

Тема 6. Нелінійні операції над векторами.

Скалярний добуток та його властивості.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів та косинуса кута між ними

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (6.1)$$

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Властивості скалярного добутку.

1. Комутативна властивість множення:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}).$$

2. Асоціативна властивість відносно множення на число:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}).$$

3. Дистрибутивна властивість відносно додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$$

4. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори ортогональні

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

5. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Якщо задано два вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (6.2)$$

Тоді:

1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ є рівність

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

2. Довжина вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ визначається так

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

3. Кут між векторами $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (6.3)$$

Векторний добуток векторів.

Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$ який:

1. довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi$;
2. вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;
3. вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку.

Позначають векторний добуток одним з символів $\bar{a} \times \bar{b}$ і $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Властивості векторного добутку.

1. Антикомутативність множення:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}].$$

2. Асоціативність відносно множення на число:

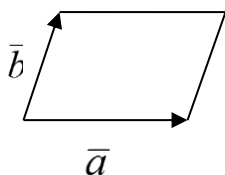
$$[\lambda \bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda \bar{b}] = \lambda [\bar{a}, \bar{b}].$$

3. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}].$$

4. Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.

5. Модуль векторного добутку не колінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах



$$S = |[\bar{a}, \bar{b}]| \quad (6.4)$$

Якщо задано два вектори $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то їх векторний добуток визначається за формулою:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Приклад 6.1. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1,2,0)$, $B(0,-2,1)$, $C(-1,0,2)$.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Отже,

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 0\bar{j} - 6\bar{k} = (-6, 0, -6)$$

$$\text{Тоді } S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{72} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Мішаний добуток векторів.

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається скалярний добуток векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$$

Властивості мішаного добутку.

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями два вектори, то мішаний добуток змінить знак:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$$

2. При циклічній перестановці векторів мішаний добуток не змінюється:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$$

3. Асоціативність відносно множення на число:

$$(\lambda \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \lambda \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \lambda \bar{c}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$$

4. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}) + (\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}).$$

5. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V_{\text{пар}} = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|. \quad (6.6)$$

Об'єм тетраедра (піраміди), побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ дорівнює $\frac{1}{6}$ модуля мішаного добутку цих векторів:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|. \quad (6.7)$$

6. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Якщо вектори $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ задані своїми координатами, то мішаний добуток обчислюється за формулою

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (6.8)$$

Приклад 6.2. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = (2, 4, -1)$, $\bar{b} = (3, 0, 5)$, $\bar{c} = (-4, 1, 3)$.

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 3 - 80 - 0 - 10 - 36 = -129$$

$$V = |-129| = 129 \text{ кв.од.}$$