1. Сутність та основні поняття оптимального керування

1.1 Основні поняття теорії оптимального керування

Під **системою керування** розуміють сукупність об'єкта керування та керуючого пристрою. Стан об'єкта керування у фіксований момент часу t визначається впорядкованою множиною n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, які називають **фазовими координатами**. Вектор $\overline{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називають **фазовим вектором** або **фазовим станом системи**.

Фазові координати є функціями часу: $x_i = x_i\left(t\right), i = 1, ..., n$. Коли об'єкт керування рухається, тобто його фазові координати з часом змінюються, то точка з радіус-вектором $\overline{x}\left(t\right)$ описує криву, яку називають **фазовою кривою** або **фазовою траєкторією**. Керуючий пристрій створює **вхідний сигнал** або **керування** $\overline{u}\left(t\right) = \left(u_1\left(t\right), u_2\left(t\right), ..., u_m\left(t\right)\right)$, що діє на об'єкт керування та змінює його фазову траєкторію $\overline{x}\left(t\right)$.

Рух об'єкта під дією керування описують системою диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \\ i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \qquad (1.1)$$

У векторній формі систему (1.1) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}\left(t, \overline{x}, \overline{u}\right).$$

Якість роботи системи керування описується функціоналом

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t)\right)dt. \qquad (1.2)$$

Його називають **показником або функціоналом якості**. При досягненні об'єктом керування оптимального стану функціонал якості (1.2) досягає екстремального (найбільшого чи найменшого) значення.

Надалі вважатимемо, що керування $\overline{u}(t)$ є кусково-неперервною вектор-функцією, значення якої належать заданій замкненій обмеженій множині U, тобто задано умову:

$$u(t)\in U. \qquad (1.3)$$

Керування, що задовольняє обмеження (1.3), називають допустимим.

Сформулюємо **основну задачу оптимального керування**: з множини допустимих керувань потрібно обрати керування $\overline{u}^*$, яке переміщує об'єкт керування з початкового стану $\overline{x}(t_0)=\overline{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ у заданий кінцевий стан $\overline{x}(t_1)=\overline{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ так, що функціонал якості (1.2) досягає екстремуму. Таке керування $\overline{u}^*(t)$ та відповідний йому фазовий стан $\overline{x}^*(t)$ називають **оптимальним**.

1.2 Основні типи задач оптимального керування

До основних типів задач оптимального керування відносяться наступні задачі.

1. **Задача з обмеженими фазовими координатами**. У цьому випадку $\overline{x}(t)\in G\subset\mathbb{R}^n$, де G – задана обмежена множина з простору $\mathbb{R}^n$.

2. **Задача з фіксованим часом**. Задано час T переходу системи керування у кінцевий стан, $T=t_1-t_0$.

3. **Задача з рухомою межею**. Умову $\overline{x}(t_1)=\overline{b}$ заміняють умовою потрапляння фазового вектора $\overline{x}(t_1)$ у деяку задану область D: $\overline{x}(t_1)\in D$.

4. **Задача з вільною межею**. Тут кінцевий момент часу t_1 відомий, при цьому відсутні обмеження на положення вектора $\overline{x}(t_1)$.

5. **Задача оптимальної швидкодії**. Потрібно перемістити об'єкт керування з початкового положення $\overline{x}(t_0)=\overline{a}$ у кінцеве положення $\overline{x}(t_1)=\overline{b}$ за мінімальний час. Тут у виразі (1.2) для функціонала якості $f_0\equiv 1, I=t_1-t_0\to\min$.

6. **Задача синтезу оптимального керування**. У багатьох практичних задачах початковий стан об'єкта керування до початку його роботи невідомий, тому неможливо попередньо знайти вигляд оптимального керування $\overline{u}^*(t)$, його потрібно визначати як функцію поточних координат та часу: $\overline{u}^*=\overline{u}^*(t,x_1,x_2,...,x_n)$. Якщо права частина системи диференціальних рівнянь (1.1), які описують стан об'єкта керування, не містять явно змінну часу t, то оптимальне керування $\overline{u}^*$ шукають у вигляді функції, що залежить лише від поточних значень фазових координат: $\overline{u}^*=\overline{u}^*(x_1,x_2,...,x_n)$.

У основі розглянутої класифікації знаходяться види обмежень на фазові координати системи.

У задачах оптимального керування розрізняють наступні типи керування.

1. Керування $\overline{u}=\overline{u}(t)$, що залежить лише від часу, називають **програмним керуванням**.

2. Керування $\overline{u}=\overline{u}(t,x_1,x_2,...,x_n)$, що залежить від часу та всіх координат фазового вектора, називають **керуванням з повним зворотним зв'язком.**

3. Керування, що залежить від часу та частини фазових координат об'єкта керування, називають **керуванням з неповним зворотним зв'язком**.

1.3. Приклади задач оптимального керування

Задача 1. Нехай візок рухається по горизонтальним рейкам без тертя під дією зовнішньої сили, яку можна змінювати у відомих межах. Необхідно зупинити візок у заданому місці у найкоротший час.

