка.

7.20. Используя результаты предыдущей задачи, получим уравнения

$$a\ddot{\xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} + \left\langle u \frac{\partial Q_1(\xi, t)}{\partial \xi} \cos \omega_1 t \right\rangle; \quad (1)$$

$$a\ddot{u} = Q_1(\xi, t) \cos \omega_1 t. \quad (2)$$

При интегрировании (2) учтем, что $Q_1(\xi, t)$ мало изменяется за время $\sim 2\pi/\omega_1$. Поэтому

$$u = -\frac{1}{a\omega_1^2} Q_1(\xi, t) \cos \omega_1 t.$$

Далее получим уравнение движения по плавной траектории

$$a\ddot{\xi} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \xi};$$

$$U_{\text{eff}}(\xi) = U(\xi) + \frac{1}{4a\omega_1^2} Q_1^2(\xi, t).$$

7.21. Лагранжиан маятника

$$\mathcal{L} = \frac{m l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi + m l s_0 \omega^2 \varphi \sin \varphi \sin \omega t.$$

Запишем уравнение движения

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} (-mgl \cos \varphi) - m l s_0 \omega^2 \sin \varphi \cos \omega t.$$

Затем, применяя метод усреднения, найдем эффективную потенциальную энергию

$$U_{\text{eff}}(\varphi) = -mgl \left[\cos \varphi - \frac{1}{4} \left(\frac{s_0}{l} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sin^2 \varphi \right], \quad (1)$$

где $\sim \omega_0^2 = g/l$.

Исследуем теперь возможные положения равновесия маятника. Из уравнения

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \varphi} = -mgl \left[-\sin \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{s_0 \omega}{l \omega_0} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right] = 0$$

получим

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi; \quad \cos \varphi_3 = -2 \left(\frac{l \omega_0}{s_0 \omega} \right)^2.$$

Вычисляя

$$\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \varphi^2} = mgl \left[\cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{s_0 \omega}{l \omega_0} \right)^2 \cos 2\varphi \right],$$

видим, что

$$\left. \frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} = \frac{ms_0^2 \omega^2}{2} \left(1 - \frac{2gl}{s_0^2 \omega^2} \right).$$

Таким образом, если $2gl/\omega^2 s_0^2 < 1$, то положение $\varphi_2 = \pi$ является устойчивым. Это случай так называемого динамического равновесия.

7.22. Используя результаты задачи 7.19, получим

$$a \ddot{\xi} = - \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left\langle u \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \xi} \cos \omega_1 t + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} \cos \omega_2 t \right] \right\rangle;$$

$$a \ddot{u} = Q_1(\xi, t) \cos \omega_1 t + Q_2(\xi, t) \cos \omega_2 t.$$

Следовательно,

$$u = - \frac{1}{a} \left[\frac{Q_1}{\omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{Q_2}{\omega_2^2} \cos \omega_2 t \right];$$

$$\left\langle u \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \xi} \cos \omega_1 t + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} \cos \omega_2 t \right] \right\rangle \approx$$

$$\approx - \frac{1}{4a\omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (Q_1^2 + Q_2^2) + 2 \frac{\partial Q_1 Q_2}{\partial \xi} \cos (\omega_1 - \omega_2) t \right].$$

($\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$).

Таким образом,

$$a \ddot{\xi} = - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \xi},$$

где

$$U_{\text{eff}}(\xi) = U(\xi) + \frac{1}{4a\omega^2} [Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1 Q_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t].$$

7.23. Из закона изменения полной энергии маятника следует

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1)$$

Поскольку в случае линейных колебаний

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \frac{mgl\varphi^2}{2},$$

из (1) получим

$$\frac{dE}{dt} = mgl \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - mli\dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

Учитывая медленность изменения параметра l , усредним (2) по такому движению, которое имело бы место при постоянном значении l , т. е. при $\varphi = a \cos \omega t$. Тогда $\omega^2 = g/l$,

$$\frac{dE}{dt} = -mli \left\langle \dot{\varphi}^2 - \frac{\omega^2}{2} \varphi^2 \right\rangle = -\frac{1}{4} mli a^2 \omega^2 = -\frac{i}{l} \cdot \frac{E}{2}. \quad (3)$$

Имея в виду, что $\dot{\omega} = -\frac{1}{2} \omega \frac{\dot{l}}{l}$, из (3) найдем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E}{\omega} \dot{\omega},$$

т. е.

$$\frac{E}{\omega} = \text{const.}$$

7.24. Уравнением движения является

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{(0)} + e\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_\sim], \quad (1)$$

где

$$\mathbf{F}^{(0)} = e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0]. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad (3)$$

где $|\mathbf{u}| \ll |\mathbf{x}|$. Тогда (1) можно представить в форме

$$m(\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}^0(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{F}^0 + \left(\dot{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right)\mathbf{F}^0 + e\mathbf{E}_\sim(\mathbf{x}) + e(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{E}_\sim(\mathbf{x}) + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}}\mathbf{H}_\sim] + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{H}_\sim] + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{u}}\mathbf{H}_\sim]. \quad (4)$$

Усредняя (4) по периоду $2\pi/\omega_1$, получим

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^0(\mathbf{x}) + \left\langle e(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{H}_\sim] + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{u}}\mathbf{H}_\sim] \right\rangle; \quad (5)$$

$$m\ddot{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{F}^0 + \left(\dot{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right)\mathbf{F}^0 + e\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}}\mathbf{H}_\sim]. \quad (6)$$

Далее предположим, что $\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega_1 t$. Тогда из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\sim} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_{\sim}}{\partial t}$$

найдем

$$\mathbf{H}_{\sim}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \sin \omega_1 t; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k_1} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}); \quad k_1 = \frac{\omega_1}{c}.$$

Опуская ввиду малости два первых члена справа в (6), после интегрирования получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \frac{e}{m\omega_1} \left(\mathbf{E} \sin \omega_1 t - \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{x}}\mathbf{H}] \cos \omega_1 t \right); \\ \mathbf{u} &= -\frac{e}{m\omega_1^2} \left(\mathbf{E} \cos \omega_1 t + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{x}}\mathbf{H}] \sin \omega_1 t \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь подставим (7) в (5) и, опуская члены порядка $\dot{\mathbf{x}}^2/c^2$, найдем

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}^0(\mathbf{x}) + \frac{e}{2c} \left\{ -\frac{e}{m\omega_1^2} (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} + \frac{e}{m\omega_1} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \right\}; \\ m\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}^0(\mathbf{x}) - \frac{e^2}{2m\omega_1^2} \left\{ (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} + [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая известную формулу векторного анализа

$$\frac{1}{2} \nabla E^2 = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} + [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}],$$

(8) можно записать в виде

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{x}) - \nabla U(\mathbf{x}),$$

где

$$U(\mathbf{x}) = \frac{e^2}{4m\omega_1^2} E^2 = \frac{e^2}{2m} \left\langle \left[\int^t \mathbf{E}_{\sim}(\mathbf{r}, t) dt \right]^2 \right\rangle. \quad (9)$$

7.25. Поскольку $v \ll c$, то время $\tau \sim \lambda/v \sim c/v\omega$, за которое электрон проходит расстояние порядка длины волны, велико по сравнению с периодом колебаний поля $\sim 1/\omega$. Поэтому можно считать, что электрон движется в некотором усредненном поле, обладая потенциальной энергией

$$U(r) = \frac{e^2}{2m} \left\langle \left| \int^t E_0 \cos \omega t \cos kz dt \right|^2 \right\rangle = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cos^2 kz.$$

Сила, действующая на электрон, —

$$F_z = \frac{e^2 E_0^2 k}{4m\omega^2} \sin 2kz,$$

а уравнение движения сводится к уравнению

$$\ddot{z} - \Omega^2 \sin 2kz = 0; \quad \Omega^2 = \frac{e^2 E_0^2 k}{4m^2 \omega^2};$$

совпадающему с уравнением математического маятника.

7.26. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Фурье ($k=2\pi/L$):

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos skz + b_s \sin skz);$$

$$a_s = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos skz dz = 0, \quad a_0 = 0;$$

$$b_s = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin skz dz = \frac{4}{\pi s} \delta_{s,2n-1}$$

и, таким образом, получим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)kz.$$

Теперь запишем уравнения движения заряда

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x f(z); \quad (2)$$

$$\ddot{y} = \omega_0^2 y f(z); \quad (3)$$

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{eU_0}{mR^2}. \quad (4)$$

В первом приближении движение вдоль оси z почти равномерное, т. е. $z \approx z_0 + vt$, а уравнения движения (2) и (3) приобретают вид

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x f(vt);$$

$$\ddot{y} = \omega_0^2 y f(vt).$$

Здесь функция $f(vt)$ является быстро-осциллирующей с периодом $T = 2\pi/\Omega = 2\pi/kv = L/v$. Следовательно, согласно задаче 7.19 средняя сила, действующая на частицу, равна

$$F_x = -\frac{m}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \omega_0^4 x^2 \left| \int_0^t f(vt) dt \right|^2 \right\rangle; \quad (5)$$

$$F_y = -\frac{m}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \omega_0^4 y^2 \left\langle \left| \int_0^t f(vt) dt \right|^2 \right\rangle. \quad (6)$$

Вычислим необходимое среднее значение интеграла:

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \int_0^t f(vt) dt \right|^2 \right\rangle &= \frac{1}{2\Omega^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s^2}{s^2} = \\ &= \frac{1}{2(kv)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{2(kv)^2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{48} \left(\frac{L}{v} \right)^2, \end{aligned}$$

а затем получим соответствующий эффективный потенциал

$$U(x, y) = \frac{m}{2} \left(\frac{\omega_0^2}{kv} \right)^2 (x^2 + y^2) \frac{\pi^2}{12}. \quad (7)$$

Под действием силы с потенциалом (7) заряд совершает устойчивые колебания вблизи оси системы, в то время как движение в поле отдельной линзы приводит к инфинитному отклонению от ее оси. Этот эффект аналогичен механизму жесткой фокусировки частиц в ускорителях.

Возьмем теперь функцию $f(z) = \sin kz$. Тогда

$$\left\langle \left| \int_0^t \sin kvtdt \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(kv)^2},$$

а соответствующая потенциальная энергия

$$U(x, y) = \frac{m}{4} \left(\frac{\omega_0^2}{kv} \right)^2 (x^2 + y^2). \quad (8)$$

Следовательно, замена функции $f(z)$ сглаженной функцией $\sin kz$ приводит лишь к появлению множителя порядка единицы.

7.27. Уравнения движения заряда имеют вид

$$\ddot{x} = -\frac{\omega_0}{a} \dot{z} x f(z); \quad \ddot{y} = -\frac{\omega_0}{a} \dot{z} y f(z);$$

$$\ddot{z} = -\frac{\omega_0}{a} (x\dot{x} - y\dot{y}) f(z); \quad \omega_0 = \frac{eH}{mc}.$$

В приближении $z \approx z_0 + vt$ поперечные координаты определяются уравнениями

$$\ddot{x} = \frac{\omega_0 v}{a} x f(vt); \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\omega_0 v}{a} y f(vt). \quad (2)$$

Функция $f(vt)$ является быстро-осциллирующей с периодом $T = L/v = 2\pi/\Omega$. Поэтому движение заряда может быть описано с помощью введения усредненной силы (см. задачу 7.19):

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{\perp} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{\perp}}; \quad (3)$$

$$U = \frac{m}{2} \omega^4 (x^2 + y^2) \left\langle \left(\int f(vt) dt \right)^2 \right\rangle = m \left(\frac{\omega^2}{\Omega} \right)^2 (x^2 + y^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n|^2}{n^2};$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0 v}{a}.$$

Вычисляя фурье-компоненты функции $f(vt)$:

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(vt) e^{-in\omega t} dt = \frac{i}{\pi n} [(-1)^n - 1], \quad n \neq 0; \quad f_0 = 0,$$

найдем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n|^2}{n^2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Следовательно,

$$U = \frac{m}{96} \left(\frac{\omega_0 L}{a} \right)^2 (x^2 + y^2). \quad (4)$$

Теперь из (3)–(4) получим уравнения:

$$\ddot{x} + \Omega_1^2 x = 0; \quad \ddot{y} + \Omega_1^2 y = 0; \quad \Omega_1 = \frac{\omega_0 L}{2a\sqrt{12}}.$$

Их решение

$$x = A \cos(\Omega_1 t + \alpha); \quad y = B \cos(\Omega_1 t + \beta).$$

Итак, рассмотренная система линз обеспечивает фокусировку зарядов, влетающих под малым углом к оси этой системы.

Сравним величины магнитного и электрического полей (см. предыдущую задачу), необходимые для одинакового воздействия на заряд. Приравняв частоты, найдем

$$\frac{eHL}{mca} \sim \frac{eUL}{mR^2v}.$$

Отсюда, полагая $L \sim a \sim R$; $Ua = E$, найдем, что $\frac{H}{E} \left(\frac{v}{c} \right) \sim 1$. При $(v/c) \approx 0,1$; $H = 10^4$ Гс требуется $E = 10^3$ СГСЕ $\approx 3 \cdot 10^5$ В/см. Такие поля создать труднее, чем соответствующие магнитные. Следовательно, магнитная фокусировка практически более удобна.

7.28. Уравнения движения заряда в магнитном и кулоновом полях можно представить в форме ($\xi = x + iy$; $e = -e_0$)

$$\ddot{\xi} = i\omega\dot{\xi} - \frac{e_0Q\xi}{m[|\xi|^2 + z^2]^{3/2}}; \quad (1)$$

$$\ddot{z} = - \frac{e_0Qz}{m[|\xi|^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (2)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде

$$\xi = ae^{i\omega t} + b; \quad \dot{\xi} = i\omega ae^{i\omega t}, \quad (3)$$

где $a = Re^{i\alpha}$, $b = re^{i\beta}$ — медленные функции времени. Переходя к новым переменным a и b , с помощью (3) получим

$$\dot{a} = \frac{ie_0Q}{m\omega} \cdot \frac{(a + be^{-i\omega t})}{[|\xi|^2 + z^2]^{3/2}}; \quad \dot{b} = -\dot{a}e^{i\omega t}; \quad (4)$$

$$\ddot{z} = - \frac{e_0Qz}{m[|\xi|^2 + |z^2|]^{3/2}}; \quad (5)$$

причем

$$|\xi|^2 = |a|^2 + |b|^2 + ab^*e^{i\omega t} + a^*be^{-i\omega t}. \quad (6)$$

Покажем вначале, что $|a|^2$, $|b|^2$ не меняются за время $t \gg 2\pi/\omega$. С этой целью найдем

$$\frac{d}{dt} |a|^2 = - \frac{ie_0Q}{m\omega} \cdot \frac{ab^*e^{i\omega t} - a^*be^{-i\omega t}}{[|\xi|^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{2e_0Q}{m\omega^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{[|\xi|^2 + z^2]^{1/2}}. \quad (7)$$

Усредняя (7) по периоду $2\pi/\omega$, находим $|a|^2 = \text{const}$. Аналогично получим, что $|b|^2 = \text{const}$. Следовательно, радиус окружности R и расстояние r до центра окружности постоянны.

Усредним теперь по периоду $2\pi/\omega$ обе части уравнения (5):

$$\ddot{z} = + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{e_0 Q}{m} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{[|\xi|^2 + z^2]^{1/2}} = - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}; \quad (8)$$

$$U(z) = \frac{e_0 Q}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + \varepsilon \cos x}}; \quad \varepsilon = \frac{2rR}{\rho^2},$$

где $\rho^2 = |a|^2 + |b|^2 + z^2 = R^2 + r^2 + z^2$.

В случае $Rr \ll \rho^2$ из (8) найдем

$$m\ddot{z} = - \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{e_0 Q z}{[R^2 + r^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (9)$$

где

$$U(z) = - \frac{e_0 Q}{[R^2 + r^2 + z^2]^{1/2}}. \quad (10)$$

Потенциал (10) представляет собой одномерный потенциал Кулона, определяющий движение в направлении силовых линий магнитного поля.

Первый интеграл уравнения (9)

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} + U(z) = E_0^{(z)}$$

позволяет выяснить особенности движения вдоль оси z . Для притяжения ($e_0 Q > 0$) движение финитно при условии $E_0^{(z)} < 0$. При $E_0^{(z)} > 0$ движение инфинитно. В случае отталкивания ($e_0 Q < 0$) всегда $E_0^{(z)} > 0$ и движение инфинитно. При этом если

$$E_0^{(z)} < \frac{|e_0 Q|}{[R^2 + r^2]^{1/2}}; \quad z(0) = -\infty; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0,$$

то происходит отражение заряда в точке с координатой

$$z_1 = - \left[\left(\frac{2e_0 Q}{m\dot{z}_0^2} \right)^2 - R^2 - r^2 \right]^{1/2}.$$

При

$$E_0^{(z)} > \frac{|e_0 Q|}{[R^2 - z^2]^{1/2}}; \quad z(0) = -\infty; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$

отражения не происходит.

В том же приближении $Rr \ll \rho^2$ после усреднения по периоду $2\pi/\omega$ из (4) и (5) находим ($|\xi_0|^2 = |a|^2 + |b|^2$)

$$\dot{a} = \frac{ie_0Q}{m\omega} \frac{a}{[|\xi_0|^2 + z^2]^{3/2}};$$

$$\dot{b} = -\frac{ie_0Q}{m\omega} \frac{b}{[|\xi_0|^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$a = a_0 e^{i\varphi(t)}; \quad a_0 = R e^{i\alpha_0}; \quad b = b_0 e^{-i\varphi(t)}; \quad b_0 = r e^{i\beta_0};$$

$$\varphi(t) = \frac{e_0Q}{m\omega} \int_{-\infty}^t \frac{dt}{[R^2 + r^2 + z^2(t)]^{3/2}}.$$

Закон движения заряда в плоскости Oxy определяется функциями

$$x = r \cos(\varphi - \beta_0) + R \cos(\omega t + \varphi + \alpha_0);$$

$$y = -r \sin(\varphi - \beta_0) + R \sin(\omega t + \varphi + \alpha_0).$$

7.29. Электрическое поле представим в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = f(t) \mathbf{e},$$

где \mathbf{E}_{\parallel} — составляющая, параллельная вектору $\mathbf{H} = \varphi(t) \mathbf{h}$. Решение уравнения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (1)$$

ищем в виде

$$\mathbf{v} = \int e\mathbf{E}_{\parallel} dt + c \frac{[e\mathbf{h}]}{h^2\varphi} f + \mathbf{v}_1. \quad (2)$$

Поскольку $e\mathbf{h} = 0$, то (1) сводится к уравнению

$$\frac{mc}{h^2} [e\mathbf{h}] \frac{d}{dt} (f/\varphi) + m\dot{\mathbf{v}}_1 = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_1 \mathbf{h}] \varphi. \quad (3)$$

Теперь сделаем подстановку $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_2$,

$$\mathbf{v}_p = -\frac{mc}{h^2\varphi e} \frac{d}{dt} (f/\varphi) [[e\mathbf{h}] \mathbf{h}] = \frac{mc}{eh^2\varphi} \frac{d}{dt} (f/\varphi) \mathbf{e}.$$

Тогда из (3) получим

$$m\dot{\mathbf{v}}_2 + m\dot{\mathbf{v}}_p = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_2 \mathbf{H}]. \quad (4)$$

Условие медленности изменения полей позволяет пренебречь членом $m\dot{\mathbf{v}}_p$. Таким образом, оставшиеся члены соответствуют движению частицы в магнитном поле. Итак, скорость ведущего центра

$$\mathbf{v}_c = \int e\mathbf{E}_{\parallel} dt + c \frac{[\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{H}]}{H^2} + \frac{mc}{eH} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{E}_{\perp}}{H} \right).$$

7.30. Уравнение движения электрона имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e_0\nabla\Phi - \frac{e_0}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (1)$$

где

$$\Phi = \frac{U}{d}x + \Phi_0.$$

Предположим, что высокочастотное поле отсутствует. Тогда, используя интеграл энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{e_0U}{d}x = 0 \quad (2)$$

и один из интегралов уравнений движения

$$\dot{y} = \omega_0 x \quad \left(\omega_0 = \frac{e_0 H}{mc} \right), \quad (3)$$

получим

$$x^2 = \pm \omega_0^2 x^2 + \frac{2e_0U}{md}x. \quad (4)$$

Отсюда видно, что x обращается в нуль при $x_1 = 2e_0U/md\omega_0^2$. Следовательно, при $x_1 < d$, т. е.

$$\sqrt{\frac{2e_0U}{m\omega_0^2}} < d,$$

магнетрон заперт — ток отсутствует.

