

Тема 2 АПРОКСИМУВАННЯ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ ФУНКЦІЯМИ ДВОХ ЗМІННИХ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. ПОБУДОВА ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА.

§1 Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних методом найменших квадратів. Постановка задачі

Розглянемо сукупність точок в просторі $\{(x_k, y_k, z_k)\}_{k=1}^n$, де $z_k = f(x_k, y_k), k = \overline{1, n}$. Тут функція двох змінної $f(x, y)$ визначає емпіричні дані.

Потрібно знайти емпіричну функцію

$$z = \tilde{f}(x, y, a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (2.1)$$

що апроксимує задану множину точок і визначається невідомими параметрами $a_1, a_2, \dots, a_m$, при цьому їх кількість $m \ll n$. (Якщо $m = n$, то функція (1) є інтерполюючою)

Відхилення в кожній точці визначається як

$$\varepsilon_k = \left| \tilde{f}(x_k, y_k, a_1, a_2, \dots, a_m) - z_k \right| = \left| \tilde{f}(x_k, y_k, a_1, a_2, \dots, a_m) - f(x_k, y_k) \right|, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Формула $\varepsilon = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k)^2$ задає *квадратичне відхилення*. А метод, що дозволяє знайти апроксимуючу функцію (1), яка відповідає мінімальному значенню квадратичного відхилення, є *методом найменших квадратів (МНК)*.

§2 Трипараметричне точкове квадратичне апроксимування функції двох змінної лінійною функцією

Розглянемо сукупність точок в просторі $\{(x_k, y_k, z_k)\}_{k=0}^n$, де $z_k = f(x_k, y_k), k = \overline{0, n}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$z = P(x, y, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 y. \quad (2.1a)$$

Квадратичне відхилення визначається формулою

$$Q(a_0, a_1, a_2) = \sum_{k=0}^n (P(x_k, y_k, a_0, a_1, a_2) - z_k)^2 = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k)^2. \quad (2.2)$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Знайдемо критичну точку функції ТРЬОХ змінних Q :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k) \cdot 1 = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k) \cdot x_k = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k) \cdot y_k = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отриману систему можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} a_0 \cdot (n+1) + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n x_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n y_k = \sum_{k=0}^n z_k; \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^2 + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n x_k y_k = \sum_{k=0}^n x_k z_k; \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n y_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n x_k y_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n (y_k)^2 = \sum_{k=0}^n y_k z_k. \end{cases} \quad (2.4)$$

Уведемо матриці [Ошибка! Источник ссылки не найден.]

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Система (2.4) може бути поданою у матричному вигляді в наступний спосіб:

$$M^t M A = M^t Z, \quad (2.6)$$

а її розв'язок –

$$A = (M^t M)^{-1} M^t Z. \quad (2.7)$$

Якщо точки попарно нерівні, то визначник добутку матриць, $M^t M$, не дорівнює нулю. Це означає існування єдиного розв'язку СЛАР (2.4). До того ж, унаслідок невід'ємності квадратичного відхилення, цей розв'язок може відповідати лише точці локального мінімуму функції Q .

§3 Побудова виробничої функції Кобба-Дугласа

Розглянемо [Ошибка! Источник ссылки не найден.] так звану виробничу функцію, яка являє собою математичну модель, що виражає залежність обсягу виробленої продукції від обсягу матеріальних і трудових витрат. В мікроекономіці найчастіше використовують двофакторні функції типу $Z = F(x, y)$, однією з яких є функція Кобба-Дугласа. На базі статистичних даних в оброблювальній промисловості США Charles Cobb і Paul Douglas в 1928 р. отримали залежність вигляду:

$$q = a x^{\alpha} y^{\beta} . \quad (2.8)$$

Тут a, α, β – додатні константи, де a – технологічний коефіцієнт, α – коефіцієнт еластичності по трудовим ресурсам, β – коефіцієнт еластичності по вкладеному капіталу, q – обсяг виробленої продукції, x, y – обсяг використаних ресурсів(труда і капіталу).

Якщо сума коефіцієнтів еластичності (показників степеня функції (2.8)) $\alpha + \beta$ дорівнює 1, тоді функція є однорідною, тобто вона вказує на постійну віддачу при зміні обсягів виробництва. Якщо $\alpha + \beta > 1$, то функція виражає зростаючу віддачу, а якщо $\alpha + \beta < 1$ – спадну.

Нехай відома статистична інформація $\{(q_i, x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$. Потрібно визначити параметри виробничої функції a, α, β , які найкраще апроксимують статистичні дані.

