Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

М.І. Клименко, І.Г. Ткаченко

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Освітньо-кваліфікаційний рівень «Бакалавр»
Спеціальність «Фізика», «Прикладна фізика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від

Запоріжжя
2014

УДК 511.2 + 512.62
ББК 22.132я73.

Клименко М.І., Ткаченко І.Г. Інтегральне числення: Навчальний посібник для студентів напряму підготовки «Фізика», «Прикладна фізика». – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – 165 с.

У даному посібнику наведено теоретичний матеріал з інтегрального числення функції однієї та кількох змінних. Текст містить достатню кількість прикладів, які допоможуть студентам при вивченні цього розділу курсу «Математичний аналіз». Наведені також варіанти індивідуальних типових завдань для самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності «Фізика» та «Прикладна фізика».

Рецензент *С.М. Гребенюк*

Відповідальний за випуск *І.Г. Ткаченко*

ЗМІСТ

ВСТУП

Основою математичної підготовки фізиків є математичний аналіз, що є повсякденним інструментом сучасних фізичних досліджень. Наукове пізнання законів природи є неможливим без застосування сучасного апарату математичного аналізу, зокрема, інтегрального числення. Розв’язання проблем, що виникають у процесі фізичних досліджень, потребує застосування методів інтегрального числення функцій однієї та кількох змінних, основні з яких розглянуто у даному посібнику.

До уваги читачів пропонується навчальний посібник «Інтегральне числення», призначеного для студентів першого курсу фізичного факультету, що навчаються за напрямами «Фізика» та «Прикладна фізика». Інтегральне числення є невід’ємною складовою частиною курсу математичного аналізу, що викладається студентам – фізикам на протязі першого – третього семестрів. Успішне оволодіння ідеями та методами інтегрального числення дає можливість підготувати базу для подальшого вивчення курсів «Диференціальні рівняння», «Основи векторного та тензорного аналізу», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Рівняння математичної фізики».

У даному посібнику висвітлюються основні поняття, ідеї та методи інтегрального числення функції однієї та кількох змінних, а також приклади їх застосування. При підборі матеріалу враховано основні сучасні тенденції розвитку математичного аналізу. Автори сподіваються, що студенти, які опанують навчальним матеріалом у межах, пропонованих посібником, матимуть надійну основу для подальшого успішного вивчення математичного аналізу та інших математичних дисциплін.

1 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1 Невизначений інтеграл

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Одним з можливих фізичних трактувань цієї задачі є визначення швидкості руху за функцією, що задає пройдений шлях за час руху. Можна розглядати обернену задачу, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Остання задача зводиться до знаходження функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$. Ця задача розв'язується за допомогою невизначеного інтеграла.

Означення 1.1 *Функцію $F(x)$ називають **первісною** функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційовна на $(a;b)$ і $F'(x)=f(x)$, $x\in(a;b)$.*

Наприклад, первісною функції $f(x)=x^2$, $x\in R$, є функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$. Очевидно, що первісними будуть також функції $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-2$ і взагалі $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, де C – довільна стала, оскільки $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$, $x\in R$.

Цей приклад свідчить, що задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно, тобто, якщо для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, то ця первісна не одна.

Теорема 1.1 *Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд $F(x)+C$, де C – довільна стала.*

Доведення. Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша первісна функції $f(x)$, відмінна від $F(x)$. Тоді $\Phi'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$. Отже, на $(a;b)$

$$\left(\Phi(x)-F(x)\right)'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Це означає, що $\Phi(x)-F(x)=C$. Отже, $\Phi(x)=F(x)+C$. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що множина функцій $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, а C – довільна стала, визначає всю сукупність первісних функції $f(x)$.

Означення 1.2 *Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ і C – довільна стала, то вираз $F(x)+C$ називають **невизначеним інтегралом***

функції $f(x)$ *на цьому проміжку і позначають символом* $\int f(x)dx$.

Таким чином, символ $\int f(x)dx$ означає множину всіх первісних функції $f(x)$. Знак $\int$, введений Лейбніцем, називають *знаком інтегралу*, вираз $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, x – *змінною інтегрування*. Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають *інтегруванням* цієї функції.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ є множиною кривих $F(x)+C$, таких, що $F'(x)=f(x)$. Кожна з цих кривих називається *інтегральною кривою* і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі вздовж осі Oy. Щоб з цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0)$ у якій-небудь точці $x_0 \in (a;b)$.

З означення невизначеного інтеграла випливають наступні його властивості.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює його підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Отже, знаки похідної та невизначеного інтеграла взаємно знищуються, оскільки операції диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими. Внаслідок цього вірність виконання операції інтегрування можна перевірити диференціюванням отриманого виразу. Наприклад, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, оскільки $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3$.

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Ця властивість справедлива для довільного скінченного числа доданків.

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має

неперервну похідну, то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

Цю властивість називають *інваріантністю формули інтегрування*. Вона означає, що формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною неперервно диференційовною функцією незалежної змінної. Користуючись властивістю інваріантності формули інтегрування, можна з однієї формули для обчислення невизначеного інтеграла отримати нескінченну кількість таких формул. Наприклад, з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ одержимо формулу $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$, де $u(x)$ – довільна неперервно диференційовна функція.

7. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, де a та b – довільні константи, $a \neq 0$.

Ця властивість випливає з попередньої властивості при $u = ax + b$. Тоді $du = a\,dx$ і $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. Наприклад,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \Rightarrow \int \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$$

Наведемо таблицю основних інтегралів. Частина формул з цієї таблиці безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, оберненої до операції диференціювання, та таблиці похідних. Справедливість інших формул можна перевірити диференціюванням. Інтеграли цієї таблиці називають *табличними*. **<u>Їх треба знати напам'ять!</u>**

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справедливі наступні формули.

1. $\int du = u + C$.
2. $\int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C$, $k \neq -1$.
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
5. $\int e^u du = e^u + C$.
6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$.
7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$.
8. $\int \operatorname{sh} u \cdot du = \operatorname{ch} u + C$.
9. $\int \operatorname{ch} u \cdot du = \operatorname{sh} u + C$.
10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.
11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$.
12. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$.
13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + \alpha}\right| + C$.

14. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\ \frac{u}{a} + C$.   15. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a} + C$.

Операція інтегрування є значно складнішою, ніж операція диференціювання. У диференціальному численні таблиця похідних і правила диференціювання функцій дають змогу знайти похідну довільної диференційовної функції. У інтегральному численні таких простих і універсальних правил інтегрування не існує. Тут потрібен індивідуальний підхід до кожної підінтегральної функції.

У найпростіших випадках обчислити невизначений інтеграл можна за допомогою основних властивостей, розглянутих вище, а також таблиці інтегралів. Такий метод обчислення інтегралів називають безпосереднім інтегруванням. При цьому використовуються елементарні перетворення підінтегральної функції.

Приклад 1.1 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$**.**

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз, використавши основну тригонометричну тотожність:

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Підставимо отриманий вираз в інтеграл. Використавши формули таблиці основних інтегралів, отримуємо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Відповідь. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

Приклад 1.2 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}$**.**

Розв'язання. Представимо підінтегральну функцію у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{4}\,\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2-3} - \frac{1}{x^2+1}\right).$$

З врахуванням формул таблиці основних інтегралів знаходимо:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x^2-3} - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

Відповідь. $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \operatorname{arctg} x\right) + C$.

Приклад 1.3 Знайти інтеграл $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx}{\sqrt[3]{x}}$**.**

Розв'язання. У підінтегральній функції поділимо чисельник на знаменник:

$$\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1+3x^{\frac{1}{2}}+3x+x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{7}{6}}.$$

Інтегруємо отриману суму степеневих функцій за відповідною формулою таблиці основних інтегралів:

$$\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx}{\sqrt[3]{x}}=\int\left(x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{7}{6}}\right)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C.$$

Відповідь. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$.

Приклад 1.4 Знайти інтеграл $\int\cos^4 x dx$.

Розв'язання. Понизимо степінь у підінтегральному виразі.

$$\cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}.$$

Підставивши отриманий вираз у інтеграл, знаходимо:

$$\int\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

Тут ми використали властивість 7 невизначеного інтеграла.

Відповідь. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

Приклад 1.5 Знайти інтеграл $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину у підінтегральному виразі, отримаємо:

$$\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx=\int\frac{\left(x^2-1\right)+4}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Відповідь. $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Приклад 1.6 Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції:

$$4x^2+4x+5=\left(2x\right)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1+4=\left(2x+1\right)^2+4.$$

Підставивши у підінтегральний вираз, отримаємо інтеграл, що можна обчислити безпосереднім інтегруванням повної таблиці основних інтегралів:

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C.$$

Відповідь. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$.

Приклад 1.7 Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v=3t^2+2$. Знайти закон руху тіла $s(t)$, якщо $s(0)=0$.

Розв'язання. Маємо, що задана швидкість тіла, яка є похідною від його закону руху, дорівнює: $v=s'(t)=3t^2+2$. Звідси знаходимо:

$$s(t)=\int v(t)dt=\int\left(3t^2+2\right)dt=t^3+2t+C.$$

Оскільки в початковий момент часу $s=0$, то маємо:

$$s(0)=C=0\Rightarrow s(t)=t^3+2t.$$

Відповідь. t^3+2t.

1.2 Метод підстановки (заміни змінної)

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема 1.2 *Нехай $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, тобто $\int f(x)dx=F(x)+C$, $x\in(a;b)$, і нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена та диференційовна на проміжку $(\alpha;\beta)$, причому множиною значень цієї функції є проміжок $(a;b)$. Тоді має місце формула*:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C=F(x)+C. \qquad (1.1)$$

Доведення. Згідно з правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$\left(F(\varphi(t))\right)'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

і тоді формула (1.1) випливає з властивості 1 невизначеного інтеграла, розглянутій у п. 1.1. Теорема доведена.

Доведена теорема, як правило, застосовується одним з двох способів.

1. Інтеграл $\int g(x)dx$ записують у вигляді:

$$\int g(x)dx=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+C.$$

На практиці зручнішим є наступний запис:

$$\int g(x)dx=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\left\|\begin{matrix}\varphi(x)=u,\\ \varphi'(x)dx=du\end{matrix}\right\|=\int f(u)du=$$
$$=F(u)+C=F(\varphi(x))+C.$$

2. Інтеграл $\int g(x)dx$ представляють у вигляді:

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де функція $x=\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\psi(x)$ і для функції $g(\varphi)\cdot\varphi'$ відома первісна G, тоді

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)+C = G(\psi(x))+C. \qquad (1.2)$$

При першому способі заміни змінної функція $\varphi(x)$, присутня у підінтегральному виразі, вводиться під знак диференціала: $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x)) = du$, $u=\varphi(x)$. Введення під знак диференціала використовується, коли підінтегральний вираз має вигляд: $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

При використанні другого способу штучно вводиться нова функція $x=\varphi(t)$ так, щоб новий підінтегральний вираз $g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ був зручнішим для інтегрування, ніж $g(x)dx$.

Після застосування будь-якого способу заміни змінної потрібно виконати зворотній перехід від нової змінної u чи t до заданої змінної x.

Таким чином, при інтегруванні методом заміни змінної виконуються підстановки двох видів: $u=\varphi(x)$ або $x=\varphi(t)$. Ці підстановки підбирають так, щоб отримані після відповідних перетворень нові інтеграли були табличними або зводилися до відомих. Загальних методів підбору підстановок не існує, але можна вказати підстановки, які доцільно використовувати при інтегруванні певних класів функцій.

Розглянемо приклади на застосування методу заміни змінної для знаходження невизначених інтегралів.

Приклад 1.8 Знайти інтеграл $\int \frac{(5\ln x+3)^3}{x}dx$**.**

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз є добутком функції, що залежить від $\varphi(x)=\ln x$ на диференціал $d(\varphi(x)) = d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, то доцільно використати перший спосіб заміни змінної – введення під знак диференціала. Нехай $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$. Тоді отримуємо:

$$\int \frac{(5\ln x+3)^3}{x}dx = \left\| \begin{matrix} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{matrix} \right\| = \int (5u+3)^3 du = \frac{1}{5}\frac{(5u+3)^4}{4}+C = \frac{(5\ln x+3)^4}{20}+C.$$

Відповідь. $\frac{(5\ln x+3)^4}{20}+C$.

Приклад 1.9 Знайти інтеграл $I=\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+3}}$**.**

Розв'язання. У підінтегральному виразі $e^x dx = d(e^x)$, $e^{2x} = (e^x)^2$, тому застосуємо підстановку $u = e^x$. Інтеграл I набуває вигляду $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3}}$. Отримали табличний інтеграл:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+3}\right) + C = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+3}\right) + C.$$

Відповідь. $\ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+3}\right) + C$.

Приклад 1.10 Обчислити інтеграл $I = \int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз містить функцію $u = 1 + x + x^2$, а також, у вигляді множника, її диференціал $du = (2x+1)dx$. Тому, використавши підстановку $u = 1 + x + x^2$, отримуємо табличний інтеграл:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2} + C.$$

Відповідь. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2} + C$.

Приклад 1.11 Знайти інтеграл $I = \int x(1-x)^{20}\,dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл можна знайти, використавши для піднесення до 20-го степеня формулу бінома Ньютона, проте більш доцільно скористатися методом підстановки. Оскільки $x = 1 - (1-x)$, то інтеграл I можна представити у вигляді:

$$I = \int x(1-x)^{20}\,dx = \int \left(1 - (1-x)\right)(1-x)^{20}\,dx.$$

Виконаємо підстановку $1 - x = u,\ dx = -du$. Отримуємо інтеграл:

$$I = \int (u-1)\cdot u^{20} du = \int \left(u^{21} - u^{20}\right) du = \frac{u^{22}}{22} - \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(1-x)^{22}}{22} - \frac{(1-x)^{21}}{21} + C.$$

Відповідь. $\frac{(1-x)^{22}}{22} - \frac{(1-x)^{21}}{21} + C$.

Приклад 1.12 Знайти інтеграл $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $d\left(x^n\right) = nx^{n-1}dx$, доцільно виконати підстановку $u = x^n$. Маємо інтеграл

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2} = \frac{1}{n}\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a} + C.$$

Відповідь. $\frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a} + C$.

Приклад 1.13 Знайти інтеграл $\int \frac{5^x\,dx}{9+25^x}$**.**

Розв'язання. Для спрощення інтеграла застосуємо підстановку $u=5^x$, $du=\ln 5\cdot 5^x\,dx$. Отримуємо табличний інтеграл:

$$\int \frac{5^x\,dx}{9+25^x}dx=\frac{1}{\ln 5}\int \frac{du}{9+u^2}=\frac{1}{3\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}+C=\frac{1}{3\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{5^x}{3}+C.$$

Відповідь. $\frac{1}{3\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{5^x}{3}+C$.

Розглянемо приклади використання другого способу введення підстановки – використання заміни $x=\varphi(t)$.

Приклад 1.14 Знайти інтеграл $I=\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$**.**

Розв'язання. Для раціоналізації підінтегрального виразу використаємо підстановку $x=t^6$, диференціал $dx=6t^5dt$. Маємо інтеграл:

$$I=6\int \frac{\left(1+t^3\right)t^5dt}{t^3-t^2}=6\int \frac{t^3+t^6}{t-1}dt=6\int \frac{(t^3-1)+\left(t^6-1\right)+2}{t-1}dt=6\left(I_1+I_2+I_3\right).$$

Знаходимо, що

$$I_1=\int \frac{t^3-1}{t-1}dt=\int \left(t^2+t+1\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+C_1;$$

$$I_2=\int \frac{t^6-1}{t-1}dt=\int \left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)dt=\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+C_2;$$

$$I_3=\int \frac{2}{t-1}dt=2\ln|t-1|+C_3.$$

Тоді

$$I=6\left(I_1+I_2+I_3\right)=6\left(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{2t^3}{3}+t^2+2t+2\ln|t-1|\right)+C.$$

Виконавши зворотну підстановку $t=\sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:

$$I=6\left(\frac{x}{6}+\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{4}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3}+x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+2\ln\left|x^{\frac{1}{6}}-1\right|\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{x}{6}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{2\sqrt{x}}{3}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+2\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C.$$

Відповідь. $x+\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+4\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}+12\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

Розглянемо підстановки, що використовуються при інтегруванні виразів виду $\sqrt{a^2\pm x^2}$, $\sqrt{x^2\pm a^2}$, $a>0$. Тут можливі наступні випадки.

1. Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{a^2 - x^2}$, доцільно використовувати підстановку $x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. У цьому випадку отримуємо $dx = a\cos t dt, \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$.

2. Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2 - a^2}$, позбутися ірраціональності можна за допомогою підстановки $x = \frac{a}{\cos t}, 0 < t < \frac{\pi}{2}$. Тоді $dx = \frac{a\sin t dt}{\cos^2 t}, \sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t$.

3. У випадку, коли під знаком інтеграла маємо корінь $\sqrt{a^2 + x^2}$, можна позбутися радикала, використавши заміну змінної $x = a\,\mathrm{tg}\,t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Маємо $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}, \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}$.

У цих випадках можуть також бути використані гіперболічні підстановки, а саме: для випадку 1 – $x = a\,\mathrm{th}\,t$, для випадку 2 – $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, для випадку 3 – $x = a\,\mathrm{sh}\,t$.

Приклад 1.15 Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(x^2 + a^2\right)^3}}$ **.**

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить корінь $\sqrt{a^2 + x^2}$, то маємо випадок 3, тому використаємо підстановку $x = a\,\mathrm{tg}\,t$. Отримуємо:

$$I = \int \frac{a^3 \mathrm{tg}^2 t \cos^3 t dt}{a^3 \cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{1 - \sin^2 t} = \left\| \begin{matrix} \sin t = u, \\ \cos t dt = du \end{matrix} \right\| = \int \frac{u^2 du}{1 - u^2}.$$

Виконаємо перетворення у отриманому інтегралі:

$$\int \frac{u^2 du}{1 - u^2} = -\int \frac{(1 - u^2) - 1}{1 - u^2} du = -\int du + \int \frac{du}{1 - u^2} = -u - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| + C =$$

$$= -\sin t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t - 1}{\sin t + 1}\right| + C.$$

Оскільки $x = a\,\mathrm{tg}\,t, t = \mathrm{arctg}\frac{x}{a}$, то, скориставшись тотожністю $\sin\left(\mathrm{arctg}\,\alpha\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$, при $\alpha = \frac{x}{a}$ маємо $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. Остаточно отримуємо:

$$I = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - \sqrt{a^2 + x^2}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}\right| + C.$$

Відповідь. $-\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{a^2+x^2}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right|+C$.

Приклад 1.16 Знайти інтеграл $I=\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Для даного інтеграла маємо випадок 1, тому використовуємо заміну змінної $x=a\sin t$:

$$I=\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{a^4}{4}\int \sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{a^4}{8}\int\left(1-\cos 4t\right)dt=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C.$$

Виконаємо зворотну заміну $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$. Виразимо через змінну x величину $\sin 4t$:

$$\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=4\sin t\cos t\left(1-2\sin^2 t\right).$$

При $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ маємо $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$.

Для $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$ маємо, що $\sin t=\dfrac{x}{a}$, $\cos t=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, $a>0$.

Підставивши ці залежності у вираз для $\sin 4t$, отримаємо

$$\sin 4t=\frac{4x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{8x^3}{a^4}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Підставимо цей вираз у отримане значення інтеграла I:

$$I=\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{a^2x}{8}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x^3}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Відповідь. $\dfrac{a^2}{8}\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{x\left(2x^2-a^2\right)}{8}\sqrt{a^2-x^2}+C$.

Приклад 1.17 Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить $\sqrt{x^2-a^2}$, то для даного інтеграла доцільно використати підстановку випадку 2: $x=\dfrac{a}{\cos t}$, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$. У результаті підстановки отримуємо:

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\int\frac{a\,\mathrm{tg}\,t\cos t}{a}\cdot\frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}=a\int \mathrm{tg}^2 t\,dt=a\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt=$$

$$=a\left(\mathrm{tg}\,t-t\right)+C.$$

Перейдемо до змінної x:

$$\cos t = \frac{a}{x},\ t = \arccos\frac{a}{x},\ \mathrm{tg}\, t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Таким чином, отримуємо значення інтеграла

$$I = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{x} + C.$$

Відповідь. $\sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{x} + C$.

1.3 Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні. Тоді диференціал їх добутку $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Інтегруючи цю рівність, отримуємо:

$$\int d(uv) = uv = \int u \cdot dv + \int v \cdot du.$$

Звідси отримуємо *формулу інтегрування частинами*:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \qquad (1.3)$$

Формула інтегрування частинами (1.3) дає змогу звести знаходження інтеграла $\int u \cdot dv$ до знаходження інтеграла $\int v \cdot du$, який може виявитися набагато простішим, ніж вихідний інтеграл $\int u \cdot dv$.

Інтегрування частинами полягає у тому, що підінтегральний вираз заданого інтеграла записують у вигляді добутку двох співмножників: u та dv. Потім, після знаходження du та $v = \int dv$, використовують формулу інтегрування частинами (1.3). При цьому у знайденому виразі для v звичайно приймають $C = 0$. Інколи цю формулу доводиться використовувати декілька разів.

Наведемо деякі типи інтегралів, для обчислення яких зручно використовувати метод інтегрування частинами.

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – задане число. Тут зручно прийняти $u = P(x)$, а dv позначити інший співмножник у підінтегральному виразі.

2. Інтеграли виду $\int P(x)\arcsin x\, dx$, $\int P(x)\arccos x\, dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}\, x\, dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}\, x\, dx$, $\int P(x)\ln x\, dx$. Тут зручно прийняти $P(x)dx = dv$, а за u позначити інший співмножник.

3. Інтеграли виду $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, де a та b – задані числа, знаходять дворазовим інтегруванням частинами. За u можна прийняти функцію e^{ax}.

Приклад 1.18 Знайти інтеграл $\int(2x+1)e^{3x}dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (1.3) інтегрування частинами. Виберемо $u=2x+1$, $dv=e^{3x}dx$. Тоді $du=2dx$, $v=\int dv=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}$. Тоді за формулою (1.3) отримуємо:

$$\int(2x+1)e^{3x}dx=\frac{2x+1}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx=\frac{2x+1}{3}e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C= \\ =\frac{6x+1}{9}e^{3x}+C.$$

Відповідь. $\frac{6x+1}{9}e^{3x}+C$.

Приклад 1.19 Знайти інтеграл $\int e^{ax}\sin bxdx$.

Розв'язання. Для знаходження даного інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами, для чого виберемо $u=e^{ax}$, $dv=\sin bxdx$. Тоді $du=ae^{ax}dx$, $v=\int\sin bxdx=-\frac{1}{b}\cos bx$. За формулою (1.3) знаходимо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{e^{ax}}{b}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

До інтеграла $\int e^{ax}\cos bxdx$ у правій частині отриманої рівності ще раз застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\left\|\begin{matrix}u=e^{ax}, dv=\cos bxdx,\\ du=ae^{ax}dx, v=\frac{1}{b}\sin bx\end{matrix}\right\|=\frac{e^{ax}}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Підставивши знайдене значення цього інтеграла у вираз для шуканого інтеграла $\int e^{ax}\sin bxdx$, отримаємо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{e^{ax}}{b}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right).$$

Отримали рівняння відносно інтеграла $I=\int e^{ax}\sin bxdx$:

$$I=-\frac{e^{ax}}{b}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx-\frac{a}{b}I\right).$$

Звідси знаходимо:

$$I=\frac{b\cdot e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b}\sin bx-\cos bx\right)+C.$$

Відповідь. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$.

Приклад 1.20 Знайти інтеграл $\int x^{\alpha}\ln xdx,\quad \alpha\neq-1$.

Розв'язання. Виберемо за u $\ln x$. При цьому отримуємо:

$$u=\ln x,\, dv=x^{\alpha}dx,\, du=\frac{dx}{x},\, v=\int dv=\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Тут і в інших прикладах при знаходженні v ми вибираємо найпростішу первісну, для якої $C=0$. З формули інтегрування частинами знаходимо:

$$\int x^{\alpha}\ln x dx=\frac{x^{\alpha+1}\cdot\ln x}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}\cdot\ln x}{\alpha+1}-\frac{x^{\alpha+1}}{\left(\alpha+1\right)^{2}}+C.$$

Відповідь. $\dfrac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1}-\dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{2}}+C$.

Приклад 1.21 Знайти інтеграл $I=\int\arcsin x dx$**.**

Розв'язання. Для даного інтеграла $u=\arcsin x,\, dv=dx$. Тоді $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}},\, v=x$. Підставивши ці вирази у формулу інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int\arcsin x dx=x\cdot\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^{2}}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^{2}\right)}{\sqrt{1-x^{2}}}=$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^{2}}+C.$$

Відповідь. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^{2}}+C$.

Приклад 1.22 Знайти інтеграл $I=\int\cos\left(\ln x\right)dx$**.**

Розв'язання. Приймемо $u=\cos\left(\ln x\right),\, dv=dx$. Тоді $du=-\dfrac{\sin\left(\ln x\right)dx}{x}$, $v=\int dv=x$.Отже, отримуємо:

$$I=\int\cos\left(\ln x\right)dx=x\cos\left(\ln x\right)+\int\sin\left(\ln x\right)dx.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами ще раз:

$$u=\sin\left(\ln x\right),\, dv=dx,\, du=\frac{\cos\left(\ln x\right)dx}{x},\, v=x.$$

Знайдемо інтеграл $I_1=\int\sin\left(\ln x\right)dx$:

$$I_1=\int\sin\left(\ln x\right)dx=x\sin\left(\ln x\right)-\int x\cos(\ln x)dx=x\sin\left(\ln x\right)-I.$$

Підставивши I_1 у вираз для I, отримуємо:

$$I=\int\cos\left(\ln x\right)dx=x\cos\left(\ln x\right)+x\sin\left(\ln x\right)-I.$$

Звідси знаходимо інтеграл I:

$$I=\frac{x}{2}\left[\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right]+C.$$

Відповідь. $\dfrac{x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))}{2}+C$.

Приклад 1.23 Знайти інтеграл $I=\int\left(x^2-3x+7\right)\sin 2xdx$**.**

Розв'язання. Застосуємо інтегрування частинами. За u виберемо многочлен: $u=x^2-3x+7$. Тоді $dv=\sin 2xdx, du=\left(2x-3\right)dx, v=-\frac{1}{2}\cos 2x$. За формулою інтегрування частинами знаходимо:

$$I=\int\left(x^2-3x+7\right)\sin 2xdx=-\frac{x^2-3x+7}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2}\int\left(2x-3\right)\cos 2xdx.$$

У інтегралі у правій частині даної рівності покладемо

$$u=\left(2x-3\right), dv=\cos 2xdx, du=2dx, v=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

$$I=\frac{-x^2+3x-7}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{2}\sin 2x-\int\sin 2xdx\right)=\frac{6x-2x^2-13}{4}\cos 2x+$$

$$+\frac{2x-3}{4}\sin 2x+C.$$

Відповідь. $\frac{6x-2x^2-13}{4}\cos 2x+\frac{2x-3}{4}\sin 2x+C$.

При обчисленні інтегралів виду $\int P_n\left(x\right)e^{ax}dx$, де $P_n\left(x\right)$ – многочлен n-го степеня, інтегрування частинами необхідно виконувати n разів, прийнявши $u=P_n\left(x\right)$. При цьому у результаті інтегрування отримуємо функцію, що має вигляд $Q_n\left(x\right)e^{ax}$, де $Q_n\left(x\right)$ – многочлен того ж степеня n, що й $P_n\left(x\right)$. Це дає змогу застосувати для обчислення інтегралів даного типу метод невизначених коефіцієнтів, сутність якого розглянемо на прикладі.

Приклад 1.24 Знайти інтеграл $I=\int\left(3x^3-17\right)e^{2x}dx$**.**

Розв'язання. Будемо шукати інтеграл I у вигляді добутку многочлена третього степеня з невизначеними коефіцієнтами на показникову функцію e^{2x}:

$$I=\int\left(3x^3-17\right)e^{2x}dx=\left(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4\right)e^{2x}+C.$$

Диференціюючи праву та ліву частину цієї рівності, отримуємо:

$$\left(3x^3-17\right)e^{2x}=\left(3A_1x^2+2A_2x+A_3\right)e^{2x}+2e^{2x}\left(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4\right);$$

$$3x^3-17\equiv 2A_1x^3+\left(2A_2+3A_1\right)x^2+\left(2A_3+2A_2\right)x+\left(2A_4+A_3\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частині даної тотожності, отримуємо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{cases}2A_1=3;\\2A_2+3A_1=0;\\2A_3+2A_2=0;\\2A_4+A_3=-17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{3}{2}; A_2=-\frac{9}{4};\\A_3=\frac{9}{4}; A_4=-\frac{77}{8}.\end{cases}$$

Таким чином, отримуємо:

$$I=\int\left(3x^3-17\right)e^{2x}dx=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C.$$

Відповідь. $\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C$.

Приклад 1.25 Знайти інтеграл $I=\int\sin\sqrt{x}dx$**.**

Розв'язання. Виконаємо підстановку $t=\sqrt{x}, x=t^2, dx=2tdt$. Отримаємо $I=2\int t\sin tdt$. Застосуємо формулу інтегрування частинами, прийнявши $u=t$, $dv=\sin tdt$, $du=dt$, $v=-\cos t$:

$$I=2\left(-t\cos t+\int\cos tdt\right)=2\left(\sin t-t\cos t\right)+C=2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C.$$

Відповідь. $2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C$.

Приклад 1.26 Отримати рекурентну формулу для інтеграла

$$J_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}.$$

Користуючись цією формулою, знайти інтеграл $J_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$**.**

Розв'язання. Для отримання рекурентної формули використаємо інтегрування частинами. Нехай $u=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $dv=dx$. Звідси отримуємо: $du=-\frac{2nxdx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$, $v=x$. Отже, маємо:

$$J_n=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx=$$
$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1}.$$

З отриманого рівняння відносно J_{n+1} знаходимо:

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n.$$

При цьому інтеграл $J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

Використаємо знайдену рекурентну формулу для знаходження інтеграла $J_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$. Тут $a^2=4$, $a=2$, $n+1=3\Rightarrow n=2$,

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C_1 .$$

Далі послідовно знаходимо:

$$J_2=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 2^2}\cdot\frac{x}{x^2+4}+\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{4}J_1=\frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C_2;$$

$$J_3=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}J_2=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\right)+C_3.$$

Відповідь. $J_{n+1}=\dfrac{1}{2na^2}\cdot\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{1}{a^2}J_n$;

$$\frac{1}{16}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\right)+C .$$

1.4 Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграл $I_1=\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$. Для його знаходження попередньо потрібно виділити повний квадрат у знаменнику:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right).$$

Тут використано позначення: $\dfrac{c}{a}-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=\pm k^2$. Знак плюс чи мінус вибирають у залежності від знаку отриманого виразу. Отже, інтеграл I_1 набуває вигляду:

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}.$$

Виконаємо у останньому інтегралі заміну змінної $x+\dfrac{b}{2a}=t$, $dx=dt$. Тоді отримаємо:

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2},$$

тобто отримаємо один з табличних інтегралів.

Приклад 1.27 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у квадратному тричлені знаменника. Маємо: $x^2+4x+10=\left(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2\right)+10-2^2=\left(x+2\right)^2+6$. Отже, отримуємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+10}=\int \frac{dx}{\left(x+2\right)^2+6}=\begin{Vmatrix} x+2=t, \\ dx=dt \end{Vmatrix}=\int \frac{dt}{t^2+6}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$.

Розглянемо інтеграл більш загального вигляду: $I_2=\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$. Для його знаходження спочатку виділимо у чисельнику похідну знаменника, тобто вираз $2ax+b$:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}=\frac{\frac{M}{2a}\left(2ax+b\right)+N-\frac{Mb}{2a}}{ax^2+bx+c}.$$

Тоді інтеграл I_2 можна записати у вигляді суми двох інтегралів:

$$I_2=\int \frac{\frac{M}{2a}\left(2ax+b\right)}{ax^2+bx+c}dx+\int \frac{N-\frac{Mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx.$$

Перший з отриманих інтегралів заміною змінною $t=ax^2+bx+c$ зводиться до інтеграла $\frac{M}{2a}\int \frac{dt}{t}=\frac{M}{2a}\ln\left|t\right|+C=\frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C$, другий – це інтеграл типу I_1, знаходження якого розглянуте вище.

Приклад 1.28 Знайти інтеграл $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$.

Розв'язання. Виділимо у чисельнику підінтегральної функції похідну знаменника. Оскільки $\left(x^2-2x-5\right)'=2x-2$, то представимо чисельник у вигляді: $x+3=\frac{1}{2}\left(2x-2\right)+4$. Тоді заданий інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\left(2x-2\right)}{x^2-2x-5}dx+4\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2-6}.$$

Оскільки

$$\int \frac{\left(2x-2\right)}{x^2-2x-5}dx=\begin{Vmatrix} x^2-2x-5=t, \\ dt=2x-2 \end{Vmatrix}=\int \frac{dt}{t}=\ln\left|t\right|+C_1=\ln\left|x^2-2x-5\right|+C_1,$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C_2,$$

то остаточно отримуємо:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2} \ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C.$$

Відповідь. $\frac{1}{2} \ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+6}\right| + C$.

Розглянемо інтеграл $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. За допомогою виділення повного квадрата у підкореневому виразі знаменника аналогічно випадку інтеграла I_1 інтеграл I_3 у залежності від знаку a зводиться до табличних інтегралів виду $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ при $a > 0$ або $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$ при $a < 0$.

Приклад 1.29 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$**.**

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у підкореневому виразі. Отримуємо:

$$2-3x-4x^2 = -4\left(x^2 + 2\cdot\frac{3}{8}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) = -4\left(\left(x+\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{41}{64}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{41}{64} - \left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right).$$

Отже, заданий інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{41}{64} - \left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64} - \left(x+\frac{3}{8}\right)^2}} = \left\|\begin{matrix} x+\frac{3}{8} = t, \\ dx = dt \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2 - t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8t}{\sqrt{41}} + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C$.

Інтеграл виду $I_4 = \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ знаходять за допомогою перетворень, аналогічним перетворенням, що використовувалися при знаходженні інтеграла I_2. Спочатку виділяють у чисельнику похідну підкореневого виразу зі знаменника, а потім записують інтеграл у вигляді суми двох інтегралів. Для знаходження одного з них можна використати заміну

$t = ax^2 + bx + c$, другий – це інтеграл типу I_3.

