ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ №5 і 6 Розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду методами найменших квадратів. колокацій, моментів

§1 Завдання для виконання і варіанти практичних завдань №5 і 6

Перевірити умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (табл. 4.1,):
практичне завдання №5: методом найменших квадратів,
практичне завдання №6: методом колокацій,
методом моментів.

Порівняти результати

Таблиця 4.1 [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]

№ 1. $y(x)-\int_0^1 x\cdot t\cdot y(t)\,dt=2x;$	№ 2. $y(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\cdot y(t)dt=1;$
№ 3. $y(x)-\frac{\pi}{2}\int_0^1(1-x)\sin(2\pi t)y(t)dt=\frac{1}{2}(1-x);$	№ 4. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cdot y(t)\cdot t\,dt=2\sin x;$
№ 5. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\sin t\cdot y(t)\,dt=\sin x;$	№6. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 y(t)\,dt=\sin\pi x;$
№ 7. $y(x)-\int_0^1(1-x)\cos(2\pi t)y(t)dt=x;$	№ 8. $y(x)-\frac{\ln 2}{2}\int_0^1 2^{x+t}y(t)dt=x;$
№ 9. $y(x)-\int_0^1(1-2xt)y(t)dt=-\frac{1}{6}(x+3);$	№ 10. $y(x)-\int_0^1(2x-t)y(t)\,dt=\cos 2\pi x;$
№ 11. $y(x)+\int_0^1\left(x-\sqrt{t}\right)y(t)dt=\frac{5}{3}x+\sqrt{x}-\frac{1}{6};;$	№ 12. $y(x)-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{x}{1+t^2}y(t)dt=1+x^2;$
№ 13. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}y(t)dt=\sin x;$	№ 14. $y(x)+\int_0^1 x\sin(2\pi t)y(t)dt=\cos(2\pi x);$
№ 15. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 xe^t y(t)dt=e^{-x};$	№ 16. $y(x)-\int_0^{\pi/2}\sin x\cos t\;y(t)\;dt=1;$
№ 17 $y(x)-\int_0^1 x\left(1-\frac{3}{2}t\right)y(t)dt=1;$	№ 18. $y(x)-\int_0^1\sin(2\pi x)y(t)dt=x;$

№ 19. $y(x)+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin t+\sin 2x)y(t)dt=\sin x;$	№ 20. $y(x)-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left(x^2+1+xt\right)y(t)dt=1.$

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №5

Задача 4.1 Розглянемо інтегральні рівняння

$$\textbf{(а)}\ \ y(t)-\frac{5}{2}\int_0^1(1-2x^2)\,t\,y(t)\,dt=x\sin\pi x;$$

$$\textbf{(б)}\ \ y(t)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\pi x\cos 3\pi t\,y(t)\,dt=\cos 3\pi x$$

Розв'язання. (а) Відповідно до загального вигляду інтегрального рівняння (4.1) уведемо позначення

$$a=0,\,b=1,\,\lambda=\frac{5}{2},\ \ K(x,t)=(1-2x^2)\,t,\ \ f(x)=x\sin\pi x.$$

Крок 0. Спочатку перевіримо умови існування єдиного розв'язку в просторі $C_{[a;b]}$ (4.4) – (4.5) або $L_2[a;b]$ (4.6) – (4.7). Всі варіанти практичних завдань дозволяють перевірити умови (4.4) – (4.7) без допомоги технічних засобів. Однак можна їх перевірити з використанням Maple:

> $M := maximize(\mathrm{abs}(K(x,t)), x=a..b, t=a..b):$
$conditionC := evalf\left(\mathrm{abs}(\ \mathrm{lambda}) - \frac{1}{M\cdot(b-a)}\right);$

$$conditionC := 1.500000000$$

> $B := \mathrm{sqrt}\left(int\left(int\left((K(x,t))^2, x=a..b\right), t=a..b\right)\right):$

> $conditionL := evalf\left(\mathrm{abs}(\mathrm{lambda}) - \frac{1}{B}\right);$

$$conditionL := -0.035462764$$

Розглянемо змінні, що виражають різницю між лівою і правою частиною двох зазначених умов (conditionC, conditionL). Якщо хоча б одна з цих змінних від'ємна, то відповідна умова виконується, а рівняння має єдиний розв'язок. У даному прикладі виконується умова в просторі $L_2[a;b]$.

