ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ № 3, 4 Інтегральний і точковий методи найменших квадратів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

§1 Завдання для виконання і варіанти практичного завдання №3

1. Інтегральним і точковим методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу
2. Побудувати графіки отриманих наближених розв'язків у випадку їх подання лінійною комбінацією трьох і десятьох лінійно незалежних функцій повної системи простору $C[a,b]$.
3. Знайти точний або чисельний розв'язок засобами системи комп'ютерної алгебри Maple (або ін.) і побудувати його графік.
4. Зробити висновок про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

Номер варіанта збігається з тим, що надано в ПЗ 1, а s позначено число, що дорівнює

0, якщо Ваше ПІБ має номер в журналі академгрупи ДЕННОЇ форми здобуття освіти від 1 до 10;

1 – номер в списку для ДЕННОЇ форми здобуття освіти від 11 до 20;

2 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми здобуття освіти від 1 до 10;

3 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми здобуття освіти від 11 до 20.

Варіант	Крайова задача
1	$y'' - 2xy' + 2y = 5x + 1, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
2	$y'' + 2y' - 4xy = 2x, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
3	$y'' - 2xy' - 3y + 2x = 0, \quad y(-1) = y(1) = s$
4	$y'' - 2y' + 5xy = x, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
5	$y'' - 2xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
6	$y'' - x^2 y' + y = x, \quad y(0) = y(1) = s$
7	$y'' + y' - 2xy = x - 2, \quad y(-1) = y(1) = s$
8	$y'' - 2xy' - 2y = 5x, \quad y(0) = y(1) = s$
9	$y'' - 2xy' + 2y = 3x - 1, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
10	$y'' + 3y' - 4xy = 2x + 1, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 2$

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №3

Задача 3.1 Розв'яжемо крайову задачу

$$y'' - (x+1)y' + (3-2x)y = x - 5; \quad y(1) = -1;\ y(3) = 2. \tag{3.15}$$

Розв'язання. Відповідно до (3.1) у даному випадку маємо:

$$p(x) = -(x+1);\ q(x) = 3 - 2x;\ f(x) = x - 5, \tag{3.16}$$

а в крайовій умові (3.6) потрібно покласти:

$$a = 1;\ b = 3;\ A = -1;\ B = 2. \tag{3.17}$$

Розв'язання проведемо в системі комп'ютерної алгебри Maple.

1. Спочатку потрібно ввести вхідні дані відповідно до (3.16) і (3.17).

2. Далі визначаємо нев'язку:

$$R := diff(y(x), x\$2) + \mathrm{p(x)} \cdot diff(y(x), x) + \mathrm{q(x)} \cdot y(x) - \mathrm{f(x)};$$

3. Оскільки коефіцієнти диференціального рівняння є многочленами, то систему лінійно незалежних функції задаємо через формули (3.7):

$$> \; u(x)[0] := A + \frac{(B-A)}{(b-a)} \cdot (x-a) :$$

$$> \; \textbf{for } k \textbf{ from } 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \quad u(x)[k] := (x-a)^k \cdot (x-b) : \textbf{ od}:$$

тут n – кількість лінійно незалежних функцій, що задовольняють однорідні крайові умови.

4. Наближений розв'язок подамо за формулою (3.9):

$$> \; y := \mathrm{x} \rightarrow u(x)[0] + sum(c[j] \cdot u(x)[j], j = 1..n) :$$

5. Квадратичне відхилення **інтегрального МНК** визначається через (3.11):

Q:=int(R^2,x=a..b):

6. Пошук критичної точки функції багатьох змінних, що передбачає утворення СЛАР та його розв'язання, проводиться аналогічно ПЗ 1 і ПЗ 2. Пропонується студентові виконати цю частину самостійно. **Зверніть увагу,** що частинні похідні обчислюються за змінними c[k], для k від 1 до n.
7. Якщо після розв'язання системи застосувати оператор assign, то як наближений розв'язок, так і квадратичне відхилення набудуть конкретного вигляду: розв'язок буде подано многочленом з числовими коефіцієнтами, а квадратичне відхилення набуде числового значення.
8. Обираючи $n = 3$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ у вигляді

$$1.976689405 - 11.45108585x + 13.13459156x^2 - 5.437797191x^3 + 0.7776020770x^4,$$

а відповідне квадратичне відхилення дорівнюватиме

$$Q = 12.1222022221701.$$

При $n = 10$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ –

$$68.34263346x + 0.02551509636x^{11} + 4.582163629x^9 - 0.5087566912x^{10} - 446.7764123x^4 + 367.0165640x^5 - 212.5136599x^6 + 86.82319787x^7 - 24.55189897x^8 + 375.0622834x^3 - 12.09089855 - 206.4107312x^2; \; Q10 = 0.000007854146151$$

і відповідне квадратичне відхилення $Q = 0.000007854146151$.

9. Система комп'ютерної алгебри Maple містить функціонал, що відповідає за можливість пошуку чисельного розв'язку диференціального рівняння, побудову графіку функції-розв'язку та ін. Застосувати зазначений функціонал можна в такий спосіб:

> $with(plots)$:
$RR := diff(yyy(x), x\$2) + p(x) \cdot diff(yyy(x), x) + \mathrm{q}(\mathrm{x}) \cdot yyy(x) - \mathrm{f}(\mathrm{x})$:
> $F := dsolve(\{RR, yyy(\mathrm{a}) = \mathrm{A}, yyy(\mathrm{b}) = \mathrm{B}\}, numeric)$;
> $odeplot(F, color = blue)$;

10. Одночасне зображення трьох розв'язків дозволяє оператор display. У даному випадку графіки набудуть вигляду, зображеному на рис. 2.3.

