Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

П.Г. Стєганцева, М.О. Гречнєва, Н.І.-В. Манько,
О.Г. Спиця, Є.В. Стєганцев

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика)», «Середня освіта (Інформатика)», «Математика», «Комп'ютерна математика», «Комп'ютерне моделювання», «Інформаційні системи та технології»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол від

Запоріжжя
2021

УДК: 519.854(075.8)
Д482

Стєганцева П.Г., Гречнєва М.О., Манько Н.І.-В., Спиця О.Г., Стєганцев Є.В. Дискретна математика : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика)», «Середня освіта (Інформатика)», «Математика», «Комп’ютерна математика», «Комп’ютерне моделювання», «Інформаційні системи та технології». Запоріжжя : ЗНУ, 2021. 177 с.

Навчальний посібник укладено відповідно до робочої програми нормативної дисципліни «Дискретна математика». Він містить матеріал, необхідний для розуміння і свідомого засвоєння основних понять, теорем, конструкцій всіх подальших курсів. Викладення теоретичного матеріалу та прикладів розв’язання задач супроводжується методичними рекомендаціями, корисними зауваженнями. В посібнику наведено достатню кількість задач з детальними та обґрунтованими розв’язаннями, що дозволить студентам набути навички застосовування загальних методів і, зокрема, методів дискретної математики. До кожної теми подано задачі, які можуть бути використані на практичних заняттях і для самостійної роботи.

Видання призначене для студентів спеціальності 014 Середня освіта предметних спеціальностей 014.04 Середня освіта (Математика) і 014.09 Середня освіта (Інформатика), спеціальності 111 Математика, спеціальності 113 Прикладна математика, спеціальності 126 Інформаційні системи та технології денної та заочної форм навчання. Викладачі можуть використати матеріал посібника для забезпечення самостійної та індивідуальної робіт.

Рецензент

С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, доцент кафедри фундаментальної математики

Відповідальний за випуск
І.В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

Вступ………………………………………………………………………… 5
1 Елементи теорії множин та відношення.. 7
1.1 Поняття множини та підмножини…………………………………….. 7
1.2 Операції над множинами. Алгебра множин…………………………...... 9
Приклади розв’язування задач……………………………………………..... 11
Завдання для самостійного розв’язання……………………………………… 14
2 Елементи логіки висловлювань та предикати…………………………….. 16
2.1 Прості і складні висловлювання. Логічні закони……………………… 16
2.2 Види теорем. Методи доведення теорем. Необхідні і достатні умови… 18
2.3 Предикати. Квантори………………………………………………… 20
Приклади розв’язування задач…………………………………………… 24
Завдання для самостійного розв’язання……………………………………… 29
3 Відношення……………………………………………………………….. 31
3.1 Декартовий добуток множин. Означення відношення………………….. 31
3.2 Бінарні відношення та їх властивості…………………………………….. 33
3.3 Відношення еквівалентності. Розбиття множини……………………….. 34
3.4 Бінарні відношення порядку…………………………………………… 38
3.5 Функції. Еквівалентні множини. Потужність множини………………… 40
Приклади розв’язування задач……………………………………………... 44
Завдання для самостійного розв’язання……………………………………… 50
4 Основи комбінаторного аналізу……………………………………………… 53
4.1 Предмет комбінаторики. Основні правила комбінаторики……………. 53
4.2 Упорядковані і неупорядковані підмножини без повторень даної скінченої множини…………………………………………………………... 54
4.3 Упорядковані і неупорядковані підмножини з повтореннями даної скінченої множини…………………………………………………………... 56
4.4 Поліноміальна формула. Біном Ньютона…………………………….... 58
Приклади розв’язування задач……………………………………………... 61
Завдання для самостійного розв’язання……………………………………… 66
5 Методи комбінаторного аналізу…….…..............………………………… 69
5.1 Теорема про включення та виключення………………………………… 69
5.2 Числа Стірлінга другого роду…………………………………………….. 71
5.3 Рекурентні послідовності ті рекурентні співвідношення……………….. 72
5.4 Твірні функції……………………………………………………………… 74
5.5 Застосування методів комбінаторики до комбінаторних підрахунків…. 77
5.6 Деякі методи та прийоми розв’язання комбінаторних задач…………… 79
Приклади розв’язування задач……………………………………………... 84
Завдання для самостійного розв’язання……………………………………… 90
6 Основи теорії графів………………………………………………………...… 93
6.1 Означення графу. Види графів……………………………………….. 93
6.2 Дякі властивості графів………………………………………………… 100
6.3 Ізоморфізм графів. Інваріанти графа відносно ізоморфізмі…………….. 101

6.4 Дерева. Остовні дерева зв'язного графа………………………………… 107
6.5 Центр дерева. Алгоритм установлення ізоморфізму дерев…………….. 110
6.6 Планарність і укладання графів……………………………………….... 112
6.7 Обходи графів. Ейлерові графи. Гамільтонові графи…………………… 114
6.8 Розфарбування графів. Проблема чотирьох фарб……………………… 118
Приклади розв'язування задач…………………………………………….... 121
Завдання для самостійного розв'язання…………………………………… 126
7 Оптимізаційні задачі на графах……………………………………………. 128
7.1 Алгоритми Краскала і Прими……………………………………….…..... 128
7.2 Алгоритм Дейкстри……………………………………………………….... 129
7.3 Алгоритм знаходження максимального потоку в мережі……………… 131
Приклади розв'язування задач…………………………………………….... 135
Завдання для самостійного розв'язання…………………………………… 138
Додаткові розділи дискретної математики……………………………….. 140
Розділ 1 Алгебраїчні структури…………………………………………… 140
Розділ 2 Означення та приклади алгебри Буля. Булеві функції……......... 147
Розділ 3 Основи теорії чисел……………………………………………….. 157
Додаток 1 Основні закони операцій над множинами……………………… 172
Додаток 2 Основні логічні закони…………………………………………… 173
Додаток 3 Основні тотожності з біноміальними коефіцієнтами…………….. 174
Використана література……………………………………………………... 175
Рекомендована література…………………………………………………….. 176

ВСТУП

Дисципліна «Дискретна математика» викладається студентам спеціальності 014 середня освіта предметної спеціальності 014.04 середня освіта (Математика) на першому курсі. В рамках цієї дисципліни студенти знайомляться з логічними основами загальних методів доведення, з методами комбінаторного аналізу, з основними видами задач на графах, з булевими функціями, з апаратом для дослідження правильності міркувань.

Зміст і структура курсу дозволяють ознайомити студентів з максимально широким колом понять дискретної математики, сформувати достатній термінологічний запас, необхідний для самостійного вивчення спеціальної математичної літератури. Серед завдань курсу є формування у студентів розуміння важливості детального аналізу доведень теорем і обґрунтування розв'язань задач. Важливою задачею курсу є ознайомлення студентів з важливими алгоритмами, зокрема, алгоритмами теорії графів, теорії булевих функцій.

Дисципліна «Дискретна математика» має виключне значення для майбутнього педагога, її зміст та методи є невід'ємною частиною фахової підготовки викладача математики. Поняття і методи дискретної математики застосовуються при викладанні фундаментальних університетських курсів для майбутніх математиків і фахівців з прикладної математики, є інструментом подачі та обробки інформації. Саме завдяки потребам комп'ютерної галузі дискретна математика інтенсивно розвивається.

Метою та основними **завданнями** вивчення дисципліни «Дискретна математика» є:

- Послідовне введення в обчислення висловлень і предикатів;
- Вивчення основ комбінаторного аналізу;
- Ознайомлення з основними алгоритмами теорії графів;

- Розвиток навичок формалізації та описання дискретних математичних об’єктів.

Лекційний матеріал курсу, активна участь у практичних заняттях та виконання завдань для самостійної роботи забезпечать набуття таких компетентностей: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях, шукати та узагальнювати інформацію з різних джерел, проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.

1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1 Поняття множини та підмножини

Теорію множин створив Г. Кантор у XIX столітті.

Поняття множини є основним (або неозначуваним). Під множиною розуміють таку сукупність об'єктів, що про кожний об’єкт можна однозначно сказати належить він множині чи ні. У цьому випадку говорять, що множина задана коректно.

Множини позначають великими буквами алфавіту, наприклад, латинського: $A, B, C, \ldots$, а елементи множини – малими буквами: $a, b, c, \ldots$. Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A, а запис $a \notin A$ – що не належить.

Усі множини діляться на скінченні та нескінченні, впорядковані та невпорядковані. Будемо користуватись двома основними способами задання множини:

1) перерахуванням елементів;

2) заданням однієї або кількох характеристичних властивостей: $A = \{x : P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)\}$ або $A = \{x \mid P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)\}$.

Приклади.

1) Нехай A – множина перших десяти натуральних чисел (задана коректно). Перелічимо всі елементи цієї множини: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Характеристичною властивістю елементів цієї множини є те, що всі вони не більші за 10, тому її можна задати й другим способом: $A = \{x \in N \mid \quad x \le 10\}$. Ця множина скінченна.

2) Нехай відомо, що B - це сукупність десяти натуральних чисел. Очевидно, ми не зможемо з’ясувати, чи належить B будь-яке вибране натуральне число (B задана некоректно).

3) Множина C складається із усіх непарних натуральних чисел, які без залишку діляться на 2 (задана коректно). Але у цій множині немає жодного елемента. Цей факт записують у такий спосіб: $C = \varnothing$.

Некоректність задання множини пов'язана із протиріччями, які виникають при перевірці елементів на належність до множини. З історії математики відомі логічні парадокси (про сільського перукаря, про множину всіх підмножин, що не є елементами самих себе, …), виникнення яких пов’язане саме з некоректністю задання множини.

Означення. Дві невпорядковані *множини* A та B називаються *рівними*, якщо вони складаються з однакових елементів. Пишуть $A = B$.

Приклади.

1) Множини $A' = \{1,3,5,7,9,2,4,6,8,10\}$ й $A'' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ рівні;

2) $A' = (1,3,5,7,9,2,4,6,8,10)$ і $A'' = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$ – різні впорядковані множини (тут вважаємо, що порядок встановлюється за допомогою знака <, більш детально про впорядкованість мова буде йти в темі «Бінарні відношення»).

Означення. Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо для кожного $a \in A$ виконується $a \in B$. Позначається $A \subseteq B$. Якщо $A \subseteq B$ й $A \neq B$, то A називається *власною підмножиною* множини B. Позначається $A \subset B$.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,4\}$, $B = \{1,4,2\}$, $C = \{1,2\}$. Тут $A = B$, можна також написати $A \subseteq B$. Для множини C маємо $C \subset A$ або $C \subset B$.

Для будь-якої множини A прийнято вважати, що $\varnothing \subseteq A$.

Теорема 1.1 Мають місце такі властивості:

1) $A \subseteq A$,

2) якщо $A \subseteq B$ та $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$,

3) $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Зауваження. Потрібно розрізняти знаки $\in$ (належить) і $\subseteq$ (підмножина). Наприклад, твердження $1 \in \{1,2,3\}, \{1\} \in \{\{1\}, 2, \{3\}\}$, $\{\{1\}\} \subset \{\{1\},2,\{3\}\}$ є вірними, а твердження $1 \in \{\{1\},\{2\}\}$ невірне.

1.2 Операції над множинами. Алгебра множин

Для даної задачі множина U називається *універсальною*, якщо вона містить усі елементи, що зустрічаються в цій задачі.

Означення. Множина $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \ \ або \ \ x \in B\}$ називається *об'єднанням множин* A та B.

Означення. Множина $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \quad i \quad x \in B\}$ називається *перетином множин* A та B.

Означення. *Різницею множин* A та B називається множина $A \backslash B = \{x \mid x \in A \quad i \quad x \notin B\}$. Множина $\overline{A} = U \setminus A$ називається *доповненням множини* A до універсальної.

Зауваження. З останнього означення випливає, що коли $a \notin A$, то $a \in \overline{A}$. Тому за означенням перетину множин для різниці множин отримаємо рівність

$$A \backslash B = A \bigcap \overline{B}\,.$$

Означення. *Симетричною різницею* множин A та B називається множина $A \Delta B$, що складається з елементів, які належать тільки одній із множин, тобто $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ або

$$A \Delta B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (B \bigcap \overline{A}).$$

Так як всі введені операції виражаються через три операції - доповнення, перетин, об'єднання, то будемо називати їх основними операціями. Саме в такій послідовності слід виконувати основні операції. При необхідності змінити цей порядок користуються дужками.

Означення. *Булеаном множини* A називається множина, що складається з усіх підмножин множини A. Булеан множини A позначають символом $\beta(A)$ або $P(A)$.

Приклад. Для множини $A = \{a, b, c\}$ булеаном є множина

$\beta(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},A\}$.

Означення. *Алгеброю множин* називається булеан універсальної множини з уведеними на ньому операціями доповнення множини, перетин множин, об’єднання множин.

Найпростішим **прикладом** алгебри множин є двоелементний булеан $\{\varnothing, J\}$ одноелементної множини $J=\{a\}$.

Операціям алгебри множин притаманні цілий ряд властивостей, які називають законами алгебри множин (Додаток 1). Закони алгебри множин доводяться з використанням властивості 3) з теореми 1.1 (іноді це називають аналітичним способом доведення). В деяких випадках достатньо навести ілюстративне доведення за допомогою діаграм Венна.

За допомогою законів алгебри множин операції перетину й об'єднання множин можна поширити на будь-яке скінченне число множин:

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k=\bigcup_{i=1}^{k}A_i\ ,\ A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k=\bigcap_{i=1}^{k}A_i\ .$$

Питання для самоконтролю

1. *Поняття впорядкованої та невпорядкованої множин.*
2. *Поняття про корректність задання множини.*
3. *Способи задання множини.*
4. *Особливості використання символів* $\in$, $\subset$, $\subseteq$.
5. *Означення операцій над множинами.*
6. *Правило двостороннього включення.*
7. *Означення булеана множини.*
8. *Поняття потужності скінченної множини.*
9. *Основна теорема про скінченні множини.*
10. *Основні закони алгебри множин.*

Приклади розв’язування задач

Задача 1. Задати множину P дійсних розв'язків рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$:

а) перерахуванням елементів;

б) за допомогою характеристичної властивості.

Розв'язання. Дане квадратне рівняння має два корені $x_1 = 1$ й $x_2 = 2$.

Тому а) $P = \{1,2\}$, б) $P = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

Задача 2. Знайти потужність множини P розв'язків рівняння $2cos(x-1) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Розв'язання. Звернемо увагу на те, що права частина рівняння $2\cos(x-1) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ є сумою взаємно обернених додатних чисел, тому не менша 2 за властивістю $\forall a > 0 \; a + \frac{1}{a} \geq 2$, а ліва частина цього рівняння приймає значення з відрізка $[-2,2]$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі двох рівнянь $\begin{cases} 2cos(x-1) = 2, \\ x^2 + \frac{1}{x^2} = 2. \end{cases}$ Оскільки $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$ й із двох розв'язків останнього рівняння тільки $x = 1$ задовольняє першому рівнянню системи, то, $P = \{1\}$, а значить її потужність дорівнює 1.

Задача 3. Перелічити елементи множин:

1) $P = \{x \in R \mid x = 3^n - 1, x \leq 50, n \in N\}$, 2) $P = \{x \in Z \mid -3 \leq x + 5 < 6\}$.

Відповідь. 1) $P = \{2, 8, 26\}$, 2) $P = \{-8, -7, -6 - 5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

Задача 4. Чи вірно, що $A \subseteq B$, якщо $A = \{x \in Z : x^2 = 9\}$, $B = \{x \in Z : (x-3)(x+3) \geq 0\}$?

Розв'язання. Очевидно, що $A = \{-3, 3\}$. Розв’язавши нерівність $(x-3)(x+3) \geq 0$ на множині цілих чисел, отримаємо

$B = \{\ldots,-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,\ldots\}$. Отже, $A \subseteq B$.

Задача 5. Навести приклад таких множин A, B, C, для яких виконуються співвідношення $A \in B, B \in C, A \in C$.

Розв'язання. $A = \{1\}, B = \{\{1\},2\}, C = \{\{\{1\},2\},3,\{1\},2\}$.

Задача 6. Побудувати булеан множини: а) $C = \{x \in N : x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0\}$, б) $A = \{(x,y) : x \in N, y \in N, x + y = 3\}$.

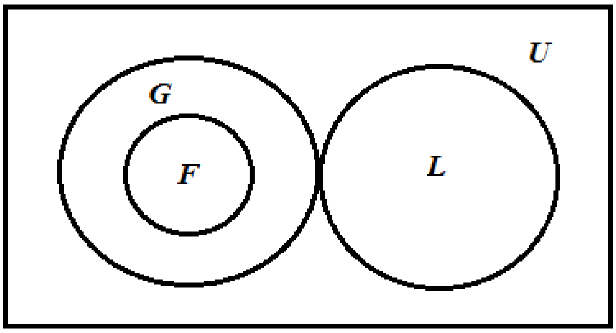
Розв'язання. а) Розкладемо ліву частину рівняння $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ на множники способом групування: $(x^3 - x) + (3x - 3) = 0$, $x(x^2 - 1) + 3(x - 1) = 0$, $x(x-1)(x+1) + 3(x-1) = 0$, $(x-1)(x^2 + x + 3) = 0$. Воно має єдиний натуральний корінь $x = 1$, отже, $C = \{1\}$. Отже, булеан цієї множини двоелементний: $\beta(C) = \{\varnothing, \{1\}\}$; б) Зверніть увагу, що елементами множини *A* є впорядковані пари натуральних чисел.

Задача 7. Чи існують підмножини *A*, *B* і *C* універсальної множини U, для яких одночасно мали б місце такі співвідношення: $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $A \cap B \setminus C = \varnothing$?

Розв'язання. З першої умови випливає, що *A* і *B* перетинаються, з чого стає зрозумілим, що обидві множини не порожні. Третя умова стверджує, що $A \cap B \subseteq C$, значить і *C* не порожня. Отже, з одного боку, $A \cap B$ є підмножиною множини *C*, а з другої умови – $A \cap C$ є порожньою множиною. Отримали суперечність. Тому множин, що задовольняють усім наведеним умовам, не існує.

Задача 8. Нехай *F, G, L* – такі підмножини множини *U*, що $F \subseteq G$, $G \cap L \subseteq F$, $L \cap F = \varnothing$. Чи існують множини *F, G, L,* які задовольняють зазначеній сукупності умов?

Розв'язання. Оскільки $G \cap L \subseteq F$ і $L \cap F = \varnothing$, то $G \cap L = \varnothing$. З іншого боку, якщо $F \subseteq G$, $G \cap L \subseteq F$, то виконуються всі умови задачі, і відповідно існують множини *F, G, L*, які їм задовольняють.



Задача 9. Перетворити, використовуючи закони алгебри множин $\overline{\left(\overline{A}\cup B\cup C\right)}\cap\left(A\cap\left(B\cup\overline{C}\right)\right)\cap\overline{B}$.

Розв'язання.

$$\overline{\left(\overline{A}\cup B\cup C\right)}\cap\left(A\cap\left(B\cup\overline{C}\right)\right)\cap\overline{B}=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cap\left(A\cap B\cup A\cap\overline{C}\right)\cap\overline{B}=$$

$$=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cap\left(A\cap B\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{C}\cap\overline{B}\right)=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cap\left(A\cap\overline{C}\cap\overline{B}\right)=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}.$$

Задача 10. Дано множини A та B такі, що $A\cap B=\varnothing$. Знайти $A\setminus B$ та $B\setminus A$.

Розв'язання. Згідно з означенням різниці і з урахуванням умови $A\cap B=\varnothing$ отримаємо $A\setminus B=A$ та $B\setminus A=B$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Які з чисел 3,4,5 належать множині $A=\{x \in N: log_5(x^2-5)>1\}$?

2.Чи є множина $A=\{(1;1),(1;2)\}$ підмножиною множини $B=\left\{(x,y): x\in Z, y\in N, y<3, \frac{x-3}{y}\in Q\right\}$?

3. Навести приклад таких множин A,B,C, для яких виконуються співвідношення: 1) $A\in B, B\in C$; 2) $A\in B, A\subseteq C$; 3) $A\in B, B\notin C, A\subseteq C$.

4. Зобразити на числовій прямій елементи множини:

а) $\left\{x\in R: \exists y\in R \quad x=\frac{y+1}{y^2+1}\right\}$;

б) $\{a\in R: x\in R \quad 3x^2+2ax+a<0\}$;

в) $P=\left\{x\in Z: \frac{x+5}{3}\in(0,1)\right\}$.

5. Записати N та Z за допомогою характеристичної властивості, використовуючи множини $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ та $B=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

6. Побудувати булеан множини:

а) $D=\{x\in Z: x^4-81=0\}$;

б) $B=\{(x,y): x\in Z, y\in Z, y\le 3, x^2-y<-1\}$.

7. Довести рівності, користуючись кругами Ейлера: 1) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$, 2) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

8. Для довільної множини X знайти $X\cup\overline{X}$, $X\cap\overline{X}$, $X\setminus\overline{X}$.

9. Множина A складається з точок $M(x,y)$ площини, для яких $|x|\le 1$ і $|y|\le 1$, множина B – з точок, для яких $x^2+y^2\le 1$, а множина C – з точок, для яких $x>1$. Універсальна множина – множина всіх точок площини. Зобразити на координатній площині множину $A\cap B\cap\overline{C}$.

10. Нехай А – множина всіх прямокутних трикутників на площині, В – множина всіх рівносторонніх трикутників, а універсальна множина – множина

всіх трикутників на площині. Визначити, які трикутники містяться в наступних множинах:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $\overline{A} \cap B$, г) $A \cap \overline{B}$, д) $\overline{A} \cup B$, е) $A \cup \overline{B}$.

11. Розв'язати рівняння відносно невідомого X в залежності від значень множин – параметрів *A, B*:

а) $A \cap X = A$, б) $A \cap X = B$, в) $A \cup X = A$, г) $A \cup X = B$, д) $A \times X = X \times A$.

12. Користуючись властивостями операцій над множинами, довести, що:

а) $A \cup (\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = A \cup B$;

б) $\overline{\overline{A} \cup B} \cup B = A \cup B$;

в) $\overline{\overline{A} \cup B} \cup \overline{B} \cup A = \overline{B} \cup A$;

г) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

13. Зі 100 студентів 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 8 – англійську та німецьку, 10 – англійську та французьку, 5 – німецьку та французьку й 3 студенти вивчають всі три мови. Скільки студентів не вивчають жодної мови; скільки вивчають тільки французьку мову?

14*. Серед математиків кожен сьомий – філософ, а серед філософів кожен дев'ятий – математик. Кого більше – філософів чи математиків?

15*. Дано 1985 множин, кожна з яких складається з 45 елементів, причому об'єднання будь-яких двох множин містить рівно 89 елементів. Скільки елементів містить об'єднання всіх цих 1985 множин?

2 ЕЛЕМЕНТИ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ ТА ПРЕДИКАТІВ

2.1 Прості і складені висловлювання. Логічні закони

Під висловлюванням розуміють розповідне речення, про яке можна однозначно сказати: істинне воно чи хибне. Висловлювання позначають буквами латинського алфавіту $A, B, C\ldots$. Якщо висловлювання A істинне, то пишуть $A=1$, якщо хибне, то $A=0$.

Приклади. 1) $A: 2\cdot 2=4$, отже, $A=1$; 2) $B: 2\cdot 2=5$, отже, $B=0$.

Висловлювання, подібні до A і B з прикладів, є простими або елементарними висловлюваннями, з них за допомогою логічних операцій отримують складені висловлювання.

Символи й терміни логічних операцій (список дано за ознакою пріоритетності):

1) «$\bar{\ }$» – заперечення;
2) «$\wedge$» або «$\cdot$» – кон'юнкція;
3) «$\vee$» – диз`юнкція;
4) «$\Rightarrow$» або «$\rightarrow$» – імплікація;
5) «$\Leftrightarrow$» або «$\leftrightarrow$» – еквіваленція.

Якщо треба змінити порядок виконання логічних операцій, то користуються дужками.

Означення логічних операцій дамо за допомогою таблиць істинності:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \cdot B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Означення. *Формулою* в логіці висловлювань називається:

а) будь-яке елементарне висловлювання;

б) якщо A і B – формули, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ – також є формулами;

в) інших формул немає.

Означення. Дві формули A і B називаються *рівносильними*, якщо вони приймають однакові значення на всіх наборах значень істинності елементарних висловлювань, що входять у них. Позначають $A = B$.

Очевидно, що таблиці істинності рівносильних формул співпадають.

Приклади. 1) Формули $A = X \Rightarrow Y$ і $B = \overline{X} \vee Y$ рівносильні.

2) Формули $F = A \wedge B \vee C$ і $F' = A \wedge (B \vee C)$ нерівносильні.

Означення. Формула A в логіці висловлювань називається *тотожно істинною* (або *тавтологією*, або *логічним законом*), якщо вона приймає значення 1 (істина) при всіх допустимих наборах значень істинності простих висловлювань, які входять до неї.

Приклади. Формули 1) $A \vee \overline{A}$, 2) $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ – тотожно істинні.

Теорема 1.2. Формули A і B рівносильні (тобто $A = B$) тоді і тільки тоді, коли формула $A \Leftrightarrow B$ є тотожно істинною.

Зауваження. Попередня теорема дозволяє запис $A = B$ називати логічним законом. Наприклад, доведена вище рівносильність формул $A = X \Rightarrow Y$ і $B = \overline{X} \vee Y$ дає наступний логічний закон: $X \Rightarrow Y = \overline{X} \vee Y$.

Приклади. 1) Формула $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$ є логічним законом.

2) Формула $a \Leftrightarrow b = \left(\overline{a} \vee b\right) \wedge \left(a \vee \overline{b}\right)$ є логічним законом.

Зауважимо, що доведення логічних законів зводиться до побудови таблиць істинності. Іншим способом доведення логічних законів є застосування основних логічних законів (Додаток 2) або раніше доведених логічних законів. Наприклад, для формули $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$ доведення виконується наступним чином:

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y) \vee (\bar{y} \vee x) = \bar{x} \vee y \vee \bar{y} \vee x = 1.$$

Означення. Формула A логіки висловлювань називається *тотожно хибною* (або *суперечливою*), якщо вона приймає значення 0 на кожному з наборів значень простих висловлювань, які входять до неї.

Очевидно, що коли A тотожно істинна формула, то $\overline{A}$ – тотожно хибна формула, і навпаки.

Означення. Формула A називається *нейтральною*, якщо вона ні тотожно істинна, ні тотожно хибна.

Наприклад, формула $a \Rightarrow \overline{b \wedge a}$ є нейтральною.

Означення. *Заперечення*, яке відноситься до елементарного висловлювання, називається *простим*, у противному випадку заперечення називається *складним*.

Означення. Формула логіки висловлювань називається *зведеною*, якщо вона побудована тільки за допомогою операцій диз’юнкції, кон’юнкції і простого заперечення.

Теорема 2.1 Кожну формулу логіки висловлювань можна замінити рівносильною їй зведеною формулою.

2.2 Види теорем. Методи доведення теорем. Необхідні й достатні умови

Розглянемо імплікацію $A \Rightarrow B$, де A та B – деякі висловлювання. Якщо з істинності A випливає істинність B, то B називають логічним наслідком A. Далі будемо розглядати тільки такий випадок.

Будь-яку теорему можна представити у вигляді імплікації $A \Rightarrow B$.

Приклади.

1) Сума кутів трикутника дорівнює π.

Позначимо через A висловлювання: «α,β,γ – кути трикутника», а через B висловлювання: «$\alpha+\beta+\gamma=\pi$». Тоді теорему можна сформулювати так: якщо α,β,γ – кути трикутника, то $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

2) Не існує найбільшого простого числа.

Позначимо: через A висловлювання «p – просте число», через B - «існує просте число p', більше числа p». Тоді теорему можна сформулювати так: якщо p – просте число, то існує більше за p просте число p'.

Зауваження. Висловлювання A в імплікації $A \Rightarrow B$ може бути складним. Наприклад, розглянемо теорему: «Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні або попарно паралельні, то такий чотирикутник є паралелограмом». Позначимо $A_1:$ протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, $A_2:$ протилежні сторони чотирикутника попарно паралельні, $B:$ чотирикутник є паралелограмом. Тоді теорема запишеться так: $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$.

Означення. Нехай дано теорему $A \Rightarrow B$. Будемо називати її *прямою теоремою*. Теорема $B \Rightarrow A$ називається *оберненою* до даної теореми, теорема $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – *протилежною*, теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – *оберненою до протилежної* (або *протилежною до оберненої*).

Теорема 2.2 $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Ця теорема є логічним обґрунтуванням *методу доведення від супротивного*. Наведемо й інші схеми доведення від супротивного, які випливають з попередньої теореми:

1) $(A \Rightarrow B) = \left(\overline{A \Rightarrow B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right)$,

2) $(A \Rightarrow B) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right)$,

3) $(A \Rightarrow B) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow B\right)$.

Означення. Якщо має місце теорема $A \Rightarrow B$, то умова B називається *необхідною* для A, а умова A *достатньою* для B. Якщо ж поряд з теоремою $A \Rightarrow B$ має місце і обернена теорема $B \Rightarrow A$, то кожна з умов A та B буде одночасно *необхідною і достатньою* для іншої. У цьому випадку пишуть $A \Leftrightarrow B$ і називають теорему критерієм або ознакою та при її формулюванні використовують зв'язку «необхідно і достатньо» або «тоді і тільки тоді», або «якщо і тільки якщо».

Приклади. 1) В теоремі «Якщо трикутник рівнобедрений (A), то кути при його основі рівні між собою (B)» умова A є достатньою для умови B, а умова B – необхідною для A. Зауважимо, що має місце теорема «Якщо в трикутнику два кути рівні між собою (B), то цей трикутник рівнобедрений (A)», тобто теорема, обернена до даної. Отже, кожна з умов A та B є необхідною та достатньою для іншої.

2) В теоремі «Якщо число a ділиться на чотири (A), то a є парним (B)» умова A є достатньою для B, а B – необхідною для A. Обернена до цієї теорема не має місця.

В задачах та теоремах дискретної математики часто використовують *доведення перебором можливих випадків.* Наведемо для демонстрації цього методу доведення такої теореми.

Теорема 2.3 Нехай n - ціле число. Тоді $n^2 \geq 0$.

Доведення. Оскільки n - ціле число, то воно або додатне, або від'ємне, або дорівнює 0. Якщо n додатне, то $n^2 \geq 0$. Якщо n від'ємне, то $n = -m$ для деякого додатного цілого числа m. Тому $n^2 = (-m) \cdot (-m) = m^2$ знову є додатним. Якщо $n = 0$, то $n^2 = 0$, так. Отже, при будь-якому цілому n маємо $n^2 \geq 0$.

2.3 Предикати. Квантори

Означення. Твердження, яке залежить від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і перетворюється у висловлювання в результаті заміни всіх змінних їхніми значеннями з деякої множини M, називається n *– місним предикатом, заданим на множині* M. Позначається $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. Підмножина впорядкованих наборів з n елементів множини M, при яких предикат перетворюється в істинне висловлювання, називається *областю істинності предиката*. Позначається $I(P)$.

Приклади.

1) $M = R, P(x): "x < 5"$ – одномісний предикат на множині дійсних чисел. $P(1): "1 < 5"$ – істинне висловлювання, $P(7): "7 < 5"$ хибне висловлювання. Областю істинності предиката є множина $I(P(x)) = \{x \in R : x \in (-\infty; 5)\}$.

2) $M = R, P(x, y): "y = sin\, x"$ – двомісний предикат на множині дійсних чисел. $P(0,0)$: $"0 = sin\, 0"$ – істинне висловлювання, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $"\frac{1}{2} = sin \frac{1}{2}"$ – хибне висловлювання. Областю істинності предиката є множина $\mathrm{I}(P(x, y)) = \{(x, y) : y = \sin x\}$.

3) $M = N, P(x, y): "x \vdots y"$ – двомісний предикат на множині натуральних чисел. $P(2,1): "2 \vdots 1"$ – істинне висловлювання, $P(2,3): "2 \vdots 3"$ – хибне висловлювання.

4) $P(x, y, z): "x + y + 2z = 1"$ – тримісний предикат, заданий на множині цілих чисел.

Зауваження. Якщо зафіксувати одну зі змінних в n – місному предикаті, то одержимо $(n-1)$ – місний предикат.

Приклад. $P(x, y): "x < y"$ – двомісний предикат, заданий на множині дійсних чисел. Покладемо $y = 5$, тоді $P(x,5) = P(x): "x < 5"$ – одномісний предикат.

Так як значення предикатів є висловлюваннями, то над ними можна виконувати ті ж логічні операції, що і над висловлюваннями. Наприклад, якщо $P(x)$ та $Q(x)$ – одномісні предикати, то $P(x) \vee Q(x)$ – диз'юнкція, $P(x) \wedge Q(x)$ –

кон’юнкція цих предикатів, а $\overline{P(x)}$ – заперечення предиката $P(x)$.

Приклади.

1) Запереченням предиката $P(x):"\, x < 5"$, заданого на множині дійсних чисел, є предикат $\overline{P(x)}:"\, x \geq 5"$.

2) Кон’юнкцією предикатів $P(x):"\, x < 3"$ і $Q(x):"\, x \vdots 2"$, заданих на множині N, є предикат $P(x) \wedge Q(x)"\, x < 3 \wedge x \vdots 2"$.

Логічним операціям над предикатами відповідають операції над множинами, що є їхніми областями істинності. Наприклад, область істинності кон’юнкції предикатів дорівнює перетину областей істинності цих предикатів. У попередньому прикладі маємо $I(P(x) \wedge Q(x)) = I(P(x)) \cap I(Q(x)) = = \{1,2\} \cap \{x \in N \mid x \vdots 2\} = \{2\}$.

Крім зазначених логічних операцій над предикатами, використовується ще операція приписування кванторів до предиката, яку називають *зв'язуванням змінних* або *квантифікацією*. Найчастіше використовують квантори двох видів: *квантор загальності* (позначається символом $\forall$. Читається «для всіх…», «для кожного…», «для будь-якого…» або «кожний…», «будь-який…»), *квантор існування* (позначається символом $\exists$. Читається: «існує…» або «знайдеться…»).

Ми вже знаємо, що із предиката від n змінних можна одержати предикат від $n-1$ змінної, якщо зафіксувати одну зі змінних. Є й інший спосіб – приписати квантор. Наприклад, із предиката $P(x,y)$ від двох змінних одержуємо предикат $(\forall x \in M)\, P(x,y)$ від однієї змінної y, із предиката $P(x)$ від однієї змінної одержуємо висловлювання $(\exists x)\, P(x)$.

Побудова заперечень математичних тверджень, що містять квантори, відбувається за наступними правилами:

$$\overline{(\forall x) P(x)} = (\exists x)\overline{P(x)}, \quad \overline{(\exists x) P(x)} = (\forall x)\overline{P(x)}.$$

Приклади.

1) Запереченням твердження «Кожне натуральне число – парне» є

твердження «Існують натуральні числа, які не є парними».

2) Для твердження «$\left(\forall x \in N\right)\left(\exists y \in N\right) x \vdots y$» заперечення має вигляд «$\left(\exists x \in N\right)\left(\forall y \in N\right) \overline{x \vdots y}$».

Питання для самоконтролю

1. *Означення та приклади висловлювань.*
2. *Предикати. Приклади.*
3. *Висловлювання, що містять квантори.*
4. *Означення операцій над висловлюваннями.*
5. *Властивості операцій над висловлюваннями.*
6. *Побудова заперечення висловлювання, що містить квантори. Приклади.*
7. *Закони алгебри логіки.*
8. *Поняття теореми. Форми запису теореми.*
9. *Види теорем. Приклади прямих, обернених теорем.*
10. *Логічне обґрунтування методу доведення «від супротивного».*

Приклади розв’язування задач

Задача 1. Чи вірні висловлювання:

1) множина $A=\{x \in I : x^2+1 \in Q\}$ є порожньою;

2) множина $A=\{x \in N : x^2=9\}$ складається з одного елемента;

3) булеан множини $A=\{x \in Z : x^2=9\}$ складається з 4 елементів?

Розв'язання. 1) Покладемо $x=\sqrt{2} \in I$, тоді $x^2+1=\left(\sqrt{2}\right)^2+1=3 \in Q$. Отже, множина A не порожня. Не складно довести, що кількість її елементів нескінченна. Висловлювання хибне.

2) Дійсно, коренями рівняння $x^2=9$ є два числа ± 3, але елементами множини A є тільки натуральні числа. Отже, $A=\{3\}$.

3) Вірно, оскільки $A=\{-3,3\}$, тоді $P(A)=\{\{-3\},\{3\},\{-3,3\},\varnothing\}$.

Задача 2. Довести логічні закони: а) $A \Rightarrow B=\overline{A} \vee B$, б) $\overline{A \Rightarrow B}=A \wedge \overline{B}$.

Розв'язання. а) Доведення полягає в складанні таблиці істинності.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	**1**	1	**1**
0	1	**1**	1	**1**
1	0	**0**	0	**0**
1	1	**1**	0	**1**

Третій та п’ятий стовпці таблиці однакові, тому формула є логічним законом.

Аналогічне доведення для формули б).

Задача 3. Довести рівність $(A \setminus B) \setminus C=(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Доведення.

$(\forall a)\ a \in (A \setminus B) \setminus C \ \Rightarrow\ a \in (A \setminus B) \wedge a \notin C \ \Rightarrow\ (a \in A \wedge a \notin B) \wedge a \notin C \Rightarrow$

$\Rightarrow (a \in A \wedge a \notin C) \wedge a \notin B \Rightarrow a \in A \setminus C \wedge a \notin B \setminus C \Rightarrow a \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Значить $(A \setminus B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$**.**

Нехай тепер $a \in (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$. Тоді $a \in (A \backslash C) \wedge a \notin (B \backslash C)$, звідки $a \in A \wedge a \notin C \wedge a \notin B$. З цього випливає $a \in A \setminus B \wedge a \notin C \Rightarrow a \in (A \setminus B) \setminus C$. **Доведено, що** $(\mathrm{A} \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$**.**

Рівність множин випливає з третьої властивості відношення $\subseteq$.

Задача 4. Довести рівності: а) $(A \bigcup B) \backslash B = A \backslash B$,

б) $(A \setminus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \setminus (B \bigcap C)$.

Доведення.

а) $(\forall a)\ a \in (A \bigcup B) \backslash B \Rightarrow a \in (A \bigcup B) \wedge a \notin B \Rightarrow (a \in A \vee a \in B) \wedge a \notin \mathrm{B}$.

Далі скористаємось логічним законом $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, одержимо

$(a \in A \wedge a \notin B) \vee (a \in B \wedge a \notin B) \Rightarrow a \in A \backslash B \vee a \in \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in (A \setminus B) \bigcup \varnothing \Rightarrow a \in (A \setminus B)$. Доведено включення $(A \bigcup B) \backslash B \subseteq A \backslash B$.