Приклад 1.30 Знайти інтеграл $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$**.**

Розв'язання. Похідна підкореневого виразу у знаменнику дробу під знаком інтеграла $\left(x^2+4x+10\right)' = 2x+4$. Виділимо її у чисельнику:

$$5x+3 = \frac{5}{2}\left(2x+4-4\right)+3 = \frac{5}{2}\left(2x+4\right)-7.$$

Запишемо заданий інтеграл у наступному вигляді:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}\left(2x+4\right)-7}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - $$
$$-7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}.$$

Знайдемо інтеграли у правій частині отриманої рівності:

$$\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \left\| \begin{matrix} x^2+4x+10=t, \\ \left(2x+4\right)dx = dt. \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C_1 = 2\sqrt{x^2+4x+10} + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+2\right)^2+6}} = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C_2.$$

Остаточно отримуємо значення заданого інтеграла у вигляді:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.$$

Відповідь. $5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C$.

1.5 Інтегрування раціональних дробів

Означення 1.3 Нехай $P_m\left(x\right)$ та $Q_n\left(x\right)$ – це многочлени степенів відповідно m та n. *Відношення цих многочленів* $\frac{P_m\left(x\right)}{Q_n\left(x\right)}$ *називають* ***раціональною функцією*** *або* ***раціональним дробом****.*

Означення 1.4 *Раціональний дріб називають* ***правильним****, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника (*$m < n$*), у іншому випадку (*$m \geq n$*) раціональний дріб називають* ***неправильним****.*

Будь-який неправильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми многочлена степеня $m-n$ та правильного раціонального дробу, поділивши чисельник раціонального дробу на знаменник.

Означення 1.5 ***Елементарними раціональними дробами*** *називають* *раціональні дроби таких чотирьох видів: 1)* $\frac{A}{x-a}$, *2)* $\frac{A}{(x-a)^n}$, *3)* $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

4) $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$. Тут A, a, M, N, p, q – дійсні числа, , $n \geq 2$ – натуральне число, квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0$.

Інтеграли від елементарних раціональних дробів виду 1) та 2) є табличними:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = \frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Знаходження інтегралів виду 3) розглянуто у п. 1.4 (інтеграли I_1 та I_2). За схемою, аналогічною обчисленню інтеграла виду 3), знаходять і інтеграл виду 4). Розглянемо обчислення такого інтеграла на прикладі.

Приклад 1.31 Знайти інтеграл $I = \int \frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx$**.**

Розв'язання. Підінтегральна функція є елементарним дробом виду 4), тобто $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$. Для знаходження інтеграла від цього дробу виділимо у чисельнику похідну від квадратного тричлена x^2+px+q, тобто для даного прикладу похідну від квадратного тричлена $x^2+2x+10$. Вона дорівнює $2x+2$, тому підінтегральну функцію перетворимо до вигляду

$$\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-1}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} - \frac{1}{\left((x+1)^2+9\right)^2}.$$

Інтеграл $I = \int \frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx = \frac{3}{2} \cdot I_1 - I_2$, де

$$I_1 = \int \frac{d\left(x^2+2x+10\right)}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = -\frac{1}{x^2+2x+10} + C_1,$$

а інтеграл $I_2 = \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+9\right)^2}$ заміною $x+1=t$ зводиться до інтеграла виду $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, розглянутого у пункті 1.3, що обчислюється за рекурентною формулою, наведеною у прикладі 1.26:

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2}=\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}+\frac{1}{54}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C_2.$$

Остаточно отримуємо:

$$I=-\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)}-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Відповідь. $-\dfrac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)}-\dfrac{1}{54}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{3}+C$.

Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладено на множники:

$$Q_n(x)=a\left(x-a_1\right)^{\alpha_1}\ldots\left(x-a_s\right)^{\alpha_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\ldots\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\beta_r},$$

де $a_1,\ldots,a_s$ – дійсні корені многочлена $Q_n(x)$, кратності яких відповідно дорівнюють $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$, квадратні тричлени $x^2+p_ix+q_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ r$, не мають дійсних коренів, $\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2\beta_1+\ldots+2\beta_r=n$. Тоді цей дріб можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{\left(x-a_1\right)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-a_s}+\frac{B_2}{\left(x-a_s\right)^2}+\ldots+$$
$$+\frac{B_{\alpha_s}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_s}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_{\beta_1}x+N_{\beta_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}}+\ldots+$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_rx+q_r}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^2}+\ldots+\frac{C_{\beta_r}x+D_{\beta_r}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\beta_r}}.$$

Цю суму називають *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби.*

Для знаходження чисел $A_1,\ldots,D_{\beta_r}$ можна використати метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод полягає у тому, що знаходять суму елементарних дробів у правій частині останньої рівності, привівши їх до спільного знаменника, після чого прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x у чисельнику отриманого дробу та многочлені $P_m(x)$ – чисельнику раціонального дробу з лівої частини рівності. Отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A_1,\ldots,D_{\beta_r}$, з якої визначають ці числа.

Приклад 1.32 Знайти розклад на елементарні дроби раціонального дробу $\dfrac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

Розв'язання. Заданий раціональний дріб є правильним, оскільки степінь чисельника ($m=4$) менший, ніж степінь знаменника ($n=5$). Розклад дробу на елементарні дроби має вигляд:

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Знайшовши суму дробів у правій частині цієї рівності, отримуємо:

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A\left(x^2+1\right)^2+\left(Bx+C\right)x\left(x^2+1\right)+\left(Mx+N\right)x}{x\left(x^2+1\right)^2}.$$

Прирівнюючи чисельники у лівій та правій частинах отриманої рівності, знаходимо, що $x^4+2x^3+5x^2-1=A\left(x^2+1\right)^2+\left(Bx+C\right)x\left(x^2+1\right)+\left(Mx+N\right)x$ або $x^4+2x^3+5x^2-1=\left(A+B\right)x^4+Cx^3+\left(2A+B+M\right)x^2+\left(C+N\right)x+A$. Тепер прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої та правої частин цієї рівності. Отримаємо систему:

$$A+B=1,\ C=2,\ 2A+B+M=5,\ C+N=0,\ A=-1.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо значення невідомих коефіцієнтів: $A=-1$, $B=2$, $C=2$, $M=5$, $N=-2$. Підставивши їх у розклад заданого дробу на елементарні дроби, отримуємо:

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x+2}{x^2+1}+\frac{5x-2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Відповідь. $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x+2}{x^2+1}+\dfrac{5x-2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Розвинення правильного раціонального дробу на елементарні дроби дозволяє обчислити інтеграли від будь-яких раціональних функцій.

Нехай потрібно обчислити інтеграл від раціонального дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. Якщо даний дріб неправильний, то його можна представити у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу. Останній можна розкласти на суму елементарних дробів. Отже, задача звелася до інтегрування многочлена та суми елементарних раціональних дробів. Розглянемо приклади знаходження інтегралів від раціональних дробів.

Приклад 1.33 Знайти інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{x^2+4x+4}{x\left(x-1\right)^2}dx$**.**

Розв'язання. Дріб $\dfrac{x^2+4x+4}{x\left(x-1\right)^2}$ є правильним (степінь чисельника є меншим, ніж степінь знаменника), його розклад у суму елементарних дробів

має вигляд:
$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$
Знайдемо коефіцієнти A, B та C, для чого приведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:
$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}.$$
Знаменники дробів у лівій та правій частинах цієї рівності є однаковими, тому повинні співпадати і знаменники. Маємо
$$x^2+4x+4=A\left(x^2-2x+1\right)+B\left(x^2-x\right)+Cx.$$
Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частинах останньої рівності, отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів A, B та C:
$$\begin{cases} A+B=1, \\ -2A-B+C=4, \\ A=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4, \\ B=-3, \\ C=9. \end{cases}$$

Таким чином, розклад підінтегральної функції на елементарні дроби має вигляд:
$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}.$$
Підставивши даний розклад у інтеграл I, отримуємо:
$$I=4\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x-1}+9\int\frac{dx}{(x-1)^2}=4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.$$

Відповідь. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$.

Приклад 1.34 Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}dx$**.**

Розв’язання. Вираз $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Знайдемо розклад підінтегральної функції на елементарні дроби.
$$\frac{x^2-x+4}{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}=\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$
Після приведення суми дробів у правій частині до спільного знаменника, прирівнявши чисельники, отримаємо:
$$x^2-x+4=A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2).$$
Для знаходження коефіцієнтів A, B та C замість прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x можна обчислити значення правої та лівої частин даної рівності при трьох різних значеннях змінної x. Для цього зручно вибрати корені знаменника підінтегральної функції $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. При $x=-1$

отримуємо $12A=6\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$. При $x=2$ $-3B=6\Rightarrow B=-2$, при $x=3$ маємо $4C=10\Rightarrow C=\dfrac{5}{2}$.

Таким чином, отримуємо:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x-2}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\dfrac{5}{2}|x-3|+C$.

Приклад 1.35 Знайти інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}dx$**.**

Розв'язання. Розвинення дробу $\dfrac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}$ у суму елементарних дробів шукаємо у вигляді:

$$\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Систему для визначення коефіцієнтів даного розкладу отримаємо, звівши дроби у лівій частині даної рівності до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x у чисельнику:

$$3x^2-x+2=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)(x-1)\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x-1).$$

Вибравши $x=1$, знаходимо, що $A=1$. З рівності коефіцієнтів при однакових степенях x випливає:

$$\begin{cases}A+B=0,\\ -B+C=0,\\ 2A-C+D+B=3,\\ A-C-E=2.\end{cases}$$

З врахуванням $A=1$ з даної системи знаходимо решту коефіцієнтів: $B=C=-1, D=1, E=0$.

Тоді

$$I=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C.$$

Відповідь. $\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2x^2+1}+C$.

Приклад 1.36 Знайти інтеграл $I=\int \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}dx$**.**

Розв'язання. Оскільки дріб під знаком інтеграла є неправильним (степінь чисельника є більшим, ніж степінь знаменника), то перед його розкладом на елементарні дроби необхідно спочатку виділити цілу частину. Поділивши x^3-x на квадратний тричлен x^2-5x+6, отримаємо:

$$\frac{x^3-x}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{18x-30}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{18x-30}{(x-2)(x-3)}$$

Розкладемо дріб у правій частині даної рівності на елементарні дроби:

$$\frac{18x-30}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях x в чисельниках, маємо $A+B=18$, $-3A-2B=-30$. Звідси знаходимо $A=-6, B=24$. Таким чином,

$$I=\int(x+5)dx-6\int\frac{dx}{x-2}+24\int\frac{dx}{x-3}=\frac{x^2}{2}+5x-6\ln|x-2|+24\ln|x-3|+C.$$

Відповідь. $\frac{x^2}{2}+5x-6\ln|x-2|+24\ln|x-3|+C$.

1.6 Інтегрування виразів з тригонометричними функціями

Розглянемо основні методи знаходження інтегралів від виразів, що містять тригонометричні функції. Вираз, що містить функції $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, над якими виконуються дії додавання, віднімання, множення та ділення, будемо позначати $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$, де R – знак раціональної функції.

Обчислення невизначених інтегралів $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)dx$ можна звести до обчислення інтегралів від раціональної функції за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тоді отримуємо:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{ctg} x=\frac{1-t^2}{2t}.$$

Оскільки у цьому випадку $x=2\operatorname{arctg} t$, то $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад 1.37 Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$**.**

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Підставивши у заданий інтеграл вирази для $\sin x$ та $\cos x$ через нову змінну t і враховуючи, що $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, отримуємо:

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}\big/2}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Відповідь. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C$.

На практиці застосовують і інші, простіші підстановки, у залежності від властивостей та вигляду підінтегральної функції. Зокрема, застосовують наступні правила.

1. Інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу, якщо функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно $\sin x$, тобто виконується рівність $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$. У цьому випадку використовують підстановку $\cos x=t$.

2. Якщо функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто виконується рівність $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то підстановка $\sin x=t$ зводить інтеграл до інтеграла від раціонального дробу.

3. Функція $R(\sin x,\cos x)$ є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто є справедливою рівність $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$. Використовуємо підстановку $\operatorname{tg}x=t$. Ця ж підстановка використовується і коли підінтегральна функція має вигляд $R(\operatorname{tg}x)$.

Приклад 1.38 Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$**.**

Розв'язання. Запишемо інтеграл I у вигляді:

$$I=\int\frac{dx}{\sin x\cdot 2\sin x\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}.$$

Під інтегралом знаходиться раціональна відносно $\sin x$ та $\cos x$ функція, яка змінює знак при заміні $\cos x$ на $(-\cos x)$, тому маємо другий випадок з розглянутих вище і для інтегрування доцільно використати заміну $\sin x=t,\cos xdx=dt$. Помноживши чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $\cos x$, отримаємо:

$$I=\int\frac{\cos x dx}{2\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dt}{2t^2\left(1-t^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+\left(1-t^2\right)}{t^2\left(1-t^2\right)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{1-t^2}+\int\frac{dt}{t^2}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2t}+C.$$

Перейдемо до змінної x:

$$I=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

Відповідь. $-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$.

Приклад 1.39 Знайти інтеграл $I=\int\frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$**.**

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків функцій $\sin x$ та $\cos x$ підінтегральна функція не змінює знаку, то використовуємо третій тип підстановки, тобто підстановку $\operatorname{tg}x=t$. Поділивши чисельник та знаменник на $\cos^2 x$, маємо:

$$I=\int\frac{\left(2\operatorname{tg}x+3\right)\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2}=\int\frac{2t+3}{t^2+2}dt=\ln\left(t^2+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Переходячи до змінної x, отримуємо:

$$I=\ln\left(\operatorname{tg}^2 x+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C.$$

Відповідь. $\ln\left(\operatorname{tg}^2 x+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C$.

Приклад 1.40 Знайти інтеграл $I=\int\frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx}{1-2\sin^2 x}$**.**

Розв'язання. Оскільки при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ підінтегральний вираз змінює знак на протилежний, то використаємо перший тип підстановки – $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt$. Звідси отримуємо наступні вирази:

$$1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1=2t^2-1,$$

$$\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx=\left(1+\sin^2 x\right)\sin x dx=-\left(2-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)=\left(t^2-2\right)dt.$$

Підставляючи їх у інтеграл I, знаходимо:

$$I=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{3}{2t^2-1}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}=\frac{t}{2}-$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right|+C.$$

Підставивши у отриманий вираз $t=\cos x$, отримаємо:

$$I=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

Відповідь. $\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C$.

Розглянемо методи обчислення інтегралів виду $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$. Для знаходження таких інтегралів використовують наступні методи.

1. Якщо n є цілим додатним непарним числом, то використовують підстановку $\sin x=t$.

2. Якщо m є цілим додатним непарним числом, то використовують підстановку $\cos x=t$.

3. Якщо m та n є цілими невід'ємними парними числами, то використовують формули пониження степеня:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right),\ \cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right),\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Приклад 1.41 Знайти інтеграл $I=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання. Маємо інтеграл виду $\int\sin^m x\cos^n xdx$, де $m=-6, n=3$. Оскільки n – ціле додатне непарне число, то доцільно застосувати підстановку $\sin x=t$. Перейдемо до змінної t:

$$I=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)}{\sin^6 x}=\int\frac{\left(1-t^2\right)dt}{t^6}=$$

$$=\int t^{-6}dt-\int t^{-4}dt==-\frac{1}{5t^5}+\frac{1}{3t^3}+C.$$

Виконаємо зворотну заміну:

$$I=\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C.$$

Відповідь. $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x+C}$.

Приклад 1.42 Знайти інтеграл $I=\int\sin^4 x\cos^2 xdx$.

Розв'язання. Тут обидва показники степенів функцій $\sin x$ та $\cos x$ є парними невід'ємними числами, тому при інтегруванні доцільно використати формули пониження степеня. У нашому випадку отримуємо:

$$I=\int\sin^4 x\cos^2 xdx=\frac{1}{8}\int\left(1-\cos 2x\right)^2\left(1+\cos 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1-\cos^2 2x\right)\left(1-\cos 2x\right)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\left(1-\cos 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x\right)dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd\left(\sin 2x\right)=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}--\frac{\sin^2 2x}{48}+C.$$

Відповідь. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$.

1.7 Інтегрування ірраціональних виразів

Інтегрування виразів, що містять ірраціональності виду $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ та $\sqrt{ax^2+bx+c}$ розглянуто вище у пунктах 1.2 та 1.4. Розглянемо інтеграли від деяких типів ірраціональних функцій і покажемо, що у ряді випадків їх можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Нехай інтеграл має вигляд:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx,$$

де R – раціональна функція своїх аргументів x, $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}$. Тоді він зводиться до інтегралу від раціонального виразу шляхом підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_s}{n_s}$.

Приклад 1.43 Знайти інтеграл $I=\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від величин $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{5}{4}}$, $x^{\frac{7}{6}}$. Найменшим спільним знаменником дробів, що є степенями x у підінтегральному виразі, є 12, тому виконаємо заміну $x=t^{12}, dx=12t^{11}dt$. Тоді $t=\sqrt[12]{x}, \sqrt{x}=t^6, \sqrt[3]{x}=t^4$, $\sqrt[4]{x^5}=t^{15}, \sqrt[6]{x^7}=t^{14}$. Інтеграл I набуває вигляду:

$$I=\int \frac{\left(t^6+t^4\right)12t^{11}dt}{t^{15}-t^{14}}=12\int \frac{t^3+t}{t-1}dt=12\int \frac{\left(t^3-1\right)+\left(t-1\right)+2}{t-1}dt=$$

$$=12\int\left(t^2+t+1\right)dt+12\int dt+24\int\frac{dt}{t-1}=4t^3+6t^2+24t+24\ln\left|t-1\right|+C=$$

$$=4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C.$$

Відповідь. $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C$.

Приклад 1.44 Знайти інтеграл $I=\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною відносно x та

$\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$, тому використаємо підстановку $t=\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$. Отримаємо:

$$t^3=\frac{2-x}{2+x},\ x=\frac{2-2t^3}{1+t^3},\ 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3},\ dx=\frac{12t^2\left(1+t^3\right)-3t^2\cdot 4t^3}{\left(t^3+1\right)^2}dt=\frac{-12t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}.$$

Підставимо ці вирази в інтеграл I:

$$I=-\int\frac{2\left(1+t^3\right)^2\cdot t\cdot 12t^2dt}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

Відповідь. $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$.

Означення 1.6 *Вираз виду* $x^m\left(a+bx^n\right)^p$, *де* m, n *і* p *– задані раціональні числа,* a *та* b *– задані дійсні числа, називають* ***диференціальним біномом***.

Для інтегрування диференціальних біномів використовують наступну теорему.

Теорема 1.3 (Теорема Чебишева). *Інтеграл від диференціального бінома* $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ *виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:*

1) p *– ціле число і виконано підстановку* $x=t^s$, *де* s *– найменший спільний знаменник дробів* m *і* n;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ *– ціле число і виконано підстановку* $a+bx^n=t^r$, *де* r *– знаменник дробу* p;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ *– ціле число і виконано підстановку* $ax^{-n}+b=t^r$, *де* r *– знаменник дробу* p.

Приклад 1.45 Знайти інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз даного інтеграла є диференціальним біномом, при цьому $p=-2\in\mathbf{Z}$. Найменшим спільним знаменником дробів $m=\dfrac{1}{2}$ та $n=\dfrac{1}{3}$ є 6, тому виконуємо підстановку $x=t^6$. Тоді $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$. Отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=6\int\frac{t^8dt}{\left(t^2+1\right)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}\right)dt=$$
$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\operatorname{arctg}t-6\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$
Обчислимо інтеграл у правій частині даної рівності.
$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\int t\cdot d\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$
Враховуючи, що $t=\sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:
$$I=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Відповідь. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\cdot\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

Приклад 1.46 Знайти інтеграл $I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}dx}{\sqrt{x}}$**.**

Розв'язання. Маємо диференціальний біном, у якому $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2\in\mathbf{Z}$. Отже, маємо другий випадок диференціального бінома, що потребує використання підстановки $1+\sqrt[4]{x}=t^2$. Звідси отримуємо:
$$x=\left(t^2-1\right)^4,\ \sqrt{x}=\left(t^2-1\right)^2,\ t=\sqrt{1+\sqrt[4]{x}},\ dx=4\left(t^2-1\right)^3 2tdt=8t\left(t^2-1\right)^3dt.$$
Підставивши ці вирази у інтеграл I, отримуємо інтеграл від раціональної функції:
$$I=8\int\frac{t^2\left(t^2-1\right)^3dt}{\left(t^2-1\right)^2}=8\int\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{8}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+C=$$
$$=\frac{8}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^5-\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^3+C.$$

Відповідь. $\frac{8}{5}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}+C$.

Приклад 1.47 Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$**.**

Розв'язання. Для диференціального бінома, що знаходиться під знаком даного інтеграла $m=-\frac{3}{2}$, інші параметри бінома $n=\frac{3}{4}$, $p=-\frac{1}{3}$. Знаходимо

$\dfrac{m+1}{n}+p=-\dfrac{1}{3}=-1\in \mathbf{Z}$. Тому маємо третій випадок диференціального бінома і виконуємо підстановку $x^{-\frac{3}{4}}+1=t^3$, тобто $x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}$, звідки отримуємо, що $dx=-\dfrac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3t^2dt=-4t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt$.

Перейдемо у підінтегральному виразі до змінної t. Отримаємо:

$$x^{-\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx=x^{-\frac{3}{2}}\left[x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]dx=x^{-\frac{7}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=-\left(t^3-1\right)^{\frac{7}{3}}\cdot 4t\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Таким чином, отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=-4\int tdt=-2t^2+C=-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C.$$

Відповідь. $-2\cdot\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C$.

1.8 Інтеграли, що не виражаються скінченним числом елементарних функцій

Існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли говорять, що вони не виражаються скінченним числом елементарних функцій. Доведено, що до таких інтегралів відносяться $\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуассона, $\int\cos x^2dx$, $\int\sin x^2dx$ – інтеграли Френеля, $\int\dfrac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм, $\int\dfrac{\sin x}{x}dx$ – інтегральний синус та багато інших інтегралів.

Указані інтеграли, хоча й існують, але не є елементарними функціями. В подібних випадках первісна підінтегральної функції являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, що не виражається через скінченне число арифметичних операцій та суперпозицій над основними елементарними функціями. Неелементарні або так звані спеціальні функції розширюють множину елементарних функцій. Інтеграл, який не обчислюється на множині елементарних функцій, може обчислюватися на множині спеціальних функцій.

Таким чином, інтегрування є набагато складнішою операцією у порівнянні з диференціюванням. Тому треба володіти основними методами інтегрування і знати класи функцій, інтеграли від яких знаходяться цими методами. При цьому слід розрізняти інтеграли, які виражаються через неелементарні, спеціальні функції.

1.9 Поняття визначеного інтеграла

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a<b$. Виконаємо наступні дії.

1. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками $x_0=a$, x_1, $x_2,\ldots$, $x_n=b$, на n елементарних відрізків $[x_{i-1};x_i]$, $i=1, 2, ..., n$.

2. У кожному елементарному відрізку $[x_{i-1};x_i]$, $i=1, 2, ..., n$, виберемо довільну точку ξ_i і знайдемо значення функції $f(\xi_i)$ у цій точці.

3. Помножимо знайдене значення $f(\xi_i)$ на довжину відповідного елементарного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

4. Знайдемо суму S_n всіх таких добутків:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \qquad (1.4)$$

Означення 1.7 *Суму виду* (1.4) *називають* ***інтегральною сумою*** *функції* $y=f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$.

Позначимо через λ довжину найбільшого елементарного відрізка: $\lambda=\max\limits_{i}\Delta x_i$.

5. Знайдемо границю інтегральної суми (1.4), коли $n\to\infty$ так, що $\lambda\to 0$.

Означення 1.8 *Якщо при цьому інтегральна сума* S_n *має границю* I*, яка не залежить від способу розбиття відрізка* $[a;b]$ *на елементарні відрізки і від способу вибору у них точок* ξ_i*, то число* I *називають* ***визначеним інтегралом від функції*** $y=f(x)$ ***на відрізку*** $[a;b]$ *і позначається* $\int\limits_a^b f(x)dx$. Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \ . \qquad (1.5)$$

Числа a та b у рівності (1.5) називають відповідно *нижньою та верхньою межами інтегрування*, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, x – *змінною інтегрування*, відрізок $[a;b]$ – *відрізком інтегрування*. Функцію $y=f(x)$, для якої на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, називають *інтегровною* на цьому відрізку.

Сформулюємо без доведення теорему існування визначеного інтеграла.

Теорема 1.4 (Теорема Коші). *Якщо функція* $y = f(x)$ *є неперервною на відрізку* $[a;b]$, *то визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *існує.*

Відзначимо, що неперервність підінтегральної функції є достатньою умовою існування визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, проте такий інтеграл може існувати і для деяких розривних функцій. Зокрема, виконується наступна теорема.

Теорема 1.5 *Якщо функція є обмеженою на відрізку* $[a;b]$ *і неперервна на ньому скрізь, крім скінченної кількості точок, то вона інтегровна на цьому відрізку.*

З цієї теореми випливає, що інтегровною на $[a;b]$ є будь-яка функція, що має на цьому відрізку лише скінченне число точок розриву першого роду. Більше того, справедливою є така теорема.

Теорема 1.6 *Всяка обмежена і монотонна на відрізку функція є інтегровною на цьому відрізку.*

Ця теорема значно розширяє клас інтегрованих функцій, оскільки в умовах даної теореми монотонна функція може мати навіть нескінченну кількість точок розриву першого роду. Надалі при розгляді визначених інтегралів будемо розглядати інтеграли від неперервних функцій.

Приклад 1.48 Користуючись означенням, обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \sin x$ є неперервною на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, тому вона є інтегровною на даному відрізку.

Поділимо відрізок інтегрування $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на n рівних частин точками $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Довжина кожного з отриманих елементарних відрізків дорівнює $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}, k = 0,1,...,n-1$. За точки ξ_k виберемо ліві межі кожного елементарного відрізка. Обчислимо значення підінтегральної функції у точках ξ_k: $f(\xi_k) = f(x_k) = \sin\frac{k\pi}{2n}, k = 0,1,...,n-1$.

Складемо інтегральну суму:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}.$$

Використавши тотожність

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

отримаємо: $S_n=\frac{\pi/2n}{\sin\left(\pi/2n\right)}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$. Звідси знаходимо шуканий інтеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi/2n}{\sin\left(\pi/2n\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=1\cdot 1=1.$$

Відповідь. 1.

Приклад 1.49 Користуючись означенням, обчислити інтеграл $\int_1^2\frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Функція $f(x)=x^{-1}$ є неперервною на $[1;2]$, тому вона є інтегровною на цьому відрізку.

Поділимо відрізок інтегрування $[1;2]$ на n частин так, щоб точки поділу $x_i, i=1,...,n$, утворювали геометричну прогресію:

$$x_0=1, x_1=q, x_2=q^2,...,x_n=q^n=2.$$

З останньої рівності знаходимо $q=\sqrt[n]{2}$. Довжина i-го елементарного відрізка дорівнює

$$\Delta x_i=q^{i+1}-q^i=q^i(q-1).$$

Звідси випливає, що $\max_i\Delta x_i=q^{n-1}(q-1)\to 0,\quad n\to\infty$, тобто при $n\to\infty$, $q\to 1$ $\lambda=\max_i\Delta x_i\to 0$. Приймемо за точки ξ_i праві кінці елементарних відрізків, тобто $\xi_i=x_{i+1}q^{i+1}$. Запишемо відповідну інтегральну суму:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{q^{i+1}}q^i(q-1)=\frac{n}{q}(q-1)=\frac{1}{2^{1/n}}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Знайдемо границю даної інтегральної суми при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{2^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{1/n}=1\cdot\ln 2=\ln 2.$$

Таким чином, $\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2$.

Відповідь. $\ln 2$.

1.10 Геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла

Означення 1.9 *Нехай на відрізку* $\left[a;b\right]$ *задана неперервна функція* $y=f\left(x\right)\geq 0$. *Фігуру, обмежену графіком функції* $y=f\left(x\right)$, *віссю* Ox, *а також прямими* $x=a$ *та* $x=b$, *називають* ***криволінійною трапецією***.

Знайдемо площу цієї фігури. Для цього поділимо відрізок $\left[a;b\right]$ точками $x_0=a$, x_1, $x_2,\ldots$, $x_n=b$ на n елементарних відрізків $\left[x_{i-1};x_i\right]$, $i=1,2,...,n$. На кожному з цих відрізків виберемо довільним чином точку ξ_i і обчислимо значення $f\left(\xi_i\right)$. Добуток значення $f\left(\xi_i\right)$ на довжину відповідного елементарного відрізка $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ дорівнює площі прямокутника з основою Δx_i та висотою $f\left(\xi_i\right)$. Сума всіх таких добутків $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ дорівнює площі ступінчатої фігури, складеної з прямокутників з основою Δx_i та висотою $f\left(\xi_i\right)$, $i=1,2,...,n$, та наближено дорівнює площі криволінійної трапеції. Точність такого наближення збільшується зі зменшенням всіх величин Δx_i. Тому за точне значення площі криволінійної трапеції можна прийняти границю S, до якої прямує площа ступінчатої фігури S_n, коли $n\to\infty$ так, що $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\Delta x_i\to 0$. Отже,

$$S=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

Таким чином, інтеграл від невід'ємної функції дорівнює площі криволінійної трапеції. <u>У цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла.</u>

Нехай матеріальна точка M рухається під дією змінної сили $\vec{F}=\vec{F}\left(x\right)$, спрямованої вздовж осі Ox, де x – абсциса рухомої точки M. Знайдемо роботу A сили $\vec{F}$ по переміщенню точки M вздовж осі Ox від точки $x=a$ до точки $x=b$ $\left(a<b\right)$. Для цього відрізок розіб'ємо $\left[a;b\right]$ точками $x_0=a$, x_1, $x_2,\ldots$, $x_n=b$ на n елементарних відрізків $\left[x_{i-1};x_i\right]$, $i=1,2,...,n$. Якщо довжина Δx_i відрізка $\left[x_{i-1};x_i\right]$ є достатньо малою, то сила $\vec{F}$ на цьому відрізку змінюється незначно і її можна наближено вважати на цьому відрізку сталою величиною, що дорівнює значенню функції $F=F\left(x\right)$ у довільно вибраній точці $x=\xi_i$, що належить $\left[x_{i-1};x_i\right]$. Тому робота, виконана силою $\vec{F}$ на відрізку $\left[x_{i-1};x_i\right]$ наближено дорівнює добутку $F\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$. Наближене значення роботи A сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки M з положення $x=a$ у положення $x=b$ дорівнює $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}F\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$. Точність цього наближення зростає при зменшенні довжин Δx_i елементарних відрізків, на які було поділено $\left[a;b\right]$.

Тому за точне значення роботи можна прийняти границю, до якої прямує сума A_n, коли найбільша довжина λ довжин елементарних відрізків прямує до нуля, тобто $A = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \int\limits_a^b F(x)\,dx$.

Таким чином, робота змінної сили $\vec{F}$, діючої на відрізку $[a;b]$, величина якої є неперервною функцією $F = F(x)$, дорівнює визначеному інтегралу від $F(x)$, взятому по $[a;b]$. <u>У цьому полягає фізичний зміст визначеного інтеграла</u>.

Аналогічно можна показати, що шлях S, пройдений точкою за проміжок часу від моменту $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$S = \int\limits_a^b v(t)\,dt .$$

Приклад 1.50 Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox, кривою $y = e^x$ та прямими $x = 0$ та $x = 1$.

Розв'язання. Для знаходження даної площі поділимо відрізок $[0;1]$ на n рівних частин точками $x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \ldots < x_k = \frac{k}{n} < \ldots < x_n = \frac{n}{n} = 1$. Довжина кожного відрізка $[x_k; x_{k+1}]$ $\Delta x_k = \frac{1}{n}$.

Нехай $\xi_k = x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1$. Тоді $f(\xi_k) = e^{\frac{k}{n}}, k = 0,1,\ldots,n-1$. Будемо вважати, що площа частини трапеції, розташованої над k-м відрізком, наближено дорівнює площі прямокутника з основою Δx_k та висотою $f(\xi_k)$. Тоді наближена величина площі визначиться сумою $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$. Значення площі знайдемо як $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Оскільки $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$ є сумою n членів геометричної прогресії зі знаменником $q = e^{\frac{1}{n}}$ та першим членом, що дорівнює 1, то $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$, тому

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = (e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}.$$

Оскільки при $\alpha \to 0$ нескінченно малі величини $e^{\alpha} - 1$ та α є еквівалентними, то границя у правій частині останньої рівності дорівнює 1, тому отримуємо $S = e - 1$. Зауважимо, що $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ є визначеним інтегралом функції $y=e^x$ по проміжку $[0;1]$, тобто $\int_0^1 e^x dx = e-1$.

Відповідь. $e-1$.

Приклад 1.51 Тіло рухається прямолінійно, причому його швидкість $v(t)$ у момент часу t дорівнює t^2 с. Знайти шлях, пройдений тілом з початку руху $(t=0)$ до моменту $t=b$.

Розв'язання. Поділимо проміжок часу $[0;b]$ на n рівних частин, тривалість кожної з яких дорівнює $\Delta t=\frac{b}{n}$, причому k-й проміжок часу починається у момент $t_k=\frac{kb}{n}$ і закінчується у момент часу $t_{k+1}=\frac{(k+1)b}{n}$. Спочатку знайдемо наближене значення пройденого шляху. Будемо вважати, що на протязі кожного окремо взятого проміжку часу $[t_k;t_{k+1}]$ тіло рухається зі сталою швидкістю $v(t_k)=t_k^2$. Тоді шлях, пройдений за k-й проміжок часу, наближено знайдемо за формулою:

$$\Delta s_k \approx v(t_k)\Delta t = t_k^2\Delta t .$$

Увесь шлях $s(b)$, пройдений тілом, наближено можна знайти як суму

$$s(b)\approx\sum_{k=0}^{n-1}v(t_k)\Delta t=\sum_{k=0}^{n-1}t_k^2\Delta t=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2=$$

$$=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{b^3}{6}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}.$$

Тут ми використали формулу $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Зі збільшенням значення n проміжки часу Δt зменшуються, тим самим, зменшується похибка, яку ми допускаємо при заміні руху на окремих проміжках рівномірним. Тому шлях, пройдений тілом за проміжок $t\in[0;b]$, дорівнює границі суми:

$$s(b)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}t_k^2\Delta t=\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}=\frac{b^3}{3}.$$

Сума $\sum_{k=0}^{n}t_k^2\Delta t$ є інтегральною сумою для визначеного інтеграла $\int_0^b t^2dt$, що відповідає розбиттю відрізка $[0;b]$ на n рівних частин та вибору точок ξ_k на кожній з них на початку відповідних відрізків $\left[t_{k;}\,t_{k+1}\right]$. Якщо б ми прийняли швидкість на $\left[t_{k;}\,t_{k+1}\right]$ такою, що дорівнює швидкості у момент t_{k+1}, то отримали б іншу суму

$$\sum_{k=0}^{n-1}t_{k+1}^2\Delta t=\frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2,$$

границя якої при $n \to \infty$ залишається тією ж. Ці суми є відповідно нижньою та верхньою інтегральними сумами для інтеграла $\int\limits_0^b t^2 dt$.

