

Тема 9. Площина та пряма у просторі

Рівняння площини в просторі.

1) Загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (9.1)$$

У прямокутній декартовій системі координат площина (9.1) перпендикулярна вектору $\bar{n} = (A, B, C)$, який називається *нормальним вектором* площини.

2) Рівняння площини за точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та нормальним вектором $\bar{n} = (A, B, C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0. \quad (9.2)$$

3) Рівняння площини за трьома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.3)$$

Взаємне розташування двох площин в просторі.

Нехай дві площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Нормальні вектори цих площин будуть мати координати $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ відповідно. Тоді один з кутів між прямими знаходиться за формулою

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (9.4)$$

Умова перпендикулярності площин:

якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, отже, $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$, або

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (9.5)$$

Умова паралельності площин:

якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то їх нормальні вектори також паралельні, а значить їх координати пропорційні. Отже,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (9.6)$$

(при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ площини паралельні, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

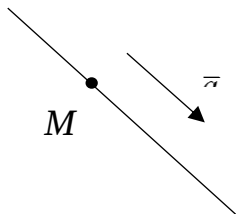
площини співпадають)

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (9.7)$$

Рівняння прямої в просторі

1) Рівняння прямої за точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{a} = (m, n, p)$



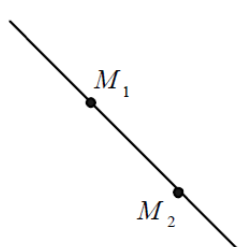
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (9.8)$$

Рівняння (9.8) називають *канонічними рівняннями* прямої у просторі.

У *параметричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (9.9)$$

2) Рівняння прямої за двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_3)$



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (9.10)$$

Пряма в просторі може бути задана як лінія перетину двох площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Загальними рівняннями цієї прямої називаються рівняння

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (9.11)$$

В цьому випадку напрямний вектор прямої дорівнює векторному добутку векторів $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

$$\bar{a} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad (9.12)$$

Кут між прямими $l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ і $l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$

знаходиться як кут між їх напрямними векторами $\bar{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}_1, \bar{a}_2)}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (9.13)$$

Кут між прямою та площиною $l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ та площиною

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою

$$\sin \phi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (9.14)$$