

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ №7 і 8. Метод суперпозиції зведення крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь до задач Коші

§1 Завдання для виконання і варіанти практичних завдань №7 і 8

Нехай дана крайова задача

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \quad (5.43)$$

Диференціальні рівняння звести до задач Коші методами:

практичне завдання №7: методом суперпозиції;

практичне завдання №8: методом стрільби.

Порівняти отримані результати з результатами, отриманими іншими методами (наприклад, чисельний розв'язок засобами Maple)

Таблиця 5.1 *Таблиця варіантів* [Ошибка! Источник ссылки не найден.]

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	-1	2	-3	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2.7
k_2	-4.8	-3.1	2.5	1.7	2	1.2	2	3.2	3	-1.3

Шифр по горизонталі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.5	1.3	2.4	-1	0	1	0	0.8	-4	0
B	0.5	0.7	0	1	-2	0.5	0	0.3	-0.6	2
a	1	-1	-1	0.5	0	2	-1	-0.5	-1	0
b	2	0	1.4	1.5	1	3	0	1.5	1	1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0.1	0.1	0.25	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
$p(x)$	$k_1 x$	$\frac{k_1}{x + k_2}$	$k_1 x + k_2$	$k_2 x$	$k_2 x^2 - k_1$	$k_1 - x$	$k_2 + x^2$	$k_1 x^3$	$k_2 x^3 - k_1$	$x^2 k_1^2$
$q(x)$	$\frac{k_1 x}{x^2 + k_2^2}$	$k_2 x$	$k_1 x^2$	$k_2 x^3 + k_1$	$k_2 - x$	$k_2 + x^3$	$k_2 x$	$k_2 x - k_1$	$k_1 x + k_2$	$\frac{k_2}{x + 1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + k_1^2}}$	$k_2 + x^3$	$\frac{k_2 + x}{x^2 - k_1}$	$\frac{x^2 + k_2}{x}$	$\frac{1}{k_1 x - k_2}$	$\sqrt{x^2 + k_2^2}$	$\frac{k_1 x^2}{k_2 + x}$	$\frac{1}{k_2 x^2 - k_1}$	$k_2 x^2 + k_1 x$	$\frac{k_1 x + k_2}{(k_1 - x)^3}$

h - крок розбиття відрізка $[a, b]$ в методі кінцевих різниць (див. індивідуальне завдання)

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №7

Задача 5.1 Розв'язати крайову задачу (5.42), (5.43) з параметрами

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, B = 0.5,$$

(а) $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 0, \beta_0 = -1, \beta_1 = 0;$

(б) $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 2, \beta_0 = -1, \beta_1 = 0;$

(в) $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 0, \beta_1 = -1.$

Розв'язання. (а) Визначаємо допоміжні параметри один з яких (eq) відповідає лівій частині неоднорідного диференціального рівняння, що підлягатиме розв'язанню:

> $AA := \frac{A}{\alpha_0}; BB := \frac{B}{\beta_0};$

$$AA := 0.2500000000$$

$$BB := -0.5$$

> $eq := \text{diff}(y(x), x^2) + p(x) \cdot \text{diff}(y(x), x) + q(x) \cdot y(x) :$

Реалізуємо **метод суперпозиції**.

Крок 1. Засобами Maple чисельно розв'язуємо задачу Коші №1 (див. (5.12а), (5.12б)) для диференціального рівняння з правою частиною $f(x)$:

> $F1 := \text{dsolve}(\{eq = f(x), y(a) = AA, D(y)(a) = 0\}, \text{numeric}) :$

Система Maple дозволяє знайти значення чисельного розв'язку в будь-якій точці відрізка $[a; b]$, наприклад, на його кінцях:

> $F1(a);$

$$\left[x = 1., y(x) = 0.2500000000000000, \frac{d}{dx} y(x) = 0. \right]$$

> $F1(b);$

$$\left[x = 2., y(x) = 0.807771774509359, \frac{d}{dx} y(x) = 1.54335754908018 \right]$$

Крок 2. Обираємо значення h_1 функції-розв'язку в точці b :

> $h1 := \text{rhs}(F1(b)[2])$

$$h1 := 0.807771774509359$$

Крок 3. Розв'язуємо задачу Коші №2 (див. 5.12в, 5.12г) для диференціального рівняння з нульовою правою частиною:

> $F2 := \text{dsolve}(\{eq, y(a) = 0, D(y)(a) = 1\}, \text{numeric}) :$

Крок 4. Знаходимо значення функції-розв'язку h_2 в точці b :

> $h2 := \text{rhs}(F2(b)[2])$

$$h2 := 2.16447954980673$$

Крок 5. Обчислюємо значення шуканого параметру μ за формулою (5.12д):

$$> \mu := \frac{(BB - h1)}{h2};$$

$$\mu := -0.604196872465776$$

Отже, крайову задачу 5.1 (а) зведено до задачі Коші (5.12е):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \mu.$$

Знайдемо її чисельний розв'язок засобами Maple:

$$> F := dsolve(\{eq = f(x), y(a) = AA, D(y)(a) = \mu\}, numeric);$$

Перевірте самостійно, які значення набуває отриманий розв'язок на кінцях відрізка!

Також знайдемо чисельний розв'язок даної крайової задачі:

$$> KU := \alpha 0 \cdot y(a) + \alpha 1 \cdot D(y)(a) = A, \beta 0 \cdot y(b) + \beta 1 \cdot D(y)(b) = B;$$

$$> FKZ := dsolve(\{eq = f(x), KU\}, numeric);$$

Функція `odeplot` дозволяє побудувати графіки розв'язків `F1` і `FKZ`, а `display` – об'єднати їх в один рисунок. Графічне подання наближеного розв'язку крайової задачі (пунктирна лінія) і остаточної задачі Коші (суцільна лінія) наведено на рис. 5.2.

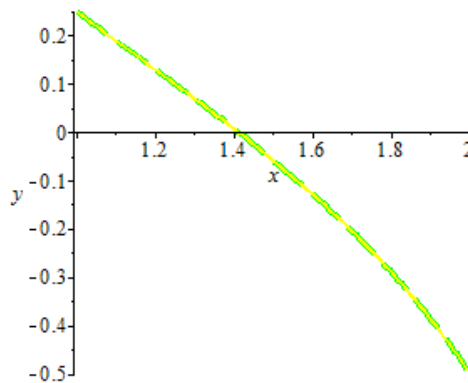


Рис. 5.2

Зауваження. Розв'язки задач Коші №1 і №2 краще знайти програмним кодом методом Рунге-Кутти, а даної крайової задачі – будь-яким із чисельних або наближених методів (методом кінцевих різниць, точковим методом найменших квадратів або ін.). Написання програмних кодів методу Рунге-Кутти буде стимульовано додатковими балами.

(б) В задачах (б) і (в) зупинимося лише на відмінностях, які диктують крайові умови:

1) допоміжні параметри

$$> AA := \frac{A}{\alpha l}; BB := \frac{B}{\beta l};$$

$$AA := 0.2500000000$$

$$BB := -0.5$$

2) розв'язуємо модифіковані задачі Коші №1 і №2 і знаходимо значення чисельних розв'язків в точці b :

$$> F1 := dsolve(\{eq=f(x), y(a)=0, D(y)(a)=AA\}, numeric) :$$

$$> h1 := rhs(F1(b)[2]);$$

$$h1 := 1.08733151368690$$

$$> F2 := dsolve(\{eq, y(a)=1, D(y)(a)=0\}, numeric) :$$

$$> h2 := rhs(F2(b)[2]);$$

$$h2 := 1.04624052578778$$

3) обчислюємо значення параметру μ :

$$> \mu := \frac{(BB - h1)}{h2}$$

$$\mu := -1.51717647573602$$

Отже, крайову задачу 5.1 (б) зведено до задачі Коші:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = \mu, \quad y'(a) = A_A.$$

Зверніть увагу на відмінності в записі задачі Коші (а) і (б)!

Графічне подання наближеного розв'язання крайової задачі (пунктирна лінія) і остаточної задачі Коші (суцільна лінія) наведено на рис. 5.3.