Відповідь. $\dfrac{b^3}{3}$.

Приклад 1.52 Виходячи з геометричного змісту означеного інтеграла, знайти $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$.

Розв'язання. При $0 \le x \le 4$ крива $y = \sqrt{16-x^2}$ – це дуга кола, що знаходиться у першій координатній чверті. Криволінійна трапеція, обмежена лініями $y = \sqrt{16-x^2}$, $y = 0, x = 0, x = 4$, – це четверта частина круга $x^2 + y^2 \le 16$. Його площа дорівнює 16π. Таким чином,

$$\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \frac{16\pi}{4} = 4\pi .$$

Відповідь. 4π.

1.11 Властивості визначеного інтеграла

Розглянемо основні властивості визначеного інтеграла, що випливають з його означення.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt .$$

Дійсно, інтегральна сума (1.4) і її границя (1.5) не залежать від того, якою літерою позначено аргумент функції f. Це означає, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ми вводили для випадку, коли $a < b$. Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадки, коли $a = b$ та $a > b$.

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0 .$$

3. Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx .$$

Останні дві властивості приймаються за означенням. Вони повністю узгоджуються з означенням визначеного інтеграла – формулою (1.5) та розглянутою далі формулою Ньютона-Лейбніца.

4. Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на максимальному з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$ і $[c;b]$, то справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1.6}$$

Цю властивість називають властивістю *адитивності визначеного інтеграла*. Для її доведення припустимо спочатку, що $a<c<b$. Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на елементарні відрізки, то розіб'ємо його так, щоб точка c була точкою розбиття. Якщо, наприклад, $c = x_m$, то інтегральну суму (1.4) можна розбити на дві суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходячи у цій рівності до границі при $\lambda \to 0$, $n \to \infty$, отримуємо формулу (1.6). Інше розміщення точок a, b та c зводиться до вже розглянутого. Зокрема, при $a<b<c$, використовуючи попередні властивості визначеного інтеграла, отримуємо:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot\int_a^b f(x)dx. \tag{1.7}$$

Дійсно, згідно з означенням визначеного інтеграла, маємо:

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n} C\cdot f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = C\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = C\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

6. Визначений інтеграл від суми інтегровних функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{1.8}$$

Для доведення цієї властивості запишемо інтегральну суму на відрізку $[a;b]$ для суми функцій $f(x)+g(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Звідси, переходячи до границі при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$, отримаємо формулу (1.8). Дана властивість виконується для суми довільного скінченного числа функцій.

7. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ маємо $f(x)\ge 0$ і $a<b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Дійсно, у цьому випадку у інтегральній сумі $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ кожний доданок є невід'ємним, оскільки $f(\xi_i)\ge 0$ і $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, тому $S_n \ge 0$ і границя цієї величини теж є невід'ємною.

8. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ $f(x)\le g(x)$ і $a<b$, то має місце нерівність

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Оскільки $g(x)-f(x)\ge 0$, то за властивістю 7 $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)dx \ge 0$, тобто $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0$, звідки випливає, що $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

9. Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$, то виконується нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (1.9)$$

Для доведення нерівності (1.9) застосуємо властивість 8 до нерівності $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$, внаслідок чого отримаємо:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

З цієї нерівності випливає нерівність (1.9).

10. Якщо $\forall x\in[a;b]$ $|f(x)|\le C$, то виконується нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le C\cdot(b-a). \qquad (1.10)$$

Для доведення цієї нерівності скористаємося властивостями 9 та 5. Тоді отримаємо:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = C(b-a),$$

оскільки $\int_a^b dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a$.

11. Якщо m та M є відповідно найменшим та найбільшим значеннямь функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, то виконується нерівність:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a). \qquad (1.11)$$

Ця властивість надає оцінку визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$. Доведемо нерівність (1.11). За умовою, $\forall x\in[a;b]$ $m\le f(x)\le M$, тому з властивості 7 випливає, що $\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx$. Звідси, враховуючи, що

$$\int_a^b mdx=m(b-a),\ \int_a^b Mdx=M(b-a),$$

отримуємо нерівність (1.11).

Приклад 1.53 Оцінити інтеграл $I=\int_0^1\frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{x^6}{\sqrt{1+x}}$ є неперервною, а тому інтегровною на $[0;1]$. Знайдемо мінімальне m та максимальне M значення цієї функції на відрізку інтегрування. Знайдемо похідну підінтегральної функції:

$$f'(x)=\frac{6x^5\sqrt{1+x}-\dfrac{x^6}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\frac{x^5(11x+12)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\ge 0,\ x\in[0;1].$$

Оскільки підінтегральна функція зростає на відрізку $[0;1]$, то $f_{\min}=f(0)=0$, $f_{\max}=f(1)=\frac{1}{2}, b-a=1$. Звідси знаходимо оцінку заданого інтеграла:

$$0\le\int_0^1\frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx\le\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $0\le\int_0^1\frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx\le\frac{1}{2}$.

12. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a). \qquad (1.12)$$

Цю властивість називають *теоремою про середнє значення функції*.

Дійсно, якщо функція $f(x)$ є неперервною на $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найменшого значення m та найбільшого значення M. Тоді з властивості 11 при $a<b$ отримаємо:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M .$$

Доведемо цю властивість. Нехай $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то вона набуває на цьому відрізку всі проміжні значення з відрізка $[m;M]$. Отже, існує точка c, така, що $f(c)=\mu$ або

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx . \tag{1.13}$$

Звідси випливає властивість 12.

Означення 1.10 *Рівність* (1.13) *називають* ***формулою середнього значення****, а величину* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ *називають* ***середнім значенням функції на відрізку*** $[a;b]$.

При $f(x) \ge 0$ теорема про середнє значення має наступний геометричний зміст: значення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b-a$.

Термін «середнє значення функції» добре узгоджується з таким фізичними поняттям як середня швидкість. Якщо у формулі (1.13) інтеграл означає шлях, пройдений за проміжок часу $[a;b]$, то середнє значення $f(c)$ означає середню швидкість, тобто сталу швидкість, при якій точка, рухаючись рівномірно, за той же проміжок часу пройшла б той же шлях, що й при нерівномірному русі з швидкістю $f(t)$.

13. Якщо значення інтегровної функції змінити у скінченному числі точок, то її інтегрованість не порушиться, а значення інтеграла при цьому не зміниться.

З цієї властивості випливає, що коли підінтегральній функції надати цілком довільних скінченних значень у скінченному числі точок на відрізку інтегрування, то значення інтеграла при цьому не зміниться.

1.12 Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a;x] \subset [a;b]$, тобто $\forall x \in [a;b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(t)dt$. Оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, то ми позначили її через t, щоб не плутати з верхньою межею інтегрування x.

Інтеграл $\int_a^x f(t)\,dt$ є функцією змінної x. Позначимо її через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,. \qquad (1.14)$$

Означення 1.11 *Функцію* (1.14) *називають* ***визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею***.

Теорема 1.7 *Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:*

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x)\,. \qquad (1.15)$$

Доведення. Надамо аргументу x функції (1.14) приросту Δx, тоді враховуючи адитивність інтеграла (формула (1.6)), отримуємо:

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\,.$$

Звідси знаходимо:

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\,.$$

Застосовуючи до цього інтеграла теорему про середнє значення, знаходимо, що $\Delta\Phi=f(c)\cdot\Delta x$, де точка c знаходиться між x та $x+\Delta x$. Отже, отримуємо:

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)\,.$$

Якщо $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x\to x$ і $c\to x$, тому з неперервності функції f отримуємо, що $\Phi'(x)=f(x)$. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що для всякої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції існує первісна функція. При цьому однією з цих первісних функцій є інтеграл (1.14), оскільки $\Phi'(x)=f(x)$.

Теорема 1.8 *Якщо функція* $y=f(x)$ *є неперервною на відрізку* $[a;b]$, *а* $F(x)$ *– будь-яка її первісна на* $[a;b]$, *тобто* $F'(x)=f(x)$, *то має місце формула:*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\,. \qquad (1.16)$$

Означення 1.12 *Формулу* (1.16) *називають* ***формулою Ньютона-Лейбніца***. Ця формула встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралом.

Доведення. Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$. Оскільки інтеграл (1.14) також є первісною, то $F(x)$ і $\Phi(x)$ відрізняються між собою лише на сталу величину, тобто $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Поклавши у цій рівності $x = a$, отримаємо:

$$\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a).$$

Тому $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Підставивши у цю рівність $x = b$, отримаємо формулу Ньютона-Лейбніца (1.16). Теорему доведено.

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символом $\left(F(x)\right)\Big|_a^b$, тому формулу Ньютона-Лейбніца записують також у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(F(x)\right)\Big|_a^b .$$

Приклад 1.54 Обчислити інтеграл $I = \int_1^2 \left(3x^2 - 6x + 1\right)dx$**.**

Розв'язання. Застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца. Однією з первісних підінтегральної функції є $F(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Тому за формулою (1.16) маємо:

$$I = \int_1^2 \left(3x^2 - 6x + 1\right)dx = \left(x^3 - 3x^2 + x\right)\Big|_1^2 =$$
$$= \left(2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2\right) - \left(1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1\right) = -2 - (-1) = -1.$$

Відповідь. – 1.

Приклад 1.55 Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$**.**

Розв'язання. Використаємо формулу Ньютона-Лейбніца. Однією з первісних функції $f(x) = \sin 4x$ є $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 4x$. Отримуємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos(4 \cdot 0)\right) = -\frac{1}{4}(1 - 1) = 0 .$$

Відповідь. 0.

Приклад 1.56 Обчислити інтеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$**.**

Розв'язання. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right|\Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 .$$

Відповідь. $\ln 2$.

Приклад 1.57 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^8 f(x)dx$, якщо

$$f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1, \\ \sqrt[3]{x}, 1\le x\le 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Використаємо властивість адитивності інтеграла, згідно з якою

$$\int\limits_0^8 f(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^8 f(x)dx.$$

Для заданої функції $f(x)$ маємо:

$$\int\limits_0^8 f(x)dx=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right|_1^8=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}(16-1)=\frac{139}{12}.$$

Відповідь. $\frac{139}{12}$.

Приклад 1.58 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^4 |2-x|dx$.

Розв'язання. Оскільки $|2-x|=\begin{cases} 2-x, x\le 2, \\ x-2, x>2, \end{cases}$ то отримаємо:

$$\int\limits_0^4 |2-x|dx=\int\limits_0^2 (2-x)dx+\int\limits_2^4 (x-2)dx=-\left.\frac{(2-x)^2}{2}\right|_0^2+\left.\frac{(x-2)^2}{2}\right|_2^4=2+2=4.$$

Відповідь. 4.

Приклад 1.59 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 f(x)dx$, якщо $f(x)=\begin{cases} e^x, \ 0\le x<1, \\ 1, \ 1\le x\le 2. \end{cases}$

Розв'язання. Використаємо властивість адитивності визначеного інтеграла. Маємо:

$$\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^1 e^x dx+\int\limits_1^2 dx=\left.e^x\right|_0^1+\left.x\right|_0^1=e-1+2-1=e.$$

Відповідь. e.

1.13 Заміна змінної у визначеному інтегралі

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, користуються методом заміни змінної (методом підстановки).

Теорема 1.9 *Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, функція $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і $\forall t\in(\alpha;\beta)$ $\alpha<\varphi(t)<\beta$. Тоді виконується рівність:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1.17)$$

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, то вона має первісну. Позначимо її через $F(x)$, $x \in [a;b]$. Тоді функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Дійсно, $\frac{dF}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$. Застосувавши формулу Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Отже, виконується рівність (1.17). Теорему доведено.

Означення 1.13 *Формулу* (1.17) *називають* ***формулою заміни змінної у визначеному інтегралі***.

Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього потрібно змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $\varphi(\alpha) = a$, верхня межа β – з рівняння $\varphi(\beta) = b$. Якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар α та β. У цьому випадку можна взяти будь-яку з таких пар.

Часто замість заміни змінної $x = \varphi(t)$ використовують заміну $t = \psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. При цьому слід враховувати, що функція $x = \varphi(t)$, обернена до функції $t = \psi(x)$, має задовольняти всі умови теореми 1.9. Зокрема, у межах інтегрування функція $x = \varphi(t)$ має бути неперервно диференційовною функцією змінної t і при зміні t від α до β змінна $x(t)$ повинна змінюватися від a до b.

Найзручніше виконувати заміну змінної з допомогою монотонних диференційовних функцій. Такі функції гарантують однозначність прямої та оберненої функцій.

Приклад 1.60 Обчислити інтеграл $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$**.**

Розв'язання. Нехай $x = a\sin t$. Тоді $dx = a\cos t dt$. Функція $x = a\sin t$ і її похідна $a\cos t$ є неперервними при всіх значеннях аргументу t. При цьому, якщо $x = 0$, то $a\sin t = 0$ і $t = 0$, якщо $x = a$, то $a\sin t = a$, $\sin t = 1$ і $t = \frac{\pi}{2}$. Отже,

$\alpha = 0$ і $\beta = \dfrac{\pi}{2}$. Функція $x = a\sin t$ не є монотонною, тому існують і інші пари значень α та β, що можуть бути використані як межі інтегрування по змінній t, наприклад, $\alpha = 2\pi$, $\beta = \dfrac{5\pi}{2}$ та інші.

Далі отримуємо:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 + \cos 2t\right)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

Приклад 1.61 Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$**.**

Розв'язання. Використаємо підстановку $t = \sqrt{e^x + 1}$. Тоді $e^x + 1 = t^2$, $x = \ln\left(t^2 - 1\right)$, $dx = \dfrac{2tdt}{t^2 - 1}$. Знайдемо межі інтегрування для змінної t. При $x = \ln 3$ $t = \sqrt{e^x + 1} = \sqrt{e^{\ln 3} + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2$, при $x = \ln 3$ отримуємо значення $t = \sqrt{e^{\ln 8} + 1} = \sqrt{8 + 1} = 3$. Таким чином, маємо:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int_2^3 \frac{2tdt}{t\left(t^2 - 1\right)} = 2\int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \ln\frac{3}{2}.$$

Відповідь. $\ln\dfrac{3}{2}$.

Приклад 1.62 Довести, що для парної функції $f\left(x\right)$ інтеграл у симетричних межах $\displaystyle\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 2\int_0^a f\left(x\right)dx$, а для непарної $f\left(x\right)$ інтеграл $\displaystyle\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 0$.

Доведення. Інтеграл від $f\left(x\right)$ у симетричних межах запишемо у вигляді:

$$\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = \int_{-a}^{0} f\left(x\right)dx + \int_0^a f\left(x\right)dx.$$

У першому інтегралі в правій частин отриманої рівності виконаємо підстановку $x = -t$. Тоді

$$\int_{-a}^{0} f\left(x\right)dx = -\int_a^0 f\left(-t\right)dt = \int_0^a f\left(-t\right)dt = \int_0^a f\left(-x\right)dx.$$

З цієї рівності випливає, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} \left(f(-x) + f(x)\right)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна, то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$, якщо ця функція є непарною, то $f(-x) + f(x) = 0$. Отже, для парної $f(x)$ отримуємо:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

для непарної функції $f(x)$ маємо:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 1.63 Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^4 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ є непарною, її інтегрування здійснюється у симетричних межах, тому згідно з результатом, отриманим у прикладі 1.62, даний інтеграл дорівнює 0.

Відповідь. 0.

Приклад 1.64 Довести, що коли $f(x)$ є неперервною на $[0;T]$ періодичною функцією з періодом T, то виконується рівність:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx, \ a \in R.$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ є неперервною на $[0;T]$ функцією з періодом T, то вона є визначеною і неперервною на всій числовій прямій. Розглянемо інтеграл $\int_{T}^{T+a} f(x)dx$:

$$\int_{T}^{T+a} f(x)dx = \left\| \begin{matrix} z = x - T, \\ dz = dx. \end{matrix} \right\| = \int_{0}^{a} f(z+T)dz = \int_{0}^{a} f(z)dz = -\int_{a}^{0} f(z)dz.$$

Тепер знайдемо інтеграл $\int_{a}^{a+T} f(x)dx$:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{T+a} f(x)dx =$$
$$= \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx - \int_{a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx,$$

що і потрібно було довести.

1.14 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 1.10 *Якщо функції* $u=u(x)$ *і* $v=v(x)$ *мають на відрізку* $[a;b]$ *неперервні похідні, то виконується формула:*

$$\int_a^b u dv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b v du. \tag{1.18}$$

Доведення. Оскільки функція uv є первісною функції $(uv)'=u'v+uv'$, то за формулою Ньютона-Лейбніца отримуємо, що $\int_a^b(u'v+uv')dx=(uv)\Big|_a^b$. З іншого боку, маємо: $\int_a^b(u'v+uv')dx=\int_a^b vdu+\int_a^b udv$. Тому справедливою є рівність:

$$\int_a^b vdu+\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b.$$

Звідси випливає рівність (1.18).

Означення 1.14 *Формулу* (1.18) *називають* ***формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла***.

Розглянемо приклади застосування цієї формули.

Приклад 1.65 Обчислити інтеграл $\int_0^\pi x\sin xdx$**.**

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_0^\pi x\sin xdx=\begin{vmatrix}u=x, dv=\sin xdx,\\ du=dx, v=-\cos x\end{vmatrix}=-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos xdx=\pi+\sin x\Big|_0^\pi=\pi.$$

Відповідь. π

Приклад 1.66 Обчислити інтеграл $\int_1^e \ln xdx$**.**

Розв'язання. За формулою інтегрування частинами маємо:

$$\int_1^e\ln xdx=\begin{vmatrix}u=\ln x, dv=dx,\\ du=\dfrac{dx}{x}, v=x.\end{vmatrix}=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=e-x\Big|_1^e=1.$$

Відповідь. 1.

Приклад 1.67 Обчислити інтеграл $I=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$**.**

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x\sin x}{\cos^2 x}$ є парною, тому на симетричному відносно $x=0$ відрізку інтегрування $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ маємо:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = 2\int_{0}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$$

Інтегруємо частинами, прийнявши $u = x, dv = \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$. Тоді $du = dx, v = \frac{1}{\cos x}$. Отримуємо:

$$\int_{0}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \left.\frac{x}{\cos x}\right|_0^{\pi/3} - \int_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{2\pi}{3} - \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Тут для обчислення інтеграла $\int_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$ було використано заміну $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\int_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ x = \frac{\pi}{3}, t = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad x = 0, t = 0. \end{array} \right| = \int_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{2dt}{1-t^2} =$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}\right) = \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Таким чином, маємо:

$$I = 2\int_{0}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{4\pi}{3} - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Відповідь. $\frac{4\pi}{3} - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Використовуючи інтегрування частинами у визначеному інтегралі, можна отримати рекурентні формули для обчислення визначених інтегралів, що залежать від натурального параметра n.

Приклад 1.68 Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$.

Розв'язання. Маємо $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1$. При $n \geq 2$ для обчислення інтеграла I_n застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\left(-\cos x\right)=\left\|\begin{matrix}u=\sin^{n-1}x,\, dv=d\left(-\cos x\right),\\ du=\left(n-1\right)\sin^{n-2}x\cos xdx,\, v=-\cos x.\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(n-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=\left(n-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=$$

$$=\left(n-1\right)I_{n-2}-\left(n-1\right)I_n.$$

Звідси знаходимо, що $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. При непарному $n=2k+1$ отримуємо:

$$I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}I_{2k-1}=\ldots=\frac{\left(2k\right)\left(2k-2\right)\ldots 2}{\left(2k+1\right)\left(2k-1\right)\ldots 1}I_1=\frac{\left(2k\right)!!}{\left(2k+1\right)!!}.$$

Символом $n!!$, $n\in N$, позначають добуток всіх натуральних чисел, що не перевищують n та мають ту ж парність, що й n, тобто $\left(2k\right)!!$ – це добуток всіх парних чисел від 2 до $2k$, $\left(2k+1\right)!!$ – це добуток всіх непарних чисел від 1 до $\left(2k+1\right)$.

При парних $n=2k$ знаходимо:

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\frac{\left(2k-1\right)\left(2k-3\right)\ldots 1}{\left(2k\right)\left(2k-2\right)\ldots 2}I_0=\frac{\left(2k-1\right)!!}{\left(2k\right)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. $I_{2k}=\dfrac{\left(2k-1\right)!!}{\left(2k\right)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$; $I_{2k+1}=\dfrac{\left(2k\right)!!}{\left(2k+1\right)!!}$.

Зауважимо, що $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$, у чому можна легко переконатися, виконавши підстановку $x=\dfrac{\pi}{2}+t$ у цьому інтегралі.

1.15 Невласні інтеграли

Поняття визначеного інтеграла було введене при припущеннях про те, що відрізок інтегрування є скінченним, а підінтегральна функція – обмеженою. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування цей проміжок не можна розділити на n елементарних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума не матиме скінченної границі. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до поняття невласного інтеграла – інтеграла від функції на необмеженому проміжку або інтеграла від необмеженої функції.

Означення 1.15 *Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування називають* ***невласними інтегралами першого роду****.*

Надамо точне означення таких інтегралів.

Означення 1.16 Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, $a<b$. *Тоді, якщо існує скінченна границя* $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, *то її називають* ***невласним інтегралом першого роду*** *і позначають* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Отже, за означенням

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1.19}$$

Означення 1.17 У *цьому випадку інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *називають* ***збіжним****, а підінтегральну функцію* $f(x)$ – ***інтегровною*** *на* $[a;+\infty)$.

Якщо ж границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ *не існує або нескінченна, то інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *називають розбіжним, а функцію* $f(x)$ – ***неінтегровною*** *на* $[a;+\infty)$.

Аналогічно (1.19) визначається невласний інтеграл першого роду на проміжку $(-\infty;b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1.20}$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{1.21}$$

де c – довільне число. Отже, інтеграл у лівій частині (1.21) є збіжним тоді і лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли у правій частині цієї рівності. Можна довести. що інтеграл визначений формулою (1.21), не залежить від вибору числа c.

З наведених означень видно, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ є неперервною та невід'ємною на проміжку $[a;+\infty)$ і коли інтеграл (1.19) збігається, то природно вважати, що він виражає площу області, обмеженої зверху графіком функції $f(x)$, а знизу – віссю Ox.

Приклад 1.69 Обчислити наступні невласні інтеграли або встановити їх розбіжність: а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$**; б)** $\int\limits_0^{+\infty}\sin 4x dx$**; в)** $\int\limits_{-\infty}^{1} x dx$**; г)** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}$**.**

Розв'язання. а) До обчислення даного інтеграла застосуємо формулу (1.19), згідно з якою отримуємо:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{\pi}{2};$$

б) $\int\limits_0^{+\infty}\sin 4x dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\sin 4x dx=-\frac{1}{4}\lim\limits_{b\to+\infty}\cos 4x\Big|_0^b=-\frac{1}{4}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\cos 4b\right)+\frac{1}{4}.$

Оскільки $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\cos 4b\right)$ не існує, то даний інтеграл розбіжний.

в) За формулою (1.20) $\int\limits_{-\infty}^{1} x dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^1 x dx$. Оскільки

$$\int\limits_a^1 x dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^1=\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2},$$

а $\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=-\infty$, то даний інтеграл є розбіжним.

г) При $k=1$ отримуємо:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty,$$

тобто і у цьому випадку інтеграл є розбіжним.

Нехай $k\neq 1$. Тоді $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}x^{-k}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^{1-k}}{1-k}\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-k}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-k}-1\right).$

Остання границя дорівнює $+\infty$ при $1-k>0$, тобто $k<1$. При $k>1$ вона дорівнює $\frac{1}{k-1}$, оскільки у цьому випадку $\lim\limits_{b\to+\infty}b^{1-k}=0$.

Отже, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}$ є збіжним при $k>1$, він дорівнює $\frac{1}{k-1}$. При $k\le 1$ інтеграл розбіжний.

Відповідь. а) $\frac{\pi}{2}$; б) розбіжний; в) розбіжний; г) збіжний при $k>1$, розбіжний при $k\le 1$.

Приклад 1.70 Обчислити невласний інтеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+10}$**.**

$$I=\lim_{b\to-\infty}\int\limits_b^{0}\frac{dx}{x^2+2x+10}+\lim_{a\to+\infty}\int\limits_0^{a}\frac{dx}{x^2+2x+10}.$$

Зауважимо, що тут замість точки $x=0$ за проміжну межу інтегрування можна взяти будь-яку іншу скінченну точку числової прямої.

Знайдемо границі з правої частини останньої рівності:

$$\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{dx}{x^2+2x+10}=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{dx}{(x+1)^2+9}=\frac{1}{3}\lim_{b\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\bigg|_b^0=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6},$$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{dx}{x^2+2x+10}=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{dx}{(x+1)^2+9}=\frac{1}{3}\lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\bigg|_0^a=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Підставивши ці границі у вираз для I, отримаємо:

$$I=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.

У розглянутих прикладах обчислення невласного інтеграла ґрунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Наведемо без доведення деякі ознаки збіжності.

Теорема 1.11 *Якщо на проміжку* $[a;+\infty)$ *функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *є неперервними та задовольняють умову* $0\le f(x)\le g(x)$, *то із збіжності інтеграла* $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ *випливає збіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, *а із розбіжності інтеграла* $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty}g(x)dx$.

Приклад 1.71 Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^8+7}}$; б) $\int_1^{+\infty}\frac{2+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. а) Оскільки $\forall x\in[1;+\infty)$ $0<\frac{x}{\sqrt{x^8+7}}<\frac{1}{x^3}$, а інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ є збіжним (приклад 1.69 (г)), то за теоремою 1.11 даний інтеграл є збіжним.

б) Для підінтегральної функції можна записати нерівність $\frac{2+\ln x}{\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{x}}>0$, інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ є розбіжним, тому $\int_1^{+\infty}\frac{2+\ln x}{\sqrt{x}}dx$ також є розбіжним.

Відповідь. а) збіжний; б) розбіжний.

Теорема 1.12 *Якщо* $f(x)>0$, $g(x)>0$ *та існує скінченна границя* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$, $k>0$, *то інтеграли* $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ *та* $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ *або обидва збігаються, або обидва розбігаються одночасно.*

Приклад 1.72 Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\ln\frac{x^2+2}{x^2+1} = \ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right).$$

При $x \to +\infty$ нескінченно малі $\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)$ та $\frac{1}{x^2+1}$ є еквівалентними, оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{1/(x^2+1)} = 1$. Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ є збіжним, тому збіжним є і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Відповідь. Інтеграл збіжний.

У теоремах 1.11 та 1.12 розглядалися невласні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива наступна теорема.

Теорема 1.13 *Якщо інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ *збігається, то збігається і інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 1.73 Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1+5\cos x}{x^3}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція у даному інтегралі є знакозмінною. Оскільки $\left|\frac{1+5\cos x}{x^3}\right| \le \frac{6}{x^3}$, а інтеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{6}{x^3}dx$ є збіжним, то збіжним є інтеграл $\int\limits_2^{+\infty}\left|\frac{1+5\cos x}{x^3}\right|dx$, тому за теоремою 1.13 збіжний і інтеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1+5\cos x}{x^3}dx$.

Відповідь. Інтеграл збігається.

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ще не випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$. Якщо разом з інтегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *абсолютно збіжним*, а функцію $f(x)$ – *абсолютно інтегровною* на проміжку $[a;+\infty)$. Якщо ж інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ є розбіжним, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *умовно збіжним*.

Далі розглянемо невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).

Означення 1.18 *Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$. Точку $x=b$ назвемо* ***особливою точкою*** *функції $f(x)$, якщо $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$ ($x\to b$ і $x<b$). Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon>0$ такому, що $b-\varepsilon>a$. Тоді, якщо існує скінченна границя $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають* ***невласним інтегралом другого роду***:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (1.22)$$

У цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл другого роду (1.22) існує або збігається. Якщо ж границя у правій частині рівності (1.22) не існує або є нескінченною, то інтеграл (1.22) називають розбіжним невласним інтегралом.

Аналогічно, якщо особливою точкою є $x=a$, то невласний інтеграл другого роду визначається рівністю

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (1.23)$$

Якщо $f(x)$ необмежена у околі якої-небудь внутрішньої точки $x=c\in(a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів другого роду, – $\int_a^c f(x)dx$ та $\int_c^b f(x)dx$, за означенням покладають:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \qquad (1.24)$$

Якщо особливими точками є кінці відрізка інтегрування $x=a$ та $x=b$, то за умови існування обох невласних інтегралів, – $\int_a^c f(x)dx$ та $\int_c^b f(x)dx$, де $x=c$ – довільна точка інтервалу $(a;b)$, за означенням покладають:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Приклад 1.74 Використовуючи означення, обчислити наступні невласні інтеграли, або встановити їх розбіжність:

а) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ є необмеженою у околі точки $x=1$. На будь-якому відрізку $[1+\varepsilon; e]$ вона є неперервною, а тому інтегровною. За визначенням невласного інтеграла другого роду маємо:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1-\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=\frac{3}{2}.$$

б) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ є необмеженою у околі точки $x=\frac{\pi}{2}$ і є інтегровною на будь-якому відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$, де $\varepsilon>0$, оскільки є неперервною на цьому відрізку. Тому отримуємо:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right]=+\infty.$$

Інтеграл є розбіжним.

в) Розкладемо підінтегральну функцію $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$ на суму елементарних дробів:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{x^2+x+1}\right).$$

Тоді отримуємо:

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Другий доданок у правій частині даної рівності є власним визначеним інтегралом, тому він не впливає на характер збіжності заданого інтеграла. Вона визначається збіжністю інтеграла $\int_0^1\frac{dx}{1-x}$.

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(1-x)\right)\Big|_0^{1-\varepsilon}=-\infty.$$

Таким чином, заданий інтеграл є розбіжним.

Відповідь. а) $\frac{3}{2}$; б) розбіжний; в) розбіжний.

Приклад 1.75 Обчислити інтеграл $\int_0^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція є необмеженою у околі точки $x=2$.

Знайдемо невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$. Для цього перетворимо підінтегральну функцію:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Тоді

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C.$$

Функція $F(x) = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$ неперервна на $[0;2]$ та $F'(x) = f(x)$ на $(0;2)$. Тому для обчислення даного інтеграла можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = \left(2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}\right)\Bigg|_0^2 = \pi + 2.$$

Відповідь. $\pi + 2$.

Приклад 1.76 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$, $\lambda > 0$.

Розв'язання. Якщо $\lambda \neq 1$, то $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\varepsilon^{1-\lambda}\right)$.

Остання границя є нескінченною при $1-\lambda < 0$, тобто $\lambda > 1$. При $0 < \lambda < 1$ отримуємо, що даний невласний інтеграл дорівнює $\frac{1}{1-\lambda}$, оскільки у цьому випадку $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-\lambda} = 0$. При $\lambda = 1$ отримуємо $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to +0}(\ln x)\Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to +0}\ln\varepsilon = +\infty$.

Отже, інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ збігається при $0 < \lambda < 1$, при $\lambda \geq 1$ він розбіжний.

Відповідь. Інтеграл збігається при $0 < \lambda < 1$, розбігається при $\lambda \geq 1$.

Приклад 1.77 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[5]{x}}$ є необмеженою у околі точки $x = 0$. Представимо інтеграл у вигляді:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}.$$

Обидва інтеграли у правій частині останньої рівності є розбіжними, оскільки інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ є розбіжним при $\lambda > 1$, а у нашому випадку $\lambda = \frac{6}{5} > 1$. Таким чином, інтеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$ є розбіжним.

Відповідь. Інтеграл розбіжний.

Сформулюємо тепер ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема 1.14 *Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;b)$, мають особливу точку $x = b$ та задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.*

Теорема 1.15. *Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ проміжку $[a;b)$ неперервні, додатні і мають особливу точку $x = b$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, де k – скінченне число, то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ та $\int\limits_a^b g(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.*

Теорема 1.16. *Якщо $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ також збігається.*

Твердження, аналогічні теоремам 1.14-1.116, виконуються і якщо особливою точкою є $x = a$.

Приклад 1.78 Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$.

Розв'язання. $\left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. При цьому інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ є збіжним, тому збігається інтеграл $\int\limits_1^2 \left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right| dx$, звідки, за теоремою 1.16, випливає збіжність інтеграла $\int\limits_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$.

Відповідь. Інтеграл збіжний.

1.16 Застосування визначеного інтеграла

Існує дві основні схеми застосування визначеного інтеграла. Перша схема, яку називають методом інтегральних сум, ґрунтується на означенні визначеного інтеграла. Шукана величина спочатку наближено виражається у вигляді інтегральної суми, а потім точно виражається через границю цієї суми, тобто через визначений інтеграл.

Друга схема, яку називають методом диференціала, полягає у тому, що спочатку складають диференціал шуканої величини, а сама ця величина знаходиться інтегруванням отриманого диференціала у заданих межах.

Розглянемо застосування визначеного інтеграла до розв'язування деяких геометричних та фізичних задач.

З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає, що його можна застосувати до обчислення площ плоских фігур. У п. 1.10 було показано, що площа криволінійної трапеції, тобто фігури, обмеженої графіком функції $y=f(x)$ $\left(f(x)\geq 0\right)$, віссю Ox та прямими $x=a$ і $x=b$ $(a<b)$, обчислюється за формулою $S=\int_a^b f(x)dx$. При $f(x)\leq 0$, $a\leq x\leq b$, таку площу обчислюють за формулою $S=-\int_a^b f(x)dx$. Формулу площі криволінійної трапеції для обох випадків можна записати у вигляді однієї рівності:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx. \tag{1.25}$$

Ця формула залишається справедливою і у випадку, коли функція $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ скінченне число разів змінює знак.

Для знаходження площі фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, якщо $f_1(x)\leq f_2(x)$, $x\in[a;b]$, використовують формулу:

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \tag{1.26}$$

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою у *параметричній формі*:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \alpha\leq t\leq\beta,$$

де $x(t)$ та $y(t)$ – неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha;\beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$. Тоді, якщо $x(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ є монотонною, причому $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції у інтегралі (1.25) досить виконати заміну змінної $x=x(t)$, $dx=x'(t)dt$. Отримаємо формулу:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt. \quad (1.27)$$

Для обчислення площі фігури, обмеженої замкненою кривою, рівняння якої задані у параметричній формі, використовують формулу:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt. \quad (1.28)$$

Тепер розглянемо обчислення площі фігури, обмеженої лінією, що у полярній системі координат визначається рівністю $\rho=\rho(\varphi)$, а також променями $\varphi=\alpha$ та $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$). Таку фігуру називають *криволінійним сектором*. Застосовуючи метод інтегральних сум, можна показати, що його площа визначається за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi. \quad (1.29)$$

Приклад 1.79 Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x=0$, $x=2$ та кривими $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Розв'язання. Побудуємо задану фігуру, площу якої потрібно обчислити (рис. 1.1).