Теперь рассмотрим «дрейфовое» приближение. Движение электрона в рассматриваемых полях можно представить как движение по окружности, центр которой, в свою очередь, перемещается. В связи с этим решение (1) будем искать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}, \quad (5)$$

где \mathbf{r}_0 — медленная функция времени, определяющая положение центра окружности, а \mathbf{R} — осциллирующая с частотой ω_0 функция. Предположим, что высокочастотное неоднородное поле удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right| \ll |\Phi|; \quad \left| R \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right| \ll |\Phi|.$$

Тогда (1) можно записать в виде

$$m(\ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\mathbf{R}}) \approx e_0\nabla\Phi(\mathbf{r}_0) - \frac{e_0}{c}[\dot{\mathbf{r}}_0\mathbf{H}] - \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{R}}\mathbf{H}].$$

Поскольку за период $2\pi/\omega_0$ величины \mathbf{r}_0 , $\dot{\mathbf{r}}_0$ существенно не изменяются, то при усреднении их можно считать постоянными. Поэтому после усреднения по периоду $2\pi/\omega_0$ найдем уравнение, описывающее поведение центра окружности:

$$0 = e_0 \nabla \Phi(\mathbf{r}_0) - \frac{e_0}{c} [\dot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{H}] \quad (6)$$

(здесь также учтено, что $|m\ddot{\mathbf{r}}_0| \ll \frac{e_0}{c} |[\dot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{H}]|$). Умножая (6) векторно на \mathbf{H} , получим

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \frac{c}{H^2} [\mathbf{H} \nabla \Phi(\mathbf{r}_0, t)]; \quad \dot{x}_0 = -\frac{c}{H} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}; \quad \dot{y}_0 = \frac{c}{H} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}; \quad (7)$$

$$\Phi(x_0, t) = \frac{U}{d} x_0 + \frac{a}{k_y} \sin(\omega t - k_y y_0) \operatorname{sh} k_y x_0.$$

Эти уравнения определяют поведение «ведущего» центра.

Далее удобно перейти к новой переменной $y' = y_0 - ut$; $u = \frac{\omega}{k_y}$. Тогда из (7) получим (индекс «0» у x_0 и y_0 далее опускаем)

$$\dot{x}' = -\frac{c}{H} \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial y'}; \quad (8)$$

$$\dot{y}' = \frac{c}{H} \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial x'}, \quad (9)$$

где $\Phi' = (v_0 - u) \frac{H}{c} x' - \frac{a}{k_y} \sin(k_y y') \operatorname{sh} k_y x'$; $v_0 = \frac{cU}{Hd}$ — скорость

дрейфа в направлении оси y в отсутствие переменного поля. Фактически замена переменных $y \rightarrow y'$ соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся вместе с волной. Поскольку скорость (\dot{x}', \dot{y}') перпендикулярна $\nabla \Phi'$, то траектории ведущих центров совпадают с эквипотенциалами $\Phi' = \text{const}$. При точном синхронизме волны и электронов ($u = v_0$) траектории ведущих центров определяются уравнением

$$C = \frac{a}{k_y} \sin k_y y' \operatorname{sh} k_y x'; \quad C = 0, \quad (10)$$

т. е. эквипотенциалами являются катод $x=0$, прямые $k_y y' = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ и т. д. Из (10) и (8) видно, что при $-\pi/2 < k_y y' < \pi/2$ движение происходит от катода к аноду. Электроны образуют «язычок», движущийся к аноду. Электроны попадают на анод, когда ведущий центр приближается к нему на расстояние $\leq R_1 \equiv v_0/\omega_0$. Наи-

меньшее время t_1 движения до анода соответствует ведущим центрам, движущимся при $k_y y' = 0$. Из (8) имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ca}{H} \operatorname{sh} k_y x$$

и, следовательно,

$$t_1 = \int_{R_1}^{d-R_1} \frac{dx}{\operatorname{sh} k_y x} \cdot \frac{H}{cE} = \frac{H}{ck_y a} \ln \frac{\operatorname{th} \frac{d-R_1}{2} k_y}{\operatorname{th} \frac{k_y R_1}{2}}.$$

Итак, при точном синхронизме ($u = v_0$) бегущая волна сколь угодно малой интенсивности отпирает магнетрон — появляется анодный ток.

7.31. Скорость заряда удобно разложить по ортам τ , \mathbf{n} , \mathbf{e} : τ — орт, направленный по касательной к силовой линии магнитного поля; орт \mathbf{n} направлен по главной нормали к силовой линии;

$$\mathbf{n}/\rho = - \frac{\partial \tau}{\partial s} = - (\tau \nabla) \tau$$

(здесь ρ — радиус кривизны; s — расстояние, отсчитываемое вдоль силовой линии), а $\mathbf{e} = [\tau \mathbf{n}]$.

Будем искать решение уравнения движения

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{H}] \quad (1)$$

в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}$, где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор ведущего центра, а \mathbf{R} описывает вращение вокруг силовой линии ($\mathbf{R} \tau = 0$). Скорость ведущего центра представим в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_{0\perp} + \dot{s} \tau. \quad (2)$$

Далее будем предполагать, что

$$\left| R \frac{d\mathbf{H}}{dr} \right| \ll |\mathbf{H}|; \quad |\mathbf{v}_{0\perp}| \ll \dot{s} \ll |\dot{\mathbf{R}}|.$$

В этом случае $\mathbf{R}(t)$ является быстро осциллирующей функцией, а $\mathbf{v}_{0\perp}$, \dot{s} — медленно меняющимися (в масштабе $T = 2\pi/\omega_0$; $\omega_0 = \frac{eH(r_0)}{mc}$) функциями времени. Используя квазиоднородный ха-

раक्टर магнитного поля, из (1) и (2) найдем

$$m \left(\dot{\mathbf{v}}_{0\perp} + \ddot{\mathbf{s}}\boldsymbol{\tau} - \frac{\dot{s}^2 \mathbf{n}}{\rho} + \ddot{\mathbf{R}} \right) = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{0\perp} + \dot{\mathbf{s}}\boldsymbol{\tau} + \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{H}]. \quad (3)$$

После усреднения по времени из (3) получим

$$m \left(\dot{\mathbf{v}}_{0\perp} + \ddot{\mathbf{s}}\boldsymbol{\tau} - \frac{\dot{s}^2 \mathbf{n}}{\rho} \right) = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{0\perp} \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)] + \frac{e}{c} \langle [\dot{\mathbf{R}}, (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{H}] \rangle. \quad (4)$$

Почленно вычитая (4) из (3), найдем уравнение

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{R}}\mathbf{H}] + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{s}}\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{H}]. \quad (5)$$

Поскольку второй член в (5) существенно меньше первого, то

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &\approx \frac{e}{mc} [\mathbf{R}\mathbf{H}] \quad \text{или} \quad \mathbf{R} = \frac{mc}{eH} [\boldsymbol{\tau}\dot{\mathbf{R}}]; \\ \dot{\mathbf{R}} &= v_{\perp} \cos \omega t \cdot \mathbf{n} + v_{\perp} \sin \omega t \cdot \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычислим теперь среднее значение первого члена правой части (4). Учитывая (6), получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{R}} (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{H}] \right\rangle &= \frac{m}{H} \langle [\dot{\mathbf{R}} ([\boldsymbol{\tau}\dot{\mathbf{R}}]\nabla)\mathbf{H}] \rangle = \\ &= \frac{m}{H} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{mns} \tau_n \nabla_m H_l \langle \dot{R}_k \dot{R}_s \rangle = \\ &= - \frac{mv_{\perp}^2}{2H} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{mnk} \tau_n \nabla_m H_l = \frac{mv_{\perp}^2}{2H} \nabla H. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{mnk} &= \delta_{im} \delta_{ln} - \delta_{in} \delta_{lm}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \\ \langle \dot{R}_i \dot{R}_k \rangle &= \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (4) приобретает вид

$$m \left(\dot{\mathbf{v}}_{0\perp} + \ddot{\mathbf{s}}\boldsymbol{\tau} - \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{n} \right) = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{0\perp} \mathbf{H}] - \frac{mv_{\perp}^2}{2H} \nabla H. \quad (7)$$

В «дрейфовом» приближении ($\dot{\mathbf{v}}_{0\perp} = 0$, $\ddot{\mathbf{s}} = 0$) из (7) следует выражение для скорости ведущего центра

$$\mathbf{v}_{0\perp} = \frac{cms^2}{eH\rho} \mathbf{e} + \frac{cmv_{\perp}^2}{2eH^2} [\boldsymbol{\tau}\nabla H].$$

Найдем теперь адиабатические инварианты задачи. Умножая скалярно обе части уравнения (5) на \mathbf{R} , после усреднения получим

$$\frac{d}{dt} T_{\perp} = \frac{e}{c} s \langle [\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{H}]\mathbf{R} \rangle; \quad T_{\perp} = \frac{m}{2} v_{\perp}^2.$$

Затем, учитывая (6), находим

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\perp}}{dt} &= \frac{ms}{H} \langle [\boldsymbol{\tau}, ([\boldsymbol{\tau}\mathbf{R}]\nabla)H]\dot{\mathbf{R}} \rangle = \frac{ms}{H} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{mns} \tau_k \tau_n \nabla_m H_l \langle \dot{R}_s R_l \rangle = \\ &= \frac{ms v_{\perp}^2}{2H} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lmn} \tau_k \tau_n \nabla_m H_l = \frac{T_{\perp}}{H} \dot{s} (\boldsymbol{\tau}\nabla)H = \frac{T_{\perp}}{H} \dot{s} \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{T_{\perp}}{H} \cdot \frac{dH}{dt}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) получаем инвариант

$$\frac{T_{\perp}}{H} = C. \quad (9)$$

Теперь из (7) в проекции на орт $\boldsymbol{\tau}$ найдем

$$m\ddot{s} = -\frac{T_{\perp}}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial s}. \quad (10)$$

Умножая обе части (10) на s и учитывая (9), получим

$$\frac{d}{dt} \frac{ms^2}{2} = -C \frac{dH}{dt}.$$

Следовательно, сохраняется величина

$$\frac{ms^2}{2} + CH = C_1 \quad (11)$$

(см также задачу 7.12)

§ 1. Тензор инерции

8.1 Направим ось x с началом в вершине сектора по оси его симметрии. Тогда $J_m = 0$, а

$$x_m = \frac{\int x ds}{s} = \frac{2}{\alpha R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{4R}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

8.2 Поскольку в выражения компонент J_{ik} элементы масс входят линейно, для сложного тела, состоящего из частей A, B, \dots , получим

$$J_{ik} = J_{ik}(A) + J_{ik}(B) + \dots,$$

где

$$J_{ik}(A) = m_A \frac{\int_A \rho(r) (r^2 \delta_{ik} - r_i r_k) dV}{\int_A \rho(r) dV}.$$

8.3. а) $J = \frac{1}{3} Ma^2;$

б) $J = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$

8.4. а) $J_1 = \frac{1}{3} Ma^2; \quad J_2 = \frac{1}{3} Mb^2; \quad J_3 = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2);$

б) $J_1 = \frac{1}{4} Mb^2; \quad J_2 = \frac{1}{4} Ma^2; \quad J_3 = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2).$

8.5. В системе координат с осями Ox и Oy , направленными вдоль осей симметрии пластинки, все недиагональные компоненты тензора инерции обращаются в нуль. Главные моменты инерции вычислим по формулам

$$J_x = \sigma \iint y^2 dx dy; \quad J_y = \sigma \iint x^2 dx dy; \quad J_z = J_x + J_y,$$

где σ — поверхностная плотность массы, а интегралы берутся по площади, ограниченной лемниской.

Например,

$$J_y = 2\sigma \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\theta} \int_0^3 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta = \sigma a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cos^2 2\theta d\theta.$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \cos^2 2\theta &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta) (1 + \cos 4\theta) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 4\theta + \frac{1}{8} \cos 6\theta, \end{aligned}$$

то интеграл оказывается равным

$$J_y = \frac{\sigma a^4}{48} (3\pi + 8).$$

Для компонент J_x , J_z аналогично найдем

$$J_x = \frac{\sigma a^4}{48} (3\pi - 8), \quad J_z = \frac{\sigma \pi a^4}{8}.$$

Площадь, ограниченная лемниской, равна

$$s = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a \sqrt{\cos 2\theta} \int_0^3 \rho d\rho d\theta = a^2.$$

Следовательно, $M = \sigma a^2$ и поэтому

$$J_x = \frac{Ma^2}{48} (3\pi - 8), \quad J_y = \frac{Ma^2}{48} (3\pi + 8), \quad J_z = \frac{M\pi a^2}{8}.$$

8.6. Главные центральные моменты инерции пластинки соответственно равны (см. задачу 8.4)

$$J_x = \frac{1}{4} Ma^2, \quad J_y = \frac{1}{4} Mb^2, \quad J_z = J_x + J_y.$$

Рассмотрим новую ось Ox' с началом в центре эллипса — эта ось составляет угол θ с главной центральной осью Ox . Согласно закону преобразования цензоров при поворотах

$$J_{x'} = J_x \sin^2 \theta + J_y \cos^2 \theta = \frac{1}{4} M (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta).$$

Полагая в уравнении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ что } x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \text{ получим}$$

$$b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = \frac{a^2 b^2}{r^2}.$$

Следовательно,

$$J_{x'} = \frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}.$$

8.7. Подсчитаем вначале осевой момент $J_{z'z'}$ тонкослойной сферы массы $2m$ в системе координат $o'x'y'z'$ с началом в центре сферы

$$\begin{aligned} J_{z'z'} &= \frac{2m}{4\pi a^2} \int (x^2 + y^2) ds = \frac{m}{2\pi a^2} \int a^2 \sin^2 \theta ds = \\ &= \frac{ma^2}{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4ma^2}{3}. \end{aligned}$$

Согласно задаче 8.2 этот момент инерции равен соответствующему удвоенному моменту для полусферы массы m (моменту инерции для полусферы, вычисленному в системе $O'X'Y'Z'$). Теперь найдем положение центра масс полусферы. Для этого оставим начало O' в той же точке, а ось z направим вдоль оси симметрии полусферы. Тогда ($x = \cos \theta$)

$$z_m = \frac{\int \rho z ds}{\int \rho ds} = \frac{a}{2\pi} \int_0^\pi x dx \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a}{2}.$$

Затем совершим параллельный перенос системы координат с тем, чтобы начало координат совпало с центром масс полусферы. Новые моменты инерции будут равны

$$J_{ik}^m = J'_{ik} - m (\xi^2 \delta_{ik} - \xi_i \xi_k),$$

где ξ — вектор, соединяющий центр масс и начало o' , т. е.

$$\xi = (0, 0, -z_m).$$

Таким образом

$$J_1^m = J_2^m = \frac{2ma^2}{3} - \frac{ma^2}{4} = \frac{5}{12} ma^2,$$

$$J_3^m = \frac{2ma^2}{3}; \quad J_{12}^m = J_{13}^m = J_{23}^m = 0.$$

8.8. Поместим начало декартовых координат в центр сферы радиуса a . Ось Ox выберем проходящей через центр масс сферического двуугольника, а ось Oz — через вершины двуугольника (с точки пересечения больших окружностей, ограничивающих двуугольник). Тогда плоскость Oxz будет плоскостью материальной симметрии двуугольника и вследствие этого

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = J_{zy} = 0.$$

Кроме того, плоскостью симметрии является плоскость Oxy . Поэтому $J_{xz} = J_{zx} = 0$.

Для вычисления главных моментов инерции J_x, J_y, J_z используем сферические координаты, связанные с декартовыми формулами:

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta.$$

Элемент площади поверхности сферы в этих координатах равен

$$ds = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Таким образом,

$$J_x = \sigma \iint (y^2 + z^2) ds = \sigma a^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin^2 \varphi d\varphi + \\ + \sigma a^4 \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi = \frac{2}{3} \sigma a^4 (2\alpha - \sin \alpha),$$

$$J_y = \sigma a^4 \int_0^\pi \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta \cos^2 \varphi) d\theta d\varphi = \frac{2}{3} \sigma a^4 (2\alpha + \sin \alpha),$$

$$J_z = \sigma a^4 \iint \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \sigma a^4 \alpha$$

(здесь σ — поверхностная плотность массы). Так как масса сферического двуугольника равна

$$M = a^2 \sigma \int_0^\pi \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin \theta d\varphi d\theta = 2a^2 \sigma \alpha,$$

получим окончательно

$$J_x = Ma^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sin \alpha}{3\alpha} \right),$$

$$J_y = Ma^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{\sin \alpha}{3\alpha} \right),$$

$$J_z = \frac{2}{3} Ma^2.$$

8.9. Поместим начало системы координат в центр масс параллелепипеда, а оси Ox , Oy и Oz направим параллельно его ребрам с длинами $2a$, $2b$ и $2c$ соответственно. Тогда момент инерции

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm.$$

Пусть ρ — плотность массы параллелепипеда. Тогда

$$\begin{aligned} \int y^2 dm &= \rho \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c y^2 dx dy dz = \\ &= \rho \cdot 2a \cdot 2c \cdot \int_{-b}^b y^2 dy = \frac{1}{3} \rho \cdot 2a \cdot 2c \cdot 2b^3 = \frac{1}{3} Mb^3, \\ J_x &= \frac{1}{3} M (b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Продолжая аналогичные вычисления, получим

$$J_y = \frac{1}{3} M (c^2 + a^2),$$

$$J_z = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2).$$

$$8.10. \text{ а) } J_1 = \frac{1}{20} M \left(\frac{3}{4} h^2 + 4b^2 \right); \quad J_2 = \frac{M}{20} \left(\frac{3}{4} h^2 + 4a^2 \right),$$

$$J_3 = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2);$$

$$\text{б) } J_1 - J_2 = \frac{3}{20} M \left(R^2 + \frac{1}{4} h^2 \right); \quad J_3 = \frac{3}{10} MR^2;$$

$$\text{в) } J_1 = \frac{1}{5} M (3Rh - h^2).$$

8.11. Совместим ось z' с осью однородного цилиндра радиуса a и массы $2m$. Тогда момент инерции относительно z' этого цилиндра равен

$$\frac{2m}{\pi a^2} \int (x^2 + y^2) ds = \frac{2m}{\pi a^2} \int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = ma^2.$$

Согласно задаче 8.2 соответствующая компонента для полуцилиндра равна $\frac{ma^2}{2}$, а его центр масс находится на пересечении плоскости симметрии полуцилиндра на расстоянии x'_m от оси z'

$$x'_m = \frac{\int \sigma x' ds}{\int \sigma ds} = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4a}{3\pi}.$$

Следовательно, искомая осевая компонента

$$J_z^m = J'_z - m (x'_m)^2 = \frac{ma^2}{2} \left(1 - \frac{32}{9\pi^2} \right).$$

8.12. Центральные осевые моменты инерции однородного шара равны $\frac{2}{5} ma^2$, а центр масс полушара расположен на оси его материальной симметрии на расстоянии z_m от плоской поверхности полушара:

$$z_m = \frac{\int \rho z dv}{\int \rho dv} = \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{8} a.$$

Следовательно, главные центральные моменты инерции полушара равны

$$J_x^m = J_y^m = \frac{7}{32} ma^2 \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64} \right) = \frac{83}{320} ma^2;$$

$$J_z^m = \frac{2}{5} ma^2.$$

8.13. Поместим начало координат в центр масс цилиндра, а ось Oz совместим с осью симметрии цилиндра. Тогда при любом выборе направлений ортогональных осей Ox и Oy :

$$J_x = J_y = \frac{M}{4} \left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3} \right),$$

$$J_z = \frac{M}{2} (R^2 + r^2).$$

Отсюда при $r=0$ получим также моменты инерции сплошного цилиндра

$$J_x = J_y = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad J_z = \frac{M}{2} R^2.$$

8 14.

$$J_x = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2),$$

$$J_y = \frac{1}{5} M (c^2 + a^2),$$

$$J_z = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

В частности, при $a=b=c=R$ находим главные центральные моменты инерции шара радиуса R :

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} MR^2.$$

8.15. Выберем начало координат в центре масс цилиндра, а оси Ox и Oy направим соответственно вдоль малой и большой полуосей эллиптического основания. Тогда все три координатные плоскости будут плоскостями симметрии эллиптического цилиндра, а координатные оси — главными осями.

Момент инерции относительно оси Oz , совпадающей с осью цилиндра,

$$J_z = \sigma \int (x^2 + y^2) dV$$

(σ — плотность массы цилиндра). Его удобно вычислить, вводя новые переменные ρ , φ , z с помощью соотношений:

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} J_z &= \sigma a^3 b \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \rho^3 \cos^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi \, dz + \\ &+ \sigma b^3 a \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi \, dz = 2\pi \sigma abh \cdot \frac{1}{4} (a^2 + b^2) = \\ &= \frac{M}{4} (a^2 + b^2), \end{aligned}$$

$$M = \rho 2\pi abh.$$

Момент инерции относительно оси Ox

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma \int (y^2 + z^2) dv = \\ &= b^3 a \sigma \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi \, dz + ab \sigma \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h z^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \\ &= 2\pi abh \sigma \left(\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) = M \left(\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Заменив в этом выражении b на a , найдем

$$J_y = M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right).$$

8.16. Пусть $O'x'y'z'$ — система координат с центром в вершине параболоида и осями, параллельными осям Ox , Oy , Oz соответственно. Вследствие симметрии рассматриваемой фигуры оси $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ будут главными осями инерции. В этой системе используем цилиндрические координаты и получим

$$\begin{aligned} J'_x = J'_y &= \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{a\sqrt{z'/h}} (\rho^2 \cos^2 \varphi + z'^2) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz' = \\ &= \frac{\sigma \pi a^2}{h} \left(\frac{a^2 h^2}{12} + \frac{h^4}{4} \right) \end{aligned}$$

(здесь σ — плотность массы).