Логарифмуємо обидві частини функції Кобба-Дугласа (2.8):

$$\ln q = \alpha \ln x + \beta \ln y . \quad (2.9)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln a, \quad A_1 = \alpha, \quad A_2 = \beta, \\ Z_i &= \ln q_i, \quad X_i = \ln x_i, \quad Y_i = \ln y_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отримаємо сукупність точок в просторі $\{(X_i, Y_i, Z_i)\}_{i=0}^N$, де $Z_i = f(X_i, Y_i), i = \overline{0, N}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$Z = P(X, Y, A_0, A_1, A_2) = A_0 + A_1 X + A_2 Y . \quad (2.11)$$

Після застосування МНК буде отримано точку мінімуму (A_0, A_1, A_2) квадратичного відхилення, звідки можна знайти параметри функції Кобба-Дугласа:

$$a = e^{A_0}, \quad \alpha = A_1, \quad \beta = A_2 . \quad (2.12)$$

§1 Індивідуальне завдання 1

1.1 Умова індивідуального завдання 1

За показниками роботи торговельної організації за п'ять років знайти параметри a, α, β виробничої функції Кобба-Дугласа $q = a x^{\alpha} y^{\beta}$, яка найкращим чином описує табличні дані [Ошибка! Источник ссылки не найден.]. Реалізувати метод найменших квадратів засобами MS Excel та за допомогою пакету комп'ютерної алгебри, наприклад, Maple.

Варіант 1

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. m^2
2015	33325.916	10.328	178.290
2016	7456.660	11.049	457.400
2017	5972.977	12.779	311.712
2018	9307.309	11.969	565.618
2019	7935.696	12.021	463.173

Варіант 2

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	1895.135	10.054	325.503
2016	1418.926	11.733	236.428
2017	1657.533	11.598	285.322
2018	1133.045	10.564	197.178
2019	2308.818	14.025	363.235

Варіант 3

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	5611.238	10.585	360.045
2016	3939.846	11.191	218.389
2017	5801.396	11.679	342.347
2018	8050.955	10.978	549.398
2019	5432.970	12.108	304.544

Варіант 4

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	860.077	10.587	259.183
2016	1230.323	12.626	391.441
2017	1163.283	11.969	380.064
2018	1135.407	12.614	338.585
2019	1221.822	10.583	491.550

Варіант 5

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	3644.123	10.463	250.034
2016	5753.890	10.890	448.471
2017	6665.193	13.515	443.004
2018	7083.088	14.284	455.768
2019	6196.282	12.651	428.020

Варіант 6

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	127.267	10.607	226.443
2016	130.757	11.697	211.804
2017	183.183	12.669	389.869
2018	135.821	11.234	242.107
2019	165.273	13.621	286.813

Варіант 7

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. m^2
2015	998.413	10.671	396.205
2016	921.302	11.109	331.514
2017	990.338	13.511	316.146
2018	1135.277	11.996	447.902
2019	972.091	11.530	352.690

Варіант 8

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. m^2
2015	657.705	10.117	386.040
2016	596.661	11.442	298.210
2017	820.542	11.128	490.277
2018	569.862	11.617	274.937
2019	929.283	13.302	497.280

Варіант 9

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. m^2
2015	761.852	9.993	299.346
2016	782.683	12.584	220.896
2017	886.545	13.542	265.456
2018	976.940	10.704	442.624
2019	1007.238	11.059	448.203

Варіант 10

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. m^2
2015	1352.722	10.634	187.040
2016	2037.230	11.773	333.737
2017	1769.832	13.199	224.608
2018	2841.208	13.711	487.258
2019	2247.151	13.280	337.760

1.2 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 1

Задача 6.1 В табл. 6.1 наведено статистична інформація за ряд років

Таблиця 6.1 [Ошибка! Источник ссылки не найден.]