Маємо задачу оптимальної швидкодії. Оскільки візок рухається по прямолінійній траєкторії, то його положення у момент часу t визначається однією координатою $x(t)$. Додатний напрям осі Ox спрямуємо у сторону руху візка. Нехай m – його маса, початкове положення $x(0)=0$, початкова швидкість $\dot{x}(0)=v_0$, $u=u(t)$ – зовнішня сила, обмеження на неї $u_1 \le u(t) \le u_2$, T – час руху візка, $x(T)=a$ – задана точка зупинки візка, швидкість у момент зупинки $\dot{x}(T)=0$.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{cases} x(0)=0, \dot{x}(0)=v_0, \\ x(T)=a, \dot{x}(T)=0, \\ u_1 \le u \le u_2, \\ T=\int\limits_0^T dt \to min. \end{cases}$$

Задача 2. Знайти керування тягою двигунів ракети, що максимізує горизонтальну дальність її польоту за умови, що значення тяги не перевищує задану величину u_0 та пропорційна швидкості витрати палива.

Нехай початок координат відповідає початковому положенню ракети при $t=0,$ $v_1(t)$ та $v_2(t)$ – проекції вектора швидкості ракети на координатні осі Ox та Oy. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ – координати ракети, $m(t)$ – маса ракети з паливом, $u_1(t)$ та $u_2(t)$ – проекції вектора тяги на відповідно на ос іOx та Oy.

Тоді $v_1(t)=\dot{x}(t)$, $v_2(t)=\dot{y}(t)$, $u_3(t)=-\dot{m}(t)$ – швидкість зменшення маси ракети. Стан ракети у момент часу t визначається фазовим вектором

$$\left(x(t),y(t),v_1(t),v_2(t),m(t)\right),$$

керування визначається вектором

$$\overline{u}(t)=\left(u_1(t),u_2(t),u_3(t)\right).$$

Нехай c – коефіцієнт пропорційності величини тяги. За другим законом Ньютона отримуємо диференціальні рівняння закону руху ракети у вигляді:

$$\begin{cases}\dot{x}=v_1(t),\\ \dot{y}=v_2(t),\\ \dfrac{d}{dt}\left(m(t)v_1(t)\right)=cu_3(t)u_1(t),\\ \dfrac{d}{dt}\left(m(t)v_2(t)\right)=cu_3(t)u_2(t)-m(t)g,\\ \dot{m}=-u_3.\end{cases} \tag{1.4}$$

Обмеження на керування мають вигляд:

$$\begin{cases}u_1^2+u_2^2\le u_0^2,\\ 0\le u_3\le u_3^{\max}.\end{cases}, \tag{1.5}$$

Положення ракети у початковий та кінцевий моменти часу визначається рівностями:

$$x(0)=0,\ y(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_{10},\ \dot{y}(0)=v_{20},\ m(0)=m_0,\ y(t_1)=0. \tag{1.6}$$

У (1.6) t_1 – час завершення польоту.

Функціонал якості має вигляд:

$$I = x(t_1) = \int_0^{t_1} v_1(t)\,dt \to \max . \qquad (1.7)$$

Рівності (1.4) – (1.7) утворюють математичну модель задачі.

<u>**Задача 3**</u> (найпростіша задача варіаційного числення). Знайти функцію $x(t)$, що надає екстремум заданому функціоналу $I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})dt$ та задовольняє крайові умови $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Цю задачу можна записати у вигляді задачі оптимального керування. Для цього введемо керування $u(t) = \dot{x}(t)$ та нову фазову змінну $y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x, u)ds$. Отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = u,$$
$$\dot{y} = f(t, x, u)$$

з крайовими умовами $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_0) = 0$, функціонал якості $y(t_1) \to \min$.

1.4 Основні особливості задачі оптимального керування

У курсі варіаційного числення розглянуто варіаційну задачу Лагранжа на умовний екстремум функціонала

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n\right) dt$$

за наявності додаткових умов (зв'язків)

$$f_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n\right)=0, i=1,2, \ldots, s, s<n$$

та крайових умов $x_j\left(t_0\right)=x_{j0}, x_j\left(t_1\right)=x_{j1}, j=1,2, \ldots, n$, узгоджених з рівняннями зв'язків.

Вектор-функція $\bar{x}(t)=\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$, що надає розв'язок задачі Лагранжа, повинна задовольняти рівняння Ейлера для допоміжного функціонала

$$I^*=\int_{t_0}^{t_1}\left(f_0+\sum_{i=1}^s \lambda_i(t) f_i\right) dt=\int_{t_0}^{t_1} L dt .$$

У цій рівності $L=f_0+\sum_{i=1}^s \lambda_i(t) f_i$ – функція Лагранжа.

Основна задача оптимального керування також є варіаційною задачею на умовний екстремум, проте вона має наступні основні відмінності від задачі Лагранжа.

1. Значення однієї з невідомих функцій – керування $\bar{u}(t)$ належить замкненій множині U, звичайно це обмеження у вигляді умови $|\bar{u}(t)| \leq u_0=\text{const}$.

2. Підінтегральна функція та рівняння зв'язків не залежать від похідних $\dot{u}_i(t)$ компонентів вектора керування, що спрощує рівняння Ейлера.

3. У задачі Лагранжа необхідні умови екстремуму функціонала отримані за умови, що невідомі функції є двічі диференційованими. У задачі оптимального керування допускаються також кусково-неперервні функції, що мають точки розриву типу стрибка.

Ці особливості основної задачі оптимального керування ускладнюють застосування до її розв’язання методів класичного варіаційного числення.