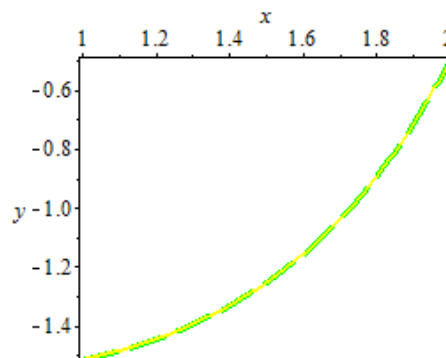


Рис. 5.3

(в) Зупинимось лише на відмінностях:

1) допоміжні параметри

$$> AA := \frac{A}{\alpha l}; BB := \frac{B}{\beta l};$$

$$AA := 0.2500000000$$

$$BB := -0.5$$

2) розв'язуємо задачі Коші №1 і №2 і знаходимо значення похідних чисельних розв'язків в точці b :

> $F1 := dsolve(\{eq = f(x), y(a) = AA, D(y)(a) = 0\}, numeric) :$

> $h1 := rhs(F1(b)[3]);$

$h1 := 1.54335754908018$

> $F2 := dsolve(\{eq, y(a) = 0, D(y)(a) = 1\}, numeric) :$

> $h2 := rhs(F2(b)[3]);$

$h2 := 4.57264001035732$

3) обчислюємо μ :

> $\mu := \frac{(BB - h1)}{h2}$

$\mu := -0.446866043347355$

Отже, крайову задачу 5.1 (в) зведено до задачі Коші:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \mu.$$

Графічне подання наближеного розв'язання крайової задачі (пунктирна лінія) і остаточної задачі Коші (суцільна лінія) наведено на рис. 5.4.

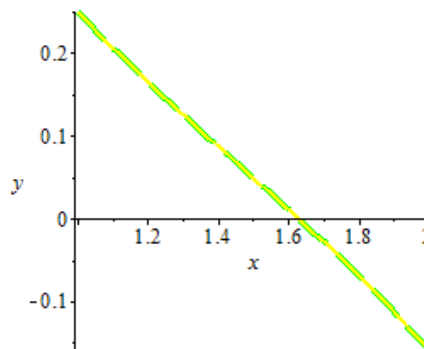


Рис. 5.4

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №8

Методом пристрілки будемо розв'язувати задачу 5.1

У кожному випадку задачі 5.1 (а), (б), (в) вводяться такі самі допоміжні параметри, як і в методі суперпозиції.

(а) Для того, щоб знайти кути пристрілки α_0 і α_1 , при яких розв'язки відповідні їм задачі Коші (5.37) і (5.38) задовольняють умову (5.39), проведемо табуляцію значень $y(b, \alpha) - B_B$ для різних кутів α із діапазону $[-1.5; 1.5]$:

> **for** i **from** -1.5 **to** 1.5 **by** 0.1 **do**
 $alpha0 := i; KU0 := y(a) = AA, D(y)(a) = \tan(alpha0);$
 $F0 := dsolve(\{eq = f(x), KU0\}, numeric) :$
 $print(i, rhs(F0(b)[2]) - BB);$ **od**:

-1.5, -29.2144632266896
 -1.4, -11.2416297797325
 -1.3, -6.48890600238538
 -1.2, -4.25959827343709
 -1.1, -2.94491059790068
 -1.0, -2.06320555759559
 -0.9, -1.41981501188885
 -0.8, -0.920859971231741
 -0.7, -0.515344404526355
 -0.6, -0.173028503794042
 -0.5, 0.125311065382734
 -0.4, 0.392644375650990
 -0.3, 0.638219699929295
 -0.2, 0.869010006487403
 -0.1, 1.09059939569908
 0., 1.30777177450936
 0.1, 1.52494409456395
 0.2, 1.74653346397626
 0.3, 1.97732374820057
 0.4, 2.22289905836303
 0.5, 2.49023232735570
 0.6, 2.78857191746202
 0.7, 3.13088785473440
 0.8, 3.53640358080957
 0.9, 4.03535878290554
 1.0, 4.67874922964050
 1.1, 5.56045398038259
 1.2, 6.87514131577521
 1.3, 9.10444904590501
 1.4, 13.8571733912688
 1.5, 31.8300080082007

Першій колонці відповідають значення кута, другій – різниці $y(b, \alpha) - B_B$.

Отже, зміна знаку значення $y(b, \alpha) - B_B$ має місце при переході від $\alpha_0 = -0.6$ до $\alpha_1 = -0.5$.