Вычислим, далее, массу параболоида

$$M = \sigma \int_0^h \int_0^{a\sqrt{z'/h}} \int_0^{2\pi} \rho \, d\rho \, dz' \, d\varphi = \frac{\pi \sigma h a^2}{2}.$$

Следовательно,

$$J'_x = J'_y = M \left(\frac{a^2}{6} + \frac{h^2}{2} \right).$$

Аналогично найдем

$$J'_z = \frac{1}{3} M a^2.$$

Координата центра масс

$$z'_m = \frac{\pi \sigma}{M} \int_0^h \frac{a^2}{h} z^2 \, dz = \frac{2}{3} h.$$

Следовательно, главные центральные моменты инерции параболоида соответственно равны

$$J_x^m = J_y^m = J_x' - M \cdot \frac{4}{9} h^2 = M \left(\frac{a^2}{6} + \frac{1}{18} h^2 \right),$$

$$J_z^m = J_z' = \frac{1}{3} Ma^2.$$

Теперь получим моменты инерции относительно требуемой в условии задачи системы координат. В этой системе координаты центра масс таковы:

$$x_m = 0, \quad y_m = a, \quad z_m = -\frac{1}{3}h.$$

Поэтому при параллельном переносе системы координат с началом в центре масс в положение с началом в точке 0 компоненты тензора инерции примут вид:

$$J_{xx} = \frac{M}{6} (7a^2 + h^2), \quad J_{yy} = \frac{M}{6} (a^2 + h^2),$$

$$J_{zz} = \frac{4}{3} Ma^2, \quad J_{yz} = \frac{M}{3} ah, \quad J_{xz} = J_{xy} = 0.$$

8.17. Поместим начало координат в центр масс тора, а ось Oz направим по оси его симметрии. В этой системе координат

$$J_x = J_y = \int (y^2 + z^2) dm,$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Для расчета интегралов введем тороидальные координаты ρ , θ , λ согласно формулам

$$x = (R + \rho \cos \lambda) \cos \theta,$$

$$y = (R + \rho \cos \lambda) \sin \theta,$$

$$z = \rho \sin \lambda.$$

Элемент объема тора получим, вычислив детерминант

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \lambda)} = \begin{vmatrix} \cos \lambda \cos \theta & -(R + \rho \cos \lambda) \sin \theta & -\rho \cos \theta \sin \lambda \\ \cos \lambda \sin \theta & (R + \rho \cos \lambda) \cos \theta & -\rho \sin \theta \sin \lambda \\ \sin \lambda & 0 & \rho \cos \lambda \end{vmatrix},$$

который оказывается равным

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \lambda)} = \rho (R + \rho \cos \lambda).$$

Таким образом,

$$J_x = J_y = \sigma \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [(R + \rho \cos \lambda)^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \lambda] \times \\ \times (\rho \cos \lambda + R) \rho \, d\rho \, d\theta \, d\lambda = \sigma \pi^2 R r^2 \left(R^2 + \frac{5}{4} r^2 \right)$$

(здесь σ — плотность массы тора). Аналогично

$$J_z = \sigma \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + \rho \cos \lambda)^3 \rho \, d\rho \, d\lambda \, d\theta = \sigma \cdot 2\pi^2 R r^2 \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right).$$

Теперь получим связь плотности σ и массы тора M :

$$M = \sigma \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\rho \cos \lambda + R) \rho \, d\rho \, d\lambda \, d\theta = 2\pi^2 \sigma R r^2.$$

Поэтому окончательно

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} M \left(R^2 + \frac{5}{4} r^2 \right), \\ J_z = M \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right).$$

8.18. Момент инерции полусферы относительно оси ее симметрии равен $2Ma^2/5$, а центр масс полусферы находится на расстоянии $3a/8$ от ее основания. Рассмотрим компоненты тензора инерции относительно системы координат с началом в центре масс и осями, параллельными осям Ox , Oy , Oz . Поскольку ось, проходящая через центр масс и центр основания, является осью симметрии и, следовательно, главной осью инерции, то и любые две перпендикулярные ей ортогональные оси, проходящие через центр масс, также являются главными осями. Поэтому в указанной системе отличны от нуля только «диагональные» компоненты

$$Ma^2 \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64} \right), \quad Ma^2 \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64} \right), \quad \frac{2}{5} Ma^2.$$

Теперь осуществим параллельный перенос системы координат с началом в центре масс до совмещения ее с заданной в условии задачи системой координат. Полагая в формуле преобразования

$$J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^m + M(c^2 \delta_{\alpha\beta} - c_\alpha c_\beta), \\ c_x = a, \quad c_y = 0, \quad c_z = 3a/8,$$

получим

$$J_{xx} = \frac{2}{5} Ma^2, \quad J_{yy} = \frac{7}{5} Ma^2, \quad J_{zz} = \frac{7}{5} Ma^2, \\ J_{xy} = J_{yz} = 0, \quad J_{xz} = -3Ma^2/8.$$

Заметим, что плоскость xOz является плоскостью симметрии полусферы. Поэтому ось Oy является главной осью инерции. Две других главных оси инерции найдем с помощью поворота осей координат вокруг оси Oy на угол α с тем, чтобы в новой системе координат компонента J'_{xz} обратилась в нуль. Подставляя в закон преобразования тензора инерции при поворотах

$$J'_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 a_{\alpha\sigma} a_{\beta\gamma} J_{\sigma\gamma}$$

элементы матрицы поворота

$$a_{\alpha\sigma} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix},$$

получим

$$J'_{xz} = \frac{1}{2} (J_{zz} - J_{xx}) \sin 2\alpha + J_{xz} \cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{3}{4}.$$

Далее найдем главные моменты инерции (для точки O):

$$J'_{xx} = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{zz} \sin^2 \alpha + 2J_{xz} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{11}{40} Ma^2,$$

$$J'_{yy} = J_{yy} = \frac{7}{5} Ma^2,$$

$$J'_{zz} = J_{xx} \sin^2 \alpha + J_{zz} \cos^2 \alpha - J_{xz} \sin 2\alpha = \frac{61}{40} Ma^2.$$

§ 2. Плоскопараллельное движение

8.19. Выберем в качестве обобщенной координаты x_m — координату центра масс диска, отсчитываемую вдоль наклонной плоскости (см. рис. 8.19). Тогда

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}_m^2 + \frac{1}{2} J_{z'z'}^{(m)} \dot{\theta}^2,$$

где θ — угол поворота диска.

Условие качения без скольжения приводит к связи

$$\dot{x}_m = a\dot{\theta}.$$

Таким образом, получим лагранжиан диска

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} m \dot{x}_m^2 + mg \sin \alpha \cdot x_m$$

и уравнение Лагранжа

$$\ddot{x}_m = \frac{2g}{3} \sin \alpha, \quad (1)$$

которое определяет закон движения центра диска.

Чтобы определить реакцию плоскости, используем уравнения Лагранжа с реакцией связи

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_m &= mg \sin \alpha + R_{\parallel}, \\ m\ddot{y}_m &= -mg \cos \alpha + R_{\perp}. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что $y_m = 0$, и закон (1) из (2), найдем

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= -\frac{mg}{3} \sin \alpha, \quad R_{\perp} = mg \cos \alpha, \\ R &= \frac{mg}{3} (1 + 8 \cos^2 \alpha)^{1/2}. \end{aligned}$$

8.20 Пусть обобщенной координатой является θ — угол, образуемый стержнем с осью x . Пусть также \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2) — радиус-вектор левого (правого) конца стержня, а \mathbf{r}_m — радиус-вектор его центра масс. Тогда

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= x_m \mp \frac{l}{2} \cos \theta, \\ y_{1,2} &= y_m \mp \frac{l}{2} \sin \theta, \end{aligned}$$

Поскольку $y = kx^2$, из уравнений

$$y_m \mp \frac{l}{2} \sin \theta = k \left(x_m \mp \frac{l}{2} \cos \theta \right)^2$$

находим

$$x_m = \frac{1}{2k} \operatorname{tg} \theta, \quad y_m = \frac{k}{4} \left(l^2 \cos^2 \theta + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{k^2} \right).$$

Затем получим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \frac{k^2}{4} \left[\frac{\dot{\theta}}{k^2 \cos^2 \theta} - l^2 \cos \theta \sin \theta \right]^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\theta}}{2k \cos^2 \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\theta}^2 - U(\theta)$$

где

$$U(\theta) = \frac{mgk}{4} \left(l^2 \cos^2 \theta + \frac{\text{tg}^2 \theta}{k^2} \right).$$

Положения равновесия

$$\theta_{1eq} = 0 \quad (kl < 1), \quad \cos \theta_{2eq} = \frac{1}{\sqrt{kl}} \quad (kl > 1)$$

найдем из условия $U'(\theta) = 0$. Наконец, вычисляя $U''(\theta)$, получим

$$\omega^2(\theta_{1eq}) = 6gk \frac{1 - k^2 l^2}{3 + k^2 l^2} \quad (kl < 1),$$

$$\omega^2(\theta_{2eq}) = \frac{6g}{l} (kl - 1) \quad (kl > 1).$$

8.21. Качение полуцилиндра по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости можно рассматривать как чистое вращение вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения полуцилиндра с плоскостью. Так как центр масс полого однородного полуцилиндра находится на расстоянии $2a/\pi$ от оси цилиндрической поверхности, то центр масс удален от мгновенной оси вращения на расстояние, равное

$$\left[\left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 + a^2 - 2a \left(\frac{2a}{\pi} \right) \cos \varphi \right]^{1/2},$$

где φ — угол между плоскостью симметрии полуцилиндра и вертикальным направлением вниз. Поэтому функция Лагранжа для полуцилиндра может быть представлена в виде

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 + a^2 - 2a \left(\frac{2a}{\pi} \right) \cos \varphi \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + mg \left(\frac{2a}{\pi} \right) \cos \varphi,$$

где J — момент инерции полуцилиндра относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси цилиндра;

$$J = m \left[a^2 - \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \right].$$

Уравнение Лагранжа в случае линейных колебаний имеет вид

$$\ddot{\varphi} = - \frac{g \varphi}{a(\pi - 2)}.$$

Следовательно, период таких колебаний равен $2\pi \sqrt{a(\pi - 2)/g}$.

8.22. Направим ось Oy декартовой системы координат вниз по вертикальному диаметру цилиндра, а ось Ox по горизонтальной касательной к цилиндру. В качестве обобщенной координаты выберем θ — угол наклона бруска к горизонту. Так как брусок катается по поверхности цилиндра без проскальзывания, то координаты центра масс бруска соответственно равны

$$x_m = (a + b) \sin \theta - a\theta \cos \theta,$$

$$y_m = -a + (a + b) \cos \theta + a\theta \sin \theta.$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\dot{x}_m = (b \cos \theta + a\theta \sin \theta) \dot{\theta},$$

$$\dot{y}_m = -(b \sin \theta - a\theta \cos \theta) \dot{\theta}.$$

Следовательно, кинетическая энергия бруска равна

$$T = \frac{1}{2} M (k^2 + b^2 + a^2 \theta^2) \dot{\theta}^2 \approx \frac{1}{2} M (k^2 + b^2) \dot{\theta}^2.$$

Далее запишем потенциальную энергию $U = Mgy_m$ в виде

$$U = Mg \frac{a-b}{2} \theta^2.$$

Таким образом, получим уравнение Лагранжа для линейных колебаний

$$M(k^2 + b^2) \ddot{\theta} = -Mg(a-b)\theta,$$

откуда следует, что период колебаний

$$\tau = 2\pi \sqrt{(k^2 + b^2)/(a-b)}.$$

8.23. Рассмотрим элементарный цилиндр нити, имеющий высоту dx и находящийся на расстоянии x от верхнего закрепленного сечения упругой нити. Если нижнее основание нити повернуть на угол φ , то элемент dx повернется на угол $\varphi' = \frac{x}{l} \varphi$. Момент инерции элементарного цилиндра нити относительно оси крутильных колебаний равен

$$J' = \frac{dm R^2}{2} = \frac{1}{2} \pi \sigma R^4 dx.$$

Следовательно, кинетическая энергия системы, состоящей из твердого тела и цилиндрической нити, есть

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} \int_0^l \pi \sigma R^4 (\dot{\varphi}')^2 dx = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \\ + \frac{\pi \sigma R^4}{4l^2} \dot{\varphi}^2 \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{2} \left(J + \frac{\pi \sigma R^4 l}{6} \right) \dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия системы совпадает с потенциальной энергией упругой нити

$$U = \frac{1}{2} \kappa \varphi^2,$$

где κ — коэффициент упругости.

Таким образом, получим лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(J + \frac{\pi \sigma R^4 l}{6} \right) \dot{\varphi}^2 - \frac{\kappa \varphi^2}{2}$$

и уравнение Лагранжа

$$\left(J + \frac{\pi \sigma R^4 l}{6} \right) \ddot{\varphi} + \kappa \varphi = 0,$$

откуда следует, что период крутильных колебаний твердого тела с учетом вращения частиц упругой нити равен

$$2\pi \sqrt{\left(\frac{J}{\kappa} + \frac{\pi \sigma R^4 l}{6\kappa} \right)}.$$

Отсюда для тонких нитей с большой степенью точности находим $\tau = 2\pi \sqrt{J/\kappa}$.

8.24. Обозначим через θ угол отклонения маятника от вертикали в произвольный момент времени, а через x — отклонение центра масс цилиндра от положения покоя. Тогда лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + mgl \cos \theta.$$

Координата x является циклической. Поэтому обобщенный импульс

$$p_x = 2M\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)$$

сохраняется. Так как при $x=0$ и $\theta=\alpha$ система находилась в покое, то $p_x=0$. Проинтегрировав по времени равенство

$$2M\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta) = 0, \quad (1)$$

найдем

$$(2M + m)x = ml(\sin \alpha - \sin \theta). \quad (2)$$

Далее используем интеграл энергии с учетом начальных условий

$$M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2lx\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) - mgl \cos \theta = -mgl \cos \alpha. \quad (3)$$

Исключая из (1) и (3) \dot{x} , найдем

$$\frac{2M + m \sin^2 \theta}{2M + m} \dot{\theta}^2 = 2(g/l)(\cos \theta - \cos \alpha).$$

Отсюда видно, что θ изменяется в пределах $\theta = \pm \alpha$. Следовательно, как это следует из (2), величина x изменяется от нуля до

$$x_{\max} = \frac{2ml \sin \alpha}{2M + m}.$$

8.25. Проектируя обе части уравнения движения центра масс обруча на орты цилиндрических координат, находим

$$Ma\dot{\theta}^2 = -R_\rho - Mg \cos \theta, \quad (1)$$

$$Ma\ddot{\theta} = R_\theta - Mg \sin \theta. \quad (2)$$

Далее из интеграла энергии следует

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = Mga(\cos \theta - \cos \alpha), \quad (3)$$

где J — момент инерции обруча относительно оси вращения ($J = 2Ma^2$).

С помощью (3) получим

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2a} \sin \theta. \quad (4)$$

Подставляя найденные функции $\dot{\theta}(\theta)$ и $\ddot{\theta}(\theta)$ в уравнения движения центра масс, находим

$$R_\rho = -Mg(2\cos \theta - \cos \alpha),$$

$$R_\theta = \frac{1}{2}Mg \sin \theta.$$

Квадрат величины реакции подвеса равен

$$R^2 = R_p^2 + R_\theta^2 = \frac{M^2 g^2}{4} (1 + 4 \cos^2 \alpha + 15 \cos^2 \theta - 16 \cos \theta \cos \alpha).$$

Дифференцируя это выражение по θ , получим

$$\frac{dR^2}{d\theta} = \frac{M^2 g^2}{4} \sin \theta (16 \cos \alpha - 30 \cos \theta).$$

Отсюда видно, что R при $\theta=0$ принимает максимальное значение

$$R_{\max} = \frac{Mg}{2} \sqrt{16 + 4 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha}.$$

В этом случае, как нетрудно видеть,

$$\frac{d^2 R^2}{d\theta^2} = \frac{M^2 g^2}{4} [\cos \theta (16 \cos \alpha - 30 \cos \theta) + 30 \sin^2 \theta] < 0.$$

Выражение для $dR^2/d\theta$ обращается в нуль также при

$$\theta = \arccos \left(\frac{8}{15} \cos \alpha \right) = \theta_m,$$

причем

$$\left. \frac{d^2 R^2}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} > 0.$$

Если угол α является острым, то $\theta_m > \alpha$. С другой стороны, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$. Поэтому минимум функции $R(\theta)$ достигается в точке $\theta = \alpha$ при α — остром, а при α — тупом в точке $\theta = \theta_m$. Таким образом, минимальные значения соответственно равны

$$\frac{1}{2} Mg \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha} \quad (\text{при } \alpha \text{ — остром}),$$

$$\frac{1}{2} Mg \sqrt{1 - \frac{4}{15} \cos^2 \alpha} \quad (\text{при } \alpha \text{ — тупом})$$

8 26. Обозначим через θ угол отклонения радиуса-вектора центра масс подвижного цилиндра от вертикали, а через φ угол отклонения от вертикали радиуса подвижного цилиндра, проходящего через фиксированную на поверхности этого цилиндра точку, которая в положении равновесия была его наинизшей точкой. Из условия отсутствия проскальзывания

$$b\theta = a(\varphi + \theta).$$

Рассматривая движение цилиндра в каждый момент времени как его вращение относительно мгновенной оси, совпадающей с

линией соприкосновения цилиндров, кинетическую энергию подвижного цилиндра можно записать в виде

$$\frac{1}{2} J \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} J \frac{\dot{\theta}^2}{a^2} (b-a)^2,$$

где $J = 3ma^2/2$ — момент инерции цилиндра относительно его образующей. Из закона сохранения энергии

$$\frac{3}{4} m (b-a)^2 \dot{\theta}^2 - mg(b-a) \cos \theta = \frac{3}{4} ma^2 \omega^2 - mg(b-a)$$

(здесь ω — начальная угловая скорость цилиндра в положении равновесия) находим

$$\dot{\theta}^2 = \frac{a^2 \omega^2}{(b-a)^2} - \frac{4g}{3(b-a)} (1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Теперь используем одно из уравнений движения центра масс подвижного цилиндра, а именно

$$m\omega_p = mg_p + R_p, \quad (2)$$

где R_p — составляющая реакции неподвижного цилиндра. Подставляя (1) в (2), получим

$$R_p = -m \left[\frac{a^2 \omega^2}{b-a} - \frac{g}{3} (4 - 7 \cos \theta) \right].$$

Движущийся цилиндр не будет отрываться от поверхности неподвижного цилиндра, если $\dot{\theta}^2 \geq 0$ и $R_p > 0$ одновременно для $0 \leq \theta \leq \pi$. Но

$$\dot{\theta}^2 \geq 0, \text{ если } 3a^2 \omega^2 \geq 8g(b-a),$$

$$R_p > 0, \text{ если } 3a^2 \omega^2 > 11g(b-a).$$

Следовательно, начальная угловая скорость подвижного цилиндра должна удовлетворять условию

$$3a^2 \omega^2 > 11g(b-a).$$

8.27. Пусть масса первого тела M , второго m , расстояние между осями вращения a , расстояние от неподвижной оси до центра масс первого тела h , расстояние от подвижной оси вращения до центра масс второго тела b , моменты инерции первого и второго тела относительно осей, проходящих через их центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны Mk_1^2 , mk_2^2 соответственно.

В плоскости движения твердых тел введем декартовы координаты с началом в неподвижной точке подвеса первого тела и

осью Ox , направленной по вертикали вниз. Координаты и компоненты скоростей центров масс обоих тел соответственно равны

$$x_1 = h \cos \theta, \quad y_1 = h \sin \theta;$$

$$x_2 = a \cos \theta + b \cos \varphi; \quad y_2 = a \sin \theta + b \sin \varphi,$$

$$\dot{x}_1 = -h \sin \theta \dot{\theta}; \quad \dot{y}_1 = h \cos \theta \dot{\theta},$$

$$\dot{x}_2 = -(a \sin \theta \dot{\theta} + b \sin \varphi \dot{\varphi}); \quad \dot{y}_2 = a \cos \theta \dot{\theta} + b \cos \varphi \dot{\varphi},$$

здесь θ — угол отклонения от вертикали радиуса-вектора центра масс первого тела, а φ — аналогичный угол для второго тела.

Затем получим кинетические энергии твердых тел

$$T_1 = \frac{1}{2} M (h^2 + k_1^2) \dot{\theta}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m [a^2 \dot{\theta}^2 + b^2 \dot{\varphi}^2 + 2ab \cos(\theta + \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi}] + \frac{1}{2} k_2^2 m \dot{\varphi}^2$$

и потенциальную энергию системы

$$U = -Mgx_1 - Mgy_2 + C.$$

Таким образом, найдем лагранжиан в приближении линейных колебаний

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(Mh^2 + Mk_1^2 + ma^2) \dot{\theta}^2 + m(b^2 + k_2^2) \dot{\varphi}^2 + 2abm \dot{\theta} \dot{\varphi}] - \\ & - \frac{1}{2} [(Mgh + mga) \theta^2 + mgb \varphi^2] \end{aligned}$$

и уравнения Лагранжа

$$(Mh + ma) (l_1 \ddot{\theta} + g \theta) - tab \ddot{\varphi} = 0, \quad (1)$$

$$a \ddot{\theta} + l_2 \ddot{\varphi} + g \varphi = 0,$$

где введены обозначения

$$l_1 = \frac{Mh^2 + mk_1^2 + ma^2}{Mh + ma}; \quad l_2 = \frac{k_2^2 + b^2}{b}.$$

Отыскивая решение системы (1) в виде

$$\theta = A \cos(\omega t + \alpha), \quad \varphi = B \cos(\omega t + \alpha),$$

получим уравнения для амплитуд A и B

$$(Mh + ma) (l_1 \omega^2 - g) A + maB \omega^2 B = 0, \quad (2)$$

$$a \omega^2 A + (l_2 \omega^2 - g) B = 0.$$

Характеристическое уравнение системы (2)

$$(Mh + ma)(l_1 \omega^3 - g)(l_2 \omega^3 - g) - ma^2 b \omega^4 = 0$$

определяет две собственные частоты ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g(l_1 + l_2) \pm g \left[(l_1 + l_2)^2 - 4 \left(l_1 l_2 - \frac{ma^2 b}{Mh + ma} \right) \right]^{1/2}}{2 \left(l_1 l_2 - \frac{ma^2 b}{Mh + ma} \right)}$$

Далее, найдем амплитуды, принадлежащие соответствующим корням:

$$B_1 = \frac{a \omega_1^2}{g - l_2 \omega_1^2} A_1, \quad B_2 = \frac{a \omega_2^2}{g - l_2 \omega_2^2} A_2,$$

и общее решение

$$\begin{aligned} \theta &= A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi &= \frac{a \omega_1^2 A_1}{g - l_2 \omega_1^2} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{a \omega_2^2 A_2}{g - l_2 \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ — произвольные постоянные, а ω_1^2 и ω_2^2 — корни биквадратного характеристического уравнения.