Рік	Товарообіг, млн. грн. q_i	Чисельність робітників, тис. осіб x_i	Площа торг. зала, тис. m^2 y_i
2015	340.205	10.397	284.141
2016	339.733	11.730	223.956
2017	374.022	11.436	298.007
2018	408.768	10.950	403.415
2019	587.608	14.382	578.106

Розв'язання. Реалізація в системі Maple. Вводимо дані

- > $Xx := [10.397, 11.730, 11.436, 10.950, 14.382] :$
- > $Yy := [284.141, 223.956, 298.007, 403.415, 578.106] :$
- > $Zz := [340.205, 339.733, 374.022, 408.768, 587.608] :$

Відповідно до формул (2.10) логарифмуємо дані:

- > **for** i **from** 1 **to** 5 **do** $X[i] := \ln(Xx[i]); Y[i] := \ln(Yy[i]); Z[i] := \ln(Zz[i]) :$ **od**:

Далі діємо відповідно до алгоритму МНК апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних (2.11), реалізованому в пп. 2.4.2. Проводимо мінімізацію квадратичного відхилення

- > $Q := \text{sum}((A[0] + A[1] \cdot X[j] + A[2] \cdot Y[j] - Z[j])^2, j = 1..5) :$

В результаті отримаємо невідомі допоміжні коефіцієнти

$$A_0 = 1.671551660, A_1 = 0.7932613894, A_2 = 0.4071932581$$

Їм відповідає квадратичне відхилення

- > $Q;$

$$1.10^{-7}$$

Згідно з формулою (2.12) знаходимо параметри функції Кобба-Дугласа $q = a x^\alpha y^\beta$:

- > $AA := \exp(A[0]); \alpha := A[1]; \beta := A[2];$

$$AA := 5.320416874$$

$$\alpha := 0.7932613894$$

$$\beta := 0.4071932581$$

Сума $\alpha + \beta > 1$, тому виробнича функція Кобба-Дугласа виражає зростаючу віддачу.

За бажанням можете навести графічне зображення функції Кобба-Дугласа і емпіричних даних так, як на рис. 6.1.

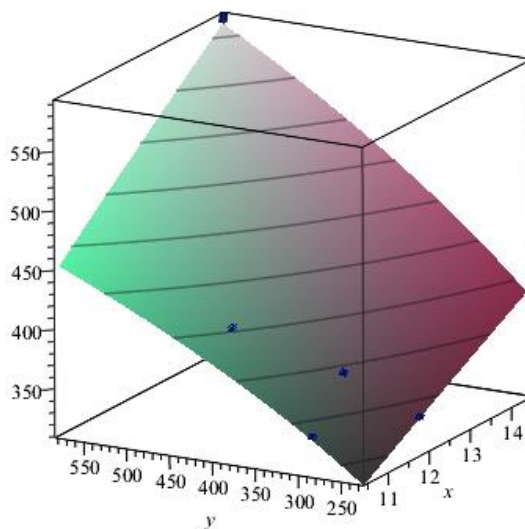


Рис. 6.1

Реалізацію в MS Excel наведено на рис. 6.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1			X	Y	Z											
2			10.397	284.14	340.205											
3			11.73	223.96	339.733											
4			11.436	298.01	374.022											
5			10.95	403.42	408.768											
6			14.382	578.11	587.608											
7																
8																
9		1	X	Y	Z		1	1	1	1	1					
10		1	2.3415	5.6495	5.82954838	Wt=	2.3415	2.4621	2.4368	2.3933	2.666					
11		1	2.4621	5.4114	5.82816001		5.6495	5.4114	5.6971	6	6.3598					
12		1	2.4368	5.6971	5.92431462											
13	W=	1	2.3933	6	6.01314776		5	12.3	29.118			101.83	-33.569	-3.2717		
14		1	2.666	6.3598	6.37606006	Wt*W=	12.3	30.318	71.75	(Wt*W)^(-1)=		-33.569	29.49	-6.6929		
15							29.118	71.75	170.1			-3.2717	-6.6929	3.389		
16																
17							4.7452	1.4744	1.3919	1.8589	-8.4703					
18						(Wt*W)^(-1)*Wt=	-2.3275	2.823	0.1625	-3.1451	2.4871					
19							0.2027	-1.4113	-0.2733	1.0437	0.4383					
20																
21							1.6716	A2		A=	0.5138					
22						(Wt*W)^(-1)*Wt*Z=	0.7933	A1		alpha=	0.7933					
23							0.4072	A0		beta=	0.4072					
24																
25						=SG\$21+SG\$22*B28+SG\$23*C28										
26																
27																
28																
29																
30																
31																
32																
33																
34																
35																
36																

Рис. 6.2

Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 1:

1. Ідея методу найменших квадратів апроксимації емпіричних даних функцією двох змінних.
2. Виробнича функція Кобба-Дугласа. Економічні поняття, що характеризують виробничу функцію Кобба-Дугласа;
3. Алгоритм пошуку функції Кобба-Дугласа методом найменших квадратів.