Тепер реалізуємо метод половинного ділення для рівняння $y(b, \alpha) - B_B$ на відрізку $[\alpha_0; \alpha_1]$

> $eps := 0.001$:

> **while** $\text{abs}(\text{rhs}(F1(b)[2]) - BB) \geq eps$ **do**

$alpha2 := \frac{(\alpha1 + \alpha0)}{2}$;

$KU0 := y(a) = AA, D(y)(a) = \tan(\alpha0); KU1 := y(a) = AA, D(y)(a) = \tan(\alpha1); KU2 := y(a) = AA, D(y)(a) = \tan(\alpha2);$

$F0 := \text{dsolve}(\{eq - f(x), KU0\}, \text{numeric})$: $F1 := \text{dsolve}(\{eq - f(x), KU1\}, \text{numeric})$:

$F2 := \text{dsolve}(\{eq - f(x), KU2\}, \text{numeric})$:

if $(\text{rhs}(F1(b)[2]) - BB) \cdot (\text{rhs}(F2(b)[2]) - BB) < 0$ **then** $\alpha0 := \alpha2$ **fi**:

$\text{print}(\text{evalf}(\text{abs}(\text{rhs}(F2(b)[2]) - BB)), \text{evalf}(\alpha0), \text{evalf}(\alpha1));$

if $(\text{rhs}(F0(b)[2]) - BB) \cdot (\text{rhs}(F2(b)[2]) - BB) < 0$ **then** $\alpha1 := \alpha2$ **fi**:

$\text{print}(\text{evalf}(\text{abs}(\text{rhs}(F2(b)[2]) - BB)), \text{evalf}(\alpha0), \text{evalf}(\alpha1));$

od:

```

0.0192820383002849, -0.5500000000, -0.5
0.0192820383002849, -0.5500000000, -0.5
0.0540616300294289, -0.5500000000, -0.5
0.0540616300294289, -0.5500000000, -0.5250000000
0.0176630342704856, -0.5500000000, -0.5250000000
0.0176630342704856, -0.5500000000, -0.5375000000
0.000739704411351294, -0.5437500000, -0.5375000000
0.000739704411351294, -0.5437500000, -0.5375000000
0.00847892572190945, -0.5437500000, -0.5375000000
0.00847892572190945, -0.5437500000, -0.5406250000
0.00387394928422480, -0.5437500000, -0.5406250000
0.00387394928422480, -0.5437500000, -0.5421875000
0.00156820998884050, -0.5437500000, -0.5421875000
0.00156820998884050, -0.5437500000, -0.5429687500
0.000414525082631234, -0.5437500000, -0.5429687500
0.000414525082631234, -0.5437500000, -0.5433593750
0.000162521699190066, -0.5435546875, -0.5433593750
0.000162521699190066, -0.5435546875, -0.5433593750

```

Отже, крайову задачу зведено до задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A_a, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha^*.$$

де $\alpha^* = 0.543359750$.

Додатково потрібно знайти чисельний розв'язок даної крайової задачі і побудувати його графіки разом з графіком розв'язку задачі Коші. Результати візуально не відрізняються і відповідають рис. 5.2. Вони також повторюються на рис. 5.5 (суцільна і пунктирна лінії). На рис. 5.5 додатково побудуємо розв'язки задачі Коші для початкових значень кутів $\alpha_0 = -0.6$ і $\alpha_1 = -0.5$. Можна спостерігати, що вони розміщувалися нижче і вище отриманого розв'язку задачі Коші.

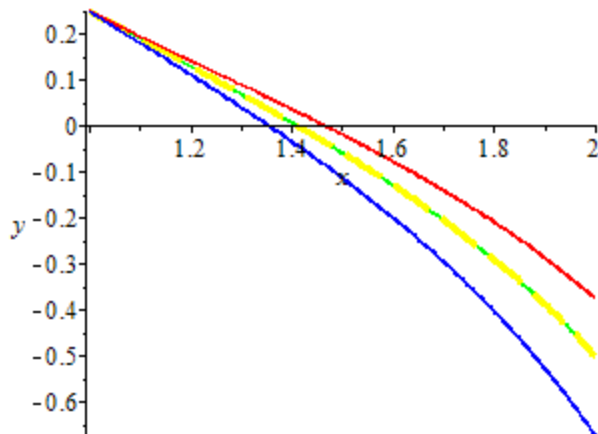


Рис. 5.5

(б) Запропонуємо один із способів розв'язання даної задачі. Оскільки значення функції в точці b є відомим, то пристрілку будемо проводити в точку b .