Нехай тепер $a \in (A \backslash B)$. Тоді $a \in A \wedge a \notin B \Rightarrow a \in A \bigcup B \wedge a \notin B \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in (A \bigcup B) \backslash B$, тобто $A \backslash B \subseteq (A \bigcup B) \backslash B$. Рівність а) доведено.

б) довести самостійно.

Задача 5. Довести теорему: $A \backslash B = \varnothing \Leftrightarrow A \bigcap B = A$.

Доведення. Доведемо пряму теорему $A \backslash B = \varnothing \Rightarrow A \bigcap B = A$:

$$(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing) \Rightarrow (\forall a \quad a \in \mathrm{A} \Rightarrow a \in \mathrm{B}) \Rightarrow (A \subseteq B) \Rightarrow (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}).$$

Обернено, $(A \bigcap B = A) \Rightarrow (\forall a \quad a \in A \Rightarrow a \in B) \Rightarrow (A \setminus B = \varnothing)$. Доведено.

Задача 6. Відомо, що множини C і D такі, що $\overline{C} \bigcap D = \varnothing$. Знайти $C \bigcap D$.

Розв'язання.

$\overline{C} \bigcap D = \varnothing \Rightarrow (U \backslash C) \bigcap D = \varnothing \Rightarrow (U \bigcap D) \backslash (C \bigcap D) = \varnothing \Rightarrow D \backslash (C \bigcap D) = \varnothing$.

Використовуючи попередню задачу, одержимо $D \bigcap (C \bigcap D) = D \Rightarrow C \bigcap D = D$.

Задача 7. Довести, що формула $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ є тотожно істинною**.**

Доведення. Дійсно,

$$\begin{gathered}(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A} = \overline{(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}} \vee \overline{A} = \overline{A \Rightarrow B} \vee B \vee \overline{A} = A \wedge \overline{B} \vee \left(B \vee \overline{A}\right) = \\ = \left(B \vee \overline{A} \vee A\right)\left(B \vee \overline{A} \vee \overline{B}\right) = 1\end{gathered}.$$

Задача 8. Використати формулу з попередньої задачі для доведення теореми: $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Доведення. Доведемо пряму теорему. За умовою $A \subseteq B$, тобто $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Приймемо ще до уваги такі рівносильності: $(\forall x)\, x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$, $(\forall x)\, x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{B}$. Уведемо позначення для потрібних нам тверджень: A для $x \in A$, B для $x \in B$, тоді для $x \notin A$ так само як і для $x \in \overline{A}$ матимемо позначення $\overline{A}$, для $x \in \overline{B}$ - $\overline{B}$.

Розглянемо будь-який $x \in \overline{B}$, тобто твердження $\overline{B}$. Умову теореми можна подати у вигляді імплікації $A \Rightarrow B$. Тоді ми повинні з коньюнкції $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}$ отримати як наслідок висловлювання $\overline{A}$. Саме цей факт було доведено в попередній задачі. Обернена теорема доводиться аналогічно.

Задача 9. Дано теорему: «В рівних трикутниках навпроти рівних кутів лежать рівні сторони». Сформулювати обернену теорему.

(*Вказівка*. Переформулювати теорему у вигляді: «Якщо два трикутники рівні (*A*), то з рівності двох кутів цих трикутників (*B*) випливає рівність протилежних до них сторін». Тоді символічний запис теореми має вигляд $A \to (B \to C)$. Показати, що ця формула рівносильна формулі $B \to (A \to C)$ або формулі $A \wedge B \to C$. Для кожного з цих варіантів сформулювати обернену теорему.

Задача 10. Дано означення об'єднання та перетину довільної кількості множин: $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x : \exists j \in I\ x \in A_j\}$, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x : \forall j \in I\ x \in A_j\}$. Знайти

а) $\bigcup\limits_{n \in N} [-n, n]$;

б) $\bigcup\limits_{\alpha \in N} X_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha \in N} X_\alpha$, де $X_\alpha = \{x \in R : x > \alpha\}$.

Розв'язання. а) Для будь-якого невід'ємного дійсного числа a знайдеться натуральне число n, більше за a. Тоді $a \in [-n, n]$, а, отже, і шуканому об’єднанню. Аналогічно, для від’ємних дійсних чисел. Шукане об’єднання є множиною всіх дійсних чисел.

б) $\bigcup\limits_{\alpha\in N} X_\alpha = (1, +\infty)$, $\bigcap\limits_{\alpha\in N} X_\alpha = \varnothing$.

Задача 11. Записати твердження символічно, використовуючи квантори, причому предикат записати у вигляді кон’юнкцій або диз’юнкцій: а) «Кожний доданок суми *a*+*b*+*c* парний», б) «існує натуральний корінь рівняння $2x = p$, який не перевищує 4», в) «Серед чисел, більших 1758 та менших 1963, знайдеться просте число», г) «Множині *M* належать всі літери слова «цирк».

Розв'язання.

а) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\, a \vdots 2 \wedge b \vdots 2 \wedge c \vdots 2$,

б) $(\exists x) \quad x \in N \wedge x \le 4 \wedge 2x = p$ або $(\exists x \in N) \quad x \le 4 \wedge 2x = p$

в) $(\exists x) \quad x > 1758 \wedge x < 1963 \wedge x - \textit{просте}$

г) $\{ц, и, р, к\} \subseteq M$ або $(\forall x) \quad x \in \{ц, и, р, к\} \Rightarrow x \in M$

Задача 12. Знайти область істинності предикатів:

а) $P(x) : "27 \vdots x"$; б) $P(x, y) : "\ y = \sqrt{x}"$, заданих на множині N.

Розв'язання.

а) $I(P(x)) = \{1, 3, 9, 27\}$. б) $I(P(x, y)) = \{(x, y) : x \in N, y \in N, y = \sqrt{x}\}$, тобто область істинності предиката $P(x, y)$ є множина всіх точок графіка функції $y = \sqrt{x}$, обидві координати яких є натуральними числами.

Задача 13. Задати таблицею двомісний предикат $P(x, y) : "\ x \vdots (2y)"$ на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і знайти його область істинності.

Розв'язання.

x\y	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

Таблиця 2.1 – Табличне задання

Множина істинності предиката $I(P(x, y))$ – множина пар, яким відповідає одиниця в таблиці.

двомісного предиката.

Задача 14. Записати за допомогою кванторів висловлювання: «Не існує найбільшого дійсного числа», «Добуток будь-яких двох дійсних чисел дорівнює 0 тоді й тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює 0».

Розв'язання.

Перше висловлювання: $(\forall x \in R)(\exists y \in R)\, y > x$.

Друге висловлювання: $(\forall x, y \in R)(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$.

Задача 15. Зобразити на числовій прямій елементи множини $A = \{x \in R : \exists y \in R \quad x^2 + y^2 = 1\}$

Розв'язання.

Зрозуміло, що коли $|x| > 1$, то $x^2 + y^2 > 1$. Якщо $x \in [-1{,}1]$, то знайдеться таке дійсне число y, що $x^2 + y^2 = 1$. Отже, $A = [-1{,}1]$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Навести необхідний для доведення теореми 2.1 список логічних законів.

2. Довести, що формула $(p \vee q)(p \to r)(q \to r) \to r$ є тавтологією.

3. Спростити формулу $\overline{A \vee B \vee C} \cdot A \cdot \left(B \vee \overline{C}\right) \cdot \overline{B}$.

4. Виразити всі основні операції через імплікацію і заперечення.

5. Довести, що замість теореми $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$ (див. зауваження на стор.18) можна доводити теорему $(A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B)$, тобто що має місце рівність $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B = (A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B)$. Сформулювати теорему $(A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B)$ для висловлювань із зауваження на стор.19.

6. Дано теорему: «У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою». Сформулювати всі види теорем для цієї теореми. З'ясувати питання про необхідні і достатні умови.

7. Дослідити структуру теореми про три перпендикуляри та сформулювати обернену до неї.

8. Довести $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$.

9. Довести $A = B \Leftrightarrow \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \varnothing$.

10. Довести теорему: $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$. Сформулювати обернену теорему та з'ясувати, чи є вона вірною.

11. Довести теорему $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$. Сформулювати обернену теорему та з'ясувати, чи є вона вірною.

12. Довести теорему: «Якщо n парне, то n^2 також парне». Застосувати метод від супротивного для доведення оберненої теореми.

13. Застосувати метод перебору для доведення теореми: «$a^2 \geq a$» для будь-якого цілого числа *a.*

14. Предикат $P(x, y, z) :" x + y + 2z = 4"$ задано на множині N . Знайти його область істинності. Отримати з нього двомісний предикат з непорожньою

областю істинності. Побудувати заперечення отриманого предиката.

15. Предикат $P(x):"x\,\vdots\,3"$ задано на множині Z. Побудувати з нього висловлювання двома способами та побудувати заперечення цих висловлювань.

16. З даних предикатів $P(x):"x\,\vdots\,3"$ і $Q(x):"x<3"$, заданих на множині натуральних чисел, отримати складні предикати та знайти їх області істинності.

17. Знайдіть множину істинності таких предикатів: а) «x ділиться на 3» на множині $M_x=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; б) «$x$ ділиться на 3» на множині $M_x=\{3;6;9;12\}$; в) «x ділиться на 3» на множині $M_x=\{2;5;7\}$; г) «$y^2+3y+2=0$» на множині $M_y=R$; д) «$y^2+1\geq 0$» на множині $M_y=R$; е) «$\sin y>2$» на множині $M_y=R$; є) «$x^2+y^2=0$» на множині $M_x=M_y=R$; ж) «$x^2+y^2<0$» на множині $M_x=M_y=R$; з) «$x<y$» на множинах $M_x=\{1;2;3;4\}$, $M_y=\{3;4;5\}$; и) «y_1 ділить y_2» на множині $M_1=M_2=\{2;3;4;6\}$.

18. Зобразити на координатній площині множини істинності таких предикатів (змінні приймають значення з множини R): а) $x=y$; б) $x=2y$; в) $x^2+y^2=1$; г) $y=|x|$; д) $y\geq x^2$; е) $y=\frac{1}{x}$; є) $\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$.

19. Зобразити на координатній площині множини істинності предикатів, що задані на множині R:

а) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2\leq 4, \\ x^2+y^2>1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x>0, \\ x+y>0. \end{cases}$

20. Зобразити на координатній прямій множини істинності предикатів, що задані на R: а) $(x<5)\Rightarrow(x>1)$; б) $(x>5)\Rightarrow(x>1)$; в) $(x>1)\Rightarrow(x<5)$.

21. Зв'язати змінну предикатом так, щоб вийшло істинне висловлювання (якщо можливо, зробіть це двома способами): а) «$4x+5$ - просте число»; б) $\cos y\neq 2$; в) «У чотирикутнику z всі кути прямі»; г) «Просте число p –

натуральне»; д) «Просте число p – парне »; е) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; є) $|x| = -|x|$; ж) $\lg x^2 = 2\lg x$; з) $x/x = 1$.

22. Знайти значення істинності висловлювання $(\exists x)(\forall y)(x \le y)$, якщо предикат $x \le y$ задано 1) на множині N, 2) на множині Z.

23. Записати символічно твердження «для будь-яких двох натуральних чисел існує не більше одного натурального числа, що дорівнює їх сумі».

24. Запишіть словами задане висловлювання та знайдіть його значення істинності. Всі змінні набувають дійсних значень.

1) $(\forall x)(\exists y)\ (x + y = 7)$;

2) $(\forall y)(\exists x)\ (x + y = 7)$;

3) $(\exists x)(\forall y)\ (x + y = 7)$;

4) $(\forall x)(\forall y)\ (x + y = 7)$;

5) $(\forall b)(\exists a)\big((\forall x)\big(x^2 + ax + b > 0\big)\big)$;

6) $(\exists b)(\forall a)\ \big((\exists x)\big(x^2 + ax + b = 0\big)\big)$.

25. Записати використовуючи квантори такі твердження:

а) $A \setminus B \ne \varnothing$;

б) $A \setminus B = \varnothing$.

27. Якщо a, b, c - цілі числа, то які зі слів «необхідно», «достатньо», «необхідно та достатньо» треба вставити замість крапок, щоб отримати вірне твердження:

1) Для того, щоб $a = 0$, …, щоб $ab = 0$;

2) Для того, щоб ab ділилось на 5, …, щоб a або b ділилось на 5;

3) Для того, щоб ab ділилось на 6, …, щоб a або b ділилось на 6;

4) Для того, щоб ab ділилось на деяке число, …, щоб a або b ділилось на це число;

5) Для того, щоб $a + b$ було непарним, …, щоб a або b було непарним.

3 ВІДНОШЕННЯ

3.1 Декартовий добуток множин. Означення відношення

Означення. Нехай дано множини $X_1, X_2, ..., X_n$, $n \geq 1$. *Декартовим* (або *прямим*) *добутком* множин $X_1, X_2, ..., X_n$ називається сукупність усіх упорядкованих наборів $(x_1, x_2, ..., x_n)$ таких, що $x_i \in X_i$. Позначається $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Якщо $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, тобто всі множини рівні, то їх декартовий добуток позначається X^n та називається n *– им степенем множини* X.

Приклади.

1) Для множин $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{m\}$ маємо $A \times B = \{(a,b),(a,c)\}$, $B \times A = \{(b,a),(c,a)\} \neq A \times B$, декартовий квадрат другої множини $B^2 = \{(b,b),(b,c,),(c,b),(c,c)\}$, декартовий добуток $A \times B \times C = \{(a,b,m),(a,c,m)\}$.

2) Декартовий квадрат множини дійсних чисел $R \times R = R^2$ називають *числовою площиною*.

Властивості декартового добутку множин:

1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;

2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

4) якщо $A \subseteq B$, то $A \times C \subseteq B \times C$;

5) якщо $A \neq B, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, то $A \times B \neq B \times A$

Теорема 3.1 Нехай дано **скінченні** непорожні множини $A_1, A_2, ..., A_n$, тоді

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|.$$

де $|A|$ - кількість елементів в множині *A*.

Означення. Будь-яка підмножина декартового добутку $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ називається n*–арним відношенням* ρ *на множинах* $X_1, X_2, ..., X_n$, тобто

$\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Якщо $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \rho$, то кажуть, що елементи $x_1, x_2, ..., x_n$ перебувають у відношенні ρ. При $n=1$ відношення ρ називається *унарним* ($\rho \subseteq X$), при $n=2$ – *бінарним* ($\rho \subseteq X_1 \times X_2$), при $n=3$ – *тернарним* ($\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$). У випадку $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$ кажуть про n–арне відношення на множині X.

Приклади. Для множин із попереднього прикладу:

1) $\rho_1 = \{c\} \subseteq B$ – унарне відношення на множині B;

2) $\rho_2 = \{(a,b)\} \subseteq A \times B$ – бінарне відношення на множинах A, B;

3) $\rho_3 = \{(b,b),(c,b)\} \subseteq B^2$ – бінарне відношення на множині B.

Зауваження. Будь-яке n–арне відношення можна розглядати як послідовність бінарних відношень, які послідовно конструюються. Тому далі зупинимося на бінарних відношеннях.

3.2 Бінарні відношення та їх властивості

Означення. Нехай ρ - бінарне відношення на множинах A та B. Множина $D(\rho) = \{x \in A; (x,y) \in \rho\}$ називається *областю визначення бінарного відношення* ρ. Множина $E(\rho) = \{y \in B; (x,y) \in \rho\}$ називається *множиною значень бінарного відношення* ρ (іноді область визначення і множину значень називають відповідно *першою* та *другою проекціями бінарного відношення*).

З останнього означення зрозуміло, що $D(\rho) \subset A$, $E(\rho) \subset B$.

Бінарні відношення можна задавати різними способами:

1) перерахуванням пар;

2) за допомогою характеристичних властивостей;

3) орієнтованим графом;

4) матрицею;

5) графіком.

Приклад.

На множинах $A=\{2,3,4,5\}$ і $B=\{24,25,26\}$ розглянемо бінарне відношення ρ: “$x\in A$ є дільником $y\in B$”.

Запишемо його різними способами.

1. $\rho=\{(2,24),(2,26),(3,24),(4,24),(5,25)\}$.
2. $\rho=\{(x,y)\in A\times B \mid y \vdots x\}$.
3. Див. рисунок 3.1.
4. Матриця відношення має вигляд:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 24 & 25 & 26 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

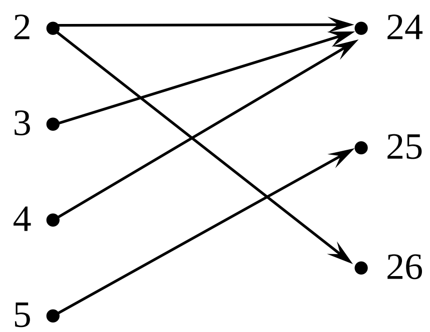


Рисунок 3.1 – Граф бінарного відношення

5. *Графіком бінарного відношення* ρ називають таку множину точок $M(x,y)$ площини XOY, що $(x,\ y)\in\rho$. В нашому прикладі графіком відношення є множина точок з координатами $(2,24),(2,26),(3,24),(4,24),(5,25)$.

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Означення. *Оберненим відношенням* до даного бінарного відношення ρ називається бінарне відношення $\rho^{-1}=\{(x,y)\mid(y,x)\in\rho\}$**.**

Бінарне відношення

$$S\circ R=\{(x,z)\mid \textit{існує таке } y\in B, \textit{що} (x,y)\in R,(y,z)\in S\}\subseteq A\times C$$

називається *добутком* (композицією) відношень $R\subseteq A\times B$ та $S\subseteq B\times C$.

Далі розглянемо властивості бінарних відношень на одній множині.

Означення. Бінарне відношення $\rho=\{(a,a)\mid a\in A\}$ на множині A називається *діагоналлю* й позначається i_A. Діагональ задається одиничною матрицею, а на графі присутні тільки петлі, причому в кожній вершині.

Означення. Бінарне відношення $\rho\subseteq A^2$ на множині A називається *рефлексивним*, якщо $\forall a \in A \quad (a,a) \in \rho$, тобто рефлексивне бінарне відношення обов'язково містить діагональ $i_A \subseteq \rho$.

Означення. Бінарне відношення $\rho \subseteq A^2$ на множині A називається *антирефлексивним*, якщо $\forall a \in A \quad (a,a) \notin \rho$, тобто $i_A \bigcap \rho = \varnothing$. На графі антирефлексивного бінарного відношення немає петель.

Означення. Бінарне відношення ρ на множині A називається *симетричним*, якщо $\forall\, a,b \in A \quad (a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$, тобто $\rho = \rho^{-1}$. Матриця такого відношення симетрична, а на графі всі стрілки двосторонні.

Означення. Бінарне відношення ρ називається *антисиметричним*, якщо $\forall\, a,b \in A \quad ((a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho) \Rightarrow (a = b)$, тобто $\rho \bigcap \rho^{-1} \subseteq i_A$.

Означення. Бінарне відношення ρ називається *транзитивним*, якщо $\forall\, a,b,c \in A \quad (a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$.

Означення. Бінарне відношення ρ називається *повним* (або *зв'язним*, або *лінійним*), якщо $\forall\, a,b \in A \quad a \neq b \Rightarrow (a,b) \in \rho \vee (b,a) \in \rho$.

Теорема 3.2 Нехай $R \subset A \times A$ – бінарне відношення на *A*. Тоді:

1. R рефлексивне $\Leftrightarrow i_A \subset R$;
2. R симетричне $\Leftrightarrow R \subset R^{-1}$;
3. R транзитивне $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$;
4. R антисиметричне $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset i_A$;
5. R антирефлексивне $\Leftrightarrow R \cap i_A = \varnothing$;
6. R повне $\Leftrightarrow R \cup i_A \cup R^{-1} = U$.

3.3 Відношення еквівалентності. Розбиття множини

Означення. Бінарне відношення на множині A називається *відношенням еквівалентності***,** якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Приклади: 1) відношення рівності на будь-якій числовій множині.

Дійсно, для будь-яких чисел a,b,c:

а) $a = a$; б) $a = b \Rightarrow b = a$; в) $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$.

2) відношення паралельності на множині прямих площини, оскільки для будь-яких прямих a,b,c:

а) $a \| a$;   б) якщо $a \| b$, то $b \| a$;   в) якщо $a \| b$ і $b \| c$, то $a \| c$.

3) відношення подібності на множині всіх трикутників.

Означення. Нехай на множині M задано відношення ρ, що є відношенням еквівалентності. *Класом, породженим елементом* $x \in M$, називається підмножина елементів множини M, що перебувають із елементом x у відношенні ρ. Позначається $[x]$, тобто $[x] = \{y \in M \mid x \rho y\}$.

Тут $x \rho y$ означає, що елементи x та y перебувають у відношенні ρ, тобто $(x, y) \in \rho$.

Теорема 3.3 Мають місце наступні властивості:

1. $x \in [x]$;
2. Якщо $x \rho y$, то $[x] = [y]$.
3. Якщо $\overline{x \rho y}$, то $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Таким чином, усяке відношення еквівалентності, задане на множині A, розбиває цю множину на класи еквівалентності. Будь-які два елементи з одного класу перебувають у відношенні ρ або інакше еквівалентні. Будь-які два елементи з різних класів нееквівалентні.

Означення. Сукупність класів еквівалентності називається *фактор-множиною* даної множини за даним відношенням еквівалентності. Якщо ρ – відношення еквівалентності на множині M, то $M/\rho = \{[x] \mid x \in M\}$ – фактор–множина множини M за відношенням ρ.

Приклад. На множині Z цілих чисел розглянемо відношення $\rho : x \equiv y \ (mod\ 3)$. Воно є відношенням еквівалентності. Очевидно, що до одного класу відносяться числа, що дають при діленні на 3 однакові залишки, тобто $[0]=\{x\in Z \mid x \vdots 3\}=\bar{0}$, $[1]=\{x\in Z \mid x\equiv 1(\mathrm{mod}3)\}=\bar{1}$, $[2]=\{x\in Z \mid x\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\}=\bar{2}$.

Таким чином, $Z/\rho=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ – множина класів лишків за модулем 3.

Означення. Говорять, що задано *розбиття множини* M, якщо $M=\bigcup_{i\in I}M_i$, причому $M_i\cap M_j=\varnothing$ для будь-яких $i\neq j$.

Приклад. $Z=\{0\}\cup\{-1,1\}\cup\{-2,2\}\cup\ldots\cup\{-n,n\}\cup\ldots$ є розбиттям множини цілих чисел. Інше розбиття цієї ж множини: $Z=Z_+\cup Z_-\cup\{0\}$.

Якщо ρ – відношення еквівалентності на M, то воно визначає на M класи еквівалентності. Множина класів еквівалентності є розбиттям M.

Теорема 3.4 Нехай $A\neq\varnothing$, ρ - відношення еквівалентності на множині A, тоді фактор-множина A/ρ є розбиттям множини A.

Доведення. Дійсно, з рефлексивності відношення ρ випливає $a\rho a$ або $a\in\bar{a}$, тобто класи еквівалентності непорожні.

Покажемо, що два різні класи не перетинаються. Нехай $\bar{a},\bar{b}\in A/\rho$ і $\bar{a}\neq\bar{b}$. Припустимо супротивне, що $\bar{a}\cap\bar{b}\neq\varnothing$, тоді знайдеться елемент c, який належить цим двом класам, тобто $c\in\bar{a}\cap\bar{b}$. Нехай x - довільний елемент з класу $\bar{a}$. Тоді $x\rho a$ і з припущення $c\rho a$. З симетричності відношення ρ отримаємо $x\rho a$ і $a\rho c$. Застосуємо транзитивність відношення ρ, отримаємо $x\rho c$. Так як $c\in\bar{b}$, то $c\rho b$. Знову застосуємо транзитивність, отримаємо $x\rho b$, звідки $x\in\bar{b}$. Таким чином, доведено включення $\bar{a}\subset\bar{b}$. Аналогично доводиться, що $\bar{b}\subset\bar{a}$. Отже, $\bar{a}=\bar{b}$, що суперечить умові $\bar{a}\neq\bar{b}$. Таким чином, різні класи не перетинаються.

Безпосередньо з визначення фактор-множини випливає, що об'єднання всіх класів еквівалентності дає всю множину A. Теорема доведена.

Означення. Нехай $A\neq\varnothing$, Σ - розбиття множини A. Задамо на A бінарне відношення ρ_Σ за таким правилом: елементи $a,b\in A$ перебувають у відношенні ρ_Σ тоді і тільки тоді, коли вони належать одному класу розбиття Σ.

Відношення ρ_Σ називають *бінарним відношенням, що визначається розбиттям* Σ.

Теорема 3.5 Нехай $A \neq \varnothing$, Σ - розбиття множини A, ρ_Σ - бінарне відношення, що визначається розбиттям Σ. Тоді ρ_Σ є відношенням еквівалентності на множині A і фактор-множина A/ρ_Σ збігається з розбиттям Σ.

3.4 Бінарні відношення порядку

Означення. Бінарне відношення ρ на множині X називається *відношенням порядку*, якщо воно транзитивне й антисиметричне. Множина, на якій задано відношення порядку, називається впорядкованою.

Приклади. 1) Нехай M – довільна множина, $P(M)$– її булеан. Відношення $\rho = \{(A,B): A \in P(M), B \in P(M), A \subseteq B\}$ є відношенням порядку.

2) Відношення подільності на множині натуральних чисел.

Означення. Відношення порядку називається:

- *відношенням часткового порядку,* якщо воно неповне*;*
- *відношенням лінійного порядку,* якщо воно повне.

Відношення часткового порядку називається:

- *відношенням строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне,
- *відношенням нестрогого порядку*, якщо рефлексивне

Відношення лінійного порядку називається:

- *відношенням строгого лінійного порядку*, якщо воно антирефлексивне,
- *відношенням нестрогого лінійного порядку*, якщо воно рефлексивне.

Приклади.

- відношення «$\subset$» (бути власною підмножиною) на булеані деякої множини є відношенням строгого часткового порядку,
- відношення «$<$» на множині R є відношенням строгого лінійного порядку,

- відношення «$\subseteq$» (бути підмножиною) на булеані деякої множини є відношенням нестрогого часткового порядку,
- відношення «$\le$» на множині R є відношенням нестрогого лінійного порядку.

Означення. Множина, на якій задано відношення лінійного (часткового) порядку, називається *лінійно впорядкованою* (*частково впорядкованою*).

Наприклад, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел лінійно впорядковані, а булеан будь-якої (не менше ніж двоелементної) множини частково впорядкований.

Означення. Нехай «$<$» - бінарне відношення порядку на множині *M*. Елемент $a \in M$ називається *мінімальним*, якщо $\forall x \in M \quad a < x$. Елемент $b \in M$ називається *максимальним*, якщо $\forall x \in M \quad x < b$. Множина називається *цілком упорядкованою*, якщо вона містить мінімальний або максимальний елементи.

Означення. *Натуральним числом* називається потужність скінченної множини.

Позначимо потужність одноелементної множини символом 1, тобто $1 = |\{a\}| = |\{\varnothing\}| = \ldots$, аналогічно, для потужності двоелементної множини - $2 = |\{a,b\}| = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = \ldots$ Якщо a – потужність деякої множини M і $M' = M \cup \{p\}$, де $\{p\}$ - одноелементна множина, то будемо писати, що потужніть множини M' дорівнює *a+1*. Таким чином, $N = \{1,2,\ldots\}$.

Уведемо на N бінарне відношення «$<$», яке природним чином порівнює потужності множин. Очевидно, 1 – мінімальний елемент.

Множина N натуральних чисел має наступні властивості:

1) є цілком упорядкованою;
2) для кожного $n \in N$ існує більше за нього натуральне число;
3) якщо $M \subseteq N$ й виконані умови:
   - $1 \in M$,
   - $(\forall a) \quad a \in M \Rightarrow (a+1) \in M$,

то $M = N$.

Третя властивість є логічним обґрунтуванням *методу математичної індукції*, який часто застосовують для доведення істинності тверджень, сформульованих для натуральних чисел. Нехай $P(n)$ – предикат на множині N. Висловлювання $(\forall n)\,P(n)$ істинне тоді й тільки тоді, коли $P(1)$ істинне й із припущення істинності $P(k)$ для кожного k випливає істинність $P(k+1)$.

Приклад. При будь-якому натуральному n вірно, що $\left(4^n-1\right)\vdots 3$. Дійсно, маємо висловлювання $(\forall n)\,P(n):\left(4^n-1\right)\vdots 3$. Для $n=1$ воно має вигляд $P(1):\left(4^1-1\right)\vdots 3$ і є істинним висловлюванням. Припустимо, що $P(k):\left(4^k-1\right)\vdots 3$ є істинним і, **використовуючи це припущення**, доведемо, що $P(k+1):\left(4^{k+1}-1\right)\vdots 3$ теж істинне. Вираз $4^{k+1}-1$ представимо у вигляді $4^{k+1}-1=(3+1)\cdot 4^k-1=3\cdot 4^k+\left(4^k-1\right)$. Перший доданок отриманої суми, очевидно, ділиться на 3 і другий доданок за індуктивним припущенням теж ділиться на 3. Отже, $\left(4^n-1\right)\vdots 3$ при будь-якому натуральному n.

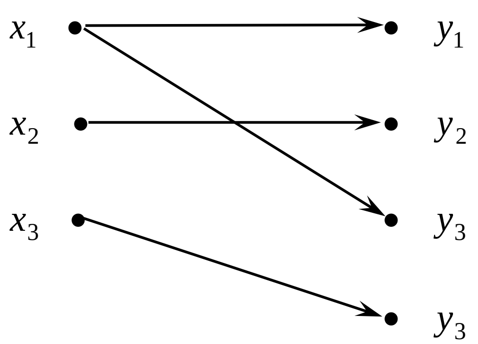
3.5 Функції. Еквівалентні множини. Потужність множини

Означення. Нехай на множинах X і Y задане бінарне відношення ρ. *Областю визначення* відношення називається множина $D_\rho=\{x\in X : \exists y\in Y\ x\rho y\}$, а множина $E_\rho=\{y\in Y : \exists x\in X\ x\rho y\}$ – *областю значень*.

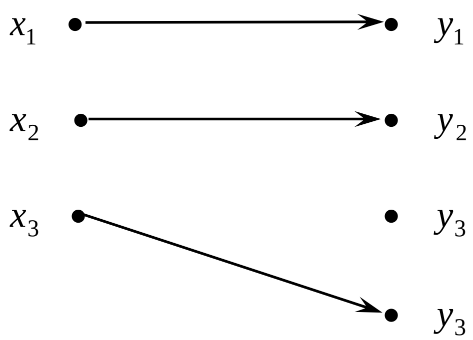
Означення. Бінарне відношення $f\subseteq X\times Y$ називається *функціональним* (або *функцією*, або *відображенням*) з X в Y, якщо $D_f=X$ й усі впорядковані пари з f мають різні перші координати. Прийняте позначення $f : X\to Y$ і якщо $(x,y)\in f$, то пишуть $y=f(x)$ і $f(x)$ називають значенням функції, що відповідає аргументу x.

Означення. Функція f називається *ін'єкцією* (*ін'єктивним* *відображенням*), якщо $(\forall x_1, x_2)\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, *сюр'єкцією,* якщо $E_f = Y$. Функція називається *бієкцією* (або взаємно однозначною відповідністю між множинами X і Y), якщо вона є ін'єкцією та сюр'єкцією.

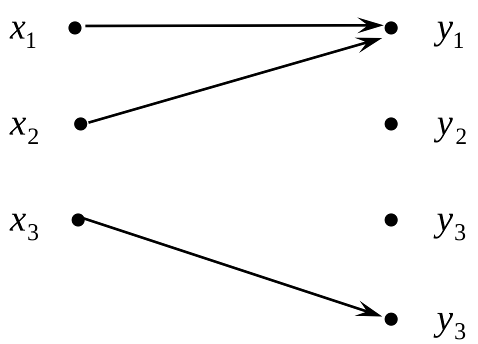
Приклад.



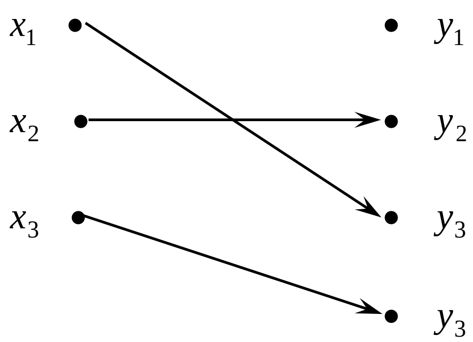
а) не функціональне відношення



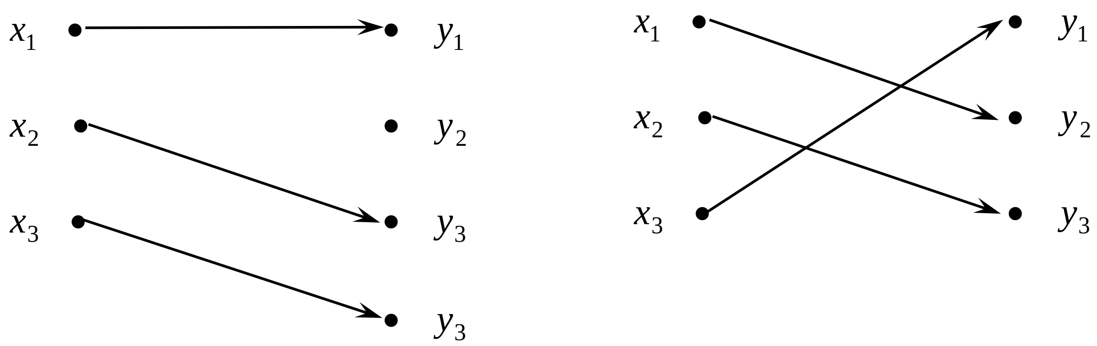
б) функціональне відношення



в) не ін'єктивне відображення



г) ін'єктивне відображення



д) не сюр’єктивне відображення

є) сюр’єктивне відображення

Рисунок 3.2 – Типи відображень

Теорема 3.6 Нехай $f: A \to B$, $g: B \to C$. Тоді $g \circ f$ - функція із A у C, причому $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Означення. Дві множини називаються *еквівалентними*, якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Позначають $A \sim B$.

Приклад. $N \sim 2N$, $N \sim Z$, N і R не еквівалентні.

Очевидно, що: 1) кожна множина еквівалентна сама собі; 2) якщо множина A еквівалентна множині B, то B еквівалентна A; 3) якщо A еквівалентна B і B еквівалентна C, то A еквівалентна C. Отже, сукупність усіх множин розбивається на класи еквівалентності.

Означення. *Потужністю* (*кардинальним числом*) називається властивість класу еквівалентних між собою множин. Якщо множина A скінченна, то її потужність дорівнює числу елементів у ній і позначається символом $|A|$.

Означення. *Множина*, еквівалентна множині натуральних чисел, називається *зліченною*.

Термін «зліченність» означає дискретність. Множина раціональних чисел зліченна, тобто $Q \sim N$. Звернемо увагу на те, що у цьому прикладі множина еквівалентна своїй власній підмножині.

Теорема 3.7 (характеристична властивість скінченної множини) Будь-яка скінченна множина не може бути еквівалентною ніякій своїй власній підмножині.

Кантор довів, що потужність множини точок відрізка $[0,1]$ не є зліченною. Її потужність називається *континуумом*. Мають місце еквівалентності: $[0,1] \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (0,+\infty) \sim R$.

Булеан зліченної множини A є незліченною множиною (континуумом).

Будь-яка нескінченна підмножина зліченної множини сама злічення.

Об'єднання зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною.

Питання для самоконтролю

1. *Декартовий добуток множин. Теорема про потужність декартового добутку множин.*
2. *Означення відношення. Приклади бінарних відношень.*
3. *Способи задання бінарного відношення.*
4. *Властивості бінарних відношень.*
5. *Відношення еквівалентності.*
6. *Поняття класу еквівалентності і фактор-множини.*
7. *Означення відношення порядку.*
8. *Види відношень порядку.*
9. *Множина натуральних чисел. Аксіома індукції та її роль.*
10. *Поняття функції як виду бінарного відношення, види функцій.*
11. *Еквівалентні множини. Зліченні та незліченні множини.*

Приклади розв’язування задач

Задача 1. Нехай $A=\{3,4\}$. Перелічити елементи множини A^4.

Розв'язання. Множина A^4 містить $\left|A^4\right|=|A|^4=16$ елементів:

$$(3,3,3,3),(3,3,3,4),(3,3,4,3),(3,4,3,3),(4,3,3,3),(3,3,4,4),(3,4,3,4),(4,3,4,3),$$
$$(4,4,3,3),(3,4,4,3),(3,4,4,4),(4,4,4,3),(4,3,4,4),(4,4,3,4),(4,4,4,4),(3,4,4,3).$$

Задача 2. На площині задана декартова система координат. Зобразити на координатній площині $A\times B$, де $A=[a,b]$, $a<b$, $B=[c,d]$, $c<d$, $a,b,c,d\in R$.

Розв'язання. Наприклад, для $A=[0,1]$, $B=[1,2]$ множина $A\times B$ є квадратом на площині з вершинами $(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)$.

Задача 3. Знайти декартовий добуток множин $X=\{x\in R:(x^2-2)(x-2)=0\}$ і $Y=\{0;2\}$.

Розв'язання. Легко бачити, що $X=\{-\sqrt{2},\sqrt{2},2\}$. Тоді $X\times Y=\{(-\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},2),(\sqrt{2},0),(\sqrt{2},2),(2,0),(2,2)\}$.

Задача 4. Які властивості має бінарне відношення ρ: “x ділиться на y” на множині N?

Розв’язання. 1) $a \vdots a$ - рефлексивність виконується, оскільки будь-яке число ділиться без остачі само на себе.

2) з того, що $a \vdots b$ не завжди випливає, що $b \vdots a$ - симетричність не виконується (наприклад, $12 \vdots 3$, але 3 не ділиться 12).

3) якщо $a \vdots b$ і $b \vdots a$, то $a=b$ - антисиметричність виконується

4) якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$ - транзитивність виконується

5) якщо $a\neq b$, то звідси не випливає, що $a \vdots b$ або $b \vdots a$ - зв’язність не виконується (наприклад $a=3$, $b=5$)

Таким чином, відношення подільності, задане на множині натуральних чисел, рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Задача 5. Знайти область визначення і множину значень бінарного відношення $\rho = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2\}$, заданого на множині *R*. Знайти ρ^{-1}.

Відповідь: $D_\rho = (-\infty;+\infty)$, $E_\rho = [0;+\infty)$, $\rho^{-1} = \{(x,y) : x = y^2\}$.

Задача 6. Зобразити на координатній площині елементи відношення, заданого на множині $X = \{1,2,3,4,5\}$:

$$1)\ \rho = \{(x,y) \in X^2 : y < x\},$$

$$2)\ \rho = \{(x,y) \in X^2 | x \le y+1\}.$$

Розв'язання.