При каких значениях параметров приведенные результаты дают решение задачи о плоских линейных колебаниях а) твердого тела, подвешенного на стержне исчезающей массы; б) твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения, и прикрепленного к этому телу математического маятника?

8.28. Напишем закон сохранения энергии стержня в виде

$$\frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2 = mga (\cos \alpha - \cos \theta).$$

Отсюда следует, что

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4a} \sin \theta.$$

Центр масс стержня перемещается в горизонтальном направлении согласно уравнению

$$ma(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = R,$$

где R — нормальная реакция вертикальной стенки на верхний конец стержня.

Подставляя сюда $\dot{\theta}^2$ и $\ddot{\theta}$ из предыдущих уравнений, получим

$$R = \frac{3}{4} mg \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \alpha),$$

откуда

$$R = 0 \text{ при } 3 \cos \theta = 2 \cos \alpha.$$

8.29. Предположим, что при переходе с платформы на наклонную плоскость цилиндр не делает скачка, т. е. поворачивается вокруг ребра, образованного двумя поверхностями, на угол α , который равен углу наклона плоскости к горизонтали. Кинетическая энергия цилиндра в начале поворота равна

$$T = \frac{1}{2} J \frac{v_0^2}{a^2},$$

а в конце

$$T = \frac{1}{2} J \frac{v_1^2}{a^2},$$

где a — радиус цилиндра; v_0 — скорость центра масс цилиндра на платформе; v_1 — скорость центра масс цилиндра в начале движения по наклонной плоскости; J — момент инерции цилиндра относительно какой-либо образующей.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{1}{2} J (v_1/a)^2 + Mga \cos \alpha = \frac{1}{2} J (v_0/a)^2 + Mga. \quad (1)$$

В предельном случае, когда цилиндр еще без скачка переходит на наклонную плоскость, нормальная составляющая реакции наклонной плоскости равна нулю. Поэтому

$$\frac{v_1^2}{a} = g \cos \alpha. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $J = 3Ma^2/2$, получим

$$\frac{3}{4} \cos \alpha - (1 - \cos \alpha) = \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{ga}.$$

Отсюда ясно, что скачок цилиндра на наклонную плоскость не происходит, если

$$\cos \alpha \geq \frac{4}{7} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{ga} \right).$$

Это условие может быть выполнено только в том случае, если $(v_0^2/ga) < 1$.
 При $v_0^2/ga = 1$, $\cos \alpha = 1$, $\alpha = 0$.

8.30. Выберем подвижную систему координат S' так, чтобы Oz' была направлена вертикально вверх вдоль оси вращения, а ось Ox' проходила через центр масс пластинки. При таком выборе системы координат центр масс находится в точке

$$r'_m = \left\{ \frac{a}{3}, 0, 0 \right\}.$$

Напишем уравнения движения пластинки относительно S' :

$$\frac{d'p'}{dt} = mg + R_1 + R_2 + J, \quad \frac{d'M'}{dt} = m[r'_m g] + [r'_1 R_1] + [r'_2 R_2] + L_J,$$

где R_1 — реакция верхней опоры; R_2 — реакция нижней опоры; J — сумма сил инерции, а L_J — сумма моментов сил инерции. Имея в виду, что $J = M \omega^2 x'_m p_{x'}$, $L_J = -J_{x'z'} \omega^2 p_{y'}$, получим уравнения движения в проекциях

$$R_{1x'} + R_{2x'} + m \omega^2 \frac{a}{3} = 0,$$

$$R_{1y'} + R_{2y'} = 0, \quad S_{1z'} + R_{2z'} - mg = 0,$$

$$-\frac{a}{3} R_{1y'} + \frac{2a}{3} R_{2y'} = 0,$$

$$mg \frac{a}{3} + \frac{a}{3} R_{1x'} - \frac{2a}{3} R_{2x'} - J_{x'z'} \omega^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $R_{1y'} = R_{2y'} = 0$, а

$$R_{1x'} + R_{2x'} = mg;$$

кроме того, получим

$$R_{1x'} + R_{2x'} = -\frac{1}{3} ma \omega^2,$$

$$R_{1x'} - 2R_{2x'} = \frac{3}{a} J_{x'z'} \omega^2 - mg.$$

Если $R_{2x'} = 0$, то должно быть

$$\omega^2 = \frac{3mga}{ma^2 + 9J_{x'z'}}.$$

Теперь вычислим $J_{x'z'} = -\frac{ma^2}{36}$ и найдем $\omega = 2\sqrt{g/a}$.

8.31. Направим ось Oz' вдоль оси вращения вертикально вверх, а ось Ox' через середину стержня. Сохраняя обозначения предыдущей задачи, напишем уравнения движения стержня

$$R_{x'} = -\omega^2 ma \sin \alpha, \quad R_{y'} = 0$$

$$-mg + R_{z'} = 0, \quad mga \sin \alpha + a \cos \alpha R_{x'} - J_{x'z'} \omega^2 = 0.$$

Отсюда имеем $R_{y'} = 0$, $R_{z'} = mg$ и уравнения для определения ω^2 и $R_{x'}$.

Для вычисления $J_{x'z'}$ перенесем начало координат в точку опоры, сохраняя оси параллельными. Тогда

$$z' = a \cos \alpha + z'', \quad x' = x''.$$

Обозначим через σ плотность массы стержня, через s — расстояние его произвольной точки до верхнего конца. Тогда

$$x'' = s \cdot \sin \alpha, \quad z'' = -s \cos \alpha;$$

$$\begin{aligned} J_{x'z'} &= -\sigma \int_0^{2a} s \cdot \sin \alpha (a \cos \alpha - s \cos \alpha) ds = \\ &= \frac{1}{3} \sigma a^3 \sin 2\alpha = \frac{1}{3} ma^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Подставляя значение $J_{x'z'}$ в уравнения движения, получим

$$-ma \omega^2 \sin \alpha = R_{x'};$$

$$\frac{1}{3} ma^2 \sin \alpha \cos \alpha \omega^2 = mga \sin \alpha + R_{x'} a \cos \alpha.$$

Теперь исключим $R_{x'}$ и найдем зависимость

$$\omega^2 = \frac{3g}{4a \cos \alpha}.$$

Затем получим $R_{x'}$ и тангенс β — угла наклона реакции опоры по отношению к вертикали

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

8.32. Выберем систему отсчета s' , жестко связанную с твердым телом так, чтобы ось Oz' была направлена вдоль оси вращения вертикально вверх, а оси Ox' и Oy' были направлены вдоль нижних ребер куба. Неподвижную систему координат s можно выбрать совпадающей с системой s' в начальный момент времени, когда куб находился в покое. Ориентацию s' относительно s зада-

дим с помощью угла θ между осями Ox' и Ox . Тогда кинетическая энергия куба

$$T_1 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\theta}^2,$$

где $J = \frac{2}{3} m_1 a^2$ — момент инерции куба относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр масс куба. Кинетический момент куба

$$M_{1z} = \left(J + \frac{m_1}{2} a^2 \right) \dot{\theta}.$$

Обозначим через ξ расстояние, пройденное шариком в полости куба за время t . Координаты шарика выражаются через переменную ξ по формулам

$$\begin{aligned} x' &= \xi / \sqrt{3}, \\ y' &= a - \xi / \sqrt{3}, \\ z' &= a - \xi / \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, найдем скорость шарика относительно S

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] + \mathbf{v}' \quad (\boldsymbol{\omega} = \theta \mathbf{n}_z).$$

Тогда получим

$$v_x = \frac{\dot{\xi}}{\sqrt{3}} - \dot{\theta} \left(a - \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right), \quad v_y = \frac{\dot{\theta} \xi - \dot{\xi}}{\sqrt{3}}, \quad v_z = -\frac{\dot{\xi}}{\sqrt{3}}.$$

С помощью последних формул выразим через независимые переменные θ и ξ кинетическую энергию частицы

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left\{ \left[\frac{\dot{\xi}}{\sqrt{3}} - \dot{\theta} \left(a - \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right) \right]^2 + \left[\frac{\dot{\theta} \xi - \dot{\xi}}{\sqrt{3}} \right]^2 + \frac{\dot{\xi}^2}{3} \right\}$$

и ее момент импульса

$$M_{2z} = m_2 \left[\frac{\xi^2 \dot{\theta}}{3} - \frac{a \dot{\xi}}{\sqrt{3}} + \dot{\theta} \left(a - \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right)^2 \right].$$

Потенциальная энергия шарика

$$U = m_2 g \left(a - \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right)$$

Таким образом, получим интеграл энергии в виде

$$T_1 + T_2 + m_2 g \left(a - \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right) = E_0.$$

Начальные условия $\dot{\theta}_0=0$, $\xi_0=0$, $v_0=0$ приводят к значению $E_0=m_2ga$. В момент выхода шарика из отверстия $\xi = a/\sqrt{3}$. Подставляя эти значения E_0 и ξ в интеграл энергии, найдем

$$\frac{1}{2} J \theta^2 + \frac{1}{4} m_1 a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{\xi^2}{3} + \left(\frac{\xi}{\sqrt{3}} - a \theta \right)^2 + \frac{\xi^2}{3} \right] = m_2 g a.$$

Интеграл момента системы куб — шарик

$$M_{1z} + M_{2z} = 0$$

при $\xi = a/\sqrt{3}$ приводит к соотношению

$$\left(J + \frac{m_1 a^2}{2} \right) \dot{\theta} + m_2 \left(a^2 \dot{\theta} - \frac{a \dot{\xi}}{\sqrt{3}} \right) = 0.$$

Из двух последних уравнений находим угловую скорость θ , которую приобретает куб после прохождения шарика через диагональную полость.

$$\theta_1 = \left[\frac{a}{g} \left(\frac{49M^2}{24m^2} + \frac{35M}{12m} + 1 \right) \right]^{-1/2}.$$

8 33. Вначале под действием сил трения и тяжести диск скользит вверх по плоскости. Однако момент силы трения уменьшает угловую скорость диска. Поэтому как только его угловая скорость станет равной $\omega = v/a$ (v — скорость центра масс диска), скольжение прекратится и диск начнет катиться без проскальзывания.

Напишем уравнения движения диска:

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha + kR, \quad (1)$$

$$J\ddot{\varphi} = -kRa, \quad (2)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + R, \quad (3)$$

где s — расстояние, пройденное центром масс диска; φ — угол поворота диска, J — его центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной диску; R — нормальная реакция плоскости. Отсюда

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{kRa}{J} t + \omega_0,$$

$$\dot{s}(t) = (kR - mg \sin \alpha) \frac{t}{m}.$$

При $t = t_1$, когда $\dot{\varphi}(t_1) = \frac{\dot{s}(t_1)}{a}$, скольжение прекращается. Таким образом ($\dot{s}(t_1) = s_1$, $\dot{\varphi}(t_1) = \omega_1$)

$$\frac{\dot{s}_1}{a} = \omega_0 - \frac{kRa}{J} t_1; \quad (4)$$

$$\dot{s}_1 = (kR - mg \sin \alpha) \frac{t_1}{m}. \quad (5)$$

Из (1) — (5) находим

$$t_1 = \frac{a \omega_0}{g(3k \cos \alpha - \sin \alpha)}; \quad (6)$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 (k \cos \alpha - \sin \alpha)}{3k \cos \alpha - \sin \alpha}. \quad (7)$$

Пройденный до момента t_1 путь $s_1 = s(t_1)$ равен

$$s_1 = \frac{\ddot{s} t_1^2}{2} = \frac{1}{2} \dot{s} t_1 = \frac{a^2 \omega_0^2 (k \cos \alpha - \sin \alpha)}{2g(3k \cos \alpha - \sin \alpha)^2}. \quad (8)$$

Найдем теперь расстояние s_2 , пройденное центром масс диска при качении. Из закона сохранения полной энергии

$$\frac{1}{2} m \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} J \omega_1^2 - mgs_2 \sin \alpha = 0$$

получим

$$s_2 = \frac{3a^2 \omega_0^2}{4g \sin \alpha} \left(\frac{k \cos \alpha - \sin \alpha}{3k \cos \alpha - \sin \alpha} \right)^2. \quad (9)$$

Следовательно, полное расстояние

$$s = s_1 + s_2 = \frac{a^2 \omega_0^2}{4g \sin \alpha} \frac{k \cos \alpha - \sin \alpha}{3k \cos \alpha - \sin \alpha}. \quad (10)$$

Используем теперь для нахождения s_1 закон изменения полной энергии

$$\frac{1}{2} m \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} J \omega_1^2 + mgs_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} J \omega_0^2 = A^d, \quad (11)$$

где работа силы трения

$$A^d = -kmg \cos \alpha (a \varphi_1 - s_1), \quad (12)$$

здесь φ_1 — полное изменение угла поворота диска до качения. В (11) слева написано изменение энергии поступательного и вращательного движения, а справа — сумма работы силы трения на поступательном перемещении и работы силы трения при вращательном движении. Вычислим вторую часть работы. Для этого умножим (2) на $\dot{\varphi}$ и получим

$$\frac{J}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2) = -\kappa m g a \cos \alpha \varphi_1, \quad (13)$$

т. е. закон изменения энергии вращения. Из (1), умножая на s , найдем

$$\frac{1}{2} m \dot{s}_1^2 = m g s_1 (k \cos \alpha - \sin \alpha), \quad (14)$$

т. е. закон изменения энергии поступательного движения. Из трех уравнений (11), (13), (14) только два независимы. Однако имеются три неизвестные величины ω_1 , s_1 , φ_1 . В качестве третьего независимого уравнения можно взять (7). Тогда из (7) и (14) найдем выражение (8) для s_1 , а из (7) и (13) получим

$$\varphi_1 = \frac{a \omega_0^2}{g} \frac{2k \cos \alpha - \sin \alpha}{(3k \cos \alpha - \sin \alpha)^2}.$$

Следовательно, работа силы трения

$$A^d = - \frac{k m a^2 \omega_0^2 \cos \alpha}{2(3k \cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

Заметим, что при $\alpha=0$ работа силы трения не зависит от коэффициента трения k :

$$A^d = - \frac{m a^2 \omega_0^2}{6}.$$

§ 3. Общий случай движения

8.34. Направляя координатные оси по главным осям инерции, получим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{1}{2} (J_{x'} \omega_{x'}^2 + J_{y'} \omega_{y'}^2 + J_{z'} \omega_{z'}^2).$$

Угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{n}_z + \dot{\theta} \mathbf{n}_\xi + \dot{\psi} \mathbf{n}_{z'};$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{n}_{x'} + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{n}_{y'} + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \mathbf{n}_{z'}.$$

Обобщенный импульс

$$p_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum J_i \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\varphi}} = \sum M_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\varphi}},$$

а производные $\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\varphi}}$ являются направляющими косинусами между вектором $\dot{\varphi} \mathbf{n}_z$ и соответствующими осями $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ подвижной системы координат. Следовательно,

$$p_{\varphi} = M n_z = M_z.$$

Аналогично найдем

$$p_{\theta} = M n_{z'} - M_{z'}, \quad p_{\psi} = M n_{z'} = M_{z'},$$

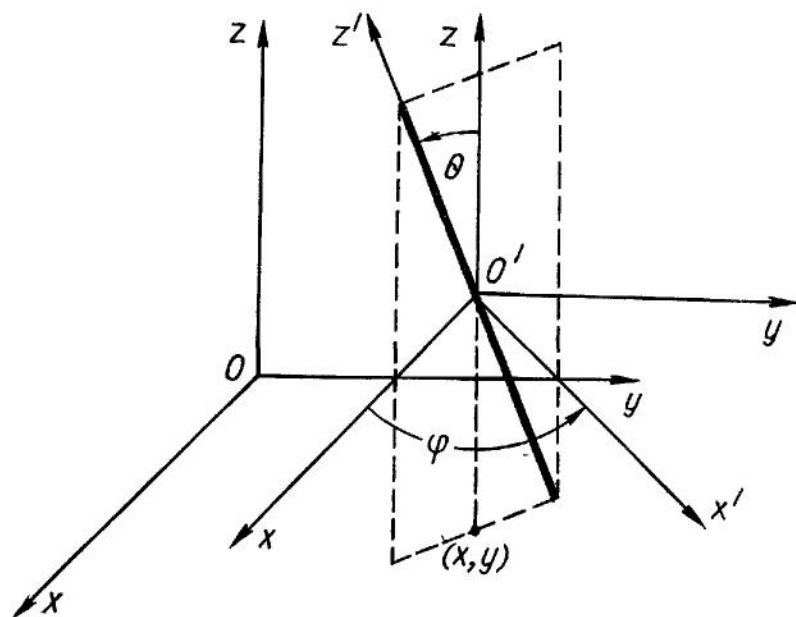


Рис. 8.35

8.35. Выберем в качестве обобщенных координат x, y — координаты проекции центра масс стержня на плоскость Oxy , θ — угол между стержнем и вертикалью, φ — угол между осью $O'x$ и осью $O'x'$ перпендикулярной вертикальной плоскости, которая проходит через стержень (рис. 8.35). Тогда

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{l^2}{4} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mg \frac{l}{2} \cos \theta,$$

где J — главный центральный момент инерции.

Отсюда получим следующие интегралы движения в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_{x0}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = p_{y0};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi} \sin^2 \theta = M_{z0};$$

$$\frac{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}{2m} + \frac{1}{r} \left(\frac{ml^2}{4} \sin^2 \theta + J \right) \dot{\theta}^2 - \frac{M_{0z}^2}{2J \sin^2 \theta} - mg \frac{l}{2} \cos \theta = E_0.$$

8.36. Система обладает двумя степенями свободы. Соответственно используем θ — угол между вертикалью и стержнем, φ — угол, определяющий положение стержня в горизонтальной плоскости. Тогда

$$L = \frac{1}{2} J (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \quad \left(J = \frac{ml^2}{12} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J \sin^2 \theta \dot{\varphi} = M_0; \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (2)$$

Из (1), (2) найдем

$$\ddot{\theta} = \frac{M_0^2 \cos \theta}{J \sin^3 \theta} = -\frac{M_0^2}{2J} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin^2 \theta}. \quad (3)$$

Предполагая, что $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, из (3) получим

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 \sin^2 \theta_0 - \frac{\omega_0^2 \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta}.$$

Следовательно,

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \sin(\omega_0 \sin \theta_0 t),$$

что определяет $\theta(t)$. Эта функция совместно с (1) определяет $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$. В случае линейных колебаний вблизи $\theta_0 = \pi/2$ частота колебаний

$$\omega = \omega_0.$$

8.37. Из закона изменения импульса

$$\frac{d'P}{dt} + [\omega P] = mg + R_1 + R_2$$

и динамических уравнений Эйлера

$$\frac{dM}{dt} + [\omega, M] = [r_1 R_1] + [r_2 R_2]$$

найдем в проекциях на орты подвижной системы (n_z — направлен по стержню n_y в горизонтальной плоскости)

$$0 = -mg \sin \alpha + R_{1x'} + R_{2x'}, \quad (1)$$

$$0 = R_{1y'} + R_{2y'}, \quad (2)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + R_{1z'} + R_{2z'}, \quad (3)$$

$$0 = a \cos \alpha (R_{1y'} - R_{2y'}), \quad (4)$$

$$J \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = (R_{2z'} - R_{1z'}) a \cos \alpha - (R_{2y'} - R_{1y'}) a \sin \alpha, \quad (5)$$

$$0 = -a \sin \alpha (R_{1y'} - R_{2y'}). \quad (6)$$

Из (2), (4) и (6) находим $R_{1y'} = R_{2y'} = 0$.

