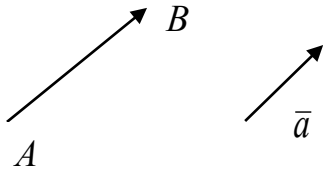


Розділ 2. Векторна алгебра

Тема 5. Вектори. Операції над векторами

Вектором називається напрямлений відрізок. Позначається: $\overline{AB}$ або $\vec{a}$.



Довжина відрізка називається довжиною вектора (або модулем вектора) і позначається $|\overline{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одичним*.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називається *нульовим*, він не має напрямлення, його довжина дорівнює нулю.

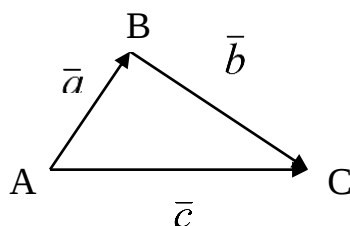
Два або більше векторів називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Три або більше векторів називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Лінійні операції над векторами

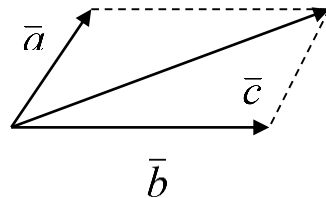
1. Додавання і віднімання векторів.

а) правило трикутника (застосовується в тому випадку, коли початок другого вектора співпадає з кінцем першого вектора): сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який з'єднує початок першого вектора $\vec{a}$ з кінцем другого вектора $\vec{b}$.



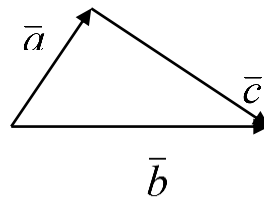
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

б) правило паралелограма (застосовується в тому випадку, коли два вектори мають спільний початок): сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, яка виходить зі спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Звідси випливає правило побудови різниці: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок, тоді різницею цих векторів буде вектор, який з'єднує їх кінці і напрямлений в бік вектора, від якого віднімають.

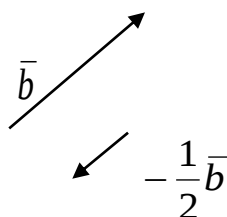
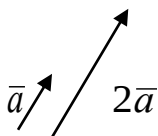


$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$$

2) Добуток вектора на число (або числа на вектор)

Добутком вектора $\vec{a}$ та дійсного числа k (або дійсного числа k на вектор $\vec{a}$) називають вектор $k\vec{a}$, який

- колінеарний до вектора $\vec{a}$,
- співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $k > 0$, протилежнонапрямлений з $\vec{a}$, якщо $k < 0$, нульовий, якщо $k = 0$,
- має довжину $|k| \cdot |\vec{a}|$.



Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує таке дійсне число k , що має місце рівність $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Поняття базису та координат вектора

Розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Якщо існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля і виконується рівність $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$, то розглянута система векторів називається *лінійно залежною*. Якщо остання рівність можлива тільки тоді, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дорівнюють нулю, то система векторів називається *лінійно незалежною*.

Вектори будуть *лінійно залежними*, якщо хоча б один з них можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n.$$

1. Один вектор в системі завжди лінійно незалежний, якщо є ненульовим.
2. Два вектори лінійно залежні, якщо вони колінеарні, і незалежні, якщо не колінеарні.
3. Три вектори лінійно залежні, якщо вони компланарні, і лінійно незалежні, якщо не компланарні.

Базисом називається така впорядкована сукупність векторів, яка задовольняє умовам:

1. система повинна бути лінійно незалежною.
2. будь-який інший вектор можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів даної сукупності.

Базис площини складається з будь-яких двох не колінеарних векторів.

Базис простору складається з будь-яких трьох не компланарних векторів.

Розглянемо базис $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. За означенням базису, будь-який вектор можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{d} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c}.$$

Остання рівність називається розкладом вектора $\bar{d}$ по базису $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, числа α, β, γ називаються координатами вектора $\bar{d}$ в цьому базисі.

Базис називається *ортонормованим*, якщо вектори базису – орти (попарно ортогональні (лежать на перпендикулярних прямих) та довжина кожного з них дорівнює одиниці). Для ортонормованого базису прийняте позначення $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Ортонормований базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ називається *правим* або *додатно-орієнтованим*, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого до другого вектора видно проти годинникової стрілки. Якщо цей поворот здійснюється за годинниковою стрілкою, то базис називається *лівим*.

Ортонормований базис визначає декартову систему координат. Нехай точка O – початок декартової системи координат. Будь-який вектор з початком в точці O і кінцем M називається *радіус-вектором точки M* . Координати точки M відносно декартової системи координат дорівнюють координатам її радіус-вектора в базисі $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, тобто якщо $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, то $M(x, y, z)$.

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора, то для знаходження координат самого вектора $\overline{AB}$ треба від координат кінця відняти відповідні координати початку, тобто

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Якщо існує таке дійсне число k , що має місце рівність $\bar{b} = k \cdot \bar{a}$, то вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні. Нехай відомі координати цих векторів: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тоді умовою колінеарності векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ буде пропорційність їх відповідних координат:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Приклад 5.1. Перевірити, чи є колінеарними вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A(1,-3,2)$, $B(2,-5,6)$, $C(4,0,7)$, $D(1,6,19)$.

Знайдемо координати векторів

$$\overline{AB} = (2 - 1, -5 - (-3), 6 - 2) = (1, -2, 4),$$

$$\overline{CD} = (1 - 4, 6 - 0, 19 - 7) = (-3, 6, 12).$$

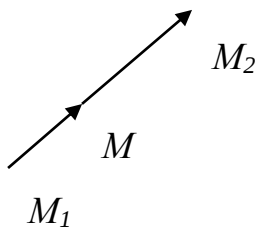
Запишемо відношення відповідних координат

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{4}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}.$$

Координати непропорційні, отже вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ не є колінеарними.

Ділення відрізка в даному відношенні

Нехай маємо дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайти таку точку $M(x, y, z)$, яка належить прямій M_1M_2 та ділить його в даному відношенні α .



$$\frac{M_1M}{MM_2} = \alpha.$$

Формули для координат точки M мають вигляд

$$x = \frac{x_1 + \alpha x_2}{1 + \alpha}, \quad y = \frac{y_1 + \alpha y_2}{1 + \alpha}, \quad z = \frac{z_1 + \alpha z_2}{1 + \alpha},$$

якщо $\alpha \neq -1$.

Приклад 5.2. Знайти координати точки M , яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні 2:3, якщо $M_1 = (-1, 0, 5)$, $M_2 = (-1, -5, 0)$.

$$x = \frac{-1 + \frac{2}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{2}{3}} = -1, \quad y = \frac{0 + \frac{2}{3} \cdot (-5)}{1 + \frac{2}{3}} = -2, \quad z = \frac{5 + \frac{2}{3} \cdot 0}{1 + \frac{2}{3}} = 3.$$

Отримали точку $M(-1, -2, 3)$.