

Приклади розв'язання задач до теми «Векторна алгебра».

Приклад 1. Знайти $(\bar{a}, \bar{b})$, якщо $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. За формулою (6.1) маємо

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Приклад 2. Знайти $(\bar{a}, \bar{b})$, якщо $\bar{a} = (4, -3, 1), \bar{b} = (5, 2, -1)$

Розв'язання. За формулою (6.2)

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 13.$$

Приклад 3. Показати, що вектори $\bar{a} = (4, -3, 1), \bar{b} = (2, 1, -5)$ ортогональні.

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток векторів

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0.$$

Оскільки $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, то за властивістю 4 скалярного добутку вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні.

Приклад 4. Знайти кут φ між векторами $\bar{a} = (4, -3, 0), \bar{b} = (2, 1, 2)$.

Розв'язання. Знайдемо з формули (6.3)

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{25} \sqrt{9}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Приклад 5. Визначити кут при вершині A в трикутнику ABC , якщо $A(5, 1, -4), B(9, -8, -3), C(16, -6, -11)$

Розв'язання. Знайдемо $\overline{AB} = (4, -9, 1)$ і $\overline{AC} = (11, -7, -7)$. Тоді за формулою (6.3)

$$\cos \angle A = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{4 \cdot 11 + (-9) \cdot (-7) + 1 \cdot (-7)}{\sqrt{4^2 + (-9)^2 + 1^2} \sqrt{11^2 + (-7)^2 + (-7)^2}} = \frac{100}{\sqrt{98} \sqrt{219}} \approx 0,682,$$

звідки $\angle A \approx 47^\circ$.

Приклад 6. Знайти векторний добуток $[\bar{a}, \bar{b}]$, якщо $\bar{a} = (2, -3, 1)$,
 $\bar{b} = (1, -4, 2)$.

Розв'язання. За формулою (6.5) маємо

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - 3\bar{j} - 5\bar{k}.$$

Отже, $[\bar{a}, \bar{b}] = (-2, -3, -5)$.

Приклад 7. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах
 $\bar{a} = (3, -1, 2)$ і $\bar{b} = (1, 2, -1)$.

Розв'язання. За формулою (6.4) шукана площа паралелограма дорівнює
 $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$. Знайдемо

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}.$$

Тоді $S = |[\bar{a}, \bar{b}]| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (кв.од.)

Приклад 8. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1, 2, 0)$,
 $B(0, -2, 1)$, $C(-1, 0, 2)$. Обчислити довжину висоти CD .

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі
 паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Знаходимо $\overline{AB} = (-1, -4, 1)$,
 $\overline{AC} = (-2, -2, 2)$ та їх векторний добуток

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6\bar{i} + 0\bar{j} - 6\bar{k}.$$

Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{2}$ (кв.од.)

З іншого боку $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|$. Звідси

$$CD = |\overline{CD}| = \frac{2S_{ABC}}{|\overline{AB}|} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 2.$$

Приклад 9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, -4, 2)$ і $\vec{c} = (4, 0, 5)$.

Розв'язання. Мішаний добуток знайдемо за формулою (6.8)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -40 + (-24) - (-16) - (-15) = -33.$$

Приклад 10. Довести, що точки $A(0, 1, 2)$, $B(-2, 0, 1)$, $C(-1, 5, 8)$, $D(1, 6, 11)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$ компланарні. За властивістю 6 мішаного добутку вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю. Знайдемо координати векторів $\overline{AB} = (-2, -1, -1)$, $\overline{AC} = (-1, 4, 6)$ і $\overline{AD} = (1, 5, 9)$ та їх мішаний добуток

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, точки A, B, C, D лежать в одній площині.