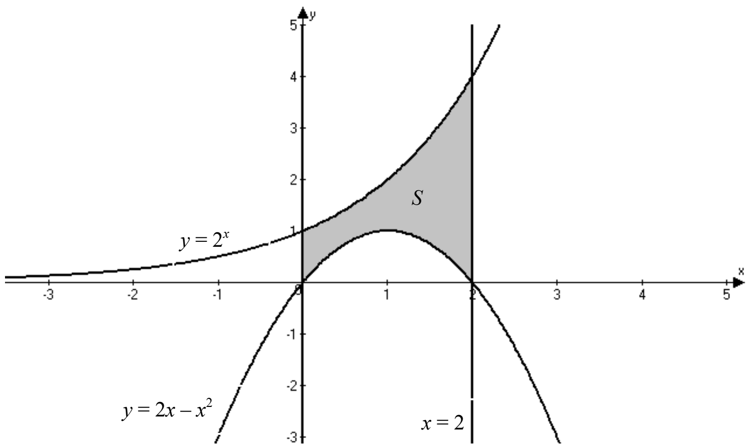


Рис. 1.1

Виходячи з розташування графіків кривих $y=2^x$ та $y=2x-x^2$ при $x\in[0;2]$, знаходимо площу криволінійної трапеції, обмеженої заданими лініями, за формулою (1.26):

$$S=\int_0^2\left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2-\left.x^2\right|_0^2+\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-4+\frac{8}{3}=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

Відповідь. $\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}$.

Приклад 1.80 Знайти площу області, обмеженої лініями $y=x-1$ та $y^2=x+1$.

Розв'язання. Дана область зображена на рисунку 1.2. Вона є об'єднанням двох криволінійних трапецій D_1 та D_2, що визначаються нерівностями:

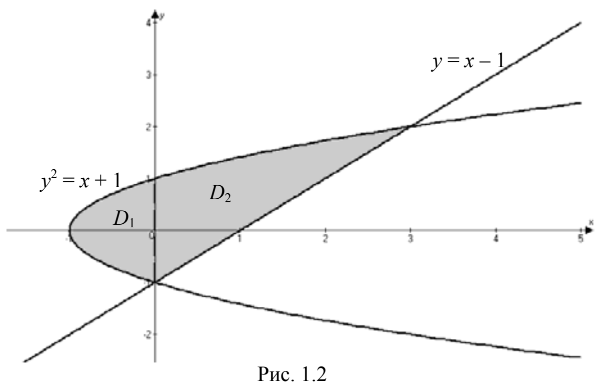


Рис. 1.2

$$D_1:\begin{cases}-1\le x\le 0,\\ -\sqrt{x+1}\le y\le\sqrt{x+1};\end{cases}\quad D_2:\begin{cases}0\le x\le 3,\\ x-1\le y\le\sqrt{x+1}.\end{cases}$$

Знайдемо площу S заданої області як суму площ S_1 та S_2 областей D_1 та D_2.

$$S_1=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{x+1}-\left(-\sqrt{x+1}\right)\right)dx=2\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\cdot dx=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}=\frac{4}{3};$$

$$S_2=\int_{0}^{3}\left(\sqrt{x+1}-(x-1)\right)dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{3}-\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_{0}^{3}=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}-2+\frac{1}{2}=\frac{19}{6}.$$

Тоді площа S заданої області:

$$S=S_1+S_2=\frac{19}{6}+\frac{4}{3}=\frac{9}{2}.$$

Відповідь. $\frac{9}{2}$.

Приклад 1.81 Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x=a\left(t^2-2t\right),\ y=a\left(t^2-1\right)\left(t-3\right),\ a>0$.

Розв’язання. Якщо крива утворює петлю, то для неї існує точка самоперетину, тобто існують такі значення $t_1, t_2, (t_1\ne t_2)$, що виконана умова:

$$\begin{cases}x(t_1)=x(t_2),\\ y(t_1)=y(t_2).\end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases}a\left(t_1^2-2t_1\right)=a\left(t_2^2-2t_2\right),\\ a\left(t_1^2-1\right)\left(t_1-3\right)=a\left(t_2^2-1\right)\left(t_2-3\right).\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(t_1^2-t_2^2\right)=2\left(t_1-t_2\right),\\ \left(t_1^2-1\right)\left(t_1-3\right)=\left(t_2^2-3\right)\left(t_2-3\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_1=-1,\\ t_2=3.\end{cases}$$

Таким чином, точка самоперетину кривих відповідає значенням $t_1=-1$, $t_2=3$. Для побудови даної кривої здійснимо дослідження функцій $x(t)$ та $y(t)$. У точці $t_1=-1$ $x(-1)=3a$, $y(-1)=0$, при $t_2=3$ маємо $x(3)=3a$, $y(3)=0$.

З рівняння $x'(t)=2a(t-1)=0$ знаходимо стаціонарну точку даної функції – $t_3=1$. У цій точці $x(1)=-a$, $y(1)=0$. З рівняння $y'(t)=a\left(3t^2-6t-1\right)=0$ знаходимо стаціонарні точки функції $y(t)$ – точки $t_{4,5}=1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Маємо:

$$x\left(1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{a}{3},\ y\left(1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\pm\frac{16\sqrt{3}a}{9}.$$

Таким чином, для заданої кривої значення координати x змінюються у межах від $x_{\min}=-a$ до $x_{\max}=3a$, значення y – від мінімального значення

$-\dfrac{16\sqrt{3}a}{9}$ до максимуму $\dfrac{16\sqrt{3}a}{9}$. Обидва екстремальні значення досягаються при $x=\dfrac{a}{3}$.

Стаціонарні точки t_3, t_4, t_5 ділять проміжок $(-1;3)$ на чотири інтервали. Встановивши знак похідних на кожному з них, знаходимо, що на $\left(0;1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає, на $\left(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};1\right)$ $x(t)$ продовжує спадати, $y(t)$ тут теж спадає. На проміжку $\left(1;1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ спостерігаємо зростання функцій $x(t)$ та $y(t)$, на останньому інтервалі $\left(1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3};3\right)$ $x(t)$ зростає, $y(t)$ спадає.

Ми знайшли точки перетину кривої з віссю Ox. Вісь Oy вона перетинає, якщо $x(t)=0$, тобто при $t=0$ та $t=2$. Тут отримуємо відповідні значення координати y: $y(0)=3a, y(2)=-3a$.

Дослідивши функції $x(t)$ та $y(t)$ на монотонність на відрізку $[-1;3]$, знаходимо, що зі зростанням змінної t на цьому відрізку обхід петлі здійснюється проти годинникової стрілки (додатний напрям обходу). Побудуємо її на координатній площині (рис. 1.3).

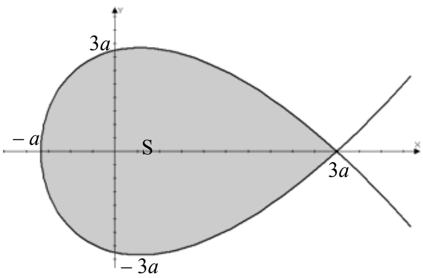


Рис. 1.3

Для обчислення шуканої площі використаємо формулу (1.28):

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt.$$

У даному випадку маємо:

$$x'(t)=2a(t-1),\ y'(t)=a\left(3t^2-6t-1\right),$$

$$S=\frac{a^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(t^2-2t\right)\left(3t^2-6t-1\right)-\left(t^2-1\right)(t-3)(2t-2)\right]dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-1}^{3}\left(t^4-4t^3+7t^2-6t+6\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(\frac{t^5}{5}-t^4+\frac{7}{3}t^3-3t^2+6t\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{256}{15}a^2.$$

Відповідь. $\dfrac{256a^2}{15}$.

Приклад 1.82 Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho=a\sin 3\varphi$.

Розв'язання. Дана крива (трилисник) зображена на рисунку 1.4. Вона утворює три петлі рівної площі, кожна з яких обмежує криволінійний сектор.

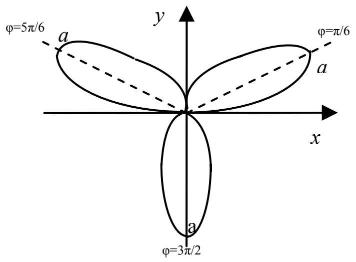


Рис. 1.4

Обчислимо площу одного такого сектора, використавши формулу (1.29):

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi .$$

У нашому випадку для сектора у першій чверті координатної площини $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$. Тому його площа дорівнює:

$$S_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3}a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\pi/3}\left(1-\cos 6\varphi\right)d\varphi=\frac{a^2}{4}\left(\varphi-\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/3}=\frac{\pi a^2}{12}.$$

Отже, шукана площа дорівнює: $S=3S_1=\dfrac{\pi a^2}{4}$.

Відповідь. $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

Довжину дуги гладкої кривої, заданої функцією $y=f(x)$, $a\le x\le b$, знаходять за формулою:

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{1.30}$$

Якщо крива задана у *параметричній формі*: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то довжина цієї кривої визначається за формулою:

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \tag{1.31}$$

Нехай тепер гладка крива задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ у *полярних координатах*. Якщо у рівностях, що визначають зв’язок між полярними та декартовими координатами, параметром вважати полярний кут φ, тобто $x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$, то формула (1.29) набуває вигляду:

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi. \tag{1.32}$$

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, обчислюють за формулою, аналогічною (1.31):

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt. \tag{1.33}$$

Приклад 1.83 Знайти довжину дуги кривої $y=\mathrm{ch}\,x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(b;\mathrm{ch}b)$.

Розв’язання. Використаємо формулу (1.30) для знаходження довжини дуги графіка функції $y=y(x)$, заданої у декартових координатах на відрізку

$\left[a;b\right]$. У нашому випадку $y'\left(x\right)=\text{sh}x$, $1+y'^2=1+\text{sh}^2x=\text{ch}^2x$, тому

$$l=\int\limits_0^b\sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_0^b\text{ch}\,x\,dx=\text{sh}\,x\Big|_0^b=\text{sh}\,b.$$

Відповідь. $\text{sh}\,b$.

Приклад 1.84 Знайти довжину дуги l кривої, заданої у параметричній формі: $x=a\cos^4t,\, y=a\sin^4t,\, a>0$.

Розв'язання. Оскільки для даної дуги $x>0, y>0$, то можна прийняти, що $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Тоді кожному значенню t відповідає єдина точка на заданій кривій і можна використати формулу (1.31) для обчислення довжини дуги кривої, заданої у параметричній формі.

Для заданої кривої $x'\left(t\right)=-4a\cos^3t\cdot\sin t,\, y'\left(t\right)=4a\sin^3t\cos t$. Тоді отримуємо:

$$x'^2\left(t\right)+y'^2\left(t\right)=16a^2\cos^6t\sin^2t+16a^2\sin^6t\cos^2t=2a^2\sin^2 2t\left(1+\cos^2 2t\right).$$

Шукана довжина дуги дорівнює:

$$l=a\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 2t}\,\sin 2t\,dt=\left\|\begin{matrix}\cos 2t=z,\,-2\sin 2tdt=dz,\\ t=0\Rightarrow z=1,\, t=\pi/2\Rightarrow z=-1\end{matrix}\right\|=\frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}dz.$$

Використавши відомий табличний інтеграл

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,$$

отримаємо:

$$l=\frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}dz=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(z\sqrt{1+z^2}+\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^1=a+\frac{a\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь. $a+\dfrac{a\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}$.

Приклад 1.85 Знайти довжину дуги кривої $r=a\left(1+\cos\varphi\right), a>0$ (кардіоїда), заданої у полярній системі координат.

Розв'язання. Кардіоїда є замкненою кривою, для неї $\varphi\in\left[0;2\pi\right)$. Використаємо формулу (1.32) для знаходження довжини дуги кривої, заданої у полярних координатах. Для кардіоїди маємо:

$$\rho'=-a\sin\varphi,\rho^2+\rho'^2=a^2\left(2+2\cos\varphi\right)=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

$$l=\int\limits_0^{2\pi}2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi}=8a.$$

Відповідь. $8a$.

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі $S\left(x\right)$ перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до осі Ox, що знаходяться на відстані x від початку координат, $a \le x \le b$. Для цього використовують формулу об'єму тіла за площами паралельних перерізів:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{1.34}$$

Означення 1.19 Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, де $a \le x \le b$. *Якщо цю трапецію обертати навколо осі Ox, утвориться просторова фігура, яку називають* ***тілом обертання***.

Оскільки у цьому випадку площа паралельного перерізу $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, то з формули (1.34) отримуємо формулу для обчислення об'єму тіла обертання:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1.35}$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y) \ge 0$ і прямими $y = c$ та $y = d$ ($c < d$), то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Oy, обчислюють за формулою:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \tag{1.36}$$

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі Ox. *Площа бічної поверхні* утвореного при цьому тіла обертання обчислюють за формулою:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \tag{1.37}$$

Приклад 1.86 Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 16, x = 1, x = 3, y = 0$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Схематичне зображення даного тіла обертання наведено на рисунку 1.5. Для обчислення його об'єму використаємо формулу (1.35). Маємо:

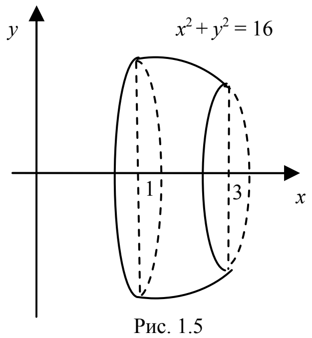


Рис. 1.5

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx = \pi \int_1^3 \left(16 - x^2\right)dx = \pi \left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{70\pi}{3}.$$

Відповідь. $\frac{70\pi}{3}$.

Розглянемо деякі фізичні застосування визначеного інтеграла.

У п. 1.10 було показано, що робота сили $F = F(x)$ по переміщенню матеріальної точки, що рухається вздовж осі Ox, з положення $x = a$ у положення $x = b$, обчислюється за формулою $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

Приклад 1.87 Електричний заряд e_1, розташований у початку координат, відштовхує заряд e_2 з точки $(x_1; 0)$ у точку $(x_2; 0)$. Знайти роботу A сили відштовхування F.

Розв'язання. Відомо, що електричні заряди відштовхуються з силою

$$F = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^3},$$

де e_1 та e_2 – величини зарядів, r – відстань між ними.

Диференціал роботи сили F на переміщенні dx дорівнює :

$$dA = F(x)dx = \frac{e_1 e_2}{x^2}dx.$$

Звідси знаходимо:

$$A = e_1 e_2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = -e_1 e_2 \left.\frac{1}{x}\right|_{x_1}^{x_2} = e_1 e_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right).$$

Відповідь. $e_1 e_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$.

Приклад 1.88 Робота, необхідна для того, щоб підняти тіло на певну висоту, дорівнює добутку ваги тіла на цю висоту. Визначити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду з циліндричної цистерни, радіус якої дорівнює R, а висота H.

Розв'язання. Поділимо цистерну площинами, паралельними її основі, що знаходяться на відстані dx одна від одної. Об'єм кожного з отриманих при цьому елементарних циліндрів дорівнює:

$$dV = \pi R^2 dx.$$

Елементарна робота, потрібна для підняття з глибини x отриманого елементарного циліндра вагою $\gamma \cdot g \cdot dV$, де γ – густина води, g – прискорення вільного падіння, дорівнює:

$$dA = \gamma \cdot g \cdot x \cdot \pi R^2 dx.$$

Повна робота дорівнює:

$$A = \pi R^2 \int\limits_0^H x dx = \frac{\pi R^2 H^2}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi R^2 H^2}{2}$.

Визначений інтеграл застосовують для обчислення *маси матеріальної кривої* з лінійною щільністю $\rho(x, y)$. Якщо рівняння цієї кривої у *параметричній формі* мають вигляд: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то її маса може бути знайдена за формулою:

$$M=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (1.38)$$

Якщо маємо рівняння матеріальної кривої у *декартових координатах*: $y=f(x)$, $a\le x\le b$, то формула (1.38) набуває вигляду:

$$M=\int\limits_{a}^{b}\rho\left(x,f(x)\right)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (1.39)$$

Зокрема, при $\rho(x,y)=1$ числове значення маси цієї кривої співпадає з її довжиною.

Для обчислення *статичних моментів* кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, що має лінійну щільність $\rho(x,y)=1$, *відносно координатних осей*, використовують формули:

$$\begin{cases} M_x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt, \\ M_y=\int\limits_{\alpha}^{\beta}x(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \end{cases} \qquad (1.40)$$

Якщо рівняння цієї матеріальної кривої задане у *декартових координатах*, тобто $y=f(x)$, $a\le x\le b$, то рівняння (1.40) набувають вигляду:

$$\begin{cases} M_x=\int\limits_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \\ M_y=\int\limits_{a}^{b}x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \end{cases} \qquad (1.41)$$

Моменти інерції матеріальної кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ з одиничною лінійною щільністю відносно координатних осей *Ox* та *Oy* можна обчислити за формулами:

$$\begin{cases} M_x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}y^2(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt, \\ M_y=\int\limits_{\alpha}^{\beta}x^2(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \end{cases} \qquad (1.42)$$

У *декартових координатах* останні формули набувають вигляду:

$$\begin{cases} M_x=\int\limits_{a}^{b}f^2(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \\ M_y=\int\limits_{a}^{b}x^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \end{cases} \qquad (1.43)$$

Статичні моменти фігури G, обмеженої неперервними кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $a\le x\le b$, де $f_1(x)\le f_2(x)$ та прямими $x=a$ і $x=b$, у випадку сталої лінійної щільності $\rho=1$, обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} M_x = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx, \\ M_y = \int\limits_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \end{cases} \tag{1.44}$$

Координати x_0 *та* y_0 *центра мас* цієї фігури знаходять за формулами:

$$x_0 = \frac{M_y}{S},\ y_0 = \frac{M_x}{S},$$

де S – площа фігури G.

Моменти інерції фігури G *відносно координатних осей* при $\rho = 1$ обчислюють за формулами:

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{1}{3}\int\limits_a^b \left(f_2^3(x) - f_1^3(x)\right)dx, \\ I_y = \int\limits_a^b x^2\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \end{cases} \tag{1.45}$$

Приклад 1.89 Знайти центр мас фігури, обмеженої еліпсом $4x^2+9y^2=36$ **та колом** $x^2+y^2=9$**, що знаходиться у першій чверті координатної площини.**

Розв'язання. Побудуємо дуги кола радіуса 3 з центром у початку координат та еліпса з цим же центром та півосями 3 та 2, розташовані у першій чверті, які разом з координатними осями обмежують задану фігуру (рис. 1.6).

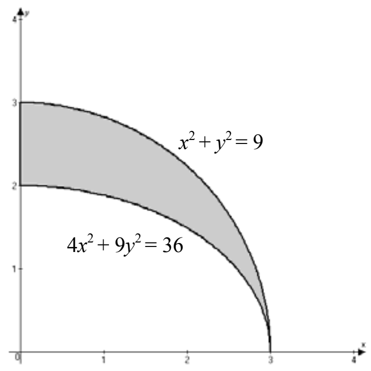


Рис. 1.6

Спочатку за формулами (1.44) знаходимо статичні моменти даної фігури:

$$M_y = \int\limits_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int\limits_0^3 x\left(\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,d\left(9-x^2\right) = -\frac{1}{9}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3 = 3;$$

$$M_x = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_a^b \left(f^2{}_2(x) - f^2{}_1(x)\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^3\left(\left(9-x^2\right) - \frac{4}{9}\left(9-x^2\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^3\left(5 - \frac{5}{9}x^2\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(5x - \frac{5x^3}{27}\right)\Bigg|_0^3 = 5.$$

Далі знайдемо координати центра мас фігури за формулами:

$$x_0 = \frac{M_y}{S},\ y_0 = \frac{M_x}{S},$$

де S – площа даної фігури.

Площу криволінійної трапеції знайдемо як різницю площі чверті круга радіуса 3, та чверті еліпса з півосями a=3, b=2 (площа еліпса з півосями a, b дорівнює πab):

$$S = \frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким чином, отримуємо координати центра мас:

$$x_0 = \frac{M_y}{S} = \frac{4}{\pi},\ y_0 = \frac{M_x}{S} = \frac{20}{3\pi}.$$

Відповідь. $\left(\frac{4}{\pi}; \frac{20}{3\pi}\right)$.

2 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1 Поняття подвійного інтеграла

Узагальненням визначеного інтегралу на випадок функції двох змінних є подвійний інтеграл.

Нехай в замкненій області D, що належить площині Oxy, задано неперервну функцію $u = f(x; y)$. Розіб'ємо задану область на n елементарних областей $D_i \left(i = \overline{1; n}\right)$. Площі отриманих областей будемо позначати відповідно через ΔS_i, а найбільшу відстань між точками області – через d_i (рис. 2.1).

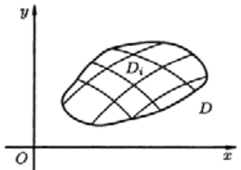


Рис. 2.1

Означення 2.1 У кожній елементарній області D_i оберемо довільну точку $M_i(x_i; y_i)$. Значення функції $f(x_i; y_i)$ в цій точці помножимо на площу відповідної елементарної області, складемо суму всіх таких добутків:

$$f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i .$$

Отримана сума називається ***інтегральною сумою*** *функції* $u = f(x; y)$ *в області* D.

Означення 2.2 Розглянемо границю інтегральної суми, коли n прагне до нескінченності таким чином, що $\max d_i \to 0$. *Якщо така границя існує та не залежить ні від способу розбиття області D на елементарні області, ні від способу вибору в них точок, то вона називається* ***подвійним інтегралом*** *від функції $u = f(x; y)$ по області D та позначається* $\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \iint\limits_D f(x; y)ds$.

Отже, подвійний інтеграл визначається рівністю:

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i .$$

Область D називають *областю інтегрування*, x та y *– змінними інтегрування*, підінтентегральну функцію $u = f(x; y)$ *– інтегровною в області* D; $dxdy = dS$ *– елементом площі*.

Теорема 2.1 (Достатня умова інтегрованості функції). *Якщо функція $u = f(x; y)$ неперервна в замкненій області D, то вона інтегровна в цій області.*

2.2 Властивості подвійного інтеграла

1. $\iint\limits_D C \cdot f(x; y)dxdy = C \cdot \iint\limits_D f(x; y)dxdy$, де $C = \text{const}$.

2. $\iint\limits_D [f(x;y) \pm g(x;y)]dxdy = \iint\limits_D f(x;y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x;y)dxdy$.

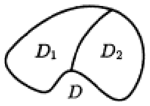


Рис. 2.2

3. Якщо область інтегрування D можна розбити лінією на дві області D_1 та D_2, наприклад, як це показано на рисунку 2.2, то

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy.$$

4. Якщо в області інтегрування D функція $f(x;y) \geq 0$, то і подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy \geq 0$.

5. Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ в області інтегрування D задовольняють нерівності $f(x;y) \geq g(x;y)$, то справедлива і нерівність

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x;y)dxdy.$$

6. $\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D dS = S$.

7. Якщо функція $u = f(x;y)$ неперервна в замкненій області D, площа якої дорівнює S, то

$$m \cdot S \leq \iint\limits_D f(x;y)dxdy \leq M \cdot S,$$

де m та M – найменше та найбільше значення підінтегральної функції в області D відповідно.

8. Якщо функція $u = f(x;y)$ неперервна в замкненій області D, площа якої дорівнює S, то в цій області існує така точка $M_0(x_0; y_0)$, що виконується рівність:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = f(x_0; y_0) \cdot S.$$

Означення 2.3 *Величина* $f(x_0; y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ *називається **середнім значенням функції*** $u = f(x;y)$ *в області* D.

2.3 Подвійний інтеграл у декартовій системі координат

2.3.1 Подвійний інтеграл по прямокутнику. Нехай область інтегрування D – це прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям та які визначаються рівняннями $x = a$, $x = b$ $(a \leq x \leq b)$; $y = c$, $y = d$ $(c \leq y \leq d)$ (рис. 2.3). У цьому випадку подвійний інтеграл обчислюється за однією з формул:

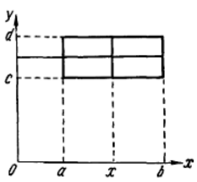


Рис. 2.3

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy, \tag{2.1}$$

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx. \tag{2.2}$$

Означення 2.4 *Інтеграли, що знаходяться в правих частинах цих формул, називаються* ***повторними*** *або* ***двократними***.

Означення 2.5 *У формулі* (2.1) *інтеграл* $\int\limits_c^d f(x;y)dy$ *називається* ***внутрішнім***. Він обчислюється в припущенні, що змінна x зберігає на відрізку $[c;d]$ стале фіксоване значення (тобто є константою). При такому припущенні підінтегральна функція $f(x;y)$ є функцією однієї змінної y. У результаті обчислення цього інтеграла отримаємо функцію змінної x. Обчислення повторного інтеграла потрібно починати з обчислення внутрішнього інтеграла.

Після того, як ця функція визначена, потрібно виконати зовнішнє інтегрування – проінтегрувати отриману функцію за змінною x. У результаті другого інтегрування отримуємо вже число.

Отже, при обчисленні подвійного інтеграла за формулою (2.1) перше (внутрішнє) інтегрування проводиться за змінною y при сталому значенні змінної x, а друге інтегрування – за змінною x.

Якщо ж для обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ застосовується формула (2.2), то порядок інтегрування змінюється: внутрішнє інтегрування ведеться за змінною x у припущенні, що змінна y на відрізку $[a;b]$ приймає стале значення, а повторне (зовнішнє) інтегрування – за змінною y. Аналогічно, у результаті обчислення внутрішнього інтеграла $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ отримаємо функцію змінної y, а у результаті повторного інтегрування за змінною y отримуємо числове значення інтеграла.

Приклад 2.1 Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(6xy^2-12x^2y\right)dxdy$**, де область** D **– це квадрат зі сторонами** $x=0$**,** $x=1$**,** $y=2$**,** $y=3$**. У повторному інтегралі внутрішній інтеграл спочатку обчислити за змінною** y**, а зовнішній – за змінною** x**. Обчислити цей же інтеграл, змінивши порядок інтегрування.**

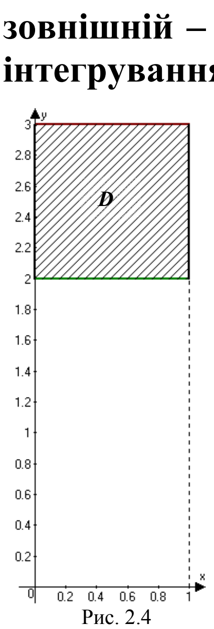


Рис. 2.4

Розв'язання. Спочатку зобразимо область інтегрування (рис. 2.4). Для обчислення скористаємося формулою (2.1) (так як за умовою внутрішній інтеграл обчислюємо за змінною y). Запишемо заданий подвійний інтеграл через повторний:

$$\iint\limits_D \left(6xy^2-12x^2y\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_2^3 \left(6xy^2-12x^2y\right)dy .$$

Внутрішнє (перше) інтегрування будемо виконувати за змінною y, а зовнішнє (друге) – за змінною x.

Обчислення починаємо із внутрішнього інтеграла $\int\limits_2^3 \left(6xy^2-12x^2y\right)dy$, в якому змінна x розглядається як стала:

$$\int_2^3\left(6xy^2-12x^2y\right)dy=\int_2^3 6xy^2dy-\int_2^3 12x^2ydy=6x\int_2^3 y^2dy-12x^2\int_2^3 ydy=$$

$$=6x\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_2^3-12x^2\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_2^3=2x\left(3^3-2^3\right)-6x^2\left(3^2-2^2\right)=38x-30x^2.$$

Отримали функцію змінної x. Обчислюємо тепер зовнішній інтеграл:

$$\int_0^1\left(38x-30x^2\right)dx=\int_0^1 38xdx-\int_0^1 30x^2dx=38\int_0^1 xdx-30\int_0^1 x^2dx=$$

$$=38\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1-30\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=19\left(1^2-0^2\right)-10\left(1^3-0^3\right)=19-10=9.$$

Отже, маємо, що

$$\iint_D\left(6xy^2-12x^2y\right)dxdy=\int_0^1\left(38x-30x^2\right)dx=9.$$

Зауважимо, що всі наведені обчислення можна було б зробити й не обчислюючи кожний інтеграл окремо, а саме:

$$\iint_D\left(6xy^2-12x^2y\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_2^3\left(6xy^2-12x^2y\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left[6x\int_2^3 y^2dy-12x^2\int_2^3 ydy\right]=\int_0^1\left(6x\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_2^3-12x^2\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_2^3\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left[2x\left(3^3-2^3\right)-6x^2\left(3^2-2^2\right)\right]dx=\int_0^1\left(38x-30x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1 38xdx-\int_0^1 30x^2dx=38\int_0^1 xdx-30\int_0^1 x^2dx=38\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1-30\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=$$

$$=19\left(1^2-0^2\right)-10\left(1^3-0^3\right)=19-10=9.$$

Обчислимо тепер заданий за умовою подвійний інтеграл, змінивши порядок інтегрування: внутрішнє інтегрування будемо проводити за змінною x (вважаючи, що y є сталою), а зовнішнє – за змінною y:

$$\iint_D\left(6xy^2-12x^2y\right)dxdy=\int_2^3 dy\int_0^1\left(6xy^2-12x^2y\right)dx=$$

$$=\int_2^3\left[6y^2\int_0^1 xdx-12y\int_0^1 x^2dx\right]dy=\int_2^3\left[6y^2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1-12y\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right]dy=$$

$$=\int_2^3\left(3y^2-4y\right)dy=\left(3\cdot\frac{y^3}{3}-4\cdot\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_2^3=27-8-2(9-4)=19-10=9.$$

Відповідь. $\iint\limits_D \left(6xy^2 - 12x^2y\right)dxdy = 9$.

2.3.2 Подвійний інтеграл по довільній плоскій фігурі. Якщо область інтегрування D обмежена кривою, яку кожна пряма, що паралельна вісі Oy, перетинає не більше, ніж у двох точках (рис. 2.5), то подвійний інтеграл по цій області обчислюється за формулою:

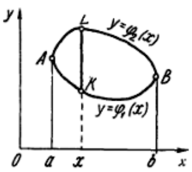


Рис. 2.5

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy. \tag{2.3}$$

Внутрішній інтеграл у цій формулі відрізняється від внутрішнього інтеграла у формулі (2.1) тим, що тут межі інтегрування не сталі величини, а є функціями змінної x. При обчисленні внутрішнього інтеграла в підінтегральній функції $f(x;y)$ потрібно x розглядати як сталу величину.

Межі інтегрування у повторному інтегралі в правій частині формули (2.3) знаходяться наступним чином.

1. Область D проектується на вісь Ox. Визначимо відрізок $[a;b]$, на якому в області D змінюється змінна x: $a \le x \le b$. Числа a та b $(a < b)$ будуть відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування у зовнішньому інтегралі.

Отже, межі інтегрування за змінною x визначені.

Для знаходження меж інтегрування за змінною y у внутрішньому інтегралі, позначимо на контурі Γ, який обмежує область інтегрування D, точки A та B з абсцисами a та b. Ці дві точки розділять контур Γ на дві частини: нижню та верхню, з рівнянь яких потрібно явно виразити змінну y.

Припустимо, що ці частини задаються відповідно рівняннями $y = \varphi_1(x)$ й $y = \varphi_2(x)$, причому вважається, що функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ на проміжку $[a;b]$ неперервні, однозначні й зберігають аналітичний вираз. Зафіксуємо на осі абсцис будь-яку точку $x \in [a;b]$ та проведемо через неї вертикальну пряму. Розглянемо відрізок KL, який лежить в області D. Тепер легко бачити, що змінна y змінюється в області D від її значення $\varphi_1(x)$ на нижній частині контуру Γ до її значення $\varphi_2(x)$ на його верхній частині: $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

Таким чином, нижня та верхня межі при інтегруванні за y у внутрішньому інтегралі відповідно дорівнюють $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$. Після того, як цей інтеграл буде обчислено, отримаємо функцію змінної x.

Зауваження 2.1 У внутрішньому інтегралі при інтегруванні за змінною y межі інтегрування в загальному випадку є функціями змінної x, тобто тієї змінної, за якою обчислюється зовнішній інтеграл і яка при обчисленні внутрішнього інтеграла вважається сталою.

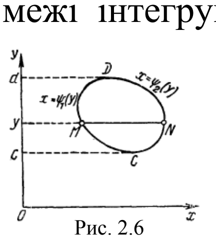


Рис. 2.6

2. Якщо область інтегрування D обмежена кривою, яку довільна горизонтальна пряма перетинає не більш ніж у двох точках (рис. 2.6), то подвійний інтеграл по цій області може бути

обчислений за формулою:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx. \qquad (2.4)$$

Тут також межі інтегрування у внутрішньому інтегралі не числа, як у (2.2), а функції змінної y.

Щоб знайти межі у зовнішньому інтегралі, область інтегрування D проектується на вісь ординат. Таким чином визначається відрізок $[c;d]$, на якому в області D змінюється змінна y, тобто $c \le y \le d$. Отримані числа c та d будуть відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування у зовнішньому інтегралі. Внутрішній інтеграл обчислюється за змінною x.

У підінтегральній функції $f(x;y)$ потрібно y розглядати як величину сталу. Щоб визначити межі інтегрування змінної x в області D, позначимо на контурі Γ точки C й D, ординати яких c та d відповідно. Ці дві точки розділяють контур Γ на ліву та праву частини, із рівнянь яких потрібно знайти змінну x.

Нехай цими рівняннями будуть відповідно $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_2(y)$, причому ці функції на відрізку $[c;d]$ неперервні, однозначні й зберігають аналітичний вираз. Зафіксуємо на вісі Oy довільну точку y й проведемо через неї горизонтальну пряму. Тоді частина цієї прямої, що належить області D, – це відрізок MN.

У області інтегрування змінна x буде змінюватися від її значення $\psi_1(y)$ на лівій частині контуру Γ до її значення $\psi_2(y)$ на його правій частині, тобто $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$. Отже, верхня й нижня межі у внутрішньому інтегралі дорівнюють відповідно $\psi_1(y)$ та $\psi_2(y)$. Тут у внутрішньому інтегралі при інтегруванні за змінною x межі інтегрування в загальному випадку – функції змінної y. Після обчислення внутрішнього інтегралу отримаємо функцію змінної y.

Відмітимо, що у зовнішньому інтегралі в обох випадках межі інтегрування – постійні величини, тому у результаті обчислення подвійного інтеграла повинні отримати постійну величину.