Замечая далее, что $R_{1\perp}$ — перпендикулярная по отношению к оси вращения, составляющая реакции в первой опоре равна $R_{1z'} \sin \alpha - R_{1x'} \cos \alpha$, из уравнений (1), (3), (5) получим

$$R_{1\perp} = \frac{J \omega^2}{2a} \sin \alpha \cos \alpha \left(J = \frac{ml^2}{12} \right).$$

Затем найдем, что $R_{2\perp} = -R_{1\perp}$, а сумма составляющих вдоль оси вращения $(R_1)_{\parallel} + (R_2)_{\parallel} = mg$

8.38. Обозначим через θ угол, образованный вертикальным диаметром окружности и диаметром, проходящим через центр масс стержня. Так как центр масс стержня участвует в относительном движении со скоростью $\frac{1}{2} a \sqrt{3} \theta$ и переносном движении со скоростью $\frac{1}{2} a \sqrt{3} \omega \sin \theta$, то «кинетическая» энергия центра масс

$$T = \frac{3}{8} m a^2 (\theta^2 - \omega^2 \sin^2 \theta).$$

Совместим начало O' подвижной системы координат с центром масс стержня. Ось $O'x'$ направим к центру окружности, ось $O'y'$ направим по стержню, а ось $O'z'$ — перпендикулярно плоско-

сти окружности. Тогда угловая скорость стержня имеет компоненты

$$\omega_{x'} = \omega \cos \theta, \quad \omega_{y'} = \omega \sin \theta, \quad \omega_{z'} = \dot{\theta},$$

где ω — угловая скорость окружности.

Главные моменты инерции соответственно равны

$$J_{x'} = \frac{1}{12} ma^2, \quad J_{y'} = 0, \quad J_{z'} = \frac{1}{12} ma^2.$$

Поэтому кинетическая энергия вращения стержня

$$\mathcal{T} = \frac{ma^2}{24} (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta).$$

Так как потенциальная энергия центра масс

$$U = -mg \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \theta,$$

то окончательно для функции Лагранжа получим выражение

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{24} [10\dot{\theta}^2 + (9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \omega^2 + 12\sqrt{3} \frac{g}{a} \omega s \theta].$$

Поскольку лагранжиан явно от времени не зависит, имеет место закон сохранения обобщенной энергии

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = \\ &= \frac{ma^2}{24} [10\dot{\theta}^2 - (9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \omega^2 - 12\sqrt{3} \frac{g}{a} \cos \theta] = H_0. \end{aligned}$$

Из начальных условий $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}(0) = 0$ получим $H = -\frac{3}{8} ma^2 \omega^2$.

Следовательно,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{5} \left[3\sqrt{3} \frac{g}{a} - 2\omega^2 \cos \theta \right] \omega s \theta.$$

Таким образом,

$$v_m|_{\theta=0} = \frac{a}{2} \left\{ \frac{3}{5} \left[6\sqrt{3} \left(\frac{g}{a} \right) - 4\omega^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

8 39 Выберем начало O подвижной декартовой системы координат в вершине конуса, ось $O\xi_1$ направим вдоль линии соприкосновения конуса с плоскостью, ось $O\xi_2$ направим перпендикулярно вращающейся плоскости. Обозначим через θ угол наклона линии соприкосновения обеих поверхностей к вертикали, направ-

ленной вниз. Так как конус катится по плоскости без скольжения, его угловая скорость складывается из угловой скорости плоскости $(-\omega \cos \theta, 0, \omega \sin \theta)$ и угловой скорости конуса относительно оси $O\xi_1$, таким образом, угловая скорость конуса имеет вид

$$\omega = (\omega_1, 0, \omega \sin \theta), \quad (1)$$

где ω_1 — пока неизвестная компонента по оси $O\xi_1$.

Компоненту ω_1 можно найти, если рассмотреть скорость произвольной точки конуса, находящейся на его оси на расстоянии a от вершины конуса. Эта скорость равна $[\omega \mathbf{r}]$, где $\mathbf{r} = a(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, т. е. равна

$$a(-\omega \sin \theta \sin \alpha, \omega \sin \theta \cos \alpha, \omega_1 \sin \alpha). \quad (2)$$

С другой стороны, ось конуса является фиксированной относительно системы отсчета $O\xi_1\xi_2\xi_3$, угловая скорость которой имеет компоненты

$$(-\omega \cos \theta, -\dot{\theta}, \omega \sin \theta).$$

Поэтому скорость рассматриваемой точки оси конуса также равна

$$[\Omega \mathbf{r}] = a(-\omega \sin \theta \cos \alpha, \omega \sin \theta \cos \alpha, -\omega \cos \theta \sin \alpha + \dot{\theta} \cos \alpha). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), заключаем, что

$$\omega_1 = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha - \omega \cos \theta. \quad (4)$$

Таким образом, получим угловую скорость конуса

$$\omega = (\dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha - \omega \cos \theta, 0, \omega \sin \theta).$$

Теперь повернем систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ вокруг оси $O\xi_3$ на угол α , так чтобы ось $O\xi_1$ совпала с осью конуса. Тогда угловая скорость конуса в проекциях на новые оси примет вид

$$\omega = (\omega_1 \cos \alpha, -\omega_1 \sin \alpha, \omega \sin \theta).$$

Новые оси являются главными осями инерции конуса для любого момента времени. Главные моменты инерции конуса соответственно равны

$$\frac{3}{10} ml^2 \sin^2 \alpha, \quad \frac{3}{20} ml^2 (4 - 3 \sin^2 \alpha), \quad \frac{3}{20} ml^2 (4 - 3 \sin^2 \alpha).$$

Следовательно, кинетическая энергия конуса

$$T = \frac{3ml^2}{40} [(1 + 5 \cos^2 \alpha) \omega_1^2 \sin^2 \alpha + (4 - 3 \sin^2 \alpha) \omega^2 \sin^2 \theta],$$

а его потенциальная энергия

$$U = -\frac{3}{4} mgl \cos \alpha \cdot \cos \theta.$$

Таким образом, получим лагранжиан конуса

$$L = \frac{3ml^2}{40} \left[(1 + 5 \cos^2 \alpha) (\dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha - \omega \cos \theta)^2 \sin^2 \alpha + \right. \\ \left. + (4 - 3 \sin^2 \alpha) \omega^2 \sin^2 \theta + \frac{10}{l} g \cos^2 \alpha \cos \theta \right].$$

Отсюда ясно, что обобщенная энергия сохраняется, т. е.

$$H = \frac{3ml^2}{40} \left[(1 + 5 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha (\dot{\theta}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - \omega^2 \cos^2 \theta) - \right. \\ \left. - (4 - 3 \sin^2 \alpha) \omega^2 \sin^2 \theta - \frac{10g}{l} \cos^2 \alpha \cdot \cos \theta \right] = H_0.$$

Используя начальные условия $\dot{\theta}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}(0) = 0$, найдем, что

$$H_0 = \frac{3ml^2}{40} \omega^2 (3 \sin^2 \alpha - 4).$$

Поэтому интеграл обобщенной энергии можно переписать в виде

$$(\dot{\theta}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - \omega^2 \cos^2 \theta) (1 + 5 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha = \\ = 10 (g/l) \cos^2 \alpha \cdot \cos \theta - \omega^2 (4 - 3 \sin^2 \alpha) \cos^2 \theta$$

или

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \cos \theta \left(\frac{5 \cos^2 \alpha - 1}{5 \cos^2 \alpha + 1} \right) \left[\frac{10g}{l^2 \omega^2 (5 \cos^2 \alpha - 1)} - \cos \theta \right].$$

Полагая здесь $\dot{\theta} = 0$, получим окончательно

$$\cos \theta_1 = \frac{10g}{l\omega^2 (5 \cos^2 \alpha - 1)}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

8.40. Поместим начало O неподвижной системы координат в точку закрепления волчка, а ось z направим по вертикали вверх. Начало системы S' , жестко скрепленной с волчком, совместим с точкой O , а оси направим по главным осям инерции. Тогда

$$L = \frac{J_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{J_3}{2} (\dot{\psi} + \omega \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta.$$

Отсюда найдем

$$J_3(\dot{\psi} + \omega \cos \theta) = J_3 \omega_{30},$$

$$\frac{J_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta = E - \frac{1}{2} J_3 \omega_{30}^2. \quad (1)$$

Затем из (1), (2) получим

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J_1} (E' - U_{\text{eff}}),$$

где

$$E' = E - \frac{1}{2} J_3 \omega_{30}^2, \quad U_{\text{eff}} = \frac{J_1 \omega^2}{2} \sin^2 \theta + mgl \cos \theta.$$

Таким образом, находим закон движения $\theta(t)$ в виде

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{J_1} (E' - U_{\text{eff}})}} = t - t_0.$$

8 41. Поместим начало O неподвижной системы координат в точку закрепления волчка, а ось OZ направим по вертикали вверх. Начало O' подвижной системы совместим с O , а ее оси направим по главным осям инерции волчка. Тогда, выбирая в качестве независимых координат эйлеровы углы, найдем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{J_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{J_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta,$$

где J_3 — главный момент инерции относительно оси материальной симметрии, а $J_1 = J_1^m + ml^2$.

Отсюда

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + J_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \equiv J_1 b, \quad (1)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = J_3 \omega_3 \equiv J_1 a, \quad (2)$$

$$\frac{J_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta = E_0 - \frac{J_3}{2} \omega_3^2 = E_0'. \quad (3)$$

Из (1) — (2) найдем

$$\dot{\varphi} = \frac{b - au}{1 - u^2}, \quad u = \cos \theta, \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \frac{J_1 a}{J_3} - \dot{\varphi} u, \quad (5)$$

а из (3), (4) получим

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (6)$$

где $f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$,

$$\alpha = \frac{2E'_0}{J_1}, \quad \beta = \frac{2mg l}{J_1}.$$

Исследование функции $f(u)$ показывает, что она обращается в нуль в точках u_1, u_2, u_3 , причем

$$-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3.$$

Запишем (6) в виде

$$\dot{u}^2 = \beta(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (7)$$

и преобразуем это выражение, вводя обозначения

$$\omega = \sqrt{\frac{u - u_1}{u_2 - u_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}}, \quad p = \frac{1}{2} \sqrt{\beta(u_3 - u_1)}.$$

Поскольку

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u_1)}},$$

из (7) найдем

$$\dot{\omega}^2 = p^2(1 - \omega^2)(1 - k^2\omega^2).$$

Решением этого уравнения является эллиптический синус $\omega = snpt$. Следовательно,

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) sn^2 pt,$$

а период движения по углу θ

$$T = \frac{2\mathcal{K}(k)}{p} = \frac{4\mathcal{K}(k)}{\sqrt{\beta(u_3 - u_1)}},$$

где \mathcal{K} — полный эллиптический интеграл.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

1. Пусть один из корней $u_2 = u_0 = \frac{b}{a}$ (этот случай соответствует тем начальным условиям, которые часто задаются в теории

волчка: $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$. Найдем вначале границы движения по углу θ . В рассматриваемом случае $u_0 = \cos \theta_0$

$$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - a^2(u_0 - u)^2. \quad (8)$$

Поскольку $f(u_2 = u_0) = 0$, то $\alpha = \beta u_0$ и вместо (8) получим

$$f(u) = (1 - u^2)\beta(u_0 - u) - a^2(u_0 - u)^2.$$

Полагая $f(u) = 0$, находим корни этого уравнения:

$$u_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda u_0 + 1}, \quad u_2 = u_0, \\ u_3 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda u_0 + 1};$$

здесь

$$\lambda = \frac{a^2}{2\beta} = \frac{J_3}{4J_1} \frac{J_3 \dot{\psi}_0^2}{mgl}$$

характеризует отношение кинетической энергии вращения к потенциальной.

Если $\lambda \gg 1$, то

$$u_1 \approx u_0 - \frac{1}{2\lambda}(1 - u_0^2), \quad u_3 \sim 2\lambda.$$

Следовательно, амплитуда нутаций $u_0 - u_1$ будет очень мала.

Обозначая $x = u_0 - u$, $x_1 = u_0 - u_1 = \frac{\beta}{a^2} \sin^2 \theta_0$, получим

$$f(u) \approx x[\beta(1 - u_0^2) - a^2 x]$$

и соответствующее (6) уравнение

$$\dot{x}^2 = x[\beta(1 - u_0^2) - a^2 x].$$

Его решением является

$$x = \frac{x_1}{2}(1 - \cos at), \quad (9)$$

где $a = \frac{J_3}{J_1} \dot{\psi}_0$ — угловая частота нутаций. Затем из (4) найдем угловую скорость прецессии

$$\dot{\varphi} \approx \frac{a(u_0 - u)}{1 - u^2} \approx \frac{ax}{1 - u_0^2} = \frac{\beta}{2a}(1 - \cos at). \quad (10)$$

Среднее ее значение

$$\langle \varphi \rangle = \frac{\beta}{2a} = \frac{mgl}{J_3 \dot{\psi}_0} \quad (11)$$

будет тем меньше, чем больше начальная скорость вращения волчка.

2. Прецессия без нутаций. Рассмотрим случай, когда $u_1 = u_2 \neq \pm 1$. Полагая $\dot{u} = 0$, $\ddot{u} = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 &= 0, \\ -2u(\alpha - \beta u) - \beta(1 - u^2) + 2a(b - au) &= 0, \end{aligned}$$

из которой найдем

$$b - au = \frac{1 - u^2}{2u} [a \pm \sqrt{a^2 - 2\beta u}].$$

Учитывая (4), получим скорость прецессии

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{a}{2u} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2\beta u}{a^2}} \right].$$

Следовательно, должно выполняться неравенство $a^2 > 2\beta u$ или

$$\omega_3^2 > \frac{4J_1 mgl}{J_3^2} \cos \theta.$$

Это неравенство определяет область допустимых значений $\dot{\psi}$ и θ . В случае $2\beta u \ll a^2$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\beta}{2a} = \frac{mgl}{J_3 \omega_3}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{J_3 \cos \theta}{J_1 \cos \theta}.$$

Отсюда видно, что значение $\dot{\varphi}_1$ соответствует медленной прецессии (11), а угловая скорость $\dot{\varphi}_2$ быстрой прецессии не зависит от ускорения g свободного падения (как в случае свободного волчка, $\beta = 0$).

3. Случай $u_2 = u_0 = 1$, $\dot{\theta} = 0$ при $u = u_0$. Поскольку $u_0 = \frac{b}{a} = 1$, то $b = a$

$$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - a^2(1 - u^2)^2.$$

Затем из (3) находим, что $\alpha = \beta$. Следовательно,

$$f(u) = (1 - u^2)^2 [\beta(1 + u) - a^2]. \quad (12)$$

Таким образом, точки поворота $u_1 = u_2 = 1$, $u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1$.

При $\frac{a^2}{\beta} > 2$ ($u_3 > 1$) вытекает, что $u=1$, т. е. имеет место вращение вокруг вертикальной оси (это — случай спящего волчка).

Если же $\frac{a^2}{\beta} < 2$, то $u_3 < 1$. В этом случае волчок нутирует между $\theta=0$ и $\theta=\theta_3$. При этом существует критическая угловая скорость

$$\omega_3^2 = \frac{4mglI_1}{J_3^2}$$

(определяемая условием $a^2=2\beta$), начиная с которой волчок может вращаться только в вертикальном положении.

Исследуем теперь условие устойчивости волчка при его вращении вокруг вертикальной оси. Полагая $u=1-x$, разложим правую часть (12) в ряд Тейлора

$$f(u) = -x^2(a^2 - 2\beta) + \dots$$

Таким образом, находим уравнение

$$\dot{x}^2 = -x^2(a^2 - 2\beta) + \dots,$$

из которого следует, что колебания по углу θ вблизи вертикальной оси вращения будут устойчивы при $a^2 > 2\beta$.

8.42. Напишем уравнение кинетического момента относительно точки закрепления

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = [\mathbf{r}_m, m\mathbf{g}], \quad (1)$$

В отсутствие поля тяжести ось волчка нутирует вокруг постоянного вектора $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ с угловой скоростью

$$\Omega_n = \frac{M}{I_1},$$

где J_1 — момент инерции относительно оси, проходящей через точку закрепления перпендикулярно оси симметрии волчка. Следующее приближение описывает медленное движение вектора \mathbf{M} . Для определения скорости этой прецессии усредним (1) по периоду нутации. При этом

$$\langle \mathbf{r}_m \rangle = \frac{M}{M} l \cos \beta, \quad (2)$$

где l — расстояние от точки закрепления до центра масс волчка; β — угол между \mathbf{M} и осью симметрии волчка.

Подставляя (2) в (1), находим

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = -\frac{ml}{M} \cos \beta [g\mathbf{M}]. \quad (3)$$

Отсюда следует, что вектор \mathbf{M} прецессирует с угловой скоростью

$$\Omega = - \frac{ml}{M} \cos \beta \cdot \mathbf{g}$$

(этот результат сравните с формулой (11) задачи 8.41).

8.43. Обозначим реакцию поверхности, приложенную в точке касания шарика с плоскостью, вектором $\mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp}$ (здесь $\mathbf{R}_{\parallel} \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{R}_{\perp} \parallel \mathbf{n}$, а \mathbf{n} — орт, перпендикулярный плоскости). Запишем далее уравнение движения центра масс шарика

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp}, \quad (1)$$

при этом очевидно, что $m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\perp} = 0$. Обозначая затем $\mathbf{R}_{\parallel} = \mathbf{R}$, запишем уравнение кинетического момента шарика в виде

$$J\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -a[\mathbf{n}\mathbf{R}] \quad (2)$$

(J — центральный момент инерции шарика; $\boldsymbol{\Omega}$ — его угловая скорость; a — радиус шарика). Скорость точки касания шарика с плоскостью

$$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = \dot{\mathbf{r}} + [\boldsymbol{\Omega}, -a\mathbf{n}], \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$ — угловая скорость вращения плоскости.

Дифференцируя (3) и учитывая (2) и (1), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= a\omega[\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}] + a[\dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{n}] = a\omega[\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}] + \frac{a^2}{l}[\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{R}]] = \\ &= a\omega[\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}] - \frac{ma^2}{J}\ddot{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{J\omega}{ma^2 + J}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}]. \quad (4)$$

Интегрируя (4), получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{J\omega}{ma^2 + J}[\mathbf{n}\mathbf{r}] + \mathbf{c}, \quad (5)$$

где \mathbf{c} — постоянный вектор, зависящий от выбора начальных условий $\mathbf{r}(0)$, $\dot{\mathbf{r}}(0)$. В частности, для однородного шарика

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{2}{7}\omega[\mathbf{n}\mathbf{r}] + \mathbf{c}. \quad (6)$$

Из (1), (2) и (4), (5) получим угловое ускорение шарика

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\frac{ma}{J}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{r}}] = -\frac{ma\omega}{ma^2 + J}[\mathbf{n}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}]] = \frac{ma\omega}{ma^2 + J}\dot{\mathbf{r}}, \quad (7)$$

откуда видно, что $\dot{\Omega}$ направлено по горизонтали, т. е. вертикальная компонента Ω остается постоянной. Из (7) находим

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{m\omega}{ma^2 + J} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \quad \Omega_0 = \Omega|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}.$$

Теперь найдем решение уравнения (4)

$$\ddot{x} = -\omega_1 \dot{y}, \quad \ddot{y} = \omega_1 \dot{x}, \quad (8)$$

где

$$\omega_1 = \frac{J\omega}{ma^2 + J} = \frac{2}{7} \omega.$$

Вводя комплексную координату $u = x + iy$, запишем систему (8) в виде

$$\ddot{u} - i\omega_1 \dot{u} = 0.$$

Следовательно,

$$u = A + B \frac{e^{i\omega_1 t}}{i\omega_1}. \quad (9)$$

Учитывая начальные условия $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = [\omega \mathbf{r}_0]$, т. е.

$$u(0) = r_0 e^{i\alpha}, \quad \dot{u}(0) = i\omega r_0 e^{i\alpha},$$

найдем постоянные

$$A = r_0 e^{i\alpha} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right), \quad B = i r_0 \omega e^{i\alpha}.$$

Из (9) получим

$$u = r_0 e^{i\alpha} \left[\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) + \frac{\omega}{\omega_1} e^{i\omega_1 t} \right],$$

$$x = \operatorname{Re} u = r_0 \cos \alpha \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) + r_0 \frac{\omega}{\omega_1} \cos(\omega_1 t + \alpha),$$

$$y = \operatorname{Im} u = r_0 \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) + r_0 \frac{\omega}{\omega_1} \sin(\omega_1 t + \alpha).$$

Таким образом, траекторией центра масс шарика является окружность с центром в точке

$$\left(-\frac{5}{2} r_0 \cos \alpha, -\frac{5}{2} r_0 \sin \alpha \right)$$

и радиусом $R = r_0 \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{7}{2} r_0$. Угловая скорость вращения центра масс шарика по этой окружности $\omega_1 = \frac{2}{7} \omega$ не зависит от начальных условий.