Крок 1. Здійснюємо вибір координатних функцій. Якщо ядро рівняння і вільний його член виражаються лише тригонометричними функцією, то краще й за координатні функції обирати тригонометричні. У супротивному випадку – степеневі.

В табл.. 4.2 пропонується універсальний вибір координатних функцій, який розповсюджується на всі неітераційні методи.

Таблиця 4.2

Тригонометрична система	*Система степеневих функцій*
> $n := 5 : kon := 2 \cdot n :$ > $u(x)[0] := \mathrm{f(x)} :$ > **for** k **from** 1 **to** kon **do** $u(x)[2 \cdot k] := \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot (k-1) \cdot x}{b-a}\right) :$ $u(x)[2 \cdot k - 1] := \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot k \cdot x}{b-a}\right) :$ **od**:	> $n := 10 : kon := n :$ > $u(x)[0] := f(x) :$ > **for** k **from** 1 **to** kon **do** $u(x)[k] := \mathrm{x}^{k-1} :$ **od**:

Крок 2. Самостійно подайте наближений розв'язок лінійною комбінацією координатних функцій в системі Maple. **Зверніть увагу**, що нумерація функцій від 0 до kon.

Крок 3. Визначаємо нев'язку

$$R := y(x) - \mathrm{lambda} \cdot int(\mathrm{K(x,t)} \cdot subs(x = t, y(x)), t = \mathrm{a..b}) - \mathrm{f(x)} :$$

Крок 4. **<u>Реалізація МНК.</u>** Виписуємо квадратичне відхилення

Q:=int(R^2,x=a..b):

і мінімізуємо його в той же спосіб, як і в попередніх роботах. **Зверніть увагу**, що частинні похідні обчислюються за змінними c[k], для k від 1 до kon.

Крок 5. Виносимо на екран результат: наближений розв'язок

$$x \sin(\pi x) + \frac{5}{2} \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} - \frac{5\left(\pi^2 - 4\right) x^2}{\pi^3}$$

і квадратичне відхилення $Q = 1.5667 \cdot 10^{-29}$.

Будуємо графік отриманої функції (див. рис. 4.1).

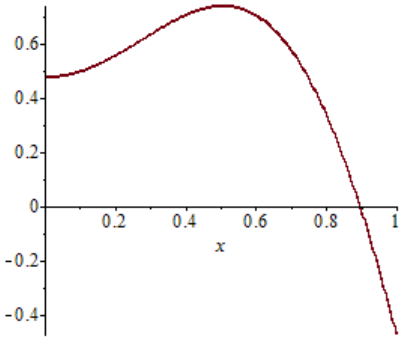

Рис. 4.1

(б) Крок 0 дозволяє запевнитися у виконанні умови існування єдиного розв'язку в просторі $L_2[a;b]$, оскільки conditionL= – 0.5.

Дослідимо вплив вибору координатних функцій відповідно до табл. 4.2. Якщо за координатні обрати степеневі функції, то наближений розв'язок набуде вигляду

$$\cos(9.424777962\,x) + 0.4994620383 - 2.469088544\,x^2 + 2.026842117\,x^4 - 0.6365413758\,x^6 + 0.08666450858\,x^8$$