Зауваження 2.2 Якщо функція $f(x;y)$ неперервна в області D, то значення повторного інтеграла по цій області не залежить від порядку інтегрування за різними аргументами.

Властивості визначених інтегралів розповсюджуються й на подвійні інтеграли. В формулах (2.3), (2.4) при обчисленні подвійного інтеграла вважалося, що крива Γ, яка є контуром області інтегрування D, перетинається всякою прямою, що паралельна одній з координатних вісей, не більше ніж у двох точках. Якщо ця умова не виконується, то область D потрібно розбити на частини так, щоб у кожній із них ця умова виконувалася.

Приклад 2.2 Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(x^2+2y\right)dxdy$**, якщо область** D **обмежена лініями** $y=x^2$**,** $x=2$**,** $y=2x-1$**. Обчислити цей же інтеграл, змінивши порядок інтегрування.**

Розв'язання. Побудуємо задану область D (рис. 2.7):

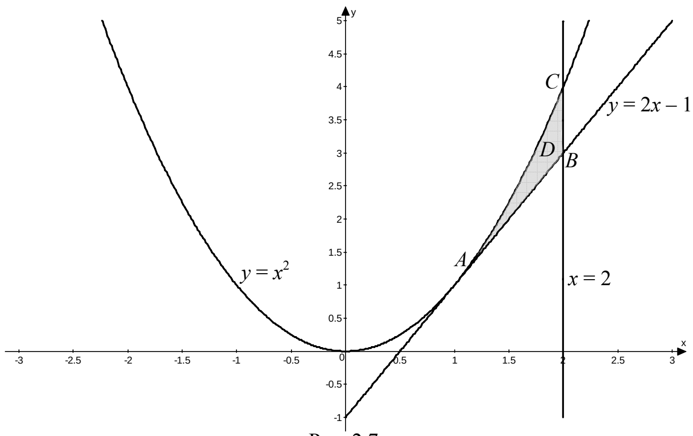


Рис. 2.7

Використаємо для обчислення інтеграла спочатку формулу (2.3), тобто внутрішнє інтегрування будемо проводити за змінною y, а зовнішнє – за x:

$$\iint\limits_D \left(x^2+2y\right)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(x^2+2y\right)dy .$$

Контур області D перетинається будь-якою прямою, що паралельна вісі ординат, у двох точках (рис. 2.8).

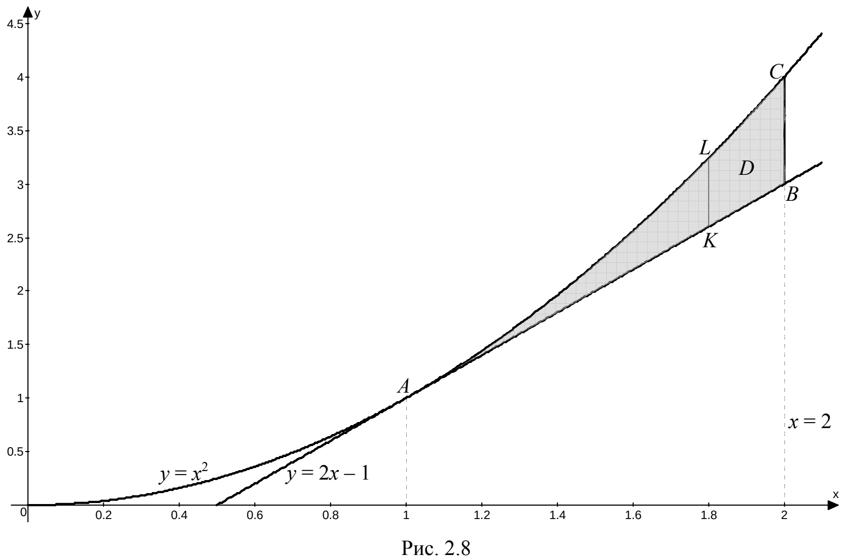


Рис. 2.8

Знайдемо межі інтегрування. Змінна x змінюється від абсциси точки A до абсцис точок B та C. Координати точки A знайдемо як координати точки перетину графіків функції $y=x^2$ та $y=2x-1$:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2=2x-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x_A=1.$$

Оскільки точки B та C лежать на прямій $x=2$, то $x_B = x_C = 2$. Отже, $1 \le x \le 2$. Далі на відрізку $[1; 2]$ обираємо довільну точку x, через неї проводимо пряму, паралельну вісі Oy, та на цій прямій розглядаємо відрізок KL, який лежить в області D.

Область D обмежена знизу прямою $y = 2x-1$, а зверху – віткою параболи $y = x^2$. Змінна y змінюється в заданій області D від її значення $2x-1$ на нижній частині контура ABC до її значення x^2 на верхній частині цього контура.

Зауваження 2.3 Рівняння ліній, які обмежують контур, повинні бути розв'язані відносно тієї змінної, за якою обчислюється внутрішній інтеграл.

Таким чином, $2x-1 \le y \le x^2$, а тоді область D задається наступними нерівностями:

$$D: \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ 2x-1 \le y \le x^2. \end{cases}$$

Отже,

$$\iint_D \left(x^2+2y\right)dxdy = \int_1^2 dx \int_{2x-1}^{x^2} \left(x^2+2y\right)dy = \int_1^2 dx\left(x^2 y + y^2\right)\Big|_{2x-1}^{x^2} =$$

$$= \int_1^2 \left[x^2 \cdot x^2 + \left(x^2\right)^2 - \left(x^2 \cdot (2x-1) + (2x-1)^2\right)\right]dx =$$

$$= \int_1^2 \left(2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1\right)dx = \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{64}{5} - 8 - 8 + 8 - 2 - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2} - 1 + 2 - 1\right) = \frac{29}{10}.$$

Обчислимо тепер заданий подвійний інтеграл, змінивши порядок інтегрування: внутрішнє інтегрування будемо проводити за змінною x, а зовнішнє – за y:

$$\iint_D \left(x^2+2y\right)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left(x^2+2y\right)dx.$$

З рисунка області D видно, що ліва границя контуру області – одна лінія (додатня вітка параболи $y = x^2$), а його права частина складається з двох ліній AB (відрізок прямої $y = 2x-1$) та BC (відрізок прямої $x=2$), тобто задається різними рівняннями. У цьому випадку область D потрібно розбити на частини так, щоб кожна з них обмежувалася справа однією лінією. У нашому випадку такими частинами будуть $D_1 - ABF$ та $D_2 - BCF$. Задана область D є сумою областей D_1 та D_2 (рис. 2.9). Тоді шуканий інтеграл буде дорівнювати сумі інтегралів по кожній з областей:

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+2y\right)dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+2y\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(x^2+2y\right)dxdy.$$

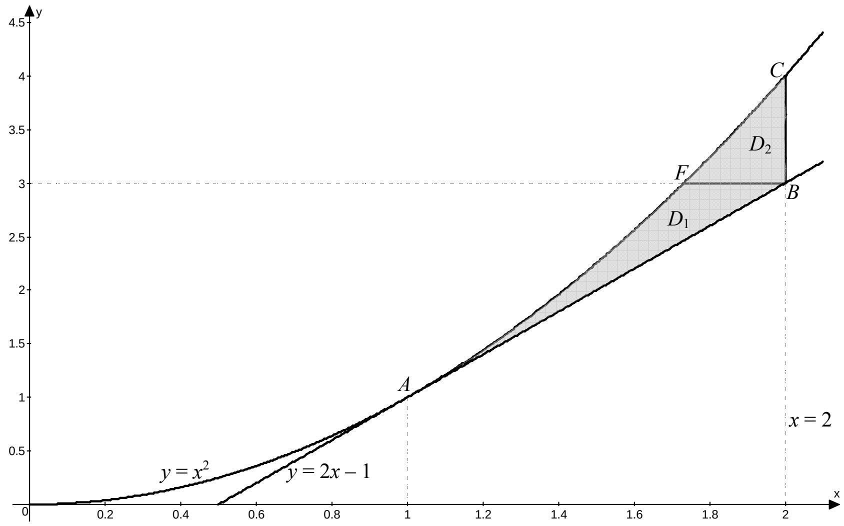


Рис. 2.9

Оскільки у даному випадку внутрішнє інтегрування здійснюється за змінною x, то рівняння ліній, що обмежують область, потрібно розв'язати відносно цієї змінної:

$$AB: y=2x-1\Rightarrow x=\frac{y+1}{2};\ AC: y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}.$$

Знайдемо межі інтегрування для кожної з областей. У області D_1 змінна y змінюється від ординати точки A до ординат точок B та F. Точка A належить параболі $y=x^2$ та вище було знайдено, що абсциса цієї точки $x_A=1$, отже $y_A=1^2=1$. Точка B є точкою перетину двох прямих $x=2$ та $y=2x-1$, а отже $y_B=2\cdot 2-1=3$. Тоді маємо, що $1\le y\le 3$. Змінна x в області D_1 змінюється від вітки параболи $x=\sqrt{y}$ до прямої $x=\frac{y+1}{2}$, тобто

$$D_1:\begin{cases}1\le y\le 3,\\ \sqrt{y}\le x\le \dfrac{y+1}{2}.\end{cases}$$

Аналогічно для області D_2 знаходимо, що

$$D_2:\begin{cases}3\le y\le 4,\\ \sqrt{y}\le x\le 2.\end{cases}$$

Таким чином,

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+2y\right)dxdy=\int\limits_1^3 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\frac{y+1}{2}}\left(x^2+2y\right)dx+\int\limits_3^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2}\left(x^2+2y\right)dx=$$

$$=\int_1^3\left(\frac{x^3}{3}+2xy\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{\frac{y+1}{2}}dy+\int_3^4\left(\frac{x^3}{3}+2xy\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2}dy=$$

$$=\int_1^3\left(\frac{(y+1)^3}{24}+y^2+y-\frac{7}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)dy+\int_3^4\left(\frac{8}{3}+4y-\frac{7}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)dy=$$

$$=\left[\frac{(y+1)^4}{96}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{14}{15}\sqrt{y^5}\right]\Bigg|_1^3+\left[\frac{8y}{3}+2y^2-\frac{14}{15}\sqrt{y^5}\right]\Bigg|_3^4=$$

$$=\left[\frac{8}{3}+9+\frac{9}{2}-\frac{42\sqrt{3}}{5}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{14}{15}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{32}{3}+32-\frac{448}{15}-\left(8+18-\frac{42\sqrt{3}}{5}\right)\right]=\frac{29}{10}.$$

Відповідь. $\iint\limits_D\left(x^2+2y\right)dxdy=\frac{29}{10}$.

2.4 Подвійний інтеграл у полярній системі координат

У полярній системі координат диференціал площі $ds=\rho d\rho d\varphi$, а подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x;\,y)ds=\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi;\,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Приклад 2.3 Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, де область D – круг $x^2+y^2\le 4$.

Розв’язання. Зобразимо область D, що є кругом радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 2.10).

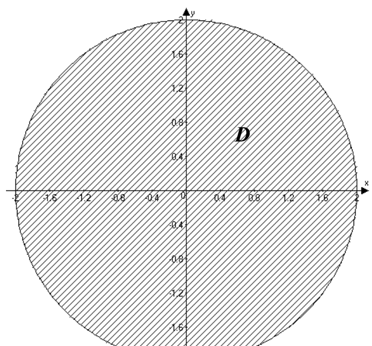


Рис. 2.10

Уведемо полярну систему координат (ПСК) так, щоб її полюс співпадав з початком декартової системи координат, а полярна вісь з додатним напрямком осі абсцис:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}$$

якобіан переходу $|J|=\rho$. Рівняння кола, що обмежує задану область, у ПСК має вигляд:

$$x^2+y^2=4\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\Rightarrow\rho^2=4\Rightarrow\rho=2.$$

Запишемо область D у ПСК, будемо мати:

$$D:\begin{cases}0\le\rho\le 2,\\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

Тоді

$$\iint\limits_D xydxdy=\iint\limits_D \rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\varphi d\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2=\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\left(2^4-0^4\right)=-\left(\cos 4\pi-\cos 0\right)=0\,.$$

Відповідь. $\iint\limits_D xydxdy=0$.

2.5 Застосування подвійного інтеграла

2.5.1 Обчислення площ плоских фігур. Площа плоскої фігури обчислюється за формулою:

$$S=\iint\limits_D dxdy\,.$$

Якщо фігура задається в ПСК, то

$$S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi\,.$$

Приклад 2.4 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=-2$, $y=x+2$, $y=2$, $x=y^2$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 2.11):

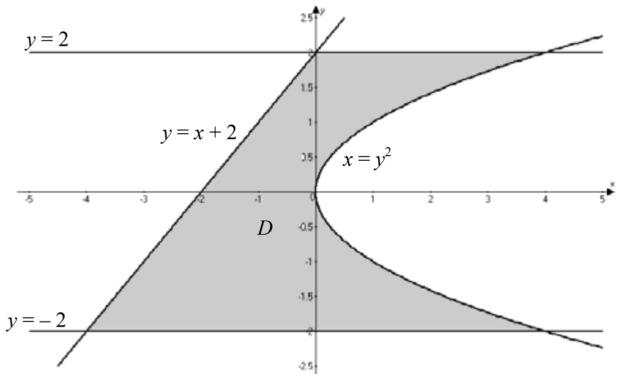


Рис. 2.11

Змінна y змінюється від – 2 до 2. Змінна x змінюється від прямої $y=x+2$ (або, якщо рівняння цієї прямої розв'язати відносно змінної x, то $x=y-2$) до параболи $x=y^2$. Тобто область D має вигляд: $D:\begin{cases}-2\le y\le 2,\\ y-2\le x\le y^2.\end{cases}$ А тоді шукана площа:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{y-2}^{y^2}dx=\int\limits_{-2}^{2}\left[y^2-(y-2)\right]dy=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-2}^{2}=$$

$$= \frac{8}{3} - 2 + 4 - \left(-\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{16}{3} + 8 = \frac{16+24}{3} = \frac{40}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь. $S = \dfrac{40}{3}$ кв. од.

2.5.2 Обчислення об'єму циліндричних тіл. Нехай задано циліндричне тіло, що обмежене з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні вісі Oz (рис. 2.12). Її напрямною є контур l, який обмежує область інтегрування σ, що лежить в площині Oxy, й є нижньою основою цього циліндричного тіла. Зверху тіло обмежене поверхнею, що задається рівнянням $z = f(x; y)$.

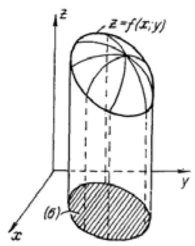


Рис. 2.12

Об'єм заданого циліндричного тіла визначається за формулою:

$$V = \iint\limits_{\sigma} f(x; y) dxdy. \tag{2.5}$$

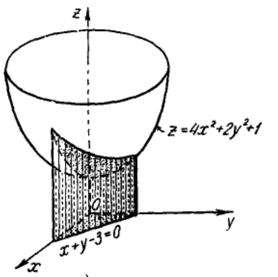
У полярних координатах остання формула приймає вид:

$$V = \iint\limits_{\sigma} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

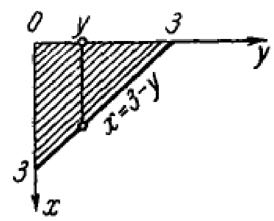
Приклад 2.5 Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$ **та координатними площинами.**

Розв'язання. Перша поверхня $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$ – еліптичний параболоїд (див. додаток В) з оссю симетрії Oz, який піднято на одну одиницю вгору вздовж цієї осі. Рівняння $x + y - 3 = 0$ визначає площину, паралельну вісі Oz. Також тіло обмежено координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ та $z = 0$ (рис. 2.13, а).

На площину Oxy тіло проектується у трикутник, який обмежений координатними вісями й прямою $x + y - 3 = 0$ (рис. 2.13, б).



а)



б)

Рис. 2.13

Об'єм заданого тіла будемо обчислювати за формулою (2.5), у якій область інтегрування σ є трикутник, зображений на рисунку 2.13 б, а $f(x; y) = 4x^2 + 2y^2 + 1$, тобто маємо:

$$V = \iint\limits_{\sigma} (4x^2 + 2y^2 + 1) dxdy.$$

Запишемо область σ:

$$\sigma:\begin{cases}0\le x\le 3,\\ 0\le y\le 3-x.\end{cases}$$

Тоді отримуємо

$$V=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}\left(4x^2+2y^2+1\right)dy=\int_0^3\left(4x^2y+\frac{2y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^{3-x}dx=$$

$$=\int_0^3\left(4x^2y+\frac{2y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^{3-x}dx=\int_0^3\left(4x^2(3-x)+\frac{2}{3}(3-x)^3+3-x\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(12x^2-4x^3+\frac{2}{3}(3-x)^3+3-x\right)dx=$$

$$=\left(4x^3-x^4-\frac{2}{3}\cdot\frac{(3-x)^4}{4}+3x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=108-81+9-\frac{9}{2}-\left(-\frac{27}{2}\right)=$$

$$=108-81+9-\frac{9}{2}-\left(-\frac{27}{2}\right)=45\ \text{(куб. од.)}.$$

Відповідь. $V=45$ куб. од.

2.5.3 Обчислення площ поверхонь. Нехай поверхня задана рівнянням $z=f(x;y)$, тоді площа тієї частини поверхні, яка проектується на площину Oxy в область σ, обчислюється за формулою:

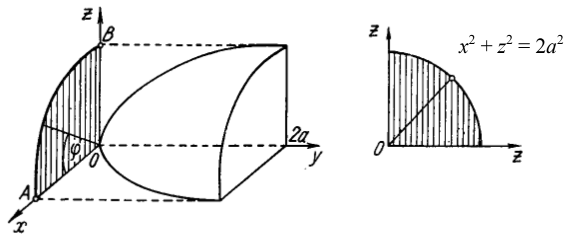
$$S=\iint_\sigma\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,.$$

Тут функція $f(x;y)$ – неперервна та однозначна в області σ та має в цій області неперервні частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Зауваження 2.4 У деяких випадках для спрощення обчислень проектувати поверхню, площина якої обчислюється, краще не на площину Oxy, а на Oxz або Oyz.

Приклад 2.6 Обчислити площу частини поверхні $ay=x^2+z^2$, яка знаходиться в першому октанті та обмежена площиною $y=2a$.

Розв'язання. Поверхня, площу якої потрібно обчислити, – частина параболоїду з віссю обертання Oy, яка знаходиться в першому октанті та обмежена площиною $y=2a$, що паралельна координатній площині Oxz (рис. 2.14 а). Спроектуємо поверхню на площину Oxz. Проекцією є чверть круга (рис. 2.14 б). Рівняння його межі знайдемо, виключаючи змінну y з рівнянь заданих поверхонь, тобто з системи $\begin{cases}ay=x^2+z^2,\\ y=2a.\end{cases}$ Отже рівняння границі має вигляд: $x^2+z^2=2a^2$.



а) *б)*

Рис. 2.14

У зв'язку з тим, що проекція була на площину Oxz ($y=0$), рівняння поверхні повинно бути розв'язане відносно змінної y, тому рівняння частини параболоїду запишемо у вигляді: $y=\dfrac{x^2+z^2}{a}$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2x}{a},\ \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{2z}{a}.$$

Тоді

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2z}{a}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4z^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4\left(x^2+z^2\right)}.$$

Отже,

$$S=\frac{1}{a}\iint_{\sigma}\sqrt{a^2+4\left(x^2+z^2\right)}dxdz.$$

Тут σ – область, що обмежена чвертю круга:

$$\sigma:\begin{cases}0\le x\le a\sqrt{2},\\ 0\le z\le\sqrt{2a^2-x^2}.\end{cases}$$

Оскільки інтегрування здійснюється по частині круга та в інтегральній функції під коренем стоїть сума квадратів x^2+z^2, то доцільніше буде перейти до ПСК $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ z=\rho\sin\varphi.\end{cases}$ Тоді область σ в ПСК визначається умовами:

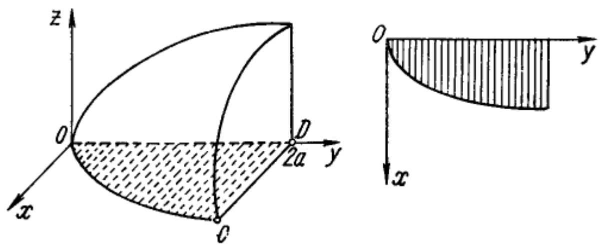
$$\sigma:\begin{cases}0\le\rho\le a\sqrt{2},\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

якобіан переходу $|J|=\rho$. Тобто

$$S=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+4\rho^2}\rho d\rho\left\|\begin{array}{l}a^2+4\rho^2=t^2\\ 8\rho d\rho=2tdt\Rightarrow\rho d\rho=\dfrac{tdt}{4}\\ \rho=0\Rightarrow t=a;\ \rho=a\sqrt{2}\Rightarrow t=3a\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_a^{3a}t\cdot\frac{tdt}{4}=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_a^{3a}=\frac{\pi}{24a}\left(27a^3-a^3\right)=\frac{13\pi a^2}{12}\ \text{(кв. од.)}.$$

Знайдемо шукану площу, проектуючи тепер задану поверхню на площину Oxy (рис. 2.15).



а) б)

Рис. 2.15

Рівняння поверхні повинно бути розв’язане відносно змінної z; враховуючи, що $z\ge 0$, отримаємо $z=\sqrt{ay-x^2}$. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{ay-x^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a}{2\sqrt{ay-x^2}}.$$

А тоді

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{ay-x^2}+\frac{a^2}{4\left(ay-x^2\right)}}=\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}}.$$

Тобто

$$S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\sigma}\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}}dxdy.$$

Тут область σ – проекція заданої поверхні на площину Oxy. Вона обмежена прямою $y=2a$ (проекція площини) та параболою $ay=x^2$ (проекція параболоїда на площину $z=0$) (рис. 2.15 б). Отже, $\sigma:\begin{cases}0\le x\le\sqrt{ay},\\ 0\le y\le 2a.\end{cases}$ Тоді отримуємо

$$S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\sigma}\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}}dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}\sqrt{4ay+a^2}dy\int\limits_0^{\sqrt{ay}}\frac{dx}{\sqrt{ay-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{4ay+a^2}\cdot\arcsin\frac{x}{\sqrt{ay}}\Bigg|_0^{\sqrt{ay}}dy=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{4ay+a^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)dy=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{2a}\sqrt{4ay+a^2}\,dy\left\|\begin{array}{l}4ay+a^2=t^2\\ 4ady=2tdt\Rightarrow dy=\dfrac{tdt}{2a}\\ y=0\Rightarrow t=a;\ y=2a\Rightarrow t=3a\end{array}\right\|=\frac{\pi}{4}\int_a^{3a}t\cdot\frac{tdt}{2a}=$$

$$=\frac{\pi}{8a}\int_a^{3a}t^2dt==\frac{\pi}{8a}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_a^{3a}=\frac{\pi}{24a}\cdot\left(27a^3-a^3\right)=\frac{13\pi a^2}{12}\ \text{(кв. од.)}.$$

Порівняння двох способів розв’язання вказує на те, що при проекції на площину Oxz розв’язок більш простий.

Зауваження 2.5 Рекомендується проектувати поверхню на ту з координатних площин, у якій область інтегрування буде найпростішою.

Відповідь. $S=\dfrac{13\pi a^2}{12}$ кв. од.

2.6 Потрійний інтеграл

Поняття потрійного інтеграла вводиться аналогічно поняттю подвійного інтеграла.

Означення 2.6 Нехай функція $u=f(x;\,y;\,z)$ визначена в обмеженій замкненій області Ω, що належить тривимірному простору з визначеною декартовою системою координат $Oxyz$. Розіб’ємо задану область на n частин Ω_i, які не мають спільних внутрішних точок і об’єми яких дорівнюють відповідно $\Delta V_i,\ i=\overline{1;\,n}$. У кожній такій елементарній області візьмемо довільну точку $P_i(x_i;\,y_i;\,z_i)$ та утворимо суму $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\,y_i;\,z_i)\Delta V_i$, яка називається ***інтегральною сумою для функції*** $u=f(x;\,y;\,z)$ по області Ω.

Нехай $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}d(\Omega_i)$ – найбільший з діаметрів. Під *діаметром області* розуміється максимальна відстань між її точками.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\,y_i;\,z_i)\Delta V_i$*, яка не залежить від способу розбиття області* Ω *на елементарні області* Ω_i *та вибору в них точок* P_i*, то ця границя називається* ***потрійним інтегралом по області*** Ω *і позначається*

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x;\,y;\,z)dV\ \text{або}\ \iiint\limits_{\Omega}f(x;\,y;\,z)dxdydz.$$

Нехай Ω – замкнена просторова область, обмежена знизу та зверху поверхнями $z = \varphi_1(x;\, y)$ та $z = \varphi_2(x;\, y)$ відповідно ($\varphi_2(x;\, y) \geq \varphi_1(x;\, y)$), а з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz (рис. 2.16).

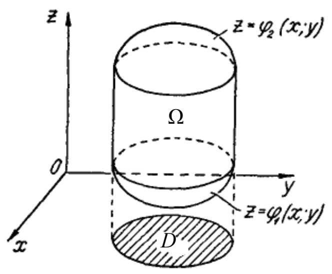


Рис. 2.16

Зауваження 2.6 Довжини твірних циліндричної поверхні можуть дорівнювати нулю (рис. 2.17).

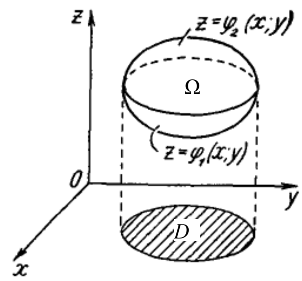


Рис. 2.17

Змінні x та y змінюються в плоскій області D, що є проекцією просторової області Ω на координатну площину Oxy.

У прямокутній декартовій системі координат елемент об’єму dv обчислюється за формулою:

$$dv = dxdydz\,.$$

Для вказаної області Ω потрійний інтеграл обчислюється наступним чином:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x;\, y;\, z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\, y;\, z)dz\,. \qquad (2.6)$$

Внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\, y;\, z)dz \qquad (2.7)$$

обчислюється за змінною z, а x та y у цьому випадку вважаються сталими. Результатом інтегрування є функція змінних x та y – $F(x; y)$. Отже, обчислення потрійного інтегралу (2.6) зводиться до обчислення подвійного інтегралу $\iint\limits_{D} F(x;\, y)dxdy$ (після того як було знайдено визначений інтеграл (2.7)), методи обчислення якого були наведені вище.

Зауваження 2.7 Порядок інтегрування в потрійному інтегралі (2.6) може бути змінений, тобто внутрішній інтеграл може інтегруватися як за змінною x, так і за змінною y.

Приклад 2.7 Обчислити потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$**, де область** Ω **– це тетраедр, який обмежено площиною** $2x + 2y + z - 6 = 0$ **та координатними площинами.**

Розв’язання. Обчислення інтегралу почнемо з того, що зобразимо задану область Ω. Заданий тетраедр знизу обмежений координатною площиною Oxy, рівняння якої $z = 0$, зверху площиною $2x + 2y + z - 6 = 0$, а з боків координатними площинами Oxz $(y = 0)$ та Oyz $(x = 0)$ (рис. 2.18).

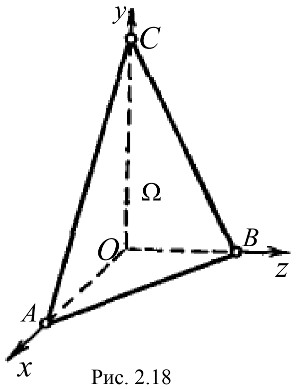


Рис. 2.18

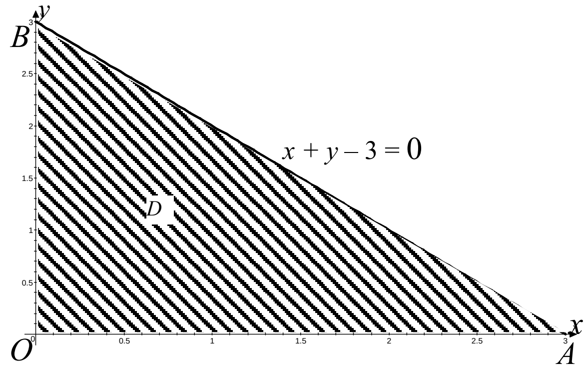


Рис. 2.19

З рівняння $2x+2y+z-6=0$ площини знаходимо, що $z=6-2x-2y$. Таким чином, можна зробити висновок, що в області Ω змінна z змінюється від 0 до $6-2x-2y$, тобто

$$0 \le z \le 6-2x-2y.$$

Для знаходження меж для змінних x та y спроектуємо просторову область Ω на площину Oxy. Проекцією на площині буде трикутник AOB (рис. 2.19), який обмежено координатними прямими та прямою AB. Знайдемо рівняння прямої AB. Для цього розв'яжемо систему:

$$(AB):\begin{cases}2x+2y+z-6=0,\\ z=0\end{cases} \Rightarrow 2x+2y-6=0 \Rightarrow x+y-3=0 \Rightarrow y=3-x.$$

Отже, область D, що є проекцією області Ω, визначається нерівностями:

$$D:\begin{cases}0 \le x \le 3,\\ 0 \le y \le 3-x.\end{cases}$$

Тоді отримуємо:

$$I=\int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{6-2x-2y} xdz = \int_0^3 xdx \int_0^{3-x} z\Big|_0^{6-2x-2y} dy = \int_0^3 xdx \int_0^{3-x} (6-2x-2y)dy =$$

$$=\int_0^3 x\cdot\left(6y-2xy-y^2\right)\Big|_0^{3-x} dx = \int_0^3 x\left(6(3-x)-2x(3-x)-(3-x)^2\right)dx =$$

$$=\int_0^3 \left(x^3-6x^2+9x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}=\frac{27}{4}.$$

Відповідь. $\frac{27}{4}$.

2.7 Застосування потрійного інтеграла до задач геометрії та механіки

2.7.1 Обчислення об'ємів тіл. Об'єм тіла, обмеженого просторовою областю Ω, обчислюється за формулою:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz\,.$$

Приклад 2.8 Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ та $x^2 + y^2 = 2 - z$.

Розв'язання. Зобразимо область, яку обмежують задані поверхні. Для цього спочатку рівняння першої поверхні зведемо до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат за змінною z:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\,.$$

Отримали канонічне рівняння сфери з центром у точці $O_1(0;0;1)$ та радіуса 1. Друге рівняння $x^2 + y^2 = 2 - z$ визначає параболоїд обертання. Зобразимо ці дві поверхні в одній системі координат (рис. 2.20, а).

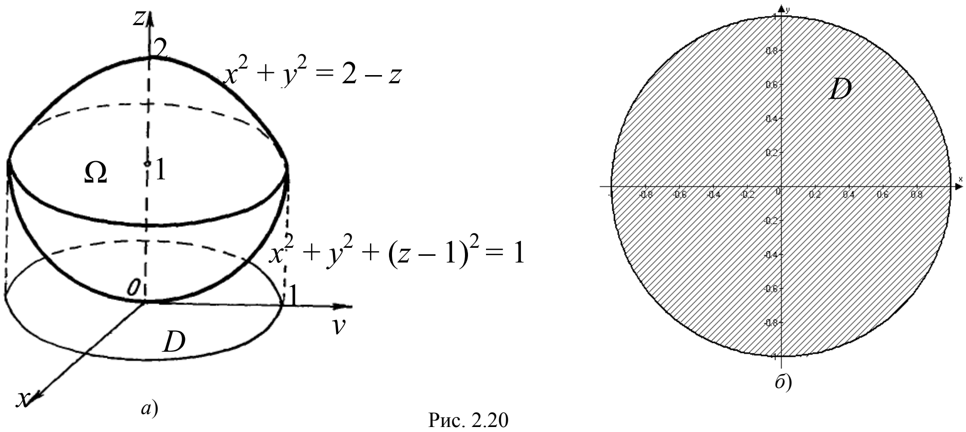


Рис. 2.20

Знайдемо лінію, яка є перетином заданих поверхонь. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 - z \end{cases} \Rightarrow 2 - z + z^2 - 2z = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки при $z = 2$ отримаємо вершину параболоїда $x^2 + y^2 = 2 - z$, то лінія перетину поверхонь знаходиться на висоті $z = 1$. А тоді рівняння шуканої лінії – $x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 1$. На площину Oxy отримане коло проектується в коло $x^2 + y^2 = 1$, а все тіло Ω в область D – круг, що обмежений вказаним колом (рис. 2.20 б).

У заданій області Ω змінна z змінюється від сфери до параболоїду. Виразимо цю змінну з кожного із вказаних рівнянь. З рівняння сфери $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ маємо, що

$$(z-1)^2 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow z - 1 = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

Оскільки область обмежена нижньою півсферою, то $z - 1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, а тоді

$$z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

З рівняння параболоїда отримаємо, що

$$z = 2 - x^2 - y^2 .$$

Отже, в області Ω: $1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2$.

Знаходимо об'єм заданого тіла:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz = \iint\limits_{D} \left[2 - \left(x^2 + y^2\right) - 1 + \sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)} \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[1 - \left(x^2 + y^2\right) + \sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)} \right] dxdy .$$

Оскільки область D є кругом, а підінтегральна функція містить суму $x^2 + y^2$, то для обчислення подвійного інтеграла доцільно буде перейти в ПСК $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$ У цьому випадку область $D: \begin{cases} 0 \le \rho \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{cases}$ а елемент площі $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Таким чином, отримаємо:

$$V = \iint\limits_{D} \left[1 - \rho^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \right] \rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho - \rho^3 + \rho\sqrt{1 - \rho^2} \right) d\rho \left\| \begin{array}{c} 1 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho d\rho = 2tdt \\ \rho d\rho = -tdt \\ \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \rho = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 - \int\limits_1^0 t^2 dt \right] = (2\pi - 0) \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{t^3}{3} \Bigg|_1^0 \right] = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{7}{12} = \frac{7\pi}{6} \text{ (куб. од.)}.$$

Відповідь. $V = \dfrac{7\pi}{6}$ куб. од.

