

Приклади розв'язування задач до тем 1-2.

Приклад 1. Знайти $2A - 3B^t$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо матрицю B^t помінявши місцями в матриці B відповідні рядки і стовпці $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Далі

$$2A - 3B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 21 & -9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -21 & 7 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Оскільки кількість стовпців матриці дорівнює кількості рядків матриці, то такі матриці можна перемножити, і

$$A_{1 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 8 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -1 \end{pmatrix}_{1 \times 3}$$

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник за правилом трикутника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 6 + 9 \cdot 0 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 - 9 \cdot (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 0 =$$
$$= -6 + 0 - 12 - 18 - 8 - 0 = -44$$

Приклад 4. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник, розкладаючи його по елементам першого стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 = 1 \cdot 12 + 3 \cdot (-18) = -42$$

Приклад 5. Знайти таку матрицю X , що задовольняє рівнянню $X \cdot A = B$

$$, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Помножимо рівність $X \cdot A = B$ справа на A^{-1} , тобто $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. Тоді $X = B \cdot A^{-1}$. Знайдемо матрицю A^{-1} , що є оберненою до матриці A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-6) = 8, A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Запишемо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 16 & 0 \\ -6 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$