1) рисунок 3.3, 2) рисунок 3.4.

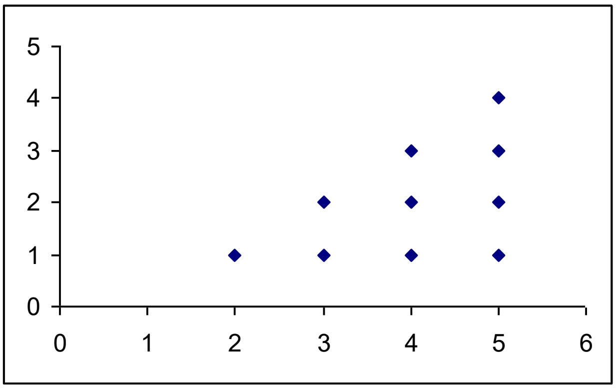


Рисунок 3.3 – Ілюстрація до прикладу 6

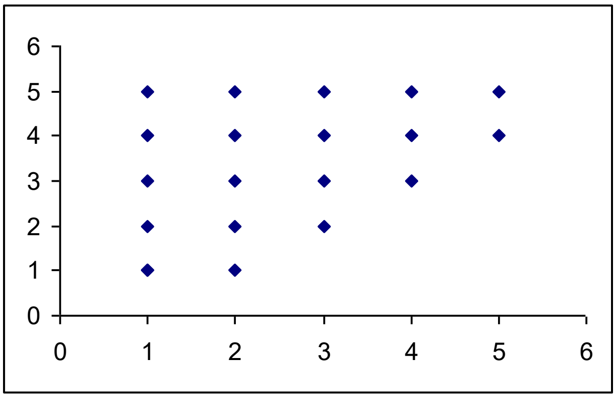


Рисунок 3.4 – Ілюстрація до прикладу 6

Задача 7. На множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ задане відношення $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(2,5),(5,2),(4,6),(6,4),(4,7),(7,4),(6,7),(7,6)\}$. Довести, що воно є відношенням еквівалентності й знайти всі класи еквівалентності.

Розв'язання. Перевірка виконання властивостей здійснюється за їх означеннями. Зупинимось на знаходженні класів еквівалентності.

$$[1] = \{x \in A : x\rho 1\} = \{1\},$$

$$[2] = \{x \in A : x\rho 2\} = \{2,5\} = [5],$$

$$[3] = \{x \in A : x\rho 3\} = \{3\},$$

$$[4] = \{x \in A : x\rho 4\} = \{4,6,7\} = [6] = [7].$$

Задача 8. Побудувати мінімальне (по кількості пар) відношення еквівалентності ρ на множині $A=\{1,2,3,4,5\}$ так, щоб $(1,2)\in\rho$ і $(2,3)\in\rho$.

Розв'язання. Нагадаємо, що відношення еквівалентності рефлексивне, симетричне і транзитивне. Для забезпечення виконання цих властивостей необхідно до заданих двох пар додати такі пари: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$, $(2,1),(3,2)$, $(1,3),(3,1)$.

Задача 9. Показати, що відношення $\rho=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2=y^2\}$ є відношенням еквівалентності і знайти класи еквівалентності.

Розв'язання.

1) $\forall x\in R$ $(x,x)\in\rho$, тому що $x^2=x^2$. Отже, відношення ρ рефлексивне.

2) Покажемо, що $\forall x,y\in R$ $(x,y)\in\rho\Rightarrow(y,x)\in\rho$. Дійсно, $(x,y)\in\rho\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow y^2=x^2\Rightarrow(y,x)\in\rho$. Отже, відношення ρ симетричне.

3) Вимога $\forall x,y,z\in R((x,y)\in\rho\wedge(y,z)\in\rho)\Rightarrow((x,z)\in\rho)$ теж виконується. Дійсно, якщо $\begin{cases}(x,y)\in\rho,\\(y,z)\in\rho,\end{cases}$ тоді $\begin{cases}x^2=y^2,\\y^2=z^2,\end{cases}$ звідки $x^2=z^2$. Отримали $(x,z)\in\rho$. Відношення ρ транзитивне.

Отже, ρ є відношенням еквівалентності на множині *R*. Класи еквівалентності: $[a]=\{x\in R: x^2=a^2\}=\{-a,a\}=[-a]$.

Задача 10. Які властивості притаманні відношенню $\rho=\{(x,y)|x\subseteq y\}$ на множині $\beta(Z)$ - булеані множині *Z*?

Розв'язання. Відношення ρ рефлексивне ($\forall x\in\beta(Z)\, x\subseteq x$), не є симетричним (з $x\subseteq y$ не випливає $y\subseteq x$), антисиметричне (з $x\subseteq y\wedge y\subseteq x$ випливає $x=y$). Дане відношення транзитивне за теоремою 1.1. Отже, відношення ρ є відношенням порядку. Оскільки існують пари елементів з $\beta(Z)$, що не належать відношенню ρ (наприклад, $x=\{1\}$, $y=\{2\}$), то відношення не є повним. За означенням маємо нестроге відношення часткового порядку.

Задача 11. Довести, що при будь-якому натуральному n вірне твердження $\left(5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1\right)\vdots 8$.

Доведення. Для $n = 1$ маємо $5 + 2 + 1 = 8 \vdots 8$, що є істинним висловлюванням. Припустимо, що $\left(5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1\right)\vdots 8$ є істинним і, **використовуючи це припущення**, доведемо, що $\left(5^{k+1} + 2\cdot 3^k + 1\right)\vdots 8$ теж істинне висловлювання. Вираз $\left(5^{k+1} + 2\cdot 3^k + 1\right)$ замінимо рівносильним виразом

$$5\cdot 5^k + 5\cdot 2\cdot 3^{k-1} + 5 - 5\cdot 2\cdot 3^{k-1} - 5 + 2\cdot 3^k + 1 = 5\left(5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1\right) - 5\cdot 2\cdot 3^{k-1} - 4 + 2\cdot 3\cdot 3^{k-1} =$$
$$= 5\left(5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1\right) - 4\cdot 3^{k-1} - 4 = 5\left(5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1\right) - 4\cdot\left(3^{k-1} + 1\right).$$

Перший доданок отриманої суми ділиться на 8 за індуктивним припущенням, другий є добутком числа 4 на парне число, тому теж ділиться на 8.

Отже, $\left(5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1\right)\vdots 8$ при будь-якому натуральному n.

Задача 12. Довести, що для будь-якого натурального n виконується рівність

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Доведення. 1 крок. Перевіримо виконання рівності для *n=1.* Оскільки в лівій частині рівності *n* доданків, то отримаємо рівність $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$, яка є вірною (***база індукції***).

2 крок. Припустимо, що для $n = k$ вірна рівність

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$ (***індуктивне припущення***).

3 крок. Треба **використовуючи індуктивне припущення** довести для $n = k + 1$ вірність рівності

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

В лівій частині цієї рівності сума перших k доданків за індуктивним припущенням дорівнює $\frac{k^2(k+1)^2}{4}$. Отже отримаємо

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

що й треба було довести.

Задача 13. Довести нерівність $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ для будь-якого натурального $n>1$.

Доведення. База індукції (*n*=2): $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, що доводиться, наприклад, двократним піднесенням до квадрату.

Індуктивне припущення ($n=k$):$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$.

Індуктивний перехід: Доведемо, що

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

Дійсно, з індуктивного припущення випливає $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Покажемо, що $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$. Оскільки для різниці квадратів лівої та правої частин останньої нерівності маємо

$$\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2-\left(\sqrt{k+1}\right)^2=\frac{1}{k+1}-1+2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}-\frac{k}{k+1}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\left(2-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)>0$$

при будь-якому натуральному k , то $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

Таким чином, за транзитивністю відношення «>», маємо $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

Висновок. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ для будь-якого натурального $n>1$.

Задача 14. Чи еквівалентні множини $2Z$ й $3Z$?

Відповідь: Так, вони обидві еквівалентні множині цілих чисел.

Задача 15. Установити бієкцію між множинами $(0,+\infty)$ й R.

Розв'язання. У якості бієкції розглянемо функцію $y = ln\, x$, областю визначення якої є множина $(0,+\infty)$, а множиною значень – множина R.

Задача 16. Чи є відношення $f = \{(x, y) \in R^2 : y = x, 0 \le x \le 1\}$ функцією з X в Y. Якщо так, то визначити її вид за умови, що:

1) $X = [0,1], \quad Y = R$;

2) $X = [0,1], \quad Y = [0,1]$.

Відповідь: 1) ін’єктивна функція; 2) бієктивна функція.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Задати різними способами бінарне відношення ρ: "x є дільником y" на множині $A=\{2,3,4,5\}$.

2. Нехай $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Для кожного з наведених нижче розбиттів множини M побудувати графік відповідного відношення еквівалентності:

а) $A=\{1,4,5\}$, $B=\{2,6,8\}$, $C=\{3,7\}$;

б) $A=\{1,3,7\}$, $B=\{2,4,5,6\}$, $C=\{8\}$.

3. Нехай $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ і $M=A\times A$. Довести, що α є відношенням еквівалентності на M; зобразити на координатній площині множину M та її розбиття, яке відповідає відношенню α:

а) $(x,y)\alpha(u,v)$, якщо $xv=yu$;

б) $(x,y)\alpha(u,v)$, якщо $x+v=y+u$.

4. Показати, що відношення «$\prec$», задане на множині N правилом «$a\prec b$ тоді і тільки тоді, коли a – дільник b» є відношенням часткового порядку.

5. Довести, що при будь-якому $n\in N$ справедливі рівності:

а) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $\sum\limits_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

6. Довести, що при будь-якому $n\in N$ число $4^n+15n-1$ ділиться на 9.

7. Довести справедливість нерівності $2^n>2n+1$ для всіх натуральних $n\geq 3$.

8. Нехай x_1 і x_2 - корені рівняння $x^2-2x-1=0$. Довести, що при будь-якому $n\in N$ число $x_1^n+x_2^n$ є парним натуральним числом.

9. Довести, що для будь-якого натурального n має місце формула $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n$.

10. Довести, що для будь-якого натурального *n:*

а) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$;

б) $(10^n + 18n - 1) \vdots 27$;

в) $(3^{2n+3} + 40n - 27) \vdots 64$;

г) $(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) \vdots 8$;

д) $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11$;

є) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;

е) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

ж) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

11. Дослідити властивості відображення $f : R \to R$:

а) $x \to x^2$, б) $x \to x^3$; в) $x \to |x|$; г) $x \to x^2 - 4$;

д) $x \to \sin x$; є) $x \to tgx$; е) $x \to \ln x$.

12. Визначити які з наступних відношень є відображеннями; які з відображень взаємно-однозначні:

а) $\varphi = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$;

б) $\varphi = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \mid y = x^2\}$;

в) $\varphi = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \mid y = x^2\}$;

г) $\varphi = \{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] \mid y = x^2\}$;

д) $\varphi = \{(x, y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \mid y = x^2\}$;

є) $\varphi = \{(x, y) \in N \times N \mid y = x^2\}$.

13. Знайти добутки $f \circ g$ та $g \circ f$, якщо відображення $f, g : R \to R$ визначаються наступним чином:

а) $f: x \to \frac{1}{x}$, $g: x \to \sin x$;

б) $f: x \to tgx$ $g: x \to \sqrt{x}$;

в) $g: x \to \sqrt{x}$, $g: x \to x^2 - 4$;

г) $f: x \to 3$, $g: x \to x^2$;

д) $f: x \to \ln x, g: x \to x^2 - 4$.

14. Встановити бієкцію між множинами A та B в кожному з наступних випадків:

а) $A = Z$, $B = N$;

б) $A = Z$, B - множина всіх парних натуральних чисел;

в) $A = Z$, $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$;

г) $A = N$, $B = Q$;

д) $A = N$, $B = N^2$;

є) $A = N$, $B = N^n$.

4 ОСНОВИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

4.1 Предмет комбінаторики. Основні правила комбінаторики

Комбінаторика має глибокі стародавні корені. Відомо, що ще у VI–IV ст. до н.е. у школі Піфагора вивчали числа виду $\frac{n(n-1)}{2}$, які є комбінаціями з n елементів по 2. Поява грошей сприяла поширенню азартних ігор, що підштовхнуло до аналізу комбінацій, які отримуються при підкиданні кубиків. У XVII ст. з'явилась робота Лейбниця «Рассуждения о комбинаторном искусстве». В роботах Бернуллі містилися формули комбінаторики. Сучасний вигляд ці формули набули лише в XIX ст. З комбінаторними задачами стикаються спеціалісти різного профілю, її застосовують в теорії ймовірностей, теорії алгоритмів, алгебрі, топології. В теперішній час у зв'язку з широким використанням ЕОМ роль комбінаторики значно зросла.

Виділяють **два класа комбінаторних задач**:

- На знаходження кількості комбінаторних конфігурацій із заданими властивостями;
- На перерахування всіх комбінаторних конфігурацій із заданими властивостями.

Розглянемо нескладні задачі і сформулюємо два основних правила комбінаторики.

Задача. З пункту *A* в пункт *B* можна дістатись трьома видами транспорту $\{T, A, M\}$, а з пункту *B* в пункт *C* – двома $\{T, A\}$. Скількома способами можна дістатися з *A* в *C*, заїжджаючи в *B*?

Розв'язання. Можливі варіанти запишемо у вигляді упорядкованих пар: (*T,T*), (*T,A*), (*A,T*), (*A,A*), (*M,T*), (*M,A*). Отже, шукане число дорівнює потужності декартового добутку множин (*T, A, M*) і (*T, A*), тобто дорівнює $3 \cdot 2 = 6$.

Правило добутку. Якщо елемент *A* можна вибрати *a* способами, і після кожного з цих виборів елемент *B* можна вибрати b способами, то вибір «*A* і *B*» можна здійснити $a \cdot b$ способами.

Задача. Скільки парних тризначних чисел можна скласти з цифр 2, 3, 4, 5, 7? Цифри можуть повторюватись.

Розв’язання. Звернемо увагу на те, що шукане число комбінацій заданих цифр можна розбити на класи так, що кожна комбінація входить лише до одного класу. Таких класів тут два – числа, що закінчуються на 2 і числа, що закінчуються на 4. За правилом добутку кожний клас складається з $5 \cdot 5 = 25$ чисел, отже, загальна кількість чисел – 50.

Правило суми. Якщо елемент *A* можна вибрати *a* способами, а елемент *B* – іншими b способами, причому вибори «*A* і *B*» є неможливими, то вибір «*A* або *B*» можна здійснити $a + b$ способами.

Правило суми в термінах множин. Нехай множина *A* складається з m елементів, а множина *B* складається з n елементів, причому множини не перетинаються. Тоді множина $A \cup B$ складається з $m+n$ елементів

Зауваження. Можна розбивати число комбінацій на класи, в яких є однакові комбінації. Тоді загальне число комбінацій отримаємо за формулою $a + b - k$, де k – число співпадінь.

Задача. Скількома способами з 28 кісток доміно можна вибрати кістку, на якій є 2 або 5?

Розв’язання. В першому класі кістки з 2, їх 7, в другому класі – з 5, їх теж 7. Але кістку 2:5 віднесено і до першого, і до другого класів. Тому маємо наступну відповідь: 7+7–1=13.

4.2 Упорядковані й неупорядковані підмножини без повторень даної скінченної множини

Означення. Нехай $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – скінченна множина. Упорядковані підмножини з k елементів множини *M* називаються:

1) при $n > k$ *розміщеннями з* n *елементів по* k, а їх кількість позначається символом A_n^k;

2) при $n = k$ *перестановками* n *елементів*, а їх кількість позначається символом P_n.

Два розміщення з n елементів по k є різними у двох випадках:

1) якщо складаються з різних елементів;

2) якщо складаються з однакових елементів, розміщених в різному порядку.

За правилом добутку отримаємо $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

При $n = k$ маємо $A_n^n = P_n = n!$ тому, що за означенням $0! = 1$.

Означення. *Комбінацією з* n *елементів по* k називається будь-яка неупорядкована k-елементна підмножина множини *M*. Кількість комбінацій з n елементів по k позначається символом C_n^k.

Оскільки з кожної неупорядкованої k-елементної множини можна утворити $k!$ упорядкованих множин, то має місце формула $A_n^k = C_n^k \cdot k!$, звідки

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Зауваження. Розглянуті комбінаторні конфігурації без повторень можна утворити за такою схемою: з множини $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в якій всі елементи різні, навмання вибирається один елемент, потім з решти елементів вибирається другий елемент, і так далі, поки не виконаємо k кроків. Таку процедуру в комбінаториці називають *схемою випадкового вибору без повернень*.

4.3 Упорядковані й неупорядковані підмножини з повтореннями даної скінченної множини

Означення. *Розміщеннями з повтореннями з* n *елементів по* k називають упорядковані набори, складені з елементів n видів по k елементів у кожному, причому в один і той же набір можуть входити елементи одного виду. Число таких наборів позначають $\overline{A_n^k}$.

Формулу для обчислення $\overline{A_n^k}$ отримуємо за правилом добутку:

$$\overline{A_n^k} = n^k,$$

оскільки кожен з k елементів розміщення можна обирати n способами.

Означення. Нехай $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ – скінченна множина, в якій елемент a_j повторюється i_j разів (мультимножина), причому $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$, $n > k$. Перестановка елементів множини M називається *перестановкою з повтореннями*, а число різних перестановок з повтореннями позначається символом $\overline{P_n}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

Якщо вважати всі елементи перестановки різними, то кількість таких перестановок дорівнює $n!$. Серед них $i_1!$ перестановок, в яких i_1 елементів a_1 (які ми вважаємо різними) міняються місцями. Ці перестановки, очевидно, є однаковими. За правилом добутку отримаємо $i_1! i_2! \ldots i_k!$ однакових перестановок. Отже, формула для числа n - елементних перестановок з повтореннями має вигляд

$$\overline{P_n}(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots i_k!}.$$

Означення. *Комбінаціями з повтореннями з* n *елементів по* k називають усілякі неупорядковані набори, складені з елементів n видів по k елементів у кожному, причому в один і той же набір можуть входити елементи одного виду. Число таких наборів позначають $\overline{C_n^k}$.

Приклад. Всі комбінації з повтореннями, що складаються з елементів мультимножини $X=\{a,...,b,...\}$ і містять по 3 елементи, утворюють множину $(\{a,a,a\},\{a,a,b\},\{a,b,b\},\{b,b,b\})$, тобто $\overline{C_2^3}=4$.

Твердження. Кількість різних комбінацій з повтореннями з n елементів по k дорівнює

$$\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k.$$

Ідея доведення цієї теореми зрозуміла з наступної задачі, в якій застосовується прийом кодування кожної з комбінацій з повтореннями.

Задача. У кондитерському магазині продавалися 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, піскові й листкові. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язання. Ця задача є задачею на комбінації з повтореннями, тому що порядок, у якому укладають тістечка в коробку, неістотний. Щоб розв'язати задачу, зашифруємо кожну покупку за допомогою нулів і одиниць. Спочатку напишемо стільки одиниць, скільки куплено наполеонів. Потім, щоб відокремити наполеони від еклерів, напишемо нуль, потім – стільки одиниць, скільки куплено еклерів, і т.д. Наприклад, якщо куплено 3 наполеони, 1 еклер, 2 піскових і 1 листкове тістечка, то одержимо такий запис: 1110101101. Ясно, що різним покупкам відповідають різні комбінації з 7 одиниць і 3 нулів. Обернено, кожній комбінації 7 одиниць і 3 нулів відповідає якась покупка.

Таким чином, число різних покупок дорівнює числу перестановок з повтореннями, які можна скласти з 7 одиниць і 3 нулів. А це число дорівнює $\overline{P}_{10}(7,3)=120$.

Цей результат можна отримати іншим чином. Розташуємо тістечка в кожній покупці в такому порядку: наполеони, еклери, піскові й листкові, а потім перенумеруємо їх. Але при нумерації будемо до номерів еклерів додавати 1, до номерів піскових – 2, до номерів листкових – 3. До номерів наполеонів нічого додавати не будемо. Наприклад, нехай куплено 2 наполеони, 3 еклери, 1 піскове тістечко й 1 листкове. Тоді ці тістечка нумеруються так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Ясно, що найбільший номер може бути 10, самий маленький – 1, а, крім того, жоден з номерів не повторюється, причому вони утворюють зростаючу послідовність. Обернено, кожній зростаючій послідовності з 7 чисел відповідає деяка покупка. Наприклад, послідовності 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 відповідає покупка з 4 еклерів і 3 піскових тістечок. Щоб переконатися в цьому, треба відняти від заданих чисел їх номери, тобто числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Одержимо числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2. Але 1 ми додавали до номерів еклерів, а 2 – до номерів піскових.

Звідси, загальне число покупок дорівнює числу зростаючих послідовностей довжини 7 з чисел від 1 до 10. А число таких послідовностей дорівнює $C_{10}^{7} = 120$.

У загальному випадку: якщо з n типів предметів потрібно скласти набори з k предметів з повтореннями, то число способів буде дорівнювати:

$$\overline{C_n^k} = \overline{P}_{n+k-1}(k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = C_{n+k-1}^{k}.$$

Зауваження. Розглянуті комбінаторні конфігурації з повтореннями можна утворити за такою схемою: з множини $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, в якій всі елементи різні, навмання вибирається один елемент, фіксується і повертається в множину, потім вибирається другий елемент, фіксується і повертається в множину, і так далі, поки не виконаємо k кроків. Таку процедуру в комбінаториці називають *схемою випадкового вибору з поверненнями*.

4.4 Поліноміальна формула. Біном Ньютона

Для знаходження *n*- го степеня суми $(a_1 + a_2 + ... + a_k)$ можна помножити її на себе *n* раз і звести подібні доданки. Вигляд цих доданків дає наступна

Теорема 4.1 Вираз $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n$, $n \in N$ дорівнює сумі всіляких доданків виду: $\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot ...\cdot r_k!} a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \cdot ... \cdot a_k^{r_k}$, тобто

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{r_1, r_2, ..., r_k} \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot ...\cdot r_k!} a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \cdot ... \cdot a_k^{r_k}, \tag{4.1}$$

де $r_1, r_2, ..., r_k \geq 0$, $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$.

Формула (4.1) називається *поліноміальною*, а числа $\dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!} = \overline{P}_n(r_1, r_2, ..., r_k)$ - *поліноміальними коефіцієнтами.*

Розглянемо частинний випадок, коли $k = 2$. Якщо позначити $r_2 = k$, то отримаємо $r_1 = n - k$ і

$$\overline{P}_n(n-k, k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Отже, отримаємо формулу

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

яку називають *біномом Ньютона*, а числа C_n^k - *біноміальними коефіцієнтами.* Запишемо біном Ньотона у розгорнутому вигляді

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n a^0 b^n.$$

Лема (Властивості біноміальних коефіцієнтів)

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$,

2) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$,

3) $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n + = 2^n$,

4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.

Перші дві властивості дозволяють записати біноміальні коефіцієнти у вигляді нескінченної таблиці, яку називають *Трикутником Паскаля*. В цьому трикутнику $n-$ий рядок дає набір коефіцієнтів у розкладі $n-$го степеня бінома $(a+b)$, де $n = 0,1,2,...$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

C_0^0
$C_1^0 \quad C_1^1$
$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$
$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$
$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$
$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Рисунок 4.1 – Трикутники Паскаля

Більше властивостей біноміальних коефіцієнтів можна знайти в задачах після цієї теми, а також у Додатку 3.

Питання для самоконтролю

1. *Як називаються розглянуті вище комбінаторні конфігурації (упорядковані і неупорядковані підмножини скінченної множини)?*
2. *Чим відрізняються комбінаторні конфігурації з повтореннями і без повторень?*
3. *Якими формулами зв'язані різні комбінаторні конфігурації?*
4. *Скільки всього підмножин має n-елементна множина? А скільки в ній одноелементних, двоелементних, ..., (n-1)-елементних підмножин?*
5. *Які властивості біноміальних коефіцієнтів використовуються при побудові трикутника Паскаля?*
6. *Вкажіть 5 властивостей елементів трикутника Паскаля.*
7. *Поняття комбінаторної задачі. Правило суми і правило добутку.*
8. *Перестановки без повторень і з повтореннями. Означення, приклади і виведення обчислювальних формул.*
9. *Розміщення без повторень і з повтореннями. Означення, приклади і виведення обчислювальних формул.*
10. *Сполуки без повторень і з повтореннями. Означення, приклади і виведення обчислювальних формул.*
11. *Біном Ньютона. Теорема про потужність булеана скінченної множини*
12. *Трикутник Паскаля. Властивості біноміальних коефіцієнтів*

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Скількома способами студент філологічного факультету може обрати одну книгу, якщо на полиці знаходяться 15 книг з філософії, 10 книг з інформатики та 5 книг з математики.

Розв'язання. Книгу з філософії можна обрати 15 способами, книгу з інформатики – 10 способами, а книгу з математики – 5 способами. Студент може обрати тільки одну книгу. Тому, відповідно до правила суми, він може взяти її $15+10+5=30$ способами.

Задача 2. Скількома способами можна обрати голосну і приголосну літери из слова *процент*.

Розв'язання. Голосну літеру можна вибрати двома способами (*о* або *е*), а приголосну – п'ятьма способами (вибрати *п*, *р*, *ц*, *н* або *т*). Отже, відповідно до комбінаторного правила добутку, голосну та приголосну літери можна обрати $2\cdot 5=10$ способами.

Задача 3. Скількома способами студенту філологічного факультету можна обрати дві книги по різним дисциплінам, якщо на полиці стоїть 15 книг з філософії, 10 книг з інформатики та 5 книг з математики.

Розв'язання. Якщо обирати книгу з філософії і книгу з інформатики, то існує 15 варіантів обрання книги з філософії і 10 варіантів обрання книги з інформатики, тому, за правилом множенням, для цього вибору існує $15\cdot 10=150$ можливостей. Якщо обирати книгу з філософії і книгу з математики, то за тим же правилом отримаємо $15\cdot 5=75$ можливостей. Якщо ж обираються книги з інформатики та математики, то маємо $10\cdot 5=50$ способів такого вибору.

Нарешті, оскільки вказані три набори різних пар книг відрізняються один від одного, то за правилом суми всього існує $150+75+50=275$ способів вибору двох книг.

Задача 4. Сім дівчат водять хоровод. Скількома різними способами вони можуть встати в круг?

Розв'язання. Шукане число у 7 разів менше за загальну кількість перестановок семи елементів без повторень, тому що циклічні перестановки природно вважати однаковими. Отже, маємо відповідь $\frac{7!}{7}=6!=720$.

Загальна формула для числа перестановок n предметів, розташованих на колі, має вигляд

$$P_n(коло)=(n-1)!$$

Задача 5. Довести, що потужність булеана n-елементної множини дорівнює 2^n.

Розв'язання. Занумеруємо елементи множини натуральними числами від 1 до n. Кожній підмножині поставимо у відповідність двійкове слово довжини n, в якому 1 на i-тому місці означає присутність у підмножині елемента даної множини з номером i, і 0 – в противному випадку. Тоді кількість підмножин в данній множині дорівнює числу розміщень з двох елементів по n з повтореннями, а отже дорівнює $\overline{A_2^n}=2^n$, що й треба було довести.

Задача 6. До ліфту дев'ятиповерхового будинку зайшли 4 людини (на першому поверсі). Скільки всього є способів виходу на поверхах?

Розв'язання. В цій задачі поверхи будинку з множини $X=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ розподіляються по 4 людям, тобто реалізується схема випадкового вибору з поверненням з множини X чотирьох елементів. Оскільки порядок розподілу є істотним, то це будуть розміщення з повтореннями по 4 елементи (люди) з 8 (поверхи 2,3,..,9), кількість яких дорівнює:

$$\overline{A_8^4}=8^4=4096.$$

Задача 7. Знайти кількість всіх сполук (комбінацій) з повтореннями з множини $\{a,...,b,...,c,...\}$ по три елемента в кожному. Перерахувати всі ці сполуки.

Розв'язання. Кількість всіх сполук $\overline{C_3^3}=C_5^3=10$. Запишемо їх всі: $\{a,a,a\}$, $\{a,a,b\}$, $\{a,b,b\}$, (b,b,b), (c,c,c), (c,c,a), (c,a,a), (c,c,b), (c,b,b), (a,b,c).

Задача 8. Скільки різних семизначних чисел можна скласти з цифр 1, 1,… 2, 2, 2,… 3, 3….? А скільки тризначних?

Розв'язання. Кількість семизначних чисел дорівнює $\overline{A_3^7} = 3^7$, оскільки маємо три види цифр і обираємо з них сім цифр. Так само і для тризначних отримаємо $\overline{A_3^3} = 3^3 = 27$. Той же результат можна отримати за правилом добутку.

Задача 9. Скільки різних семизначних чисел можна скласти з цифр 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3? А скільки тризначних?

Розв'язання. В порівнянні з попередньою задачею тут ми маємо додаткове обмеження на кількість цифр кожного виду.

Оскільки цифр всього сім, то семизначні числа є перестановками з повтореннями цих семи цифр, їх кількість отримаємо за формулою $\overline{P_7}(2,3,2) = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$. Кількість тризначних чисел буде, в порівнянні з попередньою задачею, на 2 менше, оскільки числа 111 і 333 неможливі. Отже відповідь – 25 тризначних чисел.

Задача 10. Підкидають два однакових гральних кубика. Скільки різних комбінацій можна у результаті отримати?

Розв'язання. Переформулюємо задачу. Усього при підкиданні одного кубика можливі шість ситуацій – маємо предмети шести різних типів. Підкидають два кубики, отже, з даних шести типів предметів необхідно вибрати два, причому нас не цікавить порядок вибору, і допускається вибір однакових предметів. Таким чином, це задача на комбінації з повтореннями. За формулою для обчислення їх кількості маємо $\overline{C_6^2} = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ різних комбінацій.

Задача 11. На шкільній математичній олімпіаді було запропоновано 5 задач. Серед учасників олімпіади не виявилося двох, що розв'язали однаковий набір задач. Знайти найбільшу можливу кількість учасників олімпіади.

Розв'язання. У конкретного учасника по кожній задачі можливий один з двох станів: «0» - задача не розв'язана, «1» - задача розв'язана. Для отримання конкретного набору розв'язаних задач з вихідної множини $X = \{0;1\}$ навмання послідовно з поверненням обираються п'ять чисел. У результаті отримаємо послідовності довжини 5, що складаються з «0» та «1», в яких порядок розташування елементів істотний, оскільки перший елемент відповідає першій задачі, другий – другій і т.д. Отже, конкретний набір розв'язаних задач є розміщенням з повтореннями з 5 елементів по 2

$$\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32.$$

Задача 12. Довести формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Доведення. Ця формула доводиться методом математичної індукції по n. При $n=1$ справедливість формули очевидна:

$$(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a+b.$$

Припустимо, що формула справедлива при $n=m$ і доведемо її для $n=m+1$:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} =$$

$$= C_m^0 a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^{k-1} + C_m^k) a^k b^{m-k+1} + C_m^m a^{m+1} b^0 = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1}.$$

Задача 13. Розкрити дужки та звести подібні члени у виразі $(3x+2y)^4$, використовуючи формулу бінома Ньютона.

Розв'язання.

$$(3x+2y)^4 = C_4^0 \cdot (3x)^4 \cdot (2y)^0 + C_4^1 \cdot (3x)^3 \cdot (2y)^1 + C_4^2 \cdot (3x)^2 \cdot (2y)^2 + C_4^3 \cdot (3x)^1 \cdot (2y)^3 + C_4^4 \cdot (3x)^0 \cdot (2y)^4 =$$

$$= 81 \cdot x^4 + 4 \cdot 27 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot y + 6 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot 4 \cdot y^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot x \cdot y^3 + 16 \cdot y^4 =$$

$$= 81x^4 + 216x^3 y + 216x^2 y^2 + 96xy^3 + 16y^4.$$

Задача 14. Знайти коефіцієнт при x^2 у розкладі $(2x+3)^6$.

Розв'язання. У даній задачі потрібно знайти коефіцієнт тільки при x^2, тому немає необхідності розкривати весь вираз за формулою бінома Ньютона, оскільки в цьому розкладі тільки один доданок має x^2, а саме

$$C_6^4(2x)^2 3^4 = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 4\cdot x^2\cdot 3^4 = 15\cdot 4\cdot 81\cdot x^2 = 4860\cdot x^2 .$$

Тому шуканий коефіцієнт дорівнює 4860.

Задача 15. Довести тотожність $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k} = m^n$.

Доведення. У формулі бінома Ньютона покладемо $a=1$ і $b=m-1$, тоді $m^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k}$.

Задача 16. Довести тотожність $\sum_{k=0}^{\infty} kC_n^k = n2^{n-1}$.

Доведення. У формулі бінома Ньютона покладемо $a=1$ і $b=x$, отримаємо $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. Продиференціюємо останню рівність по змінній x і запишемо результат при $x=1$:

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k1^k \text{, або } \sum_{k=0}^{\infty} kC_n^k = n2^{n-1} .$$

Задача 17. Довести тотожність Коші:

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} .$$

Доведення. Кількість способів обрати k предметів з $m+n$ предметів дорівнює C_{m+n}^k. Предмети можна обрати в два заходи: спочатку обрати i предметів з перших m предметів, а потім обрати $k-i$ предметів із n предметів. Звідси кількість способів обрати k предметів складає $\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скільки є двозначних чисел в десятковій системі числення:

а) всього;

б) в яких немає однакових цифр;

в) парних всього;

г) парних з різними цифрами?

2. З 28 кісток доміно беруть 2. В якій кількості комбінацій другу кістку можна буде прикласти до першої (за правилами доміно)?

3. Скільки намист можна скласти з семи коштовних камінців, якщо:

а) всі камінці однакові;

б) всі камінці різні?

4. Скільки різних браслетів можна скласти з чотирьох однакових рубінів, п'яти однакових сапфірів і шести однакових ізумрудів, якщо треба використати всі камені?

5. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ..., 4n\}$, щоб:

а) кожне парне число мало непарний номер;

б) кожне число, яке ділиться на 4, мало номер, який ділиться на 4?

Відповідь. б) $(3n)!n!$

6. На кожній з п'яти карток написана одна з непарних цифр. Скільки трицифрових чисел можна скласти, використовуючи ці картки?

7. а) На перше заняття в аудиторію, де є всього 20 місць, прийшли 25 студентів. Скількома способами їх можна розсадити по цим місцям (при цьому п'ятеро залишаться стояти)?

б) Після сесії в цю ж аудиторію прийшли 15 студентів. Скількома способами їх можна розсадити по цим місцям (при цьому п'ять місць залишаться вільними)?

8. У мікроавтобусі 10 місць, включаючи місце водія. Скількома способами 10 людей можна розмістити на цих місцях, якщо місце водія можуть зайняти троє?

9. Скількома способами 3 хлопців і 5 дівчат можна розділити на 2 команди так, щоб в кожній команді було не менше одного хлопця?

10. Яких п’ятицифрових чисел більше: тих, які не діляться на 5 чи тих, у яких ні перша, ні друга цифра зліва – не п’ятірки?

11. На листі паперу написано число 1234567890. Лист розрізають на 4 частини так, що кожен розріз проходить між цифрами. Скількома способами це можна зробити?

12. На полиці знаходяться $n+m$ різних книг, з яких m – з чорною обкладинкою, а n – з червоною.

а) Скільки існує різних перестановок книг, при яких книги з чорними обкладинками займають m перших місць?

б) Скільки може бути перестановок, при яких усі книги з чорними обкладинками стоять поруч?

13. Треба розподілити $3n$ предметів серед трьох людей так, щоб кожен отримав порівну. Скількома способами можна це зробити?

14. Довести, що з $2n+1$ куль можна обрати непарну кількість куль тією самою кількістю способів, що і парну.

15. Скількома способами можна вибрати 6 тістечок, якщо асортимент складає 11 різних видів тістечок?

16. Скількома способами можна вибрати 11 тістечок, якщо асортимент складає 6 різних видів тістечок?

17. Довести, що кісток доміно саме 28.

18. Вказати найбільше серед чисел C_n^k $(k=0,1,\ldots,n)$.

19. Скільки раціональних членів містить розклад $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

20. Знайти коефіцієнт при x^{11} у розкладі $\left(2x^2+3x\right)^6$.

21. Користуючись поліноміальною теоремою, знайти $(x+y+z)^3$.

22. Знайти коефіцієнт при ab^2c^3 в розкладі $(a+b+c)^6$.

23. Довести наступні властивості біноміальних коефіцієнтів:

а) $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$;

б) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

в) $\sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1}$;

г) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{2k} = 0$.

24*. Знайти суму коефіцієнтів многочлена, який отримується при розкритті дужок у виразі

$$(7x^3 - 13y^2 + 5z^2)^{1973}(y^3 - 8y^2 + 6y + z)^{1975} + (2x^2 + 18y^2 - 21)^{1974}.$$

5 МЕТОДИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

5.1 Теорема про включення та виключення

Дотепер ми розглядали задачі, які розв’язувались за допомогою комбінаторних формул або за правилами суми і добутку. Але існують такі задачі, що цього апарату недостатньо для їх розв’язання. Існують різні *комбінаторні методи і прийоми*. Одним з них є *принцип включення та виключення.* Він полягає у застосуванні формул, які вводяться у наступних трьох теоремах про потужність об’єднання скінченних множин.

Теорема 5.1 Нехай A та B - скінченні множини. Тоді для потужності їх об’єднання має місце формула $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$.

Теорема 5.2 Для трьох скінченних множин вірна формула $|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A \bigcap B| - |A \bigcap C| - |C \bigcap B| + |A \bigcap B \bigcap C|$.

Теорема 5.3 Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|. \qquad (5.1)$$

Метод підрахування за формулою (5.1) називається *методом включень і виключень.*

Задача. Через відмінність програм у школах Запорізької області студенти першого курсу математичного факультету розділилися на наступні групи: 47 людей знають алгоритмічну мову, 35 – мову програмування Паскаль і 23 – обидві мови програмування. Скільки людей на курсі не знають мов програмування, якщо всього 67 студентів?

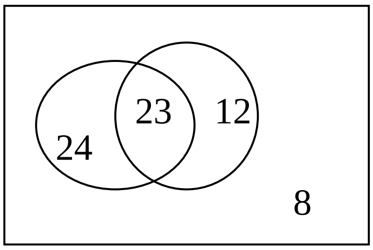


Рисунок 5.1

Розв'язання. Цю задачу можна розв’язати за допомогою кругів Ейлера (рис. 5.1). Але можна використати метод включень і виключень для двох множин. Першою є множина *A* студентів, які знають алгоритмічну мову, другою – множина B знавців мови Паскаль. Перетином цих множин є множина студентів, які знають обидві мови. Тоді за теоремою 1 отримаємо кількість студентів, які знають хоча б одну мову програмування:

$$|A \cup B| = 47 + 35 - 23 = 59.$$

Універсальною є множина всіх студентів першого курсу, тому кількість тих студентів, які не знають жодної мови, дорівнює різниці $67 - 59 = 8$.