2.7.2 Маса неоднорідного тіла. Якщо тіло є неоднорідним з густиною $\gamma = \gamma(x; y; z)$, то його маса m обчислюється за формулою:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \gamma(x; y; z) dxdydz .$$

Зауваження 2.8 Якщо тіло, що розглядається, є однорідним з одиничною густиною, то остання формула набуває вигляду:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = V .$$

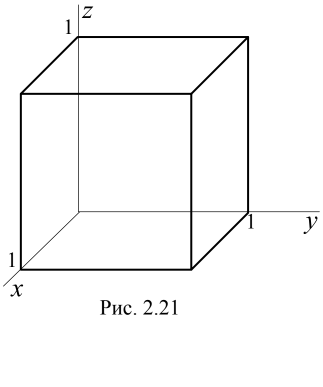


Рис. 2.21

Приклад 2.9 Обчислити масу куба $0 \le x \le 1$**,** $0 \le y \le 1$**,** $0 \le z \le 1$ **з густиною** $\gamma(x; y; z) = x + 2y + 3z$**.**

Розв'язання. Зобразимо заданий куб (рис. 2.21). Шукана маса:

$$m=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (x+2y+3z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(xz+2yz+\frac{3z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(x+2y+\frac{3}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy=\int\limits_0^1\left(xy+y^2+\frac{3y}{2}\right)_0^1 dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x+1+\frac{3}{2}\right)dx=\int\limits_0^1\left(x+\frac{5}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5x}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Відповідь. 3.

2.7.3 Статичні моменти тіла відносно координатних площин. Нехай задано деяке тіло з густиною $\gamma=\gamma(x;\,y;\,z)$. Тоді статичні моменти цього тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz та Oyz обчислюються відповідно за формулами:

$$S_{xy}=\iiint\limits_{\Omega} z\,\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz\,;\ S_{xz}=\iiint\limits_{\Omega} y\,\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz\,;$$

$$S_{yz}=\iiint\limits_{\Omega} x\,\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz\,.$$

Приклад 2.10 Обчислити статичні моменти куба із прикладу 2.9 відносно координатних площин.

Розв'язання. Згідно з наведеними вище формулами, статичний момент відносно площини Oxy:

$$S_{xy}=\iiint\limits_{\Omega} z(x+2y+3z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 z(x+2y+3z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(x\cdot\frac{z^2}{2}+yz^2+z^3\right)\Bigg|_0^1 dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(\frac{x}{2}+y+1\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{2}+y\right)\Bigg|_0^1 dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}.$$

Аналогічно знаходимо статичні моменти S_{xz}, S_{yz} відносно координатних площин Oxz та Oyz відповідно:

$$S_{xz}=\iiint\limits_{\Omega} y(x+2y+3z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 y(x+2y+3z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(xyz+2y^2z+\frac{3yz^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(xy+2y^2+\frac{3y}{2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{2y^3}{3}+\frac{3y^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 dx=\int\limits_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{17}{12}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{17x}{12}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{17}{12}=\frac{5}{3};$$

$$S_{yz}=\iiint\limits_{\Omega}x(x+2y+3z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 x(x+2y+3z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(x^2z+2xyz+\frac{3xz^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(x^2+2xy+\frac{3x}{2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2y+xy^2+\frac{3xy}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx=\int\limits_0^1\left(x^2+x+\frac{3x}{2}\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2+\frac{5x}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{5}{4}=\frac{19}{2}.$$

Відповідь. $S_{xy}=\frac{7}{4}$, $S_{xz}=\frac{5}{3}$, $S_{yz}=\frac{19}{12}$.

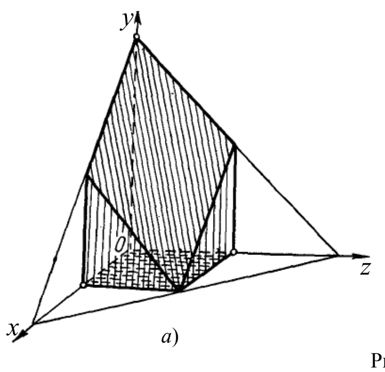
2.7.4 Координати центра ваги. Координати точки $M(x_C;y_C;z_C)$ – центра ваги деякого тіла обчислюються за формулами:

$$x_C=\frac{S_{yz}}{m},\ y_C=\frac{S_{xz}}{m},\ z_C=\frac{S_{xy}}{m},$$

де S_{xz}, S_{yz}, S_{xy} – статичні моменти відносно координатних площин (див. 2.7.3); m – маса тіла (див. 2.7.2).

Приклад 2.11 Визначити координати центру ваги однорідного тіла, що обмежено поверхнями $x+y+z=2a$, $x=a$, $y=a$ та координатними площинами.

Розв'язання. Зобразимо спочатку задане тіло (рис. 2.22 а). Воно обмежене відповідно площинами $x+y+z=2a$, $x=a$, $y=a$, $x=0$, $y=0$ та $z=0$. Проекцією тіла на площину Oxy буде область D – квадрат, який зображено на рисунку 2.22 б.



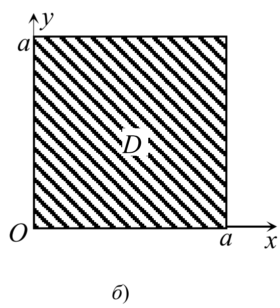


Рис. 2.22

Оскільки за умовою тіло однорідне, то його густина $\gamma=\text{const}$, що скорочується у формулах для обчислення координат центру тяжіння. В області Ω, що обмежує тіло, змінна z змінюється від 0 до $2a-x-y$. Область D визначається нерівностями:

$$D:\begin{cases}0\le x\le a,\\0\le y\le a.\end{cases}$$

Тоді маса заданого тіла

$$m=\iiint_{\Omega}1\cdot dxdydz=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{2a-x-y}dz=\int_0^a dx\int_0^a(2a-x-y)dy=$$

$$=\int_0^a\left(2ay-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^a dx=\int_0^a\left(2a^2-ax-\frac{a^2}{2}\right)dx=\int_0^a\left(\frac{3a^2}{2}-ax\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3a^2x}{2}-\frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{3a^3}{2}-\frac{a^3}{2}=a^3.$$

Обчислюємо статичні моменти тіла відносно координатних площин:

$$S_{xy}=\iiint_{\Omega}zdxdydz=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{2a-x-y}zdz=\int_0^a dx\int_0^a\frac{(2a-x-y)^2}{2}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a dx\int_0^a(y-2a+x)^2dy=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{(y-2a+x)^3}{3}\Bigg|_0^a dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^a\left[(x-a)^3-(x-2a)^3\right]dx=\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{(x-a)^4}{4}-\frac{(x-2a)^4}{4}\right]\Bigg|_0^a=\frac{1}{24}\left(0-a^4-\left(a^4-16a^4\right)\right)=$$

$$=\frac{14a^4}{24}=\frac{7a^4}{12};$$

$$S_{xz}=\iiint_{\Omega}ydxdydz=\int_0^a dx\int_0^a ydy\int_0^{2a-x-y}dz=\int_0^a dx\int_0^a y(2a-x-y)dy=$$

$$=\int_0^a\left(ay^2-\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx=\int_0^a\left(a^3-\frac{a^2x}{2}-\frac{a^3}{3}\right)dx=\int_0^a\left(\frac{2a^3}{3}-\frac{a^2x}{2}\right)\Bigg|_0^a dx=$$

$$=\left(\frac{2a^3x}{3}-\frac{a^2x^2}{4}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2a^4}{3}-\frac{a^4}{4}=\frac{5a^4}{12};$$

$$S_{yz}=\iiint_{\Omega}xdxdydz=\int_0^a xdx\int_0^a dy\int_0^{2a-x-y}dz=$$

$$=\int_0^a xdx\int_0^a(2a-x-y)dy=-\int_0^a xdx\int_0^a(y-2a+x)dy=-\int_0^a x\cdot\frac{(y-2a+x)^2}{2}\Bigg|_0^a dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^a x\left[(x-a)^2-(x-2a)^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^a x\cdot\left(3a^2-2ax\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3a^2x^2}{2}-\frac{2ax^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3a^4}{2}-\frac{a^4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5a^4}{6}=\frac{5a^4}{12}.$$

Отже, шукані координати центра мас:

$$x_C=\frac{\frac{5a^4}{12}}{a^3}=\frac{5a}{12},\ y_C=\frac{\frac{5a^4}{12}}{a^3}=\frac{5a}{12},\ z_C=\frac{\frac{7a^4}{12}}{a^3}=\frac{7a}{12}.$$

Відповідь. $x_C=y_C=\frac{5a}{12}$, $z_C=\frac{7a}{12}$.

2.7.5 Моменти інерції тіла відносно координатних площин. Нехай задано деяке тіло з густиною $\gamma=\gamma(x;\,y;\,z)$, яке обмежене областю Ω. Тоді моменти інерції цього тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega} z^2\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz;\ M_{xz}=\iiint\limits_{\Omega} y^2\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz;$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{\Omega} x^2\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz. \tag{2.8}$$

Приклад 2.12 Знайти моменти інерції відносно координатних площин однорідного тіла з густиною $\gamma=1$, якщо область Ω, що його обмежує, задається наступними нерівностями: $\Omega:\begin{cases}\frac{y^2}{2a}\le x\le\frac{a}{2},\\ -a\le y\le a,\\ 0\le z\le\frac{x^2}{2a}.\end{cases}$

Розв'язання. Обчислимо момент інерції відносно координатної площини Oxy:

$$M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\int_{-a}^{a}dy\int_{y^2/(2a)}^{a/2}dx\int_0^{x^2/(2a)}z^2dz=\int_{-a}^{a}dy\int_{y^2/(2a)}^{a/2}\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{x^2}{2a}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-a}^{a}dy\int_{y^2/(2a)}^{a/2}\frac{x^6}{8a^3}dx=\frac{1}{24a^3}\int_{-a}^{a}\frac{x^7}{7}\Bigg|_{\frac{y^2}{2a}}^{\frac{a}{2}}dy=\frac{1}{168a^3}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a^7}{128}-\frac{y^{14}}{128a^7}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{168a^3}\left(\frac{a^7y}{128}-\frac{y^{15}}{1920a^7}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{1}{168a^3}\left[\frac{a^8}{128}-\frac{a^{15}}{1920a^7}-\left(-\frac{a^8}{128}+\frac{a^{15}}{1920a^7}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{168a^3}\left[\frac{a^8}{128}-\frac{a^8}{1920}\right]=\frac{2}{168a^3}\cdot\frac{7a^8}{960}=\frac{a^5}{11520}.$$

Аналогічно знаходимо статичні моменти відносно площин Oxz та Oyz відповідно:

$$M_{xz}=\iiint\limits_{\Omega} y^2dxdydz=\int\limits_{-a}^{a}y^2dy\int\limits_{y^2/(2a)}^{a/2}dx\int\limits_{0}^{x^2/(2a)}dz=\int\limits_{-a}^{a}y^2dy\int\limits_{y^2/(2a)}^{a/2}\frac{x^2}{2a}dx=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}y^2\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{y^2/(2a)}^{a/2}dy=\frac{1}{6a}\int\limits_{-a}^{a}y^2\left(\frac{a^3}{8}-\frac{y^6}{8a^3}\right)dy=\frac{1}{48a}\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{a^3y^3}{3}-\frac{y^9}{9a^3}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{48a}\left[\frac{a^6}{3}-\frac{a^9}{9a^3}-\left(-\frac{a^6}{3}+\frac{a^9}{9a^3}\right)\right]=\frac{2}{48a}\cdot\left(\frac{a^6}{3}-\frac{a^6}{9}\right)=\frac{a^5}{108};$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{\Omega} x^2dxdydz=\int\limits_{-a}^{a}dy\int\limits_{y^2/(2a)}^{a/2}x^2dx\int\limits_{0}^{x^2/(2a)}dz=\int\limits_{-a}^{a}dy\int\limits_{y^2/(2a)}^{a/2}x^2\cdot\frac{x^2}{2a}dx=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^5}{5}\bigg|_{y^2/(2a)}^{a/2}dy=\frac{1}{10a}\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{a^5}{32}-\frac{y^{10}}{32a^5}\right)dy=\frac{1}{320a}\left(a^5y-\frac{y^{11}}{11a^5}\right)\bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{1}{320a}\left[a^6-\frac{a^6}{11}-\left(-a^6+\frac{a^6}{11}\right)\right]=\frac{1}{160a}\left[a^6-\frac{a^6}{11}\right]=\frac{a^5}{176}.$$

Відповідь. $M_{xy}=\dfrac{a^5}{11520}$, $M_{xz}=\dfrac{a^5}{108}$, $M_{yz}=\dfrac{a^5}{176}$.

2.7.6 Моменти інерції відносно координатних осей. Для тіла з густиною $\gamma=\gamma(x;\,y;\,z)$ моменти інерції відносно осей координат обчислюються за формулами:

$$M_x=\iiint\limits_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz,\quad M_y=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz,$$

$$M_z=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\gamma(x;\,y;\,z)dxdydz. \tag{2.9}$$

Зауваження 2.9 Порівнюючи формули (2.8) та (2.9) моментів тіла відносно координатних площин та осей можна зробити висновок, що

$$M_x=M_{xy}+M_{xz},\ M_y=M_{xy}+M_{yz},\ M_z=M_{xz}+M_{yz}.$$

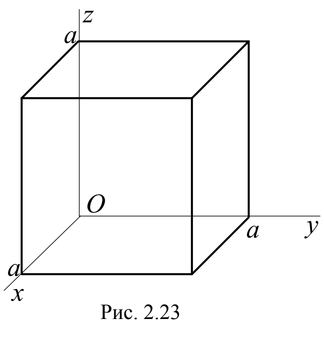


Рис. 2.23

Приклад 2.13 Визначити момент інерції M_z однорідного куба з густиною $\gamma=1$ та зі стороною a відносно одного з його ребер.

Розв'язання. Введемо в кубі, що розглядається, ПДСК, як показано на рисунку 2.23. Початок системи координат помістимо в одну із вершин куба, а вісі координат направимо вздовж трьох взаємно перпендикулярних ребер.

Знайдемо момент інерції заданого куба відносно осі Oz. Область Ω, за якою буде обчислюватися потрійний інтеграл, має вигляд:

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le a, \\ 0 \le z \le a. \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$M_z = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(x^2 + y^2\right) dy \int\limits_0^a dz = \int\limits_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^a dx \cdot \quad z \Big|_0^a =$$

$$= \int\limits_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx \cdot a = a \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3} \right) \Bigg|_0^a = a \cdot \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) = \frac{2a^5}{3}.$$

Відповідь. $\dfrac{2a^5}{3}$.

2.7.7 Момент інерції відносно початку координат. Момент інерції тіла з густиною $\gamma = \gamma(x; y; z)$, обмеженого деякою просторовою областю Ω, відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$M_0 = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz.$$

Зауваження 2.10 Момент інерції тіла відносно початку координат можна виразити через моменти тіла відносно координатних площин наступним чином:

$$M_0 = M_{xy} + M_{xz} + M_{yz}.$$

Приклад 2.14 Обчислити момент інерції відносно початку координат однорідного куба із задачі 2.13.

Розв'язання. Шуканий момент інерції

$$M_0 = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_0^a dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(ax^2 + ay^2 + \frac{a^3}{3} \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^a \left(ax^2 y + \frac{ay^3}{3} + \frac{a^3 y}{3} \right) \Bigg|_0^a dx = \int\limits_0^a \left(a^2 x^2 + \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) dx = \int\limits_0^a \left(a^2 x^2 + \frac{2a^4}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{a^2 x^3}{3} + \frac{2a^4 x}{3} \right) \Bigg|_0^a = \frac{a^5}{3} + \frac{2a^5}{3} = a^5.$$

Відповідь. $M_0 = a^5$.

2.8 Криволінійний інтеграл I роду

Нехай на декартовій площині Oxy задана деяка неперервна крива AB, у кожній точці якої визначена функція $f(x;\, y)$ двох незалежних змінних x та y. Розіб'ємо задану дугу на n частин точками $A_0 = A$, $A_1, A_2, \dots, A_n = B$. На кожній з елементарних дуг $A_i A_{i+1}$ оберемо довільну точку $M_i(x_i;\, y_i)$. Обчислимо в цій точці значення функції $f(x;\, y)$, отримаємо величину $f(x_i;\, y_i)$. Складемо суму добутків значень $f(x_i;\, y_i)$ на довжину Δl_i елементарної дуги $A_i A_{i+1}$:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i;\, y_i)\Delta l_i .$$

Знайдемо границю цієї суми за умови, що довжина найбільшої із дуг прагне до нуля, а їх кількість $n \to \infty$. Якщо функція $f(x;\, y)$ неперервна в усіх точках дуги AB, то ця границя існує й не залежить ні від способу розбиття дуги AB на частини, ні від вибору точок $M_i(x_i;\, y_i)$ на кожній із частин:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i;\, y_i)\Delta l_i .$$

Означення 2.7 *Границя* $\lim\limits_{n\to\infty} S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i;\, y_i)\Delta l_i$ *називається* ***криволінійним інтегралом першого роду***:

$$\int\limits_{(AB)} f(x;\, y)dl = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i;\, y_i)\Delta l_i .$$

Зауваження 2.11 Криволінійний інтеграл I роду не залежить від напрямку обходу кривої AB, тобто

$$\int\limits_{(AB)} f(x;\, y)dl = \int\limits_{(BA)} f(x;\, y)dl .$$

2.9 Обчислення криволінійного інтеграла I роду.

Якщо крива AB задана *явним рівнянням* $y = g(x)$, $x \in [a;\, b]$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x;\, y)dl = \int_a^b f(x;\, g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx . \qquad (2.10)$$

Приклад 2.15 Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} dl$**, де** AB **– відрізок прямої від точки** $A(0;0)$ **до точки** $B(1;\, 2)$**.**

Розв'язання. Знайдемо рівняння вказаного відрізка (як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, де $0 \le x \le 1$):

$$(AB): \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x.$$

Тобто $g(x) = 2x, 0 \le x \le 1$. Для того, щоб скористатися формулою (2.10), знайдемо похідну функції $g(x)$:

$$g'(x) = (2x)' = 2.$$

Тоді отримуємо:

$$\int_{AB} dl = \int_0^1 \sqrt{1+2^2}\,dx = \sqrt{5}\int_0^1 dx = \sqrt{5}\cdot x\Big|_0^1 = \sqrt{5}.$$

Відповідь. $\sqrt{5}$.

Приклад 2.16 Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB}(x^5 + 8xy)dl$, де AB – дуга кривої $4y = x^4$ між точками з абсцисами $x = 0$ та $x = 1$.

Розв'язання. У даному випадку крива інтегрування задана явно, причому $g(x) = \frac{x^4}{4}$. Тоді

$$g'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3.$$

Підставляючи дані у формулу (2.10), маємо:

$$\int_{AB}(x^5 + 8xy)dl = \int_0^1 \left(x^5 + 8\cdot x\cdot\frac{x^4}{4}\right)\cdot\sqrt{1+(x^3)^2}\,dx = \int_0^1 (x^5 + 2x^5)\cdot\sqrt{1+x^6}\,dx =$$

$$= \int_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx \left\|\begin{array}{l} 1+x^6 = t^2 \\ 6x^5dx = 2tdt \\ 3x^5dx = tdt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{array}\right\| = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2}\cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}^3 - 1\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

Відповідь. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Якщо крива задана *параметрично* рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

а параметр t змінюється на дузі AB від $t_1 = \alpha$ до $t_2 = \beta$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою:

$$\int\limits_{(AB)} f(x;\, y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t);\, \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt\,. \qquad (2.11)$$

Зауваження 2.12 Аналогічна формула має місце й у тривимірному випадку: якщо просторова крива задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \xi(t), \end{cases}$$

то криволінійний інтеграл І роду дорівнює:

$$\int\limits_{(AB)} f(x;\, y;\, z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t);\, \psi(t);\, \xi(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt\,. \qquad (2.12)$$

Приклад 2.17 Обчислити криволінійний інтеграл І роду $\int\limits_{(AB)}(2x + 4y - 4z + 7)dl$, де AB – це відрізок прямої між точками $M_1(8;\, 9;\, 3)$ та $M_2(6;\, 10;\, 5)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої M_1M_2 за координатами заданих точок M_1 та M_2:

$$(M_1M_2)\colon \frac{x-6}{8-6} = \frac{y-10}{9-10} = \frac{z-5}{3-5} \Rightarrow \frac{x-6}{2} = \frac{y-10}{-1} = \frac{z-5}{-2}\,.$$

Параметризуємо ці рівняння:

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-10}{-1} = \frac{z-5}{-2} = t \Rightarrow (M_1M_2)\colon \begin{cases} x = 2t + 6, \\ y = -t + 10, \\ z = -2t + 5. \end{cases}$$

Знайдемо межі зміни параметра t, для чого використаємо координати точок M_1 та M_2:

$$2t_1 + 6 = 8 \Rightarrow t_1 = 1$$

до

$$2t_2 + 6 = 6 \Rightarrow t_2 = 0\,.$$

Враховуючи зауваження 2.11, маємо, що $0 \le t \le 1$. Знайдемо значення похідних функцій $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$:

$$x'(t) = (2t + 6)' = 2\,,$$

$$y'(t) = (-t + 10)' = -1\,,$$

$$z'(t) = (-2t + 5)' = -2\,.$$

Тоді

$$\int\limits_{(AB)}(2x + 4y - 4z + 7)dl = \int\limits_{0}^{1}(2\cdot(2t + 6) + 4\cdot(-t + 10) - 4\cdot(-2t + 5) + 7)\times$$

$$\times\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\,dt=\int_0^1(4t+12-4t+40+8t-20+7)\cdot\sqrt{9}\,dt=$$

$$=3\int_0^1(8t+39)dt=3\cdot\left(\frac{8t^2}{2}+39t\right)\Bigg|_0^1=3\cdot(4+39)=129.$$

Відповідь. 129.

Якщо крива AB задана в *полярній системі координат* рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою:

$$\int\limits_{(AB)}f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (2.13)$$

Приклад 2.18 Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{(AB)}(x+y)dl$, де AB – частина лемніскати $\rho=a\sqrt{\sin2\varphi}$, що знаходиться в першому координатному куті.

Розв'язання. Зобразимо задану лемніскату, її графік наведено на рисунку 2.24. Полярний кут φ в першій чверті змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

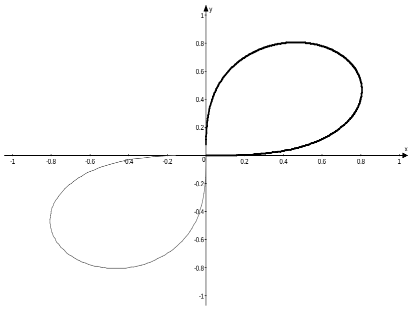


Рис. 2.24

Оскільки $\rho=a\sqrt{\sin2\varphi}$, то

$$\rho'=\left(a\sqrt{\sin2\varphi}\right)'=\frac{a\cos2\varphi}{\sqrt{\sin2\varphi}},$$

а тоді

$$\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}=\sqrt{\left(a\sqrt{\sin2\varphi}\right)^2+\left(\frac{a\cos2\varphi}{\sqrt{\sin2\varphi}}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{\sin2\varphi}}.$$

Підставляємо отримані значення у формулу (2.13), будемо мати:

$$\int\limits_{(AB)}(x+y)dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\cdot\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\sin2\varphi}}=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi}{\sqrt{\sin2\varphi}}=$$

$$=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sqrt{\sin2\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi}{\sqrt{\sin2\varphi}}=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2a^2.$$

Відповідь. $2a^2$.

2.10 Застосування криволінійного інтеграла I роду

2.10.1 Обчислення довжин кривих. *Довжина дуги кривої* AB дорівнює
$$l = \int\limits_{(AB)} dl .$$

Приклад 2.19 Знайти довжину дуги кривої $(AB): \begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t, \\ z = e^{-t}, \end{cases}$ **де** $0 \le t < \infty$.

Розв'язання. Довжина дуги $l = \int\limits_{(AB)} dl$. Оскільки крива AB задана параметрично, то, згідно з формулою (2.12), маємо:
$$l = \int\limits_{(AB)} dl = \int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt .$$
Обчислимо вказані похідні та знайдемо значення кореня:
$$x'(t) = \left(e^{-t}\cos t\right)' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t),$$
$$y'(t) = \left(e^{-t}\sin t\right)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t),$$
$$z'(t) = \left(e^{-t}\right)' = -e^{-t};$$
$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{\left(-e^{-t}(\cos t + \sin t)\right)^2 + \left(-e^{-t}(\sin t - \cos t)\right)^2 + \left(-e^{-t}\right)^2} =$$
$$= e^{-t}\sqrt{\cos^2 t + 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t + 1} =$$
$$= e^{-t}\sqrt{2+1} = e^{-t}\sqrt{3} .$$
Тоді обчислюємо невласний інтеграл першого роду:
$$l = \lim_{a\to\infty}\int\limits_{0}^{a} e^{-t}\sqrt{3}dt = \sqrt{3}\lim_{a\to\infty}\int\limits_{0}^{a} e^{-t}dt = \sqrt{3}\lim_{a\to\infty}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^a = -\sqrt{3}\lim_{a\to\infty}\left(e^{-a} - e^{0}\right) =$$
$$= -\sqrt{3}\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^a} - 1\right) = -\sqrt{3}\cdot(0-1) = \sqrt{3} .$$

Відповідь. $l = \sqrt{3}$.

2.10.2 Знаходження мас кривих. Якщо в кожній точці кривої AB лінійна густина γ є функцією координат цієї точки, тобто $\gamma = \gamma(x; y)$, то *маса цієї кривої* дорівнює криволінійному інтегралу першого роду від густини:
$$m = \int\limits_{(AB)} \gamma(x; y)dl .$$

Приклад 2.20 Знайти масу кривої $AB:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ **(**$a \ge b > 0,\ t \in [0;\ 2\pi]$**), якщо лінійна густина її в точці** $(x;\ y)$ **дорівнює** $\gamma(x;\ y) = |y|$**.**

Розв'язання. Обчислюємо масу кривої AB за формулою:

$$m = \int\limits_{(AB)} \gamma(x;\ y)dl,$$

тобто

$$m = \int\limits_{(AB)} |y| dl.$$

Оскільки крива задана параметрично, то за формулою (2.12) отримуємо:

$$m = \int\limits_0^{2\pi} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

Знайдемо $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$:

$$\begin{cases} x'(t) = -a\sin t, \\ y'(t) = b\cos t, \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\left(1 - \sin^2 t\right)} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2 - b^2\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}.$$

Отже,

$$m = \int\limits_0^{2\pi} |b\sin t| \sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}\,dt = b\sqrt{a^2 - b^2}\int\limits_0^{2\pi} |\sin t| \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}\,dt.$$

Оскільки інтеграл від періодичної функції по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду функції, не залежить від вибору відрізка інтегрування, то можемо записати, що

$$m = b\sqrt{a^2 - b^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}\,dt.$$

Підінтегральна функція парна, інтеграл має симетричні межі інтегрування, тому

$$m = 2b\sqrt{a^2 - b^2}\int\limits_0^{\pi} |\sin t| \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}\,dt = 2b\sqrt{a^2 - b^2}\int\limits_0^{\pi} \sin t \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}\,dt =$$

$$= 2b\sqrt{a^2 - b^2}\int\limits_0^{\pi} \sin t \sqrt{1 - \cos^2 t + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}\,dt \left\| \begin{array}{l} \cos t = z \\ -\sin t\, dt = dz \\ \sin t\, dt = -dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \pi \Rightarrow z = -1 \end{array} \right\| =$$

$$= 2b\sqrt{a^2 - b^2}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1 - z^2 + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}dz = 4b\sqrt{a^2 - b^2}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - z^2}dz =$$

$$= 4b\sqrt{a^2 - b^2}\left(\frac{a^2}{2\left(a^2 - b^2\right)}\arcsin\frac{z\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + \frac{z}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - z^2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 4b\sqrt{a^2 - b^2}\left(\frac{a^2}{2\left(a^2 - b^2\right)}\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\right) =$$

$$= \frac{2a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + 2b^2.$$

Відповідь. $m = \dfrac{2a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + 2b^2$.

2.10.3 Статичні моменти та моменти інерції. Якщо маса тіла розподілена неперервно вздовж дуги кривої AB з густиною $\gamma = \gamma(x; y)$ в кожній точці вказаної кривої, то *статичні моменти* S_x та S_y дуги відносно координатних осей Ox та Oy відповідно дорівнюють:

$$S_x = \int\limits_{(AB)} y\gamma(x; y)dl,\ S_y = \int\limits_{(AB)} x\gamma(x; y)dl.$$

Приклад 2.21 Знайти статичні моменти S_x та S_y дуги C астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(x, y \ge 0)$ з одиничною густиною відносно координатних осей.

Розв'язання. Дуга астроїди зображена на рисунку 2.25. Параметризуємо криву:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ x = a\sin^3 t, \end{cases} t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

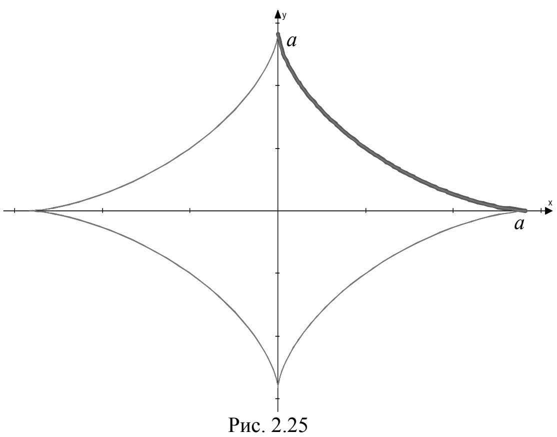


Рис. 2.25

Тоді

$$x'_t = 3a\cos^2 t(-\sin t),$$

$$y'_t = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Звідси

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} =$$

$$= 3a\sin t\cos t.$$

Отже, маємо, що статичний момент S_x відносно осі абсцис, враховуючи формулу (2.12), дорівнює:

$$S_x = \int\limits_{(AB)} y dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t\cos t dt = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t dt \left\| \begin{matrix} \sin t = z \\ \cos t dt = dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= 3a^2\int\limits_0^1 z^4 dz = 3a^2 \cdot \left.\frac{z^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3a^2}{5}.$$

Статичний момент S_y відносно осі Oy дорівнює:

$$S_y = \int\limits_{(AB)} x dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot 3a\sin t\cos t dt = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin t dt \left\| \begin{matrix} \cos t = z \\ -\sin t dt = dz \\ \sin t dt = -dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= 3a^2\int\limits_1^0 z^4(-dz) = 3a^2\int\limits_0^1 z^4 dz = 3a^2 \cdot \left.\frac{z^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3a^2}{5}.$$

Відповідь. $S_x = S_y = \dfrac{3a^2}{5}$.

Моменти інерції дуги кривої AB з густиною $\gamma = \gamma(x; y)$ відносно координатних осей дорівнюють:

$$I_x = \int\limits_{(AB)} y^2\gamma(x; y)dl, \quad I_y = \int\limits_{(AB)} x^2\gamma(x; y)dl.$$

Приклад 2.22 Зайти момент інерції однорідного півкола $x^2 + y^2 = R^2$ з одиничною густиною, розташованого в верхній півплощині, відносно осі Ox.

Розв'язання. Зобразимо задане півколо (рис. 2.26). Шуканий момент інерції

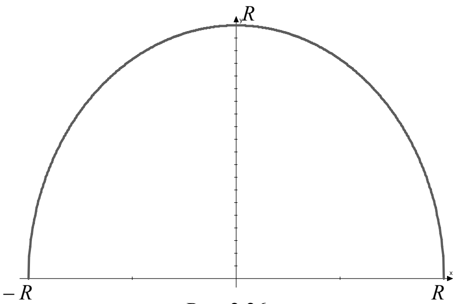


Рис. 2.26

$$I_x = \int\limits_{(AB)} y^2 dl.$$

З рівняння кривої знаходимо, що $y^2 = R^2 - x^2$, тобто $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Півколо знаходиться в верхній півплощині, де $y \ge 0$, тоді остаточно маємо, що $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, звідки

$$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Згідно з формулою (2.10), маємо, що шуканий момент інерції

$$I_x=\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\cdot\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx=\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=$$

$$=2\int_0^R\left(R^2-x^2\right)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=2R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx=$$

$$=2R\left(\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}\right)\Bigg|_0^R=R^3\cdot\arcsin 1=\frac{\pi R^3}{2}.$$

Відповідь. $I_x=\dfrac{\pi R^3}{2}$.

2.10.4 Координати центра мас дуги. Нехай задана крива AB та розподіл маси вздовж вказаної кривої є неперервною функцією густини $\gamma=\gamma(x;y)$. Тоді координати центра мас кривої визначаються наступними формулами:

$$x_C=\frac{S_y}{m},\ y_C=\frac{S_x}{m}.$$

Приклад 2.23 Визначити центр мас дуги циклоїди $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le\pi$, $(\gamma(x;y)=1)$**.**

Розв'язання. Нехай точка $M(x_C;y_C)$ – центр мас дуги циклоїди, тоді, згідно з формулами центра мас, маємо, що

$$x_C=\frac{S_y}{m}=\frac{\int\limits_{(AB)}xdl}{\int\limits_{(AB)}dl},\ y_C=\frac{S_x}{m}=\frac{\int\limits_{(AB)}ydl}{\int\limits_{(AB)}dl}.$$

Оскільки крива задана параметрично, то для знаходження вказаних криволінійних інтегралів застосовуємо формулу (2.11). Отже,

$$m=\int\limits_{(AB)}dl=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=$$

$$=4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-4a\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=4a;$$

$$S_x=\int\limits_{(AB)}ydl=\int_0^{\pi}a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt=2a^2\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\cos t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=2a^2\left[\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)dt\right]=2a^2\left(-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$= 2a^2\left[-3\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right)\right] = 6a^2 - \frac{2a^2}{3} = \frac{16a^2}{3};$$

$$S_y = \int\limits_{(AB)} x\,dl = \int\limits_0^{\pi} a(t - \sin t) 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2 \int\limits_0^{\pi}\left(t\sin\frac{t}{2} - \sin t \sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 2a^2\left(\int\limits_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt - 2\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt\right).$$

Обчислимо кожний з отриманих інтегралів окремо. Перший інтеграл знаходимо інтегруванням частинами:

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt \left\| \begin{matrix} u = t & dv = \sin\frac{t}{2}dt \\ du = dt & v = -2\cos\frac{t}{2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= -2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt = 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 4.$$

Другий інтеграл знаходимо за допомогою метода заміни змінної:

$$I_2 = -2\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt \left\| \begin{matrix} \sin\frac{t}{2} = z \\ \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}dt = dz \\ \cos\frac{t}{2}dt = 2z \\ t = 0 \Rightarrow z = 0 \\ t = \pi \Rightarrow z = 1 \end{matrix} \right\| = -4\int\limits_0^1 z^2 dz = -\frac{4}{3}z^3\Big|_0^1 = -\frac{4}{3}.$$

Тоді

$$S_y = 2a^2(I_1 + I_2) = 2a^2\left(4 - \frac{4}{3}\right) = 2a^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16a^2}{3}.$$

Таким чином, отримуємо:

$$x_C = y_C = \frac{\frac{16a^2}{3}}{4a} = \frac{4a}{3}.$$

Відповідь. $x_C = y_C = \dfrac{4a}{3}$.