У даному випадку будемо шукати, на якому відрізку зміни кута має місце чергування знаку значення різниці $y'(a, \alpha) - A_A$ в точці a . Проведемо табуляцію значень кута і $y'(a, \alpha) - A_A$:

```
> for i from -1.5 to 1.5 by 0.1 do
  alpha0 := i; KU0 := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha0);
  F0 := dsolve({eq - f(x), KU0}, numeric) :
  print(i, rhs(F0(a)[3]) - AA); od:
-1.5, -3.86147214857765
-1.4, -1.92302967940220
-1.3, -1.41042945850960
-1.2, -1.16998980108077
-1.1, -1.02819544862981
-1.0, -0.933099938436718
-0.9, -0.863707726953325
-0.8, -0.809893423957404
-0.7, -0.766156947343909
-0.6, -0.729236798764262
-0.5, -0.697059674359197
-0.4, -0.668226718549239
-0.3, -0.641740461418478
-0.2, -0.616848805480116
-0.1, -0.592949417061898
0., -0.569526469952599
0.1, -0.546103577144596
0.2, -0.522204322835559
0.3, -0.497312652234889
0.4, -0.470826372443877
0.5, -0.441993412376673
0.6, -0.409816293193756
0.7, -0.372896155033395
0.8, -0.329159657649768
0.9, -0.275345337896210
1.0, -0.205953081755186
1.1, -0.110857656686424
1.2, 0.0309366497449001
1.3, 0.271376368893798
1.4, 0.783976792389130
1.5, 2.72241945511566
```

Отже, зміна знаку значення $y'(a, \alpha) - A_A$ має місце при переході від $\alpha_0 = 1.1$ до $\alpha_1 = 1.2$.

Метод половинного ділення матиме вигляд:

```
> eps := 0.001 :
```

```

> while abs(rhs(F1(a)[3]) - AA) ≥ eps do
    alpha2 := (alpha1 + alpha0) / 2;
    KU0 := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha0); KU1 := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha1); KU2
    := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha2);
    F0 := dsolve({eq - f(x), KU0}, numeric) : F1 := dsolve({eq - f(x), KU1}, numeric) :
    F2 := dsolve({eq - f(x), KU2}, numeric) :
    if (rhs(F1(a)[3]) - AA) · (rhs(F2(a)[3]) - AA) < 0 then alpha0 := alpha2 fi:
    print(evalf(abs(rhs(F2(a)[3]) - AA)), evalf(alpha0), evalf(alpha1));
    if (rhs(F0(a)[3]) - AA) · (rhs(F2(a)[3]) - AA) < 0 then alpha1 := alpha2 fi:
    print(evalf(abs(rhs(F2(a)[3]) - AA)), evalf(alpha0), evalf(alpha1));
od:

```

```

0.0478880803494740, 1.150000000, 1.2
0.0478880803494740, 1.150000000, 1.2
0.0108342686282351, 1.175000000, 1.2
0.0108342686282351, 1.175000000, 1.2
0.00940373054513044, 1.175000000, 1.2
0.00940373054513044, 1.175000000, 1.187500000
0.000869327022813310, 1.181250000, 1.187500000
0.000869327022813310, 1.181250000, 1.187500000
0.00422775073187076, 1.181250000, 1.187500000
0.00422775073187076, 1.181250000, 1.184375000
0.00166946856340844, 1.181250000, 1.184375000
0.00166946856340844, 1.181250000, 1.182812500
0.000397649800985056, 1.181250000, 1.182812500
0.000397649800985056, 1.181250000, 1.182031250
0.000236442189802039, 1.181640625, 1.182031250
0.000236442189802039, 1.181640625, 1.182031250

```

Щоб реалізувати перехід до задачі Коші, потрібно додатково (!) ще знайти значення μ чисельного розв'язку в точці a , після чого й отримати шукану задачу Коші:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \mu, \quad y'(a) = A_A.$$