8.44. При исследовании движения симметричных фигур ($J_1 = J_2 = J$) удобно воспользоваться следующим трехгранником (рис. 8.44, а, б). Орт \mathbf{n}_3 направим по оси симметрии тела, он обра-

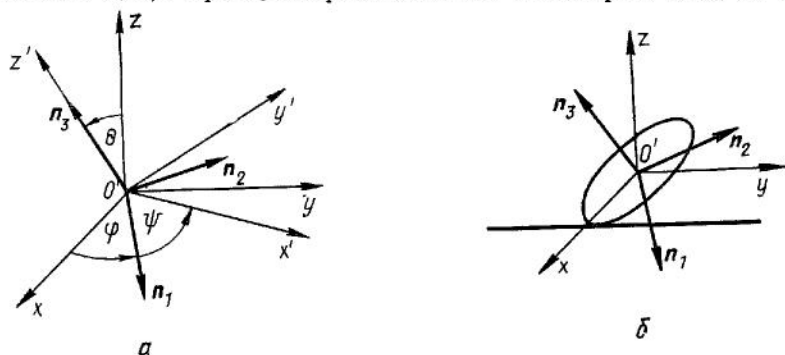


Рис. 8.44

зует угол θ с вертикалью, другой орт \mathbf{n}_1 направим по линии узлов в горизонтальной плоскости. Он образует угол φ с выделенным горизонтальным направлением; третий орт $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1]$. Угловую скорость этого трехгранника обозначим через ω . Предположим, что тело вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ψ . Пусть Ω — полная угловая скорость тела. Поскольку вращение трехгранника не связано с изменением угла ψ , то, полагая $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\psi} = 0$ в эйлеровых выражениях для угловой скорости, найдем проекции угловых скоростей ω и Ω на указанные орты

$$\omega_1 = \dot{\theta}, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta, \quad \omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta; \quad (1)$$

$$\Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega_2, \quad \Omega_3 = \omega_3 + \dot{\psi}. \quad (2)$$

Найдем теперь ускорение центра диска. Радиус-вектор точки касания $\mathbf{r}'_k = -a \mathbf{n}_2$. Поэтому скорость центра масс

$$\mathbf{v} = a [\Omega \mathbf{n}_2]. \quad (3)$$

Следовательно, ускорение центра масс

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \frac{d' \mathbf{v}}{dt} + [\omega \mathbf{v}] = a [\dot{\Omega}' \mathbf{n}_2] + a [\omega [\Omega \mathbf{n}_2]] = \\ &= a [\dot{\Omega}' \mathbf{n}_2] + a \Omega (\omega \mathbf{n}_2) - a \mathbf{n}_2 (\omega \Omega). \end{aligned}$$

Отсюда получим проекции ускорения

$$\frac{W_1}{a} = -n_3 \ddot{\Omega} + (\Omega n_1) (\omega n_2) = -\ddot{\psi} + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta - \ddot{\varphi} \cos \theta, \quad (4)$$

$$\frac{W_2}{a} = (\Omega n_2) (\omega n_2) - (\omega \Omega) = -\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi} \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}), \quad (5)$$

$$\frac{W_3}{a} = n_1 \ddot{\Omega} + (\Omega n_3) (\omega n_2) = \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}). \quad (6)$$

Далее найдем компоненты производной момента количества движения

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d'}{dt} M + [\omega M], \quad M_i = J_i \Omega_i,$$

$$\dot{M}_1 = J_1 \dot{\Omega}_1 + (\omega_2 \Omega_2 J_3 - \omega_3 \Omega_2 J_2) = \dot{J} (\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) + J_3 \omega_2 \Omega_3, \quad (7)$$

$$\dot{M}_2 = J_2 \dot{\Omega}_2 + (\omega_3 \Omega_1 J_1 - \omega_1 \Omega_3 J_3) = J (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1) - \omega_1 \Omega_3 J_3, \quad (8)$$

$$\dot{M}_3 = J_3 \dot{\Omega}_3 + (\omega_1 \Omega_2 J_2 - \omega_2 \Omega_1 J_1) = J_3 \dot{\Omega}_3 \quad (9)$$

(здесь $\frac{d' M_i}{dt} = I_i \frac{d' \Omega_i}{dt}$, так как для рассматриваемого тела моменты инерции относительно осей n_1 и n_2 в любой момент времени равны).

Учитывая определения (1) и (2), из (4)–(9) и (5) получим уравнения движения диска:

$$\begin{aligned} ma(-\ddot{\psi} + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta - \ddot{\varphi} \cos \theta) &= R_1, \\ -ma[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi} \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})] &= R_2 - mg \sin \theta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} ma[\ddot{\theta} + \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})] &= R_3 - mg \cos \theta; \\ J(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) + J_3 \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= -aR_3, \\ J(\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta) - J_3 \dot{\theta} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$J_3(\ddot{\psi} - \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta) = aR_1.$$

Исследуем теперь условия устойчивости движения диска. Предположим, что

$$\dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - x, \quad |x| \ll 1.$$

И получим приближенно

$$-ma\ddot{\psi} = R_1, \quad (12)$$

$$0 = R_2 - mg, \quad (13)$$

$$ma(-\ddot{x} + \dot{\phi}\dot{\psi}) = R_3 - mgx; \quad (14)$$

$$-J_1\ddot{x} + J_3\dot{\phi}\dot{\psi} = -aR_3; \quad (15)$$

$$J_1\ddot{\phi} + J_3\dot{x}\dot{\psi} = 0, \quad (16)$$

$$J_3\ddot{\psi} = aR_1. \quad (17)$$

Из (12) и (17) находим $R_1 = 0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$. Из (16) получим

$$\dot{\phi} = -\frac{J_3}{J_1} x \dot{\psi}_0. \quad (18)$$

Далее, из (14) и (15) найдем

$$-(ma^2 + J)\ddot{x} + (ma^2 + J_3)\dot{\phi}\dot{\psi} = -mgax. \quad (19)$$

Следовательно,

$$(ma^2 + J)\ddot{x} + \left[(ma^2 + J_3)\dot{\psi}_0^2 \frac{J_3}{J} - mga \right] x = 0. \quad (20)$$

Таким образом, условием устойчивости движения диска является неравенство

$$\dot{\psi}_0^2 > \frac{mgaJ}{(ma^2 + J_3)J_3}.$$

Поскольку для диска $J_3 = \frac{ma^2}{2}$, $J = \frac{ma^2}{4}$, $\dot{\psi}_0^2 > \frac{g}{3a}$ или $v_0^2 > \frac{ga}{3}$.

8.45. Используя результаты задачи 8.44, находим уравнение малых колебаний

$$(ma^2 + J)\ddot{x} + \left[(ma^2 + J_3)\dot{\psi}_0^2 \frac{J_3}{J} - mga \right] x = 0.$$

Учитывая, что $J = \frac{ma^2}{2}$, $J_3 = ma^2$, получим

$$x = A \cos(\omega t - \alpha),$$

где

$$\omega^2 = \frac{2}{3a^2}(4v_0^2 - ga).$$

Отсюда ясно, что движение устойчиво, если

$$v^2 > \frac{ga}{4}.$$

8.46. Полагая в уравнениях (10), (11) задачи 8.44

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \omega, \quad \dot{\psi} = \omega \frac{h}{a},$$

получим

$$\begin{aligned} 0 &= R_{a1} + R_{t1}, \\ 0 &= -mg + R_{a2} + R_{b2}, \\ ma\omega^2 \frac{h}{a} &= R_{a3} + R_{b3}, \\ J_3\omega^2 \frac{h}{a} &= -aR_{13} - hR_{a2}, \\ 0 &= hR_{a1}, \quad 0 = aR_{b1}. \end{aligned}$$

Полагая $R_{b3}=0$, найдем

$$\begin{aligned} R_{a1} &= 0, \quad R_{a3} = m\omega^2 h, \\ R_{a2} &= -J_3 \frac{\omega^2}{a}, \quad R_{b1} = 0, \quad R_{b2} = mg + J_3 \frac{\omega^2}{a}. \end{aligned}$$

8.47. Найдем момент сил, действующих на спутник произвольной формы.

$$\mathbf{L} = -\gamma m_3 \int \frac{[\rho, r_0 + \rho]}{|r_0 + \rho|^3} dm, \quad (1)$$

r_0 — радиус-вектор, проведенный из центра Земли в центр масс спутника, здесь ρ — радиус-вектор элемента dm спутника относительно системы с началом в центре масс спутника, m_3 — масса Земли. Очевидно, $|\rho_{\max}| \ll r_0$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r_0 + \rho|^3} &\approx \frac{1}{r_0^3} \left(1 - \frac{3r_0\rho}{r_0^2} \right), \\ \mathbf{L} &= -\gamma \frac{m_3}{r_0^3} \int [\rho r_0] \left(1 - \frac{3r_0\rho}{r_0^2} \right) dm. \end{aligned} \quad (2)$$

При интегрировании введем систему координат S' , оси которой совпадают с главными осями инерции спутника. В этих осях $r_0 = r_0(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$. Интегрируя (2), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -\frac{3\gamma m_3}{r_0^3} [\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 (J_2 - J_3) \mathbf{n}_1 + \\ &+ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 (J_3 - J_1) \mathbf{n}_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (J_1 - J_2) \mathbf{n}_3]. \end{aligned}$$

Теперь совместим плоскость Oxy с плоскостью орбиты. Введем также трехгранник с началом в центре масс спутника и следующими ортами; орт \mathbf{n}_1 , направленный вдоль оси узлов в плоскости орбиты, орт \mathbf{n}_3 по оси симметрии спутника и орт $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1]$. Угловая скорость ω этого трехгранника

$$\omega = \dot{\theta} \mathbf{n}_1 + (\dot{\varphi} + \omega_0) \sin \theta \mathbf{n}_2 + (\dot{\varphi} + \omega_0) \cos \theta \mathbf{n}_3,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma m_3}{r_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0^3}}$ — угловая скорость вращения центра масс вокруг Земли. Момент количества движения

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 J_i \Omega_i \mathbf{n}_i,$$

где Ω — абсолютная угловая скорость спутника, причем $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$, $\Omega_3 = \omega_3 + \dot{\varphi}$ ($\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения тела вокруг орта \mathbf{n}_3). Направляющие косинусы, выраженные через эйлеровы углы, соответственно равны

$$\cos \alpha_1 = -\sin \varphi, \quad \cos \alpha_2 = -\cos \theta \cos \varphi, \quad \cos \alpha_3 = \sin \theta \cos \varphi.$$

Полученные выражения позволяют использовать уравнения Эйлера

$$J_1 (\dot{\omega}_1 - \omega_3 \omega_2) + J_3 \omega_2 \Omega_3 = L_1, \quad (1)$$

$$J_1 (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1) - \omega_1 \Omega_3 J_3 = L_2, \quad (2)$$

$$J_3 \dot{\Omega}_3 = L_3. \quad (3)$$

Рассмотрим частный случай, когда ось симметрии спутника почти лежит в плоскости орбиты $\theta = \pi/2 - x$, $x \ll 1$, а угол между осью симметрии и радиусом-вектором \mathbf{r}_0 центра масс весьма мал ($\varphi \ll 1$). Тогда

$$\omega_1 = -\dot{x}, \quad \omega_2 = \dot{\varphi} + \omega_0, \quad \omega_3 = \omega_0 x, \quad (4)$$

$$L_1 = 3\omega_0^2 (J_1 - J_3) x,$$

$$L_2 = -3\omega_0^2 (J_1 - J_3) \varphi, \quad L_3 = 0. \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (1)–(3), найдем

$$J_1 \ddot{x} + \omega_0^2 (4J_1 - 3J_3) x - J_3 \Omega_3 (\dot{\varphi} + \omega_0) = 0, \quad (6)$$

$$J_1 \ddot{\varphi} + 3\omega_0^2 (J_1 - J_3) \varphi + J_3 \Omega_3 \dot{x} = 0, \quad (7)$$

$$J_3 \dot{\Omega}_3 = 0 \quad (\Omega_3 = \text{const}). \quad (8)$$

Если $J_1 \gg J_3$, уравнения (6), (7) упрощаются, т. е.

$$\ddot{x} + 4\omega_0^2 x = 0, \quad \ddot{\varphi} + 3\omega_0^2 \varphi = 0.$$

Таким образом, ось симметрии колеблется около направления радиуса-вектора центра масс с частотой $\sqrt{3}\omega_0$; ось также нутирует вблизи плоскости орбиты с частотой $2\omega_0$.

8.48. Вращательный момент, действующий на Землю со стороны Солнца, обусловлен сплюснутостью Земли у полюсов. Поскольку эксцентриситет орбиты Земли $\varepsilon = 0,0167$ весьма мал, то можно считать, что центр масс Земли движется по окружности радиуса $r_0 = 1,5 \cdot 10^{11}$ м с угловой скоростью $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma m_c}{r_0^3}}$ (M_c — масса Солнца). Используя уравнения (1)–(3) задачи 8.47, запишем уравнение Эйлера

$$J_1(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) + J_3\omega_2\Omega_3 = 3\omega_0^2(J_1 - J_3)\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi, \quad (1)$$

$$J_1(\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1) - \omega_1\Omega_3 J_3 = -3\omega_0^2(J_1 - J_3)\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi, \quad (2)$$

$$J_3\dot{\Omega}_3 = 0. \quad (3)$$

Из (3) находим $\Omega_3 = (\dot{\varphi} + \omega_0)\cos\theta + \dot{\psi}_0 = \text{const.}$ В нулевом приближении $\varphi = -\omega_0 t$, $\dot{\theta} = 0$. Поскольку суточная угловая скорость вращения Земли $\dot{\psi}_0 \gg \dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, то $\Omega_3 \approx \dot{\psi}_0$ и в (1), (2) можно пренебречь первыми слагаемыми. Тогда

$$J_3(\dot{\varphi} + \omega_0)\dot{\psi}_0 = 3\omega_0^2(J_1 - J_3)\cos\theta\cos^2\varphi, \quad (4)$$

$$J_3\dot{\theta}\dot{\psi}_0 = 3\omega_0^2(J_1 - J_3)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi. \quad (5)$$

Усредняя (4), (5) по периоду $2\pi/\omega_0$, найдем

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = -\omega_0 + \Delta\dot{\varphi}, \quad \langle \dot{\theta} \rangle = 0,$$

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{3\omega_0^2}{2\dot{\psi}_0} \frac{J_1 - J_3}{J_3} \cos\theta.$$

Для Земли угол между плоскостью эклиптики и осью симметрии Земли равен $\theta = 23^\circ$, $\frac{J_3 - J_1}{J_3} \sim \frac{1}{300}$, $\frac{\dot{\psi}_0}{\omega_0} \approx 365$. Следовательно,

$$\Delta\dot{\varphi} \approx -\frac{1}{80000}\omega_0.$$

Различие между полученным периодом, равным 80 000 годам, и наблюдаемым, равным 26 000 годам, объясняется тем, что в расчете не учтен момент сил притяжения Луны.

§ 1. Канонические уравнения. Скобки Пуассона

9.1. Поместим начало цилиндрической системы координат в вершине конуса, а ось Oz направим вертикально вверх. Тогда лагранжиан материальной точки

$$L = \frac{m}{2} \left[\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2 \alpha} + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mga \rho$$

(2α — угол раствора конуса). Отсюда найдем обобщенные импульсы

$$p_\rho = m \frac{\dot{\rho}}{\sin^2 \alpha}, \quad p_\varphi = m \rho^2 \dot{\varphi}$$

и функцию Гамильтона

$$H = \frac{p_\rho^2 \sin^2 \alpha}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m \rho^2} - mga \rho.$$

Затем получим уравнения Гамильтона

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho \sin^2 \alpha}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m \rho^2}, \quad \dot{p}_\rho = \frac{p_\varphi^2}{m \rho^3} - mga, \quad \dot{p}_\varphi = 0.$$

9.2. Положение точки на расширяющейся сферической поверхности зададим сферическими координатами θ, φ (начало координат помещено в центр сферы, ось Oz направлена вниз по вертикали). Тогда кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m}{2} [r^2(t) \dot{\theta}^2 + r^2(t) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta]$$

имеет структуру $T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}$,

$$T^{(2)} = \frac{m}{2} r^2(t) [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta], \quad T^{(1)} = 0, \quad T^{(0)} = \frac{m}{2} \dot{r}^2(t),$$

а потенциальная энергия

$$U = U^{(0)} = -mgr(t) \cos \theta.$$

Обобщенные импульсы, как функции обобщенных координат и скоростей, соответственно равны

$$p_{\theta} = mr^2(t) \dot{\theta}, \quad p_{\varphi} = mr^2(t) \dot{\varphi} \sin^2 \theta.$$

Далее, используя определение функции Гамильтона

$$H = (T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)}) \Big|_{\dot{q} \rightarrow \dot{q}(q, p, t)},$$

найдем

$$H = \frac{1}{2mr^2(t)} \left(p_{\theta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t) - mgr(t) \cos \theta.$$

Отсюда получаем уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_{\theta}}{mr^2(t)}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2(t) \sin^2 \theta}, \\ p_{\theta} &= \frac{p_{\varphi}^2 \cos \theta}{mr^2(t) \sin^3 \theta} - mgr(t) \sin \theta, \quad \dot{p}_{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

9.3. Согласно условию имеем

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi,$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{Hr}].$$

Вводя обобщенный импульс

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (1)$$

найдем гамильтониан заряда

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{\pi} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (2)$$

Затем получим уравнения движения

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{e}{2mc} \left[\mathbf{H}, \boldsymbol{\pi} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right] - e \nabla \varphi, \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \frac{1}{m} \left(\boldsymbol{\pi} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (4)$$

Из уравнений (3), (4), учитывая (1), можно найти

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] - e \nabla \varphi.$$

Положим, далее, $\varphi=0$ и покажем, что проекция обобщенного момента импульса $\mu=[\mathbf{r}\boldsymbol{\pi}]$ на направление напряженности поля сохраняется. Действительно, дифференцируя

$$\frac{d}{dt} \mu \mathbf{H} = [\dot{\mathbf{r}} \boldsymbol{\pi}] \mathbf{H} + [\mathbf{r}, \dot{\boldsymbol{\pi}}] \mathbf{H}$$

и учитывая (3), (4), найдем, что $\mu \mathbf{H} = \text{const.}$

Из (3) и (4) следует еще один интеграл

$$\pi_0 = \pi - \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}] = mv + \frac{2e}{c} \mathbf{A}. \quad (5)$$

Далее, умножая обе части (5) векторно на \mathbf{H} , найдем интеграл

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{c}{e\mathbf{H}^2} [\pi_0 \mathbf{H}] = \frac{c}{e^2} \left[\boldsymbol{\pi} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \mathbf{H} \right]. \quad (6)$$

Этот интеграл означает постоянство составляющей радиуса-вектора центра орбиты заряда в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} . Этот интеграл является аналогом интеграла \mathbf{A} при движении заряда в кулоновом поле (см. задачу 0.00). Действительно, умножая обе части (6) скалярно на \mathbf{r} , получим уравнение проекции траектории заряда

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \left(\rho + \frac{2c}{e\mathbf{H}} \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{1}{2\rho_0}$$

на плоскость перпендикулярную \mathbf{H} (в полярных координатах).

9.4. Запишем соотношения между проекциями $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ угловой скорости тела на главные оси инерции и углами Эйлера:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi,$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.$$

Так как кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2),$$

где J_1, J_2, J_3 — главные моменты инерции, то

$$\begin{aligned} p_1 &= J_1 \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\varphi}} + J_2 \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\varphi}} + J_3 \omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\varphi}} = \\ &= J_1 \omega_1 \sin \psi \sin \theta + J_2 \omega_2 \cos \psi \sin \theta + J_3 \omega_3 \cos \theta. \end{aligned}$$

Подобным образом найдем

$$p_2 = J_1 \omega_1 \cos \psi - J_2 \omega_2 \sin \psi,$$

$$p_3 = J_3 \omega_3.$$

Следовательно,

$$J_1 \omega_1 = p_1 \frac{\sin \psi}{\sin \theta} + p_2 \cos \psi - p_3 \operatorname{ctg} \theta \sin \psi;$$

$$J_2 \omega_2 = p_1 \frac{\cos \psi}{\sin \theta} - p_2 \sin \psi - p_3 \operatorname{ctg} \theta \cos \psi;$$

$$J_3 \omega_3 = p_3.$$

Используя эти выражения, нетрудно получить функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{\sin \theta} - p_3 \operatorname{ctg} \theta \right)^2 \left(\frac{\sin^2 \psi}{J_1} + \frac{\cos^2 \psi}{J_2} \right) + \\ & + p_2 \sin \psi \cos \psi \left(\frac{p_1}{\sin \theta} - p_3 \operatorname{ctg} \theta \right) \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) + \\ & + \frac{p_2^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \psi}{J_1} + \frac{\sin^2 \psi}{J_2} \right) + \frac{p_3^2}{2J_3} + U(\varphi, \theta, \psi). \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \psi} = & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{\sin \theta} - p_3 \operatorname{ctg} \theta \right)^2 \sin 2\psi + \right. \\ & + p_2 \left(\frac{p_1}{\sin \theta} - p_3 \operatorname{ctg} \theta \right) \cos 2\psi - \\ & \left. - \frac{p_2^2}{2} \sin 2\psi \right] \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) + \frac{\partial U}{\partial \psi} = \\ = & \omega_1 \omega_2 J_1 J_2 \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) + \frac{\partial U}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Так как величина $-\frac{\partial U}{\partial \psi}$ представляет собой момент L_3^e внешней силы относительно оси 3, из соответствующего уравнения Гамильтона найдем

$$J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = L_3^e.$$

Два других уравнения Гамильтона получаются аналогично. Комбинируя их с найденным уравнением, получим остальные уравнения Эйлера.