2.11 Криволінійний інтеграл II роду

Нехай у кожній точці деякої дуги AB плоскої кривої L визначена функція двох незалежних змінних $P(x;\,y)$. Точками $A_0 = A;\, A_1;\, A_2;\ldots;\, A_n = B$ розіб’ємо дугу AB на n частинних дуг, на кожній із яких оберемо довільну точку $M_i(x_i;\, y_i)$. Значення функції $P(x;\,y)$ в обраних точках – $P(x_i;\, y_i)$ – помножимо на величину $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, що є проекцією частинної дуги $A_i A_{i+1}$ на вісь абсцис: $P(x_i;\, y_i)\Delta x_i$.

Якщо функція $P(x;\,y)$ неперервна в усіх точках заданої дуги AB, то існує границя суми всіх побудованих добутків $\sum\limits_{i=0}^{n-1} P(x_i;\, y_i)\Delta x_i$ при $\Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i;\, y_i)\Delta x_i\ .$$

Ця границя не залежить ні від способу розбиття дуги AB на частинні дуги, ні від вибору точок M_i на цих дугах.

Означення 2.8 *Границя* $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} P(x_i;\, y_i)\Delta x_i$ *називається* ***криволінійним інтегралом II роду*** *від функції* $P(x;\,y)$ *по дузі* AB *і позначається наступним чином:*

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i;\, y_i)\Delta x_i\ .$$

Якщо значення функції $P(x;\,y)$ в точці $M_i(x_i;y_i)$ – $P(x_i;\,y_i)$ – помножити на Δy_i, тобто на проекцію елементарної дуги $A_i A_{i+1}$ на вісь ординат Oy, то отримаємо добуток $P(x_i;\, y_i)\Delta y_i$.

Означення 2.9 *Границя суми таких добутків за умови, що усі* Δy_i *прагнуть до нуля, називається* ***криволінійним інтегралом II роду***:

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dy = \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i;\, y_i)\Delta y_i\ .$$

У випадку, коли на дузі AB задано дві неперервні функції $P(x;\,y)$ та $Q(x;\,y)$, то можна розглянути криволінійні інтеграли $\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx$ та $\int\limits_{(AB)} Q(x;\,y)dy$.

Означення 2.10 *Суму вказаних вище інтегралів*

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy \tag{2.14}$$

будемо називати ***криволінійним інтегралом другого роду*** *за умови, що обидва інтеграла* $\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx$ *та* $\int\limits_{(AB)} Q(x;\,y)dy$ *обчислюються за одним і тим же напрямком.*

Зауваження 2.13 Якщо крива AB є замкненою, то криволінійний інтеграл II роду визначається аналогічно. В цьому випадку потрібно обов'язково вказувати напрямок інтегрування, причому додатнім напрямком обходу контура вважається той, при якому область, що обмежує контур, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру позначається наступним чином:

$$\oint\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy,$$

при цьому на колі, що знаходиться на значку інтеграла, вказується стрілкою напрям обходу.

2.12 Властивості криволінійного інтеграла II роду

1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює знак:

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy = -\int\limits_{(BA)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy.$$

2. Якщо точка C – внутрішня точка на дузі AB, то криволінійний інтеграл II роду можна представити у вигляді наступної суми:

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy = \int\limits_{(AC)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy + \int\limits_{(CB)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy.$$

2.13 Обчислення криволінійного інтеграла II роду

Обчислення криволінійного інтеграла II роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

Якщо крива AB задана *явним рівнянням* $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то криволінійний інтеграл другого роду

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x;\,f(x)) + Q(x;\,f(x))\cdot f'(x)\right]dx.$$

Приклад 2.24 Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I = \int\limits_{(L)} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$**, де** L **– ламана** OAB**, причому** $O(0;\,0)$**,** $A(2;\,0)$**,** $B(4;\,2)$**.**

Розв'язання. Криву інтегрування L можна розбити на дві (рис. 2.27): OA та AB, а тоді, згідно з властивостями криволінійного інтегралу другого роду, маємо:

$$I = \int\limits_{(OA)} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy + \int\limits_{(AB)} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy .$$

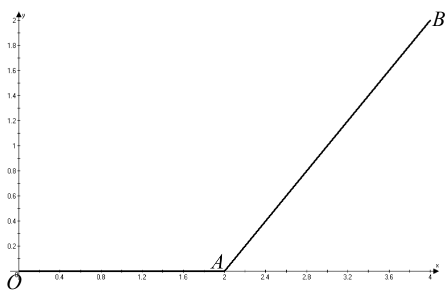


Рис. 2.27

Рівняння відрізка $OA: y = 0\ (0 \le x \le 2)$, тобто у цьому випадку $f(x) = 0$, а тоді $f'(x) = 0$.

Запишемо рівняння AB як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$(AB): \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = x-2 .$$

Рівняння відрізка AB має вигляд:

$$AB: y = x-2\ (2 \le x \le 4).$$

У цьому випадку $f(x) = x-2 \Rightarrow f'(x) = 1$.

Отже,

$$I = \int\limits_0^2 \left[(x-0)^2 + (x+0)^2 \cdot 0\right]dx + \int\limits_2^4 \left[(x-(x-2))^2 + (x+(x-2))^2 \cdot 1\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2\, dx + \int\limits_2^4 \left(4 + (2x-2)^2\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + 4\int\limits_2^4 dx + 4\int\limits_2^4 (x-1)^2 dx =$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \left.4x\right|_2^4 + \left.4 \cdot \frac{(x-1)^3}{3}\right|_2^4 = \frac{8}{3} + 4\cdot(4-2) + \frac{4}{3}\cdot\left((4-1)^3 - (2-1)^3\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 8 + \frac{4}{3}\cdot(27-1) = \frac{32}{3} + \frac{104}{3} = \frac{136}{3}.$$

Відповідь. $I = \dfrac{136}{3}$.

Якщо крива інтегрування AB задана *параметрично*:

$$(AB): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta ,$$

то криволінійний інтеграл II роду дорівнює:

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(\varphi(t);\, \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t);\, \psi(t)) \cdot \psi'(t)\right]dt .$$

Зауваження 2.14 Аналогічні формули мають місце й у тривимірному випадку. Якщо крива інтегрування AB задана *параметрично* рівняннями

$$(AB): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \xi(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta ,$$

то:

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\, y;\, z)dx + Q(x;\, y;\, z)dy + R(x;\, y;\, z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t);\, \psi(t);\, \xi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t);\, \psi(t);\, \xi(t)) \cdot \psi'(t) + R(\varphi(t);\, \psi(t);\, \xi(t)) \cdot \xi'(t)]dt\,.$$

Приклад 2.25 Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I = \int\limits_{(AB)} y^2 dx + \left(x^2 + z\right)dy + \left(x + y + z^2\right)dz$, де AB – відрізок прямої від точки $A(1;\, 0;\, 2)$ до точки $B(3;\, 1;\, 4)$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння прямої AB:

$$(AB): \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t, \\ z = 2t+2. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\varphi(t) = 2t + 1 \Rightarrow \varphi'(t) = 2\,,$$
$$\psi(t) = t \Rightarrow \psi'(t) = 1\,,$$
$$\xi(t) = 2t + 2 \Rightarrow \xi'(t) = 2\,.$$

При переміщенні від точки A до точки B параметр t змінюється від $t = y_A = 0$ до $t = y_B = 1$. Отже,

$$I = \int\limits_0^1 \left[t^2 \cdot 2 + \left((2t+1)^2 + 2t + 2\right) \cdot 1 + \left(2t + 1 + t + (2t+2)^2\right) \cdot 2\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2t^2 + 4t^2 + 6t + 3 + 8t^2 + 22t + 10\right)dt = \int\limits_0^1 \left(14t^2 + 28t + 13\right)dt =$$

$$= \left(\frac{14t^3}{3} + \frac{28t^2}{2} + 13t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{14}{3} + 14 + 13 = \frac{95}{3}\,.$$

Відповідь. $I = \dfrac{95}{3}$.

2.14 Умова незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

У загальному випадку при одному й тому ж підінтегральному виразі значення криволінійного інтеграла другого роду залежить від кривої (від її форми), за якою він знаходиться, та від координат початкової та кінцевої точок.

Означення 2.11 *Криволінійний інтеграл другого роду* $\int\limits_{(AB)} P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy$ *називається* ***інтегралом, що не залежить від шляху інтегрування*** AB*, якщо його значення не залежить від виду цієї кривої.*

Теорема 2.2 *Якщо функції* $P(x;\,y)$ *та* $Q(x;\,y)$ *визначені та неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *та* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *у деякій замкненій обмеженій однозв'язній області* D*, то для того щоб криволінійний інтеграл II роду* (2.14) *не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб у всіх точках цієї області виконувалась рівність:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.15}$$

Приклад 2.26 З'ясувати, чи залежить криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{(AB)} \left(6xy + 4y^2 + 5y\right)dx + \left(3x^2 + 8xy + 5x\right)dy$ **від шляху інтегрування.**

Розв'язання. Заданий криволінійний інтеграл не буде залежати від шляху інтегрування, якщо буде виконуватися умова (2.15). Для перевірки вказаної умови знайдемо частинні похідні функцій $P(x;\,y) = 6xy + 4y^2 + 5y$ та $Q(x;\,y) = 3x^2 + 8xy + 5x$ за змінними y та x відповідно:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x + 8y + 5,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 8y + 5.$$

Порівнюючи отримані вирази, робимо висновок, що

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

а тому заданий криволінійний інтеграл від шляху інтегрування не залежить.

Відповідь. Криволінійний інтеграл I не залежить від шляху інтегрування.

Зауваження 2.15 Умова (2.15) є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy$ був повним диференціалом деякої однозначної функції. Тому, щоб криволінійний інтеграл другого роду (2.14) не залежав від шляху інтегрування AB, а лише від його кінців, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз $P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy$ був повним диференціалом деякої функції.

Зауваження 2.16 Якщо виконується умова (2.15), то криволінійний інтеграл другого роду (2.14), що обчислюється за довільним замкненим контуром, дорівнює нулю:

$$\oint\limits_{(AB)} P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy = 0 \text{ за умови, що } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Приклад 2.27 Перевірити, чи буде криволінійний інтеграл другого роду $I = \oint\limits_{(AB)} \left(x^2 + y^2\right)\left(xdx + ydy\right)$ по замкненому контуру AB дорівнювати нулю. Підтвердити отриманий висновок безпосереднім інтегруванням по довільному замкненому контуру.

Розв'язання. Перевіримо спочатку виконання умови (2.15). У нашому випадку

$$P(x;\, y) = \left(x^2 + y^2\right)x = x^3 + xy^2,$$
$$Q(x;\, y) = \left(x^2 + y^2\right)y = x^2 y + y^3.$$

Тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 + 2xy = 2xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy + 0 = 2xy.$$

Тобто $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, а тоді заданий криволінійний інтеграл другого роду I, що обчислюється по замкнутому контуру AB, дорівнює нулю.

Тепер безпосередньо обчислимо цей інтеграл по довільному замкненому контуру. У якості такого контуру оберемо, наприклад, коло одиничного радіусу з центром у початку координат: $x^2 + y^2 = 1$.

Параметризуємо криву:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0;\, 2\pi].$$

Тоді

$$\varphi(t) = \cos t \Rightarrow \varphi'(t) = -\sin t,$$
$$\psi(t) = \sin t \Rightarrow \psi'(t) = \cos t.$$

Тобто

$$I = \oint\limits_{(AB)} \left(x^2 + y^2\right)\left(xdx + ydy\right) = \oint\limits_{(AB)} \left(x^3 + xy^2\right)dx + \left(x^2 y + y^3\right)dy =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\left(\cos^3 t + \cos t \sin^2 t\right)\cdot(-\sin t) + \left(\cos^2 t \sin t + \sin^3 t\right)\cdot \cos t\right]dt =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-\sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t + \sin t \cos^3 t + \sin^3 t \cos t\right]dt = \int\limits_0^{2\pi} 0 \cdot dt = 0.$$

Відповідь. Заданий криволінійний інтеграл I, що обчислюється по замкненому контуру, дорівнює нулю.

Зауваження 2.17 Якщо криволінійний інтеграл II роду (2.14) не залежить від шляху інтегрування, то використовується позначення

$$\int\limits_{(AB)} P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy = \int\limits_{(x_A;\, y_A)}^{(x_B;\, y_B)} P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy.$$

Тут $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ – координати початкової та кінцевої точок шляху інтегрування відповідно, а у якості шляху інтегрування у цьому випадку зазвичай обирається найпростіший шлях – відрізок прямої, що сполучає вказані точки.

2.15 Відновлення функції за її повним диференціалом

Розглянемо задачу відновлення функції $z = z(x; y)$, якщо задано її повний диференціал $dz = P(x; y)dx + Q(x; y)dy$.

Означення 2.12 *Вираз* $dz = P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ *називається* ***повним диференціалом деякої функції,*** *якщо має місце рівність*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Приклад 2.28 Знайти функцію $z(x; y)$**, якщо** $dz = \left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)dy$**.**

Розв'язання. Уведемо позначення. Нехай

$$P(x; y) = x^2 + 2xy - y^2,\ Q(x; y) = x^2 - 2xy - y^2,$$

тоді

$$dz = P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \qquad (2.16)$$

Перевіримо виконання рівності (2.15):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то права частина виразу (2.16) є повним диференціалом функції $z(x; y)$, а криволінійний інтеграл $\int\limits_{(AB)} \left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)dy$ не залежить від шляху інтегрування.

Інтегруємо (2.16):

$$\int\limits_{(AB)} dz = \int\limits_{(AB)} \left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)dy.$$

Інтегрування будемо здійснювати по ламаній ACB (рис. 2.28):

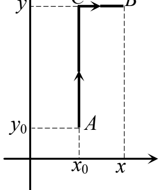


Рис. 2.28

$$\int\limits_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} dz = \int\limits_{(AC)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy + \int\limits_{(CB)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy.$$

На відрізку AC маємо:

$$x(y) = f(y) = x_0,\ y_0 \le y \le y,$$

$$f'(y) = 0.$$

На відрізку CB маємо:

$$y = f(x) = y,\ x_0 \le x \le x,$$
$$f'(x) = 0.$$

Тоді

$$z\ \Big|_{(x_0;y_0)}^{(x;\,y)} = \int_{y_0}^{y}\left[P(x_0;\,y)\cdot 0 + Q(x_0;\,y)\right]dy + \int_{x_0}^{x}\left[P(x;\,y) + Q(x;\,y)\cdot 0\right]dx.$$

Оскільки

$$z\ \Big|_{(x_0;y_0)}^{(x;\,y)} = z(x;\,y) - z(x_0;\,y_0),$$

То, позначивши $z(x_0;\,y_0) = C = \text{const}$, отримаємо, що

$$z(x;\,y) = \int_{x_0}^{x} P(x;\,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0;\,y)dy + C.$$

Підставивши замість $P(x;\,z)$ та $Q(x;\,y)$ їх вирази та прийнявши, що $x_0 = y_0 = 0$, маємо:

$$z(x;\,y) = \int_0^x \left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \int_0^y \left(-y^2\right)dy + C = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2\right)\Bigg|_0^x - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^y + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$

Зробимо перевірку. Оскільки повний диференціал функції має вигляд $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, то потрібно показати, що $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x;\,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x;\,y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C\right) = x^2 + 2xy - y^2 = P(x;\,y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C\right) = x^2 - 2xy - y^2 = Q(x;\,y).$$

Отже, $dz = P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy$.

Відповідь. $z(x;\,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$.

2.16 Зв’язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом. Формула Гріна

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, який обмежує однозв’язну область D, може бути зведений до подвійного інтеграла по області D.

Якщо функції $P(x;\, y)$ та $Q(x;\, y)$, а також їх частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D та на контурі L, який її обмежує таким чином, що обхід контура є додатнім, тобто область D залишається зліва, то має місце ***формула Гріна***:

$$\oint\limits_{(L)} P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,.$$

Деякі криволінійні інтеграли по замкненому контуру зручно обчислювати, зводячи їх до подвійного інтеграла.

Приклад 2.29 За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл $I = \oint\limits_{L} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) dy$**, де** L **– це контур прямокутника з вершинами** $A(3;\, 2)$**,** $B(6;\, 2)$**,** $C(6;\, 4)$ **та** $F(3;\, 4)$**.**

Розв'язання. Зобразимо контур L (рис. 2.29), вказавши додатній напрямок обходу, щоб область D, яка обмежена цим контуром, залишалася зліва. Визначимо нерівності, що задають область D.

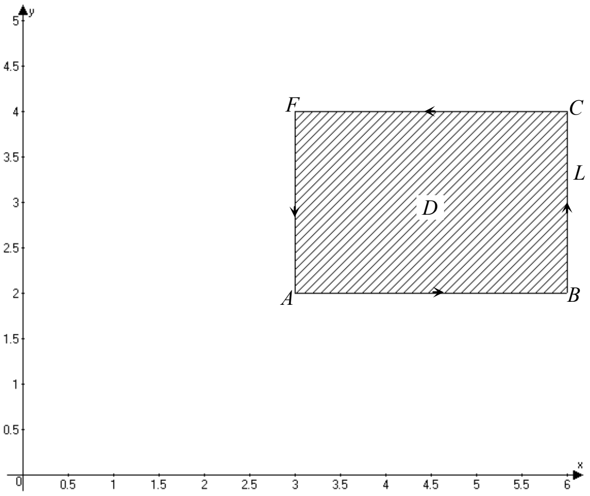


Рис. 2.29

З рисунка робимо висновок, що

$$D: \begin{cases} 3 \le x \le 6, \\ 2 \le y \le 4. \end{cases}$$

У даному інтегралі $P(x;\, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q(x;\, y) = y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right)$,

тоді частинні похідні

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) \right] = y^2 + y \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\right)=y^2+y\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

За формулою Гріна маємо:

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy=$$

$$=\int\limits_3^6 dx\int\limits_2^4 y^2dy=x\left.\right|_3^6\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_2^4=(6-3)\cdot\frac{4^3-2^3}{3}=3\cdot\frac{56}{3}=56.$$

Відповідь. $I=56$.

2.17 Застосування криволінійного інтеграла другого роду до обчислення площ

Площа S плоскої фігури D, обмеженої кусочно-гладкою кривою L, обчислюється за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{(L)}xdy-ydx.$$

Інтегрування за контуром L ведеться в додатному напрямку, тобто так, щоб область D залишалася зліва.

Зауваження 2.18 Підінтегральний вираз достатньо легко запам’ятати, якщо його записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix}=xdy-ydx.$$

Зауваження 2.19 Для обчислення площі також можна використовувати одну з наступних формул:

$$S=-\oint\limits_{(L)}ydx \text{ або } S=\oint\limits_{(L)}xdy.$$

Приклад 2.30 За допомогою криволінійного інтеграла II роду обчислити площу фігури, що обмежена еліпсом $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$**.**

Розв’язання. Зобразимо область, площу якої потрібно обчислити (рис. 2.30). Використовуючи другу формулу із зауваження 2.19, отримаємо, що шукана площа

$$S=\oint\limits_{(L)}xdy.$$

Враховуючи те, що крива L задана параметрично, отримаємо:

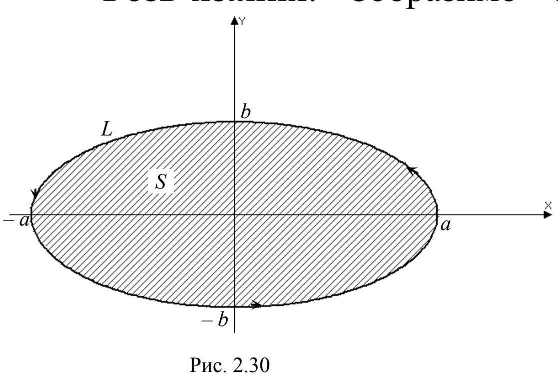


Рис. 2.30

$$S=\int_{0}^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t dt = ab\int_{0}^{2\pi}\cos^2 t dt =$$

$$=ab\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=\frac{ab}{2}\left(2\pi+0-0-0\right)=\pi ab \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь. $S=\pi ab$ кв. од.

2.18 Поверхневий інтеграл першого роду

Означення 2.13 *Нехай задано функцію* $f=f(x;y;z)$ *та деяку поверхню* S*, тоді* ***поверхневим інтегралом першого роду*** *від функції* $f=f(x;y;z)$ *по поверхні* S *називається інтеграл виду:*

$$\iint_S f(x;y;z)dS.$$

Якщо поверхня S задана *явним рівнянням* $z=z(x;y)$, то поверхневий інтеграл першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D, що є проекцією поверхні S на площину Oxy:

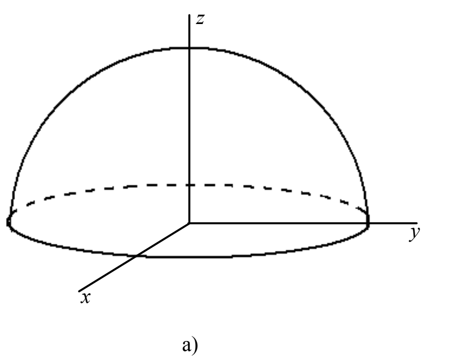
$$\iint_S f(x;y;z)dS=\iint_D f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy. \qquad (2.17)$$

Приклад 2.31 Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $I=\iint_S (x+y+z)dS$**, де** S **– поверхня, що задається рівнянням** $x^2+y^2+z^2=a^2$**,** $z\ge 0$**.**

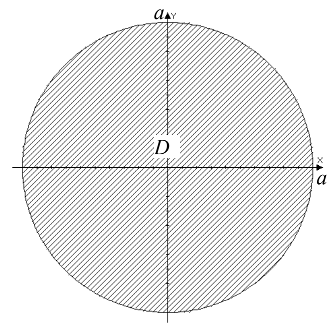
Розв'язання. Задана поверхня є півсферою радіуса a з центром у початку координат (рис. 2.31 а). Її проекцією на площину Oxy буде область, що обмежена лінією, рівняння якої можна визначити із системи:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=a^2,$$

тобто проекцією є область D – круг, який обмежений колом з центром у початку координат радіуса a (рис. 2.31, б).



а)



б)

Рис. 2.31

З рівняння сфери виразимо змінну z через змінні x та y:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow z^2=a^2-x^2-y^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.$$

Оскільки за умовою $z \ge 0$, то остаточно маємо, що

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.$$

Знаходимо частинні похідні:

$$z'_x=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,,$$

$$z'_y=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,.$$

А тоді вираз

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,.$$

Отже, шуканий інтеграл

$$I=\iint\limits_D\left(x+y+\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}}\,dxdy\,.$$

Оскільки підінтегральний вираз містить суму квадратів змінних, а інтегрування ведеться по області, що є кругом, то доцільно перейти до ПСК $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$ якобіан переходу $|J|=\rho$, а область D визначається нерівностями:

$$D:\begin{cases} 0\le\rho\le a, \\ 0\le\varphi\le 2\pi. \end{cases}$$

Тоді

$$I=a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left[\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)+\sqrt{a^2-\rho^2}\right]\cdot\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=I_1+I_2\,,$$

де

$$I_1=a\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi\int\limits_0^a\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=0\,,$$

оскільки

$$\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi=(-\cos\varphi+\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi}=0\,;$$

$$I_2 = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho = a\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^a = \frac{a}{2}\cdot a^2 \cdot \left.\varphi\right|_0^{2\pi} = \pi a^3.$$

Таким чином, $I = 0 + \pi a^3 = \pi a^3$.

Відповідь. $I = \pi a^3$.

Якщо поверхня S задана *параметрично*:

$$\begin{cases} x = x(u; v), \\ y = y(u; v), \\ z = z(u; v), \end{cases}$$

то поверхневий інтеграл першого роду по цій поверхні обчислюється за формулою:

$$\iint_S f(x; y; z) dS = \iint_D f(x(u; v); y(u; v); z(u; v))\sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

де $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$,

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Приклад 2.32 Обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS$, де поверхня S задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \; 0 \le u \le 2, \; 0 \le v \le \pi. \\ z = v, \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо величини E, F, G, для цього знаходимо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \; \frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \; \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \; \frac{\partial z}{\partial v} = 1.$$

Тоді

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = (\cos v)^2 + (\sin v)^2 + 0^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 + 1^2 =$$

$$= u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = u^2 + 1,$$

$$F = \cos v \cdot (-u\sin v) + \sin v \cdot u\cos v + 0\cdot 1 = 0.$$

Тоді

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1\cdot\left(u^2+1\right)-0^2}=\sqrt{u^2+1}.$$

Таким чином,

$$I=\iint\limits_S\sqrt{1+x^2+y^2}\,dS=\int\limits_0^2 du\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+(u\cos v)^2+(u\sin v)^2}\sqrt{u^2+1}\,dv=$$

$$=\int\limits_0^2 du\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v}\sqrt{u^2+1}\,dv=\int\limits_0^2 du\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+u^2}\sqrt{u^2+1}\,dv=$$

$$=\int\limits_0^2\left(u^2+1\right)du\int\limits_0^{\pi}dv=\left(\frac{u^3}{3}+u\right)\Bigg|_0^2\cdot v\,\Big|_0^{\pi}=\left(\frac{8}{3}+2\right)\cdot(\pi-0)=\frac{14\pi}{3}.$$

Відповідь. $I=\dfrac{14\pi}{3}$.

2.19 Поверхневий інтеграл другого роду

Означення 2.14 ***Поверхневим інтегралом другого роду*** *по поверхні* S *називається інтеграл виду:*

$$\iint\limits_S P(x;\,y;\,z)dydz+Q(x;\,y;\,z)dxdz+R(x;\,y;\,z)dxdy.$$

Якщо D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} – це проекції поверхні S на координатні площини Oyz, Oxz та Oxy відповідно, то поверхневий інтеграл другого роду

$$\iint\limits_S P(x;\,y;\,z)dydz+Q(x;\,y;\,z)dxdz+R(x;\,y;\,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y;\,z);\,y;\,z)dydz\pm$$

$$\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x;\,y(x;\,z);\,z)dxdz\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x;\,y;\,z(x;\,y))dxdy.$$

Знак «+» або «–» обирається в залежності від того, який кут утворює нормаль до поверхні з координатними площинами; якщо кут гострий, то обирається знак «+», якщо тупий – то знак «–».

Якщо S – гладка двостороння поверхня, S^+ – її сторона, яка характеризується напрямом нормалі $\overline{n}=(\cos\alpha;\,\cos\beta;\,\cos\gamma)$, то

$$\iint\limits_{S^+} P(x;\,y;\,z)dydz+Q(x;\,y;\,z)dxdz+R(x;\,y;\,z)dxdy=$$

$$=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS, \tag{2.18}$$

тобто поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду.

Якщо поверхня S задана *параметрично* $\begin{cases} x = x(u;\, v), \\ y = y(u;\, v), \\ z = z(u;\, v), \end{cases}$ то напрямні косинуси нормалі $\bar{n}$ визначаються за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

де якобіани $A = \dfrac{\partial(y;\, z)}{\partial(u;\, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$, $B = \dfrac{\partial(z;\, x)}{\partial(u;\, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$, $C = \dfrac{\partial(x;\, y)}{\partial(u;\, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Якщо поверхня S задана *явно* рівнянням $z = z(x;\, y)$, то її нормаль

$$\bar{n} = -\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} + \bar{k},$$

а напрямні косинуси

$$\cos\alpha = -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\ \cos\beta = -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Якщо поверхня S задана *неявно* рівнянням $F(x;\, y;\, z) = 0$, то нормаль

$$\bar{n} = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k},$$

а напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},\ \cos\beta = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \tag{2.19}$$

Приклад 2.33 Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I = \iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язання. Зобразимо задану поверхню S – сферу з центром у початку координат радіуса a (рис. 2.32).

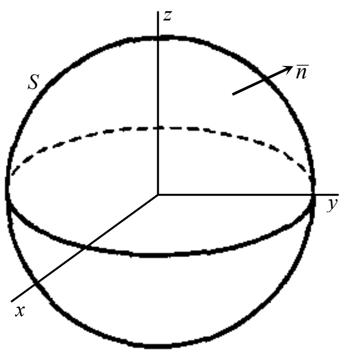


Рис. 2.32

Рівняння поверхні сфери перепишемо наступним чином:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

тобто поверхня задана неявно, причому функція $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$. Перейдемо від поверхневого інтеграла другого роду до поверхневого інтеграла першого роду за формулою (2.18). Для цього потрібно знайти напрямні косинуси за формулами (2.19). Оскільки поверхня задана неявно, то обчислюємо спочатку частинні похідні функції $F(x; y; z)$ за кожною із змінних:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

а тоді

$$\cos\alpha = \frac{2x}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

аналогічно

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ та } \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Для заданого інтеграла I $P(x; y; z) = x$, $Q(x; y; z) = y$, $R(x; y; z) = z$, а тому, згідно з (2.18), маємо:

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dS =$$

$$= \iint\limits_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS.$$

Обчислимо отриманий інтеграл по двом поверхням.

а) <u>По верхній півсфері</u>, що задається рівнянням $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Спроектуємо верхню півсферу на площину Oxy, проекцією буде область D, яка обмежена лінією

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2,$$

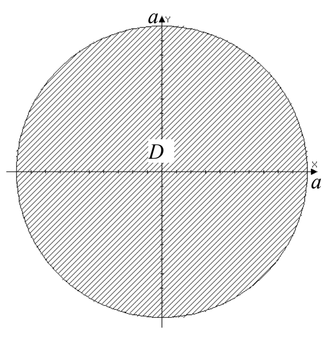


Рис. 2.33

тобто колом радіуса a з центром в початку координат (рис. 2.33).

Поверхневий інтеграл першого роду I_1 по верхній півсфері зведемо до подвійного інтеграла по області D за допомогою формули (2.17). Для цього знаходимо частинні похідні

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \; z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

тоді

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Отже,

$$I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} dxdy = a^2 \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Оскільки область D – круг і підінтегральна функція містить суму квадратів змінних, то для обчислення інтеграла доцільно перейти до ПСК:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} |J| = \rho, \; D: \begin{cases} 0 \le \rho \le a, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Тобто

$$I_1 = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Внутрішній інтеграл обчислимо за допомогою методу заміни змінної:

$$\int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\| \begin{matrix} a^2 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho d\rho = 2tdt \\ \rho d\rho = -tdt \\ \rho = 0 \Rightarrow t = a \\ \rho = a \Rightarrow t = 0 \end{matrix} \right\| = \int_a^0 \frac{-tdt}{\sqrt{t^2}} = \int_0^a \frac{tdt}{t} = t \Big|_0^a = a.$$

Отже, остаточно маємо, що:

$$I_1 = a^2 \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot a = 2\pi a^3.$$

а) <u>На нижній півсфері</u> $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Проекція цієї частини поверхні на площину Oxy зображена на рисунку 2.33. Переходячи до подвійного інтеграла по області D, отримаємо що у цьому випадку

$$I_2 = I_1 = 2\pi a^3.$$

Тоді шуканий інтеграл

$$I = I_1 + I_2 = 2I_1 = 4\pi a^3.$$

Відповідь. $I = 4\pi a^3$.

2.20 Формула Стокса. Зв'язок криволінійного інтеграла з поверхневим

Формула Стокса встановлює зв'язок між інтегралом по поверхні та криволінійним інтегралом по контуру, що обмежує цю поверхню:

$$\oint\limits_{(L)} P(x;\,y;\,z)dx + Q(x;\,y;\,z)dy + R(x;\,y;\,z)dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$ та $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі до поверхні S, яка направлена в ту сторону, відносно якої відбувається обхід контура L проти годинникової стрілки.

Розкриваючи визначник в останній формулі, перепишемо її наступним чином:

$$\oint\limits_{(L)} P(x;\,y;\,z)dx + Q(x;\,y;\,z)dy + R(x;\,y;\,z)dz =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Приклад 2.34 Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $I = \oint\limits_{(L)} xydx + y^2dy + zdz$**, де** L **– лінія** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1, \end{cases}$ **яка обмежує поверхню** $S: 2 - z = x^2 + y^2$**.**

Розв'язання. Задана поверхня S є частиною параболоїда обертання з вершиною у точці $(0;\,0;\,2)$, а саме та його частина, яка обмежена заданою лінією (рис. 2.34).

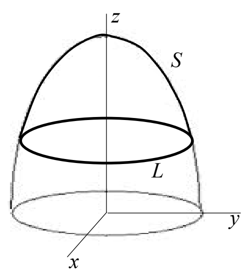


Рис. 2.34

У даному випадку

$$P(x;\,y;\,z) = xy,\ Q(x;\,y;\,z) = y^2,\ R(x;\,y;\,z) = z.$$

Тоді частинні похідні

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Звідси отримуємо, що

$$I = \iint\limits_{S} (0-0)dydz + (0-0)dxdz + (0-x)dxdy = -\iint\limits_{S} xdxdy.$$

Переходимо від поверхневого інтеграла до подвійного, для цього з рівняння поверхні S явно виражаємо змінну z: $z = 2 - x^2 - y^2$. Частинні похідні

$$z'_x = -2x,\ z'_y = -2y,$$

а тому напрямні косинуси нормалі до поверхні

$$\cos\alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ \cos\beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Тоді, згідно з (2.18), маємо:

$$I = -\iint_S x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS .$$

Перейшовши до подвійного інтеграла, отримуємо:

$$I = -\iint_D x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2} dxdy = -\iint_D xdxdy .$$

Область D є проекцією поверхні S на координатну площину Oxy. Вона є одиничним кругом з центром у початку координат. У цьому випадку доцільно перейти до ПСК $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ $|J| = \rho$ та область D визначається нерівностями $D: \begin{cases} 0 \le \rho \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$ Тоді

$$I = -\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = -\sin\varphi \left.\right|_0^{2\pi} \cdot \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1 = -(0-0)\cdot\frac{1}{3} = 0 .$$

Відповідь. $I = 0$.