Розглянемо ситуацію з трьома множинами.

Задача. Нехай 47 студентів знають алгоритмічну мову, 35 – мову Паскаль, 20 – знають Бейсик, 23 – Паскаль і алгоритмічну мова, 12 – алгоритмічну мову й Бейсик, 11 – Паскаль і Бейсик, 5 – усі три мови. Скільки людей на курсі не знають жодної мови програмування, якщо всього 67 студентів?

Розв'язання. В цій задачі треба використати теорему 2, одержимо: $47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61$ – кількість студентів, які знають хоча б одну мову програмування. Таким чином, кількість не знайомих з мовами дорівнює $67 - 61 = 6$.

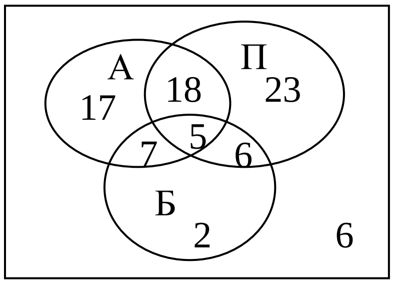


Рисунок 5.2 – Ілюстрація до задачі

Іноді метод включень і виключень подають у наступному формулюванні.

Нехай дано N предметів, деякі з яких мають властивості $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Кожний з об'єктів може мати або не мати деякі із цих властивостей. Позначимо через $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $1 \le k \le n$ число об'єктів, які мають властивості $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_k})$ – число об'єктів, які не мають властивостей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Тоді має місце формула

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_n}) =$$
$$= N - N(\alpha_1) - \ldots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) -$$
$$- N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Отже, наведена формула підраховує число предметів, що не володіють жодною із зазначених властивостей.

Зазначимо, що в розглянутих задачах властивостями є знання тієї чи іншої мови програмування, а питання задач пов'язані із знаходженням кількості тих, хто не має жодної властивості (не знає жодної мови програмування).

Задача. Скільки чисел від 1 до 100 не діляться ні на 5, ні на 7?

Розв'язання. У даному випадку $N = 100$, α_1– «ділиться на 5», α_2 – «ділиться на 7». Тоді $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_2)$, причому

$$N(\alpha_1) = \left[\frac{100}{5}\right] = 20, N(\alpha_2) = \left[\frac{100}{7}\right] = 14, N(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\frac{100}{35}\right] = 2.$$

Таким чином, $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}) = 100 - 20 - 14 + 2 = 68$.

5.2 Числа Стірлінга другого роду

В якості ще одого прикладу застосування формули включень-виключень розглянемо таку комбінарну задачу (надалі $m \geq n$).

Задача. Скількома способами можна розкласти m різних куль по n різним коробкам так, щоб жодна з цих коробок не виявилась порожньою?

Розв'язання. Якщо коробки можуть бути порожніми, то кількість способів розкласти m різних куль по n різним коробкам дорівнює n^m - це кількість розміщень з повтореннями.

Нехай A_i - множина розташувань куль, при яких i-та коробка порожня ($i = 1, 2, ..., n$). Тоді шукане число $D(m, n)$ розташувань куль, при яких всі коробки непорожні, дорівнює:

$$D(m,n) = n^m - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = n^m - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ...$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Очевидно, що

$|A_i| = (n-1)^m$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)^m$

і т.д. Отримуємо:

$$D(m,n)=n^m-C_n^1(n-1)^m+C_n^2(n-2)^m-C_n^3(n-3)^m+\ldots+C_n^1\cdot 0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Задача розв’язана.

Тепер припустимо, що коробки можуть бути порожніми.

Задача. Скількома способами можна розкласти m різних куль по n різним коробкам? На кількість куль в коробці обмежень немає.

Розв’язання. При довільному розташуванні наші m куль опиняться в деяких k коробках ($1 \le k \le n$), а інші $n-k$ коробок будуть порожніми. Таке розташування можна здійснити $S(m,k)$ способами. Підсумовуючи по k, отримуємо шукане число способів:

$$\sum_{k=1}^{n} S(m,k).$$

Приклад. Скількома способами колоду з 36 карт можна поділити довільно на 2 частини?

За формулою Стірлінга другого роду знаходимо

$$S_2^{36}=\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{2-i}C_2^i i^{36}=\frac{1}{2}(-2+2^{36})=2^{35}-1.$$

Цей результат можна отримати по-іншому. Кількість розміщень 36 предметів довільно по двом коробкам дорівнює

$$\overline{A}_{36}^{2}=2^{36}.$$

У двох випадках одна з коробок буде порожньою, якщо при цьому не враховувати порядок розміщення по двом коробкам, то маємо

$$\frac{2^{36}-2}{2!}=2^{35}-1.$$

5.3 Рекурентні послідовності й рекурентні співвідношення

Означення. Нехай дана послідовність $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Говорять, що члени послідовності $\{u_n\}$ зв'язані *лінійним рекурентним співвідношенням*, якщо існують дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такі, що для будь-якого $n \ge 1$:

$$u_{n+k} = \alpha_1 u_{n+k-1} + \alpha_2 u_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k u_n . \qquad (5.2)$$

Число k називають *глибиною рекурентного співвідношення* (5.2) або його *порядком*.

Послідовність $\{u_n\}$ задається однозначно, якщо крім співвідношення (5.2) задані ще k перших членів цієї послідовності (*початкові умови*).

Приклади. 1) $a_{n+1} = 2a_n, \quad n \geq 1, a_1 = 1$ - лінійне рекурентне співвідношення першого порядку. Воно задає геометричну прогресію 1,2,4,8,…

2) Рекурентне співвідношення $a_{n+1} = a_n + d, \quad n \geq 1$ задає арифметичну прогресію. Воно не є лінінійним.

Означення. *Характеристичним рівнянням лінійного рекурентного співвідношення* (3.1) називається рівняння виду

$$x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \alpha_2 x^{k-2} - \ldots - \alpha_k = 0 . \qquad (5.3)$$

Твердження. Нехай послідовність $\{u_n\}$ задана лінійним рекурентним співвідношенням (5.2). Тоді

1) Якщо характеристичне рівняння (5.3) має попарно різні корені $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то загальний член цієї послідовності має вигляд:

$$u_n = C_1 x_1^{n-1} + C_2 x_2^{n-1} + \ldots + C_k x_k^{n-1},$$

причому константи $C_i, i = \overline{1,k}$ однозначно визначаються із системи рівнянь

$$u_1 = C_1 + C_2 + \ldots + C_k,$$

$$u_2 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_k x_k,$$

$$\ldots$$

$$u_k = C_1 x_1^{k-1} + C_2 x_2^{k-1} + \ldots + C_k x_k^{k-1}.$$

2) Якщо характеристичне рівняння (5.3) має кратні корені: x_1 – кратності r_1, x_2 – кратності $r_2, \ldots$, x_m – кратності r_m, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = k$, то загальний член послідовності має вигляд:

$$u_n = p_1 x_1^{n-1} + p_2 x_2^{n-1} + \ldots + p_m x_m^{n-1},$$

де p_i – многочлен степеня $r_i - 1$ від змінної $n-1$.

5.4 Твірні функції

Іноді для розв'язання комбінаторних задач застосовують поняття функції. Деякій послідовності $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ комбінаторних об'єктів ставлять у відповідність послідовність $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ функцій так, щоб операції над послідовностями відповідали операціям над функціями. Частіше всього у якості функцій розглядають степеневі x^i.

Означення. Дано послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Розглянемо ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Якщо $\exists x \in R$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n = f(x)$, то $f(x)$ називають *твірною функцією заданої послідовності*.

Приклад. Задана послідовність $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$. Знайти її твірну функцію.

Розв'язання. Послідовності $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ відповідає ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^nx^n = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^kx^k + \ldots$, члени якого утворюють геометричну прогресію з першим членом 1 та знаменником $q = ax$. Якщо $|q| < 1$, тобто якщо $|x| < \frac{1}{|a|}$, то ця прогресія нескінченно спадна і її сума обчислюється за формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$. Отже, якщо $x \in \left(-\frac{1}{|a|}; \frac{1}{|a|}\right)$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^nx^n = \frac{1}{1-ax}$. Це означає, що функція $f(x) = \frac{1}{1-ax}$ є твірною для послідовності $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$.

Окремий випадок. При $a = 1$ маємо послідовність 1,1,1, …, а її твірна функція має вигляд $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Продиференціюємо її за змінною *x*, одержимо $g(x) = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. З іншої сторони $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$, отже, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$. Таким чином,

$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...$, тобто функція $\frac{1}{(1-x)^2}$ є твірною для послідовності 1, 2, …, *n*, *n*+1,…

Продовжимо міркування. Помножимо обидві частини рівності $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...$ на *x*, отримаємо:

$$\frac{x}{(1-x)^2}=0x^0+x+2x^2+3x^3+...+(n+1)x^{n+1}+....$$

Це означає, що $h(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ – твірна функція для послідовності 0, 1, 2, …, *n*, …

Приклад. У частинному випадку, коли $a=1, b=x$, формула бінома Ньютона має вигляд $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k$. За попереднім означенням функція $f(x)=(1+x)^n$ є твірною для послідовності $\left(C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n, 0, 0, ...\right)$, перші *n+1* членів якої є біноміальними коефіцієнтами.

Теорема 5.4 Має місце формула

$$(\forall m\in N)\quad \frac{1}{(1-ax)^m}=1+C_m^1(ax)+C_{m+1}^2(ax)^2+...+C_{m+n-1}^n(ax)^n+...,$$

яку називають *узагальненим біноміальним правилом.*

Доведення можна здійснити, застосувавши формулу бінома Ньютона для від’ємного показника так само як для натурального. Отримаємо

$$\frac{1}{(1-x)^n}=(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-k}^k(-x)^k,$$

де узагальнений біноміальний коефіцієнт

$$C_{-n}^k=\frac{(-n)(-n-1)\cdot...\cdot(-n-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{n(n+1)\cdot...\cdot(n+k-1)}{k!}=(-1)^k C_{n+k-1}^k.$$

Тоді

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{n+k-1}^k(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^k x^k.$$

Таким чином, для послідовності біноміальних коефіцієнтів $C_{n-1}^0, C_n^1, C_{n+1}^2, C_{n+2}^3, \ldots$ функція $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ є твірною.

Якщо $n=1$, то $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ - твірна функція для $a_k = 1, k \geq 0$.

Якщо $n=2$, то $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{k+1}^k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ - твірна функція для $a_k = k+1, k \geq 0$.

Зауваження. Над знайденими твірними функціями послідовностей можна виконувати деякі дії і отримувати твірні функції інших послідовностей. Наведемо приклади таких дій.

1) Якщо $f(x), g(x)$ - твірні функції послідовностей $\{a_n\}, \{b_n\}$ відповідно, то $\alpha f(x) + \beta g(x)$ - твірна функція послідовності $\alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\}$.

2) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\dfrac{f(x)-a_0}{x}$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *– зсув вправо.*

3) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $xf(x)$ - твірна функція послідовності $0, a_0, a_1, \ldots$. *– зсув вліво.*

4) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $xf'(x)$ - твірна функція послідовності $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

5) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x f(x)dx$ - твірна функція послідовності $\left\{\dfrac{1}{1+n} a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$.

5.5 Застосування методів комбінаторики до комбінаторних підрахунків

Задача. На курсі 4 студентських групи A, B, C, D. Нехай M – множина, що складається з одного студента групи A, одного студента групи B, двох студентів групи C, двох студентів групи D. Скількома способами можна вибрати двох студентів із множини M?

Розв'язання. Введемо символ x_A^0 для позначення вибору 0 студентів із групи A. В загальному випадку, символом x_i^j позначимо факт вибору j студентів із групи i, $i = A, B, C, D$ Наприклад, із групи C можна вибрати 0, 1 або 2 студенти, а, отже, за правилом додавання цей факт запишеться у вигляді $x_C^0 + x_C^1 + x_C^2$. Є тільки 2 варіанта вибору студентів із групи A, тобто маємо $x_A^0 + x_A^1$. Наприклад, якщо вибрали обох студентів з групи D, то цей факт запишеться у вигляді $x_A^0 \cdot x_B^0 \cdot x_C^0 \cdot x_D^2$, а якщо вибрали по одному студенту з груп B та D, то маємо $x_A^0 \cdot x_B^1 \cdot x_C^0 \cdot x_D^1$. Перелічимо всі можливі набори верхніх індексів (див. таблицю). Розглянемо формальний добуток $\left(x_A^0 + x_A^1\right)\cdot\left(x_B^0 + x_B^1\right)\cdot\left(x_C^0 + x_C^1 + x_C^2\right)\cdot\left(x_D^0 + x_D^1 + x_D^2\right)$. Якщо цей добуток перетворити у многочлен, розглядаючи верхні індекси як показники степеня, а нижніми індексами знехтувати, то число наборів, що задовольняють умову задачі, визначить коефіцієнт при x^2. Цей многочлен матиме вигляд $f(x) = (1+x)\cdot(1+x)\cdot\left(1+x+x^2\right)\cdot\left(1+x+x^2\right)$ і буде твірною функцією послідовності, член a_i якої дорівнює числу способів вибору i студентів із множини M.

Таблиця 5.1 – Набори верхніх індексів

0	0	0	2
0	0	2	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1

Наведемо формальне описання **способу знаходження числа комбінацій**

з повтореннями за допомогою твірних функцій.

Нехай з мультимножини елементів n типів вибираються неупорядковані набори по k елементів і нам треба знайти $\overline{C}_n^k$. Твірна функція для послідовності таких комбінацій будується за правилом:

- Якщо в комбінації елемент типу i може входити m_1 *або* m_2 *або...або* m_{k_i} раз, то в твірній функції йому відповідає множник

$f_i(x) = x^{m_1} + x^{m_2} + \ldots + x^{m_{k_i}}$;

- Твірна функція є добутком таких множників по всім можливим i, тобто

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x);$$

- Число $\overline{C}_n^k$ є коефіцієнтом при x^k в твірній функції.

Задача. Скільки існує способів вибору 12 об'єктів із множини об'єктів 5 видів, якщо треба вибрати не більше двох об'єктів перших трьох типів і необмежену кількість об'єктів останніх двох видів?

Розв'язання. Твірна функція має вигляд $\left(1 + x + x^2\right)^3 \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^2$. Перетворимо її до вигляду

$$\left(\frac{1 - x^3}{1 - x}\right)^3 \cdot \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{\left(1 - x^3\right)^3}{(1 - x)^5}.$$

Тепер за теоремою 5.4 запишемо

$$\frac{\left(1 - x^3\right)^3}{(1 - x)^5} = \left(1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9\right)\left(1 + C_5^1 x + C_6^2 x^2 + \ldots + C_{5+n-1}^n x^n + \ldots\right).$$

Нас цікавить коефіцієнт при x^{12}, він дорівнює $1 \cdot C_{5+12-1}^{12} - 3 \cdot C_{5+9-1}^{9} + 3 \cdot C_{5+6-1}^{6} - 1 \cdot C_{5+3-1}^{3}$.

Задача. Є три види марок вартістю 4, 6 і 10 копійок. На конверт потрібно наклеїти марки загальною вартістю 18 копійок. Порядок наклеювання марок – важливий. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Позначимо через $f(n)$ – кількість способів наклеювання марок загальною вартістю n. Кожному зі способів наклеювання марок загальною вартістю $(n-4)$ або $(n-6)$ або $(n-10)$ відповідає єдиний спосіб наклеювання марок загальною вартістю n. Тоді $f(n)=f(n-4)+f(n-6)+f(n-10)$, причому $f(1)=0, f(2)=0$, $f(3)=0,\ f(4)=1,\ f(5)=0,\ f(6)=1,\ f(7)=0,\ f(8)=1,\ f(9)=0,\ f(10)=3$.

Тоді

$$
\begin{gathered}
f(18)=f(14)+f(12)+f(8)= \\
=(f(10)+f(8)+f(4))+(f(8)+f(6)+f(2))+f(8)= \\
=3+1+1+1+1+0+1=8.
\end{gathered}
$$

Задача. Знайти найбільшу кількість частин, на які ділять площину n прямих.

Розв'язання. Позначимо це число через $U(n)$. Проведемо $(n+1)$-шу пряму так, щоб вона перетинала всі раніше проведені прямі. Тоді на ній буде n точок перетину, які розбивають її на $n+1$ частин. Кожна з цих частин належить межі однієї нової частини площини. Таким чином, ми отримали для $U(n)$ рекурентне співвідношення $U(n+1)-U(n)=n+1$.Щоб знайти звідси $U(n)$, підсумуємо ці співвідношення від $n=1$ до $n=k-1$, враховуючи, що $U(1)=2$. Отримаємо

$U(k)=2+(2+3+...+k)=\dfrac{k^2+k+2}{2}$. Отже, n прямих можуть ділити площину не більш ніж на $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ частин.

5.6 Деякі методи та прийоми розв'язання комбінаторних задач

1) Метод решета

Сутність цього методу полягає в тому, що ми спочатку знаходимо число всіх можливих комбінаторних конфігурацій, нехтуючи однією або кількома умовами задачі, а потім «відсіюємо» зайві конфігурації.

Задача. Скільки існує 4-значних чисел, в записі яких є хоча б одна цифра

7?

Розв'язання. Спочатку знайдемо число всіх можливих чотиризначних чисел, воно дорівнює $9\cdot 10^3$, оскільки цифра 0 не може стояти на першому місці. Потім знайдемо серед них кількість чисел, при побудові яких цифра 7 не використовується, їх буде $8\cdot 9^3$. Шукана кількість чисел дорівнює різниці $9\cdot 10^3 - 8\cdot 9^3$, в кожному з них цифра 7 зустрічається хоча б один раз.

Цей же метод можна застосувати до розв'язання таких задач:

Задача. Скільки існує 3-значних чисел, в записі яких є хоча б одна непарна цифра?

Задача. Скільки існує 5-значних чисел, в записі яких є хоча б дві парних цифри?

2) *Метод точок та перегородок.*

Задача. Скількома способами можна розкласти 7 однакових кульок в 3 різні ящики так, щоб жоден ящик не залишився порожнім?

Розв'язання. Розмістимо кульки в ряд, між ними утворилось 6 місць. Виберемо з цих 6 місць 2 місця і покладемо на них «перегородки» (наприклад, палички). Утворилось 3 множини кульок для розміщення в трьох ящиках. Загальна кількість способів вибору 2 місць з 6 дорівнює кількості комбінацій з 6 елементів по 2, тобто $C_6^2 = 15$.

Задача. Скільки натуральних коренів має рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$? При $k = 3, n = 2$ та $k = 2, n = 3$ виписати всі розв'язки.

Розв'язання. При *к=3* і *n=7* ми маємо таку саму задачу, що і попередня. Дійсно, якщо представляти значення *р* змінної як набір з *р* одиниць (*р* кульок), то нам треба розподілити *n* штук одиниць між *к* різними змінними (ящиками), щоб кожна змінна приймала значення, більше 1 (кожен ящик не був порожнім). Отже, маємо кількість різних розв'язків C_{n-1}^{k-1}.

Метод точок та перегородок може бути застосований і для наступних задач. Зовні вони схожі на попередні, але деякі відмінності в умові приводять до зовсім інших комбінаторних конфігурацій.

Задача. Скількома способами можна розкласти 7 однакових кульок в 3 різні ящики, допускаючи при цьому порожні ящики?

Розв'язання. Знову розмістимо 7 кульок в ряд, але тепер 2 перегородки можуть бути і поруч, що на комбінаторній мові означає перестановки з повтореннями з 3 по 7, тобто $\overline{C_3^7} = C_{3+7-1}^7 = C_9^2 = 36$.

Ось три варіанти розташування точок і перегородок

|***| ***||**** **|***|**

В першому варіанті в перший ящик попадуть 2 кульки, в другий – 5, в третій – 0. В другому варіанті порожнім залишиться другий ящик. В третьому варіанті порожніх ящиків не буде.

Задача. Скільки цілих невід'ємних коренів має рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$?.

Розв'язання. Ця задача знову таки є узагальненням попередньої і при *к=3* і *n=7* ми маємо просто інше формулювання попередньої задачі.

Відповідь. $\overline{C_k^n}$.

3) *Прийом зв'язування.*

Сутність прийому полягає в тому, що кілька елементів множини розглядаються як один елемент (вони нібито зв'язані). Частіше за все це корисно у випадках, коли вимагається розглядати такі перестановки елементів деякої множини, в яких виділена група елементів знаходиться поруч. Або коли треба вибрати підмножини, в яких виділена група елементів знаходиться поруч.

Задача. Скільки існує перестановок перших 10 натуральних чисел, в яких числа 1 та 2 стоять поруч?

Розв'язання. Будемо розглядати 1 та 2 як один елемент, який для зручності позначимо символом *a.* Приєднаємо його до решти восьми чисел і переставимо ці 9 елементів всіма можливими способами, їх 9! Оскільки елементи 1 і 2 в кожній з цих перестановок можна ще поміняти місцями, бо вони знову будуть стояти поруч, то відповідь до задачі - $2 \cdot 9!$.

Задача. Скільки існує перестановок перших 10 натуральних чисел, в яких числа 1 та 2 не стоять поруч?

Розв'язання. Тут треба одночасно розглянути прийоми зв'язування та решета. Відповідь - $10! - 2 \cdot 9!$

Задача. Скільки існує перестановок з n елементів, в яких задані два елементи не стоять поруч?

Відповідь - $n! - 2 \cdot (n-1)!$

Задача. Скільки існує перестановок з n елементів, в яких задані три елементи не стоять поруч?

Відповідь. $n! - 3!(n-2)!$

Задача. Скільки існує перестановок перших 10 натуральних чисел, в яких числа 1 2, 3 стоять поруч в порядку зростання?

Відповідь. 8!

Задача. Скількома способами можна вибрати 12 людей із 17, якщо вказані дві особи не повинні бути вибраними разом?

Відповідь. $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$.

Задача. Скільки цілих невід'ємних коренів має нерівність $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \le n$?

Вказівка. Звести нерівність до сукупності рівнянь.

4) Прийом встановлення бієкції.

Задача. В скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n - кутника, якщо жодні три діагоналі не перетинаються в одній точці?

Розв'язання. При $n = 4$ така точка одна, при $n > 4$ кожні 4 вершини цього n - кутника утворюють опуклий чотирикутник, який дає одну точку перетину його діагоналей, які є і діагоналями n - кутника. Отже, між множиною шуканих точок і множиною опуклих чотирикутників, які можна виділити в данному n - кутнику існує бієктивне відображення. Кількість таких многокутників легко порахувати, вона дорівнює C_n^4, що і дає відповідь до задачі.

Задача. Довести рівність $C_n^k = C_n^{n-k}$ - властивість симетричності біноміальних коефіцієнтів.

Розв'язання. Ця властивість виражає рівність числа *к*-елементних і числа $(n-k)$-елементних підмножин n – елементної множини. Дійсно, кожній *к*-елементній підмножині можемо однозначно поставити у відповідність її доповнення, тобто $(n-k)$-елементну підмножину і навпаки. Це доводить еквівалентність множини *к*-елементних і множини $(n-k)$-елементних підмножин, тобто між ними існує бієктивна відповідність. Отже, їх потужності однакові.

Питання для самоконтролю

1. *Теорема включень і виключень для двох, трьох і n скінченних множин.*
2. *Поняття лінійного рекурентного співвідношення. Порядок співвідношення.*
3. *Характеристичне рівняння лінійного рекурентного співвідношення.*
4. *Теорема про загальний розв'язок лінійного рекурентного співвідношення (випадок попарно різних коренів характеристичного рівняння).*
5. *Теорема про загальний розв'язок лінійного рекурентного співвідношення (випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння).*
6. *Поняття твірної функції заданої послідовності.*
7. *Приклади твірних функцій деяких послідовностей.*
8. *Операції над твірними функціями і відповідними їм послідовностями.*
9. *Приклади побудови твірних функцій в задачах підрахунку числа комбінаторних конфігурацій.*
10. *Прийоми розв'язання комбінаторних задач та приклади їх застосування.*

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дослідник ринку повідомляє наступні дані. З 1000 опитаних 811 подобається шоколад, 752 подобаються цукерки й 418 – льодяники, 570 подобається шоколад і цукерки, 356 – шоколад і льодяники, 348 – цукерки й льодяники, а 297 – усі три види насолод. Показати, що в цій інформації присутні помилки.

Розв'язання. Позначимо через A - властивість опитаного любити шоколад, через B – властивість опитаного любити цукерки, через C – властивість опитаного любити льодяники.

За умовою задачі $N(A)=811$, $N(B)=752$, $N(C)=418$, $N(A,B)=570$, $N(A,C)=356$, $N(B,C)=348$, $N(A,B,C)=297$.

Обчислимо кількість опитаних людей, які люблять хоча б один вид насолод. Скористаємося формулою включення й виключення:

$$N = N(A)+N(B)+N(C)-N(A,B)-N(A,C)-N(B,C)+N(A,B,C)=$$
$$=811+752+418-570-356-348+297=1004.$$

Оскільки відомо, що опитано було всього 1000 людей, то у запропонованій інформації присутні помилки.

Задача 2. Скільки натуральних чисел від 1 до 500 не діляться на жодне з чисел 3, 5, 11?

Розв'язання. Позначимо кількість чисел, що діляться на 3, 5, 11 відповідно p_3, p_5, p_{11}. Тоді $p_3=\left[\frac{500}{3}\right]=166$, $p_3=\left[\frac{500}{5}\right]=100$, $p_{11}=\left[\frac{500}{11}\right]=45$.

Кількість чисел, кратних 3 і 5, співпадає з кількістю чисел, кратних 15: $p_{15}=\left[\frac{500}{15}\right]=33$. Аналогічно, $p_{33}=\left[\frac{500}{33}\right]=15$, $p_{55}=\left[\frac{500}{55}\right]=9$, $p_{165}=\left[\frac{500}{165}\right]=3$.

За принципом включення - виключення знаходимо

$$N=500-(p_3+p_5+p_{11}-p_{15}-p_{33}-p_{55}+p_{165})=$$
$$=500-(166+100+45-33-15-9+3)=243$$

Задача 3. Чи є функції: а) $u_k = 5^k$, б) $g(k) = 3$, в) $h(k) = 2k+1$ розв'язками рекурентного співвідношення $u_{k+2} = 2u_{k+1} - u_k$.

Розв'язання. а) для перевірки знайдемо $u_{k+1} = 5^{k+1}$ і $u_{k+2} = 5^{k+2}$, підставимо в рекурентне співвідношення, отримаємо $5^{k+2} = 2\cdot 5^{k+1} - 5^k$, звідки $25\cdot 5^k = 10\cdot 5^k - 5^k$. Остання рівність не є вірною, отже функція $u_k = 5^k$ не є розв'язком заданого рекурентного співвідношення. б) функція $g(k) = 3$ є сталою, тому рекурентне співвідношення набуває вигляду $3 = 2\cdot 3 - 3$. Отже, $g(k) = 3$ є розв'язком. в) оскільки $h(k+1) = 2(k+1) + 1 = 2k+3$, $h(k+2) = 2(k+2) + 1 = 2k+5$, то після підстановки у рекурентне співвідношення отримаємо вірну рівність $2k+5 = 2\cdot(2k+3) - 2k - 1$. Зауважимо, що розв'язок $h(k) = 2k+1$ є загальним, а
$g(k) = 3$ - частинним.

Задача 4. Знайти коефіцієнт при x^{17} в розкладі твірної функції $f(x) = \dfrac{x^4}{(1-x)^5}$ в степеневий ряд.

Розв'язання. За теоремою 5.4 при $m = 5$ розклад заданої функції має вигляд

$$f(x) = x^4 \frac{1}{(1-x)^5} = x^4\left(1 + C_5^1 x + C_6^2 x^2 + \ldots + C_{17}^{13} x^{13} + \ldots\right),$$

отже шуканий коефіцієнт дорівнює C_{17}^{13}.

Задача 5. Знайти перші п'ять членів послідовності, заданої рекурентним співвідношенням $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, якщо $u_1 = 0,\ u_2 = 1$.

Розв'язання. Задане співвідношення є лінійним порядку 2. Перші два члени відповідної послідовності є заданими початковими умовами $u_1 = 0,\ u_2 = 1$. Залишилось знайти ще 3 члени: $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3$, $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 7$, $u_5 = 3u_4 - 2u_3 = 15$.

Задача 6. Знайти сотий член послідовності, заданної рекурентним співвідношенням $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_1 = 0, u_2 = 1$.

Розв'язання. Зрозуміло, що задача може бути розв'язана безпосередньо, як і попередня, але треба буде зробити майже 100 кроків. Отже, треба застосувати певний метод. Нагадаємо, що рекурентне співвідношення є лінійним. За даним рекурентним співвідношенням складемо характеристичне рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Тоді запишемо загальний розв'язок даного рекурентного співвідношення $u_n = C_1 \cdot 1^{n-1} + C_2 \cdot 2^{n-1}$. Для обчислення невідомих C_1, C_2 використаємо початкові умови: $u_1 = 0, u_2 = 1$. Отримаємо систему рівнянь: $C_1 \cdot 1^0 + C_2 \cdot 2^0 = 0$, $C_1 \cdot 1^1 + C_2 \cdot 2^1 = 1$, розв'язком якої є $C_1 = -1, C_2 = 1$. Отже, $u_n = -1 + 2^{n-1}$ - явна формула загального члену послідовності.

Задача 7. Розв'язати рекурентне співвідношення $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_1 = 0, u_2 = 1$.

Розв'язання. За даним рекурентним співвідношенням складемо характеристичне рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$. Його коренем є число $x_1 = 2$ кратності 2. Тоді запишемо загальний розв'язок даного рекурентного співвідношення $u_n = \left(C_1 + C_2 \cdot (n-1)\right) \cdot 2^{n-1}$. Для обчислення невідомих C_1, C_2 використаємо початкові умови: $u_1 = 0, u_2 = 1$. Отримаємо систему рівнянь: $(C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 2^0 = 0$, $(C_1 + C_2 \cdot 1) \cdot 2^1 = 1$, розв'язком якої є $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$. Отже, $u_n = (n-1) \cdot 2^{n-2}$.

Задача 8. За допомогою твірних функцій розв'язати рекурентне співвідношення $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n > 1,\ a_0 = 8, a_1 = 16$.

Розв'язання. Нехай

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \ldots \qquad (5.4)$$

твірна функція шуканої послідовності. Домножимо обидві частини рівності (5.4) спочатку на *2x*, а потім на $3x^2$, отримаємо відповідно

$$2xf(x)=2a_0x+2a_1x^2+\ldots+2a_{n-1}x^n+\ldots$$

$$3x^2f(x)=3a_0x^2+3a_1x^3+\ldots+3a_{n-2}x^n+\ldots$$

Знайдемо вираз $f(x)-2xf(x)-3x^2f(x)$, отримаємо

$$f(x)-2xf(x)-3x^2f(x)=a_0+(a_1-2a_0)x+$$
$$+(a_2-2a_1-3a_0)x^2+\ldots+(a_{n-1}-2a_{n-2}-3a_{n-3})x^{n-1}+(a_n-2a_{n-1}-3a_{n-2})x^n+\ldots$$

Оскільки $a_n-2a_{n-1}-3a_{n-2}=0$ для будь-якого $n>1$, то з урахуванням початкових умов $a_0=8, a_1=16$ отримаємо $f(x)(1-2x-3x^2)=8$, звідки $f(x)=\dfrac{8}{1-2x-3x^2}$. Тепер цю знайдену твірну функцію заданої послідовності треба записати в розгорнутому вигляді, тобто у вигляді степеневого ряду. Для цього розкладемо дріб у правій частині на елементарні дроби, наприклад, методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(x)=\frac{8}{1-2x-3x^2}=\frac{6}{1-3x}+\frac{2}{1+x}=$$
$$=6\left(1+3x+3^2x^2+\ldots+3^nx^n+\ldots\right)+2\left(1-x+x^2-\ldots+(-1)^nx^n+\ldots\right).$$

Таким чином, явна формула для загального члена заданої послідовності є коефіцієнтом при x^n, тобто

$$a_n=6\cdot3^n+2\cdot(-1)^n.$$

Зауваження. Цю задачу можна було розв’язувати за допомогою характеристичного рівняння, адже задане рекурентне співвідношення лінійне.

Задача 9. Розв’язати рекурентне співвідношення $a_n=2a_{n-1}+3^n, n>0$, $a_0=1$.

Розв'язання. Рекурентне співвідношення нелінійне. Застосуємо метод твірних функцій. Нехай

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+\ldots \tag{5.5}$$

твірна функція шуканої послідовності. Результат множення обох частин рівності (5.5) на *2x* має вигляд

$$2xf(x)=2a_0x+2a_1x^2+\ldots+2a_{n-1}x^n+\ldots$$

Тепер нам потрібен степеневий ряд із загальним членом $3^n x^n$, його розгорнутий вигляд

$$3^0 x^0 + 3x + 3^2 x^2 + \ldots + 3^{n-1} x^{n-1} + 3^n x^n + \ldots = \frac{1}{1-3x} .$$

Знайдемо вираз $f(x) - 2xf(x) - \dfrac{1}{1-3x}$, отримаємо

$$f(x) - 2xf(x) - \frac{1}{1-3x} = a_0 - 1 + (a_1 - 2a_0 - 3)x +$$
$$+ (a_2 - 2a_1 - 3^2)x^2 + \ldots + (a_{n-1} - 2a_{n-2} - 3^{n-1})x^{n-1} + (a_n - 2a_{n-1} - 3^n)x^n + \ldots$$

Оскільки $a_n - 2a_{n-1} - 3^n = 0$ для будь-якого $n > 0$, то з урахуванням початкової умови $a_0 = 1$, отримаємо $f(x)(1-2x) = \dfrac{1}{1-3x}$, звідки $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)(1-3x)}$.

Після розкладу дробу у правій частині на елементарні дроби маємо

$$f(x) = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} =$$
$$= 3(1 + 3x + 3^2 x^2 + \ldots + 3^n x^n + \ldots) - 2(1 + 2x + 2^2 x^2 + \ldots + 2^n x^n + \ldots).$$

Таким чином, явна формула для загального члена заданої послідовності є коефіцієнтом при x^n, тобто

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Задача 10. В урні знаходяться 4 червоних, 5 синіх та 2 зелених кульок. Скільки існує способів вибору 7 кульок, якщо треба обов'язково вибрати 1 червону та 2 синіх кульки?

Розв'язання. Умова обов'язкового вибору 1 червоної кульки дасть для твірної функції множник $(x + x^2 + x^3 + x^4)$, а умова обов'язкового вибору 2 синіх кульок дасть множник $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$. Таким чином, твірна функція має вигляд $(x + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2)$. Нас цікавить коефіцієнт при x^7, він дорівнює 10.

Задача 11. Знайти твірну функцію послідовності $a_n = n$ за допомогою інтегрування.

Розв'язання. За означенням $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Позначимо $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ і проінтегруємо цю суму,

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

Тому $S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, а $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

Задача 12. Знайти твірну функцію $g(x)$ послідовності $c_n = n(n-1)$ за допомогою диференціювання.

Розв'язання. Твірною для послідовності $a_n = n$ є функція $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

Тоді функція $xf'(x)=x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ є твірною для послідовності $b_n = na_n = n^2$, а твірна для заданої послідовності є різницею твірної для b_n і твірної для a_n, тобто $g(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}-\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Серед 100 студентів другого курсу 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку. Причому є студенти, які вивчають по дві мови: 8 – англійську і німецьку, 10 – англійську і французьку, 5 – німецьку і французьку. Відомо також, що 3 студенти вивчають всі 3 мови одночасно. Скільки студентів не вивчають жодної мови?

2. Фірма має 100 підприємств, причому кожне підприємство випускає хоча б одну продукцію виду *A, B, C*. Продукцію всіх трьох видів випускають 10 підприємств, продукцію видів *A* і *B* – 18 підприємств, продукцію видів *A* і *C* – 15 підприємств, продукцію видів *B* і *C* - 21 підприємство. Кількість підприємств, що випускають продукцію *A* дорівнює кількості підприємств, що випускають продукцію *B* і дорівнює кількості підприємств, що випускають продукцію *C*. Знайти кількість всіх підприємств.

3. В групі спортсменів 30 чоловіків. З них 20 займаються плаванням, 18 – легкою атлетикою, 10 – лижами. Плаванням і легкою атлетикою займаються 11 спортсменів, плаванням і лижами – 8, легкою атлетикою і лижами – 6. Скільки спортсменів займаються всіма трьома видами спорту?

4. В класі 20 учнів. На іспитах з історії, математики і літератури 10 учнів не отримали жодної п'ятірки, 6 учнів отримали «п'ять» з історії, 5 – з математики, 4 – з літератури, 2 – з історії та математики, 2 – з історії та літератури, 1 – з математики та літератури. Скільки учнів отримали п'ятірки з усіх предметів?

5. Знайти загальний розв'язок рекурентного співвідношення $u_{n+3} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n$, а також його частинний розв'язок при початкових умовах $u_1 = 1, u_2 = 2, u_2 = 3$.

Відповідь. $u_n = 2^{n-2} + 3^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}$.

6. Знайти загальний розв’язок рекурентного співвідношення $u_{n+3}+3u_{n+2}+3u_{n+1}+u_n=0$, а також його частинний розв’язок при початкових умовах $u_1=-1, u_2=3, u_2=5$.

7. За заданими коренями характеристичного рівняння $x_1=x_2=2, x_3=3$ записати загальний розв’язок і отримати рекурентне співвідношення.

8. Розв’язати рекурентне співвідношення $u_{n+2}+u_n=0$ при початкових умовах $u_1=1, u_2=-3$. Зробити перевірку.

9. Розв’язати рекурентне співвідношення $a_n=2a_{n-1}-3, n>0$, $a_0=4$.

Відповідь. $a_n=2^n+3$.

10. Розв’язати рекурентне співвідношення $a_n=2a_{n-1}+n-1, n>0$, $a_0=1$.

Відповідь. $a_n=2^{n+1}-n-1$.

11. В урні знаходяться 4 червоних, 5 синіх та 2 зелених кульок. Скільки існує способів вибору: а) 7 кульок, б) 7 кульок, якщо треба обов’язково вибрати по дві кульки кожного кольору, в) 7 кульок, якщо треба обов’язково вибрати парну кількість червоних та непарну кількість синіх кульок?

12. Скільки існує натуральних чисел, менших 1000, які не діляться ні на 5, ні на 7?

13. Скільки чисел з набору 1,2,…,2010,2011 не діляться ні на 3, ні на 7?

14. Три хлопці фарбують лист ватману, кожен – в свій колір. Один зафарбував красним 75% листа, другий зафарбував зеленим 70% листа, третій зафарбував синім 65% листа. Скільки відсотків листа буде зафарбовано всіма трьома кольорами?

15. Знайти кількість натуральних дільників числа $N=1\underbrace{00..0}_{40}$,

а) які не є ні точними квадратами (тобто квадратами натуральних чисел), ні точними кубами;

б) які не можна представити у вигляді m^n, де m,n - натуральні числа, причому $n>1$.

16. В країні шість міст *А, Б, В, Г, Д* і *Є*. Їх хочуть зв’язати п’ятьма

авіалініями так, щоб з кожного міста можна було (можливо, з пересадками) долетіти до будь-якого іншого. Скількома різними способами можна це зробити?

17. Розкласти за формулою бінома Ньютона або узагальненому біноміальному правилу:

а) $(1-x^2)^5$, б) $(1+\cos x)^7$, в) $(x+x^2)^6$, г) $(t^2-t^4)^5$, д) $(1-x^2)^{-2}$.

18. Довести, що $n\,C_{n-1}^{m-1} = m\,C_n^m$.

6 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

6.1 Означення графу, види графів

Виникнення теорії графів пов'язують з ім'ям Леонарда Ейлера. У 1736 році в одному зі своїх листів він формулює й пропонує розв'язання задачі про сім кенігсбергських мостів, що стала згодом однією із класичних задач теорії графів.

Задача. Місто розташоване на чотирьох ділянках суші, що межують із берегами ріки. Ці ділянки з'єднані 7 мостами. Чи можна, вийшовши з деякої ділянки суші, обійти всі інші й повернутися у вихідну точку, пройшовши по кожному мосту тільки один раз?

Ейлер запропонував схему, на якій ділянки суші позначені точками A, B, C, D, а мости – дугами неперервних кривих, що з'єднують ці точки (рисунок 6.2).

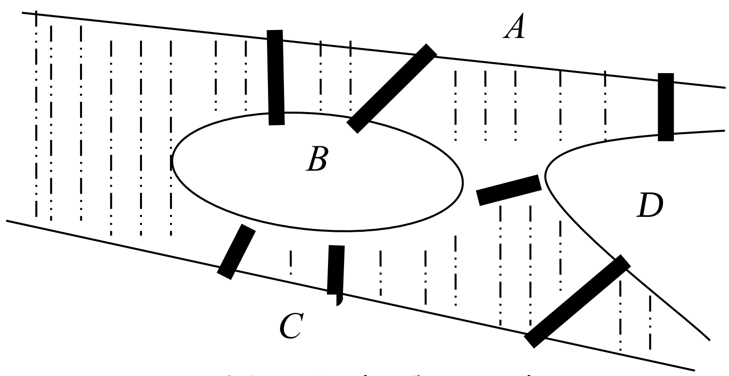


Рисунок 6.1 – Кенігсбергські мости

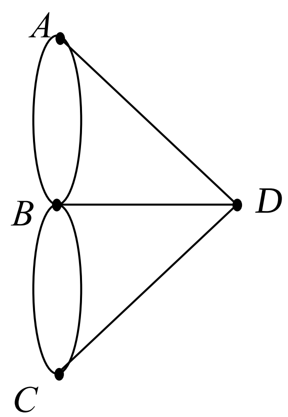


Рисунок 6.2

Означення. Нехай V – скінченна непуста множина. Позначимо через $V^{(2)}$– множину всіх упорядкованих пар різних елементів з V. Нехай E – підмножина множини $V^{(2)}$, тоді пару (V, E) називають *орієнтованим графом* $G = (V, E)$. Елементи з V називаються *вершинами* графа, елементи з E – *дугами* графа.

У подальшому будемо розглядати скінченні графи, тобто графи зі скінченною множиною вершин.

Означення. Якщо елементи з E розглядати як неупорядковані пари, то граф називається *неорієнтованим*, а пари називаються *ребрами*.

Термін «граф» увів Д.Keніг у 1936 році. Для графів з невеликою кількістю вершин зручно користуватися зображенням, подібним до запропонованої Ейлером схеми, а саме вершини графа зображати точками площини, а ребра – неперервними кривими або відрізками.

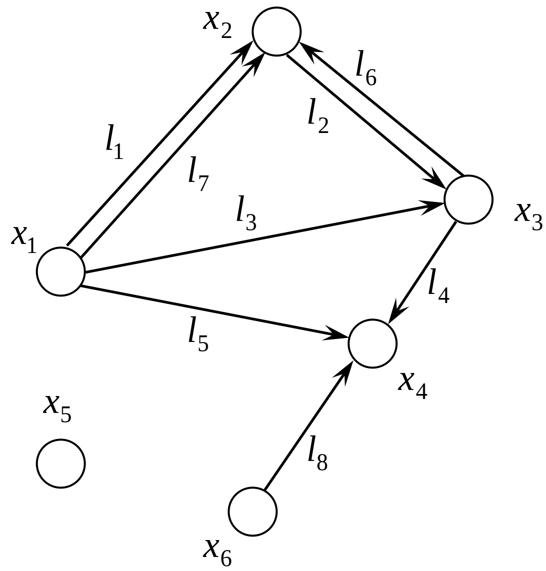


Рисунок 6.3 – Орієнтований граф

Приклад. Нехай $V=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$, $E=\{(a_1,a_2),(a_2,a_2),(a_4,a_5),(a_5,a_6),(a_6,a_7),(a_5,a_7)\}$. Тоді V й E визначають орієнтований граф.

Означення. Пара виду (a,a) називається *петлею*. Якщо пара (a,b) зустрічається у множині E кілька разів, то вона називається *кратним ребром* (*кратною дугою*).

Означення. Граф без петель та кратних ребер називають *звичайним* (або *простим*) *графом*, граф з кратними ребрами – *мультиграфом*, а мультиграф, у якому дозволені петлі – *псевдографом*.

Приклад. Граф із задачі про кенігсбергські мости є мультиграфом. На рисунку 6.3 наведено приклад орієнтованого мультиграфа.

Означення. *Вершини* $u,v\in V$ неорієнтованого графа називаються *суміжними*, якщо $\overline{uv}=\{u,v\}\in E$. Два *ребра* називаються *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину. Говорять, що *вершина* u *інцидентна ребру* $e\in E$, якщо u є одним з кінців ребра e. *Оточенням вершини* u графа називається множина всіх вершин графа, суміжних з вершиною u. Позначають $N(u)$.

Потужність множини $N(u)$ називають *степенем вершини* u *графа* і позначають $S(u)$.

Приклади. На рисунку 6.2 вершини A і B – суміжні, A і C – несуміжні; ребра $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ – суміжні, $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ – несуміжні. Вершина A інцидентна ребру $\overline{AB}$, вершина A не інцидентна ребру $\overline{CD}$, $N(D)=\{A,B,C\}$, $S(D)=3$.

Лема (про рукостискання). Сума степенів усіх вершин графа є парним числом, яке дорівнює подвоєному числу ребер: $\sum_{v\in V} S(v)=2m$, де m – кількість ребер.

Наслідок. Число вершин з непарними степенями в будь-якому графі є числом парним.

Означення. *Граф* називається S – *однорідним***,** якщо степені всіх його вершин однакові та дорівнюють S.

Приклад. Розглянемо граф C_5, який можна зобразити опуклим п'ятикутником. Для кожної його вершини a маємо $S(a)=2$, тобто граф C_5 є 2-однорідним.

Означення. *Матрицею суміжності графа* $G=(V,E)$ називається квадратна матриця порядку n, де $n=|V|$, що складається з нулів і одиниць, причому $a_{ij}=1$, якщо вершини v_i та v_j суміжні, та $a_{ij}=0$ у противному випадку.

Означення. *Матрицею інцидентності неорієнтованого графа* $G=(V,E)$ називається прямокутна матриця $n\times m$, де $n=|V|$, $m=|E|$, що складається з нулів і одиниць, причому $a_{ij}=1$, якщо вершина v_i інцидентна ребру e_j, та $a_{ij}=0$ у противному випадку.

Означення. *Матрицею інцидентності орієнтованого графа* $G=(V,E)$ називається прямокутна матриця $n\times m$, що складається з 0, 1 та –1, причому $a_{ij}=1$, якщо вершина v_i інцидентна

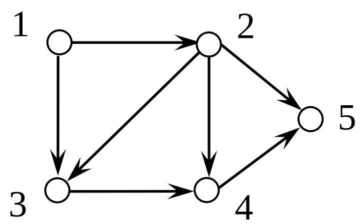


Рисунок 6.4 – Орграф

дузі e_j та є для дуги вхідною вершиною, $a_{ij} = -1$, якщо вершина v_i інцидентна дузі e_j та є для дуги вихідною вершиною, $a_{ij} = 0$, якщо вершина v_i не інцидентна дузі e_j.

Приклад. Складемо матриці суміжності та інцидентності орграфа G (рисунок 6.4):

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (3,4) & (4,5) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}.$$

Замінимо у графі G дуги ребрами (проігноруємо стрілки). Для отриманого неорієнтованого графа G' матриці суміжності та інцидентності набудуть вигляду:

$$A_{G'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{G'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (3,4) & (4,5) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}.$$

Розглянемо деякі види простих графів $G = (V, E)$, $|V| = n$. Якщо $m = |E| = 0$, то G називають *порожнім графом* і позначають символом N_n. Якщо $m = C_n^2$, то G називають *повним графом* або *клікою*, його позначають символом K_n.

Якщо множина V вершин простого графа допускає розбиття на дві підмножини V_1 та V_2 $(V_1 \cap V_2 = \varnothing)$ так, що не існує ребер, що поєднують вершини однієї і тієї ж підмножини, то граф називається *дводольним* або *біграфом* (рис. 6.5). Дводольний граф

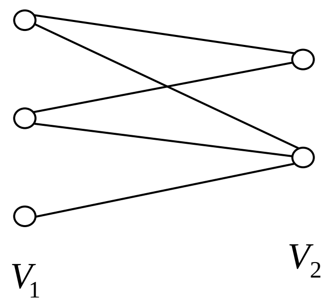


Рисунок 6.5 – Дводольний граф

називається *повним дводольним графом* $K_{m,n}$, якщо V_1 містить m вершин, V_2 містить n вершин та для довільних $v \in V_1$ та $w \in V_2$ ребро $(v,w) \in K_{m,n}$.

Означення. Дано граф $G = (V,E)$. Послідовність $v_1, l_1, v_2, l_2, ..., l_k, v_{k+1}$ вершин і ребер графа така, що для будь-якого ребра l_i виконується $l_i = \overline{v_i v_{i+1}}$, де $i = \overline{1,k}$, називають *маршрутом*, що з'єднує вершини v_1 та v_{k+1}, або (v_1, v_{k+1})-маршрутом. *Вершини* v_1 та v_{k+1} називаються *кінцевими*, а інші – *внутрішніми вершинами* маршруту. *Маршрут* називають *замкненим*, якщо $v_1 = v_{k+1}$. Число ребер у маршруті називається його *довжиною*.

Зауважимо, що при записі маршруту часто виписують лише послідовність вершин графа, що входять у цей маршрут, або лише послідовність його ребер, тобто $v_1, v_2, ..., v_{k+1}$, або $l_1, l_2, ..., l_k$.

Кажуть, що *вершина* w *графа* G *досяжна з вершини* v, якщо або $w = v$, або існує маршрут, що поєднує вершину v з вершиною w.

Граф називається *зв'язним*, якщо для довільних двох його вершин w та v існує маршрут, що з'єднує ці вершини.

Означення. Маршрут, всі ребра якого різні, називається *ланцюгом*, а ланцюг, у якому всі вершини різні – *простим ланцюгом*. Замкнений ланцюг називається *циклом*, а замкнений простий ланцюг – *простим циклом*.

Теорема 6.1 Якщо A – матриця суміжності графа, то елемент c_{ij} матриці A^k дорівнює кількості маршрутів довжини k, кожен з яких поєднує вершини i та j даного графа.

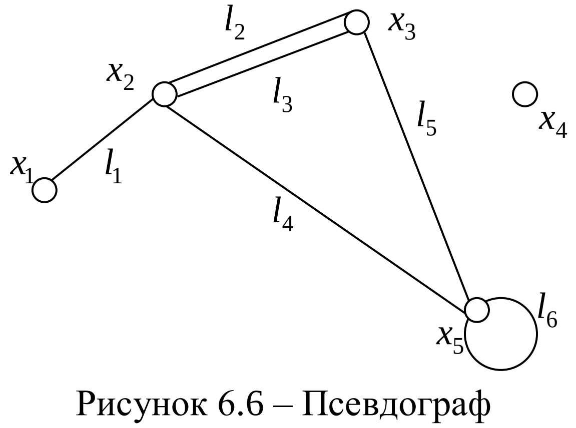


Рисунок 6.6 – Псевдограф

Приклад. На рисунку 6.6 наведено псевдограф. У ньому (l_2, l_5, l_6) – ланцюг, (l_1, l_2, l_5) – простий ланцюг, (l_2, l_3, l_4, l_5) – цикл, (l_2, l_4, l_5) – простий цикл.

Зауваження. Для орієнтованих

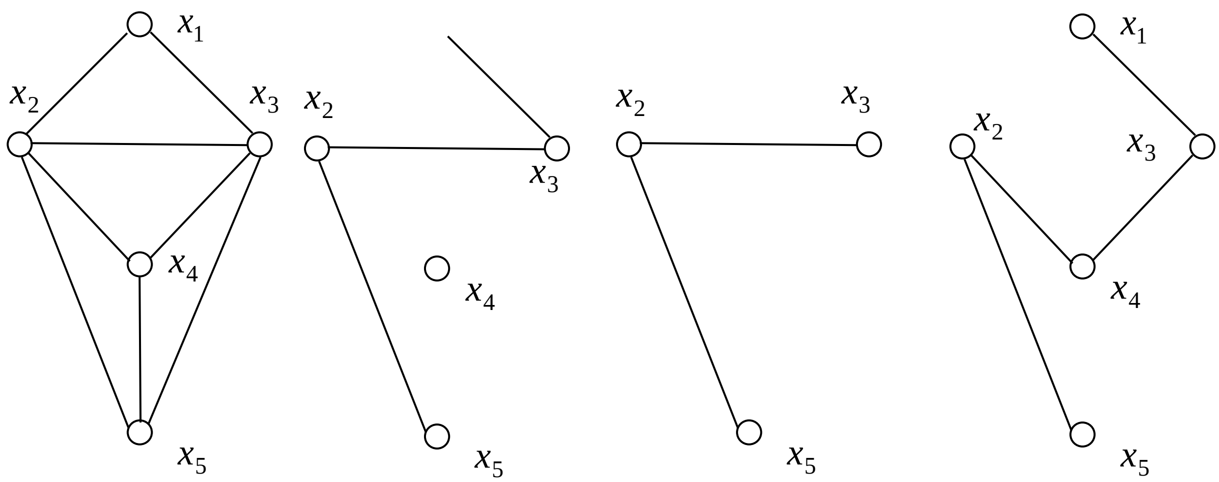
графів всі наведені означення зберігаються із заміною термінів маршрут на шлях, а цикл на контур. Наприклад:

а) вершина w орграфа D досяжна з вершини v, якщо або $w = v$, або існує шлях з вершини v у вершину w;

б) орграф називається *сильно зв'язним*, якщо для довільних двох його вершин v та w існує шлях із v у w;

в) орграф називається *односторонньо зв'язним*, якщо для довільних двох його вершин хоча б одна досяжна з іншої.

Означення. Граф $G' = (V', W')$ називається *частиною графа* $G = (V, W)$, якщо $V' \subset V$, $W' \subset W$. Частина графа $G' = (V', W')$, яка разом із деякою підмножиною його ребер містить всі інцидентні їм вершини, називається *підграфом графу* G. Частина графа, яка разом з деякою підмножиною його ребер містить всі вершини $(V' = V,\ W' \subset W)$, називається *суграфом*.



а) б) в)

Рисунок 6.7 – Неорієнтований граф та його а) частина; б) підграф; в) суграф.

Дамо означення деяких *операцій над графами*.

1) Граф G називається *об'єднанням графів* G_1 і G_2, якщо множини його вершин та ребер є відповідно об'єднанням множин вершин та ребер вихідних графів: $V_G = V_{G_1} \cup V_{G_2}$, $W_G = W_{G_1} \cup W_{G_2}$ (рисунок 6.8).

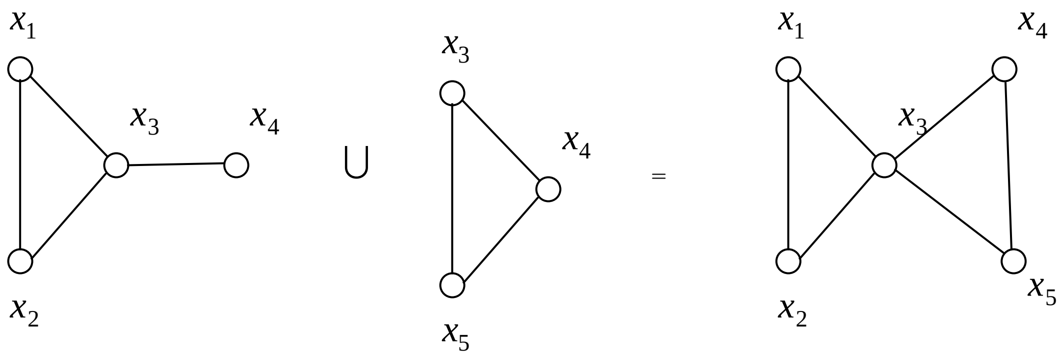


Рисунок 6.8 – Об'єднання графів

2) Граф G називається *перетином графів* G_1 і G_2, якщо множини його вершин та ребер є відповідно перетином множин вершин та ребер вихідних графів: $V_G = V_{G_1} \bigcap V_{G_2}$, $W_G = W_{G_1} \bigcap W_{G_2}$. Так перетином графів на рис. 6.8 є граф $G = (V,W)$, множину вершин якого складають x_3 та x_4, а множина ребер містить одне ребро $\{x_3, x_4\}$.

3) Нехай $G_1 = (V_1, W_1)$ та $G_2 = (V_2, W_2)$ – два графи. *Добутком* $G_1 \times G_2 = G$ цих *графів* називається граф, для якого $V_G = V_1 \times V_2$ – декартовий добуток множин вершин вихідних графів, а множина ребер W_G визначається наступним чином: вершини (v_1, w_1) та (v_2, w_2) суміжні у графі G тоді і тільки тоді, коли $v_1 = v_2$, а w_1 та w_2 суміжні в графі G_2, або $w_1 = w_2$, а v_1 та v_2 суміжні в графі G_1 (рисунок 6.9).

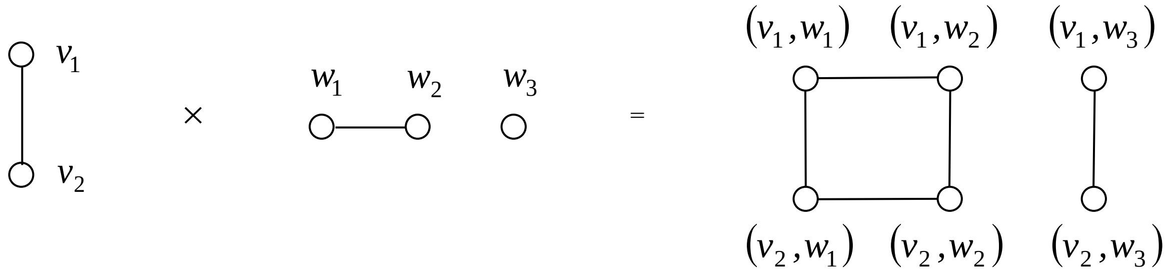


Рисунок 6.9 – Добуток графів

4) Нехай v та w – дві вершини графа G. Операція *ототожнювання* (злиття) *вершин* полягає у наступному: з графа G треба видалити вершини v та w і приєднати нову вершину u, з'єднавши її ребрами з кожною вершиною, що

входить в об’єднання оточень вершин v та w.

5) *Стягуванням по ребру* $l=(v,w)$ називається операція ототожнювання суміжних вершин v та w.

6) Нехай v – одна з вершин графа G. Розіб’ємо її оточення довільним чином на дві множини M та N і виконаємо таке перетворення графа G: видалимо вершину v разом з інцидентними їй ребрами, додамо нові вершини u та w і ребро, що їх поєднує $l=(u,w)$. Вершину u поєднаємо ребром з кожною вершиною множини M, а вершину w – з кожною вершиною множини N. Така операція називається *розщепленням вершини*.

7) *Доповненням* $\overline{G}=(V,W')$ *графа* G називається такий граф, що для всіх пар вершин $u,v\in V$ ребро між u та v в графі $\overline{G}$ існує лише тоді, коли воно відсутнє в графі G.

Наприклад, $\overline{N}_n=K_n$, $\overline{K}_n=N_n$.

6.2 Деякі властивості графів

Лема. Об’єднання двох не співпадаючих (u,v)-ланцюгів містить простий цикл.

Теорема 6.2 Для будь-якого графа G або він сам, або граф $\overline{G}$ (доповнення графа G) є зв'язним.

Теорема 6.3 Нехай граф $G=(V,E)$ зв'язний і $l\in E$, тоді

а) якщо l належить деякому циклу, то граф $G\backslash l$ є зв'язним;

б) якщо l не належить жодному циклу, то $G\backslash l$ має рівно дві компоненти зв’язності.

Теорема 6.4 (критерій Кеніга дводольності графа). Зв'язний граф G є дводольним тоді й тільки тоді, коли він не має циклів непарної довжини.

На підставі останньої теореми створений **алгоритм розпізнавання дводольності графа**. Цей алгоритм складається з наступних кроків:

1) У графі G довільній вершині v приписуємо номер 0.

2) Усім вершинам, суміжним з вершиною v, приписуємо номер 1.

3) Усім вершинам, суміжним з вершинами, яким приписаний номер 1, приписуємо номер 2 і т.д., поки всі вершини не будуть пронумеровані.

4) Випишемо дві множини: V_1 - множина вершин з парними номерами, V_2 – з непарними номерами. Якщо обидва графа виявляться порожніми, то вихідний граф G – дводольний.

6.3 Ізоморфізм графів. Інваріанти графа відносно ізоморфізмів

Означення. *Графи* G й H називаються *ізоморфними*, якщо існує таке взаємно однозначне відображення f між множинами їх вершин, яке зберігає суміжність вершин. Позначають $G \cong H$.

Таким чином, якщо графи G та H ізоморфні й вершини u та v графа G суміжні, то вершини $f(u)$ й $f(v)$ графа H теж суміжні. Саме відображення f називається *ізоморфізмом*.

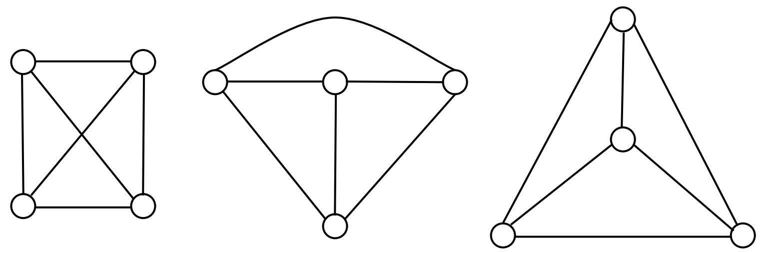
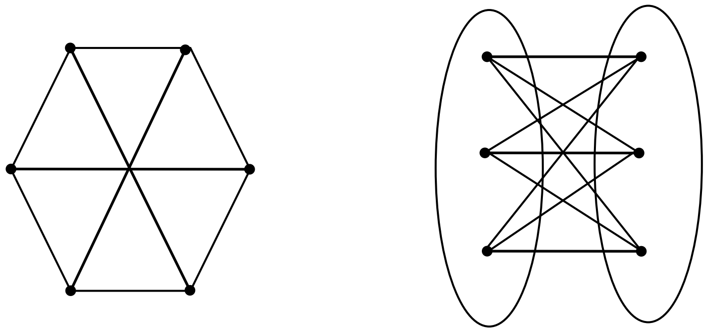


Рисунок 6.10 – Три попарно ізоморфні графи

Очевидно, що графи, які мають однакові зображення та відрізняються лише нумерацією вершин та ребер, є ізоморфними.

Приклад. Граф на рис. 6.11а є повним дводольним графом $K_{3,3}$. Він ізоморфний графу на рис. 6.11б.



а б

Рисунок 6.11 – Дводольний граф (а) та ізоморфний йому граф $K_{3,3}$ (б)

Теорема 6.5 (критерій ізоморфності). Прості графи G і H зі скінченними множинами $V(G)=\{g_1,...,g_n\}$ і $V(H)=\{h_1,...,h_n\}$ вершин ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжності $A(G)$ та $A(H)$ пов'язані співвідношенням $A(G)=T^t \cdot A(H)\cdot T$, де $T=(t_{ij})=\begin{cases}1, при\ f(g_i)=h_i, \\ 0, при\ f(g_i)\neq h_i.\end{cases}$

Зауважимо, що сформульована теорема не дає ефективний спосіб дослідження двох графів на ізоморфність. Далі ми розглянемо ряд характеристик графів, які дають ефективний спосіб доведення неізоморфності двох заданих графів.

Означення. *Інваріантом графа відносно ізоморфізму* називають властивість графа, яка зберігається при цьому ізоморфізмі.

Означення. *Інваріант* $f(G)$ графа G відносно ізоморфізму f називають *неповним*, якщо з $G\cong H \Rightarrow f(G)=f(H)$. Якщо ж $G\cong H \Leftrightarrow f(G)=f(H)$, то *інваріант* називається *повним.*

Наприклад, n – число вершин та m– число ребер є інваріантами графа відносно ізоморфізму, що безпосередньо випливає з означення ізоморфізму графів.

Розглянемо ще кілька інваріантів графа щодо ізоморфізмів.

1) *Вектор степенів графа*.

Означення. Нехай послідовність $S_1,S_2,...,S_n$ степенів усіх вершин графа впорядкована так, що $S_1\leq S_2\leq ...\leq S_n$. Набір $S(G)=(S_1,S_2,...,S_n)$ називають *вектором степенів графа*.

З означення ізоморфізму графів випливає, що коли $G_1 \cong G_2$, то $S(G_1) = S(G_2)$, тобто вектор степенів є інваріантом графа відносно ізоморфізму. Очевидно, що коли вектори степенів двох графів різні, то ці графи не ізоморфні. Але якщо вектори степенів двох графів збігаються, то із цього ще не випливає ізоморфність цих графів.

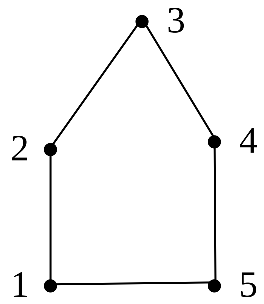


Рисунок 6.12 – Граф C_5

2) *Щільність графа*.

Означення. *Щільністю графа* називається число вершин найбільшого повного підграфа в цьому графі. Позначають $\varphi(G)$.

Наприклад, $\varphi(K_n) = n$, $\varphi(C_5) = 2$ (рис. 6.12).

Якщо $G_1 \cong G_2$, то $\varphi(G_1) = \varphi(G_2)$. Отже, щільність графа – ще один інваріант. Але знову, якщо два графи мають однакові щільності, то графи не обов'язково ізоморфні.

3) *Нещільність графа*.

Означення. *Нещільністю графа* $\varepsilon(G)$ називається число вершин найбільшого порожнього підграфа в цьому графі.

Останні два інваріанта зв'язані між собою наступними співвідношеннями: $\varepsilon(G) = \varphi(\overline{G})$, $\varphi(G) = \varepsilon(\overline{G})$.

4) *Хроматичне число графа і хроматичний многочлен.*

Означення. *Правильним розфарбуванням графа* G *у* γ *кольорів* називається таке розфарбування вершин графа, при якому усі кольори використані, кожна вершина пофарбована, і будь-які суміжні вершини пофарбовані різними кольорами.

Означення. *Хроматичним числом графа* називається найменше натуральне число $\gamma(G)$ таке, що фарбування у γ кольорів є правильним.

Приклад. Для даного графа *G* (рисунок 6.13) наступне розфарбування: 1 – синій, 2 – червоний, 3 – зелений є правильним і визначає хроматичне число $\gamma(G) = 3$.

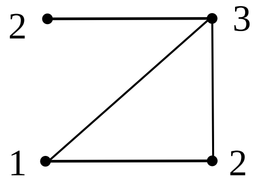


Рисунок 6.13 – Ілюстрація до прикладу

Хроматичне число графа є його інваріантом відносно ізоморфізму.

Означення. Два правильних *розфарбування графа* G кількістю i фарб називаються *різними*, якщо існує така пара несуміжних вершин цього графа, яка при одному розфарбуванні пофарбована однією фарбою, а при іншому – різними фарбами.

Означення. *Хроматичним многочленом графа* називається многочлен вигляду

$$P(G) = a_\gamma x^\gamma + a_{\gamma+1} x^{\gamma+1} + \ldots + a_n x^n,$$

де x – формальна змінна, показник i степеня x^i, $i = \overline{\gamma, n}$ дорівнює кількості фарб в розфарбуванні, a_i – кількість різних правильних розфарбувань графа в i кольорів, γ – хроматичне число графа.

Приклади. $P(K_n) = x^n$, оскільки для повного графа K_n існує єдине розфарбування в n кольорів. $P(N_n) = x$, бо для розфарбування порожнього графа достатньо одного кольора.

Алгоритм побудови хроматичного многочлена довільного неповного графа складається з наступних кроків:

1крок. До даного графа G додаємо нове ребро. Тоді в розфарбуванні графа G кінці цього ребра пофарбовані різними кольорами. Отриманий граф позначимо символом G'.

2крок. Стягнемо G' по новому ребру. Тоді при розфарбуванні графа G кінці цього ребра пофарбовані одним кольором. Отриманий граф позначимо символом G''.

3крок. Якщо G' та G'' – повні графи K_p і K_q відповідно, то хроматичний многочлен графа G має вигляд $P(G)=x^p+x^q$. Якщо принаймні один з цих графів неповний, то для нього повертаємось до кроку 1).

Очевидно, що за скінченне число кроків алгоритм закінчить роботу.

5) *Число компонент графа.*

Означення. *Граф* $G=(V,E)$ називається *зв'язним,* якщо множину V його вершин не можна розбити на непусті підмножини $V_1,V_2,...,V_k$ так, щоб будь-які дві підмножини не перетиналися та будь-які дві вершини з різних підмножин були не суміжними. В противному випадку граф називається незв'язним, а кожну з підмножин V_i, $i=\overline{1,k}$ називають *компонентою зв'язності* або просто компонентою графа. Число компонент графа позначають символом $K(G)$.

Наприклад, $K(N_n)=n,\quad K(K_n)=1$.

Якщо $G_1\cong G_2$, то $K(G_1)=K(G_2)$.

6) *Число Хадвігера*.

Означення. Числом Хадвігера $\eta(G)$ зв'язного графа G називають число вершин у найбільшому повному графі, до якого можна перетворити даний граф за допомогою операції стягування по ребру.

Якщо $G_1\cong G_2$, то $\eta(G_1)=\eta(G_2)$.

7) *Міні–код і максі–код.*

Нагадаємо, що матриця суміжності графа завжди є симетричною, тому для її задання досить указати тільки елементи над головною діагоналлю в деякому порядку, наприклад, у наступному $a_{12},a_{13},a_{23},a_{14},...,a_{n-1,n}$.

Означення. *Двійковим кодом* матриці суміжності графа, відповідним до деякої нумерації вершин графа, називають число виду

$$a_{12}\cdot 2^0+a_{13}\cdot 2^1+a_{23}\cdot 2^2+...+a_{n-1,n}\cdot 2^{C_n^2-1}. \qquad (6.1)$$

Існує *n!* різних нумерацій вершин графа (з n вершинами), а, отже, і стільки ж двійкових кодів (серед них можуть виявитися рівні). Найменший із усіх двійкових кодів матриць суміжності графа, які визначаються усіма можливими нумераціями вершин графа, називається *міні-кодом графа* (позначається $\underset{\bullet}{\mu}(G)$), а найбільший – *максі-кодом графа (позначається* $\overset{\bullet}{\mu}(G)$*).*

За двійковим кодом графа й за заданим числом його вершин можна відновити граф з точністю до ізоморфізму.

Приклад. Нехай двійковий код матриці суміжності дорівнює 27, $n = 4$. Представимо число 27 у двійковій системі числення $(27)_{10} = (11011)_2$; $C_n^2 - 1 = C_4^2 - 1 = 6 - 1 = 5$ – показник останнього степеня числа 2 в розкладі (6.1), тобто $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5$. Коефіцієнти цього розкладу дають інформацію про суміжність вершин. Можемо відновити граф з точністю до ізоморфізму (на рис. 6.14 дано два можливих зображення графа).

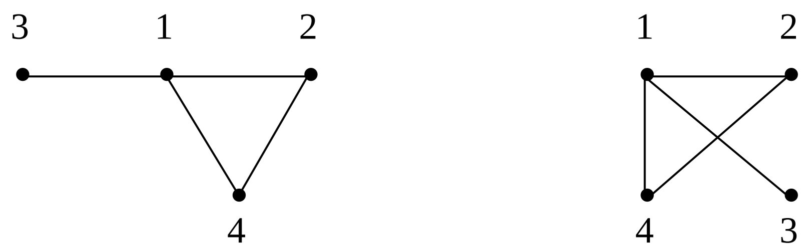


Рисунок 6.14 – Два ізоморфних графа

Той же двійковий код при $n = 5$ дає $C_5^2 - 1 = 9$ та розклад

$$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^9.$$

Відповідний граф зображено на рис 6.15.

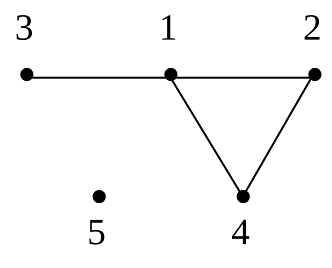


Рисунок 6.15 – Відновлений за двійковим кодом граф

Якщо задано максі–код графа G, то для його відновлення з точністю до ізоморфізму число вершин указувати не потрібно. Очевидно, що у розкладі (6.1) максі–коду коефіцієнт $a_{n-1,n} = 1$.

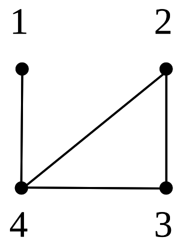


Рисунок 6.16 – Відновлений за максі-кодом граф

Приклад. Нехай $\dot{\mu}(G) = 60$. Оскільки $(60)_{10} = (111100)_2$, то $C_n^2 - 1 = 5$ або $\frac{n(n-1)}{2} = 6$. Ми отримали квадратне рівняння $n^2 - n - 12 = 0$, коренями якого є числа $n_1 = 4, n_2 = -3$. Отже, $|V(G)| = 4$ і

$$\dot{\mu}(G) = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5.$$

Граф, що відповідає цьому розкладу, зображено на рис. 6.16.

Увага! Всі розглянуті інваріанти графа, крім максі-кода, були неповними. Максі-код є повним інваріантом.

6.4 Дерева. Остовні дерева зв’язного графа

Означення. *Деревом* називається зв'язний граф без циклів. *Лісом* називається незв’язний граф, кожна компонента якого є деревом.

Означення. Підграф $G_1 = (V_1, E_1)$ графа $G = (V, E)$ називається його *остовним деревом*, якщо $G_1 = (V_1, E_1)$ – дерево та $V_1 = V$. По-іншому, остовним деревом зв’язного графа називається його зв’язний ациклічний суграф.

Теорема 6.6 Будь-який зв’язний граф містить хоча б одне остовне дерево.

Означення. *Матрицею Кіркгофа* зв’язного графа G називається матриця вигляду $B(G) = (b_{ij}) = \begin{cases} S(v_i), & при\ \ i = j, \\ -1, & при\ \ (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & при\ \ i \neq j,\ (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$

Теорема 6.7 (Кіркгофа). Кількість остовних дерев у зв'язному графі G з $n \geq 2$ вершинами дорівнює алгебраїчному доповненню будь-якого елемента матриці Кіркгофа цього графа.

Наслідок. Нехай $K(G)$ число компонент графа з $n > 1$ вершинами, тоді $K(G) = n - rangB(G)$.

Наслідок (теорема Келі). Число остовних дерев повного графа з $n > 1$ вершинами дорівнює n^{n-2} (або інакше: Число помічених дерев з n вершинами дорівнює n^{n-2}).

Теорема 6.8 Наступні п'ять тверджень еквівалентні (p – число вершин, q – число ребер):

1) G – дерево;

2) G не має циклів та $q = p - 1$;

3) G – зв'язний граф та $q = p - 1$;

4) G – зв'язний граф, але при видаленні довільного ребра стає незв'язним;

5) G не має циклів, але при додаванні довільного ребра на тих самих вершинах з'являється цикл.

Граф, що складається з однієї вершини, будемо теж вважати деревом.

Вершина дерева, степінь якої дорівнює 1, називається висячою. У будь-якому дереві з $n \geq 2$ вершинами існує не менше двох висячих вершин. Цей факт випливає з леми про рукостискання.

Алгоритм побудови остовного дерева зв'язного графа (пошук у глибину)

Розв'язання багатьох прикладних задач зводяться до побудови остовного дерева, тому необхідно мати ефективні алгоритми. Нехай G – зв'язний граф, $|V| = n$, $|E| = m$.

1. Зафіксуємо вершину v_0 і припишемо їй №1.

2. Виберемо будь-яку вершину x з оточення $N(v_0)$ вершини v_0 і

припишемо їй №2, а ребро $\overline{v_0 x}$ позначимо 1п (пряме ребро).

3. Переходимо до вершини з №2. Можливі такі ситуації:

– усі вершини з оточення цієї вершини вже мають номери, але є інцидентне їй непомічене ребро; його позначають наступним номером із символом “з” (зворотне ребро), наприклад 7з;

– усі ребра, інцидентні цій вершині, позначені на попередніх кроках, тоді пошук повертається у вершину з попереднім номером.

4. Алгоритм закінчує роботу, коли всі ребра графа будуть пронумеровані (рис. 6.17).

Позначимо: E_+ – прямі ребра, а E_- – зворотні ребра.

Твердження. Граф $T = (V, E_+)$ – остовне дерево даного графа *G*, граф $\overline{T} = (V, E_-)$ є доповненням до *T*.

Цей алгоритм має складність $n + m$, тобто лінійну складність.

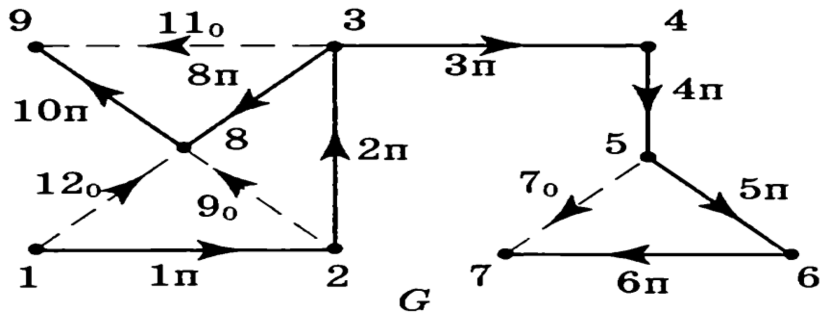


Рисунок 6.17 – Зв’язний граф та його остовне дерево

Означення. *Цикломатичним числом* γ графа називається мінімальна кількість ребер, яку необхідно вилучити із графа, щоб він став деревом.