9.5. Поскольку гамильтониан гармонического осциллятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2} x^2,$$

из закона сохранения энергии $H=E_0$ получим уравнение фазовой траектории

$$\frac{p^2}{2mE_0} + \frac{x^2}{2E_0/\kappa} = 1.$$

Таким образом, траекторией является эллипс с полуосями

$$a = \sqrt{2E_0/\kappa}, \quad b = \sqrt{2mE_0}.$$

9.6. Если f — функция канонических переменных, то

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

где $\{f, H\}$ — скобка Пуассона. В частности, если $f \equiv p_i$, то

$$\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}$$

а при $f \equiv q_i$ получим

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}.$$

9.7. Полагая в определении скобок Пуассона

$$\{g, f\} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$$

$g \equiv q_k$, получим

$$\{q_k, f\} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^s \delta_{ki} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p_k}.$$

При $g \equiv p_k$ аналогично получим

$$\{p_k, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}.$$

9.8. Покажем, что функция $f = x - pt/m$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0.$$

Действительно, для свободной частицы в отсутствие внешних сил $H = p^2/2m$ и, следовательно,

$$\{(x - pt/m), p^2/2m\} = p/m,$$

а, с другой стороны,

$$\partial f / \partial t = -p/m.$$

9.10. Согласно условию при преобразовании

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Изменение гамильтониана

$$\delta H = \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \quad (1)$$

при любом бесконечно малом ε . С другой стороны, для каждой декартовой компоненты имеет место соотношение вида

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^N \{p_{ix}, H\} = - \{p_x, H\}.$$

Запишем совокупность этих соотношений в краткой форме:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = - \{\mathbf{P}, H\}. \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), находим $\{\mathbf{P}, H\} = 0$, откуда следует, что вектор $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$ является интегралом движения.

9.11. Поскольку

$$H(q_1 \dots q_i \dots q_s, p_1 \dots p_s) = H(q_1 \dots q_i + \delta q_i \dots q_s, p_1 \dots p_s),$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Далее, полагая в соотношении

$$\{p_i, f\} = - \frac{\partial f}{\partial q_i},$$

$f \equiv H$, находим

$$\{p_i, H\} = 0,$$

что и требовалось доказать.

9.12. Преобразование координат и импульсов, соответствующее повороту системы на угол $\delta\varphi$ вокруг оси, параллельной вектору \mathbf{n} , определяется формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &\rightarrow \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + [\varepsilon \mathbf{r}_i] \\ \mathbf{p}_i &\rightarrow \mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i + [\varepsilon \mathbf{p}_i], \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

где $\varepsilon = \mathbf{n} \delta\varphi$.

Теперь вычислим необходимую скобку Пуассона

$$\begin{aligned} \{M, H\} &= \left\{ \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i], H \right\} = - \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \right] - \\ &- \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{p}_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \right] = - \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, изменение гамильтониана при преобразовании (1) равно

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_{i=1}^N [\varepsilon \mathbf{r}_i] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^N [\varepsilon \mathbf{p}_i] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \varepsilon \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \right] + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{p}_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \right] = \varepsilon \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку $\delta H = 0$ для любого ε , из (3) и (2) вытекает, что $\{M, H\} = 0$. Следовательно, кинетический момент является интегралом движения.

9.13. Поскольку

$$M_i = [\mathbf{r} \mathbf{p}]_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

скобка Пуассона

$$\begin{aligned} \{M_i, H\} &= \frac{\partial M_i}{\partial x_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial M_i}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial x_l} = + \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \frac{p_k p_l}{m} - \\ &- \varepsilon_{ijk} \delta_{kl} x_j \frac{\partial U}{\partial r} \frac{x_l}{r} = \varepsilon_{ilk} \frac{p_k p_l}{m} - \varepsilon_{ijl} x_j x_l \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned}$$

(здесь везде по повторяющимся в произведении индексам происходит суммирование). Изменяя в сумме $\varepsilon_{ilk} p_k p_l$ индексы $k \rightarrow l$, получим

$$\varepsilon_{ilk} p_k p_l = \varepsilon_{ikl} p_l p_k = - \varepsilon_{ilk} p_k p_l.$$

Следовательно, $\varepsilon_{ijk} p_j p_k = 0$. Аналогично $\varepsilon_{ijk} x_j x_k = 0$. Таким образом, $\{M_i H\} = 0$, что и требовалось доказать.

9.14. Разложим функцию $F(q, p)$ в ряд Тейлора в точке $q=q(0)$, $p=p(0)$ фазового пространства

$$F(q, p) = F(0) + t \left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=0} + \frac{t^2}{2!} \left. \frac{d^2 F}{dt^2} \right|_{t=0} + \dots$$

Поскольку

$$\frac{dF}{dt} = \{FH\},$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \left\{ \frac{dF}{dt}, H \right\} = \{\{FH\} H\}.$$

Следовательно,

$$F(q, p) = F(0) + t \{FH\}|_0 + \frac{t^2}{2!} \{\{FH\} H\}|_0 + \dots$$

Для осциллятора $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m \omega_0^2 x^2}{2}$, следовательно,

$$\{Hx\} = -\frac{p}{m}, \quad [Hp] = m \omega_0^2 x.$$

Таким образом, если $F \equiv x$, то

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{t p_0}{m} - \frac{t^2}{2!} \omega_0^2 x_0 - \frac{t^3}{3!} \frac{\omega_0^2 p_0}{m} + \dots \\ &= x_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2!} + \frac{(\omega_0 t)^4}{4!} - \dots \right) + \\ &\quad + \frac{p_0}{m \omega_0} \left(t \omega_0 - \frac{(t \omega_0)^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m \omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Аналогично для $p(t)$ найдем

$$p(t) = p_0 \cos \omega_0 t - m \omega_0 x_0 \sin \omega_0 t.$$

9.15. Напишем гамильтониан системы осциллятор + поле излучения

$$H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x + \frac{1}{2} \sum_{\nu} (p_{\nu}^2 + \omega_{\nu}^2 q_{\nu}^2).$$

Здесь $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} q_{\nu} \mathbf{A}_{\nu}(\mathbf{r})$. Поскольку осциллятор точечный, можно пренебречь зависимостью $\mathbf{A}_{\nu}(\mathbf{r})$ от \mathbf{r} и заменить $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ на $\mathbf{A}(0)$. Тогда канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\nu} &= p_{\nu}, \quad \dot{p}_{\nu} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\nu}} = -\omega_{\nu}^2 q_{\nu} + \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \mathbf{A}_{\nu}; \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right), \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega_0^2 x; \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right), \quad \dot{p}_y = 0; \\ \dot{z} &= \frac{1}{m} \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right), \quad \dot{p}_z = 0. \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{\nu} + \omega_{\nu}^2 q_{\nu} &= \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \mathbf{A}_{\nu}; \\ \ddot{p}_{\nu} + \omega_{\nu}^2 p_{\nu} &= \frac{e}{mc} \left(\dot{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \dot{\mathbf{A}} \right) \mathbf{A}_{\nu}; \\ \ddot{p}_x + \omega_0^2 p_x &= \frac{e}{c} A_x; \quad \dot{p}_y = \dot{p}_z = 0; \\ y &= -\frac{e}{mc} \int_0^t A_y dt, \quad z = -\frac{e}{mc} \int_0^t A_z dt \end{aligned}$$

(здесь допущено, что в момент времени $t=0$ $p_y(0) = p_z(0) = 0$).

9.16. Используя выражение для энергии k -той моды

$$H_k = \frac{1}{2} (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2)$$

и гамильтониан молекулы, получим

$$\begin{aligned} \frac{dH_k}{dt} &= \{H_k, H\} = \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial H_k}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda}} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{\lambda}} \frac{\partial H}{\partial q_{\lambda}} \right) = \\ &= \sum_{\lambda} \left(\delta_{k\lambda} \omega_k^2 q_k \sum_{\nu} p_{\nu} \delta_{\nu\lambda} - p_k \delta_{\lambda k} \sum_{\nu} (\omega_{\nu}^2 q_{\nu} \delta_{\lambda\nu} + B_{\nu} \delta_{\nu\lambda}) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{dH_k}{dt} = \omega_k^2 q_k p_k - (\omega_k^2 p_k q_k + B_k p_k) = -B_k p_k.$$

§ 2. Уравнение Гамильтона—Якоби

9.17. Согласно определению действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(r, \dot{r}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{r}^2}{2} dt.$$

Поскольку закон движения имеет вид

$$r(t) = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) + r_1,$$

то

$$S = \frac{m}{2} \frac{(r_2 - r_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{m}{2} \frac{(r_2 - r_1)^2}{t_2 - t_1}.$$

9.18. Поскольку для одномерного гармонического осциллятора

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\kappa x^2}{2},$$

получим решение уравнения Лагранжа в виде

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (\omega^2 = \kappa/m).$$

Теперь определим постоянные интегрирования так, чтобы удовлетворить условиям $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$. Тогда

$$x(t) = \frac{1}{\sin \omega(t_2 - t_1)} [x_1 \sin \omega(t_2 - t) + x_2 \sin \omega(t - t_1)].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{m\omega^2}{2 \sin^2 \omega(t_2 - t_1)} [x_1^2 \cos 2\omega(t_2 - t) + x_2^2 \cos 2\omega(t - t_1) - \\ - 2x_1 x_2 \cos \omega(t_1 + t_2 - 2t)]. \end{aligned}$$

Интегрируя, получим действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_2 - t_1)} [(x_1^2 + x_2^2) \cos \omega(t_2 - t_1) - 2x_1 x_2].$$

При $\omega \rightarrow 0$

$$S = \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)},$$

т. е. совпадает с действием свободной точки в отсутствие поля.

9 20

$$S = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(z_2 - z_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{\omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] + \omega(x_1 y_2 - x_2 y_1) \right\},$$

где $\omega = \frac{eH}{mc}$.

9 21 Ищем решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 = 0$$

в виде

$$S = -E_0 t + W(\mathbf{r}).$$

Тогда получим

$$-E_0 + \frac{1}{2m} (\nabla W)^2 = 0,$$

откуда следует

$$W = \mathbf{p}_0 \mathbf{r}, \quad E_0 = \frac{p_0^2}{2m}.$$

Таким образом, находим полный интеграл

$$S = -\frac{p_0^2}{2m} t + \mathbf{p}_0 \mathbf{r}.$$

Закон движения получим согласно теоремы Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_0}{m} t.$$

9 22 Направим ось Oz вверх по вертикали. Тогда функция Гамильтона точки в декартовых координатах

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz,$$

а уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = 0.$$

Все переменные в этом уравнении разделяются, т. е. его полный интеграл

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + W(z)$$

при условии, что $W(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2m} \left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \right] + mgz = E_0.$$

Последнее уравнение легко интегрируется и приводит к функции

$$W = -\frac{1}{3m^2g} [2m(E_0 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{3/2}.$$

Окончательно

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y - \frac{1}{3m^2g} [2m(E_0 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{3/2}.$$

Отсюда на основании теоремы Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x + \frac{\alpha_1}{m^2g} [2m(E_0 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{1/2} = \beta_1,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = y + \frac{\alpha_2}{m^2g} [2m(E_0 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{1/2} = \beta_2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial E_0} = -t - \frac{1}{mg} [2m(E_0 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{1/2} = \beta_3.$$

Первые два из этих уравнений показывают, что траекторией частицы является парабола, а третье уравнение представляет собой закон движения.

Далее найдем, что компоненты импульса p_x , p_y сохраняются, т. е.

$$p_x = \partial S / \partial x = \alpha_1, \quad p_y = \partial S / \partial y = \alpha_2;$$

найдем также компоненту p_z , как функцию координат

$$p_z = \partial S / \partial z = [2m(E - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{1/2}.$$

9 23. Введем декартовы координаты x , y на наклонной плоскости, ось y направим по горизонтали. Тогда функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx \sin \alpha,$$

а гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) - mgx \sin \alpha.$$

Теперь запишем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right] - mgx \sin \alpha = 0$$

и найдем его полный интеграл

$$S = -E_0 t + p_0 y + f(x),$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2mE_0 - p_0^2 + 2m^2 g x \sin \alpha)^{1/2} dx = \\ &= \frac{1}{3m^2 g \sin \alpha} (2mE_0 - p_0^2 + 2m^2 g x \sin \alpha)^{3/2}. \end{aligned}$$

9.24. Записывая лагранжиан маятника

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi$$

и его обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi},$$

получим гамильтониан

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2ml^2} p_\varphi^2 - mgl \cos \varphi$$

и уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - mgl \cos \varphi = 0.$$

Далее найдем полный интеграл

$$S = -E_0 t + W(\varphi),$$

где

$$W(\varphi) = \int (2ml^2 (E_0 + mgl \cos \varphi))^{1/2} d\varphi,$$

и закон движения маятника

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E}$$

или

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{2ml^2}{E + mgl \cos \varphi} \right)^{1/2} d\varphi = t - t_0.$$

9.25. Выберем вектор-потенциал магнитного поля в виде

$$\mathbf{A} = -Hy \mathbf{n}_x$$

и запишем уравнение Гамильтона — Якоби ($e = -e_0$)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = 0. \quad (1)$$

Его полный интеграл имеет вид

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 z + f(y). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$f = \int \left(2mE - \alpha_2^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 \right)^{1/2} dy.$$

Далее согласно теореме Якоби получим

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E_0}, \quad t - t_0 = \int \frac{m dy}{\left[2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 \right]^{1/2}}; \quad (3)$$

$$x_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad x - x_0 = \int \frac{\left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} Hy \right) dy}{\left[2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 \right]^{1/2}}; \quad (4)$$

$$z_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \quad z - z_0 = \int \frac{\alpha_2 dy}{\left[2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (5)$$

Вычисляя интегралы (3), (4), найдем

$$y = \frac{\alpha_1 c}{eH} - \frac{\rho_{\perp} c}{eH} \sin \omega (t - t_0) \quad (6)$$

$$\left(\text{здесь } \omega = \frac{e_0 H}{mc}, \quad \rho_{\perp} = \sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2} \right),$$

$$x - x_0 = \frac{c}{e_0 H} \left[\rho_{\perp}^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (7)$$

Последнее уравнение является уравнением проекции траектории на плоскость OXY

$$(x - x_0)^2 + \left(\frac{c \alpha_1}{e_0 H} - y \right)^2 = \left(\frac{c \rho_{\perp}}{e_0 H} \right)^2.$$

Из (6) и (7) также следует

$$x - x_0 = \frac{\rho_{\perp} c}{e_0 H} \cos \omega (t - t_0).$$

Наконец, (3) и (5) приводят к закону движения вдоль напряженности поля

$$z = z_0 + \frac{\alpha_2}{m} (t - t_0).$$

9.26. Записывая вектор-потенциал в виде $\mathbf{A} = \frac{H}{2} \rho \mathbf{n}_\varphi$, получим уравнение Гамильтона — Якоби в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{e_0 H}{2c} \rho \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = 0.$$

Затем найдем полный интеграл в виде

$$S = -E_0 t + \alpha_1 \varphi + \alpha_2 z + f(\rho),$$

где

$$f(\rho) = \int \left[2m \left[E_0 - \frac{\alpha_2^2}{2m} - \frac{1}{2m} \left(\frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{e_0 H}{2c} \rho \right)^2 \right] \right]^{1/2} d\rho.$$

Отсюда получим закон движения

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E_0}; \quad t - t_0 = \int \frac{m d\rho}{\left[2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{e_0 H}{2c} \rho \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (1)$$

и уравнения орбиты

$$\varphi_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad \varphi - \varphi_0 = \int \frac{\left(\frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{e_0 H}{2c} \rho \right) d\rho}{\rho \sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{e_0 H}{2c} \rho \right)^2}}; \quad (2)$$

$$z_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \quad z - z_0 = \int \frac{\alpha_2 d\rho}{\left[2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{e_0 H}{2c} \rho \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (3)$$

Из (3) и (1) следует

$$z = z_0 + \frac{\alpha_2}{m} (t - t_0),$$

а (2) является уравнением проекции траектории заряда на плоскость oxy .

9.27. Выбирая потенциалы

$$\mathbf{A} = -Hy \mathbf{n}_x, \quad \varphi = -\mathcal{E} y,$$

запишем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + e_0 \mathcal{E} y + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

$$\left(H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e_0}{c} \mathbf{A} \right)^2 - e_0 \varphi \right).$$

Его полный интеграл

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 z + f(y),$$

где

$$f(y) = \int \left[2m(E_0 - e_0 \otimes y) - \alpha_2^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} Hy \right)^2 \right]^{1/2} dy.$$

9.28. Решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{e}{c} a \cos \omega t \right)^2 = 0$$

ищем в виде

$$S = \alpha r + S_1(t).$$

Для функции $S_1(t)$ получим уравнение

$$\frac{dS_1}{dt} + \frac{1}{2m} \left(\alpha - \frac{e}{c} a \cos \omega t \right)^2 = 0,$$

откуда

$$S_1(t) = -\frac{1}{2m} \int \left(\alpha - \frac{e}{c} a \cos \omega t \right)^2 dt.$$

Итак,

$$S = \alpha r - \frac{1}{2m} \int \left(\alpha - \frac{e}{c} a \cos \omega t \right)^2 dt.$$

Отсюда найдем закон движения в виде

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha},$$

т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{m} \left(\alpha t - \frac{e}{\omega c} a \sin \omega t \right).$$

9.29. Введем движущуюся вместе с плоскостью систему координат: ось Oy направим вниз по оси вращения, а ось Ox — вдоль плоскости. Далее обозначим через x и y координаты центра масс стержня на вращающейся вертикальной плоскости, через θ — угол наклона стержня к горизонтальной плоскости, а через J — главный центральный момент инерции стержня. Тогда получим лагранжиан стержня

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{J}{m} \dot{\theta}^2 + \frac{J}{m} \omega^2 \cos^2 \theta + \omega^2 x^2 \right) + mgy.$$

Отсюда найдем обобщенные импульсы

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_\theta = J\dot{\theta}$$

и гамильтониан стержня

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + \frac{p_\theta^2}{J/m} \right] - \frac{m\omega^2}{2} \left(\frac{J}{m} \cos^2 \theta + x^2 \right) - mgy.$$

Таким образом, получим уравнение Гамильтона — Якоби

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{m}{J} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \\ - \frac{J\omega^2}{2} \cos^2 \theta - \frac{m\omega^2 x^2}{2} - mgy = 0, \end{aligned}$$

которое перепишем в виде

$$\begin{aligned} 2m \frac{\partial S}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - m^2 \omega^2 x^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - 2m^2 gy \right] + \\ + \left[\frac{m}{J} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - Jm \omega^2 \cos^2 \theta \right] = 0 \end{aligned}$$

Ввиду того, что переменные разделяются

$$S = -H_0 t + \omega_1(x) + \omega_2(y) + \omega_3(\theta),$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega_1}{dx} \right)^2 - m^2 \omega^2 x^2 = 2\alpha_1, \quad \left(\frac{d\omega_2}{dy} \right)^2 - 2m^2 gy = 2\alpha_2, \\ -2mH_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{m}{J} \left(\frac{d\omega_3}{d\theta} \right)^2 - Jm \omega^2 \cos^2 \theta = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S = -H_0 t + \int \sqrt{m^2 \omega^2 x^2 + 2\alpha_1} dx + \int \sqrt{2m^2 gy + 2\alpha_2} dy + \\ + \sqrt{\frac{J}{m}} \int \sqrt{Jm \omega^2 \cos^2 \theta + 2mH_0 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2} d\theta. \end{aligned}$$

Далее согласно теореме Якоби получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{m^2 \omega^2 x^2 + 2\alpha_1}} - \sqrt{\frac{J}{m}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{Jm \omega^2 \cos^2 \theta + 2mH_0 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2}} = \beta_1, \\ \int \frac{dy}{\sqrt{2m^2 gy + 2\alpha_2}} - \sqrt{\frac{J}{m}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{Jm \omega^2 \cos^2 \theta + 2mH_0 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2}} = \beta_2, \\ t - t_0 = \sqrt{\frac{J}{m}} \int \frac{m d\theta}{\sqrt{Jm \omega^2 \cos^2 \theta + 2mH_0 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int \frac{m dx}{\sqrt{m^2 \omega^2 x^2 + 2\alpha_1}} = t - t_0 + m \beta_1,$$

$$\int \frac{m dy}{\sqrt{2m^2 gy + 2\alpha_2}} = t - t_0 + m \beta_2,$$

т. е.

$$\ln \left(\frac{m \omega x}{\sqrt{2\alpha_1}} + \sqrt{\frac{m^2 \omega^2 x^2}{2\alpha_1} + 1} \right) = \omega (t - t_0) + m \omega \beta_1,$$

$$\frac{1}{gm} \sqrt{2m^2 gy + 2\alpha_2} = t - t_0 + m \beta_2.$$

Из последних двух выражений видно, что закон движения центра масс стержня может быть представлен в виде (при соответствующих переобозначениях постоянных)

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 + Ct + D.$$

Что касается интеграла $t(\theta)$, определяющего закон вращения стержня относительно центра масс, то он сводится к эллиптическому интегралу 1-го рода.

9.30. Возьмем производную по координате x_i от левой части уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\nabla_k S - \frac{e}{c} A_k \right) \left(\nabla_k S - \frac{e}{c} A_k \right) + e \varphi = 0.$$

Пусть $S(\mathbf{r}, \alpha, t)$ — полный интеграл этого уравнения. Учитывая, что импульс, определенный соотношением

$$p_i = \nabla_i S - \frac{e}{c} A_i,$$

является функцией координат, найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) +$$

$$+ \frac{1}{m} \left\{ \nabla_k \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) - \frac{e}{c} \nabla_i A_k \right\} p_k + e \nabla_i \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - e \nabla_i \varphi + \frac{e}{c} (\nabla_i A_k - \nabla_k A_i) v_k.$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением

$$\mathbf{p} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \mathbf{H}],$$

поскольку

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}].$$

§ 3. Канонические преобразования. Интегральные вариационные принципы

9.31. Запишем необходимое и достаточное условие каноничности преобразования гамильтоновых переменных в виде

$$\sum_{i=1}^s (\mathcal{P}_i \delta Q_i - \mathcal{H} \delta t) - \sum_{i=1}^s (p_i \delta q_i - H \delta t) = -\delta \Phi_1(q, Q, t).$$

Полагая здесь

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^s q_i Q_i,$$

получим

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = H,$$

$$p_i = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad \mathcal{P}_i = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} = -q_i.$$

Рассмотренное преобразование по существу превращает «старые» импульсы в «новые» координаты, а «старые» координаты в «новые» импульсы.