2.21 Формула Остроградського-Гауса. Зв'язок поверхневих інтегралів з потрійним інтегралом

Формула Остроградського-Гауса встановлює зв'язок між поверхневими інтегралами по деякій поверхні S та потрійним інтегралом по об'єму, обмеженому цією поверхнею:

$$\iint_S P(x;\, y;\, z)dydz + Q(x;\, y;\, z)dxdz + R(x;\, y;\, z)dxdy =$$

$$= \oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz .$$

Приклад 2.35 Використовуючи формулу Остроградського-Гауса, обчислити інтеграл $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, де S – зовнішня сторона поверхня куба $\begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le a, \\ 0 \le z \le a. \end{cases}$

Розв'язання. Для заданого інтеграла маємо:

$$P(x;\, y;\, z) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 2x ,$$

$$Q(x;\, y;\, z) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y ,$$

$$R(x;\, y;\, z) = z^2 \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} = 2z\,.$$

Тоді, згідно з формулою Остроградського-Гауса, маємо:

$$I = \iiint\limits_V (2x + 2y + 2z)dxdydz = 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x + y + z)dz =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]\Bigg|_0^a dy = 2\int_0^a dx\int_0^a \left((x + y)a + \frac{a^2}{2} \right)dy =$$

$$= 2\int_0^a \left[\left(xa + \frac{a^2}{2} \right)y + \frac{ay^2}{2} \right]\Bigg|_0^a dx = 2\int_0^a \left(\left(xa + \frac{a^2}{2} \right)\cdot a + \frac{a^3}{2} \right)dx =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{x^2a^2}{2} + \frac{a^3x}{2} + \frac{a^3x}{2} \right]\Bigg|_0^a = 2\cdot\left(\frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} \right) = 3a^4\,.$$

Відповідь. $I = 3a^4$.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ № 1

Варіант 1

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$; б) $\int\frac{x}{x+4}dx$; в) $\int\frac{dx}{x^2+x}$.

2. а) $\int\sin^5 x\cos xdx$; б) $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx$; в) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

3. а) $\int x\sin(2x+1)dx$; б) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\mathrm{arctg}xdx$.

4. а) $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; б) $\int\frac{x^2+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx$; в) $\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

5. а) $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$; в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^1\left(e^x-1\right)^3 e^x dx$; б) $\int\limits_0^2 xe^{-x}dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:
а) $\int\limits_0^\infty\frac{2xdx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2=2x+1$ та $x-y-1=0$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини , обмеженої віссю абсцис та дугою $y=\sqrt{9-x^2}$.

Варіант 2

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{2x}{x-1}dx$; в) $\int\cos^2 4xdx$.

2. а) $\int\frac{\ln^5 x}{x}dx$; б) $\int\frac{x^3}{\left(3x^4+1\right)^2}dx$; в) $\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$.

3. а) $\int x^2\cos 4xdx$; б) $\int x\ln xdx$; в) $\int\arcsin xdx$.

4. а) $\int\frac{dx}{(x+5)(x+6)}$; б) $\int\frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$; в) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$.

5. а) $\int\cos^5 xdx$; б) $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$; в) $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \sin x dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=(x-2)^3$ та $4x-y-8=0$.

9. Знайти статичні моменти відносно осей координат відрізка прямої $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$, який обмежений координатними осями.

Варіант 3

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{dx}{(1-x)(2-x)}$; б) $\int \sin^2 3x dx$; в) $\int \sqrt{5x+2}dx$.

2. а) $\int \frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx$; в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$.

3. а) $\int x\cos 5x dx$; б) $\int x\cdot 3^x dx$; в) $\int \arccos 3x dx$.

4. а) $\int \frac{(x^2-5x+9)dx}{x^2-5x+6}$; б) $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$; в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2\sqrt{2x+3}}$.

5. а) $\int \sin^4 x dx$; б) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$; в) $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^4\alpha\, d\alpha$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+4}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x\sqrt{9-x^2}$ та $y=0\ (0\le x\le 3)$.

9. Знайти статичні моменти однорідної прямокутної пластини зі сторонами a та b відносно її сторін.

Варіант 4

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int 3{,}4x^{-0{,}17}dx$; б) $\int \frac{x}{2x+1}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

2. а) $\int 2x\sqrt{x^2+2}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; в) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$.

3. а) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; б) $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$; в) $\int x\operatorname{tg}^2 xdx$.

4. а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)}$; в) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

5. а) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; в) $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_0^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_0^\infty \frac{xdx}{x^2+1}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=4-x^2$ та $y=x^2-2x$.

9. Знайти координати центра мас дуги однорідної матеріальної кривої – астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$, що знаходиться у першій чверті координатної площини.

Варіант 5

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)dx$; б) $\int \frac{3+x}{3-x}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$.

2. а) $\int \cos^4 x\sin xdx$; б) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$; в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

3. а) $\int x\cos^2 xdx$; б) $\int \frac{\lg x}{x^3}dx$; в) $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

4. а) $\int \frac{(2x^2+4)(x-9)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; б) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+2)^2}$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-1}}$

5. а) $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}dx$; б) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$; в) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_4^\infty \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-11x+10}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x \cos^2 x$ та $y = 0 \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2} \right)$.

9. Знайти статичні моменти відносно координатних осей дуги астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, що знаходиться у першій чверті координатної площини.

Варіант 6

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \cos x \sin 3x dx$; б) $\int \frac{3x}{2x+5} dx$; в) $\int \frac{4dx}{x^2 + x + 2}$.
2. а) $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$; б) $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x(x+1)}$.
3. а) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; б) $\int \ln(2x+1) dx$; в) $\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} dx$.
4. а) $\int \frac{\left(5x^3+2\right)dx}{x^3 - 5x^2 + 4x}$; б) $\int \frac{dx}{x^3-1}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.
5. а) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; б) $\int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx$; в) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.
6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:
а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{4 - x^2}$ та $y = 0, x = 0, x = 1$.

9. Знайти координати центра мас однорідної матеріальної кривої – дуги ланцюгової лінії $y = \mathrm{ch} x, -1 \le x \le 1$.

Варіант 7

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \sin 2x \sin 5x dx$; б) $\int \frac{x+2}{2x-3} dx$; в) $\int \frac{dx}{4x^2+1}$.
2. а) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$; в) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$.

3. а) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$; б) $\int x^2e^{-x}dx$; в) $\int x\mathrm{arctg}4xdx$.

4. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; б) $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

5. а) $\int \cos^6 3xdx$; б) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+3}$; в) $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^1 \frac{z^3dz}{z^8+1}$; б) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$; б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^3-x^2}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2\sqrt{4-x^2}$ та $y=0$ $\left(0\le x\le 2\right)$.

9. Знайти координати центра мас однорідної матеріальної кривої – кола радіуса a, що стягує кут 2α.

Варіант 8

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+1}$.

2. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$; б) $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$; в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+3}}$.

3. а) $\int x^3\ln 2xdx$; б) $\int (x+3)e^{2x}dx$; в) $\int x^2\cos^2 xdx$.

4. а) $\int \frac{2xdx}{x^3-1}$; б) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$; б) $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$; в) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+9\sin^2 x}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\cos x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=\cos x\sin^2 x$ та $y=0$ $\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$.

9. Визначити координати центра мас матеріальної кривої – дуги першої арки циклоїди $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$.

Варіант 9

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$; б) $\int \frac{x^4}{x-1}dx$; в) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$.

2. а) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

3. а) $\int (2x^2-1)\sin(x+2)dx$; б) $\int x^2 5^x dx$; в) $\int \ln^2 x dx$.

4. а) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^3-1}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+9)(x-1)}$; в). $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}(2-x)}$

5. а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$; б) $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}dx$; в) $\int \sqrt{x^2+x}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{x^2dx}{x^3+1}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-5x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{e^x-1}$ та $y=0,\ x=\ln 2$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ та осями координат, що знаходиться у першій чверті $(x\ge 0,\ y\ge 0)$.

Варіант 10

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \mathrm{tg}^4 x dx$; б) $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2+4x+1}$.

2. а) $\int \sin x\sqrt[4]{\cos x}dx$; б) $\int \frac{\ln^2 x+2\ln x}{x}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

3. а) $\int (5x-3)\cos 4x dx$; б) $\int x^{10}\ln x dx$; в) $\int (3x+2)\mathrm{arctg}x dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+3x}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^2}$; в) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; б) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; в) $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi\, d\varphi$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} \cos 2x dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \arccos x$ та $y = 0, x = 0$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.

Варіант 11

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2+8x+15}$.

2. а) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4} dx$; б) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+9} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

3. а) $\int (2x+1)e^{3x+2} dx$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$; в) $\int \cos(\ln x) dx$.

4. а) $\int \frac{(x^2-x+14)dx}{(x-4)^2(x-2)}$; б) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$.

5. а) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$; в) $\int (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x^2-7x+12}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = (x+1)^2$ та $y^2 = x+1$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1-\cos t), 0 \le t \le 2\pi$ та віссю Ox.

Варіант 12

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; б) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; в) $\int \frac{dx}{4x^2+4x}$.

2. а) $\int \sin^5 x \cos x dx$; б) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

3. а) $\int (2x^2+3)\sin 2x dx$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}dx$; в) $\int (3x-1)\mathrm{arctg} 2x dx$.

4. а) $\int \frac{(2x-1)dx}{(5x-7)^2}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; в) $\int \frac{(\sqrt{x+1}+2)dx}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}$; в) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$; б) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{arctg} x dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+1}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2+3$ та $y=x^2-4x+3$.

9. Знайти момент інерції кола радіуса a відносно його діаметра.

Варіант 13

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$; б) $\int \frac{2x}{x+2}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2+5x+3}$.

2. а) $\int \sin^{10} 2x \cos 2x dx$; б) $\int \frac{2\ln^2 x + x + 1}{x}dx$; в) $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x^2+1}}$.

3. а) $\int (2x-5)\cos 4x dx$; б) $\int (x+5)e^{2x}dx$; в) $\int x \arcsin 2x dx$.

4. а) $\int \frac{(5x-2)dx}{(x-1)(x-4)^2}$; б) $\int \frac{x^3+1}{x^3-1}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(x+1)}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; б) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$; в) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; б) $\int\limits_0^{1}\frac{xdx}{x^2-8x+7}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x\sqrt{36-x^2}$ та $y=0\left(0\le x\le 6\right)$.

9. Знайти момент інерції прямокутника з сторонами a та b відносно його сторін.

Варіант 14

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int\frac{x^2}{x-1}dx$; б) $\int\frac{1+\cos^2 x}{\cos 2x+1}dx$; в) $\int\frac{dx}{x^2+2x+10}$.

2. а) $\int\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2}dx$; б) $\int e^{\sin x}\cos xdx$; в) $\int\frac{xdx}{2+\sqrt{x}}$.

3. а) $\int e^{2x}\cos 3xdx$; б) $\int\left(\arcsin x\right)^2 dx$; в) $\int\operatorname{arctg}4xdx$.

4. а) $\int\frac{\left(x^3-1\right)dx}{\left(x^2-9x+14\right)\left(x-2\right)}$; б) $\int\frac{x^5+x+1}{x^3+x}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x-3}dx$.

5. а) $\int\operatorname{tg}^4 x\,dx$; б) $\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$; в) $\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{x^2+1}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_2^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; б) $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x+1\right)\ln^3\left(x+1\right)}$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x=\arccos y$ та $x=0,\ y=0$.

9. Знайти моменти інерції однорідної пластини, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, відносно його головних осей.

Варіант 15

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int\left(2x^3+1\right)\left(x-4\sqrt{x}-1\right)dx$; б) $\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^3}{4^x}dx$; в) $\int\frac{dx}{x^2+10x+24}$.

2. а) $\int\frac{2}{\arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\frac{\cos x}{\sin^8 x}dx$; в) $\int\frac{dx}{5-\sqrt{2x+1}}$.

3. а) $\int e^{2x+1}\sin\left(2x+1\right)dx$; б) $\int\sin\left(\ln x\right)dx$; в) $\int x^2e^x\sin xdx$.

4. а) $\int \frac{3x-2}{(x-2)(2x+1)}dx$; б) $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$; в) $\int \frac{\left(x+\sqrt{x}\right)dx}{x-2}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$; б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$; в) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^5}{y+2}dy$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x\mathrm{arctg}x$ та $y=0,\ x=\sqrt{3}$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a,\ x=0,\ y=0$.

Варіант 16

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$; б) $\int 2\sin^2\frac{x}{4}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$.

2. а) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$; б) $\int e^{-x^3}x^2dx$; в) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

3. а) $\int (5x-3)\sin(x+4)dx$; б) $\int e^{2\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$; б) $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+4x+5\right)}$; в) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

5. а) $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$; в) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}x\,dx$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2\sqrt{8-x^2}$ та $y = 0\left(0 \le x \le 2\sqrt{2}\right)$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $x^2 + 4y - 16 = 0,\ y = 0$.

Варіант 17

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \left(2^x+1\right)\left(2^{3x}+2^{-2x}\right)dx$; б) $\int \frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2+16x+55}$.

2. а) $\int \frac{2^x}{4^x+1}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

3. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int e^{2x}\cos \pi x dx$; в) $\int \left(x^2-1\right)\sin 4x dx$.

4. а) $\int \frac{(2x-3)dx}{\left(x^2-3x+2\right)^3}$; б) $\int \frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x-2}+x}{x+1}dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; б) $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1-\cos x+\sin x}dx$; в) $\int \frac{x^4 dx}{\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = \sqrt{e^y-1}$ та $x = 0,\ y = \ln 2$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $y = \frac{2x}{\pi},\ x \ge 0,\ y = \sin x$.

Варіант 18

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{(1-z)^2}{2z}dz$; б) $\int \frac{2}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$; в) $\int \frac{3dx}{9x^2+6x+5}$.

2. а) $\int \mathrm{ctg}(2x+1)dx$; б) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x\ln x}$.

3. а) $\int (4x-2)\cos 2x dx$; б) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; в) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

4. а) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$; б) $\int \frac{x^3+2}{x^3+2x} dx$; в) $\int \frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x-2}\right)dx}{x}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\cos^5 4x}$; б) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$; в) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$; б) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-10x+16}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x\sqrt{4-x^2}$ та $y=0,\ 0 \le x \le 2$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $y=\cos x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ y=0$.

Варіант 19

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int (\sin x+2)(\cos 2x-\sin x)dx$; б) $\int \frac{4x}{x+2} dx$; в) $\int \frac{5dx}{x^2+8x+25}$.

2. а) $\int \cos^5 2x \sin 2x dx$; б) $\int x\left(3x^2+1\right)^{100} dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. а) $\int \left(x^2-5x+6\right)\sin 3x dx$; б) $\int e^{5x}\cos 3x dx$; в) $\int x\ln^2 x dx$.

4. а) $\int \frac{\left(x^3+1\right)dx}{x^2-x}$; б) $\int \frac{3x-2}{\left(x^2+9\right)(x-1)^2} dx$; в) $\int \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx$.

5. а) $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$; б) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність: а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^2 x dx$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{1}{1+\cos x}$ та $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $x^2+4y^2=4, x^2+y^2=4, x>0, y>0$.

Варіант 20

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$; б) $\int \frac{x^2-16}{x+4}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2+2x-8}$.

2. а) $\int \sin(x^2+3)xdx$; б) $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$; в) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x dx$.

3. а) $\int e^{-2x}\sin 4x dx$; б) $\int (x+1)\ln^2(x+1)dx$; в) $\int 2x\cdot\mathrm{arctg} x dx$.

4. а) $\int \frac{(3x^3+25)dx}{x^2+3x+2}$; б) $\int \frac{x^6+8x^5+x^3+2}{x(x^2+1)}dx$; в) $\int \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx$.

5. а) $\int \left(\mathrm{tg}^3\frac{x}{3}+\mathrm{tg}^4\frac{x}{3}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}x$; в) $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$; б) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:
а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^6+1}$; б) $\int\limits_1^3 \frac{(2x-1)dx}{x^2-5x+6}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x=(y-2)^3$ та $x-4y+8=0$.

9. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $2x=y^2, 2y=x^2$.

Варіант 21

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \frac{5dx}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$; б) $\int \frac{5x}{x+2}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

2. а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)dx$; в) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+4)^2}$.

3. а) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$; б) $\int e^{\sqrt{x+2}}dx$; в) $\int e^{-x}\sin 5x dx$.

4. а) $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x}dx$; б) $\int \frac{2dx}{\left(x^2 + 4\right)^2}$; в) $\int \frac{xdx}{2 + \sqrt{2x+1}}$.

5. а) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$; б) $\int \frac{\left(1 + \cos x\right)}{1 + \cos x + \sin x}dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{4}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \left(x - 1\right)e^{-2x}dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \sin^2 x \cos x dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = 4 - y^2$ та $x = y^2 - 2y$.

9. Знайти статичні моменти однорідної пластини, обмеженої кривими $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$ відносно координатних осей.

Варіант 22

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \sin 4x \cos 6x dx$; б) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}dx$; в) $\int \left(3x + 1\right)^{100} dx$.

2. а) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$; б) $\int e^x \sin\left(e^x\right)dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{3x^3 + 4}$.

3. а) $\int \left(2x^2 + 3\right)\cos 4x dx$; б) $\int \left(x + 1\right)e^{\frac{x}{2}}dx$; в) $\int e^{2x} \sin x dx$.

4. а) $\int \frac{x^3 + x}{x^3 + 1}dx$; б) $\int \frac{3dx}{\left(x^2 - 6x + 8\right)\left(x - 4\right)}$; в) $\int \frac{15\sqrt{x+3}}{x\left(x + 3\right)^2}dx$.

5. а) $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}\, dx$; б) $\int \frac{\left(1 + \sin x\right)}{\left(1 - \sin x\right)^2}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4 - x^2\right)^3}}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + 4}}$; б) $\int\limits_{0}^{1} x\mathrm{arctg}x\, dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{x^3 + x^2}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ та $y = 0,\ x = 1,\ x = 2$.

9. Знайти статичні моменти однорідної пластини, обмеженої кривими $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$, відносно координатних осей.

Варіант 23

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int\frac{1-\sin x}{\cos x}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; в) $\int\frac{dx}{6x+8}$.
2. а) $\int\sqrt[5]{2\sin x+3}\cos x dx$; б) $\int\frac{\ln 2x+2\ln x-1}{x}dx$; в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.
3. а) $\int x^2\sin\left(2x-1\right)dx$; б) $\int x^5\ln x dx$; в) $\int x\arcsin 4x dx$.
4. а) $\int\frac{3x^2-2}{x^3-x}dx$; б) $\int\frac{4x-1}{\left(x^2+9\right)^2}dx$; в) $\int\sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx$.
5. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$; б) $\int\frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx$; в) $\int\sqrt{16-x^2}dx$.
6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:
а) $\int\limits_0^\infty\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2\sqrt{16-x^2}$ та $y=0$, $\left(0\le x\le 4\right)$.

9. Знайти статичні моменти однорідної пластини, обмеженої кривими $y^2=2px,\ x=1,\ y=0$ відносно координатних осей.

Варіант 24

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right)\left(2x-\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{10x}{x-2}dx$; в) $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$.
2. а) $\int\frac{\mathrm{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$; б) $\int\frac{\mathrm{tg}x+3}{\cos^2 x}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^4}$.
3. а) $\int x\sin\left(2x-3\right)dx$; б) $\int\sin 2x\cdot e^{4x-2}dx$; в) $\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

4. а) $\int \frac{x^3dx}{(x+2)(x^2-1)}$; б) $\int \frac{x^4dx}{(x^2+x+1)^2}$; в) $\int \frac{4\sqrt{x}dx}{x^2\sqrt{x-1}}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}$; б) $\int \frac{\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2-2}\,dx}{x^4}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$; б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2-13x+12}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x=\sqrt{4-y^2}$ та $x=0,\ y=0,\ y=1$.

9. Знайти статичні моменти однорідної матеріальної дуги кривої $y^2=2x,\ x\in[0;2],\ y>0$ відносно координатних осей.

Варіант 25

Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int (\cos x+\sin x)(\cos 3x-1)dx$; б) $\int \sqrt[3]{(5x-2)^7}dx$; в) $\int \frac{3dx}{2x^2+12x+1}$.

2. а) $\int \sin^3 3x dx$; б) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$.

3. а) $\int (2x^2-1)\sin 5x dx$; б) $\int (x^3-1)\ln x dx$; в) $\int x\sin^2 x dx$.

4. а) $\int \frac{3xdx}{(x^2-7x+12)(x-3)}$; б) $\int \frac{4x-1}{(x^2+6x+10)^2}dx$; в) $\int \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

5. а) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$; б) $\int \frac{\sin x}{5+3\sin x}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}\,dx}{x^4}$.

6. Знайти визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx$.

7. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+14x+15}$; б) $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{x^2-10x+9}$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2=x-1$ та $y=(x-1)^2$.

9. Знайти статичний момент однорідної матеріальної дуги кривої $y=\cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ відносно осі Ox.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ № 2

Варіант 1

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$, якщо область D – круг $x^2+y^2\le\pi^2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого площинами $z=0, y+z=2$ та циліндричною поверхнею $y=x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_L ydl$, де L – дуга параболи $y^2=2px$, що відтинається параболою $x^2=2py$.

4. Обчислити $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$, де L – дуга параболи $x=2y^2$, що проходить від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$.

5. Обчислити $\iint\limits_S xyzdS$, де S – частина поверхні $z=x^2+y^2$, розташована між площинами $z=0$ та $z=1$.

Варіант 2

1. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0, y=0, x+y=1$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z=x^2+y^2$ та площинами $z=0, y=0, x=0, x+y=1$.

3. Обчислити $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – права частина лемніскати $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

4. Обчислити $\oint\limits_L (x-y)dx+xdy$, де L – квадрат зі сторонами $x=\pm a, y=\pm a$.

5. Обчислити $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS$, де S – частина поверхні $z^2=x^2+y^2$, розташована між площинами $z=0$ та $z=1$.

Варіант 3

1. Обчислити $\iint\limits_D x^2ydxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=0, y=1-x^2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=2x, z=x^2+y^2, z=0$.

3. Обчислити $\int\limits_L xydl$, де L – частина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, що знаходиться у першій чверті.

4. Обчислити $\oint\limits_L (x+y)dx+2xdy$, де L – коло $x^2+y^2=a^2$.

5. Обчислити $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS$, де S – півсфера $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Варіант 4

1. Обчислити $\iint\limits_D y\ln x dxdy$, якщо область D обмежена лініями $xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$, $z=0,\ y=1,\ y=2x,\ y=6-x$.

3. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, де L – відрізок прямої $y=x+2$, що з'єднує точки $A(2;4)$ та $B(1;3)$.

4. Обчислити $\int\limits_L \left(y+x^2\right)dx+(2x-y)dy$, де L – дуга параболи $y=2x-x^2$, що проходить від точки $A(1;1)$ до точки $B(3;-3)$.

5. Обчислити $\iint\limits_S xdS$, де S – частина площини $z=x$, обмежена площинами $x+y=1$, $x=0$ та $y=0$.

Варіант 5

1. Обчислити $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0,\ y=e^x,\ y=2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4,\ z=x^2+y^2,\ z\ge 0$.

3. Обчислити $\int\limits_L x^2ydl$, де L – частина кола $x^2+y^2=R^2$, що лежить у першій чверті.

4. Обчислити $\int\limits_L xdy$, де L – відрізок прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ від точки $A(a;0)$ до $B(0;b)$.

5. Обчислити $\iint\limits_S ydS$, де S – частина площини $z = x$, обмежена площинами $x + y = 1$, $x = 0$ та $y = 0$.

Варіант 6

1. Обчислити $\iint\limits_D \sin(x + y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x + y = 1$, $z = 2x^2 + y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3. Обчислити $\int\limits_L xdl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0;0)$ та $A(1;2)$.

4. Обчислити $\int\limits_L \dfrac{dy}{x} - \dfrac{dx}{y}$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = R^2$, що лежить у першій чверті.

5. Обчислити $\iint\limits_S xdS$, де S – частина поверхні $z = 2 - \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, що знаходиться над площиною xOy.

Варіант 7

1. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, якщо область D: $x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge 0$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = x^2 + z^2$, $y = 1$.

3. Обчислити $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0;0)$ та $A(2;2)$.

4. Обчислити $\oint\limits_L x^2 ydx + x^3 dy$, де L – контур, обмежений параболами $x = y^2$ та $x^2 = y$.

5. Обчислити $\iint\limits_S zdS$, де S – частина площини $z = x$, обмежена площинами $x + y = 1$, $x = 0$ та $y = 0$.

Варіант 8

1. Обчислити $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, якщо область D – круг $x^2+y^2\le 9$.

1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$ та $x^2+y^2+z^2=1$ (всередині конуса).

2. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;1)$ та $B(1;0)$.

2. Обчислити $\oint\limits_L (x+y)dx+xdy$, де L – коло $x^2+y^2=R^2$.

3. Обчислити $\iint\limits_S ydS$, де S – частина поверхні $z=2-\frac{x^2+y^2}{2}$, що знаходиться над площиною xOy.

Варіант 9

1. Обчислити $\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$, якщо область D: $1\le x^2+y^2\le e^2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $2az=a^2-x^2-y^2$ та $az=x^2+y^2$.

3. Обчислити $\int\limits_L (x-y)dl$, де L – коло $x^2+y^2=ax$.

4. Обчислити $\oint\limits_L ydx+ady$, де L – контур, утворений півосями координат та першою чвертю еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

5. Обчислити $\iint\limits_S zdS$, де S – частина поверхні $z=2-\frac{x^2+y^2}{2}$, що знаходиться над площиною xOy.

Варіант 10

1. Обчислити $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, якщо область D: $e\le x^2+y^2\le e^2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2=2y$, $y+z=1$, $2y+z=2$.

3. Обчислити $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho=1+\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

4. Обчислити $\int\limits_{L} 2xydx+\left(y-x\right)dy$, де L – дуга параболи $y=x^2$ від точки $O\left(0;0\right)$ до точки $A\left(1;1\right)$.

5. Обчислити $\iint\limits_{S}\left(x^2+y^2\right)dS$, де S – частина поверхні $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, яка розташована між площинами $z=0$ та $z=1$.

Варіант 11

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(x^3+y^3\right)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=4$, $y=\dfrac{x}{2}$, $y=x$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y=x^2$, $y=1$, $z=0$ та $z+x+y=4$.

3. Обчислити $\int\limits_{L} ydl$, де L – дуга $y=\sqrt{1-x^2}$.

4. Обчислити $\int\limits_{L} xy^2dx+\left(x+y\right)dy$, де L – дуга параболи $y=x^2$, що проходить від точки $O\left(0;0\right)$ до точки $A\left(2;4\right)$.

5. Обчислити $\iint\limits_{S}\left(x-2z\right)dS$, де S – частина площини $z+x+y=1$, розташована у першому октанті.

Варіант 12

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(3x^2-2xy+y\right)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=y^2$, $y=2$, $x=0$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4$, $y=\sqrt{3}x$, $x=\sqrt{3}y$, $z=0$, $z=12$.

3. Обчислити $\int\limits_{L}\dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O\left(0;0\right)$ та $A\left(1;2\right)$.

4. Обчислити $\int\limits_{L}\left(2a-y\right)dx+xdy$, де L – дуга першої арки циклоїди $\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right); \\ y=a\left(1-\cos t\right) \end{cases}$ від точки $O\left(0;0\right)$ до точки $A\left(2\pi a;0\right)$.

5. Визначити площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розташованої всередині циліндра $x^2 + y^2 = Rx$.

Варіант 13

1. Обчислити $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0$, $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.
2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x + y = 2$, $y = \sqrt{x}$, $z = 0$, $y = 0$, $z = 15x$.
3. Обчислити $\int\limits_L y^2 dl$, де L: $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ – перша арка циклоїди ($0 \le t \le 2\pi$).
4. Обчислити $\int\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy$, де L – дуга $y = x^3$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.
5. Обчислити масу півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, якщо у кожній її точці поверхнева густина дорівнює відстані цієї точки від осі Oz.

Варіант 14

1. Обчислити $\iint\limits_D xdxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = 0 (y > 0)$ та $x^2 + y^2 = 4$.
2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \frac{5}{4} - x^2$, $z = 0$.
3. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2y$.
4. Обчислити $\int\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.
5. Обчислити $\iint\limits_S x^2 yz\,dS$, де S – частина площини $x + y + z = 1$, яка розташована у першому октанті.

Варіант 15

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy$, де область D обмежена лініями $y=2x$, $y=\dfrac{x}{2}$, $y=\dfrac{2}{x}$, $x>0$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=y$, $z=0$, $4y=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3. Обчислити $\int\limits_{L}\left(x-y\right)dl$, де L – коло $x^2+y^2=2x$.

4. Обчислити $\int\limits_{L}-ydx+xdy$, де L – дуга астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Обчислити $\iint\limits_{S}\left(xy+15x+15y\right)dS$, де S – частина поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вирізана циліндром $x^2+y^2=2x$.

Варіант 16

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(\cos 2x+\sin y\right)dxdy$, де область D обмежена лініями $x=0$, $y=0$, $4x+4y=\pi$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+4x=0$, $z=8-y^2$, $z=0$.

3. Обчислити $\int\limits_{L}xydl$, де L – контур прямокутника з вершинами $A\left(2;0\right), B\left(4;0\right)$, $C\left(4;3\right), D\left(2;3\right)$.

4. Обчислити $\int\limits_{L}\left(x-y\right)dx+dy$, де L – верхня половина кола $x^2+y^2=R^2$.

5. Обчислити площу частини поверхні площини $2x+2y+z=8$, що розташована всередині циліндра $x^2+y^2=1$.

Варіант 17

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\dfrac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, якщо область D обмежена лініями $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=0$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=51$, $z=\sqrt{100-x^2-y^2}$, $z=6$ (всередині циліндра).

3. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^2 dl$, де L – коло $x^2+y^2=9$.

4. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2-y\right)dx$, де L – контур прямокутника, утвореного прямими $x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2$.

5. Обчислити площу частини поверхні конуса $z=\sqrt{2xy}$, розміщеної у першому октанті між площинами $x=2,\ y=4$.

Варіант 18

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, якщо область D обмежена кривою $x^2+y^2=4x$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ та $x^2+y^2=6z$.

3. Обчислити $\int\limits_L x^2 dl$, де L – дуга верхнього півкола $x^2+y^2=R^2$.

4. Обчислити $\int\limits_L y\left(x-y\right)dx+xdy$, де L – дуга параболи $y=2x^2$ від точки $O\left(0;0\right)$ до точки $A\left(1;2\right)$.

5. Обчислити площу частини циліндра $x^2+y^2=Rx$, розташованої всередині сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Варіант 19

1. Обчислити $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, де область D обмежена лініями $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$ та $x^2+y^2=\pi^2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{80}}$.

3. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A\left(0;-2\right)$ та $B\left(4;0\right)$.

4. Обчислити $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$, де L – дуга еліпса $\begin{cases} x=\cos t; \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

5. Обчислити масу циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 1$, розміщеної між площинами $z = 0$ та $z = 1$, якщо у кожній її точці поверхнева густина $\rho = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$.

Варіант 20

1. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, де область D обмежена лініями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 4a^2$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\dfrac{3z}{2} = x^2 + y^2$.

3. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4y$.

4. Обчислити $\oint\limits_L 2x(y-1)dx + x^2dy$, де L – контур, обмежений лініями $y = x^2$ та $y = 9$.

5. Обчислити координати центра маси конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985.–383 с.
2. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1 / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий // Под общ. ред. В.А. Садовничего. – М.: Высшая школа, 2002.–725 с.
3. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 2 / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий // Под общ. ред. В.А. Садовничего. – М.: Высшая школа, 2002.–712 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука,1990. – 624 с.
5. Заболоцький М.В. Математичний аналіз. Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
7. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н.С. Пискунов. – Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 432 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н.С. Пискунов. – Т. 2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – Т. 1. – М.: Физматлит, 2003. – 680 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 656 с.

Додаткова

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 2005. – 392 с.
2. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. / В.Ф.Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А.Шишкин. – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.
3. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому анализу. / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, Б.Н. Никольский. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
4. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении / А.Я. Дороговцев. – К.: Факт, 2004. – 560 с.

5. Дороговцев А.Я. Избранные задачи по математическому анализу / А.Я. Дороговцев. – К.: Вища школа, 1982. – 104 с.
6. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – Ч. 1. – К.: Вища школа, 2002. – 462 с.
7. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – Ч. 2. – К.: Вища школа, 2003. – 470 с.
8. Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. – Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехов, М.И. Щабунин. // Под ред. Л.Д. Кутасова. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.
9. Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. – Т. 2 Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов В.И. Чехов, М.И. Щабунин // Под ред. Л.Д.Кутасова. – М.: Физматлит, 2004. – 528 с.
10. Ляшко И.И. Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по математическому анализу: В 5 т. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головач. – Т. 1 – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 360 с.
11. Ляшко И.И. Математический анализ: Ряды, функции векторного аргумента. Справочное пособие по математическому анализу: В 5 т. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головач. – Т. 2 – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 231 с.
12. Ляшко И.И. Математический анализ: Кратные и криволинейные интегралы. Справочное пособие по математическому анализу: В 5 т. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головач. – Т. 3 – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 224 с.
13. Ляшко И.И. Математический анализ: Функции комплексного переменного. Теория и практика. Справочное пособие по математическому анализу: В 5 т. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головач. – Т. 4 – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 224 с.
14. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И.А. Марон. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

Інформаційні ресурси

1. http://sites.znu.edu.ua/bank/index.php?action=url/view&url_id=3809
2. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/metod_Dif_ischesl.pdf
3. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/Int_K_Dyach.pdf
4. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/Titova/1/text1_1.pdf
5. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/Titova/1/text2_1.pdf
6. http://kma-znu.ucoz.ru/index/uchebnaja_literatura/0-49
7. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm
8. http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/matematicheskii_analiz/
9. http://www.twirpx.com/files/mathematics/algebra/analysis/
10. http://techlibrary.ru/
http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/05_metod_SAM_rab.htm

ДОДАТОК А

Таблиця похідних.
Правила диференціювання

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\text{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\text{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$
17. $(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$
18. $(\text{th}\, x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$
19. $(\text{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$

1. $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$.
2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.
3. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ v(x) \neq 0$.

ДОДАТОК Б

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$,
2. $\int dx = x + C$,
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$,
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$,
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C, \end{cases}$
8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \end{cases}$,
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
10. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$,
11. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$,
12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,
13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

ДОДАТОК В

Канонічні рівняння поверхонь

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – еліпсоїд.

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – однопорожнинний гіперболоїд.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – двопорожнинний гіперболоїд.

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – конус другого порядку.

5. $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ – еліптичний параболоїд.

6. $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ – гіперболічний параболоїд.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – еліптичний циліндр.

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гіперболічний циліндр.

9. $y^2=2px$ – параболічний циліндр.

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара площин, що перетинаються.

11. $\frac{x^2}{a^2}=1$ – пара паралельних площин.

12. $x^2=a$ – пара площин, що співпадають.

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – уявний конус другого порядку з дійсною вершиною $(0;0;0)$.

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара уявних площин, які перетинаються по дійсній прямій.

15. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ – уявний еліпсоїд.

16. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – уявний еліптичний циліндр.

17. $\dfrac{x^2}{a^2}=-1$ – пара уявних паралельних площин.

Навчальне видання
(українською мовою)

Клименко Михайло Іванович
Ткаченко Ірина Григорівна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник для студентів
освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр»
напряму підготовки «Фізика», «Фізика твердого тіла»,«Прикладна фізика»

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *І.Г. Ткаченко*
Коректор *М.І. Клименко*