

§3 Індивідуальне завдання 3

3.1 Умова індивідуального завдання 3

Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, перевіривши попередньо умови існування єдиного розв'язку.

Інтегральні рівняння до розв'язання наведено в табл. 4.1.

Порівняти результати, отримані різними методами.

3.2 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 3

Розв'яжемо два інтегральні рівняння задачі 4.1 і одне додаткове

$$(a) \quad y(t) - \frac{5}{2} \int_0^1 (1 - 2x^2) t y(t) dt = x \sin \pi x;$$

$$(б) \quad y(t) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos 3\pi t y(t) dt = \cos 3\pi x;$$

$$(в) \quad y(t) - \frac{5}{2} \int_0^1 (1 - 2x) t y(t) dt = 1 - \frac{x}{2}.$$

(a), (б) Для перших двох рівнянь вже перевіримо умови існування єдиного розв'язку, які одночасно визначають умови можливості застосування методу послідовних наближень (МПН) для розв'язання даних рівнянь.

Кожне із інтегральних рівнянь індивідуальних варіантів можливо розв'язати за допомогою МПН без використання технічних засобів. Однак, зустрічаються випадки, коли зручніше застосувати засоби систем комп'ютерної алгебри (наприклад, Maple). Тому продемонструємо, як можна провести обчислення за допомогою Maple.

Для рівняння задачі 4.1 (a) матимемо:

```
> Y(x)[0] := 0;
for k from 1 to 5 do
  z(x) := Y(x)[k-1];
  Y(x)[k] := lambda·int(K(x,t)·subs(x=t,z(x)), t=a..b) + f(x);
print(k, Y(x)[k]); od;
```

$$\begin{aligned} & Y(x)_0 := 0 \\ & 1, x \sin(\pi x) \\ & 2, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x) \\ & 3, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x) \\ & 4, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x) \\ & 5, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x) \end{aligned}$$

Для задачі 4.1 (б) –

```

> Y(x)[0] := 0;
  for k from 1 to 5 do
    z(x) := Y(x)[k - 1];
    Y(x)[k] := lambda · int(K(x, t) · subs(x = t, z(x)), t = a .. b) + f(x);
  print(k, Y(x)[k]); od;

```

```

Y(x)0 := 0
1, cos(3 π x)
2,  $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3 \pi x)$ 
3,  $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3 \pi x)$ 
4,  $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3 \pi x)$ 
5,  $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3 \pi x)$ 

```

В обох випадках маємо стаціонарну послідовність функцій. Отже, задача 4.1 (а) має точний розв'язок $y(x) = -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin \pi x$, а задача

4.1 (б) – $y(x) = \frac{1}{2} \cos \pi x + \cos 3\pi x$.

У даному випадку рис. 4.1 і 4.2 відображають порівняння результатів застосування наближених методів з точним розв'язком, який і дав метод послідовних наближень для даних рівнянь.

(в) Розглянемо рівняння (в). Перевірка умови існування єдиного розв'язку дає такі результати:

```

> M := maximize(abs(K(x, t)), x = a .. b, t = a .. b) :
  conditionC := evalf( abs( lambda) -  $\frac{1}{M \cdot (b - a)}$  );
                                     conditionC := 1.5000000000
> B := sqrt( int( int( (K(x, t))2, x = a .. b), t = a .. b) ) :
> conditionL := evalf( abs( lambda) -  $\frac{1}{B}$  );
                                     conditionL := -0.5000000000

```

Отже, умова виконується в просторі $L_2[a; b]$, що означає можливість застосування методу послідовних наближень. МНП має високу швидкість збіжності (див. підрозділ 4.2). Як правило, достатньо знайти до 10 ітерацій для досягнення високої точності. Крім того, додатково ще й обчислимо квадратичне відхилення. В результаті отримаємо:

```

> Y(x)[0] := 0;
  for k from 1 to 10 do
    z(x) := Y(x)[k - 1] :
    Y(x)[k] := lambda·int(K(x, t)·subs(x = t, z(x)), t = a..b) + f(x) :
    Q := evalf(int((z(x) - lambda·int(K(x, t)·subs(x = t, Y(x)[k]), t = a..b) - f(x))^2, x = a
      ..b)) :
    print(k, Y(x)[k], Q); od:

```

$$\begin{aligned}
 & Y(x)_0 := 0 \\
 & 1, 1 - \frac{1}{2}x, 0.9537037037 \\
 & 2, -\frac{13}{6}x + \frac{11}{6}, 0.07876800412 \\
 & 3, \frac{107}{72} - \frac{53}{36}x, 0.01367500071 \\
 & 4, \frac{1409}{864} - \frac{761}{432}x, 0.002374132068 \\
 & 5, \frac{16283}{10368} - \frac{8507}{5184}x, 0.0004121757063 \\
 & 6, \frac{198521}{124416} - \frac{105209}{62208}x, 0.00007155828235 \\
 & 7, \frac{2366627}{1492992} - \frac{1246883}{746496}x, 0.00001242331291 \\
 & 8, \frac{28477649}{17915904} - \frac{15040721}{8957952}x, 0.000002156825158 \\
 & 9, \frac{341341163}{214990848} - \frac{180098027}{107495424}x, 3.744488121 \cdot 10^{-7} \\
 & 10, \frac{4098047081}{2579890176} - \frac{2163129449}{1289945088}x, 6.500847432 \cdot 10^{-8}
 \end{aligned}$$

Наведемо наближення з номерами 7 і 10, у яких коефіцієнти мають вигляд десяткових дробів:

```

> evalf(Y(x)[7]); evalf(Y(x)[10]);
1.585157188 - 1.670314375x
1.588457958 - 1.676915916x

```

Отже, можна вважати, що $y(x) \approx y_{10}(x)$. Звертаємо увагу, що в деяких випадках можна знайти закономірність в послідовності ітераційних функцій, щоб знайти граничну функцію. У даному випадку така задача не ставиться.

Застосування методів найменших квадратів, моментів і колокацій при $n=3$ дає однакові наближені розв'язки

$$y_{МНК}(x) = y_{ММ}(x) = y_{МК}(x) = 1.588235294 - 1.676470588x$$

з квадратичним відхиленням $Q = 6.500847432 \cdot 10^{-8}$. Візуально графіки отриманих розв'язків за чотирма методами майже не відрізняються.

Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 3:

1. Сутність методу послідовних наближень.
2. Умови збіжності МПН.
3. Швидкість збіжності МПН.