Цикломатичне число визначається за формулою: $\gamma = N - (k - 1)$, де N – кількість ребер, *k* – кількість вершин.

6.5 Центр дерева. Алгоритм установлення ізоморфізму дерев

Означення. Нехай G – дерево. Припишемо до кожної його вершини число (номер), яке дорівнює відстані до найбільш віддаленої вершини. Це число називають *ексцентриситетом вершини*. *Центральною вершиною* називають вершину з найменшим номером (у ній досягається мінімум ексцентриситету).

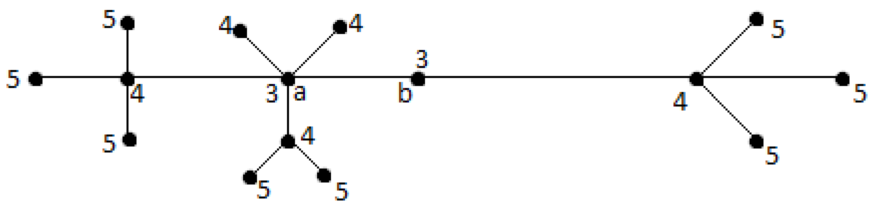


Рисунок 6.18 – Граф з позначеними ексцентриситетами

На рисунку 6.18 вершини a,b центральні. Сукупність центральних вершин, називають *центром дерева*.

Теорема 6.9 Центр дерева складається з однієї або двох центральних вершин.

Означення. *Дерево* з одним центром називається *центральним*, а із двома – *біцентральним*.

Для довільних графів проблема ізоморфізму дотепер не вирішена, тобто немає ефективних способів для розпізнавання ізоморфних графів.

У випадку ж дерев проблема ізоморфності повністю вирішена і **алгоритм** установлення ізоморфізму дерев полягає у наступному:

1) Нехай $T=(V,E)$ – дерево з $n\geq 3$ вершинами, V_1 – множина його висячих вершин. Припишемо їм перший рівень I.

2) Якщо $T_1=(V\setminus V_1,E_1)$ має не менше трьох вершин, то його висячим вершинам припишемо другий рівень II, і т.д.

Через скінченну кількість кроків одержимо дерево, у якого менше трьох вершин. Це будуть центральні вершини й вони одержують вищий рівень.

3) Наступний крок – кортежування (кортеж – упорядкований набір чисел)

– вершинам першого рівня припишемо число 1;

– вершині x другого рівня припишемо кортеж $(k+1)\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{k}$, де k – число суміжних з x вершин рівня I;

– вершині y третього рівня припишемо кортеж $(l+1)\cdot j_1\cdot j_2\ldots\cdot j_m$, де l – число всіх вершин I і II рівнів, які передують вершині y, а $j_1\cdot j_2\ldots\cdot j_m$ – кортежі суміжних з y вершин I і II рівнів і т.д.

При цьому однакові кортежі стоять поруч, а різні кортежі порівнюються покомпонентно як натуральні числа.

На рисунку 6.19 позначені рівні всіх вершин дерева, а також відповідні їм кортежі. Для зручності набір чисел в кортежі, який є кортежем попередньої вершини підкреслено рискою.

Запропонований алгоритм є ефективним і зручним для реалізації на ЕОМ.

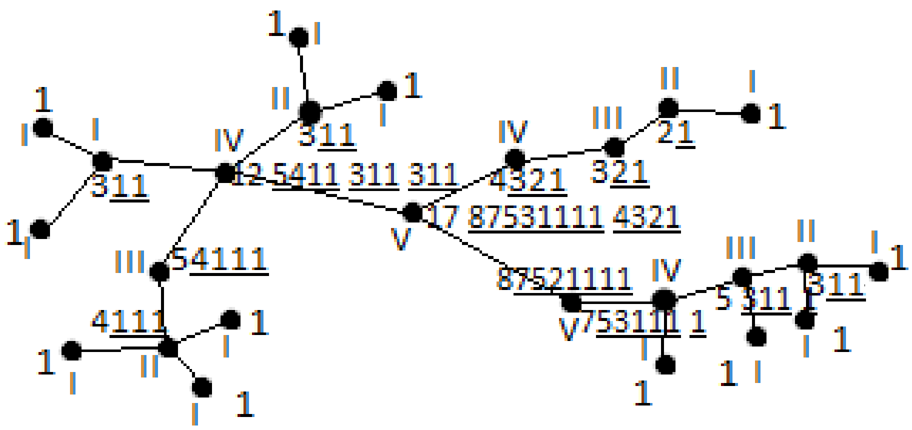
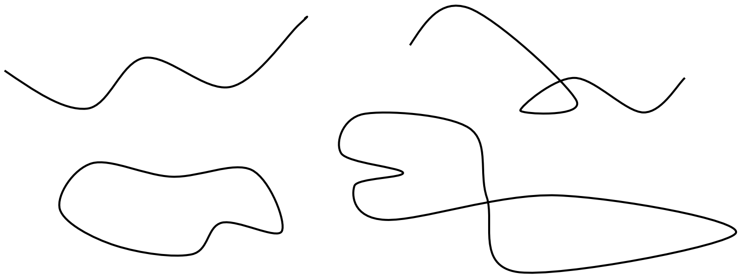


Рисунок 6.19 – Дерево з позначеними рівнями всіх вершин

Теорема 6.10 Дерева T і T' ізоморфні тоді і тільки тоді, коли кортежі центральних вершин збігаються.

6.6 Планарність і укладання графів

Жордановою кривою називається неперервна крива на площині без самоперетинів. Якщо початкова і кінцева точки кривої збігаються, то крива називається замкненою.



а б

Рисунок 6.20 – Приклади жорданових (а) та нежорданових (б) кривих

Означення. *Плоским графом* називається граф, вершини якого є точками площини, а ребра – жордановими кривими, що не мають спільних точок, крім інцидентних їм вершин.

Граф називається *планарним*, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу. Про планарний граф говорять, що він укладається на площині.

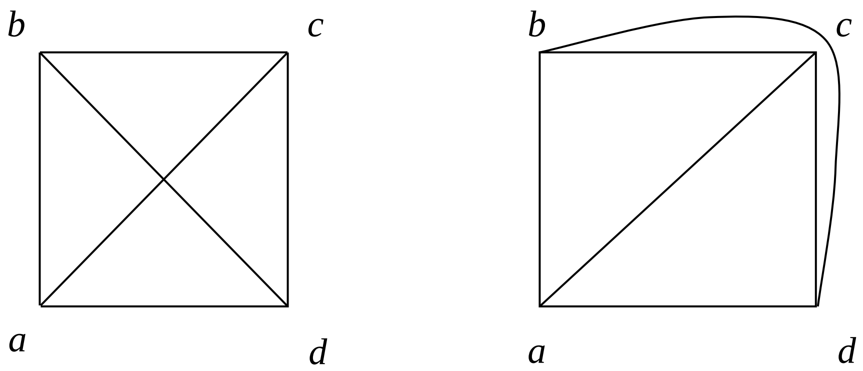


Рисунок 6.21 – Неплоский (але планарний) та плоский графи

Теорема 6.11 Будь-який граф укладається у тривимірний простір.

Теорема 6.12 Граф укладається на сфері тоді і тільки тоді, коли він планарний.

Цілком зрозумілими є такі твердження:

- Будь-який підграф планарного графа є планарним;
- Якщо граф містить непланарний підграф, то він сам непланарний.

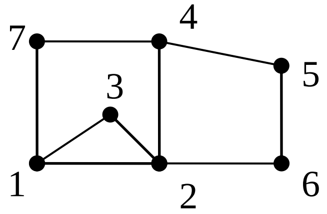


Рисунок 6.22 – Грані плоского графа

Означення. Нехай G – плоский граф на площині S. *Точка* x цієї площини називається *диз'юнктною* з G, якщо x не є вершиною і не належить жодному ребру. *Дві точки* x та y площини S називаються *еквівалентними*, якщо вони диз'юнктні з G і якщо їх можна з'єднати такою жордановою кривою, всі точки якої є диз'юнктними з G. Це відношення еквівалентності розбиває точки площини на класи, кожен з яких називається *гранню плоского графа*.

Означення. *Границею грані* називається простий цикл, що обмежує грань. Дві *грані* називаються *сусідніми*, якщо їх границі мають хоча б одне спільне ребро.

Існує так звана нескінченна грань, тобто частина площини, що лежить поза графом і обмежена зсередини простим циклом

Приклад. Граф на рисунку 6.22 має такі грані: (2, 4, 5, 6, 2), (1, 2, 3, 1), (7, 4, 2, 3, 1), (1, 7, 4, 5, 6, 2, 1). Остання грань є нескінченною.

Теорема (Ейлера). Нехай G – зв'язний плоский граф, в якому *В* вершин, *Р* ребер і *Г* граней. Тоді має місце рівність $B-P+\varGamma=2$.

Доведення. Побудуємо остовне дерево графа G. В ньому *В* вершин, *В-1* ребер і *1* (зовнішня) грань. Тому $\mathrm{B}-\mathrm{P}+\Gamma=B-(B-1)+1=2$, тобто рівність має місце. Далі будемо по черзі додавати до цього дерева ребра графа, які не входять до дерева. На кожному кроці число вершин не змінюється, а число ребер і число граней збільшується на 1. Таким чином, після першого кроку отримаємо $\mathrm{B}'-\mathrm{P}'+\Gamma'=B-(P+1)+(\varGamma+1)=2$. Такий самий результат отримуємо на кожному кроці, поки не додамо всі ребра графа G.

Наслідок. Якщо G – зв'язний плоский граф з $B\geq 3$ вершинами, то $P\leq 3B-6$.

Теорема 6.13 Графи K_5 та $K_{3,3}$ не є планарними.

Доведення (для K_5). Припустимо супротивне, граф K_5 є планарним. Розглянемо ізоморфний йому плоский граф. Для нього за наслідком 1 виконується нерівність $P \leq 3B - 6$. Але при В=5, Р=10 ця нерівність набуває вигляду $10 \leq 9$, що і приводить до суперечності.

(для $K_{3,3}$). Так само припустимо, що він планарний. Маємо В=6, Р=9. Тоді за формулою Ейлера для його укладки на площину отримаємо Г=5. В той же час кожна грань графа $K_{3,3}$ обмежена не менше ніж 4 ребрами і кожне ребро або належить двом граням, або є мостом (міст – це ребро графа, видалення якого збільшує число компонент зв'язності цього графа). Отже, отримаємо нерівність $2P \geq 4Г$ або $18 \geq 20$ - суперечність. Теорему доведено.

Виявляється, що графи K_5 та $K_{3,3}$ єдині не планарні графи в тому сенсі, що будь-який непланарний граф містить як підграф хоча б один із цих графів.

Теорема 6.14 (критерій планарності Понтрягіна-Куратовського). Граф планарний тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, які можна стягнути до графів K_5 або $K_{3,3}$.

Зауваження. Теорема Ейлера була доведена у 1758 році. Для незв'язного плоского графа вона має вигляд $B - P + Г = k + 1$, де k – число компонент графа.

6.7 Обходи графів. Ейлерові графи. Гамільтонові графи

Означення. *Цикл,* що містить усі ребра графа називається *ейлеровим*. *Граф* називається *ейлеровим*, якщо в ньому існує ейлеровий цикл.

З означення циклу випливає, що в ньому немає ребер, які повторюються, тобто кожне ребро входить у цикл тільки один раз.

На задачу про Кенігсбергські мости тепер можна подивитися в такий спосіб: чи існує в графі, що моделює цю задачу, ейлерів цикл?

Інші задачі про ейлерові графи:

- Листоноша повинен рознести пошту по виділеному йому району, для чого він проходить по всім без винятку вулицям цього району й вертається на пошту. Чи можна по кожній вулиці пройти лише один раз?
- Так само машини, що поливають вулиці, посипають вулиці піском тощо.

Теорема (критерій ейлеровості графів) Зв'язний граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Приклад. Граф із задачі про Кенігсбергські мости (рис. 6.2) не ейлерів, так як в ньому є вершини з непарними степенями.

Теорема Флері (про алгоритм побудови ейлерового циклу) Нехай G – ейлеровий граф, тоді наступна процедура завжди можлива й веде до ейлерового циклу:

1. Нехай v – довільна вершина.

2. Ідемо від v по ребрах графа в такий спосіб:

а) «видаляємо» пройдене ребро та ізольовані вершини, що утворюються при цьому. Записуємо впорядковану послідовність витертих ребер;

б) на кожному етапі ідемо по мосту тільки в тому випадку, коли немає іншої можливості.

Означення. *Мостом* називається ребро графа, видалення якого веде до збільшення числа компонент зв’язності, зокрема, якщо граф був зв'язним, то він стає незв'язним.

Приклад. Побудуємо ейлерів цикл (рис. 6.23).

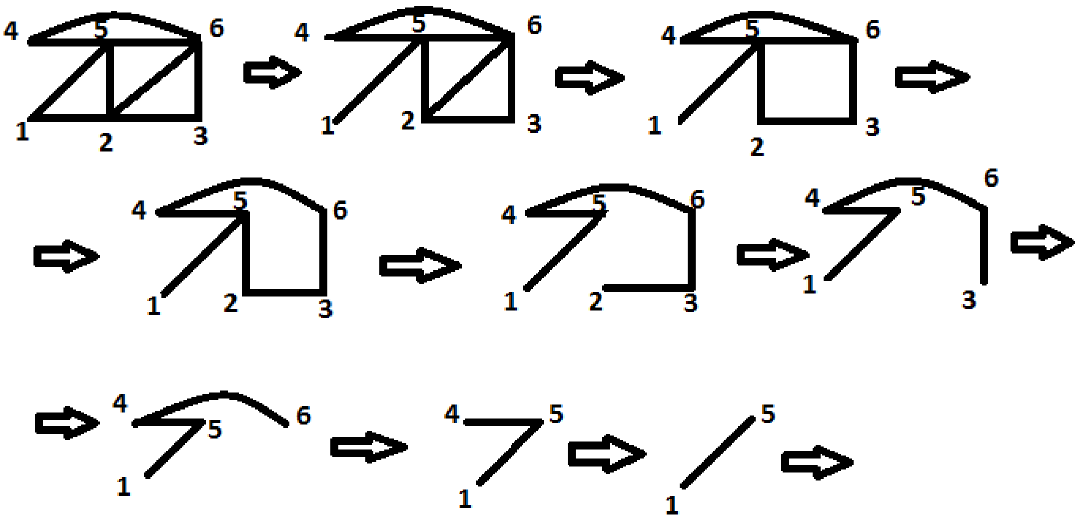


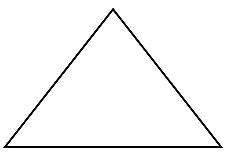
Рисунок 6.23 – Послідовне видалення ребер

1. Нехай вибрано вершину 1.

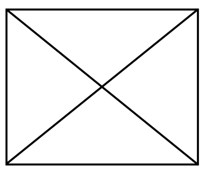
2. Перерахуємо послідовно «видалені» ребра: $\overline{12}$, $\overline{26}$, $\overline{65}$, $\overline{52}$, $\overline{23}$, $\overline{36}$, $\overline{64}$, $\overline{45}$, $\overline{51}$.

Вказана послідовність ребер утворює ейлерів цикл.

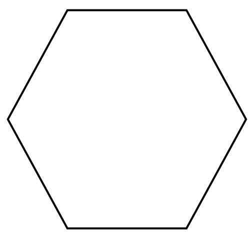
Приклади. 1) Повний граф K_n ейлерів тоді і тільки тоді, коли $n = 2k + 1$, $k \geq 1$.



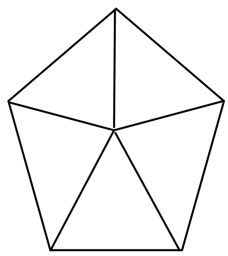
при $n = 3$ граф ейлерів



при $n = 4$ граф не ейлерів



C_6



Колесо

Рисунок 6.24 – Різні типи графів

2) Цикл C_n завжди ейлерів.

3) Колесо з n вершинами не є ейлеревим графом, так як має вершини з непарними степенями.

Теорема (Рейда) (1962 рік). Майже немає ейлерових графів.

Означення. Простий *цикл* (або простий ланцюг), що проходить через всі вершини графа, називається *гамільтоновим*. Зв'язний *граф* називається *гамільтоновим*, якщо він містить гамільтонів цикл.

Прикладами гамільтонових графів є колесо (рис.6.24) і графи на рисунку 6.25.

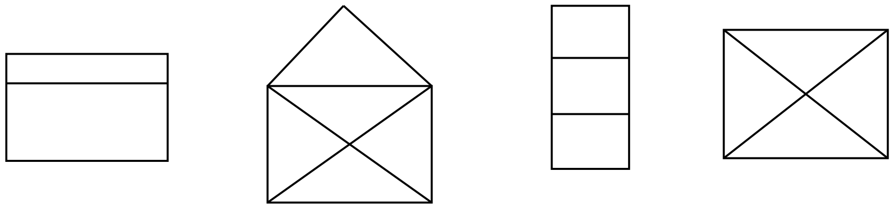


Рисунок 6.25 – Гамільтонові графи

Задача про знаходження гамільтонового циклу, у порівнянні із задачею про знаходження ейлеревого циклу, є складною, дотепер не знайдено ефективного критерію для перевірки графа на гамільтоновість. Існують кілька необхідних і кілька достатніх умов гамільтоновості зв'язних графів.

Необхідною є вимога відсутності в графі вершин, видалення яких порушує зв'язність графу. Дійсно, при обході графу такі точки відвідуються принаймні двічі.

Теорема Дірака (1952 рік). Якщо в графі G з $n \ge 3$ вершинами для кожної вершини $S(v) \ge \frac{n}{2}$, то граф гамільтонів (достатня умова).

Теорема Оре (узагальнення результату Дірака, 1960 рік). Якщо у графі G з $n \ge 3$ вершинами сума степенів будь-яких двох вершин не менша за n, то граф гамільтонів (достатня умова).

Ці умови не є необхідними, тобто існують гамільтонові графи, для яких ці умови не виконуються.

Приклад. Розглянемо граф C_n, в ньому вірно, що $\forall v\ S(v) = 2$. Тобто сума степенів двох вершин дорівнює 4 і при $n > 4$ умови теореми Оре не виконуються, але цей граф гамільтонів.

Теорема (Перепелиця,1969 рік). Майже всі графи гамільтонові.

6.8 Розфарбовування графів. Проблема чотирьох фарб

Плоскі графи та їх розфарбовування вивчали з моменту виникнення теорії графів внаслідок їх зв’язку з проблемою чотирьох фарб. Спочатку формулювання проблеми чотирьох фарб було таким: чи завжди можна розфарбувати області плоскої мапи чотирма фарбами так, щоб області зі спільною границею (а не просто зі спільною точкою) отримали різні кольори? Треба визначити, що означає слово "мапа". Оскільки в розглянутих нами задачах про розфарбування потрібно, щоб області, розташовані по обидві сторони ребра, були різного кольору, необхідно виключити мапи, що володіють мостом. Таким чином, зручно визначити мапу як зв'язний плоский граф, що не містить мостів. Помітимо, що при такому визначенні мапи не виключаємо петель або кратних ребер.

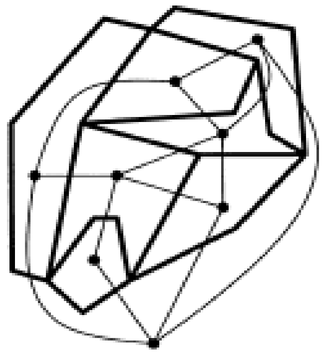


Рисунок 6.26 – Мапа

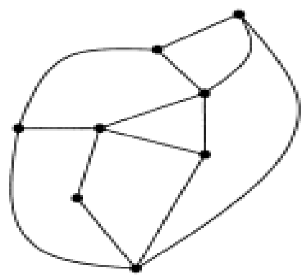


Рисунок 6.27 – Граф, еквівалентний мапі

Рисунок 6.26 показує, що розфарбування областей мапи еквівалентне розфарбуванню вершин плоского графа. Дійсно, всередині кожної області (включаючи і зовнішню область) розмістимо вершину, та кожні дві вершини, що лежать у сусідніх областях, з’єднаємо ребром, яке перетинає спільну границю областей. Отриманий таким чином граф G – двоїстий мапі M – також є плоским графом (рис.6.27). Тому в подальшому ми будемо говорити лише про розфарбовування вершин плоских графів. Можна припустити, що G не має петель та кратних ребер, так як вони не істотні при розфарбовуванні.

Теорема про п'ять фарб була доведена Хівудом у кінці XIX ст. Основним інструментом у доведенні була формула Ейлера.

Розглянемо $\gamma(G)$. Зафіксуємо n. Якщо $\gamma(G) \le n$, то граф називається n-розфарбовуваним. Якщо $\gamma(G) = n$, то граф називається n – хроматичним, зокрема, при $n = 2$ – біхроматичним.

Теорема Кеніга. Граф G біхроматичний тоді й тільки тоді, коли він є дводольним. (згідно з критерієм дводольності не містить простих циклів непарної довжини).

Теорема. Кожний планарний граф 5 – хроматичний.

Гіпотеза чотирьох фарб. В 1852 році Ф. Гутрі помітив цікаву властивість плоских мап, яка у 1878 році була зафіксована у наступному формулюванні англійського математика А.Келі: **для розфарбування кожної плоскої мапи достатньо чотирьох фарб**. Після цього її почали називати *гіпотезою чотирьох фарб* і одразу почали доводити. Протягом 100 років надходили різні доведення, але згодом з'ясовувалась їх помилковість.

Доведення гіпотези отримали у 1977 К.Аппель і У.Хакен, застосувавши для цього комп'ютер. Цікаво, що це була перша математична теорема, при доведенні якої використали комп'ютер, і тому довгий час вчені ставили під сумнів це доведення. У 1997 році з'явилось доведення з аналогічними ідеями, але більш просте і коротше. І у 2005 році – ще одне доведення, але знову ж таки з використанням комп'ютера.

Питання для самоконтролю

1. *Означення графа, мультиграфа, псевдографа, орієнтованого графа.*
2. *Степінь вершини. Вектор степенів.*
3. *Лема про рукостискання і наслідки з неї.*
4. *Види графів і деякі їх властивості.*
5. *Операції над графами.*

6. Маршрути, ланцюги, цикли.

7. Зв'язний граф і його властивості.

8. Доповнення графа. Теорема про зв'язність графа G або G^C.

9. Задача про три будинки та три колодязі.

10. Дводольні графи. Критерій дводольності графа. Алгоритм розпізнавання дводольності.

11. Ізоморфізм графів.

12. Інваріанти графа відносно ізоморфізму. Повні і неповні інваріанти. Приклади.

13. Хроматичне число графа і хроматичний многочлен.

14. Алгоритм побудови хроматичного многочлена.

15. Двійковий код матриці суміжності графа. Міні- і максі-код графа.

16. Визначення дерева і лісу. Теорема про властивості дерев.

17. Визначення остовного дерева довільного графа.

18. Теорема про число остовних дерев в зв'язному графі.

19. Матриця Кіркгофа графа, її зв'язок з числом компонент зв'язності графа.

20. Теорема про число остовних дерев в повному графі.

21. Центральні і біцентральні дерева. Критерій ізоморфності дерев.

22. Алгоритм ПГ (пошук в глибину) побудови остовного дерева зв'язного графа.

23. Плоскі і планарні графи. Укладання графа на площину.

24. Теорема про укладання графа в тривимірний простір і на сферу

25. Грані плоского графа. Теорема Ейлера.

26. Означення ейлерового графа. Критерій ейлеровості графа. Задача про Кенігсбергські мости і її розв’язання.

27. Задача «Навколосвітня подорож». Означення гамільтонова графа. Деякі теореми про гамільтонові графи.

28. Проблема чотирьох фарб і її розв’язання.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дано граф $G=(V,E), V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},\ E=\{l_1,l_2,...,l_7\}$.

1) Скласти матрицю інцидентності й матрицю суміжності графа.

2) Знайти оточення всіх вершин графа.

3) Знайти граф, який є доповненням до даного графа.

4) Знайти який-небудь підграф даного графа.

5) Вилучити вершину v_2.

6) Вилучити які-небудь два ребра.

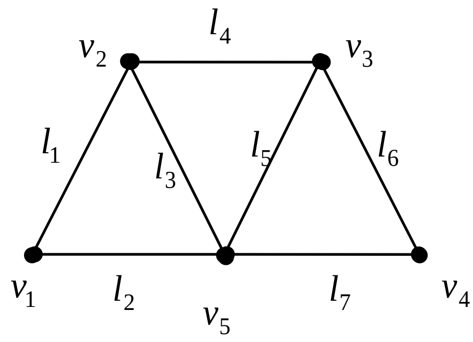


Рисунок 6.29 – Ілюстрація до задачі 1

Розв'язання.

1) A – матриця суміжності, I – матриця інцидентності:

$$\mathrm{A}=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},\quad I=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2) Оточення вершин:

$N(v_1)=\{v_2,v_5\}, N(v_2)=\{v_1,v_3,v_5\},$

$N(v_3)=\{v_2,v_4,v_5\},$

$N(v_4)=\{v_3,v_5\}, N(v_5)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}.$

3) Доповнення графу наведено на рисунку 6.30.

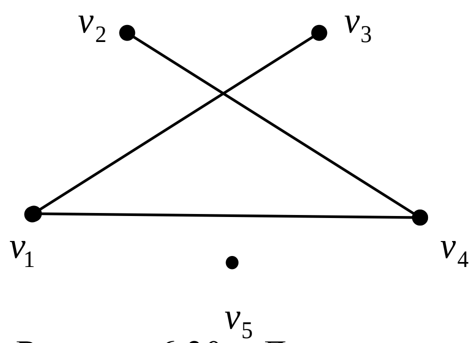


Рисунок 6.30 – Доповнення графу

4) Підграф наведено на рисунку 6.31.

5) При вилученні вершини v_2 треба видалити інцидентні їй ребра l_1,l_3,l_4.

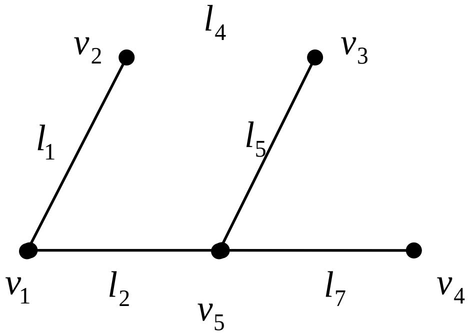


Рисунок 6.31 – Підграф

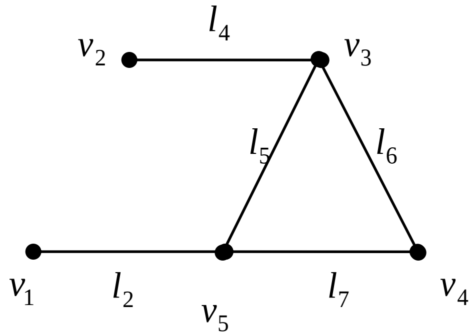


Рисунок 6.32 – Граф з вилученими ребрами

6) Вилучимо ребра l_1, l_3 (рисунок 6.32).

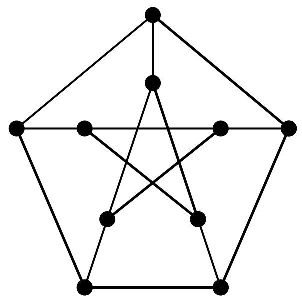


Рисунок 6.33 – Граф Петерсона

Задача 2. До якого максимального повного графа можна стягнути граф Петерсона?

Розв'язання.

Граф Петерсона (рис. 6.33) можна стягнути до повного п'ятивершинного графа. Для цього треба послідовно стягувати його по ребрам, які сполучають вершини «зірки» з вершинами «зовнішнього п'ятикутника».

Задача 3. Якщо у графа 3 вершини, причому степінь першої дорівнює 1, степінь другої дорівнює 2, а степінь третьої – 3, то скільки ребер має граф?

Розв'язання. За лемою про рукопотискання $1+2+3=2m$, де m – кількість ребер графа. Отже, маємо $m=3$.

Задача 4. Чи можна розташувати на площині 9 відрізків так, щоб кожний з них перетинався з трьома іншими?

Розв'язання. Розглянемо граф, вершини якого відповідають заданим відрізкам. Дві вершини суміжні, тобто з'єднані ребром, якщо задані відрізки перетинаються. За умовою задачі кожна вершина графа суміжна ровно з трьома іншими вершинами, а це суперечить наслідку з леми про рукопотискання.

Задача 5. Знайти вектори степенів даних графів (рис. 6.34). Дослідити їх на ізоморфність.

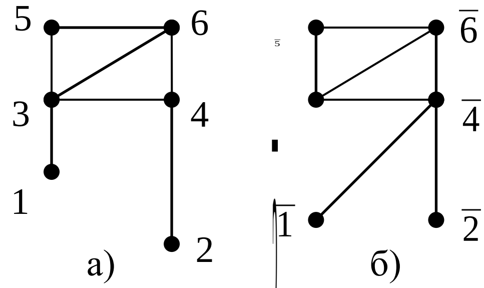


Рисунок 6.34 – Ілюстрація до задачі 5

Розв'язання. Визначимо степені вершин даних графів:

$$S(1)=1,\ S(2)=1,\ S(3)=4,\ S(4)=3,\ S(5)=2,$$

$$S(6)=3,\ S(G_1)=(1,1,2,3,3,4);$$

$$S(\bar{1})=1,\ S(\bar{2})=1,\ S(\bar{3})=3,\ S(\bar{4})=4,\ S(\bar{5})=2,$$

$$S(\bar{6})=3,\ S(G_2)=(1,1,2,3,3,4).$$

Для дослідження графів на ізоморфність потрібно перевірити чотири бієкції.

У будь-якій з бієкцій $3\to\bar{4}, 5\to\bar{5}$. Тому, можливі такі відповідності вершин

f_1	f_2	f_3	f_4
$1\to\bar{1}$	$1\to\bar{2}$	$1\to\bar{2}$	$1\to\bar{1}$
$2\to\bar{2}$	$2\to\bar{1}$	$2\to\bar{1}$	$2\to\bar{2}$
$3\to\bar{4}$	$3\to\bar{4}$	$3\to\bar{4}$	$3\to\bar{4}$
$4\to\bar{3}$	$4\to\bar{6}$	$4\to\bar{3}$	$4\to\bar{6}$
$5\to\bar{5}$	$5\to\bar{5}$	$5\to\bar{5}$	$5\to\bar{5}$
$6\to\bar{6}$	$6\to\bar{3}$	$6\to\bar{6}$	$6\to\bar{3}$

В жодній з цих бієкцій не зберігається суміжність вершин, тому графи не ізоморфні.

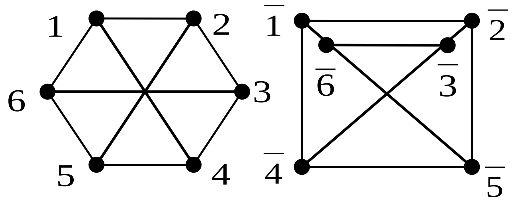


Рисунок 6.35 – Ілюстрація до задачі 6

Задача 6. Довести що графи на рисунку 6.35 ізоморфні.

Розв'язання. Наприклад, наступна бієкція

$$f:\ 1\to\bar{1},\ 2\to\bar{2},\ 3\to\bar{3},\ 4\to\bar{4},\ 5\to\bar{5},\ 6\to\bar{6}$$

між множинами вершин цих графів зберігає суміжність вершин, тому за означенням графи ізоморфні

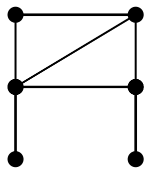


Рисунок 6.36 – Ілюстрація до задачі 7

Задача 7. Знайти всі інваріанти даного на рисунку 6.36 графа.

Розв’язання.

1) $n=6$, 2) $m=7$, 3) $S(G)=(1,1,2,3,3,4)$, 4) $\varphi(G)=3$, 5) $\varepsilon(\varphi)=3$, 6) $\gamma(G)=3$, 7) $K(G)=1$, 8) $\eta(G)=3$.

Задача 8. Знайти хроматичний многочлен даного графа (рис. 6.37а).

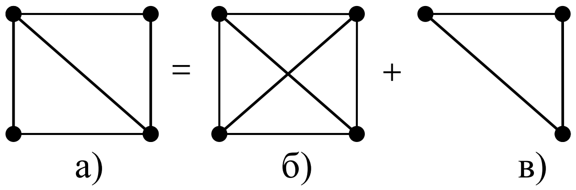


Рисунок 6.37 – Ілюстрація до задачі 8

Розв’язання. На рисунку а) зображено даний граф. На рисунку б) – граф, отриманий додаванням до даного графа «нового» ребра, на рисунку в) – граф, отриманий стягуванням по цьому ребру. Оскільки обидва останні графа повні, то хроматичний многочлен даного графа має вигляд $P(x)=x^3+x^4$.

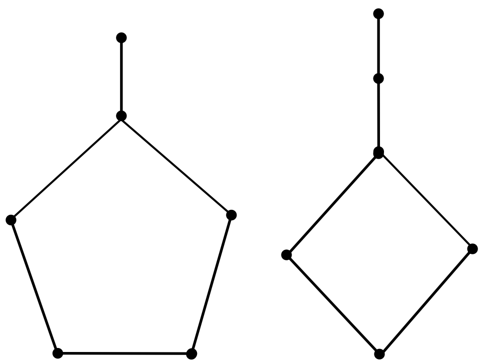


Рисунок 6.38 – Ілюстрація до задачі 9

Задача 9. Довести, що графи на рисунку 6.38 неізоморфні.

Розв’язання. Кількість вершин і кількість ребер у цих графів однакові. Однакові також вектори степенів вершин, щільності, нещільності. Але вони все ж таки не ізоморфні. Причиною є той факт, що другий граф дводольний, а перший – ні.

Задача 10. Зобразити на площині граф, що представляє собою куб так, щоб будь-які два ребра перетиналися тільки у вершині.

Розв’язання.

Див. рисунок 6.39.

Рисунок 6.39 – Куб

Задача 11. Знайти декартовий добуток графів C_4 і K_2. Чи є цей добуток планарним графом? Якщо так, то знайти кількість граней ізоморфного йому плоского графа.

Задача 12. Дано граф (рис.6.40). Знайти матрицю Кіркгофа і кількість його остовних дерев. Зобразити 3 остовних дерева.

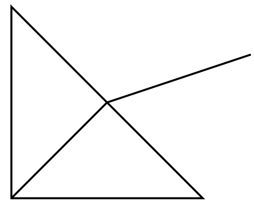


Рисунок 6.40 – Ілюстрація до задачі 12

Задача 13. Побудувати хроматичний1 многочлен графа (рис. 6.41).

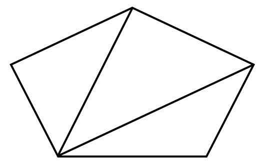


Рисунок 6.41 – Ілюстрація до задачі 13

Завдання для самостійного розв'язання

1. В країні 100 міст, з кожного виходить 4 дороги. Скільки всього доріг в країні?

2. В групі 30 студентів. Чи може бути таке, що 9 з них мають по 3 друга, 11 – по 4 друга, 10 – по 5 друзів?

3. В графі 30 вершин та 80 ребер, кожна вершина має або степінь 5, або 6. Скільки вершин мають степінь 5?

Відповідь. 20

4. В графі кожна вершина має степінь 3, а число ребер знаходиться між 16 та 20. Скільки вершин в графі?

Відповідь. 12

5. Довести, що не існує k-однорідного графа з n вершинами при умові, що і k, і n непарні.

6. Знайти верхню та нижню межі для кількості ребер будь-якого зв'язного графа.

7. Довести, що будь-який граф з n вершинами, який має більше ніж $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребер, є зв'язним.

8. Довести, що будь-який 3-однорідний граф має парну кількість вершин.

9. Знайти такий зв'язний граф G з мінімальним числом $n>1$ вершин, щоб граф $\overline{G}$ теж був зв'язним.

10. Знайти число всіх помічених графів з n вершинами.

11. *Абстрактним графом* називається клас ізоморфних між собою позначених графів. Знайти кількість абстрактних графів з трьома і чотирма вершинами? Скільки серед них зв'язних графів?

12. Знайти всі абстрактні графи з вектором степенів а) (2,2,2,3,3,4), б) (2,2,2,3,3,3).

13. Дано граф (рис. 6.42). У ньому

а) знайти число компонент зв’язності;

б) видалити ребро(міст графа) і знайти число компонент отриманого графа;

в) визначити, яке мінімальне число ребер треба видалити, щоб отримати граф з двома компонентами зв’язності? А з трьома?

г) в якому з графів G або $\overline{G}$ більше ребер?

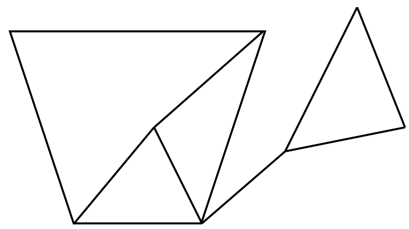


Рисунок 6.42 – Ілюстрація до завдання 13

14. Довести, що коли граф має 6 вершин, то або він, або його доповнення містить підграф K_3.

15. Знайти число помічених графів з n вершинами та m ребрами.

16. Побудувати всі можливі дерева з шістьма вершинами.

17. Відновити з точністю до ізоморфізмів графи з максі кодами 538 і 787.

18. Довести, що в будь-якому планарному графі існує вершина, степінь якої не більша п’яти.

7 ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ГРАФАХ

Поставимо у відповідність кожному ребру графа G дійсне число (вагу ребра) $\omega(e)$. Позначимо цей граф (G,ω) і назвемо зваженим графом.

В прикладній задачі, математичною моделлю якої є граф, вагою ребра може бути його довжина, вартість перевезення, вартість палива тощо. Як правило, цікавим є розв'язок задачі, який забезпечує мінімальні витрати ресурсів. В термінах графів ця вимога еквівалентна знаходженню в графі остовного дерева з мінімальною вагою. Очевидно, можна побудувати всі дерева (їх кількість легко знаходиться за допомогою матриці Кіркгофа даного графа), порахувати вагу кожного з них і вибрати дерево з мінімальною вагою, але це алгоритмічно важка задача. Є більш ефективні алгоритми.