9.32. Записывая основное условие каноничности преобразования гамильтоновых переменных в виде

$$\sum_{i=1}^s (\mathcal{P}_i \delta Q_i - \mathcal{H} \delta t) - \sum_{i=1}^s (p_i \delta q_i - H \delta t) = -\delta \Phi_1(q, Q, t)$$

и совершая здесь преобразование Лежандра к функции

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \sum_{i=1}^s \mathcal{P}_i Q_i,$$

получим условие каноничности в переменных

$$\delta \Phi_2 = \sum p_i \delta q_i + \sum Q_i \delta \mathcal{P}_i - (H - \mathcal{H}) \delta t.$$

Таким образом, для производящей функции $\Phi_2 = \sum q_i \mathcal{P}_i$ получим

$$p_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_j} = \mathcal{P}_i, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathcal{P}_i} = q_i,$$

$$\mathcal{H}' = H + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = H.$$

9.33. Запишем условие каноничности преобразования переменных в виде

$$\delta \Phi_1(q, Q, t) = \sum_{i=1}^s (p_i \delta q_i - \mathcal{P}_i \delta Q_i) - (H - \mathcal{H}') \delta t,$$

откуда следует

$$p_j = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j}, \quad \mathcal{P}_j = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_j}, \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^s (p_i \delta q_i - \mathcal{P}_i \delta Q_i) = \delta \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \delta t = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} \delta Q_i \right).$$

Правая часть этого равенства является полным дифференциалом, так как

$$\frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} \right).$$

9.34. Поскольку

$$p = \frac{\partial \Phi_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathcal{P}}, \quad \mathcal{H}' = H + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t},$$

находим

$$p = \mathcal{P} + bt, \quad Q = q - at,$$

т. е.

$$\mathcal{P} = p - bt, \quad Q = q - at$$

(«преобразование Галилея» в фазовом пространстве). Затем

$$\mathcal{H} = H + bQ - a\mathcal{P} + abt,$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}} - a, \quad \mathcal{P}^i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = -\frac{\partial H}{\partial Q} - b.$$

9.35. В рассматриваемом случае уравнение

$$p = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q} = m \omega q \operatorname{ctg} Q \quad (1)$$

позволяет найти $Q = Q(q, p)$, а функция

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q} = -\frac{1}{2} m \omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} \quad (2)$$

определяет зависимость вида $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Q, q)$. Из (1), (2) находим

$$q = \left(\frac{2\mathcal{F}}{m\omega} \right)^{1/2} \sin Q, \quad p = (2m\omega\mathcal{F})^{1/2} \cos Q. \quad (3)$$

Затем получим новый гамильтониан

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \omega \mathcal{F} + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \mathcal{F} \sin 2Q \quad (4)$$

и уравнения Гамильтона в новых переменных

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{F}} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2Q; \quad (5)$$

$$\dot{\mathcal{F}} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q} = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} \mathcal{F} \cos 2Q. \quad (6)$$

В случае $\dot{\omega} = 0$ найдем решение (5), (6):

$$Q = \omega t + \alpha; \quad \mathcal{F} = C.$$

Из (4) получим $C = E/\omega$, где E — полная энергия. Наконец, из (3) определим закон движения:

$$q = \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{1/2} \sin(\omega t + \alpha).$$

9.36. Так как производящая функция содержит только старые и новые координаты, то

$$p_i = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i}, \quad \mathcal{F}_i = \frac{-\partial \Phi_1}{\partial Q_i}, \quad \mathcal{H} = H.$$

Отсюда

$$p_1 = 2a_1^2 (q_1 + q_2) \operatorname{ctg} Q_1 + 2a_2^2 (q_1 - q_2) \operatorname{ctg} Q_2; \quad (1)$$

$$p_2 = 2a_1^2 (q_1 + q_2) \operatorname{ctg} Q_1 - 2a_2^2 (q_1 - q_2) \operatorname{ctg} Q_2; \quad (2)$$

$$\mathcal{F}_1 = a_1^2 (q_1 + q_2)^2 \operatorname{cosec}^2 Q_1; \quad \mathcal{F}_2 = a_2^2 (q_1 - q_2)^2 \operatorname{cosec}^2 Q_2; \quad (3)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} q_2^2. \quad (4)$$

Соотношение (4) с помощью (1), (2) представим в виде

$$\mathcal{F}_1 + \sqrt{3} \mathcal{F}_2 = 4a_1^4 (q_1 + q_2)^2 \operatorname{ctg}^2 Q_1 +$$

$$+ 4a_2^4 (q_1 - q_2)^2 \operatorname{ctg}^2 Q_2 + q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2,$$

откуда, используя (3), находим

$$a_1^2 = \frac{1}{4}, \quad a_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, имеем каноническое преобразование

$$p_1 = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) \operatorname{ctg} Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} (q_1 - q_2) \operatorname{ctg} Q_2,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) \operatorname{ctg} Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} (q_1 - q_2) \operatorname{ctg} Q_2,$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{4} (q_1 + q_2)^2 \operatorname{cosec}^2 Q_1, \quad \mathcal{P}_2 = \frac{1}{4} \sqrt{3} (q_1 - q_2)^2 \operatorname{cosec}^2 Q_2.$$

В переменных Q, \mathcal{P} уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\dot{Q}_1 = 1, \quad \dot{Q}_2 = \sqrt{3}, \quad \dot{\mathcal{P}}_1 = 0, \quad \dot{\mathcal{P}}_2 = 0.$$

Следовательно,

$$Q_1 = t + \alpha, \quad Q_2 = \sqrt{3} t + \beta; \quad \mathcal{P}_1 = b^2, \quad \mathcal{P}_2 = c^2.$$

Поэтому

$$(q_1 + q_2)^2 = 4b^2 \sin^2(t + \alpha), \quad (q_1 - q_2)^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} c^2 \sin^2(\sqrt{3} t + \beta),$$

т. е.

$$q_1 + q_2 = \pm 2b \sin(t + \alpha), \quad q_1 - q_2 = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}} c \sin(\sqrt{3} t + \beta) \right),$$

где α, β, b, c — постоянные интегрирования.

Полученные функции означают, что собственные частоты системы соответственно равны $1/(2\pi)$, $\sqrt{3}/(2\pi)$, а главные координаты соответственно пропорциональны $q_1 + q_2$ и $q_1 - q_2$.

9.37. Преобразование, порождаемое заданной производящей функцией, имеет вид

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \mathcal{P}_i + \varepsilon \frac{\partial f(q, \mathcal{P})}{\partial q_i}; \tag{1}$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{P}_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial f(q, \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}_i}.$$

С точностью до членов первого порядка по ε включительно оно эквивалентно преобразованию

$$\delta p_i = \mathcal{P}_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_i},$$

$$\delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (2)$$

Далее заметим, что изменение произвольной функции $F(q, p)$ при преобразовании (1) определяется равенством

$$\delta F = F(Q, \mathcal{P}) - F(q, p) = \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right) =$$

$$= \varepsilon \sum_i \left(-\frac{\partial p}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = \varepsilon \{Ff\}_i;$$

в частности, $\delta H = \varepsilon [Hf]$. Поскольку $f(q, p)$ — интеграл движения, т. е. $[Hf] = 0$, изменение $\delta H = 0$.

9.38. Производящая функция $S(q, \mathcal{P}, t)$ порождает каноническое преобразование

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{P}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

которое приводит к «новым» уравнениям Гамильтона

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_i}, \quad \dot{\mathcal{P}}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Полагая $\mathcal{H} = 0$, находим новые импульсы и координаты постоянными. Следовательно, производящая функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) = 0,$$

т. е. уравнению Гамильтона—Якоби. Более того, производящая функция $S(q, \mathcal{P}_0, t)$ есть полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, поскольку якобиан с элементами $\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \mathcal{P}_{j0}}$ отличен от нуля.

Соотношения $Q_{i0} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{P}_{i0}}$ ($i = 1, \dots, s$) позволяют найти координаты q , как функции времени и $2s$ констант Q_{i0} и \mathcal{P}_{i0} . Зависимость импульсов от координат q и времени определяется функциями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, s).$$

9.39. Запишем уравнение Гамильтона — Якоби для осциллятора

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = 0.$$

Полный интеграл этого уравнения

$$S(q, \alpha, t) = m\omega \int \left(\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2 \right)^{1/2} dq - \frac{1}{2} \alpha t.$$

Примем постоянную α за новый импульс \mathcal{P} . Затем из уравнений

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{P}}$$

найдем каноническое преобразование

$$p = m\omega \left(\frac{2\mathcal{P}}{m\omega^2} - q^2 \right),$$

$$Q = -\frac{1}{\omega} \arccos q \left(\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}} \right)^{1/2} - t, \quad p^2 + m\omega^2 q^2 = 2m\mathcal{P}.$$

В переменных Q, \mathcal{P} новый гамильтониан $\mathcal{H} = 0$. Следовательно, $\dot{Q} = 0, \dot{\mathcal{P}} = 0$, т. е. $Q = \beta, \mathcal{P} = E$, где $\beta, E = \text{const}$.

Таким образом,

$$q = \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{1/2} \cos(\omega t + \beta).$$

9.40. Используя изохронность вариаций, запишем принцип Гамильтона — Остроградского в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \right) dt = 0, \quad (1)$$

если

$$\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Интегрируя по частям члены, содержащие вариации скоростей, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \left(\frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (2)$$

Из (1) и (2) ввиду условий на вариации координат в t_0 и t_1 найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dt = 0.$$

Отсюда, поскольку δq независимы, следуют уравнения Лагранжа.

9.41. Согласно интегральному вариационному принципу для систем с любыми заданными силами и идеальными (голономными и линейными неголономными) связями

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \dot{q}_j + A_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2), \quad (2)$$

причем $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$ ($j=1, \dots, s_1$; $s_1 = 3N - k_1$); здесь N — число материальных точек системы; k_1 — число голономных связей; k_2 — число неголономных связей.

Используя выражение для виртуальной работы заданных сил

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s_1} Q_j \delta q_j,$$

представим (1) в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_j \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_j Q_j \delta q_j \right) dt = 0.$$

Отсюда, интегрируя вторую сумму по частям и имея в виду обращение в нуль вариаций координат при t_0 и t_1 , получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{s_1} \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right\} \delta q_j dt = 0. \quad (3)$$

Теперь обратим внимание на то, что вариации координат подчинены согласно (2) условиям

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \delta q_j = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2). \quad (4)$$

Затем используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Умножим каждое из уравнений (4) на «свой» неопределенный множитель κ_β и проинтегрируем во времени от t_0 до t_1 . Результаты этой процедуры сложим с (3) и найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{s_1} \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j + \sum_{\beta=1}^{k_2} \kappa_\beta A_{\beta j} \right\} \delta q_j dt = 0. \quad (5)$$

Число вариаций координат равно s_1 из них зависимых k_2 , а независимых $s_1 - k_2$ (рассматриваем случай, когда $3N > k_1 + k_2$, т. е. $s_1 > k_2$). Далее подберем k_2 множителей κ_β так, чтобы в (5) обратить в нуль коэффициенты при k_2 зависимых вариациях. Тогда, чтобы удовлетворить (5), следует потребовать равенства нулю остальных $s_1 - k_2$ коэффициентов при $s_1 - k_2$ независимых вариациях. Таким образом, из (5) найдем систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^{k_2} \kappa_\beta A_{\beta j} \quad (j = 1, 2, \dots, s_1), \quad (6)$$

которая совместно с (2) является системой $s_1 + k_2$ уравнений относительно $s_1 + k_2$ неизвестных функций $q_j (j = 1, 2, \dots, s_1)$ и $\kappa_\beta (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$.

9.42. Лагранжиан заряда

$$\mathcal{L} = T + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi,$$

а его обобщенный импульс

$$\mathcal{P} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

Поскольку обобщенная энергия сохраняется ($H = H_0$),

$$\mathcal{L} = 2T + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - H_0;$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(2T + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} \right) dt - H_0 (t_2 - t_1). \quad (1)$$

Таким образом, укороченное действие

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \left(2T + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} \right) dt, \quad (2)$$

а принцип Мопертюи принимает вид $\delta W = 0$. При $H = H_0$ и полных вариациях $\delta q_{i1} = \delta q_{i2} = 0$.

Принцип (2) можно представить в другой форме, исключив элемент времени dt . Действительно, поскольку

$$2T dt = m v dr,$$

(2) сводится к

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} \mathcal{P} dr = 0,$$

где \mathcal{P} — обобщенный импульс.

Можно также перейти к независимой переменной s — длине дуги траектории. В самом деле, учитывая, что полная энергия сохраняется, т. е. $H = E = T + e\varphi = E_0$, а также, что $v = \frac{ds}{dt}$, найдем

$$m v^2 dt = m v ds = \sqrt{2m(E_0 - e\varphi)} ds$$

и напишем принцип (2) в форме Якоби

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left[\sqrt{2m(E_0 - e\varphi)} ds + \frac{e}{c} A dr \right] = 0. \quad (3)$$

Теперь получим из (3) дифференциальное уравнение траектории. Замечая, что $ds = \sqrt{(dr)^2} = \sqrt{dx_i dx_i}$, а следовательно,

$$\delta ds = \frac{dx_i \delta dx_i}{ds} \Leftarrow \frac{dx_i}{ds} d\delta x_i,$$

изменим порядок дифференцирования и варьирования. Тогда найдем

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i ds + F \frac{dx_i}{ds} d\delta x_i + \frac{e}{c} A_i d\delta x_i + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i \right) = 0,$$

где $F = \sqrt{2m(E_0 - e\varphi)}$.

Отсюда, интегрируя второй и третий члены по частям, получим

$$\begin{aligned} & \left(F \frac{dx_i}{ds} + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x_i \Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i ds - \right. \\ & \left. - d \left(F \frac{dx_i}{ds} \right) \delta x_i - \frac{e}{c} dA_i \delta x_i + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь первая скобка равна нулю, так как интеграл варьируется при заданных значениях координат на пределах. Далее учтем, что

$$\begin{aligned}\delta A_i dx_i - dA_i \delta x_i &= \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k dx_i - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k \delta x_i = \\ &= \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) dx_k \delta x_i,\end{aligned}$$

и найдем

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \left(F \frac{dx_i}{ds} \right) + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \frac{dx_k}{ds} \right] ds \delta x_i = 0.$$

Ввиду произвольности δx_i отсюда следуют уравнения

$$\frac{d}{ds} \left(F \frac{dx_i}{ds} \right) = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \frac{dx_k}{ds}.$$

Упростим форму этих уравнений, поскольку $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, т. е.

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{\alpha ik} H_\alpha,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{\alpha ik} H_\alpha dx_k = \varepsilon_{ik\alpha} H_\alpha dx_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik\alpha} (H_\alpha dx_k - H_k dx_\alpha) = [d\mathbf{r}, \mathbf{H}]_i.$$

Таким образом, окончательно получим уравнение траектории

$$\frac{d}{ds} \left(F \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \mathbf{H} \right]. \quad (4)$$

Если в качестве независимой переменной выбрать некоторый параметр u , то действие приобретет вид

$$W = \int_{u_1}^{u_2} \left(\mu + \frac{e}{c} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{r}}{du} \right) du, \quad (5)$$

где

$$\mu = \sqrt{2m(E_0 - e\varphi)} \frac{ds}{du}.$$

Варьирование действия (5) приводит к уравнению траектории в форме уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{du} \frac{\partial F_1}{\partial \frac{d\mathbf{r}}{du}} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{r}} \quad (6)$$

с функцией

$$F_1 = \mu + \frac{e}{c} A \frac{dr}{du}.$$

В геометрической оптике аналогом принципа Якоби является принцип Ферми

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} n \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = 0,$$

где $n \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)$ — коэффициент преломления среды.

9.43. Согласно уравнению (4) задачи 9.42 уравнение траектории определяется уравнением

$$\frac{d}{ds} \left(F \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}},$$

где $F = \sqrt{2mE_0}$. Следовательно, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$, т. е.

$$\mathbf{r} = as + \mathbf{b}.$$

Поскольку $\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}_2$, находим

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{s_2 - s_1} (s_1 - s) + \mathbf{r}_1.$$

Таким образом, полное действие

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2mE_0} ds - E_0(t_2 - t_1) = \sqrt{2mE_0} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| - E_0(t_2 - t_1).$$

9.44. Время движения между точками $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$

$$r = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2g(y(a)-y)}} \quad (1)$$

зависит от вида функции $y(x)$. Каждой функции $y(x)$ соответствует определенное значение τ ; тем самым (1) является функционалом, а задача состоит в нахождении экстремума функционала.

Обозначая

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y(a)-y)}}, \quad (2)$$

найдем, как меняется значение

$$\tau = \int_a^b F(y, y') dx \quad (3)$$

при малом изменении функции $y \rightarrow y' = y + \delta y$, причем $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, а

$$\delta y|_a = 0, \quad \delta y|_b = 0. \quad (4)$$

Изменение $\delta\tau$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \int_a^b F(y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b F(y, y') dx = \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку δy и $\delta y'$ не являются независимыми, то, интегрируя второй член в (5) по частям и учитывая (4), получим

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y dx = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx, \end{aligned} \quad (6)$$

так как $\delta y' = (\delta y)'$. Приравнявая (6) нулю, найдем условие экстремума функционала

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (7)$$

а умножая (7) на y' , получим (так как F не зависит явно от x)

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C.$$

Наконец, подставляя сюда (2), найдем

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2g(y_a - y)}} = C. \quad (8)$$

Теперь с помощью подстановки

$$y_a - y = l(1 - \cos u), \quad l = \frac{1}{4gs^2} \quad (9)$$

из (8) получим

$$y'^2 = \frac{2}{1 - \cos u} - 1 = \frac{\sin^2 u}{(1 - \cos u)^2}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует

$$\frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \pm \frac{\sin u}{1 - \cos u},$$

тем самым

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \pm l(1 - \cos u), \\ x &= \pm l(u - \sin u) + C_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, искомой кривой является циклонда, которая определена здесь в параметрической форме соотношениями (11) и (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков, изд. 2. М., Изд-во МГУ, 1974.
2. Голдстейн Г. Классическая механика, изд. 2, перевод с англ. М., «Наука», 1975.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика, изд. 3. М., «Наука», 1973.
4. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. М., «Наука», 1969.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества, изд. 9. М., «Наука», 1976.
6. Анкупионов В. А., Кельман С. М., Сысоева Л. Г. ЖТФ, 34, 23, 1964.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, изд. 6. М., «Наука», 1973.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 5. М., «Наука», 1971.
9. Goldhaber A. Physical Review, 140, В, 1407, 1965.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
11. Терлецкий Я. П. ЖЭТФ, 21, № 5, 588, 1959.
12. Джексон Дж. Классическая электродинамика, перевод с англ. М., «Мир», 1965.
13. Павленко Ю. Г., Гальцов Д. В. «Изв. вузов», Радиофизика, 9, 1232, 1966.
14. Лонгмайр К. Физика плазмы, элементарный курс, перевод с англ. М., Атомиздат, 1966.
15. Ансельм А. И. Основы статистической физики и термодинамики. М., «Наука», 1973.
16. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, вып. 1, перевод с англ. М., «Мир», 1969.
17. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 4. М., «Наука», 1974.
18. Капица П. Л. УФН, 78, 181, 1962.
19. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971.
20. Соколов А. А., Кулькин А. Г., Павленко А. Г. Атомная энергия, 31, 292, 1971.
21. Капица П. Л. УФН, 44, 7, 1951.
22. Проблемы физической оптики и другие вопросы физики. Сборник статей, посвященный памяти С. Н. Вавилова. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
23. Капица П. Л. ЖЭТФ, 21, № 5, 588, 1951.
24. Гапонов А. В., Миллер М. А. ЖЭТФ, 34, 242, 1958.
25. Аскарьян Г. А. ЖЭТФ, 42, 1567, 1962.
26. Глазер В. Основы электронной оптики, перевод с нем. М., Гостехиздат, 1957.
27. Ватсон Дж. Теория бесселевых функций, ч. 1—2, перевод с англ. М., ИЛ, 1949.

ОЛЬХОВСКИЙ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ,
ПАВЛЕНКО ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ,
КУЗЬМЕНКОВ ЛЕОНИД СТЕФАНОВИЧ

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
ДЛЯ ФИЗИКОВ

Зав. редакцией *Т. Г. Батенина*

Редактор *Р. А. Бунатян*

Мл. редактор *В. В. Конкина*

Переплет художника *И. А. Князькова*

Технический редактор *Т. Е. Светличная*

Корректоры *И. А. Большакова, И. С. Хлыстова*

Тематический план 1977 г. № 66

ИБ № 261

Сдано в набор 29/XII 1976 г. Подписано к
печати 2/VIII 1977 г. Формат 60×90/16 Бумага
тип. № 3 Усл печ л. 24,5 Уч.-изд. л. 21,81
Изд. № 3176 Зак. 4 Тираж 16 840 Цена 90 коп.

Издательство Московского университета.

Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.

Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы