**Задача 1**. Дано граф ,, .

























Рисунок 6.29 – Ілюстрація до задачі 1

1) Скласти матрицю інцидентності й матрицю суміжності графа.

2) Знайти оточення всіх вершин графа.

3) Знайти граф, який є доповненням до даного графа.

4) Знайти який-небудь підграф даного графа.

5) Вилучити вершину .

6) Вилучити які-небудь два ребра.

**Розв’язання.**

1. *А* – матриця суміжності, *І* – матриця інцидентності:



2) Оточення вершин:











Рисунок 6.30 – Доповнення

графу



3) Доповнення графу наведено на рисунку 6.30.

4) Підграф наведено на рисунку 6.31.

5) При вилученні вершини  треба видалити інцидентні їй ребра .

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 6.31 – Підграф | Рисунок 6.32 – Граф з вилученими ребрами |

6) Вилучимо ребра  (рисунок 6.32).

Рисунок 6.33 – Граф Петерсона

**Задача 2.** До якого максимального повного графа можна стягнути граф Петерсона?

**Розв’язання.**

Граф Петерсона (рис. 6.33) можна стягнути до повного п’ятивершинного графа. Для цього треба послідовно стягувати його по ребрам, які сполучають вершини «зірки» з вершинами «зовнішнього п’ятикутника».

**Задача** **3**. Якщо у графа 3 вершини, причому степінь першої дорівнює 1, степінь другої дорівнює 2, а степінь третьої – 3, то скільки ребер має граф?

**Розв’язання.**За лемою про рукопотискання , де  – кількість ребер графа. Отже, маємо .

**Задача 4.** Чи можна розташувати на площині 9 відрізків так, щоб кожний з них перетинався з трьома іншими?

**Розв’язання.** Розглянемо граф, вершини якого відповідають заданим відрізкам. Дві вершини суміжні, тобто з’єднані ребром, якщо задані відрізки перетинаються. За умовою задачі кожна вершина графа суміжна ровно з трьома іншими вершинами, а це суперечить наслідку з леми про рукопотискання.

**Задача 5.** Знайти вектори степенів даних графів (рис. 6.34). Дослідити їх на ізоморфність.

а) б)

Рисунок 6.34 – Ілюстрація до задачі 5

1

2

3

5

4

6













**Розв’язання.** Визначимо степені вершин даних графів:

, , , , , , ;

, , , , , , .

Для дослідження графів на ізоморфність потрібно перевірити чотири бієкції.

У будь-якій з бієкцій . Тому, можливі такі відповідності вершин

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

В жодній з цих бієкцій не зберігається суміжність вершин, тому графи не ізоморфні.

**Задача 6.** Довести що графи на рисунку 6.35 ізоморфні.

Рисунок 6.35 – Ілюстрація до задачі 6

























**Розв’язання.** Наприклад, наступна бієкція



між множинами вершин цих графів зберігає суміжність вершин, тому за означенням графи ізоморфні

**Задача 7.** Знайти всі інваріанти даного на рисунку 6.36 графа.

Рисунок 6.36 – Ілюстрація до задачі 7

**Розв’язання.**

1) , 2) , 3) ,

4) , 5) , 6) ,

7) , 8) .

**Задача 8.** Знайти хроматичний многочлен даного графа (рис. 6.37а).

**Розв’язання.** На рисунку а) зображено даний граф. На рисунку б) – граф, отриманий додаванням до даного графа «нового» ребра, на рисунку в) – граф, отриманий стягуванням по цьому ребру. Оскільки обидва останні графа повні, то хроматичний многочлен даного графа має вигляд .

а) б) в)

Рисунок 6.37 – Ілюстрація до задачі 8

=

+

**Задача 9.** Довести, що графи на рисунку 6.38 неізоморфні.

Рисунок 6.38 – Ілюстрація до задачі 9

**Розв’язання.** Кількість вершин і кількість ребер у цих графів однакові. Однакові також вектори степенів вершин, щільності, нещільності. Але вони все ж таки не ізоморфні. Причиною є той факт, що другий граф дводольний, а перший – ні.

**Задача 10.** Зобразити на площині граф, що представляє собою куб так, щоб будь-які два ребра перетиналися тільки у вершині.

Рисунок 6.39 – Куб

**Розв’язання.**

Див. рисунок 6.39.

**Задача 11.** Знайти декартовий добуток графів  і . Чи є цей добуток планарним графом? Якщо так, то знайти кількість граней ізоморфного йому плоского графа.

Рисунок 6.40 – Ілюстрація

до задачі 12

**Задача 12.** Дано граф (рис.6.40). Знайти матрицю Кіркгофа і кількість його остовних дерев. Зобразити 3 остовних дерева.

**Задача 13.** Побудувати хроматичний1 многочлен графа (рис. 6.41).

Рисунок 6.41 – Ілюстрація до задачі 13

**Завдання для самостійного розв’язання**

1. В країні 100 міст, з кожного виходить 4 дороги. Скільки всього доріг в країні?
2. В групі 30 студентів. Чи може бути таке, що 9 з них мають по 3 друга, 11 – по 4 друга, 10 – по 5 друзів?
3. В графі 30 вершин та 80 ребер, кожна вершина має або степінь 5, або 6. Скільки вершин мають степінь 5?

Відповідь. 20

1. В графі кожна вершина має степінь 3, а число ребер знаходиться між 16 та 20. Скільки вершин в графі?

Відповідь. 12

1. Довести, що не існує -однорідного графа з  вершинами при умові, що і , і  непарні.
2. Знайти верхню та нижню межі для кількості ребер будь-якого зв’язного графа.
3. Довести, що будь-який граф з  вершинами, який має більше ніж  ребер, є зв’язним.
4. Довести, що будь-який 3-однорідний граф має парну кількість вершин.
5. Знайти такий зв’язний граф *G* з мінімальним числом *п>1* вершин, щоб граф  теж був зв’язним.
6. Знайти число всіх помічених графів з  вершинами.
7. *Абстрактним графом* називається клас ізоморфних між собою позначених графів. Знайти кількість абстрактних графів з трьома і чотирма вершинами? Скільки серед них зв’язних графів?
8. Знайти всі абстрактні графи з вектором степенів а) (2,2,2,3,3,4), б) (2,2,2,3,3,3).
9. Дано граф (рис. 6.42). У ньому

а) знайти число компонент зв’язності;

Рисунок 6.42 – Ілюстрація

до завдання 13

б) видалити ребро(міст графа) і знайти число компонент отриманого графа;

в) визначити, яке мінімальне число ребер треба видалити, щоб отримати граф з двома компонентами зв’язності? А з трьома?

г) в якому з графів *G* або  більше ребер?

1. Довести, що коли граф має 6 вершин, то або він, або його доповнення містить підграф .
2. Знайти число помічених графів з  вершинами та  ребрами.
3. Побудувати всі можливі дерева з шістьма вершинами.
4. Відновити з точністю до ізоморфізмів графи з максі кодами 538 і 787.
5. Довести, що в будь-якому планарному графі існує вершина, степінь якої не більша п’яти.