7.1 Алгоритми Краскала і Прими (пошук остового дерева мінімальної ваги у зв'язному графі)

Алгоритм Краскала. Нехай є граф $G, |V| = n$ та граф N_n (порожній граф, вершини якого збігаються з вершинами G). Будуємо граф $T_1 = N_n \cup \{e_1\}$, де e_1 – ребро графа G, що має найменшу вагу (якщо таких ребер декілька, вибираємо будь-яке з них). На кожному наступному кроці приєднуємо до вже побудованого графа T_i ребро e_{i+1} графа G, яке: 1) відмінне від всіх попередньо приєднаних ребер; 2) має найменшу вагу серед тих ребер, що залишились; 3) не утворює циклів із ребрами графа T_i. Якщо граф T_i побудований та $i < n-1$, то T_i не зв'язний. Отже, при $i < n-1$ граф T_{i+1} завжди можна побудувати. Алгоритм припиняє роботу, коли буде побудовано граф T_{n-1}. Цей граф і є шуканим остовним деревом мінімальної ваги.

Алгоритм Прима відрізняється від алгоритму Краскала лише тим, що на кожному кроці будується піддерево шуканого остового дерева.

7.2 Алгоритм Дейкстри знаходження найкоротшого шляху між парою вершин зваженого орієнтованого графа

Будемо вважати, що вага $w(e)$ кожної дуги графа невід'ємна. Будемо шукати найкоротший (s,t)-шлях у цьому графі. На кожному кроці алгоритму кожна вершина v отримує мітку $l(v)$ – тимчасову або постійну. Зауважимо, що ця мітка може бути і ∞. Після того, як вершина отримала постійну мітку, її значення вже не змінюється до кінця роботи алгоритму. На нульовому кроці постійну мітку отримує вершина s. При перерахунку тимчасової мітки $l(v)$ вершини v користуються формулою

$$l(v) := \min\{l(v), l(p) + w(p,v)\},$$

де p – вершина, яка останньою отримала постійну мітку.

Алгоритм припиняє роботу, коли всі вершини отримають постійні мітки. Остання постійна мітка дорівнює найкоротшому (s,t)-шляху.

Покажемо на прикладі, як перераховуються мітки і як піля роботи алгоритму записати найкоротший шлях. Результат роботи алгоритму зручно подавати у вигляді таблиці.

Приклад. Дано зважений орієнтований граф. Знайти найкоротший *(A,F)* – шлях.

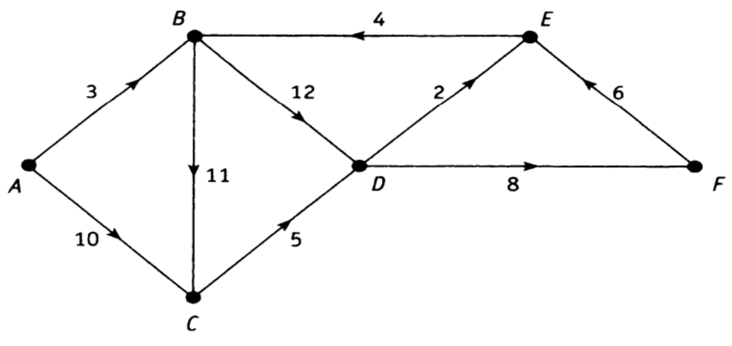


Рисунок 7.1

Розв’язання. Перший рядок таблиці заповнюється на нульовому кроці алгоритму вагою дуги (A,x), якщо така існує, і знаком ∞ у противному випадку

№ Кроку	**Відмічені Вершини**	Відстань до вершини						Невідмічені вершини
		A	B	C	D	E	F	
0	*A*	0	**3**	10	∞	∞	∞	*B,C, D,E,F*
1	*B*	0	3	**10**	15	∞	∞	*C, D,E,F*
2	*C*	0	3	10	**15**	∞	∞	*D,E,F*
3	*D*	0	3	10	15	**17**	23	*E,F*
4		0	3	10	15	17	**23**	

Перший крок

- знаходимо в першому рядку мінімальне число, воно дорівнює 3,
- відмічаємо його (напівжирний шрифт) і відзначаємо, що вершина *B* отримала постійну мітку 3,
- записуємо *B* в другий стовпчик, а решту вершин в останній стовпчик,
- перераховуємо тимчасові мітки (заповнюємо другий рядок таблиці):

$$l(C) := \min\{10, 3+11\} = 10,$$
$$l(D) := \min\{\infty, 3+12\} = 15,$$
$$l(E) := \min\{\infty, 3+\infty\} = \infty,$$
$$l(F) := \min\{\infty, 3+\infty\} = \infty,$$

Другий крок

- знаходимо мінімальну мітку 10 і відмічаємо вершину С,
- перераховуємо тимчасові мітки (заповнюємо третій рядок таблиці):

$$l(D) := \min\{15, 10+5\} = 15,$$
$$l(E) := \min\{\infty, 10+\infty\} = \infty,$$
$$l(F) := \min\{\infty, 10+\infty\} = \infty,$$

Третій крок

- знаходимо мінімальну мітку 15 і відмічаємо вершину *D*,
- перераховуємо тимчасові мітки (заповнюємо четвертий рядок таблиці):

$$l(E) := \min\{\infty, 15+2\} = 17,$$
$$l(F) := \min\{\infty, 15+8\} = 23,$$

Четвертий крок

- знаходимо мінімальну мітку 17 і відмічаємо вершину *E,*
- перераховуємо тимчасові мітки (заповнюємо п'ятий рядок таблиці):

$$l(F) := \min\{23, 17+\infty\} = 23.$$

Висновки:

1) довжини найкоротшого *(A,F)* – шляху дорівнює 23,

2) для запису шляху користуються таким правилом: останньою є вершина *F* – кінцева. Свою постійну мітку вона «отримала з вершини *D*», тому передостанньою вершиною найкоротшого шляху буде саме *D*. Вершина *D* свою постійну мітку 15 отримала з вершини *B*, а вершина *A* є початком шляху. Отже, найкоротший *(A,F)* – шлях проходить через вершини *A*,*B, D*,*F*.

7.3 Алгоритм знаходження максимального потоку в мережі

Означення. *Мережею* називають зважений орієнтований граф з одним витоком (з цієї вершини дуги тільки виходять) і одним стоком (в цю вершину дуги тільки входять). Вага дуги в мережі називається її *пропускною здатністю*.

Означення. *Потоком* в транспортній мережі називається невід'ємна функція, визначена на множині дуг мережі, яка задовольняє двом умовам:

1) величина потоку по кожній дузі не перевершує її пропускної спроможності;

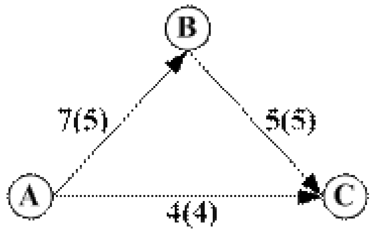
2) сума потоків, що входять в кожну вершину мережі, за винятком витоку та стоку , дорівнює сумі потоків, що виходять з вершини.

Означення. *Величиною* потоку є сума потоків, що виходять з витоку або сума потоків, що входять в стік мережі.

Означення. *Розрізом* транспортної мережі називається така множина дуг, видалення яких відділяє витік від стоку.

Означення. *Мінімальним розрізом транспортної мережі* називається розріз з мінімальною пропускною спроможністю.

Приклад. Мережа



має два розрізи $\{(A,B),(A,C)\}$ і $\{(A,C),(B,C)\}$. Пропускна спроможність першого розрізу дорівнює 11 =7+4, а другого – 9=4+5, тому другий розріз є мінімальним.

Алгоритм знаходження максимального потоку в мережі заснований на такій теоремі.

Теорема (Форда – Фалкерсона**).** Величина максимального потоку в мережі дорівнює величині мінімального розрізу.

В наведеному прикладі максимальный поток в мережі дорівнює 9 = min(11, 9). Цей максимальний потік вказаний в круглих дужках.

Означення. Дуга ланцюга називається *допустимою дугою,* якщо:

1) напрямок дуги співпадає з напрямком потоку і потік по цій дузі менший за її пропускну спроможність;

2) напрямок дуги протилежний напрямку потоку і потік по цій дузі більше нуля.

Означення. *Ланцюг*, що з'єднує витік мережі зі стоком, називається *збільшуючим*, якщо всі його дуги є допустимими.

Алгоритм Форда-Фалкерсона.

1 крок. Якщо потік в мережі не заданий, то вважають потік нульовим.

2 крок. Виконати дії:

- взяти будь-який збільшуючий ланцюг;

- обчислити найменшу різницю d між пропускними спроможностями дуг цього ланцюга і потоками по цим дугам;
- потоки по дугам, напрямок яких співпадає з напрямком потоку, збільшити на d;
- потоки по дугам, напрямок яких протилежний напрямку потоку, зменшити на d.

3 крок. Якщо в мережі є збільшуючий ланцюг, то переходимо до кроку 2. В противному випадку максимальний потік побудований.

Однією з перших оптимізаційних задач на графах була так звана *задача комівояжера*, яка пов'язана з поняттям гамільтонових циклів. Її формулювання таке: у навантаженому графі G визначити гамільтонів цикл мінімальної довжини (іншими словами, комерсант повинен зробити поїздку по містах і повернутися назад, побувавши у кожному місті рівно один раз, і при цьому вартість такої поїздки повинна бути мінімальною). Нагадаємо, що задача про знаходження гамільтонового циклу, у порівнянні із задачею про знаходження ейлеревого циклу, є складною. Дотепер не знайдено ефективного критерію для перевірки графа на гамільтоновість. Але існує багато алгоритмів для розв'язання задачі комівояжера, які не є точними, але часто дають «близький до оптимального» розв'язок. Їх легко знайти в навчальній літературі.

Питання для самоконтролю

1. Поняття зваженого графу.

2. Прикладні задачі на зважених графах.

3. Алгоритми Краскала і Прима знаходження остову мінімальної ваги в зваженому зв'язному графі.

4. Задача комівояжера. Алгоритми розв'язання.

5. Алгоритм Дейкстри знаходження найкоротшого шляху у зваженому *орієнтованому графі.*

6. Поняття мережі, приклад.

7. Означення потоку, максимального потоку, розрізу в мережі.

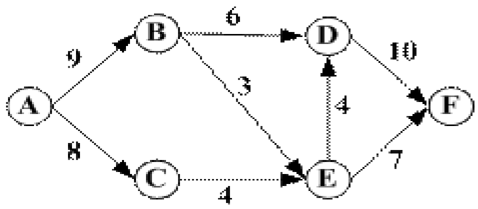
8. Приклад допустимого ланцюга в мережі із заданим в ній потоком.

9. Теорема Форда-Фалкерсона.

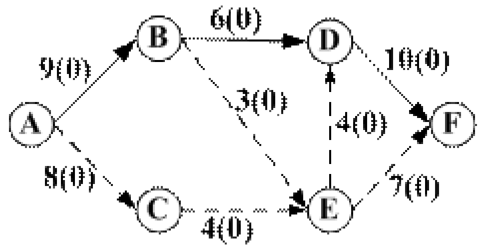
10. Алгоритм побудови максимального потоку в мережі.

Приклади розв'язування задач

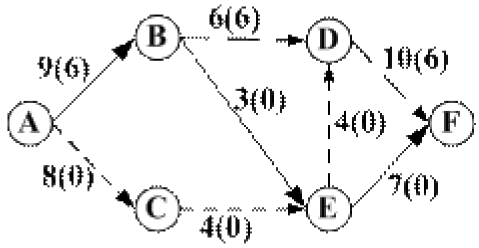
Задача 1. Побудувати максимальний потік для заданої транспортної мережі.



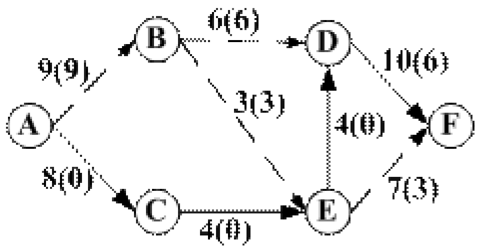
Розв'язання. Потік в мережі не заданий, будемо вважати його нульовим.



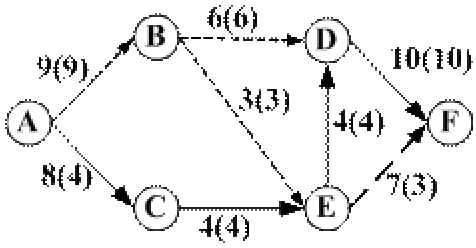
Розглянемо збільшуючий ланцюг *AB, BD, DF.* Напрямок всіх дуг співпадає з напрямком потоку, $d = \min(9-0, 6-0, 10-0) = 6$. Нові потоки по дугам цього ланцюга: $AB: 0+6=6$, $BD: 0+6=6$, $DF: 0+6=6$.



Є ще збільшуючий ланцюг: *AB, BE, EF.* Напрямок дуг співпадає з напрямком потоку, $d = \min(9-6, 3-0, 7-0) = 3$. Нові потоки по дугам ланцюга: $AB: 3+6=9$, $BE: 0+3=3$, $EF: 0+3=3$.

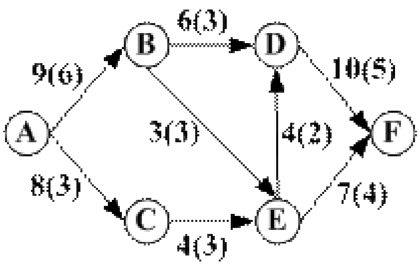


Знаходимо ще один збільшуючий ланцюг: *AC, CE, ED, DF*. Напрямок дуг співпадає з напрямком потоку, $d = \min(8-0, 4-0, 4-0, 10-6) = 4$. Нові потоки по дугам ланцюга: $AC: 0+4=4$, $CE: 0+4=4$, $ED: 0+4=4$, $DF: 6+4=10$.

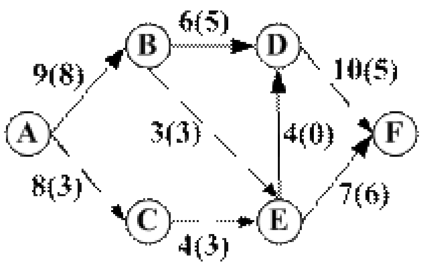


Більше збільшуючих ланцюгів в мережі немає, тому максимальний потік побудований і дорівнює 13=9+4=10+3.

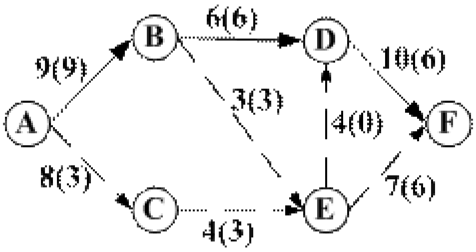
Задача 2. Побудувати максимальний потік для заданої транспортної мережі (потік в мережі заданий).



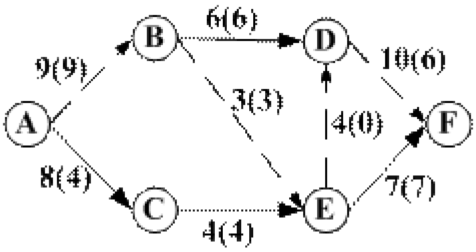
Розв'язання. Збільшуючий ланцюг: *AB, BD, DE, EF*. Напрямок дуги *DE* протилежний напрямку потоку, напрямок інших дуг співпадає з напрямком потоку, $d = \min(9-6, 6-3, 4-2, 7-4) = 2$. Нові потоки по дугам ланцюга: $AB: 6+2=8$, $BD: 3+2=5$, $DE: 2-2=0$, $EF: 4+2=8$



У збільшуючому ланцюзі *AB, BD, D* напрямок дуг співпадає з напрямком потоку, $d = \min(9-8, 6-5, 10-5) = 1$. Нові потоки по дугам ланцюга:
$AB: 8+1=9$, $BD: 5+1=6$, $DF: 5+1=6$.



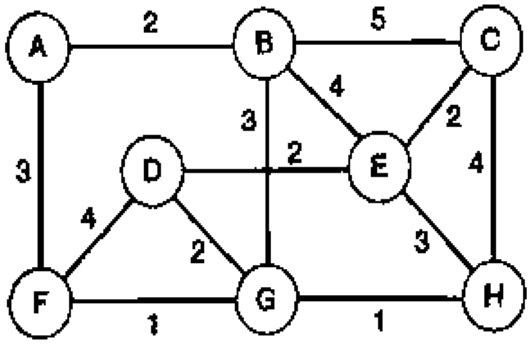
Є ще один збільшуючий ланцюг: *AC, CE, EF.* Напрямок дуг співпадає з напрямком потоку, $d = \min(8-3, 4-3, 7-6) = 1$. Нові потоки по дугам ланцюга: $AC: 3+1=4$, $CE: 3+1=4$, $EF: 6+1=7$.



Збільшуючих ланцюгів більше в мережі немає, тому максимальний потік побудований і дорівнює 13=9+4=10+3.

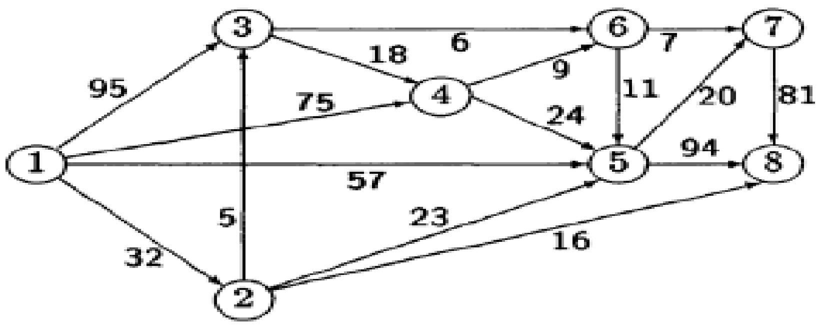
Завдання для самостійного розв’язання

1. Застосувати алгоритм Прима для знаходження мінімального остовного дерева графа, починаючи з вказаної вершини:



1) починаючи з вершини A,
2) починаючи з вершини B,
3) починаючи з вершини C.

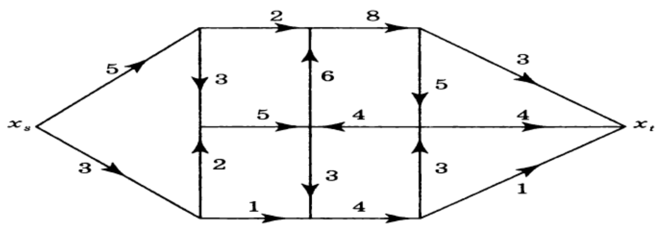
2. Застосувати алгоритм Дейкстри для побудови найкоротшого шляху



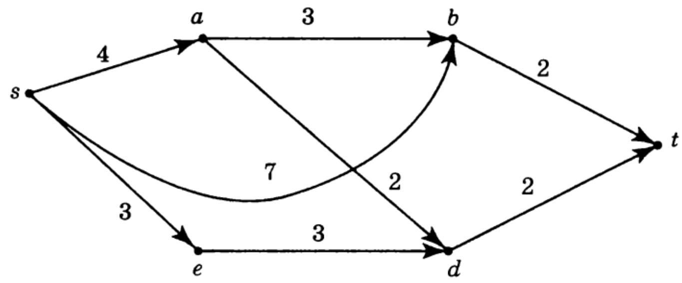
1) від 1 до 7,
2) від 1 до 8,
3) від 2 до 7.

3. Застосувати алгоритм Форда–Фалкерсона для знаходження максимального потоку в мережі

1)



2)



3) із задачі 2).

ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Розділ 1 Алгебраїчні структури

Група (алгебраїчна структура з однією алгебраїчною операцією)

Означення. *Алгебраїчною операцією* на множині A називається відображення $A \times A \to A$, при якому кожній впорядкованій парі (a,b) елементів із A відповідає елемент цієї ж множини. Цей елемент зазвичай позначають через $a * b$ (або $a+b$, або ab і т.ін.). В цьому випадку говорять, що *множина* A *є замкнутою відносно операції* $*$.

Означення. *Групою* називається непуста множина G разом із заданою на ній алгебраїчною операцією $*$, для якої виконуються аксіоми:

1) Для будь-яких трьох елементів a,b,c множини G $a*(b*c)=(a*b)*c$ *(асоціативність операції* $*$*).*

2) Існує такий елемент e множини G, що для будь-якого елемента a цієї ж множини $a*e=a$ *(існування нейтрального елемента).*

3) Для кожного елемента a множини G існує такий елемент a' цієї ж множини, що $a*a'=e$ *(існування симетричного елемента).*

Групу позначають символом $(G,*)$.

Означення. *Група* $(G,*)$ називається *абелевою (*або *комутативною),* якщо для будь-яких її елементів a,b виконується умова $a*b=b*a$.

Якщо група $(G,*)$ містить скінченну кількість елементів, то вона називається *скінченною*, а число елементів в ній називається *порядком групи* та позначається символом $|G|$. Група з нескінченою кількістю елементів називається *нескінченною.* Скінчена група $(G,*)$ називається p *- групою,* якщо $|G|=p^k$, де p - просте число, а k - натуральне.

Запис результату бінарної операції в групі у вигляді $(x,y)\to xy$ називають мультиплікативним, а саму групу називають *мультиплікативною*. Нейтральний *елемент* мультиплікативної групи прийнято називати *одиничним*, а симетричний *елемент – оберненим*. Іноді зручніше використовувати адитивний запис $(x,y)\to x+y$ і називати *групу адитивною*. В такій групі нейтральний *елемент* називають *нульовим,* а симетричний – *протилежним.*

В мультиплікативній групі замість запису $\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n}$ пишуть x^n, а в адитивній групі замість $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}$ прийняте позначення nx.

Означення. Нехай x - елемент мультиплікативної групи. Найменше натуральне число n таке, що $x^n = e$ називається *порядком елемента* x. Позначають $|x|$ або $ord\ x$. Якщо такого n не існує то говорять, що x - *елемент нескінченного порядку.*

Означення. Підмножина H групи G називається її *підгрупою*, якщо вона є групою відносно алгебраїчної операції в групі. Позначають $H < G$. *Підгрупи* $E=\{e\}<G$ і $G<G$ називаються *невласними* або *тривіальними*, всі інші підгрупи називаються *власними.*

Приклади: 1) Множини Z,Q,R,C є адитивними групами. Крім того, $Z<Q<R<C$. 2) Множина $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$, на якій операція «+» задається таблицею

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

є групою. Крім того, $M = \{0,2,4\} < Z_6$, $P = \{0,3\} < Z_6$.

Теорема (критерій підгрупи) Непуста підмножина H групи $(G,*)$ буде підгрупою тоді і тільки тоді, коли

1) для всіх a, b із H елемент $a * b$ також належить множині H,

2) для будь-якого a із H елемент a' теж належить H.

Зауваження. Для скінченних підмножин у групі достатньо перевіряти лише першу умову, тобто має місце

Теорема Якщо скінченна підмножина H групи G замкнута відносно операції в групі, то вона є її підгрупою.

Доведення. Нехай $a \in H, a \neq e$. Всі можливі степені $a, a^2, ..., a^n, ...$ елемента a належать H, оскільки H замкнута відносно операції. Множина H скінченна, тому серед степенів обов'язково є однакові. Нехай $a^m = a^n$, причому $m \neq n$. Будемо вважати, що $m > n$. Тоді $m = n + k$ і $a^{n+k} = a^n$, звідки $a^k = e$ або $a^{k-1}a = e$, а це і означає, що для елемента a елемент a^{k-1} є оберненим і $a^{k-1} \in H$.

Теорема (Лагранжа) Порядок скінченної групи ділиться на порядок будь-якої її підгрупи.

Наслідок. Група простого порядку не має власних підгруп.

Означення. Нехай $(G,*)$ і $(H,\circ)$ групи. Відображення $f: G \to H$ називається *ізоморфізмом* цих груп, якщо воно бієктивне і $f(a*b) = f(a) \circ f(b)$ для будь-яких $a, b \in G$. Якщо такий ізоморфізм існує, то *групи* називають *ізоморфними* і позначають $G \cong H$.

Ізоморфні групи мають одні і ті самі властивості.

Властивості ізоморфізмів. Нехай $f: G \to H$ - ізоморфізм. Тоді:

1) Образом нейтрального елемента групи G є нейтральний елемент групи H, тобто $f(e) = e'$.

2) Образом елемента a', який є симетричним до елемента $a \in G$, є елемент групи H, симетричний до образа елемента a, тобто $f(a') = (f(a))'$.

3) Відображення, обернене до ізоморфізму, є ізоморфізмом.

4) Якщо $f(g)=h$, то порядки елементів g і h однакові.

5) Якщо $f:G\to H$ і $g:H\to F$ - ізоморфізми, то композиція $(g\circ f):G\to F$ теж є ізоморфізмом.

Кільце (алгебраїчна структура з двома алгебраїчними операціями)

Означення. *Кільцем* називається непуста множина K разом із заданими на ній алгебраїчними операціями $+$ і $*$, для яких виконуються аксіоми:

1) Для будь-яких трьох елементів a,b,c множини *К* $a+(b+c)=(a+b)+c$ *(асоціативність операції +).*

2) Існує такий елемент Θ множини *К*, що для будь-якого елемента a цієї ж множини $a+\Theta=a$ *(існування нейтрального елемента відносно додавання).* Прийнято елемент Θ називати *нулем*.

3) Для кожного елемента a множини *К* існує такий елемент a' цієї ж множини, що $a+a'=\Theta$ *(існування протилежного елемента).* Позначають $a'=-a$.

4) Для будь-яких двох елементів a,b множини *К* $a+b=b+a$ *(комутативність операції +).*

5.1) Для будь-яких трьох елементів a,b,c множини *К* $a*(b+c)=a*b+a*c$ *(ліва дистрибутивність).*

5.2) Для будь-яких трьох елементів a,b,c множини *К* $(a+b)*c=a*c+b*c$ *(права дистрибутивність).*

Кільце позначають символом $(K,+,*)$.

Крім вказаних аксіом, які визначають на множині структуру кільця, на цій множині можуть виконуватись й інші аксіоми. Тоді кільця мають спеціальну назву.

Означення Кільце називається:

- *асоціативним*, якщо виконується аксіома 6) Для будь-яких трьох елементів $a,b,c \in K$ $a*(b*c)=(a*b)*c$ *(асоціативність операції *)*;

- *комутативним*, якщо виконується аксіома 7) Для будь-яких двох елементів $a,b \in K$ $a*b=b*a$ *(комутативність операції *)*;

- *кільцем з одиницею*, якщо виконується аксіома 8) Існує такий елемент e , що для будь-якого елемента $a \in K$ $a*e=a$ (існування нейтрального елемента відносно множення). Елемент e називають *одиницею*.

Означення. *Полем* називається асоціативне комутативне кільце з одиницею, в якому виконується аксіома

9) Для кожного елемента $a \in K, a \neq \Theta$ існує такий елемент $\overline{a} \in K$, що $a*\overline{a}=e$ *(існування оберненого елемента)*. Позначають $\overline{a}=a^{-1}$.

Означення. Елемент $a \neq \Theta$ кільця *K* називається *дільником нуля*, якщо існує такий елемент $b \neq \Theta$, що $a*b=\Theta$. Якщо кільце є асоціативним, комутативним і в ньому відсутні дільники нуля, то воно називається *областю цілісності.*

Означення. Підмножина *M* кільця *K* називається його *підкільцем*, якщо вона є кільцем відносно тих самих алгебраїчних операцій. Позначають $M<K$.

Теорема (критерій підкільця) Непуста підмножина *M* кільця $(K,+,*)$ буде підкільцем тоді і тільки тоді, коли

1) для будь-яких a,b із *M* елемент $a*b$ також належить множині *M*,

2) для будь-яких a,b із *M* елемент $a-b$ також належить множині *M*.

Приклади. 1) Множини Z,Q,R,C є кільцями і областями цілісності. Крім того, $Z<Q<R<C$. 2) Множина $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$, на якій операції задаються таблицями

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1

3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

є кільцем, але не є областю цілісності. Крім того, $M = \{0,2,4\} < Z_6$, $P = \{0,3\} < Z_6$.

Означення. Нехай є кільця $(K,+,*)$ і $(L,\oplus,\circ)$. *Гомоморфізмом із К в L* називається відображення $f : K \to L$, яке зберігає операції, тобто виконуються вимоги:

а) $(\forall x, y \in K) \quad f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$,

б) $(\forall x, y \in K) \quad f(x * y) = f(x) \circ f(y)$.

Ізоморфізмом кілець $(K,+,*)$ і $(L,\oplus,\circ)$ називається бієктивний гомоморфізм $f : K \to L$. Пишуть $K \cong L$.

Означення. *Ядром гомоморфізму* $f : K \to L$ називається множина $Kerf = \{x \in K \mid f(x) = \Theta_L\}$. *Образом гомоморфізму* $f : K \to L$ називається множина $\operatorname{Im} f = \{y \in L \mid (\exists x \in K)\ f(x) = y\}$.

Вправи до розділу 1

1. Чи є групами відносно вказаних операцій наступні числові множини: Z, Q, R, C відносно операції додавання, $Q \setminus \{0\}$, $R \setminus \{0\}$, $C \setminus \{0\}$ відносно операції множення?

2. Чи є групою множина всіх невироджених матриць n - го порядку з дійсними елементами відносно операції множення матриць?

3. Довести, що $(a*b)' = a'*b'$ тоді і лише тоді, коли $a*b = b*a$.

4. Чому дорівнює порядок групи рухів, які суміщають із самим собою правильний n - кутник?

5. Довести, що групи $(R,+)$ і $(R_+,\cdot)$ ізоморфні.

6. В мультиплікативній групі $(G,\cdot)$ зафіксовано елемент a і задано нову операцію за правилом $x \circ y = x \cdot a \cdot y$. Довести, що відносно цієї операції G є групою, ізоморфною заданій.

7. Нехай A - деяка множина, B - сукупність всіх підмножин множини A. На множині B задамо операцію додавання і множення наступним чином: $X + Y = (X \bigcup Y) \setminus (X \bigcap Y)$, $X \cdot Y = X \bigcap Y$. Довести, що B відносо цих операцій є кільцем з одиницею.

8. Довести, що оборотні елементі комутативного кільця утворюють групу відносно операції множення.

9. Довести, що поле є областю цілісності.

10. З'ясуйте, чи є в кільцях Z_6 , Z_8, Z_9 , Z_{10} дільники нуля. При яких m кільце Z_m є областю цілісності?

11. Знайти всі підкільця кілець Z_3, Z_4, Z_6.

Розділ 2 Означення та приклади алгебри Буля. Булеві функції

Означення. *Алгеброю* називається непуста множина M (носій даної алгебри) разом із сукупністю заданих на ній операцій $\rho_1, \rho_2, ...$ (сигнатура даної алгебри). Позначають $A = \langle M, \rho_1, \rho_2, ... \rangle$.

Зауваження. Розглянуті вище алгебраїчні структури групи та кільця можна також визначити як алгебри $\langle G,* \rangle$ і $\langle K,+,* \rangle$, на яких виконуються відповідно 3 аксіоми і 5 аксіом (див. означення групи та кільця).

Згадаємо також поняття *алгебри множин*, з яким ми познайомились в розділі «Елементи теорії множин». В математиці зустрічаються інші об'єкти, крім множин, для яких визначені операції типу «об'єднання», «перетин» и «доповнення», які задовольняють законам із додатку 1. Словосполучення «операції типу» означає, що можна користуватися тими ж назвами та символами, хоча їх зміст може бути іншим. Вперше на цей факт звернув увагу англійський математик Дж. Буль, тому виник термін ***булеві алгебри.***

Означення. *Булевою алгеброю* називаеться непуста множина U з трьома операціями: $A \cup B$ (типу об'єднання множин), $A \cap B$ (типу перетину множин), $\overline{A}$ (типу доповнення множини до універсальної), якщо ці операції задовольняють аксіоми:

1. $A \bigcup B = B \bigcup A,\ A \bigcap B = B \bigcap A.$
2. $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C,\ A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C.$
3. $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C),\ A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$
4. $A \bigcap \overline{A} = \varnothing,\ A \bigcup \overline{A} = U.$
5. $A \bigcap (A \bigcup B) = A,\ A \bigcup (A \bigcap B) = A.$

Приклад. Логіка висловлювань є алгеброю Буля. Дійсно, на множині E всіх висловлювань задано операції $-, \wedge, \vee$ (відповідно заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція висловлювань, 0 – хибність, 1 – істина. Залишилоья перевірити виконання аксіом (логічних законів). Деякі з них були вже доведені у другому розділі. Неважко довести, що всі законі виконуються.

Отже, маємо алгебру Буля.

Приклад. Нехай $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ - множина всіх дільників числа 30. Задамо операції типу об'єднання, перетину та доповнення для елементів множини M наступним чином. Об'єднанням двох дільників будемо називати їх найменше спільне кратне, перетином – найбільший спільний дільник, доповненням до дільника – частку від ділення на нього числа 30.

Наприклад, згідно з цими означеннями $2 \cup 5 = 10, 6 \cap 15 = 3$, $\overline{6} = \frac{30}{6} = 5$ Роль елемента $\varnothing$ відіграє дільник 1, а роль U - дільник 30. Легко безпосередньо повним перебором переконатись у виконанні всіх законів з означення булевої алгебри.

Булеві функції

Нехай дано множину $B = \{0,1\}$. Змінні $x_{1,} x_{2,} ... x_n$, які приймають значення тільки із множини B, називаються *логічними* або *булевими змінними*. Самі елементи 0 і 1 називаються *булевими константами*.

Впорядкований набір значень n булевих змінних називається n – *вимірним булевим вектором*. **Наприклад,** набір $(1,1,0,1,1)$ є 5 – вимірним булевим вектором, а набір $(0,1,1)$ – 3 – вимірним.

Різних n – вимірних булевих векторів існує рівно 2^n. Дійсно, кожну координату можна вибрати двома способами, а, значить, за правилом добутку отримаємо $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n} = 2^n$.

Означення. *Булевою функцією від* n *змінних* називається функція, областю визначення якої є множина всіх n – вимірних булевих векторів, а областю значень – множина $B = \{0,1\}$. Позначають $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Множину всіх булевих функцій від довільного скінченного числа змінних позначають P_2.

Теорема Число всіх булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}.

Випадок $n=0$ за означенням відповідає функціям, які не залежать від змінних, тобто константам 0 та 1. При $n=1$ маємо 4 функції:

Таблиця 1 – Булеві функції однієї змінної

x	01	Позначення	Назва
$f_0^{(1)}$	00	0	Константа 0
$f_1^{(1)}$	01	x	Тотожна функція
$f_2^{(1)}$	10	$\bar{x}$	Заперечення
$f_3^{(1)}$	11	1	Константа 1

При $n=2$ кількість булевих функцій дорівнює 16:

Таблиця 2 – Булеві функції двох змінних

x y	0011 0101	Позначення	Назва
$f_0^{(2)}$	0000	0	Константа 0
$f_1^{(2)}$	0001	$x \wedge y$	Кон’юнкція
$f_2^{(2)}$	0010	$\overline{x \Rightarrow y}$	Заперечення імплікації
$f_3^{(2)}$	0011	x	Проекція на перший елемент
$f_4^{(2)}$	0100	$\overline{y \to x}$	Заперечення оберненої імплікації
$f_5^{(2)}$	0101	y	Проекція на другий елемент
$f_6^{(2)}$	0110	$x \oplus y$	Сума за модулем 2

$f_7^{(2)}$	0111	$x \vee y$	Диз'юнкція
$f_8^{(2)}$	1000	$x \downarrow y$	Стрілка Пірса (заперечення диз'юнкції)
$f_9^{(2)}$	1001	$x \leftrightarrow y$	Еквіваленція
$f_{10}^{(2)}$	1010	$\bar{y}$	Заперечення на другий елемент
$f_{11}^{(2)}$	1011	$y \to x$	Обернена імплікація
$f_{12}^{(2)}$	1100	$\bar{x}$	Заперечення на перший елемент
$f_{13}^{(2)}$	1101	$x \to y$	Імплікація
$f_{14}^{(2)}$	1110	$x \mid y$	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції)
$f_{15}^{(2)}$	1111	1	Константа 1

Отже, можемо задавати булеву функцію таблицею її значень (таблицею істинності) або ж формулою логіки висловлювань.

Означення. Дві *булеві функції* від n змінних називаються *рівними*, якщо вони приймають однакові значення при всіх наборах змінних, тобто якщо їхні таблиці істинності співпадають.

Означення. *Змінна* x_i для функції $f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ називається *фіктивною*, якщо існує така функція $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1}...,x_n)$, що

$$f(x_1,...,x_i,...,x_n) = g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1}...,x_n)$$

для всіх наборів змінних. *Змінна*, яка не є фіктивною, називається *суттєвою* для булевої функції.

Приклад. Змінна x для функції $f(x,y) = (x \wedge \bar{y}) \vee \bar{y}$ є фіктивною, оскільки $f(x, y) = g(y) = \bar{y}$, а змінна y – суттєвою.

Нормальні форми булевих функцій

Таблицею істинності булева функція задається однозначно. Якщо функція задана формулою логіки висловлювань, то її представлення не однозначне.

Приклад. $f(x,y) = x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = f_{13}^{(2)}$.

Означення. *Елементарною кон`юнкцією* або елементарним добутком називається кон`юнкція скінченного числа змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ або їх заперечень.

Приклад. Формули x_1, $\bar{x}_5$, $x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$ є елементарними кон`юнкціями. Формула $x_1 \vee \bar{x}_3$ не є елементарною кон’юнкцією.

Означення. *Елементарною диз`юнкцією* або елементарною сумою називається диз`юнкція скінченного числа змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ або їх заперечень.

Приклад. Формули x_1, $\bar{x}_5$, $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$ є елементарними диз’юнкціями, а формула $x_1 \wedge \bar{x}_3$ не є елементарною диз’юнкцією.

Очевидно, якщо формула f є елементарною кон`юнкцією, то $f^*$ є елементарною диз`юнкцією. Окремо взята змінна або заперечення окремо взятої змінної є одночасно й елементарною кон'юнкцією й елементарною диз'юнкцією.

Оскільки $x \wedge x = x$ і $x \vee x = x$, то природно вважати, що кожна змінна входить в елементарну кон’юнкцію і в елементарну диз’юнкцію не більше одного разу. Тоді коректним буде наступне.

Означення. Кількість змінних в елементарній кон’юнкції (в елементарній диз’юнкції) називають її довжиною. Елементарна кон’юнкція (елементарна диз’юнкція) від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, яка містить усі змінні, називається повною кон’юнкцією (повною диз’юнкцією).

Для булевої константи 1 будемо вживати термін «кон'юнкція довжини 0», а для булевої константи 0 – «диз'юнкція довжини 0».

Приклад. Формула $K(x,y,z) = x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$ є повною кон'юнкцією, а формула $D(x,y) = x \vee \bar{y}$ – повною диз'юнкцією. Але формула $K(x,y,z,t) = x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$ не є повною кон'юнкцією.

Означення. Формула F називається кон'юнктивою нормальною формою булевої функції (КНФ), якщо вона є кон`юнкцією скінченного числа попарно різних елементарних диз`юнкцій або $F \equiv 0$.

