

Приклади розв'язання задач до теми «Розв'язання СЛАР».

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 = 28 \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-5) = 13 \neq 0.$$

Знайдемо допоміжні визначники Δ_i шляхом заміни i -го стовпця на стовпець вільних членів

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 28 & 4 \end{vmatrix} = 24 - (-28) = 52, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 28 \end{vmatrix} = 56 - 30 = 26.$$

Отже, за формулами Крамера отримаємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{52}{13} = 4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + (-4) + 12 - (-4) - (-6) - 12 = 0.$$

Знайдемо допоміжні визначники системи

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 10 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -160, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 20, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -60.$$

Оскільки головний визначник системи дорівнює нулю, а серед допоміжних визначників є ненульові, то система розв'язків немає, тобто є несумісною.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 11, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -15. \end{cases}$$

Розв'язання. Для заданої системи

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці системи

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

та алгебраїчні доповнення до елементів матриці A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 36, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 54, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 21.$$

Обернена матриця запишеться у вигляді

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}$$

Застосувавши формулу $X = A^{-1}B$, дістанемо

$$X = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \cdot 11 + 6 \cdot (-2) + 2 \cdot (15) \\ -15 \cdot 11 + (-21) \cdot (-2) + (-7) \cdot (15) \\ 36 \cdot 11 + 54 \cdot (-2) + 21 \cdot (15) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи та приведемо її до східчастого виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -6 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} II + I \\ III \cdot 2 + I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 7 & 9 & -14 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ III \cdot 4 - II \cdot 7 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & 18 \end{array} \right)$$

Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює 3, а кількість змінних системи дорівнює 4, отже система має безліч розв'язків.

Запишемо систему рівнянь, що відповідає отриманій «східчастій» матриці

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ 8x_3 - 7x_4 = 18 \end{cases}$$

Нехай x_4 - незалежна змінна, тоді x_1, x_2, x_3 - залежні змінні

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2 - x_2 - 3x_3 + 2x_4}{-2} = -1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{4} - \frac{1}{8}x_4 \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{7}{8}x_4 \right) - x_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{2 - 4x_3 + 3x_4}{4} = \frac{1}{2} - \left(\frac{9}{4} + \frac{7}{8}x_4 \right) + \frac{3}{4}x_4 = -\frac{7}{4} - \frac{1}{8}x_4 \\ x_3 = \frac{18 + 7x_4}{8} = \frac{9}{4} + \frac{7}{8}x_4 \end{cases}$$

Знайдені значення x_1, x_2, x_3 представимо у вигляді матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x_4 \\ -\frac{7}{4} - \frac{1}{8}x_4 \\ \frac{9}{4} + \frac{7}{8}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix} x_4,$$

Замінюючи x_4 на довільну сталу C , загальний розв'язок системи запишемо у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix} C.$$