з квадратичним відхиленням $Q = 3.1612 \cdot 10^{-10}$. Якщо тригонометричні, то при $n = 5$ отримаємо відповідно

$$-\frac{80}{21}\,\frac{341775\,\pi^2-3375104}{2480625\,\pi^4-48214800\,\pi^2+234225664}$$
$$+\frac{60}{7}\,\frac{\pi\left(33075\,\pi^2-326912\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi\,x\right)}{2480625\,\pi^4-48214800\,\pi^2+234225664}$$
$$+\frac{16}{441}\,\frac{\left(69711075\,\pi^2-687788032\right)\cos(\pi\,x)}{2480625\,\pi^4-48214800\,\pi^2+234225664}$$
$$-\frac{2500\,\pi\left(441\,\pi^2-4352\right)\cos\left(\frac{3}{2}\,\pi\,x\right)}{2480625\,\pi^4-48214800\,\pi^2+234225664}$$
$$+\frac{32\left(61425\,\pi^2-606208\right)\cos(2\,\pi\,x)}{2480625\,\pi^4-48214800\,\pi^2+234225664}$$

$$Q=0.0307598903,$$

а при $n=7$

$$\frac{1}{2}\cos(\pi\,x)+\cos(3\,\pi\,x)$$
$$Q=0.$$

Тобто функція $y(x)=\frac{1}{2}\cos\pi x+\cos 3\pi x$ визначає точний розв'язок. Будь-яка кількість степеневих функцій не дає можливості отримати точний розв'язок, а може лише наближатися до нього з певним степенем точності.

Графічне подання трьох розв'язків наведено на рис. 4.2, де суцільній лінії відповідає перший з наведених наближених розв'язків, штрих-пунктирній – другий, штриховій – третій. Перший і третій (точний) візуально накладаються.

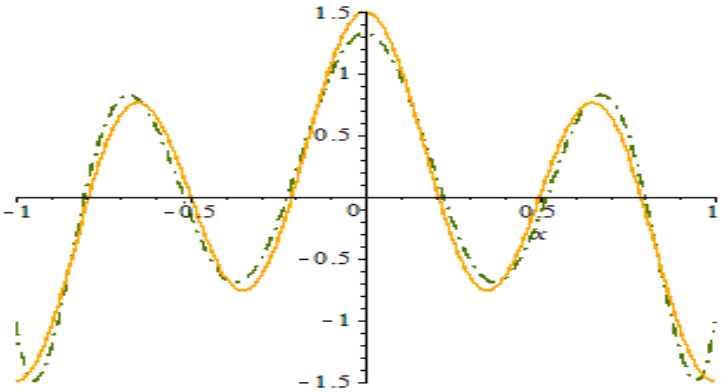

Рис. 4.2

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №6

Проведено розв'язання задачі 4.1 (а) і (б) методами моментів і колокацій. Кроки 0-3 залишаються незмінними як для **<u>методу моментів</u>**, так і для **<u>методу колокацій</u>**, особливо зважаючи на вибір координатних функцій в табл. 4.2.

СЛАР (4.16) методу моментів для пошуку невідомих коефіцієнтів подання (4.14) наближеного розв'язку визначається із умови ортогональності нев'язки до кожної з лінійно незалежних координатних функцій з номераи від 1 до kon. В системі Maple зазначену СЛАР можна утворити в такий спосіб:

```
> for k from 1 to kon do    eq[k] := int(R·u(x)[k], x = a..b) :  od:
```

Метод колокацій передбачає початкове розбиття відрізка $[a;b]$ точками в кількості, що збігається з кількістю координатних функцій. У даних позначеннях – це kon. При цьому, СЛАР утворюється підстановкою точок розбиття до нев'язки. В системі Maple зазначені ідеї можуть бути реалізовані в такий спосіб:

> **for** jk **from** 1 **to** kon **do** $X[jk] := a + \frac{(b-a)}{kon} \cdot jk$: **od**:
  for k **from** 1 **to** kon **do** $eq[k] := subs(x = X[k], R)$: **od**:

В кожному із методів отримуємо систему. Її можна розв'язати засобами Maple так само, як і в попередніх роботах:

> $sys := \{seq(eq[h], \mathrm{h} = 1 .. \mathrm{kon})\}$:
> $var := \{seq(\mathrm{c}[\mathrm{h}], \mathrm{h} = 1 .. \mathrm{kon})\}$:
> $RRR := solve(sys, var) : assign(RRR)$:

Якщо МНК має квадратичне відхилення, яке дозволяє оцінити точність наближеного розв'язку, то методи моментів і колокацій не мають такої величини. Звісно, що квадратичне відхилення можна додатково обчислити, однак частіше на практиці оцінка точності здійснюється порівнянням наближених розв'язків задачі, отриманих різними методами.

Інтегральне рівняння задачі 4.1 (а) має однакові розв'язки за трьома методами (моментів, колокацій і МНК).

Для зручності порівняння випишемо наближені розв'язки інтегрального рівняння задачі 4.1 (б) при застосуванні кожного методу з використанням степеневих координатних функцій:
метод найменших квадратів дав такий наближений розв'язок

$$\cos(9.424777962x) + 0.4994620383 - 2.469088544x^2 + 2.026842117x^4 - 0.6365413758x^6 + 0.08666450858x^8$$

метод моментів –

$$\cos(9.424777962x) + 0.4999823655 - 2.466577446x^2 + 2.022304446x^4 - 0.6460752188x^6 + 0.09042695314x^8$$

метод колокацій –

$$\cos(9.424777962x) + 0.4999026131 - 0.00001612900073x - 2.466903124x^2 + 0.0005740356164x^3 + 2.028340424x^4 - 0.004777796441x^5 - 0.6623019114x^6 + 0.01312581441x^7 + 0.1030915470x^8 - 0.01093817867x^9$$

Коефіцієнти при степеневих функціях степенів від 0 до 8 за трьома методами збігаються до другого знаку після коми, доданок зі степенем 9 наявний лише для методу колокацій і має коефіцієнт, менший за 0.02. Загальна похибка обчислення є незначною для всіх методів при виборі $n = 10$.

Застосування тригонометричних координатних функцій при розв'язанні інтегрального рівняння задачі 4.1 (б) методом моментів, як при $n = 5$, так і при $n = 7$ дає ті самі розв'язки, що і методом найменших квадратів. А метод колокацій при $n = 5$ дає наближений розв'язок із дуже значним відхиленням від відповідних розв'язків іншими методами: $y(x) = -\cos(2\pi x)$. Однак, при $n = 7$ маємо повну збіжність розв'язків за трьома методами.

Деякі висновки.

1. Застосування наближених методів потребує аналізу точності отриманих розв'язків. У випадку МНК замінником оцінки точності може слугувати квадратичне відхилення. Для методів моментів і колокацій такого аналогу ми не маємо, тому можна його обчислити для знайденої функції. На практиці для аналізу збіжності послідовності наближений розв'язків до точного збільшують кількість координатних функцій. Однак, існують випадки, коли при розв'язанні СЛАР з великою кількістю рівнянь і невідомих система Maple може дати хибні результати. Тому потрібно застосовувати різні методи і порівнювати розв'язки. У даному випадку можна запропонувати порівнювати результати, з розв'язками, отриманими за допомогою МНК.

2. Вибір як вигляду координатних функцій, так і їх кількості, залежить від конкретного інтегрального рівняння, а висновки в кожному випадку можуть суттєво відрізнятися!

Питання для самоконтролю з теми 4:

1. Класифікація інтегральних рівнянь.
2. Умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
3. Ітераційний метод послідовних наближень розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Збіжність послідовності наближених розв'язків до точного. Швидкість збіжності МПН.
4. Неітераційний метод найменших квадратів розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
5. Принципи вибору координатних функцій.
6. Реалізація в Maple алгоритму методу послідовних наближень і методу найменших квадратів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду
7. Особливості неітераційних методу колокацій і методу моментів. Вибір координатних функцій.
8. Різні способи реалізації запису систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів лінійної комбінації лінійно незалежних функцій.
9. Реалізація в Maple алгоритму методу колокацій і методу моментів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Аналіз збіжності послідовності наближених розв'язків до точного.