Для випадку $n = 10$ графік наближеного розв'язку, отриманого за допомогою МНК і чисельного – засобами Maple візуально майже не відрізняються. Таким чином, як значення квадратичного відхилення, так і зображення графіків свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків, отриманих інтегральним МНК, до точного.

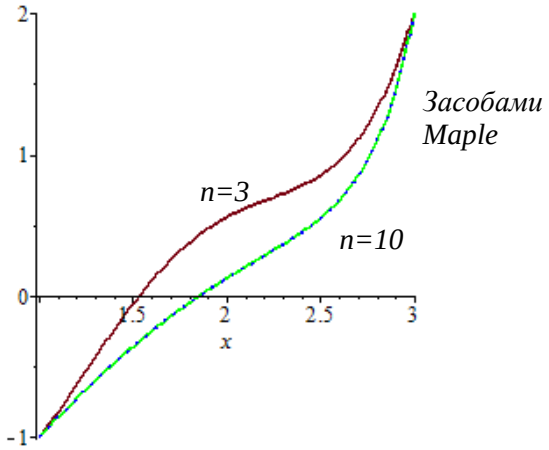

Рис. 2.3

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №4

Розглянемо ту саму крайову задачу (3.15), що була розв'язаною наближено інтегральним МНК.

Усі кроки алгоритму реалізації задачі в Maple, виписаного вище, крім кроку 5, залишаються незмінними. Випишемо крок 5. Він передбачає розбиття відрізка $[a;b]$ на m рівних частин з відповідними змінами в формі квадратичного відхилення (див. (3.13) і (3.14)):

> $m := 20$: **for** i **from** 0 **to** m **do** $X[i] := a + \frac{(b-a)}{m} \cdot i$ **od**:
> $Q := sum(subs(x = X[ii], R^2), ii = 1..m)$;

Кількість m точок розбиття повинна бути більшою за n. Тут обрано $m = 20$. Випишемо результати точкового МНК:

- при $n = 3$ наближений розв'язок $y(x)$ набув вигляду

$$2.929277713 - 13.76715972x + 15.03397215x^2 - 6.036106558x^3 + 0.8400164090x^4$$

  а квадратичне відхилення – $Q =$ 165.9420397;
- при $n = 10$ функція $y(x)$ дорівнює

$$124.6246876x - 21.22772663 + 0.03240173001x^{11} + 6.165844082x^{9} - 0.6645918865x^{10} + 627.6870971x^{3} - 716.8670497x^{4} + 566.1508612x^{5} - 315.8681328x^{6} + 124.6024045x^{7} - 34.08763520x^{8} - 361.5481600x^{2}$$

а квадратичне відхилення – $Q = 0.0000439318700848579$.

Графічне зображення всіх отриманих результатів обома методами наведено на рис. 2.4.

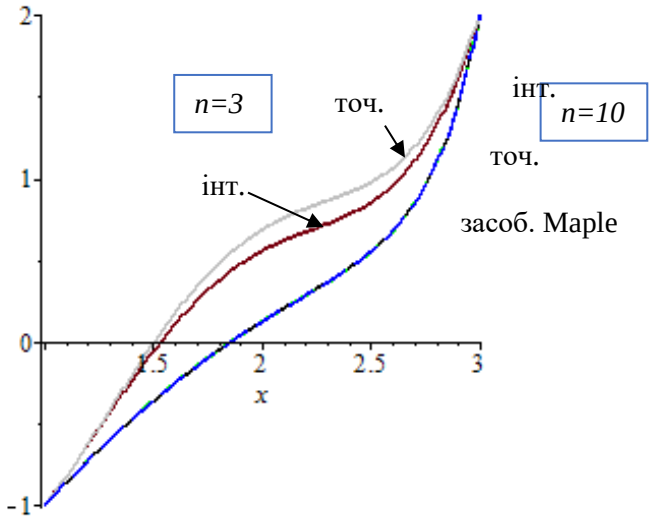

Рис. 2.4

Для даного диференціального рівняння значною є відстань між точками графіків наближених розв'язків, отриманих інтегральним, точковим МНК при $n = 3$, чисельного розв'язку, одержаного засобами Maple.

Хоча при $n = 10$ рівняння функцій, що виражають наближені розв'язки, суттєво різняться, однак квадратичні відхилення близькі до 0, а графіки візуально не відрізняються. Таким чином, послідовність наближених розв'язків, отриманих точковим МНК, збігається до точного.

Питання для самоконтролю з теми 3:

1. Повна система функцій та її лінійно незалежна підсистема. Принципи вибору функцій цієї системи.
2. Розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь інтегральним методом найменших квадратів (МНК).
3. Розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь точковим методом найменших квадратів (МНК).
4. Реалізація алгоритму інтегрального методу найменших квадратів за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).
5. Реалізація алгоритму точкового методу найменших квадратів за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).
6. Збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.
7. Недоліки і переваги інтегрального МНК.
8. Недоліки і переваги точкового МНК.