Приклади. Кон'юнктивними нормальними формами є: $x_1 \vee x_5$ (одна елементарна диз'юнкція довжини 2), $(x_1 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$ (дві елементарні диз'юнкції з довжинами 2 та 3 відповідно).

Означення. *Формула* F називається *диз'юнктивною нормальною формою булевої функції* (ДНФ), якщо вона є диз`юнкцією скінченного числа попарно різних елементарних кон`юнкцій або $F \equiv 1$.

Приклади. Диз'юнктивними нормальними формами є: $x_1 x_5$ (одна елементарна кон'юнкція довжини 2), $x_1 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$ (дві елементарні кон'юнкції з довжинами 2 та 3 відповідно).

Зрозуміло, що коли формула f є КНФ деякої булевої функції, то формула f^* є ДНФ двоїстої до неї функції.

Теорема Для будь-якої булевої функції існує еквівалентна їй КНФ і еквівалентна їй ДНФ, причому не єдині.

Приклад. Побудувати будь-яку ДНФ функції $F = (x \wedge y \Rightarrow x \wedge \overline{y} \wedge z) \wedge y$. Для цього виконаємо перетворення:

$$F = (x \wedge y \Rightarrow x \wedge \overline{y} \wedge z) \wedge y = (\overline{xy} \vee x\overline{y}z)y = ((\overline{x} \vee \overline{y}) \vee x\overline{y}z)y =$$

$$= (\overline{x} \vee \overline{y} \vee x\overline{y}z)y = \overline{x}y \vee \overline{y}y \vee x\overline{y}zy = \overline{x}y.$$

Досконалі нормальні форми булевої функції

Теорема Число повних елементарних кон'юнкцій від n змінних дорівнює 2^n.

Означення. *Досконалою диз'юнктивною нормальною формою* (ДДНФ) булевої функції від n змінних називається така її ДНФ, яка містить лише повні елементарні кон'юнкції.

Приклад. Досконалими диз'юнктивними нормальними формами є: $E(x) = x$, $E(x,y) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y)$, $E(x,y,z) = (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$.

Теорема. Для кожної булевої функції від n змінних, відмінної від константи 0, існує єдина рівносильна їй ДДНФ.

Алгоритм зведення формули до ДДНФ.

- Формулу, яка задає булеву функцію, зведемо до ДНФ.
- Якщо в цій ДНФ існує елементарна кон'юнкція, яка не містить хоча б однієї зі змінних, наприклад, змінної x_i, то помножимо її на $x_i \vee \overline{x_i} = 1$ та застосуємо закони дистрибутивності. Скінченне число кроків забезпечить нам перехід до ДДНФ.

Приклад. Формула $F(x,y,z) = (x \wedge y \Rightarrow x\overline{y}z)y = \ldots = \overline{x}y$ (дивись останній приклад попереднього пункту) є ДНФ булевої функції від трьох змінних, але не ДДНФ, оскільки в ній існує неповна елементарна кон'юнкція, вона не містить змінної z. Помножимо її на диз'юнкцію $\bar{z} \vee z$ і застосуємо закон дистрибутивності, отримаємо $\overline{x}y = \overline{x}y(\bar{z} \vee z) = \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z}$. Ця формула і є ДДНФ даної булевої функції.

Число повних елементарних диз'юнкцій також дорівнює 2^n, кожна з них приймає значення 0 тільки на одному булевому векторі. Наприклад, $(x_1 \vee x_2)(0,0) = 0$ і тільки при $(0,0)$.

Означення. *Досконалою кон'юнктивною нормальною формою* (ДКНФ) булевої функції від n змінних називається така її КНФ, яка містить лише повні елементарні кон'юнкції.

Приклад. Досконалими кон'юнктивними нормальними формами є: $E(x)=x$, $E(x,y)=(x\wedge y)\vee(\bar{x}\wedge y)$, $E(x,y,z)=(x\wedge y\wedge \bar{z})\vee(\bar{x}\wedge y\wedge z)$.

Теорема Для кожної булевої функції від n змінних, відмінної від константи 1, існує єдина рівносильна їй ДКНФ.

Алгоритм зведення формули до ДКНФ.

- Формулу, яка задає булеву функцію, зведемо до КНФ.
- Якщо в цій КНФ існує елементарна диз'юнкція, яка не містить хоча б однієї зі змінних, наприклад, змінної x_i, то додамо до цієї диз'юнкції $x_i\bar{x}_i=0$ та застосуємо закони дистрибутивності. Скінченне число кроків забезпечить нам перехід до ДКНФ.

Приклад. Формула $F(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\vee x_2)(x_1\vee x_3)(x_2\vee x_3)$ є КНФ, але не є ДКНФ булевої функції від трьох змінних. Виконаємо перетворення:

$$F(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_3x_3)(x_1\vee \bar{x}_2x_2\vee x_3)(\bar{x}_1x_1\vee x_2\vee x_3)=$$
$$=(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee \bar{x}_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee x_3)=$$
$$=(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee \bar{x}_2\vee x_3).$$

Отримали ДКНФ.

Алгоритм побудови ДДНФ і ДКНФ за допомогою таблиці істинності

Приклад. Нехай функція $f(x,y,z)$ задана вектором значень (11100101). Випишемо її таблицю істинності у явному вигляді, вказавши для кожного «одиничного» набору значень змінних (коли функція набуває значення 1) відповідну повну елементарну кон'юнкцію, а для кожного «нульового» набору (коли функція набуває значення 0) – відповідну повну елементарну диз'юнцію.

Таблиця 3 – Таблиця істинності функції $f(x,y,z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$	повні кон'юнкції	повні диз'юнкції
0	0	0	1	$\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}$	
0	0	1	1	$\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z$	
0	1	0	1	$\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z}$	
0	1	1	0		$x\vee\bar{y}\vee\bar{z}$
1	0	0	0		$\bar{x}\vee y\vee z$
1	0	1	1	$x\wedge\bar{y}\wedge z$	
1	1	0	0		$\bar{x}\vee\bar{y}\vee z$
1	1	1	1	$x\wedge y\wedge z$	

Тепер можна записати ДДНФ як диз'юнкцію отриманих повних елементарних кон'юнкцій та ДКНФ як кон'юнкцію отриманих повних диз'юнкцій:

ДДНФ: $(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)$;

ДКНФ: $(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)$.

Вправи до розділу 2

1. Скласти таблицю булевої функції, заданої формулою:

1) $f=((x_1x_2)\oplus x_1)\oplus x_2$,

2) $f=(x_1x_2)\vee(x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_2)$.

Знайти її порядковий номер.

2. Дано дві булеві функції:

а) $f=(\bar{x}\Rightarrow y)\Rightarrow(\bar{x}\wedge y\Leftrightarrow(x\oplus y))$, $g=(\overline{x\wedge y}\Rightarrow x)\Rightarrow y$;

б) $f=(\bar{x}\vee\bar{y}\wedge z)\Rightarrow((x\Rightarrow y)\Rightarrow((y\vee z)\Rightarrow\bar{x}))$, $g=(x\Rightarrow y)\Rightarrow(\bar{y}\Rightarrow\bar{x})$.

Дослідити, чи будуть вони рівносильними. Знайти істотні та фіктивні змінні першої функції.

3. Побудувати ДДНФ та ДКНФ за допомогою логічних законів та зробити перевірку за допомогою таблиць:

а) $x \vee y \wedge \bar{z} \oplus y$,

б) $(x \oplus y) \wedge z \vee \bar{x}$,

в) $(x \to \bar{y}) \oplus (z \vee y)$.

4. Булеву функцію задано набором значень. Записати її ДДНФ і ДКНФ:

а) (11010000),

б) (00001110).

5. Звести до ДНФ функцію: а) $f(x,y,z) = x \wedge \overline{\left((x \vee \bar{y}) \wedge \overline{x \wedge \bar{z}}\right)}$, б) $x\,\overline{(x \vee \bar{y})\overline{x\bar{z}}}$, в) $x \vee \left(y\overline{x\bar{z}}\right)$.

6. Звести до ДДНФ функції: а) $E(x,y) = (x \wedge \bar{y}) \vee \bar{x}$; б) $E(x,y,z) = (x \wedge y) \vee \bar{z}$.

7. Побудувати до КНФ функцію: а) $f(x,y,z) = x \vee \overline{\left((x \wedge \bar{y}) \vee \overline{x \vee \bar{z}}\right)}$, б) $x \vee \overline{(x\bar{y}) \vee \overline{x \vee \bar{z}}}$, в) $x\left(y \vee \overline{x \vee \bar{z}}\right)$.

8. Звести булеву функцію $h(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$ до ДКНФ.

Розділ 3. Основи теорії чисел

Відношення подільності

Говорять, що *ціле число* b *ділить ціле число a* (або що *a ділиться на* b), якщо існує таке ціле число c, що $a = bc$.

Найбільшим спільним дільником двох чисел a та b називається найбільше ціле число, яке ділить кожне з чисел *a* та b.

Найменшим спільним кратним двох чисел a та b називається найменше ціле число, яке ділиться на кожне з чисел *a* та b.

Будемо користуватись позначеннями:

- $b \mid a$ для «b ділить *a*»;
- $a \vdots b$ для «*a* ділиться на b»;
- $НСД(a,b)$ або (a,b) для «*найбільший спільний дільник a та* b»;
- $НСК(a,b)$ або $[a,b]$ для «*найменше спільне кратне a та* b»

Теорема (про ділення з остачею) Нехай $a, b \neq 0$ – цілі числа, тоді існують і єдині числа $q \in Z,\ r \in N \cup \{0\}$, $0 \le r < b$, що
$a = bq + r$.

Властивості НСД і НСК:

- $(0, a) = a$;
- $(a,b) = (a-b,b)$;
- $a \cdot b = (a,b) \cdot [a,b]$;
- $(a,b,c) = ((a,b),c)$;
- Якщо $a = bq + r$, то $(a,b) = (b,r)$.

Приклади. *a*) 43|731, b) $731 \vdots 43$,

c) $(903,731) = (731,172) = (559,172) = (387,172) = (215,172) = (43,172) = 43$,

d) 903=730$\cdot$1+173.

В прикладі с) знайдено НСД на основі властивості $(a,b)=(a-b,b)$. Остання з наведенних властивостей лежить в основі алгоритму знаходження НСД двох чисел, який носить ім'я Евкліда. Покажемо, як працює алгоритм на тому ж прикладі, тобто для a =903, b=731.

- За теоремою про ділення з остачею $a=b\cdot 1+172$, b- дільник, 172– остача,
- Ділимо дільник на остачу $b=172\cdot 4+43$, 172 – дільник, 43-остача,
- Ділимо дільник на остачу 172=43$\cdot$4.

Остання рівність виражає ділення націло. Алгоритм припиняє роботу.

Остання відмінна від 0 остача, тобто число 43 і є НСД чисел a =903, b=731 у відповідності до алгоритму Евкліда.

Зауваження. З наведенного прикладу видно, що знаходження НСД за допомогою алгоритму є більш ефективним, швидше приводить до результату. Ще однією з переваг алгоритму є можливість отримати так зване лінійне представлення НСД двох чисел, про що говорить наступна теорема.

Теорема Нехай $a,b\in N,\ d=(a,b)$, тоді $\exists x,y\in Z \quad d=ax+by$.

Знову розглянемо той самий приклад. З передостаннього кроку алгоритму можемо записати $d=b-172\cdot 4$, де d=43, а з першого кроку $172=a-b$. Залишилось підставити і звести подібні доданки: $d=b-4(a-b)=-4a+5b$.

Ця рівність і називається *представленням НСД двох чисел у вигляді їх лінійної комбінації.*

З попередньої теореми випливає

Наслідок $k\,|\,a$ і $k\,|\,b$ тоді і тільки тоді, коли $k\,|(\,a,\ b\,)$.

Прості числа. Числові функції

Натуральне число p називається *простим*, якщо воно має рівно два дільники – 1 і *p*. Числа а та в називаються *взаємно простими*, якщо $(a,b)=1$.

Ще Евклідом доведена теорема про нескінченність зростаючої послідовності простих чисел. Початок цієї послідовності має вигляд $\{2,3,5,7,11,13,17,...\}$.

Закон розподілу простих чисел досі не знайдено. Існують та звані асимптотичні оцінки тих або інших фактів про прості числа. Наприклад, доведено, що *n*-не просте число приблизно дорівнює $n \ln n$, а кількість простих чисел, які не більші за х приблизно дорівнює $\dfrac{x}{\ln x}$.

Будь-яке натуральне число *n* можна записати у вигляді добутку простих чисел, який можна перетворити до вигляду $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... p_n^{\alpha_n}$.

Останню рівність прийнято називати *канонічним розкладом натурального числа*. Має місце теорема про єдиність такого розкладу з точністю до порядку множників.

Розглянемо функції, областю визначення яких є множина натуральних чисел.

1) Кількість різних дільників числа *n*. Позначають $\sigma(n)$.

Наприклад, $\sigma(3) = 2, \sigma(8) = 4$. Розглянемо загальний випадок.

Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... p_k^{\alpha_k}$ і m - дільник n. Тоді $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... p_k^{\beta_k}$, де $0 \le \beta_1 \le \alpha_1,\ 0 \le \beta_2 \le \alpha_2, \ldots, 0 \le \beta_k \le \alpha_k$.

Далі задача стає комбінаторною. Різним комбінаціям простих дільників числа *n* та показників цих дільників відповідають різні дільники числа *n*. Оскільки $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ можуть приймати відповідно $\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, ..., \alpha_k + 1$ значень, то

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1).$$

2) Сума дільників числа *n*. Позначається $S(n)$.

Наприклад, $S(3) = 1 + 3 = 4,\ S(8) = 1 + 2 + 4 = 7$.

Має місце формула

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_{1+1}}}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_{2+1}}}{p_2 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_k^{\alpha_{k+1}}}{p_k - 1}.$$

Наприклад, $S(1000) = S\left(2^3 5^3\right) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 156$.

Зауваження. До $S(n)$ входять і дільники 1 та *n* числа *n*, їх іноді називають *невласними*. Всі інші дільники називають *власними*. Щоб відрізняти, будемо суму власних дільників позначати символом $\widetilde{S}(n)$. За цим показником всі числа можна поділити на 3 класи:

- $\widetilde{S}(n) < n$ - недостатні числа,
- $\widetilde{S}(n) > n$ - збиткові числа,
- $\widetilde{S}(n) = n$ - досконалі числа.

З досконалими числами пов'язані дотепер нерозв'язані проблеми:

- Скінченна чи нескінченна множина досконалих чисел?
- Чи існують непарні досконалі числа?

3) Кількість чисел, не більших за *n* і взаємно простих з *n*. Позначають $\varphi(n)$ і називають функцією Ейлера.

Наприклад, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(8) = 4$.

Очевидно, для простого числа *p* має місце формула

$$\varphi(p) = p - 1.$$

В загальному випадку має місце формула

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Означення. Числова *функція* $f(n)$ називається *мультиплікативною*, якщо для будь-яких взаємно простих чисел a та b має міце співвідношення

$$f(ab) = f(a) f(b).$$

Теорема Функції $\sigma(n)$, $S(n)$ та $\varphi(n)$ є мультиплікативними.

Теорія порівнянь

Нехай a, b - цілі числа. Говорять, що a та b *порівняні по модулю* m, якщо різниця $a-b$ ділиться на m. Позначають $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ і називають *порівнянням по модулю.*

Умова $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ рівносильна кожній з умов:

- Числа a та b дають при діленні на m однакові остачі;
- Число a можна подати у вигляді $a = b + mt, t \in Z$;
- Число b можна подати у вигляді $b = a + mk, k \in Z$.

Як уже зазначалось в темі «Відношення» порівняність на множині цілих чисел є відношенням еквівалентності.

Властивості відношення порівняності:

1) Порівняння по одному й тому ж модулю можна почленно додавати, віднімати, множити, тобто якщо $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ і $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$, то $a \pm c \equiv b \pm d\ (\mathrm{mod}\, m)$, $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m)$.

2) Доданок можна переносити з однієї частини порівння в іншу, змінивши при цьому його знак, тобто якщо $a + c \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, то $a \equiv b - c\ (\mathrm{mod}\, m)$.

3) Для будь-якого к з порівняння $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ випливає порівняння $ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, m)$.

4) Якщо $ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, m)$ і $(k, m) = 1$, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

5) Якщо $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, то при будь-якому к має місце порівняння $a \equiv b + mk\ (\mathrm{mod}\, m)$.

6) Якщо $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ і m ділиться на d, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\, d)$.

7) Для будь-якого к з порівняння $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ випливає порівняння $ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, mk)$.

8) Якщо $ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, mk)$, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

9) Якщо $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m_1)$ і $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m_2)$ і $(m_1, m_2) = m$, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

Частинний випадок. Якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m_1)$ і $a \equiv b(\operatorname{mod} m_2)$ і $(m_1, m_2) = 1$, то $a \equiv b(\operatorname{mod} m_1 m_2)$.

10) Якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $(a, m) = (b, m)$.

11) Якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ і $(a, m) = d$, то b ділиться на d.

Використання порівнянь для виведення ознак подільності

Ознаками подільності називають правила, які дозволяють швидко визначити, чи є число кратним наперед заданому числу, без необхідності виконувати ділення.

Розглянемо основні ознаки подільності натуральних чисел.

Теорема Нехай задано натуральне число $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 = \overline{a_n a_n \ldots a_1 a_0}$. Тоді мають місце порівняння $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right.$.

Доведення. Запишемо очевидні порівняння:

$$1 \equiv 1 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right., \qquad 10 \equiv 0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right., \qquad \ldots, \qquad 10^n \equiv 0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right..$$

За властивостями порівнянь отримаємо

$$a_0 \equiv a_0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right., \quad 10 a_1 \equiv 0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right., \quad \ldots, \quad 10^n a_n \equiv 0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right., \text{ звідки}$$

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10 a_1 + a_0 \equiv a_0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right., \text{ або}$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 \left[\begin{matrix}(\operatorname{mod} 2) \\ (\operatorname{mod} 5)\end{matrix}\right..$$

Наслідок (ознака подільності на 2) Натуральне число ділиться націло на 2 тоді й тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 2 або, інакше, остання цифра якого парна.

Наслідок (ознака подільності на 5) Натуральне число ділиться націло на 5 тоді й тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 5 або, інакше, остання цифра якого 0 або 5.

Наступні теореми доводяться аналогічно. Наведемо їх формулювання і ознаки подільності, які з них випливають.

Теорема $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \left[\begin{array}{l} (\bmod 4) \\ (\bmod 25) \end{array} \right.$.

Наслідок (ознака подільності на 4). Натуральне число ділиться націло на 4 тоді й тільки тоді, коли дві його останні цифри утворюють число, яке ділиться на 4.

Наслідок (ознака подільності на 25). Натуральне число ділиться націло на 25 тоді й тільки тоді, коли дві його останні цифри утворюють число, яке ділиться на 25.

Приклади. 3336 ділиться на 4, 111112 ділиться на 4, 999922 не ділиться на 4, 111110 не ділиться на 25, 111375 ділиться на 25.

Теорема $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \left[\begin{array}{l} (\bmod 8) \\ (\bmod 125) \end{array} \right.$.

Наслідок (ознака подільності на 8). Натуральне число ділиться націло на 8 тоді й тільки тоді, коли три його останні цифри утворюють число, яке ділиться на 8.

Наслідок (ознака подільності на 125). Натуральне число ділиться націло на 125 тоді й тільки тоді, коли три його останні цифри утворюють число, яке ділиться на 125.

Приклад. 3336 ділиться на 8, 999922 не ділиться на 8, 111110 не ділиться на 125, 111375 ділиться на 125.

Аналогічно формулюються ознаки подільності на числа виду 2^k або 5^k.

Теорема $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \left[\begin{array}{l}(\mathrm{mod}\ 3) \\ (\mathrm{mod}\ 9)\end{array}\right.$.

Наслідок (ознака подільності на 3). Натуральне число ділиться націло на 3 тоді й тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.

Наслідок (ознака подільності на 9). Натуральне число ділиться націло на 9 тоді й тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9.

Приклади. 3336 ділиться на 3, але не ділиться на 9, 111112 не ділиться на 3, а отже не ділиться і на 9, 9999822 ділиться і на 3, і на 9.

Теорема $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n \ (\mathrm{mod}\ 11)$.

Наслідок (ознака подільності на 11). Занумеруємо цифри натурального числа N справа наліво числами 0, 1, 2, … Число N ділиться націло на 11 тоді й тільки тоді, коли різниця суми цифр на парних і суми цифр на непарних місцях ділиться на 11.

Приклад. 2387605 ділиться на 11 (сума цифр на парних місцях 5+6+8+2=21, на непарних місцях 0+7+3=10, їх різниця дорівнює 11).

Системи числення

Системою числення називається сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід’ємне число. В різні часи і в різних країнах користувались різними системами числення. Щоб уникати неоднозначності і ожливих суперечностей до кожної системи числення ставляться вимоги:

1) будь-яке ціле невід’ємне число записується однозначно у даній системі числення;

2) числа легко порівнювати на основі їх запису;

3) алгоритми виконання арифметичних операцій над числами, записаними у даній системі числення, достатньо прості.

Системи числення поділяються на *позиційні* і *непозиційні*.

З непозиційних найбільш відомою є римська система числення, якою у деяких випадках користуються і нині. У ній застосовується сім знаків: I –1, V – 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000. Інші числа можна одержати у результаті їх додавання та віднімання за певними правилами. Наприклад, у римській системі числення записом числа 1996 буде MCMXCVI (1000+1000 без 100+100 без 10+6), а 324 = CCCXXIV. Зауважимо, що в цій системі значення «цифри» в різних позиціях в числі однакове, звідкиі назва *непозиційна*.

Недоліками непозиційної системи числення є відсутність нуля, складність виконання арифметичних операцій, необхідність введення нових «цифр» для запису великих чисел.

Система числення, в якій значення кожної цифри залежить від її місця в числі, називається *позиційною*. Така властивість значно полегшує запис числа, порівняння чисел і виконання арифметичних операцій над ними. В попередньому розділі ми користувались позиційною десятковою системою числення (або десятковими числами). Але іноді зручно користуватись й іншими. Розглянемо **алгоритм переведення десяткового числа в іншу систему числення.**

Нехай задано довільне (десяткове) натуральне число n Зафіксуємо натуральне число $m > 1$ (основу системи). Розглянемо ділення з остачею спочатку числа n на m, потім кожної наступної отриманої частки на m, поки частка не стане рівною 0 (таке рано чи пізно трапиться, бо кожного разу частка зменшуватиметься):

$$n = q_1 m + r_0,\ 0 \le r_0 < m;$$

$$q_1 = q_2 m + r_1,\ 0 \le r_1 < m;$$

$$q_2 = q_3 m + r_2,\ 0 \le r_2 < m;$$

$$\dots$$

$$q_{k-1} = q_k m + r_{k-1},\ 0 \le r_{k-1} < m;$$

$$q_k = 0 \cdot m + r_k,\ 0 \le r_k < m.$$

Цей ланцюжок рівностей можна записати наступним чином:

$$n = q_1 m + r_0 = (q_2 m + r_1)m + r_0 = q_2 m^2 + r_1 m + r_0 = (q_3 m + r_2)m^2 + r_1 m + r_0 =$$

$$= q_3 m^3 + r_2 m^2 + r_1 m + r_0 = \ldots = q_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \ldots + r_1 m + r_0 =$$

$$= r_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \ldots + r_1 m + r_0.$$

Одержана рівність

$$n = r_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \ldots + r_1 m + r_0,$$

де $r_k \neq 0$ і $0 \le r_j < m$ для всіх $j = \overline{0, k}$, називається *зображенням числа n у позиційній системі числення з основою m*.

Зауваження. 1) В позиційних системах числення використовується арабські цифри 0, 1, ..., 9, до яких у разі необхідності додаються букви латинського алфавіту. Наприклад, для системи числення з основою 16 (шістнадцятирічноїсистеми числення) крім 0-9 використовують *A, B, C, D, E, F*. Цифра *A* в цьому випадку відповідає десятковому числу 10, *B* – 11, *C* – 12, *D* – 13, *E* – 14, *F* – 15.

2) Позиційна система запису легко поширюється на від'ємні цілі числа: щоб записати число $n < 0$ в m-ковій системі числення, ми просто ставимо знак «–» перед m-ковим записом числа $|n|$.

3) При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою m, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду і основу системи числення. Наприклад, число 43065_8 читається: «чотири три нуль шість п'ять у системі числення з основою вісім».

Приклади. $A_{10} = 123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 123_{10}$,

$A_5 = 123_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 38_{10}$.

Арифметичні дії в позиційних системах числення

При виконанні арифметичних операцій над числами у m-ковій системі числення потрібно пам'ятати, що m одиниць нижчого розряду дорівнюють одній одиниці сусіднього вищого розряду, а одна одиниця вищого розряду дорівнює m одиницям сусіднього нижчого розряду. Для перевірки використовують десяткову систему числення.

Задача. Додати числа 1101 та 1011 у двійковій системі числення.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ +\ 1011_2 \\ \hline 11000_2 \end{array}$$

$1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{10}$,

$1011_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11_{10}$,

$11000_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 24_{10}$,

$13_{10} + 11_{10} = 24_{10}$.

Задача. Додати числа $A_{16} = A1B$ і $B_{16} = 11F$ у шістнадцятирічній системі числення.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} A1B_{16} \\ +\ 11F_{16} \\ \hline B3A_{16} \end{array}$$

$A1B_{16} = 10\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{10}$,

$11F_{16} = 1\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{10}$,

$B3A_{16} = 11\cdot 16^2 + 3\cdot 16^1 + 10\cdot 16^0 = 2816 + 48 + 10 = 2874_{10}$,

$2587_{10} + 287_{10} = 2874_{10}$.

Задача. Відняти від числа $A_2 = 1101$ число $B_2 = 1011$ у двійковій системі.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ -\ 1011_2 \\ \hline 0010_2 \end{array}$$

$1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{10}$,

$1011_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11_{10}$,

$0010_2 = 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 2_{10}$,

$13_{10} - 11_{10} = 2_{10}$.

Задача. Відняти від числа $A_{16} = A1B$ число $B_{16} = 11F$ у шістнадцятирічній системі.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} A1B_{16} \\ - \\ 11F_{16} \\ \hline 8FC_{16} \end{array}$$

$A1B_{16} = 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{10}$,

$11F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{10}$,

$8FC_{16} = 8 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2048 + 240 + 12 = 2300_{10}$,

$2587_{10} - 287_{10} = 2300_{10}$.

Задача. Перемножити числа $A_2 = 1101$ і $B_2 = 1011$ у двійковій системі.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ \times \\ 1011_2 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 10001111_2 \end{array}$$

$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$,

$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11_{10}$,

$10001111_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 +$

$+ 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 8 + 4 + 2 + 1 = 143_{10}$,

$13_{10} \times 11_{10} = 143_{10}$.

Задача. Помножити число $A_{16} = A1B$ на число $B_{16} = 11F$ у шістнадцятирічній системі числення.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} A1B_{16} \\ \times \\ 11F_{16} \\ \hline 9795 \\ \text{A1B} \\ \text{A1B} \\ \hline B5445_{16} \end{array}$$

$A1B_{16} = 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{10}$,

$11F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{10}$,

$B5445_{16} = 11 \cdot 16^4 + 5 \cdot 16^3 + 4 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 =$

$= 720896 + 20480 + 1024 + 64 + 5 = 742469_{10}$,

$2587_{10} \times 287_{10} = 742469_{10}$.

Задача. Поділити число 1101_2 на число 1011_2 у двійковій системі числення.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r|l} 1101 & 1011 \\ \cline{2-2} -\ 1011 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Частка від ділення, очевидно, дорівнює одиниці, а залишок $10_2 = 2_{10}$. Ділення числа $13_{10} = 1101_2$ на число

10

$11_{10}=1011_2$ у десятковій системі числення дасть той самий результат.

$$
\begin{array}{r|l}
13 & 11 \\ \hline
-\,11 & 1 \\ \hline
2 &
\end{array}
$$

Задача. Поділити число $A1B_{16}$ на число $11F_{16}$ у шістнадцятирічній системі числення.

Розв’язання. *Перевірка.*

$$
\begin{array}{r|l}
A1B_{16} & 11F_{16} \\ \hline
-\,A17 & 9 \\ \hline
4 &
\end{array}
$$

$$A1B_{16}=10\cdot16^2+1\cdot16^1+11\cdot16^0=2560+16+11=2587_{10},$$

$$11F_{16}=1\cdot16^2+1\cdot16^1+15\cdot16^0=256+16+15=287_{10},$$

$$
\begin{array}{r|l}
2587_{10} & 287_{10} \\ \hline
-\,2583 & 9 \\ \hline
4 &
\end{array}
$$

Вправи до розділу 3

1. Знайти цілу та дробову частини чисел: 25.45; 200; 34.98; –20.89; –145.04; 0.07; –0.07.

2. Знайти канонічний розклад числа 50!

3. Знайти показник, з яким число 13 входить у розклад 1000!

4. Скількома нулями закінчується 123!?

5. Знайти натуральне число n, якщо воно є добутком двох різних простих чисел, а $\varphi(n)$ дорівнює: **1)** 60; **2)** 100; **3)** 120.

6. Обчислити кількість і суму дільників, значення функції Ейлера для чисел 13;100;60;360;81;1542;91;8712. Вказати, які з чисел є недостатніми, надлишковими чи досконалими.

7. Визначити, чи є число 2096128 досконалим.

8. Скільки є чисел на проміжку від 1 до 180, які не взаємно прості з числом 30?

9. Перевірте, які з пар чисел є дружніми: (1162, 1212), (1184, 1210), (2620, 2924).

10. Перевірте подільність на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 30, 32, 33, 36, 40, 44, 45, 48 таких чисел: 85761; 44253; 123459.

11. Запишіть, використовуючи по одному разу кожну із цифр 0, 1, 4, 7, найбільше та найменше чотирицифрові числа, кратні 15.

12. До числа 15 допишіть ліворуч і праворуч по одній цифрі так, щоб утворене число було кратним 15. Скільки розв'язків має задача?

13.До числа 34 допишіть ліворуч і праворуч по одній цифрі так, щоб утворене число було кратним 45. Скільки розв'язків має задача?

14. Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число *74* ділилося націло на 18. Знайдіть усі можливі розв'язки.

15. Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число 3*4* ділилося націло на 9. Знайдіть усі можливі розв'язки.

16. Замість зірочки поставте таку цифру, щоб семицифрове число 187674* ділилося націло на 33.

17. Шестицифрове число кратне 8. Яку найбільшу суму цифр може мати?

18. Знайдіть найменше натуральне число, кратне 36, у записі якого зустрічаються всі 10 цифр.

19. Натуральне число n таке, що $S(n) = S(5n)$. Доведіть, що n кратне 9.

20. Обчисліть у вказаній системі числення (не переводячи в десяткову систему числення): $7306_8 + 25645_8 - 6774_8$; $425_6 \cdot 54_6 - 531_6 \cdot 43_6$; $20671_8 : 131_8$; $120111_3 : 102_3 + 201_3 \cdot 12_3$.

21. Визначте, в якій системі числення є вірними результати наступних дій: $35 + 40 = 115$; $425 - 342 = 63$.

22. Знайдіть значення x, якщо: $203_x = 53$; $236_x = 1240_5$.

23. Запишіть наступні числа у вказаній системі числення: 23163 та 17527 у вісімковій; 231632 та 729 у сімковій; 2042 та 2786 у двійковій, трійковій та п'ятирковій.

24. Запишіть наступні числа у десятковій системі числення: 26014_7; 42125_5; 11001101_2.

Додаток 1 **Основні закони операцій над множинами**

1. закони комутативності:

$A \bigcup B = B \bigcup A,$

$A \bigcap B = B \bigcap A.$

2. закони асоціативності:

$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C,$

$A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C.$

3. закони дистрибутивності:

$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C),$

$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$

4. закон інволюції:

$\overline{\overline{A}} = A.$

5. закони де Моргана:

$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B},$

$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}.$

6. закони ідемпотентності:

$A \bigcup A = A,$

$A \bigcap A = A.$

7. закони елімінації:

$A \bigcap (A \bigcup B) = A,$

$A \bigcup (A \bigcap B) = A.$

8. закони протиріччя та виключеного третього:

$A \bigcap \overline{A} = \varnothing,$

$A \bigcup \overline{A} = U.$

9. властивості порожньої та універсальної множини:

$A \bigcup \varnothing = A,$

$A \bigcup U = U,$

$A \bigcap \varnothing = \varnothing,$

$A \bigcap U = A.$

Додаток 2 **Основні логічні закони**

1. закони комутативності:
   $x \vee y = y \vee x$,
   $x \wedge y = y \wedge x$.
2. закони асоціативності:
   $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
   $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
3. закони дистрибутивності:
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
4. закон подвійного заперечення:
   $\overline{\overline{x}} = x$.
5. закони де Моргана:
   $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$,
   $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.
6. закони ідемпотентності:
   $x \vee x = x$,
   $x \wedge x = x$.
7. закони поглинання:
   $x \vee (x \wedge y) = x$,
   $x \wedge (x \vee y) = x$.
8. закони протиріччя та виключеного третього:
   $\bar{x} \wedge x = 0$,
   $\bar{x} \vee x = 1$.
9. закони нуля та одиниці:
   $0 \vee x = x$,
   $0 \wedge x = 0$,
   $1 \vee x = 1$,
   $1 \wedge x = x$.
10. закони для імплікації:
    $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$;
    $\overline{x \Rightarrow y} = x \wedge \bar{y}$;
    $x \Rightarrow y = \bar{x} \Rightarrow \bar{y}$.
11. закони для еквіваленції:
    $x \Leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$;
    $x \Leftrightarrow y = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$;
    $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow y)$.

Додаток 3 **Основні тотожності з біноміальними коефіцієнтами**

1. Обчислювальна формула
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ n \ge k \ge 0,\ n,k \in Z\ .$$

2. Властивість симетрії
$$C_n^k = C_{n-k}^k,\ n \ge 0,\ n,k \in Z\ .$$

3. Внесення, винесення індексів
$$C_k^r = \frac{r}{k} C_{k-1}^{r-1},\ k \ne 0,\ k \in Z\ .$$

4. Рекурентне співвідношення
$$C_k^r = C_k^{r-1} + C_{k-1}^{r-1},\ k \in Z\ .$$

5. Верхнє обернення
$$C_k^r = (-1)^k C_k^{k-r-1},\ k \in Z\ .$$

6. Триноміальний варіант
$$C_m^r C_k^m = C_k^r C_{m-k}^{r-k},\ m,k \in Z\ .$$

7. Біноміальна теорема
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = (x+y)^n\ .$$

8. Підсумовування за обома індексами
$$\sum_{k \le n} C_k^{r+k} = C_n^{r+n+1},\ n \in Z\ .$$

9. Підсумовування за верхнім індексом
$$\sum_{0 \le k \le n} C_m^k = C_{m+1}^{n+1},\ m,n \in Z\ .$$

10. Згортка Вандермонда
$$\sum_{k} C_k^r C_{n-k}^s = C_n^{r+s},\ n \in Z\ .$$

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бардачов Ю.М. Дискретна математика : підруч. для студ. вищ. техн. навч. закл. затвердж. МОНУ. Київ : Вища школа, 2007. 548с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп`ютерна дискретна математика : підручник для студ. вузів рек. МОНУ. Харків : Компанія СМІТ, 2004. 480с.
3. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики: (множини і логіка). Суми : ВТД "Університетська книга", 2002. 180 с.
4. Капітонова Ю.В. Кривий С.Л., Летичевський О.А. та ін. Основи дискретної математики. Київ : Наукова думка, 2002. 579 с.
5. Никольская И.Л. Математическая логика. Москва : Высшая школа, 1971. 127с.
6. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Москва : Просвещение, 1978. 232с.
7. Столяр А.А. Логическое введение в математику. Минск : Высшейшая школа, 1971. 224с.
8. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. Петербург : БХВ-Петербург, 2008. 352 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Бардачов Ю.М. Дискретна математика : підруч. для студ. вищ. техн. навч. закл. затвердж. МОНУ. Київ : Вища школа, 2007. 548с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп`ютерна дискретна математика : підручник для студ. вузів рек. МОНУ. Харків : Компанія СМІТ, 2004. 480с.
3. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики : навч. посібник. Київ : Вид. дім "Києво-Могилянська Академія", 2009. 354с.
4. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики: (множини і логіка). Суми : ВТД "Університетська книга", 2002. 180 с.
5. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. Москва : Наука, 1972. 288с.
6. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. Москва : Изд-во Физматлит, 2006. 347 с.
7. Капітонова Ю.В. Кривий С.Л., О.А. Летичевський О.А. та ін. Основи дискретної математики. Київ : Наукова думка, 2002. 579 с.
8. Клини С. К. Математическая логика. Москва : Мир, 1973. 240с.
9. Луцький Г. М., Кривий С.Л., Печурін М.К. Основи дискретної математики. Київ : ІСДО, 1995. 252 с.
10. Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д., Демченко В. В. Дискретна математика. Київ : Вид-во Європейського ун-ту, 2003. 319 с.
11. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка. Додаткові розділи. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. 130с.
12. Никольская И.Л. Математическая логика. Москва : Высшая школа, 1971. 127с.
13. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Москва : Просвещение, 1978. 232с.
14. Столяр А.А. Логическое введение в математику. Минск : Вышейшая школа, 1971. 224с.
15. Роїк О. М., Тадевасян Р. Г. Основи дискретної математики. Ч.2: Елементи загальної алгебри, булеві функції, теорія графів і комбінаторика. Вінниця : ВДТУ, 2003. 116 с.
16. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. Петербург : БХВ-Петербург, 2008. 352с.

Додаткова

1. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ. Москва : Изд-во ин.лит., 1963. 289 с.
2. Рузавин Г.И. Логика и аргументация. Москва : Культура и спорт, ЮНИТИ, 1997. 351с.

3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику : учебное пособие для вузов. Москва : Наука, 1986.784 с.

4. Хромой Я.В. Математична логіка. Київ : Вища школа, 1983. 208 с.

5. Хромой Я.В. Збірник вправ і задач з математичної логіки. Київ : Вища школа , 1978. 238 с.

6. Шкільняк С.С. Математична логіка. Приклади і задачі. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2007. 145 с.

7. Ядренко М. Дискретна математика. Київ : ТВіМС, 2004. 244с.

Навчальне видання

(українською мовою)

Стєганцева Поліна Георгіївна
Гречнєва Марина Олександрівна
Манько Наталія Іванівна–Володимирівна
Спиця Оксана Геннадіївна
Стєганцев Євгеній Вікторович

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика)», «Середня освіта (Інформатика)», «Математика», «Комп'ютерна математика», «Комп'ютерне моделювання», «Інформаційні системи та технології».

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *І.В. Зіновєєв*
Коректор *Гречнєва М.О.*