

§2 Індивідуальне завдання 2

2.1 Метод скінченних різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (6.1)$$
$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $\alpha_i, \beta_i, A, B \in \mathbb{R}$ – сталі, що задовольняють нерівності $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин і побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + i h \quad (i=1, \dots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b,$$

де $h = \frac{b-a}{n}$. Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні

(6.1) похідні замінимо скінченними різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$. Випишемо розклади за формулою Маклорена до h^3 включно. Потім додамо і віднімемо розклади, отримаємо:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3) \\ y_{i-1} &= y_i - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3) \end{aligned}$$
$$\overline{y_{i+1} - y_i = 2h y'(x_i) + o(h^2) \Rightarrow y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + o(h)}$$
$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + h^2 y''(x_i) + o(h^3) \Rightarrow y''(x_i) = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + o(h)$$

Підставляючи отримані подання похідних в рівняння (6.1), одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (6.2)$$

Тепер розглянемо крайові умови. Обчислимо значення похідної в лівій точці відрізка $x = a$ через скінченні різниці «вперед», а в правій $x = b$ – через різниці «назад»:

$$x = a = x_0$$

$$y_1 = y_0 + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + o(h^2) \rightarrow 4y_1 = 4y_0 + 4h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$
$$y_2 = y_0 + 2h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$

$$\overline{4y_1 - y_2 = 3y_0 + 2h y'(x_0) + o(h^2)}$$

$$y'(x_0) = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} + o(h)$$

$$x = b = x_n$$

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= y_n - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + o(h^2) \rightarrow 4y_{n-1} = 4y_n - 4hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + o(h^2) \\ y_{n-2} &= y_n - 2hy'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + o(h^2) \\ \hline 4y_{n-1} - y_{n-2} &= 3y_n - 2hy'(x_n) + o(h^2) \\ y'(x_n) &= -\frac{4y_{n-1} - y_{n-2} - 3y_n}{2h} + o(h) \end{aligned}$$

Отримане дозволяє записати крайові умови у вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A; \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (6.3)$$

Таким чином одержимо систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв'язуючи систему, можна знайти значення функції $y(x)$ у вузлах розбиття.

2.2 Умова індивідуального завдання 2

1. Розв'язати крайові задачі практичних завдань №3, №7 методом скінченних різниць.
2. Порівняти результати.

2.3 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 2

Розв'яжемо задачу 5.1 (б) методом скінченних різниць.

$$\begin{aligned} p(x) &= -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, B = 0.5, \\ (б) \quad \alpha_0 &= 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0; \end{aligned}$$

Розв'язання. Реалізуємо алгоритм методу в системі Maple.

1. Щоб знайти кількість проміжків розбиття N відрізка $[a; b]$, знаючи крок h , можна застосувати оператор $N := \text{trunc}((b - a) / h)$;
2. Визначаємо вузли розбиття:

> for i from 0 to N do $X[i] := a + h \cdot i$: od:

3. Утворюємо рівняння (6.2), що відповідають даному звичайному диференціальному рівнянню:

> **for** i **from** 1 **to** $N - 1$ **do**
 $p_{ii} := \text{subs}(x = X[i], p(x)) :$
 $q_i := \text{subs}(x = X[i], q(x)) :$
 $f_{ii} := \text{subs}(x = X[i], f(x)) :$
 $eq[i] := \text{evalf}\left(\frac{(y[i+1] - 2 \cdot y[i] + y[i-1]))}{h^2} + \frac{p_{ii} \cdot (y[i+1] - y[i-1])}{(2 \cdot h)} + q_i \cdot y[i] - f_{ii}\right);$ **od**;

4. Доповнюємо систему рівняннями (6.3) що відповідають крайовим умовам:

> $eq[0] := \alpha_0 \cdot y[0] + \frac{\alpha_1 \cdot (-3 \cdot y[0] + 4 \cdot y[1] - y[2])}{(2 \cdot h)} - A :$
 $eq[N] := \beta_0 \cdot y[N] + \frac{\beta_1 \cdot (3 \cdot y[N] - 4 \cdot y[N-1] + y[N-2])}{(2 \cdot h)} - B :$

5. Таким чином утворено систему із $N + 1$ рівняння $\{seq(eq[j], j = 0..N)\}$ відносно такої ж кількості змінних $\{seq(y[j], j = 0..N)\}$. СЛАР може бути розв'язаною за допомогою функціонала `solve`.
6. Для порівняння потрібно побудувати графіки розв'язків, отриманих в роботі 7 (суцільна лінія на рис. 6.2), а також методом скінченних різниць (точкова лінія, побудована за точками, що відповідають вузлам).

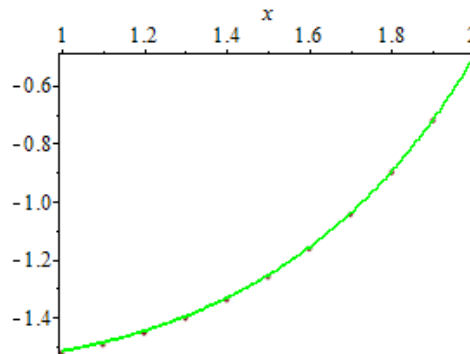


Рис. 6.2

Висновок: спостерігаємо високу узгодженість результатів.

Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 2:

1. Сутність методу скінченних різниць.
2. Чим метод скінченних різниць відрізняється від наближених методів, що вивчалися в цьому курсі?