Реалізація в системі Maple може бути поданою у вигляді:

```

> mu := rhs(F2(a)[2]);
    KU3 := y(a) = mu, D(y)(a) = AA; F3 := dsolve({eq - f(x), KU3}, numeric) :
    mu := -1.51668742138398
    KU3 := y(1) = -1.51668742138398, D(y)(1) = 0.2500000000

```

Графічного зображення потребують розв'язки для задачі Коші і чисельний розв'язок, отриманий в Maple. Пропонуємо студентів реалізувати це самостійно. На рис. 5.6, окрім зазначених розв'язків (суцільна і пунктирна лінія, які майже зливаються), побудуємо ще й розв'язки задач

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(b) = B_B, \quad y'(b) = \operatorname{tg}(\alpha_s), \quad s = 0, 1.$$

для значень кутів $\alpha_0 = 1.1$ і $\alpha_1 = 1.2$.

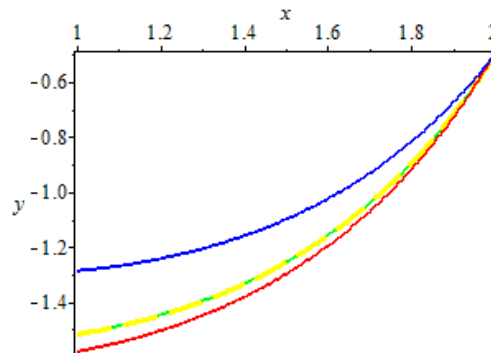


Рис. 5.6

(в) Реалізація в системі Maple алгоритму методу пристрілки для задачі 5.1 (в) незначною мірою відрізняється від задачі 5.1 (а), тому наведемо лише відмінності. Базуються вони на тому, що в даному випадку потрібно добитися того, щоб розв'язок задачі Коші мав в точці b похідну із значенням B_B .

1) при табуляції потрібно оператор `print(i, rhs(F0(b)[2]) - BB);` замінити на оператор `print(i, rhs(F0(b)[3]) - BB);`

2) значення кутів пристрілки, при яких різниця $y'(b, \alpha) - B_B$ змінює знак, дорівнюють $\alpha_0 = -0.5$ і $\alpha_1 = -0.4$;

3) в методі половинного ділення потрібно замінити $Fs(b)[2]$ на $Fs(b)[3]$ ($s=0,1,2$), що і буде відповідати значенням саме похідних розв'язків в точці b , замість значень в цій точці.

При зазначених змінах буде отримано зведення крайової задачі до задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \tan \alpha^*.$$

де $\alpha^* = -0.4202148438$.

Так само, як і у випадках задачі 5.1 (а) і (б), на рис. 5.7 наведемо на одному рисунку відразу чотири графіки для задачі 5.1 (в): розв'язок отриманої задачі Коші (суцільна жирна лінія), чисельний розв'язок даної крайової задачі (пунктирна жирна лінія), розв'язки задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \tan \alpha_s, \quad s = 0, 1,$$

де $\alpha_0 = -0.5$ і $\alpha_1 = -0.4$.

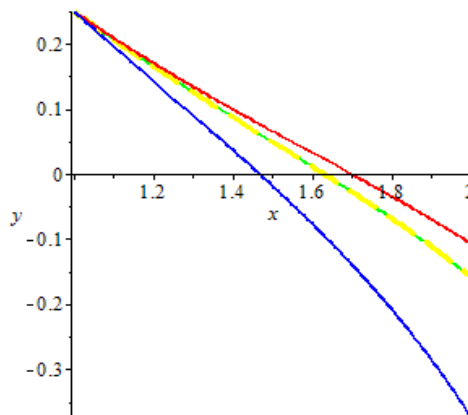


Рис. 5.7

Питання для самоконтролю з теми 5:

1. Неітераційний метод суперпозиції (або метод часткових розв'язків, або метод додаткових функцій) зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до задач Коші.
2. Метод суперпозиції для диференціальних рівнянь третього порядку.
3. Метод суперпозиції триточнової задачі для диференціального рівняння третього порядку.
4. Ітераційний метод стрільби зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до задач Коші: основні ідеї та алгоритм розв'язання. Реалізація алгоритму в Maple.